Rapport d'activité (1.10.1984 - 15.12.1984)

par Alexandre Grothendieck, attaché de recherches au CNRS

Les mois écoulés ont été consacrés avant tout à la préparation des volumes 1 et 2 des Réflexions Mathématiques, qui paraîtront sans doute courant 1985, sous les titres "Récoltes et Semailles" et "Pursuing Stacks, part 1 : The Modelizing Story". Je prévois que cette préparation m'absorbera jusque vers la fin février, après quoi je compte reprendre la réflexion sur les fondements d'une "algèbre topologique" (commencée avec la première partie de "A la Poursuite des Champs"), en reprenant le fil de la réflexion de l' "Histoire de Modèles" là où je l'avais laissé. Je donne quelques précisions au sujet de ce programme de travail dans "Esquisse d'un Programme", par.7. Il s'agit ici de refondre, dans une discipline autonome (que je propose d'appeler "algèbre topologique") qui jouerait le rôle un peu du pendant "algébrique" de la topologie générale, un certain nombre de visions parcellaires provenant de l'algèbre (co)homologique (commutative ou non-commutative), l'algèbre homotopique, le formalisme algébrico-géométrique des topos (qui est une sorte de paraphrase dûment généralisée de la topologie générale), y compris le formalisme des champs, gerbes etc développé dans la thèse de Giraud, enfin la théorie des n-catégories, et celle des n-champs de telles n-catégories (encore dans les limbes). Le besoin d'une telle discipline nouvelle, et certaines des principales idées-force que je compte développer dans le maître d'oeuvre "A la Poursuite des Champs", me sont apparus progressivement entre 1955 et la fin des années soixante, en contrepoint ininterrompu avec le développement d'une "géométrie arithmétique", synthèse (entièrement imprévue encore jusqu'aux débuts des années soixante) de la géométrie algébrique, de la topologie et de l'arithmétique. Je développe des réflexions rétrospectives au sujet de la naissance, l'essor et la fortune (et parfois, infortune) ultérieure de ces disciplines nouvelles, ici et là au cours de la réflexion plus vaste poursuivie dans "Récoltes et Semailles". Qu'il me suffise ici de dire que dans mes propres motivations, aujourd'hui comme il y a vingt ans, l'algèbre topologique (laissée pour compte après mon "départ" en 1970) est avant tout un des principaux outils d'appoint pour le développement de cette "géométrie arithmétique", dont le développement jusqu'au stade d'une pleine maturité m'apparaît comme une des principales tâches qui se posent à la mathématique de notre temps. Un des signes principaux d'une telle maturité serait une maîtrise complète des

137

notions et idées autour de la notion de motif, que j'ai introduites et développées tout au long des années soixante (tombées dans un oubli soudain dès mon ~~départ~~ "départ" en 1970 et - à une exhumation partielle près en 1982 - jusqu'à aujourd'hui même ...), ainsi qu'une maîtrise des principales ~~idées~~ notions et idées de géométrie algébrique anabélienne que j'ai dégagées depuis 1978. En termes imagés, on peut dire que ces deux courants d'idées, le courant "abélien" incarné par la notion de motif, et le courant "anabélien" exemplifié par la structure géométrico-arithmétique de la "tour de Teichmüller", sont à la "géométrie arithmétique" dans son enfance, ce que les ~~notion~~ courants "complexes de cochaines - catégories dérivées commutatives" et "champs en tous genres - catégories homotopiques non commutatives" sont à l'algèbre topologique, (encore in utero).

La différence essentielle entre ces deux disciplines ne se situe cependant nullement dans leur état d'avancement relatif, circonstance des plus contingentes, apte à changer radicalement en l'espace de quelques années, ne serait-ce que par la vertu de l'écriture de "Pursuing Stacks". Elle se situe plutôt dans une différence de profondeur. Comme c'était le cas naguère pour le développement d'une "topologie générale" (faite sur mesure pour l'analyste, bien plus que pour le géomètre), le travail essentiel à accomplir pour la mise sur pied de l'"algèbre topologique" est, avant toute autre chose, le développement d'un langage , dont le manque se fait sentir (à moi tout au moins) à tous les pas. La dimension de cette tâche me semble être du même ordre que celle à laquelle se sont vus confrontés Hausdorf et d'autres, dans l'entre-deux-guerres. Elle n'a pas de commune mesure avec la tâche posée par le développement de la géométrie arithmétique, jusqu'au point d'un sentiment de "maîtrise" des principaux courants d'idées qui y confluent. On mesurera cette différence de "dimensions", en se rappelant que la "maîtrise" du "courant "anabélien" impliquerait, notamment, une description "purement algébrique" du groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$, et de la famille de ses sous-groupes de décomposition et d'inertie associés aux différents nombres premiers. La structure de ces derniers ~~xxxx~~ (correspondants aux cas "locaux" des corps p-adiques) ont été déterminés récemment par ~~Uwe Je~~ Uwe Jennsen, Kay Wingberg et (dans le cas p=2) Volker Diekert, avec une relation principale rappelant étrangement celle qui décrit le groupe fondamental d'une courbe algébrique sur le corps des complexes. Mais on est loin sans doute d'une description analogue dans le cas "global".

138

Pour terminer ce rapport préliminaire, je me sens en mesure d'apporter quelques précisions pratiques au programme "tous azimuths" exposé dans l'Esquisse d'un Programme (qui sera jointe à "Récoltes et Semailles", ainsi que le présent rapport, l'Esquisse Thématique et quelques autres textes de nature mathématique, pour constituer le volume 1 des Réflexions Mathématiques). Je tiens d'abord, ~~avant~~ toute autre chose, à m'acquitter (comme je le dis dans l'Esquisse d'un Programme, par.7) "d'une dette vis-à-vis de mon passé scientifique", en esquissant tout au moins dans les grandes lignes les principales visions d'ensemble auxquelles j'étais parvenu entre 1955 et 1970 et qui, sans avoir trouvé alors la forme d'exposés systématiques et publiés, ont été laissés pour compte par mes ex-élèves après mon "départ" en 1970. Il s'agit d'une part de l'ensemble d'intuitions et d'idées en direction de l'"algèbre topologique", à laquelle j'ai fait allusion tantôt, et d'autre part d'un "vaste tableau des motifs" qu'il s'agit de "brosser à grands traits", apte à servir à la fois de maître d'oeuvre pour l'édification d'une théorie qui reste conjecturale, et de fil conducteur très sûr et de fécond instrument de découverte, pour pouvoir prédire "à quoi on est en droit de s'attendre" dans une foule de situations impliquant les propriétés géométrico-arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. (Une version très parcellaire de certaines de mes principales idées à de sujet est présentée, sans que mon nom y soit prononcé, dans le volume "Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties" des Lecture Notes (n° 900), 1982, par Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, Kuang-yen Shih.) Je compte poursuivre cette partie de mon programme, au cours des deux ou trois années qui suivent, dans les deux ou trois volumes des Réflexions Mathématiques faisant suite aux deux volumes dont je suis en train de terminer la préparation. Ceci fait, je prévois de me consacrer prioritairement au programme de géométrie algébrique anabélienne - d'une part, tracer à grands traits les principales idées, conjectures et résultats déjà obtenus, et d'autre part, entreprendre une étude géométrico-arithmétique minutieuse de la "tour de Teichmüller", et plus particulièrement, de ses deux premiers étages.

le 10.12.1984

Alexandre Grothendieck

139