FACULTE DES SCIENCES D'ALGER
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

SEMINAIRES 1965 – 1966

Introduction au Langage Fonctoriel

Rédigé d'après un cours de Monsieur A. Grothendieck.

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

`https://agrothendieck.github.io/`

TABLE DE MATIÈRES

Ce fascicule contient une rédaction succincte d'une série d'exposés que Monsieur A. Grothendieck a bien voulu venir faire à Alger au cours du mois de Novembre 1965. Il a pour but de familiariser un débutant avec les éléments du langage fonctoriel, langage qui sera utilisé par la suite dans les divers séminaires : Algèbre Homologique dans las catégories abéliennes, Fondement de la K-théorie…

Les propositions non démontrées sont de deux types : des sorites dont la démonstration tiendra lieu d'exercices, des propositions moins évidentes (signalés par une astérisque) dont on trouvera les démonstrations dans les ouvrages de références.

§ 0. — CADRE LOGIQUE

Lorsque l'on définit une catégorie, il y a des inconvénients à supposer que les forment une classe, au sens de la théorie des ensembles de Gödel-Bernays. En effet, si l'on sait définir les applications d'une classe dans une autre, ces applications ne forment cependant pas elles-mêmes une classe. En particulier on ne saurait parler de la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre. Aussi se placera-on dans le cadre de la théorie des ensembles de Bourbaki pour définir les *Univers*.

Univers :

On appelle *univers* un ensemble $\mathfrak{U}$ vérifiant les axiomes suivants :

U_1 Si Y appartient à X et si X appartient à $\mathfrak{U}$, alors Y appartient à $\mathfrak{U}$.

U_2 Si X et Y sont des éléments de $\mathfrak{U}$ alors $\{X, Y\}$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

U_3 Si X est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des parties de X est un élément de $\mathfrak{U}$.

U_4 Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles appartenant à $\mathfrak{U}$, et si I est un élément de $\mathfrak{U}$, alors $\bigcup_{i\in I} X_i$ appartient à $\mathfrak{U}$.

On déduit de ces axiomes les propositions suivantes :

(1) Si X est un élément de $\mathfrak{U}$, $\{X\}$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

(2) X et Y sont des éléments de $\mathfrak{U}$ si et seulement si le couple[1] (X, Y) est un élément de $\mathfrak{U}$.

(3) L'ensemble vide est un élément de $\mathfrak{U}$ (puisque c'est un élément de $\mathfrak{P}(X)$ pour tout ensemble X de l'univers $\mathfrak{U}$).

(4) Si Y est contenu dans X et si X appartient à $\mathfrak{U}$ alors Y appartient à $\mathfrak{U}$.

(5) Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles de $\mathfrak{U}$ et si I appartient à $\mathfrak{U}$, alors $\prod_{i \in I} X_i$ appartient à $\mathfrak{U}$.

(6) Si X est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathfrak{U})$.

(7) L'univers $\mathfrak{U}$ n'est pas un élément de $\mathfrak{U}$. En effet si $\mathfrak{U}$ appartient à $\mathfrak{U}$, alors $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$ appartient à $\mathfrak{U}$. Soit E appartenant à $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$ (donc E appartient à $\mathfrak{U}$) défini ainsi:

$E = \{X \in \mathfrak{U} | X \notin X\}$

On aurait alors : E appartient à E si et seulement si E n'appartient pas à E !

(8) L'intersection d'une famille quelconque d'univers est un univers. En particulier si E est un ensemble et s'il existe un univers contenant E, alors il existe un plus petit univers contenant E qu'on appelle l'univers engendré par E.

Si E_0 est un ensemble quelconque, on se propose de chercher s'il existe un plus petit univers $\mathfrak{U}$ contenant E_0. Il apparaît naturel de plonger E_0 dans un ensemble E_1 par le procédé suivant :

Soit G_0 l'ensemble ainsi défini : $X \in G_0 \iff (\exists Y)(Y \in E_0 \text{ et } X \in Y)$ et $F_1 = E_0 \cup G_0$

Soit G_1 : $X \in G_1 \iff (\exists Y)(\exists Z)(Y \in F_1, Z \in F_1 \text{ et } X = \{Y, Z\})$ et $F_2 = F_1 \cup G_1$

Soit $G_2 : X \in G_2 \iff (\exists Y)(Y \in F_2 \text{ et } X = \mathfrak{P}(Y))$ et $F_3 = F_2 \cup G_2$

Soit $G_3 : X \in G \iff (\exists I)(\exists (X_i)_{i \in I})(I \in F_3, \forall i \in I, X_i \in F_3 \text{ et } X = \bigcup_{i \in I} X_i)$ et $F_4 = F_3 \cup G_3$.

[1] On rappelle que le couple (X, Y) est l'ensemble $\{X, \{X, Y\}\}$

On pose alors $E_1 = F_4 \cup \{E_0\}$

En itérant cette opération e¿on forme une suite transfinie d'ensembles :

$$E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_\alpha \subset E_{\alpha+1} \subset \ldots$$

Pour qu'il existe un plus petit univers contenant E_0, il faut et il suffit que cette suite devienne stationnaire ‘partir d'un certain rang (c'est-à-dire qu'il existe α tel que $E_{\alpha+1} = E_\alpha$) E_α sera précisément l'univers $\mathfrak{U}$ recherché.

En particulier si l'on prend $E_0 = \varnothing$, on montre que $\mathfrak{U} = E_\omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Lorsqu'on part d'un ensemble E_0 infini, on ne peut prouver l'existence d'un univers $\mathfrak{U}$ contenant E_0. Il convient donc d'ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome suivant :

(a_1) **Axiome des univers** :

Pour tout ensemble X, il existe un univers $\mathfrak{U}$, tel que X soit élément de $\mathfrak{U}$.

De plus comme on ne souhaite pas sortir d'un univers $\mathfrak{U}$ par l'usage du symbole τ de Hilbert on introduit l'axiome supplémentaire :

(a_2) Si R est une relation, x une lettre figurant dans R, et s'il existe un élément X d'un univers $\mathfrak{U}$ tel que $(X|x)R$ soit vrai alors l'objet $\tau_x(R(x))$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

§ I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES CATÉGORIES

1. Type de diagramme

1.1 Définition

Un *type de diagramme* D est la donnée d'un quadruple $D = (\mathrm{Fl}, \mathrm{Ob}, s, b)$ où :

Fl et Ob sont des ensembles respectivement appelés ensemble des *flèches* (ou des morphismes…), ensemble des *objets* (ou des sommets)

s et b sont des applications de Fl dans Ob respectivement appelés *source*, *but*.

Un type de diagrammes sera souvent noté : [ ]

Exemples : On peut représenter certains types de diagramme :

$$\bullet \quad \text{1 seul objet;} \quad \bullet\bullet\bullet \quad \text{(pas des flèches)}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

1.2 Morphisme d'un type de diagrammes dans une autre :

Si $D = (\mathrm{Fl}_D, \mathrm{Ob}_D, s_D, b_D)$ et $D' = (\mathrm{Fl}_{D'}, \mathrm{Ob}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$ sont deux types de diagramme, un *morphisme F de D dans D'* est un couple d'applications $F = (F_0, F_1)$: $F_0 : \mathrm{Ob}_D \longrightarrow \mathrm{Ob}_{D'}$, $F_1 : \mathrm{Fl}_D \longrightarrow \mathrm{Fl}_D$, tel que les diagrammes suivants commutent

:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fl}_D & \xrightarrow{F_1} & \mathrm{Fl}_{D'} \\ {\scriptstyle s_D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_{D'}} \\ \mathrm{Ob}_D & \xrightarrow[F_0]{} & \mathrm{Ob}_{D'} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Fl}_D & \xrightarrow{F_1} & \mathrm{Fl}_{D'} \\ {\scriptstyle b_D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b_{D'}} \\ \mathrm{Ob}_D & \xrightarrow[F_0]{} & \mathrm{Ob}_{D'} \end{array}$$

si D'' est un troisième type de diagrammes et $F' = (F'_0, F'_1)$ un morphisme de D' dans D'', on définit le *composé* des morphismes F et F', c'est le morphisme $F'' = (F''_0, F''_1)$ de D dans D'' ou $F''_0 = F'_0 F_0$, $F''_1 = F'_1 F_1$. Le morphisme noté $1_D = (1_{\mathrm{Fl}_D}, 1_{\mathrm{Ob}_D})$ de D sur D est le *morphisme identique de* D.

1.3 Sous-type de diagramme d'un type de diagrammes.

Soit $D = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, s_D, b_D)$ un type de diagrammes. On dit que $D' = (\mathrm{Ob}_{D'}, \mathrm{Fl}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$ est un *sous-type de diagrammes* de D si $\mathrm{Ob}_{D'}$ est inclus dans Ob_D, $\mathrm{Fl}_{D'}$ est inclus dans Fl_D et si $s_{D'}$ (respectivement $b_{D'}$) est la restriction à $\mathrm{Fl}_{D'}$ de s_D (respectivement b_D).

1.4. Si $D = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, s_D, b_D)$ est un type de diagrammes le type de diagramme noté $D^\circ = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, b_D, s_D)$ est appelé type de *diagrammes opposé de* D.

Un *morphisme contravariant de types de diagrammes* de D dans D' est un morphisme de type de diagramme de D° dans D'

2. Catégorie

Définition **(2.1)**. — Une catégorie C est la donnée :

(i) d'un *type de diagramme* $(\mathrm{Fl}, \mathrm{Ob}, s, b)$ appelé type de diagramme sous-jacent à C, noté $(\mathrm{Fl}_C, \mathrm{Ob}_C, s_C, b_C)$

(ii) d'une *application* du produit fibré $(\mathrm{Fl}_C, b_C) \times_{\mathrm{Ob}_C} (\mathrm{Fl}_C, s_C)$ dans Fl_C, appelé loi de composition des flèches, notée $\mu_C : (f, g) \longrightarrow g \circ f = gf$ et *vérifiant les propriétés* :

(a) $(gf)h = g(fh)$ pour tous les éléments f, g, h de Fl_C tels que cette écriture ait un sens.

(aa) pour tout objet X il existe une flèche 1_X telle que $s_C(1_X) = b_C(1_X) = X$, appelée *flèche identique* de X vérifiant $1_X f = f$, $f 1_X = f$ pour toute flèche f telle que cette écriture ait un sens.

On remarque que pour tout objet X, la flèche 1_X est unique.

Notations. Chaque fois que l'on écrit gf, il est entendu que la composition a un sens, c'est-à-dire que $b(f) = s(g)$.

Si X et Y sont deux objets d'un type de diagramme D (resp. d'une catégorie C), l'ensemble des flèches de source X, de but Y est noté $\mathrm{Hom}_D(X, Y)$ ou $\mathrm{Fl}_D(X, Y)$ (resp. $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$...)

Une flèche de source X et de but Y est aussi notée $f : X \longrightarrow Y$.

2.2 Foncteurs.

Soient C et C' deux catégories dont D et D' sont respectivement les types de diagrammes sous-jacents. Un *foncteur* de C dans C' est un *morphisme* $F = (F_0, F_1)$ du type de diagramme D dans le type de diagramme D', *compatible* avec la composition des flèches, c'est-à-dire tel que $F_1(fg) = F_1(f)F_1(g)$.

Pour tout X, $F_1(1_X)$ est alors la flèche identique de $F_0(X)$. Si C'' est une troisième catégorie de type de diagramme D'', F' un foncteur de C' dans C'', le *foncteur composé* des foncteurs F et F', $F'' = F'F$ est le composé des morphismes de type de diagramme sous-jacent **1.2**. On vérifie que F'' est compatible avec la composition des flèches. Pour tout catégorie C, de type de diagramme D, on définie un *foncteur identique* $1_C = 1_D$.

2.3. Soit C une catégorie de type de diagramme sous-jacent D. La *catégorie opposée* de C, notée C°, est la catégorie de type de diagramme D°, et dont la loi de composition des flèches μ_{C° est définie par $\mu_{C^\circ}(f, g) = \mu_C(g, f)$.

On remarque que $C^{\circ\circ} = C$.

Un *foncteur contravariant* de C dans C' on lui associe canoniquement un foncteur F° de C° dans C'°:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & C^\circ \arrow[d, "F^\circ"] \\ C' \arrow[r] & C'^\circ \end{tikzcd}$$

On remarque que $(FG)^\circ = F^\circ G^\circ$, $1_C^\circ = 1_{C^\circ}$, $F^{\circ\circ} = F$

2.4 Monomorphisme - Epimorphisme.

2.4.1. On dit qu'une flèche $f : X \longrightarrow Y$ d'une catégorie C est un *monomorphisme* si pour tout objet T de C l'application naturelle qui à $u : T \longrightarrow X$, fait correspondre fu de $\mathrm{Hom}(T,X)$ dans $\mathrm{Hom}(T,Y)$ est *injective*. Une flèche $f : X \longrightarrow Y$ d'une catégorie C est un *épimorphisme* si f est un monomorphisme en tant que flèche de C° ou, ce qui est équivalent, si pour tout objet T de C l'application naturelle de $\mathrm{Hom}(Y,T)$ dans $\mathrm{Hom}(X,T)$ est *injective*.

Une flèche est un *bimorphisme* si c'est un monomorphisme et un épimorphisme.

2.4.2. Une flèche f de C est inversible à gauche (ou *rétractable*) s'il existe une flèche $g : b(f) \longrightarrow s(f)$ telle que $gf = 1_{s(f)}$; g est une *rétraction* de f.

Une flèche f de C est *inversible à droite* (ou *sectionnable*) s'il existe une flèche $g : b(f) \longrightarrow s(f)$ telle que $fg = 1_{b(f)}$; g est une *section* de f.

Une flèche rétractable et sectionnable est appelée un *isomorphisme*, il existe alors un $g : b(f) \longrightarrow s(f)$ unique tel que $fg = 1_{b(f)}$ et $gf = 1_{s(f)}$, g est *l'inverse* de f.

2.4.3. Une flèche rétractable est un monomorphisme. Une flèche sectionnable est un épimorphisme. Donc un isomorphisme est un bimorphisme. Les réciproques sont *fausses*.

2.5 Sous-objet, objet quotient.

Soit X un objet quelconque d'une catégorie C, on définit sur l'ensemble des monomorphismes de but X une *relation* de *préordre*: $i \leq i'$ si et seulement si ii' se factorise par i c'est-à-dire si et seulement si il existe un morphisme u tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "i"] & & X \\ & B' \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire tel que $i' = i\,u$.

On remarque que u est un monomorphisme, et est déterminé de façon unique. On considère la relation d'équivalence associée à cette relation de préordre. Dans chaque classe d'équivalence on choisit (par exemple grâce au symbole τ) un monomorphisme que l'on appelle *sous objet de* X. Par abus du langage on appellera aussi sous-objet de X la source d'un tel monomorphisme. On notera (B, i) un sous objet de X, ou simplement B. La relation de préordre ci-dessus induit donc une relation d'ordre sur l'ensemble des sous objets de X. Si B, B' sont deux sous objets de X, la borné inférieure (resp. la borne supérieure) lorsqu'elle existe, est notée $B \wedge B'$ (resp. $B \vee B'$). Par exemple, dans la catégorie des ensembles, notée Ens, $B \wedge B' = B \cap B'$, $B \vee B' = B \cup B'$.

Dualement on définit les *objets quotients* d'un objet X, et une relation d'ordre sur leur ensemble.

2.6 Sous catégorie d'une catégorie.

Soit C une catégorie de type de diagramme sous-jacent D, on dit que C', de type de diagramme D' est une *sous catégorie* si D' est un sous-type de diagramme de D et si de plus $\mu_{C'}$ (loi de composition des flèches dans C') est la restriction de μ_C au produit fibre $(\mathrm{Fl}_{C'}, b_{C'}) \times_{\mathrm{Ob}_{C'}} (\mathrm{Fl}_{C'}, s_{C'})$.

On remarque que pour tout couple X, Y d'objets de C' on a : $\mathrm{Fl}_{C'}(X, Y) \subset \mathrm{Fl}_C(X, Y)$. Si de plus on a l'égalité on dit que C' est une *sous-catégorie pleine* de C.

3. Exemples de catégories

3.1. Soit une catégorie dont l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, alors l'ensemble des flèches se trouve naturellement muni d'une structure de monoïde unitaire. Soit M une telle catégorie, C une catégorie quelconque, un foncteur $F = (F_0, F_1)$ de M dans C est essentiellement un homomorphisme de monoïde de Fl_M dans $\mathrm{Hom}(X,X)$, où X est l'image par F_0 de l'unique objet de M. On appelle *groupoïde* une catégorie dans laquelle toute flèche est inversible ; si de plus l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, l'ensemble des flèches est muni alors d'une structure de groupe.

3.2.. Soit I un ensemble préordonné, on appelle *catégorie associée* à I, la catégorie notée $\mathrm{Cat}(I)$, dont l'ensemble des objets est I, et dont l'ensemble des flèches est le graphe de la relation de préordre ; si (i,j) est une flèche $s(i,j)=j$, $b(i,j)=i$, la composition des flèches se définit évidemment par $(i,j)(j,k)=(i,k)(i,i)$ est la flèche identité de i. Les propriétés (a) et (a a) se vérifient immédiatement.

Inversement, pour toute catégorie C on peut définir sur $\mathrm{Ob}\, C$ une relation de préordre, à savoir : $X \leq Y \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_C(X,Y) \neq \varnothing$. Une catégorie C est isomorphe à une catégorie $\mathrm{Cat}(I)$ si et seulement si toute flèche de $\mathrm{Fl}\, C$ est un monomorphisme. Il suffit de prendre $I = \mathrm{Ob}\, C$ muni de la relation de préordre précédente.

3.3 Catégories de types de diagramme, catégories de catégories.

Dans cette section, on choisit une fois pour toute un univers $\mathfrak{U}$, et tous les ensembles utilisés sont des éléments de $\mathfrak{U}$.

Soit l'ensemble des “types de diagramme dans $\mathfrak{U}$”, notée $\mathrm{Diag}_{\mathfrak{U}}$, (resp. l'ensemble des “catégories dans $\mathfrak{U}$”, noté $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$) c'est-à-dire des types de diagramme D (resp. des catégories C) tels que les ensembles Ob_D, Fl_D (resp. Ob_C, Fl_C) soient des *éléments de* $\mathfrak{U}$. En considérant **1.2** (resp. **2.2**) on définit la *catégorie des types de diagramme* dans $\mathfrak{U}$ notée $\mathrm{Diag}_{\mathfrak{U}}$ (resp. *la catégorie des catégories dans* $\mathfrak{U}$ *notée* $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$).

Explicitons par exemple $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$, le type de diagramme est le suivant : l'ensemble des objets est $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$, l'ensemble des flèches est l'ensemble des triples (F,C,C') où F est un foncteur de la catégorie C dans la catégorie C', $s(F,C,C')=C$, $b(F,C,C')=C'$. La loi de composition des flèches est la compositions des foncteurs définie en **2.2**. On vérifie les propriétés (a) et (aa).

3.4 Catégorie des morphismes de type de diagramme d'un type de diagramme dans une catégorie, catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre.

Soient $D=(\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, s_D, b_D)$ un type de diagramme et C' une catégorie de type de diagramme sous-jacent $(\mathrm{Ob}_{C'}, \mathrm{Fl}_{C'}, s_{C'}, b_{C'})$. Un morphisme de type de diagramme D dans C' est aussi appelé *diagramme de type D dans C'*.

On considère l'ensemble des morphismes de type de diagramme de D dans C' noté $\mathrm{Diag}(D, C')$. Soient $F = (F_0, F_1)$, $G = (G_0, G_1)$ deux morphismes de type de diagramme de D dans C'. Une *flèche* de *source* F de *but* G est une application u de Ob_D dans $\mathrm{Fl}_{C'}$ ($u(x)$ sera souvent noté u_X) telle que pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de D, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_0(X) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "u(X)"'] & F_0(Y) \arrow[d, "u(Y)"] \\ G_0(X) \arrow[r, "G_1(f)"'] & G_0(X) \end{tikzcd}$$

Si u et v sont deux flèches, $u : F \longrightarrow G$, $v : G \longrightarrow H$, *la flèche composée $vu : F \longrightarrow H$* est définie $vu(X) = v(X)u(X)$ pour tout X de Ob_D.

La flèche identique de F notée 1_F est définie par $1_F(X) = 1_{F_0}(X)$ pour tout X de Ob_D. On vérifie les propriétés (a) et (a a). On a alors défini la *catégorie des morphismes de type de diagramme de D dans C'*, encore appelée catégorie des *diagrammes de type D dans C'* et notée $\mathrm{Diag}(D, C')$.

Si C et C' sont deux catégories de types de diagrammes sous-jacents D et D', on défini également *la catégorie des foncteurs de C dans C'* notée $\mathrm{Hom}(C, C')$.

C'est par définition une *sous-catégorie pleine* de $\mathrm{Diag}(D, C')$.

3.5 Exemples de catégories de diagramme de type donné dans une catégorie.

3.5.1. Si D est tel que Ob_D se réduit à un seul élément et si l'ensemble des flèches est vide, alors $\mathrm{Diag}(D, C')$ est canoniquement isomorphe à la catégorie C'.

3.5.2. Si D est du type suivant : $\bullet \longrightarrow \bullet$, alors la catégorie $\mathrm{Diag}(D, C')$ est appelée catégorie des flèches de C', notée $\mathrm{Fl}(C')$.

Les objets s'identifient aux éléments de $\mathrm{Fl}\, C'$ et un morphisme de la flèche $f : X \longrightarrow Y$, dans la flèche $f' : X' \longrightarrow Y'$ est défini par un couple de flèche (u, v)

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r] & Y'. \end{tikzcd}$$

3.5.3. Si D est du type suivant :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

les objets de $\mathrm{Diag}(D, C')$ sont essentiellement les "carrés" (non nécessairement commutatifs) de C' :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T, \end{tikzcd}$$

et un morphisme d'un tel carré dans un autre est défini par un quadruple de flèches (u, v, r, s) tel que tous les côtés latéraux de "cube" suivant, où interviennent ces flèches, soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[rr] \arrow[dl, "u"'] \arrow[dd] & & Y \arrow[dl, "v"] \arrow[dd] \\ X' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y' \arrow[dd] & \\ & Z \arrow[rr] \arrow[dl, "s"'] & & T \arrow[dl, "r"] \\ Z' \arrow[rr] & & T' & \end{tikzcd}$$

3.6 Diagramme avec relations de commutation.

3.6.1. Soit D un type de diagramme, on appelle *chemin* une suite finie $f_1, f_2, \dots f_n$ de flèches de D formellement composable, c'est-à-dire telle que $s(f_{i+1}) = b(f_i)$ pour $i = 1, \dots, n-1$. On considère le type de diagramme dont les objets sont ceux de D, dont les flèches sont les chemins $c = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $s(c) = s(f_1)$ et

$b(c) = b(f_n)$. Sur ce type de diagramme en définit la composition des chemins, elle consiste à mettre "bout à bout" deux chemins s'ils sont formellement composables. On obtient ainsi une catégorie notée $\hat{D}$, appelée *catégorie libre engendré par le type de diagramme D*.

Soit C une catégorie, pour tout morphisme de type de diagramme $\varphi : D \longrightarrow C$, il existe un foncteur et un seul $\hat{\varphi} : \hat{D} \longrightarrow C$ tel que pour tout chemin $c = (f_i)_{1\leq i<n}$, $\hat{\varphi}_1(c) = \varphi_1(f_1)...\varphi_1(f_{n-1})$.

3.6.2. On appelle *donnée de commutation* sur D, la donnée d'un ensemble R de couples de flèches de $\hat{D}$, (c, c') tels que $s(c) = s(c')$ et $b(c) = b(c')$.

Soit C une catégorie, on dit qu'un diagramme φ de type D dans C vérifie les *relations de commutation* R si pour tout couple (c, c') de R, $\hat{\varphi}_1(c) = \hat{\varphi}_1(c')$. On note $\mathrm{Diag}_R(D, C)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Diag}(D, C)$ formée par les diagrammes de type D vérifiant R.

3.6.3. Dans $\mathrm{Fl}\,\hat{D}$ on définit la relation d'équivalence R suivante :

$R(c, c')$ si et seulement si $s(c) = s(c')$ et $b(c) = b(c')$, la classe de c sera notée $\overline{c}$.

Soit $\widetilde{D}$ la catégorie telle que $\mathrm{Ob}(\widetilde{D}) = \mathrm{Ob}(\hat{D}) = \mathrm{Ob}(D)$ et $\mathrm{Fl}(\widetilde{D}) = \mathrm{Fl}(D)/R$ avec $s(\overline{c}) = s(c)$ et $b(\overline{c}) = b(c)$. La catégorie $\mathrm{Hom}(\widetilde{D}, C)$ est appelée catégorie des diagrammes de *type D commutatifs* dans C et notée $\mathrm{Diagcomm}(D, C)$.

Exemple

Soit D le type de diagramme représenté par

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_4"'] & \bullet \arrow[d, "f_2"] \\ \bullet \arrow[r, "f_3"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Alors $\mathrm{Ob}\,\hat{D} = \mathrm{Ob}(D)$, $\mathrm{Fl}\,\hat{D} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, (f_2, f_1), (f_3, f_4)\}$ chemin vide, dans $\widetilde{D}$ on identifie (f_2, f_1) et (f_3, f_4) on peut donc représenter $\widetilde{D}$ par

[]

4. Produit de catégories, somme de catégories

4.1 Produit de catégories

Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de catégories, I un ensemble.

4.1.1. *La catégorie produit* des catégories C_i, notée $C = \prod_{i\in I} C_i$ est ainsi définie:

$$\mathrm{Ob}\, C = \prod_{i\in I} \mathrm{Ob}\, C_i,\ \mathrm{Fl}\, C = \prod_{i\in I} \mathrm{Fl}\, C_i,\ s = \prod_{i\in I} s_i,\ b = \prod_{i\in I} b_i.$$

Si $f = (f_i)_{i\in I}$ et $g = (g_i)_{i\in I})$ sont deux flèches, la flèche composé gf est la flèche $(g_i f_i)_{i\in I}$; la flèche identique sur $\prod_{i\in I}$ est la flèche $\prod_{i\in I} 1X_i$.

On définit une famille de foncteurs notée $(\mathrm{pr}_i)_{i\in I}$, $\mathrm{pr}_i : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow C_i$ est tel que $\mathrm{pr}_i((X_i)_{i\in I}) = X_i$, $\mathrm{pr}_i((f_i)_{i\in I}) = f_i$.

Proposition **4.1.2.** — *Pour tout catégorie T, l'application de* $\mathrm{Hom}(T, \prod_{i\in I} C_i)$ *dans* $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(T, C_i)$ *qui à u fait correspondre* $(\mathrm{pr}_i \circ a)_{i\in I}$ *est bijective.*

4.2 Multifoncteurs

4.2.1. On considère une famille $(C_i)_{i\in I}$ de catégories, deux sous-ensembles J et K de I tels que $I = J \cup K$, $J \cap K \neq \varnothing$. Soit C la catégorie produit de $\prod_{i\in I} C_i$ et de $\prod_{i\in I} C_i^\circ$. Un *multifoncteur* de $\prod_{i\in I} C_i$ dans une catégorie C', *covariant* par rapport aux indices i de J et *contravariant* par rapport aux indices i de K est un foncteur de C dans C'.

4.2.2. Exemples. Si C, C', C'' sont trois catégories on considère le *produit* de catégories $\mathrm{Hom}(C, C')\prod \mathrm{Hom}(C', C'')$ l'application de $\mathrm{Hom}(C, C')\prod \mathrm{Hom}(C', C'')$ dans $\mathrm{Hom}(C, C'')$ qui à (F, G) fait correspondre GF permet de définir un *bifoncteur*, deux fois covariant de $\mathrm{Hom}(C, C')\prod \mathrm{Hom}(C', C'')$ dans $\mathrm{Hom}(C, C'')$. Soient F et F' deux foncteurs de C dans C', G et G' deux foncteurs de C' dans C'', $u : F \longrightarrow F'$ et $v : G \longrightarrow G'$, au couple (u, v) de flèche on fait correspondre la flèche notée $v^* u : GF \longrightarrow G'F'$ définie pour tout objet X de C par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
G_\circ F_\circ(X) \arrow[r, "G_1(u(X))"] \arrow[d, "v(F_\circ(X))"'] \arrow[dr, "v^* u(X)"] & G_\circ F'_\circ(X) \arrow[d, "v(F'_\circ(X))"] \\
G'_\circ F_\circ(X) \arrow[r, "G'_1(u(X))"'] & G'_\circ F'_\circ(X)
\end{tikzcd}$$

On vérifiera que v^*u est bien un morphisme *fonctoriel*, c'est-à-dire que pour toute $f : X \longrightarrow Y$ de C le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} G_\circ F_\circ(X) \arrow[r, "v^*u(X)"] \arrow[d, "G_1F_1(f)"'] & G'_\circ F'_\circ(X) \arrow[d, "G'_1F'_1(f)"] \\ G_\circ F_\circ(Y) \arrow[r, "v^*u(Y)"'] & G'_\circ F'_\circ(Y) \end{tikzcd}$$

et que l'application qui à (u,v) fait correspondre v^*u respecte la composition des flèches.

Si l'on fixe F appartenant à $\mathrm{Hom}(C,C')$ (resp. $\mathrm{Hom}(C',C''))$ on obtient un foncteur de $\mathrm{Hom}(C',C'')$ dans $\mathrm{Hom}(C,C'')$ (resp. $\mathrm{Hom}(C,C')$ dans $\mathrm{Hom}(C,C''))$ noté F_* (resp. F^*).

4.2.3. Si C' et C'' sont deux catégories, définissons un bifoncteur φ de $C' \prod \mathrm{Hom}(C',C'')$ dans C''.

A l'objet (X,G) on fait correspondre $\varphi_\circ(X,G) = G_\circ(X)$.

A la flèche (f,v), où $f : X \longrightarrow Y$, $v : G \longrightarrow G'$ on ait correspondre $\varphi_1(f,v)$ définie par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G_\circ(X) \arrow[r, "G_1(f)"] \arrow[d, "v(X)"'] \arrow[dr, "\varphi_1(f,v)"] & G_\circ(Y) \arrow[d, "v(Y)"] \\ G'_\circ(X) \arrow[r, "G'_1(f)"'] & G'_\circ(Y) \end{tikzcd}$$

Si λ est une catégorie ponctuelle ($\mathrm{Ob}A = \{\varnothing\}$, $\mathrm{Fl}_A = 1_{\{\varnothing\}}$), pour toute catégorie C, $\mathrm{Hom}(A,C)$ est canoniquement isomorphe à C, et le bifoncteur ci-dessus peut s'interpréter comme un foncteur de $\mathrm{Hom}(A,C') \prod \mathrm{Hom}(C',C'')$ dans $\mathrm{Hom}(A,C'')$; ce n'est autre que celui définie en **4.2.2**.

4.3 Somme de catégories

Rappel. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, $S = \amalg_{i\in I} X_i$ sa somme. Pour tout x élément de S on sait qu'il existe un unique indice noté $i(x)$ et un élément $x_{i(x)}$ dans $X_{i(x)}$ tels que $x = (x_{i(x)}, i(x))$.

4.3.1. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de catégories, I un ensemble. La catégorie *somme de la famille* $(C_i)_{i\in I}$ notée $S = \amalg C_i$ est définie par le *type de diagramme* suivant :

$\mathrm{Ob}\, S = \amalg_{i\in I} C_i$, $\mathrm{Fl}\, S = \amalg_{i\in I} \mathrm{Fl}\, C_i$, $s = \amalg_{i\in I} s_i$, $b = \amalg_{i\in I} b_i$, et la *composition des flèches* suivante : deux flèches $f = (f_{i(f)}, i(f))$ et $g = (g_{i(g)}, i(g))$ sont composables si et seulement si $b(f) = s(g)$ si et seulement si $i(f) = i(g) = i$ et $b_i(f_i) = s_i(g_i)$, on a alors $gf = (g_i f_i, i)$, l'identité pour un objet X est la flèche $1_X = (1_{X_{i(x)}, i(x)})$.

On définit une *famille de foncteurs* notée $(_i)_{i\in I}$, $_i : C_i \longrightarrow S$, tel que $_i(X_i) = (X_i, i)$, $_i(f_i) = (f_i, i)$.

Proposition **4.3.2**. — *Pour toute catégorie T, l'application de* $\mathrm{Hom}(_{i\in I} C_i, T)$ *dans* $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(C_i, T)$, *qui à u fait correspondre* $(u \circ _i)_{i\in I}$, *est* bijective.

4.3.3. Soit $\prod_{i\in I} C_i$ (resp. $\amalg_{i\in I} C_i$) la catégorie produit (resp. somme) d'une famille $(C_i)_{i\in I}$ de catégories, alors pour tout catégorie T, la *bijection* naturelle de $\mathrm{Hom}(T, \prod_{i\in I} C_i)$ dans $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(T, C_i)$ (resp. $\mathrm{Hom}(\amalg_{i\in I} C_i), T$ dans $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(C_i, T)$) est un *isomorphisme* de $\mathrm{hom}(\mathbf{T}, \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathbf{C}_\mathrm{i})$ dans $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(T, C_i)$ (resp. $\mathrm{hom}(\amalg_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathbf{C}_\mathrm{i}, \mathbf{T})$ dans $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(C_i, T)$).

5. Équivalence de catégories

5.1 Définition. Soit $F = (F_0, F_1)$ un foncteur d'une catégorie C dans une catégorie C'.

5.1.1. Le foncteur est dit *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si pour tout couple d'objets (X, Y), $F_1|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$, restriction de F_1 à $\mathrm{Hom}(X, Y)$, est *injectif* (resp. *bijectif*).

Si F_1 est injectif (resp. bijectif) alors F est fidèle (resp. pleinement fidèle). Les réciproques sont fausses.

5.1.2. Le foncteur F est dit *essentiellement surjectif* si pour tout objet X' de C', il existe un objet X de C tel que $F_0(X)$ soit isomorphe à X'.

5.1.3. Un foncteur F est appelé une *équivalence de catégories* s'il est *pleinement fidèle* et *essentiellement surjectif*.

5.1.4. Ces propriétés se conservent par la composition de foncteurs.

5.1.5. On dit que la catégorie C est *équivalente* à la catégorie C', s'il existe un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ qui soit une équivalence de catégories ; on définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$. En effet la relation est évidemment réflexive, elle est transitive **5.1.4**, elle est symétrique du fait de la proposition suivante :

Proposition **5.1.6**. — *Le foncteur F de C dans C' est une équivalence de catégories si et seulement si il existe un foncteur G de C' dans C, tel que GF soit* isomorphe *à* 1_C *et FG soit* isomorphe *à* $1_{C'}$. *Un tel foncteur G est appelé un* quasi-inverse *de F.*

Alors que l'inverse d'un morphisme lorsqu'il existe est unique, un foncteur peut avoir plusieurs quasi-inverses qui sont isomorphes entre eux.

Démonstration. Supposons que F soit une équivalence de catégories. Puisque F est *essentiellement surjectif*, pour tout objet X' de C', l'ensemble des objets de C tels que l'image par F_0 soit isomorphe à X' est non vide. On en choisit un (grâce au symbole τ !) X et l'on note u_x, un isomorphisme de $F_0(X)$ sur X'.

On pose alors $G_\circ(X') = X$.

Pour toute flèche $f' : X' \longrightarrow Y'$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F_\circ(X) \arrow[r, "u_x"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ F_\circ(Y) \arrow[r, "u_y"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Il existe une unique flèche de $F_0(X)$ dans $F_0(Y)$ rendant le diagramme commutatif ($u_y^{-1} f' u_x$). Puisque F est *pleinement fidèle*, cette flèche est l'image par F_1 d'une unique flèche $f : X \longrightarrow Y$.

On pose $G_1(f') = f$.

Par construction de $G = (G_0, G_1)$ on a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & G_\circ F_\circ(X) \arrow[d, "G_1 F_1(f)"] \\ Y \arrow[r, "\approx"'] & G_\circ F_\circ(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & F_\circ G_\circ(X') \arrow[d, "F_0 G_0(f')"] \\ Y' \arrow[r, "\approx"'] & F_\circ G_\circ(Y') \end{tikzcd}$$

ce qui montre que GF est isomorphe à 1_C, et FG isomorphe à $1_{C'}$.

Réciproquement supposons que F possède un quasi-inverse G ; alors F est évidement *essentiellement surjectif*, d'autre part $F_1|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$ est une *bijection* de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ sur $\mathrm{Hom}(F_0(X), F_0(Y))$ pour tout couple d'objets (X,Y). En effet $F_1|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$ est une *surjection* sur $\mathrm{Hom}(F_0(X), F_0(Y))$. C'est aussi une *injection*, soient deux flèches, f et g de X dans Y telles que $F_1(f) = F_1(g)$, alors

$G_1F_1(f) = G_1F_1(g)$, comme il y a une seule flèche de X dans Y rendant le diagramme ci-dessus commutatif, on a $f = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "{f,g}"'] & G_0F_0(X) \arrow[d, "G_0F_0(f)=G_0F_0(g)"] \\ Y \arrow[r, "\approx"'] & G_0F_0(Y) \end{tikzcd}$$

5.2

Proposition **5.2.1**. — *Si F est un foncteur d'une catégorie C dans une catégorie C', les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) F est pleinement fidèle ;

(b) Il existe une sous-catégorie pleine C'_1 l'image par F de C, ou l'image essentielle de F par C (c'est-à-dire l'ensemble des objets de C' isomorphes à $F(X)$ X variant dans Ob_C*).*

Réciproquement si F se factorise par C'_1 sous-catégorie pleine de C', le foncteur : $C'_1 \longrightarrow C$ est pleinement fidèle, et la composition avec une équivalence de catégorie donne un foncteur pleinement fidèle.

Proposition **5.2.2**. — *Soit F un foncteur de C dans C', T une catégorie, F_* le foncteur de* $\mathrm{Hom}(C', T)$ *dans* $\mathrm{Hom}(C, T)$ **4.2.1** *on a les propriétés suivantes :*

(i) Si F est fidèle alors F_* est fidèle ;

(ii) Si F est pleinement fidèle alors F_* est pleinement fidèle ;

(iii) Si F est une équivalence de catégories alors F_* est une équivalence de catégories.

Si l'on considère F^* le foncteur $\mathrm{Hom}(T, C)$ dans $\mathrm{Hom}(T, C')$, seule le propriété (iii) est vraie.

Proposition **5.2.3**. — *Soit F un foncteur de C dans C' pleinement fidèle ; alors une flèche f de C est inversible si et seulement si $F_1(f)$ est inversible.*

Proposition **5.2.4**. — *Soit dans* $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$ *une famille de foncteurs* $(F_i)_{i\in I}$, *I élément de* $\mathfrak{U}$, $F_i : C_i \longrightarrow C'_i$, *et soit* $\prod_{i\in I} F_i : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow \prod C'_i$, *on a les propriétés suivantes :*

(i) Si pour tout i élément de I, F_i *est fidèle alors* $\prod_{i\in I} F_i$ *est fidèle.*

(ii) Si pour tout i élément de I, F_i *est pleinement fidèle alors* $\prod_{i\in I} F_i$ *est pleinement fidèle.*

(iii) Si pour tout i élément de I, F_i *est une équivalence de catégories alors* $\prod_{i\in I} F_i$ *est une équivalence de catégories.*

On énoncera la proposition duale.

5.3 Exemple

Soient X un espace topologique, connexe par arc, localement simplement connexe par arc, x un élément de X. On note (X), la catégorie des revêtements de X éléments d'un univers $\mathfrak{U}$ donné, $\Pi = \Pi_1(X,x)$, $\mathrm{Ens}(\Pi)$ la catégorie des ensembles de $\mathfrak{U}$ sur lesquels Π opère.

Proposition. — *Les catégories* (X) *et* $\mathrm{Ens}(\Pi)$ *sont* équivalentes.

Au revêtement E, X, p on fait correspondre la fibre $F = p^{-1}(x)$, Π opère sur F ; si E', X, p' est un revêtement et $f : E \longrightarrow E'$ un morphisme de revêtement, [] f on fait correspondre $f_{|p^{-1}(x)} : F \longrightarrow F'$ qui est compatible avec Π. On a ainsi défini un foncteur $\alpha : (X) \longrightarrow (\Pi)$.

Construisons un foncteur quasi-inverse. Soit F un ensemble sur lequel Π opère. La revêtement universel $\widetilde{X}$ de X est un fibré principal de groupe Π, on considère le fibré associé $\widetilde{X} \times_{\Pi} F$ de fibre F, c'est un revêtement de X, on défini ainsi un foncteur $\beta : \mathrm{Ens}(\Pi) \longrightarrow (X)$. On vérifiera que $\beta\alpha \simeq 1_{(X)}$ et $\alpha\beta \simeq 1_{\mathrm{Ens}(\Pi)}$.

6. Limite projective, limite inductive

6.1

Soit I un type de diagramme, C une catégorie et φ un morphisme de type de diagramme de I dans C (c'est-à-dire un diagramme de type I dans C).

6.1.1. Une famille $(u_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, I}$ de morphismes de C, de source X, $u_i : X \longrightarrow \varphi_0(i)$ est dite *admissible pour* φ, si pour toute flèche $f : i \longrightarrow j$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \varphi_0(i) \arrow[dd, "\varphi_1(f)"] \\ X \arrow[ur, "u_i"] \arrow[dr, "u_j"'] & \\ & \varphi_0(j) \end{tikzcd}$$

Une telle famille est notée $(X,(u_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, I})$.

6.1.2.

6.1.3.

6.1.4.

6.2

6.3. Exemples de limites projectives dans une catégorie quelconque.

6.3.1.

6.3.2.

6.3.3.

6.4. Soit C une catégorie, telle que pour tout couple d'objets

6.4.1.

6.4.2.

6.4.3.

6.4.4.

6.5. Limite inductive :

Soit un type de diagramme I, une catégorie C, et un morphisme de type de diagramme $\varphi : I \longrightarrow C$.

6.5.1.

6.5.2.

6.6. Exemples de limites inductives

6.6.1.

6.6.2.

6.6.3.

6.6.4.

6.7. On énoncera les définitions et propriétés duales de celles développées dans le paragraphe **6.4**.

6.7.1. Un *foncteur exact* est un foncteur exact à gauche et exact à droite.

6.7.2.

6.8. Propriétés générales des limites inductives et projectives.

6.8.1.

6.8.2.

6.8.3. Dans $\underline{\mathrm{Cat}}\mathfrak{U}$, pour tout type de diagramme I élément de $\mathfrak{U}$, les limites projectives (resp. inductives) de type I existent. Si I est discret on retrouve le produit (resp. la somme) de catégories.

7. Catégorie filtrante

7.1 Définitions :

7.2 Exemples

7.2.1. Si dans une catégorie C, pour tout couple d'objets le produit (resp. la somme) existe, et si pour tout couple de morphismes le noyau (resp. le conoyau) existe, alors C est filtrante à gauche (resp. filtrante à droite).

7.2.2. La catégorie associée à un ensemble préordonné I est filtrante si et seulement si I est filtrante.

7.2.3. Dans la catégorie des ensembles, des groupoïdes, des modules sur un anneau…, *les limites inductives filtrantes*, c'est-à-dire les limites inductives de foncteurs d'une catégorie filtrante dans la catégorie en question, sont des foncteurs exacts à gauche, donc *exacts*, puisqu'on sait qu'ils sont exacts à droite.

§ II. — CATÉGORIE ABÉLIENNE

1. Catégorie additive

On peut donner deux versions de la définition d'une catégorie additive, l'une consiste à *se donner* sur les ensembles $\mathrm{Hom}(X, Y)$ une structure de groupe abélien, cette structure supplémentaire étant soumise à certaines conditions ; l'autre consiste à construire canoniquement une loi de groupe sur tout $\mathrm{Hom}(X, Y)$ en termes *d'axiomes* convenables sur la catégorie C.

1.1 Version 1

Une catégorie additive est une catégorie

1.1 Version 1

1.1 Version 1

1.1 Version 1

1.1 Version 1

2. Catégorie additive

1.1 Version 1

1.1 Version 1

3. Catégorie additive

1.1 Version 1

1.1 Version 1

1.1 Version 1

4. Diagrammes dans une catégorie abélienne

1.1 Version 1

1.1 Version 1

5. Diagrammes dans une catégorie abélienne

1.1 Version 1

1.1 Version 1

1.1 Version 1

§ III. — FONCTEURS REPRÉSENTABLES

1. Généralités

1.1 Définition

Soit $\mathfrak{U}$ un univers, C une catégorie telle que pour tout couple (X,Y) d'objets de C, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ appartient à $\mathfrak{U}$. On rappelle que $\mathrm{Hom}(.,.)$ est un bifoncteur de $C \times C$ dans $\mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}}$ contravariant par rapport à la première variable, covariant par rapport à la seconde.

1.1.1. On appelle *catégorie des préfaisceaux* sur C, la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(C^o, \mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}})$, que l'on note $\hat{C}$.

On définit un foncteur ε de C dans $\hat{C}$. A tout objet Y de C, ε fait correspondre le foncteur contravariant de C dans $\mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}}$: $\mathrm{Hom}(.,Y)$, que l'on note h_Y.

Tout morphisme $f : Y \longrightarrow Y'$, ε associe le morphisme fonctoriel naturel de $\mathrm{Hom}(.,Y)$ dans $\mathrm{Hom}(.,Y')$.

1.1.2. On dit que le foncteur h_Y est le *foncteur représenté* par Y.

On dit qu'un préfaisceau F est *représentable*, s'il existe un *objet* Y de C et un *isomorphisme* φ de h_Y sur F. On dit alors que F est représenté par le couple (Y,φ) ou encore que le couple (Y,φ) est une *donnée de représentation de* F.

1.2 Propriétés

Théorème **1.2.1.** — *Si* F est un préfaisceau *sur* C, Y un objet *de* C, *il* existe une bijection *de* $\mathrm{Hom}(h_Y,F)$ *sur* $F(Y)$, *fonctorielle en* Y, F.

a. *Soit u un morphisme de h_Y dans F. On rappelle (Chap. 1, 3.4) qu'à tout objet X de C u fait correspondre une application $u(X)$ de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ dans $F(X)$ que l'on notera u_X. Soit $\alpha : \mathrm{Hom}(h_Y, F) \longrightarrow F(Y)$ telle que $\alpha(u) = u_Y(1_Y)$*

b. *Soit $\beta : F(Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(h_Y, F)$, qui à tout élément v de $F(Y)$ fait correspondre le morphisme $\beta(v) : h_Y \longrightarrow F$, tel que pour tout objet X et tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ on ait $\underline{\beta(v)}_X(f) = F(f)(v)$. On vérifie en effet que pour tout morphisme $g : X \longrightarrow X'$ le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X',Y) = h_Y(X') \arrow[r, "h_Y(g)"] \arrow[d, "\underline{\beta(v)}_{X'}"'] & \mathrm{Hom}(X,Y) = h_Y(X) \arrow[d, "\underline{\beta(v)}_X"] \\ F(X') \arrow[r, "F(g)"'] & F(X) \end{tikzcd}$$

c. *Pour tout morphisme fonctoriel u de h_Y dans F et tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ on a $u_X h_Y(f) = F(f) u_Y$, en particulier $F(f)u_Y(1_Y) = u_X(f)$, donc $\beta\alpha(u) = u$. Inversement pour tout élément v de $F(Y)$, $\alpha\beta(v) = \underline{\beta(v)}_Y(1_Y) = F(1_Y)(v) = 1_F(Y)(v) = v$.*

Corollaire **1.2.2**. — *Si F est un préfaisceau représentable, représenté par (X, φ) Y un objet de C, il existe une* bijection *de* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *sur* $\mathrm{Hom}(h_Y, h_X)$.

C'est dire que le foncteur canonique ε est *pleinement fidèle*, ce qui permet de “plonge” canoniquement toute catégorie C dans la catégorie $\hat{C}$ des préfaisceaux sur C.

Aussi nous arrivera-t-il d'*identifier* un objet Y de C à h_Y, un morphisme fonctoriel de h_Y dans F à l'élément de $f(Y)$ correspondant. Une donnée de représentation de F est définie à un isomorphisme unique près : en effet, si (X, φ), (X', φ') sont deux données de représentation de F, h_X et h'_X sont isomorphes, comme ε est pleinement fidèle X et X' sont isomorphes ainsi que φ et φ'.

Proposition **1.2.3**. — *Soit F un préfaisceau sur C.*

Le couple (X, α), où X est un objet de C, α un élément de $F(X)$ définit une donnée de représentation de F si et seulement si pour tout couple (Y, β) où Y est un objet de C, β un élément de $F(Y)$, il existe un unique morphisme $v : Y \longrightarrow X$ tel que $\beta = F(v)\alpha$.

Si (X,α) *définit une donnée de représentation de* F, α *s'identifie à un* isomorphisme *de* h_X *sur* F, β *s'identifie à un morphisme de* h_Y *dans* F, *et un morphisme* v *s'identifie à un morphisme de* h_Y *dans* h_X. *Pour tout objet* Y, *et tout morphisme* $\beta : h_Y \longrightarrow F$, *il existe bien un unique morphisme* $h_Y \longrightarrow h_Y$ *tel que* $\beta = \alpha u$, *à savoir* $u = \alpha^{-1}\beta$

$$\begin{tikzcd} h_X \arrow[rr, "\approx\alpha"] & & F \\ & h_Y \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Réciproquement si (X,α) *jouit d'une telle propriété universelle, pour tout* Y *il existe une bijection de* $\mathrm{Hom}(Y,X) = h_X(Y)$ *sur* $\mathrm{Hom}(h_Y,F) \simeq F(Y)$, *donc* α *est un isomorphisme fonctoriel, et* (X,α) *définit une donnée de représentation de* F.

2. Application

De nombreuses notions peuvent s'interpréter avantageusement en langage de foncteurs représentables.

2.1. Soit C une catégorie, D un type de diagramme et $\varphi : D \longrightarrow C$. Pour tout objet Y de C, on définit le diagramme constant C_Y : pour tout objet i de D $C_Y(i) = Y$, pour toute flèche f de D $C_Y(f) = 1_Y$. Pour tout objet Y de C, l'ensemble des systèmes admissibles $(Y, u_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, D}$ de φ *est* l'ensemble $\mathrm{Hom}(C_Y,\varphi)$.

Soit F le préfaisceau sur C défini par $F(Y) = \mathrm{Hom}(C_Y,\varphi)$. En appliquant **1.2.3** on obtient la

Proposition **2.1.1**. — *La limite projective de* φ *existe si et seulement si le foncteur* F *est représentable.*

Si φ ne possède pas de limite projective dans C, on utilise souvent le procédé suivant on plonge C dans $\hat{C}$ au moyen du foncteur ε et on appelle limite projective de φ la limite projective de $\varepsilon\varphi$, qui existe toujours puisque $\hat{C} = \mathrm{Hom}(C^o, \mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}})$.

2.2. On considère la catégorie des modules sur un anneau commutatif A, Mod_A. Soient M et N deux modules, le foncteur de Mod_A dans Ens qui à tout module P fait correspondre l'ensemble $\mathrm{Bil}_A(M\times N,P)$ des applications bilinéaires de $M \times N$ dans P est *représentable*, et le module qui le représente est le produit tensoriel $M \otimes_A N$.

2.3. On peut définir dualement un foncteur $\varepsilon' : C^o \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathrm{Ens})$. On définira alors un foncteur représentable et l'on vérifiera que cette notion recouvre celle de limite inductive.

3. Structures algébriques dans les catégories

On se propose de *définir* une structure algébrique par exemple une structure de groupe sur un objet X d'une catégorie C. On peut procéder de deux façons.

3.1. La plus naturelle consiste à généraliser dans la catégorie C, la notion habituelle de structure algébrique sur un ensemble.

Supposons que dans C le produit $X \prod X$ existe, une *loi de composition interne* sur X est la donnée d'un morphisme $m_X : X \prod X \longrightarrow X$.

Les axiomes définissant sur X une *structure de C-groupe* vont s'exprimer en terme de commutativité de diagrammes. Supposons que $X \prod X \prod X$ existe, on a les isomorphismes canoniques : $(X \prod X) \prod X \simeq X \prod X \prod X \simeq X \prod (X \prod X)$.

3.1.1. La loi est *associative* si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \prod X \prod X \arrow[r, "m_X \prod 1_X"] \arrow[d, "1_X \prod m_X"'] & X \prod X \arrow[d, "m_X"] \\ X \prod X \arrow[r, "m_X"'] & X \end{tikzcd}$$

Supposons de plus qu'il existe dans C un objet final E, il existe alors un unique morphisme $e : X \longrightarrow E$.

3.1.2. *Il existe un morphisme $w : E \longrightarrow X$ tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} E \prod X \arrow[rr, "\omega \prod 1_X"] & & X \prod X \arrow[dl, "m_X"] \\ & X \arrow[ul, "(e,1_X)", "\simeq"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \prod E \arrow[rr, "1_X \prod \omega"] & & X \prod X \arrow[dl, "m_X"] \\ & X \arrow[ul, "(1_X,e)", "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

On montre que w est alors déterminé de façon unique.

3.1.3. Il existe un *morphisme* $s : X \longrightarrow X$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(s{,}1_X)"] \arrow[d, "e"'] & X\prod X \arrow[d] \\ E \arrow[r, "\omega"'] & X \end{tikzcd}$$

ainsi que celui obtenu en permettant s et 1_X. On montre que le morphisme s est déterminé de façon unique.

On pourrait de façon duale définir une structure de C-cogroupe.

3.2. *Sans* faire *d'hypothèses* sur la catégorie C, on peut définir une structure sur X en se ramenant au cas *ensembliste*. Les limites projectives existent dans $\hat{C}$, ainsi pour deux éléments F, F' de $\hat{C}$, pour tout objet X de C, $F\prod F'(X) = F(X)\prod F'(X)$.

Une *loi de composition interne* sur X est la donnée d'un *morphisme* $M_X : h_X \prod h_X \longrightarrow h_X$. Cela revient à se donner pour tout objet Y de C, une loi de composition interne sur l'ensemble $h_X(Y)$ qui soit fonctorielle, c'est-à-dire telle que pour tout $u : Y \longrightarrow Y'$, $h_X(u) : h_X(Y') \longrightarrow h_X(Y)$ soit un morphisme au sens de la structure considérée.

3.3. Dans le cas particulier où le produit $X\prod X$ existe dans C, $h_X \prod h_X$ est canoniquement isomorphe à $h_{X\prod X}$, une loi de composition interne sur X peut donc être considérée comme un morphisme $M_X : h_{X\prod X} \longrightarrow h_X$ il lui est donc canoniquement associé **(III, 1.2.2)** un morphisme $m_X : X\prod X \longrightarrow X$ tel que $\varepsilon(m_X) = h_{m_X} = M_X$.

3.3.1. Si l'on suppose que $X\prod X\prod X$ existe, $X\prod X\prod X$ étant canoniquement identifié à $(X\prod X)\prod X$ l'application $M_X(Y)\prod 1_{h_X(Y)}$ s'identifie pour tout objet Y de C à $h_{m_X\prod 1_X}(Y)$. Il est donc *équivalent* de dire que la loi M_X est associative, c'est-à-dire que pour tout Y le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} h_X(Y)\prod h_X(Y)\prod h_X(Y) \arrow[r, "M_X(Y)\prod 1"] \arrow[d, "1\prod M_X(Y)"'] & h_X(Y)\prod h_X(Y) \arrow[d, "M_X(Y)"] \\ h_X(Y)\prod h_X(Y) \arrow[r, "M_X(Y)"'] & h_X(Y) \end{tikzcd}$$

ou que le diagramme **3.1.1** est commutatif.

3.3.2. S'il existe dans C un objet final…

E, h_E est objet final de $\hat{C}$, le morphisme $\Omega : h_E \longrightarrow h_X$ induit un morphisme $w : E \longrightarrow X$ qui vérifie la propriété **3.1.2**.

3.3.3. Pour tout Y de C il existe un morphisme $S(Y) : h_X(Y) \longrightarrow h_X(Y)$ fonctoriel par rapport à Y, soit $S : h_X \longrightarrow h_X$ est un morphisme auquel est canoniquement associé un morphisme $s : X \longrightarrow X$ tel que $\varepsilon(s) = h_s = S$, et tel que le diagramme **3.1.3** correspondant soit commutatif.

3.4. Il faut remarquer qu'il y a des structures que l'on ne peut définir de cette façon, par exemple si leur définition fait intervenir des limites inductives, car $\varepsilon : C \longrightarrow \hat{C}$ ne commute pas aux limites inductives.

QUELQUES OUVRAGES DE RÉFÉRENCES

[1] ECKMANN - HILTON — *Group-like structure in general categories*. I. Math. Ann. **145** (1962) 227-255 ; II. Math. Ann. **151** (1963), 150-186 ; III. Math. Ann. **150** (1963) 165-187.