Rapport d'activité

Mon enseignement depuis 1978 a consisté en des enseignements d'initiation à la recherche, dans le cadre de cours de C 4 (math. pures et approfondies), de DEA, ou de cours d'option de 1ère année (en DEUG A). Plûtôt que de cours au sens courant du terme, il s'agit de séances de réflexion, menées en commun avec les étudiants sur des sujets de leur choix, que chacun approfondit par un travail personnel au cours de l'année. Il n'y a aucune limitation préalable sur les thèmes de réflexion admissibles, qui peuvent être très différents d'un étudiant à l'autre (qui pour cette raison ont tendance à travailler par groupes suivant les affinités entre les sujets choisis), et sortir entièrement de mes domaines de compétence, ou de ceux de mes collaborateurs éventuels, au point souvent de nous prendre complètement au dépourvu, devant des situations où l'étudiant perçoit ~~a~~ dès le départ, ou développe en cours de route, une intuition très sûre, voire profonde. De telles situations, clairement perçues par tous, bousculent de façon bien salutaire la distribution de rôles "actif - passif" de rigueur dans l'i nstitution enseignante. La difficulté principale, commune à pratiquement tous les étudiants, et, de ~~alors~~ même qu'il y a eu débloquage d'une curiosité et d'une intuition créatrices, se trouve au niveau de la verbalisation - l'expression en un langage clair et précis, développé au fur et à mesure des besoins, des intuitions présentes, pour cerner de plus en plus près la situation qu'il s'agit d'étudier. C'est à ce niveau avant tout (une fois le débloquage initial acquis, préalable à tout travail personnel digne de ce nom) qu'il y a bel et bien un <u>apprentissage</u> à faire, dont le besoin est ressenti très confusément d'abord, et de plus en plus clairement au fur et à mesure que cet apprentissage se poursuit, sous la pression justement de ce besoin. C'est à ce niveau aussi et à ce niveau seulement, que mon rôle ne se réduit pas à celui de catalyseur dans une recherche personnelle (dont chaque participant porte en lui tous les éléments et tous les moyens), mais qu'il y a bel et bien un rôle d'enseignant à jouer, dans une relation où une écoute mutuelle constante devient la première nécessité.

141

En dehors de cet enseignement, j'ai assuré et assure des directions de recherche au niveau de thèses de 3e cycle ou de doctorat d'état, sur des sujets assez divers, dont le fil conducteur commun (à une exception près) est la topologie des surfaces et des courbes tracées sur les surfaces, avec l'aspect combinatoire des situations envisagées au premier plan.

Ma réflexion personnelle, en dehors de celle suscitée par mon rôle de "direction" de recherche, a porté principalement sur les sujets suivants:

a) Etude des actions de groupes de Galois profinis (et notamment de celui de $\overline{Q}$ sur Q) sur des groupes fondamentaux profinis non abéliens, tels les groupes fondamentaux géométriques de courbes algébriques, et développement d'un vaste programme de "géométrie algébrique anabélienne", dont un des éléments cruciaux consiste en des analogues non abéliens des conjectures de Tate en cohomologie ℓ-adique. A l'horizon se trouve, entre autres, une description purement algébrique des schémas de type fini sur la base absolue Spec($\underline{Z}$) (plus précisément, de la catégorie des fractions déduite de la catégorie formée de ces schémas, en rendant inversibles les "homéomorphismes universels" i.e. les morphismes qui induisent une équivalence entre les ~~sites~~ topos étales associés) en termes de groupes profinis, par une description qui en principe serait purement algébrique (sans référence explicite à des systèmes d'équations algébriques sur $\underline{Z}$ ...), et impliquerait une description purement algébrique du groupe $\mathrm{Gal}_{\overline{Q}/Q}$, qui dans cette théorie joue le rôle de la "base absolue". La théorie (en large partie heuristique encore) amène à étudier les classiques groupes de Teichmüller $T_{g,n}$ tant discrets que profinis, via les compactifications de Mumford-Deligne des topos modulaires correspondants $M_{g,n}$, et les stratifications naturelles de ceux-ci. Celles-ci donnent lieu à des dévissages canoniques des groupes, ou mieux, des groupoïdes de Teichmüller, qui d'une part permettent d'en donner une écriture par "générateurs et relations" adaptée à la structure stratifiée ("tour de Teichmüller"), et qui d'autre part "ont une signification arithmétique" i.e. se reflètent au niveau des groupes profinis correspondants, et sont préservées par l'action naturelle de $\Gamma = \mathrm{Gal}_{\overline{Q}/Q}$. Un point important acquis dès à présent est que ce dernier groupe se réalise fidèlement comme un sous-groupe du groupe des automorphismes extérieurs du groupe fondamental profini de la droite projective sur $\overline{Q}$ privée de trois points, et que ce groupe d'automorphismes, ~~peut se décrire~~ ou plutôt le sous-groupe qui préserve la "structure à lacets" naturelle de ce groupe profini, peut se décrire en termes de "paramètres profinis" naturels. Un des problèmes essentiels est de parvenir à une caractérisation purement algébrique de ce sous-groupe $\mathrm{Gal}_{\overline{Q}/Q}$, et une motivation principale pour l'étude de la "tour de Teichmüller" est de parvenir à une caractérisation heuristique plausible.

b) En marge de l'étude de la "tour de Teichmüller", ~~établissement d'~~ réflexions sur une théorie générale de "dévissage" des structures stratifiées, dans deux contextes qui se complètent mutuellement: celui des topos, et celui des "espaces topologiques M-modérés", pour une notion de "modération" M convenable. En même temps, réflexions sur les fondements d'une "topologie modérée", plus appropriée à l'étude des espaces d'homéomorphismes ou de plongements, par exemple, et de la relation d'isotopie, que la notion d'espace topologique, inadéquate également pour une théorie des structures stratifiées. L'importance de ces dernières peut se mesurer à cette observation, que la plupart des "espaces" rencontrés, et plus particulièrement les espaces ou topos "modulaires" de tout poil, sont munis de stratifications naturelles, faisant partie intégrante de leur structure tant soit peu fine.

c) Réflexions sur les fondements de l'algèbre homotopique, dans l'esprit de "l'algèbre cohomologique non commutative de dimension quelconque", avec la place centrale à la notion de ∞-champ et ∞-Gr-champ (au sens absolu, ou relativisé au dessus d'un topos), jouant le rôle à la fois de "modèles" particulièrement souples pour exprimer des types d'homotopie, et des "coéfficients" les plus généraux pour une "cohomologie non commutative".

142