# MATHEMATICAL LETTERS

Collection

par

Alexandre GROTHENDIECK

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

https://agrothendieck.github.io/

# CONTENTS

## Lettre à E. Borel, 2.5.1949

Paris le 2.5.1949

Monsieur le Directeur de l'Institut Henri Poincaré.

J'ai l'honneur de solliciter de votre haute bienveillance l'autorisation de travailler à la bibliothèque de l'Institut H. Poincaré.

Je suis licencié ès Sciences.

Recevez, Monsieur le Directeur, mes salutations distinguées.

Alexandre Grothendieck
6 rue du demi-cercle
Montreuil (Seine)[1]

[1] Avis très favorable
Paris, le 2 mai 1949
H. Cartan

## Lettre à J. Dixmier, 20.11.1950

A. Grothendieck

33 rue du Maréchal Gérard
Nancy (M et M)

Nancy le 20.11.1950

Cher Monsieur Dixmier,

## Lettre à J. Dixmier, 10.12.1950

A. Grothendieck
33 rue du Maréchal Gérard
Nancy (M et M)

Nancy le 10.12.1950

Cher Monsieur Dixmier,

Merci pour votre lettre et votre tirage à part. – Malheureusement, la suggestion que vous me faites ne m'apporte rien de neuf, car les minimisations dont vous parlez sont à fortiori incluses dans le fait de prendre un flot compact convexe *minimal* (ce qui est possible grâce au théorème de Zorn).

Il est bien vrai que dans un espace complet quelconque, l'enveloppe convexe fermé d'une partie flot compacte est encore flot compacte. Godement nous a donné la démonstration dans le cas où l'espace est séparable; dans le cas général, on remarque que d'après le théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que toute *suite* extraite de l'enveloppe convexe admet un point faiblement adhérent, ce qui ramène immédiatement au cas séparable. — Notez qu'il existe un assez grand nombre de théorèmes dont l'énoncé ne fait intervenir aucune condition de dénombrabilité, et qui ne peuvent se démontrer sans l'aide du théorème d'Eberlein (j'en connais cinq exemples au moins). Cela tient à ce que l'emploi des suites permet d'appliquer le théorème de Lebesgue sur l'intégrale d'une limite simple de fonctions bornées dans leur ensemble !

Vous me demandez avec raison comment, du théorème sur la moyenne des fonctions flot p.p., on pourrait déduire que tout groupe $G$ borné d'opérateurs dans un Hilbert est semblable à un groupe d'opérateurs unitaries. Si on savait que les fonctions sur $G$ de la forme $\varphi_{x,y}(s) = \langle T^s x, T^s y \rangle$ sont flot p.p., on n'aurait qu'à considérer la forme bilinéaire sur $H$ : $B(x,y) = M_s(\langle T^s x, T^s y \rangle) = M(\varphi_{x,y})$, où $M$ est la moyenne invariante sur l'espace des fonctions flot p.p., et l'affirmation apparaîtrait aisément. J'avais cru voir que ces $\varphi_{x,y}$ sont en effet flot p.p., mais n'en aperçois plus la raison maintenant que je vous écris, de sorte qu'il me semble bien possible que je me suis trompé – mais je n'en suis pas convaincu. Comme ces semaines-ci je suis partiellement pris par des soucis matériels de recherche de logement et de déménagement, et ai d'autre part une autre recherche en cours, je ne peux pas avant quelques semaines examiner la question de près, aussi j'ai préféré vous répondre tout de suite. – Il est à noter que la $\sigma$-translation à droite de $\varphi_{xy}$ est $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$, or si $\sigma$ parcourt le groupe $G$, $T^\sigma x$ et $T^\sigma y$ y parcourent des parties flot relativement compactes de $H$. D'autre part $(a, b) \longrightarrow \varphi_{ab}$ est application bilinéaire continue de $H \times H$ dans $C^\infty(G)$. Il n'en suit malheureusement pas pour autant que l'ensemble des $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$ est une partie flot relativement compacte de $C^\infty(G)$, car il est possible de trouver une application bilinéaire continue du produit de deux Hilberts dans un Banach, telle que l'image du produit des deux boules unité ne soit pas flot relativement compacte. – Peut-être m'étais-je trompé sur ce point ?

Je vous joins le tirage à part de ma dernière note.

Recevez mes cordiales salutations

A. Grothendieck

P. S. Les autres résultats de ma précédente lettre, et de celle-ci, ont été regardé par moi avec assez de soin pour être tout à fait certains !

## Lettre à J. Dixmier, 7.6.1951

A. Grothendieck
3 chemin du Grand Moulin
Nancy

Nancy le 7.6.1951

Cher Dixmier,

Pouvez-vous m'envoyer votre article sur la trace dans les anneaux de type fini, et votre papier aux Annals sur les "fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs…"?

Je vous signale une réponse (quasi-triviale) à une question que vous posez dans ce dernier papier (vous en connaissez probablement la réponse aujourd'hui): vous demandez si dans $T'$, convergence faible (i.e.: pour $\sigma(T', B)$) implique convergence forte, pour les suites. La réponse est non, car soit $a \in H, a \neq 0$, l'application $x \longrightarrow a \otimes x$ de $H$ dans $T'$ est évidemment un isomorphisme dans; mais si la propriété envisagé était vraie pour $T'$, elle le serait pour ses sous-espaces, donc pour $H$, ce qui est faux.

Je vous envoie mes meilleures salutations

A. Grothendieck

## Lettre à J. Dixmier, 2.5.1952

Nancy le 2.5.1952

Cher Dixmier,

Je n'ai jamais prouvé ni prétendu avoir prouvé le théorème dont tu parles, et qui d'ailleurs est faux. Il est en effet immédiat qu'il équivaudrait à l'énoncé suivant: Si $K$ est un espace compact muni d'une mesure $\mu$, $M$ l'espace des fonctions sur $K$ qui sont mesurables pour $\mu$, muni de la topologie de la convergence *simple*, $F$ un sous-espace de $M$ contenant une suite partout dense, alors il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $K_1 \subset K$ avec $|\mu|(K \cap (??) K_1) < \varepsilon$, les $f \in F$ ayant toutes une restriction à $K$ continue. Or, prends $K = (0, 1)$ avec la mesure de Lebesgue, il est (je pense) connu, et facile à démontrer (excellent exercice Bourbaki) qu'il existe une suite de fonctions mesurables sur $K$ à laquelle toute fonction numérique définie sur $K$ soit adhérente, ce qui prouve en particulier que $M$ lui-même est déjà séparable, or $M$ est loin d'avoir la propriété voulu !

Néanmoins, ton théorème sous sa forme initiale est vrai si $F$ est métrisable, comme tu t'en es sans doute convaincu tout seul, car on se ramène alors au cas où la fonction faiblement mesurable donnée prend ses valeurs dans une partie *équicontinue* de $F'$, cas où l'énoncé est trivial et figure déjà dans une rédaction antérieure. Comme le théorème est vrai encore lorsque $F$ est le dual faible d'un espace métrisable séparable $F$ (puisque alors $t \longrightarrow \lambda_t$ est *fortement* mes.), ou le dual d'un espace de Banach $F'$ (comme par exemple $\ell^\infty$) pour lequel la boule unité du dual faible $F$ de $F'$ admet une suite partout dense (même méthode que pour $F$ du type $(f)$), il rest que dans les cas usuels, le théorème envisagé est valable. On pourrait même remarquer (re-exercice?) que la catégorie d'espaces localement convexes séparables $F$ pour lesquels l'énoncé envisagé est vrai, est stable pour le produit topologique ou la somme directe d'un ensemble dénombrable d'espaces facteurs, et par l'opération de prendre un quotient ou une topologie moins fine – donc aussi pour les limites inductives dénombrables etc – en fait, on attrape tous les espaces raisonnables de l'Analyse.

Bien à toi

A. Grothendieck

## Lettre à J. Dixmier, 28.6.1954

A. Grothendieck
1052 rua Oscar Freire
Sao Paulo (Brésil)

Sao Paulo le 28.6.1954

Cher Dixmier,

Connais-tu la réponse à la question suivante. Soit $\underline{A}$ un anneau d'opérateurs dans un Hilbert $H$, existe-t-il une projection $u$ de norme $l$ de $R(H)$ sur $\underline{A}$, compatible avec l'involution, et telle que $u(ATB) = Au(T)B$ pour $A, B \in \underline{A}$ ? C'est vrai si $H$ est de dimension finie (et évidemment c'est bien facile dans ce cas), ou si $\underline{A} \supset \underline{A}'$, et de ce dernier cas on déduit facilement que c'est vrai si $\underline{A}$ est commutative (commencer à appliquer le résultat précédent à un anneau commutatif maximal $\underline{B}$ contenant $\underline{A}$, d'autre part on sait qu'il existe une projection de $\underline{B}$ sur $\underline{A}$ qui a les propriétés voulues). Bien entendu, même si $\underline{A}$ est commutatif maximal, il n'y a pas unicité de la projection $u$. Voici la démonstration du deuxième cas $\underline{A} \subset \underline{A}'$ : Soit $K$ le spectre de $\underline{A}'$, $\Omega$ l'ensemble des partitions finies de $K$ en ensembles ouverts et fermés, muni de sa relation d'ordre naturelle; pour $\omega = (\omega_i) \in \Omega$ on pose $u_\omega(T) \sum_i T_{\omega_i} T T_{\omega_i}$, on considère un ultrafiltre sur $\Omega$ plus fin que le filtre des sections croissantes, et on pose $u(T) = \lim u_\omega(T)$ (limite faible !) – Le problème m'intéresse pour pouvoir ramener les propriétés vectorielles-topologiques d'algèbres autoadjointes uniformément fermées quelconques d'opérateurs, aux propriétés de $R(H)$, d'où facilement aux propriétés de l'algèbre $R_0(H)$ des opérateurs compacts, ce qui ramènera souvent à des propriétés de nature métrique sur les $R(H)$ où $H$ est de dimension finie. De même, les propriétés des espaces duals de $C^*$-algèbres (et aussi des espaces $L^1$ qui interviennent en intégration non commutative) se ramèneraient aux propriétés des espaces $H \widehat{\otimes} H$.

À propos, en vue de simplifier l'exposé de Godement sur la transformation de Fourier des groupes loc. comp. unimod., j'ai eu besoin du résultat suivant, qui se démontre assez facilement en se ramenant à $R(H)$ : les formes linéaires positives sur une $C^*$-algèbre engendrent le dual. Cela est-il connu, ou te semble-t-il utile de publier une petite note là-dessus ?

J'espère que cette lettre t'arrivera, et que tu pourras me donner une réponse positive.

Bien à toi

A. Grothendieck

## Lettre à J. Dixmier, 18.7.1954

Sao Paulo le 18.7.1954

Cher Dixmier,

Bien merci pour la copie de ton bouquin, que je n'ai reçu qu'il y a quelques jours, et dont j'ai commencé la lecture avec grand intérêt. Je ne suis pas sur de pouvoir faire des remarques très utiles pour la rédaction, mais bien entendu je lis le crayon à la main, et te communiquerai mes observations à l'occasion. Pour l'instant, je m'aperçois que systématiquement tu n'énonces que pour les seules algèbres de von Neumann des définitions et propositions valables souvent pour des $C^*$-algèbres arbitraires, c'est parfois dommage. Pour l'instant, je te signale des erreurs (?) de détail. Page 7, il me semble que la caractérisation de $T$ dans le lemme 2, 2°, n'est pas correcte. Page 12, fin du No 2 à la ligne 5 de la fin, je pense que "et un seul" est faux, déjà si $A_i = B_i = \underline{C}$ (mais n'ai pas cherché le contre-exemple). Page 22 lignes 9-10 "il suffit" est manifestement faux, tu penses sans doute au cas $B = 0$. D'autres remarques plus tard. Quelques questions: une sous-algèbre autoadjointe uniformément fermée de $L(H)$, stable pour le sup des familles filtrantes croissantes majorées, est-elle faiblement fermée ? Une $C^*$-algèbre pour laquelle le sup d'une famille filtrante croissante majorée existe toujours, est-elle isomorphe à une algèbre de von Neumann ? Je ne le sais pas même dans le cas commutatif, ce qui prouve que je ferai bien de lire ton article dans "Summa Brasiliensis", as-tu encore des tirages à part ? Je suis aussi bien curieux de la suite du bouquin, et te suis reconnaissant pour tout papier que tu peux me passer là dessus. Feras-tu un Plancherel abstrait pour les $C^*$-algèbres, qui inclurait la théorie des caractères de Godement ?

La lecture du début de ton bouquin m'a permis aussi de répondre par l'affirmative à la question de ma lettre précédente (je viens de trouver la démonstration aujourd'hui, et ne l'ai pas encore mise par écrit canoniquement, mais je pense qu'il n'y a pas d'erreur). Soit $M$ une sous-algèbre autoadjointe abélienne maximale dans le commutant de $A'$ de l'algèbre de von Neumann $A$, on sait qu'il existe une projection de $L(H)$ sur $M'$ ayant les propriétés voulues, il suffit donc de trouver une projection analogue de $M'$ sur $A$. J'arrive à la prouver par un raisonnement direct (grâce au fait que $M'$ est engendré au sens de v.N. par $A$ et la sous-algèbre abélienne $M$ du commutant de $A$), tout à fait différent du raisonnement du premier cas, calqué plutôt sur la preuve du théorème analogue, bien connu, pour une algèbre Stonienne plongée dans un $C(K)$. Le raisonnement prouve presque qu'il existe même une projection de $M'$ sur $A$ qui est un homomorphisme, et je pense que ça doit en effet pouvoir se prouver (c'est en tous cas vrai dans le cas de la dimension finie, donc il y a de l'espoir!). – En zornifiant sur l'ensemble des sous-$C^*$-algèbres $B$ de $M'$ contenant $A$, pour lesquelles une projection $B \longrightarrow A$ du type voulu existe, il faut pouvoir passer de $B$ à son adhérence faible (ce qui est un des deux pas essentiels du raisonnement, inutile dans le cas commutatif rappelé plus haut). Pour ça, on doit introduire le bidual $B''$ de $B$, le munir canoniquement d'une structure d'algèbre de von Neumann telle que l'application naturelle $B'' \longrightarrow \overline{B}$ soit un homomorphisme *normal* de $B''$ sur $\overline{B}$ (*donc se relève*, d'où facilement une application cherchée $\overline{B} \longrightarrow A$ en composant $\overline{B} \longrightarrow B'' \longrightarrow A$). Pour ces histoires de bidual de $C^*$-algèbre, il faut seulement utiliser le résultat sur le dual que je t'avais signalé dans ma lettre précédente, et qui est presque trivial : *Soit $A$ une $C^*$-algèbre, $u$ une forme linéaire hermitienne continue sur $A$, alors on a $u = v - w$, où $v$ et $w$ sont positives, et $||v|| + ||w|| = ||u||$.* Démonstration : Soit $K$ la partie de $A'$ formée des formes positives de norme $\leq 1$, c'est une partie convexe faiblement compacte contenant 0, et il est trivial que pour $x \in A$, $x$ hermitien, on a $||x|| = \sup |\langle x, x' \rangle|, x' \in K$. Se bornant aux sous-espaces hermitiens de $A$ et $A'$, le théorème des bipolaires montre que la boule unité de $A'_h$ est l'enveloppe convexe symétrique faiblement fermée de $K$, i.e. l'ensemble des $x$ (??) $\lambda u \mu w$, où $\lambda$, $\mu \leq 0$, $\lambda + \mu = 1$, $v$, $w \in K$ (cet ensemble est déjà faiblement compact, car $K$ l'est), ce qui prouve le théorème. Si on ne suppose plus $u$ hermitienne, on aura $u = v + iw$ avec $v$, $w$ hermitiennes et $||v||, ||w|| \leq ||u||$, et on peut appliquer à $v$ et $w$ le résultat précédent. – De plus, le raisonnement prouve que réciproquement, si $A$ est une algèbre normée complète qui satisfait au théorème précédent (mais où on suppose $v$ et $w$ “bornées” – ce qui est automatiquement vrai si $A$ a une unité), alors (du moins sur sa partie hermitienne) sa norme est la norme polaire de $K$ donc une norme satisfaisant aux identités algébriques qui caractérisent les $C^*$-algèbres. Si on suppose seulement que les formes positives engendrent algébriquement le dual de $A$, on peut encore dire (en utilisant Baire) que la norme de $A$ est *équivalente* à la $C^*$-norme polaire de

$K$, donc que par un changement de norme $A$ devient une $C^*$-algèbre. – Enfin, il est probable que dans l'énoncé du théorème plus haut, $v$ et $w$ soient uniques (peut-être en leur imposant d'autres conditions); il en résulterait que si $u$ est centrale, $v$ et $w$ le sont etc. Mais je ne me suis pas amusé à regarder ça de près.

Merci aussi pour ta lettre où tu réponds à mes questions. Je te salue amicalement

A. Grothendieck

## Lettre à J. Dixmier, 13.8.1954

1052 rua Oscar Freire
Sao Paulo (Brésil)
USA

Sao Paulo le 13.8.1954

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre détaillée du 28.7. C'est bien dommage que tu penses la théorie des $C^*$-algèbres trop vaste pour être englobée dans ton bouquin. Mais où serait le mal d'un livre de 400 pages ou plus sur ce sujet, ça serait au contraire bien agréable qu'il en existe un, car ce n'est certes pas amusant de s'orienter à tâtons dans la littérature courante. Je regrette surtout que tu ne fasses pas Plancherel ; car il ne coûte vraiment pas cher, puisqu'on a déjà la bonne technique des algèbres de v.N., et un Plancherel joliment présenté ferait certainement du bien. D'ailleurs, si j'ai bien compris, c'est surtout pour des Plancherels et Cie que sert toute la théorie des $C^*$-algèbres.

Je précise un point de ma lettre précédente, qui te semblait obscur. Soit $A$ une $*$-algèbre, $P$ l'ensemble des formes positives, unitaires, bornées (au sens algébrique) et normées (i.e. $f(1) = 1$ s'il y a unité) sur $A$. Soit pour tout $x \in A$ : $N(x)^2 = \sup_{f \in P} f(x * x)$, alors on a aussi $N(x) = \sup ||U_x||$, où $U$ parcourt toutes les représentations unitaires de $A$. Donc $N$ est une norme sur $A$ telle que l'algèbre complétée de $A$ soit une $C^*$-algèbre, et les représentations unitaires de $A$ correspondent biunivoquement à celles de cette $C^*$-algèbre (qui se substitue donc avantageusement à $A$ dans diverses questions, p. ex. Plancherel)[2]. Supposons maintenant que $A$ soit déjà muni d'une norme $||x||$ qui en fasse une algèbre normée complète, et pour simplifier supposons qu'il existe une unité. Alors les formes positives unitaires et bornées sont identiques aux formes positives *continues*, les formes normées sont celles telles que $f(1) = 1$, ou encore celles de norme 1. Elles forment une partie convexe faiblement compacte de la partie hermitienne du dual de $A$. La partie hermitienne de ce dual est le dual de la partie hermitienne de $A$, il revient

[2] Si $x \in A$ est hermitienne, $N(x) = \sup_{f \in P} |f(x)|$

donc au même de dire que sur $A_h$, la norme donnée est égale à $N(x) = \sup|f(x)|$, ou que la boule unité de $A'_h$ est l'enveloppe disquée (disquée = convexe symétrique) faiblement fermée de $P$. Cette dernière par raison de faible compacité n'est autre que l'ensemble des formes $f - g$, $f$ et $g$ positives, $||f|| + ||g|| \leq 1$. S'il en est donc ainsi, la norme donnée est identique à la norme $N$ sur $A_h$, et par suite *équivalente* à $N$ sur $A$ (car du point de vue réel, une algèbre normée involutive est somme directe topologique de sa partie hermitienne et de sa partie antihermitienne). Donc $A$ est complète pour $N$, donc à condition de changer $||x||$ par une norme équivalente, $A$ devient une $C^*$-algèbre. Si on ne veut plus que les deux normes coïncident sur la partie hermitienne, il suffisait même de suppose que toute forme hermitienne sur $A$ est différence de deux formes positives, i.e. que $SA'_h$ est *engendré* par l'enveloppe disquée $Q$ de $P$. Car $A'_h$ étant tonnelé, il en résulte que $Q$ est un voisinage de $O$, donc par polarité que les normes $||x||$ et $N(x)$ sur $A_h$ (donc aussi sur $A$) sont équivalentes.

Soit $A$ une $C^*$-algèbre. Par bitransposition, toute représentation unitaire de $A$, soit $x \longrightarrow U(x)$, se prolonge en une application de même norme du bidual $A''$ dans $L(H)$, et de façon précise sur l'adhérence faible de $U(A)$. Si toute forme positive sur $A$ est de la forme $(U(x)a, a)$ (pour ceci, on prend pour $U$ la somme hilbertienne des représentations unitaires associées aux diverses formes positives normées sur $A$), la bitransposée $U''$ est biunivoque, et identifie donc $A''$ à une algèbre de von Neumann. On voit aussitôt que la topologie ultrafaible de $A''$ est $\sigma(A'', A')$, en particulier les formes positives normales sur $A''$ sont les formes positives quelconques sur $A$. De plus, on constate aussitôt que si $V$ est une représentation unitaire de $A$, alors $V''$ est une représentation normale de $U''$ (ce qui établit une correspondance biunivoque entre les représentations unitaires quelconques de $A$, et les représentations normales de $A''$). Cela établit d'ailleurs le fait (facile directement aussi) que la structure d'algèbre de v.N. sur $A''$ est canonique. Ceci me semble commode dans bien des cas. Ainsi on appellera support d'une forme positive sur $A$ le support de la forme normale sur $A''$ qu'elle définit (mais gaffe, si $A$ est de v.N. et si la forme donnée est déjà normale, ça fait deux supports différents). Deux formes positives seront dites disjointes si leurs supports sont orthogonaux. Cette fois-ci, il n'y a pas d'ambiguïté quand $A$ est déjà une algèbre de von Neumann et $u$ et $v$ normales, comme il résulte par exemple de la proposition (bien facile): deux formes positives $u$, $v$ sur la $C^*$-algèbre $A$ sont disjointes si et seulement si $||u-v|| = ||u|| + ||v||$.

J'en viens à la question d'unicité de la décomposition d'une forme linéaire hermitienne $\varphi$ comme différence de deux formes positives disjointes $u$ et $v$. On peut supposer $A$ une algèbre de v.N. et $u$, $v$ normales. Alors on a un résultat plus général : Soient $u$, $v$ deux formes positives (finies ou non) normales définies sur $A^+$, et semi-finies (par quoi on entend qu'il existe un idéal bilatère faiblement dense, sur la partie positive duquel $u$ resp. $v$ est fini). La notion de support est définie de façon évidente; supposons les supports de $u$ et $v$ orthogonaux. Alors je dis que $u$ et $v$ sont uniquement déterminés par la connaissance de la forme $u-v$ (qui est une forme linéaire sur un idéal bilatère faiblement dense convenable de $A$ ; noter que l'ensemble des idéaux bilatères faiblement denses est une base de filtre, ce qui précise le sens de l'énoncé précédent). La démonstration est absolument élémentaire (pas de décompositions spectrales !), on montre directement comment $u$ et $v$ peuvent s'exprimer en termes de $\varphi = u - v$. En fait, on peut encore affaiblir la notion de semi-fini dans cette démonstration. Corollaire: si $\varphi$ est centrale, $u$ et $v$ sont des traces etc. Mais question: si on ne suppose pas $u$ et $v$ disjointes, peut-on écrire pourtant $\varphi$ comme différence de deux formes positives normales semi-finies *disjointes* ? C'est bien plausible, mais je n'ai pas encore regardé. – Bien entendu, si on ne suppose plus que $A$ est une algèbre de v.N., on a des mêmes énoncés sans condition de normalité, mais la condition de semi-finitude étant ici remplacée par l'existence d'un idéal bilatère dense (*pour la norme*) sur lequel la forme positive envisagée est finie (ce qui rejoint le point de vue de Godement dans son exposé de Plancherel). On devra passer comme toujours à $A''$ (mais j'avoue que je n'ai pas fait les vérifications).

Enfin, dans la décomposition canonique $\varphi = u - v$ avec $u$ et $v$ positives, $||\varphi|| = ||u|| + ||v||$, si $A$ est de v.N. et $\varphi$ ultrafaiblement continue, alors $u$ et $v$ le sont aussi (i.e. sont normales). Il suffit d'exhiber une telle décomposition, avec $u$ et $v$ normales. Mais la topologie ultrafaible de $A$ étant induite par la top. ultrafaible d'un $L(H)$, on peut supposer $A = L(H)$. Mais alors on a une forme bien explicite des formes hermitiennes ultrafaiblement continues, données par des opérateurs à trace hermitiens, dont la décomposition spectrale donne la décomposition voulue.

Malheureusement, je n'ai pas vu de démonstration générale du théorème de commutation suivant (qu'il suffit maintenant d'énoncer pour les formes positives): Soit $A$ alg. de v.N., $u$ une forme positive normale sur $A$ (en fait, il devrait être inutile de suppose $u$ finie, semi- finie devrait suffire), soit $B$ son "commutant" dans $A$. Alors, $B$ contient son commutant $B'$ dans $A$. Cela suggère une théorie de la commutation, qui serait la suivante: dis-moi si par hasard tu ne sais pas si elle est fausse. (Mais il me semble que le seul cas présentant des difficultés – i.e. qui ne se réduit pas par des techniques connues de décompositions spectrales – est celui d'une algèbre purement infinie). On prend les commutants dans $A$ (laissant tomber $L(H)$ !), notation $B'$, $B''$ etc. Une sous-algèbre de v.N. de $A$ est dite close, si elle est identique à son bicommutant (question : suffit-il qu'elle contienne le centre ?) Soit $P$ l'ensemble des formes positives normales semi-finies sur $A$. (Il est cependant possible que la définition donnée plus haut de semi-finie soit trop stricte. Car alors sur un facteur purement infinie, donc simple, une forme semi-finie serait automatiquement finie ; alors ça semble trop beau que la théorie esquissée ci-dessous puisse marcher). On dit que $x \in A$ et $U \in P$ commutent, si $u(xy) = u(yx)$ pour tout $y$ dans un idéal bilatère faiblement dense assez petit (définition sujette à variation, voir ci-dessus). D'où notion de commutant $\gamma(B)$ dans $P$ d'une partie de $A$, et commutant $\gamma(M)$ dans $A$ d'une partie $M$ de $P$. Voici ce qui devrait être vrai (et est vrai dans le cas d'une algèbre semi-finie):

Th. 1. — *Les parties de A qui sont des commutants $\gamma(M)$ ($M \subset P$) sont exactement les sous-algèbres closes.*

(Ce théorème serait faux, déjà pour $A = L(H)$, si on restreignait $P$ aux formes finies). Une partie $M$ de $P$ est dite close, si c'est le commutant $\gamma(B)$ d'une partie de $A$. Une intersection de partie closes est close, d'où partie close engendrée. Si $M \subset P$, soit $\sigma(M) = \gamma(M)'$, $M \longrightarrow \sigma(M)$ établit une correspondance biunivoque entre les parties closes de $P$ et celles de $A$. On dit que $M$ et $N$ commutent, si $\sigma(M)$ et $\sigma(N)$ commutent. Pour ceci, il faut et il suffit que tout élément de $M$ commute à tout élément de $N$. Partie commutative de $P$ : qui commute à elle-même. Deuxième conjecture:

Th. 2. — *Tout $u \in P$ commute à lui-même, i.e. la partie close qu'il engendre est* *commutative (ou encore $\gamma(M)$ contient son commutant, ou encore $\sigma(u)$ est commutative). Alors (supposant pour simplifier que supp. $u = 1$), la partie close engendrée par $u$ est identique à l'ensemble des bornes supérieures dans $P$ des ensembles de formes ${}^x u = u^x$, où $x$ parcourt la partie positive de $\sigma(u)$. Si $u$ est finie, l'ensemble des formes finies qui sont dans la partie close engendrée par $u$, est aussi l'adhérence de l'ensemble des ${}^x u = u^x$ (pour la norme du dual de $A$).*

On pose bien entendu ${}^x u(y) = u(yx)$, $u^x(y) = u(xy)$ ; si $x$ est positive et $x \in \sigma(u)$, alors ${}^x u = u^x$ est une forme positive (semi-finie). Enfin:

Th. 3. — *Pour qu'une partie close $M$ de $P$ (resp. de la partie $P_0$ de $P$ formée des formes positives finies) soit commutative, il faut et il suffit que ce soit un lattice (existence du* sup *de deux éléments).*

En vertu du théorème de Kakutani, il s'ensuivra que l'espace vectoriel engendré par $M$ (dans le cas où $M \subset P_0$) est isomorphe avec toutes ces structures à un espace $L_1$, dont le dual sera alors $\sigma(M)$[3]. – Bien entendu, on dira qu'une partie de $P_0$ est close si c'est l'intersection de $P_0$ avec sa clôture dans $P$.

Dans le cas où $A$ est finie, la théorie se simplifie, car il suggit dans le th. 1 de ne considérer que des formes positives finies ; elle est d'ailleurs à peu près triviale dans ce cas. Dans le cas général, si on est embêté par la considération de formes positives non finies, on peut ignorer l'énoncé 1, et n'envisager que les deux autres énoncés, dans le cas de formes finies.

Dernière question, qui ne devrait pas être très vache : sait-on si toute forme linéaire ultrafaiblement continue $u$ sur l'algèbre de v.N. A admet une décomposition polaire $u =^U v$, avec $v$ forme positive normale, et $U$ partiellement isométrique ? Bien entendu, il y a aussi des questions d'unicité, sous des conditions faciles à préciser.

Pour la démonstration du théorème sur la projection de $L(H)$ sur une sous-algèbre de v.N., je t'enverrai une copie dès que j'aurai rédigé ça. J'écrirai peut-être un petit article à l'occasion.

[3] ou du moins un quotient de $\sigma(M)$ (car dans le cas du type purement infini, s'introduit une question de supports. Ainsi, $M = \{0\}$ est alors stable, c'est le commutant $\gamma(A)$ de $A$, donc $\sigma(M) = Z$, or $Z \neq 0$ n0est pas le dual de $\{0\}$ !)

J'espère que mes questions ne finissent pas par t'embêter. Meilleures salutations.

A. Grothendieck

P.S. Écris-moi plutôt à mon adresse personnelle, c'est plus sur. – Je sais démontrer qu'en décomposant une distribution centrale de type positif sur un groupe de Lie, on peut se borner à des caractères qui sont des distributions (d'ordre un de plus). Ce n'est pas bien profond d'ailleurs. Est-ce que ça se savait déjà ?

## Lettre à J. Dixmier, 24.1.1955

A. Grothendieck
1645 Kentucky Street
Lawrence (Kansas)
USA

Lawrence 24.1.1955

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre. Bien que je me doutais qu'une partie des notions introduites dans mon papier (sinon toutes) devaient être connue, je ne connaissais aucune bibliographie, et ne savais pas, en effet, que les $\Delta_A(t)$ avaient été considérés par [Richard] Kadison. A-t-il aussi la "formule fondamentale" $\Delta_{|AB|} \leq \Delta_{|A|}\Delta_{|B|}$ ?

Je ne t'ai jamais demandé si une forme linéaire hermitienne ultrafaiblement continue sur une $C^*$-algèbre se décompose sous la forme $\varphi_1 - \varphi_2$, avec $\varphi_1, \varphi_2 >> 0$ et $\varphi_1$ et $\varphi_2$ disjointes. Si je me rappelle bien, je t'ai au contraire donné la démonstration dans la dernière lettre de Sao Paulo (mais *l'as-tu reçue ?*) C'était une lettre fort longue, écrite à la machine, où je posais un tas de conjectures[4]. Je n'ai jamais eu de réponse. Mais peut-être n'as-tu pas pu déchiffrer mon écriture dans une lettre antérieure (?!). En effet, on prouve

a) Toute $\varphi$ hermitienne continue sur une $C^*$-algèbre $A$ s'écrit $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, avec $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$, $\varphi_1, \varphi_2 >> 0$ (Hahn-Banach) ;

b) Cette décomposition est unique. La condition $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$ équivaut aussi au fait que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont disjointes ;

c) Si $\varphi$ est ultrafaiblement continue (sur $A$ supposé de von Neumann), $\varphi_1$ et $\varphi_2$ le sont.

[4] Je t'y donnais aussi la démonstration explicite que si $A$ est une $*$-algèbre normée complète telle que toute forme linéaire hermitienne continue sur $A$ est différence de deux formes positives, alors (par changement de norme) $A$ est équivalente à une $C^*$-algèbre.

c) est immédiat, car il suffit de prouver l'existence d'au moins une décomposition $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi_1$ et $\varphi_2 \in A_*$, $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$. Par Hahn-Banach, on est ramené au cas où $A = L(H)$. Mais alors $A_* = L'(H)$ (espace des opérateurs de Fredholm), et la décomposition d'un opérateur de Fredholm hermitien en sa partie positive et négative donne le résultat cherché.

Quant à la preuve de b), je n'ai pas les papiers sous la main (ils sont dans une grosse malle qui va arriver dans quelques semaines). Aussi il vaut mieux que je te la donne quand j'aurai les papiers. J'ai une rédaction complète de ce fourbi (il n'y a donc pas de canular imprévu à craindre, je pense !).

As-tu l'intention de regarder les questions que je pose dans mon papier sur les inégalités de convexité. Et si oui, penses-tu que le fourbi mérite une rédaction soigneuse dans un "joint paper" ? En ce cas, il serait sans doute préférable que tu assumes la rédaction, pour le bien du lecteur !

Je suis en train de passer en revue mes éléments de top. alg. et me délecte dans des diagrammes variés. J'ai beaucoup de temps à moi, et suis ici tout à fait bien.

Amitiés

A. Grothendieck

## Lettre à N. Bourbaki, 9.10.1960

Paris le 9.10.1960

Monsieur et cher Maître,

Je Vous remercie pour votre lettre, empreinte à la fois de sagesse et de mansuétude. Il semble vain en effet qu'un différend personnel puisse être l'occasion du départ d'une disciple. Je reconnais qu'il était vain que j'attende du Maître qu'il arbitre une quérelle qui ne le concerne pas, et qu'un tel arbitrage ne pouvais résoudre rien.

Je me suis interrogé plusieurs fois pendant les annés de ma collaboration avec le Maître si mes habitudes peu sociables, mon caractère passioné et ma répugnance à vainore les répugnances d'autruix, ne me rendaient inapte à une collaboration fertile pendant les congrès. Sans plus vouloir chercher la cause ailleurs qu'en moi-même, je pense maintenant qu'il en est bien ainsi, et que j'ai atteint avant l'âge traditionnel le moment où je servirai mieux le Maître par mon départ, qu'en restant sur Ses amicales instances.

Je m'efforcerai de rester digne des enseignements que Vous m'avez prodigués pendant si longtemps et de ne pas trahir l'exprit du Maître, qui, je l'espère, restera visible dans mon travail comme par le passé.

Votre très dévoué élève et serviteur,

A. Grothendieck

## Letter to N. Bourbaki, 9.10.1960

Paris 9.10.1960

Dear Sir and my dear Master,

I thank You for your letter, marked by both wisdom and clemency. Indeed it seems pointless that a personal disagreement could be the occasion for the departure of a disciple. I recognize that it was pointless for me to wait for the Master to arbitrate a quarrel that did not concern him and that such arbitration would resolve nothing.

I have asked myself many times over the years of my collaboration with the Master whether my lack of social skill, my impassioned character, and my repugnance for overcoming the repugnance of others, did not render me unsuitable for a productive collaboration during the meetings. No longer wanting to search for the cause anywhere except in myself, I now think that it is better this way and that I reached earlier than the traditional age the moment when I would better serve the Master by my departure, rather than remaining as a result of His kind insistence.

I will endeavor to remain worthy of the teachings that You for so long lavished upon me and not to betray the spirit of the Master who, I hope, will remain visible in my work as it has been in the past.

Your very devoted pupil and servant,

A. Grothendieck

## Letter to J. Murre, 18.7.1962

July 18, 1962

My dear Murre,

I recently had some thought on finiteness conditions for Picard preschemes, and substantially improved on the results stated in the last section of my last Bourbaki talk. The main result stated there for a simple projective morphism with connected geometric fibers (namely that the pieces $\underline{\mathrm{Pic}}^P_{X/S}$ are of finite type over $S$) has been extended by Mumford to the case where instead of $f$ simple we assume only $f$ flat with integral geometric fibers, (at least if these are normal). Using his result (the proof of which is quite simple and beautiful), I could get rid of the normality assumption, and even (as in theorem 4.1. of my talk) restrict to the consideration of the two first non trivial coefficients of the Hilbert polynomials. The key results for the reduction are the following (the proofs being very technical, and rather different for (i) and (ii), except that (ii) uses (i) to reduce to the normal case; moreover (ii) uses Mumford's result and the equivalence criteria as developed in my last Seminar):

(i) Let $X$, $Y$ be proper over $S$ noetherian, let $f : X \longrightarrow Y$ be a *surjective* $S$-morphism, assume for simplicity of the statement that the Picard preschemes exist, then $f : \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ is of finite type (and in fact affine if $S$ is the spectrum of a field), i.e. a subset $M$ of $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ is quasi-compact iff its image in $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ is.

(ii) The same conclusion holds for a canonical immersion $X \longrightarrow Y$, is $Y/S$ is projective with fibers all components of which are of dimension $\geq 3$, and if $X$ is the sub-scheme of zeros of a section over $Y$ of an invertible sheaf $\underline{L}$ ample with respect to $S$.

A connected result is that for any $X/S$ proper, and integer $n \neq 0$, the $n$-th power homomorphism in the Picard prescheme is of finite type.

I tell you about this, namely (i), because of the method of proof, involving of course considerations of non flat descent. The fact that I do not have any good effectivity criterion does not hamper, by just recalling what the effectivity of a given descent datum means. Now it turns out that by a slightly more careful analysis of the situation, one can prove the following theorem, of a type very close to the one you have proved recently, and to some you still want to prove as I understand it.

Theorem. — *Let $S$ be an integral noetherian scheme, $X$ and $X'$ proper over $S$ and $f : X' \longrightarrow X$ a surjective $S$-morphism, look at the corresponding homomorphism for the Picard functors $f^\bullet : \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X'/S}$. Assume:*

*a) the existence problems A and B defined below for $X/S$ has always a solution (this is certainly true when $X/S$ is projective).*

*b) the morphism $f_S : X'_S \longrightarrow X_S$ induced on the generic fiber is a morphism of descent, i.e. $\underline{O}_{X_s} \longrightarrow f(\underline{O}_{X'_s}) = h(\underline{O}_{X''_s})$ is exact. Then, provided we replace $S$ by a suitable non empty open set, the homomorphism $f^\bullet$ is representable by a quasi-affine morphism, more specifically in the factorisation of $f^\bullet$ via the functor representing suitable descent data, $f^\bullet = vu$ with $u$ affine and $v$ a monomorphism (as you well know), $v$ is in fact representable by finite direct sums of immersions.*

Corollary **1**. — *Without assuming b), but instead in a) allowing $X/S$ to be replaced by suitable other schemes $X_i$ finite over $X$, the same conclusion holds, namely $f^\bullet$ is representable by quasi-affine morphisms.*

This follows from the theorem, using a suitable factorisation of $f$. For instance, using Chow's lemma and the Main existence theorem in my first talk on Picard schemes, one gets:

Corollary **2**. — *Assume $X/S$ proper satisfies the condition*

*a') for every $X'$ finite over $X$, there exists a non empty open subset $S_1$ of $S$ such that problem A for $X'$ $S_1$ has always solution (this condition is satisfied if $X/S$ is projective).*

*Then provided we replace $S$ by a suitable $S_1$ non empty and open, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ exists, is separated, its connected components are of finite type over $S$.*

**N.B.** The proof does not give any evidence towards the fact that in the theorem, one could replace "quasi-affine" by "affine". This is true however over a field, because a quasi-affine algebraic group is affine!

It would be interesting to have a counterexample, say, over a ring of dimension 1 such as $k[t]$, $X$ and $X'$ projective and simple over $S$ and $X' \longrightarrow X$ birational, or alternatively, $X$ and $X'$ projective and normal over $S$, and $f: X' \longrightarrow X$ finite. A counterexample in the latter case would of course provide a counterexample to the effectivity problem for a finite morphism raised in my first talk on descent…

"Problem A" is the following: given $X/S$ and Module $F$ on $X$, to represent the functor on the category of $S$-preschemes taking any $S'/S$ into a one-element or into the empty set, according as to whether $F'$ on $X'/S'$ is flat with respect to $S'$ or not, where $X' = X \times_S S'$, $F' = F \times_S S'$.

Given $X/S$, we say that "Problem A for $X/S$ has always a solution" if for every constant $F'$ on some $X'/S'$, the previous functor on $\mathrm{Sch}/S'$ is representable by a $S'$-scheme of finite type. The main step in my proof of existence of Hilbert schemes shows that this condition is satisfied when $X/S$ is projective. In the proof, essential use is made of the Hilbert polynomial, in fact we get a solution as a disjoint sum of subschemes of $S$ corresponding to various Hilbert polynomials. Still I would expect that the functor is representable as soon as $X/S$ is proper. In view of the application we have in mind here, it would be sufficient (for any integral $S$) to find in $S$ a non empty open set $S_1$ such Problem A has always a solution for $X_1 = X \times_S S_1$ over $S_1$. To prove this weaker existence result, it is well possible that a reduction to the projective case is possible, using Chow's lemma and some induction on the relative dimension perhaps. I also would expect that a proof will be easier when working over a complete noetherian local ring, hence the case of a general noetherian local ring by flat descent. Ans it is well possible that, putting together two such partial results, a proof of the existence in general could be obtained. (I met with such difficulties already time ago in a very analogous non projective existence problem, which beside I did not solve so far!). This problem A has been met also by Hartshorne (A Harvard Student), but I doubt he will work seriously on it. Thus I now wrote you in the hope you may be interested to have a try on this problem. As a general fact, our knowledge of non projective existence theorems is exceedingly poor, and I hope this will change eventually.

Sincerely yours.

A. Grothendieck

## Letter to J. Tate, 5.2.1962

Paris Feb 5, 1962

Dear John,

In connection with my Bourbaki talk, I pondered again on Picard schemes. For instance, as I told Mumford, I proved that if $X/S$ is projective and simple, then $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ is of finite type over $S$. More generally, the decomposition of $\mathrm{Pic}_{X/S}$ according to the Hilbert polynomials (in fact, the first two non trivial coefficients of the polynomial suffice) consists of pieces which are of finite type, hence projective over $S$. Another way of stating this is to say that a family of divisors $D_i$ on the geometric fibers of $X/S$ is "limited" iff the projective degrees of the $D_i$ and $D_i^2$ are bounded.

Another result, of interest in connection with your seminar, is a proof of the fact that, for an abelian scheme $A/k$, $k$ a perfect field, the absolute formal scheme of moduli over $\mathbb{W}_\infty(k)$ is simple over $k$. This comes from the following general fact: Let $X_0/S_0$ be simple, $X_0'/X_0$ étale, $S_0$ subscheme of $S$ defined by an ideal $J$ of square $0$. Let $\xi_0 \in \mathrm{H}^2(X_0, \mathfrak{G}_{X_0/S_0} \otimes_{O_{S_0}} J)$ and $\xi_0' \in \mathrm{H}^2(X_0', \mathfrak{G}_{X_0'/S_0} \otimes_{O_{S_0}} J)$ be the obstruction for lifting. Then $\xi_0'$ is the inverse image of $\xi_0$ under the obvious map. As a consequence, if $X_0/S_0$ is abelian, taking $X_0' = X_0$, $X_0' \longrightarrow X_0$ multiplication by $n$ prime to the residue characteristic, we get $\xi_0 = n^*(\xi_0)$. If $S = \mathrm{Spec}\,\Lambda$, $\Lambda$ local artin, and $mJ = 0$, then we are reduced to an obstruction in the $\mathrm{H}^2$ of the reduced $X_0 \otimes_{\Lambda_0} k = A$, satisfying $\xi = n^*(\xi)$ for $n$ prime to $p$. Using the structure

$$\mathrm{H}^*(A, \mathfrak{G}_{A/k}) \simeq \bigwedge^{*} \mathrm{H}^1(A, O_A) \otimes t_A,$$

we get $n^*(\xi) = n^3\xi$, hence $(n^3 - 1)\xi = 0$. Taking $n = -1$ we get $2\xi = 0$, hence $\xi = 0$, and we win!

I just noticed the proof does not give any information for residue char. $= 2$! Here is a simple proof valid in any char.: Consider the obstruction $\eta_0$ for lifting $X_0 \times_{S_0} X_0$, then $\eta_0 = \xi_0 \otimes 1 + 1 \otimes \xi_0$, and $\eta_0$ is invariant under the *automorphism* $(x, y) \rightsquigarrow (x, y + x)$ of $X_0 \times_{S_0} X_0$. Thus we get an element $\xi = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i \wedge e_j$ in $\mathrm{H}^2(A, O_A) = \bigwedge^2 t$, s.th. $\eta = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i' \wedge e_j' + \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i'' \wedge e_j''$ in $\bigwedge^2 (t \oplus t)$ is *invariant* under $(x, y) \rightsquigarrow (x, y + x)$, carrying $e'_i \rightsquigarrow e'_i + e''_i$ and $e''_i \rightsquigarrow e''_i$, hence trivially $\xi = 0$!

As a consequence, we get that the scheme of moduli for the *polarized* abelian schemes, with polarizations degree $d$, is simply over $Z$ at all those primes $p$ which do not divide $d$. This comes from the fact that the obstruction to polarized lifting lies in a module $\mathrm{H}^2(A, E)$, where $E$ is an extension (the "Atiyah extension") (*)

$$0 \longrightarrow O_A \longrightarrow E \longrightarrow \mathfrak{G}_{A/k} \longrightarrow 0$$

whose class $c$ in $\mathrm{H}^1(A, \Omega^1_{A/k})$ is just the Chern class $\frac{dL}{L}$ of the invertible sheaf $L$ on $A$ defining the polarization. Now in the exact sequence of cohomology for (*), the map

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^i(\mathfrak{G}_{A/k}) & \xrightarrow{\partial^{(i)}} & \mathrm{H}^{i+1}(\mathrm{O}_A) \\ \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\ \bigwedge^i t' \otimes t & & \bigwedge^{i+1} t' \end{array} \qquad t = t_A, \quad t' = t_{\hat{A}}$$

is trivially described in terms of

$$c \in \mathrm{H}^1(A, \Omega^1_{A/k}) \simeq \mathrm{Hom}(t, t'),$$

where the homomorphism $c : t \longrightarrow t'$ is just the tangent map for $\varphi : A \longrightarrow \hat{A}$ defined by the polarization. This map being surjective by assumption, $\partial^{(i)}$ is surjective, hence $\mathrm{H}^i(E) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathfrak{G}_{A/k})$ is injective, in particular

$$\mathrm{H}^2(E) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathfrak{G}_{A/k})$$

is *injective*. As the obstructions obtained in $\mathrm{H}^2(\mathfrak{G}_{A/k})$ are zero, the same holds for the polarized obstructions in $\mathrm{H}^2(E)$, hence the assertion of the simplicity. (If however $p|d$, simplicity *does not hold at any* point of $M$ over $p$!)

Using the simplicity for the formal scheme of moduli of abelian varieties, I can prove the following:

Let $X/\Lambda$ be flat, proper, $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X_0, O_0)$, where $\Lambda$ is local artin with residue field $k$. Assume $\mathrm{Pic}_{X_0/k}$ exists, and is *simple* over $k$, i.e. $\dim\mathrm{Pic}_{X_0/k} = \dim\mathrm{H}^1(X_0, O_{X_0})$ (always true in char 0). Then

a) $\mathrm{Pic}^0_{X/\Lambda}$ exists and is an *abelian* scheme over $\Lambda$.

b) The "base extension property" holds for $\mathrm{R}^i f_*(O_X)$ in dimension 1, and more generally in any dimension $i$ such that

$$\bigwedge^i \mathrm{H}^1(X_0, O_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_0, X_0)$$

is *surjective*, and $\mathrm{H}^1(X, O_X)$ is free over $\Lambda$.

Idea of proof:

a) $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$ is constructed stepwise. Having $\mathrm{Pic}^0_{X_{n-1}/k} = A_{n-1}$, to get $A_n$ we first lift *arbitrarily* $A_{n-1}$ to an abelian scheme $A'_n$. We then try to construct the can. invertible "Weil sheaf" on $X_n \times_{\Lambda_n} A'_n$, extending the given Weil sheaf on $X_n \times_{\Lambda_{n-1}} A_{n-1}$. The obstruction lies in

$$\mathrm{H}^2(X_0 \times A_0, O_{X_0 \times A_0}) \simeq \mathrm{H}^2(O_{X_0}) \times \mathrm{H}^2(O_{A_0}) \times \mathrm{H}^1(O_{X_0}) \otimes \mathrm{H}^1(O_{A_0})$$

and in fact, as easily seen, in the last factor $\mathrm{H}^1(X_0, O_{X_0}) \otimes \mathrm{H}^1(A_0, O_{A_0}) \simeq t_{A_0} \otimes \mathrm{H}^1(A_0, O_{A_0}) \simeq \mathrm{H}^1(A_0, \mathfrak{G}_{A_0/k})$. This space is exactly the group operating in a simply transitive way on the set of all extensions of $A_{n-1}$. Thus we can *correct* $A'_n$ in just one way to get an $A_n$ with a "Weil sheaf" on it!

This does it.

b) Let $\omega$ be the conormal sheaf to the unit section of $A = \mathrm{Pic}^0_{X/S}$, thus $\omega$ is *free* because $A/S$ is simple, and by definition of $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ we have

$$\mathrm{H}^1(X, O_A) \simeq \mathrm{Hom}(\omega, O_S)$$

This description holds also after any base extension, hence the fact that $\mathrm{H}^1(X, O_S)$ is free over $\Lambda$ and its formation commutes with base extension. This implies also $\mathrm{H}^1(X, O_X) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_0, O_{X_0})$ surjective, hence $\mathrm{H}^i(X, O_X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_0, O_{X_0})$ is surjective for the $i$'s as in the theorem, ok.

Corollary. — *Let $A/S$ be any abelian scheme, then the modules $\mathrm{R}^i f_*(O_A)$ on $S$ are locally free and in fact $\simeq \bigwedge^i \mathrm{R}^1 f_*(O_A)$. If $\mathrm{Pic}_{A/S}$ exists, then $\mathrm{Pic}^0_{A/S}$ is open and is an abelian scheme over $S$.*

(Moreover, biduality holds, as follows easily from the statement over a field...)

Corollary. — *Let* $f : X \longrightarrow S$ *be flat, proper,* $k(s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X_s, O_{X_s})$ *for every* $s$, *let* $s \in S$ *be such that* $dim\mathrm{H}^1(X_s, O_{X_s}) = dim\mathrm{Pic}_{X_s/k(s)}$, *(the latter defined, if* $\mathrm{Pic}_{X_s/k(s)}$ *is not known to exist, in terms of the formal Picard scheme). Then* $\mathrm{R}^1 f_*(O_X)$ *is free at* $s$.

This is always applicable if char $k = 0$.

I do not know if, in the case considered, the $\mathrm{R}^i f_*(O_X)$ or even $\mathrm{R}^i f_*(\Omega^j_{X/S})$ are also free at $s$, even in char 0. It is true for $f_*(\Omega^1_{X/S})$ whenever we know that $\dim \mathrm{H}^1(X_s, O_{X_s}) = \dim \mathrm{H}^0(X_s, \Omega^1_{X_s})$, for instance if char $k(s) = 0$ and $f : X \longrightarrow S$ is projective and simple. (If *moreover* $S$ is reduced, Hodge theory implies *all* $\mathrm{R}^i f_*(\Omega^j_{X/S})$ are free at $s$; but if $S$ is artin, I have no idea!)

I now doubt very much that it be true in general that $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ is flat over $S$, or even only universally open over $S$, when $X/S$ is simply. Here is an idea of an example, inspired by Igusa's surface. Let $A/S$ be an abelian scheme, $G$ a finite group of automorphisms of $A$. If $G$ operates without fixed points on $B/S$ projective and simple over $S$, with $O_S \xrightarrow{\sim} g_*(O_B)$, we construct $X = B \times_G \hat{A}$ which is an abelian scheme over $Y = B/G$, and one checks

$$\mathrm{Pic}_{X/S} \simeq \mathrm{Pic}_{Y/S} \times_S (\mathrm{Pic}_{\hat{A}/S})^G$$

(where upper $G$ denotes the subscheme of invariants), hence

$$\boxed{\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S} \simeq \mathrm{Pic}^{\tau}_{Y/S} \times_S A^G}$$

Hence for getting examples of bad $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$, we are led to study schemes of the type $A^G$, with $S$ say spectrum of a discrete valuation ring $V$. Thus we are led to the questions:

a) Can it occur that there are components of $C = A^G$ which do not dominate $S$? For instance, $A_1^G$ = unit subgroup (set theoretically, or even scheme-theoretically) and $A_0^G \neq$ unit subgroup set theoretically - where $A_0$, $A_1$ are the special and the general fibers.

b) If $C_1 = A_1^G$ is connected (for instance is the unit subgroup), and hence $C^\circ = C_0^\circ \cup C_1^\circ$ is open, can it occur that $C^\circ$ is non flat over $S$ [for instance $C_1 = \{e\}$, $C_0^\circ \neq \{e\}$]?

such that multiplication $p : \mathrm{Pic}_{X/S} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}$ is *not* universally open, i.e. such that there exists an irreducible component $C$ of $\mathrm{Pic}_{X/S}$ not dominating $S$, but such that $pC$ is contained in a component dominating $S$. [N.B. if $n$ prime to all residue char., multiplication by $n$ in any $\mathrm{Pic}_{X/S}$ is étale.]

Best regards to Karin, kids etc.

Schurik

P.S. I just proved: If $X \longrightarrow S$ is *simple* and *projective*, then $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ is *projective* over $S$. Method:

a) From the fact that the fibers of $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ are proper, follows that $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ is proper over $S$, hence closed in $\mathrm{Pic}_{X/S}$, hence easily that $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ is *closed* in $\mathrm{Pic}_{X/S}$ . It remains to prove it is of *finite type* over $S$ – hence proper over $S$, and quasi-projective over $S$, hence projective.

b) For every $n > 0$, the kernel of $\mathrm{Pic}_{X/S} \xrightarrow{n} \mathrm{Pic}_{X/S}$ is of finite type over $S$ [and even more: the multiplication $\mu$ by $n$ is of finite type, hence finite]. If $n$ is prime to the residue characteristics, this follows from the fact that $\mu$ is étale and has finite fibers. This reduces to the case $S$ of char $p > 0$, $n = p$. Then I use a technique of descent involving the "relative $p$-power scheme" $(X/S)^{(p)}$, following a suggestion of Serre.

c) For variable $s \in S$ ($S$ noetherian), the Néron-Severi torsion group of $X_s$ remains of bounded order. This can be shown using the method of Matsusaka's proof for the finiteness of the "torsion group".

From a), b), c), the theorem follows.

**Remark**: Using the Picard-Igusa inequality for $\rho$ = rank of Néron-Severi, and Lefschetz type theorems I told you about, one gets also that $\rho(X_s)$ remains bounded for $s \in S$ ($S$ noetherian).

**Question**: Is $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ always of finite type over $S$, under merely the usual assumptions for existence of $\mathrm{Pic}_{X/S}$? I have no proof even if $X \longrightarrow S$ is normal! Same question for $\rho$. This seems related to the question of uniform majorization of the Mordell-Weil-Néron-Lang finiteness theorem, for a *variable* abelian variety.

## Letter to H. Hironaka, 6.7.1962

Neuilly July 6 1962

Dear Hironaka,

I had a little thought over our conversation last Tuesday, it occurred to me that the type of argument I used yields in fact the following stronger result:

Theorem. — *Let $f : X \longrightarrow Y$ be a proper morphism of analytic spaces over $C$, let $y \in Y$, $Y_n = (\underline{O}_y / \underline{m}_y^{n+1})$, $X_n = X \times_Y Y_n$,*

$$\mathrm{Pic}(X_y) = \mathrm{R}^1 f(\underline{O}_X^\bullet)_y = \mathrm{Pic}(f^{-1}(U)) \quad y \in U,$$

$$\mathrm{Pic}(\hat{X}_y) = \varprojlim \mathrm{Pic}(X_n),$$

*and consider the canonical homomorphisms*

$$\mathrm{Pic}(X_y) \xrightarrow{u} \mathrm{Pic}(\hat{X}_y) \xrightarrow{v_n} \mathrm{Pic}(X_n)$$

*Then the following are true:*

*(i) The inverse system $(\mathrm{Pic}(X_n))_{n \in N}$ satisfies the condition of Mittag-Leffler (even with Artin-Riesz type of uniformity).*

*(ii) $Im v_n = Im v_n u$ = (in virtue of (i)) set of universal images of $\mathrm{Pic}(X_n)$ in the inverse system $(\mathrm{Pic}(X_m))_{m \in N}$.*

*(iii) In order for $u$ to be an isomorphism, it is nec and suff that $\mathrm{R}^1 f_*(\underline{O}_X)_y$ is a module of finite length.*

*In fact (i) can be more precise:*

*(ibis) In the inverse system $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/C})_{n \in N}$ of analytic groups, the system of the "Néron-Séveri groups" is constant for n large, whereas for $m > n$ and n large, the Kernel and Cokernel of*

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X_m/C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/C}$$

*are just vector groups.*

Parts (i) and (ii) yield the

Corollary **1**. — *The following conditions are equivalent*

*(i) There exists an open* $U y$ *such that* $X U$ *is projective over* $U$

*(ii) For every* $n$, $X_n$ *is a projective analytic space.*

For instance, if $\dim X_0 \leq 1$, then (ii) and hence (i) holds.

The proof of the theorem only uses Grauerts analogues of the algebraic theorems of finiteness and comparison for direct images (of his blue paper) and the usual exact sequences $0 \longrightarrow Z \longrightarrow \underline{O} \longrightarrow \underline{O}^{\bullet} O$, together with some standard use of Mittag-Leffler story and five lemma. It is valid in fact for any $\mathrm{H}^i(\underline{O}^{\circ})$, not only $i = 1$ (which seems the only one however to have geometric significance).

In the case of a formal scheme proper over a complete noeth. local ring with residue field of *characteristic* 0, the analogon of the previous theorem (reducing to statements (i), (i bis)) hold true, and I wrote a purely algebraic proof of this, relying only on the fact that the kernel and Cokernel of $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_{n+1}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n}$ are without torsion, and Néron's finiteness theorem; in particular, the analogon of corollary 1 holds true in this case. These results break down of course in car. $> 0$.

However, using the (as yet unwritten !) Gaga of Serre-Grauert-Remmert-Grothendieck (of Grauert-Remmerts paper, complemented by the method of an old talk of mine in Cartan's Seminar, to recover the case of proper morphisms of schemes from the projective one, via Chow's lemma…), the analytic theorem above yields an interesting intrinsic property of analytic algebras over $C$, with respect to algebraic geometry over such a local ring:

Theorem. — *Let* $A$ *be an analytic algebra over* $C$ *(we can suppose* $A$ *to be the ring of convergent power series in* $n$ *variables),* $\hat{A}$ *its completion,* $Y$ *and* $\hat{Y}$ *the spectra,* $X$ *a proper scheme over* $Y$, $\hat{X} = X \times_Y \hat{Y}$. *Then*

*(i) The inverse system* $(\mathrm{Pic}(X_n))$ *satisfies MLAR (as stated above, this depends only on the car. 0 assumption for the residue field).*

*(ii)* $\mathrm{Pic}(X)$ *and* $\mathrm{Pic}(\hat{X})$ *have same image in* $\mathrm{Pic}(X_n)$, *– namely the group of "universal images". (NB recall* $\mathrm{Pic}(\hat{X}) \simeq \varprojlim \mathrm{Pic}(X_n)$*).*

(iii) *In order for* $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\hat{X})$ *to be an isomorphism, it is necessary and sufficient that* $\mathrm{supp}\,\mathrm{R}^1 f_*(\underline{O}_X) \subset (y)$, *i.e.* $\mathrm{H}^1(X, \underline{O}_X)$ *of finite length over A. (NB It amounts also to the same to ask that the inverse system of the subgroups* $\mathrm{Pic}'(X_n)$ *of universal images is constant for large n).*

We get for example:

Corollary **1**. — *The following conditions are equivalent:*

(i) $X/Y$ *projective*

(ii) $\hat{X}/\hat{Y}$ *projective*

(iii) *For every* $n$, $X_n/Y_n$ *projective.*

This applies for instance if $\dim X_0 \leq 1$.

Now applying your theorem of *resolution of singularities*, and Mumford's method of relating the local Picard group of $A$ to the global Picard group of a regular scheme dominating $A$ birationally, one gets from the last statement (iii) of last theorem:

Corollary **2**. — *Let A be as above, assume* $Y' = Y - (y)$ *regular, and let* $\hat{Y}' = \hat{Y} - (\hat{y})$. *Then* $\mathrm{Pic}(Y') \longrightarrow \mathrm{Pic}(\hat{Y}')$ *is an isomorphism.*

This explains "à priori" (when $A$ is normal) why Mumford was able to introduce on the group of divisor-classes of $A$ a structure of an analytic group (which in fact is algebraic...), which from the algebraic point of view should be possible rather for the group of divisors classes of the completion $\hat{A}$; of course Mumford uses directly the same kind of argument I used.

I do no know if in the last statement, the hypothesis that $Y'$ is regular ("$y$ isolated singularity") is essential; we could dispense with it and replace it by "$A$ reduced" if you can prove by your theory of resolution the following: if $f : X \longrightarrow Y$ is proper "birational", $X$ regular, then $\mathrm{R}^1 f_*(\underline{O}_X) = 0$. I understand you prove this if $Y$ also is regular (which is easily checked by your theory), but I wonder if this is really needed. I would not be surprised either if in this statement, $Y'$ can be replaced by any open subset of $Y$ (replacing of course $\hat{Y}'$ by the inverse image of the latter). Moreover, I would expect the analogous statements to hold for $\pi_1$, more generally for all "topological" invariants as Weil homology, homotopy groups etc, that can be defined for schemes. This should be related to the fact that all these invariants vanish for the geometric fibers of the morphism $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$. This is easy to check at least for $\pi_0$ (and is true in fact for any henselian ring which is a "good" ring); however I do not know if this is true also for $\pi_1$.

Besides, I would not be surprised if most of the previous results (namely parts (ii) and (iii) of the second theorem, and the two corollaries, as well as the conjectures of the previous sections) did hold true for any "good" ring which is henselian or at least for the "henselian closures" of the local rings arising from algebras of finite type over a field, or over the integers, - although I do not have any result along these lines (except those stemming from my remark on $\overline{k}_0$). This can be stated of course directly in terms of conjectures for the latter local rings without explicit reference to a henselian closure, for instance corollary 2 would yield the conjectural statement: Let $A$ be a local ring of an algebra of finite type over a field, $\hat{A}$ its completion, $Y$ and $\hat{Y}$ the spectra, $Y'$ and $\hat{Y}'$ the complements of the closed points, then any invertible sheaf on $\hat{Y}'$ can be defined by an invertible sheaf on some $Y_1'$, where $Y_1$ is local and $Y_1 \longrightarrow Y$ is étale with trivial residue field extension (i.e. inducing an isomorphism for the completions $A \longrightarrow A_1$). I wonder what information is given by Mumford's example in his blue paper, p.16, which I believe yields a case where the invertible sheaf considered does not come from an invertible sheaf on $Y'$? I was not able to understand his construction.

Anyhow, one should be able to determine whether or not the analytic algebras over $C$ have any significant intrinsic property which is not shared by all "good" henselian rings with residue field of car. 0 (I recall that by good I mean "quotient of a regular local ring $B$ such that the fibers of $\mathrm{Spec}\,\hat{B} \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ are universally regular).

Please give my regards to Waka, and also Mireille's; she just got the parcel from Waka, and was extremely pleased, in fact, she slipped into her new bed-shirt on the sopt, and is delighted by it in every respect.

Sincerely yours

## Letter to M. Atiyah, 14.10.1963 (On the Rham cohomology of algebraic varieties)

…In connection with Hartshorne's seminar on duality, I had a look recently at your joint paper with Hodge on

## Lettre à J.P. Serre, 12.8.1964

Bures le 12.8.1964

Mon cher Serre,

Je commence à avoir de faibles lumières sur la façon de faire des VA avec les cycles algébriques équivalentes à zéro d'une variété projective non singulière $X$ (sur un corps alg clos $k$). Si $X$ est connexe de dimension $n$, je sais associer à chaque entier $i$ compris entre 1 et $n$ une VA $J^i(X)$, jouant le rôle d'une "jacobienne intermédiaire" au sens de Weil, correspondant à des classes de cycles de codimension $i$ (pour une relation d'équivalence que je ne sais pas bien identifier pour l'instant, mais qui mérite certainement d'être appelée "équivalence d'Albanese"). Je suis moralement sûr que ce sont "les bonnes", bien que je n'ai pas prouvé grand-chose dessus pour l'instant ; par contre, j'ai des conjectures en pagaille. Je te signale seulement que $J^1 = \mathrm{Pic}^\circ$ et $J^n =^\circ$, que $J^i$ et $J^{n+1-i}$ sont canoniquement duales l'une de l'autre, que $\mathrm{dim} J^i \leq \frac{1}{2} b_{2i-1}$ (nombre de Betti) - de façon plus précise $T_\ell(J^i)$ est un quotient d'un sous-module de $\mathrm{H}^{2i-1}(X, \mathrm{Z}_\ell(i))$ (et quand on sera plus savant, on saura pruver que c'est même un sous-module dudit), en caractéristique $0$ on peut également remplacer la cohomologie de Weil par la cohomologie de Hodge $\mathrm{H}^i(X, \underline{\Omega}_X^{i-1})\dots$

Moyennant un certain nombre de choses non prouvées (qui risquent d'ailleurs d'être vaches) le théorème de positivité de Hodge se ramène à l'énonce suivant, que je ne sais pas prouver, et que j'ai envie de te communiquer car il est bien terre à terre. Moralement, il s'agit de prouver que dans le cas où $\mathrm{dim} X = 2m-1$, l'autodualité de $J^m$ (qui s'exprime par une classe de correspondance divisorielle sur $J^m \times J^m$ *symétrique*, donc provenant - du moins modulo le facteur 2- d'un élément du groupe de Néron Severi de $J^m$) est *positive* i.e. l'élément en question de Néron-Severi est ample, i.e. une polarisation. Pratiquement, cela s'explicite ainsi : Soit $T$ une variété de paramètres connexe non singulière munie d'un point marqué $a$, $z$ une classe de cycles de codimension $m$ sur $T \times X$ (à équivalence linéaire près, mettons), telle que $z(a) = 0$ dans $X$, soient $p$ et $q$ les deux projections de $T \times T \times X$ sur $T \times X$, $r$ sa projection sur $T \times T$, considérons

$$D = r_*(p^*(z)q^*(z))$$

qui est une classe de diviseurs sur $T \times T$, que nous considérons comme une classe de correspondance divisorielle sur $T \times T$. Si $A =^{\circ} (T)$ (NB si tu veux, tu peux supposer $T = A$ et a l'origine), elle provient donc d'une classe de correspondance sur $A \times A$, évidemment symétrique. Soit $N$ le "noyau" de cette classe (i.e. le noyau de $A \longrightarrow$ (duale de $A$) qu'elle définit), on obtient alors une classe de correspondance symétrique sur $J \times J$, où $J = A/N$. A prouver que cette dernière est *positive* ! Je me demande si les spécialistes "abéliens" pourraient avoir une idée sur une telle question, peut-être Matsusaka ? Ou toi-même ? Notes d'ailleurs que cette question te dévoile pratiquement le méthode de construction des $J^i$ généraux ; si tu veux, tu peux te borner aussi au cas où te disposes d'une sous-variété de codimension $m-1$ $Y$ de $X$, non singulière si tu y tiens, où $T = \mathrm{Pic}^{\circ}(Y)$, considéré comme paramétrant les diviseurs alg équiv à zéro de $Y$, mais considérés comme classes de cycles de codimension $m$ de $X$.

Merci pour la copie de la lettre à Ogg !

Bien à toi

## Lettre à J. Dieudonné, 29.9.1965

29.9.1965

Cher Dieudonné,

Merci de ta lettre du 24 et pour la table des matières des par. 16 à 19. Je serais content de recevoir à l'occasion la table des matières provisoire des par. 20 et 21 ; d'accord pour les joindre au fascicule 4 du Chap IV. Mais comment vaux-tu subdiviser mon ancien par.20, et quels seront les titres des deux morceaux ? Comme je commence à me perdre dans le plan, et qu'il est parfois commode de pouvoir référer sans trop déconner à un n° de paragraphe, je te donne ici ce qui me semble être le plan actuel, dis-moi si tu es d'accord :

20. ???

21. ???

22. Systèmes linéaires, compléments sur le groupe de Picard.

23. Grassmaniennes.

24. Formes lisses, singularités quadratiques ordinaires.

25. Sections hyperplanes et bordel.

26. Résultant et discriminant.

27. Extensions infinitésimales.

Le 25. risque d'ailleurs d'être fort long, et je te vois déjà vouloir le subdiviser en deux ! Pourtant, $27 = 3^3$ est un bien joli nombre !

Il n'est pas question que je publie l'ex-Appendice au par.18 sous mon nom ; ta rédaction n'a à peu près plus rien de commun avec les vagues notes manuscrites que je t'avais passées, si même je t'en ai jamais passé, et ne me suis borné à te dire : il n'y a qu'à faire pareil que pour les anneaux complets…Il serait d'autre part dommage que ton travail de mise au point soit perdu pour les éventuels utilisateurs (il finit toujours par s'en trouver...). C'est pourquoi je te demande de bien vouloir reconsidérer la question d'en faire un "joint paper".

Pour par. 20, 10.9.1, il faut bien entendu utiliser le fait que l'ensemble des points de $Z_\lambda$ en lesquels $F_\lambda$ restreint à la fibre est de prof $> 0$ donné, est *constructible* (on a même du prouver au par. 12 qu'il est ouvert, avec les hypothèses de platitude et de présentation finie qu'on a faites). Comme son image inverse dans $Z$ est tout, c'est que c'est déjà tout un peu plus loin que $\lambda$. C'est vraiment toujours le même argument qui revient !

Bien à toi

A. Grothendieck

## Letter to J. Dieudonné, 29.9.1965

29.9.1965

Dear Dieudonné,

Thank you for the letter of the 24th and for the table of contents of par. 16 to 19. I would be happy to receive one day the tentative table of contents for par 20 and 21. It's ok to adjoin them to volume 4 of Ch. IV. But how are you going to subdivide my old par. 20 and what will be the titles of the two parts? Since I am beginning to be lost in the plan and it is often convenient to be able to refer to (without saying too many stupid things) to a number in a paragraph, I give you here what seems to me to be the actual plan, tell me if you agree.

20. ???

21. ???

22. Linear systems complements about the Picard group

23. Grassmanians

24. Smooth forms ordinary quadratic singularities

25. Hyperplane sections et bordel

26. Resultant and discriminant

27. Infinitesimal extensions

The 25th is at risk in addition of being too long and you may wish to subdivide it into two. Still $27 = 3^3$ is a very pretty number!

It is out of the question that I should publish the appendix to para. 18 under my name. Your formulation (writeup) has almost nothing in common with the vague manuscript notes that I sent to you, and limiting myself to saying: Even if I had given you any you just have to do the same as for complete rings…It would be on the other hand a pity if your work about its formal setting should be lost for the possible users (il finit toujours par s'en trouver…) There can always be some to be found. That is why I ask you to reconsider the question of making a "joint paper".

As for par. 20, 10.9.1 it is of course necessary to use the fact that the set of points of $Z_\lambda$ where $F_\lambda$ restricted to the fiber is of the depth $> n$ given is *constructible* (we have to prove the same meme in par. 12 that it is open with the assumption of flatness and of finite presentation which we make). Since its inverse image in $Z$ is everything that is already a little further than than $\lambda$. This is really always the same argument qui revient!

That repeats itself.

Bien à toi

A. Grothendieck

## Lettre à P. Deligne, 10.12.1965

10.12.1965

Cher Deligne,

Je vous propose une simplification pour la démonstration du théorème de dualité, qui permet d'éviter tout recours au théorème de pureté relative. Vous vous rappelez qu'on était réduit au cas où $f : X \longrightarrow Y$ est dimension relative 1, $F = A_X$ et $G = A_Y$. Le procédé de passage à la limite de Exp VI, par. 6, permet de supposer la base noethérienne, et même si on y tient de dimension finie (car de type fini sur Z). On raisonne par récurrence sur $n = \dim X$. Si $n = 0$, on sait le vérifier. Supposons le théorème démontré en dimension $< n$. Se localisant sur $Y$, on peut supposer $Y$ strictement local. Alors, si $y$ est son point fermé, on a $\dim(Y - y) = n$, et comme on est réduit à prouver le théorème séparément pour $X \times_Y (Y - y)$ et $X \times_Y y$, on gagne. – Autre remarque : le théorème de dualité peut se démontrer, essentiellement de la même façon et avec le même énoncé, pour un morphisme lisse $f : X \longrightarrow Y$ compactificable, lorsque $Y$ est muni d'un faisceau d'anneaux $A$ quelconque tel que il existe un entier $n$ premier aux caractéristiques résiduelles annulant $A$, et $X$ d'un faisceau d'anneaux $B$, et $f$ étant donné comme morphisme de $(X, B)$ dans $(Y, A)$, de sorte qu'on a un homomorphisme de faisceau d'anneaux $f^{-1}(A) \longrightarrow B$. On définit alors

$$f^!(K^\bullet) = R\mathrm{Hom}^\bullet_{f^{-1}(A)}(B, f^{-1}(K) \otimes T_{X/T} 2d).$$

La définition de l'homomorphisme trace et la démonstration du théorème de dualité se décomposent alors en le cas où $f^{-1}(A) \longrightarrow B$ est un isomorphisme, qui se traite comme le cas $A = (Z/nZ)_Y$, et le cas où $f = \mathrm{id}$, qui est trivial. Je pense qu'il vaut le coup d'inclure cette forme générale du théorème de dualité, soit de prime abord, soit à la fin dans un numéro-page. Je n'ai pas regardé si par hasard il pourrait se déduire du cas particulier $A = (Z/nZ)_Y$ comme simple corollaire, mais ça m'étonnerait. La même remarque s'applique d'ailleurs également au théorème de dualité local, qui s'énonce pour des faisceaux d'anneaux plus généraux que le faisceau constant $Z/nZ$.

Il me semble que la relation de nature transcendante qui lie la cohomologie de De-Rahm ou de Hodge aux cohomologies $\ell$-adiques, lorsque le corps

[]

Noter qu'en caractéristique $p > 0$, on a un homomorphisme évident de $\mathrm{H}^*(X, F_p)$ dans la cohomologie de De-Rham, comme on voit en calculant cette dernière pour la cohomologie étale et non pour la cohomologie de Zariski (ce qui donne la même résultat, puisque les composantes du complexe de De Rham sont quasi-cohérents), et utilisant la suite spectrale en cohomologie étale

$$\mathrm{H}^*(X) \Leftarrow \mathrm{H}^p(X, \mathrm{H}^q(\Omega)).$$

Cet homomorphisme se factorise d'ailleurs à travers $\mathrm{H}^*(X, F_p) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X, O_X)$, ce dernier s'envoyant dans $\mathrm{H}^*(X)$ grâce à l'homomorphisme de puissance $p$-ème $f \longrightarrow f^p$, induisant un isomorphisme $\mathrm{O}_X \simeq \mathrm{H}^0(\Omega)$. Le composé des homomorphismes canoniques $\mathrm{H}^n(X, O_X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X, O_X)$ (ce dernier résultant de l'autre suite spectrale pour la cohomologie de De Rham) ne peut guère être autre chose que l'homomorphisme de Frobenius. Il faut dire que tout ą est bien éculé, et qu'on ne pourra dire des choses vraiment intéressantes et nouvelles qu'en faisant appel à la "vraie" cohomologie $p$-adique.

Bien cordialement

## Letter to J. Coates, 6.1.1966[5]

6.1.1966

Dear Coates,

Here a few more comments to my talk on the conjectures. The following proposition shows that the conjecture $C_\ell(X)$ is independent of the chosen polarization, and has also some extra interest, in showing the part played by the fact that $\mathrm{H}^i(X)$ should be "motive-theoretically" isomorphic to its natural dual $\mathrm{H}^{2n-i}(X)$ (as usual, I drop the twist for simplicity).

Proposition. — *The condition $C_\ell(X)$ is equivalent also to each of the following conditions:*

*a) $D_\ell(X)$ holds, and for every $i < n$, there exists an isomorphism $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic (i.e. induced by an algebraic correspondence class; we do not make any assertion on what it induces in degrees different from $2n-i$).*

*b) For every endomorphism $\mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic, the coefficients of the characteristic polynomial are rational, and for every $i < n$, there exists an isomorphism $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic.*

*Proof.* — I sketched already how $D_\ell(X)$ implies the fact that for an algebraic endomorphism of $\mathrm{H}^i(X)$, the coefficients of the characteristic polynomial are rational numbers. Therefore we know that a) implies b), and of course $C_\ell(X)$ implies a). It remains to prove that b) implies $C_\ell(X)$. Let $u : \mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ be the given isomorphism which is algebraic, and $v : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X)$ the algebraic isomorphism in the opposite direction, induced by $L_X^{n-i}$. Then $uv = w$ is an automorphism of $\mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic, and the Hamilton-Cayley formula $u^h - \sigma_1(w)u^{h-1} + \ldots + (-1)^h \sigma_h(w) = 0$ (where the $\sigma_i(w)$ are the coefficients of the characteristic polynomial of $w$) whos that $w^{-1}$ is a linear combination of the $w^i$, with coefficients of the type $+/-\sigma_i(w)/\sigma_h(w)$ (N.B. $h = \operatorname{rank} \mathrm{H}^i$). The

[5] https://agrothendieck.github.io/divers/LGC6166scan.pdf

assumption implies that these coefficients are rational, which implies that $w^{-1}$ is algebraic, and so is $w^{-1}u = v^{-1}$, which was to be proved.

N.B. In characteristic 0, the statement simplifies to: $C(X)$ equivalent to the existence of algebraic isomorphisms $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$, (as the preliminary in b) is then automatically satisfied). Maybe with some extra care this can be proved too in arbitrary characteristics.

Corollary. — *Assume $X$ and $X'$ satisfy condition $C_\ell$, and let $u : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+2D}(X')$ $(D \in \mathrm{Z})$ be an isomorphism which is algebraic. Then $u^{-1}$ is algebraic.*

Indeed, the two spaces can be identified "algebraically" (both directions!) to their dual, so that the transpose of $u$ can be viewed as an isomorphism $u' : \mathrm{H}^{i+2D}(X') \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$. Thus $u'u$ is an algebraic automorphism $w$ of $\mathrm{H}^i(X)$, and by the previous argument we see that $w^{-1}$ is algebraic, hence so is $u^{-1} = w^{-1}u'$.

As a consequence , we see that if $x \in \mathrm{H}^i(X)$ is such that $u(x)$ is algebraic ($i$ being now assumed to be even), than so is $x$. The same result should hold in fact if $u$ is a monomorphism, the reason being that in this case there should exists a left-inverse which is algebraic; this exists indeed in a case like $\mathrm{H}^{n-1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(Y)$ (where we take the left inverse $\bigwedge_X \varphi_*$). But to get it in general, it seems w need moreover the Hodge index relation. (The complete yoga then being that we have the category of motives which is semi-simple!). Without speaking of motives, and staying down on earth, it would be nice to explain in the notes that $C(X)$ together with the index relation $I(X \times X)$ implies that the ring of correspondences classes for $X$ is semi-simple, and how one deduces from this the existence of left and right inverses as looked for above.

This could be given in an extra paragraph (which I did not really touch upon in the talk), containing also the deduction of the Weil conjectures from the conjectures $C$ and $A$.

A last and rather trivial remark is the following. Let's introduce variants $A'_\ell(X)$ and $A''_\ell(X)$ as follows:

$A'_\ell(X):$ if $2i \leq n-1$, any element $x$ of $\mathrm{H}^i(X)$ whose image in $\mathrm{H}^i(Y)$ is algebraic, is algebraic.

$A''_\ell(X):$ if $2i \geq n-1$, any algebraic element of $\mathrm{H}^{i+2}(X)$ is the image of an algebraic element of $\mathrm{H}^i(Y)$.

Let us consider also the specifications $A'_\ell(X)^\circ$ and $A''_\ell(X)^\circ$, where we restrict to the critical dimensions $2i = n-1$ if $n$ odd, $2i = n-2$ if $n$ even. All these conditions are in the nature of "weak" Lefschetz relations, and they are trivially implied by $A_\ell(X)$ resp. $C_\ell(X)$ (in the first case, applying $\varphi$ we see that $L_X X$ is algebraic; in the second, we take $y = \bigwedge_Y \varphi^+(x)$). The remark then is that these pretendently "weak" variants in fact imply the full Lefschetz relations for algebraic cycles, namely:

Proposition. — *$C_\ell(X)$ is equivalent to the conjunction $C_\ell(Y) + A_\ell(X \times X)^\circ + A''_\ell(X \times X)^\circ$, hence (by induction) also to the conjunction of the conditions $A'^\circ_\ell$ and $A''^\circ_\ell$ for all of the varieties $X \times X$, $Y \times Y$, $Z \times Z$,...Analogous statement with $X \times Y$, $Y \times Z$ etc instead of $X \times X$, $Y \times Y$ etc.*

This comes from the remark that $A_\ell(X)^\circ$ follows from the conjunction of $A'_\ell(X)^\circ$ and $A''_\ell(X)^\circ$, as one sees by decomposing $L_X^2 : \mathrm{H}^{2m-2}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ into $\mathrm{H}^{2m+2}(X) \xrightarrow{\varphi^k} \mathrm{H}^{2m+2}(Y) \xrightarrow{\varphi_\alpha} \mathrm{H}^{2m}(X) \xrightarrow{L_X} \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ if $\dim X = 2m$ is even, and $\mathrm{H}^{2m+1-1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m+1+1}$ into $\mathrm{H}^{2m}(X) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{H}^{2m}(Y) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ if $\dim X = 2m+1$ is odd.

Sincerely yours

## Lettre à J. Tate, 5.1966[6]

Pise 5.1966

Cher John,

J'ai réfléchi aux groupes formels et à la cohomologie de De Rham, et suis arrivé à un projet de théorie, ou plutôt de début de théorie, que j'ai envie de t'exposer, pour me clarifier les idées.

### Chapitre 1. — La notion de cristal

Commentaire terminologique : Un cristal possède deux propriétés caractéristiques : la *rigidité*, et la faculté de *croître*, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de souffre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs etc.

**1.0.** — Soit $S$ un préschéma, au dessus d'un autre $R$; dans le cas qui nous intéressera le plus, on aura $R = \mathrm{Spec}(Z)$. Soit $C$ la catégorie des $R$-préschémas $T$ sous $S$, (i.e. munis d'un $R$-morphisme $S \longrightarrow T$,) tels que $S \longrightarrow T$ soit une immersion fermée définie par un idéal localement nilpotent. On a le foncteur "oubli" de $C$ dans Sch, et la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur des préschémas variables induit donc une catégorie fibrée sur $C$, associant à tout $T$ la catégorie des Modules quasi-cohérents sur $T$.

Définition (**1.1**). — *On appelle cristal de modules (sous-entendu: quasi-cohérents) sur $S$, relativement à $R$, une section cartésienne de la catégorie fibrée précédente au dessus de $C$. Plus généralement, pour toute catégorie fibrée $F$ sur* $\mathrm{Sch}_{/R}$, *on définit la notion de "$F$-cristal" sur $S$, ou "cristal en objets de $F$", de la façon correspondante. Ceci donne un sens aux expressions: cristal en algèbres, en algèbres commutatives, en préschémas relatifs etc, sur $S$ relativement à $R$. Quand $R =$* $\mathrm{Spec}(Z)$, *on parlera de "cristal absolu" sur $S$, de l'espèce considérée.*

**1.2.** — Les $F$-cristaux sur $S$ forment une catégorie, qui dépend fonctoriellement de $F$. Ceci permet, en particulier, de définir sur la catégorie des cristaux

[6] `https://agrothendieck.github.io/divers/LGT66scan.pdf`

de modules sur $S$ les opérations tensorielles habituelles: produit tensoriel de deux cristaux de modules etc, satisfaisant aux propriétés habituelles.

**1.3.** — Regardons de même ce qui se passe quand on fixe $F$ et fait varier $R, S$. Tout d'abord, si $R \longrightarrow R' \longrightarrow R$, alors tout cristal sur $S$ relativement à $R$ en définit un relativement à $R'$, par simple restriction. En particulier, un cristal absolu définit un cristal relatif, pour tout préschéma de base $R$ de $S$.

Fixons maintenant $R$, $S$, et soit $S' \longrightarrow S$ un morphisme. On définit alors de façon naturelle un foncteur "image inverse" allant des cristaux de type $F$ sur $S$ vers les cristaux de type $F$ sur $S$ vers les cristaux de même type sur $S'$ (tout relatif à $R$). Pour s'en assurer, il suffit de définit un foncteur $C' \longrightarrow C$ (ou $C'$ est défini en termes de $S'$ comme $C$ en termes de $S$), compatible avec les foncteurs "oubli". Or si $S' \longrightarrow T'$ est un objet de $C'$, il y a une construction évidente de somme amalgamée dans la catégorie des préschémas, qui donne un $T = S \amalg_{S'} T'$ et un morphisme $S \longrightarrow T$, qui fait de $T$ un objet de $C$, ce qui définit le foncteur cherché.

On peut donc dire que pour un $S$ variable sur $R$, les cristaux de type $F$ sur $S$ forment une *catégorie fibrée* sur $\mathrm{Sch}_{/R}$, grâce à la notion d'image inverse précédente.

Les deux variantes (en $R$, et en $S$) sont compatibles dans un sens évident, et peuvent être régardées comme provenant d'une variance en $(R, S)$ directement.

**1.4.** — On a un foncteur naturel et évident qui va des cristaux de modules (disons) sur $S$ (rel à $R$) dans des Modules quasi-cohérents sur $S$: c'est le foncteur "valeurs en $S$". On fera attention que ce foncteur n'est en général pas même fidèle (cf exemple **1.5.** plus bas). Il est donc un peu dangereux de vouloir considérer un cristal de modules sur $S$ comme étant un Module quasi-coherent $M$ sur $S$, *muni* d'une structure supplémentaire, sa "structure cristalline". Dans certains cas cependant (cf **1.8.**), le foncteur cristaux de modules $\rightsquigarrow$ Modules est fidèle et le point de vue précédent devient plus raisonnable.

**1.5. Exemple 1: relations avec les vecteurs de Witt.** — Supposons que $S$ soit le spectre d'un corps *parfait* $k$, et $R = \mathrm{Spec}(Z)$. Soit $W$ l'anneau de Cohen de corps résiduel $k$: si car$k > 0$, c'est l'anneau des vecteurs de Witt défini par $k$, si car$k = 0$, c'est $k$ lui-même; dans ce dernier cas, supposons $k$ *algébrique* sur $Q$. Alors il est bien connu que la catégorie $C$ de **1.0.** est équivalente à celle des $W$-algèbres locales, annulées par une puissance de l'idéal maximal de $W$, à extension résiduelle triviale. Écrivant $W = \varprojlim W_n$ comme à l'accoutumé, dans le cas $p > 0$, on trouve que la donnée d'un cristal de modules (absolu) sur $k$ équivaut à celle d'un système projectif $(M_n)$ "$p$-adique" de modules $M_n$ sur les $W_n$ ; donc les cristaux de modules de présentation finie sur $k$ forment une catégorie équivalent à celle des modules de type fini sur $W$. Si $p = 0$, alors la catégorie des cristaux de modules sur $k$ est équivalente à celle des vectoriels sur $k = W$. Ces descriptions sont compatibles avec les notions de changement de base pour $k$ variable. Elles se formulent évidemment pour toute autre espèce de cristaux, défini par une catégorie fibrée $F$.

Dans le cas envisagé, le foncteur "valeur en $S$", sur la catégorie des cristaux de présentation finie sur $k$, s'identifie au foncteur $\otimes_W k$ sur la catégorie des modules de type fini sur $W$, foncteur qui (si $p > 0$) n'est pas fidèle.

**1.6. Exemple 2.** $S$ **étale sur** $R$. — Si $S = R$, la catégorie $C$ admet $R$ lui-même comme objet final, donc le foncteur "valeur en $R$" est une équivalence de la catégorie des cristaux sur $R$, de type $F$ donné, avec la catégorie $F_R$. En particulier, un cristal de modules sur $\operatorname{Spec} Z$ est essentiellement la même chose qu'un $Z$-module.

De façon un peu plus général, si $S$ est étale sur $R$, alors $S$ est un objet final de $C$, et les cristaux de modules (disons) sur $S$, relativement à $R$, s'identifient aux Modules quasi-cohérents sur $S$.

**1.7. Exemple 3 :** $S$ **un sous-préschéma de** $R$. — Comme la notion de cristal relatif sur $S$ ne change pas si on remplace $R$ par un ouvert par lequel se factorise $S$, on peut supposer $S$ fermé dans $R$, défini par un idéal quasi-cohérent $J$. Soit $S_n = V(J^{n+1})$ le $n$-ème voisinage infinitésimal de $R$ dans $S$. Alors la famille des objets $S_n$ de $C$ est finale dans $C$, d'où on conclut facilement qu'un cristal de type $F$ sur $S$ s'identifie à une suite $(M_n)_{n\in N}$ d'objets des $F_{S_n}$ qui se recollent. En particulier, si $R$ est localement noethérien, un cristal de modules sur $S$ relativement à $R$, de présentation finie, s'identifie à un Module cohérent sur le complété formel de $R$ le long de $S$.

Cet exemple contient le cas de car $p > 0$ de l'exemple 1, si on note qu'à priori, grâce à Cohen, un cristal absolu sur $k$, c'est pareil qu'un cristal relativement à $W$.

On peut aussi donner un énoncé commun aux exemples 2 et 3, en partant du cas où on se donne un $S \longrightarrow R$ non *ramifié*, ce qui permet en effet de construire encore des "voisinages infinitésimaux" $S_n$.

**1.8. Relation avec la notion de stratification.** — Les données $R$, $S$, $F$ étant comme d'habitude, considérons pour chaque entier $n \geq 0$ le voisinage infinitésimal $\Delta_n$ de la diagonale de $S \times_R S$, qui s'envoie dans $S$ par les deux projections $pr_1$ et $pr_2$. Si $E$ est un objet de $F_S$, une *$n$-connexion* sur $E$ (relativement à $R$) est la donnée d'un isomorphisme $pr_1^*(E) \simeq pr_2^*(E)$ qui induit l'identité sur la diagonale. Une *$\infty$-connexion* ou *pseudo-stratification* de $E$, est la donnée pour tout $n$ d'une $n$-connexion, de telle façon que ces $n$-connexions se recollent. Enfin, une *stratification* sur $E$ est la donnée d'une pseudo-stratification qui satisfait aux conditions formelles d'une donnée de descente, quand on fait intervenir les voisinages infinitésimaux de tous ordres de la diagonale de $S \times_R S \times_R S$. Ces notions donnent lieu à des sorties analogues à ceux de **1.2.** et **1.3**. Notons que lorsque $S$ est "formellement non ramifié sur $R$" i.e. $\underline{\Omega}^1_{S/R} = 0$, alors toutes ces notions deviennent triviales: un objet $E$ admet alors toujours exactement une connexion de tout ordre, donc une seule pseudo-stratification, et celle-ci est une stratification: donc la catégorie des objets de $F_S$ *munis* d'une stratification relativement à $R$ est alors équivalente, par le foncteur "valeur en $S$", à la catégorie $F_R$ elle même. (Dans tous les cas, le foncteur "valeur en $S$" est fidèle).

Ceci défini, on voit que pour tout cristal $M$ sur $S$ de type $F$ (relativement à $R$), sa valeur $M(S) = M$ est un objet de $F_S$ muni d'une *stratification canonique* relativement à $R$, d'où un foncteur: cristaux relatifs de type $F \rightsquigarrow$ objets de $F$ munis d'une stratification. La remarque de **1.4.** montre d'ailleurs que ce foncteur n'est pas toujours fidèle. Il y a cependant des cas intéressants où ce foncteur est une *équivalence de catégories*: il en est en tous cas ainsi si $S \longrightarrow R$ est *"formellement lisse"*, par exemple si c'est un morphisme lisse, ou si $S$ et $R$ sont des spectres de corps $k_0$, $k$, avec $k$ une extension *séparable* de $k_0$. (Quand d'ailleurs $S \longrightarrow R$ est même formellement étale, alors les deux catégories: celle des cristaux et celle des objets à stratification, deviennent équivalentes, par le foncteur "valeur en $S$", à $F_S$ lui-même, ce qui nous redonne l'exemple à la noix de **1.5** ou $k$ est de car. nulle). Sauf erreur, on a encore une équivalence de catégories si $S \longrightarrow R$ est *plat et localement de présentation finie*, (du moins si $R$ localement noétherien, et se bornant aux Modules cohérents) mais je n'ai pas écrit le démonstration.

**1.9. Une digression sur la notion de stratification en caractéristique nulle.**

— Quand $S$ est lisse sur $R$ (en fait, il suffit que $S$ soit différentiellement lisse sur $R$, i.e. le morphisme diagonal $S \longrightarrow S \times_R S$ une immersion régulière), et si $R$ est de caractéristique nulle, alors une stratification d'un Module $M$ sur $S$ (relativement à $R$) est connue quand on connaît la 1-connexion qu'elle définit, et on peut se donner celle-ci arbitrairement, soumise à la seule condition que le "tenseur courbure", qui est une certaine section de $\underline{\Omega}^2_{S/R} \otimes (M)$, soit nul. (Cela peut aussi s'exprimer en disant qu'on fait opérer le faisceau $_{S/R}$ des dérivations relatives de $S$ sur $R$, sur $M$, de façon à satisfaire aux relations habituelles, y compris celle de transformer crochet en crochet). J'ignore dans quelle mesure l'hypothèse de lissité est nécessaire pour cet énoncé, ou si (dans le cas lisse disons) on peut formuler un énoncé analogue pour toute catégorie fibrée $F$ sur $\mathrm{Sch}_{/R}$. Mais bien entendu, l'hypothèse de caractéristique nulle faite sur $R$ est tout à fait essentielle. Si $R$ est de caractéristique $p > 0$, l'énoncé qui remplace le précédent (et qui sauf erreur est dû à Cartier) est que dans ce cas, la donnée d'une "connexion sans torsion" sur $M$ [7] équivaut à une "donnée de descente" sur $M$ relativement à frobenius $S \longrightarrow S^{(p/R)}$. Il y a loin de là à une stratification !

**1.10. La notion de $p$-cristal et ses variantes.** — Nous supposons maintenant que $S$ est de caractéristique $p > 0$, et $R = \mathrm{Spec}(Z)$ (ou $\mathrm{Spec}(Z_p)$, spectre des entiers $p$-adiques, cela reviendrait au même). Si $M$ est un cristal de modules sur $S$, de présentation finie, alors en vertu de **1.5.**, pour tout $s \in S$, si $s'$ est le spectre d'une clôture parfaite de $k(s)$, l'image inverse $M(s')$ de $M$ en $s'$ peut être interprétée comme un module de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k(s'))$. Ainsi, la notion de cristal de modules sur $S$ (au sens absolu) semble convenable pour formaliser la notion de *"famille algébrique" de modules sur les anneaux de vecteurs de Witt aux différents points parfaits au dessus de $S$*. Bien entendu, la notion de cristal est plus fine que ça encore, et doit donner, j'espère, la bonne notion de "famille" lorsque, disons, $S$ est le spectre d'un corps de fonctions (donc pas nécessairement parfait). Je vais maintenant introduire une structure supplémentaire, qui devrait permettre de formuler, de même, la notion de "famille algébrique de modules de Dieudonné", paramétrée par $S$,

[7] "compatible avec puissances $p$-émes"

Considérons le morphisme “puissance $p$-ème”

$$S \xrightarrow{s} S,$$

il permet d’associer, à tout cristal (absolu) sur $S$, d’espèce quelconque, un cristal image inverse:

$$M^{(p)} =_S (M).$$

On appelle *p-crsital* sur $S$ un cristal $M$ sur $S$, muni d’un morphisme de cristaux

$$M^{(p)} \longrightarrow M.$$

Évidemment, les $p$-cristaux sur $S$ d’espèce $F$ donnée forment encore une catégorie, dépendant fonctoriellement de $F$ (pour les foncteurs *covariants* cartésiens de catégories fibrées), ce qui permet par exemple, pour les $p$-cristaux de modules sur $S$, d’introduire toutes les opérations tensorielles habituelles covariantes (produits tensoriels, puissances alternées et symétriques etc). Pour définir le *dual* d’un $p$-cristal de modules, il y a lieu d’introduire une notion duale de celle de $p$-cristal d’espèce $F$, c’est celle de $p^{-1}$*-cristal* d’espèce $F$ : c’est un cristal d’espèce $F$, avec un morphisme de cristaux en sens inverse:

$$V : M \longrightarrow M^{(p)}.$$

Ainsi un contrafoncteur cartésien entre catégories fibrées sur Sch transforme $p$-cristaux en $p^{-1}$-cristaux, et inversement. Les $p^{-1}$-cristaux de modules se multiplient tensoriellement entre eux comme les $p$-cristaux de modules.

Pour obtenir une notion “autoduale”, il y a lieu d’introduire la notion de *bicristal de poids 1* sur $S$, qu’on pourrait aussi appeler un *cristal de Dieudonné* sur $S$, lorsque $F$ est fibré en catégories additives: c’est un cristal muni à la fois d’une $p$-structure et d’une $p^{-1}$-structure, satisfaisant aux relations

$$FV = p_M, \quad VF =_{M^{(p)}} .$$

Cette notion semble tout à fait adéquate à l’étude des groupes formels, ou ce qui revient moralement au même, à l’étude de la cohomologie de De Rham en dimension 1. En dimension supérieure $i$, il y a lieu d’introduire la notion de *bicristal de poids* $i$, qui est un cristal muni de $F$ et $V$ satisfaisant aux relations

$$FV = p^i_M, \quad VF = p^i_{M^{(p)}}.$$

Par exemple, on définit le *bicristal de Tate de poids* $2i$, qui est défini par le cristal de modules unité (associant à tout $T$ sous $S$ le module $\underline{O}_T$ lui-même), et les morphismes de cristaux

$$F = p^i_{T^i}, \quad V = p^i_{T^i}.$$

Ainsi le bicristal de Tate de poids $2i$ est la puissance tensorielle $i$-ème du bicristal de Tate de poids 1. (**N.B.** les bicristaux de poids quelconques se multiplient tensoriellement, de façon que les poids s'ajoutent).

**1.11.** — Si on veut "rendre inversible" le bicristal de Tate $T^1$, on est obligé, qu'on le veuille ou non, de passer à une catégorie de fractions de la catégorie des cristaux de modules sur $S$, (qui entre parenthèses est une catégorie $Z_p$-linéaire, (i.e. les $Hom$ sont des $Z_p$-modules...), tout comme les catégories de $p$-cristaux etc qu'on en déduit). Il revient donc au même de passer à une catégorie de fractions, en déclarant qu'on veut rendre notre catégorie abélienne $Q$-linéaire, ou en déclarant qu'on la veut rendre $Q$-linéaire : il faut faire le quotient par la sous-catégorie abélienne épaisse formée des objets de torsion, qui sont aussi des objets de $p$-torsion [8]. On trouve la catégorie des *"cristaux de modules à isogénie près"*, ou *isocristaux*, sur $S$. Utilisant cette nouvelle notion, on définit comme ci-dessus la notion de $p$-isocristal, comme étant la donnée d'un isocristal $M$ muni d'un homomorphisme $F : M^{(p)} \longrightarrow M$. La notion de bi-isocristal de poids $i$, qui serait calquée de celle de bicristal de poids $i$, n'est pas très raisonnable alors, car $V$ doit être alors donné en termes de $F$ comme $p^i F^{-1}$. Il y a lieu plutôt d'appeler *bi-isocristal* (sans précision de poids) un $p$-isocristal pour lequel $F$ est un *isomorphisme*, et de ne pas choisir entre les différents $p^i F^{-1}$ possibles; il vaut mieux également ne pas parler ici de $p^{-1}$-isocristal, la notion intéressante étant celle de bi-isocristal, qui est manifestement *autoduale* quand on se restreint aux objets de type fini: le dual de $(M,F)$ est $(M,{}^t F^{-1})$, où $M$ est le iso-cristal dual de $M$.

On peut également, bien sûr, localiser par rapport à $p$ en partant déjà de la catégorie des bi-isocristaux de poids $i$, on trouve les *bicristaux de poids $i$ à isogénie près*, qui forment une catégorie abélienne $(S,i)$, et un foncteur exact "oubli de $V$"

$$(S,i) \longrightarrow (S),$$

[8] et cela revient simplement à garder les mêmes objets, et à prendre comme nouveaux $Hom$ les $Hom \otimes_Z Q$.

à valeurs dans la catégorie $(S)$ des iso-bicristaux sur $S$. Ce foncteur est *pleinement fidèle*, de sorte que *les bi-isocristaux forment une généralisation commune des bicristaux de poids $i$ à isogénie près*. Pour préciser ce point, désignant par $(S,i)$ la catégorie des bicristaux de poids $i$ sur $S$, il y a lieu d'introduire des foncteurs canoniques

$$(S,i) \longrightarrow (S,i+1) \longrightarrow ...,$$

donnés par $(M,F,V) \rightsquigarrow (M,F,pV)$. Quand on localise ces foncteurs par $p$, on trouve des foncteurs

$$(S,i) \longrightarrow (S,i+1) \longrightarrow ....$$

qui se trouvent être *pleinement fidèles* : on peut donc considérer que, pour $i$ croissant, la notion de "bicristal de poids $i$, à isogéne près" constitue une généralisation de plus en plus large de celle de "cristal de Dieudonné". La notion de "bi-isocristal" est à ce titre une généralisation qui englobe toutes les précédentes, et qui de plus a la louable vertu d'être stable par produit tensoriel, *et* passage au dual. Cela semble donc une catégorie toute indiquée comme catégorie des valeurs pour un foncteur "cohomologie de De Rham" convenable, lorsqu'on se décide à travailler à isogénie près.

**1.12. Exemple 1 : Cas où $S$ est le spectre d'un corps parfait $k$.** — Alors la donnée d'un cristal de modules de type fini sur $k$ équivaut à la donnée d'un module de type fini $M$ sur $W$, la formation du motif $M^{(p)}$ correspond à la formation

$$M^{(p)} = M \otimes_W (W, f_W),$$

où $f_W$ est l'endomorphisme de frobenius de $W$, et $(W, f_W)$ est la $W$-algèbre définie par $f_W$. Par suite un structure de $p$-cristal sur $M$ revient à la donnée d'un homomorphisme de $W$-modules $M^{(p)} \longrightarrow M$, ou si on préfère, à la donnée d'un homomorphisme $f_W$-semi-linéaire

$$F_M : M \longrightarrow M.$$

Comme l'application $x \longrightarrow x \otimes 1$ de $M$ dans $M \otimes_W (W, f_W)$ est bijective, $f_W$ étant un automorphisme de $W$, on peut considérer la bijection inverse, qui est $f_W^{-1}$-semi-linéaire. Par suite, la donnée d'une $p^{-1}$-structure sur $M$ revient à la donnée d'un homomorphisme $f_W^{-1}$-linéaire:

$$V_M : M \longrightarrow M.$$

la donnée d'un couple $(F, V)$ définit sur $M$ une structure de bi-cristal de poids $i$ si et seulement si on a

$$FV = VF = p^i Id_M.$$

En particulier, pour $i = 1$, on retrouve la notion de *module de Dieudonné*: la catégorie des cristaux de Dieudonné sur $k$ est canoniquement équivalente à celle des modules de Dieudonné relativement à $k$.

La catégorie des isocristaux de type fini sur $k$ est équivalente à la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps des fractions $K$ de $W$. Donc un biisocristal (de type fini) sur $k$ s'identifie à un tel vectoriel, muni d'un $f_K$-endomorphisme bijectif.

Toutes ces descriptions sont compatibles avec les opérations tesorielles, et la formation d'images inverses pour $k$ variable.

On peut se demander, avec la description précédente des bi-isocristaux, quels sont ceux qui sont les couples $(E, F)$, $E$ un vectoriel sur $K$ et $F$ un automorphisme semi-linéaire, tels que, si on pose $V = p^i F^{-1}$, pout out $x \in E$, l'ensemble de ses transformés par les différents monômes non commutatifs en $F$, $V$ soit une partie *bornée* de $E$: c'est une pure tautologie. Pour qu'il existe un $i$ ayant cette propriété, il faut et il suffit que pour tout $x \in E$, l'ensemble des $F^n x$ soir borné.Bien entendu, c'est là une propriété qui est stable par changement de $F$ en $pF$ (correspondant à la tensorisation par le bi-isocristal de Tate de poids 2), mais non par le changement de $F$ en $p^{-1}F$ (correspondant à la tensorisations par l'inverse $T^{-1}$ du bi-isocristal précédent). Comme on tient beaucoup à inverser Tate, on voit qu'il n'est pas naturel, en ffet, de poser une condition de croissance sur l'ensemble des itérés de $F$. De façon précise, appelant *effectis* les bi-isocristaux qui proviennent d'un objet d'un $(S, i)$, on voit que tout bi-isocristal est de la forme $T^{-i} \otimes_{\underline{N}}$, avec $\underline{N}$ effectif: on n'a pas ajouté plus de nouveaux objets qu'il n'était absolument nécessaire !

**1.13. Exemple 2 : $S$ lisse sur un corps parfait $k$.** — Déterminons d'abord dans ce cas les cristaux sur $S$, sans plus. Wout d'abord, sans condition de lissité, on voit à l'aide de la propriété caractéristique de $W$ que la catégorie $C$ introduite dans 1.0. ne change pas, essentiellement, quand on remplace $R = \mathrm{Spec}(Z)$ par $R = \mathrm{Spec}(W)$. D'autre part, il résulte aussitôt des définitions que la donnée d'un cristal sur $S$, relativement à $W$, revient à la donnée d'un système cohérent de cristaux sur $S$, relatifs aux $W_n = W/p^{n+1}W$. (*NB* On n'a pas formulé avec la généralité qui convenait l'exemple 3 de 1.7.!) Théoriquement, on est donc ramené à déterminer, pour chaque $n$, la catégorie des cristaux sur $S$ relatifs à $W_n$, et les foncteurs restrictions entre ces catégories. D'ailleurs, il est inoffensif de se localiser sur $S$, par exemple de supposer au besoin $S$ affine. Utilisant maintenant la lissité de $S$, on peut donc supposer que pour tout $n$, $S$ se remonte en un $S_n$ lisse sur $W_n$, de façon que ces choix se recollent (il suffit pour ceci $S$ lisse et affine). Or, il résulte encore facilement des définitions, utilisant seulement que $S = S_0 \longrightarrow S_n$ est une immersion fermée définie par un Ideal nilpotent, que le foncteur restriction des cristaux sur $S_n$ (relativement à une base quelconque - ici on prendra $W_n$) vers les cristaux sur $S_0$, est une équivalence de catégories, donc un cristal sur $S$ relativement à $W_n$ s'identifie à un cristal sur $S_n$ relativement à $W_n$. Comme $S_n b$ est lisse sur $W_n$, il résulte de ce qui a été dit dans 1.8. que les cristaux en question s'identifient aux objets (de l'espace $F$ considérée) sur $S_n$, *munis d'une stratification relativement à* $R_n = \mathrm{Spec}(W_n)$. Les foncteurs restrictions sur les cristaux s'expriment alors par les foncteurs restrictions correspondants pour objets stratifiés. En résumé: *un cristal $M$ sur $S$ s'identifie à un système cohérent $(M_n)$ d'objets à stratification sur les différents $S_n$ sur* $R_n = \mathrm{Spec}(W_n)$. Pour relier ceci à des objets qui soient plus dans la nature d'objets "définis en caractéristique nulle", supposons d'abord que l'on puisse même relever $S$ en un schéma $X$ *propre sur* $R = \mathrm{Spec}(W)$, hypothèse évidemment bien restrictive. On voit alors, utilisant les théorèmes de comparaison EGA III 4.5 que *dans le cas de cristaux de modules cohérents sur $S$, la catégorie des dits est canoniquement équivalente à la catégorie des Modules cohérents $M$ sur $X$, munis d'une stratification relativement à* $R = \mathrm{Spec}(W)$. (**N.B.** Il se trouve donc, à posteriori, que cette dernière catégorie est essentiellement indépendante du relèvement choisi $X$ de $S$). Considérant la fibre générique $X_K$ de $X$ sur $R$, qui est un schéma propre et lisse sur un corps de caractéristique nulle, on trouve donc un foncteur remarquable "restriction" ou "localisation", allant de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur $S$, dans la catégorie des Modules cohérents sur $X_K$, stratifiés relativement à $X_K$. Or (oubli de **1.8.**) on voit facilement qu'un Module cohérent stratifié sur un préschéma localement de type fini sur un corps est nécessairement localement libre. De plus comme ici $K$ est de caractéristique nulle, et $X_K$ lisse dessus, on a signale dans **1.8.** que la notion de stratification s'explicite très simplement comme celle de "connexion intégrable". [Enfin, lorsque $S$ donc $X_K$ est géométriquement connexe, et que $K$ peut se plonger dans le corps des complexes $C$, alors la notion de module cohérent à action intégrable sur $X_K$ s'interprète en termes de représentations linéaires (complexes) du groupe fondamental transcendant de $X_C^{an}$, de façon bien connu. Si par exemple le groupe fondamental transcendant est le groupe unité, alors on conclût par descente que tout Module cohérent stratifié sur $X_K$ est trivial, ce qui en termes de $S$ s'énonce en disant que tout cristal de modules cohérents sur $S$ est isogène à un cristal "croissant", i.e. à un cristal qui est l'image inverse d'un cristal sur $k$, (lui-même défini par un module de type fini sur $W$). De ceci et de la rigidité de la notion de cristal on déduit facilement, par exemple, que tout $p$-cristal cohérent sur $S$ ou tout bi-cristal de poids $i$ donné (par exemple tout cristal de Dieudonné) est isogène à un fournit de même espèce *trivial*. On voit donc là un principale d'approche transcendante pour l'étude des familles de groupes formels (par exemple) en caractéristique $p$...] Quand à la notion d'isocristal (de modules cohérents) sur $S$, on constate aussitôt que le foncteur précédent induit un foncteur *pleinement fidèle* de la catégorie de ces derniers, dans la catégorie des modules cohérents stratifiés sur $X_K$. Il s'impose évidemment d'en déterminer l'image essentielle, et pour commencer d'examiner si par hasard ce foncteur ne serait pas une équivalence de catégories. Cela me [9] semble un peu *trop optimiste*, mais je ne suis sûr de rien, faute d'avoir regardé. Tout ce qu'on peut dire à priori, c'est que la condition cherchée sur un Module stratifié doit être de nature locale en les points de $X$ qui sont maximaux dans $S$.

Quand on ne suppose pas $S$ propre et remonté globalement, mais qu'on suppose seulement qu'on a remonté $S$ formellement, en un *schéma formel* $X$ sur $R$, alors il est vrai (en fait, de façon essentiellement triviale) que *la catégorie des cristaux de modules cohérents sur $S$ est équivalente à la catégorie des Modules cohérents sur le schéma formel $X$, munis d'une stratification relativement à* $\mathrm{Spec}(W) = R$ (quand on

[9]effectivement [ ]

transcrit de façon évidente toutes les définitions envisagées dans 1.8. dans le cadre formel). Si on veut encore, comme il est légitime, trouver un analogue la restriction à $X_K$ envisagées plus haut, il faut définir $X_K$ comme *l'espace rigide-analytique sur K défini par le schéma formel* $X$, et considérer sur $X_K$ des Modules cohérents munis de *stratifications au sens rigide-analytique*, ou ce qui revient au même, de connexions intégrables en ce sens. De tels Modules sont encore nécessairement localement libres. On trouve ainsi un foncteur des cristaux de Modules cohérents sur $S$ dans les Modules cohérents stratifiés sur $X_K$, induisant un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux cohérents sur $S$, dans la catégorie des Modules cohérents stratifiés sur $X_K$. Comme tout à l'heure (et même plus, si on peut dire, car c'est vraiment ici la situation "naturelle"), il s'impose de regarder quelle est l'image essentielle. On peut également se demander si les Modules cohérents stratifiés sur un espace rigide-analytique n'admettraient pas une description simple, en termes d'un groupe plus ou moins discret jouant le rôle du groupe fondamental dans la théorie transcendante sur le corps de complexes. La description donnée des cristaux sur $S$, toute triviale qu'elle soit, a déjà des conséquences intéressantes pour la structure de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur $S$: cette catégorie est noethérienne (si $S$ est noethérien i.e. de type fini sur $k$), tout objet contient donc un plus grand sous-objet de torsion, de plus objets sans torsion correspondent dans la description ci-dessus aux Modules stratifiés sans torsion sur $X$, lesquels sont alors automatiquement localement libres. Il est bien probable que des résultats analogues doivent être vrais sans hypothèse du genre lissité sur $S$.

**1.14.** — Il faut encore expliciter, dans la description générale précédente, le foncteur [], pour pouvoir décrire de façon générale, si en plus de la donnée de $S$ sur $k$, on a un $S'$ lisse sur $k'$ parfait, et des automorphismes $S' \longrightarrow S$ et $\mathrm{Spec}(k') \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ donnant lieu à un carré commutatif, et si enfin on peut relever $S'$ formellement en $X'$, et $S' \longrightarrow S$ en $X' \longrightarrow X$, donnant un carré commutatif avec $\mathrm{Spec}(W') \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$, alors la notion d'image inverse de cristaux de modules cohérents, de $S$ à $S'$, s'explicite en termes d'image inverse de Modules cohérents stratifiés, de $X$ à $X'$. Lorsque $k = k'$, $S = S'$, et que les morphismes envisagés sont les puissances $p$-èmes, on est donc conduit à chercher à relever ce morphisme à $X$ de façon compatible avec le morphisme $\mathrm{Spec}(W) \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$ déduit de $f_W$, ou ce qui revient au même, de relever le morphisme canonique $S \longrightarrow S^{(p/k)}$ en un morphisme de $R$-schémas formels $X \longrightarrow X \times_R (R, f_R)$. C'est en tous cas toujours possible si $S$ est affine, cas auquel on peut se ramener. Ayant donc ainsi un morphisme

$$f_X : X \longrightarrow X,$$

compatible avec $f_R$ sur $R = \mathrm{Spec}(W)$, et induisant $f_S$ sur $S$, le foncteur [] s'explicite comme l'image inverse ordinaire de Modules stratifiés sur $X$ relativement à $R$, resp. (dans le cas de isocristaux) de Modules stratifiés sur l'espace rigide-analytique $X_K$, pour le "morphisme" $X_K \longrightarrow X_K$ d'espaces rigide-analytiques (relatif à $f_K$ sur le corps de base !) induit par $f_K$. Bien que $f_K$ et par suite $f_{X_K}$ loin d'être unique, le foncteur envisagé qu'il définit ne dépend pas, essentiellement, des choix faits.

**1.15. Bicristaux et biisocristaux sur une base quelconque.** — Ne supposons plus nécessairement $S$ de caractéristique déterminé $p$. Pour chaque nombre premier $p$, soit $S_p$ la fibre $V(pl_{\underline{O}_S})$ de $S$ sur le point $p\underline{Z}$ de Spec(Z). Un bicristal de poids $i$ sur $S$ est par définition la donnée d'un cristal de Modules $M$ sur $S$, et pour chaque $p$ d'une structure de bi-cristal de poids $i$ sur la restriction $M_p$ de $M$ à $S_p$, définie par la donnée de $F_p$, $V_p$. On définit de même la notion de bi-isocristal sur $S$, étant entendu qu'un isocristal est un objet de la catégorie des isocristaux sur $S$ (comme de juste), définie à partir de la catégorie des cristaux de modules en "localisant" par rapport à des entiers $n > 0$ arbitraires, i.e. en tensorisant les Hom sur $Z$ par $Q$. - Lorsque $S$ est de cararactéristique nulle, le supplément de structure impliqué par "bi" est évidemment vide, tandis que si $S$ est de type fini sur $Z$ et domine Spec(Z), alors la notion envisagée est d'une essentiellement arithmétique, les différents $F_p$ jouant le rôle d'homomorphismes de frobenius, comme de bien entendu; dans le cas du poids 1, en particulier, on peut considérer que le cristal avec sa bi-structure supplémentaire permet de relier entre eux les groupes formels en les diverses caractéristiques auxquels il donne naissance...

**1.16. Un retour en arrière.** — La définition 1.1. et le sortie 1.3. sont un petit peu canulés. Au lieu de prendre dans 1.0. pour $C$ la catégorie des $R$-flèches $S \longrightarrow T$ qui..., il faut prendre la catégorie des $R$-flèches $U \longrightarrow T$ qui..., où $U$ est un ouvert induit non précisé de $S$. De plus, la définition n'est guère raisonnable alors que si la catégorie fibrée envisagée $F$ est un "champ" pour la topologie de

Zariski sur $\mathrm{Sch}_{/R}$, i.e. si on peut y recoller flèches et objets. Ceci est nécessaire en tous cas pour pouvoir dans 1.3. définir la notion d'image inverse, la définition que j'y ai donnée n'étant raisonnable que si $S$, $S'$ sont affines. Dans le cas général, il faut se localiser sur $S$ et $S'$ pour se ramener à cette situation. Autrement on bute sur des canulars idiots de nature globale, comme le fait que sans restrictions sur $S' \longrightarrow S$, la construction envisagée de somme amalgamée fait sortir de la catégorie des préschémas... Il est probable qu'il y aura bien d'autres canulars de détail dans ces notes, mais, je pense, sans conséquence !

Il est évidemment tentant de vouloir interpréter les cristaux de modules comme faisceaux de modules sur un certain site. C'est possible, en prenant le *"site cristallogène de S sur R"*, qui est précisément le site dont la catégorie sous-jacent $C$ est celle des $R$-morphismes $U \longrightarrow T$ ($U$ ouvert de $S$, $U \longrightarrow T$ immersion fermée surjective définie par Ideal nilpotent sur $T$), la topologie est celle de Zariski: on prend comme familles couvrantes "de définition" de $(U \longrightarrow T)$ les familles définies pr des recouvrements ouverts $(T_i)$ de $T$, chaque $T_i$ muni de la structure induite, et définissant $(U_i \longrightarrow T_i)$ par $U_i = U \cap T_i$. Un faisceau d'ensembles sur ce site s'identifie à un système de faisceaux d'ensembles $F_{U \longrightarrow T}$ sur les objets buts des objets de $C$, avec, pour tout flèche $(U \longrightarrow T) \longrightarrow (U' \longrightarrow T')$ de $C$, un homomorphisme de l'image inverse de $F_{U' \longrightarrow T'}$ [] $T$, dans $F_{U \longrightarrow T}$ (homomorphisme qui n'est pas nécessairement un isomorphisme !) et qui sont un isomorphisme si $T \longrightarrow T'$ est une immersion ouverte. En particulier, associant à tout $(U \longrightarrow T)$ le faisceau $O_T$ sur $T$, on trouve un faisceau d'anneaux $O_C$ sur $C$. Ceci posé, les cristaux de modules (quasi-cohérents) sur $S$ s'identifient aux Modules quasi-cohérents (i.e. localement conoyau d'un homomorphisme de Modules libres) sur $O_C$ ; les cristaux "de près finie" i.e. les cristaux de Modules de présentation finie, correspondant exactement aux Modules de présentation finie sur $O_C$.

Quand on a un $R$-morphisme $S' \longrightarrow S$, je ne vois pas de morphisme naturel correspondant entre les *sites* cristallogènes correspondants à $S$, $S'$. Ce n'est pas bien gênant, car introduisant les *topos cristallogènes* $_{S/R}$ et $_{S'/R}$ définis par les sites en question, on définit par la méthode esquissée dans 1.3. un morphisme

$$_{S'/R} \longrightarrow _{S/R},$$

correspondant à la notion naturelle de "image inverse de faisceaux" au sens inverse (qui, j'avoue devrait être définie avec le plus grand soin).

**1.17.** — On est donc dans une situation où on peut faire marcher la machine cohomologique. Étant loin de mes bases, je n'ai pas tenté sérieusement de tirer au clair si les images directes supérieures qu'on définit ainsi, et en particulier les groupes de cohomologie du site cristallogéne, donnent ce qu'on voudrait.

Le test-clef est le suivant: *si $R$ est le spectre d'un corps, et si $S$ est lisse sur $R$, et propre sur $R$ dans le cas de la caractéristique $p > 0$, on voudrait trouver, comme cohomologie à coéfficients dans $\underline{O}_C$ lui-même, la cohomologie de De Rham de $S$ relativement à $R$.* Plus généralement, sans condition sur $R$, si $f : S' \longrightarrow S$ est propre et lisse, on voudrait trouver comme "valeur en $S'$" $\mathrm{R}^1 f_{cris*}(\underline{O_{C'}})$ (cf 1.4.) le faisceau de cohomologie de De Rham $\mathrm{R}^i f_*(\Omega^*_{S'/S})$, et on voudrait [10] que la connexion canonique à la Gauss-Manin sur ce dernier soit celle associée à la stratification canonique provenant de la structure cristalline (cf 1.8.).

L'existence d'une connexion de Gauss-Manin en cohomologie de De Rham (que j'ai vérifié pour n'importe quel morphisme lisse), et le tapis de Washnitzer-Monsky, sont en tous cas des indications assez fortes pour conduire à penser qu'il doivent exister une théorie cohomologique, en termes de cristaux, donnant de telles valeurs pour l'argument $\underline{O}_C$. Au cas où la cohomologie du site cristallogène ne donnerait pas les résultats qu'il faut, on pourrait essayer (au lieu de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie de *tous* les Modules sur le site annelé cristallogène) de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie des seuls Modules quasi-cohérents sur le site cristallogène, i.e. dans la catégorie des cristaux de modules.

## Chapitre 2. — La cohomologie de De Rham est un cristal

**2.1.** — L'affirmation du titre n'est pour l'instant qu'une hypothèse ou un voeux pieux mais je suis convaincu qu'elle est essentiellement correcte. Comme je l'ai dit dans 1.17., il y a pour le moment deux indications dans cette directions

a) Le travail de Washnitzer-Monsky. Deux grosses imperfections dans leur tapis: 1° ils n'obtiennent que des invariants cohomologiques *locaux* sur leur variété lisse en caractéristique $p > 0$, via leurs relèvements; pour avoir un invariante global, ils doivent se limiter à la dimension 1. On peut penser que

[10]

cela tient à leur manque de familiarité avec les machines cohomologiques. 2° leurs invariants sont des (faisceaux de) vectoriels sur le corps des fractions de $W$, et non sur $W$, i.e. ils n'obtiennent que des invariants "modulo isogénie". Il semble bien, en effet, que leur démonstration d'invariance fait intervenir de façon essentielle des dénominateurs. Il n'est pas exclu, d'après cette indication, que dans le titre du Chapitre il faille remplacer "cristal" par "isocristal" (et "est" par "définit"). Ce serait bien dommage, mais n'exclurait pas pour autant l'existence d'une bonne théorie cohomologique pour les cristaux, qui pour un morphisme propre et lisse et le "cristal unité" coïnciderait *modulo isogénie* avec ce que donne De Rham. Le est décisif reste celui indiqué dans 1.17, savoir: donnent-il un résultat positif seulement en caractéristique zéro, ou en toute caractéristique ?

b) L'existence des connexions de Gauss-Manin. J'ai vérifié pour tout morphisme lisse $f : X \longrightarrow S$ l'existence d'une connexion canonique (absolue) sur les $\mathrm{R}^i f$ au sens de De Rham relatif, ou plus correctement, sur le complexe $\mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, considéré comme objet de la catégorie dérivée $D(O_S)$. A vrai dire, je n'ai pas vérifié pour cette connexion une condition de "nullité de la [ ]"; c'est vérifié en tous cas (par voie transcendante !) si $S$ est lisse, sur $R$ r´duit de caractéristique nulle. [Il faut noter d'ailleurs qu'il n'y a pas d'espoir de montrer que la connexion en question provient toujours d'une stratification: c'est *faux* en caractéristique $p > 0$; la raison étant que la cohomologie de De Rham pour une variété algébrique non complète (par exemple affine) n'est plus du tout raisonnable, étant beaucoup trop grosse. Pour pouvoir espérer une stratification sur $\mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, sans restriction de caractéristique, il faut donc supposer $f$ *propre*.]

c) La nécessité d'une interprétation cristallographique de la cohomologie de De Rham est également suggérée par le problème que j'avais signalé dans mon papier bleu sur De Rham: si $R$ est le spectre du corps des complexes, $S$ lisse sur $R$ et $X$ lisse et propre sur $S$, alors la théorie transcendante de la cohomologie fournit une suite spectrale

**2.2.** — Je vais préciser l'affirmation du titre, en me plaçant dans l'éventualité optimiste bien sûr où on n'aurait pas besoin de s'isogéniser. Comme les cristaux de modules sur un préschéma $S$ forment une catégorie abélienne, on peut prendre la catégorie dérivée; ces objets seront appelés simplement "complexes de cristaux". Un tel animal induit sur $S$, plus généralement sur tout objet-but $T$ d'un objet $(U \longrightarrow T)$ du site cristallogène $C$ de $S$, un complexe de Modules ordinaire (envisagé comme objet de la catégorie dérivée des faisceaux de Modules sur $S$, resp. $T$). Un complexe de cristaux est dit pseudo-cohérent (resp. parfait, resp. ...) si pour tout objet $(U \longrightarrow T)$ de $C$, le complexe induit sur $T$ est pseudo-cohérent (resp. ...). Ceci posé, voilà la théorie qu'on voudrait: A tout morphisme lisse et propre $f : X \longrightarrow S$, serait associé un complexe de cristaux (absolu) $(f)$ sur $S$, appelé cohomologie de De Rham cristalline de $f$. Ce complexe doit être parfait, sa formation doit être compatible avec tout changement de base sur $S$ (l'image inverse des complexes des cristaux étant entendu, bien entendu, au sens de catégories dérivées...), et bien sûr $(f)$ dépend fonctoriellement (de faoņ contravariant) de $X$ sur $S$. Tôt ou tard, il faudra expliciter aussi une formule de Künneth $(f \times_S g) \simeq (f)[](g)$, et une formulé de dualité, qui pour $f$ partout de dimension relative $d$ s'exprime comme un accouplement, définissant une autodualité, $(f) \times (f) \longrightarrow T^d[2d]$, où $T^d$ est le cristal de Tate de poids $2d$, et où $[2d]$ indique qu'on translate les degrés de $2d$ (attention au facteur 2 !). Enfin, on veut comme de juste un isomorphisme $(f)(S) \simeq \mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, fonctoriel en $X$, compatible avec les changements de base, avec Künneth et la dualité (déjà connus pour la cohomologie de De Rham ordinaire).

Par prudence, je me suis abstenu de dire quoi que ce soit sur le cas $f$ non propre, dont il faudrait parler tout au moins si on voulait faire sérieusement le lien avec Washnitzer-Monsky.

**2.3. La cohomologie de De Rham comme biisocristal —** A supposer qu'on ait une théorie du type envisagé dans 2.2., on trouve pour chaque entier $p$ un homomorphisme de frobenius

$$F_p : (f)_p^{(p)} \longrightarrow (f)_p,$$

où l'indice $p$ au complexe de cristaux $(f)$ désigne la restriction à $S_p = V(p.1)$ (au sens des catégories dérivées), qui d'après les conditions de 2.2. n'est autre que $(f_p)$, $f_p : X_p \longrightarrow S_p$ étant induit par $f$. Utilisant toujours la même condition de compatibilité avec le changement de base, on constate que $(f_p)^{((p))}$ n'est autre que

$(f_p^{(p)})$, où $f_p^{(p)} : X_p^{(p/S_p)} \longrightarrow S_p$ est le morphisme structural de frobenius relatif de $X_p$ sur $S_p$. Or on a le morphisme de frobenius $X_p^{(p/S)} \longrightarrow X$, qui est un $S$-morphisme, qui par fonctorialité de  nous donne $(f_p)^{((p))} \longrightarrow (f)_p$ comme on voulait. Il faut prouver que cet homomorphisme est en fait une isogénie, donc que l'isocristal défini par $(f)$ devient, à l'aide des $F_p$, un bi-isocristal. Mais utilisant la relation de dualité écrite dans 2.2. (à vrai dire, l'écriture $T^p$ pour le cristal unité ne prend son sens que lorsque on le regarde comme muni de sa structure de bi-cristal naturelle, qui n'intervient qu'ici), on peut transposer $F$ en un $V$, tel que $FV = VF = p^{2d}$, ce qui prouve notre assertion.

D'ailleurs, lorsque l'on passe du cristal de De Rham $(f)$ à l'isocristal correspondant, donc des objets de cohomologie $^i(f)$ aux isocristaux correspondants, il sera vrai (tout comme pour les $\mathrm{R}^i f_*$ de De Rham en caractéristique nulle) que leur formation commute à tout changement debase, de sorte que chacun des isocristaux $^i(f)$ devient à son propre titre un bi-isocristal. Au moment de rédiger 1.10. il m'avait semblé que, sans mettre du iso dans le coup, $^i(f)$ devrait être un bi-cristal de poids $i$, mais je m'étais canulé, il faudrait pour cela une polarisation de $X$ de $S$ qui définisse un isomorphisme (pas seulement une isogénie) de $^i(f)$ avec $^{2d-i} \otimes T^{-(d-i)}$, ce qui n'existe évidemment que très exceptionnellement; une fois qu'on l'a, on définit $V$ dans $^i$ en transposant $F$ dans $^{2d-i}$.

**2.4. Cas d'un schéma abélien** — Il semble que ce ne soit guère que dans ce cas-là où il soit bien raisonnable de parler de bi-cristaux et non seulement de bi-iso-cristaux. De façon précise, $^1(f)$ a dans ce cas une structure de bicristal, défini par les $F_p$ précédents, et des $V_p$ qui se définissent encore, par fonctorialité de , à l'aide de l'homomorphisme "Verschiebung" $A_p^{(p/S_p)} \longrightarrow A_p$ (défini avec la généralité qui convient dans les notes de Gabriel dans SGAD). Comme $^1(A/S)$ est un foncteur multiplicatif en $A$, grâce à Kunneth postulé dans 2.2., et que l'on a $FV = VF = pId$ sur les schémas abéliens en car $p$, on en conclut les mêmes relations dans $^1$. Cela montre donc que $^1(A)$ est un bicristal de poids 1, i.e. un *cristal de Dieudonné*. Lorsque $S$ est le spectre d'un corps parfait de caractéristique $p[]0$, un tel cristal s'identifie simplement, d'après 1.12, à un module de Dieudonné sur $W = W(k)$. Bien sûr, *on doit trouver que ce module n'est autre que le module de Dieudonné du groupe formel* (ou plutôt, du groupe $p$-divisible) *défini par la variété abélienne $A$.*

Débarrasser de l'hyperstructure axiomatico-conjectural de 2.2., on peut exprimer ainsi la construction obtenue du module de Dieudonné:

1° Soit $A$ un schéma abélien sur un schéma affine $S$. On sait que pour tout morphisme $S \longrightarrow T$ d'immersion fermée surjective, défini par Idéal nilpotent sur $T$, $A$ se prolonge en un schéma abélien $B$ sur $T$. On peut regarder la cohomologie de De Rham ordinaire $\mathrm{R}^1\, g_*(\Omega^\bullet_{B/T})$, où $g : B \longrightarrow T$ est le morphisme structural, et on sait que c'est un Module localement libre de rang $2g$

2° Supposons que $S$ soit le spectre d'un corps parfait $k$ de car $p > 0$, alors le cristal précédent s'identifie à un module libre de rang $2g$ sur $W = W(k)$. On y introduit les structures $F$ et $V$, en utilisant comme ci-dessus les homomorphismes $F : A \longrightarrow A^{(p)}$ et $V : A^{(p)} \longrightarrow A$. On trouve ainsi un module de Dieudonné $M$, et:*Deuxième affirmation :* C'est bien celui défini par Dieudonné. En d'autres termes: si $A$ est n'importe quel anneau local artinien de corps résiduel $k$, et $B$ un prolongement de $A$ en un schéma abélien sur $\Lambda$, alors la cohomologie de De Rham $\mathrm{H}^1(B) = \mathrm{H}^1(B, \Omega^\bullet_{B/\Lambda})$ est canoniquement et fonctoriellement isomorphe à $M \otimes_W \Lambda$, où $M$ est le module de Dieudonné classique de $A$, et où on tient compte du théorème de Cohen qui munit $\Lambda$ d'une structure canonique de $W$-algèbre (N.B. la fonctorialité de l'isomorphisme garantira automatiquement qu'il est compatible avec $F$ et $V$).

**2.5.** — Je n'ai pas vérifié, à vrai dire, les deux affirmations, mais n'ai pas le moindre doute qu'elles sont correctes telles quelles. Cette façon de voir le module de Dieudonné permet de plus d'expliciter de façon remarquable les variations infinitésimales de structure de la variété abélienne $A$ donnée, en caractéristique $p > 0$, en termes du module de Dieudonné: les prolongement de $A$ en un schéma abélien $B$ sur $\Lambda$ doivent correspondre exactement aux modules quotients libres de rang $g$ de $M \otimes_W \Lambda$ qui redonnent, modulo $p$, le module quotient de rang $g$ canonique de $M \otimes_W k = \mathrm{H}^1(A)$, (correspondant à la filtration canonique de cette cohomologie). Plus généralement et plus précisément :

3° Considérons, pour tout schéma abélien $A$ sur une base $S$, sur la cohomologie de De Rham $\mathrm{R}^1 f_*(\Omega^\bullet_{A/S}) = \mathrm{H}^1(f)$, la filtration canonique

$$0 \leftarrow \mathrm{R}^1 f_*(O_A) \leftarrow \mathrm{H}^1(f) \leftarrow \mathrm{R}^0 f_*(\Omega^1_{A/S}) \leftarrow 0.$$

Donc pour tout $B$ sur $T$ comme dans 1°, on a sur $M(T) =^1 (A/S)(T) = \mathrm{H}^1(g)$ une filtration naturelle, ne dépendant que de la classe à isomorphisme près connue de $M(S) = \mathrm{H}^1(f)$ provenant de $A$. Ceci dit, *troisième affirmation : on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre classes de prolongements de $A$ à $T$, et prolongements de la filtration donnée de $M(S) = M \otimes_{O_T} O_S$ en une filtration de $M(T)$.* Plus précisément encore, le foncteur $B[\,](A, \varphi)$, de la catégorie des schémas abéliens $B$ sur $T$, dans la catégorie des schémas abéliens $A$ sur $S$, munis d'une filtration $\varphi$ de ${}^1(A/S)(T)$ prolongement celle de ${}^1(A/A)(S)$ (N.B. il ne s'agit que de filtrations à quotients localement libres, bien sûr) est une équivalence de catégories.

Ce énoncé est évidemment fort suggestif aussi pour des généralisations en cohomologie de De Rham de dimension supérieure, pour un morphisme lisse et projectif quelconque, tenant compte de la filtration canonique de celle ci. On voit bien en tous cas que ce dernier élément de structure n'est *pas* de nature cristalline, i.e. donnée par une filtration du cristal de De Rham postulé dans 2.2., mais est au contraire dans la nature d'un élément de structure "continu", dont la variation doit refléter fidèlement les variations de structure de motif donnant naissance au cristal envisagé. Pour arriver à préciser ce dernier point, il faudrait des fondements un peu plus fermes de la théorie des motifs, comme de celle (certainement beaucoup plus élémentaire) des cristaux et de la cohomologie de De Rham. Yne autre généralisation, (suggérée par comparaison du 3° avec Serre-Tate, disant que si $S$ est de caractéristique $p > 0$, alors étendre $A$ à $T$, c'est pareil qu'étendre le groupe $p$-divisible correspondant), concerne la théorie des groupes formels, dont il sera question au Chapitre 3. Pour préparer le terrain, je vais présenter d'une façon un peu différente le cristal ${}^1(A/S)$ associé à un schéma abélien, en utilisant explicitement la structure de groupe du dit.

**2.6.** — De façon générale, paraphrasant sur une base quelconque une vieille construction de Serre (c'est de lui que je l'ai apprise, du moins), on trouve que pour tout schéma abélien $A$ sur une base $S$, il y a une extension naturelle de $A$ par le fibré vectoriel $V(\mathrm{R}^1 f_*(O_A)) = V(t_A)$, (où $A$ est le schéma abélien dual de $A$). Attention à la notation, le fibré vectoriel $V(E)$ est contravariant en $E$, ces sections sont les homomorphismes $E \longrightarrow O_S$ ! L'extension en question est universelle parmi les extensions de $A$ par des fibrés vectoriels, est fonctorielle en $A$, et compatible avec changement de base. Appelons la $G(A)$. Ainsi, le faisceau de Lie de $G(A)$ est une extension

$$[]$$

qui est duale e la suite exacte envisagée dans 2.5., dont nous avons donc ici une construction indépendante en termes d'extensions de $A$ par des groupes vectoriels. On peut en profiter pour préciser en affirmant que, pour un prolongement $B$ de $A$, de $S$ à $T$, le schéma en groupes $G(B/S)$ est déterminé, à isomorphisme canonique (et même unique) près, par le seule donnée de $A$ et de $S \longrightarrow T$, indépendamment du choix particulier du prolongement $B$. En d'autres termes, on trouve un *cristal en schémas de groupes lisses* $G(A/S)$, et pour chaque prolongement infinitésimal $B$ de $A$ à un $T$, un isomorphisme canonique $G(A/S)(T) \simeq G(B/T)$; tout ça bien sûr fonctoriel en $A$ et compatible avec changements de base. D'autre part, on peut préciser alors 3° en indiquant quel est le foncteur quasi-inverse de celui envisagé dans cet énoncé: l'extension de la filtration de ${}^1(A/S)(S)$ en une filtration du faisceau de Lie ${}^1(A/S)(T)[]$ de $G(A/S)(T)$ revient à étendre le sous-groupe vectoriel canonique de $G(A/S)(S)$ en un sous-groupe vectoriel de $G(A/S)(T)$, et l'on trouve $B$ en passant simplement au quotient.

N.B. Je suis tombé sur la connexion canonique de $G(A/S)$ en essayant de simplifier la construction de Manin de l'application $A(S) \longrightarrow \Gamma(S, O_S)$ associée à une équation de Picard-Fuchs sur $S$, relativement à $A$. Pour ceci, il suffit de noter que localement sur $S$ toute section de $A$ sur $S$ se remonte en une section de $G = G(A/S)$ sur $S$ ! La donnée de la connexion de $G$ permet alors de prendre la dérivée de cette section, qui est un élément de $\Gamma(S, t_G \otimes \Omega^1_S)$, déterminé modulo une section de l'image du faisceau [], correspondant à l'indétermination du relèvement d'une section de $A$ en une section de $G$. Les équations de Picard-Fuchs sont définies tout juste pour arriver, d'une telle section de [] (qui en fait est un *cocyle*, compte tenu de la connexion canonique de $t_G$ provenant de $G$), avec l'indétermination qu'on vient de préciser, à tirer une section de $O_S$... (Du moins en caractéristique nulle, cas dans lequel se place Manin de toutes façons).

Voici les résultats positifs que j'ai vérifiés dans la direction des assertions précédentes :

a) Si $S$ est de caractéristique nulle, les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par l'introduction du schéma en groupes $G(A)$) sont vraies.

b) Sans restriction sur $S$, il est vrai que $G(A)$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux[11], donc si pour deux relèvements infinitésimaux données $B$, $B'$ de $A$, $G(B)$ et $G(B')$ sont isomorphes, l'isomorphisme entre eux est unique. Donc si l'hypothèse précédente est vérifiée quels que soient les relèvements infinitésimaux de $A$ au dessus d'un ouvert $U$ de la base $S$, alors les $G(B)$ définissent effectivement un cristal en groupes sur $S$, à fortiori les $H(B)$ définissent un cristal de modules, et $G(A)$ et $\mathrm{H}^1(A/S)$ sont munis de stratifications absolues canoniques, fonctorielle d'ailleurs en $A$ satisfaisant aux conditions envisagées, et compatible avec tout changement de base qui invarie notre hypothèse sur $A$.

c) Les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par $G(A)$) sont vraies por les relèvements infinitésimaux *d'ordre* 1, ou tout au moins lorsque $T$ est de la forme $D(J)$, schémas des nombres duaux d´fini par un $J$ quasi-cohérent.[12]

**2.7.** — Arrivé à ce point de mes brillantes conjectures, je m'aperçois avec consternation qu'elles sont fausses telles quelles, malgré les indications concordantes militant en leur faveur. De façon précise, soit $k$ un corps de caractéristique $p > 0$. Je dis qu'il *n'est pas possible, pour tout $k$-schéma $S$ de type fini, de dimension* $leq 1$ [13]*, avec $S_{rg}$ régulier, et tout schéma elliptique $A$ sur $S$, de mettre sur* $\mathrm{H}^1_{DR}(A/S)$ *une stratification relativement à $k$, qui soit fonctorielle en $A$ et compatible avec les changements de base.* L'ennui, comme d'habitude, provient des courbes elliptiques de Hasse nul. Appliquant en effet les deux fonctorialités postulées, on trouve que l'homomorphisme "frobenius" qui va de $M^{(p)}$ dans $M$ ($M = \mathrm{H}^1(A/S)$) serait compatible avec la stratification. Si alors $S \in S$ est un point correspondant à un $A_S$

[11] faux

[12] à vérifier, c'est peut-être faux

[13] ou même $\leq 0$ !

de Hasse nul, i.e. tel que frobenius sur $H^1(A_S)$ soit de carré nul, on en conclurait aisément, grimpant sur les voisinages infinitésimaux de $S$, que la même propriété serait vraie aux points voisins de $S$, ce qui est évidement faux p.ex. pour la famille modulaire.

Ceci montre que décidément, il faut en rabattre, et que dans le titre du Chapitre et les considérations de **2.2.**, c'est à condition de prendre partout des isocristaux qu'il reste une chance d'un théorie du genre de celle envisagée précédemment. Il est fort possible d'ailleurs que la notion de isocristal que j'ai adoptée est encore trop restrictive, en ce sens que dans la description de **1.13**. il faudra peut-être prendre des stratifications en caractéristique nulle qui ne se prolongeraient pas nécessairement sur le schéma formel sur $W =$ vecteurs de Witt tout entier. C'est une analyse soigneuse du calcul-clef de Washnitzer-Monsky qui devrait permettre de tirer cette question au clair.

**2.8.** — Il se pose la question, d'autre part, pour quels schémas abéliens les énoncés 1° et 3° de 2.4, 2.5. et 2.6. sont valables, en dehors du cas déjà signalé: $S$ de caractéristique nulle.

Il n'est pas exclu entièrement, cependant, que en restant en car. $p > 0$, l'énoncé sur la non-variation infinitésimal de $G(A)$ avec $A$, $A$ partout ordinaire, soit vrai. Cela impliquerait que sur l'ouvert des valeurs "ordinaires" de l'invariant, le $H^1_{DR}$ a une stratification canonique, mais celle-ci ne se prolongerait pas à la courbe modulaire toute entière. Mais je dois dire que ce drôle de comportement, où on aurait une stratification naturelle en car. $p$ et une autre en car. $0$, sans qu'elles veuillent se recoller, semble assez canularesque.

[Les considérations précédentes font bien ressortir la nature "infinite" de la notion de stratification, par contraste avec celle de connexion, malgré les trompeuses apparences de la caractéristique nulle. Ainsi, sur le $H^1$ de la famille modulaire sur $F$ de schémas elliptiques, il y a au dessus de la fibre générique $S_Q$ de $S$ une stratification naturelle, mais nous venons de voir (ou presque...) que cette stratification ne s'étend pas en une stratification sur $S_U$, $U$ un ouvert non vide de Spec($Z$). (Le "presque" provient du fait qu'il n'est pas absolument clair si la stratification qu'on obtiendrait ainsi en caractéristique $p$ serait respectée par frobenius; il faut absolument tirer au clair cet exemple particulier !). C'est en un sens assez moral, puisque pour nous le module à stratification doit jouer dans une large mesure le rôle d'un faisceau $\ell$-adique, dont il partage également les propriétés de rigidité.]

Pour en revenir à l'alinéa précédent, concernant un schéma abélien "ordinaire" en car $p > 0$, s'il n'est pas exclu que le $\mathrm{H}^1_{DR}$ admette une stratification canonique fonctorielle, il me semble cependant exclu, malheureusement, que celle-ci provienne d'un cristal de modules sur $S$, i.e. que ceci reste vrai en remplaçant $S$ par toute extension infinitésimale, pas nécessaire de car $p$, (tout au moins en admettant que la connexion associée à la stratification en question soit la connexion de Gauss-Manin). En effet, appliquant une telle hypothèse au schéma modulaire $S$ sur $Z_p$ précédent, dont on enlèverait les points de Hasse nul d'abord d'où $S'$, on conclurait sauf erreur que la stratification qu'on a en caractéristique nulle sur $\mathrm{H}^1_{DR}$ se prolongerait à $S$ tout entier, car elle se "recollerait" en un sens évident avec la stratification qu'on aurait au dessus du complété $p$-adique de $S'$ (ce qui doit impliquer le prolongement sur $S$ de façon assez formelle). Mais alors on aurait en car $p$ une stratification du $\mathrm{H}^1_{DR}$ au dessus du schéma modulaire tout entier, Hasse nul inclus, ce qui est absurde comme on l'a déjà remarqué. Il faut en conclure, hélas, que si les isocristaux, et le cas échéant les modules stratifiés même en caractéristique $p > 0$, ont des chances d'être des outils convenables pour l'étude de familles de variétés abéliennes, celle de cristal elle-même semble irrémédiablement trop fine, même en se restreignant à des familles de variétés abéliennes "ordinaires" en car $p > 0$. Elle peut tout au mieux de prêter au cas d'un schéma de base réduit à un point, spectre d'un corps pas nécessairement parfait, et on peut alors espérer les résultats les plus satisfaisants en se bornant aux variétés abéliennes ordinaires ? - Pour que la notion de cristal elle-même puisse être utilisée pour des schémas abéliens sur des bases plus générales, il semble donc qu'il faille imposer aux familles envisagées des restrictions très sérieuses, consistant à imposer la variation infinitésimale du $G(A)$. Cela semble assez proche du point de vue de Serre, qui étudie les variations de variétés abéliennes (éventuellement à multiplication complexe donnée) en imposant à priori l'espace tangent (et l'action de la multiplication complexe dessus)...

## Chapitre 3. — Remarques sur les groupes $p$-divisibles

**3.1.** — Bien sûr, en même temps que pour les variétés abéliennes, je dois en rabattre sur les groupes formels. Je veux simplement signaler que la construction de $G(A)$ dans **2.6.** doit pouvoir se paraphraser sans difficulté pour un groupe $p$-divisible $\varnothing$ sur un préschéma $S$ à caractéristiques résiduelles égales au même $p$. En effet les homomorphismes de ce groupe dans le groupe formel associé à $G_a$ sont triviales (en particulier, $\varnothing$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux), d'autre part (sauf erreur) le faisceau en modules des $\mathrm{H}^2$ de $\varnothing$ à valeurs dans le groupe formel associé à $G_a$ (au sens du complexe du groupe $\varnothing$, variante formelle), est un Module localement libre de rang $g^*$, où $g^*$ est la dimension du groupe dual de $\varnothing$, soit $\varnothing^*$ ; plus précisément, ce Module doit être canoniquement isomorphe à $(\varnothing^*) = t_{\varnothing^*}$. (Tout ceci est suggéré par les résultats de Tate et Lubin sur les modules de groupes formels; je dois avouer d'ailleurs que je n'ai pas essayé de tirer au clair ce qu'il faut entendre, dans ce contexte, par "le groupe formel associé à $G_a$", et s'il y a lieu de prendre le groupe formel purement infinitésimal). Il s'impose alors de paraphraser la construction de Serre, en regardant l'extension universelle de $\varnothing$ par un groupe formel vectoriel, qui sera ici le groupe formel (covariant) de $t_{\varnothing^*}$. Désignant par $G(\varnothing)$ cette extension, son algèbre de Lie $\mathrm{H}(\varnothing)$ sers une extension

$$(*)\qquad 0 \longrightarrow t^{v}_{\varnothing^*} \longrightarrow \mathrm{H}(\varnothing) \longrightarrow t_{\varnothing} \longrightarrow 0.$$

Bien entendu, $G(\varnothing)$ et par suite $\mathrm{H}(\varnothing)$ seront fonctoriels en $\varnothing$, et compatibles avec changement de base. Alors qu'il est certainement vrai, dans un sens qu'il conviendrait de préciser, que $G(\varnothing)$ varie "moins que $\varnothing$", quand on fait varier $\varnothing$ infinitésimalement dans une famille, il n'est pas vrai pour autant que $G(\varnothing)$ soit indépendant de telles variations (à l'exception, probablement, de celles du premier ordre), i.e. puisse être considéré comme provenant d'un cristal en groupes plus ou moins formels. Cela sera le cas seulement, sans doute, quand $\varnothing$ sera extension d'un groupe ind-étale par un groupe $p$-divisible torique, et $S$ réduit à un point (?). Dans le cas général, il semble intéressant d'étudier les variations infitésimales de $\varnothing$, quand on se fixe celles de $G(\varnothing)$ à l'aide d'un cristal en groupes $\underline{G}$.

**3.2.** — En tous cas, l'extension $(*)$ semble un invariant intéressant du groupe $p$-divisible envisagé. Il subsiste, par passage à la limite, en passant au cas où $S$ est par exemple le spectre d'un anneau $A$ noethérien $j$-adique séparé et complet, où $J$ est un idéal tel que $A/J$ soit à caractéristiques résiduelles égales à $p$. On trouve par exemple un bon invariant quand $A$ est un anneau de valuation discrète complet, éventuellement d'inégales caractéristiques, à caractéristique résiduelle $p$. Dans le cas où le groupe formel réduit a la structure triviale mentionnée plus haut dans **3.1.**, que la donnée d'un relèvement du groupe $p$-divisible qu'on a sur $k$ en un groupe $p$-divisible sur $A$, soit entièrement équivalente à la donnée d'un relèvement de la filtration de $M \otimes_W k$ donnée par $(*)$, en une filtration de type $(g, g^*)$ de $M \otimes_W A$. Il serait bien intéressant d'essayer de déterminer, en termes d'une telle donnée, quel est le module de Tate correspondant à la fibre générique de $\varnothing$ ! On aimerait préciser également, pour des groupes $p$-divisibles plus généraux, quelle quantité d'information est liée à l'extension $(*)$, qui remplace ici le $\mathrm{H}^1$ de De Rham.

## Letter to J. Murre

Dear Murre,

I am glad to hear that your are still willing to give the talk on unramified functors. Here what I can say to your questions.

1. The theorem about passage to quotient I alluded to is the following:

Theorem. — *Let $f : X \longrightarrow Y$ be a morphism of $S$-preschemes, assume either $X$ and $Y$ locally of finite presentation over $S$, or $Y$ loc noeth and $X$ locally of finite type over $Y$. Assume that the equivalence relation $R = X \times_Y X$ defined by $f$ is flat over $X$ i.e. $_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$ is flat. Then the quotient $X/R$ exists in the strongest reasonable sense, i.e. one can factor $f$ into a compositum $X \longrightarrow Z \longrightarrow Y$, with $X \longrightarrow Z$ faithfully flat locally of finite presentation, $Z$ locally of finite pres. over $X$ (in fact of finite presentation over $S$ if $X$ is so) and $Z \longrightarrow Y$ a monomorphism.*

Of course the factorization is unique, and the theorem can be expressed by saying that the quotient sheaf (for the fpqc topology) $X/R$ is representable. That is in fact how the theorem is proved.

Raynaud has recently made a very nice (and non trivial) application of this theorem, by proving the following: if $S$ is the spectrum of a discrete valuation ring, $G$ a group prescheme of finite type over $S$, $H$ a closed and flat sub-group scheme, such that $G_t/H_t$ is quasi-affine (where $t$ is the generic point of $S$) then $G/H$ is representable as a quasi-affine and flat $S$-scheme, which is even affine if $H$ is invariant (i.e. if $G$ is a flat group scheme of finite type with affine generic fibre, than $G$ is affine). This extends immediately to a base which is regular of dim one. Raynaud is now trying to extend his construction to the case when he drops the quasi-affinness assumption, namely to construct still $G/H$ as a quasi-projective scheme over $S$.

2. Theorem of the cube.

I believe we discussed about it time ago, but maybe the proof I told you was valid only if one assumes the Pic functor of one of the factors involved representable.

To prove unramifiedness of the functor $\underline{\text{Corr}}$ however you need only a weak infinitesimal form of the theorem of the square, for which you will find a proof in the manuscript notes I am joining on correspondence classes, containing also the proof of the statements you were recalling in your question 4. I hope you will be able to read them, I agree the handwriting is wretched and the notes moreover very sketchy. - On the other hand, I recall you that the theorem of the cube follows rather formally once one knows separatedness of $\underline{\text{Corr}}_S(X,Y)$ for two of the three factors involved, and using the usual formal properties of the Picard functor (among which commutation with inverse limits of Artin rings is the less trivial).

3. As for the separatedness of $\underline{\text{Corr}}_S(X,Y)$, this is about trivial whenever the Pic functor of one of the factors $X$, $Y$ is separated? Now this is certainly the case if for $X$ if its geometric fibers are integral, (a fortiori if $X$ is an abelian scheme over $S$!).

To show this, one may assume $S$ the spectrum of a discrete valuation ring, and one is reduced to show that if $\underline{L}$ is an invertible sheaf on $X$ whose restriction to the general fiber $X_t$ is trivial, then $\underline{L}$ is trivial. Now $X_1$ is an open subset of $X$, and the assumption on $\underline{L}$ can be expressed by saying that $\underline{L}$ is defined by a Cartier divisor whose support is contained in the special fiber $X_0$. Now $X_0$ itself is already a Cartier divisor (defined by a global equation $f = 0$) and moreover is an integral subscheme of $X$, from this follows that the divisor $D$ is a multiple of $X_0$ (assume for simplicity the fibers of $X$ geometrically normal, and hence $X$ normal!), hence $D$ is linearly equivalent to $0$, what we wanted to prove.

I am convinced however that $\underline{\text{Corr}}$ is always separated (with the usual assumptions of properness, flatness, and direct image of the structure sheaf, for both functors, of course). This is easily seen to be true if the Pic functor of either factor is representable, by a simple use of dimension theory (namely, we have a morphism $X \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{Y/S}$ whose image has a general fiber of dimension zero, hence the same holds for the special fiber…). But it is true also, by an immediate adaptation of the same argument, if we suppose only that $\underline{\text{Pic}}_{Y/S}$ is pre-ét-représentable say, i.e. is a quotient of a representable functor $Q$ by an étale equivalence relation (in fact, quasi-finite and flat would do as well), with $Q$ locally of finite type over $S$. Now this assumption is certainly satisfied if $Y$ is *projective* over $S$, as one sees by using the representation of $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ (or rather big open pieces of it) as the quotient of a suitable scheme of immersions of $Y$ into some $p^r$, by the action of the projective group operating freely, and taking a quasi-section of the corresponding equivalence relation…On the other hand, if one does not assume $X$ not $Y$ projective over $S$, one my think of using Chow's lemma; as $S$ is the spectrum of a discrete valuation ring, one does not loose flatness in using Chow's lemma, unfortunately one will loose however, I am afraid, the assumption $\mathrm{H}^0(X_0, \underline{O}_{X_0}) \simeq k(s)$, and I am afraid that this will make serious technical trouble. Another interesting approach, via topology, is to try to prove that under the usual assumptions on $X$, the "specialization morphism" from the fundamental group of the general geometric fiber to the one of the special fiber has an image of finite index - or at least that this is so after making the groups abelian. It seems to me that the latter statement can be proved via the Picard functor, when $X$ is assumed projective over $S$.

I am sending you some notes, including a sketch of the proof of the theorem of representability of unramified functors, although I do not think they latter can be of any use to you, as I have a hard time myself to read them. I think the notes you took when we discussed the matter a few months ago should be much more detailed; anyhow, there are certainly no simplifications in my notes relative to yours, the inverse is more plausible.

Sincerely yours

## Letter to Murre

Dear Murre,

I am very sorry I did not succeed to convey the intuitive idea behind the general nonsense of my notes. It seems to me that the basic example in order to understand the idea is example 1, where you can take $Z$ to be a standard Kummer covering for definiteness, $Z = Z_a^n$, and $S$ normal. Intuitively, when look at (normal, say) $S'$ coverings of $S$ whose ramification type is not worse than the one of $Z$ over $S$, you mean that the normalized inverse image $Z'$ of $S'$ over $Z$ is étale. From the birational point of view, assuming $S'$ connected and therefore corresponding to a field extension $K'$ of the field of functions $K$ of $S$, this means simply that $K'$ of the field of functions $K$ of $S$, this means simply that $K'$ is isomorphic to a subextension of an extension of the function field $L$ of $Z$, unramified with respect t the model $Z$; when $S$

[]

Your interpretation of the Kummer case in the final formulation of example 3 is indeed the one I had in mind. Also, when I wrote $n'n$, I meant of course the order relation of divisibility (it may be convenient to introduce this order relation explicitly, for simplicity of notations).

I realize that all the indications I have given you so far are extremely sketchy, and as a consequence that I am charging you with a considerable amount of work to put some sense and order into all that. Thus it is I, not you, who should apologize for causing a lot of trouble! I look forward with great pleasure meeting you in Bures. As I am having some russian and chinese on friday's, I will probably drop by on June 2.

With best regards

## Letter to J. Murre

Dear Murre,

Thank you very much for your notes on the tame fundamental group, which I at least finished reading. I see you wrote them with much care, and I am all the more sorry that my own fault, there is a number of misstatements which, I am afraid, will force you to do a serious recasting of the whole exposition. My notes definitely where too sketchy, and my oral explanations, I am afraid, partly wrong, which induced you into error a few times. Here the most serious drawbacks.

1.16 is false already when $H$ is the unit group and when there is a single $a$, say $a = b^n$, $Y' = YT/(T^n—a)$. Then $Y = S$, and a morphism of $Y$ into $Y'$ compatible with $H = e\ H'$ is just a section of $Y'$, which exists indeed; however $H \longrightarrow H'$ is not surjective. 3.6. is equally false, as you see by the previous example, using the given section to define an $H'$-morphism $H' \longrightarrow Y'$ which is not an isomorphism. As a consequence, the proof in your notes of 3.7. breaks down (as it uses 1.16) and so does the proof of 3.8. (I did not try to check 3.8. by some different proof).

I am afraid 6.4. is false as stated, and that the statement is correct only if the $D_i$ are regular. Indeed, the end of the proof seemed to me very dubious; be careful that the inertia groups are determined only up to interior automorphism! There is however a (tautological) generalization of the theorem for regular $D_i$, corresponding to the data of a single divisor $D$ with normal crossings, and a variant of the notion of tame ramification for such a divisor, by demanding that the coverings should be tamely ramified locally for the étale topology for the family of local irreducible components of $D$; it is this notion of tameness which should seem more adapted to the situation of par. 9.

The proof of 7.1. is not correct, when you contend on line -9: there remains to be proven the following…Already when $D = 0$, the proof here would have to introduce connected étale coverings which are *not Galois!* This very strongly suggests that a notion of tame ramification should be introduced also for non Galois coverings. The same remark applies t the proof of 10.1. Maybe you could get along some way in 7.1. using the normality assumptions, but I am convinced that these assumptions are anyhow artificial, as well as the assumption that the $D_i$

should be reduced somewhere. You do not seem to make any use of theses facts, really.

Also, one feels that 7.5. should be generalized to the case of a tamely ramified covering, and that it should come out trivially once the generalities have been dealt with properly.

I hope that the theory will come out more clearly and correctly by devoting some care to generalities on ramification date (not necessarily of Kummer type). I will try to write something up within the next days. Please excuse me for the trouble I caused you by not learning my lesson well enough before I put you to work!

It will be very nice indeed to have an appendix on Lefschetz theorem for the fundamental group, and it should not be hard to write it. However, if would be safer to wait till the general theory of tame ramification is written up!

Sincerely yours

## Letter to J. Coates, 4.1.1967

4.1.1967

Dear Coates,

I want to add a few more comments to the talk on algebraic cycles and to what I told you on the phone.

I think the best will be to state the index conjecture right after the statement of the main results of Hodge theory, adding that this conjecture will take its whole significance only when coupled with "conjecture $A$" in the next paragraph. This will give more freedom in the next paragraph to express some extra relationships between various conjectures, such as $A$ + index implies $B$.

In characteristic zero, state some known extra features: index theorem holds, the properties $A_\ell$ to $D_\ell$ are independent of $\ell$ (because of the existence of Betti cohomology, so that these properties are equivalent to the corresponding one's for rational cohomology), $A$ and $C$ are independent of the chosen polarisation $x$ (for $A$ because it is equivalent with $B$, for $C$ because it can be expressed in terms of $A$, $C(X) = (A(X \times X) + A(Y \times Y) + ...))$

Thus the conditions without ambiguity can be called $A(X)$ to $D(X)$, without subscript $\ell$ and without indication of polarisation. Say too that it is known that $C(X)$ is of finite dimension over $Q$, (so that $A$ can also be expressed in terms of an equality of dimensions of $C^i$ and $C^{n-1}$, which again proves it is independent of $\ell$), but that this is not known in characteristic $p > 0$. Contrarily to what I hastily stated in my talk (influenced from my recollections of the characteristic 0 case) it is not clear to me if in characteristic $p > 0$ the conditions $A_\ell(X, \xi)$ and $C_\ell(X, \xi)$ are independent of the polarisation $\xi$; if you do not find some proof of this independence, then the possible dependence should be pointed out, as well as the fact that we do not have a proof that $A$ to $D$ are independent of $\ell$. Of course, if the index theorem is proved for $X$, then $A_\ell(X, \xi) = B_\ell(X)$ is again independent of the polarisation, and analogous remark for $C_\ell(X, \xi)$.

When speaking about condition $C_\ell(X, \xi)$, emphasise at once its stability properties by products (the proof I suggested works indeed) specialisation (with possible change of characteristics), hyperplane or more generally linear sections. Give an extra proposition for the relations with the property $A$, via a formal proposition as follows:

Proposition. — *Conditions équivalentes sur $X$ (variété* polarisée*) :*

*(i)* $C_\ell(X)$

*(ii)* $C_\ell(Y) e t A_\ell(X \times X)$

*(ii bis)* $C_\ell(Y)$ *et* $A_\ell(X \times X)^\circ$*, où l'exposant* $^\circ$ *signifie qu'on se borne à exprimer la condition A pour l'homomorphisme en dimension critique* $\mathrm{H}^{2n-2} \longrightarrow \mathrm{H}^{2n+2}$.

*(iii)* $C_\ell(Y)$ *et* $A_\ell(X \times Y)$.

*(iii bis)* $C_\ell(Y)$ *et* $A_\ell(X \times X)^\circ$*, où l'exposant* $^\circ$ *signifie qu'on se borne à exprimer la condition A en dimension critique* $\mathrm{H}^{(2n-1)-1} \longrightarrow \mathrm{H}^{(2n-1)+1}$.

*(iv)* $C_\ell(Y)$*, et pour tout* $i \leq n-1$*, l'homomorphisme naturel* $\mathrm{H}^i(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ *inverse à gauche de* $\varphi^i : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(Y)$ *(induit par* $\Lambda_X \varphi_*$*) est induit par une classe de correspondance algébrique (induisant ce qu'elle veut sur les autres* $\mathrm{H}^j(Y)$*).*

*(iv bis)* $C_\ell(Y)$*, et pour* $j \geq n+1$*, l'homomorphisme naturel* $\mathrm{H}^j(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{j-2}(Y)$ *inverse à droite de* $\varphi_{j-2} : \mathrm{H}^{j-2}(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^j(X)$ *(induit par* $\varphi^* \Lambda_X$*) est induit par une classe de correspondance algébrique (induisant ce qu'elle veut sur les autres* $\mathrm{H}^i(X)$*).*

Corrollaire. — *Ces conditions équivalent aussi à*

*(v)* $A_\ell(X \times X) + A_\ell(Y \times Y)^\circ + A_\ell(\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}) + \ldots$*, où* $X \supset Y \supset \mathrm{Z}$ *est une suite décroissante de sections hyperplanes.*

*(vi)* $A_\ell(X \times Y)^\circ + A_\ell(Y \times \mathrm{Z})^\circ + \ldots$*, avec les mêmes notations.*

Of course, the products and hyperplane sections are endowed with the polarisations stemming from the polarisation on $X$. The conditions (v) and (iv) have the slight interest that they allow to express the conjecture $A(k) = C(k)$ in terms of $A(T)^\circ$ for every $T$ of even (resp. odd dimension), where the upper $^\circ$ means that it is sufficient to look at what happens in critical dimensions.

For thenproof of the proposition, I told you already the equivalence of (i) and (ii), (ii bis). The equivalence of (iv) and (iv bis) is trivial by transposition, they imply (i) because $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ is the composition $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i-2}(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^i(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ where the extreme arrows are the ones of (iv bis) and (iv) and the middle one is induced by $\Lambda_Y^{(n-1)-i}$, and they are implied by (iii bis) because of the formula

$$(\Lambda_X \varphi_*)L_Y + L_X(\Lambda_X \varphi_*) = (\varphi_* \Lambda_Y \varphi^* + id_X)\varphi_*.$$

On the other hand (iii) $\Rightarrow$ (iii bis) is trivial, and so is (i) $\Rightarrow$ (iii) because of the stabilities. N.B. $(\varphi^*\Lambda_X)L_X + L_Y(\varphi^*\Lambda_X) = \varphi^*(\varphi_*\Lambda_Y\varphi^* + id_X)$.

For the list of the known facts, you can state that:

1) In arbitrary characteristic, $C(X)$ is known if $\dim X \leq 2$, because more generally, it is known that in arbitrary dimension $n$, $\mathrm{H}^{2n-1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X)$ is induced by an algebraic correspondence class; also, in arbitrary dimension, it is known that $\pi_0$, $\pi_{2n}$, $\pi_1$, $\pi_{2n-1}$ are algebraic (trivial for the first two, not quite trivial for the two next one's). If $\dim X = 3$, it is not known however, even in characteristic 0, if $C(X)$ or only $D(X)$ hold, nor $A(X)$ and $B(X)$ in characteristic $p > 0$, also if for 1-cycles, $\tau$-equivalence is the same as numerical equivalence...

By the way, the fact that the $\pi_1$ for a surface are algebraic was pointed out (Tate tells me) by Hodge in Algebraic correspondences between surfaces, Proc, London Math. Soc. Series 2, Vol XLIV, 1938, p. 226. It is rather striking that this statement should not have struck the algebraic geometers more, and has fallen into oblivion for nearly thirty years!

2) In characteristic 0, $A(X)$ is known for $\dim X \leq 4$. But $A(X)^\circ$ is not known if $\dim X = 5$; the first interesting case would be for a variety $X \times X$, $X$ of dimension 3 and $Y$ a hyperplane section, as this would prove $C(X)$, see above.

Thus the main problems arise already for 1-cycles on threefolds, and partially even in characteristic $0$. Urged by Kleiman's question, I will look again at my old scribbles on that subject (when I pretend to reduce the "strong" form of Lefschetz to the "week" one). As for the suggestion I made on the phone, to try to get any $X$ as birationally equivalent to a non singular $X'$, which is a specialisation of a non singular $X''$, itself birationally equivalent to a non singular hypesurface - this cannot work as Serre pointed out, because such an $X$ would have to be simply connected ! Thus if one wants to reduce somehow to the case of hypersurfaces, one will have to work also with singular ones, and see how to reformulate for singular varieties the standard conjectures...

Sincerely yours

## Lettre à J. Dieudonné, 27.8.1967

27.8.1967

Cher Dieudonné,

# Lettre à J. Dieudonné, 15.9.1967

15.9.1967

Cher Dieudonné,

Tes objections de ta lettre du 11 Septembre sont encore fondées. D'ailleurs, il ne me semble pas évident que le fait de pouvoir trouver $p, q$ fixes tels qu'on ait des suites exactes $A_n^p \longrightarrow A_n^q \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$, permette de s'en tirer ; tant mieux si tu y arrives. L'existence de ces $p$ et $q$ me semble d'autre part facile, en utilisant le

Lemme. — *Soit $A$ un anneau, $M$ un $A$-module, $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ des éléments de $A$ engendrant l'idéal unité, supposons que pour tout $i$, le $A_{f_i}$-module $M_{f_i}$ soit engendré par $m_i$ générateurs. Alors $M$ est engendré par $m m_i$ générateurs.*

**Démonstration**. Soient $g_j^i \longrightarrow M_{f_i}$ $(1 j m_i)$ les générateurs de $M_{f_i}$, on aura donc $g_j^i = h_j^i / f_i^{N_{ij}}$, avec $h_j^i M$. Alors les $h_j^i$ pour $j$ fixes engendrent $M$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(A_{f_i})$ de $\mathrm{Spec}(A_f)$, donc comme pour $i$ variable ces ouverts recouvrent $\mathrm{Spec}(A)$, 1 s'ensuit que les $h_j^i$ pour $i, j$ variables engendrent $M$, donc $M$, ce qui établit le lemme.

Revenant alors à la situation de 10.10.5, on sait que $M = \lim M_n$ est un $A$-module de type fini, considérons alors un épimorphisme $u : A^q \longrightarrow M$. Soient $f_i \longrightarrow A$ dont les images dans $A_0$ engendrent l'idéal unité, et tel que sur les ouverts correspondants $X_i$ de $X = \mathrm{Spec}\, f(A)$, $F$ admette une présentation finie. Alors $u$ restreint à $X_i$ définit un épimorphisme $A_i^q \longrightarrow M_i$, et comme $M_i$ est de présentation finie, il existe un homomorphisme $v_i$ rendant exacte la suite $A_i^p \longrightarrow A_i^q \longrightarrow M_i \longrightarrow 0$. Tensorisant par $A_0$, on en déduit une suite exacte $(A_n)_{f_i}^p \longrightarrow (A_n)_{f_i}^q \longrightarrow (M_n)_{f_i} \longrightarrow 0$, ce qui montre que si $R_n = \mathrm{Ker}(A_n^q \longrightarrow M_n)$, alors $R_n$ est sur $\mathrm{Spec}((A_n)_{f_i})$ engendré par $p$ éléments. Donc en vertu du lemme $R_n$ est engendré par $mp$ éléments où $m$ est le nombre des $f_i$, et $mp$ est bien indépendant de $n$.

La difficulté qui semble rester est de trouver les suites exactes que tu demandes de telle façon qu'elles se recollent, pour $n$ variable. Donc, $u$ étant déjà choisi, de trouver un homomorphisme $A^p \longrightarrow A^q$ dont l'image soit $\mathrm{Ker}\, u$… Si tu y arrives, on pourrait présenter encore 10.10.5 sous forme de trois conditions équivalentes, mais en demandant dans b) une "présentation finie uniformément en $n$". Sinon, il faudrait trouver un contre-exemple à l'implication a) $\Rightarrow$ c), car il me semble

a) $F$ est localement libre de type fini.

b) $F$ est isomorphe à la limite projective d'une suite $(F_n)$ de $\underline{O}_{X_n}$-Modules loc libres de type fini que se recollent.

c) $F$ est isomorphe à un $M$, avec $M$ un $A$-module projectif de type fini.

Pour la démonstration, on procède comme dans 10.10.5 en utilisant EGA IV 18.3.2.1. Ce lemme devrait d'ailleurs venir en corollaire après $0_I$ 7.2.9.

Pour les modifications que je préconisais pour I 10.11, elles tombent à l'eau si on n'arrive pas à arranger 10.10.5 sans hypothèses noethériennes ; on peut cependant dire que si $F$ sur $X$ est de présentation finie, alors il est limite projective de faisceaux $F_n$ de présentation finie sur les $X_n$ qui se recollent (mais on n'a pas une réciproque), et que $F$ est localement libre sans les $F_n$ le sont. Et les autres énoncés du n° 10.11. restent valables sans hypothèses noethérienne, sauf 10.7.11.2 et la partie "injectivité" dans 10.11.9 (sauf erreur).

## Letter to S. Anantharaman, 11.9.1967

11.9.1967

Dear Anantharaman,

Matsumura proved that if $X$ is proper over a field $k$, then $\underline{\mathrm{Aut}}_{X/k}$ is representable by a group scheme locally of finite type over $k$. I think I can systematize the key step of his argument in the following way. Consider a scheme $S$, and a morphism

$$\varphi : Z \longrightarrow X$$

of $S$-schemes which are proper, flat and of finite presentation. Let $Y$ be locally of finite presentation and separated over $S$, then $\varphi$ induces a homomorphism of functors $u \rightsquigarrow u\varphi$:

$$\varphi' : \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Z,Y).$$

Then one can define a subfunctor of $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ where $\varphi'$ is "unramified" in a rather obvious sense, and this turns out to be an "open subfunctor", say $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y;\varphi)$. Now look at the induced homomorphism

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y;\varphi) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Z,Y).$$

Using the main result of Murre's talk, one can prove that the latter morphism is representable by unramified separated morphisms locally of finite presentation ; as a consequence, if $\underline{\mathrm{Hom}}_S(Z,Y)$ is representable, so is $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y;\varphi)$.

To get, given $X$ and $Y$, a representability theorem for $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$, one tries to find morphisms $\varphi_i : Z_i \longrightarrow X$ as above, such that the open subfunctors $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y;\varphi_i)$ cover $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ (as a fpqc sheaf), and such that the functors $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X_i,Y)$ are all representable. If for instance $S$ is the spectrum of a field $k$, and if $X$ has "enough" points radicial over $k$ (which is always true if $k$ is alg. closed) then we can take for $Z_i$ all finite subschemes of $X$ whose points are radicial over $k$, and we get that $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ i representable (any $Y$ locally of finite presentation and separated over $k$); if we do not make any assumptions on $X$ except properness over $k$, the previous assumption becomes true after finite ground-field extension $k'/k$, so that we get that for every $Y$ as above, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)\times_S(k')$ is representable.

From this Matsumaras theorem stated at the beginning follows in a standard way by descent arguments. The result holds too for $_k(X,Y)$ instead of $\underline{\mathrm{Aut}}_k(X)$, but as you probably know, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ is not always representable, even if $X$ is a quadratic extension of $S = \operatorname{Spec} k$, $Y$ being proper non projective.

Over an arbitrary base $S$, one can give a fairly general statement of a representability theorem, the points radicial over $k$ used above being replaced by suitable flat subschemes of $X$. As particular cases, we get for instance that if $X$ has integral geometric fibers and a section along which $X$ is smooth, then $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ is representable; and if $X$ has reduced geometric fibers, then $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ is representable locally for the étale topology over $S$. Also, if $Y$ is quasi-projective over $S = \operatorname{Spec} k$, then $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ is representable.

To fix the ideas, I gave the statements for $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$, but one has quite analogous results of course for the $\prod_{X/S} P/X$ functors, which I guess will imply rather formally the other ones.

If you are interested, I can send you a photocopy of the statement of the general theorem of representability I alluded to above, and a couple of corollaries (I already listed here the most striking ones).

Sincerely yours

## Letter to J. Murre, 24.4.1967

11.9.1967

Dear Murre,

I am sending you enclosed the sketch which I promised on ramification data, as well as your manuscript

## Letter to Kostant, 22.10.1969

Massy 22.10.1969

Dear Kostant,

I read again through your papers in the Amer. Journ. on "The principal three-dimensional subgroup…" and "Lie group representations on polynomial rings", prompted by some nice work of Brieskorn on Klein singularities. I very much appreciate this work of yours, and would appreciate getting reprints of any latter work you may have available. As I already felt when your work appeared, it cries for careful reconsideration in the framework of Alg. Geometry, and suggests number of interesting problems. I wonder if you know the answer to some of them. For instance, I feel it would be of interest to classify (for a given complex simple adjoint Lie group, say) quadruples $(T, B, T', B')$, where $T$ and $T'$ are maximal tori "in apposition" (in your terminology), and $B$ and $B'$ Borel subgroups of $G$ containing $T$ resp. $T'$. The number of conjugacy classes of such animals is equal to $(W)^2/hz\varphi(h)$, where $W$ is the Weyl group, $h$ the Coxeter number, $z$ the order of the center of $\widetilde{G}$, and $\varphi(h) = (Z/hZ)^*$ is the Euler indicatrix; if you want to classify such data with moreover a generating element (principal regular in your terminology) given for the finite group of order $h$ $T \cap N(T')$, then we get $(W)^2/hz$ choices. One of the reasons I think this question is interesting is that the stability subgroup in $G$ of such a quadruple is $T \cap T' = e$[14], hence such a structure makes $G$ entirely "rigid" up to exterior automorphisms. Among the first questions one may wish to ask in this direction are the following: is it true that for some, or for all such quadruples, $B$ and $B'$ are "in general position" i.e. $B \cap B'$ is a torus (necessarily maximal), so that $B$ and $B'$ are "opposite" to each other with respect to the latter ? Is there in any sense a *distinguished* conjugacy class of such quadruples (which should then be, of course, invariant by action of exterior automorphisms) ? What are the groups of automorphisms of such quadruples (they are isomorphic to subgroups of the group of exterior automorphisms of $G$) ?

In a different direction, it would be interesting to know more about the canonical morphism $\underline{g} \longrightarrow \underline{h}/W$, where $\underline{g}$ is the Lie algebra of $G$ and $\underline{h}$ a Cartan sub-

[14]NB. $N(T) \cap N(T')$ is an extension of $(Z/hZ)^*$ by []

algebra, and of the orbits of $G$ on $\underline{g}$, and the analogous morphism of Steinberg $G \longrightarrow T/W$ and the orbits of $G$ acting on itself. Do you know for instance exactly how varies the rank (= rang of the tangent map) of this map ? There are some reasons to believe that for points of unipotent orbits of dimension $n-r-2$ (just the next lower after the maximal dimension $n-r$), the rank is $r-1$ in case all roots have same length (that is the corresponding diagrams $A$, $D$, $E_6$, $E_7$, $E_8$ are those corresponding to Klein singularities), and $< r-1$ in all other cases; in the first case, I would expect that there is just one orbit as stated, by the way, and maybe this property will be characteristic of the "homogeneous" case when all roots have same length. Also, what can be said of the dimension of the set of all Borel subgroups containing a given element $g \in G$, resp. whose Lie algebra contains a given element $x \in \underline{g}$? If $2N = n - r$ is the number of roots and if the dimension of the previous variety to be equal to $i$; the inequality $\leq i$ would imply, by generalizing a depth argument of Brieskorn, that the singularities of the fibers of your map $\underline{g} \longrightarrow \underline{h}/W$ (resp. Steinberg's $G \longrightarrow T/W$ in case $G$ is simply connected instead of adjoint) are "rational", i.e. if $F$ is such a fiber and $F' \xrightarrow{f} F$ a resolution of singularities of $F$, then $\mathrm{R}^i f_*(\underline{O}_{F'}) = 0$ for $i > 0$. Maybe the answer to most of the questions I am asking are well known and I am just ignorant; for some of them, it would indeed be scandalous that the experts do not know the answer! In any case, I would be grateful for any comment you would have on any of my questions.

Sincerely yours

A. Grothendieck

## Letter to J. Lipman, 21.5.1969

21.5.1969

Dear Lipman,

I got a copy of your nice work on rational singularities. Just one comment to the "main unanswered question" on p. (iv) of your manuscript: the answer is quite evidently [] eventually for the reason you indicate yourself. The simple example would be to start with an elliptic curve $E$ over a field $k$, such that $E(k) = 0$, a torsor (= princ. hom. space) $C$ under $E$ of order $n \geq 3$, and the projective cone of the natural projective embedding of $C$ [] (or the smallest [] $\mathrm{Pic}^n(C) \neq \varnothing$, if $(k)$ is not zero); [] the completion of the local ring at the origin of that cone.

This example is also an example where $A$ is functorial, but $A[[t]]$ is not: the main reason is that the local Picard scheme (cf SGA 2 XIII p.19) is of dim $> 0$, although $P(k) = 0$.

Sincerely yours,

A. Grothendieck

## Letter to J. Lipman, 22.8.1969

Massy 22.8.1969

Dear Lipman,

Thank you for your letter.

## Letter to J. Lipman, 16.9.1969

Massy 16.9.1969

Dear Lipman,

Following your letter I am sending you the outline of a program of work for the local Picard schemes,

## Letter to J. Lipman, 12.6.1969

Massy 12.6.1969

Dear Lipman,

Thanks for your letter. The answer to your question whether $\hat{\hat{A}}[[T]]$ factorial implies $A$ has a rational singularity is affirmative, at least in the equal characteristic case. This comes from the construction of the local Picard scheme scheme $G$ over the residue field in this case (cf. SGA 2 XIII 5), as it is easily checked that $A$ has a rational singularity if and only if $G$ is of dimension zero. In the contrary case, as the neutral component $G^\circ$ is smooth of dim $> 0$, there would exist a non constant formal arc passing through the origin of $G^\circ$, and it is easily seen that this arc defines a non trivial divisor class of $A[[T]]$. This argument will work in the unequal characteristics case too, provided we can extend to this case the construction of the local Picard scheme (and its universal property). I hope this could be done, at least for a perfect residue field, but never checked this point. (I proposed this to Lichtenbaum seven years ago, but I am afraid he never looked into this!)

As for the question you mention concerning the $\mathrm{H}^1(Z, \underline{O}_Z)$ of the Zariski-Riemann space $Z$ of $A$, I confess I have not much feeling for that animal, but I guess this is equivalent with the direct limit of the $\mathrm{H}^1(X, \underline{O}_X)$ for all models birational and proper over $\operatorname{Spec} A$ (which, in case we have resolution, would be also the $\mathrm{H}^1$ of any regular such model). The idea that this direct system might be essentially constant, and that this may be used to prove resolution, had been mentioned to me also, five or six years ago, by Artin, but I believe he could not push it through. An analogous problem, whose solution would be needed in order to construct local Picard schemes for noetherian local (excellent ?) rings of higher dimension, is the following: does there exists a birational proper model $X$ of $\operatorname{Spec}(A) = S$, inducing an isomorphism $X|(S-s) \simeq (S-s)$ ($s =$ closed point), such that every invertible sheaf on $S - s = X - X_0$ extend to an invertible sheaf on $X$? If $s$ is an isolated singularity, this would follow of course from resolution. In case $s$ is not isolated, it seems the answer is not known even for complete local rings of char. 0.

In any case, I asked Hironaka who does not know.

Sincerely yours,

A. Grothendieck

*Comments*: 1). Pic of a curve is reduced ($H^2 = 0$) and is smooth.

## Lettre à Michon, 3.11.1970

Massy le 3.11.1970

Chère Madame Michon,

Je m'aperçois que dans les exemplaires SGA d'archives que j'ai emportés de chez vous, il manque les suivants:

SGA 4 $XVII$, SGA 4 $VI$ première partie

D'autre part j'ai besoin de ces exemplaires pour faire l'édition photooffset en préparation. Pourriez vous me les retrouver ?

Bien cordialement

A. Grothendieck

## Letter to I. Barsotti, 5.11.1970

Bures May 11.1970

Dear Barsotti,

I would like to tell you about a result on specialization of Barsotti-Tate groups (the so-called $p$-divisible groups on Tate's terminology) in characteristic $p$, which perhaps you know for a long time, and a corresponding conjecture or rather question, whose answer may equally be known to you.

First some terminology. Let $k$ a perfect field of characteristic $p > 0$, $W$ the ring of Witt vectors over $k$, $K$ its field of fractions. An *$F$-cristal* over $k$ will mean here a free module of finite type $M$ over $W$, together with a $\sigma$-linear endomorphism $F_M : M \longrightarrow M$ (where $\sigma : W \longrightarrow W$ is the Frobenius automorphism) such that $F_M$ is injective i.e. $F(M)$ contains $p^n M$ for some $n \geq 0$. I am rather interesting in *$F$-iso*-cristals, namely $F$-cristals up to isogeny, which can be interpreted as finite dimensional vector spaces $E$ over $K$, together with a $\sigma$-linear automorphism $F_E : E \longrightarrow E$, such that there exists a "lattice" $M \subset E$ mapped into itself by $F_E$; I will rather call such objects *effective* $F$-isocristals (and drop the suffix "iso" (and even $F$) when the context allows it), and consider the larger category of $(E, F_E)$, with no assumption of existence of stable lattice $M$ made, as the category of $F$-isocristals. It is obtained from the category of effective $F$-isocristals and its natural internal tensor product, by "inverting" formally the "Tate cristal" $K(-1) = (K, F_{K(-1)} = p)$: the isocristals $(E, F_E)$ such that $(E, p^n F_E)$ is effective (i.e. the set of iterates of $(p^n F_E)$ is bounded for the natural norm structure) can be viewed as those of the form $E_0(n) = E_0 \otimes K(-1)^{\otimes(-n)}$, with $E_0$ an effective $F$-(iso)-cristal.

Assume now $k$ algebraic closed. Then by Dieudonné's classification theorem as reported on in Manin's report, the category of $F$-(iso)cristals over $k$ is semi-simple, and the isomorphism classes of simple elements of this category can be indexed by $Q$ (the group of rational numbers), or what amounts to the same, by pairs of relative prime integers

$$r, s \in Z, \quad r \geq 1, \quad (s, r) = 1$$

to such a pair corresponding the simple object

$$E_{s/r} = E_{r,s}$$

whose rank is $r$, and which for $s \geq 0$ can be described by the cristal over the prime field $F_p$ as

$$E_{s/r} = \mathrm{Q}_p[T]/(T^r - p^s), \quad F_{s/r} = \text{ multiplication by T.}$$

For $s \leq 0$, we get $E_{s/r}$ by the formula

$$E_\lambda = (E_\lambda)^{\check{}},$$

where $^{\check{}}$ denotes ordinary dual endowed with he contragredient $F$ automorphism. In Manin's report, only effective $F$-cristals are considered, with the extra restriction that $F_E$ is topologically nilpotent, but by Tate twist this implies the result as I state it now. Indexing by $Q$ rather than by pairs $(s, r)$ has the advantage that we have the simple formula

$$E_\lambda \otimes E_{\lambda'} \simeq \text{ sum of cristals } E_{\lambda+\lambda'}.$$

In other words, if we decompose each cristals in its isotypic component corresponding to the various "slopes" $\lambda \in \mathrm{Q}$, so that we get a natural graduation on it with group $Q$, we see that this graduation is compatible with the tensor product structure:

$$E(\lambda) \otimes E'(\lambda') \subset (E \otimes E')(\lambda + \lambda').$$

The terminology of "slope" of isotypic cristal, and of the sequence of slopes occurring in any cristal (when decomposing it into its isotypic components) is due, I believe, to you, as discussed on formal groups in Pisa about three years ago; but I did not appreciate then the full appropriateness of the notion and of the terminology. Let's define the sequence of slopes of a cristal $(E, F_E)$ by its isotypic decomposition, repeating each $\lambda$ a number of times equal to rank $E(\lambda)$ (bearing in mind that if $\lambda = s/r$ with $(s, r) = 1$, then the multiplicity of $\lambda$ in $E$ i.e. rank $E(\lambda)$ is a multiple of $r$); moreover it is convenient to order this sequence in increasing order. This definition makes still a good sense if $k$ is not algebraically closed, by passing over to the algebraic closure of $k$; in fact, the isotypic decomposition over

$\overline{k}$ *descends* to $k$, so we get much better than just a pale sequence of slopes, but even a canonical "iso-slope" ("isopentique" in french) decomposition over $k$

$$E = \oplus_{\lambda \in Q} E(\lambda)$$

(NB This is true only because we assumed $k$ perfect ; there is a reasonable notion of $F$-cristal also if $k$ is not perfect, but then we should get only a *filtration* of a cristal by increasing slopes...). Now if $k$ is a finite field with $q$ elements, of rank $a$ over the prime field, and if $(E, F_E)$ is a cristal over $k$, then $F_E^a$ is a linear endomorphism of $E$ over $K$, and it turns out that the slopes of the cristal are just the valuations of the proper values of $F_E^a$, for a valuation $\overline{Q}_p$ normalised in such a way that

$$v(q) = 1, \quad \text{i.e.} \quad v(p) = 1/a.$$

(This is essentially the "technical lemma" in Manin's report, the restrictive conditions in Manin being in fact not necessary.) Thus, the sequence of slopes of the cristal, as defined above, is just the sequence of slopes of the *Newton polygon* of the characteristic polynomial of the arithmetic Frobenius endomorphism $F_E^a$, and their knowledge is equivalent to the knowledge of the $p$-adic valuations of the proper values of this Frobenius!

Lets come back to a general perfect $k$. Then the cristals which are effective are those whose slopes are $> 0$; those which are Dieudonné modules, i.e. which correspond to Barsotti-Tate groups over $k$ (not necessarily connected) are those whose slopes are in the closed interval $[0, 1]$ : slope zero corresponds to ind-étale groups, slope one to multiplicative groups. Moreover, an arbitrary cristal decomposes canonically into a direct sum

$$E = \oplus_{i \in Z} E_i(-i),$$

where $(-i)$ are Tate twists (corresponding to multiplying the $F$ endomorphism by $b^i$), and the $E_i$ have slopes $0 \leq \lambda < 1$ (or, if we prefer, $0 < \lambda \leq 1$), and hence correspond to Barsotti-Tate groups up to isogeny over $k$, without multiplicative component (resp. which are connected). The interest of this remark comes from the fact that if $X$ is a proper and smooth scheme over $k$, then the cristallin cohomology groups $\mathrm{H}^i(X)$ can be viewed as $F$-cristals, $\mathrm{H}^i$ with slopes between $0$ and

$i$[15] and define in this way a whole avalanche of Barsotti-Tate groups over $k$ (up to isogeny), which are quite remarkable invariants whose knowledge should be thought as essentially equivalent with the knowledge of the characteristic polynomials of the "arithmetic" Frobenius acting on (any reasonable) cohomology of $X$ (although the arithmetic Frobenius is not really defined, unless $k$ is finite!).

Now the result about specialization of Barsotti-Tate groups. This is as follows: assume the BT groups $G$, $G'$ are such that $G'$ is a specialization of $G$. Let $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ ($h =$ "height") be the slopes of $G$, and $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_h$ the ones for $G'$. Then we have the equality

$$\sum \lambda'_i = \sum \lambda'_i \quad (= \dim G = \dim G') \tag{1}$$

and the inequalities

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1, \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda'_1 + \lambda'_2, \ldots, \sum_{i=1}^{j} \lambda_j \leq \sum_{i=1}^{j} \lambda'_j \ldots. \tag{2}$$

In other words, the "Newton polygon" of $G$ (i.e. of the polynomial $\Pi_i(1+(p^{\lambda_i}T)))$ lies below the one of $G'$, and they have the same end-points $(0,0)$ and $(h,N)$.

I get this result through a generalized Dieudonné theory for BT groups over an arbitrary base $S$ of char. $p$, which allows to associate to such an object an $F$-cristal over $S$, which heuristically may be thought of as a *family* of $F$-cristals in the sense outlined above, parametrized by $S$. Using this theory, the result just stated is but a particular case of the analogous statement about specialization of arbitrary cristals.

Now this latter statement is not hard to prove at all: passing to $\wedge^h E$ and $\wedge^h E'$, the equality (1) is reduced to the case of a family of rank one cristals, and to the statements that such a family is just a twist of some fixed power of the (constant) Tate cristal. And the general equality (2) is reduced, passing to $\wedge^j E$ and $\wedge^j E'$, to the first inequality $\lambda_1 \leq \lambda'_1$. Raising both $E$ and $E'$ to a tensor-power r.th such that $r\lambda_1$ is an integer, we may assume that $\lambda_1 = 0$, so the statement boils down to the following: if the general member of the family is an *effective* cristal, so are all others. This is really checked in terms of the explicit definition of "cristal over $S$".

[15] This is not proved now in complete generality, but is proved if $X$ lifts formally to char. zero, and is certainly true in general.

The wishful conjecture I have in mind now is the following: the necessary conditions (1) (2) that $G'$ be a specialization of $G$ are also sufficient. In other words, starting with a BT group $G_0 = G'$, and taking its formal modular deformation in char. $p$ (over a modular formal variety $S$ of dimension $dd^*$, $d = \dim G_0$, $d^* = \dim G_0^*$), and the BT group $G$ over $S$ thus obtained, we want to know if for every sequence of rational numbers $\lambda_i$ between 0 and 1, satisfying (1) and (2), theses numbers occur as the sequence of slopes of a fiber of $G$ at some point of $S$. This does not seem too unreasonable, in view of the fact that the set of all $(\lambda_i)$ (satisfying the conditions just stated) is indeed finite, as is of course the set of slope-types of all possible fibers of $G$ over $S$.

I should mention that the inequalities (2) were suggested to me by a beautiful conjecture of Katz, which says the following: if $X$ is smooth and proper over a finite field $k$, and has in dimension $i$ Hodge numbers $h^0 = h^{0,i}, h^1 = h^{1,i-1}, \ldots, h^i = h^{i,0}$, and if we consider the characteristic polynomial of the arithmetic frobenius $F^a$ operating on some reasonable cohomology group of $X$ (say $\ell$-adic for $\ell \neq p$, or cristallin), then the Newton polygon of this polynomial should be *above* the one of the polynomial $\Pi(1 + p^i T)^h i$, in a very heuristic and also very suggestive way, this could now be interpreted by stating (without any longer assuming $k$ finite) that the cristallin $\mathrm{H}^i$ of $X$ is a specialisation of a cristal whose sequence of slopes is: 0 $h^0$ times, 1 $h^1$ times,..., $i h^i$ times. If $X$ lifts formally to char zero, then we can introduce also the Hodge numbers of the lifted variety, which are numbers satisfying

$$h^{'0} \leq h^0, \ldots, h^{'i} \leq h^i,$$

and one should expect a strengthening of Katz's conjecture to hold, with the $h'^j$ replaced by the $h^j$. Thus the transcendental analogon of a char. $p$ $F$-cristl seems to be something like a Hodge structure or a Hodge filtration and the sequence of slopes of such a structure should be defined as the sequence in which $j$ enters with multiplicity $h'^j = \operatorname{rank} Gr^j$. (NB. Katz made his conjecture only for global complete intersections, however I would not be as cautious as he!). I have some idea how Katz's conjecture with the $h^i$'s (not the $h'^i$'s for the time being) may be attacked by the machinery of cristalline cohomology, at least the first inequality among (2); on the other hand, the formal argument involving exterior powers, outlined after (2), gives the feeling that it is really the first inequality $\lambda_1 \leq \lambda_1'$ which is essential, the other should follow once we have a good general framework.

I would very much appreciate your comments to this general non-sense, most of which is certainly quite familiar to you under a different terminology.

Very sincerely yours,

A. Grothendieck

## Letter to J. Lipman, 3.3.1970

Massy March 3, 1970

Dear Dr. Lipman,

Thanks a lot for your interesting letter. Your method seems the most natural indeed, moreover it seems rather natural to restrict to perfect rings on arguments.

You should not take too seriously my suggestion to prove actual representability, and I would not be surprised if this were actually false. Of course, it would be nice to know the answer, still. I will appreciate hearing about your progress.

I have put you on my permanent mailing list, and given instructions for mailing whatever is still available. Unfortunately a lot has become unavailable, but I hope most of it will come out in Springer's lecture notes during 1970.

Sincerely yours

A. Grothendieck

## Lettre à D Ferrand, 3.11.1970

Massy le 3.11.1970

Cher Ferrand,

J'aimerais savoir si je peux compter sur ton exposé SGA 6 XI dans un avenir assez rapproché (disons d'ici fin décembre). Dans le cas contraire, je pense qu'il serait préférable que je publie SGA 6 sans l'exposé XI. Il serait quand même raisonnable, après le travail que tu t'es tapé, que tu en fasses au moins un article d'exposition, et j'aimerais savoir alors où tu penses le publier, pour que je puisse y référer dans l'introduction à SGA 6.

Bien cordialement

## Lettre à J.L. Verdier, 3.11.1970

Massy le 3.11.1970

Cher Verdier,

Ne m'étant guère occupé de Math depuis trois mois, je suis un peu perdu pour SGA 4. Si je me rappelle bien, tu as rédigé ou es en train de rédiger les parties suivantes, qui sont exactement ce qui manque pour que SGA 4 soit complet :

V

VI par. 5 et suivants

Si je me rappelle bien, VI était en fait terminé d'être rédigé, il fallait seulement y apporter quelques modifications dont on avait discuté avant ton départ. De plus, je pense que tu as avec toi l'exposé

VI B

de Saint Donat, et je t'envoie également l'Appendice à XVII du même, dont j'avais apparemment lu les premières pages. Pourrais tu me le renvoyer (ou le renvoyer à St Donat) avec tes annotations et commentaires ?

Tu dois avoir un exemplaire du tirage de XVII ; le XVIII n'a pas été tapé sur Stencils, mais directement sur papier pour offset ; la frappe est terminée, et Deligne est censé la corriger.

Écris-moi stp où tu en es avec ta part de rédaction, et avec la lecture de VI B. Pour des raisons techniques, ce serait bien agréable mois qui viennent. Dis-moi en tous cas si tu as l'intention de terminer, et si oui, quand tu penses avoir terminé.

Bien cordialement

## Lettre à P. Deligne, 3.11.1970

Massy le 3.11.1970

Cher Deligne,

Pourrais-tu me dire si tu as terminé de regarder l'exposé de Rim SGA 7 VI, et si oui, me l'envoyer avec tes commentaires (sinon, me dire si tu as l'intention de le regarder et quand) ?

J'ai demandé à Mlle Altazin, qui a tapé ton exposé SGA 4 XVIII, de te l'envoyer avec le manuscrit, pour que tu le corriges. Pourrais-tu me dire si tu l'as reçu et si tu as l'intention de faire les corrections ? Quand elles seront faites, ou si tu ne veux pas les faire, envoyés moi le texte au net stp.

As-tu eu des nouvelles de Ferrand pour SGA 6 XI ?

Bien cordialement

## Lettre à J.L. Verdier, 23.6.1971[16]

Massy le 23.6.1971

Cher Verdier,

Merci pour ta lettre du 23 Mai. C'est dommage que tu ne m'aies pas envoyé ce malheureux exercise 4.10.6, cela aurait permis d'envoyer enfin à l'imprimeur le fascicule 1 de SGA 4. La personne qui a frappé le texte termine maintenant, elle partira en vacances et Springer rend la machine qu'elle avait en location, faute d'autres manuscripts. Cela remet donc la publication même de ce fascicule sine die.

Bien cordialement

[16] Transcribed with the collaboration of M. Künzer

## Letter to F. Knudsen, 19.5.1973[17]

Buffalo May 19, 1973

Dear Finn Knudsen,

Mumford sent me your notes on the determinant of perfect complexes, asking me to write you some comments, if I have any. Indeed I do have several - except for the obvious one that it is nice to have written up with details at least *one* full construction of that damn functor! I did not enter into the technicalities of your construction, which perhaps will allow to get a better comprehension of the main result itself. The main trouble with your presentation seems to me that the bare statement of the main result looks rather mysterious and not "natural" at all, despite your claim on page 3b! The mysterious character is of course included in the alambicated sign of definition 1.1. Here two types of criticism come to mind:

1) The sign looks complicated - are there not simpler sign conventions for getting a nice theory of $\det^*$ and its variance? It seems to me that Deligne wrote down a system that really did look natural at every stage - however he never wrote down the explicit construction, as far as I know, and the chap who had undertaken to do so, gave up in disgust after a year or two of letting the question lie around and rot!

2) Even granted that your conventions are as simple or simpler than other ones, the very fact that they are so alambicated and technical calls for an elucidation, somewhat of the type you give on page 3b with those $\varepsilon_i$'s. That is one would like to *define* first what any theory of $\det^*$ should be (with conventions of sign as yet unspecified), stating say something like a *uniqueness theorem* for every given system of signs chosen for canonical isomorphisms, and moreover *characterizing* those systems of sign conventions which allow for an existence theorem - which will include the existence of at least one such system of signs. If one has good insight into all of them, it will be a

[17] Editor Note: See Knudsen, Finn F. *Determinant functors on exact categories and their extensions to categories of bounded complexes*. Michigan Math. J., 50 (2): 407-444, 2002

matter of taste and convenience for the individual mathematician (or the situation he has to deal with in any instance) to make his own choice!

A second point is the introduction of such evidently superfluous assumptions like working on Noetherian (!) schemes, whereas the construction is clearly so general as to work, say, over any ringed space and even ringed topos - and of course it will be needed in this generality, for instance on analytic spaces, or on schemes with groups of automorphisms acting, etc. Its just a question of some slight extra care in the writing up. It is clear in any case that the question reduces to defining $\det^*$ for strictly perfect complexes (i.e. which are free of finite type in every degree), and for homotopy classes of homotopy equivalences between such complexes, as well as for short exact sequences of such complexes. (NB! One may wish to deal, more generally, in the Illusie spirit, with strictly perfect complexes filtered - by a filtration which is finite but possibly not of level two - by sub-complexes with strictly perfect quotients.) Now this allows to restate the whole thing in a more general setting, which could make the theory more transparent, namely:

An additive category $C$ (say free (or projective) modules of finite type over a commutative ring $A$) is given, as well as a category $P$ which is a groupoid, endowed with an operation $\otimes$ together with associativity, unity and commutativity data, satisfying the usual compatibilities (see for instance Saavedra's thesis in Springer's lecture notes) and with all objects "invertible". In the example for $C$, we take for $P$ invertible $Z$-graded modules over $A$, with tensor product, the commutative law $L \otimes L' \simeq L' \otimes L$ involving the Koszul sign $(1)^{dd'}$ where $d$ and $d'$ are the degrees of $L$ and $L'$ respectively. We are interested in functors (or a given functor) $f : (C, \text{isom}) \longrightarrow P$, together with a functorial isomorphism $f(M+N) \simeq f(M) \otimes f(N)$, compatible with the associativity and commutativity data (cf. Saavedra for this notion of a $\otimes$); for instance, in the example chosen, we take $f(M) = \det^*(M)$, the determinant module where $*$ stands for the degree which we put on the determinant module (our convention will be to put the degree equal to the rank of $M$, which will imply that our functor is indeed compatible with the commutativity data). It can be shown (this was done by a North Vietnamese mathematician, Sinh Hoang Xuan) that given $C$ (indeed any associative and commutative $\otimes$-category would do), there exists a universal way of sending $C$ to $P$ as above - in the case considered, this category can be called the category of "stable" projective modules over $A$, and its main invariants (isomorphism classes of objects, and automorphisms of the unit object) are just the invariants $K^0(A)$ and $K^1(A)$ of myself and Dieudonné-Bass; but this existence of a universal situation is irrelevant for the technical problem to come. Now consider the category $K = K^b(C)$, of bounded complexes of $C$, up to homotopy. It is a triangulated category[18], and as such we can define the notion of a $\otimes$-functor from $K$ into $P$; it's first of all a $\otimes$-functor for the additive structure of $K$ (the internal composition of $K$ being $\otimes$), but with moreover an extra structure consisting giving isomorphisms $g(M) \simeq g(M')g(M'')$ whenever we have an exact triangle $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow M'$. This should of course satisfy various conditions, such as functoriality with respect to the triangle, case of split exact triangle $M = M' \oplus''$, case of the triangle obtained by completing a quasi-isomorphism $M' \longrightarrow M$, and possibly also a condition of compatibility in the case of an exact triangle of triangles. (I guess Deligne wrote down the reasonable axioms some day; it may be more convenient to work with the filtered $K$-categories of Illusie, using of course finite filtrations that split in the present context). Of course if we have such a $g : K \longrightarrow P$, taking its "restriction" to $C$ we get an $f : C \longrightarrow P$. The beautiful statement to prove would then be that conversely, every given $f$ extends, uniquely up to isomorphism, to a $g$, in other terms, that the restriction functor from the category o $g$'s to the category of $f$'s is an equivalence. The whole care, for such a statement, will of course be to give the right set of "sign conventions" for defining admissible $g$'s (that is compatibilities between the two or three structures on the set of $g(M)$'s- which in fact all can be reduced to giving the isomorphisms attached

[18]Be careful that one has to take the term "triangulated category" in a slightly more precise sense than in Verdier's notes, the "category of triangles" being something more precise than a mere category of distinguished diagrams in $K$. We have a functor from the former to the latter, but it is not even a faithful one. (Illusie's treatment in terms of filtered complexes, in his Springer lecture notes, is a good reference) It is with respect to the category of "true" triangles only that the isomorphism $g(M) \simeq g(M') \otimes g(M'')$ will be functorial. For instance, if we have an *automorphism* of a triangle, inducing $u, u', u''$ upon $M, M'$ and $M''$, then functoriality is expressed by the relation $\det u = \det u' \det u''$ (which implies, replacing $u$ by $id + tu$, $t$ an indeterminate, that $u = u' + u''$) but this relation may become *false* if we are not careful to take automorphisms of true triangles, instead of taking mere automorphisms of diagrams.

to exact triangles). In this general context, the group of signs $\pm 1$ is replaced by the subgroup of elements of order 2 of the group $K^1(P) = \mathrm{Aut}(1_P)$ (which is always a commutative group). The "sign map" $n \longrightarrow (1)^n$ from the group of degrees to the group of signs is replaced here by a canonical map $K^0(P)$(= group of isomorphism classes of $P$) $\longrightarrow K^1(P)$, associating to every $L$ in $P$ the symmetry automorphism of $L \otimes L$ (viewed as coming from an automorphism of the unit object by tensoring with $L \otimes L$). What puzzles me a little is that apparently, you have not been able to define $g$ in terms intrinsic to the triangulated category $K = K^b(C)$ - the signs you introduce in 1.1 do depend on the actual complexes, not only on their homotopy classes. I guess the whole trouble comes from the order in which we write any given tensor product in $P$, in describing $\det^*(M^\bullet)$ we had to choose such an order rather arbitrarily, and it is passing from one such to another that involves "signs".

If $C$ is an *abelian* category, there should be a variant of the previous theory, putting in relations on the $\otimes$-functors $f : C \longrightarrow P$ together with the extra structure of isomorphisms $f(M) \simeq f(M') \otimes f(M'')$ for all short exact sequences $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ satisfying a few axioms, and $\otimes$-functors $g : D^b(C) \longrightarrow P$. There should also be higher dimensional analogous, involving $P$'s that are $n$-categories instead of mere 1-categories, and hence involving (implicitly at least) the higher $K$-invariants $K^i(C)$ ($i \geq 0$). But of course, first of all the case of the relation between $C$ and $K^b(C)$ in the simplest case should be elucidated!

I am finishing this letter at the forum where I have no typewriter. I hope you can read the handwriting!

Best wishes

A. Grothendieck

## Lettre à H. Seydi, 13.2.1973

Châtenay le 13.2.1973

Cher Seydi,

Je viens de regarder votre travail sur les ombres, après une lecture plus approfondie par Illusie, dont je vous envoie ci-joint les commentaires détaillés. Comme lui, je pense que la théorie n'est par tout à fait au propre à décourager le lecteur. Une rédaction plus satisfaisante risque de vous demander pas mal de travail et de retarder votre soutenance inutilement. Comme vos résultats d'algèbre commutative sont parfaitement suffisants pour ayant sur ceux-ci. Si vous en avez l'envie, vous rédigerez par la suite sans vous presser un article sur les ombres - peut-être en collaboration avec autre mathématicien, au cas où cela vous inspirerait plus.

Pour qu'un travail sur les ombres soit commodément utilisable, il faudrait d'abord qu'il y ait un résumé des principaux résultats de la théorie, à quoi le lecteur peut se reporter, pour voir clairement de quoi il s'agit sans être troublé par les bizarreries de plan pouvant résulter de certaines nécessités de démonstration. De plus, il en est possible que de poser dès le début quelle théorie on veut obtenir, vous permette de voir plus clair vous-même et de court-circuiter notablement la construction effective de la théorie. En somme, il s'agit de poser d'emblée la question de trouver un foncteur

$$X \mapsto \mathrm{Omb}(X)$$

des schémas formels noethériens vers les espaces localement annelés, et un homomorphisme fonctoriel

$$i_X : X \longrightarrow \mathrm{Omb}(X),$$

satisfaisant à un certain nombre de propriétés naturelles, dont on ferait la liste, et qu'on pourrait espérer caractéristiques (i.e. de nature à définir la théorie à isomorphisme unique près sur le foncteur Omb cherché). Ou encore, on peut dégager d'abord un ensemble de propriétés caractéristiques (caractérisation de la théorie) et énoncer ensuite des propriétés supplémentaires importantes. Pour contribuer à donner de l'ouverture à l'exposé, il faudrait également faire une lise de problèmes naturels qui devraient être résolus, et une liste de situations où la théorie développée s'introduit de façon naturelle (cf les exemples indiqués par Illusie ; il y en a d'autres dans le travail d'Artin sur l'existence d'éclatements et de contractions, et dans un travail de Hironaka que j'ai oublié, mais que vous pourriez lui demander).

**Propriétés caractéristiques**. On peut, pour les formuler, introduire la notion d'espace *annelé géométrique* : c'est un espace annelé qui est noethérien, sobre (toute partie fermée irréductible a exactement un point générique), avec $\underline{O}_S$ cohérent, ses fibres locaux et noethériens, tel que pour tout $F$ constant et tout idéal cohérent $J$ tels que $\operatorname{supp} F \subset \operatorname{supp} \underline{O}_S/J$, il existe un $n \geq 0$ tel que $J^n F = 0$, tel que pour toute partie fermée $T$ de $S$ il existe un idéal cohérent $J$ tel que $T = V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{supp} \underline{O}_S/J$, et tel que pour tout ouvert $U$ de $S$, toute section $f$ de $\underline{O}_U$ et tout faisceau cohérent $F$ sur $S$, et toute section $h$ de $F$ sur $U_f = U - V(f)$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $f^n h$ se prolonge en une section de $F$ sur $U$. Il faudra demander de plus, soit que tout faisceau cohérent sur un ouvert de $S$ se prolonge en un faisceau cohérent sur $S$ (ou serait-ce conséquence du reste), ou du moins que les conditions b) et c) restent valables quand on remplace $S$ par un ouvert quelconque, car on veut que tout ouvert d'un espace géométrique soit géométrique. Le propriété b) implique que $V(J) \subset V(J')$ implique (donc équivaut) à l'existence d'un $n$ tel que $J'^n \subset J$, donc $V(J) = V(J')$ à l'existence d'un $n$ tel que $J'^n \subset J$ et $J^n \subset J'$. Donc l'ensemble des parties fermées de $S$, avec sa relation d'ordre réticulée, s'identifie grâce à

[]

**Propriétés supplémentaires**. Il y a d'abord les propriétés qui relient de façon plus géométrique $X$ et $\operatorname{Omb}(X)$, qui n'ont guère été dégagés, sauf le fait que $i_X$ est un homéomorphisme de $X$ sur une partie fermée de $\operatorname{Omb}(X)$, provenant du fait plus précis que pour tout $n$, $i_X$ induit sur $X_n$ une immersion fermée. D'ailleurs, la connaissance de l'espace annelé $S$ et de sa partie fermée $S_0$ permet de retrouver $X$ à isomorphisme unique près comme le "complété formel" de $S$ le long de $S_0$. On peut se demander de trouver les propriétés sur un couple $(S, S_0)$ qui assurent qu'il provient bien d'un schéma formel comme ci-dessus. Il faut évidemment que $S$ soit géométrique, et que si $S$ est défini par l'idéal $J$, alors $(S_0, \underline{O}_S/J|S_0)$ soit un schéma - mais ce n'est évidemment pas suffisant. Mais définissant alors $S$ de façon évidente, ainsi que $S \xrightarrow{j} S$, une condition néc et suff est évidemment que $j^* : (S) \longrightarrow (S)$ soit une équivalence de catégories.

Il devrait être vrai que pour tout espace géométrique

[]

**Autres questions à traiter ou à signaler**.

1) La catégorie des Algèbres de présentation finie sur $X$ et sur $\mathrm{Omb}(X)$ est "la même": devrait être facile, en termes d'une caractérisation de la catégorie des Alg. de prés. finie sur un $Y$ en termes de $(Y)$, comme les objets de $((Y))$ munis d'une multiplication $A \otimes A$ ayant certaines propriétés... caractérisation qui devrait être valable pour des $Y$ tels que $X$ (schéma formel noethérien) et $S$ (ombre d'un tel)... (Il faudrait donner bien sûr des conditions générales sympa sur $Y$ qui soient manifestement vérifiées pour $X$, $S$).

2) Le foncteur image inverse par $i_X$ allant des schémas relatifs propre sur $S = \mathrm{Omb}(X)$ vers les schémas relatifs propres sur $X$, est une équivalence de catégories. (NB dans le cas relatif projectif cela devrait se ramener à 1) dans le cas d'Algèbres graduées...) NB si on prend des schémas de présentation finie sans plus, le foncteur n'est même pas fidèle, comme on voit en prenant des schémas relatifs sur $S - X_0$.

3) Un schéma relatif de présentation finie sur $X$ en définit-il un sur $S = \mathrm{Omb}(X)$ ? D'après 1) et 2) cela devrait être vrai tout au moins dans le cas affine relatif ou propre relatif. Le cas $X$ affine est déjà intéressant à regarder !

4) Pour tout faisceau cohérent $F$ sur $S = \mathrm{Omb}(X)$, l'homomorphisme canonique induit par $i_X$
$$\mathrm{H}^i(S, F) \quad \mathrm{H}^i(S, i_X(F))$$
est-il un isomorphisme ? (Si oui, cela impliquerait l'énoncé analogue pour les $\mathrm{Ext}^1$ globaux de Modules cohérents) Cela résulterait d'un théorème d'effacement de classes de cohomologie de faisceaux cohérents par immersion dans un cohérent (ou dans un -cohérent), sur des espaces tels que $X$ (schéma formel) et $S$ (ombre d'un tel).

5) Bien entendu, des questions analogues se posent en cohomologie étale - mais ce n'est sans doute pas le lieu dans un premier exposé de fondements !

6) Application de la théorie pour associer fonctoriellement un espace annelé géométrique à tout espace rigide-analytique quasi-cohérent sur le corps des quotients d'un anneau de valuation discrète complet, en utilisant la théorie de Raynaud, de tel façon qu'à la fibre générique d'un schéma formel de type fini sur $V$ soit associé $\mathrm{Omb}(X) - X_0$. C'est évident modulo la théorie de Raynaud - mais il resterait à étudier les propriétés de fidélité du foncteur obtenu. Serait-il pleinement fidèle. (C'est lié à la question suivante : soient $X$, $X'$ schémas formels de type fini sur $X$, $S = \mathrm{Omb}(X)$, $S' = \mathrm{Omb}(X')$, $u : S \longrightarrow S'$ un $K$-morphisme d'espaces localement annelés ($K$ étant le corps des fractions de $V$), existe-il un éclatement $\overline{X}$ de $X$ le long d'un sous-schéma concentré sur la fibre spéciale, et un morphisme $f : \overline{X} \longrightarrow X'$ qui induise $u$ ?) Relations entre propriétés locales sur l'espace rigide-analytique et sur son ombre…

## Lettre à L Illusie, 3.5.1973

Buffalo le 3.5.1973

Cher Illusie,

Je t'envoie quelques afterthoughts de notre conversation mathématique sur les motifs. J'avais dit à tort que les isomotifs n'ont pas de "modules infinitésimaux", c'est-à-dire que si $i : S_0 \longrightarrow S$ est une immersion nilpotente, le foncteur image inverse de motifs est une équivalence de catégories. Cela doit être vrai en car. $p > 0$ (plus généralement si $O_S$ est annulé par une puissance de $p$), pour la raison heuristique (qu'on peut expliciter entièrement lorsqu'on travaille dans le contexte bien assis des schémas abéliens, ou des groupes de Barsotti-Tate) que lorsqu'on se ramène par dévissage au cas d'une nilimmersion d'ordre 1 ($J^2 = 0$), on peut définir une obstruction à la déformation sur $S$ d'un homomorphisme (ou isomorphisme) de (pas iso) motif sur $S_0$, qui sera tué par $p^i$ si $p^i$ tue $J$, donc qui sera tué lorsqu'on passe aux *iso*motifs. Par contre, en caractéristique nulle, les schémas abéliens à isogénie près ont la même théorie des modules infinitésimaux que les schémas abéliens tout court, et il faut s'attendre à la même chose pour les motifs et isomotifs. En termes des théories de systèmes de coefficients de de Rham ou de Hodge, l'élément de structure "filtration de DR" introduit bel et bien un élément de continuité, qui a pour effet de rendre faux le fait que pour ces coefficients, le foncteur image inverse par nilimmersion soit une équivalence. Il semble que donc qu'il faille bannir cette propriété (hors du cas des schémas de torsion) du yoga des "coefficients discrets". À moins qu'il se trouve que les besoins du formalisme (construction de foncteurs adjoints du type etc.) nous impose de modifier la notion de faisceau de Hodge ou de DR sur un schéma $X$, en partant du genre de notion que nous avions regardée ensemble, et en passant ensuite au catégories des catégories correspondantes associées à $X'$, où $X'$ est réduit et $X' \longrightarrow X$ est fini radiciel surjectif. Mais j'espère qu'il ne sera pas nécessaire de canuler ces notions ainsi. Une question liée est celle-ci : si $X$ est de car. $0$, un motif serein sur $X$ qui est "effectif de poids 1" définit-il bien un schéma abélien à isogénie près, ou seulement un schéma abélien à isogénie près au-dessus d'un $X'$ comme ci-dessus ? Ce dernier devrait être le cas en tout cas en car. $p > 0$, si on veut qu'un morphisme fini surjectif soit un morphisme de descente effective pour les isomotifs (et cela à son tour doit être vrai, étant vrai pour les $Q_\ell$-faisceaux, si on veut que le foncteur isomotifs $\longrightarrow$ $Q_\ell$-faisceaux commute aux opérations habituelles et est fidèle – et on le veut à tout prix). Ainsi, en car. $p > 0$, si $k$ est un corps, un isomotif effectif de poids 1 sur $k$ devrait être, non un schéma abélien à isogénie près sur $k$, mais sur la clôture parfaite de $k$ !

Je n'ai pas le cœur net non plus sur la nécessité de mettre du "iso" partout dans la théorie des motifs. Je ne serais pas tellement étonné qu'il y a en caractéristique nulle une théorie des motifs (et *pas* iso), qui s'envoie dans les théories $\ell$-adiques (sur $\mathrm{Z}_\ell$, pas $\mathrm{Q}_\ell$) pour tout $\ell$. Pour ce qui est des coefficients de Hodge, il devrait être assez trivial de les définir "pas iso", de telle façon que les $Z$-faisceau de torsion algébriquement constructibles (sur $X$ de type fini sur $C$) en forment une sous-catégorie pleine, et avec un foncteur vers les $Z$-faisceau algébriquement constructibles ("foncteur de Betti"). En caractéristique $p > 0$, j'ai des doutes très sérieux pour l'existence d'une théorie des motifs pas iso du tout, à cause des phénomènes de $p$-torsion (surtout pour les schémas qui ne sont pas projectifs et lisses). Ainsi, si on admet la description de Deligne des "motifs mixtes" de niveau 1 comme le genre de choses permettant de définir un $\mathrm{H}^1$ motivique d'un schéma pas pas projectif ou pas lisse, on voit que déjà pour une courbe algébrique sur un corps imparfait $k$, la construction ne peut fournir en général qu'un objet du type voulu sur la clôture parfaite de $k$. par contre, il pourrait être vrai que seul la $p$-torsion canule, et qu'il suffise de localiser par tuage de $p$-torsion, c'est-à-dire moralement de travailler avec des catégories $\mathrm{Z}[1/p]$-linéaires. On aurait alors encore des foncteurs allant des "motifs" (pas iso) vers les $\mathrm{Z}_\ell$-faisceaux (quel que soit $\ell \neq p$) mais pas vers les $F$-cristaux, mais seulement vers les $F$-isocristaux. Dans cette théorie, on renoncerait donc simplement à regarder en car. $p$ des phénomènes de $p$-torsion. Pourtant il est "clair" que ceux-ci existent et sont fort intéressants, tout au moins pour les morphismes propres et lisses, et on a bien l'impression que la cohomologie crystalline (plus fine que DR) pas iso en donne la clef. (Au fait, Berthelot est-il parvenu à des conjectures plausibles à ce sujet ?) On peut donc espérer que pour les motifs sereins et semi-simples fibre par fibre, on a des catégories sur Z, pas seulement sur $\mathrm{Z}[1/p]$, les Hom étant des Z-modules de type fini. Cette impression peut être fondée par exemple sur le joli comportement des schémas abéliens sur les corps des fractions d'un anneau de val. discrète : dans la théorie de spécialisation, il se trouve qu'à aucun moment la $p$-torsion ne canule.

Bien sûr, alors même qu'on arriverait à travailler avec des catégories de motifs pas iso, dans "l'état actuel de la science", pour en déduire une théorie de groupes de Galois motiviques, étant obligé de s'appuyer sur ce que Saavedra a rédigé, on est obligé à tensoriser tout par $Q$, et on ne trouve que des groupes algébriques sur $Q$ ou des extensions de $Q$. Néanmoins, on a certainement dans l'idée que les "vrais" groupes de Galois motiviques (associés à des foncteurs-fibres comme la cohomologie $\ell$-adique, ou la cohomologie de Betti) sont des schémas en groupes sur $Z_\ell$ et sur $Z$ plutôt que sur $Q_\ell$ et sur $Q$, et par là on devrait rejoindre le point de vue des groupes de type arithmétique de gens comme Borel, Griffiths, etc.

Encore une remarque : alors même qu'on travaille avec des isomotifs, on peut associer à un tel $M$ quelque chose de mieux qu'une suite infinie de $Q_\ell$-faisceaux (lorsqu'il y a une infinité de $\ell$ premiers aux car. résiduelles). En fait, on a ce qu'on pourrait appeler un faisceau "adélique", i.e. un faisceau de modules (moralement) sur l'anneau des adèles finis de $Q$. De façon précise, on peut considérer tous les $T_\ell(M)$ sauf un nombre fini comme étant des $Z_\ell$-faisceaux (pas seulement des $Q_\ell$-faisceaux). Éliminant toute métaphysique motivique, on peut dire que la théorie de Jouanolou écrite en fixant un $\ell$, pourrait être développée avec des modifications techniques mineures pour avoir une théorie des "$A$-faisceaux", où $A$ est l'anneau des adèles, ou un facteur direct $A'$ de celui-ci obtenu en ne prenant qu'un paquet de nombres premiers (pas nécessairement tous). On obtient ainsi une théorie de coefficients (au sens technique dont nous avions discuté) ayant comme anneau de coefficients la $Q$-algèbre $A$ resp. $A'$. Comme $A$ et $A'$ sont "absolument plats", il n'y a pas introduction de $\underline{\mathrm{Tor}}_i$ gênants et de canulars de degrés infinis dans cette théorie.

Pour en revenir au yoga des coefficients "discrets", où j'avais énoncé une propriété de trop apparemment, par contre il y en a une autre que nous n'avions pas explicitée. Il s'agit de la définition de l'objet de Tate sur $S$ comme l'inverse de l'objet (inversible pour $\otimes$)

$$T(-1) = \mathrm{R}^2 f_*(1_P) = \mathrm{R}^2 g_!(1_E)$$

où $f : P \longrightarrow S$ resp. $g : E \longrightarrow S$ sont les projections de la droite projective resp.

la droite affine sur $S$. D'autre part, les objets (définis en fait sur le schéma de base $S_0$ de la théorie de coefficients) interviennent également dans la formulation des théorèmes de pureté relative ou absolue et la définition des classes fondamentales locales (qui, j'espère, doit être possible en termes des données initiales de la théorie de coefficients envisagée, sans constituer une donnée supplémentaire), et dans le calcul de $f^!$ pour $f$ lisse (donc pour $f$ lissifiable), pour ne parler que du démarrage du formalisme cohomologique. En fait, on les retrouve ensuite à chaque pas.

Une dernière remarque. Je crois qu'il vaudrait la peine de formaliser, dans le cadre d'une théorie de coefficients plus ou moins arbitraires, les arguments de dévissage qui ont conduit, dans le cas des coefficients étales, aux théorèmes de finitude pour  pour $f$ propre, puis pour $f$ séparé de type fini seulement (moyennant résolution des singularités). Ces dévissages apparaîtraient maintenant comme des pas destinés à prouver *l'existence* de  (en même temps, s'il y a lieu, que sa commutation aux changements de base). À vrai dire, il n'est pas clair pour moi que l'on arrivera à des formulations qui s'appliqueraient directement aux $Z_\ell$-faisceaux, disons; en fait, ce n'est pas ainsi que procède Jouanolou dans ce cas, qui au contraire se ramène aux énoncés déjà connus dans le cas des coefficients de torsion (procédé qui n'a guère de chance de s'axiomatiser dans le cas qui nous intéresse). Par contre, pensant directement au cas des motifs, on peut songer à utiliser un dévissage qui s'appuie entre autres sur les propriétés suivantes (quitte à se tirer par les lacets de souliers pour les établir chemin faisant) : (a) un (iso)motif se dévisse en motifs sereins sur des schémas irréd. normaux (NB on suppose qu'on travaille sur des schémas excellents); (b) un motif serein sur un schéma normal irréductible se dévisse en motifs sereins "simples" – en fait, il suffit de faire le dévissage en le point générique; (c) un motif simple (pourvu qu'on remplace la base $S$ par un voisinage ouvert assez petit du point générique) est un facteur direct d'un $\mathrm{R}^i f_{(1_X)}$, où $f : X \longrightarrow S$ est propre et lisse, tout du moins moyennant tensorisation par un objet de Tate $T(j)$ convenable. Ainsi, moyennant au moins deux gros grains de sel qu'il faudrait essayer d'expliciter un jour, les motifs généraux (toujours iso, bien sûr) se ramènent aux motifs plus ou moins naïfs tels qu'ils sont décrits notamment dans Manin et Demazure. Cela s'applique tout aux moins aux objets–quant aux morphismes, c'est une autre paire de manches – et encore pire pour les $\mathrm{Ext}^i$...

À ce propos, on peut se convaincre que l'application qui va des classes d'extension de deux motifs (dans la catégorie abélienne des motifs) vers le $\mathrm{Ext}^1$ défini comme $\mathrm{Hom}(M,N[1])$ (Hom dans la catégorie triangulée) ne devrait pas être bijective (mais sans doute injective). Plaçons-nous en effet sur une base $S$ spectre d'un corps fini, prenons pour $M$ et $N$ le motif unité $1_S = T_S(0) = T(0)$, de sorte que le $\mathrm{Ext}^1$ n'est autre que $\mathrm{H}^1(S,T(0))$. Les calculs $\ell$-adiques du $\mathrm{H}^1$ nous suggèrent fortement que le $\mathrm{H}^1$ absolu motivique est canoniquement isomorphe à $Q$. Mais d'autre part les classes d'extension de $T(0)$ par $T(0)$ doivent être nulles (sur tout corps $K$) si $M$ et $N$ sont des motifs de poids $r$ et $s$ avec $r \neq s$, si on admet le yoga de la filtration d'un motif par poids croissants, avec gradué associé semi-simple. (NB En fait, sur un corps fini, la catégorie des motifs devrait être tout entière semi-simple, i.e. toute extension devrait être triviale, i.e. la filtration croissante précédente devrait splitter canoniquement : cela résulte du fait que l'endomorphisme de Frobenius du motif opère avec des “poids” différents sur les composantes des différents poids–plus un petit exercice de catégories tannakiennes.)

Bien cordialement

Alexandre

## Lettre à P. Deligne, J. Giraud et J.-L Verdier 23.6.71974

Villecun le 23.6.71974

Chers Deligne, Giraud, Verdier,

Vous savez peut-être qu'une mathématicienne vietnamienne, Hoang Xuan Sinh

Pour ce qui est des formalités administratives, c'est la frère de Hoan Xuan Man, qui habite à Antony, qui s'en occupera pour elle. À toutes fin utile, je vous passe son adresse :

Hoang Xuan Sinh, 49 rue de Châtenay, Estérel, 92 Antony, Tél BER 63 79.

Dans l'attente d'une réponse prochaine, bien cordialement

Schurik

PS. N'ayant pas l'adresse de Giraud, je demande à Verdier s'il peut bien lui transmettre la lettre et le rapport. Je pense que celui-ci doit pouvoir servir comme rapport de thèse aussi vis à vis de l'administration universitaire en France.

# Lettre à P. Deligne, 7.8.1974[19]

7.8.1974

Cher Deligne,

étant peut-être empêché par mon jambe d'assurer un cours de 1^er^ cycle au 1^er^ trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les fourbis de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". à ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si $M$, $N$ sont deux faisceaux abéliens sur un topos $X$, et $\tau_{\leq 2}\,\mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(M,N) = E(M,N)$ est le complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} H^i = {}^i(M,N) & \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ H^i = 0 & \text{si } i \notin [0,2], \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(M,2N)[-2] \arrow[dl] & \\ E(M,N) \arrow[rr] & & E'(M,N), \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

donc $E'(M,N)$ est un complexe dont les invariants $H^i$ sont ceux de $E(M,N)$ en degré $i \neq 2$, et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow {}^2(M,N) \longrightarrow \overbrace{H^2(E'(M,N))}^{P(M,N)} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Hom}(M,2N) \longrightarrow 0\,.$$

Heuristiquement, $E'(M,N)$ est le complexe qui exprime le "2-champ de Picard strict" formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) "épinglés" par $M$, $N$ sur des objets variables de $X$, en admettant que ta théorie pour les 1-champs de Picard stricts s'étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute) ; de même $E(M,N)$ correspond aux champs de Picard *stricts* épinglés par $M$, $N$. La suite exacte $(*)$ se construit en tous cas canoniquement

[19] Transcribed with the collaboration of M. Künzer

“ à la main”, où le terme médian est le faisceau des classes à “ équivalence” près des champs de Picard épinglés par $M$, $N$, or étant l'invariant qui s'obtient en associant à toute section $L$ d'un champ de Picard la symétrie de $L\otimes L$, interprété comme section de $2N$. Je sais prouver (sauf erreur) que tout homomorphisme $M \longrightarrow 2N$ provient d'un champ de Picard convenable (épinglé par $M$, $N$) (a priori l'obstruction est dans $\mathrm{Ext}^3(X;M,N)$, mais un argument ‘ùniversel” prouve qu'elle est nulle). Cela prouve que l'extension $(*)$ est bien proche d'être splittée : toute section du troisième faisceaux, sur un objet quelconque de $X$, se remonte – en d'autres termes, l'extension a une section “ensembliste”. Bien sûr, il y a mieux en fait : toute section sur un $U\in \mathrm{Ob}\,X$ “provient” d'un élément de $H^2(U,E'(M,N))$ (hypercohomolo - $H^2$).

*Exemple.* Soit $A$ un anneau sur $X$, soient $M$, $N$ respectivement les faisceaux $K^0$, $K^1$ associés au champ additif des $A$-Modules projectifs de type fini (p. ex.). Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par $M$, $N$, d'où une section canonique du terme médian $P(M,N)$ de $(*)$.

*NB.* Tout ce qui précède a les fonctorialités évidentes en $M$, $N$, $X$, ....

*Question.* Le triangle exact (T) et la suite exacte $(*)$ sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie ...) ? Connaissent-ils des variantes “supérieures” ? (Un principe “géométrique” pour les obtenir pourrait être via des $n$-champs de Picard non nécessairement stricts ... )

Je profite de l'occasion pour soulever une question sur la “cohomologie relative”. Soit $q : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos. Si $F$ est un faisceau abélien (ou un complexe d'iceux) sur $Y$, peut-on définir *fonctoriellement* en $F$ la cohomologie relative $\mathrm{R}\Gamma(YX,F)$ (de la catégorie dérivée de $\mathrm{Ab}(Y)$ dans celle de Ab) ? L'interprétation “géométrique” en termes d'opérations sur des $n$-champs de Picard ($n$ “grand”) suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente “ à la main” que dans les deux cas extrêmes :

(a) $q$ est “(—1)-acyclique”, i.e. pour tout $F$ sur $Y$, $F \longrightarrow q_*q^*F$ est injectif (*NB* C'est le cas de $Y/P \longrightarrow Y$ si $P \longrightarrow e_Y$ est un épimorphisme – c'est donc le cas de ${}_e\!\longrightarrow_G$ plus haut.)

On prend

$$\mathrm{R}\Gamma((F \longrightarrow q_*(\underbrace{C(q^*(F))}_{\text{résolution injective}}))[-1])\,.$$

(b) $\forall\, F$ injectif sur $Y$, $q^*(F)$ est injectif et $F \longrightarrow q_*q^*F$ est un épimorphisme (exemple : $q$ inclusion d'un ouvert $U e_Y$). On prend

$$\mathrm{R}\Gamma_Y(\mathrm{Ker}(\underbrace{C(F)}_{\text{résolution injective}} \longrightarrow q_*q^*(C(F))))\,.$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d'un morphisme de complexes (tel que

$$F \;\longrightarrow\; q_*(q^*(F)) \qquad\qquad )$$

n'est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) par rapport à la flèche dont on veut prendre le cône. Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

*Question pour Illusie :* Dans sa théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des $\mathrm{H}^3({}_G/X,-)$ resp. des $\mathrm{Ext}^2(X;-,=)$. Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (supposée écrite) des Gr-champs – resp. via ta théorie des champs de Picard ? J'ai `[phrase incomplète]`

Je te signale que j'ai réfléchi aux Gr-champs sur $X$. Si $G$ est un Groupe sur $X$, $N$ un $G$-Module, les Gr-champs sur $X$ “ épinglés par $G$, $N$ ” forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l'opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à 1 échelon à qui lui correspond est le tronqué

$$\tau_{\leq 2}(\mathrm{R}\Gamma({}_GX,N)[1])\,.$$

(*NB* la cohomologie de $\mathrm{R}\Gamma({}_GX,N)$ commence en degré 1.) Plus géométriquement, un Gr-champ sur $X$ épinglé par $(G,N)$ est essentiellement “la même chose” qu'une 2-gerbe sur ${}_G$, liée par $N$, et munie d'une trivialisation au dessus de $X \approx_e = ({}_G)/P$ (où $P$ est l'objet de ${}_G$ “torseur universel sous $G$ ”). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se trouve que dans celle-ci, les 3-flèches sont triviales (i.e. si source = but, ce sont des identités) – cela ne fait qu'exprimer $\mathrm{H}^0({}_G/X,N) = \mathtt{0}$ (i.e. $\mathrm{H}^0({}_G,N) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X,N)$ injectif …). Donc la 3-catégorie peut être regardée comme une 2-catégorie – et “c’est” celle des Gr-champs sur $X$ épinglés par $G, N$. Si on veut localiser sur $X$, et décrire le 2-*champs* de Picard sur $X$ des champs de Picard (sur des objets variables de $X$) épinglés par $G$, $N$, on trouve qu’il est exprimé par le complexe

$$\tau_{\leq 2}(\mathrm{R}\, p_{G*}(N \longrightarrow \mathrm{R}\, q_{G*} \overbrace{C(q_G^* N)}^{\text{résolution injective}})),$$

où $p_G : {}_G \longrightarrow X$ et $q_G : {}_e \approx X \simeq ({}_G)_P \longrightarrow {}_G$. Toutes ces descriptions étant compatibles avec des variations de $G, N, X$, cela donne en principe une description de la 2-catégorie des Gr-champs, avec $X$, $G$, $N$ variables…

## Lettre à L. Breen 5.2.1975

Villecun 5.2.1975

Cher Breen,

…Pour tout le reste de ta lettre, elle mériterait un lecteur plus averti, aussi, pour qu'elle ne soit pas entièrement perdue au monde, je vais l'envoyer à Illusie ! J'ai néanmoins constaté, avec intérêt, ton intérêt â demi refoulé pour des 2-catégories de Picard, $n$-catégories et autre faune de ce genre, et ton espoir que je te prouverai peut-être que ces animaux sont tout à fait indispensables pour faire des maths sérieuses dans telle circonstance. J'ai bien peur que cet espoir ne soit déçu, je crois que jusqu'à maintenant on a toujours pu d'en tirer en éludant de tels objets et l'engrenage dans lequel ils pourraient nous entraîner. Est-ce nécessairement une raison pour continuer à les éluder ? Les situations où on a l'impression "d'éluder" en effet me semblent en tous cas devenir toujours plus nombreuses - et si on s'abstenait de tirer une situation complexe et chargée de mystère au clair, chaque fois qu'on ne serait pas *forcé* de le faire pour des raisons techniques provenant de la math déjà faite, - il y aurait sans doute beaucoup de parties des maths aujourd'hui reputées "sérieusses" qui n'auraient jamais été developpées (Il n'est pas dit non plus que le mode s'en trouverait plus mal…). Ton commentaire (que j'ai également entendu chez Deligne) que la classification d'objets géométriques relativement merdiques se réduit finalement à des invariants cohomologiques essentiellement "bien connus" et relativement simples n'est pas non plus convainquant; n'est ce pas négliger la différence entre la *compréhension d'un objet géométrique*, et la détermination de sa "classe à isomorphisme (ou équivalence) près" ?

Tu me demandes des exemples "convainquants" de 2-catégories de Picard. Voici quelques exemples, en vrac (je ne sais s'ils seraient convainquants !):

1) Si $L$ est un lien[20] de centre $Z$ sur le topos $X$, les *gerbes liées par* $Z$ forment une 2-catégorie de Picard stricte, représentée par le complexe ${}_X(Z)$ tronqué

[20]For the notion of a "lien" (or "tie"), which is one of the main ingredients of the non-commutative cohomology panoply of Giraud's theory, I refer to his books (Springer, Grundlehren 179, 1971). A *Picard category* is a groupoid endowed with an operation $\otimes$ together with associativity, unity and commutativity data for this operation, which make it resemble to a commutative

en degré 2, dont les objets de cohomologie non triviaux sont les $\mathrm{H}^i(X,Z)$, $0 \leq i \leq 2$. Les gerbes liées par $L$ forment un *pseudo-2-torseur* sous le gerbe précédente, qui est un 2-torseur (i.e. non vide) si et seule si une certaine obstruction dans $\mathrm{H}^3(X,Z)$ est nulle. Pour comprendre cette classe de notre point de vue, il y a lieu de passer aux 2-champs correspondants: le 2-champs de Picard strict des $Z$-gerbes sur des objets variables de $X$, et le 2-champ des $L$-gerbes sur des objets variables. Ce dernier est bel et bien un 2-torseur sous le champ précédent, or la classification de ces 2-torseurs (à 2-équivalence près) se fait par le $\mathrm{H}^3(X,Z)$, (tout comme les $Z$-$L$-gerbes peuvent être interprétées comme des torseurs sous la $Z$-$L$-champ de Picard strict des $Z$-torseurs, et sont classifiées par le $\mathrm{H}^2(X,Z)$). On voit déjà, bien sûr, poindre ici l'oreille de la 3-catégorie de Picard stricte des 2-gerbes liées par $Z$, ou (de façon équivalente) des 2-torseurs sous le 2-champ de Picard strict des $Z$-$L$-gerbes; cette 3-catégorie de Picard stricte étant décrite par ${}_X(Z)$ tronqué en dimension 3, ayant comme invariants de cohomologie non triviaux les $\mathrm{H}^i(X,Z)$ ($0 \leq i \leq 3$). Quant au 3-champ de Picard correspondant, il est décrit par une résolution injective de $Z$ tronqué en degré 3, alors que le 2-champ de Picard précédent se décrivait en tronquant en degré 2.

2) Si $M$ et $N$ sont deux faisceaux abéliens sur $X$, les *champs de Picard* (N.B. 1-champs !) *d'invariants $M$ et $N$* forment eux-même une 2-catégorie de Picard stricte, représentée sans doute par le complexe $(X(M),N)$[21] tronqué en de-

group. A *"Champ de Picard"* (or "Picard stack") is defined accordingly, by relativizing over an arbitrary space or topos (replacing the groupoid by a stack of groupoids over this topos). The necessary "general nonsense" on these notions is developed rather carefully in an exposé of Deligne in SGA 4 (SGA 4 XVIII 1.4). In this letter to Larry Breen, I am asuming "known" the notion of an $n$-stack (for $n = 3$ at any rate), and the corresponding notion of (strict) *Picard $n$-stack*, which should be describable (as was explained in Deligne's notes in the case $n = 1$) by an $n$-truncated chain complex in the category of abelian sheaves on $X$ (viewed mainly as an object of the relevant derived category). The "strictness" condition on usual Picard stacks refers to the restriction that the commutativity isomorphism within an object $L \otimes L'$, when $L = L'$, should reduce to the identity. It is assumed (without further explanation) that the condition carries over in a natural way to Picard $n$-stacks, in such a a way as to allow an interpretation of these by truncated objects in a suitable derived category, as hinted above.

[21] When $M$ is any abelian sheaf on a topos, the "MacLane resolution" $X(M)$ is a certain canonical

gré 2, dont les invariants de cohomologie non triviaux sont donc “le drôle de $\mathrm{Ext}^2$” de ma lettre à Deligne, et les honnêtes $\mathrm{Ext}^i(M,N)$ $(0 \leq i \leq 2)$. Les champs de Picard stricts forment une sous-2-catégorie de Picard pleine, représentée par $(M,N)$ tronqué en degré 2, d'invariants les $\mathrm{Ext}^i(M;N)$ $(0 \leq i \leq 2)$. Bien sûr, $\mathrm{Ext}^2$ donne les 0-objets à équivalence près, $\mathrm{Ext}^1$ les automorphismes à isomorphisme près de l'objet nul, $\mathrm{Ext}^0$ les automorphismes de l'automorphisme identique audit…Je n'ai pas réfléchi à une bonne interprétation géométrique de la $n$-catégorie de Picard associée à $(M,N)$ tronqué en degré $n$, et encore moins bien sûr pour $(X(M),N)$, mais sans doute il faut regarder dans la direction des $n$-champs de Picard.

3) Soit $G$ un Groupe sur $X$, opérant sur un faisceau abélien $N$. Les *champs en* Gr-*catégories sur X liés par* $(G,N)$ forment une 2-catégorie de Picard, dont les invariants sont $\mathrm{H}^3(\mathrm{B}_G\, mod X,N)$, $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}_G\, mod X,N)$ et $Z^1(G,N)$ (groupe des 1-cocycles de $G$ à coefficients dans $N$) - je te laisse le soin de deviner quel est le complexe qui le décrit ! J'ai écrit il y a quelques mois à Delignecf. LGD7874 à ce sujet, et l'ai prié de t'envoyer une copie de la lettre.

4) Soit $X$ un topos localement annelé, on peut considérer les *Algèbres d'Azumaya sur X* (i.e. les Algèbres localement isomorphes à une algèbre de matrices d'ordre $n$, $n \geq 1$) comme les objets d'une 2-catégorie de Picard, où la catégorie $\mathrm{Hom}(A,B)$, pour $A$ et $B$ des Algèbres d'Azumaya, est la catégorie des “trivialisations” de $A^\circ \otimes B$, i.e. des couples $(E,\varnothing)$, $E$ un Module localement libre et $\varnothing$ un isomorphisme $(E) \simeq A^\circ \otimes B$. Il faut travailler un peu pour définir les accouplements $\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C)$; l'opération $\otimes$ dans la 2-catégorie de Picard à construire est bien sûr le produit tensoriel d'Algèbres, et l'opération “puissance —1” est le passage à l'algèbre

left resolution of $M$ by sheaves of Z-modules which are “free”, and more specifically, which are finite direct sums of sheaves of the type $\mathrm{Z}^{(T)}$, where $T$ is any sheaf of the type $M^n$ (finite product of copies of $M$). This canonical construction was introduced by MacLane (for abelian groups), and gained new popularity in the French school of algebraic geometry and homological algebra in the late sixties, because it gives a very handy way to relate the $\mathrm{Ext}^i(M,N)$ invariants (when $N$ is another abelian sheaf on $X$) to the “spacial” cohomology of $M$ (i.e. of the induced topos $X_{/M}$) with coefficients in $N$.

opposée. On vérifie qu'en associant à toute Algèbre d'Azumaya la 1-gerbe de ses trivialisations, on trouve un 2-⊗-foncteur de la 2-catégorie de Picard (dite "de Brauer") dans celle des 1-gerbes liées par $G_m$, qui est 2-fidèle. Les invariants de la première sont donc les groupes $\mathrm{H}^2(X, G_m)$, $\mathrm{H}^1(X, G_m)$ et $\mathrm{H}^0(X, G_m)$, où dans le premier terme l'indice  désigne le sous-groupe du $\mathrm{H}^2$ formé des classes de cohomologie provenant d'Algèbres d'Azumaya. On aurait envie de parler du 2-champ de Picard des Algèbres d'Azumaya sur des objets variables de $X$, mais c'est bien une 2-catégorie de Picard fibrée sur $X$, mais pas tout à fait un 2-champ (whatever that means), san doute - la condition de 2-recollement (whatever that means) ne doit pas être satisfaite - sinon il n'y aurait pas d'indice  au $\mathrm{H}^2$...

La considération des $n$-catégories de Picard strictes (qui s'imposent à nous pas à pas dans un contexte essentiellement "commutatif") me semblent la clef du passage de l'algèbre homologique ordinaire ("commutative"), en termes de complexes, à une algèbre homologique non commutative, du fait qu'elles donnent une interprétation géométrique correcte des "complexes tronqués à l'ordre $n$" (en tant qui objets de catégories dérivées), donc, essentiellement (par passage à la limite sur $n$) des complexes tout courts. L'idée naïve qui se présente est alors que les "complexes non commutatifs" (qui seraient les objets-fantômes d'une algèbre homologique non commutative) sont peut-être ce qui reste des $n$-catégories de Picard (strictes) quand on oublie leur caractère additif, i.e. leur structure de Picard - c'est à dire qu'on ne retient que la $n$-catégorie ! (Quand on se place sur un topos $X$, on s'intéresse donc aux $n$-champs sur $X$...) A vrai dire, cette idée est venue d'abord d'une autre direction, quand il s'est agi en géométrie algébrique de démontrer des *théorèmes de Lefschetz* à coefficients discrets en cohomologie étale, dans le cas d'une variété projective disons et de toute section hyperplane, ou d'une variété quasi-projective et de presque toute section hyperplane (pour ne mentionner que le cas global le plus simple), sous les hypothèses de profondeur cohomologique "le plus naturelles" (en fait, essentiellement des conditions nécessaires et suffisantes de validité du dit théorème). Dans le cas commutatif, les techniques de dualité nous suggèrent très clairement quels sont les meilleurs énoncés possibles, cf. l'exposé de Mme Raynaud dans SGA 2SGA2. Mais ces techniques ne valent qu'en se restreignant à des coefficients premiers aux caractéristiques, alors que des démonstrations directes plus géométriques (développées dans SGA 2 avant le développement du formalisme de la cohomologie étale) donnaient des résultats très voisins pour le $\mathrm{H}^0$ et le $\mathrm{H}^1$ (ou le $\pi_0$ et le $\pi_1$, si on préfère) sans telles restrictions, du moins dans le cas propre (i.e. projectif, au lien de quasi-projectif). En fait, ce sont les "résultats les meilleurs possibles" eux-mêmes, énoncés comme conjectures dans SGA 2 dans l'exposé cité de Mme Raynaud, qui sont démontres ultérieurement par elle dans sa thèseRaynaud1975. Ce qui est remarquable de notre point de vue, c'est que les énoncés les plus forts se présentent le plus naturellement sous forme d'énoncés sur des *1-champs* sur le site étale de la variété algébrique considérée - la notion de "profondeur $\geq i$ (pour $i = 1, 2, 3$) s'énonçant aussi le plus naturellement en termes de champs. Non seulement cela, mais alors même qu'on voudrait ignorer la notion technique de champ et travailler exclusivement en termes de $\mathrm{H}^0$ et $\mathrm{H}^1$ en utilisant à bloc le formalisme cohomologique non commutatif de Giraud, pour démontrer disons un théorème de bijectivité $\pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$ (ce qui est le résultat le plus profond établi dans la thèse de Mme Raynaud), il semble bien qu'on n'y arrive pas, faute à ce formalisme d'avoir la souplesse nécessaire. En fait, il faut utiliser comme ingrédients techniques, de façon essentielle, les trois théorèmes suivantes directement pour les 1-champs "de torsion" (i.e. où les faisceaux en groupes d'automorphismes sont de ind-torsion): a) théorème de changement de base pour une morphisme propre, b) théorème de changement de base par un morphisme lisse c) théorème de "propreté cohomologique générique" pour un morphisme de type fini $f : X \longrightarrow S$, $S$ intègre (disant que l'on peut trouver dans $S$ un ouvert $U \neq \varnothing$ tel que pour *tout* changement de base $S' \longrightarrow S$ se factorisant par $u$, la formule de changement de base est vraie). (Pour b) et c), il faut faire des hypothèses que les faisceaux d'automorphismes sont premiers aux charactéristiques, et dans c) ne servent que dans la version "générique" du théorème de Lefschetz). C'est avec en vue de telles applications que Giraud a pris la peine dans son bouquin (si je ne me trompe) de démontrer a), b) (et c) ?) dans le contexte des 1-champs et de leurs images directes et inverses. Mais du même coup il dévient clair que le contexte "naturel" des théorèmes de changement de base en cohomologie étale, des théorèmes du type de Lefschetz (dits "faibles") sur les "sections hyperplanes", tout comme de la notion de profondeur qui y joue un rôle crucial, doit être celui des $n$-champs. Et que le développement hypothétique de ce contexte ne risque pas de se réduire à une jonglerie purement formelle et absolument bordélique avec du "general nonsense", mais qu'on se trouvera aussitôt confronté à des tests "d'utilisabilité" aussi sérieux que la démonstration des théorèmes de changement de base et ceux du type de Lefschetz (qui même dans le contexte commutatif ne sont pas piqués de vers...). [ ] pour variantes analytiques complexes etc.

Je ne sais si ces commentaires te "passent par dessus la tête" à ton tour, ni si elles te donnent l'impression qu'il aurait peut-être des choses intéressantes à tirer au clair. Si cela t'intéresse, je pourrais expliciter sous forme un peu plus systématique quelques ingrédients d'une hypothétique algèbre homologique non commutative et les liens de celle-ci à l'algèbre homologique commutative. Plus mystérieux pour moi (et pour cause, vu mon ignorance en homotopie) seraient les relations entre celle-là et l'algèbre homotopique, i.e. les structures semi-simpliciales, et je n'ai que des commentaires assez vagues à faire en ce sens (*). Par ailleurs, je te rappelle que même l'algèbre homologique commutative n'est pas, il s'en faut, dans un état satisfaisant, pour autant que je sache, vu qu'on ne sait[22] toujours pas quelle est la "bonne" notion de catégorie triangulée. Or il me semble bien clair que ce n'est pas une question purement académique - même si on a pu se passer de le savoir jusqu'ici (en se bornant comme Monsieur Jourdain à "faire de la prose sans le savoir" - en travaillant sur des catégories de complexes, éventuellement filtrés, sans trop se demander quelles structures il y a sur ces catégories...).

Bien cordialement à toi

(*) P.S. Réflexion faite, j'ai quand même envie de te mettre un peu en appétit, en faisant ces "quelques commentaires assez vagues". Il s'agit du yoga qu'une (petite) $n$-catégorie ou groupoïdes (à $n$-équivalence près) "est essentiellement la même chose" qu'une ensemble semi-simplicial pris à homotopie près et où on néglige les $\pi_i$ pour $n+1 \geq i$ (où, si tu préfères, "où on a tué les groupes d'homotopie

[22] Reflecting on the "right" version of the provisional Verdier notion of a triangulated category (which was supposed to describe adequately the relevant internal structure of the derived categories of abelian categories) is part of my present program for the notes on Pursuing stacks, and will be the main task in one of the chapters of volume two. For some indications along these lines, see also section 69 (sketching the basic notion of a "*derivator*").

en dimension $\geq n+1$). Voici des éléments heuristiques pour ce yoga. Si $K_\bullet$ est un ensemble simplicial (il peut être prudent de le prendre de Kan) on lui associe une $n$-catégorie $C_n(K_\bullet)$, dont les 0-objets sont les 0-simplexes, les 1-objets sont les chemins (ou homotopies) entre 0-simplexes, les 2-objets sont les homotopies entre chemins (à extrémités fixées) etc. Pour les $n$-objets, cependant, on ne prend pas les homotopies entre homotopies de fourbis, mais classes d'équivalence de homotopies (modulo la relation d'homotopie) entre homotopies. La composition des $i$-objets ($i \geq 1$) se définit de façon évidente, on notera qu'elle n'est pas strictement associative, mais associative modulo homotopie. Donc la $n$-catégorie qu'on obtient n'est pas "stricte" - et on prévoit pas mal d'emmerdement pour définir de façon raisonnable une $n$-catégorie pas stricte (dans la description des compatibilités pour les "données d'associativité). La mise sur pied du yoga qui suit pourrait constituer un fil d'Ariadne pour la définition en forme des $n$-catégories (pas strictes), les $n$-foncteurs entre elles (pas non plus stricts, et pour cause), les $n$-équivalences etc, au même titre que le yoga initial 'ùne $n$-catégorie est une catégorie ou les Hom et leurs accouplements de composition sont des $(n-1)$-catégories et des accouplements entre telles". Cette $n$-catégorie $C_n(K_\bullet)$ dépend fonctoriellement de $K_\bullet$, tout morphisme simplicial $K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ définit un $n$-foncteur $C_n(K_\bullet \longrightarrow C_n(K'_\bullet))$ ; en fait, cela doit en dépendre même $n$-fonctoriellement, vu qu'on voit (en s'inspirant de ce qui précède et l'application à des ensembles semi-simpliciaux de la forme $\mathrm{Hom}_\bullet(K_\bullet, K'_\bullet)$) que les ensembles semi-simpliciaux forment eux-mêmes les 0-objets d'une $n$-catégorie, quel que soit $n\ldots$

En fait, $C_n(K_\bullet)$ est un $n$-groupoïde, i.e. une $n$-catégorie où toute $i$-flèche $(1 \leq i \leq n)$ ($= i$-objet) est une "équivalence" i.e. admet un quasi-inverse (donc un inverse si la $n$-catégorie est "réduite"). Si $C$ est une telle $n$-catégorie i.e. un $n$-groupoïde, et $X$ un 0-objet de $C$, il s'impose de désigner par $\pi_i(C,x)$ ($0 \leq i \leq n$) successivement : l'ensemble des classes de 0-objets à équivalence près de 1-objets (ou 1-flèches) $x \longrightarrow x$ (c'est un groupe, pas nécessairement commutatif), l'ensemble des classes modulo équivalence des 2-flèches $1_x \longrightarrow 1_x$, où $1_x$ est la 1-flèche identique de $x$ (c'est un groupe commutatif $\pi_2(C,x)$, ainsi que les groupes qui vont suivre), l'ensemble des classes modulo équivalence de 3-flèches $1_{1_x} \longrightarrow 1_{1_x}$, etc. Ces groupes forment, comme de juste, des "systèmes locaux" sur l'ensemble des $0$-objets de $C$, et modulo le grain de sel habituel, les $\pi_i(C,x)$ ne dépendent que de la "composante connexe" du $0$-objet $x$ i.e. de sa classe modulo équivalence de $0$-objets. Ceci dit, si $C$ est de la forme $C_n(K_\bullet)$, il résulte pratiquement des définitions que l'on a des isomorphismes canoniques $\pi_i(K_\bullet,x) \simeq \pi_i(C_n(K_\bullet))$ pour $0 \leq i \leq n$, qui pour $x$ variable peuvent s'interpréter comme des isomorphismes de systèmes locaux. Il s'ensuit que pour une application semi-simplicial $f : K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$, le $n$-foncteur correspondant $C_n(K_\bullet) \longrightarrow C_n(K'_\bullet)$ est une $n$-équivalence si et seule si $f$ induit un isomorphisme sur les $\pi_0$ et sur les $\pi_i$ en tout point ($1 \leq i \leq n$). On serait plus heureux de pouvoir dire à la place "et de plus un homomorphisme surjectif pour $i = n+1$, car c'est, il me semble, cela qu'il faudrait pour espérer pouvoir conclure que la catégorie localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, obtenue en inversant les flèches "qui induisent des isomorphismes sur les $\pi_i$ pour $0 \leq i \leq n$ (ou encore, "en négligeant" les ensembles semi-simpliciaux $n$-connexes), est équivalente à la catégorie localisée de la catégorie des $n$-catégories, où on rend inversibles les $n$-équivalences ? Quoi qu'il en soit, ces petites bavures devraient disparaître lorsqu'on "stabilise" en faisant augmenter $n$. A ce propos, on voit que le foncteur "troncature en dimension $n$" de la théorie homotopique (consistant à tuer les groupes d'homotopie à partir de la dimension $n+1$) s'interprète dans la langage des $n$-catégories par l'opération faisant passer d'une $N$-catégorie ($N > n$) à une $n$-catégorie, en conservant tels quels les $i$-objets ($0 \leq i \leq n-1$) et leur composition ($1 \leq i \leq n-1$), et en remplaçant les $n$-objets par les classes de $n$-objets "'a équivalence près", avec la composition obtenue par passage au quotient. De même, le foncteur d'inclusion évident en théorie homotopique, consistant à regarder un ensemble semi-simplicial "où on a négligé les $\pi_i$ pour $i \geq n+1$" comme un ensemble semi-simplicial (dans la catégorie homotopique) qui se trouve avoir des $\pi_i$ nuls pour $i \geq n+1$, se traduit par le foncteur allant des $n$-catégories vers les $N$-catégories, obtenue en ajoutant à une $n$-catégorie des $i$-flèches ($n+1 \leq i \leq N$) identiques exclusivement. (Ainsi, un ensemble est regardé comme une catégorie "discrète", une catégorie comme une 2-catégorie où les $\mathrm{Hom}(A,B)$, $A$ et $B$ des $0$-objets, sont des catégories discrètes, etc...).

Bien entendu, rien n'empêche de considérer aussi la notion de $\infty$-catégorie, à laquelle celle de $n$-catégorie est comme la notion d'ensemble semi-simplicial tronqué à celle d'ensemble semi-simplicial. Sauf erreur, la localisée de la catégorie des $\infty$-catégories, pour les flèches de $\infty$-équivalence, est équivalente à "la catégorie homotopique", localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, ou du moins une sorte de complétée de celle-là. Dans cette optique, le tapis consistant à interpréter une $\infty$-catégorie de Picard stricte (i.e. quelque chose qui ressemble à un groupe abélien de la catégorie des $\infty$-catégories) comme donnée (à $\infty$.équivalence près) par un complexe de chaînes regardé comme un objet d'une catégorie dérivée, est à relier au tapis de Dold-Puppe, interprétant ces derniers comme des groupes abéliens semi-simpliciaux.

Pour se donner confiance dans ce yoga général, on peut essayer d'interpréter en termes de $n$-catégories ou $\infty$-catégories des constructions familières en homotopie. Ainsi, l'espace des lacets $\Omega(K_\bullet, x)$ correspond manifestement à la $(n-1)$-catégorie $\mathrm{Hom}(x,x)$ formée des $i$-flèches de $C$ $(1 \leq i \leq n)$ dont la $0$-origine et la $0$-extrémité sont $x$, réindexées en les appelant $(i-1)$-flèches. Je n'aperçois pas à vue de nez un joli candidat pour la suspension en termes de $n$-catégories. Par contre le $\mathrm{Hom}_\bullet(K_\bullet, K'_\bullet)$ doit correspondre au $\mathrm{Hom}(C, C')$, qui est une $n$-catégorie quand $C$, $C'$ en sont. La "fibre homotopique" d'une application semi-simpliciale $f : K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ (transformée d'abord, pour les besoins de la cause, en une fibration de Serre par le procédé bien connu de Serre-Cartan) correspond sans doute à l'opération bien familière de produit $(n+1)$-fibré (du moins les cas $n = 0, 1$ sont bien familiers !) $C \times_{C'} C''$ pour des $n$-foncteurs $c \longrightarrow C'$ et $C'' \longrightarrow C'$, dans le cas où $C''$ est la $n$-catégorie ponctuelle, donc la donnée de $C'' \longrightarrow C'$ correspond à la donnée d'un $0$-objet de $C'$. Les espaces $K(\pi, n)$ ont une interprétation évidente comme $n$-gerbes liées par $\pi$. Enfin, on voit aussi poindre l'analogue du dévissage de Postnikoff d'un ensemble semi-simplicial - mais la façon dont je l'entrevois (vue ma prédilection pour les topos) passe par la notion de topos classifiant d'un $n$-groupoïde (généralisant de façon évidente le topos classifiant d'un groupe). En termes de cette notion, on peut, il me semble, interpréter un $n$-groupoïde en termes d'un $(n-1)$-groupoïde (savoir son tronqué), *muni* d'une $n$-gerbe sur le topos classifiant, liée par $\pi_n$ ("fordu" bien sûr par l'action du $\pi_1$...).

Bien sûr, il faut relativiser encore tout le yoga qu'on vient de décrire, au dessus d'un topos quelconque $X$. Il s'agirait donc de mettre en relation et d'identifier, dans un certaine mesure, d'une part l'algèbre homotopique sur $X$, d'autre part l'algèbre catégorique sur $X$ construite en termes de la notion de $n$-champ en groupoïdes ($n \geq 0$ fini ou infini). On espère que la notion d'image inverse de faisceau semi-simplicial par un morphisme de topos $f : X \longrightarrow X'$ (qui est évidente) correspond à la notion évidente d'image directe de $n$-champs; et inversement, la notion évidente d'image directe de $n$-champs par $f$ devrait correspondre à une notion plus subtile d'image directe $_*(K_\bullet)$ d'un faisceau semi-simplicial, construit sansa doute dans l'esprit des foncteurs dérivés à partir de la notion naïve (mais on hésite s'il faut mettre $_*$ ou $_*$)... Les dévissages à la Postnikoff doivent avoir encore une interprétation remarquablement simple en termes de $n$-champs. Comparer à la remarque de Giraud qu'un 1-champ en groupoïdes sur $X$ peut s'identifier au couple d'un faisceau $\pi_0$ sur $X$, et d'une 1-gerbe sur le topos induit $X_{/\pi_0}$ (dont le lien, comme de juste, devrait être note $\pi_1$ !). D'ailleurs, dans le cas des 1-champs en groupoïdes, la traduction de ces animaux en termes de topos classifiants au dessus de $X$ est, je crois, développé en long et en large dans Giraud (il parle, si je me rappelle bien, d'"extensions" du topos $X$). L'extension (si j'ose dire) de ce tapis aux $n$-champs ne devrait pas poser de problème.

Remords : tâchant de préciser heuristiquement la notion de topos classifiant d'un $n$-champ en groupoïdes (ou plus particulièrement, d'un $n$-groupoïde) pour $n \geq 2$, je vois que je n'y arrive pas à vue de nez. (Bien sûr, il suffirait (procédant de proche en proche) de savoir définir un topos classifiant raisonnable pour une $n$-*gerbe*, liée par un faisceau abélien $\pi_n$). Donc je ne sais comment décrire le dévissage de Postnikoff en termes de $n$-champs, sauf pour $n \leq 2$. Ceci est lié à la question d'une description directe des groupes de cohomologie d'un $n$-groupoïde $C$ (ou d'un $n$-champ), à coefficients disons dans un système local commutatif, de façon que pour $C = C_n(K_\bullet)$, $K_\bullet$ un ensemble semi-simplicial dont les $\pi_i$ pour $i \geq n+1$ sont nuls, on trouve les groupes de cohomologie correspondants de $K_\bullet$. Peut-on le faire en associant à $C$, de façon convenable, un ensemble semi-simplicial "nerf" de $C$ ?

Bien entendu, si on réussit à définir un topos classifiant pour $C$, celui-ci devrait être homotope à $K_\bullet$ ci-dessus, donc avoir les mêmes invariants homotopiques $\pi_i$ et cohomologiques $H^i$ ; itou pour les champs. La définition habituelle du topos classifiant, dans le cas $n = 1$, a bien cette vertu. Cas particulier typique de problème de la définition du topos classifiant : pour $\pi$ un groupe commutatif, trouver un topos canonique (fonctoriel en $\pi$ bien sûr...) ayant le type d'homotopie de $K(\pi, n)$, et qui généralise la définition du topos classifiant pour $n = 1$ (topos des ensembles où $\pi$ opère). On frémit à l'idée que les topos pourraient ne pas faire l'affaire, et qu'il y faille des "$n$-topos" !! (J'espère bien que ces animaux n'existent pas...)

La théorie "d'algèbre homologique non commutative" que j'essaie de suggérer pourrait se définir, vaguement, comme l'étude parallèle des notions suivantes et de leurs relations des notions suivantes et de leurs relations multiples: a) espaces topologiques, topos, b) ensembles semi-simpliciaux, faisceaux semi-simpliciaux etc. c) $n$-catégories (notamment $n$-groupoïdes), $n$-champs (notament $n$-champs en groupoïdes) etc. d) complexes de groupes abéliens, de faisceaux abéliens. (Les "etc" réfèrent surtout aux structures supplémentaires qu'on peut envisager sur les objets du type envisagé...). C'est donc de l'algèbre avec la présence constante de motivations provenant de l'intuition topologique. Si une telle théorie devait voir le jour, il lui faudrait bien un nom, je me demande si "algèbre topologique" ne serait pas le plus adéquat ("algèbre homologique non commutative" ne peut guère aller à la longue, pour des raisons évidentes). Ce qui est aujourd'hui parfois désigné sous ce [] n'est guère qu'un bric à brac de notions (telles que anneau topologique, corps topologique, groupe topologique etc) qui ne forment guère un corps de doctrine cohérent - il ne s'impose donc pas que cela accapare un nom qui servirait mieux d'autres usages. (Comparer le nouvel usage du terme "géométrie analytique" introduit par Serre, et qui ne semble guère avoir rencontré de résistance.)

Re-salut, et au plaisir de te lire

## Lettre à L. Breen 17.2.1975

Villecun 17.2.1975

Cher Breen,

Encore un “afterthought” à une lettre-fleuve sur le yoga homotopique. Comme tu sais sans doute, à un topos $X$ on associe canoniquement un pro-ensemble simplicial, donc un “pro-type d’homotopie” en un sens convenable. Dans le cas où $X$ est "localement homotopiquement trivial", le pro-objet associé est essentiellement constant en tant que pro-objet dans la catégorie homotopique, donc $X$ définit un objet de la catégorie homotopique usuelle, qui est son "type d’homotopie". De même, si $X$ est “localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$”, il définit un type d’homotopie ordinaire “tronqué en dim $\leq n$” - construction familière pour $i = 0$ ou 1, même à des gens comme moi qui ne connaissent guère l’homotopie !

Ces constructions sont fonctorielles en $X$. D’ailleurs, si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de topos, Artin-Mazur ont donné une condition nécéssaire et suffisante *cohomologique* pour que ce soit une "équivalence d’homotopie en dim $\leq n$" : c’est que $\mathrm{H}^i(Y,F)\mathrm{H}^i(X,f^*(F))$ pour $i \leq n$, et tout faisceau de groupes *localement constant* $F$ sur $Y$, en se restreignant de plus à $i \leq 1$ dans le cas non commutatif. Ce critère, en termes de $n$-gerbes “localement constantes” $F$ sur $Y$, s’interprète par la condition que $F(Y) \longrightarrow F(X)$ est une $n$-équivalence pour tout tel $F$ et $i \leq n$. Il est certainement vrai que ceci équivaut encore au critère suivant

(A) Pour tout $n$-champ “localement contant” $F$ sur $Y$, le $n$-foncteur $F(Y) \longrightarrow f^*(F)(X)$ est une $n$-équivalence;

ou encore à

(B) Le $n$-foncteur $F \longrightarrow f^*(F)$ allant de la $n$-catégorie des $(n-1)$-champs localement constants sur $Y$ dans celle des $(n-1)$-champs localement constants sur $X$, est une $n$-équivalence.

En d’autres termes, les constructions sur un topos $X$ qu’on peut faire en termes de $(n-1)$-champs *localement* constants ne dépendent que de son "(pro)-type d'homotopie $n$-tronquée", et le définissent. Dans le cas où $X$ est localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, donc définit un type d'homotopie $n$-tronqué ordinaire, on peut interpréter ce dernier comme un $n$-groupoïde $C_n$, (défini à $n$-équivalence près). En termes de $C_n$, les $(n-1)$-champs localement constants sur $X$ doivent s'identifier aux $n$-foncteurs de la $n$-catégorie $C_n$ dans la $n$-catégorie $(n-1)$— de toutes les $(n-1)$-catégories. Dans le cas $n = 1$ ceci n'est autre que la théorie de Poincaré de la classification des revêtements de $X$ en termes du "groupoïde fondamental" $C_1$ de $X$. Par extension, $C_n$ mérite le nom de *$n$-groupoïde fondamental de $X$*, que je propose de noter $\Pi_n(X)$. Sa connaissance induite donc celle des $\pi_i(X)$ $(0 \geq i \geq n)$ et des invariants de Postnikoff de tous les ordres jusqu'à $\mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n-1}(X), \pi_n)$.

Dans le cas d'un topos $X$ quelconque, pas nécessairement localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, on espère pouvoir interpréter les $(n-1)$-champs localement constants sur $X$ en termes d'un $\Pi_n(X)$ qui sera un pro-n-groupoïde. Ça a été fait en tous cas, plus ou moins, pour $n = 1$ (du moins pour $X$ connexe); le cas où $X$ est le topos étale d'un schéma est traité in extenso dans SGA 3SGA3, à propos de la classification des tores sur une base quelconque.

Dans le cas $n = 1$, on sait qu'on récupère (à équivalence près) le 1-groupoïde $C_1$ à partir de la 1-catégorie $\mathrm{Hom}(C_1, \mathrm{Ens})$ de ces foncteurs dans $\mathrm{Ens} = 0$— (i.e. des "systèmes locaux" sur $C_1$ qui est un topos, dit "multigaloisien") comme la catégorie des "foncteurs fibres" sur le dit topos, i.e. la catégorie opposée à la catégorie des points de ce topos (lequel n'est autre que le *topos classifiant* de $C_1$). Pour préciser pour $n$ quelconque la façon dont le $n$-type d'homotopie d'un topos $X$ (supposé localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, pour simplifier), i.e. son $n$-groupoïde fondamental $C_n$, s'exprime en termes de la $n$-catégorie des "$(n-1)$-systèmes locaux sur $X$" i.e. des $(n-1)$-champs localement constants sur $X$, et par là élucider complètement l'énoncé hypothétique $(B)$ ci-dessus, il faudrait donc expliciter comment un $n$-groupoïde $C_n$ se récupère, à $n$-équivalence près, par la connaissance de la $n$-catégorie $C_n = n - \mathrm{Hom}(C_n, (n-1)$—$)$ des $(n-1)$-systèmes locaux sur $C_n$. On aurait envie de dire que $C_n$ est la catégorie des "$n$-foncteurs fibres" sur $C_n$, i.e. des $n$-foncteurs $C_n \longrightarrow (n-1)$— ayant certaines propriétés d'exactitude (pour $n = 1$, c'était la condition d'être les foncteurs image inverse pour un morphisme de topos, i.e. de commuter aux $\varprojlim$ quelconques et aux $\varinjlim$ finies ...) C'est ici que se matérialise la peur, exprimée dans ma précédente lettre, qu'on finisse par tomber sur la notion de $n$-topos et morphismes de tels ! $C_n$ serait un topos (appelé le "$n$-topos classifiant du $n$-groupoïde $C_n$), $(n-1)$— serait le $n$-topos "ponctuel" type, et $C_n$ d'interprète modulo $n$-équivalence comme la $n$-catégorie des "$n$-points" du $n$-topos classifiant $C_n$. Brr !

Si on espère encore pouvoir définir un bon vieux 1-topos classifiant pour un $n$-groupoïde $C_n$, comme solution d'un problème universel, je ne vois guère que le problème universel suivant : pour tout topos $T$, considérons $\mathrm{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$. C'est une $n$-catégorie, mais prenons en la 1-catégorie tronquée $\tau_1\mathrm{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$. Pour $T$ variable, on voudrait 2-représenter le 2-foncteur contravariant $\mathrm{Top}^\circ \longrightarrow 1-$ par un topos classifiant $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{C_n}$, donc trouver un $\Pi_n(\mathrm{B}) \xrightarrow{\varphi} C_n$ 2-universel en le sens que pour tout $T$, le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(T, \mathrm{B}) \xrightarrow{u \mapsto \varphi \circ \Pi_n(u)} \tau_1 \mathrm{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$$

soit une équivalence. Pour $n=1$ on sait que le topos classifiant de $C_1$ au sens usuel fait l'affaire, mais pour $n=2$ déjà, je doute que ce problème universel ait une solution. C'est peut-être lié au fait que le "théorème de Van Kampen", qu'on peut exprimer en disant que le 2-foncteur $T \longrightarrow \Pi_1(T)$ des topos localement 1-connexes vers les groupoïdes transforme (à 1-équivalence près) sommes amalgamées (et plus généralement commute aux 2-limites inductives), n'est sans doute plus vrai pour le $\Pi_2(T)$. Ainsi, si $T$ est un espace topologique réunion de deux fermés $T_1$ et $T_2$, il n'est sans doute plus vrai que la donnée d'un 1-champ localement constant sur $T$ "équivaut à" la donnée d'un 1-champ localement constant $F_i$ sur $T_i$ $(i=1,2)$ et d'une équivalence entre les restrictions de $F_1$ et $F_2$ à $T_1 \cup T_2$ (alors que l'énoncé analogue en termes de 0-champs, i.e. de revêtements, est évidemment correct).

L'énoncé (B) plus haut rend clair comment expliciter la cohomologie d'un $n$-groupoïde $C_n$. Si $C_n = \Pi_n(X)$, et si $F$ est un $(n-1)$-champ localement constant sur $X$, $e^X_{n-1}$ est le $(n-1)$-champ "final", on a une $(n-1)$-équivalence de $(n-1)$-catégories

$$\Gamma_X(F) = F(X) \simeq \mathrm{Hom}(e^X_{n-1}, F)$$

qui montre que le foncteur $\Gamma_X$ "intégration sur $X$" sur les $(n-1)$-champs localement constants, qui inclut la cohomologie (non commutative) localement constante de $X$ en dim $\leq n-1$, s'interprète en termes de "$(n-1)$-systèmes locaux" sur le groupoïde fondamental comme un $\mathrm{Hom}(e_{n-1}^{C_n}, F)$ où maintenant $F$ est interprété comme un $n$-foncteur

$$C_n \xrightarrow{F} (n-1)\text{—}$$

et $e_{n-1}^{C_n}$ est le $n$-foncteur constant sur $C_n$, de valeur la $(n-1)$-catégorie finale.

Pour interpréter ceci en notation cohomologique, il faut que j'ajoute, comme "remords" à la lettre précédente, l'interprétation explicite de la cohomologie non commutative sur un topos $X$, en termes d'intégration de $n$-champs sur $X$. Soit $F$ un $n$-champ de Picard strict sur $X$, il est donc défini par un complexe de cochaines $L'$ sur $X$

$$0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow L^n \longrightarrow 0$$

concentré en degrés $0 \leq i \leq n$ (défini à isomorphisme unique près dans la catégorie dérivée de $\mathrm{Ab}(X)$). Ceci dit, les $\mathrm{H}^i(X, L')$ (hypercohomologie) *pour* $0 \leq i \leq n$ s'interprètent comme $\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{n-i}\Gamma_X(F)$.

Si on s'intéresse à tous les $\mathrm{H}^i$ (pas seulement pour $i \leq n$) on doit, pour tout $N \geq n$, regarder $L'$ comme un complexe concentré en degrés $0 \leq i \leq N$ (en prolongeant $L'$ par des $0$ à droite).Le $N$-champ de Picard strict correspondant n'est plus $F$ mais $C^{N-n}F$, où $C$ est le foncteur "espace classifiant", s'interprétant sur les $n$-catégories de Picard strictes comme l'opération consistant à "translater" les $i$-objets en des $(i+1)$-objets, et à rajouter un unique $0$-objet; il se prolonge aux $n$-champs de Picard "de façon évidente", on espère, de façon à commuter aux opérations d'image inverse de $n$-champs. On aura donc pour $i \leq N$

$$\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad i \leq N.$$

Ceci posé, il s'impose, pour tout $n$-champ de Picard strict $F$ sur $X$, de poser

$$\boxed{\mathrm{H}^i(X, F) = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad \text{si} \quad N \geq i, n}$$

ce qui ne dépend pas du choix de l'entier $N \geq Sup(i, n)$ [**NB** On a un morphisme canonique de $(n-1)$-groupoïdes,

$$C(\Gamma_X F) \longrightarrow \Gamma_X(CF),$$

comme le montrent les constructions évidentes en termes de complexes de cochaines, et on voit de même que celui-ci induit des isomorphismes pour les $\pi_i$ pour $1 \leq i \leq n+1$.]

**NB** On voit en passant que pour un $n$-champ en groupoïdes $F$ sur $X$, si on se borne à vouloir définir les $\mathrm{H}^i(X,F)$ pour $0 \leq i \leq n$, on n'a pas besoin sur $F$ d'une structure de Picard, car il suffit de poser

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n-i}(\Gamma_X(F)) \quad 0 \leq i \leq n.$$

Si d'autre part $F$ est un $n$-Gr-champ (i.e. muni d'une loi de composition $F \times F \longrightarrow F$ ayant les propriétés formelles d'une loi de groupe) le $(n+1)$-"champ classifiant" est défini, et on peut définir $\mathrm{H}^i(X,F)$ pour $i \leq n+1$ par

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n+1-i}(\Gamma_X(CF))$$

en particulier

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0(\Gamma_X(CF)) = \text{ sections de } CF \text{ à équivalence près.}$$

Mais on ne peut former $CCF = C^2F$ et définir $\mathrm{H}^{n+2}(X,F)$, semble-t-il *que* si $CF$ est lui-même un Gr-$(n+1)$-champ, ce qui ne sera sans doute le cas que si $F$ est un $n$-champ de Picard strict...

Venons en maintenant au cas où $F$ est un $n$-champ *localement constant* sur $X$, donc défini par un $(n+1)$-foncteur

$$C_{n+1} \xrightarrow{F} n-. \text{ de Picard strictes.}$$

Alors, posant pour $0 \leq i \leq n$

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) = \pi_{n-1}(\mathrm{Hom}(e_n^{C_{n+1}},F)),$$

"on a fait ce qu'il fallait" pour que l'on ait un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) \simeq \mathrm{H}^i(X,F),$$

(valable en fait sans structure de Picard sur $F$...). Il s'impose, pour tout $\infty$-groupoïde $C$ et tout $(n+1)$-foncteur

$$C \xrightarrow{F} n-. \text{ de Picard strictes.}$$

de définir les $\mathrm{H}^i(C,F)$, pour tout $i$, par

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{N-i}\mathrm{Hom}(e_N^C, C^{N-n}F)$$

où on choisit $N \geq Sup(i,n)$. Si $F$ n'a qu'une Gr-structure (pas nécessairement de Picard) on peut définir encore les $\mathrm{H}^i(C,F)$ pour $i \leq n+1$ par

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{n+1-i}\mathrm{Hom}(e_{n+1}^C, CF).$$

Dans le cas $C = C_{n+1} = \Pi_{n+1}(X)$, il doit être vrai encore (en vertu de (A) plus haut), que cet ensemble est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0\Gamma_X(CF)$ (c'est vrai et bien facile pour $n=0$). Décrire la flèche canonique entre les deux membres de

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) \simeq \mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n+1}X,F) \quad ?$$

Si on veut réexpliciter (A) et (B), en termes du yoga (C), on arrive à la situation suivante:

On a un $(n+1)$-foncteur entre $(n+1)$-groupoïdes

$$f_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow D_{n+1}$$

induisant par troncature un $n$-foncteur

$$f_n : C_n \longrightarrow D_n$$

On doit avoir alors:

(A') $f_n$ est une $n$-équivalence si et seule si le $n$-foncteur $\varphi \longrightarrow \varphi \circ f_n$

$$f_n^* : \mathrm{Hom}(D_n, (n-1)\text{—}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_n, (n-1)\text{—})$$

allant des $(n-1)$.systèmes locaux sur $D_n$ (ou $D_{n+1}$, c'est pareil) vers les $(n-1)$-systèmes locaux sur $C_n$, est une $n$-équivalence.

(B') $f_n$ est une $n$-équivalence si et seule si pour tout $n$-système local $F$ sur $D_{n+1}$,

$$F : D_{n+1} \longrightarrow n\text{—},$$

le $n$-foncteur induit par $f_{n+1}$

$$\underbrace{\mathrm{Hom}(e_n^{D_{n+1}}, F)}_{\Gamma_{D_{n+1}(F)}} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}(e_n^{D_{n+1}}, f_{n+1}^* F)}_{\Gamma_{C_{n+1}(F)}}$$

est une $n$-équivalence.

La construction de la cohomologie d'un topos en termes d'intégration des champs ne fait aucun appel à la notion de complexe de faisceaux abéliens, encore moins à la technique des résolutions injectives. On a l'impression que dans son esprit, via la définition (qui reste à expliciter !) des $n$-champs, elle s'apparenterait plutôt aux calculs "Cechistes" en termes d'hyperrecouvrements. Or ces derniers se décrivent à l'aide d'une petite dose d'algèbre semi-simpliciale. Si oui, cela ferait essentiellement trois approches distinctes pour construire la cohomologie d'un topos :

a) point de vue des complexes de faisceaux, des résolutions injectives, des catégories dérivées (*algèbre homologique commutative*);

b) point de vue Cechiste ou semi-simplicial (*algèbre homotopique*);

c) point de vue des $n$-champs (algèbre catégorique, ou *algèbre homologique non-commutative*).

Dans a) on "résoud" les coefficients, dans b) on résoud l'espace (ou topos) de base, et dans c) en apparence on ne résoud ni l'un ni l'autre.

Bien cordialement,

Alexandre

## Letter to L. Breen 17.2.1975

Villecun 17.2.1975

Dear Larry,

Here is an afterthought to "une lettre-fleuve" on the yoga of homotopy. As you doubtless know, to a topos $X$ one associates canonically a pro-simplicial set, and so in a convenient sense a "pro-homotopy type". When $X$ is "locally homotopically trivial", the associated pro-object is essentially constant as a pro-object in the homotopy category, and so $X$ defines, in the usual homotopy category, an object which is the "homotopy type". Similarly, if $X$ is "locally homotopically trivial in dim $\leq n$", it defines an ordinary homotopy type, but "truncated in dim $\leq n$" - this is a familiar construction for $n = 0$ or 1, even among those like me who know hardly any homotopy theory!

These constructions are functorial in $X$. Moreover, if $f : X \longrightarrow Y$ is a morphism of topoi, Artin-Mazur have given a *cohomological* condition which is necessary and sufficient for $f$ to be a "homotopy equivalence in dim $\leq n$": it is that $\mathrm{H}^i(Y, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(X, f^*(F))$ for $i \leq n$, and all *locally constant* sheaves of groups $F$ on $Y$, allowing for $i \leq 1$ that $F$ be non-commutative. This criterion, in terms of "locally constant" $n$-gerbes $F$ on $Y$, can be interpreted as the condition that $F(Y) \longrightarrow F(X)$ is an $n$-equivalence for all such $F$ and $i \leq n$. It is certainly true that this is equivalent to the following criterion:

(A) For every "locally constant" $n$-stack $F$ on $Y$, the $n$-functor $F(Y) \longrightarrow f^*(F)(X)$ is an $n$-equivalence;

or again

(B) The $n$-functor $F \longrightarrow f^*(F)$ which sends the $n$-category of locally constant $(n-1)$-stacks in $Y$ to that of locally constant $(n-1)$-stacks on $X$, is an $n$-equivalence.

In other terms, the construction on a topos $X$ which one can make in terms of $(n-1)$-stacks which are *locally* constant, depend only on its "$n$-truncated pro-homotopy type", and define it. In the case where $X$ is locally homotopically trivial in dim $\leq n$, and so defines a $n$-truncated ordinary homotopy type, one can interpret these last as an $n$-groupoid $C_n$, (defined up to $n$-equivalence). In terms of these

(C) The $(n-1)$-stacks on $X$ should be able to be identified with the $n$-functors from the category $C_n$ $n$-category $(n-1)$— of all $(n-1)$-categories.

In the case $n=1$, this is nothing other than the Poincaré theory of the classification of coverings of $X$ in terms of the "fundamental groupoid" $C_1$ of $X$. By extension, $C_n$ merits the name *fundamental n-groupoid* of $X$, which I propose to write $\Pi_n(X)$. Knowledge of this includes knowledge of the $\pi_i(X)$ $(0 \geq i \geq n)$ and the Postnikoff invariants of all orders up to $\mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n-1}(X), \pi_n)$.

In the case of an arbitrary topos $X$, not necessarily locally homotopically trivial in dim $\leq n$, one hopes to be able to interpret the $(n-1)$-stacks which are locally constant on $X$ in terms of a $\Pi_n(X)$ which will be a pro-$n$-groupoid. This has been done, more or less, for $n=1$ (at least for connected $X$); the case where $X$ is the étale topos of a scheme is treated extensively in SGA 3, in relation to the classification of tori on an arbitrary base.

In the case $n=1$, one knows that one can recover (up to equivalence) the 1-groupoid $C_1$ from the 1-category $(C_1, \mathrm{Set})$ of the functors into $\mathrm{Set} = 0$— (i.e. the "local systems" on $C_1$ which is a topos, called "multigaloisian") - like the category of "fibred functors" on the above topos, i.e. the opposite category to the category of points of this topos (which is none other than the *classifying topos* of $C_1$). To make precise for arbitrary $n$ the way in which the homotopy $n$-type of a topos $X$ (supposed for simplicity to be locally homotopically trivial in dim $\leq n$) i.e. its fundamental $n$-groupoid $C_n$, can be expressed in terms of the $n$-category of "local $(n-1)$-systems on $X$" i.e. of the locally constant $(n-1)$-stacks on $X$, and to elucidate completely the hypothetical statement (B) above, it is necessary to make explicit how an $n$-groupoid $C_n$ can be recovered, up $n$-equivalence, from the knowledge of the $n$-category

$$\underline{C}_n = n-(C_n, (n-1)—)$$

of local $(n-1)$-systems on $C_n$. One would like to say that $C_n$ is the category of "fibred $n$-functors" on $\underline{C}_n$, i.e. of $n$-functors $\underline{C}_n \longrightarrow (n-1)$— having certain exactness properties (for $n = 1$, this is the condition of being the inverse image functor for a morphism of topoi, i.e. to commute with arbitrary $\varprojlim$ and with finite $\varinjlim$...). It is this which makes real the fear, expressed in my preceding letter, that one ends by falling upon the notion of $n$-topos and of morphisms of these! $\underline{C}_n$ will be an $n$-topos, (called the "classifying $n$-topos" of the $n$-groupoid $C_n$), $(n-1)$— will be the $n$-topos of points, and $C_n$ will be interpreted modulo $n$-equivalence as the $n$-category of "$n$-points" of the classifying $n$-topos $\underline{C}_n$. Brr !

If one hopes to be able to define a good old classifying 1-topos for an $n$-groupoid $C_n$, as solution of a universal problem, I can see only how to recover the following universal problem: for every topos $T$, consider $(\Pi_n(T), C_n)$. This is an $n$-category, but take from it the truncated 1-category $\tau_1(\Pi_n(T), C_n)$. For variable $T$, one wants to 2-represent the contravariant 2-functor $\mathrm{Top}^\circ \longrightarrow 1$— by a classifying topos $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{C_n}$, and then to find a 2-universal $\Pi_n(\mathrm{B}) \xrightarrow{\varphi} C_n$ in the sense that for all $T$, the functor

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Top}}(T, \mathrm{B}) \xrightarrow{u \mapsto \varphi \circ \Pi_n(u)} \tau_1 \underline{\mathrm{Hom}}(\Pi_n(T), C_n)$$

is an equivalence. For $n = 1$ one knows that the usual classifying topos of $C_1$ does the job, but for $n = 2$ already, I doubt that this universal problem has a solution. This is perhaps related to the fact that the "Van Kampen Theorem", which one can express by saying that the 2-functor $T \longrightarrow \Pi_1(T)$ of locally 1-connected topoi to groupoids transforms (up to 1-equivalence) amalgamated sums to amalgamated sums (and more generally commutes with inductive 2-limits), is doubtless no longer true for $\Pi_2(T)$. Thus, if $T$ is a topological space which is the union of two closed sets, $T_1$ and $T_2$, it is doubtless not true that giving a locally constant 1-stack on $T$ " is equivalent to" giving a locally constant 1-stack $F_i$ on $T_i$ $(i = 1, 2)$ and an equivalence between the restrictions of $F_1$ and $F_2$ to $T_1 \cup T_2$ (while the analogous statement in terms of 0-stacks, i.e. for coverings, is evidently correct).

The statement (B) above makes it clear how to give explicitly the cohomology of an $n$-groupoid $C_n$. If $C_n = \Pi_n(X)$, and if $F$ is a locally constant $(n-1)$-stack on $X$, and $e^X_{n-1}$ is the "final" $(n-1)$-stack, one has an $(n-1)$-equivalence of $(n-1)$-categories

$$\Gamma_X(F) = F(X) \simeq \mathrm{Hom}(e^X_{n-1}, F)$$

which shows that the functor $\Gamma_X$ "integration on $X$" for locally constant $(n-1)$-stacks, which includes the (non-commutative) locally constant cohomology of $X$ in dim $\leq n-1$, can be interpreted in terms of "local $(n-1)$-systems" on the fundamental groupoid as an $(e_{n-1}^{C_n}, F)$ where now $F$ is interpreted as an $n$-functor

$$C_n \xrightarrow{F} (n-1)\text{—}$$

and $e_{n-1}^{C_n}$ is the constant $n$-functor on $C_n$, with value the final $(n-1)$-category.

To interpret this in cohomology notation, it is necessary for me to add, as "apology" to the preceding letter, the explicit interpretation of the non-commutative cohomology on a topos $X$, in terms of integration of $n$-stacks on $X$. If $F$ is a strict Picard $n$-stack on $X$, then it is defined by a complex $L^\circ$ on $X$

$$0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow L^n \longrightarrow 0$$

concentrated in degrees $0 \leq i \leq n$ (defined uniquely up to isomorphism in the derived category of $\mathrm{Ab}(X)$). That said, the $\mathrm{H}^i(X, L')$ (hypercohomology) for $0 \leq i \leq n$ can be interpreted as $\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{n-i}\Gamma_X(F)$. If one is interested in all the $\mathrm{H}^i$ (not just for $i \leq n$) one must, for all $N \geq n$, regard $L^\circ$ as a complex concentrated in degrees $0 \leq i \leq N$ by prolongation of $L^\circ$ by $0$ to the right). The corresponding strict Picard $n$-stack is no longer $F$ but $\underline{C}^{N-n}F$, where $\underline{C}$ is the "classfying space" functor, interpreted on strict Picard $n$-categories as the operation consisting of "translating" the $i$-objects to $(i+1)$-objects, and adjoining a unique $0$-object; this extends one hopes, in "an obvious way", to $n$-stacks, so as to commute with the operation of taking the inverse image of an $n$-stack. One has then for $i \leq N$

$$\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad i \leq N.$$

Given this, it is necessary to put, for all strict Picard $n$-stacks $F$ on $X$,

$$\mathrm{H}^i(X, F) = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad \text{if} \quad N \geq i, n$$

which does nor depend on the choice of integer $N \geq Sup(i, n)$ [**N.B.** One has a canonical morphism of $(n-1)$-groupoids,

$$C(\Gamma_X F) \longrightarrow \Gamma_X(CF),$$

as the obvious constructions in terms of cochains show, and one sees in the same way that this induces isomorphisms on $\pi_i$ for $1 \leq i \leq n+1$.]

**N.B.** One sees by the way that for $F$ and $n$-stack of groupoids on $X$, if one restricts to defining the $\mathrm{H}^i(X,F)$ for $0 \leq i \leq n$, one has no need of a Picard structure on $F$, as it is sufficient to put

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n-i}(\Gamma_X(F)) \quad 0 \leq i \leq n.$$

If on the other hand $F$ is an $n$-Gr-stack (i.e. $F$ has the structure of a composition law $F \times F \longrightarrow F$ with the usual formal properties of a group) the "classifying $(n+1)$-stack" is defined, and one can define $\mathrm{H}^i(X,F)$ for $i \leq n+1$ by

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n+1-i}(\Gamma_X(CF))$$

in particular

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0(\Gamma_X(CF)) = \text{ equivalence classes of sections } \underline{C}F.$$

But one can form $C\underline{C}F = \underline{C}^2F$ and define $\mathrm{H}^{n+2}(X,F)$, it seems *only* if $\underline{C}F$ is itself a Gr-$(n+1)$-stack, which is without doubt the case only if $F$ is a strict Picard $n$-stack...

Let us now come to the case where $F$ is a *locally constant* $n$-stack on $X$, and so is defined by an $(n+1)$-functor

$$C_{n+1} \xrightarrow{F} \text{strict Picard } n- .$$

Then, putting for $0 \leq i \leq n$

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) = \pi_{n-1}(\underline{\mathrm{Hom}}(e_n^{C_{n+1}},F)),$$

"one knows it fails", as one has a canonical isomorphism

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) \simeq \mathrm{H}^i(X,F),$$

valid in effect without Picard structure on $F$... It is thus necessary for all $i$ and for every $\infty$-groupoid $C$ and every $(n+1)$-functor

$$C \xrightarrow{F} \text{strict Picard } n\text{—},$$

to define

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{N-i}\underline{\mathrm{Hom}}(e_N^C, C^{N-n}F)$$

where one chooses $N \geq Sup(i,n)$. If $F$ has only a Gr-structure (not necessarily Picard) one can define the $\mathrm{H}^i(C,F)$ for $i \leq n+1$ by

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{n+1-i}\underline{\mathrm{Hom}}(e_{n+1}^C, CF).$$

In the case $C = C_{n+1} = \Pi_{n+1}(X)$, it must still be true (by virtue of (A) above), that this set is canonically isomorphic to $\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0\Gamma_X(CF)$ (this is true and very easy for $n = 0$). Can one describe the arrow between the two sides of

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) \simeq \mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n+1}X,F) \quad ?$$

If one wishes to make (A) and (B) explicit again, in terms of the yoga (C), one comes to the following situation:

One has an $(n+1)$-functor between $(n+1)$-groupoids

$$f_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow D_{n+1}$$

which induces by truncation an $n$-functor

$$f_n : C_n \longrightarrow D_n$$

One must than have:

(A') $f_n$ is an $n$-equivalence if and only if the $n$-functor

$$f_n^* : \underline{\mathrm{Hom}}(D_n,(n-1)\text{—}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C_n,(n-1)\text{—})$$

which sends the local $(n-1)$-systems on $D_n$ (or, equally, on $D_{n+1}$) to the local $(n-1)$-systems on $C_n$, is an $n$-equivalence.

(B') $f_n$ is an $n$-equivalence if and only if for every local $n$-system $F$ on $D_{n+1}$,

$$F : D_{n+1} \longrightarrow n\text{—},$$

the $n$-functor induced by $f_{n+1}$

$$\underbrace{(e_n^{D_{n+1}}, F)}_{\Gamma_{D_{n+1}(F)}} \longrightarrow \underbrace{(e_n^{D_{n+1}}, f_{n+1}^* F)}_{\Gamma_{C_{n+1}(F)}}$$

is an $n$-equivalence.

The construction of the cohomology of a topos in terms of integration of stacks makes no appeal at all to complexes of abelian sheaves and still less to the technique of injective resolutions. One has the impression that in this spirit, *via* the definition (which remains to be made explicit!) of $n$-stacks, it is all related above all to the "Cechist" calculations in terms of hypercoverings. Now these last are written with the help of a small dose of semi-simplicial algebra. I do not know if a theory of stacks and of operations on them can be written *without* ever using semi-simplicial algebra. If yes, there would be essentially three distinct approaches for constructing the cohomology of a topos:

a) viewpoint of complexes of sheaves, injective resolutions, derived categories (*commutative homological algebra*)

b) viewpoint Cechist or semi-simplicial (*homotopical algebra*)

c) viewpoint of $n$-stacks (categorical algebra, or *non-commutative homological algebra*).

In (a) one "resolves" the coefficients, in (b) one resolves the base space (or topos), and in (c) it appears one resolves neither the one nor the other.

Very cordially,

Alexandre

## Letter to L. Breen, 17/19.7.1975

Villecun 17/19 Juillet 1975

Cher Larry,

Tout d'abord félicitations pour la naissance de ta fille,

## Letter to L. Breen, 17/19.7.1975

Villecun 17/19.7.1975

Dear Larry,

I am happy to finish by receiving an echo to my long letter and even a beginning to a constructive approach to a theory of the type I envisaged. The construction which you propose for the notion of a non-strict $n$-category, and of the nerve of the functor, has certainly the merit of existing, and of being a first precise approach, but otherwise can be subject to some evident criticism: it is very technical, unintuitive (yet at the level of 1—, etc, and even of 2—, everything is so clear "you just follow your nose..."). And finally the absence of a definition of a functor sending (semi-)simplicial sets to $n$-groupoids. This functor correspond to a geometric intuition so clear that a theory which does not include it seems to me kind of a joke! Perhaps in trying to write down (like a sort of list of Christmas presents!) in a complete and explicit enough way the notions which one would like to have at ones disposal, and the relations (functor, equivalence, etc.) which should link them, one would arrive finally at a kind of axiomatic description sufficiently complete which should either give the key to a explicit *ad hoc* construction, or should permit at least to enunciate and prove a theorem of existence and uniqueness[23] for a theory of the required type.

Otherwise, not having understood the idea of Segal in your last letter (which I have generously sent to Illusie…), I do not see how you define the Picard $n$-categories - but this matters little. As far as "strict" Picard $n$-categories are concerned, all I ask of them is that they finally form an $(n+1)$-category $(n+1)$-equivalent to that of chain complexes of length $n$. Agreed? I thank you for having rectified in my mind a big blunder, due to my great ignorance of algebraic topology and homotopy - I was in fact of the impression that $H$-spaces satisfying conditions of associativity and commutativity strict enough (say equivalent to an $\Omega^i X$ with $i$

[23] As was seen in section 9, 'ùniqueness" here has to b understood in a considerably wider sense than I expected, when writing this letter to Larry Breen. It now appears that the whole theory of stacks of groupoids will depend on the choice of a "coherator" , as seen in section 13.

arbitrarily large) correspond to commutative topological groups (inspired by several analogies…). Thus I am entirely in agreement with your observations on p.5.

On the other hand, I am still intrigued by the following question: is there an analogue of the "tapis" of Dold-Puppe[24] for semi-simplicial groups (*not necessarily commutative*) and what form should it take? To tell the truth I consider the yoga

$$(*) \qquad \text{simplicial sets} \longleftrightarrow \infty-\text{groupoids}$$

as being essentially the ultimate "set theoretic" version of Dold-Puppe, which I would deduce from (*) by making explicit solely the fact that the abelian groups in $\infty$— are "nothing else" than the chain complexes in Ab. One should therefore first determine what should be the groups in $\infty$—. I can tell you what these are in 1— . this will be discussed at length in the book of Mme. SinhGCS, I think in the chapter "*strict* Gr-categories" (i.e. the isomorphisms of associativity, for unity and inverse $XX^{-1} \simeq 1$ are *identities*). One can make explicit for example how (*via* the fact that a Gr-category is Gr-equivalent to a strict Gr-category) the calculation with the Gr-categories reduces to a very algebraic calculation with the *strict* Gr-category, by a kind of "calculus of fractions" (by choice, left or right) of the type which is used in giving the construction of derived categories. In any case, here is the explicit formulation of the structures (groups in 1—) in terms of the theory of groups (1-categories in Gr[25]). The structure is described by a quadruplet $(L_1, L_0, d, \theta)$ with

$$L_1 \xrightarrow{d} L_0$$

a homomorphism of ordinary groups,

$$\theta : L_0 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{Gr}}(L_1)$$

[24] Tim Porter pointed out to me that "Dold-Puppe" is an inaccuracy name for this basic theorem, which should be called *Dold-Kan theorem.*

[25] AS was pointed out to me by Ronnie Brown, this structure was already well-known to J.H.C. Whitehead, under the name of "crossed module", and extensive use and extensive generalizations of this notion (in quite different directions from those I was having in mind, in terms of Gr-stacks over an arbitrary topos) have been made by him and others. With respect to the question on next page, of generalizing this notion of "non-commutative chain complex" from length one to length two, Ronnie says there is a work in preparation by D. Conduché "Modules croisés généralisés de longueur 2".

an operation of $L_0$ on $L_1$, with the following two axioms:

(a) $d$ commutes with the operation of $L_0$, when $L_0$ acts on $L_1$ via $\theta$ and on itself by inner automorphisms:

$$d(\theta(x_0)x_1) = \mathrm{int}(x_0)d(x_1)$$

(b) $\theta(d()x_1) = \mathrm{int}(x_1)$.

These properties imply that $\mathrm{Im} d$ is normal in $L_0$ (hence $d = \pi_0$ is defined) and $\pi_1 = \mathrm{Ker}\, d$ is central in $L_1$, and finally that $L_0$ operates on $L_1$ leaving $\pi_1$ invariant, and it operates *via* $\pi_0$. The principal cohomological invariant of this situation is evidently the Postnikoff-Sinh invariant

$$\alpha \in \mathrm{H}^3(\pi_0, \pi_1).$$

I have met these animals - without even looking for them - in many situations, which I will not list now (I came across them recently *a propos* the classification of "ordinary" formal groups over a perfect field, in terms of *affine* algebraic groups, and *commutative* formal groups, related by the strict Gr-structures of this type (except that one has to use this formalism in an arbitrary topos (not merely in )) - to make explicit the yoga that "the transcendent character of a formal group is concentrated essentially in the commutative formal groups", discovered it seems by Dieudonné...). The question which I wish to raise is the generalisation to groups in $n-$, where I expect to find a non-commutative chain complex

$$L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 1$$

with supplementary structures doubtless of the type of $\theta$, but what are they? It is understood that the topological significance of such structures is that they express exactly the "truncated homotopy type in dim $\leq n$" of topological groups, or equivalently the homotopy type in dim $\leq n+1$ of pointed connected topological spaces...). Have you candidates to propose ?

Your reflections on biduality and homology, however formal, tie in with a crowd of developments, of which only some exists at present, and others would demand considerable work still. Here are the reminiscences which your naive questions bring to mind: (A) The formalism of the $_!$, $^!$ (combined with $_*$, $^*$, and , "the six operations") carries implicitly in itself the definition of homology and the essential identity between homology and cohomology. One now has this formalism for quasi-coherent sheaves on schemes - seminar Hartshorne (Springer L.N. 20) - for the topological spaces and arbitrary sheaves of coefficients - Verdier, *exposé* Bourbaki (SNLM 300) - and for the étale cohomology of schemes for "discrete" coefficients ("$\ell$-adic" or torsion) prime to the residual characteristic (SGA 5), finally, for coherent sheaves on analytic spaces (Verdier-Ruget). (The formalism remains to be developed in the crystalline context, and in the characteristic 0 in the context of stratified modules with singularities, à la Deligne, with perhaps - over the field $C$ - the introduction of additional Hodge structures, finally in the context of motives; I am convinced that it exists about anywhere - maybe, wherever there is a formalism of a cohomological nature.)

Working in étale cohomology on a separated scheme of finite type over a field $k$, say, with a ring of coefficients $\Lambda$ of torsion prime to the characteristic, the complex of sheaves $f^!(\Lambda_e)$ (where $\hat{f} : X \longrightarrow \operatorname{Spec} k = e$) plays the role of *complex of singular chains on $X$ with coefficients in* $\Lambda$, and $_!\,(f^!\Lambda_e)$ plays the role of a *homology* $\mathrm{H}_*(X/e)$, *vis a vis* of course, of coefficients on $e$ which are complexes of $\Lambda$-modules. You can easily justify this assertion with the help of the "global duality theorems", by one or two tricks which I spare you here.

**R**EMARKS.

(1) There is no need to truncation, it works in all dimensions.

(2) This is related (at least as far as the philosophy is concerned) to he fact that for the various types of coefficients (under conditions of "constructibility") one has a theorem of "biduality", at least if one allows resolution of singularities (but Deligne has told me I believe that he knows a proof without that), with values in a "dualizing complex" $K_e$ (on $e$), $K_X$ (on $X$). If for example $\Lambda$ is "self-dualising" (or Gorenstein) for example $\Lambda = Z/nZ$, one can take $K_e = \Lambda$, therefore the dualising complex $K_X = f^!(K_e)$ is nothing else than the "complex of singular chains with coefficients in $\Lambda$.

(3) One can do the same thing for coefficients such as $Z_\ell$ (Jouanolou, thesis non

publishedJOU69, I fear!)

(4) This works also for $f : X \longrightarrow S$ finitely presented separated if $f$ has the properties of "cohomological local triviality" (properties "local upstairs") for example $f$ *smooth*; one finds that $\mathrm{H}_*(X/S) =_! f^!(\Lambda_S)$.

(B) Artin-Mazur have studied in a spirit close to yours the *autoduality* of the Jacobian of a relative curve $X/S$. It is necessary to ask them for precise results, perhaps it works say if $X/S$ is proper and flat or relative dimension 1 - in any case it is OK on a discrete valuation ring with smooth *generic* fibre. The special fibre could be very wild. (I have used their results in SGA 7 to prove, in the case of Jacobians, a duality conjecture on the group of connected components associated to the Neron models of abelian varieties dual one to another...). Towards the end of the 50's (beginning of 60's?), when the grand cohomological stuff ($f^!$, $f^!$, étale cohomology, etc.) just came out from darkness, the course given by Serre on the theory of Rosenlich and Lang on generalised jacobians and the geometric class field theory (see Serre's book) and later the "geometric" theory of *local* class field theory making use of pro-algebraic groups (see his article on this subject), made me reflect on the cohomological formulations of these and other results, which should be of a "geometric" nature, such that the "arithmetic" results over an arbitrary base field (or residue field) $k$ (finite, for example) follow immediately by descent from the "geometric" case of base field $\overline{k}$. I exchanged letters with Serre - I don't know if I can find copies - but I recall that I sketched projects for some ambitious enough theories on generalised residues, generalised local jacobians, etc., in at least three different directions. But I have never, in spite of numerous attempts, succeeded in mobilising someone for developing one of these programmes. Here a few words on them:

(C) In the situation where $X$ is of finite type over a *field* $k$, construction of a complex of generalised jacobians $J_{*X/k}$ (of length equal to dim $X$).

This is a complex of affine commutative pro-algebraic groups on $k$, with the exception of $J_0$ if I remember well, ($J_0$ had as abelian part the abelian part of $_{X/k}$, the usual generalised jacobian). It's construction, inspired by the residual complex, passes by generalised jacobians (in an appropriate cohomological sense) of the localisation $\mathrm{Spec}_{O_{X,x}}$ of $X$ at its different point. N.B. $H_O(J_*)$ was the "generalised

Jacobian" of $X$, i.e. there existed a homeomorphism $X \longrightarrow H_0$, which was universal for homomorphisms of $X$ into commutative locally proalgebraic groups. For $X$ connected, $H_O$ is an extension of $Z$ by an appropriate proalgebraic group. It is possible that, at first, I restricted to the case of $X$ smooth.

The cohomology role of this complex was that of a complex of *homology*

$$(*) \qquad \mathrm{H}^i(X, G_X) \simeq \mathrm{Ext}^i(J_{*X/k}, G)$$

but for which coefficients? I believe I took arbitrary commutative algebraic groups $G$ but worked with the Zariski topology (malédiction !). Even in the case of discrete $G$, I considered the Zariskian $\mathrm{H}^i$, this gives slightly stupid cohomology groups, evidently. I realised that one should work ultimately in étale cohomology, and that the construction of the $(J_i)_{X/k}$ will evidently be modified accordingly. As for the significance of the $\mathrm{Ext}^i$ (hypercohomology), at a moment where Serre had developed the formalism for proalgebraic groups, one was not too fearful of taking it in the category of such objects - and in the sense of a "derived category" which at that moment had never yet been explicitly defined and studied. (We have, after all, somewhat progressed since those days!). I have the impression, in view of these antique cogitations, heuristic as they were, that it should now be possible to develop at present such a theory of $J_{*X/k}$, in cohomology fppf, giving a formula (*) without limitation on the degree $i$ of the cohomology. (N. B. But $J_*$ evidently no longer stops in dim $X = n$ but in dim $2n$. It is nevertheless possible that the components $J_i$ might be of dim 0 for $i > n$).

I believe that the construction of the $J_*$ does not commute with base change, but merely does so in the derived category sense.

(D) Let $X/k$ be a smooth scheme (for simplicity) over a field $k$, separated and of finite type, or relative dimension $d$, and $n$ an integer $> 0$. If $n$ is prime to the characteristic and if $F$ is a sheaf of coefficients on $X$ which is annihilated by $n$, the global duality tells us that $_!(F)$ and $_*((F, \mu_n^{\otimes d}))$ ($\mu_n =$ sheaf of n-th roots of unity $= \mathrm{Ker}(G_m \xrightarrow{n} G_m)$) are dual to each other with values in $(Z/nZ)_k$, for example $_!(Z/nZ)$ and $_*(\mu_n^{\otimes d})$, or $_!(\mu_m^{\otimes})$ and $_*(Z/nZ)$, are dual to each other - at least with a shift of amplitude $2d$ in dimension. (As $Z/nZ$ is injective over itself, this gives in fact perfect duality

$$\mathrm{R}^i f_!(F) \times \mathrm{R}^{2d-i} f_*((F, \mu_n^{\otimes d})) \longrightarrow Z/nZ.)$$

If now one no longer assumes $n$ prime to he characteristic, for example $n$ is a power of $p =$ characteristic of $k > 0$), it seems that everything collapses: to start with, one no longer knows (for $d > 1$) by what to replace $\mu_n^{\otimes d}$... The extraordinary miracle is that for $d = 1$, i.e. $X$ a smooth curve, everything continues to work perfectly, provided one states things with care! The first verifications are made for example with $F = Z/pZ$, $\mu_p$, or $\alpha_p$, with $X$ complete - one finds it's O.K. by virtue essentially of the autoduality of the jacobian. One can make these examples more sophisticated on taking *twisted* coefficients, and $X$ not complete - one convinces oneself this works always! Simply, it is necessary to note that here the $\mathrm{R}^i f_*(F)$, $\mathrm{R}^i f_!(F)$ have a "continuous" structure (they are essentially poalgebric groups). This corresponds to the well known phenomenon in class field theory that the structure of $\pi_{1\mathrm{ab}}$ of $X$, when $X$ is not complete, is *continuous* - hence same holds for $\mathrm{H}^1(X, Z/p^n Z)$ say.

By the way, I point out for you that Serre once proposed (without ever writing it down, I think) a theory of duality for *commutative unipotent* algebraic groups, *modulo radical isogeny*, duality with values in $Q/Z$ (or $Q_p/Z_p$). He found that if (when $k$ is algebraically closed, say) $G$ is such a group, then $G' = \mathrm{Ext}^1(G, Q/Z)$ can canonically be given a structure of quasi-algebraic group (i.e. defined modulo radical isogeny), doubtless in a unique manner provided it verifies some functorial properties, and on requiring that for $G = G_a$ one finds that $\mathrm{Ext}^1(G_a, Q/Z) \simeq G_a$ with the usual structure. Let $\Delta G = G' = \mathrm{Ext}^1(G, Q/Z)$. One finds $G \simeq \Delta\Delta G$ i.e. $\Delta$ is an authentic autoduality! I call $\Delta$ *Serre duality*. It surely goes over to ind-progroups on an arbitrary base field (not necessarily algebraically closed) in the case $p > 0$. Moreover, for finite étale groups, it is $\mathrm{Ext}^0(G, Q/Z)$ (pontrjagin duality) which gives a perfect duality. One could screw together, in an appropriate derived category, Serre duality and Pontrjagin duality, by taking $G \mapsto \Delta G = (G, Q/Z)$: one calls this ("cohomological") Serre duality. This will be a magnificent autoduality, if one puts oneself in a derived category where the $H^i$ of the envisaged complexes are (up to passing to the limit) extensions of étale groups by connected unipotent groups. Now one gets only such complexes, by "integrating" finite coefficients $F$ on $X$ by $_!$ or $_*$. This being said, by passing to the limit in the initial formulation (or equivalently by replacing the $(Z/nZ)_k$, previously considered, by $(Q/Z)_k$ on $k$, and forming $f^!(Q/Z)_k = (\mu_\infty)_X$) the duality formula takes the form

$$\Delta(_!(F)) \simeq_* (\mathrm{DF}[2]) \quad \text{“shift” of dimension}$$

where $D$ is the “Cartier duality” $(F, \mu_\infty)$ (or $(F, G_m)$ if one prefers?), and $\Delta$ is the Serre duality: cohomology with proper supports and with arbitrary supports are exchanged by duality, when one takes upstairs Cartier duality, and downstairs Serre duality.

The validity of the duality formula is not open to doubt - the principal work for establishing it consist certainly in a careful description of the category of coefficients with which one is working, as well on $X$ as on $k$, and of the functors $D$ and $\Delta$. As the definition of an arrow is immediate, once the building of the machine has been accomplished, the validity of the formula should result without difficulty from the usual “dévissages” which allow one to verify the duality in the particular standard cases $F = Z/pZ$, $\mu_p$, $\alpha_p$ on a smooth, complete $X$. (N.B. the case of coefficients prime to the characteristic is already known.) Let us make explicit what the formula of duality says for $\mathrm{R}^1 f_*(G_X)$, where $G$ is a finite group étale on $k$ (the most important case being $G = (Z/p^m Z)_k$); one recovers Serre's description of “geometric class field theory” in terms of extensions by $G$ of a generalised jacobian of $X$. Thus, the duality formula can be understood as a cohomological version, considerably enriched, of geometric class field theory. When the base field $k$ is finite, to retrieve the class field theory in the classical form, one can use “the trick of Lang” (on the relation between the “arithmetic” $\pi_1$ of a smooth, connected commutative algebraic group $J$ on $k$ and its $\mathrm{H}^0(k,J) = J(k)$: the $\pi_1^{\mathrm{ar}}(J)$ classifies the isogenies above $J$ with kernel a constant group $\pi_1^{\mathrm{ar}}(J) \simeq \mathrm{H}^0(k,J)$) - i its cohomological form, which may be stated:

$$\Delta_{0K}(J^*) \simeq_K (\Delta J^*[1]),$$

where $\Delta$ is Serre duality, $\Delta_0$ Pontrjagin duality for the totally disconnected topological abelian groups (duality with values in $Q/Z$), $J^*$ a complex of algebraic ind-progroups on $k$. Taking account of this “Lang duality formula” and applying $_K$ to the formula of duality for geometric class fields, one gets the “duality formula of arithmetic class field theory":

$$\Delta_0(\mathrm{H}_!(X,F)) \simeq \mathrm{H}^*(X,D(F)[3])$$

(isomorphism of totally disconnected topological groups).

Another remark: when $F$ is not an "étale sheaf", but has a continuous structure such as $\alpha_p$, one must be careful in the definition of $_!(F)$, for $X$ non complete, starting from the compactification $\widetilde{X}$; thus, if $F$ comes from an "admissible" sheaf $\widetilde{F}$ on $\widetilde{X}$, one must have an exact triangle

$$\begin{tikzcd}
 & _!(\hat{\widetilde{F}}) \arrow[dl] & \\
_!(F) \arrow[rr] & & \mathrm{R}\widetilde{f}_*(\widetilde{F}), \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

where $\hat{\widetilde{F}}$ is the *formal completion* of $\widetilde{F}$ along $\widetilde{X} - X$ (a finite number of points...). It is here, unless I am mistaken, that appears the link with local class field theory, in its cohomological version, on which I am going now to say a few words.

(E) **Local class field theory as a duality formula**

Let $V$ be a complete discrete valuation ring with residue field $k$ - assume either that $k$ has been lifted to $k \subset V$ (and therefore $V \simeq k[[T]]$) or that $k$ is perfect of characteristic $p > 0$. In order to fix ideas, and to be sure that I'm on solid ground, I consider at first on $K$ (= the field of fractions of $V$) *finite* coefficients $F$ (as on $X$ previously) and I consider the objects $\mathrm{H}^1(K,F)$, or $_K(F)$. The main work to be done consists in defining an adequate category of coefficients over $k$ (perhaps the same one as in (D)) and a functor

$$F \mapsto \mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(F)$$

with values in the category of such coefficients, in such a manner that the following isomorphisms holds.

$$_K(F) \simeq (\mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(F)).$$

This correspond to the intuition (acquired directly from elementary examples) according to which for $k$ algebraically closed, say, the $\mathrm{H}^0(K,F)$, $\mathrm{H}^1(K,F)$...are endowed with a structure of $k$-algebraic group (ind-pro...). In this construction, the ring scheme of Witt vectors over $k$ (introduced by Serre) and the "Greenberg functor" (associating to a $V$-scheme a $k$-prescheme) will play an essential role.

This being done, the duality formula will be formally stated as in (D) above:

$$\Delta \mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(F) \simeq \mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(\mathrm{DF}[1])$$

where $D$ stands for Cartier duality, $\Delta$ for Serre duality. When the residue field is finite, it becomes (via "Lang's trick" mentioned previously)

$$\Delta_{0k}(F) \simeq_K (\mathrm{DF}[2])$$

$\Delta_0$ standing for Pontrjagin duality. The formula contains local geometric class field theory à la Serre, and arithmetical local class field theory in its classical form.

**Remarks**.

(a) If $F$ is prime to the residue characteristic the formula is very easy to prove and well known. It may be considered a very special case of the "induction formula" for a morphism $i : s \mapsto S$, in the duality formalism:

$$i^!(D_S(F)) = D_S(i^*(F))$$

(we take here the inclusion of $p = \mathrm{Spec}(k)$ in $S = \mathrm{Spec}(V)$). Thus the work to be done concerns the $p$-primary coefficients, for $p =$ characteristic $k > 0$. The most subtle case is that of unequal characteristic.

(b) The functor  may be obtained by composing $\mathrm{R}j_*$ (where $j : U = \mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(V) = S$ is the inclusion) with a cohomological version of the "Greenberg functor".

(c) In (D) and (E), I restricted myself to finite coefficients $F$ - it's for those that I am sure of what I assert. But it is certainly true that the duality formula is even richer, that something may still be asserted for example for $F$ a not necessarily finite group scheme, for example an abelian scheme (with a few degenerate fibres in the case of (D)?), but I have never entirely clarified this question, even on a heuristic basis. I vaguely recall a formula which should be contained in the formalism (say if $k$ is algebraically closed): for $F$ an abelian scheme on $K$, $F$ the dual abelian scheme and $G'$ the pro-algebraic group over $k$ attached "'a la Greenberg" to its Néron model, then one has

$$\mathrm{H}^1(K, F) \overset{?}{\simeq} \mathrm{Ext}^1_{k-\mathrm{grp}}(G', Q/Z)$$

(N.B. without any guarantee.) In principle, the previously mentioned duality conjecture concerning Néron models of SGA 6 should come out of the local duality machine.

(d) You may ask Deligne if he didn't dive into questions (D) and (E) lately.

(F) **Significance and limitations of the fppf topology**

Since the attempts of Serre to find a "Weil chomology" by using the cohomology of a scheme with coefficients not only discrete $Z/p^nZ$ $(n \longrightarrow \infty)$ or $\mu_{p^n}$ $(n \longrightarrow \infty)$, but also continuous (for example $W_n$, $n \longrightarrow \infty$), which give good results for recovering a correct $\mathrm{H}^1$, during numerous years I have come upon the impression, which I have tried in vain to make precise, that a correct "$p$-adic" "Weil cohomology", in the case $p > 0$ and $k$ of characteristic $p$, should come, in one way or another, from the fppf cohomology, for finite coefficients for example, or more general coefficients, e.g. algebraic groups over $k$. The construction in (B) of the local jacobian complex was, of course, related to this hope: the homology might reveal what is hidden to us in cohomology! For some time now, one has at ones disposal the formalism of crystalline cohomology, and one knows (Berthelot) that (at least for $X$ projective and smooth) it has the correct properties. If one uses that as a kind of standard by which to "measure" the other cohomologies, one finds that the part of the crystalline cohomology $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cris}}(X)$ which could be described in terms of fppf cohomology of $X$ with coefficients in algebraic $k$-groups is a small part of $\mathrm{H}^i$ only; more precisely, using the very rigid supplementary structure of the $\mathrm{H}^i$ (modules of finite type on the ring $W(k)$ of Witt vectors) which comes from the existence of the Frobenius homomorphism (an isogeny), $\mathrm{H}^i \xrightarrow{F} \mathrm{H}^i$ (semi-linear), one finds that one keeps always in the part "of slope $\leq 1$ (although the possible slopes vary between $0$ and $i\ldots$). This explains why for $i = 1$ one can obtain via fppf a correct $\mathrm{H}^i$, although for $\mathrm{H}^2$ already all the attempts have been unfruitful. In truth, one conjectures that *all* the part of slope $\leq 1$ in $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cris}}$ comes from fppf. But I have completely lost contact with these questions - people such as Mazur, Kats, Messing - and of course Deligne - should be knowledgeable as to the present states of these questions.

Your question 7 seems to indicate that there is a misunderstanding on your part on the significance of the "homotopy type" of $X$, for $X$ a topos (for example the étale topos of a scheme). Doubtless you must be confusing the homotopical algebra which one can perform on $X$, using semi-simplicial sheaves, stacks of all kinds, the relations between these - and the other point of view according to which $X$ (with its very rich structure of topos) virtually disappears so as to become no more than a pale element of a "homotopical category" (or pro-homotopical), deduced from the topos by a very thorough process of "localisation". At first sight, all that still remains with poor stripped $X$, are the $\pi_i$ - and its cohomology groups with constant coefficients - or at the worst twisted constant coefficients. When one digs more into this definition of "what is left to this poor $X$" one falls precisely on *the locally constant $n$-stacks* (as an $f : X \longrightarrow X'$ which is a homotopy equivalence induces a $(n+1)$-equivalence between the categories of locally constant $n$-stacks on $X$ and on $X'$) - which of course contain the abelian chain complexes of length $n$ of sheaves with locally constant cohomology sheaves, and the hyper-cohomology of these. It is thus that one arrives at this triangle of objects which mutually determine each other

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}\text{topos (or topological space}\\ \text{or semi-simplical complex)}\\ \textit{modulo } n\textit{-homotopy}\end{array} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\begin{array}{c}n\text{-groupoids}\\ \text{(up to } n\text{-equivalence)}\end{array} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \begin{array}{c}\text{“special” } n\text{-categories}\\ \text{(up to } n\text{-equivalence)}\end{array}
\end{tikzcd}$$

One says that an $n$-category $E_n$ is "special" (or *$n$-galois*) if it is $n$-equivalent to the category of locally constant $(n-1)$-stacks on an appropriate topological space (or a topos), or, what should be equivalent, if it is $n$-equivalent to the category of $n$-functors $G_n \longrightarrow n$—, where $G_n$ is an $n$-groupoid. If $X$, $G_n$, $E_n$ correspond in this way, one calls $G_n$ *the fundamental $n$-groupoid* of $X$, or of $E_n$, or says that $E_n$ is *the category of local $(n-1)$-systems* on $X$, or on $G_n$, or that $X$ is *the geometric realisation* of $G_n$ or of $E_n$. In analogy with the familiar case $n = 1$, it should be possible to interpret $G_n$ as the full sub-$n$-category of $\mathrm{Hom}_n(E_n, n—)$ formed by the

$n$-functors $E_n \longrightarrow n-$ satisfying certain exactness properties (one feels like saying: which commute with finite $\varprojlim$ and arbitrary $\varinjlim$); but this raises the disquieting vision of $n$-limits in $n$-categories. (N. B. The case $n = 2$ begins to become familiar to us…). It is prudent in all of this to suppose that $X$ is "locally homotopically trivial", which ensures the pro-simplicial set which Artin-Mazur associate to it (with the help of nerves of hyper-coverings) is essentially constant in the ordinary homotopy category - thus $X$ defines a homotopy type in the usual sense. This is surely *not* the case for the étale topos of a scheme. In such case, the fundamental $n$-groupoid should be conceived as a *pro-n-groupoid* (nothing surprising in that, in view of the familiar theory of $\pi_1$), and $E_n$ as an (ind)-$n$-category (the ind-structure will correspond to the exigencies of local triviality for a variable $n$-stack, relative to coverings more and more fine on $X$).

I nevertheless understand your instinctive resistance to conceive this extreme stripping of a beautiful topos $X$, to the point of retaining only the meagre homotopy type. Even more, I am persuaded that going to the root of this instinctive resistance, one arrives at a generalisation and deepening of the notion of "homotopy type", and to bring new grist to the mill of the development of a good homotopical yoga. Here is what I have in mind.

Let us speak first of sheaves (of sets, or of modules, etc.) instead of stacks, for simplicity, and place ourselves in the étale topos of a scheme. The locally constant sheaves - modulo a supplementary condition of finiteness which is sufficiently anodyne - form the easiest of the *constructible* sheaves, for the definition of which they serve as models. Supposing $X$ coherent (= quasi-coherent and quasi-separated), then the general constructible sheaves are those for which there exists a finite partition $X = \cup_{i \in I} X_i$ of $X$ into "cells" or "strata" $X_i$, each locally closed and constructible, such that the restriction of $F$ to every $X_i$ is locally constant (also a finiteness condition…). Thus the category of constructible sheaves on $X$ (which gives back the category of all sheaves on passing to a category of ind-objects…) may itself be thought of as an inductive limit of categories associated to finer and finer partitions on $X$. One can then, for such a fixed partition $P$, set out to study the category of sheaves (or complexes of sheaves, or stacks) which are "$P$-constructible" (or, more generally, which are "locally constant" on every

$X_i$). These categories will not have truly satisfying structures unless they are stable for the usual operations - such as , or $\mathrm{R}j_*j^*$ where $j : X_i \longrightarrow X$ is a "cell" of the partition, etc. In fact, if $X$ is excellent and one has resolution of singularities at ones disposal, one knows that the torsion constructible sheaves (under the proviso of being prime to the characteristic) are stable for all these operations - but not for a finite partition of $X$ fixed once and for all. To have such a finer stability, it is necessary to make some very strict hypotheses of *"equi-singularity"* on the given stratifications of $X$, along the strata. I think nonetheless that a refinement of known techniques will show that $X$ admits arbitrarily fine stratifications having these properties of equi-singularity (and with the $X_i$ regular and connected, but this does not matter for our present purpose).

By way of example, suppose that there are just two strata, the closed one $X_0$, and $X_1 = X \backslash X_0$. According to Artin's devissage, giving oneself a sheaf $F$ on $X$ is equivalent to giving a sheaf $F_0 = i_0^*(F)$ on $X_0$, a sheaf $F_1 (= i_1^* F)$ on $X_1$, and a homomorphism $F_0 \longrightarrow i_0^* i_{1*}^*(F_1) = \varphi(F_1)$, where $i_0$, $i_1$ are the inclusions $X_0 \xrightarrow{i_0} X \xleftarrow{i_1} X_1$. In order that $F$ should be $P$-constructible, it is necessary and sufficient that $F_0$ and $F_1$ should be locally constant (plus some accessory finiteness conditions...), on $X_0$ and $X_1$ respectively. Then (by virtue of the hypothesis of equi-singularity) the same will be true of $\varphi(F_1)$, and the category of sheaves in which we are interested can be expressed entirely in terms of the category of locally constant sheaves on $X_0$ and $X_1$, i.e. of the mere homotopy type of $X_0$ and $X_1$, except that we must make explicit the nature of the left exact functor $\varphi$. I think tht this should be possible, in the context of *schemes* in which I am placed (technically rather sophisticated), on introducing an "étale tubular neighbourhood" of $X_0$ in $X_1$ (which is a very interesting topos, but not associated to a scheme). But this technical construction is only a paraphrase of an extraordinary simple topological intuition, which I will make explicit, supposing, to fix the ideas, that the base field is $C$ and so one may work with locally compact spaces in the usual sense. The topological idea behind the hypothesis of equi-singularity that there exists a *tubular neighbourhood* $T$ of $X_0$ in $X$ retracting onto $X_0$ and such that the pair $(X_0, T)$ over $X_0$ should be a locally trivial bundle, i.e. that $T \backslash X_0$ is locally trivial over $X_0$. In fact if $\partial T$ is the "boundary" of $T$, which also should be a locally trivial bundle on $X_0$, then $T$ over

$X$ is the conic bundle (= bundle where fibres are cones) ($\simeq (\partial T \times I) \amalg_{\partial T} X_0$ where $I = [0,1]$, $\partial T \longrightarrow \partial T \times I$ is defined by $x \mapsto (x,1)$, and $\partial T \longrightarrow X_0$ is the projection) then $\overset{\circ}{T} = T \backslash X_0 \simeq \partial T \times [0,1[$ is $X_0$-homotopic to $\partial T$. If $X_0$ and $X_1$ are non singular, then so also will be $\overset{\circ}{T}$ and $\partial T$, which are then topologically smooth fibrations on $X_0$. Moreover, putting $\widetilde{T}_1 = X_1 \backslash \overset{\circ}{T}$, the inclusion $\widetilde{X}_1 \longrightarrow X_1$ is a homotopy equivalence, and $X$ can be recovered, up to homeomorphism, from the diagram of spaces

$$\begin{tikzcd} (\overset{\circ}{T} = T\backslash X_0 \simeq)\partial T \arrow[r, "j", "\text{inclusion}"'] \arrow[d, "\text{fibration}"', "p"] & \widetilde{X}_1(\simeq X_1) \\ X_0 & \end{tikzcd}$$

as an amalgamated sum. In terms of this diagram of spaces, the above functor $\varphi$ interprets immediately as

$$\varphi(F_1) \simeq p_* j^*(\widetilde{F}_1)$$

where $F_1 \longrightarrow \widetilde{F}_1$ is the restriction from $X_1$ to $\widetilde{X}_1$ (which is an equivalence of categories for the envisaged (locally constant) sheaves). Giving $F = (F_0, F_1, u : F_0 \longrightarrow \varphi F_1)$ can then also be made explicit as giving

$$F_0, \widetilde{F}_1, \widetilde{u} : p^*(F_0) \longrightarrow j^*(\widetilde{F}_1)$$

where $F_0(\widetilde{F}_1)$ are locally constant sheaves on $X_0$ (respectively $X_1$). It is necessary to recall that here $p$ is a real fibration, and $j$ is an inclusion (in practice, for the case $X_0$, $X_1$ smooth, the inclusion of the boundary in a manifold with boundary).

If you prefer, one can also take the diagram which is less pretty (but a little more canonical)

$$\begin{tikzcd} \overset{\circ}{T} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p'"'] & X_1 \\ X_0 & \end{tikzcd}$$

coming essentially to the same thing, as it is formed from spaces homotopic to the preceding one. One can even replace $X_0$ by $T$ ($X_0$ being a deformation retract of it) and write

$$\begin{array}{ccc} \overset{\circ}{T} & \longrightarrow & X_1 \\ {\scriptstyle p''}\big\downarrow & & \\ T & & \end{array}$$

where "literally" $p''$ is now an inclusion, but "morally", it is a *fibration* with very pretty fibres (notably compact of finite dimension, and moreover non-singular varieties - this is much better than that which is given by the yoga of Cartan-Serre "every continuous mapping is equivalent to a fibration"...). This last diagram however has the advantage of being amenable to a purely algebraic, direct construction, in the context of schemes, once one has developed the construction of étale tubular neighbourhoods[26].

The point I wish to come to, is that the consideration f sheaves (or complexes thereof, or $n$-stacks...) which are $P$-constructible on an $X$, where $P$ is a given "equi-singular" stratification, reduces in our particular cases to the knowledge of a diagram of ordinary *homotopy types* (or pro-types, if one comes back to the étale topology)

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{j} & X_1 \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \\ X_0 & & \end{array}$$

by taking local coefficients systems (or locally constant $n$-stacks) on the vertices $X_0$, $X_1$, which are related to each other by a homomorphism of compatibility of the type $p^*(F_0) \longrightarrow j^*(F_1)$. It should be an amusing exercise (which I have not yet done) to verify and to make explicit how the "six operations" on sheaves (either on $X$, or on a subspace which is a union of strata of $X$) can be expressed in this dictionary, in the case, let us say, of non-singular strata (otherwise, there will be a difficulty with the dualising complexes, which one would prefer to have as objects

[26]Tim Porter pointed out to me that work on étale tubular neighbourhoods was done by D.A. Cox: "algebraic tubular neighbourhoods I, II", Math. Scand. 42 (1978) 211-228, 229-242. I've not seen yet this work, and can't say therefore whether it meets the rather precise expectations I have for a theory of tubular neighbourhoods, for the needs of a dévissage theory of stratified schemes (or, more generally, stratified topoi)

in our category), and to reestablish the known formulae involving these operations. But it appears probable that, to carry out this transcription well, it would be necessary, rather than considering a diagram of type

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

in the homotopical category formed from the category of semi-simplicial sets, to consider the category of diagrams of semi-simplicial sets, and to pass from these to the homotopical category of fractions[27]

I have recently more or less made explicit, while thinking on the foundations of "tame topology", (i.e. where one eliminates from start all wild phenomena) how an equi-singular stratification, say with non singular strata, of a compact "tame space", gives rise canonically to a diagram of space which are manifolds with boundary, the arrows of the diagram being essentially locally trivial fibrations of manifolds with boundary on the others (with fibres which are compact manifolds with boundary), *and* the inclusion of the boundary in these manifolds with boundary (in fact, one finds slightly more general inclusions, certain boundaries which appear being endowed with an "elementary" cellular decomposition, i.e. the closed strata are again manifolds with boundary which are glued together along common parts of the boundary; and it is also necessary to consider the inclusions of these pieces one in another...), and can be reconstituted from this diagram by gluing[28]. In other words, one has a canonical devissage description of tame compact spaces $X$, eventually endowed with equi-singular stratifications with non-singular strata, in terms of finite diagrams of a precise nature made out o manifolds with boundary. When we are interested in sheaves (or complexes of sheaves, or $n$-stacks) which are $P$-constructible on $X$, where $P$ is such a fixed stratification, these may be described in terms of the envisaged diagram, of which only the "homotopy type" is to be retained. One foresees that the six operations on

[27]This is the typical game embodied in the "derivator" associated to the theory of usual homotopy types (compare section 69).

[28]Some more details on this program are outlines in *"esquisse d'un Programme"* (section 5), in *Réflexions Mathématiques 1*

these sheaves can be translated in an ad hoc manner to this homotopical context. Finally, if instead of having only one compact tame space $X$, one has, let us say, a tame morphism $f : X \longrightarrow Y$ of such objects, then by choosing equi-singular stratifications on $X$ and $Y$ adapted to $f$ (the strata of $X$ being in particular locally trivial fibrations on those of $Y\ldots$), one should find a "morphism" from the diagram of manifolds with boundary expressing $X$ int that expressing $Y$ (with natural morphisms which essentially reduce to fibrations of compact manifolds with boundaries on other such objects) in such a way that the four operations $_*$, $_!$, $\mathrm{L}g^*$, $g^!$ between $P_{X-}$ and $P_{Y-}$ constructible sheaves on $X$ and $Y$ (or on locally closed sub-spaces $X'$, $Y'$ which are union of strata, such that $f$ induces $g : X' \longrightarrow Y'$) can be expressed in terms of standard operations between the mere homotopy types. Finally, all these constructions, still partially hypothetical (there is work on the foundations to be done!) should be able to be paraphrased in the framework of excellent schemes, by making use of the machinery of étale tubular neighbourhoods. In one or other case, the "fine homotopy type" of a tame space, respectively of an excellent scheme, is defined by passage to the limit from "$P$-homotopy type" associated to finer and finer equi-singular stratifications $P$ (with non-singular strata).

This "fine" homotopy type would embody the knowledge, not only of sheaves or locally constant $n$-stacks, but (via a passage to the inductive limit) the knowledge of *all of them*. And it would depend, in a suitable sense, functorially on $X$. In the case of a scheme of finite type on an algebraically closed field $k$ say, the strongest cohomological and homotopical *finiteness theorem* would be expressed precisely in terms of a fine homotopy type, and would say that *the ordinary homotopy types which are their constituents are essentially "finite polyhedra"* - and even compact manifolds with boundary - or in more precise fashion, their profinite completions (in the sense of Artin-Mazur) prime to the characteristic $p$ of $k$ are those of such polyhedra. One sees clearly how to begin on such programme in characteristic 0, but one foresees supplementary amusement, or even mystery, in the case $p > 0$, for the varieties which, even birationally, resist being lifted to characteristic 0!

From these essentially geometric thoughts, I could not at this moment draw up a precise programme for developing adequate algebraic structures to express them. I restrict myself to several marginal remarks.

For a long time I have been intrigued by the idea of a "linearisation" of an (ordinary) homotopy type, i.e. questions of the type: if $X$ is a homotopy type, how much cohomological information of the type: cohomology of $X$ with variable coefficients $M$ (constant or twisted constant), multiplicative structure $\mathrm{H}^i(X,M) \times \mathrm{H}^j(X,N) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(X,M \otimes N)$, then eventually other cohomology operations - is it necessary to have to reconstruct entirely the homotopy type? (say, in this preliminary pre-derived category approach, assuming given the fundamental group $\pi_1$, and therefore the category of constant twisted coefficients ($= \pi_1$-modules), the functors $\mathrm{H}^i(-,M)$ over these, together with the structure of cohomological functors relative to exact sequences, the structure of cup-product, etc. - related by certain formal properties?) Once one has at one's disposal the language of derived categories: the sub-category of the derived category of abelian complexes on $X$, formed from complexes the sheaves of cohomology of which are locally constant on $X$, with its triangulated structure and its multiplicative structure (and eventually …) gives a more satisfying candidate for hoping to recover the homotopy type. I don't really know if this suffices the recovery indeed[29], but on the other hand I have no doubt that on pursuing "linearisation" to the end, that is to say by going to the *non-abelian* framework, and working with the $(n+1)$-category (without any supplementary structure on it!) of locally constant $n$-stacks of constructible sheaves on $X$, for all $n$, one manages to reconstruct the homotopy type via its fundamental $\infty$-groupoid, as explained in my previous letter and recalled in this one. (This signifies in particular that all the possible and imaginable cohomology operations are already included in the data furnished by such a system of $n$-categories…).

Similarly, the more elaborate homotopy type, which are related to certain finite diagrams, which one can associate to certain types of stratification $P$ of tame

[29]I was informed by knowledgeable people soon later that the answer is well known to be negative, by working with "rational homotopy types" (the cohomology of which is made up with vector spaces over Q). It is well known indeed that a 1-connected rational homotopy type is *not* known from its rational cohomology ring alone, which contains already all the information I was contemplating. At last this is so if we assume that $\mathrm{H}^i(X)$ is of finite dimension over Q for all $i$. But is there a counterexample still when $X$ is a homotopy type "of finite type"?

topological spaces $X$, let's say, should correspond in as perfect a fashion to the $(n+1)$-category of $n$-stacks on $X$ which are locally constant on each of the strata of $P$ (say: which are subordinated to $P$). If the above description of homotopy types by the "locally constant derived category" was valid indeed, one would expect to recover here the mixed homotopy type from the corresponding sub-category of the derived category of abelian sheaves on $X$, provided by the complexes which have locally constant cohomology on each of the strata - with also the operations , , plus in case of need, the four operations $\mathrm{R}g_!$, $\mathrm{R}g_*$, $\mathrm{L}g^*$, $g^!$ for the induced $g : Z' \longrightarrow Z''$ of the various locally closed unions of strata…The problem here is that we don't at present even know what is a triangulated category, not any more than what is its non-commutative version, described probably more simple and more fundamentally: a "homotopical category" with operations of taking "fibres" and "cofibres"[30].

It is surely time that I finish this "lettre-fleuve", which is becoming more and more vague. Just one question: what is this marvellous formula of Bloch-Quillen to which you allude, of which I have never heard, and which makes my mouth water?

Very cordially yours,

[30]This "problem" is met with by the notion of a "derivator", which "was in the air" already by the late sixties, but was never developed (instead even derived categories became tabu in the seventies…).

## Letter to D. Quillen, 19.2.1983

Les Aumettes 19.2.1983

Dear Daniel,

Last year Ronnie Brown from Bangor sent me a heap of reprints and preprints by him and a group of friends, on various foundational matters of homotopical algebra. I did not really dig through any of this, as I kind of lost contact with the technicalities of this kind (I was never too familiar with the homotopy techniques anyhow, I confess) – but this reminded me of a few letters I had exchanged with Larry Breen in 1975, where I had developed an outline of a program for a kind of "topological algebra", viewed as a synthesis of homotopical and homological algebra, with special emphasis on topoi – most of the basic intuitions in this program arising from various backgrounds in algebraic geometry. Some of those intuitions we discussed, I believe, at IHES eight or nine years before, then, at a time when you had just written up your nice ideas on axiomatic homotopical algebra,Quillen1967 published since in Springer's Lecture Notes. I write you under the assumption that you have not entirely lost interest for those foundational questions you were looking at more than fifteen years ago. One thing which strikes me, is that (as far as I know) there has not been any substantial progress since – it looks to me that an understanding of the basic structures underlying homotopy theory, or even homological algebra only, is still lacking – probably because the few people who have a wide enough background and perspective enabling them to feel the main questions, are devoting their energies to things which seem more directly rewarding. Maybe even a wind of disrepute for any foundational matters whatever is blowing nowadays[31]! In this respect, what seems to me even more striking than the lack of proper foundations for homological and homotopical algebra, is the absence I

[31] When making this suggestion about there being a "wind of disrepute for any foundational matters whatever", I little suspected that the former friend to whom I was communicating my ponderings as they came, would take care of providing a most unexpected confirmation. As a matter of fact, this letter never got an answer, nor was it even read! Upon my inquiry nearly one year later, this colleague appeared sincerely surprised that I could have expected even for a minute that he might possibly read a letter of mine on mathematical matters, well knowing the kind of "general nonsense" mathematics that was to be expected from me…

daresay of proper foundations for topology itself! I am thinking here mainly of the development of a context of "tame" topology, which (I am convinced) would have on the everyday technique of geometric topology (I use this expression in contrast to the topology of use for analysts) a comparable impact or even a greater one, than the introduction of the point of view of schemes had on algebraic geometry[32]. The psychological drawback here I believe is not anything like messiness, as for homological and homotopical algebra (as for schemes), but merely the inrooted inertia which prevents us so stubbornly from looking innocently, with fresh eyes, upon things, without being dulled and imprisoned by standing habits of thought, going with a familiar context – *too* familiar a context! The task of working out the foundations of tame topology, and a corresponding structure theory for "stratified (tame) spaces", seems to me a lot more urgent and exciting still than any program of homological, homotopical or topological algebra.

The motivation for this letter was the latter topic however. Ronnie Brown and his friends are competent algebraists and apparently strongly motivated for investing energy in foundational work, on the other hand they visibly are lacking the necessary scope of vision which geometry alone provides[33]. They seem to me kind of isolated, partly due I guess to the disrepute I mentioned before – I suggested to try and have contact with people such as yourself, Larry Breen, Illusie and others, who have the geometric insight and who moreover, may not think themselves too good for indulging in occasional reflection on foundational matters and in the process help others do the work which should be done.

At first sight it has seemed to me that the Bangor group[34] had indeed come to work out (quite independently) one basic intuition of the program I had envisioned in those letters to Larry Breen – namely that the study of $n$-truncated homotopy types (of semisimplicial sets, or of topological spaces) was essentially

[32]For some particulars about a program of "tame topology", I refer to "esquisse d'un Programme", sections 5 and 6, which is included in Réflexions Mathématiques 1.

[33]I have to apologise for this rash statement, as later correspondence made me realise that "Ronnie Brown and his friends" do have stronger contact with "geometry" than I suspected, even though they are not too familiar with algebraic geometry!

[34]The "Bangor group" is made up by Ronnie Brown and Tim Porter as the two fixed points, and a number of devoted research students. Moreover Ronnie Brown is working in close contact with J.L. Loday and J. Pradines in France.

equivalent to the study of so-called $n$-groupoids (where $n$ is any natural integer). This is expected to be achieved by associating to any space (say) $X$ its "fundamental $n$-groupoid" $\Pi_n(X)$, generalizing the familiar Poincaré fundamental groupoid for $n = 1$. The obvious idea is that 0-objects of $\Pi_n(X)$ should be the points of $X$, 1-objects should be "homotopies" or paths between points, 2-objects should be homotopies between 1-objects, etc. This $\Pi_n(X)$ should embody the $n$-truncated homotopy type of $X$, in much the same way as for $n = 1$ the usual fundamental groupoid embodies the 1-truncated homotopy type. For two spaces $X, Y$, the set of homotopy-classes of maps $X \longrightarrow Y$ (more correctly, for general $X, Y$, the maps of $X$ into $Y$ in the homotopy category) should correspond to $n$-equivalence classes of $n$-functors from $\Pi_n(X)$ to $\Pi_n(Y)$ – etc. There are very strong suggestions for a nice formalism including a notion of geometric realization of an $n$-groupoid, which should imply that any $n$-groupoid (or more generally of an $n$-category) is relativized over an arbitrary topos to the notion of an $n$-gerbe (or more generally, an $n$-stack), these become the natural "coefficients" for a formalism of non-commutative cohomological algebra, in the spirit of Giraud's thesis.

But all this kind of thing for the time being is pure heuristics – I never so far sat down to try to make explicit at least a definition of $n$-categories and $n$-groupoids, of $n$-functors between these etc. When I got the Bangor reprints I at once had the feeling that this kind of work had been done and the homotopy category expressed in terms of -groupoids. But finally it appears this is not so, they have been working throughout with a notion of -groupoid too restrictive for the purposes I had in mind (probably because they insist I guess on strict associativity of compositions, rather than associativity up to a (given) isomorphism, or rather, homotopy) – to the effect that the simply connected homotopy types they obtain are merely products of Eilenberg-MacLane spaces, too bad! They do not seem to have realized yet that this makes their set-up wholly inadequate to a sweeping foundational set-up for homotopy. This brings to the fore again to work out the suitable definitions for $n$-groupoids – if this is not done yet anywhere. I spent the afternoon today trying to figure out a reasonable definition, to get a feeling at least of where the difficulties are, if any. I am guided mainly of course by the topological interpretation. It will be short enough to say how far I got. The main part of the structure it seems is expressed by the sets $F_i$ $(i \in)$ of $i$-objects, the source, target and identity maps

$$s_1^i, t_1^i : F_i \longrightarrow F_{i-1} \quad (i \geq 1)$$
$$k_1^i : F_i \longrightarrow F_{i+1} \quad (i \in)$$

and the symmetry map (passage to the inverse)

$$_i : F_i \longrightarrow F_i \quad (i \geq 1),$$

satisfying some obvious relations: $k_1^i$ is right inverse to the source and target maps $s_1^{i+1}, t_1^{i+1}$, $_i$ is an involution and "exchanges" source and target, and moreover for $i \geq 2$

*notation:* $d_a = k_1^i(a)$, $\check{u} =_i (u)$

$$s_1^{i-1} s_1^i = s_1^{i-1} t_1^i \left( s_2^i : F_i \longrightarrow F_{i-2} \right)$$
$$t_1^{i-1} s_1^i = t_1^{i-1} t_1^i \left( t_2^i : F_i \longrightarrow F_{i-2} \right);$$

thus the composition of the source and target maps yields, for $0 \leq j \leq i$, just *two* maps

$$s_\ell^i, t_\ell^i : F_i \longrightarrow F_{i-\ell} = F_j \quad (\ell = i - j).$$

The next basic structure is the composition structure, where the usual compoisition of arrows, more specifically of $i$-objects $(i \geq 1)$ $v \circ u$ (defined when $t_1(u) = s_1(v)$) must be supplemented by the Godement-type operations $\mu * \lambda$ when $\mu$ and $\lambda$ are "arrows between arrows", etc. Following this line of thought, one gets the composition maps

$$(u, v) \mapsto (v *_\ell u) : (F_i, s_\ell^i) \times_{F_{i-\ell}} (F_i, s_\ell^i) \longrightarrow F_i,$$

the composition of $i$-objects for $1 \leq \ell \leq i$, being defined when the $\ell$-target of $u$ is equal to the $\ell$-source of $v$, and then we have

$$\left.\begin{aligned} s_1^i(v *_\ell u) &= s_1^i(v) *_{\ell-1} s_1^i(u) \\ t_1^i(v *_\ell u) &= t_1^i(v) *_{\ell-1} s_1^i(u) \end{aligned}\right\} \quad \ell \geq 2 \text{ i.e. } \ell - 1 \geq 1$$

and for $\ell = 1$

$$s_1(v *_1 u) = s_1(u)$$
$$t_1(v *_1 u) = t_1(v)$$

(NB the operation $v *_1 u$ is just the usual composition $v \circ u$).

One may be tempted to think that the preceding data exhaust the structure of -groupoids, and that they will have to be supplemented only by a handful of suitable *axioms*, one being *associativity* for the operation $\overset{i}{\underset{\ell}{*}}$, which can be expressed essentially by saying that that composition operation turns $F_i$ into the set of arrows of a category having $F_{i-\ell}$ as a set of objects (with the source and target maps $s^i_\ell$ and $t^i_\ell$, and with identity map $k^{i-\ell}_\ell : F_{i-\ell} \longrightarrow F_i$ the composition of the identity maps $F_{i-\ell} \longrightarrow F_{i-\ell+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow F_i$), and another being the Godement relation

$$(v' *_\alpha v) *_\nu (u' *_\alpha u) = (v' *_\nu u') *_\alpha (v *_\nu u)$$

(with the assumptions $1 \leq \alpha \leq \nu$, and $u, u', v, v'' i n F_i$ and

$$\begin{cases} t_\alpha(u) = s_\alpha(u') \\ t_\alpha(v) = s_\alpha(v') \end{cases} \quad t_\nu(u) = s_\nu(v) = s_\nu(v') = t_\nu(u')$$

implying that both members are defined), plus the two relations concerning the inversion of $i$-objects ($i \geq 1$) $u \mapsto \check{u}$,

$$u *_1 \check{u} = \mathrm{id}_{t_1(u)}, \qquad \check{u} *_1 u = \mathrm{id}_{s_1(u)}, \qquad (\check{v} *_\ell \check{u}) = ? \quad (\ell \geq 2)$$

It just occurs to me, by the way, that the previous description of basic (or "primary") data for an -groupoid is already incomplete in some rather obvious respect, namely that the symmetry-operation $_i : u \mapsto \check{u}$ on $F_i$ must be complemented by $i - 1$ similar involutions on $F_i$, which corresponds algebraically to the intuition that when we have an $(i + 1)$-arrow $\lambda$ say between two $i$-arrows $u$ and $v$, then we must be able to deduce from it another arrow from $\check{u}$ to $\check{v}$ (namely $u \mapsto \check{u}$ has a "functorial character" for variable $u$)? This seems a rather anodine modification of the previous set-up, and is irrelevant for the main point I want to make here, namely: that for the notion of -groupoids we are after, all the equalities just envisioned in this paragraph (and those I guess which will ensure naturality by the necessary extension of the basic involution on $F_i$) should be replaced by "homotopies", namely by $(i + 1)$-arrows between the two members. These arrows should be viewed, I believe, as being part of the data, they appear here as a kind of "secondary" structure. The difficulty which appears now is to work out the natural coherence properties concerning this secondary structure. The first thing I could think of is the "pentagon axiom" for the associativity data, which occurs when looking at associativities for the compositum (for $\overset{i}{\underset{\ell}{*}}$ say) of four factors. Here again the first reflex would be to write down, as usual, an *equality* for two compositions of associativity isomorphisms, exhibited in the pentagon diagram. One suspects however that such equality should, again, be replaced by a "homotopy"-arrow, which now appears as a kind of "ternary" structure – before even having exhausted the list of coherence "relations" one could think of with the respect to the secondary structure! Here one seems caught at first sight in an infinite chain of ever "higher", and presumably, messier structures, where one is going to get hopelessly lost, unless one discovers some simple guiding principle for shedding some clarity in the mess.

I thought of writing you mainly because I believe that, if anybody, you should know if the kind of structure I am looking for has been worked out – maybe even *you* did? In this respect, I vaguely remember that you had a description of $n$-categories in terms of $n$-semisimplicial sets, satisfying certain exactness conditions, in much the same way as an ordinary category can be interpreted, via its "nerve", as a particular type of semisimplicial set. But I have no idea if your definition applied only for describing $n$-categories with strict associativities, or not[35].

Still some contents in the spirit of your axiomatics of homotopical algebra – in order to make the question I am proposing more seducing maybe to you! One comment is that presumably, the category of -groupoids (which is still to be defined) is a "model category" for the usual homotopy category; this would be at any rate one plausible way to make explicit the intuition referred to before, that a homotopy type is "essentially the same" as an -groupoid up to -equivalence. The other comment: the construction of the fundamental -groupoid of a space, disregarding for the time being the question of working out in full the pertinent structure on this messy object, can be paraphrased in any model category in your sense, and yields a functor from this category to the category of -groupoids, and hence (by geometric realization, or by localization) also to the usual homotopy category[36]. Was this functor obvious beforehand? It is of a non-trivial nature only

[35] Definitely only for *strict* associativity.

[36] This idea is taken up again in section 12. The statement made here is a little rash, as for

when the model category is *not* pointed – as a matter of fact the whole construction can be carried out canonically, in terms of a "cylinder object" $I$ for the final object $e$ of the model category, playing the role of the unit argument. It's high time to stop this letter – please excuse me if it should come ten or fifteen years too late, or maybe one year too early. If you are not interested for the time being in such general nonsense, maybe you know someone who is …

Very cordially yours

existence and uniqueness (in a suitable sense) of this functor. Compare note ([17]) below.

## Lieben an G. Faltings, 27.6.1983

27.6.1983

Lieber Herr Faltings,

Vielen Dank für ihre rasche Antwort und Übersendung der Separata!

## Letter to G. Faltings, 27.6.1983

27.6.1983

Dear Mr. Faltings,

Many thanks for your quick answer and for sending me your reprints! Your comments on the so-called "Theory of Motives" are of the usual kind, and for a large part can be traced to a tradition which is deeply rooted in mathematics. Namely that research (possibly long and exacting) and attention is devoted only to mathematical situations and relations for which one entertains not merely the hope of coming to a provisional, possibly in part conjectural understanding of a hitherto mysterious region – as it has indeed been and should be the case in the natural sciences – but also at the same time the prospect of a possibility of permanently supporting the newly gained insights by means of conclusive arguments. This attitude now appears to me as an extraordinarily strong psychological obstacle to the development of the visionary power in mathematics, and therefore also to the progress of mathematical insight in the usual sense, namely the insight which is sufficiently penetrating or comprehending to finally lead to a "proof". What my experience of mathematical work has taught me again and again, is that the proof always springs from the insight, and not the other way round – and that the insight itself has its source, first and foremost, in a delicate and obstinate feeling of the relevant entities and concepts and their mutual relations. The guiding thread is the inner coherence of the image which gradually emerges from the mist, as well as its consonance with what is known or foreshadowed from other sources – and it guides all the more surely as the "exigence" of coherence is stronger and more delicate.

To return to Motives, there exists to my knowledge no "theory" of motives, for the simple reason that nobody has taken the trouble to work out such a theory. There is an impressive wealth of available material both of known facts and anticipated connections – incomparably more, it seems to me, than ever presented itself for working out a physical theory! There exists at this time a kind of "yoga des motifs", which is familiar to a handful of initiates, and in some situations provides a firm support for guessing precise relations, which can then sometimes be actually proved in one way or another (somewhat as, in your last work, the statement on the Galois action on the Tate module of abelian varieties). It has the status, it seems to me, of some sort of secret science – Deligne seems to me to be the person who is most fluent in it. His first [published] work, about the degeneration of the Leray spectral sequence for a smooth proper map between algebraic varieties over $C$, sprang from a simple reflection on "weights" of cohomology groups, which at that time was purely heuristic, but now (since the proof of the Weil conjectures) can be realised over an arbitrary base scheme. It is also clear to me that Deligne's generalisation of Hodge theory finds for a large part its source in the unwritten "Yoga" of motives – namely in the effort of establishing, in the framework of transcendent Hodge structures, certain "facts" from this Yoga, in particular the existence of a filtration of the cohomology by "weights", and also the semisimplicity of certain actions of fundamental groups.

Now, some words about the "Yoga" of anabelian geometry. It has to do with "absolute" alg. geometry, that is over (arbitrary) ground fields which are finitely generated over the prime fields. A general fundamental idea is that for certain, so-called "anabelian", schemes $X$ (of finite type) over $K$, the geometry of $X$ is completely determined by the (profinite) fundamental group $\pi_1(X,\xi)$ (where $\xi$ is a "geometric point" of $X$, with value in a prescribed algebraic closure $\overline{K}$ of $K$), together with the extra structure given by the homomorphism:

$$\pi_1(X,\xi) \longrightarrow \pi_1(K,\xi) = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K). \tag{1}$$

The kernel of this homomorphism is the "geometric fundamental group"

$$\pi_1(\overline{X},\xi) \quad (\overline{X} = X \otimes_K \overline{K}), \tag{2}$$

which is also the profinite compactification of the transcendent fundamental group, when $K$ is given as a subfield of the field $C$ of the complex numbers. The image of (1) is an open subgroup of the profinite Galois group, which is of index 1 exactly when $\overline{X}$ is connected.

The first question is to determine which schemes $X$ can be regarded as "anabelian". On this matter, I will in any case restrict myself to the case of non-singular $X$. And I have obtained a completely clear picture only when $\dim X = 1$.

In any case, being anabelian is a purely geometric property, that is, one which depends only on $X$, defined over the algebraic closure $\overline{K}$ (or the corresponding scheme over an arbitrary algebraically closed extension of $\overline{K}$, such as $C$). Moreover, $X$ should be anabelian if and only if its connected components are. Finally (in the one dimensional case), a (non-singular connected) curve over $\overline{K}$ is anabelian when its Euler-Poincaré characteristic is $< 0$, in other words, when its fundamental group is not abelian; this latter formulation is valid at least in the characteristic zero case, or in the case of a proper ("compact") curve – otherwise, one should consider the "prime-to-$p$" fundamental group. Other equivalent formulations: the group scheme of the automorphisms should be of dimension zero, or still the automorphism group should be finite. For a curve of type $(g,\nu)$, where $g$ is the genus, and $\nu$ the number of "holes" or "points at infinity", then the anabelian curves are exactly those whose type is not one of

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (0,2) \quad \text{and} \quad (1,0)$$

in other words

$$2g+\nu > 2 \quad (\text{i.e. } -\chi = 2g-2+\nu > 0)$$

When the ground field is $C$, the anabelian curves are exactly those whose (transcendent) universal cover is "hyperbolic", namely isomorphic to the Poincaré upper half plane – that is, exactly those which are "hyperbolic" in the sense of Thurston.

In any case, I regard a variety as "anabelian" (I could say "elementary anabelian"), when it can be constructed by successive smooth fibrations from anabelian curves. Consequently (following a remark of M.Artin), any point of a smooth variety $X/K$ has a fundamental system of (affine) anabelian neighbourhoods.

Finally, my attention has been lately more and more strongly attracted by the moduli varieties (or better modular *multiplicities*) $M_{g,\nu}$ of algebraic curves. I am rather convinced that these also may be approached as "anabelian", namely that their relation with the fundamental group is just as tight as in the case of anabelian curves. I would assume that the same should hold for the multiplicities of moduli of polarized abelian varieties.

A large part of my reflections of two years ago were restricted to the case of char. zero, an assumption which, as a precaution, I will now make. As I have not occupied myself with this complex of questions for more than a year, I will rely on my memory, which at least is more easily accessible than a pile of notes – I hope I will not weave too many errors into what follows! A point of departure – among others – was the known fact that for varieties $X$, $Y$ over an algebraically closed field $K$, when $Y$ can be embedded into a [quasi-]abelian variety $A$, a map $X \longrightarrow Y$ is determined, up to a translation of $A$, by the corresponding map on $\mathrm{H}^1$ ($\ell$-adic). From this, it follows in many situations (as when $Y$ is "elementary anabelian"), that for a dominant morphism $f$ (i.e. $f(X)$ dense in $Y$), $f$ is known exactly when $\mathrm{H}^1(f)$ is. Yet the case of a constant map cannot obviously be included. But precisely the case when $X$ is reduced to a point is of particular interest, if one is aiming at a "characterization" of the points of $Y$.

Going now to the case of a field $K$ of finite type, and replacing $\mathrm{H}^1$ (namely the "abelianised" fundamental group) with the full fundamental group, one obtains, in the case of an "elementary anabelian" $Y$, that $f$ is known when $\pi_1(f)$ is known "up to inner automorphism". If I understand correctly, one may work here with the quotients of the fundamental group which are obtained by replacing (2) with the corresponding abelianised group $\mathrm{H}^1(\overline{X}, \hat{Z})$, instead of with the full fundamental group. The proof follows rather easily from the Mordell-Weil theorem stating that the group $A(K)$ is a finitely generated $Z$-module, where $A$ is the "jacobienne généralisée" of $Y$, corresponding to the "universal" embedding of $Y$ into a torsor under a quasi-abelian variety. Here the crux of the matter is the fact that a point of $A$ over $K$, i.e. a "section" of $A$ over $K$, is completely determined by the corresponding splitting of the exact sequence

$$(3) \qquad 1 \longrightarrow \mathrm{H}_1(\overline{A}) \longrightarrow \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(K) \longrightarrow 1$$

(up to inner automorphism); in other words by the corresponding cohomology class in

$$\mathrm{H}^1(K, \pi_1(\overline{A})),$$

where $\pi_1(A)$ can be replaced by the $\ell$-adic component, namely the Tate module $T_\ell(\overline{A})$.

From this result, the following easily follows, which rather amazed me two and a half years ago: let $K$ and $L$ be two fields of finite type (called "absolute fields" for short), then a homomorphism is completely determined when one knows the corresponding map

$$\pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(L) \tag{4}$$

of the corresponding "outer fundamental groups" (namely when this map is known up to inner automorphism). This strongly recalls the topological intuition of $K(\pi,1)$ spaces and their fundamental groups – namely the homotopy classes of the maps between the spaces are in one-to-one correspondence with the maps between the outer groups. However, in the framework of absolute alg. geometry (namely over "absolute" fields), the homotopy class of a map already determines it. The reason for this seems to me to lie in the extraordinary *rigidity* of the full fundamental group, which in turn springs from the fact that the (outer) action of the "arithmetic part" of this group, namely $\pi_1(K) = \mathrm{Gal}(K/L)$, is extraordinarily strong (which is also reflected in particular in the Weil-Deligne statements).

The last statement ("The reason for this…") came quickly into the type- writer – I now remember that for the above statement on *field* homomorphisms, it is in no way necessary that they be "absolute" – it is enough that they should be of finite type over a common ground field $k$, as long as one restricts oneself to $k$-homomorphisms. Besides, it is obviously enough to restrict attention to the case when $k$ is algebraically closed. On the other hand, the aforementioned "rigidity" plays a decisive role when we turn to the problem of characterizing those maps (4) which correspond to a homomorphism $K \longrightarrow L$. In this perspective, it is easy to conjecture the following: when the ground field $k$ is "absolute", then *the* "geometric" outer homomorphisms are exactly those which commute with the "augmentation homomorphism" into $\pi_1(K)$. [see the correction in the PS: the image must be of finite index] Concerning this statement, one can obviously restrict oneself to the case when $k$ is the prime field, i.e. $Q$ (in char. zero). The "Grundobjekt" of anabelian alg. geometry in char. zero, for which the prime field is $Q$, is therefore the group

$$\Gamma = \pi_1(Q) = \mathrm{Gal}(\overline{Q}/Q), \tag{5}$$

where $\overline{Q}$ stands for the algebraic closure of $Q$ in $C$.

The above conjecture may be regarded as the main conjecture of "birational" anabelian alg. geometry – it asserts that the category of "absolute birational alg. varieties" in char. zero can be embedded into the category of Γ-augmented profinite groups. There remains the further task of obtaining a ("purely geometric") description of the group Γ, and also of understanding *which* Γ-augmented profinite groups are isomorphic to some $\pi_1(K)$. I will not go into these questions for now, but will rather formulate a related and considerably sharper conjecture for anabelian curves, from which the above follows. Indeed I see two apparently different but equivalent formulations:

1) Let $X$, $Y$ be two (connected, assume once and for all) anabelian curves over the absolute field of char. zero, and consider the map

$$(6) \qquad \mathrm{Hom}_K(X,Y) \longrightarrow_{\pi_1(K)} (\pi_1(X), \pi_1(Y)),$$

where denotes the set of outer homomorphisms of the profinite groups, and the index $\pi_1(K)$ means the compatibility with augmentation into $\pi_1(K)$. From the above, one knows that this map is injective. I conjecture that it is bijective [see the correction in the P.S.]

2) This second form can be seen as a reformulation of 1) in the case of a constant map from $X$ into $Y$ . Let $\Gamma(X/K)$ be the set of all $K$-valued points (that is "sections") of $X$ over $K$; one considers the map

$$(7) \qquad \Gamma(X/K) \longrightarrow_{\pi_1(K)} (\pi_1(K), \pi_1(X)),$$

where the second set is thus the set of all the "splittings" of the group extension (3) (where $A$ is replaced by $X$ ˘ $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(K)$ is actually surjective, at least if $X$ has a $K$-valued point, so that $X$ is also "geometrically connected"), or better the set of conjugacy classes of such splittings under the action of the group $\pi_1(X)$. It is known that (7) is injective, and the main conjecture asserts that it is bijective [see the correction below].

Formulation 1) follows from 2), with $K$ replaced by the function field of $X$. Moreover, it is indifferent whether $X$ is anabelian or not and, if I am not mistaken, assertion 1) follows even for arbitrary non-singular $X$ (without the assumption dim

$X=1$). Concerning $Y$ , it follows from the conjecture that assertion 1) remains true, as far as $Y$ is "elementary anabelian" [see the correction in the PS], and correspondingly of course for assertion 2). This in principle now gives the possibility, by applying Artin's remark, to obtain a complete description of the category of schemes of finite type over $K$ "en termes de" $\Gamma(K)$ and systems of profinite groups. Here again I have typed something a little too quickly, as indeed the main conjecture should first be justified and completed with an assertion about which (up to isomorphism) complete $\Gamma(K)$-augmented profinite groups arise from anabelian curves over $K$. Concerning only an assertion of "pleine fidélité" as in formulations 1) and 2) above, it should be possible to deduce the following, without too much difficulty, from these assertions, or even already (if I am not mistaken) from the above considerably weaker birational variant. Namely, let $X$ and $Y$ be two schemes which are "essentially of finite type over $Q$", e.g. each one is of finite type over an absolute field of char. zero. (remaining undetermined). $X$ and $Y$ need to be neither non-singular nor connected, let alone "normal" or the like – but they must be assumed to be reduced. I consider the étale topoi $X_{\text{ét}}$ and $Y_{\text{ét}}$, and the map

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{top}}(X_{\text{ét}}, Y_{\text{ét}}),$$

where $\mathrm{Hom}_{\text{top}}$ denotes the (set of) homomorphisms of the topos $X_{\text{ét}}$ in $Y_{\text{ét}}$, and means that one passes to the (set of) isomorphism classes. (It should be noted moreover that the category $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{top}}(X_{\text{ét}}, Y_{\text{ét}})$ is *rigid*, namely that there can be only one isomorphism between two homomorphisms $X_{\text{ét}} \longrightarrow Y_{\text{ét}}$. When $X$ and $Y$ are multiplicities and not schemes, the assertion below should be replaced with a correspondingly finer one, namely one should state an *equivalence of categories* of $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ with $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{top}}(X_{\text{ét}}, Y_{\text{ét}})$.) It is essential here that $X_{\text{ét}}$ and $Y_{\text{ét}}$ are considered simply as topological spaces, that is without their structure sheaves, whereas the left-hand side of (8) can be interpreted as $\mathrm{Hom}_{\text{top.ann.}}(X_{\text{ét}}, Y_{\text{ét}})$. Let us first notice that from the already "known" facts, it should follow without difficulty that (8) is injective. In fact I now realize that in the description of the right-hand side of (8), I forgot an important element of the structure, namely that $X_{\text{ét}}$ and $Y_{\text{ét}}$ must be considered as topoi *over the absolute base* $Q_{\text{ét}}$, which is completely described by the profinite group $\Gamma = \pi_1(K)$ (5). So $\mathrm{Hom}_{\text{top}}$ should be read $\mathrm{Hom}_{\text{top}}/Q_{\text{ét}}$. With this correction, we can now state the tantalizing conjecture that (8) should be *bijective*. This may not be [altogether] correct for *the* reason that there can exist radicial morphisms $Y \longrightarrow X$ (so-called "universal homomorphisms"), which produce a topological equivalence $Y_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} X_{\text{ét}}$, without being an isomorphisms, so that there does not exist an inverse map $X \longrightarrow Y$, whereas it does exist for the étale topoi. If one now assumes that $X$ is *normal*, then I conjecture that (8) is bijective. In the general case, it should be true that for any $\varphi$ on the right-hand side, one can build a diagram

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \searrow^{f} & \\ X & & Y \end{array}$$

(where $g$ is a "universal homomorphism"), from which $\varphi$ arises in the obvious way. I even conjecture that the same assertion is still valid without the char. zero assertion, that is when $Q$ is replaced by $Z$ – which is connected with the fact that the "birational" main conjecture must be valid in arbitrary characteristic, as long as we replace the "absolute" fields with their "perfect closures" $K^{p^\infty}$, which indeed have the same $\pi_1$.

I am afraid I have been led rather far afield by this digression about arbitrary schemes of finite type and their étale topoi – you may be more interested by a third formulation of the main conjecture, which sharpens it a little and has a peculiarly "geometric" ring. It is also the formulation I told Deligne about some two years ago, and of which he told me that it would imply Mordell's conjecture. Again let $X$ be an anabelian geometrically connected curve over the absolute field $K$ of char. zero, $\widetilde{X}$ its universal cover, considered as a scheme (but not of finite type) over $\overline{K}$, namely as the universal cover of the "geometric" curve $\overline{X}$. It stands here as a kind of algebraic analogue for the transcendental construction, in which the universal cover is isomorphic to the Poincaré upper half-plane. I also consider the completion $X^\wedge$of $X$ (which is thus a projective curve, not necessarily anabelian, as $X$ can be of genus 0 or 1), together with its normalisation $\widetilde{X}^\wedge$with respect to $\widetilde{X}$, which represents a kind of compactification of $\widetilde{X}$. (If you prefer, you can assume from the start that $X$ is proper, so that $X = X^\wedge$and $\widetilde{X} = \widetilde{X}^\wedge$.) The group $\pi_1(X)$ can be regarded as the group of the $X$-automorphisms of $\widetilde{X}$, and it acts also on the "compactification" $\widetilde{X}^\wedge$. This action commutes with the action on $\overline{K}$ via $\pi_1(K)$. I am now interested in the corresponding action

$$\text{Action of } \pi_1(X) \text{ on } \widetilde{X}^\wedge(\overline{K}),$$

(the [set of] $K$-valued points, or what comes to the same thing, the points of $X^\wedge$ distinct from the generic point), and in particular, for a given section of (3)

$$\pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(X),$$

I consider the corresponding action of the Galois group $\pi_1(K)$. The conjecture is now that *the latter action has (exactly) one fixed point*.

That it can have at most one fixed point follows from the injectivity in (7), or in any case can be proved along the same lines, using the Mordell-Weil theorem. What remains unproved is the *existence* of the fixed point, which is more or less equivalent to the surjectivity of (7). It now occurs to me that the formulation of the main conjecture via (7), which I gave a while ago, is correct only in the case where $X$ is proper – and in that case, it is in effect equivalent to the third (just given) formulation. In the contrary case where $X$ is not proper, so has "points infinitely far away", each of these points clearly furnishes a considerable packet of classes of sections (which has the power of the continuum), which *cannot* be obtained via points lying at a finite distance. These correspond to the case of a fixed point in $\widetilde{X}^\wedge$ which does not lie in $\widetilde{X}$. The uniqueness of the fixed point means among other things, besides the injectivity of (7), that the "packets" which correspond to different points at infinity have empty intersection; and thus any class of sections which does not come from a finite point can be assigned to a uniquely defined point at infinity.

The third formulation of the main conjecture was stimulated by certain transcendental reflections on the action of finite groups on complex algebraic curves and their (transcendentally defined) universal covers, which have played a decisive role in my reflections (during the first half of 1981, that is some two years ago) on the action of $\Gamma$ on certain profinite anabelian fundamental groups (in particular that of $\mathbb{P}^1(0, 1, \infty)$). (This role was mainly that of a guiding thread into a previously completely unknown region, as the corresponding assertions in char $p > 0$

remained unproved, and still do today.) To come back to the action of the Galois groups as $\pi_1(K)$, these appear in several respects as analogous to the action of finite groups, something which for instance is expressed in the above conjecture in a particularly striking and precise way.

I took up the anabelian reflections again between December 81 and April 82, that time with a different emphasis – namely in an effort toward understanding the many-faceted structure of the [Teichmüller] fundamental groups $T_{g,\nu}$ (or better, the fundamental groupoids) of the multiplicities of moduli $\overline{M}_{g,\nu}$, and the action of $\Gamma$ on their profinite completions. (I would like to return to this investigation next fall, if I manage to extricate myself this summer from the writing up of quite unrelated reflections on the foundations of cohomological resp. homotopical algebra, which has occupied me for four months already.) I appeal to your indulgence for the somewhat chaotic presentation of a circle of ideas which intensively held my attention for six months, but with which I have had for the past two years only very fleeting contacts, if any. If these ideas were to interest you, and if you happened at some point to be in the south of France, it would be a pleasure for me to meet with you and to go into more details of these or other aspects of the "anabelian Yoga". It would also surely be possible to invite you to Montpellier University for some period of time at your convenience; only I am afraid that under the present circumstances, the procedure might be a little long, as the university itself does not at present have funds for such invitations, so that the invitation would have to be decided resp. approved in Paris – which may well mean that the corresponding proposal would have to be made roughly one year in advance.

On this cheering note, I will put an end to this letter, which has somehow grown out of all proportion, and just wish you very pleasant holidays!

Best regards

Your Alexander Grothendieck

PS Upon rereading this letter, I realize that, like the second formulation of the main conjecture, also the generalisation to "elementary anabelian" varieties must be corrected, sorry! Besides I now see that the first formulation must be corrected in the same way – namely in the case where $Y$ is not proper, it is necessary to restrict oneself, on the left-hand side of (6), to non-constant homomorphisms, and on the right-hand side to homomorphisms $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$, whose images are of finite index (i.e. open). In the case where $Y$ is replaced by an elementary anabelian variety, the bijectivity of (6) is valid, as long as one restricts oneself to dominant homomorphisms on the left-hand side, keeping the same restriction (finite index image) on the right-hand side. The "birational" formulation should be corrected analogously – namely one must restrict oneself to homomorphisms (4) with finite index image.

Returning now to the map (7) in the case of an anabelian curve, one can specify explicitly which classes of sections on the right-hand side do not correspond to a "finite" point, thus do not come from an element on the left-hand side; and if I remember correctly, such a simple characterization of the image of (7) can be extended to the more general situation of an "elementary anabelian" $X$. As far as I now remember, this characterization (which is of course just as conjectural, and indeed in both directions, "necessary" and "sufficient") goes as follows. Let

$\pi_1(K)^\circ =$ Kernel of $\pi_1(K) \longrightarrow \hat{Z}^*$ (the cyclotomic character).

Given a section $\pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(X)$, $\pi_1(K)$ and therefore also $\pi_1(K)^\circ$ operates on $\pi_1(X)$, the geometric fundamental group. The condition is now that the subgroup fixed under this action be reduced to 1!

## Lieben an V. Diekert, 3.4.1984

Les Aumettes 3.4.1984

Lieber Volker Diekert,

Ich

## Letter to L. Bers, 15.4.1984

Les Aumettes 15.4.1984

Dear Lipman Bers,

Together with Yves Ladegaillerie (a former student of mine) we are running a microseminar on the Teichmüller spaces and groups, my own motivations coming mainly from algebraic geometry, and Ladegaillerie's from his interest in the topology of surfaces. Lately we have met with a problem which I would like to submit to you, as I understand you are the main expert on Thurston's hyperbolic geometry approach to Teichmüller space. Before stating the specific problem on hyperbolic "pants" (which things boil down to), let me tell you what we are really after.

Assuming given a compact oriented surface with boundary $X_0$ as a reference-surface for constructing the Teichmüller-type spaces, of genus $g$ and with "holes" (satisfying $2g-2+\nu>0$), my primary interest is in the more "algebraic" version of Teichmüller space, corresponding to the question of classifying algebraic non singular curves over $\underline{C}$, of genus $g$, with a system of points (all distinct) given on $X$, together with a "Teichmüller rigidification" of $(X,S)$ namely a homotopy equivalence between $X_0$ and $X\backslash S$. I'll denote this space, homeomorphic to $\underline{C}^d$ (where $d=3g-3+\nu$), by $\widetilde{M}_{g,\nu}$ (the tilde suggesting that it is the universal covering of a finer object I am still more interested in, namely the algebraic variety (or rather "multiplicity", or "stack" in the terminology of Mumford-Deligne) of moduli for algebraic curves of type $(g,\nu)$. Thurston however considers a different modular space, where algebraic curves with a given system of points are replaced by compact conformal oriented surfaces *with boundary*, giving rise to a modular space $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ (where the letter $B$ recalls that we are classifying structures with boundary) homeomorphic to $\underline{C}^d\times(\underline{R}^{*+})^\nu$, where the extra factor corresponds to the extra parameters introducing through the existence of the boundary, namely the length's of the components of the boundary with respect to the canonical hyperbolic structure on the given surface. Our interest is in pinpointing the precise relationships between the two modular spaces. The obvious idea here is to consider the case of an algebraic curve with $\nu$ points given as a limit-case of a compact conformal surface with boundary, when all the lengths $l_i$ of the components of the boundary tend to zero. Therefore, it looks suitable to consider both modular spaces above as embedded in a larger third one, which corresponds to the same modular problem as in Thurston's theory, except that we allow the "boundary" to have some components reduced to just one point, in the neighbourhood of which $X$ is just a conformal surface without boundary, but with a given point (viewed as a component of such a "generalized boundary"). We now should get a modular space for "compact conformal oriented surfaces with generalized boundary" (of type $g$, $\nu$ and rigidified via $X_0$), call it $\widetilde{MB}_{g,\nu}$, homeomorphic to $\underline{C}^d \times (\underline{R})^\nu$, where now the second factor corresponds to the "parameters" $l_i$, which are allowed to take also value 0 (which means that the corresponding component of the generalized boundary is just one point). Thus $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ appears as a variety with boundary (in the topological sense - in the real analytic sense, the "boundary" admits "corner-like" points obviously), and $\widetilde{M}_{g,\nu}$ appears as a part of the boundary.

My interest is in a better geometric understanding of the situation, which should be "intrinsic" namely not depend on any particular choice of a surgical decomposition of the reference surface $X_0$ into "pants", used in order to describe in a handy way standard "coordinate functions" on the modular space $\widetilde{M}_{g,\nu}$. There appears to be a geometrically meaningful retraction of $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ upon $\widetilde{M}_{g,\nu}$ (commuting to the operations of the Teichmüller modular group), the fibers being homeomorphic to $(R^+)^\nu$ - more specifically, I expect the semi-group $(R^+)^I$ (where $I$ is the set of indices for the "holes" of $X_0$) to act on $MB$ in a natural way, with free action of the subgroup $(R^+)^\nu$ upon $\widetilde{MB}^\circ$, in such a way that $\widetilde{M}$ is just the quotient of $\widetilde{MB}$ by this action (or of $\widetilde{MB}^\circ$ by the action of the corresponding subgroup), and that the fiber $F$ is isomorphic to $(R^+)^I$ by the choice of any "origin" in $F \cap \widetilde{MB}^\circ$.

Of course, "computationally", in terms of a decomposition of $X_0$ into pants, the idea of such an operation is pretty obvious - namely letting the components $\lambda_i$ of $\lambda \in (\mathbb{R}^+)^I$ act as a "multiplier" on the corresponding coordinate $\lambda_i$. However, it is not clear that this operation is intrinsic - and if it were intrinsic, an intrinsic geometric description would still be desired.

Of course, in the description of the situation proposed above, the retraction of $\widetilde{MB}$ upon $\widetilde{M}$ is obtained by multiplying with the 0 multiplier (all $\lambda$ are 0). Now there is a direct geometrical description of a retraction, by hyperbolic surgery. Namely, for any compact conformal surface of type $g, \nu$ with generalized boundary, let's "fill in" the holes which correspond to ordinary components of the boundary, which are Riemanian oriented circles, by "gluing in" the cones on these circles (which are canonically endowed with a conformal structure, using the Riemanian structure on the given circles). Thus we get a "functor" from compact conformal surfaces with generalized boundary (of type $g, \nu$) to compact conformal surfaces *without boundary*, endowed with a system of $\nu$ points (making up a "wholly degenerate" generalized boundary). When we throw in the rigidifications and go over to isomorphism classes, this should give the desired retraction. However, the geometric situation is a lot richer still, as the compact surface without boundary obtained through surgery is endowed, not only with a system of $\nu$ points, but moreover with a system of mutually disjoint *discs* around these points. The shape of these discs is by o means arbitrary - we'll say that a system of discs around $\nu$ points on a compact conformal surface $\hat{X}$ without boundary is "admissible", if the situation can be obtained as above (up to isomorphism) from surgery, starting with a compact conformal surface $X$ with boundary. (NB Among the given "discs", we should allow that some should be reduced to their center - we'll call them "degenerate".) The condition of admissibility can be expressed intrinsically, by stating that for every non-degenerate component $\Gamma_i$ of the system of boundaries of those discs, the two operations we got of the standard circle group (of complex numbers of module 1) upon $\Gamma_i$, by using the fact that it is (on the one hand) the boundary of the disc $D_i$, an (on the other hand) that it is a component of the boundary of the hyperbolic surface $\hat{X}\backslash(\bigcup_j D_j^\circ)$, should be the same. When $\hat{X}$ and the points $s_i$ on $\hat{X}$ are given, the possible admissible systems of discs around the points $s_i$ depend on $\nu$ parameters - and the first idea which flips to mind to give a more precise meaning to these "parameters", is to view them as being the "radii" of those discs. But then we'll have to define what we mean by these!

The idea here is that, when we have a conformal disc $D$ and an interior point $s$ of $D$, then $D$ may be viewed as canonically embedded in the tangent space $T_s$ to $D$ at $s$, as the "unit disc" at $s$. Thus, in the situation above of admissible system of discs $(D_i)_{i\in I}$ around $(s_i)_{i\in I}$, for every $s_i$ corresponding to a non-degenerate $D_i$, we get a canonical disc

$$\Delta_i \subset T_{s_i}$$

in the tangent space - and of course, for degenerate $D_i$, we'll take $\Delta_i$ to be degenerate too. The discs we get in a given $T_{s_i}$ (for a fixed system $(s_i)$, and a variable admissible system of discs around these $s_i$) are ll discs in the strict euclidean sense, given by an unequality

$$|z| \leq r_i,$$

where $z \mapsto |z|$ denotes some hermitian metric on $T_{s_i}$ compatible with the conformal structure - this metric being unique $s_i$ up to a scalar factor. The set $R_i$ of all those possible discs (the non-degenerate ones say) may be viewed in a natural way as a "torsor" (= principal homogeneous space) under $R^+$, which plays here the role of the parameter space of all possible (non degenerate) "raddi" at $s_i$. If we admit also radius zero, we accordingly get a parameter space $\hat{R}_i$, which may be viewed as a torsor of sorts $R^+$. Thus the set of radii for a given admissible system of discs $D_i$ around the points $s_i$ may be viewed as a point of the product-space

$$r = (r_i)_{i \in I} \in \hat{R} = \prod_{i \in I} \hat{R}_i.$$

My expectation is that an admissible set of discs $(D_i)$ is well determined by the knowledge of the corresponding set $r$ of radii, and moreover that a given set $r$ of radii corresponds to an admissible system of discs iff it satisfies a set of unequalities

$$r_i < \rho_i,$$

where

$$\rho = (\rho_i)_{i \in I} \in R = \prod_{i \in I} R_i$$

is come fixed system of radii, corresponding to a fixed system of choices of hermitian metrics in the tangent spaces $T_{s_i}$.

I now see that this "expectation" doesn't quite match with the previous one, about a "natural operation" of $(\underline{P^+})^I$ upon $\widetilde{MB}$, having certain properties - it would match only if all $\rho_i$ where equal to $+\infty$ (hence not in $R_i$ itself strictly speaking). I must confess I didn't look too thoroughly yet at the situation, and moreover I've been busy with rather different kind of things for the last two or three months, and lost contact a little…

What is clear however is that the main key to an understanding of the general situation, is in an understanding of the basic particular case of Thurston's pants. If we number $0$, $1$ $\infty$ the three "holes" of such a part, the surface $\hat{X}$ can be identified canonically to the Riemann sphere, and the basic question then is to understand how the pant is embedded in this sphere $\Sigma$, as a complement of the union of (open) discs around the points $0$, $1$, $\infty$, these discs forming an "admissible system". So the main question is about understanding the structure of all possible admissible systems of three discs on $\Sigma$.

Puzzling a little about this problem, the following model came to my mind (corresponding to "limiting radii" $\rho_i$ which are *finite*, not infinite). I view $\Sigma$ as endowed with its usual euclidean metric, for which the real projective line is a great circle, with $0$, $1$, $\infty$ at equal distance from each other on this equator. These points may be viewed as the centers of three "orange slices", making up a cellular subdivision of $\Sigma$, where the common boundary of two among the "slices" $Q_i$ ($i \in \{0,1,\infty\}$) is a half-great circle passing in between $s_i$ and $s_j$ at equal distance from both, these three half-circles joining at the two poles $P^+$ and $P^-$. The "disc" $Q_i$ around $s_i$ has a conical structure around $s_i$ (as has any conformal pointed disc), and we may take the concentric discs $\lambda_i Q_i$ with

$$0 < \lambda_i < 1.$$

The model I had in mind was that the (non degenerate) admissible systems of discs around the points $s_i$ ($i \in \{0,1,\infty\}$) are exactly the systems of discs $\lambda_i Q_i$, with $\lambda_i$ as above. (If we allow some discs to be degenerate, this means that instead of the unequality above we merely demand $0 \leq \lambda_i < 1$, $0$ not excluded.)

This model, if correct, would give a rather precise description of the inclusion relationships between pants, when these are considered as embedded in the sphere. The intersection of all would be this system of these half circles $C_i$, and the two poles $P^+$, $P^-$ would play a significant role in the geometry of the pants, from this point of view. But it doesn't seem that neither those half circles (which need not be geodesical I guess), nor the two poles have ever been described as intrinsically associated to a pant. Of course, this model would give alternative "parameters" $\lambda_i$

for describing a pant, which are best suited for grasping the pants in terms of spherical geometry. The next question would be an understanding of the relationship between these parameters, and Thurston's $\ell_i$. Maybe it is unreasonable to expect that for given index $i \in \{0, 1, \infty\}$, the length $\ell_i$ depends only on $\lambda_i$ an not on the other parameters $\lambda_j$ - and for this reason, the intuition at the beginning of this letter, using Thurston's coordinate functions and notably the $\ell_i$'s to get a fibration structure on $\widetilde{MB}$ over $\widetilde{M}$, in terms of a given decomposition of $X_0$ into pants, is probably not really relevant, namely it is non intrinsic. Assuming the model I am suggesting is correct, the accurate description of $\widetilde{MB}$ in terms of $\widetilde{M}$ would be

$$\widetilde{MB} \simeq \widetilde{M} \times [0, 1[^I,$$

where the second factor on the right hand sight refers to the system of multipliers $\lambda_i$ $(i \in I)$, tied to the $r_i$ above by $r_i = \lambda_i \rho_i$.

My question of course is whether you have any information or idea to propose, especially on the basic problem of relying pants to spherical geometry, and more specifically, whether the model above is likely to hold, or is definitely false. Also, one difficulty we found with hyperbolic geometry of conformal surfaces, is that apart from existence and unicity of the hyperbolic structure (compatible with the given conformal cone and for which the boundary is geodesic), there seems to be little hold on more specific properties. As an example, starting with a compact conformal surface with boundary $X$ (a pant, say), of hyperbolic type, and removing an (open) "collar" around the boundary, we get another surface with boundary $X'$ - what about the relation between the two corresponding metrics? Assuming the model for pants above is correct, it would be nice to have an explicit expression of the metric of a pant in terms of the parameters $\lambda_i$.

With my thanks for your attention, and for whatever comment you will care to make, very sincerely yours

## Letter to P. Blass, 8.7.1987

Les Aumettes July 8, 1987

Dear Piotr Blass,

Thanks for your letter and MS. I am not going even to glance through the manuscript, as I have completely given up mathematics and mathematical involvements. If you complete your book, you may mention on the cover that it is based on my EGA IV (sic) notes, but you are to be the author and find your own title.

I have a foreboding that we'll contact again before very long, but in relation to more inspiring tasks and vistas than mathematical ones.

With my very best wishes

Alexander Grothendieck

## Lettre à R. Thomason, 2.4.1991[37]

Les Aumettes le 2.4.1991

Cher Thomason,

Merci pour ta lettre, et excuse-moi d'avoir tant tardé à t'écrire. Une raison en est que depuis peut-être deux mois j'étais occupé par une réflexion venue un peu en diversion, que je pensais régler en quelques jours (refrain familier...), et j'ai repoussé ma lettre de semaine en semaine. Cette réflexion ne concerne pas l'algèbre homotopique proprement dite, mais plutôt les fondements de la théorie des catégories, et j'en ai fait nettement plus que ce dont j'ai un besoin immédiat. Mais dès à présent j'ai la conviction qu'une algèbre homotopique (ou, dans une vision plus vaste, une "algèbre topologique") telle que je l'envisage, ne pourra être développée avec toute l'ampleur qui lui appartient, sans les dits fondements catégoriques. Il s'agit d'une théorie des (grosses) catégories que j'appelle à présent "accessibles", et des parties accessibles de celles-ci, en reprenant complètement la théorie provisoire que je présente dans SGA 4 I 9. J'ai tissé un tapis de près de deux cents pages sur ce thème d'apparence anodine, et cela me fera plaisir de t'en présenter les grandes lignes, si cela t'intéresse. Il y a aussi quelques problèmes intrigants qui restent, que je pressens difficiles, peut-être même profonds, et qui peut-être (qui sait) t'inspireront, ou quelqu'un d'autre branché sur les fondements de l'outil catégorique. Mais tout cela m'apparaît comme du domaine de l'outil, et je préfère dans cette première lettre te parler de choses plus névralgiques. Les idées-force sont nées pour la plupart depuis vingt-cinq ans et plus, et j'en vois le germe vivace dans mes réflexions solitaires des années 56, 57, quand s'est dégagé pour moi le besoin de catégories de "coefficients" moins prohibitivement gros que les sempiternels complexes de chaînes ou de cochaînes, et l'idée (après de longues perplexités) de construire de telles catégories par passage à une catégorie de fractions (notion qu'il a fallu inventer sur pièces) en "inversant" les quasi-isomorphismes. Le travail conceptuel principal qui restait à faire, et qui m'apparaît maintenant tout aussi fascinant (tant par sa beauté, que par sa portée évidente pour les fondements d'une algèbre cohomologique dans l'esprit d'une théorie des coefficients cohomologiques)

[37] Édition par M. Künzer

qu'en ces temps de mes premières amours avec la cohomologie – c'était de dégager la structure intrinsèque de ces catégories. Le fait que ce travail, que j'avais confié à Verdier vers 1960 et qui était censé faire l'objet de sa thèse, n'ait toujours pas été fait à l'heure actuelle, même dans le cas des catégories dérivées ordinaires, abéliennes, lesquelles pourtant (par la force des choses) ont bien fini par devenir d'un usage quotidien tant en géométrie qu'en analyse, en dit long sur l'état des mentalités à l'égard des fondements, dans la communauté mathématique.

Ce vent de mépris à l'égard des indispensables travaux de fondements (et plus généralement, pour tout ce qui ne se conforme pas à la mode du jour), je l'ai évoqué dans ma dernière lettre, et j'y reviens bien des fois aussi dans les pages de Récoltes et Semailles, tant c'est là une chose (parmi bien d'autres) qui tout simplement me dépasse. Ta réponse à ma lettre montre d'ailleurs que tu ne l'as absolument pas comprise. Ce n'était pas une lettre pour "me plaindre" de ceci ou de cela qui me déplaisait. Mais c'était une impossible tentative de partager une douleur. Je savais bien au fond que c'était sans espoir ; car tout le monde fuit la douleur, c'est-à-dire fuit la connaissance (car il n'y a pas de connaissance de l'âme qui soit exempte de douleur). Une très rare tentative, peut-être la seule dans ma vie (je ne m'en rappelle pas d'autre en tous cas), et sans doute la dernière…

Il y a deux directions d'idées, intimement solidaires, dont j'ai envie de te parler, que je me suis surtout attaché à développer depuis fin octobre (quand j'ai repris une réflexion mathématique, pour une durée indéterminée). Elles sont d'ailleurs déjà esquissées ici et là (ainsi qu'un bon nombre d'autres idées maîtresses de l'algèbre topologique) dans Pursuing Stacks. Dans cette réflexion de 1983, qui m'a beaucoup aidé maintenant, je finis par me disperser quelque peu à suivre des avenues latérales, plutôt que de revenir aux idées essentielles de mon propos initial. Comme autre source utile pour quelqu'un intéressé par ces questions de fondements, je te signale deux ou trois lettres à Larry Breen, que je pensais d'ailleurs inclure dans le texte publié de Pursuing Stacks (qui sans doute ne verra jamais le jour). D'une part je voudrais te parler de catégories de modèles et de la notion de "dérivateur" (remplaçant les défuntes "catégories dérivées" de Verdier, décidément inadéquates aux besoins). D'autre part j'ai beaucoup de choses à dire sur  en tant que catégorie de modèles pour des "types d'homotopie" en tous genres. Mais ce sera sûrement pour une autre fois (à supposer que ton intérêt survive à la lecture de cette lettre-ci). Donc aujourd'hui ce sera les catégories de modèles et la notion de dérivateur.

**1. La seule structure essentielle d'une catégorie de modèles est la donnée du "localiseur" $W \subset (M)$.**

Aussi j'appelle "catégorie de modèles" une catégorie $M$ munie d'un tel "localiseur" (contenant les isomorphismes, et avec deux parmi trois flèches $u$, $v$ et $uv$, aussi la troisième). Les constructions homotopiques essentielles sont indépendantes de toutes structures supplémentaires, tel un ensemble $C$ de "cofibrations" ou un ensemble $F$ de "fibrations" ou les deux à la fois. De telles structures supplémentaires sont utiles, dans la mesure où elles permettent d'expliciter les constructions essentielles, et d'en établir l'existence. Mais elles ne sont pas plus essentielles pour le sens intrinsèque des opérations (qu'elles auraient tendance plutôt à obscurcir, jusqu'à présent) que le choix d'une base plus ou moins arbitraire d'un module, en algèbre linéaire. Comme terminologie, je parlerai de "catégories à cofibrations" (ou à fibrations), ou de "catégories (ou triples) de Quillen", etc., quand de telles structures supplémentaires apparaissent.

Par sa richesse en structures délicatement accordées les unes aux autres, ce sont les *triples de Quillen clos* $(W, C, F)$ qui m'apparaissent comme la plus belle structure de catégorie de modèles "enrichie" découverte jusqu'à ce jour. J'avais cru pouvoir m'en passer, mais finalement n'y suis pas parvenu, et crois qu'ils resteront utiles (sinon absolument indispensables). En sens opposé, par l'économie des moyens mis en œuvre pour arriver pourtant à avoir l'essentiel, c'est la notion de *catégorie à cofibrations* ou à *fibrations* de K. S. Brown (avec la généralisation assez évidente apportée par Anderson) qui m'apparaît la plus belle. Par contre, je ne suis pas arrivé à comprendre la raison d'être du système d'axiomes que tu me proposes dans ta première lettre, te plaçant plus ou moins à mi-chemin entre Quillen et Brown. Tes axiomes (s'ils veulent élargir ceux de Quillen) me paraissent prohibitivement exigeants, en comparaison avec ceux de Brown-Anderson – à cela près, seulement, que tu ne sembles pas exiger que les ensembles $C$ et $F$ soient stables par composition. Mais je ne connais guère d'exemple où cet axiome-là ferait problème. Éclaire-moi s'il te plaît s'il y a quelque chose qui m'échappe.

Un exemple : si une structure à fibrations (de Brown-Anderson) satisfait à la condition familière de "propreté" (ce qui est le cas pour les structures considérées d'abord par Brown, où tous les objets sont fibrants sur l'objet final), on peut remplacer cette structure $(W, F)$ par une autre $(W, F_W)$ canoniquement associée au localiseur $W$, i.e. à la catégorie de modèles envisagée, en prenant pour $F_W$ l'ensemble des flèches dans $M$ qui sont ce que j'appelle des $W$*-fibrations* $f : X \longrightarrow Y$, *i.e.* qui sont quarrables et telles que le foncteur changement de base $Y' \mapsto X' = X \times Y'$ de $M/Y$ dans $M/X$ transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes. Pour tout localiseur, c'est là un ensemble de flèches qui contient les isomorphismes, est stable par composition, par changement de base, par facteurs directs. Dire que $(W, F_W)$ est une structure de Brown, revient à dire qu'il existe "assez de W -fibrations", par quoi j'entends que toute flèche u se factorise en $u = f\,i$, avec $i \in W$ et $f \in F_W$. Et dualement pour les catégories à cofibrations $(W, C)$, se remplaçant (dans le cas propre) par des structures $(W, C_W)$ canoniquement associées au localiseur, en introduisant l'ensemble des $W$*-cofibrations*. Ainsi, j'aurais tendance plutôt à regarder une structure à fibrations $(W, F)$ propre (et non "canonique") comme une recette ou un critère pour caractériser certaines $W$ -fibrations, avec lesquelles on pourra se contenter souvent de travailler, parce qu'il y en a "assez". Pourtant, j'ai trouvé dans le cas de  que le travail avec les $W$-fibrations (beaucoup moins restrictives que les "fibrations" à la Quillen que tu avais introduites) était indispensable. Et je suis persuadé qu'il doit être très utile aussi dans une catégorie de modèles telle que $\Delta\hat{}$ (ensembles semi-simpliciaux), car tout en étant substantiellement moins exigeante que la notion de fibration de Kan, celle de $W$-fibration implique déjà tout ce que je considère (à tort ou à raison) comme les propriétés cohomologiques et homotopiques essentielles de ces dernières (lesquelles, selon moi, ne sont pas dans la nature de propriétés de prolongement-relèvement de morphismes). Ainsi, cela doit permettre (par considération de "chemins" infinis) de construire dans $\Delta\hat{}$ l'analogue des espaces de chemins de Cartan-Serre, sans avoir au préalable à remplacer le complexe $K$ par une enveloppe de Kan. C'est en tous cas ce que j'ai vérifié dans le cas très voisin de  (sans jamais avoir à faire de détour par $\Delta\hat{}$). Cela fait partie des choses dont je voudrais te parler par la suite.

## 2. Prédérivateurs, dérivateurs

Quand j'ai dit que les structures homotopiques essentielles sont déjà contenues dans le localiseur $W$, je pensais notamment aux suites exactes des fibrations et des cofibrations, qui sont un test décisif. Je reste ébahi que Quillen ne souffle mot à ce sujet dans son brillant (et beau) travail, et je présume qu'il a réussi (comme bien d'autres après lui) à ne pas le voir. (Pour le voir, il aurait fallu sans doute qu'il ne soit pas aveuglé par le mépris *a priori* qu'il exprime pour toute recherche de fondements qui irait au-delà de celle qu'il venait de faire, avec un tel succès...) Mais la chose devient évidente dans l'optique des dérivateurs.

L'idée de base des dérivateurs m'est apparue à l'occasion de SGA 5, quand il s'est avéré (découvert par Ferrand, chargé de rédiger un de mes exposés sur les traces en cohomologie) que la notion de catégorie dérivée de Verdier ne se prêtait pas au formalisme des traces : la trace n'est pas additive pour les "triangles exacts", car cette notion de triangle (vu comme un diagramme dans la catégorie initiale) n'est pas assez fine. Pour bien faire, il faudrait prendre la catégorie des morphismes de complexes (pour lesquels on a une construction fonctorielle d'un *mapping cone*), et passer à la catégorie dérivée de celle-ci. Cette catégorie s'envoie dans celle des triangles de Verdier par un foncteur essentiellement surjectif, mais qui n'a rien de fidèle, et encore moins pleinement fidèle. C'est là le "péché originel" dans la première approche des catégories dérivées, tentée par Verdier — approche dont en tout état de cause, faute d'expérience, on n'aurait pas pu faire l'économie. C'est alors que j'ai été frappé par ce fait, d'apparence anodine, que chaque fois qu'on construit une catégorie dérivée à l'aide d'une catégorie de complexes d'une catégorie abélienne, cette catégorie dérivée, en un sens, "ne vient jamais seule". En effet, pour toute catégorie d'indices $I$ (et je pensais alors surtout au cas où $I$ est finie), on a la catégorie abélienne $A(I)$ des diagrammes de type $I$ dans $A$, laquelle donne, elle aussi, naissance à une catégorie dérivée, qu'on pourrait noter $D(I,A)$. La catégorie des "vrais" triangles s'obtient en prenant $I = \Delta^1$, et les catégories dérivées de complexes filtrés, introduites par Illusie pour sauver la mise à bon compte, correspondent aux cas $I = \Delta^n$ (simplexe-type de dimension $n$). Les variances d'Illusie proviennent simplement du fait que $D(I,A)$, pour $A$ fixé, est contravariant en $I$, de façon tautologique. L'idée tentante alors, et que j'ai proposée ici et là sans qu'elle ne rencontre d'écho, c'est que cette structure de foncteur ou, plus exactement, de *2-foncteur*

$$I \mapsto \mathrm{D}(I, A)$$

allant de la catégorie  ou de quelque sous-catégorie assez fournie comme celle des catégories finies ou celle des ensembles ordonnés finis, devrait suffire à incarner toutes les structures essentielles d'une "catégorie dérivée" (encore dans les limbes) ; quitte bien sûr à imposer les axiomes qu'il faut (et que j'ai fini par dégager enfin l'an dernier). On récupère la catégorie dérivée initiale, "nue", en faisant $I = e$ (catégorie ponctuelle). Mais il serait impropre, en toute rigueur, de considérer la structure plus complète (que j'appelle maintenant un "*dérivateur*") comme une structure supplémentaire sur cette catégorie – laquelle continue cependant, dans le formalisme des dérivateurs, à jouer un rôle important, sous le nom de "*catégorie de base*" du dérivateur. La même idée avait l'air de devoir marcher pour les variantes non commutatives de la notion de catégorie dérivée, et le travail de Quillen m'apparaissait comme une incitation puissante à développer ce point de vue. Mais ce n'est qu'il y a quelques mois que je me suis donné le loisir enfin de vérifier que mon intuition était bel et bien justifiée. (Travail d'intendance, quasiment, comme j'en ai fait des centaines et des milliers de fois !)

Ce point acquis, il est bien clair à présent que la notion de dérivateur (plus encore que celle de catégorie de modèles, qui est à mes yeux un simple intermédiaire, "non intrinsèque", pour construire des dérivateurs) est une parmi les quatre ou cinq notions les plus fondamentales, dans l'algèbre topologique, qui depuis une trentaine d'années déjà attend d'être développée. Comme notions d'une portée comparable, je ne vois guère que celle de *topos*, et celles de *n-catégories* et de *n-champs* sur un topos (notions qui n'ont pas encore été définies à ce jour, sauf pour $n \leq 2$). D'autre part, pour moi le "paradis originel" pour l'algèbre topologique n'est nullement la sempiternelle catégorie $\Delta\hat{}$ semi-simpliciale, si utile soit-elle, et encore moins celle des espaces topologiques (qui l'une et l'autre s'envoient dans la 2-catégorie des topos, qui en est comme une enveloppe commune), mais bien la catégorie  des petites catégories, vue avec un œil de géomètre par l'ensemble d'intuitions, étonnamment riche, provenant des topos. En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d'ensembles les $C\hat{}$, avec $C$ dans , sont de loin les plus simples des topos connus, et c'est pour l'avoir senti que j'insiste tant sur l'exemple de ces topos ("catégoriques") dans SGA 4 I.

J'en viens maintenant à la définition en forme de ce que j'entends par un "*prédérivateur*" $D$ – étant entendu déjà que la notion plus délicate de "dérivateur" s'en déduit en imposant quelques axiomes bien naturels, dont je te donnerai la liste si tu me la demandes. Pour développer une algèbre des dérivateurs (et tout d'abord, des prédérivateurs), il faut d'abord se fixer un "*domaine*" commun pour ceux qu'on va envisager, c'est-à-dire, une sous-catégorie pleine Diag de . Le cas qui a ma préférence maintenant est celui ou Diag est tout entier, auquel cas j'interprète un dérivateur comme étant une sorte de "théorie de coefficients" (homologiques ou cohomologiques ou homotopiques, tout cela est pareil) sur , catégorie visualisée comme une catégorie d'objets de nature géométrique et spatiale, comme des "espaces" à proprement parler, bien plus que comme de nature algébrique ; tout comme les anneaux commutatifs (via leurs spectres) et les schémas qu'on construit avec eux, sont pour moi des objets géométrico-topologiques par essence, et nullement algébriques. (L'algèbre étant seulement un intermédiaire pour atteindre à la vision géométrique, qui elle est l'essentiel.) Un cas plus ou moins extrême opposé est celui où Diag est la catégorie des ensembles ordonnés finis, voire même (à la rigueur) une catégorie plus restreinte encore. Mais pour être vraiment à l'aise, il faudra supposer tôt ou tard que la catégorie Diag (des "catégories d'indices" ou des "types de diagrammes", pour les dérivateurs considérés) soit stable par les constructions courantes sur les catégories : produits finis, sous-catégories, sommes amalgamées, voire même catégories Hom ; et aussi bien sûr par passage à la catégorie opposée, particulièrement fréquent pour passer d'un énoncé à un énoncé dual, notamment. Quand il ne s'agit que d'avoir un prédérivateur, dans tous les cas à ma connaissance on peut prendre comme domaine tout entier. C'est quand il s'agit de vérifier les axiomes assez draconiens des dérivateurs, seulement, qu'on peut être forcé à restreindre considérablement le domaine comme j'ai évoqué, ou sinon, tout au moins, les flèches $u : X \longrightarrow Y$ qu'on envisage dans , lorsqu'il s'agit de travailler non seulement avec le foncteur correspondant d'image inverse $u^*$, mais aussi avec les images directes $u_!$ et $u_*$. Mais là j'anticipe…

Au sujet du domaine, je voudrais encore ajouter qu'à mes yeux le domaine ne représente nullement la portée ultime d'un dérivateurs donnée. Celui-ci, et plus généralement un prédérivateur $D$, étant défini comme un 2-foncteur entre 2-catégories

$$D : \mathrm{Diag}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{CAT}$$

(où CAT désigne la catégorie des $\mathfrak{U}$-catégories contenues ($\subset$) dans l'univers de référence $\mathfrak{U}$, toujours sous-entendu, alors que  désigne la catégorie des "petites" catégories, i.e. de celles qui son éléments de $\mathfrak{U}$), il résulte (d'ailleurs de façon nullement tautologique) des axiomes des dérivateurs (que je n'explicite pas ici) que la catégorie $D(X)$ (des "coefficients de type $D$ sur $X$") associée à une petite catégorie $X$, *ne dépend à équivalence près que du topos défini par* $X$, donc que de la catégorie $X^{\wedge} = \mathrm{Hom}(X^{\circ}, \mathrm{Ens})$ des préfaisceaux d'ensembles sur $X$. Plus précisément, si $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche dans , alors le foncteurs "image inverse" pour les coefficients de type $D$

$$f^{*} : D(Y) \longrightarrow D(X)$$

est une équivalence de catégories, pourvu que le foncteur similaire $Y^{\wedge} \longrightarrow X^{\wedge}$ (qui correspond à un dérivateurs particulièrement important sur ...) soit une équivalence de catégories; c'est-à-dire encore pourvu que $f$ soit pleinement fidèle et que tout objet de $Y$ soit facteur direct d'un objet de la forme $f(x)$ (ou encore, que $f$ induise une équivalence entre les "enveloppes de Karoubi" de $X$ et de $Y$). Cela implique aussi, quand  est égal à  tout entier, que l'on peut regarder $D$ comme provenant d'un 2-foncteur

$$\mathrm{Topcat}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{CAT}$$

allant de la 2-catégorie des topos "catégoriques" (i.e. équivalentes à un topos provenant d'un $X$ dans ) dans la catégorie CAT. Ceci vu, on peut espérer étendre le dérivateur, c'est-à-dire la théorie de coefficients envisagée, à la catégorie Top des topos tout entière, i.e. en un foncteur (qu'on notera encore $D$)

$$D : \mathrm{Top}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{CAT}.$$

J'ai idée que ça doit être toujours possible, et de façon essentiellement unique. Ça l'est en tous cas dans tous les cas concrets que j'ai regardés. Si par exemple $D$ est le dérivateur (abélien) défini par une catégorie abélienne via la catégorie des complexes et la notion de quasi-isomorphisme, on trouve pour tout topos $X$ (supposant que la catégorie soit celle des $k$-modules, où $k$ est un anneau quelconque) la catégorie $\mathrm{D}(X,k)$ dérivée de celle des $k$-modules sur $X$, et celle $\mathrm{D}(X,k)$ dépend bien de façon contravariante de $X$. Il est vrai que quand il s'agit de définir les lois *covariantes* $f!$ et $f_*$, plus exactement d'en établir l'existence, on bute sur le cas de $f_!$, cet $f_!$ n'existe que moyennant des hypothèses draconiennes sur $f$. (De toutes façons, j'escroque un peu ici, faute d'avoir explicité des restrictions sur les degrés des complexes, genre $\mathrm{D}^+(X,k)$ ou $\mathrm{D}^-(X,k)$, Mais ce n'est par le lieu ici d'entrer dans des technicalités.)

Pour ce qui est des axiomes pour les dérivateurs, le plus essentiel de tous est l'existence, pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans Diag, des foncteurs $f_!$ et $f_{:D(X)\longrightarrow D(Y)}$, adjoints à gauche et à droite de $f^*$. Ainsi, pour développer (dans la catégorie de base, disons) la théorie de la *suite exacte de suspension*, c'est de l'existence de $f_!$ qu'on a besoin, et il suffit pour cela que Diag contienne les ensembles ordonnés finis (et même nettement moins, si on y tient). Mais je signale que les suites canoniques qu'on construit ainsi à l'aide du seul foncteur $f_!$ et sous l'hypothèse que le dérivateur soit "ponctué" (*i.e.* les $D(X)$ ponctués et les foncteurs $f$ compatibles avec les objets neutres), ne sont exactes que moyennant un "axiome d'exactitude" (à gauche) convenable, faisant partie de la poignée des axiomes d'un dérivateur ; et dualement pour la suite exacte de cosuspension. Ces constructions sont valables d'ailleurs non seulement dans toute catégorie $D(e)$, mais aussi comme de juste dans les $D(X)$, pour $X$ dans Diag. (En fait, $D(X)$ peut être considéré comme la catégorie de base d'un "dérivateur induit" $D_X : Y \mapsto D(X \times Y)$, auquel on peut appliquer les résultats généraux. Les axiomes des dérivateurs sont tels qu'ils sont stables par passage d'un dérivateur à un dérivateur induit.) Ceci suggère de dissocier les notions de "dérivateur à gauche" (postulant l'existence des images directes homologiques $f_!$, à l'exclusion des images directes cohomologiques $f$), de "dérivateur à droite" incluant l'aspect dual du formalisme homotopique. Mais je signale tout de suite que certaines propriétés des dérivateurs qui me paraissent importantes, et même quand leur énoncé ne fait appel qu'à une des deux structures gauche ou droite, sont établies en utilisant l'existence des deux covariances à la fois.

Pour terminer ces généralités sur la notion de dérivateur, je voudrais souligner qu'il est essentiel, dans la notion de prédérivateur (qui est la donnée de base unique), que $D : \mathrm{Diag} \longrightarrow \mathrm{CAT}$ est bien un 2-foncteur, et non seulement un foncteur ; en d'autres termes, il faut se donner non seulement les $D(X)$ pour $X$ dans Diag, et les $f^* = f_D^* = D(f)$ pour les flèches $f : X \longrightarrow Y$, mais pour une flèche $u : f \longrightarrow f'$ entre deux flèches $f, f' : X \longrightarrow Y$ , il faut se donner un homomorphisme fonctoriel

$$u^* : f'^* \longrightarrow f^*$$

(avec des indices $D$ s'il y a risque de confusion). Il faut bien voir que, conceptuellement très simple et évidente (et pour cette raison sans doute, méprisée par le "mathématicien sérieux" comme du "*general nonsense*"), la donnée d'un 2-foncteur entre 2-catégories est une espèce de structure très délicate, d'un genre apparemment nouveau en maths ; et qu'on le veuille ou non, c'est bien cette espèce de structure, et elle seule, qui cerne finement les aspects essentiels, c'est-à-dire intrinsèques (indépendants de la catégorie de modèles particulière choisie, 'à des fins calculatoires, pour décrire le dérivateur) du formalisme homologico-homotopique ; lequel est dans son essence dernière (si je ne me trompe beaucoup) un formalisme de variance de "coefficients". Tout comme la dualité de Poincaré classique m'a mené vers le formalisme des six opérations (ou "variances") valable tant dans le contexte des espaces topologiques, que celui des schémas ou des espaces analytiques (et dans bien d'autres encore, comme , j'en suis à présent persuadé), formalisme qui à mon sens (et si je ne fais erreur) en capte l'essence ultime et en quelque sorte universelle, indépendante de toute hypothèse de non-singularité, *etc*.

Pour stimuler l'intuition habituée à des contextes d'homologie ou de cohomologie familiers, j'ai trouvé utiles des notations du type suivant, pour un dérivateur donné $D$. Si $X$ est dans Diag, et si $\xi$ est un $D$-coefficient sur $X$, i.e. un objet de $D(X)$, je dénote par

$$\mathrm{H}_\bullet^D(\xi) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_D^\bullet(\xi)$$

("*objets d'homologie et de cohomologie de $X$, à coefficients dans $\xi$*") les objets $p_!(\xi)$ et $p_*(\xi)$ respectivement, objets dans la catégorie de base $D(e) = A_D$ de $D$, où $p : X \longrightarrow e$ est la flèche structurale canonique. Plus généralement, si $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche dans Diag, les images de $\xi$ par les deux images directes peuvent être notées

$$\mathrm{H}^D_\bullet(f,\xi) \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}^D_\bullet(X/Y,\xi), \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^\bullet_D(f,\xi) \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}^\bullet_D(X/Y,\xi),$$

c'est l'*homologie* resp. la *cohomologie relative de $X$ au-dessus de $Y$*, à coefficients dans $\xi$. On peut laisser tomber l'indice ou l'exposant $D$, quand aucune confusion n'est à craindre. Par ailleurs, je me suis laissé guider par les intuitions et les réflexes acquis tout au long du développement des SGA, pour développer dans le contexte de  (pour commencer) la panoplie des propriétés "cohomologiques" essentielles d'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans , relativement à un dérivateur, c'est-à-dire à une "théorie de coefficients", donné. Mais c'est là quelque chose dont je te parlerai à propos de  une autre fois, si tu es intéressé.

## 3. Prédérivateur défini par une catégorie de modèles, et problème d'existence de $f_!$, $f_*$.

La plupart des dérivateurs que je connais sont définis à l'aide de catégories de modèles $(M, W)$. Une telle catégorie définit en tous cas un prédérivateur sur  tout entier, en posant

$$D_{(M,W)}(X) = M(X)(W(X))^{-1},$$

où je désigne maintenant par

$$M(X) \overset{\text{def}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(X^\circ, M)$$

la catégorie des préfaisceaux sur $X$ à valeurs dans $M$ (donc celle des "diagrammes de type $X^\circ$", et non de type $X$, dans $M$), et $W(X)$ l'ensemble des flèches dans cette catégorie, qui "sont dans $W$ argument par argument". La loi de 2-foncteur contravariant de $D(X)$ en $X$ est claire. Quand $W$ est l'ensemble des isomorphismes dans $M$, j'écris aussi $D_M$ au lieu du double indice. C'est un cas qu'on peut considérer comme "trivial", mais qui pour autant ne manque pas d'intérêt. Ainsi, $D_M$ est un dérivateur (satisfaisant à tous les axiomes), pourvu seulement que $M$ soit stable par petites limites inductives et projectives (les unes assurant l'existence des $f_!$, les autres celle des $f_*$). Dans le cas où $M = \mathrm{Ens}$, on trouve $D(X) = X^\wedge$, c'est là un dérivateur important à mes yeux (si trivial soit-il), et les propriétés "cohomologiques" des flèches de , relativement à ce dérivateur, ne sont nullement choses triviales.

Dans le cas où $W$ est quelconque, je note aussi $D_W$ au lieu du double indice, il est rare qu'une confusion soit à craindre. La question principale qui se pose alors, c'est bien sûr celle de l'existence des foncteurs $f_!$ et $f$ . Contrairement à toi, je n'ai aucun scrupule ici à supposer la catégorie $M$ stable par tous les types de limites dont on a besoin, donc (si on veut travailler sur  tout entier) stable par petites limites inductives et projectives. Je ne serais pas étonné qu'il y ait un théorème qui assure que tout dérivateur sur  peut se décrire à l'aide d'une telle catégorie de modèles (à équivalence de dérivateurs près), ou du moins comme limite inductive filtrante de tels dérivateurs. J'entrevois dans ces grandes lignes, une "algèbre des dérivateurs" (consistant en un certain nombre d'opérations fondamentales au sein de la 2-catégorie de tous les dérivateurs, sur  disons comme domaine), laquelle serait le reflet d'opérations algébriques de nature similaire, qui s'effectuent au niveau des catégories de modèles. J'ai comme une impression, par une allusion dans ta lettre du mois de janvier, que tu as quelque idée ou intuition de ce genre de structures, et on pourra en reparler. Mais je souligne tout de suite que pour moi, le véritable objet d'opérations au niveau des catégories de modèles, c'est d'obtenir des opérations sur les dérivateurs (ou les prédérivateurs, pour commencer) associés.

À ce sujet, une remarque au sujet de la fonctorialité du prédérivateur associé à une catégorie de modèles $(M, W)$. Il est clair qu'on obtient un 2-foncteur

$$(*) \qquad \mathrm{MOD} \longrightarrow \mathrm{PREDER}$$

allant de la 2-catégorie des catégories de modèles (ce n'est d'ailleurs pas une $\mathfrak{U}$-catégorie, si on ne fait des restrictions sur les catégories envisagées et sur les foncteurs admis, en plus d'être compatibles aux localiseurs). Mais si on a deux catégories de modèles, il y a lieu d'introduire dans la catégorie

$$\underline{\mathrm{Hom}}((M, W), (M', W')) \quad \text{ou} \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Loc}}(M, M')$$

(cette dernière notation, si les localiseurs $W$, $W'$ sont sous-entendus dans les notations $M, M'$) un localiseur bien naturel $W_{M,M'}$ , formé des morphismes $u : F \longrightarrow G$ entre morphismes de catégories de modèles $F$, $G$, tels que $u(x) : F(x) \longrightarrow G(x)$ soit dans $W'$, pour tout $x$ dans $M$. Appelons-les les "*quasi-isomorphismes*" (*relatifs aux localiseurs $W$, $W'$*). Il est clair que les quasi-isomorphismes sont transformés en isomorphismes par le 2-foncteur précédent, donc en passant à la catégorie des fractions, on trouve un foncteur (déduit de $(*)$)

$$(**) \qquad H(M,M') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(D_M, D_{M'})$$

où dans la notation il est sous-entendu que $M$ et $M'$ sont munis de leurs localiseurs $W$, $W'$. Ainsi, les catégories de modèles peuvent être regardées à présent comme les 0-objets d'une 2-catégorie, dont les catégories de flèches sont les catégories localisées $H(M,M')$ précédentes, et on trouve un 2-foncteur canonique de cette 2-catégorie, que j'ai envie d'appeler catégorie dérivée (?) de la catégorie des catégories de modèles, et de noter DERMOD, dans celle des prédérivateurs, au moyen des foncteurs $(**)$ :

$$(***) \qquad \mathrm{DERMOD} \longrightarrow \mathrm{PREDER}\,.$$

Le point auquel je veux en venir est le suivant : si $M$ et $M'$ sont deux catégories de modèles qui sont équivalentes en tant que 0-objets de cette 2-catégorie, alors les prédérivateurs associés sont équivalents, donc à toutes fins pratiques, peuvent être identifiés (du moins, quand l'équivalence initiale est donnée). Ceci (et bien sûr d'innombrables exemples) illustre à quel point une catégorie de modèles est un objet "encombrant" (si j'ose dire), encombré d'aspects inessentiels, en comparaison avec le dérivateur associé, qui à mes yeux représente sa quintessence du point de vue "homotopique" ou "cohomologique". Un peu comme la donnée d'une base pour un espace vectoriel, ou d'un système de générateurs et de relations pour un groupe, ou un système d'équations pour une variété[38]. Il n'y a aucun inconvénient à travailler avec ces "superstructures", et bien souvent on ne peut même s'en passer. Il est cependant important, pour une compréhension en profondeur, de ne pas pour autant laisser brouiller et perdre de vue les objets géométriques essentiels (espace vectoriel, groupe, variété, dérivateur) et leur caractère intrinsèque.

[38]Une première comparaison qui m'était venue (elle s'est perdue en route) me paraît plus frappante : la relation entre catégorie de modèles et dérivateur associé, s'apparente pour moi à celle entre un complexe dans une catégorie abélienne, et l'objet correspondant dans la catégorie dérivée. Et l'effort conceptuel qu'il m'avait fallu faire pour parvenir à la notion de catégorie dérivée, s'apparente un peu à celui (plus modeste à mon sens) que les gens devront fournir un jour pour accéder à la notion de dérivateur et au "yoga des dérivateurs" – lequel ne s'acquiert qu'en travaillant avec !

J'ignore s'il est raisonnable de s'attendre, pour le 2-foncteur précédent (), à des propriétés de fidélité, ou de surjectivité essentielle, en limitant au besoin les catégories de modèles envisagées, de façon par exemple à assurer qu'elles donnent naissance à des dérivateurs, et non seulement des prédérivateurs. Cela fait partie en tous cas des questions qu'on devra bien examiner un jour (dans ce monde-ci, s'il en est temps, ou sinon dans l'autre…). J'avoue que jusqu'à présent, mon intuition des dérivateurs s'est beaucoup appuyée sur le formalisme des catégories de modèles.

Mais il me faut revenir sur le cas où on se donne une catégorie de modèles fixe $(M, W)$, et sur la grande perplexité de l'existence des foncteurs $f_!$ et $f_*$. Techniquement parlant, c'est là, visiblement, une des questions les plus cruciales qui se posent pour le développement de l'algèbre topologique, telle que je l'envisage. Or pour cette question fondamentale, je n'ai que des éléments de réponse bien fragmentaires, et manifestement insatisfaisants (et sans doute aussi insuffisants à la longue). Prenant le cas où Diag est égal à  : j'avoue (à ma honte !) que je n'ai pas même construit d'exemple d'une catégorie de modèles, stable par petites limites (inductives et projectives), et telle que les foncteurs $f_!$ et $f$ n'existent pas pour toute flèche $f$ dans , pour le prédérivateur associé. Je ne m'attends nullement d'ailleurs à ce qu'ils existent toujours, même si on fait des hypothèses du type : $W$ stable par limites inductives filtrantes, et la catégorie $M$ accessible et $W$ une partie accessible de $(M)$ (hypothèses qui me paraissent relativement anodines). D'autre part, je n'ai pu prouver l'existence de ces foncteurs que dans des cas extrêmement particuliers, que je renonce à expliciter dans cette lettre (devenue prohibitivement longue). Je ne connais pas un cas où je sache l'établir, sans supposer tout au moins que la catégorie de modèles est associée à un triple de Quillen clos (et plus encore) ! La situation est quand même meilleure si on est moins exigeant et prend comme domaine Diag (disons) la catégorie des ensembles ordonnés finis. À ce moment-là, il suffit que $W$ soit associé à une catégorie à cofibrations (pour avoir $f_!$) ou à fibrations (pour avoir $f$), sans qu'il soit nécessaire d'ailleurs (pour avoir bel et bien un dérivateur) que ces deux structures duales soient reliées entre elles autrement que par le localiseur commun $W$.

C'est le moment de dire que le travail de Anderson (dont tu m'as envoyé une photocopie), où il prétend donner une esquisse d'un théorème très général en ce sens (qui aurait en effet comblé mes vœux !), est totalement canulé – même déjà dans le cas d'un ensemble ordonné fini $I$, et du morphisme structural $I \longrightarrow e$, i.e. pour l'existence des  ordinaires sur $I$. Sa soi-disant idée de démonstration déconne en deux endroits qui me paraissent essentiels, et je doute fort qu'elle soit récupérable, bien que je n'aie pas de contre-exemple au théorème qu'il énonce, et dont il ne daigne pas même donner une démonstration. Ayant regardé ce travail (si on peut l'appeler ainsi) avec attention, je suis heureux qu'il ne soit pas de toi – il me fait grincer des dents du début à la fin, et plus que ça. Je ne le regrette pas, car si je n'ai guère appris de maths en le lisant, j'y ai appris autre chose de moins facile et de moins réjouissant que les maths, et plus important.

Je suis d'ailleurs ébahi que dix ans se soient passés depuis cet article, sans que personne apparemment ne s'aperçoive qu'il ne tient pas debout. Visiblement, ce théorème, c'était comme une pièce de musée, une prouesse pour rien – personne n'en avait rien à foutre. Même chez des plus "cotés" que lui, les théorèmes souvent, ce n'est plus une porte ouverte sur quelque chose, qu'on n'avait pas vue avant et qu'on voit, ni même un outil pour forcer les portes qu'on n'arrive à ouvrir en douceur – mais un trophée. Peu importe alors qu'il soit vrai ou faux – ça ne fait strictement plus aucune différence…

Sauf si tu as besoin de précisions, je crois inutile que j'entre dans des détails – tu es bien capable de trouver tout seul où ça foire (sur l'air du "il est évident que"…). Et de plus, il est temps que je m'arrête, bien que je ne sois pas parvenu encore à ce qui, techniquement, était prévu comme substance principale de ma lettre : le "théorème de factorisation", et son application à des théorèmes de stabilité pour des structures de Quillen. Ce sera donc sans doute pour ma prochaine lettre, si tu es intéressé à continuer cette correspondance. Auquel cas je serai très heureux de t'avoir comme interlocuteur de mes cogitations !

En attendant, reçois mes amitiés

## Letter to R. Thomason, 2.4.1991[39]

Les Aumettes le 2.4.1991

Dear Thomason,

Thank you for your letter, and forgive me for having taken so much time to reply. One reason for this is that, since for the past maybe two months I have been busy thinking about something that started as a small diversion, which I thought I would be able to sort out in a few days (a familiar sentence…), and I delayed this letter week after week. This thought is not really about homotopical algebra per se, but more about the foundations of category theory, and I have done a lot more than what I need right now [9, Chapter XVIII]. But up until now, I have been convinced that a homotopical algebra (or, in a wider vision, a "topological algebra") such as I envisage cannot be developed with all the breadth that it has without the aforementioned categorical foundations. It concerns a theory of (large) categories that I have been calling "accessible," and accessible subsets of these, completely rewriting the provisional theory that I present in SGA 4, §I.9 [2]. I have woven a tapestry of nearly two hundred pages on this seemingly trivial theme, and it would please me to present to you the outlines, if that would be of interest to you. There are also some intriguing problems that remain, that I feel are difficult, maybe even deep, and that could maybe (who knows) inspire you, or somebody else interested in the foundations of the tool that is category theory. But all this seems to me part of the domain of the tool, and I would prefer, in this letter, to speak about more central things. The main ideas were, for the most part, born over 25 years ago, and I see the enduring seedlings of them in my solitary reflections from the years '56 and '57, when I first had the need of categories of "coefficients" that were less prohibitively large than the interminable complexes of chains or of cochains, and the idea (after long periods of perplexity) of constructing such categories via passing to a category of fractions (a notion that had to be invented by considering concrete elements) by "inverting" the quasi-isomorphisms. The principal conceptual work that remained to be done — and that now seems to me as equally fascinating (as

[39] Translation by T. Hosgood

much as for its beauty as for its evident impact on the foundations of a cohomological algebra in the spirit of a theory of cohomological coefficients) as in the times of my first loves with cohomology — was to clarify the intrinsic structure of these categories. The fact that this work, that I had confided to Verdier around 1960, and that was meant to be the subject of his thesis [13], had still not yet been done, even in the case of ordinary and abelian derived categories, which nevertheless have ended up (by necessity) being used daily in both geometry and analysis, says a lot about the state of mentality in the mathematical community with regards to foundations.

This mood of contempt for essential foundational work (and, more generally, for anything that does not follow the fashion of the moment), I mentioned in my last letter, and I also come back to it many times in the pages of Récoltes et Semailles [8], and it is one thing (amongst many others) that quite is simply beyond me. Your response to my letter shows that you absolutely did not understand. It wasn't a letter to "complain" about this, or to say that it bothered me. But it was an impossible attempt to share a pain. I knew deep down that it was hopeless; for everybody shuns pain, that is, shuns knowledge (for there is no knowledge from the soul that is free from pain). A very rare attempt, possibly the only one in my life (at least, I can't remember another), and probably the last…

There are two directions of ideas, intimately linked, that I want to talk to you about, and that I have been especially keen to develop since the end of October (when I resumed mathematical reflection [9] for an indefinite period). They are already sketched out here and there (along with a number of other key ideas of topological algebra) in Pursuing Stacks [6, Section 69]. In this 1983 reflection, which has helped me a lot these days, I end up spreading myself rather thin by following lateral paths, rather than returning to the essential ideas of my initial point. As another useful source for anybody interested in these basic questions, I point to two or three letters to Larry Breen, which I thought that I would include in the published text of Pursuing Stacks [7]. On the one hand, I would like to talk to you about categories of models and the notion of "derivators" (replacing the defunct "derived categories" of Verdier, which are decidedly inadequate for our needs). On the other hand, I have a lot to say about CatCatCat as a category of models for all kinds of “homotopy types.” But this will probably be for another time (assuming that your interest survives reading this letter). So today it will be the category of models and the notion of a derivator.

## Lettre à A Y, 24.6.1991

Les Aumettes, le 24.6.1991

Cher Monsieur,

Excusez-moi d'avoir mis si longtemps à réagir à votre longue et sympathique lettre (du 25 mai), ayant été très accaparé par des tâches et préoccupations extra-scientifiques. Cela n'a pas empêché que j'ai été sensible au souffle d'un enthousiasme et à la faculté d'émerveillement qui transparaissait derrière les explications $\pm$ techniques. Je dois vous avouer que vu ma très grande ignorance en physique, ces explications m'ont passé totalement par dessus la tête. Aussi j'ai bien peur que ma réponse vous laissera sur votre faim. Visiblement, il faut des yeux totalement neufs, et un flair consommé pour l'"invention" (en fait, la découverte) de structures mathématiques (au service d'intuitions à la fois physiques et philosophiques) pour dégager les notions de base et forger les outils conceptuels d'une physique nouvelle. Avez-vous ces grands dons, et la foi en votre "voix intérieure", pour démarrer à neuf, à contre-courant de toutes les idées reçues, pour une œuvre de rénovation plus radicale encore, peut-être, que celles qui furent accomplies par Einstein et par Schrödinger?

Avez-vous le courage pour faire un tel pari – voilà la question! Sans autre guide que votre bon sens d'enfant, et votre flair, pour un long voyage sans perspective de compagnons de route... Pour que je puisse être d'un réel secours pour un tel voyage dans l'inconnu, il y faudrait d'une part un investissement que je ne suis plus disposé à fournir – ne serait-ce que pour me mettre au courant dans les grandes lignes au moins des bases conceptuelles de la physique théorique actuelle, de ses cohérences et de ses incohérences. Malheureusement, je ne connais non plus aucun mathématicien que me paraîtrait apte au rôle de coéquipier dans un tandem physico-mathématique pour le genre de travail qu'il y aurait à faire (et auquel j'ai rêvé plus d'une fois!)

Il est vrai qu'au cours des dix dernières années, j'ai réfléchi ici et là à diverses extensions de la notion d'espace, en gardant à l'esprit la remarque pénétrante de Riemann. J'en parle dans quelques lettres à des amis physiciens ou "relativistes". Il ne doit pas être très difficile p. ex. de développer une sorte de calcul différentiel sur des “variétés” qui seraient des ensembles finis (mais à cardinal “très grand”), ou plus généralement discrets, visualisés comme formant une sorte de “réseau” très serré de points dans une variété $C^\infty$ (p. ex. une variété riemannienne) – une sorte de géométrie différentielle “floue”, où toutes les notions numériques sont définies seulement “‘a $\varepsilon$ près”, pour un ordre d’approximation $\varepsilon$ donné. Comme prédit par Riemann, une telle géométrie différentielle floue, par la force des choses, serait nettement plus délicate et compliquée que la géométrie différentielle ordinaire. Mais peut-être pas *tellement* plus compliquée ! Dans cette approche, le point faible à présent, c’est qu’il ne semble pas que la physique nous fournisse quelque idée de “quanta” d’espace-temps, qui seraient les “points” d’une telle variété discrète. (Il est vrai que lorsque fut formulée et progressivement admise au siècle dernier, “l’hypothèse atomiste”, on n’en savait guère plus sur ces fameux atomes que qu’ils pourraient peut-être exister…) Je suspecte que les nouvelles structures à dégager seront beaucoup plus subtiles qu’un simple paraphrase de modèles continus connus en termes discrets[40]. *Et surtout, qu’avant toute tentative de dégager des nouveaux modèles, présmés meilleurs que les anciens, il s’impose de poursuivre une réflexion philosophico-mathématique très servie sur la notion même de “modèle mathématique” de quelque aspect de la réalité – sur son rôle, son utilité, et ses limites.*

Je crains que je ne puisse guère vous en dire plus que ces commentaires généraux. S’ils pouvaient pourtant vous être utiles de quelque façon – ne serait-ce que pour vous encourager dans votre aventure solitaire – j’en serais très heureux. Avec mes meilleurs souhaits

Alexandre Grothendieck

[40]l n’est pas exclu pourtant que ce qui pouvait sembler initialement un simple exercice de “paraphrase” de notions bien connues dans un contexte conceptuel nouveau, amène, par la logique intérieure de la recherche, à des concepts totalement nouveaux et inattendus. (C’est là une chose qui n’est pas rare dans le travail de découverte des structures mathématiques.) Il faut des années de tâtonnement, sans doute, avant que des intuitions éparses finissent par s’assembler en une vision d’ensemble