

CAHIERS MATHÉMATIQUES MONTPELLIER

1979

GROUPOÏDE FONDAMENTAL ET THÉORÈME DE VAN  
KAMPEN EN THÉORIE DES TOPOS

Olivier LEROY

UNIVERSITÉ DES SCIENCES  
ET TECHNIQUES  
DU LANGUEDOC  
U. E. R. DE MATHÉMATIQUES  
Place Eugène Bataillon  
34060 MONTPELLIER CEDEX

Ce travail m'a été suggéré par C. CONTOU-CARRÈRE et A.  
GROTHENDIECK.

Mes résultats ont été exposés lors de séances de géométrie algébrique faites  
avec D. ALIBERT et C. CONTOU-CARRÈRE.

## PREAMBULE

---

La thèse d'Olivier Leroy, disparu en avril 1996, est restée longtemps confidentielle. Nous avons entrepris de la transcrire en  $\text{\LaTeX}$  pour permettre à l'ensemble de la communauté mathématique d'y accéder plus facilement.

La meilleure introduction est l'hommage suivant d'Alexandre Grothendieck dans Récoltes et Semailles :

La première fois devait être en 76, 77, on a été le voir chez lui, Contou-Carrère et moi, sans crier gare, histoire de discuter maths un peu - je ne sais si on avait quelque arrière-pensée en tête. Peut-être quand même qu'il était entendu qu'Olivier songeait à s'embarquer dans un doctorat de 3 cycle, et j'avais certes des sujets pleins mes manches. Pour l'avoir entrevu une ou deux fois chez Contou-Carrère, et d'après ce que Contou-Carrère lui-même me laissait entendre, j'avais comme une impression qu'Olivier devait avoir la comprenette rapide, et pas seulement en maths. Cette soirée à trois a été mémorable. J'ai dû assez vite toucher un mot à Olivier d'un programme pour une théorie du groupe fondamental d'un topos et des théorèmes de type van Kampen dans le cadre topologique, et il avait l'air intéressé. Il devait avoir une petite teinture topologique par le séminaire de géométrie algébrique de Contou-Carrère, et il semblait intéressé d'avoir une occasion de "se faire la main" avec le langage des topos sur un exemple de théorie concrète. Pendant bien deux heures ou trois, j'ai dû déverser sur lui un maître d'oeuvre circonstancié de la théorie que je voyais à développer, laquelle s'étoffait au fur et à mesure que j'en parlais, et que remontaient en moi une foule

de situations concrètes de géométrie algébrique et de topologie - des situations qu'il s'agissait d'exprimer dans le cadre topologique, et qu'à chaque fois il me fallait d'abord "rappeler" à quelqu'un qui en entendait parler pour la première fois. Plus d'une fois dans la soirée, Contou-Carrère (qui a pourtant tout lu ou presque et qui a l'estomac bien accroché) il avait l'oeil vague et largué, même pour lui ça faisait beaucoup à la fois - et plus d'une fois j'ai crû prudent de demander à Olivier s'il ne valait pas mieux s'arrêter pour aujourd'hui et reprendre un autre jour. J'aurais pu m'épargner cette peine - visiblement Olivier était frais et dispos, l'oeil vif et parfaitement à l'aise, j'en rigolais même, tellement c'était pas croyable qu'il craque pas, mais pas du tout alors! C'était un jeune gars de vingt ans peut-être, qui devait avoir tout juste une teinture de schémas, un peu de topologie et de topos, il avait quand même pas mal manipulé des groupes discrets infinis je crois... C'était trois fois rien, pour tout dire, et avec ça il arrivait à remplir quand-même tous les blancs et à "sentir" sans effort ce que moi, vieux vétéran, lui racontais à toute allure en deux heures ou trois sur la base d'une familiarité de quinze ans avec le sujet. Je n'avais jamais rien rencontré de tel, ou tout au plus chez Deligne, et peut-être chez Cartier, qui avait été aussi assez extraordinaire dans cette ligne-là, dans son jeune âge.

Nous avons fait le choix de préserver au maximum le texte original, et n'avons corrigé que les coquilles évidentes. La seule liberté que nous avons prise a été de changer les flèches  $\longrightarrow$  en  $\mapsto$  lorsque ça nous a semblé judicieux. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

Niels Borne, Mateo Carmona,  
Jean Malgoire, David Michael Roberts

## TABLE ANALYTIQUE

---

Le titre suffit à délimiter le sujet ; j'ai mis les explications indispensables dans la table des matières, formant ainsi une table analytique.

### 1. Objets connexes dans un topos

Bref exposé des notions nécessaires pour définir un topos localement connexe.

### 2. Objets localement constants et objets galoisiens

2.1. Les objets localement constants d'un topos correspondent aux revêtements d'un espace topologique ou d'un schéma, regardés comme des faisceaux.

2.2. On démontre pour les objets localement constants d'un topos localement connexe les principales propriétés des revêtements d'un espace localement connexe.

2.3. Les objets galoisiens correspondent aux revêtements galoisiens. La "théorie de Galois" classe les objets localement constants trivialisés par un objet galoisien donné d'un topos connexe. (Dans le topos étale du spectre d'un corps  $k$ , les objets galoisiens sont les extensions galoisiennes de  $k$  ; on retrouve ainsi la théorie de Galois classique).

**2.4.** Topos engendré par les objets localement constants d'un topos localement connexe donné  $E$  : les résultats du chapitre suivant permettront de regarder ce topos, qui est formé des sommes directes d'objets localement constants de  $E$ , comme le groupoïde fondamental de  $E$ .

### **3. Topos localement galoisiens et groupoïde fondamental**

La notion de topos localement galoisien nous tiendra lieu d'une fastidieuse théorie des "pro-groupoïdes"; et elle permet de définir le groupoïde fondamental d'un topos par une propriété universelle.

### **4. Limites inductives de topos et théorème de Van Kampen**

On définit un système inductif de topos à l'aide d'une catégorie fibrée en topos au-dessus d'une catégorie d'indices. Les sections cartésiennes de cette catégorie fibrée sont les objets du topos limite inductive du système. Ainsi les objets d'une limite inductive de topos apparaissent comme des objets de la somme directe munis d'une certaine donnée de descente. Le théorème 4.5. sert à décrire le groupoïde fondamental d'une limite inductive de topos localement connexes connaissant leurs groupoïdes fondamentaux. L'énoncé et la démonstration de ce théorème font intervenir un topos auxiliaire, sorte de recollement intermédiaire entre la somme directe et la limite inductive, qui est décrit en (4.3.) et (4.4.). Je l'ai éliminé dans le corollaire de la proposition 4.6.2., qui décrit directement les objets localement constants de la limite inductive. L'avantage de la forme (4.5.) est de permettre des calculs explicites, qui sont développés dans les points 4.6.3. à 4.6.7.

## **A. Appendice**

## 5. Compléments

- 5.1. Groupe fondamental d'un topos localement connexe en un point.
- 5.2. Groupoïde fondamental profini.

## Références

## CONVENTIONS AND NOTATIONS

---

1) *Univers* : Dans tout le texte on fixe un univers  $\mathcal{U}$

2) *Morphismes de topos*

- a) Étant donné un morphisme de topos  $E \xrightarrow{u} F$ , on note  $u^{-1}$  le foncteur image inverse ;
- b) Étant donnés deux morphismes de topos  $E \xrightleftharpoons[v]{u} F$ , on prend comme morphismes de morphismes de topos  $u \longrightarrow v$  les morphismes fonctoriels  $v^{-1} \longrightarrow u^{-1}$

3) *Objets constants* : Pour tout  $\mathcal{U}$ -topos  $T$ , on note  $e_T$  l'objet final de  $T$ . Pour tout ensemble  $\mathcal{U}$ -petit  $I$ , on note  $I_T$  l'objet constant de  $T$  correspondant. Pour tout objet  $X$  de  $T$ , on désigne alors par  $I_X$  l'objet  $I_{T/X} = X \times I_T$ .



## § I. — OBJETS CONNEXES DANS UN TOPOS

---

Tous les topos considérés sont des  $\mathcal{U}$ -topos.

Définitions 1.1. —

- a) Un objet d'un topos est connexe s'il n'est pas somme directe de deux objets non-vides.*
- b) Soit  $X$  un objet d'un topos. On appelle composante connexe de  $X$  tout sous-objet connexe et non-vide  $C$  de  $X$  tel que  $X$  soit somme directe de  $C$  et d'un autre objet.*
- c) Un topos est connexe si son objet final est connexe.*
- d) Un topos est localement connexe s'il est engendré par ses objets connexes.*

Proposition 1.2. — *Soit  $C$  un objet d'un topos  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- a)  $C$  est connexe et non-vide.*
- b) Le foncteur*

$$\mathrm{Hom}_E(C, -) : E \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

*commute aux sommes directes.*

- c) Pour tout ensemble  $I$ , l'application naturelle  $I \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, I_E)$  est bijective (c'est immédiat).*

**Proposition 1.3.** — Soit  $(U_i \xrightarrow{f_i} V)_{i \in I}$  une famille épimorphique d'un topos  $E$ .  
Considérons les propriétés :

(a)  $V$  est connexe et non-vide.

(b) Le graphe  $R \subset I \times I$  de la relation

$$“U_i \times_V U_j \text{ n'est pas vide}”$$

est connexe (en tant que graphe ayant  $I$  pour ensemble de sommets). On a

(i) si les  $U_i$  sont non-vides, (a) entraîne (b).

(ii) si les  $U_i$  sont connexes, et non-vides, (b) entraîne (a).

*Démonstration.* C'est trivial si  $I = \emptyset$ . On suppose donc  $I \neq \emptyset$ .

$a \Rightarrow b$  ( $U_i$  non-vides). Soit  $(I_1, I_2)$  une partition de  $I$  telle que pour tout  $i \in I_1$  et tout  $j \in I_2$ ,  $U_i \times_V U_j$  soit vide. Si on désigne par  $V_1$  et  $V_2$  respectivement les images des morphismes

$$\coprod_{i \in I_1} U_i \longrightarrow V, \quad \coprod_{i \in I_2} U_i \longrightarrow V$$

alors  $V$  est somme de  $V_1$  et  $V_2$ . Donc  $V_1$  ou  $V_2$  est vide. Comme aucun  $U_i$  n'est vide,  $I_1$  ou  $I_2$  est vide.

$b \Rightarrow a$  ( $U_i$  connexes et non-vides). Soit  $(Y_\alpha)_{\alpha \in A}$  une famille d'objets de  $E$ , et considérons un morphisme

$$V \longrightarrow Y = \coprod_{\alpha} Y_\alpha.$$

Pour chaque  $\alpha \in A$ , soit  $I_\alpha$  l'ensemble des  $i \in I$  tels que le composé

$$U_i \longrightarrow V \longrightarrow Y$$

se factorise par  $Y_\alpha$ . Puisque les  $U_i$  sont connexes et non-vides,  $I$  est réunion disjointe des  $I_\alpha$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux indices distincts. Si  $i \in I_\alpha$  et  $j \in I_\beta$ ,  $U_i \times_V U_j$  est vide puisque c'est un sous-objet de  $U_i \times_Y U_j$ . Appliquant (b), on voit que  $I = I_{\alpha_0}$  pour un  $\alpha_0 \in A$  et un seul. Donc  $V$  est connexe et non-vide par (1.2).

**Proposition 1.4.** — Tout objet d'un topos localement connexe est somme directe d'objets connexes (donc somme directe de ses composantes connexes).

*Démonstration.* Soit  $E$  un topos localement connexe. Soient  $Y$  un objet de  $E$  et  $(U_i \longrightarrow Y)_{i \in I}$  une famille épimorphique de  $E$ , où les  $U_i$  sont connexes et non-vides. Soit  $R$  le graphe de la relation “ $U_i \times U_j$  n’est pas vide”. Pour chaque composante connexe  $r$  de  $R$ , soit  $C_r$  l’image dans  $Y$  de la somme des  $U_i$ ,  $i$  parcourant l’ensemble des  $i \in I$  qui sont sommets de  $r$ .  $Y$  est somme directe des  $C_r$ , qui sont connexes et non-vides d’après (1.3).

**Proposition 1.5.** — *Pour qu’un topos  $E$  soit localement connexe, il faut et il suffit que le foncteur*

$$\begin{aligned} \text{Ens} &\longrightarrow E \\ I &\mapsto I_E \end{aligned}$$

*admette un adjoint à gauche*

$$c : E \longrightarrow \text{Ens}.$$

*Dans ce cas, étant donné un objet  $X$  de  $E$ , les produits fibrés*

$$\begin{array}{ccc} X_\gamma & \longrightarrow & e_E \\ \downarrow & & \downarrow \gamma \\ X & \longrightarrow & c(X)_E \end{array}$$

*( $\gamma$  parcourant  $c(X)$ ) sont les composantes de  $X$ .*

*Démonstration.*

- (i) Supposons  $E$  localement connexe. Pour tout objet  $X$  de  $E$ , désignons par  $c(X)$  l’ensemble des classes de  $X$ -isomorphisme de composantes connexes de  $X$  (cet ensemble est bien sûr  $\mathcal{U}$ -petit). Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme de  $E$  ; étant donnée une composante connexe  $C$  de  $X$ , il existe une composante connexe  $D$  de  $Y$ , unique à  $Y$ -isomorphisme près, telle que  $f|_C$  se factorise par  $D$ . D’où une application

$$c(X) \longrightarrow c(Y).$$

On a ainsi obtenu un foncteur covariant

$$c : E \longrightarrow \text{Ens}.$$

Le foncteur  $c$  est adjoint à gauche de  $I \mapsto I_E$ : en effet, étant donné un objet  $X$  de  $E$  et un ensemble  $I$ , on définit une application :

$$\text{App}(c(X), I) \longrightarrow \text{Hom}(X, I_E)$$

en associant à l'application

$$a : c(X) \longrightarrow I$$

le morphisme  $X \longrightarrow I_E$  dont la restriction à chaque composante connexe  $C$  de  $X$  est la section de  $I_E$  au-dessus de  $C$  définie par  $a(C) \in I$  ; cette application est bijective par (1.2), et elle est fonctorielle en  $X$  et  $I$ .

- (ii) Inversement, supposons qu'on ait un adjoint à gauche  $c : E \longrightarrow \text{Ens}$  du foncteur  $I \longrightarrow I_E$ .

Soit  $X$  un objet de  $E$ . Avec les notations de l'énoncé,  $X$  est somme directe des  $X_\gamma$ ,  $\gamma \in c(X)$ . Il suffit donc de prouver que les  $X_\gamma$  sont connexes et non-vides. Or, pour tout ensemble  $I$ , les applications naturelles

$$I \longrightarrow \text{Hom}(X_\gamma, I_E)$$

fournissent une application

$$I^{c(X)} \longrightarrow \prod_{\gamma} \text{Hom}(X_\gamma, I_E)$$

qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I^{c(X)} & & \\ \downarrow & \searrow \sim & \\ \prod_{\gamma} \text{Hom}(X_\gamma, I_E) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(X, I_E) \end{array}$$

donc chacune des applications

$$I \longrightarrow \text{Hom}(X_\gamma, I_E)$$

est bijective ; on conclut par (1.2).

## § II. — OBJETS LOCALEMENT CONSTANTS ET OBJETS GALOISIENS

---

On se donne un  $\mathcal{U}$ -topos  $E$ .

### 2.1. Objets localement constants

Définitions 2.1.1. —

- 1) Soient  $A$  et  $B$  deux objets de  $E$ . On dit que  $A$  trivialise  $B$  si  $A \times B \xrightarrow{pr_1} A$  est un objet constant du topos  $E_{/A}$ .
- 2) Nous dirons qu'un objet  $L$  de  $E$  est localement constant si les objets de  $E$  qui trivialisent  $L$  recouvrent  $E$ .
- 3) Enfin nous dirons qu'un préfaisceau  $F$  sur une catégorie  $C$  est localement constant si pour tout morphisme  $X \longrightarrow Y$  de  $C$ , l'application  $F(Y) \longrightarrow F(X)$  est bijective.

Proposition 2.1.2. — Soient  $Y$  un objet de  $E$  et  $D \xrightarrow{u} C$  un morphisme de  $E$ .

- (i) Si  $C$  trivialise  $Y$ ,  $D$  trivialise  $Y$  ;
- (ii) si, en outre,  $C$  et  $D$  sont connexes et non-vides, l'application  $f \mapsto f \circ u$  de  $\text{Hom}(C, Y)$  dans  $\text{Hom}(D, Y)$  est bijective.

*Démonstration.* Prenons un ensemble  $I$  et un  $C$ -isomorphisme  $\alpha : C \times Y \simeq I_C$ .

(i) On a des diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} D \times Y & \longrightarrow & C \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I_D & \longrightarrow & I_C \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & C \end{array}$$

d'où un  $D$ -isomorphisme

$$\beta : D \times Y \longrightarrow I_D.$$

(ii) Soient  $f : C \longrightarrow Y$  et  $g : D \longrightarrow Y$ . Pour que  $f \circ u = g$ , il faut et il suffit que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D \times Y & \longrightarrow & C \times Y \\ (1_D, g) \uparrow & & \uparrow (1_C, f) \\ D & \longrightarrow & C \end{array}$$

soit commutatif, ou encore que soit commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I_D & \longrightarrow & I_C \\ \beta \circ (1_D, g) \uparrow & & \uparrow \alpha \circ (1_C, f) \\ D & \longrightarrow & C \end{array}$$

d'où le point (ii) par (1.3).

**Proposition 2.1.3.** —

(i) Soient  $C$  et  $X$  deux objets de  $E$ . On a un morphisme naturel

$$p : \text{Hom}(C, X)_C \longrightarrow X$$

c'est le morphisme qui, pour tout  $f \in \text{Hom}(C, X)$ , rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ i_f \downarrow & \searrow f & \\ \text{Hom}(C, X)_C & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

où  $i_f$  désigne la section de  $\text{Hom}(C, X)_C$  au-dessus de  $C$  définie par  $f$ .

On a donc aussi un  $C$ -morphisme naturel :

$$m = (q, p) : \text{Hom}(C, X)_C \longrightarrow C \times X$$

où  $q$  désigne le  $C$ -morphisme  $\text{Hom}(C, X)_C \longrightarrow C$ .

(ii) Si  $C$  est connexe non-vide et trivialise  $X$ , le  $C$ -morphisme naturel

$$\text{Hom}(C, X)_C \longrightarrow C \times X$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* En effet, prenons un ensemble  $I$  et un  $C$ -isomorphisme  $I_C \longrightarrow C \times X$ . On en tire une bijection :

$$\text{Hom}_C(C, I_C) \simeq \text{Hom}_C(C, C \times X) \simeq \text{Hom}(C, X)$$

d'où un diagramme de  $E/C$  :

$$\begin{array}{ccc} (\text{Hom}_C(C, I_C))_C & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(C, X)_C \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_C & \longrightarrow & C \times X \end{array}$$

dont la commutativité prouve notre assertion.

**Proposition 2.1.4.** — Soient  $p$  un point de  $E$ ,  $C$  un objet connexe de  $E$ ,  $y_0$  un point de la fibre  $p^{-1}(C)$  et  $X$  un objet de  $E$ . Si  $C$  trivialise  $X$ , l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}(C, X) &\longrightarrow p^{-1}(X) \\ f &\mapsto f(y_0) \end{aligned}$$

est bijective.

*Démonstration.* En effet, elle se déduit de l'application

$$\begin{aligned} p^{-1}(C) \times \text{Hom}(C, X) &\longrightarrow p^{-1}(C) \times p^{-1}(X) \\ (y, f) &\mapsto (y, f(y)) \end{aligned}$$

qui provient, par passage aux fibres, de l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}(C, X)_C \longrightarrow C \times X \quad (2.1.3, ii)$$

**Proposition 2.1.5.** — *Soient  $L$  un objet localement constant de  $E$  et  $U$  l'image de  $L \longrightarrow e_E$ . Il existe un objet  $V$  de  $E$  tel que  $U \amalg V$  soit isomorphe à  $e_E$ .*

*Démonstration.* Recouvrons  $e_E$  par des objets  $(U_i)_{i \in I}$  qui trivialisent  $L$ . Soit  $I_0$  (resp.  $I_1$ ) l'ensemble des  $i \in I$  tels que  $U_i \times L$  soit vide (resp. non-vide). Pour tout  $i \in I_0$  et tout  $j \in I_1$ ,  $U_i \times U_j$  est vide; en effet, il existe un ensemble non-vide  $F$  tel que  $F_{U_i \times U_j}$  soit vide.

Soient  $V_0$  et  $V_1$  respectivement les images de :

$$\amalg_{i \in I_0} U_i \longrightarrow e_E, \quad \amalg_{i \in I_1} U_i \longrightarrow e_E.$$

Évidemment,  $V_1$  est un sous-objet de  $U$ , et  $U \times V_0$  est vide. Comme  $e_E$  est somme de  $V_0$  et  $V_1$ , on conclut que  $V_1 \simeq U$  et  $U \amalg V_0 \simeq e_E$ .

## 2.2. Nous supposons maintenant le topos $E$ localement connexe

**Proposition 2.2.1.** — *Soient  $Z$  un objet de  $E$  et  $S$  une sous-catégorie génératrice de  $E$  dont les objets sont connexes et non-vides dans  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- a) *Tout objet de  $S$  trivialise  $Z$  ;*
- b) *Pour tout morphisme  $D \longrightarrow C$  de  $S$ , l'application correspondante  $\mathrm{Hom}(C, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(D, Z)$  est bijective ; autrement dit,  $\mathrm{Hom}(-, Z)$  est un préfaisceau localement constant sur  $S$ .*

*Démonstration.* (a)  $\Rightarrow$  (b) : c'est (2.1.2). (b)  $\Rightarrow$  (a) : soit  $C_0$  un objet de  $S$ . Pour tout objet  $D$  de  $S$ , l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(D, C_0) \times \mathrm{Hom}(C_0, Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(D, C_0) \times \mathrm{Hom}(D, Z) \\ (u, f) &\mapsto (u, f \circ u) \end{aligned}$$

au-dessus de  $\mathrm{Hom}(D, C_0)$  est bijective, d'où un  $C_0$ -isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(C_0, Z)_{C_0} \longrightarrow C_0 \times Z.$$



**Proposition 2.2.2.** — *Soit  $S$  une sous-catégorie génératrice de  $E$  dont les objets sont connexes et non-vides dans  $E$ . Munissons  $S$  de la topologie induite par  $E$ . Tout préfaisceau localement constant sur  $S$  est un faisceau.*

*Démonstration.* Soit  $F$  un préfaisceau localement constant sur  $S$ . Il est clair que  $F$  est un préfaisceau séparé ; prouvons que c'est un faisceau.

Soient  $U$  un objet de  $S$  et  $R$  un crible couvrant  $U$  (i.e.  $R$  contient une famille épimorphique de  $E$ ) ; soit enfin une section

$$t : R \longrightarrow F.$$

Pour tout objet  $V$  de  $S$  et toute  $f : V \longrightarrow R$ , désignons par  $x(V, f)$  la section de  $F$  au-dessus de  $U$ , image inverse de  $t(f) \in F(V)$  par la bijection  $F(U) \longrightarrow F(V)$  correspondant à  $f : V \longrightarrow U$ . Étant donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_0 & & \\ \downarrow & \searrow f_0 & \\ V_1 & \xrightarrow{f_1} & R \end{array}$$

on a  $x(V_0, f_0) = x(V_1, f_1)$  ; donc (d'après (1.3)) les  $x(V, f)$  sont tous égaux à un même  $x \in F(U)$  ; et on a  $x|_R = t$  par construction de  $x$ .

**Définition auxiliaire 2.2.3.** —

- (i) *Soit  $L$  un objet localement constant de  $E$ . Soit  $S$  une sous-catégorie génératrice de  $E$ , dont les objets sont connexes non-vides dans  $E$  et trivialisent  $L$ . On appellera site générateur adapté à  $L$  une telle sous-catégorie, munie de la topologie induite par  $E$ .*
- (ii) *Si  $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille finie d'objets localement constants de  $E$ , il existe un site générateur de  $E$  adapté à chacun des  $L_i$  : cela découle de (2.1.2, (i)) par récurrence sur  $n$ .*

**Proposition 2.2.4.** ( $\varprojlim$  et  $\varinjlim$  d'objets localement constants). —

Soient  $I$  une petite catégorie et  $L : I \longrightarrow E$  un foncteur tel que  $L(i)$  soit localement constant pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ . Supposons qu'il existe un site générateur  $S$  adapté à tous les  $L(i)$  ; alors :

(i)  $P = \varprojlim_I L(i)$  est localement constant et  $S$  est un site générateur adapté à  $P$  (2.2.1).

(ii) Le préfaisceau sur  $S$  :

$$C \longrightarrow L(C) = \varinjlim_I \text{Hom}(C, L(i))$$

est un faisceau ; donc  $\varinjlim_I L(i)$  est un objet localement constant, isomorphe à  $L$  en tant que faisceau sur  $S$  (en particulier,  $S$  est un site générateur adapté à  $\varinjlim_I L(i)$ ).

(iii) Corollaire : Soit  $u : L \longrightarrow M$  un morphisme entre objets localement constants de  $E$ , et soit  $S$  un site générateur adapté à  $L$  et  $M$ . En tant que faisceau sur  $S$ , l'image de  $u$  est isomorphe à

$$C \longrightarrow \text{Im}(\text{Hom}(C, L) \longrightarrow \text{Hom}(C, M)).$$

**Proposition 2.2.5.** — Soit  $L$  un objet localement constant de  $E$ .

- (i) Tout sous-objet localement constant  $K$  de  $L$  est somme directe de composantes connexes de  $L$ .
- (ii) Soient  $C$  un objet connexe non-vide de  $E$  et  $K$  un sous-objet de  $L$  qui est somme directe de composantes connexes de  $L$ . Si  $C$  trivialise  $L$ ,  $C$  trivialise  $K$ .

*Démonstration.*

(i) Soit  $S$  un site générateur adapté à  $K$  et à  $L$ . Le préfaisceau sur  $S$

$$C \longrightarrow M(C) = \text{Hom}(C, L) - \text{Hom}(C, K)$$

est un faisceau (2.2.2), et  $L$  est somme directe de  $K$  de  $M$ , c.q.f.d.

(ii) Si  $L$  est somme directe de deux sous-objets  $K$  et  $K'$ , alors  $C \times L$  qui est constant dans  $E_{/C}$  est somme directe de  $C \times K$  et  $C \times K'$ , qui sont donc constants dans  $E_{/C}$  puisque  $C$  est connexe et non-vide.

**Corollaires 2.2.6.** —

(a) Tout morphisme d'un objet localement constant non-vide de  $E$  dans un objet localement constant connexe de  $E$  est un épimorphisme.

(b) Soient des morphismes de  $E$  :

$$L \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} M$$

où  $L$  et  $M$  sont localement constants et  $L$  en outre, connexe. Si le noyau de  $(f, g)$  est non-vide, alors  $f = g$ .

((a) découle de 2.2.4, (iii) et (b) de 2.2.4, (i)).

### 2.3. Objets galoisiens

On ne suppose plus le topos  $E$  localement connexe.

**2.3.1. Définition.** — Nous dirons qu'un objet  $Y$  de  $E$  est galoisien s'il est localement constant, connexe et non-vide, et s'il est un pseudo-torseur sous le groupe constant  $\text{Aut}(Y)_E$ .

*Remarques.*

(i) D'après (2.1.5.), cela revient à dire que l'image  $U$  de  $Y \longrightarrow e_E$  est une composante connexe de  $e_E$  (1.1), que  $Y$  est connexe, et qu'il est un torseur, dans  $E_{/U}$ , sous le groupe constant  $\text{Aut}(Y)_U$ .

(ii) Tout objet galoisien se trivialise lui-même.

**Proposition 2.3.2.** — Soient  $A$  et  $B$  deux objets connexes de  $E$  tels que  $A \times B$  soit non-vide. Si  $A$  et  $B$  se trivialisent l'un l'autre, ils sont isomorphes.

*Démonstration.* En effet, il existe alors des ensembles non-vides  $I$  et  $J$  tels que  $I_A$  et  $J_B$  soient tous deux isomorphes à  $A \times B$ . Puisque les composantes connexes de  $I_A$  (resp.  $J_B$ ) sont toutes isomorphes à  $A$  (resp.  $B$ ),  $A$  et  $B$  sont isomorphes.

**Corollaire 2.3.3.** — Soient  $A$  et  $B$  deux objets galoisiens de  $E$ . Si  $\text{Hom}(A, B)$  et  $\text{Hom}(B, A)$  sont non-vides, alors  $A$  et  $B$  sont isomorphes.

**Proposition 2.3.4.** — Soient  $A$  et  $B$  deux objets galoisiens de  $E$ . Si  $A$  et  $B$  sont isomorphes, tout morphisme de  $A$  dans  $B$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Il suffit de prouver que tout morphisme  $A \longrightarrow A$  est un automorphisme. Or (2.1.3.) le  $A$ -morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(A, A)_A \longrightarrow A \times A$$

est un isomorphisme, et sa restriction à  $\mathrm{Aut}(A)_A$  est un isomorphisme puisque  $A$  est un pseudo-torseur sous  $\mathrm{Aut}(A)_A$ . Donc

$$\mathrm{Hom}(A, A) = \mathrm{Aut}(A).$$

**2.3.5.** Soient  $G$  un groupe,  $B^G$  le topos des  $G$ -ensembles à droite et  $T^G \in \mathrm{Ob}(B^G)$  l'ensemble  $G$  muni de l'opération de  $G$  par translations à droite.

L'opération de  $G$  sur l'ensemble  $G$  par translations à gauche fait de  $T^G$  un toseur de  $B^G$  sous le groupe constant  $G_{B^G}$ . Pour tout morphisme de topos  $E \xrightarrow{u} B^G$ , on a donc une structure de  $G_E$ -torseur à gauche sur  $u^{-1}(T^G)$ ; d'où un foncteur

$$(*) \quad \mathrm{Homtop}(E, B^G)^\circ \longrightarrow \mathrm{Tors}(E, G_E)$$

de la catégorie opposée à  $\mathrm{Homtop}(E, B^G)$  dans la catégorie des  $G_E$ -torseurs à gauche de  $E$ .

Lemme. — *Le foncteur (\*) est une équivalence de catégories.*

*Démonstration abrégée.*

- a) Le foncteur (\*) est pleinement fidèle parce que  $\{T^G\}$  engendre  $B^G$ .
- b) Pour tout objet  $F$  de  $B^G$ , l'opération de  $G$  sur l'ensemble  $F$  fournit une opération du groupe constant  $G_E$  sur l'objet constant  $F_E$ .

Étant donné un  $G_E$ -torseur à gauche  $T$ , le foncteur

$$\begin{aligned} u_T^{-1} : B^G &\longrightarrow E \\ F &\mapsto T \wedge_{G_E} F_E \end{aligned}$$

(produit contracté) définit un morphisme de topos  $u_T : E \longrightarrow B^G$  et  $u_T^{-1}(T^G)$  est isomorphe à  $T$  en tant que  $G_E$ -torseur.

**2.3.6.** (“Théorie de Galois”)

Nous supposons le topos  $E$  connexe.

Soient  $Y$  un objet galoisien de  $E$  et  $G$  le groupe des automorphismes de  $Y$ .

On a une structure de  $G_E$ -torseur à gauche sur  $Y$  (2.3.1., remarque (i)), d'où, suivant 2.3.5., un morphisme de topos

$$u : E \longrightarrow B^G$$

tel que le  $G_E$ -torseur  $u^{-1}(T^G)$  soit isomorphe au  $G_E$ -torseur  $Y$ .

Le foncteur image directe  $u_*$  est isomorphe au foncteur

$$\varphi : E \longrightarrow B^G$$

qui associe à l'objet  $X$  de  $E$  l'ensemble

$$\varphi(X) = \text{Hom}(Y, X)$$

muni de l'opération à droite de  $G = \text{Aut}(Y)$  par composition (en effet, tout faisceau  $F$  sur  $B^G$  est canoniquement représenté par l'ensemble  $F(T^G)$  muni de l'opération à droite de  $G$  déduite de l'opération de  $G$  sur l'objet  $T^G$ ).

Soit  $\text{LC}(E, Y)$  la sous-catégorie pleine de  $E$  formée des objets qui sont trivialisés par  $Y$  (N. B. ces objets sont localement constants puisque  $Y$  recouvre l'objet final). Nous allons prouver que

(i) Le foncteur image inverse

$$u^{-1} : B^G \longrightarrow E$$

est pleinement fidèle et prend ses valeurs dans  $\text{LC}(E, Y)$ .

(ii) La restriction à  $\text{LC}(E, Y)$  du foncteur image directe  $u_* \simeq \varphi$  est pleinement fidèle. D'où les corollaires :

(iii) Les foncteurs  $\varphi_{/\text{LC}(E, Y)}$  et  $u^{-1}$  fournissent des équivalences quasi-inverses

$$\text{LC}(E, Y) \xrightleftharpoons{\quad} B^G$$

(iv) La catégorie  $\text{LC}(E, Y)$  est un  $\mathcal{U}$ -topos et l'inclusion  $\text{LC}(E, Y) \longrightarrow E$  définit un morphisme de topos  $E \longrightarrow \text{LC}(E, Y)$ .

*Démonstration.*

- (i)  $T^G$  trivialise tous les objets de  $B^G$ ; donc, étant donné un objet  $F$  de  $B^G$ ,  $u^{-1}(T^G) \simeq Y$  trivialise  $u^{-1}(F)$ . Prouvons maintenant que le morphisme canonique

$$F \longrightarrow \varphi u^{-1}(F)$$

donné par l'adjonction entre  $\varphi$  et  $u^{-1}$  est un isomorphisme (ce qui entraîne la pleine fidélité de  $u^{-1}$ ).

- a) Le morphisme

$$T^G \longrightarrow \varphi u^{-1}(T^G)$$

est un isomorphisme. En effet,  $\varphi u^{-1}(T^G)$  est un  $G$ -torseur puisque  $u^{-1}(T^G)$  est isomorphe à  $Y$  (2.3.4).

- b)  $\varphi$  commute aux sommes directes. (1.2)

- c) Puisque  $T^G$  trivialise  $F$ , le morphisme

$$T^G \times F \longrightarrow \varphi u^{-1}(T^G \times F) \simeq \varphi u^{-1}(T^G) \times \varphi u^{-1}(F)$$

est un isomorphisme par (a) et (b); donc il en est de même du morphisme

$$F \longrightarrow \varphi u^{-1}(F)$$

puisque  $T^G$  recouvre l'objet final de  $B^G$ .

- (ii) Soit  $L$  un objet de  $\text{LC}(E, Y)$ . Le  $Y$ -isomorphisme :

$$(2.1.3.) \quad \varphi(L)_Y = \text{Hom}(Y, L)_Y \xrightarrow{\sim} Y \times L$$

montre qu'on obtient pour tout objet  $M$  de  $E$  une bijection :

$$\text{Hom}(Y \times L, M) \xrightarrow{\sim} \text{App}(\varphi(L), \varphi(M))$$

en associant au morphisme  $m : Y \times L \longrightarrow M$  l'application

$$\begin{aligned} \varphi(L) &\longrightarrow \varphi(M) \\ f &\mapsto m(f) = m \circ (1_Y, f). \end{aligned}$$

Or on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(L, M) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \text{Hom}(Y \times L, M) & \xrightarrow{\sim} & \text{App}(\varphi(L), \varphi(M)) \end{array}$$

(où la flèche verticale désigne la composition avec la projection  $Y \times L \longrightarrow L$ ).  
L'application

$$\text{Hom}(L, M) \longrightarrow \text{App}(\varphi(L), \varphi(M))$$

est donc injective ; il reste seulement à prouver que son image est formée des applications qui sont de morphismes de  $G$ -ensembles.

**2.4.** Nous supposons à nouveau le topos  $E$  localement connexe. Et nous faisons l'hypothèse suivante sur l'univers  $\mathcal{U}$  :

$\mathcal{U}$  admet un élément de cardinal infini.

Désignons par  $\text{SLC}(E)$  la sous-catégorie pleine de  $E$  formée des objets qui sont sommes directes d'objets localement constants (i.e. des objets dont les composantes connexes sont des objets localement constants 2.2.5). Les points 2.4.1. à 2.4.10 qui suivent vont prouver le

**Théorème 2.4.** —

- (i) La catégorie  $\text{SLC}(E)$  est un  $\mathcal{U}$ -topos, et l'inclusion  $\text{SLC}(E) \longrightarrow E$  définit un morphisme de topos  $E \longrightarrow \text{SLC}(E)$ .
- (ii) Les objets galoisiens de  $\text{SLC}(E)$ , qui s'identifient à ceux de  $E$ , engendrent le topos  $\text{SLC}(E)$ .

**Proposition 2.4.1.** —

- (i)  $\text{SLC}(E)$  est stable dans  $E$  par sommes directes et limites projectives finies.
- (ii) Étant donné un objet  $A$  de  $\text{SLC}(E)$  et une relation d'équivalence  $R \hookrightarrow A \times A$  de  $E$ , le quotient  $A/R$  est dans  $\text{SLC}(E)$  dès que  $R$  y est.

Compte tenu de (2.2.4), (2.2.5) et (2.2.6, a), cela découle du lemme suivant :

**Lemme 2.4.2.** — Soient  $T$  un  $\mathcal{U}$ -topos,  $K$  une sous-catégorie pleine de  $T$ ,  $S$  la sous-catégorie pleine de  $T$  formée des objets qui sont sommes directes d'objets de  $K$ . Supposons que:

- 1) Tout objet de  $K$  est somme directe d'objets connexes  $\in \text{Ob}(K)$  ; et tout sous-objet d'un objet  $X$  de  $K$  qui est somme directe de composantes connexes de  $X$  est dans  $K$ .
- 2) Tout morphisme d'un objet non-vide  $\in \text{Ob}(K)$  dans un objet connexe  $\in \text{Ob}(K)$  est un épimorphisme (dans  $T$ ).
- 3)  $K$  est stable dans  $T$  par limites projectives finies.
- 4) Pour tout objet  $X$  de  $K$  et toute relation d'équivalence  $R \hookrightarrow X \times X$  telle que  $R \in \text{Ob}(K)$ , le quotient  $X|_R$  est dans  $K$ .

Alors :

- (i)  $S$  est stable dans  $E$  par sommes directes et par limites projectives finies.
- (ii) Pour tout objet  $A$  de  $S$  et toute relation d'équivalence  $R \hookrightarrow A \times A$  telle que  $R \in \text{Ob}(S)$ , le quotient  $A|_R$  est dans  $S$ .

*Démonstration.* Le point (i) est immédiat ; prouvons (ii). Nous considérons un diagramme cartésien et cocartésien de  $T$

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{p_1} & A \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ A & \xrightarrow{\pi} & Q \end{array}$$

où  $A$  et  $R$  sont objets de  $S$ . D'après (1),  $A$  est somme directe d'objets connexes  $\in \text{Ob}(K)$

$$\coprod_{i \in I} C_i \xrightarrow{\sim} A.$$

Pour tout couple d'indices  $(i, j)$ , soit

$$R_{ij} = C_i \times_Q C_j.$$

Prouvons que  $R_{ij}$  est objet de  $K$ .  $R_{ij}$  est produit fibré de  $R$  avec  $C_i \times C_j$  au-dessus de  $A \times A$  ; puisque ces trois objets sont dans  $S$ ,  $R_{ij}$  est dans  $S$  ; donc  $R_{ij} \hookrightarrow C_i \times C_j$  est somme directe de composantes connexes de  $C_i \times C_j$ , qui est dans  $K$  ; donc par (1),  $R_{ij}$  est dans  $K$ .



Pour tout  $i \in I$ , soit  $M_i \hookrightarrow Q$  l'image de  $\pi|_{C_i}$ . On a  $C_i \times_{M_i} C_i = C_i \times_Q C_i = R_{ii}$ , donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_{ii} & \xrightarrow{p_1} & C_i \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ C_i & \xrightarrow{\pi} & M_i \end{array}$$

est cartésien et cocartésien ; puisque  $R_{ii}$  et  $C_i$  sont dans  $K$ ,  $M_i$  est dans  $K$  (par (4)).

Soient  $i, j \in I$ . Si  $R_{ij}$  est vide, alors  $M_i \times_Q M_j$  est vide ; si  $R_{ij}$  n'est pas vide, les projections

$$p_1 : R_{ij} \longrightarrow C_i \quad p_2 : R_{ij} \longrightarrow C_j$$

sont des épimorphismes par (2), donc  $M_i$  et  $M_j$  définissent le même sous-objet de  $Q$ . Puisque les  $M_i$  sont dans  $K$  et recouvrent  $Q$ , cela prouve que  $Q$  est dans  $S$ , c.q.f.d.

Corollaire (de 2.4.2) **2.4.3.** — *S'il existe en outre une petite famille  $(Y_\alpha)$  d'objets de  $K$  telle que tout objet de  $K$  puisse être recouvert (dans  $T$ ) par des  $Y_\alpha$ , alors  $S$  est un  $\mathcal{U}$ -topos et l'inclusion  $S \longrightarrow T$  définit un morphisme de topos  $T \longrightarrow S$  (par le critère de Giraud).*

Proposition **2.4.4.** — *Soient  $L$  et  $M$  deux objets de  $E$ . Tout objet connexe de  $E$  qui trivialise  $L$  et  $M$  trivialise le faisceau  $\underline{\text{Isom}}(L, M)$  des germes d'isomorphisme de  $L$  dans  $M$ . (immédiat)*

#### 2.4.5.

(i) Définition. — Soient  $G$  un groupe de  $E$ ,  $F$  un objet de  $E$  et  $G \times F \xrightarrow{a} F$  une opération de  $G$  sur  $F$ . On dit que  $G$  opère transitivement sur  $F$  si les conditions équivalentes que voici sont remplies :

- 1) Le quotient  $F/G$  est un sous-objet de l'objet final (un ouvert).
- 2) Le morphisme  $(a, pr_2) : G \times F \longrightarrow F \times F$  est un épimorphisme.

(ii) Lemme. — Soit  $L$  un objet localement constant de  $E$ . Si le groupe constant  $\text{Aut}(L)_E$  opère transitivement sur  $L$ , les composantes connexes de  $L$  sont des objets galoisiens ; et deux composantes connexes de  $L$  situées au-dessus de la même composante connexe de  $e_E$  sont toujours isomorphes.

Démonstration. Soit  $K$  une composante connexe de  $L$ .

- a) Pour tout  $\alpha \in \text{Aut}(L)$ , l'image  $\alpha(K)$  de  $\alpha|_K$  est une composante connexe de  $L$ ;  
b) Soit  $H$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(L)$  formé des automorphismes  $\alpha$  tels que  $\alpha(K) = K$  comme sous-objets de  $L$ . D'après (a) on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} H_E \times K & \longrightarrow & K \times K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Aut}(L)_E \times L & \longrightarrow & L \times L \end{array}$$

et ainsi  $H_E$  opère transitivement sur  $K$ , donc aussi  $\text{Aut}(K)_E$ . Mais d'après (2.2.6 (b)),  $\text{Aut}(K)_E \times K \longrightarrow K \times K$  est un monomorphisme, donc  $K$  est galoisien. Le reste de la proposition est trivial.

**Proposition 2.4.6.** — *Soit  $L$  un objet localement constant de  $E$ . Au-dessus de chaque composante connexe de  $e_E$ , il existe un objet galoisien  $Y$  qui trivialise  $L$  et tel que tout objet connexe de  $E$  qui trivialise  $L$  trivialise  $Y$ .*

*Démonstration.* Il suffit de le prouver pour  $E$  connexe. Soit  $U$  un objet connexe non-vide qui trivialise  $L$  et soit  $I = \text{Hom}(U, L)$ . Représentons le faisceau  $\text{Isom}(I_E, L)$  par un objet  $T$  de  $E$ , d'où un  $T$ -isomorphisme

$$I_T \simeq T \times I_E \longrightarrow T \times L.$$

Tout objet de  $E$  qui trivialise  $L$  trivialise  $T$  (2.4.4.) et  $T$  est un pseudo-torseur (en fait un torseur 2.2.6. a)) sous le groupe constant des permutations de  $I$  ; d'où notre proposition, par 2.4.5 (ii) et 2.2.5 (ii).

**Corollaire 2.4.7.** — *Pour tout objet  $X$  de  $\text{SLC}(E)$ , il existe des objets galoisiens  $(Y_\alpha)$  de  $E$  et une famille épimorphique  $(Y_\alpha \longrightarrow X)$  de  $E$ .*

**Proposition 2.4.8.** — *Soient  $Y$  un objet connexe de  $E$  et  $U$  l'image de  $Y \longrightarrow e_E$ . Pour que  $Y$  soit galoisien, il faut et il suffit qu'il se trivialise lui-même et que  $U$  soit une composante connexe de  $e_E$ .*

*Démonstration.* On sait déjà que ces conditions sont nécessaires (2.3.1, Remarque (i)). Prouvons qu'elles suffisent. Soit  $V$  un sous-objet de  $e_E$  tel que  $U \amalg V \simeq e_E$ .  $Y$  et  $V$  trivialisent  $Y$ , donc  $Y$  est localement constant ; puisque en outre  $Y$  est connexe, il existe un objet

galoisien  $Z$  au-dessus de  $U$ , qui trivialise  $Y$  et est trivialisé par  $Y$  (2.4.6). Le produit  $Y \times Z$  n'est pas vide puisque  $U$  ne l'est pas, donc  $Y$  et  $Z$  sont isomorphes (2.3.2), c.q.f.d.

**Proposition 2.4.9.** — *La catégorie des objets galoisiens de  $E$  est  $\mathcal{U}$ -petite à équivalence près.*

*Démonstration.* Compte tenu de l'hypothèse sur l'univers  $\mathcal{U}$ , cela résulte des deux points suivants :

- (i) Soient  $S$  une catégorie  $\mathcal{U}$ -petite et  $I$  un ensemble  $\mathcal{U}$ -petit. L'ensemble des préfaisceaux  $F$  sur  $S$  tels que  $F(X) \subset I$  pour tout  $X \in \text{Ob}(S)$  est  $\mathcal{U}$ -petit. (Clair)
- (ii) Soient  $G \subset \text{Ob}(E)$  une petite famille génératrice de  $E$ , formée d'objets connexes non-vides. Soient  $c$  le cardinal de l'ensemble des flèches entre objets  $\in G$ , et  $d$  le cardinal dénombrable. Pour tout objet galoisien  $Y$  de  $E$  et tout  $U \in \text{Ob}(G)$ , on a :

$$\text{Card}(\text{Hom}(U, Y)) \leq c^d.$$

*Démonstration.* Soit  $A$  l'ensemble des flèches  $U \longrightarrow Y$ ,  $U$  parcourant  $G$ . Étant donné un élément  $U \xrightarrow{s} Y$  de  $A$ , l'ensemble des  $(V \xrightarrow{t} Y) \in A$  tels que  $U \times_Y V$  soit non-vide a son cardinal au plus égal à  $c^2$  :

Étant données des flèches  $W \longrightarrow U$ ,  $W \longrightarrow V$  avec  $V, W \in G$ , il existe au plus une flèche  $t : V \longrightarrow Y$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow t \\ U & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

(en effet, ou bien  $\text{Hom}(V, Y) = \emptyset$ , ou bien  $V$  trivialise  $Y$  et alors  $\text{Hom}(V, Y) \longrightarrow \text{Hom}(W, Y)$  est bijective). Puisque l'ensemble des flèches appartenant à  $A$  recouvre  $Y$ , on déduit de (1.3) que :

$$\text{Card}(A) \leq \sum_{n \geq 0} c^{2n} \leq c^d$$

d'où a fortiori notre assertion.

**Proposition 2.4.10.** — *Soit  $u : A \longrightarrow B$  un morphisme de topos tel que le foncteur  $u^{-1}$  soit pleinement fidèle.*

- (i) Pour qu'un objet  $Y$  de  $B$  soit connexe et non-vide, il faut et il suffit que  $u^{-1}(Y)$  le soit.
- (ii) Supposons  $B$  localement connexe. Pour qu'un objet  $Y$  de  $B$  soit galoisien, il faut et il suffit que  $u^{-1}(Y)$  le soit.

*Démonstration.*

- (i) On a pour tout ensemble  $I$  des bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}(Y, I_B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(u^{-1}(Y), u^{-1}(I_B)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(u^{-1}(Y), I_A). \quad (\text{cf 1.2})$$

- (ii) a) L foncteur  $u_*$  commute aux sommes directes : en effet, pour tout objet connexe non-vide  $D$  de  $B$ , le foncteur  $\mathrm{Hom}_A(u^{-1}(D), -)$  y commute (i).
- b) Supposons  $u^{-1}(Y)$  galoisien. Soit  $V$  l'image de  $Y \longrightarrow e_B$ .  $u^{-1}(V)$  est connexe et non-vide, et il existe un objet  $U'$  de  $A$  tel que

$$u^{-1}(V) \amalg U' \simeq e_A$$

on a alors (d'après (a))

$$u_* u^{-1}(V) \amalg u_*(U') \simeq u_*(e_A) \simeq e_B.$$

Or  $u_* u^{-1}(V)$  est isomorphe à  $V$  puisque  $u^{-1}$  est pleinement fidèle. Donc  $V$  est une composante connexe de  $e_B$  d'après (i).

$Y$  se trivialise lui-même puisque  $u^{-1}$  se trivialise lui-même et que  $u^{-1}$  est pleinement fidèle ;  $Y$  est connexe et non-vide d'après (i). Donc  $Y$  est galoisien d'après 2.4.8.

- c) Réciproquement, supposons  $Y$  galoisien.  $u^{-1}(Y)$  est alors localement constant, connexe et non-vide (i) ; et puisque le morphisme de groupes  $\mathrm{Aut}(Y) \longrightarrow \mathrm{Aut}(u^{-1}(Y))$  donné par le foncteur  $u^{-1}$  est un isomorphisme,  $u^{-1}$  est un pseudotenseur sous le groupe constant  $\mathrm{Aut}(u^{-1}(Y))_A$ .

**2.4.11.** Le théorème 2.4 est maintenant prouvé :

Le point (i) par 2.4.1., 2.4.7., 2.4.9. et le critère de Giraud ;

D'après 2.4.7. et 2.4.10, (i),  $\mathrm{SLC}(E)$  est localement connexe ; d'où le point (ii) par 2.4.10 (ii).

**Proposition 2.4.12.** — *Soient  $F$  un second  $\mathcal{U}$ -topos localement connexe et  $E \longrightarrow F$  un morphisme. Le foncteur image inverse transforme les objets de  $\mathrm{SLC}(F)$  en objets de  $\mathrm{SLC}(E)$ , d'où un morphisme de topos  $\mathrm{SLC}(E) \longrightarrow \mathrm{SLC}(F)$ .*

### § III. — TOPOS LOCALEMENT GALOISIENS ET GROUPOÏDE FONDAMENTAL

---

On maintient l'hypothèse (2.4) que l'univers  $\mathcal{U}$  admet un élément de cardinal infini.

**Définition 3.1.** — *Nous dirons qu'un topos  $E$  est localement galoisien s'il est engendré par ses objets galoisiens (2.3). Suivant (2.4), cela revient à dire que  $E$  est localement connexe et que :*

$$\mathrm{SLC}(E) = E.$$

Dans les numéros (3.2) et (3.3) on montre que les topos localement galoisiens se comportent comme des “pro-groupeïdes”. On passe ensuite à la définition du (pro-) groupeïde fondamental (3.4).

**3.2.** (Les groupeïdes comme topos). Soient  $\mathrm{Top}$  la 2-catégorie des  $\mathcal{U}$ -topos et  $\mathrm{Grpd}$  la 2-catégorie des groupeïdes qui sont  $\mathcal{U}$ -petits à équivalence près ; soit enfin  $\mathcal{G}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathrm{Top}$  formée des topos dont tous les objets sont localement constants (ces topos sont donc a fortiori localement galoisiens). Nous allons établir des équivalences

$$\mathrm{Grpd} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{G}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{3.2.1. Le 2-foncteur} & \mathrm{Grpd} & \longrightarrow \mathrm{Top} \\ & C & \longmapsto \widehat{C} \end{array}.$$

Pour tout objet  $C$  de  $\mathrm{Grpd}$ , la catégorie  $\widehat{C}$  des  $\mathcal{U}$ -préfaisceaux sur  $C$  est un  $\mathcal{U}$ -topos. La construction du topos  $\widehat{C}$  est 2-fonctorielle en  $C$  :

(a) A tout foncteur  $C \xrightarrow{m} D$  entre objets de  $\mathbf{Grpd}$  correspond un morphisme de topos

$$\widehat{m} : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{D}$$

défini par le foncteur image inverse

$$\widehat{m}^{-1} : \widehat{D} \longrightarrow \widehat{C}$$

$$G \mapsto G \circ m$$

(b) A tout morphisme de morphismes de  $\mathbf{Grpd}$  :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{m} & \\ C & \downarrow \varphi & D \\ & \xrightarrow{n} & \end{array}$$

correspond un morphisme de foncteurs  $\widehat{D} \times C^\circ \longrightarrow \mathbf{Ens}$  :

$$G(n(X)) \longrightarrow G(m(X))$$

d'où un morphisme fonctoriel

$$\widehat{n}^{-1} \longrightarrow \widehat{m}^{-1}$$

c'est-à-dire un morphisme de morphismes de topos

$$\widehat{m} \longrightarrow \widehat{n}$$

(c) Et la compatibilité de ces données avec les diverses opérations de composition se vérifie immédiatement.

**Proposition 3.2.2.** — *Pour tout objet  $C$  de  $\mathbf{Grpd}$ , le topos  $\widehat{C}$  est objet de  $\mathcal{G}$  : tout préfaisceau représentable sur  $C$*

(i) *est connexe et non-vide dans  $\widehat{C}$  (clair)*

(ii) *trivialise tous les objets de  $C$  (2.2.1).*

### 2.2.1.

**Proposition 3.2.3.** — *Soit  $C$  un objet de  $\text{Grpd}$ . Tout foncteur fibre de  $\widehat{C}$  est représentable par un objet de  $C$ , autrement dit, est isomorphe à un foncteur de la forme  $F \longrightarrow F(X)$ , où  $X$  est un objet de  $C$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varphi : \widehat{C} \longrightarrow \text{Ens}$  un foncteur libre de  $\widehat{C}$ . Il existe un préfaisceau représentable  $X$  sur  $C$  tel que  $\varphi(X) \neq \emptyset$ . D'après (3.2.2. (ii)) et (2.1.4),  $\varphi$  est isomorphe à  $F \longrightarrow F(X)$ .

**Proposition 3.2.4.** — *L'équivalence naturelle  $C \longrightarrow \text{Point}(\widehat{C})$ . Soit  $C$  un objet de  $\text{Grpd}$ . A tout objet  $X$  de  $C$ , associons le point  $p_X$  de  $\widehat{C}$  défini par le foncteur fibre  $F \longrightarrow F(X)$  de  $\widehat{C}$  ; cela nous donne un foncteur de  $C$  dans la catégorie des points de  $\widehat{C}$  :*

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow \text{Point}(\widehat{C}) \\ X &\mapsto p_X \end{aligned}$$

*On voit que ce foncteur est pleinement fidèle ; donc c'est une équivalence de catégories d'après (3.2.3).*

**Proposition 3.2.5.** — *Soit  $E$  un topos objet de  $\mathcal{G}$ . La sous-catégorie pleine  $C$  de  $E$  formée des objets galoisiens qui trivialisent tous les objets de  $E$  est un objet de  $\text{Grpd}$ , et elle engendre  $E$  ; d'où une équivalence  $\widehat{C} \simeq E$ .*

*Démonstration.* Pour tout composante connexe  $U$  de  $e_E$ ,  $E/U$  est objet de  $\mathcal{G}$  (2.2.5). On peut donc supposer  $E$  connexe.

D'après (2.4.9), il existe une petite famille  $(Y_\alpha)$  d'objets galoisiens de  $E$  telle que tout objet galoisien de  $E$  soit isomorphe à un  $Y_\alpha$ . Soit  $S$  la somme directe des  $Y_\alpha$ . Tous les objets de  $E$  sont localement constants, donc il existe (2.4.6) un objet galoisien  $Z$  de  $E$  qui trivialise  $S$ , et de ce fait tous les  $Y_\alpha$  (2.2.5). Puisque tout objet de  $E$  est trivialisé par un  $Y_\alpha$  (2.4.6),  $Z$  trivialise tous les objets de  $E$  ; et  $Z$  engendre  $E$  d'après (2.2.6 (a)). A fortiori,  $C$  engendre  $E$ . Enfin, tous les objets de  $C$  trivialisent  $Z$  et  $Z$  trivialise tous les objets de  $C$ , donc tous les objets de  $C$  sont isomorphes (2.3.2) et  $C$  est un groupoïde (2.3.4).

**Corollaire 3.2.6.** — *La catégorie  $\text{Point}(E)$  des points de  $E$  est un objet de  $\text{Grpd}$  (3.2.4).*

**Corollaire 3.2.7.** — *L'équivalence naturelle  $E \longrightarrow (\text{Point}(E))^\wedge$*



a) Soit  $E$  un objet de  $\mathcal{G}$ . On définit un foncteur

$$(*) \quad E \longrightarrow (\text{Point}(E))^{\widehat{}}$$

en associant à l'objet  $X$  de  $E$  le préfaisceau

$$p \mapsto p^{-1}(X)$$

sur  $\text{Point}(E)$  (l'action sur les morphismes est évidente).

b) Le foncteur  $(*)$  est une équivalence de catégories (donc il définit une équivalence de topos  $(\text{Point}(E))^{\widehat{}} \longrightarrow E$ ).

D'après (3.2.5), il suffit de le prouver pour  $E = \widehat{C}$ , où  $C$  est un objet de  $\text{Grpd}$ . L'équivalence naturelle  $C \longrightarrow \text{Point}(\widehat{C})$  fournit une équivalence de catégories

$$(\text{Point}(\widehat{C}))^{\widehat{}} \longrightarrow \widehat{C}$$

et le foncteur composé

$$\widehat{C} \longrightarrow (\text{Point}(\widehat{C}))^{\widehat{}} \longrightarrow \widehat{C}$$

n'est autre que le foncteur identique de  $\widehat{C}$ .

**3.2.8. Conclusion.** Les foncteurs

$$C \mapsto \widehat{C}$$

$$\text{Point}(E) \leftarrow E$$

définissent des équivalences quasi-inverses entre  $\text{Grpd}$  et  $\mathcal{G}$ .

**3.3.** (Les topos localement galoisiens comme limites projectives filtrantes de groupoïdes)

**3.3.0.** Dans tout ce numéro 3.3, on entend par “ordonnés filtrants” les ensembles ordonnés filtrants à gauche  $\mathcal{U}$ -petits, que l'on regarde aussi bien comme des catégories.

**3.3.1.** Notre propos est d'établir pour tout  $\mathcal{U}$ -topos  $E$  l'équivalence des propriétés suivantes :

(i)  $E$  est localement galoisien.

(ii) Il existe un ordonné filtrant  $I$  (3.3.0) et une catégorie fibrée en  $\mathcal{U}$ -topos  $F \longrightarrow I$  (A. 1) qui remplit les conditions suivantes :

- 1) Les fibres de  $F$  sont des objets de  $\mathcal{G}$  (3.2).
- 2) Les foncteurs changement de base de  $F$  sont pleinement fidèles.
- 3)  $E$  est une 2-famille projective de  $F$  dans la 2-catégorie des  $\mathcal{U}$ -topos (A. 4)

**Proposition 3.3.2.** — *Soit  $E$  un  $\mathcal{U}$ -topos localement connexe. Pour tout crible  $R$  couvrant  $e_E$ , soit  $\mathrm{LC}(E, R)$  la sous-catégorie pleine de  $E$  formée des objets qui sont trivialisés par les objets connexes appartenant à  $R$ .*

- (i) *La catégorie  $\mathrm{LC}(E, R)$  est un  $\mathcal{U}$ -topos objet de  $\mathcal{G}$ .*
- (ii) *Les inclusions  $\mathrm{LC}(E, R) \longrightarrow \mathrm{SLC}(E)$  et  $\mathrm{LC}(E, R) \longrightarrow E$  définissent des morphismes de topos  $\mathrm{SLC}(E) \longrightarrow \mathrm{LC}(E, R)$  et  $E \longrightarrow \mathrm{LC}(E, R)$ .*

*Démonstration.*

- 1)  $\mathrm{LC}(E, R)$  est stable dans  $E$  par limites inductives et projectives (2.2.4) (elle l'est donc aussi dans  $\mathrm{SLC}(E)$  par (2.4)).
- 2) Soit  $K$  la catégorie des objets de  $\mathrm{LC}(E, R)$  qui sont galoisiens dans  $E$ . D'après (2.4.6) et le point (1),  $K$  engendre  $\mathrm{LC}(E, R)$ . Or d'après (2.4.9),  $K$  est équivalente à une petite catégorie, donc  $\mathrm{LC}(E, R)$  est un  $\mathcal{U}$ -topos et on a le point (ii). En particulier, les objets de  $K$  qui trivialisent dans  $E$  un objet donné de  $\mathrm{LC}(E, R)$  le trivialisent aussi dans  $\mathrm{LC}(E, R)$ . Donc tout objet de  $\mathrm{LC}(E, R)$  est localement constant (2.4.6).

**Proposition 3.3.3.** — *Soient  $T$  un  $\mathcal{U}$ -topos,  $I$  un ordonné filtrant (3.3.0) et  $(T_i)_{i \in I}$  une famille décroissante de sous-catégories essentiellement pleines de  $T$ . Soit  $F$  la sous-catégorie pleine de  $I \times T$  formée des couples  $(i, X)$  tels que  $X \in \mathrm{Ob}(T_i)$ . Supposons qu'on ait les propriétés suivantes :*

- 1) *Pour tout  $i \in I$ ,  $T_i$  est un  $\mathcal{U}$ -topos objet de  $\mathcal{G}$ , et l'inclusion  $T_i \longrightarrow T$  définit un morphisme de topos  $T \longrightarrow T_i$ .*

2) La réunion des  $\text{Ob}(T_i)$  engendre  $T$ . Alors  $F$  est une catégorie fibrée en topos au-dessus de  $I$  (cf. A 1), et l'inclusion  $F \longrightarrow I \times T$  définit un morphisme de catégories fibrées en topos  $I \times T \longrightarrow F$  qui fait de  $T$  la 2-limite projective des  $T_i$  dans la catégorie des  $\mathcal{U}$ -topos.

*Démonstration.* Il est immédiat que  $F$  est une catégorie fibrée en topos, et que l'inclusion  $F \longrightarrow I \times T$  définit un morphisme de catégories fibrées en topos  $I \times T \longrightarrow F$ .

Soit  $G$  la sous-catégorie pleine de  $T$ , réunion des  $T_i$ . On a tout de suite :

- (i) Les objets de  $G$  sont localement constants dans  $T$ .
- (ii)  $G$  est stable par limites projectives finies dans  $T$ .

Soit maintenant  $S$  un  $\mathcal{U}$ -topos. Il faut prouver que le foncteur

$$\varphi : \text{Homtop}(S, T) \longrightarrow \text{Cartop}_I(I \times S, F)$$

qui associe au morphisme  $f : S \longrightarrow T$  le morphisme  $I \times S \longrightarrow F$  défini par le foncteur

$$\begin{aligned} \varphi(f)^{-1} : F &\longrightarrow I \times S \\ (i, X) &\mapsto (i, f^{-1}(X)) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories.

- (i)  $\varphi$  est pleinement fidèle : Soient  $f, g : S \longrightarrow T$  deux morphismes ; étant donné un morphisme de foncteurs cartésiens

$$\lambda : \varphi(g)^{-1} \longrightarrow \varphi(f)^{-1}$$

il existe un morphisme de foncteurs et un seul

$$\mu : g_{/G}^{-1} \longrightarrow f_{/G}^{-1}$$

tel que pour tout objet  $(i, X)$  de  $F$  on ait :

$$\lambda_{(i, X)} = (1_i, \mu_X)$$

Mais puisque  $G$  engendre  $T$ , le foncteur

$$\begin{aligned} \text{Homtop}(S, T) &\longrightarrow (\text{Fonct}(G, S))^\circ \\ f &\mapsto f_{/G}^{-1} \end{aligned}$$

est pleinement fidèle, d'où notre assertion.

(ii)  $\varphi$  est essentiellement surjectif :

Soit un morphisme de catégories fibrées en topos

$$I \times S \longrightarrow F$$

défini par un  $I$ -foncteur cartésien

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow I \times S \\ (i, X) &\mapsto (i, a(i, X)) \end{aligned}$$

a) Il existe un foncteur  $b : G \longrightarrow S$  tel que le foncteur  $a : F \longrightarrow S$  soit isomorphe au foncteur  $(i, X) \mapsto b(X)$  :

Puisque les changements de base de  $F$  sont donnés par les inclusions entre les  $G_i$ , on peut définir pour tout objet  $X$  de  $G$  :

$$b(X) = \varprojlim_{X \in \text{Ob}(T_i)} a(i, X)$$

Toutes les projections  $b(X) \longrightarrow a(i, X)$  sont des isomorphismes. Étant donné un morphisme  $X \longrightarrow Y$  de  $G$ , il existe un morphisme et un seul  $b(X) \longrightarrow b(Y)$  tel que, dès que  $X$  et  $Y$  sont dans  $\text{Ob}(T_i)$ , on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} b(X) & \xrightarrow{\sim} & a(i, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ b(Y) & \xrightarrow{\sim} & a(i, Y) \end{array}$$

d'où un foncteur  $b : G \longrightarrow S$  qui remplit clairement les conditions requises.

b) Le foncteur  $b$  est exact à gauche : en effet, les restrictions de  $a$  aux fibres de  $F$  sont des foncteurs exacts à gauche, ainsi que les inclusions  $T_i \longrightarrow G$ .

c) Soit  $(X_\alpha \longrightarrow X)$  une famille de morphismes de  $G$  qui est épimorphique dans  $T$  ; la famille de morphismes  $(b(X_\alpha) \longrightarrow b(X))$  de  $S$  est épimorphique :

Soit  $i$  un indice tel que  $X \in \text{Ob}(T_i)$ . Décomposons  $X$  en ses composantes connexes dans  $T_i$  :

$$X = \coprod_{\gamma \in C} Y_\gamma.$$

Les  $Y_\gamma$  sont encore connexes dans  $T$  (2.4.10). Pour tout  $\gamma \in C$ , il existe un objet non-vidé  $Z_\gamma$  de  $G$  et un morphisme  $Z_\gamma \longrightarrow Y_\gamma$  tel que  $Z_\gamma \longrightarrow Y_\gamma \longrightarrow X$  se factorise par un  $X_\alpha \longrightarrow X$ . Le morphisme  $Z_\gamma \longrightarrow Y_\gamma$  est un épimorphisme (2.2.6) donc aussi  $b(Z_\gamma) \longrightarrow b(Y_\gamma)$  (puisque  $Z_\gamma$  et  $Y_\gamma$  sont tous deux dans un même  $T_j$ ). Mais  $b(X)$  est somme directe des  $b(Y_\gamma)$  ; donc la famille  $(b(Z_\gamma) \longrightarrow b(X))$  est épimorphique, d'où notre assertion.

- d) Il existe donc un morphisme de topos  $f : S \longrightarrow T$  tel que la restriction  $f|_G^{-1}$  soit isomorphe à  $b$  ; le foncteur

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow I \times S \\ (i, X) &\mapsto (i, f^{-1}(X)) \end{aligned}$$

est alors isomorphe au foncteur

$$(i, X) \mapsto (i, a(i, X)),$$

c.q.f.d.

**Corollaire 3.3.4.** — Soient  $E$  un  $\mathcal{U}$ -topos localement connexe,  $I$  un ordonné filtrant (3.3.0) et  $(R_i)_{i \in I}$  une famille décroissante de cribles couvrant  $e_E$  (i.e.  $R_i$  est plus fin que  $R_j$  pour  $i \leq j$ ). Supposons que pour tout objet localement constant  $L$  de  $E$ , il existe un  $i \in I$  tel que  $L$  soit dans  $\text{LC}(E, R_i)$  (3.3.2) ; alors le topos  $T = \text{SLC}(E)$  est limite projective des  $T_i = \text{LC}(E, R_i)$  au sens de (3.3.3).

*Remarque.* Puisqu'il existe une telle famille de cribles, l'implication  $(i) \Rightarrow (ii)$  de (3.3.1) est prouvée.

**Proposition 3.3.5.** — Soient  $I$  un ordonné filtrant, et  $\Pi : F \longrightarrow I$  une catégorie fibrée au-dessus de  $I$ . Si les foncteurs changement de base de  $F$  sont pleinement fidèles, il existe une catégorie  $K$  et une famille décroissante  $(K_i)_{i \in I}$  de sous-catégories essentiellement pleines de  $K$  telles que :

- a)  $K$  soit réunion des  $K_i$  ;
- b)  $F$  soit  $I$ -équivalente à la sous-catégorie pleine  $F'$  de  $I \times K$  formée des couples  $(i, X)$  tels que  $X \in \text{Ob}(K_i)$  ( $F'$  est alors une sous-catégorie fibrée de  $I \times K$ ).

*Démonstration.* J'abrège un peu la démonstration, qui est d'une lourde trivialité.

- 1) Soit  $F_{\text{cart}}$  la catégorie des objets de  $F$  et flèches cartésiennes. Pour tout objet  $X$  de  $F$ , soit  $I_X$  la catégorie  $F_{\text{cart}}/X$ . On a un foncteur

$$I_X \longrightarrow F$$

(oubli de la flèche structurale), d'où un autre foncteur

$$I_X \longrightarrow I$$

composé de  $I_X \longrightarrow F$  et de  $F \longrightarrow I$ .

- 2) Pour tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $F$ , soit

$$I_{XY} = I_X \times_I I_Y$$

Cette catégorie est non-vide puisque  $I$  est filtrante ; et on a des foncteurs

$$q_{XY}^X = I_{XY} \xrightarrow{pr_1} I_X \longrightarrow F, \quad q_{XY}^Y = I_{XY} \xrightarrow{pr_2} I_Y \longrightarrow F.$$

- 3) *Remarque.* Étant donné un objet

$$C = (X' \longrightarrow X, Y' \longrightarrow Y)$$

de  $I_{XY}$  et une flèche  $f : X' \longrightarrow Y'$  au-dessus de  $\Pi(X') = \Pi(Y')$ , il existe un morphisme de foncteurs cartésiens et un seul

$$\lambda : q_{XY}^X \longrightarrow q_{XY}^Y$$

tel que  $\lambda_C = f$ .

- 4) Définition de la catégorie  $K$ :

- a) Les objets de  $K$  sont les objets de  $F$  ;
- b) Étant donné des objets  $X, Y$  de  $K$ , les morphismes  $X \longrightarrow Y$  sont les morphismes de foncteurs cartésiens :

$$q_{XY}^X \longrightarrow q_{XY}^Y$$

c) La composition des morphismes se définit de façon évidente à partir de la remarque 3.

5) Un foncteur  $\varepsilon : F \longrightarrow K$ .

On prend  $\varepsilon(X) = X$  pour tout objet  $X$  de  $F$ . Définissons maintenant l'action de  $F$  sur les morphismes :

Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme de  $F$ , de projection  $u : i \longrightarrow j$ . Prenons une flèche  $u$ -cartésienne  $Y' \longrightarrow Y$  de  $F$ , d'où un objet

$$C = (X \xrightarrow{1_X} X, Y' \longrightarrow Y)$$

de  $I_{XY}$ . Le morphisme  $\varepsilon(f)$  est le seul qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \varepsilon(f)_C \downarrow & \searrow f & \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

(morphisme qui ne dépend pas du choix de  $Y' \longrightarrow Y$ ).

6) Soit  $f : X \longrightarrow Y$  une flèche de  $F$ . Pour que  $\varepsilon(f)$  soit un isomorphisme, il faut et il suffit que  $f$  soit cartésienne.

7) Pour tout  $i \in I$ , la restriction de  $\varepsilon$  à la fibre  $F_i$  est pleinement fidèle

8) Pour tout  $i \in I$ , soit  $K_i$  l'image essentielle de  $e_{|F_i} : F_i \longrightarrow K$ . La famille  $(K_i)$  est décroissante d'après (6), et  $K$  est réunion des  $K_i$ .

9) Le foncteur

$$(\Pi, \varepsilon) : F \longrightarrow I \times K$$

est  $I$ -cartésien et pleinement fidèle ; son image essentielle est la sous-catégorie pleine  $F'$  de  $I \times K$  formée des  $(i, X)$  tels que  $X \in \text{Ob}(K_i)$ .

**Proposition 3.3.6.** — Soient  $C$  une catégorie,  $I$  un ordonné filtrant (3.3.0) et  $(G_i)_{i \in I}$  une famille décroissante de sous-catégories essentiellement pleines de  $C$ . On suppose que :

(i) Pour tout  $i \in I$ ,  $G_i$  est un  $\mathcal{U}$ -topos objet de  $\mathcal{G}$  (cf. 3.2) ;

- (ii) Pour  $i \leq j$ , l'inclusion  $G_j \longrightarrow G_i$  définit un morphisme de topos  $G_i \longrightarrow G_j$  ;
- (iii)  $C$  est réunion des sous-catégories  $G_i$ . Dans ce cas, si l'on munit  $C$  de sa topologie canonique, la catégorie  $\tilde{C}$  des  $\mathcal{U}$ -faisceaux sur  $C$  est un  $\mathcal{U}$ -topos localement galoisien, et les foncteurs pleinement fidèles

$$(*) \quad G_i \longrightarrow C \longrightarrow \tilde{C}$$

définissent des morphismes de topos  $\tilde{C} \longrightarrow G_i$ .

Corollaire. — Sous les hypothèses précédentes, soient  $(T_i)$  les images essentielles des foncteurs pleinement fidèles  $(*)$  ;  $\tilde{C}$  est limite projective des topos  $T_i$  au sens de (3.3.3).

*Preuve de la proposition.* Les points suivants se prouvent tous immédiatement :

- 1) Les limites projectives finies de  $C$  sont représentables, et les inclusions  $G_i \longrightarrow C$  sont exactes à gauche.
- 2) Toute famille de morphismes d'un  $G_i$  qui est épimorphique dans  $G_i$  est épimorphique effective universelle dans  $C$ .
- 3)  $C$  admet une petite famille topologiquement génératrice pour la topologie canonique (cela découle de (2) puisque  $I$  est petit (3.3.0)).
- 4) Les foncteurs pleinement fidèles

$$G_i \longrightarrow C \longrightarrow \tilde{C}$$

définissent des morphismes de topos  $\tilde{C} \longrightarrow G_i$  (par (1) et (2)).

- 5)  $\tilde{C}$  est localement galoisien : les objets galoisiens des  $G_i$  sont galoisiens dans  $\tilde{C}$  (par (4) et (2.4.10)) et ils engendrent le site  $C$  (par (2)), donc le topos  $\tilde{C}$ .

**3.3.7.** Les numéros (3.3.5) et (3.3.6) prouvent l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) de 3.3.1.

**3.4.** Le groupoïde fondamental



**Définition 3.4.1.** — Nous appellerons (par abus de langage) groupoïde fondamental d'un  $\mathcal{U}$ -topos  $E$  la donnée d'un  $\mathcal{U}$ -topos localement galoisien  $S$  et d'un morphisme de topos :

$$p : E \longrightarrow S$$

tel que pour tout  $\mathcal{U}$ -topos localement galoisien  $T$  le foncteur

$$\mathrm{Homtop}(S, T) \longrightarrow \mathrm{Homtop}(E, T)$$

donné par la composition avec  $p$  soit une équivalence de catégories.

*Remarque.* Si  $E$  est localement connexe, le morphisme de topos  $E \longrightarrow \mathrm{SLC}(E)$  défini par l'inclusion  $\mathrm{SLC}(E) \longrightarrow E$  (2.4) fait de  $\mathrm{SLC}(E)$  un groupoïde fondamental de  $E$ .

(Condition suffisante pour qu'un topos connexe admette un groupoïde fondamental)

**Proposition 3.4.2.** — Soit  $E$  un  $\mathcal{U}$ -topos connexe. Supposons qu'il existe une petite famille  $(Y_\alpha)$  d'objets galoisiens de  $E$ , telle que tout objet de  $E$  qui admet une structure de torseur sous un groupe constant puisse être trivialisé par un  $Y_\alpha$ . Soient  $K$  la sous-catégorie pleine de  $E$  formée des objets qui peuvent être trivialisés par un objet galoisien, et  $S$  la sous-catégorie pleine de  $E$  formée des sommes directes d'objets de  $K$ .  $S$  est un  $\mathcal{U}$ -topos localement galoisien, et l'inclusion  $S \longrightarrow E$  fait de  $S$  un groupoïde fondamental de  $E$ .

*Démonstration.*

- 1) Pour toute famille finie  $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'objets de  $K$ , il existe un indice  $\alpha$  tel que  $Y_\alpha$  trivialise chacun des  $L_i$  : en effet, prenons pour chaque  $i$  un objet galoisien qui trivialise  $L_i$ . Le produit

$$T = Y_1 \times \dots \times Y_n$$

trivialise chacun des  $L_i$  et admet une structure de torseur sous le groupe constant

$$(\mathrm{Aut}(Y_1) \times \dots \times \mathrm{Aut}(Y_n))_E$$

il existe ainsi un  $Y_\alpha$  qui trivialise  $T$ , et donc chacun des  $L_i$ .

- 2)  $S$  est un  $\mathcal{U}$ -topos localement galoisien, et l'inclusion  $S \longrightarrow E$  définit un morphisme de topos  $E \longrightarrow S$ . D'après (1) et la théorie de Galois (les points (iii) et (iv) de 2.3.6), la sous-catégorie  $K$  de  $E$  remplit les conditions (1) à (4) du lemme (2.4.2.) - compte

tenu de fait que les topos de la forme  $B^G$  sont objets de  $\mathcal{G}$  -. Or tout objet de  $K$  peut être recouvrement par des exemplaires d'un  $Y_\alpha$ , donc  $S$  est un  $\mathcal{U}$ -topos et l'inclusion  $S \longrightarrow E$  définit un morphisme de topos :  $p : E \longrightarrow S$  (2.4.3.). Mais alors les  $Y_\alpha$  sont galoisiens dans  $S$  (par (2.4.10)), donc  $S$  est localement galoisien.

- 3)  $p : E \longrightarrow S$  est un groupoïde fondamental de  $E$ . Soit  $T$  un  $\mathcal{U}$ -topos localement galoisien. Le foncteur

$$\text{Homtop}(S, T) \longrightarrow \text{Homtop}(E, T)$$

est évidemment pleinement fidèle. Prouvons qu'il est essentiellement surjectif. Soit  $u : E \longrightarrow T$  un morphisme. Si  $Z$  est un objet galoisien de  $T$ ,  $u^{-1}(Z)$  admet une structure de toreur sous  $(\text{Aut}(Z))_E$  (2.1.5), donc  $u^{-1}(Z)$  est dans  $S$ . Par conséquent, le foncteur  $u^{-1}$  se factorise par  $S$ , c.q.f.d.

**3.4.3. Question.** Soient  $E$  un  $\mathcal{U}$ -topos et  $p : E \longrightarrow S$  un groupoïde fondamental de  $E$ . Le foncteur  $p^{-1} : S \longrightarrow E$  est-il toujours pleinement fidèle ? Si la réponse à cette question était affirmative, on obtiendrait aisément une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un groupoïde fondamental.

## § IV. — LIMITES INDUCTIVES DE TOPOS ET THÉORÈME DE VAN KAMPEN

---

Soient  $I$  une petite catégorie,  $F \xrightarrow{\Pi} I$  une catégorie fibrée en  $\mathcal{U}$ -topos  $(A, 1)$ , et

$$L = \text{Cart}_I(I, F)$$

la catégorie des sections cartésiennes de  $F$  au-dessus de  $I$ .

### 4.1. $L$ comme limite inductive de $F$

**Proposition 4.1.1.** —  *$L$  est un  $\mathcal{U}$ -topos, et le foncteur d'évaluation :*

$$\begin{aligned} I \times L &\longrightarrow F \\ (i, S) &\mapsto S(i) \end{aligned}$$

*définit un morphisme de catégories fibrées en topos  $F \longrightarrow I \times L$  qui fait de  $L$  la 2-limite inductive de  $F$  dans la catégorie des  $\mathcal{U}$ -topos. (A, 4)*

*Démonstration.*

- 1) Les limites projectives finies (resp. les limites inductives) sont représentables dans  $L$  ;  
et pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , le foncteur

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow F_i \\ S &\mapsto S(i) \end{aligned}$$

y commute : c'est immédiat puisque les foncteurs changement de base de  $F$  sont exacts à gauche et commutent aux limites inductives.

- 2)  $L$  est un  $\mathcal{U}$ -topos : compte tenu du critère de Giraud et de (1), il suffit de montrer que  $L$  admet une petite famille génératrice. Or (comme par hasard)  $F$  remplit les conditions du corollaire I.9.25 de [3], qui garantissent l'existence d'une telle famille.
- 3) Le foncteur  $I \times L \longrightarrow F$  définit un morphisme de catégories fibrées en topos  $F \longrightarrow I \times L$  : ce foncteur est évidemment cartésien ; d'où notre assertion par (1).
- 4) Le morphisme de catégories fibrées en topos  $F \longrightarrow I \times L$  fait de  $L$  la 2-limite inductive de  $F$  dans la catégorie des  $\mathcal{U}$ -topos : soit  $E$  un  $\mathcal{U}$ -topos. Le foncteur

$$\mathrm{Homtop}(L, E) \longrightarrow \mathrm{Cartop}_I(F, I \times E)$$

qui associe au morphisme  $u : L \longrightarrow E$  le morphisme de catégories fibrées en topos

$$F \longrightarrow I \times E$$

défini par le foncteur

$$\begin{aligned} I \times E &\longrightarrow F \\ (i, X) &\mapsto u^{-1}(X)(i) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories, comme on le vérifie tout de suite en tenant compte de (1).

**Proposition 4.1.2.** — *Si pour tout  $i \in \mathrm{Ob}(I)$  la fibre  $F_i$  est localement connexe, alors  $L$  est localement connexe.*

*Démonstration.* Pour tout  $i \in \mathrm{Ob}(I)$ , soit

$$c_i : F_i \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

le foncteur “composante connexes” de  $F_i$ . (1.5)

Soit  $S$  une section cartésienne de  $F$ . Pour toute flèche  $u : i \longrightarrow j$  de  $I$ , on a une application

$$c_i(S(i)) \longrightarrow c_j(S(j))$$

qui associe à la composante connexe  $C$  de  $S(i)$  l'unique composante connexe  $D$  de  $S(j)$  telle que la restriction à  $C$  du  $u$ -morphisme  $S(u) : S(i) \longrightarrow S(j)$  se factorise par  $D$ .

Étant donné une seconde section cartésienne  $T$  de  $F$  et un morphisme  $S \longrightarrow T$  on a pour tout flèche  $u : i \longrightarrow j$  de  $I$  le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} c_i(S(i)) & \longrightarrow & c_j(S(j)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_i(T(i)) & \longrightarrow & c_j(T(j)) \end{array}$$

On peut donc définir un foncteur

$$\begin{aligned} c : L &\longrightarrow \text{Ens} \\ S &\mapsto c(S) = \varinjlim_I c_i(S(i)) \end{aligned}$$

Prouvons que  $c$  est un foncteur composantes connexes de  $L$  (cf 1.5.) :

Soit  $A$  un ensemble. Considérons l'objet constant  $A_L$  de  $L$ . Pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ ,  $A_L(i)$  s'identifie à  $A_{F_i}$  ; pour tout flèche  $u : i \longrightarrow j$  de  $I$  et tout  $a \in A$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} e_{F_i} & \longrightarrow & e_{F_j} \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ A_{F_i} & \xrightarrow{A_L(u)} & A_{F_j} \end{array}$$

est commutatif.

Soit maintenant  $S$  un objet de  $L$ . Pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , soit  $f_i : S(i) \longrightarrow A_{F_i}$  un  $i$ -morphisme, correspondant à une application  $b_i : c_i(S(i)) \longrightarrow A$ . Étant donnée une flèche  $u : i \longrightarrow j$  de  $I$ , la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} S(i) & \longrightarrow & S(j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{F_i} & \longrightarrow & A_{F_j} \end{array}$$

équivalent à celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc} c_i(S(i)) & \longrightarrow & c_j(S(j)) \\ & \searrow & \swarrow \\ & A & \end{array}$$

Donc le foncteur  $c$  est adjoint à gauche du foncteur “objet constant”  $\text{Ens} \longrightarrow L$ , c.q.f.d.

## 4.2. Le groupoïde fondamental de $L$

On définit une *topologie* sur la catégorie  $F$ , qui fournit un topos  $\tilde{F}$ , et un morphisme de topos  $\tilde{F} \longrightarrow L$  (4.4). Quand les fibres de  $F$  sont localement connexes,  $\tilde{F}$  est lui-même localement connexe, et les morphismes de topos  $\text{SLC}(\tilde{F}) \longrightarrow \text{SLC}(E)$  déduit du morphisme  $\tilde{F} \longrightarrow L$  est une équivalence (th. 4.5). On montre alors (4.6) comment construire une famille convenable de groupoïdes “approchés”  $\text{LC}(\tilde{F}, R)$  (au sens de 3.3.2 et 3.3.4) à l’aide de groupoïdes “approchés” des fibres de  $F$ .

**Proposition 4.3.** — *Un foncteur pleinement fidèle*

$$p : L = \text{Cart}_I(I, F) \longrightarrow \hat{F}$$

(cette construction utilise seulement le fait que  $\Pi : F \longrightarrow I$  est un foncteur fibrant).

(1) Soit  $S : I \longrightarrow F$  une section cartésienne. On définit le préfaisceau  $p(S)$  comme voici : Pour tout objet  $X$  de  $F$ , on prend :

$$p(S)(X) = \text{Hom}_i(X, S(i)), \quad \text{où } i = \Pi(X)$$

Étant donné un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  de  $F$ , l’application  $p(S)(f) : p(S)(Y) \longrightarrow p(S)(X)$  est la composée :

$$\text{Hom}_j(Y, S(j)) \longrightarrow \text{Hom}_u(X, S(j)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_i(X, S(i))$$

où  $u : i \longrightarrow j$  désigne la projection de  $f$ . Autrement dit, l’application  $p(S)(f)$  envoie l’élément  $h$  de  $p(S)(Y)$  sur l’élément  $g$  de  $p(S)(X)$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ S(i) & \xrightarrow{S(u)} & S(j) \end{array}$$

Il est donc clair qu’on a bien défini un préfaisceau sur  $F$ .

(2) Soient maintenant  $S, T : I \longrightarrow F$  deux sections cartésiennes et  $m : S \longrightarrow T$  un morphisme. On définit le morphisme

$$p(m) : p(S) \longrightarrow p(T)$$

comme voici : soit  $X$  un objet de  $F$ , de projection  $i$ . L'application

$$p(m)_X : p(S)(X) \longrightarrow p(T)(X)$$

est la composition avec le  $i$ -morphisme :

$$m_i : S(i) \longrightarrow T(i)$$

fourni par  $m$ .

(3) Le foncteur  $p$  est pleinement fidèle.

*Démonstration.* Soient  $S, T$  deux sections cartésiennes de  $F$  et  $\mu : p(S) \longrightarrow p(T)$  un morphisme. Pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , soit

$$\mu_i : p(S)_{/F_i} \longrightarrow p(T)_{/F_i}$$

le morphisme induit par  $\mu$  entre les restrictions à la fibre  $F_i$ . Comme ces restrictions sont représentées par  $S(i)$  et  $T(i)$  respectivement,  $\mu_i$  provient d'un  $i$ -morphisme

$$m_i : S(i) \longrightarrow T(i)$$

à savoir  $m_i = \mu_{S(i)}(1_{S(i)})$

Prouvons que les  $m_i$  définissent un morphisme  $m : S \longrightarrow T$  :

Soit  $i \xrightarrow{u} j$  une flèche de  $I$ . On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} p(S)(S(i)) & \xrightarrow{\mu} & p(T)(S(i)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ p(S)(S(j)) & \xrightarrow{\mu} & p(T)(S(j)) \end{array}$$

La flèche de gauche transforme  $1_{S(j)}$  en  $1_{S(i)}$  ; donc la flèche de droite transforme  $m_j$  en  $m_i$ , autrement dit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S(i) & \longrightarrow & S(j) \\ m_i \downarrow & & \downarrow m_j \\ T(i) & \longrightarrow & T(j) \end{array}$$

est commutatif, cqfd.

Soit  $n : S \longrightarrow T$  un morphisme. Pour que  $p(n) = \mu$ , il faut et il suffit que  $n = m$ , comme on le vérifie aisément. Donc  $p$  est pleinement fidèle.

#### 4.4. Le topos $\tilde{F}$

Définition (Topologie  $T$  sur  $F$ ) **4.4.1.** — Soit  $X$  un objet de  $F$ , de projection  $i \in \text{Ob}(I)$ . Un crible  $R$  de  $F_{/X}$  est couvrant pour  $T$  s'il contient une famille épimorphique de la fibre  $F_i$ .

Les axiomes d'une topologie se vérifient à l'aide des remarques suivantes :

(i) Soit  $u : i \longrightarrow j$  une flèche de  $I$ , et considérons un diagramme commutatif de  $F$  :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array} \quad (*)$$

où  $P \longrightarrow X$  est un  $i$ -morphisme,  $Z' \longrightarrow Z$  un  $j$ -morphisme, et les flèches horizontales des  $u$ -morphisms. Si l'on prend des flèches  $u$ -cartésiennes  $Y \longrightarrow Z$ ,  $Y' \longrightarrow Z'$  on tire de (\*) un diagramme commutatif de  $i$ -morphisms

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (**)$$

Et alors : pour que le diagramme (\*) soit cartésien dans  $F$ , il faut et il suffit que le diagramme (\*\*) soit cartésien dans la fibre  $F_i$  (cela vient de ce que les changements de base de  $F$  sont exacts à gauche). En particulier :

(ii) Pour tout objet  $i$  de  $I$ , le fonction d'inclusion  $F_i \longrightarrow F$  commute aux produits fibrés.

Proposition **4.4.2.** —

(i) Soit  $G$  un  $\mathcal{U}$ -préfaisceau sur  $F$ .  $G$  est un faisceau si et seulement si la restriction  $G_{/F_i}$  est représentable (i.e. un faisceau sur  $F_i$ ) pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ .

(ii) Pour toute section cartésienne  $S$  de  $F$ , le préfaisceau  $p(S)$  (4.3) est un faisceau sur  $F$ .



((ii) découle de (i). (i) résulte immédiatement de la définition de  $T$ , compte tenu de la remarque (ii) de 4.4.1.)

**Proposition (Sous-catégories génératrices de  $F$ ) 4.4.3.** — *Soit  $S$  une sous-catégorie pleine de  $F$ . Pour que  $S$  engendre le site  $F$  (i.e. que tout objet de  $F$  puisse être recouvert par des objets de  $S$  au sens de la topologie  $T$ ) il faut et il suffit que pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , la fibre  $S_i$  engendre le topos  $F_i$  (clair).*

**Proposition 4.4.4.** —

- a) *De (3), on déduit que le site  $F$  admet une petite famille topologiquement génératrice. Donc la catégorie  $\tilde{F}$  de  $\mathcal{U}$ -faisceaux sur  $F$  est un  $\mathcal{U}$ -topos.*
- b) *Soit  $n : F \longrightarrow \tilde{F}$  le foncteur naturel, composé du foncteur naturel  $F \longrightarrow \hat{F}$  et du foncteur faisceau associé. (On a une bijection fonctorielle*

$$G(X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(n(X), G)$$

$$X \in \text{Ob}(F), G \in \text{Ob}(\tilde{F}).$$

Le foncteur  $n$  n'est pas pleinement fidèle en général : les objets vides des fibres de  $F$  sont tous couverts par la famille vide, mais forment une sous-catégorie pleine de  $F$  équivalente à  $I$ . Néanmoins :

**Lemme.** — *Soit  $F^*$  la sous-catégorie pleine de  $F$  définie comme voici : pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , la fibre  $(F^*)_i$  est la catégorie des objets non-vides de  $F_i$  (autrement dit,  $F^*$  est formée des objets  $X$  tels que  $n(X)$  soit non-vide dans  $\tilde{F}$ ). La restriction de  $n$  à  $F^*$  est pleinement fidèle.*

**Démonstration.** Soient  $X, Y$  deux objets de  $F^*$ , de projections  $i$  et  $j$  respectivement, et  $(f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X)$  une famille épimorphique de  $F_i$ . Soit

$$(g_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y)$$

une famille de morphismes de  $F$ , telle que pour tout couple d'indices  $\alpha, \beta$  on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha \times_X X_\beta & \longrightarrow & X_\beta \\ \downarrow & & \downarrow g_\beta \\ X_\alpha & \xrightarrow{g_\alpha} & Y \end{array} \quad (*)$$

Pour tout indice  $\alpha$ , soit  $u_\alpha : i \longrightarrow j$  la projection du morphisme  $g_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y$ . Les diagrammes (\*) donnent des diagrammes commutatifs de  $I$  :

$$\begin{array}{ccc} i & \xlongequal{\quad} & i \\ \parallel & & \downarrow u_\beta \\ i & \xrightarrow{u_\alpha} & j \end{array}$$

donc les  $u_\alpha$  sont égaux à un certain  $u : i \longrightarrow j$ . Prenons maintenant une image inverse  $Y' \longrightarrow Y$  de  $Y$  par  $u$ , et soient  $(h_\alpha)$  les  $i$ -morphismes  $X_\alpha \longrightarrow Y'$  déduits des  $u$ -morphismes  $g_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y$ .

Soit  $g : X \longrightarrow Y$  un morphisme. Pour que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & & \\ f_\alpha \downarrow & \searrow g_\alpha & \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad (**)$$

soient commutatifs, il faut et il suffit que

- 1)  $\Pi(g) = u$  et
- 2) si l'on désigne par  $h : X \longrightarrow Y'$  le  $i$ -morphisme déduit de  $f$ , les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & & \\ f_\alpha \downarrow & \searrow h_\alpha & \\ X & \xrightarrow{h} & Y' \end{array}$$

de  $F_i$  soient commutatifs. Donc il existe un  $g : X \longrightarrow Y$  et un seul qui rend commutatifs les diagrammes (\*\*), c.q.f.d.

**Proposition (Familles épimorphiques de  $\tilde{F}$ ) 4.4.5.** — *Une famille  $(G_\alpha \longrightarrow G)$  de morphismes de  $\tilde{F}$  est épimorphique si et seulement si, pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , la famille de morphismes de faisceaux sur  $F_i$  :*

$$(G_{\alpha/F_i} \longrightarrow G_{/F_i})$$

*est épimorphique.*

En effet, d'après 4.4.4, (a), ces deux propriétés sont équivalentes à la suivante : pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , tout  $X \in \text{Ob}(F_i)$  et tout  $x \in G(X)$  il existe une famille épimorphique  $(X_\lambda \longrightarrow X)$  de  $F_i$  telle que chacun des  $x_{/X_\lambda}$  se relève l'un des  $G_\alpha$ .

**Proposition 4.4.6.** —

a) *Le foncteur*

$$p : L \longrightarrow \tilde{F}$$

(4.3 et 4.4.2, (ii)) *définit un morphisme de topos*

$$\tilde{F} \longrightarrow L$$

b) *Pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , il existe un morphisme de topos*

$$u_i : F_i \longrightarrow \tilde{F}$$

*tel que le foncteur composé*

$$\tilde{F} \xrightarrow{u_i^{-1}} F_i \longrightarrow \tilde{F}_i$$

*soit isomorphe au foncteur “restriction à  $F_i$ ”.*

Cela découle de 4.4.5, compte tenu de (4.1.1) pour (a) et de (4.4.2, (i)) pour (b).

**Proposition 4.4.7.** — *Soient  $i \in \text{Ob}(I)$ ,  $C \in \text{Ob}(F_i)$  et  $n : F \longrightarrow \tilde{F}$  le foncteur naturel. Si  $C$  est connexe dans  $F_i$ ,  $n(C)$  est connexe dans  $\tilde{F}$ .*

**Corollaire.** — *Si les  $F_i$  sont localement connexes,  $\tilde{F}$  est localement connexe.*

*Démonstration (de la proposition).* Supposons  $n(C)$  somme directe de  $G, H \in \text{Ob}(\tilde{F})$ . Il existe alors des objets non-vides  $(D_\lambda)$  de  $F_i$  et une famille épimorphique  $D_\lambda \longrightarrow C$  de  $F_i$ , telle que chaque  $n(D_\lambda) \longrightarrow n(C)$  se factorise par  $G$  ou par  $H$ . Si  $n(D_\lambda) \longrightarrow n(C)$  se factorise par  $G$  et  $n(D_\mu) \longrightarrow n(C)$  par  $H$ , le produit fibré

$$n(D_\lambda) \times_{n(C)} n(D_\mu) \simeq n(D_\lambda \times_C D_\mu) \quad (\text{cf 4.4.1, (ii)})$$

est vide dans  $\tilde{F}$ , ou encore, ce qui revient au même,  $D_\lambda \times_C D_\mu$  est vide dans  $F_i$ . On conclut par (1.4) que  $G$  ou  $H$  est vide.

**Proposition 4.4.8.** — Soient  $u : i \longrightarrow j$  une flèche de  $I$ ,  $M$  un objet de  $F_j$ ,  $C$  et  $D$  des objets connexes et non-vides de  $F_i$  et  $F_j$  respectivement, et  $f : C \longrightarrow D$  un  $u$ -morphisme. Si  $D$  trivialise  $M$ , alors l'application de composition avec  $f$  :

$$\mathrm{Hom}_j(D, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_u(C, M)$$

est bijective.

*Démonstration.* Pour tout ensemble  $H$ , on tire de  $f : C \longrightarrow D$  (par somme directe) un  $u$ -morphisme  $H_C \longrightarrow H_D$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_C & \longrightarrow & H_D \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

ce diagramme est même cartésien dans  $F$  (par 4.4.1, (i)) ; et puisque  $C$  et  $D$  sont connexes et non-vides on a un diagramme commutatif d'applications :

$$\begin{array}{c} H \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathrm{Hom}_D(D, H_D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(C, H_D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_C(C, H_C) \end{array}$$

Si on prend  $H = \mathrm{Hom}_j(D, M)$ , le  $D$ -isomorphisme  $H_D \longrightarrow D \times M$  (2.1.3) fournit un nouveau diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_D(D, H_D) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_D(C, H_D) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H = \mathrm{Hom}_j(D, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_u(C, M) \end{array}$$

d'où notre proposition.

**Proposition (Image essentielle du foncteur  $p$  (4.3)) 4.4.9.** — Soit  $G$  un faisceau sur  $F$ . Pour tout  $i \in \mathrm{Ob}(I)$  représentons la restriction  $G|_{F_i}$  par un objet  $X_i$  de  $F_i$ , et soit  $\varepsilon_i \in G(X_i)$  la section qui définit l'isomorphisme  $X_i \longrightarrow G|_{F_i}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une section cartésienne  $Y : I \longrightarrow F$  et un isomorphisme  $p(Y) \xrightarrow{\sim} G$  ;

(ii) Pour toute flèche  $u : i \longrightarrow j$  de  $I$ , il existe un morphisme  $u$ -cartésien  $X_i \xrightarrow{m} X_j$  qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} n(X_i) & \xrightarrow{n(m)} & n(X_j) \\ \varepsilon_i \searrow & & \swarrow \varepsilon_j \\ & G & \end{array} \quad (*)$$

(où  $n$  désigne le foncteur naturel  $F \longrightarrow \tilde{F}$ ).

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , désignons par  $\alpha_i$  la section  $1_{Y_i}$  de  $p(Y)$  au-dessus de  $Y(i)$  (4.3). Il existe un isomorphisme et un seul  $Y(i) \longrightarrow X_i$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} n(Y(i)) & \xrightarrow{\sim} & n(X_i) \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \varepsilon_i \\ p(Y) & \xrightarrow{\sim} & G \end{array}$$

Or, pour toute flèche  $u : i \longrightarrow j$  de  $I$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} n(Y(i)) & \xrightarrow{\quad} & n(Y(j)) \\ \alpha_i \searrow & & \swarrow \alpha_j \\ & p(Y) & \end{array}$$

est commutatif, d'où (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Soit  $u : i \longrightarrow j$  une flèche de  $I$ . Prouvons qu'il n'existe qu'une flèche  $u$ -cartésienne  $m : X_i \longrightarrow X_j$  qui rend commutatif le diagramme (\*) : soit  $m'$  une seconde flèche qui jouit de la même propriété. Il existe un  $i$ -automorphisme de  $X_i$  et un seul, soit  $\alpha$ , tel que  $m' = m \circ \alpha$ . On a donc :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_j \circ n(m') = \varepsilon_j \circ n(m) \circ n(\alpha) = \varepsilon_i \circ n(\alpha)$$

cela veut dire que  $1_{X_i}$  et  $\alpha$  ont même image par l'isomorphisme  $X_i \xrightarrow{\sim} G_{/F_i}^1$ , d'où  $m = m'$ .

Nous pouvons donc définir une section cartésienne  $X : I \longrightarrow F$  comme voici :

a)  $X(i) = X_i$  pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$

---

<sup>1</sup>Plus précisément, par la bijection composée  $\text{Hom}_i(X_i, X_i) \xrightarrow{\sim} G(X_i) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\tilde{F}}(n(X_i), G)$

- b) pour toute flèche  $i \xrightarrow{u} j$  de  $I$ , la flèche  $u$ -cartésienne  $X(u) : X_i \longrightarrow X_j$  est déterminée par le diagramme commutatif (\*) (en effet, l'unicité que l'on vient de prouver nous garantit que  $X(v \circ u) = X(v) \circ X(u)$  pour tout couple de flèches  $i \xrightarrow{u} j \xrightarrow{v} k$  de  $I$ ). Et il est clair que  $p(X)$  est isomorphe à  $G$ .

#### 4.5. Théorème de Van Kampen

Comme dans (2.4) et (3) nous supposons que l'univers  $\mathcal{U}$  admet un élément de cardinal infini.

*Théorème. — Si les fibres de  $F$  sont localement connexes, les topos  $\tilde{F}$  et  $L$  sont localement connexes, et le morphisme de topos*

$$\tilde{F} \longrightarrow L$$

*(4.4.6, a) défini par le foncteur pleinement fidèle  $p : L \longrightarrow \tilde{F}$  (4.3) fournit une équivalence de topos*

$$\mathrm{SLC}(\tilde{F}) \longrightarrow \mathrm{SLC}(L) \quad (2.4.12), \quad (3.4)$$

*Remarque.* cela revient à dire que le foncteur  $p : L \longrightarrow \tilde{F}$  induit par restriction une équivalence entre catégories d'objets localement constants. Ainsi la démonstration du théorème se ramène aux points 4.5.1 et 4.5.2 qui suivent :

**4.5.1.** Soit  $G$  un faisceau sur  $F$ . Si  $G$  est localement constant dans  $\tilde{F}$ , il existe une section cartésienne  $X : I \longrightarrow F$  telle que  $p(X)$  soit isomorphe à  $G$ .

Nous utiliserons le critère 4.4.9, dont nous reprenons les notations.

Soit  $u : i \longrightarrow j$  une flèche de  $I$ .

Soit  $K$  l'ensemble des couples

$$(C, D) \in \mathrm{Ob}(F_i) \times \mathrm{Ob}(F_j)$$

qui remplissent les conditions suivantes :

- (i)  $C$  et  $D$  sont connexes et non-vides dans  $F_i$  et  $F_j$  respectivement
- (ii)  $\mathrm{Hom}_u(C, D) \neq \emptyset$

(iii)  $n(D)$  trivialise  $G$

Soit enfin  $S$  la sous-catégorie pleine de  $F_j$  formée des objets  $C$  qui remplissant la condition suivante : il existe un objet  $D$  de  $F_j$  tel que  $(C, D) \in K$ .

a)  $S$  engendre  $F_j$  :

En effet (4.4.3) les objets connexes  $Z$  de  $F_j$  tels que  $n(Z)$  trivialise  $G$  engendrent  $F_j$ . Donc leurs images inverses par  $u$  recouvrent  $F_j$  ; d'où notre assertion.

b) Soit  $C$  un objet de  $S$ . Pour chaque  $x \in G(C)$ , il existe un  $u$ -morphisme  $C \longrightarrow X_j$  et un seul qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & n(X_j) & \\ & \downarrow \varepsilon_j & \\ n(C) & \xrightarrow{x} & G \end{array}$$

*Démonstration.* Soient  $D$  un objet de  $F_j$  tel que  $(C, D) \in K$  et  $f : C \longrightarrow D$  un  $u$ -morphisme. On en tire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_j(D, X_j) & \longrightarrow & G(D) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_u(C, X_j) & \longrightarrow & G(C) \end{array}$$

(où les flèches verticales se déduisent de  $C \longrightarrow D$  et les flèches horizontales de  $n(X_j) \longrightarrow G$ ).

Il s'agit de prouver que la flèche du bas est bijective ; or :

- (i) La flèche du haut est bijective par hypothèse ( $X_j$  représente  $G_{/F_j}$ )
- (ii) La flèche  $\text{Hom}_j(D, X_j) \longrightarrow \text{Hom}_u(C, L_j)$  est bijective par (4.4.8) : en effet, la restriction  $n(D)_{/F_j}$  trivialise  $X_j$  d'après (4.4.6, b), et elle admet une section au-dessus de  $D$ .
- (iii) La flèche  $G(D) \longrightarrow G(C)$  est bijective parce que  $n(C)$  et  $n(D)$  sont connexes non-vides dans  $\tilde{F}$  (4.4.7) et que  $n(D)$  trivialise  $G$ .

- c) Pour tout  $C \in \text{Ob}(S)$  et tout  $f \in \text{Hom}_i(C, X_i)$ , soit  $\alpha_C(f)$  le  $\mathcal{U}$ -morphisme  $C \longrightarrow X_j$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} n(C) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ n(X_i) & & n(X_j) \\ & \searrow & \swarrow \\ & G & \end{array}$$

L'application

$$\alpha_C : \text{Hom}_i(C, X_i) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(C, X_j)$$

est nécessairement fonctorielle en  $C$  ; elle est bijective puisque l'application

$$\text{Hom}_i(C, X_i) \longrightarrow G(C)$$

fournie par  $X_i \longrightarrow G_{/F_i}$  l'est. Puisque  $S$  engendre  $F_i$ , les bijections  $\alpha_C$  proviennent d'une flèche  $\mathcal{U}$ -cartésienne

$$X_i \longrightarrow X_j$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} n(X_i) & \longrightarrow & n(X_j) \\ & \searrow & \swarrow \\ & G & \end{array}$$

est commutatif.

**Proposition 4.5.2.** — *Soit  $X : I \longrightarrow F$  une section cartésienne. Si  $p(X)$  est localement constant dans  $\tilde{F}$ , alors  $X$  est un objet localement constant de  $L$ .*

*Démonstration.* Recouvrons l'objet final de  $\tilde{F}$  par des objets localement constants  $(H_\alpha)$  qui trivialisent  $p(X)$  (par exemple des objets galoisiens 2.4.6). Si on prend des sections cartésiennes  $(M_\alpha)$  de  $F$  telles que les  $p(M_\alpha)$  soient isomorphes aux  $H_\alpha$ , les  $M_\alpha$  trivialisent  $X$  puisque  $p$  est pleinement fidèle ; or les  $M_\alpha$  recouvrent  $e_L$  par 4.4.5.

**4.6. Étude de  $\text{SLC}(\tilde{F}) \simeq \text{SLC}(L)$**  (Nous supposons donc que l'univers  $\mathcal{U}$  admet un élément de cardinal infini, et que les fibres de  $F$  sont localement connexes)

Rappelons certaines notations :



- 1)  $n : F \longrightarrow \tilde{F}$  le foncteur naturel (4.4.4)
- 2)  $p : L \longrightarrow \tilde{F}$  le foncteur pleinement fidèle qui définit le morphisme de topos  $\tilde{F} \longrightarrow L$  (4.4.6).

**Proposition 4.6.1.** — *Soit  $H$  un objet localement constant de  $\tilde{F}$ . Il existe une sous-catégorie pleine  $C$  de  $F$  qui remplit les conditions suivantes :*

- 1) *Pour tout  $X \in \text{Ob}(C)$ ,  $n(X)$  trivialise  $H$ .*
- 2) *Pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , les objets de  $C_i$  sont galoisiens dans  $F_i$  et recouvrent  $e_{F_i}$ . En outre, deux objets de  $C_i$  situés au-dessus de la même composante connexe de  $F_i$  sont toujours isomorphes (cette dernière condition veut dire que  $C_i$  est un groupoïde (2.3.4)).*
- 3) *Pour tout flèche  $u : i \longrightarrow j$  de  $I$  et tout objet  $Y$  de  $C_i$ , il existe un objet  $Z$  de  $C_j$  et un  $u$ -morphisme  $Y \longrightarrow Z$ .*

*Démonstration.* Soient  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  les composantes connexes de  $e_{\tilde{F}}$ . Au-dessus chaque  $U_\alpha$ , prenons un objet galoisien  $G_\alpha$  qui trivialise  $H$  (2.4.6).

Il existe (4.5) des sections cartésiennes  $S_\alpha$  de  $F$  et des isomorphismes  $p(S_\alpha) \simeq F$ . Nous définissons la catégorie  $C$  comme voici : pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , la fibre  $C_i$  est la sous-catégorie pleine de  $C_i$  formée des composantes connexes des  $S_\alpha(i)$ .

Vérification de (1) : pour tout  $X \in \text{Ob}(C)$ , il existe un  $\alpha \in A$  et une section de  $G_\alpha$  au dessus de  $X$ , i.e. un morphisme  $n(X) \longrightarrow G_\alpha$ . Donc  $n(X)$  trivialise  $H$ .

Vérification de (2) : nous appliquons (4.4.6, b) dont nous reprenons les notations. Soit  $i \in \text{Ob}(I)$ . Les  $u_i^{-1}(G_\alpha)$  sont isomorphes aux  $S_\alpha(i)$ . Par conséquent a) pour tout  $\alpha \in A$ ,  $S_\alpha(i)$  admet une structure de pseudo-torseur sous le groupe constant  $\text{Aut}(G_\alpha)_{F_i}$  et b) les  $S_\alpha(i)$  recouvrent  $e_{F_i}$  et  $S_\alpha(i) \times S_\beta(i)$  est vide pour  $\alpha \neq \beta$ . Le point (2) découle donc de 2.4.5., (ii).

Quant au point (3), il est évident.

**Proposition 4.6.2.** — *Soit  $C$  une sous-catégorie pleine de  $F$  qui remplit la condition (2) de (4.6.1). Pour tout faisceau  $H$  sur  $F$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Pour tout  $X \in \text{Ob}(C)$ ,  $n(X)$  trivialise  $H$ .*

(ii) Il existe une section cartésienne  $S$  de  $F$  telle que  $p(S)$  soit isomorphe à  $H$  et que, pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , les objets de  $C_i$  trivialisent  $S(i)$ .

Corollaire. — Soit  $S$  une section cartésienne de  $F$ . Pour que  $S$  soit un objet localement constant de  $L$ , il faut et il suffit que pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ ,  $S(i)$  soit un objet localement constant de  $F_i$  (cf. 2.4.6 et 4.6.1).

Démonstration de la proposition. (i)  $\Rightarrow$  (ii) Par définition de la topologie de  $F$ , les  $n(X)$ ,  $X \in \text{Ob}(C)$  recouvrent le faisceau final. Donc  $H$  est localement constant, et il existe une section cartésienne  $S$  de  $F$  telle que  $p(S)$  soit isomorphe à  $H$ . Soient  $i \in \text{Ob}(I)$  et  $X$  un objet de  $C_i$  ; la restriction  $n(X)_{/F_i}$  admet une section au-dessus de  $X$ , et elle trivialisent  $H_{/F_i}$  d'après (4.4.6, b) ; donc  $X$  trivialisent  $S(i)$  qui représente  $H_{/F_i}$ , c.q.f.d.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Soit  $K$  la sous-catégorie pleine de  $F$  définie comme voici : pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , la fibre  $K_i$  est formée des objets connexes non-vides de  $F_i$  qui sont dans le crible engendré par les objets de  $C_i$ . Le foncteur  $n : F \longrightarrow \tilde{F}$  identifie  $K$  à une sous-catégorie génératrice de  $\tilde{F}$  formée d'objets connexes non-vides (d'après le lemme 4.4.4, b et 4.4.7). Il suffit donc, d'après (2.2.1), de voir que  $H$  est un préfaisceau localement constant sur  $K$  ; ce qui découle de (4.4.8), compte tenu de l'isomorphisme  $p(S) \simeq H$ .

Proposition 4.6.3. — Soit  $C$  une sous-catégorie pleine de  $F$  qui remplit les conditions (2) et (3) de (4.6.1).

(i) Pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , soit  $\text{LC}(F_i, C_i)$  la sous-catégorie pleine de  $F_i$  formée des objets qui sont trivialisés par les objets de  $C_i$ .  $\text{LC}(F_i, C_i)$  est un  $\mathcal{U}$ -topos objet de  $\mathcal{G}$  (cf. 3.2), et l'inclusion  $\text{LC}(F_i, C_i) \longrightarrow F_i$  définit un morphisme de topos

$$F_i \longrightarrow \text{LC}(F_i, C_i) \quad (3.3.2)$$

Le topos  $\text{LC}(F_i, C_i)$  est engendré par  $C_i$ . Comme  $C_i$  est un groupoïde,  $\text{LC}(F_i, C_i)$  est équivalent à  $\widehat{C_i}$ .

(ii) Soit  $F_C$  la sous-catégorie pleine de  $F$  qui a pour fibres les  $\text{LC}(F_i, C_i)$ .  $F_C \longrightarrow I$  est une sous-catégorie fibrée en  $\mathcal{U}$ -topos objets de  $\mathcal{G}$ , et l'inclusion  $F_C \longrightarrow F$  définit un morphisme de catégories fibrées en topos

$$F \longrightarrow F_C$$

(preuve: d'après (i), il suffit de voir que  $F_C$  est une sous-catégorie fibrée de  $F$ . Soient donc  $u : i \longrightarrow j$  une flèche de  $I$  et  $L \longrightarrow M$  une flèche  $u$ -cartésienne de  $F$ . D'après la condition (3), si les objets de  $C_j$  trivialisent  $M$ , les objets de  $C_i$  trivialisent  $L$ ).

(iii) L'inclusion  $F_C \longrightarrow F$  identifie donc les sections cartésiennes de  $F_C$  à des sections cartésiennes de  $F$ . D'après (4.6.2), le foncteur

$$p : L \longrightarrow \tilde{F}$$

fournit une équivalence de catégories

$$\text{Cart}_I(I, F_C) \longrightarrow \text{LC}(\tilde{F}, C)$$

entre les sections cartésiennes de  $F_C$  et les  $\mathcal{U}$ -faisceaux sur  $F$  qui sont trivialisés par les  $n(X)$ ,  $X \in \text{Ob}(C)$ .

Ainsi le topos  $\text{LC}(\tilde{F}, C)$  (3.3.2) est limite inductive des topos  $\text{LC}(F_i, C_i)$  (4.1.1) ; et l'inclusion  $\text{Cart}_I(I, F_C) \longrightarrow \text{SLC}(L)$  définit un morphisme de topos

$$\text{SLC}(L) \longrightarrow \text{Cart}_I(I, F_C)$$

#### 4.6.4. (Avec les hypothèses et les notations de 4.6.3)

On peut aussi définir sur  $F_C$  la topologie (4.4.1). Le foncteur naturel

$$n_C : F_C \longrightarrow \tilde{F}_C$$

identifie alors la sous-catégorie pleine  $C$  de  $F_C$  à une sous-catégorie génératrice du topos  $\tilde{F}_C$  formée d'objets connexes et non-vides ((4.6.3, (i)), (4.4.3), (4.4.4 (b)) et (4.4.7)).

Désignons par :

$$p_C : \text{Cart}_I(I, F_C) \longrightarrow \tilde{F}_C$$

le foncteur (4.3).

Lemme. — Soit  $G$  un faisceau sur  $F_C$ . Les propriétés suivantes de  $G$  sont équivalentes :

- a)  $G$  est localement constant dans  $\tilde{F}_C$
- b) La restriction  $G|_C$  est un préfaisceau localement constant

c) Il existe une section cartésienne  $S$  de  $F_C$  et un isomorphisme  $p_C(S) \simeq G$ .

*Démonstration.* On prouve  $a \Rightarrow c \Rightarrow b \Rightarrow a$  :

Si  $G$  est localement constant, il existe (d'après le théorème 4.5 appliqué à  $F_C$ ) une section cartésienne  $S$  de  $F_C$  et un isomorphisme  $p_C(S) \simeq G$ . Mais alors, pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ ,  $S(i)$  est trivialisé par les objets de  $C_i$  ; donc (par (4.6.2) appliqué à  $F_C$  et (2.2.1))  $G_{/C}$  est un préfaisceau localement constant. L'implication  $b \Rightarrow a$  découle de 2.2.1.

Corollaire (de 4.6.4) **4.6.5.** — *Le foncteur “restriction à  $C$ ” donne une équivalence de catégories*

$$\text{LC}(\tilde{F}, C) \longrightarrow \text{LC}(\widehat{C})$$

où  $\text{LC}(\widehat{C})$  désigne la catégorie des  $\mathcal{U}$ -préfaisceaux localement constants sur  $C$ .

(Appliquer (4.6.3, iii) et l'équivalence  $b \Leftrightarrow c$  du lemme (4.6.4))

*Commentaire :*

- 1) Les préfaisceaux localement constants sur  $C$  s'identifient aux préfaisceaux sur les groupoïde fondamental  $\Pi(C)$  de la catégorie  $C$ , obtenu par calcul des fractions ([1], chap. I, n°1.5.3). Rappelons que  $\Pi(C)$  est caractérisé à équivalence près par la propriété universelle suivante : il existe un foncteur  $C \longrightarrow \Pi(C)$  qui donne pour tout groupoïde  $\Gamma$  une équivalence de catégories :

$$\text{Fonct}(\Pi(C), \Gamma) \longrightarrow \text{Fonct}(C, \Gamma)$$

- 2) Le groupoïde  $\Pi(C)$  est la 2-limite inductive des groupoïdes  $C_i$  au sens suivant :

- a) Le foncteur  $\Pi_{/C} : C \longrightarrow I$  est cofibrant, i.e. le foncteur  $C^\circ \longrightarrow I^\circ$  qui s'en déduit est fibrant (condition (3) de (4.6.1) et (4.4.8))
- b)  $\Pi(C)$  représente le 2-foncteur

$$\Gamma \longrightarrow \text{Fonct}_I(C, I \times \Gamma)$$

des groupoïdes dans les catégories.

- 3) On peut exprimer cela autrement : d'après le corollaire (4.6.2), la sous-catégorie  $\mathcal{G}$  de  $\text{Top}$  définie en (3.2) est stable par les 2-limites inductives (les objets de  $\mathcal{G}$  sont d'ailleurs les limites inductives de topos ponctuels). Or le foncteur:

$$\text{Point} : \mathcal{G} \longrightarrow \text{Grpd}$$

commute aux 2-limites inductives (puisque c'est une équivalence) ; et dans le cas présent, les  $C_i$  sont équivalents aux groupoïdes  $\text{Point}(\text{LC}(F_i, C_i))$  (3.2.4 et 4.6.3, (i)). On peut donc se reporter à 4.6.3, (iii).

**Proposition 4.6.6.** — *Soit  $J(F)$  l'ensemble des sous-catégories pleines de  $F$  qui remplissent les conditions (2) et (3) de 4.6.1. On définit une relation de préordre sur  $J(F)$  comme voici :  $C < D$  si pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , les objets de  $C_i$  trivialisent les objets de  $D_i$ .*

(i) *L'ensemble préordonné  $J(F)$  est filtrant à gauche*

(ii) *L'ordonné associé est  $\mathcal{U}$ -petit.*

*Démonstration.* Le point (ii) résulte de 2.4.9.

Prouvons (i). Soient  $C$  et  $C'$  deux éléments de  $J(F)$ . On définit un minorant  $D$  de  $\{C, C'\}$  comme voici : étant donné  $i \in \text{Ob}(I)$ , un objet  $Z$  de  $F_i$  est dans  $D_i$  s'il existe un objet  $Y$  de  $C_i$  et un objet  $Y'$  de  $C'_i$  tels que  $Z$  soit isomorphe à une composante connexe de  $Y \times Y'$  (cf. 2.4.5, (ii)).

**4.6.7.** D'après (4.6.6), (4.6.1) et (4.6.2), il existe un petit ensemble ordonné filtrant à gauche  $A$  et une famille croissante  $(C^\alpha)_{\alpha \in A}$  d'éléments de  $J(F)$  qui remplit la condition suivante : pour tout objet localement constant  $S$  de  $L$ , il existe un indice  $\alpha$  tel que pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , les objets de  $C_i^\alpha$  trivialisent  $S(i)$  dans  $F_i$ . Cela veut dire que la catégorie des objets localement constants de  $L$  est réunion des sous-catégories essentiellement pleines

$$T_\alpha = \text{Cart}_I(I, F_{C^\alpha})$$

définies en 4.6.3, (ii) et (iii). Puisque les  $T_\alpha$  sont des  $\mathcal{U}$ -topos objets de  $\mathcal{G}$  et que les inclusions  $T_\alpha \longrightarrow \text{SLC}(L)$  définissent des morphismes de topos  $\text{SLC}(L) \longrightarrow T_\alpha$ , on a, suivant (3.3.3), la "formule"

$$\text{SLC}(\varinjlim_I F_i) = \varprojlim_A (\varinjlim_I \text{LC}(F_i, C_i^\alpha))$$

où les  $\text{lim}$  sont des 2-limites dans la 2-catégorie des  $\mathcal{U}$ -topos.

## APPENDICE: CATÉGORIES FIBRÉES EN TOPOS

---

Soit  $I$  une catégorie  $\mathcal{U}$ -petite.

**A.1.** J'appelle catégorie fibrée en  $\mathcal{U}$ -topos au dessus de  $I$  toute catégorie fibrée  $F \xrightarrow{\Pi} I$  qui vérifie les axiomes suivantes :

- 1) Pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$ , la fibre  $F_i$  est un  $\mathcal{U}$ -topos.
- 2) Pour toute flèche  $u : i \longrightarrow j$  de  $I$ , le foncteur changement de base  $F_j \longrightarrow F_i$  définit un morphisme de topos  $F_i \longrightarrow F_j$ .

**A.2.** Définissons maintenant la 2-catégorie  $\text{Fibtop}(I)$  des catégories fibrées en  $\mathcal{U}$ -topos au-dessus de  $I$  : étant données deux catégories fibrées en topos  $F, G$  au-dessus de  $I$ , nous prenons comme catégorie des morphismes de  $F$  dan  $G$

$$\text{Cartop}_I(F, G)$$

la sous-catégorie pleine de

$$\text{Cart}_I(G, F)^\circ$$

(catégorie opposée de la catégorie des  $I$ -foncteurs cartésiens  $G \longrightarrow F$ ) définie comme voici : un  $I$ -foncteur cartésien  $\varphi : G \longrightarrow F$  définit un morphisme de catégories fibrées en topos  $F \longrightarrow G$  si pour tout  $i \in \text{Ob}(I)$  le foncteur  $G_i \longrightarrow F_i$  déduit de  $\varphi$  par restriction définit un morphisme de topos  $F_i \longrightarrow G_i$ .

**A.3.** La 2-catégorie  $\text{Fibtop}(I)$  est équivalente à la 2-catégorie des 2-foncteurs de  $I$  dans la catégorie des  $\mathcal{U}$ -topos: les catégories fibrées de la forme  $I \times E$  ( $E$  un  $\mathcal{U}$ -topos) correspondant aux 2-foncteurs constants ; d'où une définition des 2-limites inductives et projectives de topos :

**A.4.** Soit  $F$  une catégorie fibrée en  $\mathcal{U}$ -topos au-dessus de  $I$ . Nous appellerons 2-limite inductive de  $F$  le 2-foncteur covariant

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\text{-topos} &\longrightarrow \mathcal{U}\text{-catégories} \\ E &\mapsto \text{Cartop}_I(F, I \times E) \end{aligned}$$

et 2-limite projective de  $F$  le 2-foncteur contravariant

$$E \longrightarrow \text{Cartop}_I(I \times E, F)$$

La 2-limite inductive (resp. projective) de  $F$  se représente donc, quand c'est possible, par un  $\mathcal{U}$ -topos  $L$  muni d'un morphisme de catégories fibrées en topos

$$F \longrightarrow I \times L$$

$$(\text{resp. } I \times L \longrightarrow F).$$

## § V. — COMPLÉMENTS

---

### 5.1. Groupe fondamental d'un topos localement connexe en un point

**Définition 5.1.1.** — Soient  $T$  un topos localement galoisien et  $p$  un point de  $T$ . Nous appellerons groupe fondamental de  $T$  en  $p$  le groupe  $\Pi_1 = \Pi_1(T, p)$  des automorphismes du foncteur fibre  $p^{-1}$ . On a donc pour tout objet  $X$  de  $T$  une opération à gauche naturelle de  $\Pi_1(T, p)$  sur la fibre  $p^{-1}(X)$  ; c'est-à-dire un foncteur

$$f : T \longrightarrow \text{Ens}_{\Pi_1}$$

de  $T$  dans la catégorie des  $\Pi_1$ -ensembles à gauche.

**Proposition 5.1.2.** — Pour tout objet localement constant  $L$  de  $T$ , soit  $V_L$  l'ensemble des  $\alpha \in \Pi_1$  qui laissent fixe chaque point de  $p^{-1}(L)$ . Les ensembles  $V_L$  forment un système fondamental de voisinages de 1 pour une topologie de groupe sur  $\Pi_1$ . Pour tout objet  $X$  de  $T$ , l'opération de  $\Pi_1$  sur  $p^{-1}(X)$  est alors continue pour la topologie discrète de  $p^{-1}(X)$  ; d'où un nouveau foncteur

$$\bar{f} : T \longrightarrow \text{Dis}_{\Pi_1}$$

à valeurs dans la catégorie des  $\Pi_1$ -espaces discrets.

**5.1.3.** Soit  $I$  la catégorie des voisinages galoisiens de  $p$  : les objets de  $I$  sont les couples  $(Y, y)$  formés d'un objet galoisien  $Y$  de  $T$  et d'un  $y \in p^{-1}(Y)$  ; et les morphismes  $(Y, y) \longrightarrow (Z, z)$  sont les  $Y \longrightarrow Z$  qui transforment  $y$  en  $z$ .  $I$  est en fait un ensemble préordonné filtrant. Pour toute flèche  $u : (Y, y) \longrightarrow (Z, z)$  de  $I$ , on définit un morphisme de groupes



surjectif  $\text{Aut}(Y) \longrightarrow \text{Aut}(Z)$  en associant à l'automorphisme  $a$  de  $Y$  l'automorphisme  $b$  de  $Z$  tel que  $b(z) = u(a(y))$  ; d'où un système projectif de groupes discrets

$$\text{Aut}(Y)_{(Y,y) \in I}$$

Le groupe topologique  $\Pi_1$  s'identifie à la limite projective de ce système si on fait correspondre à chaque  $\alpha \in \Pi_1$  la famille  $(a_{(Y,y)})$  déterminée par les relations

$$a_{(Y,y)}(\alpha \cdot y) = y$$

**Proposition 5.1.4.** — *Supposons maintenant le topos  $T$  connexe. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :*

- (a) *Le foncteur  $\bar{f} : T \longrightarrow \text{Dis}_{\Pi_1}$  est une équivalence de catégories*
- (b) *Pour tout voisinage galoisien  $(Y, y)$  de  $p$ , la projection*

$$\text{pr}_{(Y,y)} : \Pi_1 \longrightarrow \text{Aut}(Y)$$

*est surjective.*

- (b') *Pour tout objet connexe  $M$  de  $T$ ,  $\Pi_1$  opère transitivement sur  $p^{-1}(M)$ .*

Ces propositions sont vérifiées dans les deux cas suivants :

- (i) Tout objet galoisien de  $T$  est fini (cf. 5.2.)
- (ii)  $T$  admet une famille génératrice dénombrable.

Notons qu'un topos localement galoisien qui remplit la condition (i) ou la condition (ii) admet toujours un point.

**Définition 5.1.5.** — *Soit maintenant  $E$  un topos localement connexe. A chaque point  $p$  de  $E$ , le morphisme de topos  $E \longrightarrow \text{SLC}(E)$  (2.4.1.) fait correspondre un point  $\bar{p}$  de  $\text{SLC}(E)$ .*

*Le foncteur fibre  $p^{-1}$  n'est autre que la restriction de  $p^{-1}$  à la sous-catégorie  $\text{SLC}(E)$  de  $E$ . On peut appeler groupe fondamental de  $E$  en  $p$  le groupe fondamental en  $\bar{p}$  du topos localement galoisien  $\text{SLC}(E)$ .*

Les propriétés (i) et (ii) de 5.1.4., pour le topos  $\text{SLC}(E)$ , reviennent aux propriétés suivantes de  $E$  :

(i') Tout objet galoisien de  $E$  est fini.

(ii') Il existe une suite  $(R_n)$  de cribles couvrants  $e_E$ , telle que chaque objet localement constant de  $E$  puisse être trivialisé par un  $R_n$  (cf. 3.3.2. et 3.2.5.)

## 5.2. Groupoïde fondamental profini

**Proposition 5.2.1.** — *Disons qu'un objet localement constant  $L$  d'un topos  $T$  est fini s'il existe un recouvrement  $(U_\alpha)$  de  $e_T$  par des objets de  $T$  et des  $U_\alpha$ -isomorphismes*

$$U_\alpha \times L \simeq I_{U_\alpha}^\alpha$$

où les  $I^\alpha$  sont des ensembles finis.

*On prouve sans peine les propositions suivantes :*

- 1) Soient  $L$  un objet l.c.f. de  $T$  et  $R$  une relation d'équivalence sur  $L$ . Si  $R$  est un objet l.c.f., le quotient l'est aussi.
- 2) Toute limite projective finie d'objets l.c.f. est l.c.f.

Et, si  $T$  est somme directe de topos connexes :

- 3) Tout objet  $L$  de  $T$  qui est l.c.f. est somme directe d'objets l.c.f. connexes ; et tout sous-objet de  $L$  qui est l.c.f. est somme directe de composantes connexes de  $L$ .
- 4) Soit  $L$  un objet l.c.f. de  $T$ . Au-dessus de chaque composante connexe de  $T$ , il y a un objet galoisien fini qui trivialisé  $L$ .

**5.2.2.** Nous supposons le topos  $T$  somme directe de topos connexes, et que l'univers de référence admet un élément infini.

Soit  $\text{SLCF}(T)$  la sous-catégorie pleine de  $T$  formée des sommes directes d'objets l.c.f. Les propositions 1 à 3 ci-dessus montrent que la catégorie  $K$  des objets l.c.f. de  $T$  vérifie les hypothèses du lemme 2.4.2.. Or, on prouve aisément que cette catégorie est petite à équivalence près ; donc  $\text{SLCF}(T)$  est un topos et l'inclusion  $\text{SLCF}(T) \longrightarrow T$  définit un morphisme de topos en sens inverse. Enfin, d'après la proposition 4 ci-dessus et le lemme 2.4.10.,  $\text{SLCF}(T)$  est un topos localement galoisien.

**Proposition 5.2.3.** — *Disons qu'un topos localement galoisien est profini s'il est engendré par ses objets galoisiens finis. Le topos localement galoisien  $\text{SLCF}(T)$  est profini, et le morphisme  $T \longrightarrow \text{SLCF}(T)$  fournit pour tout topos localement galoisiens profini  $P$  une équivalence de catégories*

$$\text{Homtop}(\text{SLCF}(T), P) \longrightarrow \text{Homtop}(T, P)$$

## RÉFÉRENCES

- [1] P. GABRIEL ET P. ZISMAN — *Calculus of fractions and homotopy theory*
- [2] J. GIRAUD — *Cohomologie non abélienne* (pour les catégories fibrées)
- [3] A. GROTHENDIECK ET J. L. VERDIER — *Exposés I à IV du séminaire de géométrie algébrique* SGA 4
- [4] A. GROTHENDIECK — *Exposés V et IX du séminaire* SGA 1