L. Illusie
1 r. Douanier Rousseau
Paris

Marina, les 2-4 déc. 1969

Cher Illusie,

Le travail avance, mais avec une lenteur ridicule. J'en suis encore aux préliminaires sur les groupes de Barsotti-Tate sur une base quelconque - il n'est pas encore question de mettre des puiss ces divisées dans le coup ! La raison de cette lenteur réside en partie dans le manque de fondements divers. Les sorites prélimina sur les groupes de BT (par Tate, Raynaud) étaient faits en se plaça dans le cadre des anneaux de base proartiniens, à coups de référenc à Gabriel SGA 3 VII_B . Cette méthode ne marche plus du tout sur de bases quelconques. A chaque fois que j'ai voulu alors démontrer quelque chose sur un groupe de BT $G = \varinjlim_n G(n)$ $(G(n) = \mathrm{Ker}\ p^n.\mathrm{id}_G$ j'ai été obligé de démontrer des choses plus précises sur les G(n) séparément. En un sens c'est tant mieux, car on comprend finalemen mieux ~~que~~ ce qui se passe; mais il m'a fallu du temps avant d'en p dre mon parti ! De plus, à certains moments, je suis obligé d'util une théorie des déformations pour des schémas en groupes plats mais non lisses, qui doit certainement être correcte, et qui devrait sa doute figurer dans ta thèse, mais que tu n'as pas dû écrire encore sans doute. Je vais donc commencer par te soumettre ce que tu devr bien prouver.

1. <u>Théorie des déformations des schémas en groupes plats localeme de présentation finie.</u>

Si G est un tel groupe sur une base S, le complexe cotangent relatif $L_\bullet^{G/S}$ est parfait et d'amplitude parfaite contenue dans $[-1,0]$ (G étant une intersection complète relative sur S), et il e isomorphe à l'image inverse d'un complexe canonique sur S ,

$$\mathcal{X}_\bullet^{G/S} \in D_{\mathrm{parf}}(S) \quad ,$$

qui est l'image inverse du complexe $L_\bullet^{G/S}$ par la section unité. l'ont observé Mazur et Robert, une suite exacte

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$$

de groupes donne lieu à un triangle exact

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X}_\bullet^{G'} \arrow[dl, "1"'] & \\ \mathcal{X}_\bullet^{G''} \arrow[rr] & & \mathcal{X}_\bullet^{G} \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad ,$$

d'où une suite exacte à six termes que je me dispense d'écrire. (évidemment $\mathcal{X}_\bullet^G$ dépend de façon contravariante de G).

Dans le cas général, il faudrait sans doute considérer plut $\mathcal{X}_\bullet^G$ comme un complexe dans $D_{\mathrm{parf}}(B_G)$ (B_G le topos classifiant i.e. un complexe de Modules à opérations de G. Pour la suite, je téresserai uniquement au cas G commutatif, où il faut considérer opérations en question comme triviales, i.e. il n'est plus la pe d'en parler. Je te recommande néanmoins d'étudier également le non commutatif, bien que je n'en connaisse pas d'application po moment. Note d'ailleurs que même le cas lisse (commutatif ou no intéressant et apparemment pas trivial, cf. ma lettre à Giraud a un an.

Supposons maintenant comme d'habitude que S soit un v ge infinitésimal du premier ordre du sous-schéma S_0 (je me disp d'introduire encore les deux sempiternels idéaux $J \subset K$, $JK=0$ .. défini par l'Idéal J. Soient G,H deux schémas en groupes plats localement de présentation finie sur S et commutatifs (je n'en dérerai pas d'autres, pour simplifier). Soit

$$u_0 : G_0 \longrightarrow H_0$$

un homomorphisme des groupes restreints à S_0 , on se propose de prolonger en un homomorphisme de groupes

$$u : G \longrightarrow H \quad .$$

L'indétermination à ce Pb est, comme il est bien connu, dans

$$(1.1) \qquad \mathrm{Hom}(G_0, \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\omega}_{H_0}, \underline{J})) \simeq \mathrm{Ext}^0(G_0, \check{\ell}^{H_0} \overset{L}{\otimes} J) ,$$

où on pose comme d'habitude

$$\check{\ell}_{\bullet} = R\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S}(\ell, \underline{O}_S) \quad .$$

Il faut d'autre part définir une obstruction

$$(1.2) \qquad \delta(u_0) \in \mathrm{Ext}^1(G_0, \check{\ell}_{\bullet}^{H_0} \overset{L}{\otimes} J),$$

dont l'annulation soit nécessaire et suffisante pour l'existence d'

prolongement u. Cette obstruction doit avoir les propriétés de transitivité habituelles pour un composé d'homomorphismes.

Partons maintenant d'un G_0 sur S_0, et étudions toutes les façon de le prolonger en un G sur S. Si on a deux tels prolongements, on peut grâce à ce qui précède définir leur "différence" comme un élém du Ext^1 de (1.2) (où on fait $H_0 = G_0$). On doit prouver alors que l'on obtient de cette façon sur l'ensemble des solutions du problème une structure de pseudo-torseur sous le Ext^1 .

Enfin, il faut définir une classe canonique

$$(1.3) \qquad c(G_0) \in \mathrm{Ext}^2(G_0, \check{\ell}_{\bullet}^{G_0} \overset{L}{\otimes} J) \quad ,$$

ne dépendant que du Groupe G_0 sur S_0 et de l'extension infinitésim S de S_0 (donc, finalement, d'un homomorphisme $L_{\bullet}^{S_0/\underline{Z}} \longrightarrow J$ de degré 1 dans $D(S_0)$), dont l'annulation soit nécessaire et suffisante pour qu'il existe un G prolongeant G_0 . Les situations analogues que tu sais suggèrent que ces obstructions, pour des S variables, se dédui sent toutes d'un même morphisme canonique (ne dépendant plus que du Groupe G_0 sur S_0)

$$(1.4) \qquad G_o \overset{L}{\otimes}_{\underline{Z}} \ell_\bullet^{G_o} \longrightarrow L_\bullet^{S/\underline{Z}} \quad \text{i.e.} \quad G_o \longrightarrow R\underline{Hom}(\ell_\bullet^{G_o}, L_\bullet^{S_o/\underline{Z}})$$

qui soit un morphisme de degré 1 dans $D(S_o)$ resp. dans $D(S_o,\underline{Z})$. Cet homomorphisme serait sans doute une sorte de dérivée logarithmic généralisée. Peut-être est-elle déjà dans tes papiers ?

La dérivée log. est de degré 0 ! $g \mapsto \frac{g'(s)}{g(s)} ds$

En fait, tout ceci est encore un peu trop particulier, comme de juste. J'ai en effet besoin d'une théorie des déformations pour des groupes annulés par un entier n fixé (savoir, des groupes tels que G(n), où G est un BT (qui est annulé par p^n) ! Tout ce qui précède doit rester alors valable, à condition que n annule $\underline{O}_S$ et qu'on remplace les $Ext^i_{\underline{Z}}$ par des $Ext^i_{\underline{Z}/n\underline{Z}}$. En fait, la condition que n annule $\underline{O}_S$, ass naturelle dans le contexte concret où j'ai à travailler, l'est beaucoup moins ici. Pour bien faire, il faudrait une théorie commune au cas de schémas de $\underline{Z}$-modules et de schémas de $\underline{Z}/n\underline{Z}$-modules, en se fixant un anneau R de "multiplic ation complexe", et en étudiant la question des déformations de schémas en groupes (et d'homomorphismes de tels) sur lesquels R opère. Alors R opère également sur $\ell_\bullet^G$, et il faudrait alors définir, plus précisément, $\ell_\bullet^G$ comme un objet

$$(1.5) \qquad \ell_\bullet^G \in \operatorname{Ob} D(S, R\otimes_{\underline{Z}}\underline{O}_S) .$$

La définition serait sans doute analogue à celle de $\ell_\bullet^G$ comme objet de $D(B_G)$ dans le cas non commutatif, qui correspondrait à l'opératio de G (jouant le rôle de R) sur lui-même par automorphismes intérieur et on s'attend à une formulation commune (en termes de groupes à opérateurs ± quelconques). De même $\check{\ell}_\bullet^G$ serait regardé comme un complexe de $R\otimes_{\underline{Z}}\underline{O}_S$-Modules (mais le $^\vee$ se rapportant toujours à la structure de Complexe de $\underline{O}_S$-Modules sous-jacente !), ce qui donnerai un sens aux $Ext^i_R(G_o, \check{\ell}_\bullet^{G_o} \overset{L}{\otimes}_{\underline{O}_S} J)$, et ce seraient eux les groupes

qui devraient remplacer (pour $i=0,1,2$) les groupes Ext^1 envisagés pl
haut. Dans quelle mesure il faudra prendre pour R un anneau constant ou pourra-t-on le remplacer par un Anneau $\pm$ quelconque, je n'ai pas essayé d'y réfléchir.

2. Relations avec le calcul des Ext^1 par résolutions canoniques.

Pour simplifier je prends le cas $R=\underline{Z}$. Je ne doute pas qu'on puisse trouver également une résolution canonique dans la catégorie des $\underline{R}$-Modules ($\underline{R}$ Anneau quelconque) tronquée ~~auxxxxx~~ degré 3, par essentiellement les mêmes considérations qui m'ont fait trouver la résolution qu'il fallait dans le cas $R=\underline{Z}$; le cas du tronqué ~~auxxxx~~ degré 2 est d'ailleurs explicité dans mon exposé SGA 7 VII, quelque part e remarque.

Si M est un Groupe abélien sur un topos, je rappelle comment on définit sa résolution canonique tronquée:

$$(2.1)\quad L_{\bullet}(M):\qquad \begin{array}{ccccccccc} L_3(M) & \xrightarrow{d_3} & L_2(M) & \xrightarrow{d_2} & L_1(M) & \xrightarrow{d_1} & L_0(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \\ & & & & & & M & & \end{array}$$

dont les composantes sont, en degré i, des sommes directes finies de faisceaux de la forme $\underline{Z}[M^j]$, avec $j \leq i$:

$$(2.1)\begin{cases} L_0(M) = \underline{Z}[M] \\ L_1(M) = \underline{Z}[M\times M] \\ L_2(M) = \underline{Z}[M\times M\times M] + \underline{Z}[M\times M] \\ L_3(M) = \underline{Z}[M\times M\times M\times M] + \underline{Z}[M\times M\times M] + \underline{Z}[M\times M] + \underline{Z}[M]. \end{cases}$$

L'opérateur différentiel est donné par

$$\cancel{d(m,m') = m+m' - m - m'}$$

$$(2.3)\quad\begin{cases} l[x] = x \\ d_1[x,y] = -([x+y] - [x] - [y]) = [y] - [x+y] + [x] \\ d_2[x,y,z] = [y,z] - [x+y,z] + [x,y+z] - [x,y] \\ d_2[x,y] = [x,y] - [y,x] \\ d_3[x,y,z,t] = [y,z,t] - [x+y,z,t] + [x,y+z,t] - [x,y,z+t] + [x,y,z] \\ d_3[x,y,z] = [x,y,z] - [y,x,z] + [y,z,x] - ([x,y+z] - [x,y] - (x,z] \\ d_3[x,y] = (x,y] + [y,x] \\ d_3[x] = [x,x] \end{cases}$$

Je ne garantis pas à 100% les signes, n'ayant pas refait les calculs

L.(M) désigne un complexe quelconque prolongeant le complexe tronqué précédent. On aura donc, pour tout groupe abélien N ,

$$(2.4)\qquad \mathrm{Ext}^i(M,N) \simeq \mathrm{Ext}^i(L_\bullet(M),N) \quad \text{pour} \quad i \leqslant 2 \, ,$$

et d'autre part on a la suite spectrale habituelle

$$(2.5)\qquad \boxed{\mathrm{Ext}^\bullet(L_\bullet(M),N) \Leftarrow E_2^{p,q} = H^p(\, i \mapsto \mathrm{Ext}^q(L_i(M),N))} \, .$$

Enfin, les $\mathrm{Ext}^q(L_i(M),N)$ intervenant dans le terme initial s'explicite (pour $i \leqslant 3$) en termes de la cohomologie des spatiale des puissances cartésiennes M^i de M ($i \leqslant 4$) à coéfficients dans N, grâce à la formule générale

$$(2.6)\qquad \boxed{\mathrm{Ext}^q(\underline{Z}[X],\, N) \simeq H^q(X,N_X)} \, .$$

On obtient ainsi une façon très efficiente de "calculer" les Ext^i ($i \leqslant 2$).(Je ne doute pas que la résolution (2.1) peut se prolonger une résolution du même type, mais infinie, de sorte que l'on obtiendra un mode de calcul des Ext^i pour i quelconque.) Supposons par exemple qu'on travaille sur un schéma affine, ~~et~~ que N soit un Module quasi-cohérent S et M un schéma affine sur S? Alors la suite spectrale dégénère et fo rnit un calcul des Ext^i par <u>cochaines</u>, via

$$(2.7)\qquad \mathrm{Ext}^i(L_\bullet(M),N) \simeq H^i(\mathrm{Hom}(L_\bullet(M),N)) \, .$$

Sous les mêmes hypothèses, sauf S affine, on trouve de même un calcul faisceaux Ext^i, $i \leq 2$. On trouve qu'ils sont quasi-cohérents, et la suite spectrale (2.5) montre qu'il en est de même dès que M est un schéma cohérent sur S (i.e. quasi-compact quasi-séparé sur S).

Du point de vue de la théorie hypothètique du n°1, les considérations précédentes permettent de donner des arguments heuristiques très forts pour la validité des conjectures que j'ai avancées, - ce sont essentiellement les arguments qui me donnaient confiance dans ma lettre à Giraud. Pour le $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ resp. le $\mathrm{Ext}^2(M,N)$, on obtient en effet une filtration à deux resp. trois crans, à quotients parfaitement bien explicitables grâce à (2.5),(2.6) et (2.2). Or les quotients ~~en~~ en question semblent exactement ceux qui apparaissent dans les questions d'obstruction du n°1 quand on essaie de faire les prolongements demandés "par morceaux". Ainsi, dans la question du prolongement de u_o à u, une première obstruction est celle, bien connue, au prolongement de u_o comme morphisme de S-schémas sans plus, elle se trouve dans $\mathrm{Ext}^1(L^{H_o}_{\circ}/S_o,\ u_o^*(\underline{J}))$, ~~qui sont les~~ ~~Ext¹ de (1,2) comme un sous-groupe et il ne doit pas être difficile~~ ~~de prouver que l'additivité de u_o implique que ...~~ et en regardant de plus près, on doit constater que cette obstruction peut s'identifier comme un élément de $E_\infty^{0,1} \subset E_2^{0,1}$ de la suite spectrale (2.5) (mais où N devient un complexe $\check{L}^{H_o}_{\circ} \otimes \underline{J}$). Ensuite, un prolongement u non néc. additif étant trouvé, on cherche comment le corriger pour qu'il devienne additif, et l'obstruction se trouvera dans $E_2^{1,0} = E_\infty^{1,0}$. De même, dans la question de prolonger G_o en un Groupe plat G, une première obstruction bien connue est celle à trouver un schéma plat sans plus qui prolonge G_o, cette obstruction se trouve dans $\mathrm{Ext}^2(L^{G_o}_{\circ}/S_o, u_o^*(J))$, et doit s'interpréter comme étant dans $E_\infty^{2,0} \subset E_2^{2,0}$. Le schéma G étant ainsi choisi, on essaie de le corriger par un élément du $\mathrm{Ext}^1(L^{G_o}_{\circ}/S_o, u_o(J))$ pour pouvoir également prolonger la loi multiplicative de G_o en un morphisme sans plus $G\times G \to G$: cette obstruction doit s'interpréter comme un élément du Ext $E_{\infty}^{1,1} \simeq E_{2}^{1,1}$. Enfin, G,u étant trouvé, on essaie de corriger ~~successivement~~ simultanément G et u, pour satisfaire à la condition d'associativité et de commutativité, et on doit trouver maintenant une obstruction dans $E_{\infty}^{2,0} = E_2^{2,0}/\mathrm{Im}\, E_2^{0,1}$. Je n'ai pas vérifié en détail que toutes ces interprétations des groupes d'obstructions successives sont correctes, mais j'avais fait la vérification dans le temps dans le cas lisse, et je te conseille de le faire dans le cas présent, pour te familiariser avec la manipulation de la résolution canonique et de la suite spectrale associée. Je suis d'ailleurs convaincu que cette résolution canonique sera indispensable pour prouver les conjectures que j'ai énoncées au nº 1.

3. <u>Théorème de nullité pour</u> $\mathrm{Ext}^2(G,M)$, <u>pour</u> M <u>quasi-cohérent</u>.

C'est le suivant:

<u>Théorème</u> 3.1. Soient G un schéma en groupes commutatif plat localement de présentation finie sur S, M un ~~schéma~~ faisceau en groupes sur S (on travaille avec une topologie sur $(\mathrm{Sch})_{/S}$ intermédiaire entre fppf et fpqc, disons) dont la restriction au sous-site des schémas S' plats sur S soit isomorphe au faisceau défini par un Module quasi-cohérent convenable sur S. Alors ~~xxxx~~ dans chacun des deux cas (a), b)) suivants on a que

$$\underline{\mathrm{Ext}}^2(G,M) = 0$$

et $\underline{\mathrm{Ext}}^i(G,M)$ est quasi-cohérent pour $i \leqslant 2$, enfin

$$\mathrm{Ext}^2(G,M)=0$$

si on suppose de plus S affine.

a) S est artinien, la fibres géométriques du groupe G/G^0 sont des $\underline{Z}$-modules de type fini (cette dernière condition étant donc automatique si G est de présentation finie sur S).

...alement pour la topologie envisagée, G admet une suite de ... dont les quotients successifs sont chacun ~~tous~~ d'un des types

... groupe $\underline{Z}_S$.

... groupe de type multiplicatif.

... groupe additif $\mathbb{G}_a$.

... schéma abélien.

... schéma en groupes fini localement libre. Faux! $Ext^2(\alpha_2, \mathbb{G}_a) \neq 0$ (Breen)

... vais pas donner d'indication de la démonstration ici, qui est ... les notes ~~data~~ détaillées, que tu pourras consulter si tu le désires. Bien entendu, elle s'appuie de ... ...tielle sur la résolution canonique du nº2. Il n'est pas ... qu'on ait la nullité du $\underline{Ext}^2$ sans hypothèse supplémentai... ... a) ou b), même si G est étale quasi-fini et séparé sur S: ... prendre G de la forme $\underline{E}x\underline{H} \wedge [U]$, où U est un ouvert de ... de la forme $\underline{Z}/n\underline{Z}$, n annulant $\underline{O}_S$: alors le $\underline{Ext}^2$ est une ... $R^2 i_*(M)$ par $R^1 i_*(M)$! Il est possible cependant que ... de 3.1 restent valables dès que G est affine (donc la ... s'applique).

...dispose d'une théorie du type du nº1, 3.1 a des conséquen... pour la théorie des déformations de G (sous les hypothèses ... peut déformer G au dessus de tout voisinage infinitésimal ... soit lisse et que ... 3 soit affine ! ~~Xxx~~ J'ignore si cette conclusion est ... tout schéma en groupes commutatifs lisse sur une base affi... ...ne, les exemples donnés après 3.1 ne donnent évidemment pas ... à cela.

...suppose seulement G_0 plat ~~de~~ et localement de présentation ... ...ant à une des conditions a), b) de 3.1, alors la théorie

$$R\,\mathrm{Hom}^{!}(S/S_0\,;\,G,H) = R\,\mathrm{Hom}\big((0 \to G),(H_0 \to H)\big)$$

(calculé sur le $\mathrm{Top}(S_0 \xrightarrow{i} S)$), annelé par l'Anneau variant en question.

du n°1 montrerait seulement que l'obstruction à prolonger se trouve dans $\mathrm{Ext}^1(G_o, \underline{\mathrm{Ext}}^1(\chi^{G_o}, \underline{J}))$, puisque ~~Exx~~ $\mathrm{Ext}^2(G_o, \underline{\mathrm{Ext}}^o(\chi^{G_o}, \underline{J}))=0$ en vertu de 3.1. Sauf erreur, cette obstruction peut effectivement être non nulle, ~~car si mes souvenirs sont exacts, on montre que α_p ne se remonte pas en car. nulle.~~

4. Relations avec le tapis Mazur-Roberts.

Ceci est un retour ~~sur~~ à la situation du n°1 ; ~~il s'agit~~ il s'agit de choses dont apparemment on peut se passer pour les groupes de BT.

4.1. Soit d'abord

$$i: S_o \longrightarrow S$$

un morphisme de topos annelés. Si G et H sont des (complexes de) Modules sur S, on désigne par G_o , H_o leurs images inverses sur S_o (au sens des catégories dérivées, bien sûr; en fait, on va s'intéresser surtout au cas où S, S_o sont annelés par un même anneau constant, par exemple $\underline{Z}$). On définit alors le RHom relatif

(4.1.1) $$\mathrm{RHOM}(S/S_o;G,H) \in D(Ab)$$

donnant lieu à des Ext^i relatifs

(4.1.2) $$\mathrm{Ext}^i(S/S_o;G,H) \in Ab ,$$

par le triangle exact

(4.1.3)
$$\begin{tikzcd} & \mathrm{RHom}(G_o,H_o) \arrow[dl, "1"'] & \\ \mathrm{RHom}(S/S_o;G,H) \arrow[rr] & & \mathrm{RHom}(G,H) \arrow[ul] \end{tikzcd} ,$$

qui donne naissance à ~~des~~ une suite exacte longue de Ext^i sur S, sur S_o et ~~relatifs~~ sur S/S_o , que je me dispense d'écrire. Lors que G est l'Anneau structural de S (disons $\underline{Z}$) on trouve des invariants

(4.1.4) $$R\Gamma(S/S_o,H) \quad , \quad H^i(S/S_o,H) \quad ,$$

ne dépendant pas essentiellement de la structure de Module de H (mais seulement de sa structure de groupe, donnant lieu à une suite exacte analogue. On définit de même, si on y tient, $\underline{\mathrm{RHom}}(S/S_o;\ ,\ )$, $\mathrm{R}\underline{\Gamma}(S/S_o,\ )$ de la façon évidente, en particulier le deuxième est défi par le triangle exact

(4.1.5)
$$\begin{tikzcd} & Ri_*(H_o) \arrow[dl, "1"'] & \\ \mathrm{R}\underline{\Gamma}(S/S_o,H) \arrow[rr] & & H \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

On peut alors expliciter les invariants (4.1.1) en termes de $\mathrm{R}\underline{\Gamma}(S/S_o$

(4.1.6)
$$\underline{\mathrm{RHom}}(S/S_o;G,H) \simeq \underline{\mathrm{RHom}}(G,\mathrm{R}\underline{\Gamma}(S/S_o,H)) ,$$

donc

(4.1.7)
$$\mathrm{Ext}^1(S/S_o;G,H) \simeq \mathrm{Ext}^1(G,\mathrm{R}\underline{\Gamma}(S/S_o,H)) .$$

Le triangle exact (4.1.3) est déduit du triangle (4.1.5) en lui appliq le foncteur exact RHOM(G, -) , et de même pour la suite exacte longue correspondante.

La signification géométrique des $\mathrm{Ext}^i(S/S_o;G,H)$ en basses dimens ons ($i \leqslant 2$) est claire (supposant pour simplifier G,H de degré zéro):

(4.1.8)
- $i=0$: homomorphismes de G dans H qui deviennent nuls sur S_o ;
- $i=1$: classes d'isomorphie d'extensions de G par H munies d'une trivialisation sur S_o ;
- $i=2$: groupe où prennent leurs valeurs les obstructions à "descendre à S, comme extension de G par H, une extension donnée E de G_o par H_o ;

Lorsque G est l'Anneau structural de S, on trouve de même pour les $H^i(S/S_o,H)$ ($i \leqslant 2$) des interprétations en termes de sections nulles sur S_o, de torseurs trivialisés sur S_o, et de gerbes neutralisées sur S_o (pour faire plaisir à Giraud). Tout ceci montre donc que les invariant introduits sont bons.

Nous revenons maintenant au cas d'une immersion nilpotente d'ordr 1 comme au nô1, G étant un schéma en groupes commutatifs plat localement de présentation finie sur S. Je propose alors l'isomorphisme suivant (suggéré par le travail de Mazur-Roberts):

[illegible]

(4.1.9) $$R\underline{\Gamma}(S/S_0,G) \xleftarrow{\sim} i_*(\underbrace{\check{\ell}^{G_0} \overset{L}{\otimes} \underline{J}}_{L^\cdot}) = Ri_*(R\underline{Hom}_{O_{S_0}}(\ell^{G_0}, \underline{J})) \quad .$$

Pour ceci, je rappelle d'abord la suite exacte évidente "de Mazur-Roberts "

(4.1.10) $$0 \longrightarrow \underline{H}^0(L^\cdot) \longrightarrow G \longrightarrow i_*(G_0) \longrightarrow \underline{H}^1(L^\cdot)$$

provenant de la théorie générale d'obstructions au prolongement infinitésimal de sections. Dans certains cas (malheureusement trop restrictifs) Mazur-Roberts prouvent qu'on peut mettre un zéro à droite. Je ne crois pas trop déraisonnable d'espèrer qu'il en est toujours ainsi. D'autre part, je crois qu'il ne doit pas être difficile de définir une flèche canonique

NB $i_*(L^\cdot) = Ri_*(L^\cdot)$

(4.1.11) $$[G \longrightarrow i_*(G_0)] \longrightarrow i_* L^\cdot \ ,$$

telle que les flèches induites sur les $\underline{H}^0$ et $\underline{H}^1$ donnent naissance ~~xxx~~ à la suite exacte (4.1.10). Si $\ell^{G_0} = L_\cdot$ est représenté par un complexe explicite $\ldots L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0$, du general non-sense (plus ou moins explicité par Deligne dans SGA 4 XVIII) doit montrer que la donnée d'une flèche (4.1.11) revient à la donnée d'un ~~foncteur~~ homomorphisme de champs de Picard qui, à tout torseur sous G muni d'une trivialisation du torseur associé de Groupe G_0 (ou ce qui revient au même, d'une trivialisation de sa restriction à S_0) associe une extension de L_0 par J, une trivialisation de l'image inverse de celle-ci sur L_1 , cette trivialisation étant telle que son image inverse sur L_2 est la trivialisation évidente ... Or j'ai l'impression qu'un tel homomorphisme de champs doit pouvoir s'obtenir par pull-back à partir de la situation universelle , en utilisant le fait que pour tout torseur individuellement (sous G, trivialisé ~~par~~ sur S_0), l'obstruction à ~~la~~ remonter la trivialisation ~~doit~~ peut se décrire comme une extension de L_0 par J etc. Ce que je dis est bien vaseux, je suis néanmoins convaincu qu'un general non-sense convenable doit [...]ner (4.1.11).

Si ceci est correct, et si on peut mettre un zéro à droite dans (4.1.10), il en résulterait donc qu'on a même un <u>isomorphisme</u> (4.1.[...] On en conclurait en tous cas un <u>homomorphisme</u>(4.1.9), et ce dernier ~~est~~ induirait un isomorphisme pour les $\underline{H}^i$ pour $i \leqslant 1$. ~~Rxxxxq~~ Comme les $\underline{H}^i$ du [...]

$i \geqslant 2$ (resp. de $R\underline{\Gamma}(S/S_o, G)$) pour $i \leqslant 2$ sont nuls (resp. sont isomorphes aux $R^{i-1}i_*(G_o)$), on voit que le fait que (4.1.9) soit unn isomorphisme serai[t] alors équivalent aux relations

(4.1.11) $$R^i i_*(G_o) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 .$$

Je ne sais trop s'il y a lieu d'espèrer que ces relations (4.1.11) sont bien s[atis]faites. Du moins est-il facile de vérifier que l'on a

(4.1.12) $$R^1 i_*(G_o) = 0 \quad ,$$

utilisant le fait que tout torseur sous G_o est une intersection comp[lète] relative sur S_o , donc splittable, après extension étale surjective d[e] base, par un morphisme fini surjectif localement libre qui est également d'intersectio[n] complète, donc qui se remonte à S ... Donc sous réserve ~~deux~~(*) que le reste marche bien, on trouvera un homomorphisme (4.1.9) qui ~~est~~ ind[uit] un isomorphisme pour les $\underline{H}^i$ <u>pour i $\leqslant$ 2</u>, donc un isomorphisme pour [les] $\mathrm{Ext}^i($? , $)$ pour $i \leqslant 2$, ce qui est suffisant pour les application[s] géométriques qu'on a à envisager. Voici les applications en questio[n].

A) Soient ~~Parmi~~ ~~HxetxHxdeuxxschémasxenxgroupes~~ H/ comme précédemment sur S, soit H un Groupe commutatif quelconque sur S. On se donne une extensi[on] E_o de G_o par ~~xx~~ H_o , et on se propose d'étudier les prolongements p[os]sibles en une extension E de G par H. Les sorites cohomologiques no[us] disent que l'indétermination se trouve dans $\mathrm{Ext}^1(G_o, R\underline{\Gamma}(S/S_o, H))$, et l'obstruction à l'existence est dans $Ext^2(G, R\underline{\Gamma}(S/S_o, H))$. Moyennant l'isomorphisme (4.1.9) pour H_o, ces deux groupes s'interprètent comme $Ext^1(G_o, \ell_* L^\circ)$ et $Ext^2(G_o, \ell_* L^\circ)$, avec $L^\circ = \underline{\ell}^{H_o}_\circ \overset{L}{\otimes}_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J}$, les Ext^i étant calculés sur S_o.

B) Dans le cas particulier où $G = \underline{Z}_S$, on trouve la théorie des ~~obstructions~~ déformations de torseurs sous H, que je t'avais proposée après la lecture de Mazur-Roberts.

à intervertir avec A)!

C) Application à la définition de l'obstruction $\int(u_o)$ de 1.2. C'est clair, grâce à la suite exacte longue déduite de (4.1.5) en appliquant $Ext^i(G, -)$, et notant que l'homomorphisme

$$Ext^i(G,H) \to Ext^i(G_o,H_o)$$

s'identifie à l'homomorphisme obtenu en appliquant $Ext^i(G,-)$ à $H \to Ri_*(H_o)$. En fait, ici on n'a même pas besoin du zéro à droite dans (4.1.10) (on doit calculer un Ext^1, par un Ext^2), il suffit de savpir définir (4.1.11), ce qui fournira en effet un homomorphisme <u>injectif</u>

$$Ext^1(G, R\underline{\Gamma}(S/S_o,H)) \simeq Ext^1(G, [H \to i_*(H_o)]) \hookrightarrow Ext^1(G, i_*(L^\circ$$

(le conoyau étant précisément contenu dans Hom(G,Q), où Q est le conoyau de la dernière flèche de (4.1.10), - mais peu importe).

Bien entendu, ici encore, il faudrait pour bien faire introduire un anneau de multiplication complexe R. Pour traiter les extensions de groupes de BT, on aura par exemple besoin du cas $R = \underline{Z}/p^n\underline{Z}$!

À suivre: fascicule de résultats sur les groupes de BT et les groupes de BT tronqués (part "sortable"). Mais je vais déjà faire partir ces notes-ci, sans attendre d'avoir écrit le reste. Bien cordialement A Grothendieck

5. Propriétés cohomologiques des groupes de Barsotti-Tate tronqués.

5.1. S désigne un schéma. On munit $(Sch)_{/S}$ donc aussi $(Sch)_{/S}$ d'une topologie intermédiaire entre fppf et fppf, qui jouera un rôle de fig[...] rant pour disposer d'une bonne notion de faisceau. On désigne par p un nombre premier fixé une fois pour toutes. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\Lambda_n = \underline{Z}/p^n\underline{Z}$. Donc les Λ_n-Modules sur S sont les Groupes (a[...] liens) sur S annulés par p^n. Si G est un Groupe sur S, on posera gé[...] ralement ~~SixxG(n)xxnsixnnxxxxs~~

$$G(n) = \mathrm{Ker}\ p^n \mathrm{id}_G = {}_{p^n}G \quad .$$

C'est un Λ_n-Module. On écrira souvent G(n) au lieu de G pour indiquer qu'un Grou[...] est annulé par p^n i.e. est un Λ_n-Module.

Soit G(n) un Λ_n-Module, et soit $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Alors il revient au même que G(n) soit un Λ_n-Module plat, ou que l'on ait

(5.1.1) $$p^{n-i}G(n) = G(i)$$

(où on pose bien sûr $G(i) = \mathrm{Ker}\ p^i\ \mathrm{id}_{G(n)} = G(n)(i)$ ...). ~~xDonc~~ Dans ce cas les p^iM définissent une filtration décroissante dont le grad[...] associé est simplement $G(1)\otimes_{\Lambda_1} gr(\Lambda_n) = G(1)\otimes\underline{F}_p[t]/(t^n)$. Donc G(n) alors est représentable par un schéma en groupes fini localement libre sur S si et seulement si ~~Ixn~~ G(1) l'est, et alors tous les G(i) le sont. Inversement, si on part d'un Λ_n-Module G(n) qui est un schéma en gro[...] pes fini localement libre sur S, pour que G(n) soit plat i.e. pour qu'on ait (5.1.1), il faut et il suffit que l'homomorphisme

(5.1.2) $$p^{n-i}\mathrm{id}_{G(n)} : G(n) \longrightarrow G(i)$$

soit plat, et le critère habituel de platitude par fibres (NB on n'a besoin de savoir G(i) plat, seulement loc. de prés. finie, pour que c[...] critère marche) montre qu'il revient au même de dire que (5.1.2) soit un épimorphisme fibre par fibre, ou encore soit fidèlement plat. A n[...]

tenir donc que c'est une condition ~~géométrique~~ sur les fibres géométri-ques.

On appellera <u>groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon</u> n (p sous-entendu, sinon on dirait: p-groupe de BT tronqué ...) un G(n) qui est à la fois un Λ_n-Module plat et un schéma fini localement libre sur S. Par abus de langage, on dira parfois, ~~que~~ pour un tel groupe et un $n' \geq n$ que "G(n) provient d'un G(n') " si on peut trouver un groupe de BT tron-qué d'échelon n' G(n') tel que G(n) soit isomorphe à G(n')(n).

5.2. Soit G un Groupe sur S. On dit que G est p-<u>divisible</u> si $p.\mathrm{id}_G$ est un épimorphisme. Alors les G(n) sont des Λ_n-Modules plats, et $G(\infty) = \lim G(n)$ = sous-Groupe de p-torsion de G est également p-divisible. Si G est un groupe de p-torsion (i.e. $G = \varinjlim G(n)$) p-divisible, alors il revient au même, en vertu de 5.1, de dire que G(1) est un schéma fini localement libre sur S, ou que tous les G(n) le sont (ou seulement un G(n), avec $n \geq 1$). Un tel Groupe s'appelera un <u>groupe de Barsotti-Tate</u> sur S (ou p-groupe de BT sur S, si p n'est pa[s] sous-entendu). Les groupes de Barsotti-Tate sur S forment une catégo-rie équivalente à celle des systèmes inductifs de Groupes G(n), satis-faisant les conditions :

a) Le morphisme de transition $G(n) \to G(n')$ $(n' \geq n)$ induit un isomorphisme $G(n) \xrightarrow{\sim} G(n')(n)$.

b) G(n) est un Λ_n-Module plat pour tout n .

c) G(1) est un schéma fini localement libre sur S (ou encore: tous les G(n) sont des schémas finis localement libres sur S).

Les sorites 5.1 montrent d'ailleurs que cette notion, tout comme celle de groupe de BT tronqué, ne dépend pas essentiellement du choix [de] la topologie T.

Je passe sur les sorites: stabilités par chângement de base, extensions de groupes de BT est itoux, etc.

Les propriétés cohomologiques de base des groupes de BT tronqués $G(n)$ concernent d'une part la structure du complexe $\ell_{\circ}^{G(n)}$ et sa dépend ce de n, d'autre part le calcul des $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda_n}(G(n), -)$, où $-$ désigne un complexe de modules. Voici les faits principaux:

<u>Théorème</u> 5.3. Soit $N \geq 1$ un entier tel que $p^N 1_S = 0$. ~~Xiorxxx~~ Soit $G(n$ un groupe de BT tronqué d'échelon n sur S.

a) Pour tout couple d'entiers k,m tels que $k < p^m$, on a

(5.3.1) $$\mathrm{Inf}^k G \subset G(m+N)^{(-1)} ,$$

i.e. le k.ème voisinage infinitésimal $\mathrm{Inf}^k G$ de la section unité de G coincide avec le même voisinage dans $G(m+N)^{(-1)}$. En particulier on a $\mathrm{Inf}^1 G \subset G(N)$, donc si $N \leq n' \leq n$, l'homomorphisme

(5.3.2) $$\underline{\omega}_{G(n)} \longrightarrow \underline{\omega}_{G(n')}$$

est un isomorphisme.

Supposons $n \geq N+1$ dans la suite de l'énoncé.

b) Pour tout entier $k < p^{n-N+1}$, G est "lisse tronqué déchélon k le long de la section unité" , i.e. la structure de $\mathrm{Inf}^k G$ comme schém augmenté sur S est ~~exitxdim~~ la même que si G était lisse; donc $\underline{\omega}_{G(n)}$ est localement libre, et

$$\mathrm{Sym}^i(\underline{\omega}_{G(n)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^i(G(n),e)$$

est un isomorphisme pour $i \leq k$.

<u>Corollaire de</u> b): Si G est de BT sur S où p est loc. nilp. alors G est <u>formellement</u> lisse sur S, et $G = \varinjlim \mathrm{Inf}^k(G)$ est un groupe de Lie formel sur S.

c) Les Modules

(5.3.3) $$\underline{\omega}_{G(n)} = \underline{H}_0(\ell_{\circ}^{G(n)}) \quad \text{et} \quad \underline{n}_{G(n)} = \underline{H}_1(\ell_{\circ}^{G(n)})$$

sont localement libres de même rang. Si $n \geq n' \geq N$, alors l'inclusion

$$G(n') \longrightarrow G(n)$$

induit un isomorphisme

(5.3.4) $$\underline{\omega}_{G(n)} \xrightarrow{\sim} \underline{\omega}_{G(n')}$$

(pour mémoire, cf. a)) , et ~~isomorphisme nul~~ si $n' \leq n-N$, l'homomorphisme nul

(5.3.5) $$\underline{n}_{G(n)} \xrightarrow{0} \underline{n}_{G(n')} \quad .$$

La projection

(5.3.6) $$G(n) \longrightarrow G(n') \quad (\simeq G(n) \otimes_{\Lambda_n} \Lambda_{n'})$$

induit un isomorphisme

(5.3.7) $$\underline{n}_{G(n')} \xrightarrow{\sim} \underline{n}_{G(n)} \quad ,$$

et si $n' \leq n-N$, l'homomorphisme nul

(5.3.8) $$\underline{\omega}_{G(n')} \xrightarrow{0} \underline{\omega}_{G(n)} \quad .$$

d) Supposons $n \geq 2N$, ou $n \geq N$ et qu'il existe un $G(2N)$ dont provienne $G(n)$. Alors on a un isomorphisme canonique

(5.3.9) $$\underline{n}_{G(n)} \simeq \underline{\omega}_{G(n)} \quad .$$

Indications sur la démonstration. Une fois admis que $\underline{\omega}_{G(n)}$ est localement libre (énoncé dans b)), c) ~~et d)~~ deviennent évidents ~~sur~~ en utilisant la suite exacte à six temmes associée au triangle exact de Mazur-Roberts d'une extension de groupes. Pour en déduire d), on note que les deux termes de (5.3.9) ne changent pas si on remplace n par N, à isomorphismes canoniques près établis dans c), et on prend alors l'isomorphisme cobord associé à l'extension $G(2N)$ de $G(N)$ par $G(N)$. D'autre part, les résultats de c) impliquent que si n' est ~~entre N et~~ tel que $N \leq n' \leq n-N$, alors l'homomorphisme

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{L}_{\cdot}^{G(n')},\underline{J}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}_{\cdot}^{G(n)},\underline{J})$$

déduit de l'inclusion $G(n') \hookrightarrow G(n)$ est nul, pour tout $\underline{J}$ quasi-cohérent sur S, ce qui, géométriquement, implique qu'une obstruction à prolong à un voisinage infinitésimal du premier ordre un S-morphisme donné $X \longrightarrow G(n')$, avec X affine, devient nul si on regarde X comme morphisme à valeurs dans $G(n)$. On utilise ceci pour se tirer par les lacets de soulier et prouver a) et b) par récurrence sur N ... C'est un peu alambiqué dans mes notes, et je ne me sens guère l'envie de revenir dessus maintenant !

On retiendra entre autres que si $n \geq 2N$, il n'y a plus guère qu'un seul Module sur $\underline{O}_S$ vraiment fondamental associé à la donnée de $G(n)$ (et des $G(n')$ correspondants) : c'est $\underline{\omega}_{G(n)}$ (ou, au choix, son dual $\mathcal{V} = \underline{\mathrm{Lie}}(G(n))$, tous les autres Modules canoniques qui s'introduisent en pratique étant canoniquement isomorphes à celui-là !

<u>Théorème</u> 5.4. Soit $G(n)$ un groupe de BT tronqué d'échelon n. On suppose, lorsque n=1, que $G(n)=G(1)$ provient d'un Groupe de BT tronqué d'échelon 2. On suppose S affine, Soit M un Groupe sur S (en pratique, ce sera un $\underline{O}_S$-Module) annulé par p^n , et tel que la restriction de M aux arguments plats soit isomorphe au Groupe défini par un Module quasi-cohérent sur S. Sous ces conditions on a

(5.4.1) $$\mathrm{Ext}^i_{\Lambda_n}(G(n),M) = 0 \quad \text{pour } i=1,2 .$$

Compte tenu de la suite exacte infinite

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\Lambda_n}(G,M) \to \mathrm{Ext}^1_{\underline{Z}}(G,M) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda_n}(G,M) \to \mathrm{Ext}^2_{\Lambda_n}(G,M) \to \mathrm{Ext}^2_{\underline{Z}}(G,M) \to \cdots$$

et du fait que le dernier terme écrit est nul par 3.1 b) 5º, notre assertion équivaut aussi à la suivante:

<u>Corollaire</u> 5.5. Soient $G(n)$, M comme dans 5.4. Alors l'homomorphisme canonique (associant à une classe d'une extension E de $G(n)$ par M l'homomorphisme $G(n) \to M$ déduit par passage au quotient de $p^n \mathrm{id}_E$)

(5.5.1) $$\mathrm{Ext}^1_{\underline{Z}}(G(n),M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G(n),M)$$

est un isomorphisme.

La démonstration n'est pas difficile, en utilisant une deuxième fois 3.1 b) 5º: La réduction au cas où S est le spectre d'un corps et $M=\mathbb{G}_a$ se fait e utilisant les résolutions canoniques du nº2, et la formule d'adjoncti nous ramène (puisque $G(n)\overset{L}{\otimes}_{\Lambda_n}\Lambda_1 = G(1)$) au cas n=1. Alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow G(1) \xrightarrow{i} G(2) \xrightarrow{q} G(1) \longrightarrow 0$$

nous montre que

$$i^*: \mathrm{Ext}^1(G(2),M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(G(1),M)$$

est surjectif (car $\mathrm{Ext}^2(G(1),M)=0$; NB tous les Ext^i seront sur $\underline{Z}$ sauf mention du contraire), or son composé avec

$$q^*: \mathrm{Ext}^1(G(1),M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(G(2),M)$$

est égal à $(iq)^* = (p.\mathrm{id}_{G(2)})^* = 0$ (car p annule M), d'où il résulte que q^* lui-même est nul, donc par la suite exacte des Ext que

(*) $$\mathrm{Hom}(G(1),M) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1(G(1),M)$$

est surjectif; la même suite exacte montre que cet homomorphisme est injectif, puisque $\mathrm{Hom}(G(1),M) \to \mathrm{Hom}(G(2),M)$ est un isomorphisme. Donc (*) est un isomorphisme, et pour prouver que (5.5.1) est un isomorphism on est ramené à prouver que le composé de (*) avec (5.5.1) l'est. Or on constate que c'est l'identité, cqfd.

Pour compléter (5.4.1), il faut expliciter dans certains cas jol la valeur du Ext^0 . Pour ceci on introduit le dual de Cartier $G(n)^*$ de $G(n)$, et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$. Avec cette notation, on a

<u>Corollaire</u> 5.6. $G(n)$,M comme dans 5.4, sauf qu'on ne suppose pas néces sairement M annulé par p^n ni qu'il existe un G(2). On a un isomorphisme canonique

(5.6.1) $$\mathrm{Hom}(G(n),M) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathfrak{g}}_{G(n)^*}, M) ,$$

et si ~~S'il existe un entier n tel que~~ $p^n 1_S = 0$, les deux membres sont

isomorphes à $\Gamma(S, \mathcal{G}^{*} \otimes_{\underline{O}_S} M')$ (où M' est le Module dont il est quest[ion]
dans 5.4).

On est en effet ramené au cas où M lui-même est un Module quasi-cohérent. Alors (5.6.1) s'obtient en se rappelant que $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{G}_{mS}) \simeq \underline{O}_S$ ca[no]niquement, donc, posant $D = \mathrm{Spec}(\underline{O}_S + M)$ (schéma de nombres duaux) on trouve que le premier membre est isomorphe à

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(G(n)_D, \underline{G}_{mD}) \to \mathrm{Hom}(G(n), \underline{G}_{mS}))$$

par SGA 3 III, donc par définition de $G(n)^{*}$ à $\mathrm{Ker}(G(n)^{*}(D) \to G(n)^{*}(S))$ qui n'est autre que le deuxième membre de 5.6. La dernière assertion provient de 5.3 b).

<u>Corollaire</u> 5.7. Soient S un schéma affine, M un ~~Groupe abélien~~ Module sur S dont la restriction aux arguments plats soit isomorphe au ~~Groupe~~ Module défini par un Module quasi-cohérent, $n' \geq n \geq 0$ des entiers ≥ 0, G(n') et H(n) des groupes de BT tronqués ~~à~~ d'échelon n', Composant l'homomorphisme de changement de base $\Lambda_{n'} \to \Lambda_n$ avec l'homomorphisme ~~déduit de~~ déduit de la projection $H(n') \to H(n)$, on trouve un homomorphisme

$$(5.7.1) \qquad \mathrm{Ext}^i_{\Lambda_{n'}}(G(n'), \check{\chi}^{H(n')}_{\bullet} \overset{L}{\otimes}_{\underline{O}_S} M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\Lambda_n}(G(n), \check{\chi}^{H(n)}_{\bullet} \overset{L}{\otimes}_{\underline{O}_S} M) .$$

Cet homomorphisme est <u>surjectif</u> pour $i=1$.

On montre en effet que l'homomorphisme (5.7.1) peut s'interpréter comme obtenu en appliquant $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda_{n'}}(G(n'),-)$ à l'homomorphisme

$$(*) \qquad \check{\chi}^{H(n')}_{\bullet} \overset{L}{\otimes}_{\underline{O}_S} M \longrightarrow \check{\chi}^{H(n)}_{\bullet} \overset{L}{\otimes}_{\underline{O}_S} M \qquad \text{dans } D(\Lambda_{n'S})$$

déduit de $H(n') \to H(n)$, et on insère cette flèche dans le triangle exact de Mazur-Roberts déduit de la structure d'extension

$$0 \to H(n'-n) \to H(n') \to H(n) \to 0 .$$

Alors la conclusion ~~(5.7)~~ de 5.7 résulte de la suite exacte des E[xt] correspondante, et de

$$\mathrm{Ext}^2_{\Lambda_{n'}}(G(n'), \check{\chi}.H(n'-n) \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_S}{\otimes}} M) = 0 ,$$

qui provient elle-même des deux relations (5.4.1) (appliquées respectivement au $\underline{H}_0$ et au $\underline{H}_1$ du complexe de coéfficients). En fait, (5.4.1) ~~mmsxdonnmxest~~ est essentiellement équivalent à:

Corollaire 5.8. Hypothèses sur $S, n, G(n)$ comme dans 5.4. Soit $L^\bullet$ un complexe de Λ_n-Modules tel que $\underline{H}^i_x(L^\bullet)=0$ pour $i \neq 0,1$ et que $\underline{H}^i(L^\bullet)$ satisfasse, pour $i=0,1$, aux conditions énoncées sur M dans 5.4. Alors

(5.8.1) $$\mathrm{Ext}^2_{\Lambda_n}(G(n), L^\bullet) = 0 \quad .$$

6. Applications aux déformations des groupes de Barsotti-Tate.

Il suffit de conjuguer les résultats cohomologiques du nº5 avec la théorie conjecturale d'obstructions du nº2, pour ~~énoncer~~ obtenir les résultats suivants (qui pour l'instant sont donc également conjecturaux).

Dans toute la suite, on se donne une nilimmersion

$$i : S_0 \longrightarrow S$$

d'Idéal $\underline{J}$ (je ne suppose pas nécessairement $\underline{J}$ localement nilpotent).

Si on a un Groupe G, H sur S, G_0, H_0 désigne la restriction à S_0 ...

6.1. "Pour mémoire" d'abord une trivialité: supposons i d'ordre k et $p^N.1_{S_0} = 0$ ou plus gén.t $p^N \psi_J(\mathcal{G}) = 0$, alors tout homomorphisme de groupes de BT tronqués $u(n)$ $G(n) \longrightarrow H(n)$, tel que $u(n)_0 = 0$, induit zéro sur $G(n-kN)$ i.e. on a $u(n-kN)$ est nul. Par suite, si $u : G \to H$ est un homomorphisme de groupes de BT tel que $u_0=0$, alors $u=0$, i.e. un homomorphisme $u : G \to H$ est connu quandon connait u_0 .

(NB même en car. p, ce résultat ne s'étend pas à une nilimmersion qui ne serait pas localement nilpotente. Dans le cas d'une immersion localement nilpotente, ~~je ne sais si~~ le résultat précédent ne reste pas, valable sans supposer p localement nilpotent sur S_o, exemple $S = D_M(S_o)$, $S_o = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p$, $M = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $G = (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_S$: on a $\mathrm{Hom}_{S_o\text{-}gr}(G_o, M^{\circ}) \neq 0$!

6.2. Gardons les ~~notations~~ hypothèses et notations k,N de 6.1. Supposons maintenant $n \geq N$, et dans le cas n=1, supposons que G(1) pro-vienne d'un G(2). On suppose maintenant S affine. On se donne un homomorphisme

$$u_o(n): G_o(n) \longrightarrow H_o(n) \ ,$$

qu'on se propose de prolonger en $u(n): G(n) \longrightarrow H(n)$. Alors:

a) Si k=1, et $n \geq 2N$ ou $n < 2N$ mais $G_o(n)$ provient d'un $G_o(2N)$, on a une obstruction à l'existence de u(n) qui est un élément

$$\delta(u_o(n)) \in \underline{\omega}^*_o \otimes \underline{h}_o \otimes \underline{J}$$

(où $\underline{\omega}^*_o = \underline{\mathrm{Lie}}\ G_o(n)^*$, $\underline{h}_o = \underline{\mathrm{Lie}}\ H_o(n)$; ce sont des Modules localem libres sur l'anneau A de S).

b) Soit n' tel que $kN \leq n' \leq n$. Si $u_o(n')$ se prolonge en un u(n') , alors $u_o(n)$ se prolonge en un u(n) (mais il ne sera pas vrai en général qu'on pourra choisir u(n) prolongenant en même temps le u(n') déjà choisi !).

N.B. b) résulte aussitôt de a) par récurrence sur k ...

De ceci, on déduit les mêmes énoncés en remplaçant $G_o(n), H_o(n)$ pa des groupes de BT G,H sur S, et partant d'un $u_o: G_o \longrightarrow H_o$ qu'on se prop se de prolonger en $u: G \longrightarrow H$. On définira ici l'algèbre de Lie d'un groupe de BT sur un schéma où p est nilpotent par

$$\underline{\mathrm{Lie}}\ G = \underline{\mathrm{Lie}}\ G(n) \quad \text{pour } n \text{ grand} \ ,$$

cela a un sens grâce à 5.3 a) (et on définirait encore $\underline{\mathrm{Lie}}$ G par recollement, dès que p est seulement localement nilpotent). Alors $\underline{\omega}^*_o$ désignera encore $\underline{\mathrm{Lie}}\ G^*_o$, où G^*_o est le groupe de BT dual de G_o , défini essentiellement par $G^*_o(n) = $ ~~dual~~ $G_o(n)^*$ (dual de Cartier).

6.3. On ~~garde~~ part maintenant d'un groupe de BT tronqué $G_0(n)$ sur S affine. On ne suppose pas nécessairement ~~S~~ p nilpotent sur S, mais si n=1, on suppose que $G_0(1)$ provient d'un $G_0(2)$. On a alors ce qui suit:

a) Il existe un groupe de BT tronqué d'échelon n G(n) sur S qui prolonge $G_0(n)$.

b) Soit $E(G_0(n),S)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels prolongement. Soit $n' \leq n$, et considérons l'application canonique

(6.3.1) $$E(G_0(n),S) \rightarrow E(G_0(n'),S)$$

induite par $G(n) \mapsto G(n')$ $(=G(n^{x})(n'))$. L'application précédente est surjective.

c) Soient k,N comme dans 6.1. Alors, si $n' \geq Nk$, l'application (6.3.1) est bijective. et $n \geq 2N$ ou $N \leq n < 2N$ et $G_0(n)$ provient de $G_0(2N)$.

d) Supposons de plus k=1, Alors $E(G_0(n),S)$ est munin de façon naturelle d'une structure de tenseur sous le groupe $\omega^{*}_{0} \otimes \omega_{0} \otimes J$.

(Pour a) et b), le passage à la limite habituel nous ramène au cas A noethérien, donc J nilpotent, soit $J^{k+1}=0$. ~~Pour prouver a) et b)~~, on se ramène alors par récurrence au cas k=1, et on applique 5.8 et 5.7 respectivement (où on n'a pas fait d'hypothèse de nilpotence de p !). D'autre part c) résulte de 6.2 b), et d) des calculs du nº5 ...)

Un passage à la limite sur n essentiellement trivial nous donne maintenant le résultat analogue pour les prolongements d'un G_0 :

Théorème 6.4. Soit en $S_0 \longrightarrow S$ une nilimmersion, avec S affine, G_0 un groupe de BT sur S_0.

a) Il existe un groupe de BT G sur S prolongeant G_0.

b) L'application

(6.4.1) $$E(G_0,S) \longrightarrow E(G_0(n),S)$$

est surjective.

c) Si k,N sont comme dans 6.1, alors pour $n \geq kN$, l'application précédente (6.4.1) est bijective (mais attention, on ne prétend pas que cela corresponde à une ~~isomorphi~~ équivalence de catégories !).

d) Si de plus k=1, l'ensemble $E(G_o,S)$ est de façon naturelle un torseur sous $\mathcal{V}_o^{*}\otimes \mathcal{V}_o \otimes \mathcal{J}$.

<u>Remarques</u> 6.5. Soient W un anneau local noethérien complet de corps résiduel k de car. p , G_o un groupe de BT sur k. Alors le foncteur des déformations de G_o sur des W-algèbres locales artiniennes est pro-représentable. Il résulte de 6.4 que l'algèbre B sur W qui le proreprésente est une algèbre de séries formelles sur W à dd^{*} indéterminées, où d et d^{*} sont respectivement les dimensions du groupe formel $\overline{G}_o$ et $\overline{G^{*}_o}$. De plus, si $\underline{G}$ est la déformation universelle de G_o au dessus de B , il résulte de 6.4 que la déformation $\underline{G}(n)$ de $G_o(n)$ sur B est <u>verselle</u> au sens de Schlessinger, pour tout $n \geq 1$. (Mais bien sûr le foncteur des déformations de $G_o(n)$ n'est pas en général représentable).

6.6. On obtient un énoncé analogue à 6.3 concernant le problème de prolongement de S_o à S d'une extension de groupes de BT tronqués $E_o(n)$ d'un $G_o(n)$ par un $H_o(n)$, quand on se donne déjà $G(n)$ et $H(n)$ sur S. Je me borne à énoncer le résultat correspondant pour des groupes de Barsotti-Tate pas tronqués, qui s'en déduit comme 6.4 de 6.3: On se donne donc des groupes de BT G et H sur S, et une extension E_o de G_o par H_o. On suppose toujours S affine. Alors

a) E_o se prolonge en une extension E de G par H.

b) L'application

(6.6.1) $$E(E_o,S) \longrightarrow E(E_o(n),S)$$

qu'on dévine est surjective pour tout n.

c) Si k,N sont comme dans 6.1, alors (6.6.1) est bijective pour $n \geq kN$.

d) Si de plus k=1, l'ensemble $E(E_o,S)$ est un torseur sous $\mathcal{V}^{*}_{o}\otimes\mathcal{J}_{o}\otimes J$.

Remarquons que dans tous les cas, $E(E_o,S)$ est muni d'une structure de tenseur sous le groupe commutatif $\mathrm{Ext}^1(S/S_o,G,H)$, et d) ne fait qu'expliciter ce groupe dans le cas particulier envisagé.

<u>Remarques</u> 6.7. On peut encore traduire 6.6 en termes de variétés de modules formelles comme dans 6.5. Une chose nouvelle assez remarquable, c'est que lorsqu'on part d'une extension triviale de G_o par H_o, le schéma modulaire obtenu, comme il ~~classifie~~ pro-représnnte un foncteur en groupes, est un <u>groupe de Lie formel sur</u> W. (Dans le cas d'une extension quelconque E^o, le schéma modulaire formel correspondant est un torseur sous le groupe de Lie formel précédent.) Lorsque par exemple $G_o = \underline{Q}_p/\underline{Z}_p$, il est bimn connu que ce groupe formel n'est autre que le groupe formel $\overline{H}$ associé à H (NB ici ~~déjà~~ on a dû partir de groupes de BT G et H <u>sur</u> W , pas sur k). En particulier, c'est un groupe de BT (du moins sur W artinien ...). Je suspecte qu'il en est ainsi dans le cas général. Le groupe formel obtenu se comporte à certains égards comme un Hom(G,H) interne dans la catégorie des groupes de BT, ou comme un produit tensoriel de G^* par H. Je pense qu'il ne devrait pas être difficile, s'inspirant de ce qui précède, de définir un tel groupe formel H(G,H) pour deux groupes de BT G,H sur une base quelconque où p serait nilpotent, et qu'il aura peut-être à jouer un rôle dans le développement de la théorie des groupes de BT.