

Sao Paulo le 28.6.1954

Cher Dixmier,

Connais-tu la réponse à la question suivante. Soit A un anneau d'opérateurs dans un Hilbert H , existe-t-il une projection u de norme 1 de $R(H)$ sur A , ~~de norme 1~~, compatible avec l'involution, et telle que $u(ATB) = Au(T)B$ pour $A, B \in A$? C'est vrai si H est de dimension finie (et évidemment c'est bien facile dans ce cas), ^{ou} si $A \supset A'$, et de ce dernier cas on déduit facilement que c'est vrai si A est commutative (commencer à appliquer le résultat précédent à un anneau commutatif maximal $\frac{B}{A}$ contenant A , d'autre part on sait qu'il existe une projection de B sur A qui a les propriétés voulues). Bien entendu, même si A est commutatif maximal, il n'y a pas unicité de la projection u . Voici la démonstration du deuxième cas $A \supset A'$: Soit K le spectre de A' , Ω l'ensemble des partitions finies de K en ensembles ouverts et fermés, muni de sa relation d'ordre naturelle; pour $\omega = (\omega_i) \in \Omega$ on pose $u_\omega(T) = \sum_i T_{\omega_i} T_{\omega_i}^*$, on considère un ultrafiltre sur Ω plus fin que le filtre des sections croissantes, et on pose $u(T) = \lim_{\omega} u_\omega(T)$. ^(limit fine!) - Le problème m'intéresse pour pouvoir ramener les propriétés vectorielles et topologiques d'anneaux algèbres autoadjointes uniformément fermées quelconques d'opérateurs, aux ~~xxxxxxx~~ propriétés de $R(H)$, d'où facilement aux propriétés de l'algèbre $R_0(H)$ des opérateurs compacts, ce qui ramènera souvent à des propriétés de nature métrique sur les $R(H)$ ~~quand~~ ^{si} H est de dimension finie. De même, les propriétés des espaces duals de C^* -algèbres (et aussi des espaces L^1 qui interviennent en intégration non commutative) se ramèneraient aux propriétés des espaces $\hat{H} \otimes H$.

A propos, en vue de simplifier l'exposé de Godement sur la transformation de Fourier des groupes loc.comp.unimod., j'ai eu besoin du résultat suivant, qui se démontre assez facilement en se ramenant à $R(H)$: ~~toutes~~ les formes linéaires positives sur une C^* -algèbre engendrent le dual. Cela est-il connu, ou te semble-t-il utile de publier une petite note là-dessus ?

Comment va le bouquin que tu écris sur les Anneaux d'opérateurs ?

J'espère que cette lettre t'arrivera, et que tu pourras me donner une réponse positive. Bien à toi

A. G. Theisen

5-2. 2. 18.7.1954

Cher Dixmier,

Bien merci pour la copie de ton bouquin, que je n'ai reçu qu'il y a quelques jours, et dont j'ai commencé la lecture avec grand intérêt. Je ne suis pas sûr de pouvoir faire des remarques très utiles pour la rédaction, mais bien entendu je lis le crayon à la main, et te communiquerai mes observations à l'occasion. Pour l'instant, je m'aperçois que systématiquement tu n'énonces que pour les seules algèbres de von Neumann des définitions et propositions valables souvent pour des C^* -algèbres arbitraires, c'est parfois dommage. Pour l'instant, je te signale des erreurs(?) de détail. Page 7, il me semble que la caractérisation de T dans le lemme 2, 2°, n'est pas correcte. Page 12, fin du No 2 à la ligne 5 de la fin, je pense que "et un seul" est faux, déjà si $A_1 = B_1 = C$ (mais n'ai pas cherché le contre-exemple). Page 22 lignes 9-10 "il suffit" est manifestement faux, tu penses sans doute au cas $B = 0$. D'autres remarques plus tard. Quelques questions: une sous-algèbre autoadjointe uniformément fermée de $L(H)$, stable pour le sup des familles filtrantes croissantes majorées, est-elle faiblement fermée? Une C^* -algèbre pour laquelle le sup d'une famille filtrante croissante majorée existe toujours, est-elle isomorphe à une algèbre de von Neumann? Je ne le sais pas même dans le cas commutatif, ce qui prouve que je ferai bien de lire ton article dans "Summa Brasiliensis", as-tu encore des tirages à part? Je suis aussi bien curieux de la suite du bouquin, et te suis reconnaissant pour tout papier que tu peux me passer la dessus. Feras-tu un plancherel abstrait pour les C^* -algèbres, qui inclurait la théorie des caractères de Godement?

La lecture du début de ton bouquin m'a permis aussi de répondre par l'affirmative à la question de ma lettre précédente (je viens de trouver la démonstration aujourd'hui, et ne l'ai pas encore mise par écrit canoniquement, mais je pense qu'il n'y a pas d'erreur). Soit M une sous-algèbre autoadjointe ~~max~~ abélienne maximale dans le commutant A' de l'algèbre de von Neumann A , on sait qu'il existe une projection de $L(H)$ sur M' ayant les propriétés voulues, il suffit donc de trouver une projection analogue de M' sur A . J'arrive à la prouver par un raisonnement direct (grâce au fait que M' est engendré ~~par~~ au sens de v.N. par A et la sous-algèbre abélienne M du commutant de A), ~~xxxxx~~ tout à fait différent du raisonnement du premier

qu'il existe même une projection de A sur A' qui est la projection cherchée. On pense que ça doit en effet pouvoir se prouver (c'est en tous cas vrai dans le cas de la dimension finie, donc il y a de l'espoir !). - En zornifiant sur l'ensemble des sous- C^* -algèbres ^B de M' contenant A , pour lesquelles une projection $B \rightarrow A$ du type voulu existe, il faut pouvoir passer de B à son adhérence faible (ce qui est un des deux pas essentiels du raisonnement, inutile dans le cas commutatif rappelé plus haut). Pour ça, on doit introduire le bidual B'' de B , le munir canoniquement d'une structure d'algèbre de von Neumann telle que l'application naturelle $B'' \rightarrow \bar{B}$ soit un homomorphisme normal de B'' sur \bar{B} (donc se relève, d'où facilement une application cherchée $\bar{B} \rightarrow A$ en composant $\bar{B} \rightarrow B'' \rightarrow A$). Pour ces histoires de bidual de C^* -algèbre, il faut seulement utiliser le résultat sur le dual que je t'avais signalé dans ma lettre précédente, et qui est presque trivial: Soit A une C^* -algèbre, u une forme linéaire hermitienne continue sur A , alors on a $u = v - w$, où v et w sont positives, et $\|v\| + \|w\| = \|u\|$. Démonstration: Soit K la partie de A' formée des formes ~~hermitiennes~~ positives de norme ≤ 1 , c'est une partie convexe faiblement compacte contenant 0 , et il est trivial que pour $x \in A$, on a $\|x\| = \sup_{x' \in K} |x, x'|$ (x hermitien). Se bornant aux sous-espaces hermitiens de A et A' , le théorème des bipolaires montre que la boule unité de A'_h est l'enveloppe convexe symétrique faiblement fermée de K , i.e. l'ensemble des $\lambda v - \mu w$, où $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$, $v, w \in K$ (cet ensemble est déjà faiblement compact, car K l'est), ce qui prouve le théorème. Si on ne suppose plus u hermitienne, on aura $u = v + iw$ avec v, w hermitiennes et $\|v\|, \|w\| \leq \|u\|$, et on peut appliquer à v et w le résultat précédent. - De plus, le raisonnement prouve que réciproquement, si A est une ~~*algèbre~~ algèbre normée complète qui satisfait au théorème précédent, (mais on ne suppose pas u "bonifiée" - ce qui est automatiquement vrai si A a une unité), alors (du moins sur sa partie hermitienne) sa norme est la norme polaire de K donc une norme satisfaisant aux identités algébriques qui caractérisent les C^* -algèbres. Si on suppose seulement que les formes positives engendrent algébriquement le dual de A , on peut encore dire (en utilisant Baire) que la norme de A est équivalente à la C^* -norme polaire de K , donc que par un changement de norme A devient une C^* -algèbre. - Enfin, il est probable que dans l'énoncé du théorème plus haut, v et w soient uniques (peut-être en leur imposant d'autres conditions); il en résulterait que si u est centrale, v et w le sont etc. Mais je ne me suis pas amusé à regarder ça de près.

Merci aussi pour ta lettre où tu réponds à mes questions. Je te salue

Sao Paulo le 13.8.1954

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre détaillée du 28.7. C'est bien dommage que tu penses la théorie des C^* -algèbres trop vaste pour être englobée dans ton bouquin. Mais où serait le mal d'un livre de 400 pages ou plus sur ce sujet, ça serait au contraire bien agréable qu'il existe un, car ce n'est certes pas amusant de s'orienter à tâtons dans la littérature courante. Je regrette surtout que tu ne fasses pas Plancherel; car il ne coûte vraiment pas cher ~~en~~ puisque'on a déjà la bonne technique des algèbres de v.N., et un Plancherel joliment présenté ferait certainement du bien. D'ailleurs, si j'ai bien compris, c'est surtout pour des Plancherels et Cie que sert toute la théorie des C^* -algèbres.

Je précise un point de ma lettre précédente, qui te semblait obscur. Soit A une $*$ -algèbre, P l'ensemble des formes positives, unitaires, bornées (au sens algébrique) et normées (i.e. $f(1)=1$ s'il y a unité) sur A . Soit $N(x) = \sup_{f \in P} f(x^*x)$ pour tout $x \in A$: $N(x)^2 = \sup_{f \in P} f(x^*x)$, alors on a aussi

$N(x) = \sup_{U \text{ unitaire}} \|Ux\|$, où U parcourt toutes les représentations unitaires de A . Donc N est une norme sur A telle que l'algèbre complétée de A soit une C^* -algèbre, et les représentations unitaires de A correspondent biunivoquement à celles de cette C^* -algèbre (qui se substitue donc avantageusement à A dans diverses questions, p.ex. Plancherel). Supposons maintenant que A soit déjà muni d'une norme $\|x\|$ qui en fasse une algèbre normée complète, et pour simplifier supposons qu'il existe une unité. Alors les formes positives unitaires et bornées sont identiques aux formes positives continues, les formes normées sont celles telles que $f(1)=1$, ou encore celles de norme 1. Elles forment une partie convexe faiblement compacte de la partie hermitienne du dual de A . La partie hermitienne de ce dual est le dual de la partie hermitienne de A , il revient donc au même de dire que sur A_h , la norme donnée est égale à $N(x) = \sup_{f \in P} |f(x)|$, ou que la boule unité de A_h est l'enveloppe disquée faiblement fermée de P . Cette dernière par raison de faible compacité n'est autre que l'ensemble des formes $f+g$, f et g positives, $\|f+g\| \leq 1$. S'il en est donc ainsi, la norme donnée est identique à la norme N sur A_h , et par suite équivalente à N sur A (car du point de vue réel, une algèbre normée involutive est somme directe topologique de sa partie hermitienne et de sa partie antihermitienne). Donc A est complète pour N ; donc à condition de changer $\|x\|$ par une norme équivalente, A devient une C^* -algèbre. Si on ne veut plus que les deux normes coïncident sur la partie hermitienne, il suffisait même de supposer que toute forme hermitienne sur A est différence de deux formes positives, i.e. que A_h est engendré par l'enveloppe disquée Q de P . Car A_h étant tonnelé, il en résulte que Q est un voisinage de 0, donc par polarité que les normes $\|x\|$ et $N(x)$ sur A_h (donc aussi sur A) sont équivalentes.

Soit A une C^* -algèbre. par bitransposition, toute représentation unitaire de A se, soit $x \rightarrow U(x)$, se-prolonge en une application de même norme du bidual A'' dans $L(H)$, et de façon précise sur l'adhérence faible de $U(A)$. Si toute forme positive sur A est de la forme $(U(x).a,a)$ (pour ceci, on prend pour U la somme hilbertienne des représentations unitaires associées aux diverses formes positives normées sur A), la bitransposée U'' est biunivoque, et identifie donc A'' à une algèbre de von Neumann. On voit aussitôt que la topologie ultrafaible de A'' est $\sigma(A'', A')$, en particulier les formes positives normales sur A'' sont les formes positives quelconques sur A . De plus, on constate aussitôt que si V est une représentation unitaire de A , alors V'' est une représentation normale de U'' (ce qui établit une correspondance biunivoque entre les représentations unitaires quelconques de A , et les représentations normales de A''). Cela établit d'ailleurs le fait (facile directement aussi) que la structure-d'algèbre de v.N. sur A'' est canonique. Ceci me semble commode dans bien des cas. Ainsi on appellera support d'une forme positive sur A le support de la forme nor-

male sur A'' qu'elle définit (maie gaffe, si A est de v.N. et si la forme donnée est déjà normale, ça fait deux supports différents). Deux formes positives seront dites disjointes si leurs supports sont orthogonaux. Ce fois-ci, il n'y a pas d'ambiguïté quand A est déjà une algèbre de von Neumann et u et v normales, comme il résulte par exemple de la proposition (bien facile): deux formes positives u, v sur la C^* -algèbre A sont disjointes si et seulement si $\|u-v\| = \|u\| + \|v\|$.

J'en viens à la question d'unicité de la décomposition d'une forme linéaire hermitienne φ comme différence de deux formes positives disjointes u et v . On peut supposer A une alg. de v.N. et u, v normales. Alors on a un résultat plus général: Soient u, v deux formes positives (finies ou non) normales définies sur A^+ , et semi-finies (par quoi on entend qu'il existe un idéal bilatère faiblement dense, sur la partie positive duquel u resp. v est fini). La notion de support est définie de ~~xxx~~ façon évidente; supposons ~~xxxx~~ les supports de u et v orthogonaux. Alors je dis que u et v sont uniquement déterminés par la connaissance de la forme $u-v$ (qui est une forme linéaire sur un idéal bilatère faiblement dense convenable de A ; noter que l'en-semble des idéaux bilatères faiblement denses est une base de filtre, ce qui précise le sens de l'énoncé précédent). La démonstration est absolument élémentaire (pas de décompositions spectrales!), on montre directement comment u et v peuvent s'exprimer en termes de $\varphi = u-v$. En fait, on peut encore affaiblir la notion de semi-fini dans cette démonstration. Corollaire: si φ est centrale, u et v sont des traces etc. Mais question: si on ne suppose pas u et v disjointes, peut-on écrire pourtant φ comme différence de deux formes positives normales semi-finies disjointes? C'est bien plausible, mais je n'ai pas encore regardé. - Bien entendu, si on ne suppose plus que A est une algèbre de v.N., on a des mêmes énoncés sans condition de normalité, mais la condition de semi-finitude étant ici remplacée par l'existence d'un idéal bilatère dense (pour la norme) sur lequel la forme positive envisagée est finie (ce qui rejoint le point de vue de Godement dans son exposé de Plancherel). On devra passer comme toujours à A'' (mais j'avoue que je n'ai pas fait les vérifications).

~~xxxxxxxxxxxx~~ Enfin, dans la décomposition canonique $\varphi = u-v$ avec u et v positives, $\|u\| = \|u\| + \|v\|$, si A est de v.N. et φ ultrafaiblement continue, alors u et v ~~sont~~ le sont aussi (i.e. sont normales). Il suffit d'exhiber une telle décomposition, avec u et v normales. Mais la topologie ultrafaible de A étant induite par la top. ultrafaible d'un $L(H)$, on peut supposer $A = L(H)$. Mais alors on a une forme bien explicite des formes hermitiennes ultrafaiblement continues, donnée par des opérateurs à trace hermitienne dont la décomposition spectrale donne la décomposition voulue.

Malheureusement, je n'ai pas vu de démonstration générale du théorème de commutation suivant (qu'il suffit maintenant d'énoncer pour les formes positives): Soit A alg. de v.N., u une forme positive normale sur A (en fait, il devrait être inutile de supposer u finie, semi-finie devrait suffire), soit B son "commutant" dans A . Alors B contient son commutant B' dans A . Cela suggère une théorie de la commutation, qui serait la suivante: dis moi si par hasard tu ne sais pas si elle est fautive. (Mais il me semble que le seul cas présentant des difficultés - i.e. qui ne se réduit pas par des techniques connues de décompositions spectrales - est celui d'une algèbre purement infinie). On prend les commutants dans A (laissant tomber $L(H)$!), notation B', B'' etc. Une sous-algèbre de v.N. de A est dite close, si elle est identique à son bicommutant (question: suffit-il qu'elle contienne le centre?) Soit P l'ensemble des formes positives normales semi-finies sur A . (Il est cependant possible que la définition donnée plus haut de semi-finie soit trop stricte. Car alors sur un facteur purement infini, donc simple, une forme semi-finie serait automatiquement finie; alors ça semble trop beau que la théorie esquissée ci-dessous puisse marcher). On dit que $x \in A$ et $u \in P$ commutent, si $u(xy) = u(yx)$ pour tout y dans ~~xxxxx~~ un idéal bilatère ~~xxx~~ faiblement dense assez petit (définition sujette à variation, voir ci-dessus). D'où notion de commutant $\gamma(B)$ dans P d'une partie B de A , et commutant $\gamma(M)$ dans A d'une partie M de P . Voici ce qui devrait être vrai (et est vrai dans le cas d'une algèbre semi-finie):

J. Grothendieck
645 Kentucky Street
Lawrence (Kansas)
USA

Lawrence 24.1.1955

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre. Bien que je ne doutais pas que une partie
des notions introduites dans mon papier (bien toutes) devraient
être connues, je ne connaissais aucune bibliographie, et ne
savais pas, en effet, que les $\Delta_A(t)$ avaient été considérés
par Kadison. A-t-il aussi le "principe fondamental"

$$\Delta_{|AB|} \leq \Delta_{|A|} \Delta_{|B|} ?$$

Je n't'ai jamais demandé si une forme linéaire
hermitienne ultra-faiblement continue sur un C^* -algèbre
à dimension infinie se factorise, avec $\varphi_1, \varphi_2 \gg 0$ et
 φ_1 et φ_2 disjointes. Si je me rappelle bien, je n't'ai
contraire donné la démonstration dans la dernière
lettre de Dixmier (mais l'as-tu reçue? C'était une
lettre fort longue, écrite à la machine, où je posai
un tas de conjectures). Je n'ai jamais eu de réponse.

Mais peut-être n'en as-tu pas pu déchiffrer une
dans une lettre antérieure,
écriture(?!). En fait, une phrase

a) Tout φ hermitien continu sur un C^* -algèbre A
s'écrit $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, avec " φ " = " φ_1 " + " φ_2 ", $\varphi_1, \varphi_2 \gg 0$
(Halm - Bercov)

b) Cette décomposition est unique. La condition
" φ " = " φ_1 " + " φ_2 " équivaut aussi au fait que φ_1 et φ_2
sont disjointes

c) Si φ est ultra-faiblement continue (sur A muni
de sa norme), φ_1 et φ_2 le sont.

Je t'y demandais aussi la démonstration explicite que si
 A est une C^* -algèbre commutative φ -positive pour une forme linéaire
hermitienne continue sur A est différence de deux formes
positives, alors (par dégroupement de termes) A est isomorphe à un C^* -algèbre

c) est immédiat, car il suffit de prouver l'existence
 d'un unique une décomposition $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, φ_1 et φ_2
 $\in A_*$, " φ " = " φ_1 " + " φ_2 ". Par Hahn-Banach, on est
 ramené au cas où $A = L(H)$. Mon. sur $A_* = L'(H)$
 (opérateurs adjoints de Fredholm), et le diagramme
 d'un opérateur de Fredholm hermitien on se
 partit positive et négative dans le résultat
 cherché.

Quant à la preuve de b), je n'ai pas les
 papiers sous le bras (ils sont dans une grosse
 valise qui se arrivera dans quelques semaines).
 Aussi il vaut mieux que je t'ele dans une grande
 j'aurai les papiers. J'ai une rédaction
 complète de ce fourbi, (il n'y a donc pas
 de conseil invasion à craindre, je pense!).

As-tu l'intention de regarder les questions
 que je pose dans mon papier sur les inégalités
 de convexité. Et si oui, penses-tu que le
 fourbi mérite une rédaction soignée dans
 un "print paper"? En ce cas, il vrait sans doute
 préférable que tu esumes la rédaction, pour le
 bien de l'auteur!

Je suis un train de passer une semaine en Italie
 de trav. alg. et un dilute dans des directions
 variées. J'ai beaucoup de temps à moi, et suis en
 train : fait bien.

Amitiés

Aposthénos