

Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck¹

Jean-Pierre Serre (1965)²

Le présent rapport est limité à trois thèmes: evt, Riemann-Roch, schémas. Pour aller plus vite, j'ai laissé de côté les travaux de géométrie algébrique [?], [?]-[?] et d'algèbre homologique [?]-[?]; il me faut tout de même mentionner la grande influence qu'a eu [?] sur le développement de la théorie.

1. EVT (Espaces Vectoriels Topologiques) – période: 1952-1955

L'une des idées directrices³ de Grothendieck dans ce domaine a été d'"expliquer" les phénomènes d'evt rencontrés par L. Schwartz en théorie des Distributions. Dans le travail [?], il montre que la catégorie des (LF) , introduite par Dieudonné-Schwartz, possède quantité de propriétés pathologiques; parmi les résultats positifs qu'il obtient, on peut citer le théorème disant que le bidual d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet (ce n'est nullement trivial), et l'introduction de deux nouveaux types d'espaces, les espaces (DF) et les espaces "de Schwartz".

C'est dans la thèse [?] que sont faits les progrès décisifs. Il y définit deux produits tensoriels complétés $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$ et $E \widehat{\otimes}_\pi F$ d'evt E et F . Ces deux produits tensoriels, distincts en général, coïncident lorsque E appartient à une nouvelle caté-

²Editor's note (June 1989): Professor Serre was a member of the Fields Committee in 1952-1966. The current article is his original report of 1965 to the committee concerning the work of A. Grothendieck.

³Cette première partie du rapport a été rédigée avec l'aide de J. Dieudonné.

gorie d'evt, celle des *espaces nucléaires*. Il montre que cette catégorie possède des propriétés de stabilité remarquables. De plus la plupart des espaces fonctionnels que l'on rencontre en théorie des distributions son nucléaires; ce fait constitue une forme particulièrement commode du “théorème des noyaux” de Schwartz.

Parmi les idées nouvelles introduites par Grothendieck en théorie des evt, on peut citer:

- (a) La technique des espaces de Banach E_V et E_A associés à un evt E et à un voisinage de 0 convexe V (resp. à une partie bornée convexe A) de E .
- (b) L'utilisation des espaces L^p et $C(K)$ dans la théorie générale des evt (notamment pour l'étude des applications intégrales ou nucléaires).
- (c) L'application des produits tensoriels complétés à une “formule de Künneth” vectorielle-topologique (cf. séminaire Schwartz 53-54, séminaire consacré d'ailleurs entièrement à la thèse de Grothendieck). Cette formule permet de ramener certains problèmes de dimension > 1 à ceux de dimension 1. Cette technique a été utilisée par Grothendieck lui-même (trivialité de la d'' -cohomologie locale) et par R. Bott (Annals, 1957)
- (d) Les résultats “fins” de la théorie métrique des produits tensoriels d'espaces de Banach, exposés dans [?].

2. Le théorème de Riemann-Roch – période: 1957

En 1957, on connaissait (depuis déjà quelques années) un “théorème de Riemann-Roch” pour les variétés

REFERENCES

- [1] ARTIN, M., GROTHENDIECK, A., J.L. VERDIER — *Cohomology étale des schémas*, Sémin. Géom. Alg. IHES, 1963-64 (SGA 4), à paraître dans North Holland Pub. Cie.