FACULTE DES SCIENCES D'ALGER

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

SEMINAIRES 1965 – 66

Introduction au Langage Fonctoriel[1]

A. GROTHENDIECK

[1]Ce texte a été transcrit par Mateo Carmona
https://agrothendieck.github.io/

FACULTE DES SCIENCES D'ALGER
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

SEMINAIRES 1965 – 66

Introduction au Langage Fonctoriel

Rédigé d'après un cours de Monsieur A. Grothendieck.

TABLE DE MATIÈRES

Ce fascicule contient une rédaction succincte d'une série d'exposés que Monsieur A. Grothendieck a bien voulu venir faire à Alger au cours du mois de Novembre 1965. Il a pour but de familiariser un débutant avec les éléments du langage fonctoriel, langage qui sera utilisé par la suite dans les divers séminaires : Algèbre Homologique dans las catégories abéliennes, Fondement de la K-théorie…

Les propositions non démontrées sont de deux types : des sorites dont la démonstration tiendra lieu d'exercices, des propositions moins évidentes (signalés par une astérisque) dont on trouvera les démonstrations dans les ouvrages de références.

§ 0. — CADRE LOGIQUE

Lorsque l'on définit une catégorie, il y a des inconvénients à supposer que les forment une classe, au sens de la théorie des ensembles de Gödel-Bernays. En effet, si l'on sait définir les applications d'une classe dans une autre, ces applications ne forment cependant pas elles-mêmes une classe. En particulier on ne saurait parler de la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre. Aussi se placera-on dans le cadre de la théorie des ensembles de Bourbaki pour définir les *Univers*.

Univers :

On appelle *univers* un ensemble $\mathfrak{U}$ vérifiant les axiomes suivants :

U_1 Si Y appartient à X et si X appartient à $\mathfrak{U}$, alors Y appartient à $\mathfrak{U}$.

U_2 Si X et Y sont des éléments de $\mathfrak{U}$ alors $\{X, Y\}$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

U_3 Si X est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des parties de X est un élément de $\mathfrak{U}$.

U_4 Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles appartenant à $\mathfrak{U}$, et si I est un élément de $\mathfrak{U}$, alors $\bigcup_{i\in I} X_i$ appartient à $\mathfrak{U}$.

On déduit de ces axiomes les propositions suivantes :

(1) Si X est un élément de $\mathfrak{U}$, $\{X\}$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

(2) X et Y sont des éléments de $\mathfrak{U}$ si et seulement si le couple[2] (X, Y) est un élément de $\mathfrak{U}$.

(3) L'ensemble vide est un élément de $\mathfrak{U}$ (puisque c'est un élément de $\mathfrak{P}(X)$ pour tout ensemble X de l'univers $\mathfrak{U}$).

(4) Si Y est contenu dans X et si X appartient à $\mathfrak{U}$ alors Y appartient à $\mathfrak{U}$.

(5) Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles de $\mathfrak{U}$ et si I appartient à $\mathfrak{U}$, alors $\prod_{i\in I} X_i$ appartient à $\mathfrak{U}$.

(6) Si X est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathfrak{U})$.

(7) L'univers $\mathfrak{U}$ n'est pas un élément de $\mathfrak{U}$. En effet si $\mathfrak{U}$ appartient à $\mathfrak{U}$, alors $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$ appartient à $\mathfrak{U}$. Soit E appartenant à $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$ (donc E appartient à $\mathfrak{U}$) défini ainsi :

    $E = \{X \in \mathfrak{U} | X \notin X\}$

    On aurait alors : E appartient à E si et seulement si E n'appartient pas à E !

(8) L'intersection d'une famille quelconque d'univers est un univers. En particulier si E est un ensemble et s'il existe un univers contenant E, alors il existe un plus petit univers contenant E qu'on appelle l'univers engendré par E.

Si E_0 est un ensemble quelconque, on se propose de chercher s'il existe un plus petit univers $\mathfrak{U}$ contenant E_0. Il apparaît naturel de plonger E_0 dans un ensemble E_1 par le procédé suivant :

Soit G_0 l'ensemble ainsi défini : $X \in G_0 \iff (\exists Y)(Y \in E_0 \text{ et } X \in Y)$ et $F_1 = E_0 \cup G_0$

Soit $G_1 : X \in G_1 \iff (\exists Y)(\exists Z)(Y \in F_1, Z \in F_1 \text{ et } X = \{Y, Z\})$ et $F_2 = F_1 \cup G_1$

Soit $G_2 : X \in G_2 \iff (\exists Y)(Y \in F_2 \text{ et } X = \mathfrak{P}(Y))$ et $F_3 = F_2 \cup G_2$

Soit $G_3 : X \in G \iff (\exists I)(\exists (X_i)_{i\in I})(I \in F_3, \forall i \in I, X_i \in F_3 \text{ et } X = \bigcup_{i\in I} X_i)$ et $F_4 = F_3 \cup G_3$.

[2] On rappelle que le couple (X, Y) est l'ensemble $\{X, \{X, Y\}\}$

On pose alors $E_1 = F_4 \cup \{E_0\}$

En itérant cette opération e¿on forme une suite transfinie d'ensembles :

$$E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_\alpha \subset E_{\alpha+1} \subset \ldots$$

Pour qu'il existe un plus petit univers contenant E_0, il faut et il suffit que cette suite devienne stationnaire 'partir d'un certain rang (c'est-à-dire qu'il existe α tel que $E_{\alpha+1} = E_\alpha$) E_α sera précisément l'univers $\mathfrak{U}$ recherché.

En particulier si l'on prend $E_0 = \varnothing$, on montre que $\mathfrak{U} = E_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Lorsqu'on part d'un ensemble E_0 infini, on ne peut prouver l'existence d'un univers $\mathfrak{U}$ contenant E_0. Il convient donc d'ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome suivant :

(a_1) Axiome des univers :

Pour tout ensemble X, il existe un univers $\mathfrak{U}$, tel que X soit élément de $\mathfrak{U}$.

De plus comme on ne souhaite pas sortir d'un univers $\mathfrak{U}$ par l'usage du symbole τ de Hilbert on introduit l'axiome supplémentaire :

(a_2) Si R est une relation, x une lettre figurant dans R, et s'il existe un élément X d'un univers $\mathfrak{U}$ tel que $(X|x)R$ soit vrai alors l'objet $\tau_x(R(x))$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

§ I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES CATÉGORIES

1. Type de diagramme

1.1 Définition

Un *type de diagramme* D est la donnée d'un quadruple $D = (\mathrm{Fl}, \mathrm{Ob}, s, b)$ où :

§ II. — CATÉGORIE ABÉLIENNE

1. Catégorie additive

On peut donner deux versions de la définition d'une catégorie additive, l'une consiste à *se donner* sur les ensembles $\mathrm{Hom}(X, Y)$ une structure de groupe abélien, cette structure supplémentaire étant soumise à certaines conditions ; l'autre consiste à construire canoniquement une loi de groupe sur tout $\mathrm{Hom}(X, Y)$ en termes *d'axiomes* convenables sur la catégorie C.

1.1 Version 1

Une catégorie additive est une catégorie

§ III. — FONCTEURS REPRÉSENTABLES

1. Généralités

1.1 Définition

Soit $\mathfrak{U}$ un univers, C une catégorie

QUELQUES OUVRAGES DE RÉFÉRENCES

[1] ECKMANN - HILTON — *Group-like structure in general categories*. I. Math. Ann. **145** (1962) 227-255 ; II. Math. Ann. **151** (1963), 150-186 ; III. Math. Ann. **150** (1963) 165-187.