Résumé de quelques résultats de Kostant (sous groupes simples de rang 1).

G est un groupe semi-simple sur un corps k de car. nulle, $\mathfrak{g}$ son algèbre de
(The principal 3-dimensional subgroup..., Am. Jour. Oct. 1959, 3.4, 3.5, 3.6, 4.2, 9.3)
Lie,

Théorème 1. (i) Soient $x, e \in \mathfrak{g}$, (avec $e \neq 0$, e nilpotent.) Pour tout entier k, soit $\mathfrak{g}(k)$ le sous-espace propre de correspondant à la valeur propre k. Donc si $x = \mathrm{Lie}(i)(1)$, où $i : \underline{G}_m \to G$, les $\mathfrak{g}(k)$ sont les ~~décompositions~~ composants de $\mathfrak{g}$ suivant les caractères de $\underline{G}_m$, opérant sur $\mathfrak{g}$ via i et la représentation adjointe. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) $e \in \mathfrak{g}(2)$ i.e. $[x,e] = 2e$, et pour tout entier $k \geq 1$, $\mathrm{ad}(e)^k : \mathfrak{g}(-k) \to \mathfrak{g}(k)$ est un isom.

b) $e \in \mathfrak{g}(2)$, ~~et~~ $\mathrm{ad}(e) : \mathfrak{g}(0) \to \mathfrak{g}(-2)$ est surjectif, et x est de la forme $f(x_0)$, pour $f : Sl(2,k) \to G$ (élément de Dynkin).

~~b') (comme b), avec ad(e): g(0) → g(-2) bijectif)~~

c) $e \in \mathfrak{g}(2)$, et $x \in \mathrm{ad}(e)(\mathfrak{g})$.

c') $e \in \mathfrak{g}(2)$, et $x \in \mathrm{ad}(e)(\mathfrak{g}(-2))$.

d) Il existe un homomorphisme $f : Sl(2,k) \to G$ tel que $f'(e_0) = e$, $f'(x_0) = x$ où (x_0, e_0, f_0) est la base de Lie $Sl(2,k)$ correspondant à l'épinglage habituel de ce groupe.

Ces conditions impliquent qu'il existe un homomorphisme $i : \underline{G}_m \to G$, tel que $\mathrm{Lie}(i)(1) = x$, a fortiori que x est semi-simple. De plus, le f de d) est déterminé de façon unique.

(ii) Pour tout élément nilpotent e de $\mathfrak{g}$, il existe un homomorphisme $f : Sl(2,k) \to G$ tel que $f(e_0) = e$, ou ce qui revient au même, tel que $f(u_0) = u$ (où $u = \exp(e)$, $u_0 = \exp(e_0)$); f est uniquement déterminé par $x = f(x_0)$ i.e. par $i = f \circ i_0$. En vertu de (i), il revient au même, lorsque $e = 0$ i.e. $u \neq 1$, de dire qu'il existe un $x \in \mathfrak{g}$ tel que (x,e) satisfasse aux conditions équivalentes de (i), ou encore un homomorphisme $i : \underline{G}_m \to G$ tel que $(\mathrm{Lie}(i)(1), e)$ y satisfasse. Les homomorphismes f en question sont conjugués ~~sous les éléments de~~ par Z. $\mathrm{Cent}(e) = \mathrm{Cent}(u)$ (i.e. pour $e \neq 0$, les x en question, ou encore les i en question, sont conjugués ~~sous~~ par $\mathrm{Cent}(u)$), et lorsque $e \neq 0$, les ~~morphismes g int(g)~~ f en question (ou encore les

15

x en question, ou les i en question) forment un ~~torseur~~ sous le groupe $Z^+ = Z \cap U$ ~~(en fait, c'U introduit dans (iv))~~ ~~Cent(u)~~, qui est un groupe unipotent). Enfin, supposant toujours $e \neq 0$, l'ensemble des x en question est un torseur sous $\mathfrak{g}^e$ $Lie(Z^+) = \mathfrak{g}^e \cap Fil^1(\mathfrak{g})$) ~~= (centralisateur de e dans $\mathfrak{g}$) = Ker ad(e) = Lie Cent(u)~~ (torseur pour l'addition, i.e. est de la forme $a + \mathfrak{g}^e$, pour un $a \in \mathfrak{g}$ convenable). ~~et on a $\mathfrak{g}^e \subset \sum_{k \geq 1} \mathfrak{g}(k) = Fil^1(\mathfrak{g})$~~

cf plus bas définition de U. On a $Z = Z_0 . Z^+$ produit semi-direct) avec $Z_0 = Z \cap L = Cent(\mathfrak{f})$

(iii) Soit x $\neq 0$ un élément de Dynkin de $\mathfrak{g}$, donc associé à un homomorphisme de Dynkin i: $\underline{G}_m \to G$. Alors les éléments e de $\mathfrak{g}$ tels que (x,e) satisfassent aux conditions de (i) forment un ouvert dense de $\mathfrak{g}(2)$ (savoir l'ouvert $\mathfrak{g}(2)^*$ des points e tels que ad(e): $\mathfrak{g}(0) \to \mathfrak{g}(2)$ soit surjectif), Celui-ci est un espace homogène ~~torseur~~ sous L= Cent(x)=Cent(i), qui est un groupe réductif.

(iv) Pour tout élément de Dynkin x de $\mathfrak{g}$, x = Lie(i)(1), ~~couple (x,e) satisfaisant les conditions de (i)~~ considérons les sous-groupes P,U,L de G définis par les conditions

$$LieP = \sum_{k \geq 0} \mathfrak{g}(k) \quad , \quad Lie\ U = \sum_{k \geq 1} \mathfrak{g}(k), \quad Lie\ L = \mathfrak{g}(0) \ .$$

Alors P est un sous-groupe parabolique de G, U est son radical unipotent, et L=Cent(x)=Cent(i) est un sous-groupe de Lévi de G. Si u (=exp(e)) est un élément unipotent de G tel que (i,u) soit un couple de Dynkin (i.e. induit par un f: $S\ell(2,k) \to G$), P (donc aussi U) est défini en termes de u (i.e; deux x associés au même u donnent le même P, cf. (ii)); Il en est de même du sous-groupe $H=i(\underline{G}_m).U$ de G (NB $i(\underline{G}_m)$ normalise U, et H est un produit semi-direct), et de i mod U i.e. de $\underline{G}_m \to H/U$ induit par i. De plus, l'application

$$g \mapsto ad(g).x$$

est un isomorphisme de U avec $x + Fil^1 \mathfrak{g}$ $(= x + Lie\,U)$ (où on pose $Fil^k \mathfrak{g} = \sum_{j \geq k} \mathfrak{g}(j)$), et l'application

$$g \mapsto ad(g).e$$

est une application surjective de U sur $e + Fil^3(\mathfrak{g})$, ou de P sur $\mathfrak{g}(2)^* + Fil^3(\mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g}(2)^*$ est l'ouvert de $\mathfrak{g}(2)$ envisagé dans (iii).

16

Interprétations en termes de filtrations du foncteur oubli ~~sur la catégorie~~ des représentations linéaires de dimension finie de G. (Il s'agit de filtrations compatibles au produit tensoriel et "exactes", cette dernière cond. aut. si car.k=0). Supposons fixé une classe c de conjugaison, rationelle sur k, de telles filtrations (NB elle n'admet pas nécessairement un représentant rat/k); il revient au même de se donner, pour le Chevalley G_o associé à G, un ~~homomorphisme~~ élément de $\mathrm{Hom}(\underline{G}_m, T_o)/W = M/W$ ($T_o = M \otimes \underline{G}_m$ est le tore maximal type de G_o) invariant par le sous-groupe Γ de $\mathrm{Auext}\ G_o = E_o$ image de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, ou encore un ~~homomorphisme $\underline{G}_m$~~ élément de M qui soit dans la chambre de Weyl de $M \otimes_{\underline{Z}} \underline{R}$ et qui soit stable par Γ. On a alors le schéma $\underline{\emptyset}_c$ des filtrations de classe c, qui est un espace homogène sous G, de c'est~un sous-schéma ouvert de $\underline{\mathrm{Par}}(G)$, orbite rationelle sous G, soit c', stabilisateur des points des paraboliques; On peut regarder aussi le schéma ST_c des homomorphismes i: $\underline{G}_m \to G$ de classe c, qui est donc une orbite rationelle de G opérant sur $\underline{\mathrm{Homgr}}(\underline{G}_m, G)$. Il est canoniquement isomorphe au schéma des couples de Lévi (P,L) tels que P soit de classe c'. (En d'autres termes, grâce au choix d'un c, pour P ou encore $\underline{\emptyset}$ de classe c' donné, il revient au même de se donner un i: $\underline{G}_m \to P$ de la classe définie par c, où un sous-groupe de Lévi de P, à i étant associé Cent(i).) On a deux ~~homo~~morphismes de schémas canoniquement isomorphes

$$ST_c \to \underline{\emptyset}_c \quad , \quad (CL)_{c'} \to \mathrm{Par}_{c'} \ ,$$

le premier en termes de théorie des filtrations du foncteurs fibres, le deuxième en termes de groupes paraboliques.

Supposons maintenant que k soit de car. nulle (j'ignore dans quelle mesure c'est vraiment nécessaire). On peut alors considérer le Schéma Dyn_c des homomorphismes f: $\mathrm{Sl}(2,k) \to G$ tels que fi_o soit de classe c. Supposons-le non vide et non réduit à un point, ~~i.e. c une classe de Dynkin~~ ≠1. Alors Dyn_c est un ~~torseur~~ espace homogène sous G de stabilisateur Z_o (il faudrait regarder la structure de ces Z_o ; dimension, semi-simplicité). ~~(en fait, il est can. is. au torseur $\underline{\mathrm{Isom}}(G_1, G)$, où G_1 est le groupe quasi-déployé correspondant à G).~~ Soit Un_c le schéma des éléments unipotents de G dont la classe corresponde à ~~celle de~~ c par la correspondance

17

de Kostant. On a donc ~~des~~ les morphismes $f \mapsto f \circ i_o$ et $f \mapsto f(u_o)$ de Dyn_c dans ST_c resp. Un_c . D'autre part, Deligne nous fournit $\mathrm{Un}_c \to \underline{\emptyset}_c$, et celui-ci peut aussi être défini par la commutativité du diagramme d'esp. homogènes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ST}_c \simeq (\mathrm{CL})_{c'} \arrow[d] & \mathrm{Dyn}_c \arrow[l] \arrow[d] \\
\underline{\emptyset}_c \simeq \mathrm{Par}_{c'} & \mathrm{Un}_c \arrow[l]
\end{tikzcd} .
\qquad
\begin{tikzcd}
L \arrow[d] & Z_o \arrow[l] \arrow[d] \\
P & Z(e) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Pour qu'il existe un point rationnel de ~~Dyn_c, ou ce qui revient au même~~ $\underline{\emptyset}_c \simeq \mathrm{Par}_{c'}$, il faut (et suffit) qu'il en existe un de Dyn_c ~~i.e. que G soit quasi-déployé~~ (i.e., où $Z_o = e$, que G soit quasi-déployé): en effet, P étant choisi, ~~les~~ on peut en choisir un ~~point rationnel~~ sous-groupe de Lévi L, ~~etc.~~ ou ce qui revient au même un $i : \underline{G}_m \to G$ dans la classe c, définissant P, et alors les u=exp(e) qui ~~sont~~ s'adaptent à i forment un ouvert dense de $\mathfrak{g}(2)$, qui ~~est donc non vide~~ a donc un point rationnel. On voit donc que pour certaines classes de paraboliques (qu'on pourrait appeler les paraboliques de Dynkin-Kostant) l'existence d'un parabolique de cette classe rationnel sur k implique déjà que G est quasi-déployé. (NB Quand G n'est pas une forme intérieure, il faut faire attention cependant de vérifier d'abord que la classe c' de P provient bien d'un c de Dynkin invariant par Γ , et il n'est pas clair que cette propriété de c résulte du fait que c' est invariante par Γ , faute de savoir si $c \mapsto c'$ est injectif sur les classes de Dynkin). (On notera aussi que l'argument donné marche également sur un anneau semi-local (de car. nulle jusqu'à nouvel ordre).)

Il n'est en effet [illegible] conj. [illegible] pour A_2, A_4 (calc [illegible] pour A_3)

Ceci montre l'intérêt, pour les questions arithmétiques, de déterminer exactement les classes de sous-groupes paraboliques de Dynkin-Kostant des divers groupes simples, et de voir si leur stabilisateur dans $\mathrm{Autext}(G_o)$ est le même que celui des c de Dynkin correspondants, et pas str. plus grand.

On notera cependant que si une filtration du foncteur ~~fib~~ oubli peut être définie par un élément unipotent, la classe de conjugaison de ce der-

18

nier (ou, ce qui revient au même, c) est bien déterminée. Les unipotents qui définissent ladite filtration, en termes d'un i qui la définit, sont ceux de la forme exp(e), où e parcourt $\mathfrak{g}(2)^* + \mathrm{Fil}^3(\mathfrak{g})$. Ils forment une classe de conjugaison d'éléments de U par P (NB mais pas par U), les classes de conjugaison par U s'identifiant aux ensembles de la forme (exp(e)| e $\in$ a+ $\mathrm{Fil}^3(\mathfrak{g})$), où a $\in \mathfrak{g}(2)^*$ est un élément quelconque.

ex Cas A_2, A_4 les [illegible] associés aux unipotents "sous-réguliers" sont des Borels!

Cas principal. Pour qu'on ait (1)=0, il faut et suffit que ~~xxhomomox~~ la classe d'homomorphismes f: Sl(2,k) G envisagée soit "principale" au sens de Dynkin-Kostant. Alors le parabolique associé P est un Borel (la réciproque n'étant pas vraie ~~sans doute~~, cf table de Dynkin), et le groupe Z_o est le groupe unité (i.e. Dyn_c est un torseur sous G), la réciproque n'étant pas vraie sans doute.

19