WORKS

Collection

par

Alexandre GROTHENDIECK

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

`https://agrothendieck.github.io/`

CONTENTS

SUR LA COMPLÉTION DU DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL LOCALEMENT CONVEXE

Note de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Élie Cartan

Séance du 6 février 1950

C. R. Acad. Sc. Paris 230, 605-606 (1950)

QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS À LA DUALITÉ DANS LES ESPACES (F)

Note de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud Denjoy

Séance du 30 octobre 1950

C. R. Acad. Sci. Paris 230, 1561-1563 (1950)

CRITÈRES GÉNÉRAUX DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXES. PATHOLOGIES DES ESPACES (LF)

Note de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud Denjoy

Séance du 30 octobre 1950

C. R. Acad. Sci. Paris 231, 940-941 (1950)

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

C. R. Acad. Sci. Paris 233, 839-841 (1951)

SUR UNE NOTION DE PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES, ET UNE CLASSE REMARQUABLE D'ESPACES VECTORIELS LIÉE À CETTE NOTION

C. R. Acad. Sci. Paris 233, 1556-1558 (1951)

CRITÈRES DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES FONCTIONNELS GÉNÉRAUX

Amer. J. Math. 74, 168-186 (1952)

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS ESSENTIELS DANS LA THÉORIE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET DES ESPACES NUCLÉAIRES

Ann. Inst. Fourier 4, 73-112 (1952)

SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES FAIBLEMENT COMPACTES D'ESPACES DU TYPE $C(K)$

Canadian J. Math. 5, 129-173 (1953)

SUR LES ESPACES DE SOLUTIONS D'UNE CLASSE GÉNÉRALE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

J. Analyse Math. 2, 243-280 (1953)

SUR CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HOLOMORPHES I

J. reine angew. Math. 192, 35-64 (1953)

SUR CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HOLOMORPHES II

J. reine angew. Math. 192, 77-95 (1953)

QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Julio 1954, 173-177. Centro de Cooperación Científica de la UNESCO para América Latina, Montevideo, Uruguay, 1954

SUR CERTAINS SOUS-ESPACES VECTORIELS DE L^p

Canadian J. Math. 6, 158-160 (1954)

RÉSULTATS NOUVEAUX DANS LA THÉORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES I

C. R. Acad. Sci. Paris 239, 577-579 (1954)

RÉSULTATS NOUVEAUX DANS LA THÉORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES II

C. R. Acad. Sci. Paris 239, 607-609 (1954)

SUR LES ESPACES (F) ET (DF)

Summa Brazil. Math. 3, 57-123 (1954)

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidad de Sao Paulo, 1954[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/gpablo54scan.pdf

TOPOLOGICAL VECTOR SPACES

Translated by O. Chaljub. Notes on Math. and its App. Gordon and Breach Science Publishers, New-York-London-Paris, 1973[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/gpablo54en.pdf

ERRATUM AU MÉMOIRE : PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

Ann. Inst. Fourier 6, 117-120 (1955-56)

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

Mem. Amer. Math. Soc. n° 16, 1955

UNE CARACTÉRISATION VECTORIELLE-MÉTRIQUE DES ESPACES L_1

Canad. J. Math. *7*, 552-561 (1955)[1]

---

[1] `https://agrothendieck.github.io/divers/carvectscan.pdf`

RÉARRANGEMENTS DE FONCTIONS ET INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ DANS LES ALGÈBRES DE VON NEUMANN MUNIES D'UN TRACE

Sém. N. Bourbaki, 1956, exp. no 113, p. 127-139[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/rearrangscan.pdf

A GENERAL THEORY OF FIBRE SPACES WITH STRUCTURE SHEAF

University of Kansas, 1955

Introduction

When one tries to state in a general algebraic formalism the various notions of fibre space: general fibre spaces (without structure group, and maybe not even locally trivial); or fibre bundle with topological structure group G as expounded in the book of Steenrod ([ ]); or the "differeniable" and "analytic" (real or complex) variants of theses notions; or the notions of algebraic fibre spaces (over an abstract field k) - one is led in a natural way to the notion of fibre space with a structure sheaf $\mathbf{G}$. This point of view is also suggested a priori by the possibility, now classical, to interpret the (for instance "topological") classes of fibre bundles on a space X, with *abelian* structure group G, as the elements of the first cohomology group of X with coefficients in the sheaf $\mathbf{G}$ of germs of continuous maps of X into G; the word "continuous" being replaced by "analytic" respectively "regular" if G is supposed an analytic respectively an algebraic group (the space X being of course accordingly an analytic or algebraic variety). The use of cohomological methods in this connection have proved quite useful, and it has become natural, at least as a matter of notation, even when G is not abelian, to denote by $\mathrm{H}^1(X,\mathbf{G})$ the set of classes of fibre spaces on X with structure sheaf $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}$ being as above a sheaf of germs of maps (continuous, or differentiable, or analytic, or algebraic as the case may be) of X into G. Here we develop systematically the notion of fibre space with structure sheaf $\mathbf{G}$, where $\mathbf{G}$ is any sheaf of (not necessarily abelian) groups, and of the first cohomology set $\mathrm{H}^1(X,\mathbf{G})$ of X with coefficients in $\mathbf{G}$. The first four chapters contain merely the first definitions concerning general fibre spaces, sheaves, fibre spaces with composition law (including sheaves of groups) and fibre spaces with structure sheaf. The functor aspect of the notions dealt with has been stressed throughout, and as it now appears should have been stressed even more. As the proofs of most of the facts stated reduce of course to straightforward verifications, they are only sketched or even omitted, the important point being merely a consistent order in the statement of the main facts. In the las chapter, we define the cohomology set $\mathrm{H}^1(X,\mathbf{G})$ of X with coefficients in the sheaf of groups $\mathbf{G}$,

[]

I. General fibre spaces

Unless otherwise stated, none of the spaces to occur in this report have to be supposed separated.

1.1 Notion of fibre space

Definition **1.1.1**. — *A* fibre space *over a space X is a triple (X,E,p) of the space X, a space E and a continuous map p of E into X.*

We do not require p to be onto, still less to b open, and if p is onto, we do not require the topology of X to be the quotient topology of E by the map p. For abbreviation, the fibre space (X,E,p) will often be denoted by E only, it being understood that E is provided with the supplementary structure consisting of a continuous map p of E into the space X. X is called the *base space* of the fibre space, p the *projection*, and for any $x \in X$, the subspace $p^{-1}(x)$ of E (which is closed if $\{x\}$ is closed) is the *fibre* of x (in E).

Given two fibre spaces (X,E,p) and (X',E',p'), a *homomorphism* of the first into the second is a pair of continuous maps $f : X \longrightarrow X'$ and $g : E \longrightarrow E'$, such that $p'g = fp$, i.e. commutativity holds in the diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow[f]{} & X' \end{array}$$

Then g maps fibres into fibres (but not necessarily *onto*!); furthermore, if p is surjective, then f is uniquely determined by g. The continuous map f of X into X' being given, g will be called also a f-homomorphism of E into E'. If, moreover, E'' is a fibre space over X', f' a continuous map $X' \longrightarrow X''$ and $g' : E' \longrightarrow E''$ a f'-homomorphism, then $g'g$ is a $f'f$-homomorphism. If f is the identity map of X onto X, we say also X-homomorphism instead of f-homomorphism. If we speak of homomorphisms of fibre spaces over X, without further comment, we will always mean X-homomorphisms.

The notion of *isomorphism* of a fibre space (X, E, p) onto a fibre space (X', E', p') is clear: it is a homomorphism (f, g) of the first into the second, such that f and g are onto-homeomorphisms.

1.2 Inverse image of a fibre space, inverse homomorphisms

Let (X, E, p) be a fibre space over the space X, and let f be a continuous map of a space X' into X. Then the *inverse image* of the fibre space E by f is a fibre space E' over X'. E' is defined as the subspace of $X' \times E$ of points (x', y) such that $fx' = py$, the projection p' of E' into the base X' being given by $p'(x', y) = x'$. The map $g(x', y) = y$ of E' into E is then an f-homomorphism, inducing for each $x' \in X'$ a *homeomorphism* of the fibre of E' over x' *onto* the fibre of E over $f'x'$.

[]

1.3 Subspace, quotient, product

Let (X, E, p) be a fibre space, E' any subspace of E, then the restriction p' of p to E', defines E'

[]

1..4 Trivial and locally trivial fibre spaces

Let X and F be two spaces, E the product space, the projection of the product on X defines E as a fibre space over X, called the *trivial fibre space over X with fibre F*.

All fibres are canonically homeomorphic with F.

[]

1.5 Definition of fibre spaces by coordinate transformations

Let X be a space, (U_i) a covering of X, for each

[]

1.6 The case of locally trivial fibre spaces

The method of the preceding section for constructing fibre spaces over X will be used mainly in the case where we are given a fibre space over T over X, and where, given an open covering (U_i) of X, we consider the fibre spaces

[]

1.7 Sections of fibre spaces

Definition **1.7.1**. — *Let (X, E, p) b a fibre space; a* section *of this fibre space (or, by pleonasm, a section of E over X) is a map x of X into E such that ps is the the identity map of X. The set of* continuous *sections of E is noted* $\mathrm{H}^0(X, E)$.

It amounts to the same to say that s is a function the value of which at each $x \in X$ is in the fibre of x in E (which depends on x!).

The existence of a section implies of course that p is onto, and conversely if we do not require continuity. However, we are primarily interested in continuous sections. A *section of E over a subset Y* of X is by definition a section of $E|Y$. If Y is open, we write $\mathrm{H}^0(Y, E)$ for the set $\mathrm{H}^0(Y, E|Y)$ of all continuous sections of E over Y.

$\mathrm{H}^0(X, E)$ as a *functor*. Let E, E' be two fibre spaces over X, f an X-homomorphism of E into E'. For any section s of E, the composed map fs

is a section of E', continuous if s is continuous. *We get thus a map, noted f, of* $\mathrm{H}^0(X,E)$ *into* $\mathrm{H}^0(X,E')$. The usual functor properties are satisfied:

a. If the two fibre spaces are identical and f is the identity, the so is f.

b. If f is an X-homomorphism of E into E' and f' an X-homomorphism of E' into E'' (E, E', E'' fibre spaces over X) then $(f'f) = f'f$.

Let (X,E,p) be a fibre space, f a continuous map of a space X' into X, and E' the inverse image of E under f.

II. Sheaves of sets

Throughout this exposition, we will now use the word *"section"* for *"continuous section"*.

2.1 Sheaves of sets

Definition **2.1.1.** — *Let X be a space. A* sheaf of sets *on X (or simply a* sheaf*) is a fibre space (E,X,p) with base X, satisfying the condition: each point a of E has an open neighbourhood U such that p induces a homeomorphism of U onto an open subset $p(U)$ of X.*

This can be expressed by saying that p is an interior map and a local homeomorphism. It should be kept in mind that, even if X is separated, E is not supposed separated (and will in most important instances not be separated).

[]

2.2

2.3 Definition of a sheaf by systems of sets

2.4 Permanence properties

2.5 Subsheaf, quotient sheaf. Homeomorphism of sheaves

2.6 Some examples

a.

b.

c.

d. **Sheaf of germs of subsets**. Let X be a space, for any open set $U \subset X$ let $P(U)$ be the set of subsets of U. If $V \subset U$, consider the map $A \longrightarrow A \cap V$ of $P(U)$ into $P(V)$. Clearly the conditions of transitivity, and of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, so that the sets $P(U)$ appear as the sets $\mathrm{H}^0(U, P(X))$ of sections of a well determined sheaf on X, the elements of which are called *germs of sets in X*. Any condition of a local character on subsets of X defines a subsheaf of $P(X)$, for instance the sheaf of *germs of closed sets* (corresponding to the relatively closed sets in U), or if X is an analytic manifold, the sheaf of germs of analytic sets, etc.

Other important examples of sheaves will be considered in the next chapter.

III. Group bundles and sheaves of groups

IV. Fibre spaces with structure sheaf

V. The classification of fibre spaces with structure sheaf

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8, 1-79 (1956)

THÉORÈMES DE FINITUDE POUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX

Bull.Soc. Math. France 84, 1-7 (1956)

LA THÉORIE DE FREDHOLM

Bull. Soc. Math. France 84, 319-384 (1956)

SUR LE MÉMOIRE DE WEIL. GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS ABÉLIENNES

Sém. N. Bourbaki, 1958, exp. n 141, p. 57-71

SUR CERTAINES CLASSES DE SUITES DANS LES ESPACES DE BANACH, ET LE THÉORÈME DE DVORETZKY-ROGERS

Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8, 81-110, (1956)

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES AFFINES. GROUPES ALGÉBRIQUES AFFINES COMMUTATIFS

Sém. Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. n° 4, p. 1-14

COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. ESPACES DE TRANSFORMATIONS

Sém. Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. no 5, p. 1-19

LES THÉORÈMES DE STRUCTURE FONDAMENTAUX POUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES AFFINES

Sém. Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. n° 6, p. 1-16

SOUS-GROUPES DE CARTAN, ÉLÉMENTS RÉGULIERS. GROUPES ALGÉBRIQUES AFFINES DE DIMENSION 1

Sém. Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. n° 7, p. 1-9

SUR LA CLASSIFICATION DES FIBRÉS HOLOMORPHES SUR LA SPHÈRE DE RIEMANN

Amer. J. Math. 79, 121-138 (1957)

UN RÉSULTAT SUR LE DUAL D'UNE C^*-ALGÈBRE

J.Math. Pures Appl., 36, 97-108 (1957)

SUR QUELQUES POINTS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

Tôhoku Math. J. 9, 119-221 (1957)

SOME ASPECTS OF HOMOLOGICAL ALGEBRA[1]

[1]Translation by M. L. Barr and M. Barr

---

1. Dans un travail récent [?], Mattuck et Tate déduisent l'inégalité fondamentale de A. Weil qui établit l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions [?] comme conséquence facile du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces. En essayant de comprendre la portée exacte du leur méthode, je suis tombé sur l'énoncé suivant, connu en fait depuis 1937 [?] [?] [?] (comme me l'a signalé J. P. Serre), mais apparemment peu connu et utilisé:

[]

2. Nous allons déduire sur X, nous désignerons par $l(D)$ la dimension de l'espace vectoriel des fonctions f sur X telles que $(f) \geq -D$ donc $l(D)$ ne dépend que de la classe de D. Rappelons *l'inégalité de Riemann-Roch*

[]

3. Ce qui précède n'utilisait pas à proprement parler la méthode de Mattuck-Tate (si ce n'est en utilisant l'inegalité de Riemann-Roch sur les surfaces). Nous allons indiquer maintenant comment la méthode de ces auteurs, convenablement généralisée, donne d'autres inégalités que celle de A. Weil. Nous nous appuierons sur le

[]

Remarques. Le corollaire 1 devient faux si on ne fait pas l'hypothèse que $K/2$ est encore une classe de diviseurs. En effet, toutes les hypothèses sauf cette dernière sont vérifiées si X est un surface non singulière *rationnelle*. Or, à partir d'une telle surface, on construit facilement une surface birationnellement équivalente par éclatements successifs, dont l'index τ soit < 0 (contrairement à (3.7 ter)).

En effet, on vérifie aisément que lorsqu'on fait éclater un point dans une surface non singulière projective, l'index diminue d'une unité. (Cette remarque, ainsi que l'interprétation de l'inégalité (3.7) a l'aide de l'index, m'a été signalée par J. P Serre).

La disparité des énoncés qu'on déduit du théorème (3.2) est due au fait qu'il n'est pas relatif à un élément arbitraire de l'espace vectoriel E de Néron-Séveri introduit plus haut, mais à un élément du "lattice" provenant des diviseurs sur X. On notera d'ailleurs que dans le cas particulier où X est le produit des deux courbes C et C', le théorème 3.2 ne contient rien de plus que l'inégalité de A. Weil.

THE COHOMOLOGY THEORY OF ABSTRACT ALGEBRAIC VARIETIES

It is less than four years since cohomological methods (i.e. methods of Homological Algebra) were introduced into Algebraic geometry in Serre's fundamental paper [?], and it seems already certain that they are to overflow this part of mathematics in the coming years, from the foundations up to the most advanced parts. All we can do here is to sketch briefly some of the ideas and results. None of these have been published in their final form, but most of them originated in or were suggested by Serre's paper.

Let us first give an outline of the main topics of cohomological investigation in Algebraic geometry, as they appear at present. The need of a theory of cohomology for 'abstract' algebraic varieties was first emphasized by Weil, in order to be able to give a precise meaning to his celebrated conjectures in Diophantine geometry [?]. Therefore the initial aim was to find the *'Weil cohomology' of an algebraic variety*, which should have as coefficients something 'at least as good' as a field of *characteristic 0*, and have such formal properties (e.g. duality, Künneth formula) as to yield the analogue of Lefschetz's 'fixed-point formula'. Serre's general idea has been that the usual 'Zariski topology' of a variety (in which the closed sets are the algebraic subset) is a suitable one for applying methods of Algebraic Topology. His first approach was hoped to yield at least the right Betti numbers of a variety, it being evident from the start that it could not be considered as the Weil cohomology itself, as the coefficient field for cohomology was the ground field of a variety, and therefore not in general of characteristic 0. In fact, even the hope of getting the 'true' *Betti numbers* has failed, and so have other attempts of Serre's [?] to get Weil's cohomology by taking the cohomology of the variety with values, not in the sheaf of local rings themselves, but in the sheaves of Witt-vectors constructed on the latter. He gets in this way modules over the ring $W(k)$ of infinite Witt vectors on the ground field k, and $W(k)$ is a ring of characteristic 0 even if k is of characteristic $p \neq 0$. Unfortunately, modules thus obtained over $W(k)$ may be infinitely generated, even when the variety V is an abelian variety [?]. Although interesting relations must certainly exist between these cohomology groups and the 'true ones', it seems certain now that the Weil cohomology has to be defined by a completely different approach. Such an approach was recently suggested to me by the *connections between sheaf-theoretic cohomology and cohomology of Galois groups on the one hand, and the classification of unramified coverings of a variety on the other* (as explained quite unsystematically in Serre's tentative Mexico paper [?]), and by Serre's idea that a 'reasonable' algebraic principal fiber space with structure group G, defined on a variety V, if it is not locally trivial, should become locally trivial on some covering of V *unramified* over a given point of V. This has been the starting point of a definition of the Weil cohomology (involving both 'spatial' and Galois cohomology), which seems to be the right one, and which gives clear suggestions how Weil's conjectures may be attacked by the machinery of Homological algebra. As I have not begun theses investigations seriously as yet,and as moreover this theory has a quite distinct flavor from the one of the theory of algebraic coherent sheaves which we shall now be concerned with, we shall not dwell any longer on Weil's cohomology. Let us merely remark that the definition alluded to has already been the starting-point of a theory of cohomological dimension of fields, developed recently by Tate [?].

The second main topic for cohomological methods is the *cohomology theory of algebraic coherent sheaves*, as initiated by Serre. Although inadequate for Weil's purposes, it is at present yielding a wealth of new methods and new notions, and gives the key even for results which were not commonly thought to be concerned with sheaves, still less with cohomology, such as Zariski's theorem on 'holomorphic functions' and his 'main theorem' - which can be stated now in a more satisfactory way, as we shall see, and proved by the same uniform elementary methods. The main parts of the theory, at present, can be listed as follows:

(a) General finiteness and asymptotic behaviour theorems.

(b) Duality theorems, including (respectively identical with) a cohomological theory of residues.

(c) Riemann-Roch theorem, including the theory of Chern classes for algebraic coherent sheaves.

(d) Some special results, concerning mainly abelian varieties.

The third main topic consists in the *application of the cohomological methods to local algebra*. Initiated by Koszul and Cartan-Eilenberg in connection with Hilbert's 'theorem of syzygies', the systematic use of these methods is mainly due again to Serre. The results are the *characterization* of regular local rings as those whose global cohomological dimension is finite, the clarification of *Cohen-Macaulay's equidimensionality theorem* by means of the notion of *cohomological codimension* [**?**], and specially the possibility of giving (for the first time as it seems) a *theory of intersections*, really satisfactory by its algebraic simplicity and its generality. Serre's result just quoted, that regular local rings are the the only ones of finite global cohomological dimension, accounts for the fact that only for such local rings does a satisfactory theory of intersections exist. I cannot give any details here on these subjects, nor on various results I have obtained by means of a *local duality theory*, which seems to be the tool which is to replace differential forms in the case of unequal characteristics, and gives, in the general context of commutative algebra, a clarification of the notion of residue, which as yet was not at all well understood. The motivation of this latter work has been the attempt to get a global theory of duality in cohomology for algebraic varieties admitting arbitrary singularities, in order to be able to develop intersection formulae for cycles with arbitrary singularities, in a non-singular algebraic variety, formulas which contain also a 'Lefschetz formula mod p' [**?**]. In fact, once a proper local formalism is obtained, the global statements become almost trivial. As a general fact, it appears that, to a great extent, the 'local' results already contain a global one; more precisely, global results on varieties of dimension n can frequently be deduced from corresponding local ones for rings of Krull dimension $n+1$.

We will therefore

[]

Introduction

These notes are a rough summary of five talks given at I.H.E.S in November and December 1966. The purpose of these talks was to outline a possible definition of a p-adic cohomology theory, via a generalization of the De Rham cohomology which was suggested by work of Monsky-Washnitzer [?] and Manin [?].

The contents of the notes are by no means intended to be a complete theory. Rather, they outline the start of a program of work which has still not been carried out[1].

1. De Rham cohomology

1.1. Differentiable Manifolds. Let X be a differentiable manifold, and $\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/\mathbf{C}}$ the complex of sheaves of differential forms on X, whose coefficients are complex valued differentiable functions on X.

Theorem **1.1**. (De Rham) — *There is a canonical isomorphism*

$$\mathrm{H}^*(X,\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(\Gamma(X,\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/\mathbf{C}})),$$

where $\mathrm{H}^*(X,\mathbf{C})$ *is the canonical cohomology of* X *with complex coefficients.*

[1]For a more detailed exposition and progress in this direction, we refer to the work of P. Berthelot, to be developed presumably in SGA 8.

To prove this, one observes that, by Poincaré's lemma, the complex $\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/\mathrm{C}}$ is a *resolution* of the constant sheaf $\underline{C}$ on X, and that the sheaves $\underline{\Omega}^{j}_{X/\mathrm{C}}$ are *fine* for $J \geq 0$, so that $\mathrm{H}^i(X, \underline{\Omega}^{j}_{X/\mathrm{C}}) = 0$ for $i > 0$ and $j \geq 0$, whence the assertion.

An analogous result holds for the complex of sheaves of differential forms on X, whose coefficients are real valued differentiable functions on X.

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6. Criticism of the ℓ-adic cohomology. If X is a scheme of finite type over an algebraically closed field k, and ℓ is any prime number *distinct*[2] from the characteristic of k, the ℓ-adic cohomology of X is defined to be

1.7.

1.8. Proposals for a p-adic Cohomology. We only mention two proposals, namely Monsky and Washnitzer's method via special affine liftings (which we discuss in n° 2), and the method using the fppf (faithfully flat and finite presentation) topology.

By analogy with the ℓ-adic cohomology, the essential idea of the fppf topology was to consider the cohomology of X/k, with respect to the fppf topology, with coefficient groups in the category C^ν of finite schemes of $\mathbf{Z}/p^\nu\mathbf{Z}$-modules. Examples of such schemes of modules are

2. The cohomology of Monsky and Wishnitzer

2.1. Approach via liftings.

Suppose X_0 is a scheme on a perfect field k

3. Connections on the De Rham cohomology

For the definition of a *connection* and a *stratification* on a sheaf, see Appendix I of these notes.

[2] the ℓ-adic cohomology is still defined for ℓ equal to the characteristic of k, but it no longer has too many reasonable properties.

4. The infinitesimal topos and stratifying topos

We now turn to the definition of a more general category of coefficients for the De Rham cohomology. To this end we introduce two ringed topos, the *infinitesimal topos* and the *stratifying topos*.

We shall see later that in fact these two topos work well only in characteristic 0

5. Cěch calculations

We now consider the cohomology of the infinitesimal topos and the stratifying topos[3]

6. Comparison of the Infinitesimal and De Rham Cohomologies

6.1. The basic idea. Let X be a scheme above S, and F a quasi-coherent Module on X fortified with a stratification relative to S.

7. The crystalline topos and connecting topos

7.1. Inadequacy of infinitesimal topos. Let X_0 be a scheme above a perfect field k of characteristic $p > 0$. Then, regarding X_0 as being above $S = \operatorname{Spec} W(k)$ instead of k, the infinitesimal cohomology

$$\mathrm{H}^*((X_0/S)_{\mathrm{inf}}, \underline{O}X_0)$$

is a graded module

Appendix

Let X be a scheme above the base S, and F a Module on X. For each positive integer n,

[3]For a general discussion of the cohomology of a topos, see (SGA 4 V).

HODGE'S GENERAL CONJECTURE IS FALSE FOR TRIVIAL REASONS

A. Grothendieck

(Received 27 October 1968)[4]

---

§1. — The startling title is somewhat misleading, as everybody will think about a part of the Hodge conjecture which is most generally remembered, namely the part concerned with a criterion for a cohomology class (on a projective smooth connected scheme X over $\mathbf{C}$) to be "algebraic", i.e. to come from an algebraic cycle with rational[5] coefficients. This conjecture is plausible enough, and (as long as it is not disproved) should certainly be regarded as the deepest conjecture in the "analytic" theory of algebraic varieties. However in [6, p. 184], Hodge gave a more general formulation of his conjecture in terms of filtrations of cohomology spaces, and the main aim of my note is to show that for a rather trivial reason, this formulation has to be slightly corrected.

Consider on the complex cohomology

$$\mathrm{H}^i(X^{an},\mathbf{C}) = \mathrm{H}^i(X^{an},\mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

(X^{an} denotes the analytic space associated to the scheme X) the "Hodge filtration"

[]

[4] *Topology* Vol. 8, pp. 299-303. Pergamon Press, 1969. Printed in Great Britain

[5] In fact, Hodge states his conjecture for integral cohomology. That this is too optimistic was proved in [1]

§2. — This makes clear how the Hodge conjecture should be corrected, to eliminate trivial counterexamples: namely the left hand side of $(*)$ should be the largest sub-space of the right hand side, generating a subspace of $\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C})$ which is a sub-Hodge structure, i.e. stable under decomposition into p, q types. In other words, an element of $\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C})$ should belong to Filt'^p if and only if all its bihomogeneous components belong to the $\mathbf{C}$-vector space generated by the right hand side of $(*)$.

This formulation may seem a little too cumbersome to inspire confidence. To make it look better, we may remark that it is equivalent to the conjunction of the usual Hodge conjecture

[]

§3. — It may be of interest to review here the few non trivial instances known to the author where the Hodge conjecture has been checked.

[]

§4. — In most concrete examples, it seems very hard to *check* the Hodge conjecture, due to the difficulty in explicitly determining the filtration Filt' of the cohomology, and even in determining simply the part of the cohomology coming from algebraic classes. It may be easier, for the time being, to *test* the Hodge conjectures in various non trivial cases, through various consequences of the Hodge conjectures which should be more amenable to direct verification. I would like to mention here two such consequences, which can be seen in act to be consequences already of the *usual* Hodge conjecture.

First, if X is as before, the dimensions of the graded components of the vector space associated to the arithmetic filtration Filt' (and indeed this very filtration itself, if we interpret complex cohomology as the de Rham cohomology, which makes a purely algebraic sense) is clearly invariant if we transform X by any automorphism of the field $\mathbf{C}$, or equivalently, if we change the topology of C by such an automorphism. In other words, if we have a smooth projective scheme X over a field K of char 0, then the invariants we get by different embeddings of K into the field $\mathbf{C}$ are the same. Granting the Hodge conjecture, the same should be true if we replace the Filt' filtration by the filtration described in §2 in terms of the Hodge structure (which is a transcendental description). What if we take for instance for X a "general" abelian variety of given dimension of powers of it, or powers of a "general" curve C of given genus? The case of genus 1 checks by Tate's result recalled in example c) above.

Secondly, and more coarsely, if we have a projective and smooth morphism $f : X \longrightarrow S$ of algebraic schemes over $\mathbf{C}$, we can for every $s \in S$ consider the complex cohomology of the fiber X, as a Hodge structure, and look at the filtration "rational over $\mathbf{Q}$" which it defines (and which conjecturally should be the arithmetic filtration). Hodge's conjecture would imply that the set of points $s \in S^{an}$ where the dimensions of the components of the associated graded space have fixed values has a very special structure: it should be the difference of two countable unions of Zariski-closed subsets of S, which in fact should even be definable over a fixed subfield of $\mathbf{C}$, of finite type over the field $\mathbf{Q}$. (A simple application of Baire's theorem, not using Hodge's conjecture, would give us only a considerably weaker structure theorem for the set in question, where Zariski-closed subsets would be reaplced by the images, under the projection of the universal covering $\widetilde{S}$ of S^{an}, of analytic subsets of $\widetilde{S}$[6].)

REFERENCES

1.

[6](Added April 1969) David Lieberman has informed me that he can prove the stronger result obtained by replacing $\widetilde{S}$ by S^{an} itself.

TAPIS DE QUILLEN
6.9.1968

TAPIS DE QUILLEN
10.9.1968

I. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux

A toute catégorie C, on associe un ensemble semi-simplicial $S(C)$, trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$S :\longrightarrow \mathrm{Ssimpl}\,.$$

Les systèmes locaux d'ensemble sur SC correspondent aux foncteurs sur C qui transforment toute flèche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à C). Les H^i sur SC d'un tel système local (H^0 pour ensembles, H^1 pour groupes, H^i quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs $\varprojlim^{(i)}$ dérivés de $\varprojlim$, ou si on préfère, des H^i (du *topos* C). On voit ainsi à quelle condition un foncteur $C \longrightarrow C'$ induit un homotopisme $SC \longrightarrow SC'$: en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il f et s que pour tout système de coefficients F' sur C', l'homomorphisme naturel $\varprojlim^{(i)}_{C'} F' \longrightarrow \varprojlim^{(i)}_{C} F$ soit un isomorphisme (pour les i pour lesquels cela a un sens).

A C on peut associer le topos $\widetilde{C}$, qui varie de façon *covariante* avec C. (NB le foncteur $C \mapsto \widetilde{C}$ n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??).

Les systèmes de coefficients ensemblistes sur C (les foncteurs $C^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux localement constants i.e. les objets localement constants de $\widetilde{C}$, définis intrinsèquement en termes de $\widetilde{C}$. Ainsi, le fait pour un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ d'induire une homotopisme $S(C) \longrightarrow S(C')$ ne dépend que du morphisme de topos $\widetilde{F} : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C'}$ induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant F' sur C' i.e. sur $\widetilde{C'}$, les applications induites $\mathrm{H}^i(\widetilde{C'}, F') \longrightarrow \mathrm{H}^i(\widetilde{C}, \widetilde{F}^*(F'))$ sont des isomorphismes (pour les i pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T : \mathrm{Ssimpl} \longrightarrow ,$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial X la catégorie $T(X) = \Delta_{/X}$ des simplexes sur X, dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des X_n... (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie Δ des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les X_n). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout X, $ST(X)$ est isomorphe canoniquement à X dans la catégorie homotopique construite avec Ssimpl, et que pour toute C, la catégorie $TS(C)$ est canoniquement "homotopiquement équivalente à C" i.e. canoniquement isomorphe a C dans la catégorie quotient de obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. Ces isomorphismes sont fonctoriels en X. Il en résulte formellement qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans Ssimpl est un homotopisme si et seulement si en est ainsi de $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$, d'où des foncteurs $S' :' \longrightarrow \mathrm{Ssimpl}'$ et $T' : \mathrm{Ssimpl}' \longrightarrow '$ entre les catégories "homotopiques", construites avec resp. Ssimpl, qui sont quasi-inverses l'un de l'autre.

De plus, Quillen construit un isomorphisme canonique et fonctoriel dans $'$ entre C et la catégorie opposée C°, ou ce qui revient au même, un isomorphisme canonique et fonctoriel dans Ssimpl' entre $S(C)$ et $S(C^\circ)$. La définition est telle que le foncteur induit sur les systèmes locaux sur C transforme le foncteur contravariant F sur C, transformant toute flèche en flèche inversible, en le foncteur covariant (i.e. contravariant sur C°) ayant mêmes valeurs sur les objets, et obtenu sur les flèches en remplaçant $F(u)$ par $F(u)^{-1}$; en d'autres termes, l'effet de l'homotopisme de Quillen sur les groupoïdes fondamentaux est l'isomorphisme évident entre les groupoïdes fondamentaux de C et de C°, compte tenu que le deuxième est l'opposé du premier. Comme application, Quillen obtient une interprétation faisceautique de la cohomologie d'un ensemble semi-simplicial à coefficients dans un système local covariant F (défini classiquement par le complexe cosimplicial des $C^n(F) = \amalg_{x \in X_n} F(x)$): on considère le système local contravariant défini par F, on l'interprète comme un faisceau sur $T(X)$ i.e. objet de $\mathrm{Ssimpl}_{/X}$, et on prend sa cohomologie. - Cependant, quand F est un système de coefficients covariant pas nécessairement local, on n'a toujours pas d'interprétation de ses groupes de cohomologie classiques en termes faisceautiques; ni, lorsque F est contravariant, de son homologie, ou inversement de sa cohomologie faisceautique en termes classiques.

A propos de la notion de foncteur qui est un homotopisme. Quillen montre qu'un tel foncteur $F : C \longrightarrow C'$ induit une équivalence entre la sous-catégorie triangulée $\mathbb{D}^b_{lc}(C')$ de la catégorie dérivée bornée de celle des faisceaux abéliens sur C', dont les faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux, et la catégorie analogue pour C; et réciproquement. On peut dans cet énoncé introduire aussi n'importe quel anneau de base (à condition de le supposer $\neq 0$ dans le cas de la réciproque); la partie dire vaut aussi avec un anneau de coefficients par nécessairement constant, mains constant tordu. Je pense que ce résultat (facile) doit pouvoir se généraliser ainsi : Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de topos qui soit tel que pour tout faisceau localement constant sur X', f induise un isomorphisme sur les cohomologies (avec cas non commutatif inclus). Supposons que X et X' soit *localement homotopiquement trivial*, i.e. que pour tout entier $n \geq 1$, tout objet U ait un recouvrement par des $U_i \longrightarrow U$, tels que a) tout système local sur U devient constant sur U_i, et toute section sur U devient constant sur U_i et b) pour tout groupe abélien G, les $\mathrm{H}^j(U,G) \longrightarrow \mathrm{H}^j(U_i,G)$ sont nuls pour $1 \leq j \leq n$ [7]. Alors le foncteur $\mathbb{D}^b_{lc}(X') \longrightarrow \mathbb{D}^b_{lc}(X)$ induit par f est une équivalence. Même énoncé si on met dans le coup un système local d'anneaux sur X'. Enfin, f induit une équivalence entre la catégorie des coefficients locaux sur C et celle des coefficients locaux sur C'.

Principe de démonstration : on commence par prouver ce dernier résultat, en notant que si un topos est localement hom. trivial, il est loc. connexe et loc. simplement connexe, d'où une bonne théorie du π_0 et du π_1 (qui sont ici discrets), et on est ramené à un cas particulier du critère d'homotopisme de Artin et Mazur, savoir un critère cohomologique pour qu'un homomorphisme de groupes

[7] Attention, cette condition n'est typiquement *pas* satisfaite par les schémas avec leur topologie étale)mais bien par [ ] avec top. Zariski).

$G \longrightarrow H$ (ici les groupes π_1 de X, X') soit un isomorphisme : il doit induire des isomorphismes sur les H^0 et H^1 (y inclus dans le cas non commutatif…). On prouve la pleine fidélité en se ramenant par la suite spectrale encore, cela résultera du fait suivant : si X est localement hom. trivial, alors la catégorie des faisceaux abéliens loc. constants est stable par $\underline{\mathrm{Ext}}^i$, et le foncteur $M \mapsto M_X$ de Ab dans X_{ab} commute aux dits Ext^i. En fait, X et X' étant loc. homp. triviaux, les conditions suivantes sur f seront équivalentes :

a) f est un homotopisme, i.e. induit pour tout système local (pas néc. commutatif) sur X' un isomorphisme sur les H^i.

b) f induit une équivalence $\mathbb{D}^b_{lc}(X') \longrightarrow \mathbb{D}^b_{lc}(X)$.

a') f induit une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux abéliens sur X' et X, et des isomorphismes sur les H^i correspondants (donc on ne prend ici que des coefficients commutatifs).

J'ignore si on peut dans a) se borner aux systèmes locaux commutatifs. L'équivalence entre a) et b) fournit une première justification ou motivation pour définir des types d'homotopie via la catégorie $\mathbb{D}^b_{lc}(X)$, éventuellement muni de la sous-catégorie pleine de tous les systèmes locaux sur X, et du foncteur cohomologique sur $\mathbb{D}^b_{lc}(X)$ à valeurs dans le dite catégorie, et bien sur du produit tensoriel (mais alors on sort de $\mathbb{D}^b$ pour entrer dans $\mathbb{D}^-$, redactor demerdetur).

2. n-catégories, catégories n-uples, et Gr-catégories

3. Point de vue "motivique" en théorie du cobordisme

Soit C la catégorie des variétés différentiables (pas nécessairement orientables), les morphismes étant les classes d'homotopie d'applications continues. Si B est une catégorie, on s'intéresse aux couples $(F_\bullet, F^\bullet)$ d'un foncteur covariant et d'un foncteur contravariant de C dans B, satisfaisant les conditions que pour tout $X \in$

Ob C, on a $F_\bullet(X) = F^\bullet(X)$, et que si on a un produit fibré ordinaire

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd} \quad ,$$

avec f et g

STANDARD CONJECTURES ON ALGEBRAIC CYCLES

1. Introduction

We state two conjectures on algebraic cycles, which arose fro an attempt at understanding the conjectures of Weil on the ζ-functions of algebraic varieties. These are not really new, and they were worked out about three years ago independently by Bombieri and myself.

The first is an existence assertion for algebraic cycles (considerably weaker than the Tate conjectures), and is inspired by and formally analogous to Lefschetz's structure theorem on the cohomology of a smooth projective variety over the complex field.

The second is a statement of positivity, generalising Weil's well-known positivity theorem in the theory of abelian varieties. It is formally analogous to the famous Hodge inequalities, and is in fact a consequence of these in characteristic zero.

WHAT REMAINS TO BE PROVED OF WEIL'S CONJECTURES? Before stating our conjectures, let us recall what remains to be proved in respect of the Weil conjectures, when approached through ℓ-adic cohomology.

Let $X/\mathbf{F}_q$ be a smooth irreducible projective variety of dimension n over the finite field $\overline{\mathbf{F}}_q$ with q elements, and ℓ a prime different from the characteristic. It has then been proved by M. Artin and myself that the Z-function of X can be expressed as

$$
\begin{aligned}
Z(t) &= \frac{L'(t)}{L(t)},\\
L(t) &= \frac{L_0(t)L_2(t)\dots L_{2n}(t)}{L_1(t)L_3(t)\dots L_{2n-1}(t)},\\
L_i(t) &= \frac{1}{P_i(t)},
\end{aligned}
$$

where $P_i(t) = t^{\dim \mathrm{H}^i(\overline{X})} Q_i(t^{-1})$, Q_i being the characteristic polynomial of the action of the Frobenius endomorphism of X on $\mathrm{H}^i(\overline{X})$ (here H^i stands for the i^{th} ℓ-adic cohomology group and $\overline{X}$ is deduced from X by base extension to the algebraic closure of $\mathbf{F}_q$). But it has not been proved so far that

(a) the $P_i(t)$ have integral coefficients, independent of $\ell (\neq \operatorname{char} \mathbf{F})$;

(b) the eigenvalues of the Forbenius endomorhisms on $\mathrm{H}^i(\overline{X})$, i.e., the reciprocals of the roots of $P_i(t)$, are of absolute value $q^{i/2}$.

Our first conjecture meets question (a). The first and second together would, by an idea essentially due to Serre [**?**], imply (b).

2. A weak form of conjecture 1

From now on, we work with varieties over a ground field k which is algebraically closed and of arbitrary characteristic. Then (a) leads to the following question: If f is an endomorphism of a variety X/k and $\ell \neq \operatorname{char} k$, f induces

$$f^i : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(x),$$

and each of these f^i has a characteristic polynomial. *Are the coefficients of these polynomials rational integers, and are they independent of ℓ?* When X is smooth and proper of dimension n, the same question is meaningful when f is replaced by any cycle of dimension n in $X \times X$, considered as an algebraic correspondence.

In characteristic zero, one sees that this is so by using integral cohomology. If $\operatorname{char} k > 0$, one feels certain that this is so, but this has not been proved so far.

Let us fix for simplicity an isomorphism

$$\ell^{\infty k^* \simeq \mathbf{Q}_\ell / \mathbf{Z}_\ell} \qquad \text{(a heresy!)}.$$

We than have a map

$$: F^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \longrightarrow \mathrm{H}_\ell^{2i}(X)$$

which associates to an algebraic cycle its cohomology class. We denote by $C_\ell^i(X)$, and refer to its elements as *algebraic cohomology classes*.

A known result, due to Dwork-Faton, shows that for the integrality question (not to speak of the independence of the characteristic polynomial of ℓ), it suffices to prove that

$$f_i^N \in \frac{1}{m}\mathbf{Z} \quad \text{for every } N \geq 0,$$

where m is a fixed positive integer[8]. Now, the graph Γ_{f^N} in $X \times X$ of f^N defines a cohomology class on $X \times X$, and if the cohomology class Δ of the diagonal in $X \times X$ is written as

$$\Delta = \sum_0^n \pi_i$$

where π_i are the projections of Δ onto $\mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^{n-i}(X)$ for the canonical decomposition $\mathrm{H}^n(X \times X) \simeq \sum_{i=0}^n \mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^{n-i}(X)$, a known calculation shows that

$$(f^N)_{\mathrm{H}^i} = (-1)^i (\Gamma_{f^N})\pi_i \in \mathrm{H}^{4n}(X \times X) \approx \mathbf{Q}_\ell.$$

Assume that the π_i are algebraic. Then $\pi_i = \frac{1}{m}(\prod_i)$, where $\prod_i$ is an algebraic cycle, hence

$$(f^N)_{\mathrm{H}^i} = (-1)^i (\prod_i \Gamma_{f^N}) \in \frac{1}{m}\mathbf{Z}$$

and we are through.

WEAK FORM OF CONJECTURE 1. $(C(X))$: The elements π_i^ℓ are algebraic, (and come from an element of $F^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, which is independent of ℓ).

N.B.

1. The statement in parenthesis is needed to establish the independence of P_i on ℓ.

[8] This was pointed out to me by S. Kleimann.

2. If $C(X)$ and $C(Y)$ hold, $C(X \times Y)$ holds, and more generally, the Künneth components of any algebraic cohomology class on $X \times Y$ are algebraic.

3. The conjecture 1 (of Lefschetz type)

Let X be smooth and projective, and $\xi \in \mathrm{H}^2(X)$ the class of a hyperplane section. Then we have a homomorphism

$$(*) \qquad \cup \xi^{n-i} : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X) \quad (i \leq n).$$

It is expected (and has been established by Lefschetz [?], [?] over the complex field by transcendental methods) that this is an isomorphism for all characteristics. For $i = 2j$, we have the commutative square

[]

Our conjecture is then: $(A(X))$:

(a) (*) is always an isomorphism (the mild form);

(b) if $i = 2j$. (*) induces an isomorphism (or equivalently, an epimorphism) $C^j(X) \longrightarrow C^{n-j}(X)$.

N.B. If $C^j(X)$ is assumed to be finite dimensional, (b) is equivalent to the assertion that $\dim C^{n-j}(X) \leq \dim C^j(X)$ (which in particular implies the equality of these dimensions in view of (a)).

An equivalent formulation of the above conjecture (for all varieties X as above) is the following.

$(B(X))$: *The Λ-operation (c.f. [?]) of Hodge theory is algebraic.*

By this, we mean that there is an algebraic cohomology class λ in $\mathrm{H}^*(X \times X)$ such that the map $\Lambda : \mathrm{H}^*(X) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X)$ is got by lifting a class from X to $X \times X$ by the first projection, cupping with λ and taking the image in $\mathrm{H}^*(X)$ by the Gysin homomorphism associated to the second projection

Note that $B(X) \Rightarrow A(X)$, since the algebricity of λ implies that of λ^{n-i}, and λ^{n-i} provides an inverse to $\cup \xi^{n-i} : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X)$. On the other hand, it is easy to show that $A(X \times X) \Rightarrow B(X)$ and this proves the equivalence of conjectures A and B.

The conjecture seems to be most amenable in the form of B. Note that $B(X)$ is stable for products, hyperplane sections and specialisations. In particular, since it holds for projective spaces, it is also true or smooth varieties which are complete intersections in some projective space. (As a consequence, we deduce for such varieties the wished-for integrality theorem for the Z-function!). It is also verified for Grassmannians, and for abelian varieties (Liebermann [?]).

I have an idea of a possible approach to Conjecture B, which relies in turn on certain unsolved geometric questions, and which should be settled in any case.

Finally, we have the implication $B(X) \Rightarrow C(X)$ (first part), since the π_i can be expressed as polynomials with coefficients in $\mathbf{Q}$ of λ and $L = \cup\xi$. To get the whole of $C(X)$, one should naturally assume further that there is an element of $F(X \times X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ which gives λ for every ℓ.

4. Conjecture 2 (of Hodge type)

For any $i \leq n$, let $P^i(X)$ be the 'primitive part' of $\mathrm{H}^i(X)$, that is, the kernel of $\cup\xi^{n-i+1} : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i+2}(X)$, and put $C^j_{Pr}(X) = P^{2j} \cap C^j(X)$. On $C\widehat{\otimes}_{Pr}(X)$, we have a $\mathbf{Q}$-valued symmetric bilinear form given by

$$(x, y) \longrightarrow (-1)^j K(xy\xi^{n-2j})$$

where K stands for the isomorphism $\mathrm{H}^{2n}(X) \simeq \mathbf{Q}_\ell$. Our conjecture is then that

(Hdg(X)): *The above form is positive definite.*

One is easily reduced to the case when $\dim X = 2m$ is even, and $j = m$.

REMARKS.

(1) In characteristic zero, this follows readily from Hodge theory [?].

(2) $B(X)$ and Hdg($X \times X$) imply, by certain arguments of Weil and Serre, the following: if f is an endomorphism of X such that $f^*(\xi) = q\xi$ for some $q \in \mathbf{Q}$ (which is necessarily > 0), then the eigenvalues of $f_{\mathrm{H}^i(X)}$ are algebraic integers of absolute value $q^{i/2}$. Thus, this implies all of Weil's conjectures.

(3) The conjecture $Hdg(X)$ together with $A(X)(a)$ (the Lefschetz conjecture in cohomology) implies that numerical equivalence of cycles is the same as

cohomological equivalence for any ℓ-adic cohomology if and only if $A(X)$ holds.

(4) In view of (3), $B(X)$ and $Hdg(X)$ imply that numerical equivalence of cycles coincides wit $\mathbf{Q}_\ell$-equivalence for any ℓ. Further the natural map

$$\mathrm{Z}^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^i_\ell(X)$$

is a monomorphism, and in particular, we have

$$\dim_{\mathbf{Q}} C^i(X) \leq \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i_\ell(X).$$

Note that for the deduction of this, we do not make use of the positivity of the form considered in Hdg(X),but only the fact that it is non-degenerate.

Another consequence of $Hdg(X)$ and $B(X)$ is that the stronger version of $B(X)$, viz. that λ comes from an algebraic cycle with rational coefficients *independent of* ℓ, holds.

Conclusions

The proof of the two standard conjectures would yield results going considerably further than Weil's conjectures. They would form the basis of the so-called "theory of motives" which is a systematic theory of "arithmetic properties" of algebraic varieties, as embodied in their groups of classes of cycles for numerical equivalence. We have at present only a very small part of this theory in dimension one, as contained in the theory of abelian varieties.

Alongside the problem of resolution of singularities, the proof of the standard conjectures seems to me to be the most urgent task in algebraic geometry.

GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX DE DIEUDONNÉ

Sém. de Math. Sup. 45 (Été 1970). Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Que., 1974[9]

[9] https://agrothendieck.github.io/divers/barsdieudscan.pdf

TRAVAUX DE HEISOUKÉ HIRONAKA SUR LA RÉSOLUTION DES SINGULARITÉS

Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 7-9.
Gauthier-Villars, Paris, 1971[10]

---

[10] https://agrothendieck.github.io/divers/hirsingscan.pdf

GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX

Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 431 à 436.
Gauthier-Villars, Paris, 1971[11]

Dans la suite, p désigne un nombre premier fixé. Nous nous proposons d'exposer l'esquisse d'une généralisation de la théorie de Dieudonné [4] des groupes formels sur un corps parfait de car. p, au cas «des groupes de Barsotti-Tate» («groupes p-divisibles» dans la terminologie de Tate [5]) sur un schéma de base S sur lequel p est nilpotent. Un exposé plus détaillé se trouvera dans des notes développant un cours que j'ai donné sur ce sujet en juillet 1970 au Séminaire de Mathématique Supérieure de l'Université de Montréal, cf. aussi [7].

1. Généralités

2. Groupe formel associé à un groupe de BT

Si G est un faisceau sur S muni d'une section e, on définit de façon évidente le voisinage infinitésimal d'ordre n de cette section dans G, $\mathrm{Inf}^n(G,e)$, et le voisinage infinitésimal d'ordre infini

$$\overline{G} = \mathrm{Inf}^\infty(G,e) = \varinjlim \mathrm{Inf}^n(G,e)$$

[11] https://agrothendieck.github.io/divers/AGICM70.pdf

Lorsque G est un groupe de BT sur S et que p est localement nilpotent sur S, on prouve que $\overline{G}$ est un *groupe de Lie formel*, qu'on appelle le *groupe formel associé au groupe de BT* G. Sa formation est fonctorielle en G et commute au changement de base. Lorsque S est réduit à un point, $\overline{G}$ lui-même est un groupe de BT, et G est une extension d'un groupe de BT $G/\overline{G}$ ind-étale par le groupe de BT ind-infinitésimal $\overline{G}$. La catégorie des groupes de BT ind-infinitésimaux n'est alors autre que celle des groupes de Lie formels qui sont p-divisibles, i.e. ou la multiplication par p est une isogénie [5].

3. Théorie de Dieudonné

4. Filtration du cristal de Dieudonné et déformations de groupes de BT

5. Groupes de BT à isogénie près

Bibliographie

(Collège de France,
11, Place Marcelin-Berthelot
Paris 5^{e}
France).

PLATITUDE D'UNE ADHÉRENCE SCHÉMATIQUE ET LEMME DE HIRONAKA GÉNÉRALISÉ

Manuscripta Math. 5, 323-339 (1971)[12]

[12] https://agrothendieck.github.io/divers/platadhscan.pdf

CURRICULUM VITAE
DE ALEXANDRE GROTHENDIECK

Né le 28 mars 1928 à Berlin, de mère allemande et de père apatride, émigré de Russie en 1921, mes parents émigrent d'Allemagne en 1933, participent à la révolution espagnole ; je les rejoins en mai 1939. Mes parents sont internés, d'abord mon père en 1939, puis ma mère en 1940 avec moi. Mon père est déporté du camp de Vernet en août 1942 pour Auschwitz et est resté disparu; ma mère meurt en 1957 des suites d'une tuberculose contractée au camp de concentration. Je reste près de deux ans dans des camps de concentration français, puis suis recueilli par une maison d'enfants du "Secours suisse" au Chambon-sur-Lignon, où je termine mes études de lycée en 1945. Études de licence (mathématiques) à Montpellier 1945-48, auditeur libre à l'École Normale Supérieure à Paris en 1948-49, où je suis le premier séminaire Cartan sur la théorie des faisceaux, et un cours de Leray du Collage de France sur la théorie de Schauder du degré topologique dans les espaces localement convexes. De 1949 à 1953 je poursuis des recherches à Nancy sur les espaces vectoriels topologiques, comme élève de J. Dieudonné et de L. Schwartz, aboutissement à ma thèse de doctorat en 1953, sur la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, publiée dans les "Memoirs of the American Mathematical Society". Je passe alors deux ans à l'Université de Sao Paulo (Brésil), où je continue et mène à leur aboutissement naturel certaines recherches liées aux produits tensoriels topologiques [6, 7], mais en même temps, sous l'influence de J. P. Serre, commence à me familiariser avec des questions de topologie algébrique et d'algèbre homologique. Ces dernières continueront à m'occuper jusqu'à aujourd'hui, et son encore très loin d'être menées à leur terme. Ce sont elles qui m'occuperont surtout pendant l'année 1955 passée à l'Université du Kansas (USA) ; j'y développe une théorie commune pour la théorie de Cartan-Eilenberg des foncteurs dérivés des foncteurs de modules et la théorie de Leray-Cartan de la cohomologie des faisceaux [8], et développe des notions de "cohomologie non commutative" dans le contexte des faisceaux et des espaces fibrés à faisceau structural, qui trouveront leur cadre naturel quelques années plus tard avec la théorie des topos (aboutissement naturel du point de vue faisceautique en topologie générale) [16, SGA 4].

À partir de 1956 je suis resté en France, à l'exception de séjours de quelques semaines ou mois dans des universités étrangères. De 1950 à 1958 j'ai été chercheur au CNRS, avec le grade de directeur de recherches en 1958. De 1959 à 1970 j'ai été professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Ayant découvert à la fin de 1959 que l'IHES était subventionné depuis trois ans par le Ministère des Armées, et après des essais infructueux pour inciter mes collègues à une action commune sans équivoque contre la présence de telles subventions, je quitte l'IHES en septembre 1970.

Depuis 1959 je suis marié à une française, et je suis père de quatre enfants. Je suis apatride depuis 1940, et ai déposé une demande de naturalisation française au printemps 1970.

Depuis 1956 jusqu'à une date récente, mon intérêt principal s'est porté sur la géométrie algébrique. Mon intérêt pour la topologie, la géométrie analytique, l'algèbre homologique ou le langage catégorique a été constamment subordonné aux multiples besoins d'un vaste programme de construction de la géométrie algébrique, dont une première vision d'ensemble remonte à 1958. Ce programme est poursuivi systématiquement dans [16, 17], d'abord dans un isolement relatif, mais progressivement avec l'assistance d'un nombre croissante de chercheurs de valeur. Il est loin d'être achevé à l'heure actuelle. L'extraordinaire crise écologique que nous aurons à affronter dans les décades qui viennent, rend peu probable qu'il le sera jamais. Elle nous imposera d'ailleurs une perspective et des critères de valeur entièrement nouveaux, qui réduiront à l'insignifiance ("irrelevance") beaucoup des plus brillants progrès scientifiques de notre siècle, dans la mesure où ceux-ci restent étrangers au grand impératif évolutionniste de notre temps : celui de la survie. Cette optique s'est imposée à moi avec une force croissante au cours de discussions avec de nombreux collègues sur la responsabilité sociale des scientifiques, occasionnées par ma situation à l'IHES depuis la fin de 1969. Elle m'a conduit en juillet 1970 à m'associer à la fondation d'un mouvement international et interprofessionnel “Survivre”, et à consacrer aux questions liées à la survie une part importante de mon énergie. Dans cette optique, la seule valeur de mon apport comme mathématicien est de me permettre aujourd'hui, grâce à l'estime professionnelle et personnelle acquise parmi mes collègues, de donner plus de force à mon témoignage et à mon action en faveur d'une stricte subordination de toutes nos activités, y compris nos activités de scientifiques, aux impératifs de la survie, et à la promotion d'un ordre stable et humain sur notre planète, sans lequel la survie de notre espèce ne serait ni possible, ni désirable.

A Grothendieck

Principales publication

Espaces Vectoriels Topologiques

1. *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. 74 (1952), p. 168-186.

2. *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, J. Crelle 192 (1953), p. 35-64 et 77-95.

3. *Espaces Vectoriels Topologiques*, Notes polyc., Sao Paulo (1954), 240 p.

4. *Sur les espaces* (F) *et* (DF), Summa Bras. 3 (1954), p. 57-123.

5. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. AMS, n° 16 (1955), 329 p.

6. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologique*, Bull. Sao Paulo 8 (1953), p. 1-79.

7. *La théorie de Fredholm*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 319-384.

Topologie et algèbre homologique

8. *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku M.j., 9 (1957), p. 119-221.
9. *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 1-7.

Géométrie analytique

10. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J., 79 (1957), p. 121-138.
11. *Techniques de construction en géométrie analytique*, Sem. H. Cartan, 13 (1960/61), exposés 7 à 17.

Géométrie algébrique

12. *La théorie des classes de Chern*, Bull. SMF 86 (1958), p. 137-154.
13. *Sur une note de Mattuck-Tate*, J. Crelle 200 (1958), p. 137-154.
14. *The cohomologie theory of abstract algebraic varieties*, Proc. Int Congress, Edinburgh (1958), p. 103-118.
15. *Éléments de Géométrie Algébrique* (rédigés avec la coll. de Jean DIEUDONNÉ), Chap. I-IV, publ. Math. IHES (1960/67), env. 1800 pages.
16. *Séminaires de Géométrie Algébrique* (SGA 1, ... ,7), IHES, 1960/69, env. 4000 pages (en cours de réedition chez Springer, Lecture Notes) :

SGA 1 Théorie du Groupe Fondamental

SGA 2 Cohomologie locale et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux

SGA 3 (en coll. avec M. Demazure) Schémas en Groupes des Topos et Cohomologie étale des Schémas

SGA 5 Cohomologie ℓ-adique et fonctions L

SGA 6 (en coll. avec J. Berthelot et J.L. Illusie) Théorie des Intersections et Théorèmes de Riemann-Roch

SGA 7 Groupe de Monodromie en Géométrie Algébrique

17. *Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens*, Invent. Math. 2 (1966), p. 59-78.

18. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (en coll. avec J. Giraud, S. Kleiman, M. Raynaud, J. Tate), North Holland, 1968.

19. *Catégorie cofibrées additives et complexe cotangent relatif*, LectureNotes in Maths., Springer n° 79 (1968), 167 pages.

ESQUISSE THÉMATIQUE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE A. GROTHENDIECK

Les numéros entre crochets renvoient, soit à la bibliographie sommaire jointe à mon Curriculum Vitae (numéros de [1] à [19]), soit au complément à cette bibliographie placée à la fin du présent rapport (numéros entre [1 bis] et [20 bis]). Enfin, nous avons joint en dernière page une liste par ordre alphabétique des auteurs de certains des travaux cités dans les présent rapport qui ont été directement suscités ou influencés par les travaux de A. Grothendieck ; le renvoi à cette dernière bibliographie se fait par le sigle [*] derrière le nom de l'auteur cité, comme pour I. M. Gelfand [*].

1. Analyse Fonctionnelle ([1] à [7], [6 bis])

Mes travaux d'Analyse Fonctionnelle (de 1949 à 1953) ont porté surtout sur la théorie des espaces vectoriels topologiques. Parmi les nombreuses notions introduites et étudiées (produits tensoriels topologiques [5,6], applications nucléaires et applications de Fredholm [5,6,7], applications intégrales et ses variantes diverses [5,6], applications de puissance p-ième sommable [5], espaces nucléaires [5], espaces (DF) [4], etc.), c'est la notion d'*espace nucléaire* qui a connu la meilleure fortune : elle a fait jusqu'à aujourd'hui l'objet de nombreux séminaires et publications. En particulier, un volume du traité de I. Gelfand [*] sur les "Fonctions Généralisées" lui est consacré. Une des raisons de cette fortune provient sans doute de la théorie des probabilités, car il s'avère que parmi tous les EVT, c'est dans les espaces nucléaires que la théorie de la mesure prend la forme la plus simple (théorème de Minlos). Les résultats de [6], plus profonds, semblent avoir été moins bien assimilés par les développements ultérieurs, mais ils apparaissent comme source d'inspiration dans un certain nombre de travaux délicats assez récents sur des inégalités diverses liées à la théorie des espaces de Banach, notamment ceux de Pelczynski. Signalons également les résultats assez fins de [6] et de [8 bis] sur les propriétés de décroissance de la suite des valeurs propres de certains opérateurs dans les espaces de Hilbert et dans les espaces de Banach généraux.

Références : L. Schwartz, J. Dieudonné, I. Gelfand, P. Cartier, J. L. Lions.

2. Algèbre Homologique ([8], [9], [19], [9 bis])

Depuis 1955, me plaçant au point de vue de "l'usager" et non celui de spécialiste, j'ai été amené continuellement à élargir et à assouplir le langage de l'algèbre homologique, notamment sous la poussée des besoins de la géométrie algébrique (théories de dualité, théories du type Riemann-Roch, cohomologies ℓ-adiques, cohomologies du type de De Rham, cohomologies cristallines…). Deux directions principales à ces réflexions : développement d'une algèbre homologique non commutative (amorcée dans [10 bis] et systématisée dans la thèse de J. Giraud [*]); théorie des catégories dérivées (dévelopée systématiquement par J. L. Verdier, exposée dans Hartshorne [*], Illusie [*] et [16 SGA 4 Exp. XVIII]). Ces deux courants de réflexion sont d'ailleurs loin d'être épuisés, et sont sans doute appelés à se rejoindre, soit au sein d'une "algèbre homotopique" dont une esquisse préliminaire a été faite par Quillen [*], soit dans l'esprit de la théorie des n-catégories, particulièrement bien adaptée à l'interprétation géométrique des invariants cohomologiques (cf. le livre cité de J. Giraud et le travail de Mme. M. Raynaud [*]).

Références : J.L. Verdier, P. Deligne, D. Quillen, P. Gabriel.

3. Topologie ([16, SGA 4], [9])

Jusqu'à présent, c'est surtout le K-invariant des espaces topologiques que j'avais introduit à l'occasion de mes recherches sur le théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique, qui a connu la fortune la plus brillante, étant le point de départ de très nombreuses recherches en topologie homotopique et topologie différentielle. De nombreuses constructions que j'avais introduits pour les besoins de la démonstration algèbrqiue du théorème de Riemann-Roch (telles les opérations λ_i et leurs liens avec les opérations du groupe symétrique) sont devenues pratique courante non seulement en géométrie algébrique et en algèbre, mais également en topologie et en théorie des nombres, notamment dans les travaux de mathématiciens commme Atiyah, Hirzebruch, Adams, Quillen, Bass, Tate, Milnor, Karoubi, Shih, etc...

Plus fondamental me semble néanmoins l'élargissement de la topologie générale, dans l'esprit de la théorie des faisceaux (développée initialement par J. Leray), contenu dans le point de vue des topos ([16, SGA 4]). J'ai introduit ces topos à partir de 1958 en partant du besoin de définir une cohomologie ℓ-adique des variétés algébriques (plus généralement, des schémas), qui convienne à l'interprétation cohomologique des célèbres conjectures de Weil. En effet, la notion traditionnelle d'espace topologique ne suffit pas à traiter le cas des variétés algébriques sur un corps autre que le corps des complexes, la topologie proposée précédemment par Zariski ne donnant pas lieu à des invariants cohomologiques "discrets" raisonnables. A l'heure actuelle, le point de vue des topos, et la notion de "localisation" correspondante, font partie de la pratique quotidienne du géomètre algébriste, et il commence à se répandre également en *théorie des catégories* et en *logique mathématique* (avec la démonstration par B. Lawvere [*] du théorème de Cohen d'indépendance de l'axiome du continu, utilisant une adaptation convenable de la notion de topos). Il n'en est pas encore de même en topologie et en géométrie différentielle et analytique, malgré certains premiers essais dans ce sens (comme la tentative de démonstration par Sullivan d'une conjecture d'Adams en K-théorie, par réduction à une propriété de l'opération de Frobenius sur les variétés algébriques en car. $p > 0$).

Références : M. Atiyah, F. Hirzebruch, H. Bass, J. Leray, M. Artin, D. Quillen, M. Karoubi...

4. Algèbre ([15], [16], [18])

Comme l'algèbre homologique, l'algèbre a été pour moi un outil à développer, et non un but en soi. J'ai parlé au par. 2 de mes contributions à l'algèbre homologique, et au par. 3 de mes contributions à la K-théorie; celle-ci comprend une partie purement algébrique (qui, une fois étendue en une théorie des K^i supérieurs, finira par devenir une partie de l'algèbre homologique ou homotopique). Ainsi, un certain nombre de mes résultats en géométrie algébrique se spécialisent en des résultats en algèbre pure, comme la relation $K(A[t]) \simeq K(A)$, où A est un anneau. Mises à part ces retombées, on peut signaler les contributions ci-dessous.

a) *Algèbre catégorique* : En fait, de façon continuelle depuis 1953, je me suis senti dans l'obligation, au fur et à mesure des besoins, de développer une panoplie catégorique toujours insuffisante. La plupart des résultats et des notions ainsi introduites se trouvent développés un peu partout dans [15, 16], notamment dans le premier exposé de SGA 4. Il ne peut être question de passer en revue ici même sommairement les notions qui sont ainsi entrées dans l'usage courant. Signalons seulement ici le langage des *univers* (pour éliminer des difficultés logiques dans la manipulation intensive des catégories), et celui de la *descente* (développé de façon systématique par Giraud [*]).

   Références : J. Giraud, P. Gabriel.

b) *Algèbre commutative* : Dans le langage géométrique des "schémas", l'algèbre commutative peut être considérée comme étant, essentiellement, l'étude locale des schémas. C'est ainsi que [15], et notamment le Chap. IV de cet ouvrage, contient de très nombreux résultats nouveaux d'algèbre commutative, dont il ne peut être question ici d'énumérer même les plus couramment utilisés. Notons seulement ici, en algèbre locale, la notion d'anneau *excellent* et ses propriétés de permanence (dont l'absence constituait sans doute la lacune la plus marquante de l'ouvrage de M. Nagata sur les anneaux locaux).

   Références : M. Nagata, P. Samuel, M. Raynaud, O. Zariski.

c) *Théorie du groupe de Brauer* : Mes contributions découlent pour l'essentiel de l'application de la cohomologie étale (développée dans [16, SGA 3]) à la théorie du groupe de Brauer. J'ai fait un exposé d'ensemble sur les résultats connus sur ce groupe dans [18].

Références : M. Artin, J. Tate, J.P. Serre

d) *Théorie des algèbres de Lie* : Comme sous-produit de recherches sur les groupes algébriques en car. $p > 0$, je trouve certains résultats délicats sur les sous-algèbres de Borel ou de Cartan de certaines algèbres de Lie, notamment sur les corps de base imparfaits (cf. [16, SGA 6, Exp. XIII et XIV]).

Références : M. Demazure, J. Tits, J.P. Serre

5. Géométrie Analytique ([10], [11], [16 bis])

Mon influence sur la géométrie analytique est due moins aux résultats nouveaux que j'ai pu y démontrer (la plupart contenus dans les réf. cit.), que par les points de vue directement inspirés par la géométrie algébrique que j'ai pu y introduire, et les nombreuses suggestions d'énoncés que j'ai pu y faire.

Un des plus anciens est le théorème de finitude de Grauert pour les morphismes propres d'espaces analytiques, aboutissant à sa généralisation récente en un théorème qui s'énonce en termes de catégories dérivées (formulation sur laquelle j'avais insisté de longue date, et qui a été prouvée indépendamment par R. Kiehl [*] et O. Forster et K. Knorr [*]). D'autres théorèmes de finitude (de Frisch et Siu) pour les images directes supérieures d'un faisceau cohérent par une immersion ouverte, utilisant la profondeur du faisceau en les points du complémentaire, sont inspirés de théorèmes analogues en géométrie algébrique [16, SGA 2]; remarques analogues pour des théorèmes sur la cohomologie à supports compacts des faisceaux algébriques cohérents, complétés par une théorème d'existence., et leur interprétation en termes de théorèmes du type de Lefschetz pour la cohomologie cohérente (la version algébrique faire partie de la thèse de Mme. Michèle Raynaud (en cours de publication), et la version analytique est due à Trautmann [*]). Parlant en termes de grands thèmes de recherche plutôt qu'en termes de résultats techniques particuliers, je pense qu'outre les thèmes déjà nommés, les thèmes suivants ont été directement suscités ou tout au moins influencés par des idées que j'avais développées en géométrie algébrique:

a) *Techniques de construction d'espaces analytiques*, aboutissant aussi bien à des espaces "modulaires" "globaux" comme les espaces modulaires de Picard, pour certains espaces analytiques compacts comme dans [11] (le cas général ne semble pas encore traité), qu'à des espaces modulaires "locaux" de déformation d'une structure analytique complexe donnée, ou au modèle de la Géométrie Formelle ("th. d'existence des modules formels", cf. [15 bis, Exp. no 195]). Dans certains cas, les énoncés obtenus en géométrie algébrique sont directement applicables (cf. M. Hakim [*]), dans d'autres de nouvelles difficultés surgissent, pas toujours surmontées à l'heure actuelle. Parmi les travaux définitifs dans ce sens, on peut citer la thèse de A. Douady [*].

b) *Théorèmes de dualité locaux et globaux pour les faisceaux cohérents*, développés notamment par J.L. Verdier [*] et J.P. Ramis et G. Ruget [*], inspirés par la théorie que j'avais développée dans le cas des schémas, exposée dans R. Hartshorne [*].

c) *Formulations de théorèmes du type de Riemann-Roch* pour des variétés analytiques compactes ou des morphismes propres de telles variétés, cf. [16, SGA 6, Exp. 0]. Les problèmes essentiels restent toujours ouverts.

d) *Théorèmes de De Rham analytiques complexes [16 bis], cohomologie cristalline complexe*. Certains des résultats et des idées que j'avais développés à ce sujet ont été utilisés dans des développements théoriques divers, comme la théorie de Hodge généralisée de P. Deligne [*].

e) *Espaces rigide-analytiques.* M'inspirant de l'exemple de la "courbe elliptique Tate", et des besoins de la "géométrie formelle" sur un anneau de valuation discrète complet, j'étais parvenu à une formulation partielle de la notion de variété rigide-analytique sur un corps valué complet, qui a joué son rôle dans la première étude systématique de cette notion par J. Tate [*]. Par ailleurs, les "cristaux" que j'introduis sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique > 0 peuvent s'interpréter parfois en termes de fibrés vectoriels à connexion intégrable sur certains types d'espaces rigide-analytiques sur des corps de caractéristique nulle; ceci fait pressentir l'existence de relations profondes entre cohomologie cristalline en car. > 0, et cohomologie de systèmes locaux sur des variétés rigide-analytiques en car. nulle.

Références : J. P Serre, H. Grauert, H. Cartan, P. Deligne, A. Douady, B. Malgrance, K. Knorr, R. Kiehl, J. Tate.

6. Groupes Algébriques ([16 SGA 3 - en trois volumes] [12 bis])

Ce sujet relève à la fois de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes. Le travail cité SGA 3 se place surtout sur des schémas de base généraux, et la part de la géométrie algébrique y est certes considérablement plus large que celle de la théorie des groupes. Néanmoins, grâce à la technique des schémas, nous y obtenons des résultats nouveaux même dans le cas de groupes définis sur un corps de base, les plus intéressants (relatifs surtout au cas d'un corps de base imparfait) étant contenus dans SGA 3, Exp XIV. Ma contribution principale, continuant dans la voie ouverte par A. Borel et C. Chevalley dans le contexte de la géométrie algébrique habituelle, a été de montrer le parti qu'on pouvait tirer d'une application systématique de la théorie des schémas aux groupes algébriques et aux schémas en groupes.

Références : J. Tits, F. Bruhat, M. Demazure, P. Gabriel, A. Borel, D. Mumford.

7. Groupes discrets ([18, Exp VIII], [13 bis])

Dans [18, Exp. VIII] je développe une théorie purement algébrique des classes de Chern des représentations d'un groupe discret sur un corps de base (ou même un anneau de base) quelconque, avec des applications de nature arithmétique sur l'ordre des classes de Chern des représentations complexes. Cette théorie peut être considérée comme cas particulier d'une théorie des classes de Chern des représentations linéaires de schémas en groupes quelconques, elle-même contenue dans la théorie des classes de Chern ℓ-adiques des fibrés vectoriels sur des topos annelés quelconques. Dans [13 bis], j'établis, à peu de choses près, que pour un groupe discret G, la théorie des représentations linéaires de G (sur un anneau de base quelconque) ne dépend que du complété profini $\hat{G}$ de G.

8. Groupes formels ([17] [16 SGA 7] [14 bis])

C'est un sujet qui relève à la fois de la théorie des groupes, de celle des groupes de Lie, de la géométrie algébrique, de l'arithmétique, et (sous la forme voisine des groupes de Barsotti-Tate) de la théorie des systèmes locaux. Ici encore, la théorie des schémas permet une grande aisance, et c'est dans ce contexte par exemple que se place d'emblée I. Manin [*a], dans son exposé classique de la théorie de Dieudonné. Ma principale contribution, en dehors de cette simplification conceptuelle, a été le développement d'une "théorie de Dieudonné" pour les groupes de Barsotti-Tate sur des schémas de base généraux à caractéristiques résiduelles > 0, en termes du "cristal de Dieudonné" associé à un tel groupe. Une esquisse de cette théorie a été exposée dans divers cours et séminaires, y compris dans mon cours au Collège de France en 1970/71 et 71/72; certains énoncés principaux sont esquissés dans les C.R. du Congrès International de Nice en 1970 [14 bis]. Une partie de ces idées est développée dans la thèse de W. Messing [*], et les besoins techniques de la théorie ont été la motivation pour le développement par L. Illusie [*] de sa théorie des déformations des schémas en groupes commutatifs, vérifiant des conjectures suggérées par cette "théorie de Dieudonné cristalline". Par ailleurs, les relations entre schémas abéliens et groupes de Barsotti-Tate associés sont explorées et exploitées également dans [17] et dans [16, SGA 7, Exp. IX].

Références : J. Tate, B. Mazur, A. Néron, L. Illusie, J.N. Katz, W. Messing, I. Manin.

9. Arithmétique ([16 SGA 5, Exp XVI] [18, Exp III])

Ma contribution principale a consisté (en collaboration avec M. Artin) en la démonstration de la rationalité des fonctions L associées à des faisceaux ℓ-adiques généraux sur des variétés algébriques sur des corps finis, comprenant comme cas particulier les fonctions L associées à des caractères de groupes finis opérant sur de telles variétés. S'inspirant des conjectures de Weil, on arrive en effet à exprimer ces fonctions L en termes de produits alternés de polynômes caractéristiques de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la "cohomologie à support propre" de la variété envisagée. Bien au delà d'une simple question de rationalité, ces résultats ouvrent la voie à une approche cohomologique systématique d'invariants arithmétiques subtils comme les fonctions ζ et L des variétés, et l'interprétation en termes arithmétiques de théorèmes tels que les théorèmes de dualité (démontrés à l'heure actuelle) et de Lefschetz pour les sections hyperplanes (non démontrés encore en car. > 0). Il y a là un champ d'étude immense, qui par la nature des choses devrait se trouver, tôt ou tard, centré sur la notion de "motif" (dénominateur commun des divers types de cohomologie qu'on sait attacher à une variété algébrique) – mais qui probablement ne sera jamais exploré jusqu'au bout, l'heure de ce genre d'investigations étant déjà passée (même si rares sont ceux qui en ont pris conscience).

Références : J.P. Serre, A. Weil, B. Dwork, J. Tate, M. Artin, P. Deligne…

10. Géométrie Algébrique ([12] à [19], [15 bis] à [20 bis])

C'est dans cette direction que mon influence a été la plus directe et la plus profonde, puisque c'est dans cette optique que se placent pour l'essentiel mes travaux depuis 1959. Voici les thèmes principaux sous lesquels on peut placer mes contributions:

a) *Travail de fondement* : Il s'agissait de dégager un cadre suffisamment vaste pour servir de fondement commun à la géométrie algébrique habituelle (y compris celle développée par des auteurs comme A. Weil, O. Zariski, C. Chevalley, J.P. Serre sur des corps de base quelconques) et à l'arithmétique. C'est fait pour l'essentiel dans [15, Chap. I,II et des parties des Ch. III et IV], avec l'introduction et l'étude de la *notion de schéma*. Des généralisations ont été développées par la suite, dans le même esprit, avec les schémas formels [15, Chap. I, par. 10], la théorie des "algebraic spaces" de M. Artin (cf. Knutson [*]), les "algebraic stacks" ou "multiplicités algébriques" de P. Deligne et D. Mumford (*), des "schémas relatifs" de la thèse de M. Hakim [*] (en attendant les "multiplicités formelles" et les "multiplicités algébriques relatives" sur des topos annelés généraux, etc). Ces généralisations montrent la part conceptuelle importante qui revient, dans le langage des schémas, à la notion générale de la localisation, c'est à dire à celle de *topos* (dont il a été question au par. 3). Les fondements développés dans [15] et [16] sont aujourd'hui le "pain quotidien" de la grande majorité des géomètres algébristes, et leur importance a été soulignée à de nombreuses occasions par des mathématiciens aussi divers que O. Zariski, J.P. Serre, H. Hironaka, D. Mumford, I. Manin, F. Chafarévitch.

b) *Théorie locale des schémas et des morphismes de schémas* : Dans ce contexte se placent les développements d'algèbre commutative mentionnés au par. 4, et l'étude détaillée de notions comme celles de morphisme lisse, étale, net, plat, etc. Les quatre volumes de [15, Chap. IV] sont consacrés à ces développements, qui ont d'ailleurs inspiré des développements analogues en théorie des espaces analytiques et rigide-analytiques

c) *Techniques de construction de schémas* : Parmi les techniques développées, exposées surtout dans [15 bis] et des séminaires non publiés (par moi-même et d'autres), il y a la *théorie de la descente* (cf. aussi [16, SGA I, Exp. V, VI]), celle des *schémas quotients*, des *schémas de Hilbert*, des *schémas de Picard*, des *"modules" formels*, le *théorème d'existence* des faisceaux de modules algébriques associés à des modules formels ([15, Chap. III, par. 5]). Le point de vue adopté est surtout celui de la construction d'un schéma à partir du foncteur qu'il représente. Dans cette optique, je n'étais pas parvenu à une véritable caractérisation maniable des foncteurs représentables par une schéma relatif (localement de type fini sur un schéma noethérien) – c'est M. Artin qui y est parvenu ultérieurement [*], en remplaçant la notion de schéma par celle, plus générale et plus stable, d'espace algébrique. Parmi d'autres recherches dans la même direction, suscitées par mes travaux, il y a celles de J. Murre sur les schémas de Picard sur un corps [*], celles de D. Mumford et de M. Raynaud [*] sur ces mêmes schémas sur des bases générales, et dans une certaine mesure ceux de D. Mumford [*] et de S. Seshadri sur le passage au quotient, pour n'en citer que quelques-uns.

d) *Théories cohomologiques* :

   1°) *Cohomologie "cohérente"* : résultats de finitude, de comparaison avec la cohomologie formelle, cf. [15, Chap. III]. Théorèmes de dualité et des résidus : un exposé systématique de mes idées et résultats est développé dans le séminaire de R. Hartshorne [*], cf. aussi [18 bis].

2°) *Cohomologie ℓ-adique* : définition de la cohomologie étale, théorèmes de comparaison, de finitude, de dimension cohomologique, de Lefschetz faible, [16 SGA 4]; théorèmes de dualité, formules de Lefschetz et d'Euler-Poincaré, application aux fonctions L, [16, SGA 15].

3°) *Cohomologie de De Rham* : [16 bis], [17 bis].

4°) *Cohomologie cristalline* : quelques idées de départ sont esquissées dans [18, Exp. IX], puis reprises et systématisées dans la thèse de P. Berthelot [*], et dans le travail de P. Berthelot et L. Illusie sur les classes de Chern cristalline [*].

e) *Théorie du groupe fondamental* ([16, SGA 1], SGA 2, SGA 7, Exp. I et II], [15 bis, no 182], [19 bis]) :

D'un point de vue algébrico-géométrique, tout était à faire, depuis la définition du groupe fondamental d'une variété quelconque, en passant par des propriétés "de descente" incluant des résultats assez formels du type de van Kampen, jusqu'au calcul du groupe fondamental dans les premiers cas non triviaux, comme celui d'une courbe algébrique privée de certains points; on peut y adjoindre les théorèmes de génération et de présentation finie du groupe fondamental d'une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Ce programme est accompli pour l'essentiel dans SGA 1, en utilisant à la fois les résultats classiques sur le corps des complexes (établis par voie transcendante) et une panoplie d'outils faits sur mesure (théorie de la descente, étude des morphismes étales, théorème d'existence de faisceaux cohérents…). Les autres références contiennent des résultats plus spéciaux: théorèmes du type de Lefschetz dans SGA 2, action des groupes de monodromie locale sur le groupe fondamental d'une fibre dans SGA 7, Exp. I, calculs de certains groupes fondamentaux locaux dans [19 bis], via les groupes fondamentaux de certains schémas formels. Tous ces résultats ont été utilisés couramment dans de nombreux travaux, et en ont inspiré d'autres comme la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*].

f) *Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* pour les groupes de Picard, le groupe fondamental, la cohomologie étale, la cohomologie cohérente. Il s'agit ici de la comparaison entre les invariants (cohomologiques ou homotopiques) d'une variété algébrique et d'une section hyperplane. Les idées de départ sont développées dans [16, SGA 2]. Cependant, pour des énoncés "définitifs", en termes de conditions nécessaires et suffisantes, se reporter plutôt à la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*] déjà citée.

g) *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* :

La principale idée nouvelle, c'est qu'il y a presque identité entre le groupe "de Chow" des classes de cycles sur une variété X, et un certain groupe de "classes de faisceaux cohérents" (tout au moins modulo torsion), à savoir le groupe $K(X)$ (mentionné dans le par. 3). Dans un contexte modeste c'est exposé dans [12] et le travail de A. Borel et J.P. Serre [*], dans un contexte plus ambitieux cela donne l'imposant séminaire [16, SGA 7]. Dans le même esprit, cf. [12 bis].

Par ailleurs, l'idée (que je semble avoir été le premier à introduire avec ma formulation du théorème de Riemann-Roch) de reformuler un théorème sur une variété (dû en l'occurrence à F. Hirzebruch) en un théorème plus général sur un morphisme de variétés, a connu par la suite une grande fortune, non seulement en géométrie algébrique, mais aussi en topologie algébrique et topologie différentielle (à commencer par la "formule de Riemann-Roch différentiable", développée par M.F. Atiyah et F. Hirzebruch sous l'inspiration de ma formulation "relative" du théorème de Riemann-Roch).

h) *Schémas abéliens* :

En termes plus classiques, ce sont les familles de variétés abéliennes, paramétrées par un schéma quelconque. Les résultats les plus importants que j'y ai établis sont le *"théorème de réduction semi-stable"* et ses conséquences et variantes [16, SGA 7, Exp. IX], le théorème d'*existence de morphismes de schémas abéliens* contenu dans [17] et ses variantes (généralisé par P. Deligne [*] en un théorème sur la cohomologie de Hodge-De Rham relative d'une famille de variétés projectives complexes non singulières), enfin une théorie des *déformations infinitésimales des schémas abéliens* (non publiée sur une base quelconque), en termes de la déformation d'une filtration de Hodge sur un H^1 relatif de De Rham (interprété comme une cohomologie cristalline).

i) *Groupes de monodromie* :

Mes principales contributions sont exposées (en partie par P. Deligne) dans le premier volume de [16, SGA 7], donnant des propriétés fondamentales de l'action du groupe de monodromie locale sur la cohomologie comme sur le groupe fondamental d'une fibre. Parmi les principales applications, il y a le théorème de "réduction semi-stable" des schémas abéliens signalé au paragraphe précédent.

j) *Divagations motiviques* :

Nous entrons ici dans le domaine du rêve éveillé mathématique, où on s'essaie à deviner "ce qui pourrait ^etre", en étant aussi insensément optimiste que nous le permettent les connaissances parcellaires que nous avons sur les propriétés arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. La notion de motif peut se définir en toute rigueur avec les moyens du bord (c'est fait par I. Manin [*] et M. Demazure [*]), mais dès qu'on veut aller plus loin et formuler des propriétés fondamentales "naturelles", on bute sur des conjectures actuellement indémontrables, comme celles de Weil ou de Tate, et d'autres analogues que la notion même de motif suggère irrésistiblement. Ces propriétés ont fait l'objet de nombreuses conversations privées et de plusieurs exposés publics, mais n'ont jamais fait l'objet d'une publication, puisqu'il n'est pas d'usage en mathématique (contrairement à la physique) de publier un rêve, si cohérent soit-il, et de suivre jusqu'au bout où ses divers éléments nous peuvent entraîner. Il est évident pourtant, pour quiconque se plonge suffisamment dans la cohomologie des variétés algébriques, "qu'il y a quelque chose" – que "les motifs existent". Il y a quelques années encore, j'ai joué avec l'idée d'écrire contrairement à l'usage, un livre entièrement conjectural sur les motifs – une sorte de science-fiction mathématique. J'en ai été empêché par des tâches plus urgentes que des tâches de mathématicien, et je doute fort actuellement qu'un tel livre soit jamais écrit, ni qu'on arrive jamais (même conjecturalement) à se faire une idée d'ensemble à la fois précise et suffisamment vaste sur le formalisme des motifs. Avant qu'on n'y parvienne, il sera sans doute devenu évident pour tous, sous la poussée des événements, la science spéculative et parcellarisée ne faisant plus vivre son homme, qu'il est des tâches plus urgentes que de mettre sur pied même la plus belle théorie du monde, conjectural ou non.

Complément à la bibliographie sommaire jointe au Curriculum Vitae de A. Grothendieck (travaux non inclus dans la dite bibliographie)

Analyse fonctionnelle

1 bis. *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles*, Journal d'Analyse Math. vol II, pp. 243-280 (1952/53).

2 bis. *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*, Boletim da Soc. Mat. de Sao Paulo, vol. 8°, pp. 85-110 (1953).

3 bis. *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$, Canadian Journal of Math., Vol. 5, pp. 125-173 (1953).

4 bis. *Sur certains sous-espaces vectoriels de* L^p, Can. J. Math. vol. 6, pp. 158-160 (1953).

5 bis. *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces* L^1, Can. Journ. Math. vol. 7, pp. 552-561 (1955).

6 bis. *Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de Von Neumann munies d'une trace*, Séminaire Bourbaki n° 115 (Mars 1955).

7 bis. *Un résultat sur le dual d'une* C^**-algèbre*, Journ. de Math. vol. 36, pp. 97-108 (1957).

8 bis. *The trace of certain operators*, Studia Mathematica t. 20 (1961) pp. 141-143.

Algèbre Homologique

9 bis. *A general theory of fiber spaces with structure sheaf*, University of Kansas, 1955.

10 bis. *Standard conjectures on algebraic cycles*, Proc. Bombay, Coll. on Alg. Geom. 1968, pp. 193-199.

Algèbre

11 bis. (en collaboration avec J. Dieudonné) *Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques*, Journal of Algebra, vol. 5, pp. 305-324 (1967).

Groupes algébriques

12 bis. Exposés 4 (Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections) et 5 (torsion homologique et sections rationnelles), in Anneaux de Chow et applications, Sém. Chevalley à l'ENS, 1958, (36 p + 29 p.).

Groupes discrets

13 bis. *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets*, Manuscripta Math. vol 2, pp. 375-396 (1970).

Groupes Formels

14 bis *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes Congr. Int. math. 1970, t. 1., pp. 431-436.

Géométrie Algébrique

15 bis. *Techniques de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique* (recueil des exposés Bourbaki n° 182, 190, 195, 212, 221, 232, 236), Secrétariat de l'IHP, rue Pierre Curie, Paris (1958-1962).

16 bis. *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES, vol. 29, pp. 95-103 (1966).

17 bis. *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons*, Topology, vol. 8, pp. 299-303 (1969).

18 bis. *Local cohomology* (notes by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math. n° 41 (1967), Springer.

19 bis. (en coll. avec J.P. Murre) *The tame fundamental group of a formal neighbourhood…* Lecture Notes in Math. n° 208 (1971), Springer.

20 bis. (avec H. Seydi), *Platitude d'une adhénrece a schématique et lemme de Hironaka généralisé*, Manuscripta Math. 5, pp. 323-339 (1971).

Liste de travaux cités, suscites ou influences par les travaux de A. Grothendieck

M. ARTIN, Algebraization of Formal Moduli, I (in Global Analysis, pp. 21-71, University of Tokyo Press, Princeton University Press, 1968), II Existence of modifications, Annals of Mathematics, Vol. 91, pp. 88-135 (1970).

M.F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 65, pp 276-281 (1959).

P. BERTHELOT, Cohomologie cristalline des schémas propres et lisses de caractéristique $p > 0$, Thèse, Université Paris VII, 1971 (paraîtra dans Lecture Notes of Math. chez Springer).

P. BERTHELOT et L. ILLUSIE, Classes de Chern en cohomologie cristalline, C.R. Acad. Sci. Paris t. 270, pp. 1695-1697 (22 juin 1970) et p. 1750-1752 (29 juin 1970).

A. BOREL et J.P. SERRE, Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck), Bull. Soc. Math. France, t. 86, pp. 97-136 (1958).

P. DELIGNE, Théorie de Hodge I (Actes du Congrès International des mathématiciens, Nice 1970) et II, Publications Math. n° 40, pp. 5-57 (1971).

P. DELIGNE et D. MUMFORD, The irreducibility of the space of curves of a given genus, Pub. Math. n° 36, pp. 75-110 (1969).

M. DEMAZURE, Motifs des variétés algébriques, Sém. Bourbaki n° 365, 1969/70.

A. DOUADY, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts…, Ann. Inst. Fourier, vol. 16, pp. 1-98 (1966).

O. FORSTER et K. KNORR, Relativ-analytische Raume und die Koharenz von Bildgarden, Inventions Math. Vol. 16, pp. 113-160 (1972).

I.M. GELFAND et N. Ja. VILENKIN, Les distributions, tome 4, Applications de l'analyse harmonique, Dunod, Paris, 1968 (traduction).

J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne, Grundlehren des Maths. Wiss. Bd. 179, 1971, Springer.

M. HAKIM, Topos annelés et schémas relatifs, Ergebnisse des Math. Bd. 64, 1972, Springer.

R. HARTSHORNE, Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics n° 20 (1966).

L. ILLUSIE, Complexe Cotangent et Déformations I, Lecture Notes in Math. n° 239 (1971), Springer et II, idem, n° 283 (1972).

R. KIEHL, Relativ analytische Raume, Inventiones Math. vol. 16, pp. 40-112 (1972).

D. KNUTSON, Algebraic spaces, Lecture Notes in Math. n° 203 (1971), Springer.

F.N. LAWVERE, Toposes, algebraic geometry and logic, LEcture notes in MAth., n° 274 (1972), Springer.

I. MANIN,

a) Théorie des groupes formels commutatifs sur des corps de caractéristique finie, (en russe) Uspekhi mat. Nauk, 1963, t. 18, pp. 3-90. (Il existe une traduction anglaise de l'Amer. Math. Soc).

b) Correspondances, motifs et transformations monoïdales (en russe), Mat. Sbornik t. 77, pp. 475-507.

W. MESSING, The crystals associated to a Barsotti-Tate group, Lecture Notes in Math. n° 264 (1971) Springer.

D. MUMFORD, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Math. Bd 34, 1965, Springer.

J.P. MURRE, On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups, Pub. Math. n° 23, pp. 5-43 (1964).

D. QUILLEN, Homotopical algebra, Lecture Notes in Math. n° 43 (1967), Springer.

M. RAYNAUD, Spécialisation du Foncteur de Picard, Publications Math. n° 38, pp. 27-76 (1970).

Mme. M. RAYNAUD, Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et cohomologie étale, Thèse Paris 1972 (paraîtra dans Lecture Notes of Math.)

J.P. RAMIS et G. RUGET, Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe, Pub. Math. n° 38, pp. 77 à 91 (1970).

J. TATE, Rigid-analytic spaces, Inventiones Mathematicae, vol. 12, pp. 257-289 (1971).

G. TRAUTMANN, Abgeschlossenheit von Corandmoduln une Fortsetzbarkeit koharenter analytischer Garben, Inventiones MAth. vol. 5, pp. 216-230 (1968).

J.L.VERDIER, J.P. RAMIS et G. RUGET, Dualité relative en géométrie analytique complexe, Inventiones MAth., vol. 13, pp. 261-283 (1971).

ESQUISSE D'UNE THÉORIE DES Gr-CATÉGORIES

par Mme Hoang Xuan Sinh

Nous donnons un résumé de quelques résultats sur les Gr-catégories, faisant l'objet d'un travail détaillé que l'auteur compte présenter prochainement comme thèse de doctorat [1].

1. Structure des Gr-catégories

Notre terminologie est celle de Saavedra [2]. Nous nous intéressons à des catégories C munies d'une opération binaire $(X,Y) \mapsto X \otimes Y$ (foncteur de $C \times C$ dans C) associative et unitaire à isomorphisme donné près (satisfaisant des conditions de compatibilité explicitées dans loc. cit.), appelées aussi $\otimes$-catégorie AU (associatives-unitaires). On dit qu'une telle catégorie est une Gr-catégorie si c'est un groupoïde et si tout objet X de C est "inversible", i.e. admet un objet "inverse" $Y = X^{-1}$ (satisfaisant $X \otimes Y \simeq Y \otimes X \simeq 1_C$, où 1_C désigne l'objet unité de C). Les exemples abondent :

Exemples.

1 . X étant un espace topologique ponctué par $x \in X$, on prend pour C la catégorie des lacets de X en x, avec comme morphismes les classes d'homotopie d'homotopies entre lacets, comme opération $\otimes$ la composition des lacets (qui n'est pas associative, mais associative "à homotopie près").

Variante : G est un espace de Hopf associatif (ou simplement homotopiquement associatif en un sens suffisamment fort), C la catégorie dont les objets sont le points de G, les morphismes les classes d'homotopie de chemins entre points de G, la loi $\otimes$ étant induite par la loi de composition de G. (N.B. Lorsque G admet un espace classifiant X, on retrouve essentiellement l'exemple précédent).

2 . Si F est un faisceau sur un espace topologique (ou plus généralement sur un topos), la catégorie C des torseurs sous F, munie de la composition de Baer, est une Gr-catégorie (et même une catégorie de Picard stricte, cf. plus bas). On peut considérer la catégorie C des Modules inversibles sur un espace (ou topos) localement annelé $(X, \underline{O}_X)$ comme le cas particulier correspondant au cas $F = \underline{O}_X^*$.

3 . Si A est une catégorie, la sous-catégorie pleine C de $\underline{\mathrm{Hom}}(A,A)_{\mathrm{is}}$ formée des équivalences de A avec elle-même, munie de l'opération de composition des foncteurs, est une Gr-catégorie. Au lieu de prendre pour A une catégorie, on peut pas généralement prendre pour A un objet d'une 2-catégorie quelconque. Si p.ex. F est un faisceau en groupes (pas nécessairement commutatif) sur un espace topologique (ou un topos) X, prenant pour A le "champ" sur X formé des F-foncteurs à droite, la Gr-catégorie des auto-équivalences de A avec lui-même s'interprète comme la catégorie des "bitorseurs" sous F, i.e. des faisceaux P sur lesquels F opère à la fois à droite et à guache, ces opérations commutant et chacune d'elles faisant de P un torseur (à droite ou à guache) sous F, — la composition $\otimes$ étant la composition de Baer évidente. Lorsque F est encore de la forme $\underline{O}_X^*$ ($\underline{O}_X$ étant un faisceau d'anneaux, qu'on ne suppose plus nécessairement commutatif) ces bitorseurs s'interprètent aussi en termes de bi-Modules "inversibles" sous $\underline{O}_X$.

Structure. — Soit C une Gr-catégorie, on lui associe

a) le groupe $\pi_0(C)$ des classes d'isomorphisme d'objets de C,

b) le groupe $\pi_1(C)$ des automorphismes de 1_C (objet unité de C)

c) une action de $\pi_0(C)$ sur $\pi_1(C)$, en associant à tout objet X de C

l'automorphisme $p(X)$ de 1_C déduit des deux isomorphismes

$$\mathrm{Aut}(1_C) \rightrightarrows \mathrm{Aut}(X)$$

donnés par $u \mapsto u \otimes \mathrm{id}_X$ et $u \mapsto \mathrm{id}_X \otimes u$.

On prouve que $\pi_1(C)$ est un groupe *commutatif* et que l'on obtient bien par c) une structure de $\pi_0(C)$-module sur celui-ci. Ceci posé, si on choisit pour tout $a \in \pi_0(C)$ un représentant $L_a \in \mathrm{Ob}\, C$ de a, et pour deux a, b un isomorphisme

$$\varphi_{a,b} : L_a \otimes L_b \simeq L_{ab},$$

alors pour trois éléments $a, b, c \in \pi_0(C)$, l'isomorphisme d'associativité

$$(L_a \otimes L_b) \otimes L_c \simeq L_a \otimes (L_b \otimes L_c),$$

compte tenu des isomorphismes $\varphi_{a,b}$, $\varphi_{ab,c}$, $\varphi_{b,c}$ et $\varphi_{a,bc}$, peut s'interpréter comme un isomorphisme

$$L_{abc} \simeq L_{abc},$$

ou encore comme la tensorisation à guache avec un élément bien déterminé

$$f(a, b, c) \in \pi_1(C).$$

Les $\varphi_{a,b}$ étant choisis, on voit donc que la donnée d'un isomorphisme d'associativité fonctoriel $(L \otimes L') \otimes L'' \simeq L \otimes (L' \otimes L'')$ équivaut à la donnée de l'application

$$f : \pi_0 \times \pi_0 \times \pi_0 \longrightarrow \pi_1.$$

On vérifie alors que l'axiome standard d'autocompatibilité d'une donnée d'associativité (axiome du pentagone) s'exprime précisément par la condition que f soit un *3-cocycle* du groupe π_0 à valeurs dans le groupe π_1. D'autre part, l'indétermination dans le choix du système d'isomorphismes $\varphi_{a,b}$ est précisément donnée par une 2-cochaine arbitraire, et on voit que si on change φ par une 2-cochaine g, f est changé en $f + dg$ - donc l'ensemble des f correspondants à des choix différents de φ est exactement une classe de 3-cohomologie

$$k(C) \in \mathrm{H}^3(\pi_0(C), \pi_1(C)).$$

En précisant ces réflexions, on trouve que la classification, à $\otimes$-équivalence près, des Gr-catégories, se fait précisément en termes de un groupe π_0, d'un groupe commutatif π_1 sur lequel π_0 opère, et d'une classe de cohomologie (qui peut être prise arbitraire) dans $H^3(\pi_0, \pi_1)$. La loi de groupe du H^3 admet d'ailleurs une interprétation "géométrique" à la Baer, en termes d'opérations sur les Gr-catégories.

Cas particuliers. — Dans l'exemple

2. Catégories de Picard

3. Catégories de Picard enveloppantes

Bibliographie

[1]. Gr-catégories

[2]. NEANTRO SAAVEDRA RIVANO — *Catégories tannakiennes*, Lecture notes in mathematics n°265. Springer Verlag 1972

COMPLEXE DE DE RHAM À PUISSANCES DIVISÉES ET OMBRES DES MODULES[13]

1) Historique

   a) Notion de forme diférentielle (*Poincaré*) et formule de Stokes

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \quad \text{(d'où } \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X, \mathbf{C}).)$$

   b) Th. de DE RHAM (conjecturé par E. CARTAN). Mais [-] Maintenant est bien compris : th. des faisceaux [-]

   c) Théorie de HODGE des integrales harmoniques (structure supplémentaire bigraduée sur $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(X)$ si X kählérienne compacte.)

   d) Théorème de CARTAN-SERRE sur variétés de Stein (car Lemme de Poincaré valable dans l'analytique).

   e) Cas des variétés algébriques ou schémas sur corps de base [?] (ou schéma de base général) : DWORK, WASHNITZER-MONSKY, plus tard le yoga 'cristallin' développé par BERTHELOT, ILLUSIE, MESSING, MAZUR (cf avec Hartshorne, Herrera, Ogus, Bloch (?)). Ici on trouve des théories cohomologiques qui ne [?] sont plus à 'anneau de coefficients' de caractéristique [?] nulle, i.e. contenant $\mathbf{Q}$ — i.e. on perd [?] les phénomènes de torsion [?]. Du point de vue Weil, c'était un défaut irréparable.

[13] Plan du conférence à l'IHES en 1976

f) Th. de GROTHENDIECK pour variétés algébriques sur **C** (généralise par DELIGNE, HARTSHORNE pour des coefficients plus généraux). Ceci donne [?] confiance (du moins en car. 0) en la signification topologique de la cohomologie de De Rham 'algébrique' des schémas algébriques.

g) Complexe de DE RHAM-SULLIVAN pour espaces topologiques généraux : *formes différentielles singulières* C^∞ (resp. **C**-algébriques, resp. **R**-algébriques, resp. **Q**-algébriques). Donne la cohomologie à coefficients dans **C** (resp. **R**, resp. **Q**) (facile)

$$\begin{array}{ccccc} C^\bullet_{\mathbf{R}-\text{alg.}} & \subset & C^\bullet_{C^\infty} & \subset & C^\bullet \\ & & \cup & & \\ & & C^\bullet_{\text{DR}} & & \end{array}$$

Sullivan montre mieux que le **Q**-type d'homotopie de X est récupéré si X est simplement connexe - de façon plus précise, il y a (sauf erreur) une équivalence de catégories donné par

[]

Mais à nouveau, on perd la torsion !

[]

NOTATIONS 1/2 SIMPLICIAUX. CONSTRUCTIONS UNIVERSELLES
1975 ou 1976

$\mathbf{\Delta}$ = catégorie des simplexes Δ^n $(n \geq 0)$, $\Delta^n = [0,n] \subseteq \mathbf{N}$ avec relation d'ordre total.

$\mathbf{\Delta}\hat{}== \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathrm{Ens}) = \mathrm{Ens}_*$.

Plus généralement, si A est une catégorie, on pose

$$A_* = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, A)$$

$$A^* = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, A),$$

donc

$$(A^\circ)^* \simeq (A_*)^\circ, \quad A^* \simeq ((A^\circ)_*)^\circ,$$

où l'exposant $^\circ$ désigne le passage à la catégorie opposée.

Les objets de A_* (resp. A^*) sont considérés comme des structures algébriques de type simple (sur une infinité d'objets de base) dans A, les 'objets semi-simpliciaux' resp. 'semi-cosimpliciaux'. On écrira Ens_* quand on a en vue cet aspect, et $\mathbf{\Delta}\hat{}$ ou quand on a plutôt le point de vue 'objet d'un topos' ou 'faisceau sur un topos'[14]. Tous les développements qui suivent ont pour objet d'étudier ces objets (l'équivalent combinatoire des espaces topologiques) et leurs 'types d'homotopie',

[14]On veut garder [?] à l'aspect [?] la nature algébrique très particulier de ce topos, la notation quand on veut l'oublier, on profite de sa signification topologique.

via des invariants qu'on peut leur associer, qui en dépendent de façon covariante ou contravariante. Nous avons ici en vue une étude systématique, dans l'esprit de l'algèbre universelle, de ces invariants (qui sont donc des foncteurs $\Delta^\wedge = \mathrm{Ens}_*$), de leurs structures et des opérations qui peuvent être définies sur elles, permettant d'en déduire certaines complexes à partir d'autres plus simples.

Un objet de A_* sera généralement noté par un symbole de la forme K_*, où K_* désigne la famille des

[]

Néanmoins, alors que (dans le cas de $A = \mathrm{Ab}_*$ disons) Ab_{k*} et Ab_k est leur structure multiplicative - qui ne se correspond *pas* par DP et ND — celle de Ab_{k*} est plus simple à beaucoup d'égards, et s'introduit d'ailleurs de bien des façons par la suite de façon absolument impérieuse, alors que celle de $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ ne s'introduit pratiquement pas. De plus, pour les opérations tensorielles de type $\bigwedge^i$, Γ^i, ^{i}, elles manquent purement et simplement dans $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ (sauf de les [définit] par transport de structure via DP !) alors qu'elles sont évidentes sur Ab_{k*} ! Or ces structures également joueront un rôle essentiel par la suite.

FAISCEAUTISATION DU TOPOS DE DE RHAM

1.

Soit X un topos, et

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{u} \Phi$$

une immersion de $\mathbf{Z}$ dans un faisceau Φ, tel que

STRUCTURES STRATIFIÉES

1. La situation la plus élémentaire

En un ses qui apparaître, sera la suivante.

[]

de groupoïdes fondamentaux [] est cocartésien - ou encore, si Y, X, X^* sont connexes, et [] (i.e. par définition, un revêtement universel de []) [] un isomorphisme canonique de groupes fondamentaux [] où [] est isomorphe extérieurement à $\pi_1(Y)$.

Pour expliciter $\pi_1(X)$ en termes de données "élémentaires", dont $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(X^*)$ [] encore à expliciter la structure de [], qui s'envoie dans l'un et dans l'autre, donnant [] [] qui exprime (8). C'est ici que l'hypothèse de *locale []* a un [] (celle de lissité [] comme devant techniquement initiale, [] de notre heuristique...).

On doit se [], dans ce cas, pour démontrer que les [] homotopique de [] sont celles d'une *fibration localement triviale des fibres* []: [] - et c'est []] qui devrait [] le contexte topossique (p. ex. celui des schémas avec le topos étale) de *définition* de la "locale trivialité" [] homotopique [] $Y \hookrightarrow X$. (Bien sûr, dans le contexte schématique, il faudrai de plus travailler avec des types d'homotopie profini, et même sans doute "localiser" ces types d'homotopie en l'un des [] premières qui sont distinctes des caractéristique résiduelle qui interviennent, ou que en n'est que alors ce contexte [] des théorèmes qu'il faut, cf Artin-Mazur...)

On ont en particulière une suite exacte d'homotopie []

Si on suppose par exemple que []

allusion, en devrait [ ] exprimer alors le *type d'homotopie de* X (et non seulement son π_1) en termes de diagrammes de groupoïdes (8), ou ce qui revient au même, des diagrammes de groupes (10).

En tous cas, il est clair (indépendemment de toutes hypothèses de nullité de [ ] π_i, ou de [ ]) comment reconstruire en termes du diagramme (8), [ ] faisceaux sur X, [ ] tels que l'on ait

(16) $$F|X^* \quad \text{et} \quad F|Y \quad \text{localisation triviaux}$$

Cette catégorie F est équivalent en effet à celle des systèmes

(17) $$(E_{X^*}, E_{Y,X}, \varphi)$$

E_{X^*} est un système locale sur π, X^* (un recouvrement étale de X^*), $E_{Y,X}$ un système locale sur [ ] un homomorphisme de systèmes locaux sur [ ]

(18) $$\varphi : p^*(E_{Y,X}) \longrightarrow i^*(E_{X^*}).$$

En termes de diagrammes de groupes (10)

2. Stratification globale : [ ] (sans tubes)

Pour simplifier, je vais en placer sur un espace topologique X - par le suite X [ ] un topos quelconque. Les constructions qui suivent, relatifs à une “stratification globale”, [ ] de la façon habituelle - ce qui [ ] alors à imposer des conditions supplémentaires de connexité et de locale connexité, qui pour [ ]. De même [ ].

Soit I un ensemble ordonné,

$$(X_i)_{i \in I} \quad X_i \subset X$$

une famille de sous-espaces de X. On suppose [ ] Posant [ ] on a un morphisme canonique

(3) $$X_{\Delta_0} \longrightarrow X$$

et l'hypothèse a) signifie que ce morphisme est fini - i.e. propre sépare et à fibres finies. C'est aussi une *immersion locale*. On introduit une partie fermé [ ] On voit alors que les deux projections [ ] ont respectivement les propriétés suivantes : [ ] Par ailleurs

3. Stratification globale : introduction au tubes

On [] les notations précédentes.

Pour toute couple $(i \leq j) \in I \times I$, considérons

4. Topos canoniques associées à une stratification globale

On va montrer comment, à une situation stratifiée donnée, on peut en associer d'autres.

A) Image inverse générale.

Rappelons les axiomes utilisés jusqu'à puisant : []

Notons que pour tout X' au dessus de X, le famille des [] satisfait alors aux mêmes conditions.

D'ailleurs le système [] des X_{Δ_r} - comme image inverse le lui des X'_{Δ_r}, défini par les X'_i, [] des isomorphismes []

NB. Nous appliquons ces [] sauf en cas où X' est un ouvert de X. C'est pour [] prendre de telles images inverses [], qu'il [] été commode de supposer les X_i ou les X_i^* non-vides, ou encore par $I \mapsto X_i$ est un *plongement* d'une ordonnée $I \hookrightarrow \mathfrak{P}(X)$.

Lorsque $X' \longrightarrow X$ est une immersion locale propre (mais pas si c'est une immersion ouverte !) alors [] les images inverses de parties [] de X comment à [] des voisinages tubulaires de une telles parties []. Notons d'ailleurs que pour $i < j$, [] (sans hypothèse d'ailleurs que $X' \longrightarrow X$ sont une immersion locale) [] d'où, dans le cas d'une immersion locale propre, des isomorphismes [] et plus généralement [] tout qui à faire.

Ceci montre en particulière que la démonstration du théorème de recollement, [] théorème énoncé p.22, est une [] *locale* sur X[15] - ce qui prenant par exemple de nos [] au cas où I *est fini*.

B) Cas d'un $X_{I'}$.

Soit I' une partie de I telle que

(7) $$i \leq j \in I' \Rightarrow i \in I'$$

[15] *non*, ce n'est pas absolument clair []

et tout

$$X_{I'} = \bigcup_{i \in I'} X_i \quad \text{(partie fermée de } X\text{)} \tag{8}$$

On a bien sûr [] (et aussi []) [] à (11 d). Dans ces formules, I', I'', les I'_α sont des parties de I satisfaisant (7) ([] *cribles* de I).

Si dans A) on prend $X' = X$, il est plus commode de travailler avec le stratification de X' définie par les X_i avec $i \in I'$ - il est clair que les conditions (II) relatives à $X' = X_{I'}$ sont satisfaites. Les "parties cribles" de X' pour cette stratification, ou pour celle induit au sens général des espaces au dessus de X, sont les mêmes - [] sur $X' = X_{I'}$ des parties-cribles de l'espace stratifié X.

Ici, les espaces élémentaires pour la stratification de type I' de $X' = X_{J'}$, sont les espaces []

[] pour une instant à X, et considérons l'un I_0 des $i \in I$ tel que $X_i = \varnothing$. C'est une crible, et on a $X_i^* = \varnothing$, [] si $i \in I_0$. [] on voit que les diagrammes de type $\widetilde{I}$ défini par l'espace stratifié X [] en remplaçant I par $I \backslash I_0$, ou plus guère par $I \backslash I'_0$, où $I'_0 \subset I'$ est une crible, ce qui donne lieu à un diagramme [] qu'est *contenu* dans $\widetilde{I}$ (cela est vrai pour *toute* crible de I).

Si par exemple on a deux cribles

$$I'' \subset I' \subset I \tag{14}$$

d'où

(15)

[] regarder plutôt la stratification de type $I' \backslash I''$, définie par les

(16)

dont les topos élémentaires sont dans les $X_{i'}^*$ ($i' \in I' \backslash I''$) et des [] couples (i', j') avec $i' \in I' \backslash I''$ [] on a

(17)

mais il n'est pas clair en générale que ces soient mêmes semblant équivalences d'homotopie...

Donc il [] il s'agit de [] les constructions sur une $X_{I'}$, et sur un [].

Je vais en [] par C sauf de regarder plus particulièrement ce qui se [] en l'induisant ainsi sur un ouvert $U_{I',I''}$.

C) Les [].

On suppose donnée des cribles

(18)

d'où

(19)

NOTES ANABÉLIENNES

I. Résultats de fidélité

À tout corps K, associons son topos étale B_K, qui est un topos (profini) galoisien. Le groupoïde des points de B_K est noté Π_K, il est anti-équivalent canoniquement à la catégorie des clôtures algébriques séparables de K. Si $\overline{K}$ est un telle clôture, son groupe des K-automorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ ou $E_{\overline{K}/K}$ s'identifie au groupe des automorphismes des points de B_K associé à $\overline{K}/K$ (il vaut peut-être mieux de dire à l'opposé de ce groupe - la variance des clôtures algébriques de K est comme celle des foncteurs fibres, à l'opposée de celles des points ...) Bien entendue, B_K se reconstitue à partir de Π_K, comme le topos des systèmes locaux (continues) sur Π_K - et en termes de $E_{\overline{K}/K}$, comme le topos des ensembles discrets à actions continues de $E_{\overline{K}/K}$.

Pour un homomorphisme de corps $K \longrightarrow K'$, i.e. un homomorphisme de schémas $\mathrm{Spec}\,K' \longrightarrow \mathrm{Spec}\,K$, on a un morphisme de topos correspondant

$$\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K \tag{1}$$

associé à un homomorphisme de groupoïdes fondamentaux

$$\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K. \tag{2}$$

Ceci [s'explicait] en disant qu'un objet [] $\Pi_{K'}$ (i.e. point de $\mathrm{B}_{K'}$, ou revêtement universel de $\mathrm{B}_{K'}$, ou clôture séparable $\overline{K'}$ de K') en définit un des Π_K (ainsi, on prend $\overline{K}$ = clôture algébrique séparable de K' dans $\overline{K'}$) et pour deux points correspondants, on a un homomorphisme de groupes fondamentaux correspondants, qui s'interprète par exemple comme

$$E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K} \tag{3}$$

et qui peuvent de reconstitue l'homomorphisme de topos comme une "restriction des scalaires".

L'image de (3) est le sous-groupe fermé de $E_{\overline{K}/K}$ qui correspond à la sous-extension K_1 de $\overline{K}/K$, clôture algébrique séparable de K dans K', i.e. $K_1 = \overline{K} \cap K'$.

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{K} & \longrightarrow & \overline{K'} \end{array}$$

Quand K' est une extension de type fini de K, K_1 est une extension finie de K, et on en conclut que l'image de (3) est alors un sous-groupe d'indice fini, égale à $E_{\overline{K},K}$ si et seule si $K_1 = K$ i.e. K est séparablement algébrique clos dans K'. D'ailleurs, on montre sans mal que (si K est extension de type fini) l'homomorphisme (3) est injectif si et seule si K' est une extension algébrique de K. Donc il est bijectif si et seule si K' est une extension [radicielle] de K. Dans le suite nous nous bornons (précisément) aux corps de caractéristique 0, et la condition précédente signifie alors que $K \longrightarrow K'$ est un *isomorphisme*.

Ainsi, le foncteur $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K,\overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$, est *conservatif* quand on se limite comme morphismes de corps $K \longrightarrow K'$ (de caractéristique 0) à ceux que fait de K' une extension de type fini de K.

Par exemple il suffit de se limiter aux extensions de type fini des corps fermées $\mathbf{Q}$ - on trouve un foncteur conservatif de la catégorie de ces corps dans celle de groupoïdes (ou de topos), au sens à un morphisme de corps qui donne une équivalence de groupoïdes (ou de topos) est un *isomorphisme*[16].

Quand on prend des corps quelconques, le 2-foncteur $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou $K \longrightarrow \Pi_K$ ou $(K,\overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$ est cependant loin d'être fidèle. Ainsi, si K est séparablement clos, B_K est le "topos ponctuel", Π_K le groupoïde ponctuel, $E_{\overline{K}/K} \simeq 1$ - il est donc

[16]au cas []

que les morphismes entre corps séparablement clos ne sont pas décrits par les morphismes entre leurs topos étales, ou groupoïdes fondamentaux! Pour cette raison, il y a lieu d'associer à un corps K un objet plus fin que B_K ou Π_K, à savoir le système projectif des B_{K_i}, ou des Π_{K_i}, pour K_i sous-corps de K de type fini sur le corps [], et à un système $(K,\overline{K})$ le système projectif des $E_{\overline{K}_i/K_i}$, où $\overline{K}_i$ est le clôture algébrique séparable de K_i dans $\overline{K}$. On []

$$\begin{cases} \Pi_K \simeq \varprojlim \Pi_{K_i} \\ \mathrm{B}_K \simeq \varprojlim \mathrm{B}_{K_i} \\ E_{\overline{K}/K} \simeq \varprojlim E_{\overline{K}_i/K} \end{cases} \tag{4}$$

i.e. on reconstitue les objets B_K, Π_K, $E_{\overline{K},K}$ à partir des systèmes projectifs correspondant - mais l'inverse n'est pas vrai. En fait, comme le foncteur

$$\text{Ind(Corps type fini)} \longrightarrow \text{corps}$$

de la catégorie des systèmes inductifs de corps de type fini, vers celle des corps, est une équivalence de catégories (pour des raisons triviales), il s'ensuit que les foncteurs $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$, ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K,\overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K},K}$, étant des corps vers les propriétés idoines, avoir [] les propriétés de fidélité des foncteurs $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$, ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K,\overline{K} \longrightarrow \Gamma_{\overline{K},K})$ [] aux corps absolument de type fini, auxquels nous allons pour la suite nous borner, la plupart des temps. Mais il sera nécessaire au cours de travail, de donner une description purement algébrique, par exemple, de pro-groupes finis associé par exemple à (plus précisément, à (,) !).

Le rôle dominant sous joué par le corps premier de caractéristique 0, $\mathbf{Q}$ donc pour $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$ et $\Pi_{\mathbf{Q}}$, qui a un objet canonique, noté $\overline{\mathbf{Q}}_0$ - la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans . On posera[17]

$$\Gamma_{\mathbf{Q}} = E_{\overline{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}} \tag{5}$$

Pour tout corps K de caractéristique 0 - en particulière pour les corps K de type fini sur $\mathbb{Q}$, lequel nous allons nous borner par le suite - on a donc des homomorphismes canoniques

$$\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}uad \Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbf{Q}} \tag{6}$$

[17] et on écrit souvent $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$ au limite des $E_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$, pour une clôture algébrique [] $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$

qui l'explicitait, quand on a choisi un objet de Π_K i.e. un $\overline{K}/K$, d'où un $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, pour un homomorphisme de groupes profinis

$$E_{\overline{K}/K} \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}. \tag{7}$$

Par le suit, on regardes toujours B_K, Π_K ou $E_{\overline{K},K}$ comme muni de cette structure supplémentaire - ce sont les morphismes (de topos, de groupoïdes, ou de groupes profinis) "arithmétiques", dominant la situation.

Un intérêt particulier s'attende au noyau de (7), que je note $\pi_{\overline{K},K}$ - on[18] l'appelle "partie géométrique" de groupe de Galois $E_{\overline{K},K}$ par opposition au quotient $E_{\overline{K},K}/\pi_{\overline{K},K} = \Gamma_{\overline{K},K} \hookrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}}$, que j'appelle se partie "arithmétique"- celle-ci est un sous-groupe ouvert de $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}}$, qui son [], correspond au sous-corps $\underline{K}$ de $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, extension finie $/\mathbf{Q}$ de $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans K, de sorte qu'on a une suite exacte

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_{\overline{K}/K} \arrow[r] & E_{\overline{K}/K} \arrow[r] & \Gamma_{\overline{K}/K} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ & & & \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}} & \end{tikzcd} \tag{8}$$

On[19] va donner une interprétation de ce noyau, et de la suite exacte (8), en écrivant

$$K = \varinjlim_i A_i \tag{9}$$

où les A_i sont les sous-$\mathbf{Q}$-algèbres de type fini de K, correspondant au système projectif des "modèles affines" $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ de $K/\mathbb{Q}$. Parmi les A_i, il y a d'ailleurs un système [] fermé des A_i réguliers, i.e. des U_i lisses$/\mathbb{Q}$, [] comme morphismes de transition des morphismes de localisation []. On peut même, d'après Mike Artin, prendre comme U_i des schémas "élémentaires" sur K_0, se dévissant en fibrations successives de courbes. Notons que $\mathrm{Spec}\,K = \eta$ est le point générique [] des U_i, qui sont [] sur k (clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans K).

Le choix de $\overline{K}$ définit un point géométrique $\overline{\eta}$ sur les U_i, d'où des groupes $\pi_1(U_i, \overline{\eta}) = \Gamma_i$, et [] bien connus

$$\mathrm{Spec}\,K = \varprojlim U_i$$

[18] on va noter $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ cette "partie arithmetique"

[19] **NB** $\pi_{\overline{K}/K} = (1)$ si et seule si K algébrique sur $\mathbf{Q}$, i.e. fini sur $\mathbf{Q}$.

$$E_{\overline{K}/K} = \pi_1(\eta, \overline{\eta}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i [\,] \quad (\Gamma_i = \pi_1(U_i, \overline{\eta})) \tag{10}$$

D'autre parte, si on pose

$$\overline{U_i} = U_i \otimes_K \overline{\mathbb{Q}} \tag{11}$$

on a pour tout i une suite exacte d'homotopie

$$1 \longrightarrow \tag{12}$$

qui forment un système projectif de suite exactes, ou d'extensions ayant toutes même quotient Γ', et dont les noyaux

$$\pi_i = \pi_1(\overline{U_i}, \overline{\eta})$$

sont des groupes fondamentaux "géométriques" - que [ ]] d'ailleurs [ ], en utilisant un plongement de [ ] dans $\mathbb{C}$ (d'où un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}} \simeq \overline{\mathbb{Q}_0}$), comme les [ ] profinis de $\pi_1(U_i(\mathbb{C}), \overline{\eta})$, ou maintenant $\overline{\eta}$ est interprète comme un point [ ] aux variétés complexes $U_i(\mathbb{C})$.

La suite exacte (8) est donc le limite projectif des suites exactes d'homotopie (12) ([20]), ce qui donne en particulière

$$\pi_{\overline{K}/K} \simeq \varprojlim_i \tag{13}$$

Utilisant les fibrations des U_i (dans le cas où on s'astreint prendre de variétés élémentaires d'Artin), on trouve que tout π_i est un groupe extension successive des groupes profinis *fibres* (où [ ]). Ceci redonnes p. ex. que le dimension cohomologique de π_i est [ ], celle de E_i est $\leq n+2$ (pour des coefficients de m-torsion, [ ]) - et par passage à la limite, des [ ] correspondantes pour les dimension cohomologiques de $\pi_{\overline{K}/K}$ et $E_{\overline{K}/K}$

$$\dim \operatorname{coh} + \pi_{\overline{K}/K} \leq n, \quad \dim \operatorname{coh} \Gamma_{\overline{K}/K} \leq n+2 \tag{14}$$

qui sont en fait même des *égalités* (sauf erreur), et donnant donc une description cohomologique simple de degré d [ ] absolu de K.

[20] cette interprétation

Théorème **(1).** — *Soit K un corps extension de type fini de $\mathbb{Q}$, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Alors pour tout sous-groupe ouvert E de $E_{\overline{K}/K}$, son centralisateur dans $E_{\overline{K}/K}$ est réduit au groupe unité. Itou pour $\pi_{\overline{K}/K}$.*

Démonstration. — Soit $\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma_{\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ l'image de E dans $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ qui est donc un sous-groupe ouvert. L'image dans Γ des centralisateurs de E' dans E [] centralisateur de Γ' dans Γ. Je dis qu'il est égale à 1, ce qui équivaut donc au

Corollaire. — *Dans $\mathbb{\Gamma}_{\mathbb{Q}} = \Gamma_{\overline{\mathbb{Q}_0}/\mathbb{Q}}$, le centralisateur de tout sous-groupe ouvert est réduit a (1).*

OPS Ce sous-groupe ouvert Γ' invariant, il est bien connue ([21]) qui son centre est réduit à 1 donc si Z est son centralisateur dans $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, l'homomorphisme $Z \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{Q}}/\Gamma'$ est injectif donc Z est fini. Mais on sait que les seules éléments $\neq 1$ de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ d'ordre fini sont les conjugués de τ , conjugaison complexe. Mais le centralisateur de τ dans $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est réduit à [] donc on peut contenir Γ', donc $\tau \notin z$, donc $z = (1)$.

[] à $E \subset E_{\overline{K}/K}$, on voit donc que son centralisateur Z dans $E_{\overline{K}/K}$ est une image dans Γ réduite à $\{1\}$ donc $z \subset \pi_{\overline{K}/K}$. Soit $\pi' \subset \pi = \pi_{\overline{K}/K}$ le [] de z' sur π, c'est un sous-groupe ouvert de π, et on est ramené à voir que $\mathrm{Centr}_{\pi}(\pi') = \{1\}$, i.e. le

Corollaire. — *Soit π un groupe profini, extension successives de groupes profinis libres. Alors le centralisateur z dans π de tout sous-groupe ouvert π' de π est réduit à {1}.*

Par dévissage on est ramené au cas d'un groupe profini *libre*. On sait que π' est donc libre. OPS π' invariant, ([22]) et on admet que le centre d'un groupe profini libre est réduit à 1.

Donc Z $\longrightarrow \pi/\pi'$ est injectif, donc Z est fini, et on admet que dans un groupe profini libre, il n'y a pas d'élément ([23]) d'ordre fini $\neq 1$ - ce qui [] la démonstration.

Scholie. — *Le fait que $E_{\overline{K}/K}$ soit à centre trivial peut s'exploiter en disant que le groupoïde Π_K (ou le topos B_K) [] à équivalence près, définie a isomorphisme unique près, quand on connaît le groupe* extérieure *associé à $E_{\overline{K}/K}$.*

[21] à vérifier

[22] à vérifier

[23] à vérifier

Les homomorphismes $E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$ associés à des homomorphismes $K \longrightarrow K'$ d'extensions de type fini de $\mathbb{Q}$, ayant une image ouvert dans un centralisateur réduit à 1, on voit de même que l'homomorphisme de topos $\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou de groupoïdes $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$, sont détermines à équivalence près (définie a isomorphisme unique près) par l'homomorphisme correspondant de groupes extérieures. Il [] en particulière ainsi de morphisme structurel $\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$ ou $\Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$ qu'on peut interpréter intrinsèquement comme un homomorphisme de groupes profinis extérieures $E_K \longrightarrow E_{\mathbb{Q}}$. Mais nous [] suivre [], en exploitant le fait que $\pi_{\overline{K}/K}$ est lui associé à centre trivial. Cela signifie que l'extension de $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ par $\pi_{\overline{K}/K}$ est entièrement connue, à isomorphisme près, pour $\pi_{\overline{K}/K}$ et Γ fixés, en termes de *l'action extérieure* correspondant de Γ sur π, comme l'image inverse de l'extension universelle

$$1 \longrightarrow Aut(\pi) \longrightarrow Autext(\pi) \longrightarrow 1$$

Pour K fixé, donc k fixé, [] qu'on fixe un $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{Q}/k}$ revient à dire qu'on fixe une clôture algébrique de k, [] qu'on fixe un $\pi_{\overline{K}/K} = \pi_1(K \otimes_K \overline{k})$ signifie [] qu'on fixe une revêtement universel de $\mathrm{Spec}(K \otimes_k \overline{k}) = \eta \otimes_k \overline{k}$, les deux ensembles reviennent à se donner le revêtement universel $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{K})$ de K. Par le suite, nous décrivons (avec une fidélité qui reste à []) les couples $(K, \overline{K})$ d'une extension K de $\mathbb{Q}$ de type fini, et d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, par les triples (π, Γ, φ), où $\pi = \pi_{\overline{K},K}$ et $\Gamma = \Gamma_{\overline{K},K}$ sont des groupes profini, et $\varphi : \Gamma \longrightarrow [](\pi)$ une action extérieur de Γ sur π - ce qui peuvent de reconstituer l'extension $\mathbb{E}_{\overline{K},K}$ de $\Gamma_{\overline{K},K}$ par $\pi_{\overline{K},K}$. J'ai oublie [] qu'il faut *de plus* se donner Γ comme sous-groupe d'un $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ bien déterminé, i.e. qu'il faut se donner un objet de $\Pi_{\mathbb{Q}}$ et une [] fidèle de Γ dessus - pour reconstruire [] cas données un homomorphisme de groupoïdes profinis $\Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$, plus un objet de Π_K - ou encore, un morphisme de topos progaloisiens $\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$, plus un point de B_K. On peut ainsi fixer un objet de $\Pi_{\mathbb{Q}}$, i.e. un point de $\mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$, i.e. un $\overline{Q}$, et étudier les K, avec un plongement de k (clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans K) dans $\overline{\mathbb{Q}}$ - mais [] donner une clôture algébrique $\overline{K}$ de K qui induise $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. Ils sont décrits [?]

On a ainsi plusieurs [] essentiellement équivalentes, pour décrire par voie profinie une extension K de type fini de $\mathbb{Q}$:

1) Pour le topos étale B_K, en tant que topos progaloisien sur $\mathrm{B}_{\mathbb{Q}}$;

2) Pour le groupoïde fondamental Π_K de ce topos (groupoïde de ces points, ou de ses revêtement universel) - en tant que groupoïde au dessus de $\Pi_{\mathbb{Q}}$;

3) Pour le groupe extérieur E_K, au dessus de groupe extérieur $E_{\mathbb{Q}}$ ou $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ ([]) ;

4) En termes d'une clôture algébrique $\overline{K}/K$ (i.e. en décrivant le couple $(K,\overline{K})$ plutôt que K), par un objet $\overline{\mathbb{Q}} \in (\Pi_{\mathbb{Q}})$ et un homomorphisme de groupes profinis $E \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$;

5) En termes d'une clôture algébrique fixe $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, et où $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$ [] les couples (K,i) où $i : k \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ est un plongement de la clôture algébrique k de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ des $\overline{\mathbb{Q}}$: pour le groupes extérieur $\pi_K = \pi_1(K)$, sur lequel un sous-groupe ouvert $\Gamma_K \subset \Gamma$ opère extérieurement par des groupes profinis *extérieures* $\pi_1(K) = \Gamma_K$, sur lesquels un sous-groupe ouvert Γ (non précisé []) de $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$ opère *extérieurement* ;

6) En termes d'une $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$: pour le groupoïde $\Pi_{K\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}}$ [] .

Un homomorphisme de corps $K \longrightarrow K'$ donne ([24]) [] à un homomorphisme de groupes extérieures, $\pi' \longrightarrow \pi$, où l'image de π' dans π est ouvert [] de centralisateur réduit à (1), ce qui implique [] que le morphisme de topos $B_{K'\otimes_K\overline{\mathbb{Q}}} \longrightarrow B_{K\otimes_K\overline{\mathbb{Q}}}$ es déterminé (a isomorphisme unique près) par [] homomorphisme extérieur. De plus on a des actions extérieures de $\Gamma = \Gamma_K \subset \Gamma_{K'}$ sur π' et π, de façon que $\pi' \longrightarrow \pi$ [] et ceci suffit pour reconstitue, d'une part les groupes extérieures E, E' extensions ("extérieures") de Γ [] π, π' (et , a équivalence rigide près, les B_K, $B_{K'}$ et $B_K \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}$, $B_{K'} \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}$) et de plus l'homomorphisme d'extensions extérieures $E \longrightarrow E'$ de Γ.

Remarque. — Quand $\pi \neq (1)$, i.e. K pas fini sur $\mathbb{Q}$, le théorème 1 peut se renforcer, sauf erreur, en écrivant que pour tout sous-groupe $\pi' \subset \pi$ ouvert *dans* π, $\mathrm{Centr}_E(\pi') = \{1\}$.

Si z est se centralisateur, on a $z \cap \pi = (1)$ d'après le théorème 1, prouvons que l'image de z dans $\Gamma_{\overline{K},K} \subset \Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$ est finie (ce qui [] alors, que z est d'ordre 1 ou 2, et dans le [] cas que son image des $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$ est [] pour un τ de conjugaison complexe).

[] E pour un sous-groupe ouvert assez petit (ce qui revient a poser à une extension finie de K) [] $\pi' = \pi$, alors l'image z' de z dans Γ est contenue dans le noyau

[24]on suppose pour simplifier qui c'est

de l'homomorphisme $\varphi : \Gamma \longrightarrow [\,](\pi)$. [] je sais prouver que cet homomorphisme est injectif (ou est ramené aussitôt ou cas où K est de degré de [] 1, et on est ramené ou cas des π_1 d'une courbe algébrique ...)

Théorème (**2**). ([25]) — *Le foncteur $K \longrightarrow \Pi_K/\Pi_{\mathbb{Q}}$ des extensions de type fini de $\mathbb{Q}$ vers les groupoïdes profinis sur $\Pi_{\mathbb{Q}}$ est* fidèle *i.e. si deux homomorphismes $f, g : K \longrightarrow K'$ définissent des homomorphismes de groupoïdes sur $\Pi_{\mathbb{Q}}$ isomorphes*

$$\begin{tikzcd} \Pi_{K'} \arrow[rr, "f^*, g^*"] \arrow[dr, "p'"'] & & \Pi_K \arrow[dl, "p"] \\ & \Pi_{\mathbb{Q}} & \end{tikzcd}$$

(i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs $\alpha : f^* \longrightarrow g^*$ tel que pour tout objet $\overline{\eta'}$ de $\Pi_{K'}$, le carré

$$\begin{tikzcd} p f^*(\overline{\eta'}) \arrow[r, "\sim", "p(\alpha)"'] \arrow[d] & p g^*(\overline{\eta'}) \arrow[d] \\ p(\overline{\eta'}) \arrow[r, "\sim"] & p'(\overline{\eta'}) \end{tikzcd}$$

est commutatif) alors $f = g$.

L'hypothèse sur f, g signifie aussi, en termes d'une clôture algébrique choisie $\overline{K'}$ de K', donnent via f [] g deux clôtures algébriques de [] l'on peut trouver un isomorphisme [] celui-ci ([26]) ([] d'identifier $E_{\overline{K}/K}$ et $E_{\widetilde{K}/K}$) de telle façon que les deux homomorphismes

$$f^*, g^* : E_{\overline{K'},K'} \longrightarrow E_{\overline{K},K}$$

sont égaux. C'est sans doute plus claire en termes d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ fixée de $\mathbb{Q}$, en disant que les deux homomorphismes $f^*, g^* : E_{K'} \longrightarrow E_K$ de groupes profinis extérieures (avec opérateurs $\Gamma_{\overline{Q},Q}$) sont égaux.

Écrivons comme [] $K = \varinjlim A_i$, donc $\eta = \mathrm{Spec}(K) = \varprojlim U_i$, on a (en termes d'un point géométrique quelconque $\overline{\eta}$ de $\mathrm{Spec}\, K$ i.e. en termes d'un $\overline{K}$)

$$\pi_K = \varprojlim_i \pi_1(\overline{U}_i, \overline{\eta}), \quad \text{où} \quad \overline{U}_i = U_i \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$$

[25]En fait, ce théorème n'est pas spécial à $\mathbb{Q}$ - il [] avait sur un corps de [] quelconque est en fait

[26]induisant "l'identité" sur [] clôtures algébriques []

et il suffit de voir que pour tout i, $f|A_i = g|A_i$ [] le fait que $\pi_1(f_i^*) = \pi_1(g_i^*)$: $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(U_i)$ (comme homomorphisme de groupes extérieures. On [] fixé, on a $K' = \varinjlim A_j$, où les A_j contient $f_i(A_i)$ et $g_i(A_i)$, donc

$$\pi_{K'} = \varprojlim_{j} \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'}), \quad \text{avec} \quad \overline{V}_j = \mathrm{Spec}(A_j) \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}.$$

Notons (prenant les V_j réguliers) que les homomorphismes de transition des le système projectif de $\pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'})$ sont surjectifs - donc $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'})$ est surjectif, ce qui implique que l'égalité de $f^* \text{et} g^* : \pi_{K'} [] \pi_1(\overline{U}_i)$ (comme homomorphismes extérieures) implique celle de $\pi_1(\overline{V}_j) \longrightarrow \pi_1(\overline{U}_j)$.

Donc l'égalité $f_i = g_i$ (d'où $f = g$) est conséquence de résultat plus général). "[] géométrique"

Corollaire **(1).** — *Soient X, Y des schémas de type fini réduits* 0*-connexes sur un corps algébriquement close k, et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux morphismes, on suppose que $\pi_1(f), \pi_1(g) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ sont égaux (en fait [] extérieurs) Alors*

a) Si Y se plongue par un $i : Y \longrightarrow G$ un groupe algébrique commutatif extension d'une V.A par un tore, il existe un $u \in Y$ (unique) tel que $g(x) = f(x) + u$ et pour tout $x \in X(h)$, i.e. $(i \circ g) = \tau_u \circ (i \circ f)$ (τ_u [])

b) Si Y est une variété élémentaire d'Artin, avec fibres successives des courbes anbéliennes, et X [] et f ou g est dominant, alors $f = g$.

Démonstration. — a) L'unicité de [] est [] - i.e. il suffit ([27]) d'examiner les actions de $\pi(f)$, $\pi(g)$ sur les groupes abelianisés dans π_1, et même sur leurs composantes l-adiques. Prenant le Jacobienne généralisée de type "extension d'une V.A par une tore" de X, on sait que

1°) Les morphismes $f : X \longrightarrow G$ tel que $f(\alpha) = 0$ se factorisent de façon unique par $X \xrightarrow{can} J \xrightarrow{\varphi} G$ avec φ un homomorphisme de groupes algébriques ;

2°) Un tel homomorphisme φ est connu quand on connaît ses actions sur les $H_1(\ ,\mathbb{Z})$ ce qui [] à la connaissance sur les points d'ordre [] que soit v - on ceux-ci sont denses ...

[27] En fait, dans a) il suffit de supposer que

3°) $H_1(X,\mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H_1(J,\mathbb{Z}_l)$.

De ceci, on conclut (par 3°)) que $H_1(f) = H_1(g)$ implique (si $f = \varphi \circ can$, $g = \psi \circ can$) $H_1(\varphi) = H_1(\psi)$, donc par 2°) que $\varphi = \psi$, donc $f = g$ []

Notons que l'on

b) on va pourtant prouvons l'égalité sans l'hypothèse anabéliennes

[] L'hypothèse que $\pi_1(f) = \pi_1(g)$ signifie donc qu'il existe $\alpha \in \pi_1(Y)$, tel que

$$\pi(f')(\gamma) = [\,]\pi(j)(\gamma)$$

pour tout $\gamma \in Im(\pi_1(X) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(U))$. [] cette image est un sous-groupe *ouvert* de $\pi_1(U)$ ([] dominant !). Donc on est ramené à ceci: Soit U ouvert $\neq \varphi$ de Y, $u \in G$, tels que $\tau_u U \subset Y$ [et tels que (désignant par f, f' les morphismes $y \longrightarrow y$ et $y \mapsto y$ en de U dans Y) $\pi_1(f)$ et $\pi_1(f')$ [] extérieurement en un sous-groupe ouvert de $\pi_1(U)$] *alors* $f = f'$ voie $u =$

Finalement, je [] que [] pas à la prouve par voie géométrique [] *arithmétique*.

Corollaire **(2).** — *Le condition $f = g$ de corollaire précédent, est valable si on suppose que K est de caractéristique 0, X [] est dans l'une des hypothèses suivantes*

c) l'image de $\pi_1(F)$ est un sous-groupe ouvert de $\pi_1(Y)$, Y est une variété élémentaire d'Artin anabélienne ;

d) l'image de $\pi_1(X)$ par $\pi_1(f)$ a un centralisateur dans $\pi_1(Y)$ réduit à (1), et Y se plonge dans un groupe algébrique extension d'une VA par un tore.

Comme le centralisateur [] de un sous-groupe ouvert de $\pi_1(Y)$ ($\pi_1(Y)$ étant extension successive de groupes profinis *fibres* anabéliennes) est réduit à (1), comme un a un[28] plus haut, le cas c) est un cas particulier de d), [] dans le cas d), [] X pour un ouvert d'Artin []

La situation X, Y, f, g provient, par extension de corps de [] d'une situation analogue sur un corps K extension de type fini de $\mathbb{Q}$. Soit $\overline{K}$ la clôture algébrique de K dans k [] de K à $\overline{K}$. On a donc [] satisfaisant la condition d) avec [] trivial.

[28] il faut

Mais ces hypothèses impliquent que les extensions $E(X/K) = \pi_1(X)$, $E(Y/K) = \pi_1(Y)$ de $E_{\overline{K},K}$ [], ainsi que les homomorphismes [] induits, sont reconstruite à partir de [] et de l'action extérieure de $E_{\overline{K},K}$ sur ces groupes. On va montrer maintenant le

Corollaire **(3).** — *Soient X, Y deux schémas de type fini sur un corps K extension de type fini de $\mathbb{Q}$, On suppose que Y se plongue dans une extension d'une V.A. par un tore, X réduit, X, Y [] 0-connexe. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, d'où des extensions "extérieures" $E_{X,K}$, $E_{Y,K}$ de $E_{\overline{K},K} = \mathrm{Gal}(\overline{K},K)$ [] $\pi_1(\overline{X})$, $\pi_1(\overline{Y})$, et pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, un morphisme [] de $E_{X,K}$ [] $E_{Y,K}$.*

Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ tels que [] - i.e. [] soient conjugués pour un élément de $\pi_1(Y)$ [] alors $f = g$.

En fait, il suffit même que ls homomorphismes d'*extensions* [] soient égaux, [] $f = g$. (C'est à dire, [] des hypothèses *anabéliennes*, des hypothèses [] géométriques sue les actions de [], [] on peut laisser tomber les aspects anabéliens [] sur les aspects abéliens []) [].

Il suffit de voir que [] à noyau abélien associée - l'hypothèse implique que $f(x)$ et $g(x)$ définissent le même donne de conjugaison de scindages. Donc il suffit maintenant de prouver le

Théorème **(3).** — *Soit X un schéma de type fini sur un corps K, extension de type fini de $\mathbb{Q}$, on suppose que X est géométriquement 0-connexe et se plongue dans une extension d'une V. A. par un tore (p. ex. X est une variété élémentaire d'Artin, à fibres []).*

Considérons une clôture algébrique $\overline{K}/K$ et l'extension extérieure correspondant $E_{X/K}$ dans $E_{\overline{K}/K} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ par $\pi_1(\overline{X})$ ($\overline{X} = X \otimes_K \overline{K}$) et l'extension déduite de $\widetilde{E}_{X/K}$ de $E_{\overline{K}/K}$ par $\pi_1(\overline{X})_{ab}$. Considérons les applications

$$(*) \quad X(K) \longrightarrow \text{Classes de } \pi(\overline{X}) - \text{conjugaison de scindages de } E_{X/K} \text{ sur } E_{\overline{K}/K}$$

$$(**) \qquad X(K) \longrightarrow \text{Classes de conjugaison de scindages}$$

Ces applications sont *injectives*.

Démonstration. — Il suffit de le [] pour le seconde application, et on est ramené au cas où X est lui-même un groupe algébrique G, extension d'une V. A. par une tore. Alors l'application est un homomorphisme de groupes

$$(16) \qquad G(K)$$

obtenue ainsi. On considère pour tout [] la suite exacte []

$$0 \longrightarrow [\,] \longrightarrow G[\,] \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

[] suite exacte de cohomologie

[]

et passant à la limite, on trouve

$$0 \longrightarrow$$

le composé de (16) avec l'homomorphisme canonique

[]

compte tenu de

[]

[] que l'homomorphisme induite par

[]

dont le noyau [] est fermé des éléments de $G(K)$ *infiniment divisibles* dans $\mathbb{Q}$. [] ici K étant un corps [] de type fini le théorème de Mordell-Weil [] que $G(K)$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini - donc $G(K) \longrightarrow \varprojlim G(K)_n$ est injectif. Donc []

Remarque. —

[] x dans le "revêtement universel abélien" $\widetilde{G}$ de G construit comme $\varprojlim$ des revêtements $G(n) \simeq G$ de G, donnée, []. L'énonce dit que si [] est trivial - i.e. si [] mais dans ce cas [] soit [] étales.

est cependant possible que [] ...

[] aux conditions de de Corollaire 1, b), [] avec les groupes fondamentaux [], on trouve que

[]

Complément. — Retour sur une démonstration *géométrique* du Théorème 2, Corollaire 1 b). On peut supposer que ce est le Jacobienne généralisée de Y, et il suffit de montrer le

Lemme. — *Soit Y une variété élémentaire d'Artin anabélienne (sur K algébriquement clos), $Y \hookrightarrow J_Y^1$ son plongement dans sa Jacobienne généralisée, $u \in J_Y^0(k)$ et U un ouvert non [] de Y, tels que $U + u \subset Y$. Alors $u = 1$, ou encore: l'application $x \mapsto x$ [] de U dans Y est l'identité.*

Par dévissage, on es ramené au cas où Y est une courbe. Supposons le d'abord complète, de suite que $U + u \subset Y$ implique $Y + u \subset Y$ - alors la [] est bien connu (et résulte par exemple de la formation des points fixes, qui implique que [] ce qui [] $J_Y^0(k)$ est nulle. Pour que $x + u$ soit de la forme y ($y \in Y$) il faut [] que $u \in \alpha$ et y aient même image dans $J_{\hat{y}}^1$, ce qui [] Je veut mieux, dans le cas général, présenter les choses sous forme homologique. Considérons les deux morphismes $U \hookrightarrow iY$ induisant et $J : U \longrightarrow Y$ induit par lui, je dis que $H_1(i) = H_1(j)$, ou ce qui revient au même, puisque $Y \xrightarrow{\alpha} J_Y'$ induit un isomorphisme $H_1(\alpha) : H_1(Y) \longrightarrow H_1(J_Y')$, que

Si le genre est 0, on en concluait (puisque []. Dans le cas de genre 1, on en concluait maintenant que l'image de un des $J_{\hat{y}}^0$ est égale à 1, et on [] comme précédemment. []

II. La question de pleine fidélité

Soient K, K' deux extensions de type fini de $\mathbf{Q}$ - est-il vrai que tout $\Pi_{\mathbf{Q}}$-homomorphisme $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$ provient d'un homomorphisme de corps $K' \longrightarrow K$? On est ramené aussitôt au cas où – une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ étant choisie, d'où un $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$ – K et K' ont des sous-corps k, k' (clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans K resp. K') isomorphes, avec des plongements $k, k' \longrightarrow \mathbf{Q}$ de même image, que E_K et $E_{K'}$ peuvent être considérés comme des extensions d'un même groupe $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$ par π_K resp. $\pi_{K'}$. La question est alors si *tout* homomorphisme de $\pi_{K'}$ dans π_K qui commute à l'action de Γ, est induit par un homomorphisme $K \hookrightarrow K'$. Pour construire ce dernier, il faudrait donc avoir une idée comment reconstruire K, K' à partir des extensions E_K, $E_{K'}$, ou encore à partir des groupes profinis extérieurs avec opération de Γ dessus. Et on pressent que le Théorème 3 du paragraphe précédent (appliqué notamment à $\mathbb{P}_K^1$ convenablement troué ...) pourrait donner la clef d'une telle construction.

Bien sûr, des homomorphismes extérieurs quelconques $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ n'auront pas de sens géométrique - l'idée est que les opérations du groupe $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$ dessus soit si draconienne, qu'il n'est possible de trouver un homomorphisme extérieure qui y commute que par voie géométrique – par des plongements de corps. Donc il est essentiel ici que le corps de base ne soit pas quelconque, mais un corps tel que $\mathbf{Q}$ (ou, ce qui revient manifestement au même, une extension de type fini de $\mathbf{Q}$). Encore faut-il se borner aux homomorphismes $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ dont on décrète d'avance que l'image soit ouverte – sinon, prenant pour $\pi_{K'}$ le groupe unité (i.e. $K' = k$), on trouverait un homomorphisme $K \longrightarrow k$ correspondant! Il faut pour le moins, pour travailler à l'aise à partir d'homomorphismes $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ (au lieu de $E_{K'} \longrightarrow E_K$) supposer que le centralisateur dans π_K de l'image de tout sous-groupe ouvert de $\pi_{K'}$ soit réduit à $\{1\}$ – on dira que l'homomorphisme en question est *anabélien* alors – de telle façon qu'à partir de cet homomorphisme (commutant à Γ) on reconstitue l'homomorphisme d'extensions E_K et $E_{K'}$, qui est l'objet vraiment essentiel. Par exemple, si justement $K' = k$, donc $E_{K'} = \Gamma$, ce qui nous intéressera, ce ne seront pas le Γ-homomorphismes de $\pi_{K'} = \{1\}$ (!) dans π_K, mais bien les *sections* de E_K sur Γ.

Question-conjecture. — *Soient K, K' deux corps, extensions de type fini de $\mathbf{Q}$, et un morphisme $\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K$ de topos sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$.*

Les conditions suivantes sont-elles bien équivalentes [?]

(a) L'homomorphisme provient d'un plongement de corps $K \hookrightarrow K'$.

(b) L'image de l'homomorphisme extérieur $E_{K'} \longrightarrow E_K$ a une image ouverte.

(c) L'homomorphisme extérieure $E_{K'} \longrightarrow E_K$ est anabélien[29].

NB. On sait que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) et que (b) équivaut à $\pi_K \longrightarrow \pi_{K'}$ a une image ouverte.

Une réponse affirmative impliquerait que si $\operatorname{degtr} K'/\mathbf{Q} < \operatorname{degtr} K/\mathbf{Q}$, alors il n'y a pas de tel homomorphisme $E_{K'} \longrightarrow E_K$, compatible avec les projections dans

[29] (c) n'est pas assez fort, cf. plus bas…

$E_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, en particulier, il en résulterait que toute section de E_K sur $\Gamma = \mathrm{Im}(E_K \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{Q}})$, ou sur un sous-groupe ouvert Γ' de Γ, a un centralisateur non-trivial dans E_K – et comme son centralisateur dans Γ est réduit à $\{1\}$, cela impliquerait que pour toute telle section, on aurait (si $\pi_K \neq 1$) $\pi_K^{\Gamma'} \neq \{1\}$. Or je m'aperçois que ceci est sans doute faux (cf. plus bas, numéro 3) - il faudrait renforcer (c) ci-dessus en [:]

(c′) L'homomorphisme $E_{K'}^{\circ} \longrightarrow E_K$ induit par $E_{K'} \longrightarrow E_K$ est anabélien (où $E_{K'}^{\circ}$ est le noyau de l'homomorphisme composé

$$E_{K'} \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}} \xrightarrow{\chi \text{ caractère cyclotomique}} \hat{}$$

Z*) .

Mais pour voir que cette condition est *nécessaire* pour que l'homomorphisme soit géométrique, il faudrait vérifier que pour tout sous-groupe ouvert E' d'un E_K, le centralisateur dans E_K (non seulement de E' lui-même, mais même de E'°) est réduit à 1 – ce qui résulte de la démonstration du Théorème 1, et du fait[30] que pour tout sous-groupe ouvert Γ' de $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, le centralisateur (non seulement de Γ', mais même) de Γ'° dans Γ est réduit à $\{1\}$.

Donc, la conjecture initiale revue et corrigée donné la

Conséquence (conjecturale). — *Pour tout section de E_K sur un sous-groupe ouvert Γ' de $\Gamma_{\mathbf{Q}}$, de sorte que Γ' opère (effectivement) sur π_K, on a (si K pas algébrique sur $\mathbf{Q}$, i.e. $\pi_K \neq \{1\}$) $\pi_K^{\Gamma'^{\circ}} \neq \{1\}$.*

À vrai dire, à certains égards les Γ_K sont des groupes trop gros pour pouvoir travailler directement avec, il y a lieu de regarder Γ_K comme un $\varprojlim$ de groupes $\Gamma_{U/\mathbf{Q}}$ associés à des modèles affines de K – et on s'intéressera plus particulièrement à des modèles affines qui sont des variétés élémentaires – plus généralement, qui sont des K$(\pi, 1)$ (au sens profini ...). Il est possible qu'il faille d'ailleurs, dans l'énonce de la conjecture de départ, prendre un homomorphisme extérieur $E_{K'} \longrightarrow E_K$ dont on suppose d'avance (en plus de l'hypothèse anabélienne et de la compatibilité avec les homomorphismes dans $\Gamma_{\mathbf{Q}}$) qu'elle est compatible avec les *filtrations* de ces groupes,associés à ces modèles ("filtration modélique" (grossière)).

[30] à vérifier !

Nous allons alors, au même temps que des extension de type fini de $\mathbf{Q}$, les homomorphismes entre tels, et homomorphismes de groupes profinis associés, étudier la situation analogue pour des "modèles" élémentaires anabéliens, voire des modèles $\mathrm{K}(\pi, 1)$ généraux (On peut aussi regarder de tels modèles sur un corps K, extension de type fini de $\mathbf{Q}$ – mais passons pour le moment sur cette situation mixte, un peu bâtarde...) Si U, V sont des tels modèles, tout morphisme $V \longrightarrow U$ définit un morphismes de topos galoisiens sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$, $\mathrm{B}_U \longrightarrow \mathrm{B}_V$, et si U est élémentaire anabélien, ce morphisme et connu quand on connaît seulement $\mathrm{H}_1(\mathrm{B}_{\overline{U}}, \mathbf{Z}_\ell) \longrightarrow \mathrm{H}_1(\mathrm{B}_{\overline{V}}, \mathbf{Z}_\ell)$ – ce qui est beaucoup moins que la classe d'isomorphie d'homomorphismes de $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$-topos. (En fait, sans hypothèse anabélienne sur V, dès que V se plonge dans une variété anabélienne, f est connu quand on connaît son action sur les topos étales...). Mais quels sont les homomorphismes $\mathrm{B}_U \longrightarrow \mathrm{B}_V$, ou $E_U \longrightarrow E_V$, qui correspondent à des morphismes de modèles ? Avec un peu de culot, on dirait [:]

Conjecture fondamentale. — *Soient U, V deux schémas de type fini sur $\mathbf{Q}$, V séparé régulier, U une variété élémentaire anabélienne sur une extension finie de $\mathbf{Q}$. Considérons un morphisme $\mathrm{B}_V \longrightarrow \mathrm{B}_U$ des topos étales sur $\mathbf{Q}$ – ou, ce qui revient au même, un homomorphisme de groupes extérieurs*

$$f : E_V = \pi_1(V) \longrightarrow E_U = \pi_1(U),$$

compatible avec les homomorphismes extérieurs dans $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \pi_1(\mathbf{Q})$[31].

Conditions équivalentes [:]

(a) Cet homomorphisme provient (à isomorphisme près) d'un morphisme $V \longrightarrow U$ sur les modèles (qui est donc uniquement déterminé)

(b) $f|E_V^\circ$ est anabélien, i.e. l'image par f de tout sous-groupe ouvert de E_V° a un centralisateur réduit à 1.

Pour la nécessité de (b), on est ramené aussitôt au cas où V est réduit à un point, où cela se réduit à la

[31]**NB** Pour l'unicité, on est ramené aussitôt au cas où V lui-même est un modèle élémentaire anabélien, si ça nous chante.

Conséquence conjecturale. — *Soit* $\Gamma' \subset \mathrm{Im}(E_U \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{Q}})$ *un sous-groupe ouvert, correspondant à un corps k fini sur* $\mathbf{Q}$*, considérons un k-point de* U*, d'où un relèvement* $\Gamma' \longrightarrow E_U$*, de sorte que* Γ' *opère sur* π_U*. Ceci posé, on a* $\pi_U^{\Gamma'^{\circ}} = \{1\}$.

On étudiera par la suite les relations entre cette "conséquence conjecturale", et la précédente (d'apparence opposée !) concernant les E.

La conjecture fondamentale sur les modèles implique la conjecture fondamentale sur les corps, à condition de prendre soin, dans cette dernière, de se limiter aux homomorphismes compatibles aux filtrations modéliques.[32]

Plus généralement, prenant maintenant pour U des schémas qui sont des $\varprojlim$ des modèles élémentaires anabéliens, avec morphismes de transition des immersions ouvertes affines (pour pouvoir passer à la $\varprojlim$ dans la catégorie des schémas), pour V un schéma $\varprojlim$ de schémas séparés réguliers de type fini sur $\mathbf{Q}$ (morphismes de transition immersions ouvertes affines sans plus). Alors les morphismes *dominants* de schémas $V \longrightarrow U$ doivent correspondre aux homomorphismes extérieurs $E_V \longrightarrow E_U$ compatibles avec les projections dans $E_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, et telle que l'image soit ouverte. Par exemple, on pourrait prendre pour U, V les spectres d'anneaux locaux réguliers essentiellementde type fini sur $\mathbf{Q}$.

—

Cette conjecture fondamentale (éventuellement revue et corrigée en cours de route !) étant admise, la question qui se pose ensuite est de déterminer les topos (pro)galoisiens sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$ qui proviennent de modèles élémentaires anabéliens – ou encore, les $\pi_U = \pi_1(\overline{U})$ de tels modèles étant connus, de déterminer quelles sont `[les]` actions extérieures possibles de sous-groupes ouverts Γ de $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ sur de tels groupes fondamentaux – et éventuellement question analogue pour d'autres types de groupes profinis, correspondant à des $\mathrm{K}(\pi, 1)$ qui se réaliseraient par des variétés algébriques (sur $\mathbf{C}$, disons), mais pas par des variétés élémentaires. (J'ai en vue autant des variétés modulaires, tels que, notamment, des variétés modulaires pour les courbes algébriques …) à partir de là, on reconstruirait par recollement, en termes profinis, tous les schémas lisses sur un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$ (ou plutôt la

[32]Et il vaut mieux se borner à l'équivalence de (a) et (b) – la condition (c) avec les centralisateurs risque de passer mal à la $\varprojlim$.

catégorie de ceux-là), ou plus généralement, sur un corps quelconque – puis, sans doute, par "recollement", la catégorie des schémas localement de type fini sur un K – tant `[?]` des `[varier?]` la catégorie des fractions qui s'en déduit en rendant inversibles les homéomorphismes universels …

Les réflexions précédentes suggèrent aussi des énoncés comme le suivant : Pour un schéma de base S localement noethérien donné[33], les foncteurs $X \longrightarrow X_{\text{ét}}$, allant de la catégorie des schémas réduits localement de présentation finis sur S, vers la 2-catégorie des topos au-dessus de $X_{\text{ét}}$, est 1-fidèle (deux homomorphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$ tels que les morphismes de topos $f_{\text{ét}}, g_{\text{ét}} : X_{\text{ét}} \rightrightarrows Y_{\text{ét}}$ au-dessus de Set soient isomorphes, sont égaux) et même peut-être *pleinement fidèle*, quand on passe à la catégorie des fractions de $(\mathrm{Sch}_{\text{l.t.f.}})/S$ obtenue en rendant inversibles les homéomorphismes universels … Exprimant ceci par exemple pour les automorphismes d'une courbe algébrique propre sur une extension fini de $\mathbf{Q}$, on retrouverait le "fait" que tout automorphisme extérieur de E_K (K le corps des fonctions de X) qui respecte la structure à lacets `[?]` et qui commute à l'action de Γ, provient d'un automorphisme de X.

III. Étude des sections de E_U sur Γ

Soit U un schéma connexe lisse de type fini géométriquement 0-connexe sur le corps K, d'où $E_U \longrightarrow E_K$, et ([34]) on se propose d'étudier les sections mod $\pi_{U,K}$-conjugaison - plus généralement, on [] un même topos [] les sections $E'_K \longrightarrow E_U$, où E'_K est un sous-groupe ouvert de E_K (ce qui signifie que [] fait une extension de base finie sur K). Si K de type fini sur le corps $\mathbf{Q}$ et si U se plonge dans une schéma sur un groupe commutatif rigide l'application

$$U(K) \longrightarrow [\,]\ \text{d'isomorphisme section de } \mathrm{B}_U \text{ sur } \mathrm{B}_K[\,]\pi_{U_K}\text{—conjugaison de sections de} E_U \text{sur} E_K$$

est injectif. On va examiner d'entre façons "géométriques" de trouver des sections.

Supposons d'abord que U soit une courbe algébrique, que ne soit pas de type $(0,0)$ ou $(0,1)$, i.e. $\pi_1(\overline{U}) = \pi_{U,K} \neq \{0\}$. On a que pour tout $i \in \widehat{\overline{U}} \backslash \overline{U}$ (point à

[33] S de caractéristique 0 ?

[34] On a choisie un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U pour définir X, et E_U, E_K, et $E_U \longrightarrow E_K$.

l'infini) le groupe de lacets L_i fournit un scindage (des [] i.e. []) en prenant son centralisateur $Z(L_i)$ dans E, d'où

(2) $$1 \longrightarrow L_i \longrightarrow Z(L_i) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

et en prenant les scindages de cette extension. Il ne existe, p. ex. définis par une [] de $\overline{\mathrm{O}}_{\widehat{U},i}$. L'un des donnes de conjugaison des scindages de (2) est un []

(3)

et [] injectivement de l'un des donnes de π-conjugaison de scindages.

Proposition. — ([35]) On suppose $(g,v) \neq (0,0),(0,1)$ *i.e.* $\pi_{\overline{U}} = \pi_{U,K} \neq (1)$. *Alors les classes de π-conjugaison scindage de* (1) *définis pour les scindages de* (2) *sont distinctes de celles associés aux points de* $U(K)$. *Si de plus* $(g,v) \neq (0,2)$, *i.e. si [] est dans le cas anabélien, alors les classes de π-conjugaison de scindages de (1), associés à des scindages de (2) pour deux indices $i = i_1$ et $i = i_2$ distincts, soient distincts.*

La première assertion s'obtient en "bordant" le trous i, alors la section envisagé devient la section de $U \cup \{i\} = U'$ associée au point i, et celle est donc distincte de celle associée aux [] points de U', i.e. aux points de U - a fortiori [] pour le sous-groupe [] par L_i. On [] de même pour [] que les [] de scindages associées a un L_{i_1} et un L_{i_2}, $i_1 \neq i_2$, sont distinctes, [] sauf le cas de type $(0,3)$ [] on tombe sur le type $(0,1)$, où [] de résultat d'injectivité. Mais on peut [], à condition d'admettre que pour un scindage de (2), faisant opérer Γ sur π, on a

(3) $$\pi^{\Gamma^\circ} = L_i$$

(donc $\pi^\Gamma = (1)$, d'ailleurs) - résultat que on [] plausible. [] que le [] de conjugaison de sections détermine le [] de conjugaison de L_i, donc i.

Conjecture **(A)**. — *Soit U courbe algébrique anabélienne géométrique* 0*-connexe sur corps K de type fini sur* $\mathbf{Q}$. *Alors toute section de (1) est d'une des deux types précédents, i.e. soit définie par un point de* $U(K)$ [36], *Sont pas une section d'une extension (2), avec $i \in I(\pi)^\Gamma$ i.e. [] un point de $\widehat{U} \setminus U$, rationnel sur K.*

[35] C'est démontré sauf pour le type $(0,3)$ []

[36] Il y a [] plus []

Si on obtient cette conjecture, alors on va conclurait, pour passage à la limite, en considérait le corps de fonctions L de U et $E_L \longrightarrow E_K$ (E_L peut être considéré comme un groupe à lacets "infini" (avec une infinité des classes de sous-groupes lacets L_i...) que tout scindage de cette extension provient d'une scindage d'une extension de type (2), avec $i \in I$ $\Gamma = X(K)$ $(X = \hat{U})$. Les classes conjugués de tels scindages se grouperaient donc pour paquets (en regardent les centralisateurs des sous-groupes image de Γ° par ses sections,) et un [] ensemble des scindages qui est donc [] (Γ^0) conjugués (même s'il ne sont eux-mêmes conjugués). Donc on retrouve [] une description de $X(K)$ (donc ainsi de $X(K')$ pour toute extension finie K' de K) en termes de l'extension E_L de E_K par $\pi_{L,K}$, au même temps qu'une [] de reconstitue les $U = X \backslash I$ []

Donc en fait c'est la structure $E_L \longrightarrow E_K$ qui est le plus riche a priori, et de loin plus commode pour le genre 0 et 1, où le considération des U de type (g, v) $(2g + v \geq 3)$ [] le groupe "continue" d'automorphismes... La forme "modélique" de la conjecture précédente revient à la forme "birationalle", quand on y précise cette [] en disant que tout scindage de $E_U \longrightarrow E_K$ se revient au un scindage de $E_L \longrightarrow E_K$ (on ainsi, [] un scindage de $E_V \longrightarrow E_K$, si V est un modèle [] U).

On ne [] les conjectures précédentes (sous forme modèlique, disons) sous une forme plus géométrique, en introduisant, un même topos qu'un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U, [] X' de X [] $\widetilde{U}$ (où $X = \hat{U}$). (NB je m'abstient de le noter $\widetilde{X}$, [] il n'est pas [] sur X). Notons que pour $i \in I = \overline{X} - \overline{U}$, l'un des L_i des $\overline{\pi} = \pi(\overline{U})$ [] en correspondance 1-1 avec [] fibre X'_i de X' au dessus de i.

$$X \longrightarrow \overline{X} \longrightarrow X'$$

Donc X' peut être considéré comme le [] de $\widetilde{U}$, et de $X' \backslash I$ = ensemble des sous-groupes lacets de $\overline{\pi}$, qui apparaissent ainsi comme des "points à l'infini" des revêtements universel $\widetilde{U}$. D'ailleurs E_U s'interprète comme le groupe de [] schéma $\widetilde{U}$ [], et $E_U \longrightarrow E_K$ comme l'homomorphisme de passage au quotient [] (NB. $\overline{K}$ s'identifie a la clôture algébrique de K dans [], donc E_U opère sur Spec$\overline{K}$ de façon []) Une section de E_U sur E_K est donc une action de E_K sur $\widetilde{U}$, compatible avec son action sur $\widetilde{U}$ [] convenable (sans doute [] $\overline{U}_i$ finis sur $\overline{U}$ entre $\overline{U}$ et $\overline{U}$...). Considérons alors la

Conjecture **(B)**. ([37]) — *Toute telle action de* Γ *sur* $\widetilde{U}$ *admet* dans $X' = \widehat{\widetilde{U}}$ *un point fixe et un seul.*

Ceci signifie alors

a) S'il y a un point fixe à distance finie i.e. $\widetilde{X} \in \widetilde{U}^T$, alors

1°) L'image de $\widetilde{X}$ dans U est uniquement déterminée - c'est essentiellement le Théorème 3 dans §1 (des α points distincts de $U(K)$ définissent des classes de conjugaison des scindages distinctes) et

2°) [38] $\pi^\Gamma = (1)$ (i.e. il n'y a pas d'autre point fixe dans $\widetilde{U}$ sur ce même $x \in U(K)$), et [ ]

3°) il n'y a pas au même temps ce point fixe à l'infini - i.e. il n'existe pas de L_i normalisé par Γ, i.e. une scindage des [ ] type n'est pas au même temps des deuxièmes (fait que nous avons et oubli directement, précédemment).

D'autre part, dans le cas de points fixes à l'infini, l'unicité de l'image dans X signifie qu'une même action effective [ ] à la fois un L_i et [ ] $(v \neq J)$ - Fait [ ] établi sauf dans le cas $(g, v) = (0, 3)$ - et l'unicité au dessus d'une $i \in I$ fixé signifie que le L_i (i fixé) normalisé par Γ est unique, ce qui est un affaiblissement de la relation

$$L_i = \mathrm{Cen}\,\pi^{\Gamma^\circ}$$

pour ces opérations, conjecture plus haut.

En fait, je conjecture que dans la conjecture B, il est même vrai que Γ° agissant sur $X' = \widehat{\widetilde{U}}$ a un point fixe et un seul (ce qui est plus haut, [ ] point fixe [ ] nécessairement fixe pour Γ). Ceci implique dans le cas des points fixes à distance finie, qu'est alors $\pi^{\Gamma^\circ} = (1)$, comme il se devrait en général [ ] et dans le cas de points fixes à l'infini, que

$$\pi^{\Gamma^\circ} \subset \mathrm{Norm}_\pi(L_i) = L_i$$

donc le [ ] $\pi^{\Gamma^\circ} = L_i$ [ ] !

[37] et même l'action induit de Γ° doit avoir un point fixe [ ] plus bas

[38] C'est un cas particulier [ ]

[] tous nos beaux énoncés devraient être valables, [] un corps de base K de type fini de $\mathbf{Q}$, mais [] que K est extension de type fini d'un corps cyclotomique (pas [] fini sur $\mathbf{Q}$).

Nous pourrons définir les *courbes de Poincaré* sur un corps algébriquement clos de $\overline{K}$ de caractéristique 0, comme étant les courbes isomorphes à des revêtements universels de courbes algébriques anabéliennes sur K (donc courbes anabéliennes $\overline{U}$, $\overline{V}$ sur $\overline{K}$ définissent des revêtements de Poincaré isomorphes, si et seule si existe un revêtement fini étale de l'un, isomorphes à un revêtement fini étale de l'autre). Étant donné une courbe de Poincaré $\widetilde{\widetilde{U}}$ sur $\overline{K}$, on définit canoniquement sa complétion $\widehat{U}$ [] $\widehat{U}$. Ceci posé :

Conjecture **(B')**. — *Soient K un corps de type fini sur* $\mathbf{Q}$ *(ou sur un corps cyclotomique suffise peut-être), $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, U une courbe de Poincaré sur $\overline{K}$, de complétion $\widehat{U} = X$. Considérons une action de* $\Gamma = \Gamma_{\overline{K},K}$ *sur U, compatible avec sous-action sur $\overline{K}$, d'où une action de* Γ *sur X. Ceci posé : Il existe un point fixé et un seul de* Γ° *agissent sur X (*Γ°*, noyau de caractère cyclotomique* $\Gamma \xrightarrow{\chi} \widehat{\mathbf{Z}}^{*}$*).*

La différence avec la conjecture B, pour celle-ci [], [] d'un groupe profini π, [] librement sur U de façon que $U_{/\pi}$ soit une courbe algébrique anabélienne sur $\overline{K}$.

Que donneraient les conjecture précédentes, quand on les applique à une situation ou K est [] pour un modèle S de K (disons, élémentaire anabélienne), quand U_K provient d'une courbe relative U_S sur S - de sorte qu'on a un homomorphisme de groupes

$$E_{U_S} \longrightarrow E_S \tag{4}$$

de noyau $\pi_{\overline{U}}$, dont $E_{U_K} \longrightarrow E_K$ est déduit pour changement de base i.e. par produit fibre

$$E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}[\,] \tag{5}$$

Ainsi, les sections de E_{U_K} sur E_K correspondant aux relèvement continus $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ de l'homomorphisme surjectif $E_K \longrightarrow E_S$ et parmi ce relèvement, ceux qui sont triviaux sur le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ correspondants existent aux sections de E_{U_S} sur U_S. Nos conjectures impliquent donc qu'il y a existent deux sortes telles sections : 1°) celles qui correspondent à des points de U_K/K i.e à des sections rationnelles des U_S sur S - mais on va vérifier sans mal, sans doute, qu'une telle section rationnelle ne correspond effectivement à une section de l'extension (4), que si c'est une section régulière (à vérifier tantôt). 2°) Celles correspondant à des $i \in I(U_{\overline{K}})$ rationnels sur K, i.e. à une section de $\widehat{U_S}\backslash U_S = S'$ (étale fini sur S) sur S. Et il faudrait étudier encore à quelle conditions une telle section définit un paquet non vide de scindages de (4) - et comment déterminer exactement tous ces scindages.

Avant d'élucider ces deux points, un peu technique, je voudrais voir dans quelle manière la conjecture **A** (ou **B**) faite des ces §, permet de reconstruire la catégorie des modèles élémentaires anabéliennes sur $\mathbf{Q}$, et celle des extensions de type fini de $\mathbf{Q}$ et des modèles élémentaires anabéliennes sur ceux-ci, en termes des groupes extérieurs (ou topos galoisiens) associés à partir bien sûr de la donnée fondamentale de $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}},\overline{\mathbf{Q}}_\circ}$, opérant extérieurement sur $\widehat{\pi_{0,3}}$, d'où déjà l'extension $E_{0,3} = E_{U_{0,3}/\mathbf{Q}}$, où $U_{0,3} = \mathbb{P}^1_{\mathbf{Q}} - \{0, 1, \infty\}$.

Prenons les donne de $\widehat{\pi_{0,3}}$ -conjugaison de [] sections de $E_{0,3}$ sur $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma$ i.e. les "points" telles que le centralisateur de Γ^0 soit trivial (sections "admissibles") [] des topos $\mathrm{B}_{\widehat{\pi_{0,3}},\Gamma_{\mathbf{Q}}}$ [] sur $\mathrm{B}_{\Gamma_{\mathbf{Q}}}$ [] - on trouve un ensemble sur lequel Γ opère (qui n'est autre que $U_{0,3}(\overline{\mathbf{Q}_0})$, à isomorphisme canonique près). Pour tout ensemble fini I des sections, stable par [] la formation "forage de trous" doit nous fournir un groupe extérieur $\pi_{0,3}(I)$, de type [] sur lequel Γ opère (il voit mieux peut-être utiliser le yoga introduit par ailleurs des groupoïdes rigides - donc on peut [] ainsi [] de trous $0, 1, \infty$ - on trouve donc l'équivalent groupoidel de la droit projective $\mathbb{P}^1_{\mathbf{Q}}$, on l'appelle [] - qui correspond à un groupe extérieure à lacets infini sur lequel Γ opère - en fait, ce n'est autre que E_{K_1}, où

$$K_1 = \mathbf{Q}(T_1) \tag{6}$$

est l'extension transcendantal pour type de degré 1 de $\mathbf{Q}$.

Partant de (6), on construit de même l'équivalent groupoïdal de $U_{0,3}$ et on reconstruit comme précédent, pour avoir, sont des courbes de type $(0, \nu_2)$ sur K_1 (ou sur une extension finie de K_1) sont des courbes relatives de tipe $(0, \nu_2)$ sur une courbe sur $\mathbf{Q}$ (ou une extension finie de $\mathbf{Q}$, ou une revêtement étale fini d'une telle $U_{0\nu_1}$).

On procède [] pour construire finalement tous les E_K sur $E_{\mathbf{Q}}$ ([] tout corps extension de typew fini de $\mathbf{Q}$, est extension finie d'une extension transcendantal []) et tous les modèles élémentaires, où [] chaque avec la fibration [] sont une courbe de genre 0, suite un revêtement étale fini d'une telle fibration particulière. Sauf erreur, ça fait assez pour avoir un système fondamental de voisinages de tout point d'une X lisse sur un K et de reconstituer en principe les schémas lisses sur des K, pour recollements de tels morceaux avec des "immersions ouvertes". Mais [] que pour faire un telle description, il en faudrait développer un langage géométrique qui celle mieux à l'intuition géométrique, que les sempiternelles extensions de groupes profinis ... ou actions extérieures, et où les points rigides (à [] alors des clôtures algébriques de corps) jouent un rôle prépondérant. Je me faudra y revenir dessus - et en même temps, expliciter les topos étales (pas seulement le "morceau $K(\pi,1)$") [] entiers des schémas décrits ici par des extensions.

Reprenons le cas de $U = U_S$ schéma relatif sur S, "élémentaire" sur S - à fibres successives anabéliennes (s'il le faut) ou de moins à π_1 non nul, S étant lui-même (pour fixer les idées) lisse sur $\mathbf{Q}$, irréductible, corps de fonctions K, et reprenons la digression 5. Considérons une section rationnelle f de U sur S, définissant une section de E_{U_K} sur E_K - ou, ce qui revient au même, un relèvement de l'homomorphisme surjectif, $E_K \longrightarrow E_S$ en $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ (composé de la section $E_U \longrightarrow E_{U_K}$ [] $E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}$). Je veux montrer que f est pourtant définie i.e. une section de U_S sur S, si et seule si le section de E_{U_K} sur E_K provient d'une section de E_{U_S} sur E_S, i.e. si et seule si le relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ [] sur le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$.

Notons que cette dernière condition est une condition "de codimension 1 sur S" - de façon plus précis, si Z est un sous-schéma fermé de S de codimension ≥ 2, alors, posant $S' = S \backslash Z$, on a $\pi_1(S') \xrightarrow{\sim} \pi_1(S) = E_S$ pour le "théorème de pureté" - donc le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ est le même que celui de $E_K \longrightarrow E_{S'}$, ou, si [] (comme S' n'est pas un "modèle") que le sous-groupe fermé engendré pour les noyaux des $E_K \longrightarrow E_{S'_i}$, où les S'_i sont des ouvert "modèles" qui recouvrent S'. Si donc le conditions envisagés sont [] relativement aux S'_i (qui pourtant un recouvrement par S, [] S') - ce qui est [] signifie que ce section rationnelle envisagé est [] sur les S'_i, i.e. sur S' - alors celle est vérifié relativement à S - ce qui est [] signifie que le section est [] sur S. Donc, [], il faudrait [] a priori qu'une section de $U_{S'}$ sur S' []

une section de U_S sur S. [] d'une courbe relative $U_S = X_S - T$, X lisse sur S de dimension relative 1, T fini [] sur S, [] T décomposé sur S. Si X [] relatif ≥ 1, on sait ([] Weil) que le section [] une section de X, soit D l'image inverse de T, c'est un diviseur sur S, dont le [] sur $S' = S\backslash Z$ est nul, donc (comme codim $(Z, S) \geq 1$) il est nul, OK.

(9)

(10)

avec des carrés cartésiens, et des flèches horizontales surjectives. L'homomorphisme $E_{U_S} \longrightarrow E_K$ est composé d'un relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$ de $E_K \longrightarrow E_{D_n}$ avec l'homomorphisme canonique $E_{U_{D_n}} \longrightarrow E_{U_S}$. (relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$ correspondant biunivoquement aux sections de E_{U_n} sur E_K, ou aux relèvements de $E_K \longrightarrow E_S$ ou $E_K \longrightarrow E_{U_S}$...).

Ceci dit [39], j'ai envie de prouver que $\varphi_n : E_K \longrightarrow E_{D_n}$ [] i.e. provient d'une section de E_{O_n} sur O_n si et seule si la section rationnelle correspondant de U_S/S est définie en n. Ceci impliquera l'assertion précédent (que la section phi de E_{U_K} sur E_K provient d'une section de E_{U_S} sur E_S, si t seule si la section rationnelle correspondant isomorphique).

Mais il s'agit ici d'un énoncé en fait [] géométrique, que j'ai envie de reformuler sous forme plus générale :

Théorème. — *Soit T un trait ([]), U un schéma relatif "élémentaire" sur T, anabélienne* [40]*, K le corps des fonctions de T, On [] un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U, d'où une clôture algébriquement $\overline{K}$ de K, et on considère l'extension $E_U = \pi_1(U; \widetilde{U})$ de $E_K = \pi_1(K, \overline{K}) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ par $\pi = \pi_1(U_{\overline{K}}, \widetilde{U})$. On a donc un carre cartésien des groupes profinis*

[]

où E_S s'identifie au quotient de E_K par le sous-groupe [] engendré par un groupe d'inertie $I_{K'} \simeq T_\infty(\overline{K})$, cf plus haut. Soit f_K, K un point de U_K rel/K, d'où une section $\Psi = \Psi_{f_K}$ de E_K sur E_{U_K}. Ceci posé les conditionnes suivantes sont équivalentes

[39] **N.B.**

[40] anabélienne [] - il suffit que les fibres de ordre 1 de la fibration élémentaire de U ne soient que de type $(0,0)$ ou $(0,1)$ - i.e. à π_1 nul

(a) f_K se prolonge en une section de U sur S ;

(b) Ψ provient d'une section de E_U sur E_S ;

(b') le compose $E_K \xrightarrow{\Psi} E_{U_K} \longrightarrow E_U$ s'annule sur $I_{K'}$.

L'équivalence de (b) et (b'), et qu'elles soient impliques par (a), est clair. C'est l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) qui demande une démonstration. On est [] au cas où T est strictement local (donc $E_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est réduit à son sous-groupes d'inertie, et $E_S = (1)$). On est ramené de prendre un [] au cas où $U_{/S}$ est une courbe relative élémentaire, $U = X \backslash T$, X lisse et propre. Alors f se prolonge en une section f au X sur S, et la conclusion [] que $f(S) \subset U$. Donc on est ramené [] au

Lemme. — *Soit X schéma projectif lisse de donne relation 1 connexe sur S trait strictement local, soit $T \subset X$ sous-schéma, fini étale sur S, donc $T \simeq I_S$, I ensemble fini, et soit $U = X \backslash T$ (donc T est défini par une [] $(g_i)_{i \in I}$ des sections disjointes de X sur S) si g est de genre relatif, $\nu = []I$, on suppose $(g, \nu) \neq (0,1)$. Soit $i_0 \in I$, f une section de X/S distinctes des disjoints g_i, et telle que f et g_{i_0} coïncident en s (point fermé de S). Si $\eta = S \backslash s$, on a donc un morphisme $\eta \longrightarrow U$, d'où $\pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$. Je dis que cet homomorphisme n'est pas trivial, et même, si $\nu \geq 2$, que pour la donné [] n'est pas trivial (pour [] distinct de la caractéristique résiduelle).*

Comme la section rationnelle de $J^1_{X/S}$ défini par f est régulière, on voit que le composé de l'homomorphisme envisagé avec $\mathrm{H}_n(J^1_{X/S}, \mathbf{Z}_\ell)$ est nul - i.e. le $\mathrm{H}_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)$ s'envoie dans la partie torique de $\mathrm{H}_1(U, \mathbf{Z}_\ell)$ [], qu'est canoniquement isomorphe à T^I_ℓ / T_ℓ. (**N. B** cette partie est nulle si card $I = i$, et dans ce cas le critère homologique [] insuffisant...) Il faudrait donc calculer cet homomorphisme

$$T_\ell (\simeq \mathrm{H}_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)) \longrightarrow T^I_\ell / T_\ell$$

pour constater qu'il n'est pas nul dans le cas envisage, $\nu \geq 2$ (et traiter [] le cas $\nu = 1$). Je vais dériver le résultat : soit $x = g_{i_0}(s)$, $A = \underline{O}_{X,n}$, V l'anneau de S, J_{i_0} l'idéal de l'homomorphisme $A \xrightarrow{g^*_{i_0}} V$ associé à [], c'est donc une idéal inversible de A -soit de même J_f l'idéal associé à $f^* = A \longrightarrow V$, et considérons $g^*_{i_0}(J_f)$, c'est une idéal de V engendré par un générateur, et comme $g_{i_0} \neq f$, on voit que cet idéal n'est pas nul. Soit $H = [\,]\nu/g_{i_0}^*(J_f)$, cet entier [] de g_{i_0} et f, ces [] comme une multiplicité d'intersection. Ceci posé, je [] que l'homomorphisme

$$T_\ell \longrightarrow T_\ell^I/T_\ell$$

est le produit [] des l'injections canoniques $T_\ell \longrightarrow T_\ell^I$, correspondant à l'indice i_0. Il faudrait que [].

Reste le cas $\nu = 1$, qui semble demander un traitement séparé [41]. [] à vérifier (pour les groupes fondamentaux premiers à p) c'est que l'homomorphisme extérieur $\pi_1(U_s) \simeq \pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$ est égal à $K_{i_0} \circ (\mu Id_T)$, où K_{i_0} est l'homomorphisme "local"

$$[\,]$$

associé à l'indice i_0. Je vais admettre à priori, qui une ne peut guère être difficile.

Pour terminer ce numéro, je veux encore étudier, dans la situation d'une U courbe relation sur une S avec $U = X\backslash T$, X lisse et propre sur S, T fini étale, avec sections g_i donnée de T sur S, les "sections de 2^{eme} espèce" de l'extension

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow E_U \longrightarrow E_S \longrightarrow 1$$

associées [42] à $i = i_0$ - que définit une classe de π-conjugaison de sous-groupes ouverts lacets L_i dans π. (On suppose qu'on a bien une telle suite exact i.e. que $\pi_2(S) \longrightarrow \pi_1(\text{fibre})$ est nul, ce qui [] le cas si $\pi_2(S) = 0$, p. ex []) si on est dans le cas d'une modèle élémentaire au dessus d'un corps de caractéristique 0 (la réconstruction de ces [] étant sans doute [], si on [] aux groupes fondamentaux premiers aux cas résiduelles...) [] L_i dans E_U s'envoie *sur* E_S, on trouve donc des scindages pour cette extension, qu'on peut regarder comme une extension

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow N(L_i) \longrightarrow E_S \longrightarrow 1 \tag{13}$$

La classe d'isomorphisme est un élément

(14)

[41] Ceci doit être indépendant de la [] de ν !

[42] en tous cas, même sous []

que je ne propos d'étudier. On [] si S est un $K(\pi, 1)$

(15)

d'ailleurs on a une suite exacte de Kummer (ou $\mathrm{Pic}(S) = [\,]$)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)[\,] \tag{16}$$

d'où par passage à la limite

(17)

Dans le cas où S est un schéma élémentaire sur un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, $\mathrm{Pic}(S)$ est un Z-modèle de type fini (par Mordell-Weil-Néron), donc l'homomorphisme

$$\mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)\hat{} \longrightarrow \mathrm{H}^2(S, T) \tag{18}$$

est *injectif*.

Sous nous [] de cette condition, considérons le cas général - je dis que la classe c (14) est donc l'image de (18), de façon précise que c'est l'image de l'élément

$$g_i \in \mathrm{Pic}(S)$$

classe des faisceaux [] (on []) de X le [] de g_i. Principe d'une vérification : [] la complété formel de X [] de $g_v(S)$, [] ou interpréter la suite exacte (13) comme la suite exacte d'homotopie de ce topos [], au dessus de S. On a donc à prouver une historie d'ombres...

Dans le cas "arithmétique", on voit donc que l'extension (13) est scindée si et seule si $g_i = 0$ i.e. [], globalement sur S, []

Quand $g_i = 0$, parmi les scindages, il y a [] provenant [] d'une base de J_i/J_i^2 qui soit [].

L'indétermination des choix d'une telle base [] celle des choix d'une section de (13) est donc

(20)

On a ici des suites exactes de Kummer

[]

d'où par passage à la limite

(21)

Dans le "cas arithmetique" [] on trouve donc

[]

Si le genre est zéro, prenant une de ces sections de T sur S comme section à l'infini, OPS ([] à se localiser) $U_S = \mathbb{E}'_S \backslash T'$, donc f s'identifie à une section de $\mathbb{E}^1_S$ sur S', i.e. de $\underline{O}_S$ sur S, donc (comme codim $(2, S) \geq 2$ []) elle se prolonge en une section de $\mathbb{E}'_S$. Et on [] comme précédemment, OK. Considérons donc les diviseurs irréductibles $D_i$sur S, ou ce qui revient au même, les points x_v de X de codim 1, i.e tels que $\underline{O}_{x_v}$ soit un [] () anneau de valuations discrète). Considérons son [] $\overline{\underline{O}_{x_v}}$ dans $\overline{K}$, [] un idéal maximal [] (ces idéaux correspondent aux points [] $\widetilde{S}$ de S dans $\overline{K}$ au dessus de x) et considérons son stabilisateur N_n dans E_K, qui opère donc dans $k(\widetilde{x}) = \overline{k(x)}$, et s'envoie en fait, on le sait, *sur* $\mathrm{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$.

Soit $I_{\widetilde{x}}$ le noyau de l'homomorphisme obtenue ([] "géométriques" de []), donc on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow [\,]\,\mathrm{Gal}(\overline{k(x)}/k(x)) \longrightarrow 1 \tag{7}$$

et par Kummer une isomorphisme canonique[43]

(8)

On notera que si x est le [] du diviseurs D, alors $k(x)$ est le corps des fonctions de D. C'est un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$.

Il est immédiat (sans supposer que le corps de base pour S soit $\mathbf{Q}$) que le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ est le sous-groupe [] engendré par les $I_{\widetilde{n}}$. Donc l'hypothèse que $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ [] sur le dit noyau, signifie aussi qu'il [] sur [] des $I_{\widetilde{n}}$. Soit alors $U_{\underline{O}_x}$ induit par U sur $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Q}_x$, on a donc des factorisations d'ailleurs $\mathbb{G}_n(S)$ n'a pas [], donc

22)

[43] à corps de [] de car 0 !

est injectif[44]. Ainsi, quand $g_i = 0$ i.e. quand (13) admet des scindages "géométriques" (et il suffit []) ceux-ci forment un torseur sous $\mathbb{G}_m(S)$, qui s'identifie à une sous-torseur des [] de tous les scindages de (13). Pour que la "description profinie de la géométrie algébrique absolu sur **Q** soit complète, il y faudrait également caractériser (en termes de cette description profinie) le sous-ensemble remarquable.

Je voudrais enfin comprendre encore comment une section d'extensions des type (1) peut se "spécialiser" en une section de type (2), donc le cas des courbes relatives. Pour ceci, je reprends la [] situation

Dans la cas [] où f n'est pas définie sur S, on trouve une action de 2^{nde} espèce, [] L_i dans π.

À vrai dire

[]

(31)

J'ai l'action extérieure de T sur π n'est souvent pas triviale (je conjecture qu'elle l'est si et seule si il y a "bonne réduction") - donc le groupe E_K n'opère pas lui même extérieurement sur π. Mais tout scindage de (30) définit une extension de E_K par π, donc une action extérieure [] "admissible", définie par une courbe algébrique ? - Sans doute pas [], si ce n'est la courbe "réduit" de type (g, v) ([]) ? [] ce pourrait être celle ci :

Conjecture-à-[]. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *U_η a bonne réduction sur S ;*

(b) *L'action extérieure de T sur π est triviale (ce qui signifie ainsi que tout [] scindage de (31) - p. ex défini par un point de U_η [] induit un homomorphisme $T \longrightarrow \pi$);*

(c) *L'action de T sur $\pi_{ab} = H_1(U_{\overline{\eta}})$ est triviale ;*

(d) *Itou pour*

[44] (cas "[]")

(e) En termes de une section de (30)

(f) En termes de une section de (30)

On a [ ]

[ ]

J'ai donc [ ] un [ ] général (qui je pourrais à la occasion [ ] avec la généralité qui lui revient) pour construire des actions extérieures [ ] de groupes E_k (K extension de type fini de $\mathbf{Q}$) sur des π à lacets, qui (sans doute)] géométriques, par la considération de courbes de type (g,v) "se réduisent [ ]". Mais je [ ] pas pour cette vrai à faire des actions effectives, associées à actions extérieures [ ] géométriques [ ] - i.e. d'une des deux types 1°, 1° [ ] de ce n°.

IV. Sections d'extensions et anneaux de valuations généraux

D'abord une révision de notations. Si X est une schéma connexe, je note

$$E_X = \Pi_1(X) \tag{1}$$

son groupe fondamental profini en tant que groupe extérieur, et si $\widetilde{X}$ est un revêtement universel profini de E_X, par

$$E_X^{(\widetilde{X})} = \pi_1(X;\widetilde{X}) = Aut_X(\widetilde{X}) \tag{2}$$

son groupe fondamental précisé - qu'est un groupe profini. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau (le plus souvent une corps) je note E_A, et $E_A^{\widetilde{A}=E_X^{(\widetilde{X})}}$. Si A est une A-algèbre telle que $\mathrm{Spec}(\widetilde{A}) = \widetilde{Y}$ soit une revêtement universel de X (ce qui le détermine à isomorphisme non unique près). Bien entendu, si ξ est une "point géométrique" de X, on note

$$E_X^{\xi} = \Pi_1(X_1\xi) = E_X^{\widetilde{X}(\xi)}, \tag{3}$$

où $\widetilde{X}(\xi)$ est le revêtement universel de X [ ] en ξ. Le choix de ξ correspond d'une [ ] [ ] et d'une extension séparablement close Ω de $k(x)$ ([ ] clôture algébrique de $k(x)$) et on note alors ainsi E_X^{Ω} au lieu de E_X^{ξ} (Ω sous entendu [ ] extension de $k(x)$ donc avec sa structure de $k(x)$ algèbre) [ ]

$$E_X^{\Omega} = E_X^{\overline{k(x)}}, \tag{4}$$

où $\overline{k(\alpha)}$ est la clôture algébrique de $k(\alpha)$ dans Ω. Bien sur, si $X = \mathrm{Spec}(A)$, on note aussi E_A^{Ω} – notation [] utilisée [] $E_K^{\overline{K}}$, K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique [] séparable de K.

Si X est un Y-schéma, 1-connexe, on []

$$E(f): E_X \longrightarrow E_Y, \quad \text{où} \quad f: X \longrightarrow Y \tag{5}$$

E_X est un foncteur en X

$$(\text{Sch conn}) \quad \longrightarrow \quad \text{Group ext}$$

qui se précise pour l'homomorphisme injectif des groupes profinis

$$E_X^{\widetilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\widetilde{Y}} \tag{6}$$

où $\widetilde{Y}$ est le revêtement universel de Y défini par $\widetilde{X} \longrightarrow Y$ ($\widetilde{X}$ [] pouvoir écrire en fait $E_Y^{\widetilde{X}}$, plus géométriquement E_Y^Z chaque fois qu'on a un Y-schéma Z 1-connexe, jouent le rôle de "foncteur fibre" pour le topos $\mathrm{B}_{\pi(X)}$ des revêtements étales de Y.)

On peut désir que

$$(X, \widetilde{X}) \mapsto E_X^{\widetilde{X}} \tag{7}$$

est un foncteur, de la catégorie des schémas 0-connexes X *munis* une revêtement universel (on [] d'un Z 1-connexe s'envoyant dans X) vers celle des groupes profinis. Ceci s'applique en particulier en regardons la sous-catégorie des (X, ξ) munis d'un point géométrique - on a donc

$$E_X^{\xi} \longrightarrow E_Y^{\eta} \tag{8}$$

si on a un homomorphisme de schémas "géométriques profinis" $(X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$. On note que tout [] géométrique de X en un $x \in X$ - i.e. une extension [] Ω de $k(\alpha)$ [] - et l'homomorphisme (8) s'identifie ainsi a

$$E_X^{\overline{k(\alpha)}} \longrightarrow E_Y^{\overline{k(\eta)}} \tag{9}$$

où $\overline{k(\alpha)}$, $\overline{k(\eta)}$ sont les clôtures séparables *dans* Ω.

On poserons

$$E_{X/Y}^{\widetilde{X}} = \mathrm{Ker}(E_X^{\widetilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\widetilde{X}} = E_Y^{\widetilde{Y}}) \tag{10}$$

C'est un foncteur par un triple $\widetilde{X} \longrightarrow X \longrightarrow Y$ avec X, Y 0-connexe, $\widetilde{X}$ un revêtement universel, plus généralement, si $T \longrightarrow X$ avec 1-connexe, on pose

$$E^T_{X/Y} = \operatorname{Ker}(E^T_X \longrightarrow E^T_Y) \tag{11}$$

([45]) on a un foncteur []. Cas particuliere $E^{\xi}_{X/Y}$, ξ un point géométrique de X, $E^{\Omega}_{X/Y}$, $E^{\widetilde{X}}_{X/A}$ (si $Y = \operatorname{Spec} A$), $E^{\widetilde{B}}_{B/A}$...

[] on dispose d'une "suite exacte d'homotopie universel" (en dim 2) ([46]) pour $X \longrightarrow Y$, alors le donnée (pour $X \longrightarrow Y$ donné) de $T \longrightarrow X$, (avec T 1-connexe) peut s'interpréter par la donnée d'un composé

$$T \longrightarrow Y$$

et d'un relèvement en $T \longrightarrow X$, ou ce qui revient au même, d'une section de $X_T = X \times_Y T$ sur T. Ceci posé,

$$X$$

on avoir un isomorphisme [] (avec l'hypothèse de "suite exacte d'homotopie" faut)

$$E^T_{X/Y} \simeq \pi_1(X_T; T) \simeq E^T_{X_T} \tag{12}$$

et on []

$$1 \longrightarrow E^T_{X/Y} \longrightarrow E^T_X \longrightarrow E^T_Y \longrightarrow 1 \tag{13}$$

(Cette hypothèse [] satisfait si $Y = \operatorname{Spec} K$, K un corps, Si X est géométriquement 0-connexe sur K).

Plus généralement, si on a une suite exacte d'homotopie universel, mais pour [] avec $E^T_X \longrightarrow E^T_Y$ surjectif,

On ([47]) [] une factorisation de $X \longrightarrow Y$ en

$$X \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \tag{14}$$

[45]**NB.** $E^T_{X/T}$ []

[46]Cas où $E^T_X \longrightarrow E^T_Y$ est [un] épimorphisme

[47]Sous l'hypothèse "suite exacte d'homotopie" mais avec fibres []

avec Y' étale fini ou pro-étalefini sur Y et $E'_X \longrightarrow E_Y$, était maintenant [un] épimorphisme, [] suite exacte universel d'homotopie bien sûr. On avoir donc isomorphismes []

$$E^T_{X/Y} \xrightarrow{\sim} E^T_{X/Y'} \tag{15}$$

qui peut donc se [] comme

$$E^T_{X\times_{Y'}T} \simeq E^T_{X/Y} \tag{16}$$

qu'on peut noter $E^T_{X_T}$, mais en faisant attention que [] X_T [] non plus $X\times_Y T$ (qui va être disconnexe si $Y' \longrightarrow Y$ pas isomorphisme) mais $X\times_Y T$.

Bien sur, à isomorphisme []

s'identifie bel et bien au groupe de Galois Gal($\overline{K}$,K) de $\overline{K}/K$, $\overline{K}$ est la clôture séparable de K telle que Spec$\overline{K} \simeq \widetilde{Y}$. Souvent, on notons Γ, ou Γ_K, $\Gamma^{\overline{K}}_K$, au lieu de E_Y - surtout si K est algébrique sur le corps premier, et [] donc plus de "partie géométrique" à distingue d'une "partie arithmétique"...

Soit K un corps (qui pourrait être algébriquement clos), L une extension de type fini de K, X un "modèle" propre régulière de L. Alors $E^{\overline{L}}_X$ s'identifie a un quotient de $E^{\overline{L}}_L$, *qui ne dépend pas de modèle X défini*, comme il est [] c'est la partie "universelle géométrique" [] qui classifie les schémas (finis) étales sur L qui sont "non isomorphes" sur *tout* modèle régulière (propre ou non) de L/K.

Si U est un modèle quelconque, il se plonge dans un X, et on a des homomorphismes surjectifs [] Z partie ferme de X

$$E^{\overline{L}}_X = E^{\overline{L}}_L \simeq E^{\overline{L}}_U / \text{ sous-groupe fermé []}$$

Notons que $E^{\overline{L}}_L$ es e imite projective de $E^{\overline{L}}_U$, pour des modèles réguliers ([]) variables

$$E^{\overline{L}}_L \simeq [] E^{\overline{L}}_U$$

et de même, bien sûr

$$\pi^{\overline{L}}_{L/K} \simeq [] \pi^{\overline{L}}_{U/K}.$$

[]

dont le choix "effectif" dépend de celui d'un revêtement universel ou encore d'une point géométrique [] de $\widetilde{K}_n$ - i.e. d'une clôture algébrique de $\widetilde{K}_n$ []

[]

est que $a \in U$.

Ceci posé, $E_U^{\overline{L}}$ se récupère à partir de $E_L^{\overline{L}}$, comme quotient de ce dernier, en prenant *tous* les V de L [] un centre sur U (il suffit même de prendre les $V = \underline{O}_{U,n}$, où se est [] de codim 1 des U), et [] correspondants.

On peut regarder

[]

Mais il en est [] ainsi comme on voit en considérant $V_1 = V \cap L_1$, qu'est un anneau de valuations de L_1, ([48]) dont le corps [] fini sur K si celui de V l'est (donc $V_1 \neq L1$) - donc V_1 correspond à une "place" des corps de fonctions d'une variable L_1 sur K. [] E_K° centralise T_{V_1}

Conjecture. — Soient K, L des extensions de type fini de $\mathbb{Q}$, $K \subset L$. Alors

a) Toute section de E_L sur E_K (au guère de tel, se revient au même...) normalise sur T_V associée à un anneau de valuations V de L contenant K, à corps résiduel algébrique sur K et V est uniquement ([49]) [] cette condition [] au dessus de E_K.

b) Soit U un modèle "élémentaire" de L sur K, anabélien. Alors tout section de $E_U^{\overline{L}}$ sur $E_K^{\overline{K}}$ se relient [] une section de $E_L^{\overline{L}}$ sur $E_K^{\overline{K}}$.

À noter que ce question 2° est[] locale [] elle doit être essentiellement "triviale", que [] vraie un [] - par contre 1°, est une question de [] globale sur U, et sans doute [] façons triviale.

La validité des ces énonces, impliquant donc, pour les sections de $E_U^{\overline{L}}$ sur $E_K^{\overline{L}}$ associes a un anneau de valuations de L/K de corps résiduel K, que l'image de $E_K^{\overline{L}}$ doit normaliser un sous-groupe [] de $\pi_{L/K}^{\overline{L}}$, qui est non trivial si le valuation [] centre sur U, i.e. si le section n'est pas associé à un point K-rationnel de U, ce qui est justifiant [] des conjectures (qui prouvent d'abord [] !) de §2.

Avant de [] vers l'étude des questions 1°) et 2°) et ainsi des questions de normalisation et de centralisations [] précédemment a propos de N_V, I_V, ...),

[48]Il faut []

[49][]

STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

1. Courbes standard

Soit k un corps algébriquement clos. Une "courbe standard" sur k es une schéma X sur k satisfaisant les conditions suivantes :

a) X quasi-projectif, toute composante irréductible est de dim 1

b) Tout point de X est soit lisse, soit un "point quadratique" (ordinaire) - i.e. isom (loc. ét) à la courbe Spec($k[X,Y]/XY$) au point 0.

Il est connu qu'on peut trouver une unique [] $\widehat{X}$ de X, telle que X soit un schéma propre, qui X s'identifie à un ouvert dense de $\widehat{X}$, et que $\widehat{X}$ soit lisse sur les points de $\widehat{X} \backslash X = I$. Alors $\widehat{X}$ est une courbe projective, I est une partie finie de $\widehat{X}(k)$ contenant [] ouvert des points des lissité de $\widehat{X}$. [] A des points singuliers de X s'identifie à []

La donnée de X équivaut à celle des $(\widehat{X}, I)$, où $\widehat{X}$ est un schéma projectif, dont toute composante irréductible est de dim 1, et dont l'ensemble singulier est formé des points [] ordinaires - et I est un sous-schéma fini étale de $\widehat{X}^{\text{lisse}}$, ou ce qui revient au même, une partie fini de $\widehat{X}^{lisse}(k)$.

Soit

Ainsi, à la courbe standard X nous avons associé les systèmes de données suivantes :

[]

Inversement, [] on construit une courbe standard X en passant au quotient dans $\widetilde{A}_k Y \backslash I_k$ par l'involution σ - i.e. X est universel [] pour la donnée p:

[]

soumise à $(pi)\sigma = pi$.

Ainsi la catégorie des courbes standard sur k [] apparaît comme équivalente à celle des systèmes a) b) c) ci-dessus. (pour les iso)...

N.B. On récupère $\widehat{X}$ comme quotient de Y par σ.

Généralisation sur une base quelconque.

Une *courbe standard* sur S (multiplicité schématique, disons) [] défini constructivement en termes d'un système a), b), c) comme ci-dessus, i.e.

[]

On construit alors $\widehat{X} = Y/\sigma$, contenant $A = \widetilde{A}/\sigma$ et I comme sous-schémas fermés finis étales sur S, et [] $X = \widehat{X} \backslash I$. On peut montrer que le foncteur

$$(Y, \widetilde{A}, \widehat{I}, \sigma_{\widetilde{A}}) \mapsto X$$

des systèmes (5) (pour les iso) vers les schémas relatifs [], est *pleinement fidèle* ([50]).

N.B. []

[]

(par abus de langage, puisque c'est non seulement le schéma relatif Y, mais Y avec la structure supplémentaire $\widetilde{A}, I, \sigma_{\widetilde{A}}$...).

2. Graphe associé à une courbe standard

Revenons au cas d'un corps de base k algébriquement clos, pour commencer. Soit X une courbe standard, d'où $Y, I, \widetilde{A}, \sigma_{\widetilde{A}}$.

Posons

(7) $$S = \pi_{\circ}(Y) \simeq \text{ [] des corps irréductibles de } X$$

On a alors le diagramme d'application canoniquement entre ensembles finis

(8) []

[50] faux tel quel

où q est de degré 2 et définit l'involution $\sigma_{\widetilde{A}}$. Les applications σ et p sont induites par les [] en passant aux $\pi_\circ$.

Le système $(\widetilde{A} \xrightarrow{\sigma} S, \sigma_{\widetilde{A}})$ où [], peut être considéré comme définissant un *graphe*, dans S est l'un des sommets, et $\widetilde{A}$ l'un des [] l'application σ étant l'application "origine d'un []". Ce graphe ne dépend que de $\widehat{X}$, pas de X i.e. des choix de $I \subset \widehat{X}(k)$. C'est [] compte de ce choix que l'on considère, [] plus de la structure de graphe, le donnée supplémentaire

$$I \longrightarrow S \tag{9}$$

Le graphe indique comment les composantes irréductibles de X (figurés par les sommets) se récupèrent deux à deux - les points d'intersections, i.e. les points singuliers ("doubles" []) de X, correspondant aux arêtes. Si une composante irréductible X_α correspond au sommet α des graphes, alors les [] fermés en α correspondent bieunivoquement aux points doubles de X_α - donc [] X_α sont lisses [] l'extrémité.

Il est clair que tout graphe fini peut être obtenue (à iso près) par une $\widehat{X}$ convenable - et même avec des composantes X_α de genre g_α donné (i.e. des $\widetilde{X}_\alpha$ de genre g_α...). De plus, [] $I \longrightarrow S$ (I [] fini), cela peut être réalisé par un $I \subset \widehat{X}^{lisse}$, i.e. par une courbe standard S.

La *maquette* d'une courbe standard X consiste, pour définition, en les donnes suivantes

[]

Une structure formée d'une graphe fini $G = (S, \widetilde{A}, \sigma)$, d'une ensemble fini I au dessus de l'une des sommets de G, et d'une application "genre": $S \xrightarrow{g} \mathbf{N}$, [] appelé ici une "maquette".

Proposition. — *Considérons la maquette d'une courbe standard X*

a) Soient $\alpha, \beta \in S$, alors α, β appartiennent à la même composante connexe de graphe G, si et seule si X_α et X_β appartiennent à la même composante connexe de X. Donc on a une bijection canonique

$$\pi_0(G_X) \simeq \pi_0(X), \tag{11}$$

en particulier X est connexe si et seule si G_X est connexe.

b) Supposons X connexe i.e. $\widehat{X}$ connexe, i.e.[] on a alors [] i.e. [] où []

.

3. Courbes "stables" et MD-graphes

Une courbe standard (sur k algébriquement clos) est "stable", si elle satisfait à l'un des conditions équivalentes suivantes

a) $\operatorname{Aut} X$ est fini

b) Pour tout α, $(Y_\alpha, I_\alpha \cup \widetilde{A}_\alpha)$ est anabélien i.e. $2g_\alpha + \widehat{\nu}_\alpha \geq 3$ i.e. $2g_\alpha - 2 + \widehat{\nu}_\alpha \geq 1$, i.e.

   1) Si $g_\alpha = 1$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 1$
   2) Si $g_\alpha = 0$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 3$

c) Tout champ de vecteurs sur Y nul sur $I \cup \widetilde{A}$ est nul.

d) $\underline{\mathrm{Aut}}_{(Y,\widetilde{A}_k,I)}$ est un schéma en groupes fini étale sur k. On voit que cette condition (sous la forme b)) ne dépend que de la *maquette* de la courbe. On dit que X est une *MD-courbe* (MD, initiale de "Mumford-Deligne" ou de "modulaire") si elle est stable, et 0-connexe (i.e. connexe non vide).

Les maquettes de telles courbes sont les maquettes 0-connexes et stables (i.e. dont les sommets de guère 1 sont de poids total ≥ 1, et les sommets de guère 0 sont de poids total ≥ 3), on les appellera les MD-graphes.

NB. Une maquette est une MD-graphe si et seule si

a) elle est 0-connexe (i.e. le graphe G est connexe $\neq \varnothing$)

b) elle n'est pas réduit à un seul sommet de guère 1, de poids total 0 []

c) les sommets []

Proposition. — *Si* $(G = (S, \widetilde{A}, \sigma), I, \underline{g} : S \longrightarrow \mathbf{N})$ *est une MD-graphe, son type* (g, ν) *est anabélien, i.e.* $2g + \nu \geq 3$.

Si on avait $g=1$, $\nu=0$, alors la relation

$$g=1=\sum g_\alpha+h_1$$

montre que ou bien tous les g_α sont nuls et h_1 [], ou bien tous les g_α sauf une g_{α_0} sont nuls, []

[]

Soit G une maquette. On dit qu'une courbe standard sur un corps algébriquement clos est *de type* G, si sa maquette est isomorphe à G, on dit qu'elle est G-*épinglée* si on se donne un isomorphisme entre se maquette et G (c'est donc une structure []).

Soit $(\widehat{X},\underline{I})$ une courbe standard sur une base S quelconque, on dit qu'elle est de type G si ses fibres géométriques sont de type G. Alors les maquettes des fibres géométriques de $(\widehat{X},\underline{I})$ forment les fibres d'une schéma en maquettes (ou un MD-graphe) sur S $(\underline{S},\underline{\widetilde{A}},\sigma_{\underline{\widetilde{A}}},\underline{I},\underline{\widetilde{A}}\longrightarrow\underline{S},\underline{I}\longrightarrow\underline{S},\underline{S}\xrightarrow{g}\mathbf{N}_S)$ (système de revêtements finis étales de S et de morphismes entre ceux-ci), localement isomorphe à la maquette G donnée. On appelle G-épinglage entre $(\widehat{X},\underline{I})$ tout isomorphisme entre G_S et $\underline{G}(\widehat{X},\underline{I})$. Si

$$\Gamma=\operatorname{Aut}G \tag{18}$$

(groupe fini), les G-épinglages de $(\widehat{X},\underline{I})$ s'identifient aux sections d'une certain Γ_S-torseur, appelé *torseur de G-épinglages* de $(\widehat{X},\underline{I})$.

Considérons, sur une base S fixée, le catégorie ([]) des courbes standard G-épinglées. Pour tout $\alpha\in S$

N.B. Si $\operatorname{card}J=\nu$, alors

[] Il en est donc de même dans $M_{g,J}$, donc ainsi de M_G (pour G semi-stable) et de $M_{[G]}=(M_G,\Gamma)$.

4. La théorie de Mumford-Deligne

Soient S une multiplicité schématique, X une schéma relatif sur S, propre sur S, $\underline{I}$ une sous-schéma fermé de X. On dit que $(X,\underline{I})$ est une MD-courbe relative sur S, si X, $\underline{I}$ sont plats de présentation finie sur S, et si pour tout point géométrique de

S, la fibre $(X_{\bar{s}}, \underline{I}_{\bar{s}})$ est une MD-courbe géométrique sur $k(s)$ i.e. $X_{\bar{s}}$ est 0-connexe, de dimension 1, [] c'est une fonction localement constant sur S.

Fixons nous une type numérique (g, ν) *anabélien* $(2g + \nu \geq 1)$, et considérons, pour S variable, le groupoïde fibré

$$(24)\quad S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}(S) = \text{ MD-courbes relatives sur } S, \text{ de type numérique égal à } (g, \nu)$$

On a alors le vraiment [] théorème suivant :

Théorème de Mumford-Deligne ([51]). — *Le groupoïde fibré $S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}/S$ sur* Sch *(plus généralement, sur les multiplicités schématiques...) est représentable pour une multiplicité schématique $\widehat{M_{g,\nu}}$, qui est* lisse *et* propre *sur* Spec $\mathbf{Z}$, *D'autre part $M_{g,\nu}$ est un ouvert de Zariski de $\widehat{M_{g,\nu}}$, schématiquement dense fibre par fibre.*

On en déduit aisément p. ex. la connexité des fibres géométriques

[]. Nous allons revenus là dessus maintenant.

5. Spécialisation des MD-graphes

Soit

[51]On suppose $2g + \nu \geq 3$ (cas anabélien)

6. Morphismes de [] de graphes et de maquettes

7. Étude des [] de dim ≤ 2 [] détermination des graphes correspondantes

8. Structure []

9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ([] MDT-structure) : cas [],

10. Structures MDT analytiques : []

11. Digression : [] Structure à l'infini des groupoïdes fondamentaux

12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une [] et leur dévissages en "topos élémentaires"

13. Digression sur stratification "locales" []

Une *stratification globale*

ESQUISSE D'UN PROGRAMME

Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

1. Envoi

Comme la conjoncture actuelle rend de plus en plus illusoire pour moi les perspectives d'un enseignement de recherche à l'Université, je me suis résolu à demander mon admission au CNRS, pour pouvoir consacrer mon énergie à développer es travaux et perspectives dont il devient clair qu'il ne se trouvera aucun élève (ni même, semble-t-il, aucun congénère mathématicien) pour les développer à ma place.

En guise de document "Titres et Travaux", on trouvera à la suite de ce texte la reproduction intégrale d'une esquisse, par thèmes, de ce que je considérais comme mes principales contributions mathématiques au moment d'écrire ce rapport, en 1972. Il contient également une liste d'articles publiés à cette date. J'ai cessé toute publication d'articles scientifiques depuis 1970. Dans les lignes qui suivent, je me propose de donner un aperçu au moins sur quelques thèmes principaux de mes réflexions mathématiques depuis lors. Ces réflexions se sont matérialisées au cours des années en deux volumineux cartons de notes manuscrites, difficilement déchiffrables sans doute à tout autre qu'à moi-même, et qui, après des stades de décantations successives, attendent leur heure peut-être pour une rédaction d'ensemble tout au moins provisoire, à l'intention de la communauté mathématique. Le terme "rédaction" ici est quelque peu impropre, alors qu'il s'agit bien plus de développer des idées et visions multiples amorcées au cours de ces douze dernières années, en les précisant et les approfondissant, avec tous les rebondissements imprévus qui constamment accompagnent ce genre de travail – un travail de découverte donc, et non de compilation de notes pieusement accumulées. Et je compte bien, dans l'écriture des "Réflexions Mathématiques" commencée depuis février 1983, laisser apparaître clairement au fil des pages la démarche de la pensée qui sonde et qui découvre, en tâtonnant dans la pénombre bien souvent, avec des trouées de lumière subites quand quelque tenace image fausse, ou simplement inadéquate, se trouve enfin débusquée et mise à jour, et que les choses qui semblaient de guingois se mettent en place, dans l'harmonie mutuelle qui leur est propre.

Quoi qu'il en soit, l'esquisse qui suit de quelques thèmes de réflexions des dernières dix ou douze années, tiendra lieu en même temps d'esquisse de programme de travail pour les années qui viennent, que je compte consacrer au développement de ces thèmes, ou au moins de certains d'entre eux. Elle est destinée, d'une part aux collègues du Comité National appelés à statuer sur ma demande, d'autre part à quelques autres collègues, anciens élèves, amis, dans l'éventualité où certaines des idées esquissées ici pourraient intéresser l'un d'entre eux.

2. Un jeu de "Lego-Teichmüller" et le groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$

3. Corps de nombres associés à un dessin d'enfant

4. Polyèdres réguliers sur les corps finis

5. Haro sur la topologie dite "générale", et réflexions heuristiques vers une topologie dite "modérée"

6. "Théories différentielles" (à la Nash) et "théories modérées"

7. À la Poursuite des Champs

8. Digressions de géométrie bidimensionnelle

9. Bilan d'une activité enseignante

L'occasion me semble propice ici de faire un bref bilan de mon activité enseignante depuis 1970, c'est-à-dire depuis que celle-ci s'effectue dans un cadre universitaire. Ce contact avec une réalité très différente a été pour moi riche en enseignements, d'une portée d'un tout autre ordre d'ailleurs que simplement pédagogique ou scientifique. Ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur ce sujet. J'ai dit aussi au début de ce rapport le rôle qu'a joué ce changement de milieu professionnel dans le renouvellement de mon approche des mathématiques, et celui de mes centres d'intérêt en mathématique. Si par contre je fais le bilan de mon activité enseignante au niveau de la recherche proprement dite, j'aboutis à un constat d'échec clair et net. Depuis plus de dix ans que cette activité se poursuit an par an au sein d'une même institution universitaire, je n'ai pas su, à aucun moment, y susciter un lieu où "il se passe quelque chose" – où quelque chose "passe", parmi un groupe si réduit soit-il de personnes, reliées par une aventure commune. A deux reprises, il est vrai, vers les années 74 à 76, j'ai eu le plaisir et le privilège de susciter chez un élève un travail d'envergure, poursuivi avec élan: chez Yves Ladegaillerie le travail signalé précédemment (par. 3) sur les questions d'isotopie en dimension 2, et chez Carlos Contou-Carrère (dont la passion mathématique n'avait pas attendu la rencontre avec moi pour éclore) un travail non publié sur les jacobiennes locales et globales sur des schémas de bases généraux (dont une partie a été annoncée dans une note aux CR). Ces deux cas mis à part, mon rôle s'est borné, au cours de ces dix ans, à transmettre tant bien que mal des rudiments du métier de mathématicien 49 à quelques vingt élèves au niveau de la recherche, ou tout au moins à ceux parmi eux qui ont persévéré suffisamment avec moi, réputé plus exigeant que d'autres, pour aboutir à un premier travail noir sur blanc acceptable (certaines fois aussi à un travail mieux qu'acceptable et plus qu'un seul travail, fait avec goût et jusqu'au bout). Vu la conjoncture, même parmi les rares qui ont persévéré, plus rares encore seront ceux qui auront l'occasion d'exercer ce métier, et par là, tout en gagnant leur pain, de l'approfondir.

10. Épilogue

Depuis l'an dernier, je sens qu'au cours de mon activité d'enseignant universitaire, j'ai appris tout ce que j'avais à en apprendre et enseigné tout ce que je peux y enseigner, et qu'elle a cessé d'être vraiment utile, à moi-même comme aux autres. M'obstiner sous ces conditions à la poursuivre encore me paraîtrait un gaspillage, tant de ressources humaines que de deniers publics. C'est pourquoi j'ai demandé mon détachement au CNRS (que j'avais quitté en 1959 comme directeur de recherches frais émoulu, pour entrer à l'IHES). Je sais d'ailleurs que la situation de l'emploi est serrée au CNRS comme ailleurs, que l'issue de ma demande est douteuse, et que si un poste m'y était attribué, ce serait au dépens d'un chercheur plus jeune qui resterait sans poste. Mais il est vrai aussi que cela libérerait mon poste à l'USTL au bénéfice d'un autre. C'est pourquoi je n'ai pas de scrupule à faire cette demande, et s'il le faut à revenir à la charge si elle n'est pas acceptée cette année.

En tout état de cause, cette demande aura été pour moi l'occasion d'écrire cette esquisse de programme, qui autrement sans doute n'aurait jamais vu le jour. J'ai essayée d'être bref sans être sybillin et aussi, après coup, d'en faciliter la lecture et de la rendre plus attrayante, en y adjoignant un sommaire. Si malgré cela elle peut paraître longue pour la circonstance, je m'en excuse. Elle me paraît courte pour son contenu, sachant que dix ans de travail ne seraient pas de trop pour aller jusqu'au bout du moindre des thèmes esquissés (à supposer qu'il y ait un "bout"...), et cent ans seraient peu pour le plus riche d'entre eux !

Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Celle-ci se manifeste notamment par une source d'inspiration commune, la géométrie des surfaces, présente dans tous ces thèmes, au premier plan le plus souvent. Cette source, par rapport à mon "passé" mathématique, représente un renouvellement, mais nullement une rupture. Plutôt, elle montre le chemin d'une approche nouvelle vers cette réalité encore mystérieuse, celle des "motifs", qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé[52]. Cette fascination ne s'est nullement évanouie, elle fait partie plutôt de celle du plus brûlant pour moi de tous les thèmes évoqués précédemment. Mais aujourd'hui je ne suis plus, comme naguère, le prisonnier volontaire de tâches interminables, qui si souvent m'avaient interdit de m'élancer dans l'inconnu, mathématique ou non. Le temps des tâches pour moi est révolu. Si l'âge m'a apporté quelque chose, c'est d'être plus léger.

Janvier 1984

[52]Voir à ce sujet mes commentaires dans l'"Esquisse Thématique" de 1972 jointe au présent rapport, dans la rubrique terminale "divagations motiviques" (loc. cit. pages 17-18).

SKETCH OF A PROGRAMME

Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

---

1. Preface

As the present situation makes the prospect of teaching at the research level at the University seem more and more illusory, I have resolved to apply for admission to the CNRS, in order to devote my energy to the development of projects and perspectives for which it is becoming clear that no student (nor even, it seems, any mathematical colleague) will be found to develop them in my stead.

In the role of the document "Titles and Articles", one can find after this text the complete reproduction of a sketch, by themes, of what I considered to be my principal mathematical contributions at the time of writing that report, in 1972. It also contains a list of articles published at that date. I ceased all publication of scientific articles in 1970. In the following lines, I propose to give a view of at least some of the principal themes of my mathematical reflections since then. These reflections materialised over the years in the form of two voluminous boxes of handwritten notes, doubtless difficult to decipher for anyone but myself, and which, after several successive stages of settling, are perhaps waiting for their moment to be written up together at least in a temporary fashion, for the benefit of the mathematical community. The term "written up" is somewhat incorrect here, since in fact it is much more a question of developing the ideas and the multiple visions begun during these last twelve years, to make them more precise and deeper, with all the unexpected rebounds which constantly accompany this kind of work – a work of discovery, thus, and not of compilation of piously accumulated notes. And in writing the "Mathematical Reflections", begun since February 1983, I do intend throughout its pages to clearly reveal the process of thought, which feels and discovers, often blindly in the shadows, with sudden flashes of light when some tenacious false or simply inadequate image is finally shown for what it is, and things which seemed all crooked fall into place, with that mutual harmony which is their own.

In any case, the following sketch of some themes of reflection from the last ten or twelve years will also serve as a sketch of my programme of work for the coming years, which I intend to devote to the development of these themes, or at least some of them. It is intended on the one hand for my colleagues of the National Committee whose job it is to decide the fate of my application, and on the other hand for some other colleagues, former students, friends, in the possibility that some of the ideas sketched here might interest one of them.

2. A game of "Lego-Teichmüller" and the Galois group $\overline{\mathbf{Q}}$ over $\mathbf{Q}$

The demands of university teaching, addressed to students (including those said to be "advanced") with a modest (and frequently less than modest) mathematical baggage, led me to a Draconian renewal of the themes of reflection I proposed to my students, and gradually to myself as well. It seemed important to me to start from an intuitive baggage common to everyone, independent of any technical language used to express it, and anterior to any such language – it turned out that the geometric and topological intuition of shapes, particularly two-dimensional shapes, formed such a common ground. This consists of themes which can be grouped under the general name of "topology of surfaces" or "geometry of surfaces", it being understood in this last expression that the main emphasis is on the topological properties of the surfaces, or the combinatorial aspects which form the most down-to-earth technical expression of them, and not on the differential, conformal, Riemannian, holomorphic aspects, and (from there) on to "complex algebraic curves". Once this last step is taken, however, algebraic geometry (my former love!) suddenly bursts forth once again, and this via the objects which we can consider as the basic building blocks for all other algebraic varieties. Whereas in my research before 1970, my attention was systematically directed towards objects of maximal generality, in order to uncover a general language adequate for the world of algebraic geometry, and I never restricted myself to algebraic curves except when strictly necessary (notably in étale cohomology), preferring to develop "pass-key" techniques and statements valid in all dimensions and in every place (I mean, over all base schemes, or even base ringed topoi...), here I was brought back, via objects so simple that a child learns them while playing, to the beginnings and origins of algebraic geometry, familiar to Riemann and his followers!

Since around 1975, it is thus the geometry of (real) surfaces, and starting in 1977 the links between questions of geometry of surfaces and the algebraic geometry of algebraic curves defined over fields such as **C**, **R** or extensions of **Q** of finite type, which were my principal source of inspiration and my constant guiding thread. It is with surprise and wonderment that over the years I discovered (or rather, doubtless, rediscovered) the prodigious, truly inexhaustible richness, the unsuspected depth of this theme, apparently so anodine. I believe I feel a central sensitive point there, a privileged point of convergence of the principal currents of mathematical ideas, and also of the principal structures and visions of things which they express, from the most specific (such as the rings **Z**, **Q**, $\overline{\mathbf{Q}}$, **R**, **C** or the group Sl(2) over one of these rings, or general reductive algebraic groups) to the most "abstract", such as the algebraic "multiplicities", complex analytic or real analytic. (These are naturally introduced when systematically studying "moduli varieties" for the geometric objects considered, and if we want to go farther than the notoriously insufficient point of view of "coarse moduli" which comes down to most unfortunately killing the automorphism groups of these objects.) Among these modular multiplicities, it is those of Mumford-Deligne for "stable" algebraic curves of genus g with ν marked points, which I denote by $\widehat{M}_{g,\nu}$ (compactification of the "open" multiplicity $M_{g,\nu}$ corresponding to non-singular curves), which for the last two or three years have exercised a particular fascination over me, perhaps even stronger than any other mathematical object to this day. Indeed, it is more the system of all the multiplicities $M_{g,\nu}$ for variable g, ν, linked together by a certain number of fundamental operations (such as the operations of "plugging holes", i.e. "erasing" marked points, and of "glueing", and the inverse operations), which are the reflection in absolute algebraic geometry in characteristic zero (for the moment) of geometric operations familiar from the point of view of topological or conformal "surgery" of surfaces. Doubtless the principal reason of this fascination is that this very rich geometric structure on the system of "open" modular multiplicities $M_{g,\nu}$ is reflected in an analogous structure on the corresponding fundamental groupoids, the "Teichmüller groupoids" $\widehat{T}_{g,\nu}$, and that these operations on the level of the $\widehat{T}_{g,\nu}$ are sufficiently intrinsic for the Galois group Γ of $\mathbf{Q}/\mathbf{Q}$ to act on this whole "tower" of Teichmüller groupoids, respecting all these structures. Even more extraordinary, this action is *faithful* – indeed, it is already faithful on the first non-trivial "level" of this tower, namely $\widehat{T}_{0,4}$ – which also means, essentially, that the outer action of Γ on the fundamental group $\hat{\pi}_{0,3}$ of the standard projective line $\mathbb{P}^1$ over $\mathbf{Q}$ with the three points 0, 1 and ∞ removed, is already faithful. Thus *the Galois group* Γ *can be realised as an automorphism group of a very concrete profinite group*, and moreover respects certain essential structures of this group. It follows that an element of Γ can be "parametrised" (in various equivalent ways) by a suitable element of this profinite group $\hat{\pi}_{0,3}$ (a free profinite group on two generators), or by a system of such elements, these elements being subject to certain simple necessary (but doubtless not sufficient) conditions for this or these elements to really correspond to an element of Γ. One of the most fascinating tasks here is precisely to discover necessary *and* sufficient conditions on an exterior automorphism of $\hat{\pi}_{0,3}$, i.e. on the corresponding parameter(s), for it to come from an element of Γ – which would give a "purely algebraic" description, in terms of profinite groups and with no reference to the Galois theory of number fields, to the Galois group $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}/\mathbf{Q})$.

Perhaps even a conjectural characterisation of Γ as a subgroup of $\mathrm{Autext}\,\hat{\pi}_{0,3}$ is for the moment out of reach ([1]); I do not yet have any conjecture to propose.

On the other hand another task is immediately accessible, which is to describe the action of Γ on all of the Teichmüller tower, in terms of its action on the "first level" $\hat{\pi}_{0,3}$, i.e. to express an automorphism of this tower, in terms of the "parameter" in $\hat{\pi}_{0,3}$ which picks out the element γ running through Γ. This is linked to a representation of the Teichmüller tower (considered as a groupoid equipped with an operation of "glueing") by generators and relations, which will in particular give a presentation by generators and relations in the usual sense of each of the $\widehat{T}_{g,\nu}$ (as a profinite groupoid). Here, even for $g = 0$ (so when the corresponding Teichmüller groups are "well-known" braid groups), the generators and relations known to date which I have heard of appear to me to be unusable as they stand, because they do not present the characteristics of invariance and of symmetry indispensable for the action of Γ to be directly legible on the presentation. This is particularly linked to the fact that people still obstinately persist, when calculating with fundamental groups, in fixing a single base point, instead of cleverly choosing a whole packet of points which is invariant under the symmetries of the situation, which thus get lost on the way. In certain situations (such as descent theorems for fundamental groups à la van Kampen) it is much more elegant, even indispensable for understanding something, to work with fundamental groupoids with respect to a suitable packet of base points, and it is certainly so for the Teichmüller tower. It would seem (incredible, but true!) that even the geometry of the first level of the Teichüller tower (corresponding thus to "moduli" either for projective lines with four marked points, or to elliptic curves(!)) has never been explicitly described, for example the relation between the genus 0 case and the geometry of the octahedron, and that of the tetrahedron. A fortiori the modular multiplicities $M_{0,5}$ (for projective lines with five marked points) and $M_{1,2}$ (for curves of genus 1 with two marked points), which actually are practically isomorphic, appear to be virgin territory – braid groups will not enlighten us on their score! I have begun to look at $M_{0,5}$ at stray moments; it is a real jewel, with a very rich geometry closely related to the geometry of the icosahedron.

The a priori interest of a complete knowledge of the two first levels of the tower (i.e., the cases where the modular dimension $N = 3g - 3 + \nu$ is ≤ 2) is to be found in the principle that *the entire tower can be reconstituted from these two first* *levels*, in the sense that via the fundamental operation of "glueing", level 1 gives a complete system of generators, and level 2 a complete system of relations. There is a striking analogy, and I am certain it is not merely formal, between this principle and the analogous principle of Demazure for the structure of reductive algebraic groups, if we replace the term "level" or "modular dimension" with "semi-simple rank of the reductive group". The link becomes even more striking, if we recall that the Teichmüller group $T_{1,1}$ (in the discrete, transcendental context now, and not in the profinite algebraic context, where we find the profinite completions of the former) is no other than $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$, i.e. the group of integral points of the simple group scheme of "absolute" rank 1 $\mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$. Thus, *the fundamental building block for the Teichmüller tower is essentially the same as for the "tower" of reductive groups of all ranks* - a group of which, moreover, we may say that it is doubtless present in all the essential disciplines of mathematics.

This principle of construction of the Teichmüller tower is not proved at this time – but I have no doubt that it is valid. It would be a consequence (via a theory of dévissage of stratified structures - here the $\widehat{M}_{g,\nu}$ – which remains to be written, cf. par. 5) of an extremely plausible property of the open modular multiplicities $M_{g,\nu}$ in the complex analytic context, namely that for modular dimension $N \geq 3$, the fundamental group of $M_{g,\nu}$ (i.e. the usual Teichmüller group $T_{g,\nu}$) is isomorphic to the "fundamental group at infinity", i.e. that of a "tubular neighbourhood of infinity". This is a very familiar thing (essentially due to Lefschetz) for a non-singular *affine* variety of dimension $N \geq 3$. True, the modular multiplicities are not affine (except for small values of g), but it would suffice if such an $M_{g,\nu}$ of dimension N (or rather, a suitable finite covering) were a union of $N-2$ affine open sets, making $M_{g,\nu}$ "not too near a compact variety".

Having no doubt about this principle of construction of the Teichmüller tower, I prefer to leave to the experts, better equipped than I am, the task of proving the necessary (if it so happens that any are interested), to rather study, with all the care it deserves, the structure which ensues for the Teichmüller tower by generators and relations, this time in the discrete, not the profinite framework – which essentially comes down to a complete understanding of the four modular multiplicities $M_{0,4}$, $M_{1,1}$, $M_{0,5}$, $M_{1,2}$ and their fundamental groupoids based at suitably chosen "base points". These offer themselves quite naturally, as the complex algebraic curves of the type (g,n) under consideration, having automorphism group (necessarily finite) larger than in the generic case[53]. Including the holomorphic sphere with three marked points (coming from $M_{0,3}$, i.e. from level 0), we find *twelve fundamental "building blocks"* (6 of genus 0, 6 of genus 1) in a "game of Lego-Teichmüller" (large box), where the points marked on the surfaces considered are replaced by "holes" with boundary, so as to have surfaces with boundary, functioning as building blocks which can be assembled by gentle rubbing as in the ordinary game of Lego dear to our children (or grandchildren…). By assembling them we find an entirely visual way to construct every type of surface (it is essentially these constructions which will be the "base points" for our famous tower), and also to visualise the *elementary "paths"* by operations as concrete as "twists", or automorphisms of blocks in the game, and to write the *fundamental relations* between composed paths. According to the size (and the price!) of the construction box used, we can even find numerous different descriptions of the Teichmüller tower by generators and relations. The smallest box is reduced to identical blocks, of type (0, 3) – these are the Thurston "pants", and the game of Lego-Teichmüller which I am trying to describe, springing from motivations and reflections of absolute algebraic geometry over the field $\mathbf{Q}$, is very close to the game of "hyperbolic geodesic surgery" of Thurston, whose existence I learned of last year from Yves Ladegaillerie. In a microseminar with Carlos Contou-Carrère and Yves Ladegaillerie, we began a reflection one of whose objects is to confront the two points of view, which are mutually complementary.

I add that each of the twelve building blocks of the "large box" is equipped with a canonical cellular decomposition, stable under all symmetries, having as its only vertices the "marked points" (or centres of the holes), and as edges certain geodesic paths (for the canonical Riemannian structure on the sphere or the torus consid-

[53]It is also necessary to add the "base points" coming from operations of glueing of "blocks" of the same type in smaller modular dimension. On the other hand, in modular dimension 2 (the cases of $M_{0,5}$ and $M_{1,2}$), it is advisable to exclude the points of certain one-parameter families of curves admitting an exceptional automorphism of order 2. These families actually constitute remarkable rational curves on the multiplicities considered, which appear to me to be an important ingredient in the structure of these multiplicities.

ered) between certain pairs of vertices (namely those which lie on the same "real locus", for a suitable real structure of the complex algebraic curve considered). Consequently, all the surfaces obtained in this game by assembling are equipped with canonical cellular structures, which in their turn (cf. §3 below) enable us to consider these surfaces as associated to complex algebraic curves (and even over $\mathbf{Q}$) which are canonically determined. There is here a typical game of intertwining of the combinatorial and the complex algebraic (or rather, the algebraic over $\mathbf{Q}$).

The "small box" with identical blocks, which has the charm of economy, will doubtless give rise to a relatively complex description for the relations (complex, but not at all inextricable!). The large box will give rise to more numerous relations (because there are many more base points and remarkable paths between them), but with a more transparent structure. I foresee that in modular dimension 2, just as in the more or less familiar case of modular dimension 1 (in particular with the description of $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$ by $(\rho,\sigma|\rho^3=\sigma^2,\rho^4=\sigma^6=1)$), we will find a generation by the automorphism groups of the three types of relevant blocks, with simple relations which I have not clarified as I write these lines. Perhaps we will even find a principle of this type for all the $T_{g,\nu}$, as well as a cellular decomposition of $\widehat{M}_{g,\nu}$ generalising those which present themselves spontaneously for $\widehat{M}_{0,4}$ and $\widehat{M}_{1,1}$, and which I already perceive for modular dimension 2, using the hypersurfaces corresponding to the various *real structures* on the complex structures considered, to effect the desired cellular decomposition.

3. Number fields associated to a child's drawing

Instead of following (as I meant to) a rigorous thematic order, I let myself be carried away by my predilection for a particularly rich and burning theme, to which I intend to devote myself prioritarily for some time, starting at the beginning of the academic year 84/85. Thus I will take the thematic description up again where I left it, at the very beginning of the preceding paragraph.

My interest in topological surfaces began to appear in 1974, when I proposed to Yves Ladegaillerie the theme of the isotopic study of embeddings of a topological 1-complex into a compact surface. Over the two following years, this study led him to a remarkable isotopy theorem, giving a complete algebraic description of the isotopy classes of embeddings of such 1-complexes, or compact surfaces with boundary, in a compact oriented surface, in terms of certain very simple combinatorial invariants, and the fundamental groups of the protagonists. This theorem, which should be easily generalisable to embeddings of any compact space (triangulable to simplify) in a compact oriented surface, gives as easy corollaries several deep classical results in the theory of surfaces, and in particular Baer's isotopy theorem. It will finally be published, separately from the rest (and ten years later, seeing the difficulty of the times...), in Topology. In the work of Ladegaillerie there is also a purely algebraic description, in terms of fundamental groups, of the "isotopic" category of compact surfaces X, equipped with a topological 1-complex K embedded in X. This description, which had the misfortune to run counter to "today's taste" and because of this appears to be unpublishable, nevertheless served (and still serves) as a precious guide in my later reflections, particularly in the context of absolute algebraic geometry in characteristic zero.

The case where (X,Y) is a 2-dimensional "map", i.e. where the connected components of $X \backslash K$ are open 2-cells (and where moreover K is equipped with a finite set S of "vertices", such that the connected components of $K \backslash S$ are open 1-cells) progressively attracted my attention over the following years. The isotopic category of these maps admits a particularly simple algebraic description, via the set of "markers" (or "flags", or "biarcs") associated to the map, which is naturally equipped with the structure of a set with a group of operators, under the group

$$\underline{C}_2 = < \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 | \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0\sigma_2)^2 = 1 >,$$

which I call the (non-oriented) *cartographic group* of dimension 2. It admits as a subgroup of index 2 the *oriented cartographic group*, generated by the products of an even number of generators, which can also be described by

$$\underline{C}_2^+ = < \rho_s, \rho_f, \sigma | \rho_s \rho_f = \sigma, \sigma^2 = 1 >,$$

(with

$$\rho_s = \sigma_2\sigma_1, \quad \rho_f = \sigma_1\sigma_0, \quad \sigma = \sigma_0\sigma_2 = \sigma_2\sigma_0,$$

operations of *elementary rotation* of a flag around a vertex, a face and an edge respectively). There is a perfect dictionary between the topological situation of compact maps, resp. oriented compact maps, on the one hand, and finite sets with group of operators $\underline{C}_2$ resp. $\underline{C}_2^+$ on the other, a dictionary whose existence was actually more or less known, but never stated with the necessary precision, nor developed at all. This foundational work was done with the care it deserved in an excellent DEA thesis, written jointly by Jean Malgoire and Christine Voisin in 1976.

This reflection suddenly takes on a new dimension, with the simple remark that the group $\underline{C}_2^+$ can be interpreted as a quotient of the fundamental group of an oriented sphere with three points, numbered 0, 1 and 2, removed; the operations ρ_s, σ, ρ_f are interpreted as loops around these points, satisfying the familiar relation

$$\ell_0 \ell_1 \ell_2 = 1,$$

while the additional relation $\sigma^2 = 1$, i.e. $\ell_1^2 = 1$ means that we are interested in the quotient of the fundamental group corresponding to an imposed ramification index of 2 over the point 1, which thus classifies the coverings of the sphere ramified at most over the points 0, 1 and 2 with ramification equal to 1 or 2 at the points over 1. Thus, the compact oriented maps form an isotopic category equivalent to that of these coverings, subject to the additional condition of being finite coverings. Now taking the Riemann sphere, or the projective complex line, as reference sphere, rigidified by the three points 0, 1 and ∞ (this last thus replacing 2), and recalling that every finite ramified covering of a complex algebraic curve itself inherits the structure of a complex algebraic curve, we arrive at this fact, which eight years later still appears to me as extraordinary: *every "finite" oriented map is canonically realised on a complex algebraic curve!* Even better, as the complex projective line is defined over the absolute base field $\mathbf{Q}$, as are the admitted points of ramification, the algebraic curves we obtain are defined not only over $\mathbf{C}$, but over the algebraic closure $\overline{\mathbf{Q}}$ of $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{C}$. As for the map we started with, it can be found on the algebraic curve, as the inverse image of the real segment $[0,1]$ (where 0 is considered as a vertex, and 1 as the middle of a "folded edge" of centre 1), which itself is the "universal oriented 2-map" on the Riemann sphere[54]. The

[54]There is an analogous description of finite non-oriented maps, possibly with boundary, in terms of *real* algebraic curves, more precisely of coverings of $\mathbb{P}^1_{\mathbf{R}}$ ramified only over 0, 1, ∞, the

points of the algebraic curve X over 0, 1 and ∞ are neither more nor less than the vertices, the "centres" of the edges and those of the faces of the map (X,K), and the orders of the vertices and the faces are exactly the multiplicities of the zeros and the poles of the rational function (defined over $\mathbf{Q}$) on X, which expresses its structural projection to $\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$.

This discovery, which is technically so simple, made a very strong impression on me, and it represents a decisive turning point in the course of my reflections, a shift in particular of my centre of interest in mathematics, which suddenly found itself strongly focused. I do not believe that a mathematical fact has ever struck me quite so strongly as this one, nor had a comparable psychological impact ([2]). This is surely because of the very familiar, non-technical nature of the objects considered, of which any child's drawing scrawled on a bit of paper (at least if the drawing is made without lifting the pencil) gives a perfectly explicit example. To such a dessin, we find associated subtle arithmetic invariants, which are completely turned topsy-turvy as soon as we add one more stroke. Since these are spherical maps, giving rise to curves of genus 0 (which thus do not lead to "moduli"), we can say that the curve in question is "pinned down" if we fix three of its points, for instance three vertices of the map, or more generally three centres of facets (vertices, edges or faces) – and then the structural map $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$ can be interpreted as a well-determined rational function

$$f(z) = P(z)/Q(z) \in \mathbf{C}(z)$$

quotient of two well-determined relatively prime polynomials, with Q unitary, satisfying algebraic conditions which in particular reflect the fact that f is unramified outside of 0, 1 and ∞, and which imply that the coefficients of these polynomials are *algebraic numbers*; thus their zeros are algebraic numbers, which represent respectively the vertices and the centres of the faces of the map under consideration.

Returning to the general case, since finite maps can be interpreted as coverings over $\overline{\mathbf{Q}}$ of an algebraic curve defined over the prime field $\mathbf{Q}$ itself, it follows that

surface with boundary associated to such a covering being $X(\mathbf{C})/\tau$, where τ is complex conjugation. The "universal" non-oriented map is here the disk, or upper hemisphere of the Riemann sphere, equipped as before with the embedded 1-complex $K = [0, 1]$.

the Galois group Γ of $\overline{\mathbf{Q}}$ over $\mathbf{Q}$ acts on the category of these maps in a natural way. For instance, the operation of an automorphism $\gamma \in \Gamma$ on a spherical map given by the rational function above is obtained by applying γ to the coefficients of the polynomials P, Q. Here, then, is that mysterious group Γ intervening as a transforming agent on topologico-combinatorial forms of the most elementary possible nature, leading us to ask questions like: are such and such oriented maps "conjugate" or: exactly which are the conjugates of a given oriented map? (Visibly, there is only a finite number of these).

I considered some concrete cases (for coverings of low degree) by various methods, J. Malgoire considered some others – I doubt that there is a uniform method for solving the problem by computer. My reflection quickly took a more conceptual path, attempting to apprehend the nature of this action of Γ. One sees immediately that roughly speaking, this action is expressed by a certain "outer" action of Γ on the profinite compactification of the oriented cartographic group $\underline{C}_2^+$, and this action in its turn is deduced by passage to the quotient of the canonical outer action of Γ on the profinite fundamental group $\hat{\pi}_{0,3}$ of $(U_{0,3})_{\overline{\mathbf{Q}}}$, where $U_{0,3}$ denotes the typical curve of genus 0 over the prime field $\mathbf{Q}$, with three points removed. This is how my attention was drawn to what I have since termed "*anabelian algebraic geometry*", whose starting point was exactly a study (limited for the moment to characteristic zero) of the action of "absolute" Galois groups (particularly the groups $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, where K is an extension of finite type of the prime field) on (profinite) geometric fundamental groups of algebraic varieties (defined over K), and more particularly (breaking with a well-established tradition) fundamental groups which are very far from abelian groups (and which for this reason I call "*anabelian*"). Among these groups, and very close to the group $\hat{\pi}_{0,3}$, there is the profinite compactification of the modular group $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$, whose quotient by its centre ± 1 contains the former as congruence subgroup mod 2, and can also be interpreted as an oriented "cartographic" group, namely the one classifying *triangulated* oriented maps (i.e. those whose faces are all triangles or monogons).

Every finite oriented map gives rise to a projective non-singular algebraic curve defined over $\overline{\mathbf{Q}}$, and one immediately asks the question: which are the algebraic curves over $\overline{\mathbf{Q}}$ obtained in this way – do we obtain them all, who knows? In more erudite terms, could it be true that every projective non-singular algebraic curve defined over a number field occurs as a possible "modular curve" parametrising elliptic curves equipped with a suitable rigidification? Such a supposition seemed so crazy that I was almost embarrassed to submit it to the competent people in the domain. Deligne when I consulted him found it crazy indeed, but didn't have any counterexample up his sleeve. Less than a year later, at the International Congress in Helsinki, the Soviet mathematician Bielyi announced exactly that result, with a proof of disconcerting simplicity which fit into two little pages of a letter of Deligne – never, without a doubt, was such a deep and disconcerting result proved in so few lines!

In the form in which Bielyi states it, his result essentially says that *every algebraic curve defined over a number field can be obtained as a covering of the projective line ramified only over the points 0, 1 and* ∞. This result seems to have remained more or less unobserved. Yet it appears to me to have considerable importance. To me, its essential message is that *there is a profound identity between the combinatorics of finite maps on the one hand, and the geometry of algebraic curves defined over number fields on the other*. This deep result, together with the algebraic geometric interpretation of maps, opens the door onto a new, unexplored world – within reach of all, who pass by without seeing it.

It was only close to three years later, seeing that decidedly the vast horizons opening here caused nothing to quiver in any of my students, nor even in any of the three or four high-flying colleagues to whom I had occasion to talk about it in a detailed way, that I made a first scouting voyage into this "new world", from January to June 1981. This first foray materialised into a packet of some 1300 handwritten pages, baptised "The Long March through Galois theory". It is first and foremost an attempt at understanding the relations between "arithmetic" Galois groups and profinite "geometric" fundamental groups. Quite quickly it became oriented towards a work of computational formulation of the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ on $\hat{\pi}_{0,3}$, and at a later stage, on the somewhat larger group $\widehat{\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})}$, which gives rise to a more elegant and efficient formalism. Also during the course of this work (but developed in a different set of notes) appeared the central theme of anabelian algebraic geometry, which is to reconstitute certain so-called "anabelian" varieties

X over an absolute field K from their mixed fundamental group, the extension of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ by $\pi_1(X_{\overline{K}})$; this is when I discovered the "fundamental conjecture of an-abelian algebraic geometry", close to the conjectures of Mordell and Tate recently proved by Faltings ([3]). This period also saw the appearance of the first reflection on the Teichmüller groups, and the first intuitions on the many-faceted structure of the "Teichmüller tower" – the open modular multiplicities $M_{g,\nu}$ also appearing as the first important examples in dimension > 1, of varieties (or rather, multiplicities) seeming to deserve the appellation of "anabelian". Towards the end of this period of reflection, it appeared to me as a fundamental reflection on a theory still completely up in the air, for which the name "Galois-Teichmüller theory" seems to me more appropriate than the name "Galois Theory" which I had at first given to my notes. Here is not the place to give a more detailed description of this set of questions, intuitions, ideas – which even includes some tangible results. The most important thing seems to me to be the one pointed out in par. 2, namely the faithfulness of the outer action of $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (and of its open subgroups) on $\hat{\pi}_{0,3}$, and more generally (if I remember rightly) on the fundamental group of any "anabelian" algebraic curve (i.e. whose genus g and "number of holes" ν satisfy the equality $2g+\nu \geq 3$, i.e. such that $\chi(X) < 0$) defined over a finite extension of $\mathbf{Q}$. This result can be considered to be essentially equivalent to Bielyi's theorem – it is the first concrete manifestation, via a precise mathematical statement, of the "message" which was discussed above.

I would like to conclude this rapid outline with a few words of commentary on the truly unimaginable richness of a typical anabelian group such as $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$ – doubtless the most remarkable discrete infinite group ever encountered, which appears in a multiplicity of avatars (of which certain have been briefly touched on in the present report), and which from the point of view of Galois-Teichmüller theory can be considered as the fundamental "building block" of the "Teichmüller tower". The element of the structure of $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$ which fascinates me above all is of course the outer action of Γ on its profinite compactification. By Bielyi's theorem, taking the profinite compactifications of subgroups of finite index of $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$, and the induced outer action (up to also passing to an open subgroup of Γ), *we essentially find the fundamental groups of all algebraic curves* (not necessarily compact) *defined over number fields K, and the outer action of* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *on them* – at least it is true that every such fundamental group appears as a quotient of one of the first groups[55]. Taking the "anabelian yoga" (which remains conjectural) into account, which says that an anabelian algebraic curve over a number field K (finite extension of $\mathbf{Q}$) is known up to isomorphism when we know its mixed fundamental group (or what comes to the same thing, the outer action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ on its profinite geometric fundamental group), we can thus say that *all algebraic curves defined over number fields are "contained" in the profinite compactification* $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$, *and in the knowledge of a certain subgroup* Γ *of its group of outer automorphisms!* Passing to the abelianisations of the preceding fundamental groups, we see in particular that all the abelian ℓ-adic representations due to Tate and his circle, defined by Jacobians and generalised Jacobians of algebraic curves defined over number fields, are contained in this single action of Γ on the anabelian profinite group $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$! ([4])

There are people who, faced with this, are content to shrug their shoulders with a disillusioned air and to bet that all this will give rise to nothing, except dreams. They forget, or ignore, that our science, and every science, would amount to little if since its very origins it were not nourished with the dreams and visions of those who devoted themselves to it.

4. Regular polyhedra over finite fields

From the very start of my reflection on 2-dimensional maps, I was most particularly interested by the "regular" maps, those whose automorphism group acts transitively (and consequently, simply transitively) on the set of flags. In the oriented case and in terms of the algebraic-geometric interpretation given in the preceding paragraph, it is these maps which correspond to *Galois* coverings of the projective line. Very quickly also, and even before the appearance of the link with algebraic geometry, it appears necessary not to exclude the infinite maps, which in particular occur in a natural way as universal coverings of finite maps. It appears (as an immediate consequence of the "dictionary" of maps, extended to the case of maps

[55] In fact, we are considering quotients of a particularly trivial nature, by abelian subgroups which are products of "Tate modules" $\hat{\mathbf{Z}}(1)$, corresponding to "loop-groups" around points at infinity.

which are not necessarily finite) that for every pair of natural integers $p, q \geq 1$, there exists up to non-unique isomorphism one and only one 1-*connected* map of type (p, q), i.e. all of whose vertices are of order p and whose faces are of order q, and this map is a regular map. It is pinned down by the choice of a flag, and its automorphism group is then canonically isomorphic to the quotient of the cartographic group (resp. of the oriented cartographic group, in the oriented case) by the additional relations

$$\rho_s^p = \rho_f^q = 1.$$

The case where this group is finite is the "Pythagorean" case of regular spherical maps, the case where it is infinite gives the regular tilings of the Euclidean plane or of the hyperbolic plane[56]. The link between combinatorial theory and the "conformal" theory of regular tilings of the hyperbolic plane was foreshadowed, before the appearance of the link between finite maps and finite coverings of the projective line. Once this link is understood, it becomes obvious that it should also extend to infinite maps (regular or not): *every map, finite or not, can be canonically realised on a conformal surface* (compact if and only if the map is finite), *as a ramified covering of the complex projective line, ramified only over the points 0, 1 and* ∞. The only difficulty here was to develop the dictionary between topological maps and sets with operators, which gave rise to some conceptual problems in the infinite case, starting with the very notion of a "topological map". It appears necessary in particular, both for reasons of internal coherence of the dictionary and not to let certain interesting cases of infinite maps escape, to avoid excluding vertices and faces of infinite order. This foundational work was also done by J. Malgoire and C. Voisin, in the wake of their first work on finite maps, and their theory indeed gives everything that we could rightly expect (and even more…)

In 1977 and 1978, in parallel with two C4 courses on the geometry of the cube and that of the icosahedron, I began to become interested in regular polyhedra, which then appeared to me as particularly concrete "geometric realizations" of combinatorial maps, the vertices, edges and faces being realised as points, lines

[56]In these statements, we must not exclude the case where p, q can take the value $+\infty$, which is encountered in particular in a very natural way as tilings associated to certain regular infinite polyhedra, cf. below.

and planes respectively in a suitable 3-dimensional affine space, and respecting incidence relations. This notion of a geometric realisation of a combinatorial map keeps its meaning over an arbitrary base field, and even over an arbitrary base ring. It also keeps its meaning for regular polyhedra in any dimension, if the cartographic group $\underline{C}_2$ is replaced by a suitable n-dimensional analogue $\underline{C}_n$. The case $n = 1$, i.e. the theory of regular polygons in any characteristic, was the subject of a DEA course in 1977/78, and already sparks the appearance of some new phenomena, as well as demonstrating the usefulness of working not in an ambient affine space (here the affine plane), but in a *projective* space. This is in particular due to the fact that in certain characteristics (in particular in characteristic 2) the centre of a regular polyhedron is sent off to infinity. Moreover, the projective context, contrarily to the affine context, enables us to easily develop a duality formalism for regular polyhedra, corresponding to the duality formalism of combinatorial or topological maps (where the roles of the vertices and the faces, in the case $n = 2$ say, are exchanged). We find that for every projective regular polyhedron, we can define a canonical associated hyperplane, which plays the role of a canonical hyperplane at infinity, and allows us to consider the given polyhedron as an affine regular polyhedron.

The extension of the theory of regular polyhedra (and more generally, of all sorts of geometrico-combinatorial configurations, including root systems…) of the base field **R** or **C** to a general base ring, seems to me to have an importance comparable, in this part of geometry, to the analogous extension which has taken place since the beginning of the century in algebraic geometry, or over the last twenty years in topology[57], with the introduction of the language of schemes and of topoi. My sporadic reflection on this question, over some years, was limited to discovering some simple basic principles, concentrating my attention first and foremost on the case of *pinned* regular polyhedra, which reduces to a minimum the necessary conceptual baggage, and practically eliminates the rather delicate questions of rationality. For such a polyhedron, we find a canonical basis (or flag) of the ambient affine or projective space, such that the operations of the carto-

[57]In writing this, I am aware that rare are the topologists, even today, who realise the existence of this conceptual and technical generalisation of topology, and the resources it offers.

graphic group $\underline{C}_n$, generated by the fundamental reflections σ_i $(0 \leq i \leq n)$, are written in that basis by universal formulae, in terms of the n parameters $1, \dots, \alpha_n$, which can be geometrically interpreted as the doubles of the cosines of the "fundamental angles" of the polyhedron. The polyhedron can be reconstituted from this action, and from the affine or projective flag associated to the chosen basis, by transforming this flag by all the elements of the group generated by the fundamental reflections. Thus the "universal" pinned n-polyhedron is canonically defined over the ring of polynomials with n indeterminates

$$\mathbf{Z}[\underline{\alpha_1}, \dots, \underline{\alpha_n}],$$

its specialisations to arbitrary base fields k (via values $\sigma_i \in k$ given to the indeterminates σ_i) giving regular polyhedra corresponding to various combinatorial types. In this game, there is no question of limiting oneself to finite regular polyhedra, nor even to regular polyhedra whose facets are of finite order, i.e. for which the parameters i are roots of suitable "semicyclotomic" equations, expressing the fact that the "fundamental angles" (in the case where the base field is $\mathbf{R}$) are commensurable with 2π. Already when $n = 1$, perhaps the most interesting regular polygon (morally the regular polygon with only one side!) is the one corresponding to $\alpha = 2$, giving rise to a parabolic circumscribed conic, i.e. tangent to the line at infinity. The finite case is the one where the group generated by the fundamental reflections, which is also the automorphism group of the regular polyhedron considered, is finite. In the case where the base field is $\mathbf{R}$ (or $\mathbf{C}$, which comes to the same thing), and for $n = 2$, the finite cases have been well-known since antiquity – which does not exclude that the schematic point of view unveils new charms; we can however say that when specialising the icosahedron (for example) to finite base fields of arbitrary characteristic, it remains an icosahedron, with its own personal combinatorics and the same simple group of automorphisms of order 60. The same remark applies to finite regular polyhedra in higher dimension, which were systematically studied in two beautiful books by Coxeter. The situation is entirely different if we start from an *infinite* regular polyhedron, over a field such as $\mathbf{Q}$, for instance, and "specialise" it to the prime fields $\mathbf{F}_p$ (a well-defined operation for all p except a finite number of primes). It is clear that every regular polyhedron over a finite field is finite – *we thus find an infinity of finite regular polyhedra* *as p varies, whose combinatorial type*, or equivalently, whose automorphism group *varies "arithmetically"* with p. This situation is particularly intriguing in the case where $n = 2$, where we can use the relation made explicit in the preceding paragraph between combinatorial 2-maps and algebraic curves defined over number fields. In this case, an infinite regular polyhedron defined over any infinite field (and therefore, over a sub-$\mathbf{Z}$-algebra of it with two generators) thus gives rise to an infinity of algebraic curves defined over number fields, which are Galois coverings ramified only over 0, 1 and ∞ of the standard projective line. The optimal case is of course the one deduced by passage to the field of fractions $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ of its base ring. This raises a host of new questions, both vague and precise, none of which I have up till now had leisure to examine closely – I will cite only this one: exactly which are the finite regular 2-maps, or equivalently, the finite quotients of the 2-cartographic group, which come from regular 2-polyhedra over finite fields[58]? Do we obtain them all, and if yes: how?

These reflections shed a special light on the fact, which to me was completely unexpected, that the theory of finite regular polyhedra, already in the case of dimension $n = 2$, is infinitely richer, and in particular gives infinitely many more different combinatorial forms, in the case where we admit base fields of non-zero characteristic, than in the case considered up to now, where the base fields were always restricted to $\mathbf{R}$, or at best $\mathbf{C}$ (in the case of what Coxeter calls "complex regular polyhedra", and which I prefer to call "regular pseudo-polyhedra defined over $\mathbf{C}$")[59]. Moreover, it seems that this extension of the point of view should also shed new light on the already known cases. Thus, examining the Pythagorean polyhedra one after the other, I saw that the same small miracle was repeated each time, which I called the *combinatorial paradigm* of the polyhedra under consideration. Roughly speaking, it can be described by saying that when we consider the

[58]These are actually the same as those coming from regular polyhedra defined over arbitrary fields, or algebraically closed fields, as can be seen using standard specialisation arguments.

[59]The pinned pseudo-polyhedra are described in the same way as the pinned polyhedra, with the only difference that the fundamental reflections σ_i $(0 \leq i \leq n)$ are here replaced by *pseudo-reflections* (which Coxeter assumes of finite order, since he restricts himself to finite combinatorial structures). This simply leads to the introduction for each of the σ_i of an additional numerical invariant β_i, such that the universal n-pseudo-polyhedron can also be defined over a ring of polynomials with integral coefficients, in the $n + (n+1)$ variables σ_i $(0 \leq i \leq n)$ and β_i $(0 \leq i \leq n)$.

specialisation of the polyhedra in the or one of the most singular characteristic(s) (namely characteristics 2 and 5 for the icosahedron, characteristic 2 for the octahedron), we read off from the geometric regular polyhedron over the finite field ($\mathbf{F}_4$ and $\mathbf{F}_5$ for the icosahedron, $\mathbf{F}_2$ for the octahedron) a particularly elegant (and unexpected) description of the combinatorics of the polyhedron. It seems to me that I perceived there a principle of great generality, which I believed I found again for example in a later reflection on the combinatorics of the system of 27 lines on a cubic surface, and its relations with the root system E_7. Whether it happens that such a principle really exists, and even that we succeed in uncovering it from its cloak of fog, or that it recedes as we pursue it and ends up vanishing like a Fata Morgana, I find in it for my part a force of motivation, a rare fascination, perhaps similar to that of dreams. No doubt that following such an unformulated call, the unformulated seeking form, from an elusive glimpse which seems to take pleasure in simultaneously hiding and revealing itself – can only lead far, although no one could predict where...

However, occupied by other interests and tasks, I have not up to now followed this call, nor met any other person willing to hear it, much less to follow it. Apart from some digressions towards other types of geometrico-combinatorial structures, my work on the question has been limited to a first effort of refining and housekeeping, which it is useless for me to describe further here (n °5). The only point which perhaps still deserves to be mentioned is the existence and uniqueness of a hyperquadric circumscribing a given regular n-polyhedron, whose equation can be given explicitly by simple formulae in terms of the fundamental parameters α_i[60]. The case which interests me most is when $n = 2$, and the moment seems ripe to rewrite a new version, in modern style, of Klein's classic book on the icosahedron and the other Pythagorean polyhedra. Writing such an exposé on regular 2-polyhedra would be a magnificent opportunity for a young researcher to familiarise himself with the geometry of polyhedra as well as their connections with spherical, Euclidean and hyperbolic geometry and with algebraic curves, and with the language and the basic techniques of modern algebraic geometry. Will there

[60]An analogous result is valid for pseudo-polyhedra. It would seem that the "exceptional characteristics" we discussed above, for specialisations of a given polyhedron, are those for which the circumscribed hyperquadric is either degenerate or tangent to the hyperplane at infinity.

be found one, some day, who will seize this opportunity?

5. Denunciation of so-called "general" topology, and heuristic reflections towards a so-called "tame" topology

I would like to say a few words now about some topological considerations which have made me understand the necessity of new foundations for "geometric" topology, in a direction quite different from the notion of topos, and actually independent of the needs of so-called "abstract" algebraic geometry (over general base fields and rings). The problem I started from, which already began to intrigue me some fifteen years ago, was that of defining a theory of "dévissage" for stratified structures, in order to rebuild them, via a canonical process, out of "building blocks" canonically deduced from the original structure. Probably the main example which had led me to that question was that of the canonical stratification of a singular algebraic variety (or a complex or real singular space) through the decreasing sequence of its successive singular loci. But I probably had the premonition of the ubiquity of stratified structures in practically all domains of geometry (which surely others had seen clearly a long time before). Since then, I have seen such structures appear, in particular, in any situation where "moduli" are involved for geometric objects which may undergo not only continuous variations, but also "degeneration" (or "specialisation") phenomena – the strata corresponding then to the various "levels of singularity" (or to the associated combinatorial types) for the objects in question. The compactified modular multiplicities $\widehat{M}_{g,\nu}$ of Mumford-Deligne for the stable algebraic curves of type (g,ν) provide a typical and particularly inspiring example, which played an important motivating role when I returned to my reflection about stratified structures, from December 1981 to January 1982. Two-dimensional geometry provides many other examples of such modular stratified structures, which all (if not using rigidification) appear as "multiplicities" rather than as spaces or manifolds in the usual sense (as the points of these multiplicities may have non-trivial automorphism groups). Among the objects of two-dimensional geometry which give rise to such modular stratified structures in arbitrary dimensions, or even infinite dimension, I would list polygons (Euclidean, spherical or hyperbolic), systems of straight lines in a plane (say projective), systems of “pseudo straight lines” in a projective topological plane, or more general immersed curves with normal crossings, in a given (say compact) surface.

The simplest non-trivial example of a stratified structure is obtained by considering a pair (X, Y) of a space X and a closed subspace Y, with a suitable assumption of equisingularity of X along Y, and assuming moreover (to fix ideas) that both strata Y and $X \backslash Y$ are topological manifolds. The naive idea, in such a situation, is to consider “the” tubular neighbourhood T of Y in X, whose boundary ∂T should also be a smooth manifold, fibred with compact smooth fibres over Y, whereas T itself can be identified with the conical fibration associated to the above one. Setting

$$U = X \backslash \mathrm{Int}(T),$$

one finds a manifold with boundary, whose boundary is canonically isomorphic to the boundary of T. This being said, the “building blocks” are the manifold with boundary U (compact if X is compact, and which replaces and refines the “open” stratum $X \backslash Y$) and the manifold (without boundary) Y, together with, as an additional structure which connects them, the “glueing” map

$$f : \partial U \longrightarrow Y$$

which is a proper and smooth fibration. The original situation (X, Y) can be recovered from $(U, Y, f : \partial U \longrightarrow Y)$ via the formula

$$X \cong U \amalg_{\partial U} Y$$

(amalgamated sum over ∂U, mapping into U and Y by inclusion resp. the glueing map).

This naive vision immediately encounters various difficulties. The first is the somewhat vague nature of the very notion of tubular neighbourhood, which acquires a tolerably precise meaning only in the presence of structures which are much more rigid than the mere topological structure, such as “piecewise linear” or Riemannian (or more generally, space with a distance function) structure; the trouble here is that in the examples which naturally come to mind, one does not have such structures at one’s disposal – at best an equivalence class of such structures, which makes it possible to rigidify the situation somewhat. If on the other hand one assumes that one might find an expedient in order to produce a tubular neighbourhood having the desired properties, which moreover would be unique modulo an automorphism (say a topological one) of the situation – an automorphism which moreover respects the fibred structure provided by the glueing map, there still remains the difficulty arising from the lack of canonicity of the choices involved, as the said automorphism is obviously not unique, whatever may be done in order to "normalise" it. The idea here, in order to make canonical something which is not, is to work systematically in the framework of the *"isotopic categories"* associated to the categories of a topological nature which are naturally present in such questions (such as the category of admissible pairs (X, Y) and homeomorphisms of such pairs etc.), retaining the same objects, but defining as "morphisms" the isotopy classes (in a sense which is dictated unambiguously by the context) of isomorphisms (or even morphisms more general than isomorphisms). I used this idea, which is taken up successfully in the thesis of Yves Ladegaillerie (see beginning of par. 3), in a systematic way in all my later reflections on combinatorial topology, when it came to a precise formulation of translation theorems of topological situations in terms of combinatorial situations. In the present situation, my hope was to be able to formulate (and prove!) a theorem of equivalence between two suitable isotopic categories, one being the category of "admissible pairs" (X, Y), and the other the category of "admissible triples" (U, Y, f), where Y is a manifold, U a manifold with boundary, and $f : \partial U \longrightarrow Y$ a smooth and proper fibration. Moreover, I hoped that such a statement could be naturally extended, modulo some essentially algebraic work, to a more general statement, which would apply to general stratified structures.

It soon appeared that there could be no question of getting such an ambitious statement in the framework of topological spaces, because of the sempiternal "wild" phenomena. Already when X itself is a manifold and Y is reduced to a point, one is confronted with the difficulty that the cone over a compact space Z can be a manifold at its vertex, even if Z is not homeomorphic to a sphere, nor even a manifold. It was also clear that the contexts of the most rigid structures which existed then, such as the "piece-wise linear" context were equally inadequate – one common disadvantage consisting in the fact that they do not make it possible, given a pair (U, S) of a "space" U and a closed subspace S, and a glueing map $f : S \longrightarrow T$, to build the corresponding amalgamated sum. Some years later, I was told of Hironaka's theory of what he calls, I believe, (real) "semi-analytic" sets which satisfy certain essential stability conditions (actually probably all of them), which are necessary to develop a usable framework of "tame topology". This triggered a renewal of the reflection on the foundations of such a topology, whose necessity appears more and more clearly to me.

After some ten years, I would now say, with hindsight, that *"general topology" was developed* (during the thirties and forties) *by analysts and in order to meet the needs of analysis*, not for topology per se, i.e. the study of the *topological properties of the various geometrical shapes*. That the foundations of topology are inadequate is manifest from the very beginning, in the form of "false problems" (at least from the point of view of the topological intuition of shapes) such as the "invariance of domains", even if the solution to this problem by Brouwer led him to introduce new geometrical ideas. Even now, just as in the heroic times when one anxiously witnessed for the first time curves cheerfully filling squares and cubes, when one tries to do topological geometry in the technical context of topological spaces, one is confronted at each step with spurious difficulties related to wild phenomena. For instance, it is not really possible, except in very low dimensions, to study for a given space X (say a compact manifold), the homotopy type of (say) the automorphism group of X, or of the space of embeddings, or immersions etc. of X into some other space Y – whereas one feels that these invariants should be part of the toolbox of the essential invariants attached to X, or to the pair (X, Y), etc. just as the function space $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ which is familiar in homotopical algebra. Topologists elude the difficulty, without tackling it, moving to contexts which are close to the topological one and less subject to wildness, such as differentiable manifolds, PL spaces (piece-wise linear) etc., of which it is clear that none is "good", i.e. stable under the most obvious topological operations, such as contraction-glueing operations (not to mention operations like $X \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ which oblige one to leave the paradise of finite dimensional "spaces"). This is a way of beating about the bush! This situation, like so often already in the history of our science, simply reveals the almost insurmountable inertia of the mind, burdened by a heavy weight of conditioning, which makes it difficult to take a real look at a foundational question, thus at the context in which we live, breathe, work – accepting it, rather, as immutable data. It is certainly this inertia which explains why it tooks millenia before such childish ideas as that of zero, of a group, of a topological shape found their place in mathematics. It is this again which explains why the rigid framework of general topology is patiently dragged along by generation after generation of topologists for whom "wildness" is a fatal necessity, rooted in the nature of things.

My approach toward possible foundations for a tame topology has been an axiomatic one. Rather than declaring (which would indeed be a perfectly sensible thing to do) that the desired "tame spaces" are no other than (say) Hironaka's semianalytic spaces, and then developing in this context the toolbox of constructions and notions which are familiar from topology, supplemented with those which had not been developed up to now, for that very reason, I preferred to work on extracting which exactly, among the geometrical properties of the semianalytic sets in a space $\mathbf{R}^n$, make it possible to use these as local "models" for a notion of *"tame space"* (here semianalytic), and what (hopefully!) makes this notion flexible enough to use it effectively as the fundamental notion for a "tame topology" which would express with ease the topological intuition of shapes. Thus, once this necessary foundational work has been completed, there will appear not *one* "tame theory", but a vast infinity, ranging from the strictest of all, the one which deals with "piecewise $\overline{\mathbf{Q}}_r$-algebraic spaces" (with $\overline{\mathbf{Q}}_r = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$), to the one which appears (whether rightly or not) to be likely to be the vastest of all, namely using "piecewise real analytic spaces" (or semianalytic using Hironaka's terminology). Among the foundational theorems which I envision in my programme, there is a *comparison theorem* which, to put it vaguely, would say that *one will essentially find the same isotopic categories* (or even ∞-isotopic) whatever the tame theory one is working with. In a more precise way, the question is to put one's finger on a system of axioms which is rich enough to imply (among many other things) that if one has two tame theories T , T' with T finer than T' (in the obvious sense), and if X, Y are two T-tame spaces, which thus also define corresponding T'-tame spaces, the canonical map

$$
{}_T(X,Y) \longrightarrow {}_{T'}(X,Y)
$$

induces a bijection on the set of connected components (which will imply that the isotopic category of the T-spaces is equivalent to the T'-spaces), and is even a homotopy equivalence (which means that one even has an equivalence for the "∞-isotopic" categories, which are finer than the isotopic categories in which one retains only the π_0 of the spaces of isomorphisms). Here the may be defined in an obvious way, for instance as semisimplicial sets, in order to give a precise meaning to the above statement. Analogous statements should be true, if one replaces the "spaces" with other spaces of maps, subject to standard geometric conditions, such as those of being embeddings, immersions, smooth, étale, fibrations etc. One also expects analogous statements where X, Y are replaced by systems of tame spaces, such as those which occur in a theory of dévissage of stratified structures – so that in a precise technical sense, this dévissage theory will also be essentially independent of the tame theory chosen to express it.

The first decisive test for a good system of axioms defining the notion of a "tame subset of $\mathbf{R}^n$" seems to me to consist in the possibility of proving such comparison theorems. I have settled for the time being for extracting a temporary system of plausible axioms, without any assurance that other axioms will not have to be added, which only working on specific examples will cause to appear. The strongest among the axioms I have introduced, whose validity is (or will be) most likely the most delicate to check in specific situations, is a *triangulability axiom* (in a tame sense, it goes without saying) of a tame part of $\mathbf{R}^n$. I did not try to prove the comparison theorem in terms of these axioms only, however I had the impression (right or wrong again!) that this proof, whether or not it necessitates the introduction of some additional axiom, will not present serious technical difficulties. It may well be that the technical difficulties in the development of satisfactory foundations for tame topology, including a theory of dévissage for tame stratified structures are actually already essentially concentrated in the axioms, and consequently already essentially overcome by triangulability theorems à la Lojasiewicz and Hironaka. What is again lacking is not the technical virtuosity of the mathematicians, which is sometimes impressive, but the audacity (or simply innocence...) to free oneself from a familiar context accepted by a flawless consensus…

The advantages of an axiomatic approach towards the foundations of tame topology seem to me to be obvious enough. Thus, in order to consider a complex algebraic variety, or the set of real points of an algebraic variety defined over $\mathbf{R}$, as a tame space, it seems preferable to work with the "piecewise $\mathbf{R}$-algebraic" theory , maybe even the $\overline{\mathbf{Q}}_r$-algebraic theory (with $\overline{\mathbf{Q}}_r = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$) when dealing with varieties defined over number fields, etc. The introduction of a subfield $K \subset \mathbf{R}$ associated to the theory T (consisting in the points of $\mathbf{R}$ which are T*-tame*, i.e. such that the corresponding one- point set is T-tame) make it possible to introduce for any point x of a tame space X, a residue field $k(x)$, which is an algebraically closed subextension of $\mathbf{R}/K$, of finite transcendence degree over K (bounded by the topological dimension of X). When the transcendence degree of $\mathbf{R}$ over K is infinite, we find a notion of transcendence degree (or "dimension") of a point of a tame space, close to the familiar notion in algebraic geometry. Such notions are absent from the "semianalytic" tame topology, which however appears as the natural topological context for the inclusion of real and complex analytic spaces.

Among the first theorems one expects in a framework of tame topology as I perceive it, aside from the comparison theorems, are the statements which establish, in a suitable sense, the existence and uniqueness of "the" tubular neighbourhood of closed tame subspace in a tame space (say compact to make things simpler), together with concrete ways of building it (starting for instance from any tame map $X \longrightarrow \mathbf{R}^+$ having Y as its zero set), the description of its "boundary" (although generally it is in no way a manifold with boundary!) ∂T, which has in T a neighbourhood which is isomorphic to the product of T with a segment, etc. Granted some suitable equisingularity hypotheses, one expects that T will be endowed, in an essentially unique way, with the structure of a locally trivial fibration over Y, with ∂Y as a subfibration. This is one of the least clear points in my temporary intuition of the situation, whereas the homotopy class of the predicted structure map $T \longrightarrow Y$ has an obvious meaning, independent of any equisingularity hypothesis, as the homotopic inverse of the inclusion map $Y \longrightarrow T$, which must be a homotopism. One way to a posteriori obtain such a structure would be via the hypothetical equivalence of isotopic categories which was considered at the beginning, taking into account the fact that the functor $(U, Y, f) \mapsto (X, Y)$

is well-defined in an obvious way, independently of any theory of tubular neighbourhoods.

It will perhaps be said, not without reason, that all this may be only dreams, which will vanish in smoke as soon as one sets to work on specific examples, or even before, taking into account some known or obvious facts which have escaped me. Indeed, only working out specific examples will make it possible to sift the right from the wrong and to reach the true substance. The only thing in all this which I have no doubt about, is the very necessity of such a foundational work, in other words, the artificiality of the present foundations of topology, and the difficulties which they cause at each step. It may be however that the formulation I give of a theory of dévissage of stratified structures in terms of an equivalence theorem of suitable isotopic (or even ∞-isotopic) categories is actually too optimistic. But I should add that I have no real doubts about the fact that the theory of these dévissages which I developed two years ago, although it remains in part heuristic, does indeed express some very tangible reality. In some part of my work, for want of a ready-to-use "tame" context, and in order to have precise and provable statements, I was led to postulate some very plausible additional structures on the stratified structure I started with, especially concerning the local retraction data, which do make it possible to construct a canonical system of spaces, parametrised by the ordered set of flags $\mathrm{Drap}(I)$ of the ordered set I indexing the strata; these spaces play the role of the spaces (U, Y) above, and they are connected by embedding and proper fibration maps, which make it possible to reconstitute in an equally canonical way the original stratified structure, including these "additional structures" (n °7). The only trouble here, is that these appear as an additional artificial element of structure, which is no way part of the data in the usual geometric situations, as for example the compact moduli space $\widehat{M}_{g,\nu}$ with its canonical "stratification at infinity", defined by the Mumford-Deligne divisor with normal crossings. Another, probably less serious difficulty, is that this so-called moduli "space" is in fact a *multiplicity* – which can be technically expressed by the necessity of replacing the index set I for the strata with an (essentially finite) *category* of indices, here the "MD graphs" which "parametrise" the possible "combinatorial structures" of a stable curve of type (g, ν). This said, I can assert that the general theory of dévissage, which has been developed especially to meet the needs of *this* example, has indeed proved to be a precious guide, leading to a progressive understanding, with flawless coherence, of some essential aspects of the Teichmüller tower (that is, essentially the "structure at infinity" of the ordinary Teichmüller groups). It is this approach which finally led me, within some months, to the principle of a purely combinatorial construction of the tower of Teichmüller groupoids, in the spirit sketched above (cf. par. 2).

Another satisfying test of coherence comes from the "topossic" viewpoint. Indeed, as my interest for the multiplicities of moduli was first prompted by their algebrico-geometric and arithmetic meaning, I was first and foremost interested by the modular algebraic multiplicities, over the absolute basefield $\mathbf{Q}$, and by a "dévissage" at infinity of their geometric fundamental groups (i.e. of the *profinite* Teichmüller groups) which would be compatible with the natural operations of $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. This requirement seemed to exclude from the start the possibility of a reference to a hypothetical theory of dévissage of stratified structures in a context of "tame topology" (or even, at worst, of ordinary topology), beyond a purely heuristic guiding thread. Thus the question arose of translating, in the context of the topoi (here étale topoi) which were present in the situation, the theory of dévissage I had arrived at in a completely different context – with the additional task, in the sequel, of extracting a general comparison theorem, patterned after well-known theorems, in order to compare the invariants (in particular the homotopy types of various tubular neighbourhoods) obtained in the transcendent and schematic frameworks. I have been able to convince myself that such a formalism of dévissage indeed had some meaning in the (so-called "abstract"!) context of general topoi, or at least noetherian topoi (like those occurring in this situation), via a suitable notion of *canonical tubular neighbourhood of a subtopos* in an ambient topos. Once this notion is acquired, together with some simple formal properties, the description of the "dévissage" of a stratified topos is even considerably simpler in that framework than in the (tame) topological one. True, there is foundational work to be done here too, especially around the very notion of the tubular neighbourhood of a subtopos – and it is actually surprising that this work (as far as I know) has still never been done, i.e. that no one (since the context of étale topology appeared, more than twenty years ago) apparently ever felt the need for it; surely a sign that the understanding of the topological structure of schemes has not made much progress since the work of Artin-Mazur…

Once I had accomplished this (more or less heuristic) double work of refining the notion of dévissage of a stratified space or topos, which was a crucial step in my understanding of the modular multiplicities, it actually appeared that, as far as these are concerned, one can actually take a short cut for at least a large part of the theory, via direct geometric arguments. Nonetheless, the formalism of dévissage which I reached has proved its usefulness and its coherence to me, independently of any question about the most adequate foundations which make it completely meaningful.

6. "Differentiable theories" (à la Nash) and "tame theories"

One of the most interesting foundational theorems of (tame) topology which should be developed would be a theorem of "dévissage" (again!) of a proper tame map of tame spaces

$$f : X \longrightarrow Y,$$

via a decreasing filtration of Y by closed tame subspaces Y^i, such that above the "open strata" $Y^i \backslash Y^{i-i}$ of this filtration, f induces a locally trivial fibration (from the tame point of view, it goes without saying). It should be possible to generalise such a statement even further and to make it precise in various ways, in particular by requiring the existence of an analogous *simultaneous* dévissage for X and for a given finite family of (tame) closed subspaces of X. Also the very notion of locally trivial fibration in the tame sense can be made considerably stronger, taking into account the fact that the open strata U_i are *better* than spaces whose tame structure is purely local, because they are obtained as differences of two tame spaces, compact if Y is compact. Between the notion of a compact tame space (which is realised as one of the starting "models" in an $\mathbf{R}^n$) and that of a "locally tame" (locally compact) space which can be deduced from it in a relatively obvious way, there is a somewhat more delicate notion of a *"globally tame" space* X, obtained as the difference $\hat{X} \backslash Y$ of two compact tame spaces, it being understood that we do not distinguish between the space defined by a pair $(\hat{X}, Y)$ and that defined by a pair $(\hat{X}', Y')$ deduced from it by a (necessarily proper) tame map

$$g : \hat{X}' \longrightarrow \hat{X}$$

inducing a bijection $g^{-1}(X) \longrightarrow X$, taking $Y' = g^{-1}(Y)$. Perhaps the most interesting natural example is the one where we start from a separated scheme of finite type over **C** or **R**, taking for X the set of its real or complex points, which inherits a global tame structure with the help of schematic compactifications (which exist according to Nagata) of the scheme we started with. This notion of a globally tame space is associated to a notion of a *globally tame map*, which in turn allows us to strengthen the notion of a locally trivial fibration, in stating a theorem of dévissage for a map $f : X \longrightarrow Y$ (now not necessarily proper) in the context of globally tame spaces.

I was informed last summer by Zoghman Mebkhout that a theorem of dévissage in this spirit has been recently obtained in the context of real and/or complex analytic spaces, with Y^i which here are analytic subspaces of Y. This result makes it plausible that we already have at our disposal techniques which are powerful enough to also prove a dévissage theorem in the tame context, apparently more general, but probably less arduous.

The context of tame topology should also, it seems to me, make it possible to formulate with precision a certain very general principle which I frequently use in a great variety of geometric situations, which I call the *"principle of anodine choices"* – as useful as vague in appearance! It says that when for the needs of some construction of a geometric object in terms of others, we are led to make a certain number of arbitrary choices along the way, so that the final object appears to depend on these choices, and is thus stained with a defect of canonicity, that this defect is indeed serious (and to be removed requires a more careful analysis of the situation, the notions used, the data introduced etc.) whenever at least one of these choices is made in a space which is not "contractible", i.e. whose π_0 *or* one of whose higher invariants π_i is non-trivial, and that this defect is on the contrary merely apparent, and the construction itself is "essentially" canonical and will not bring along any troubles, whenever the choices made are all "anodine", i.e. made in *contractible* spaces. When we try in actual examples to really understand this principle, it seems that each time we stumble onto the same notion of "∞-isotopic categories" expressing a given situation, and finer than the more naive isotopic (= 0-isotopic) categories obtained by considering only the π_0 of the spaces of isomorphisms introduced in the situation, while the ∞-isotopic point of view considers all of their homotopy type. For example, the naive isotopic point of view for compact surfaces with boundary of type (g, ν) is "good" (without any hidden boomerangs!) exactly in the cases which I call "anabelian" (and which Thurston calls "hyperbolic"), i.e. distinct from (0, 0), (0, 1) (0, 2), (1, 0) – which are also exactly the cases where the connected component of the identity of the automorphism group of the surface is *contractible*. In the other cases, except for the case (0, 0) of the sphere without holes, it suffices to work with 1-isotopic categories to express in a satisfying way via algebra the essential geometrico-topological facts, since the said connected component is then a $K(\pi, 1)$. Working in a 1-isotopic category actually comes down to working in a bicategory, i.e. with $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ which are (no longer discrete sets as in the 0-isotopic point of view, but) groupoids (whose 0 are exactly the 0-isotopic Hom). This is the description in purely algebraic terms of this bicategory which is given in the last part of the thesis of Yves Ladegaillerie (cf. par. 3).

If I allowed myself to dwell here at some length on the theme of the foundations of tame topology, which is not one of those to which I intend to devote myself prioritarily in the coming years, it is doubtless because I feel that it is yet another cause which needs to be pleaded, or rather: a work of great current importance which needs hands! Just as years ago for the new foundations of algebraic geometry, it is not pleadings which will surmount the inertia of acquired habits, but tenacious, meticulous long-term work, which will from day to day bring eloquent harvests.

I would like to say some last words on an older reflection (end of the sixties?), very close to the one I just discussed, inspired by ideas of Nash which I found very striking. Instead of axiomatically defining a notion of "tame theory" via a notion of a "tame part of $\mathbf{R}^n$" satisfying certain conditions (mainly of stability), I was interested by an axiomatisation of the notion of "non-singular variety" via, for each natural integer n, a subring A_n of the ring of germs of real functions at the origin in $\mathbf{R}^n$. These are the functions which will be admitted to express the "change of chart" for the corresponding notion of A_n-variety, and I was first concerned with uncovering a system of axioms on the system $A = (A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ which ensures for this notion of variety a suppleness comparable to that of a C^∞ variety, or a real analytic one (or a Nash one). According to the familiar type of construction which one wants to be able to do in the context of A-varieties, the relevant system of axioms is more or less reduced or rich. One doesn't need much if one only wants to develop the differential formalism, with the construction of jet bundles, De Rham complexes etc. If we want a statement of the type "quasi-finite implies finite" (for a map in the neighbourhood of a point), which appeared as a key statement in the local theory of analytic spaces, we need a more delicate stability axiom, in Weierstrass' "Vorbereitungssatz"[61]. In other questions, a stability axiom by analytic continuation (in $\mathbf{C}^n$) appears necessary. The most Draconian axiom which I was led to introduce, also a stability axiom, concerns the integration of Pfaff systems, ensuring that certain (even all) Lie groups are A-varieties. In all this, *I took care not to suppose that the A_n are $\mathbf{R}$-algebras*, so a constant function on a A-variety is "admissible" only if its value belongs to a certain subfield K of $\mathbf{R}$ (which is, if one likes, A_0). This subfield can very well be $\mathbf{Q}$, or its algebraic closure $\overline{\mathbf{Q}}_r$ in $\mathbf{R}$, or any other subextension of $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$, preferably even of finite or at least countable transcendence degree over $\mathbf{Q}$. This makes it possible, for example, as before for tame spaces, to have every point x of a variety (of type A) correspond to a residue field $k(x)$, which is a subextension of $\mathbf{R}/K$. A fact which appears important to me here, is that even in its strongest form, the system of axioms does not imply that we must have $K = \mathbf{R}$. More precisely, because *all* the axioms are stability axioms, it follows that for a given set S of germs of real analytic functions at the origin (in various spaces $\mathbf{R}^n$), there exists a smaller theory A for which these germs are admissible, and that it is "countable", i.e. the A_n are countable, whenever S is. A fortiori, K is then countable, i.e. of countable transcendence degree over $\mathbf{Q}$.

The idea here is to introduce, via this axiomatic system, a notion of an *"elementary"* (real analytic) function, or rather, a whole hierarchy of such notions. For a function of 0 variables i.e. a constant, this notion gives that of an "elementary constant", including in particular (in the case of the strongest axiomatic system) con-

[61]It could seem simpler to say that the (local) rings A_n are *Henselian*, which is equivalent. But it is not at all clear a priori in this latter form that the condition in question is in the nature of a stability condition, and this is an important circumstance as will appear in the following reflections.

stants such as π, e and many others, taking values of admissible functions (such as exponentials, logarithms etc.) for systems of "admissible" values of the argument. One feels that the relation between the system $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ and the corresponding rationality field K must be very tight, at least for A which can be generated by a finite "system of generators" S – but one must fear that even the least of the interesting questions one could ask about this situation still remains out of reach (n °1).

These old reflections have taken on some current interest for me due to my more recent reflection on tame theories. Indeed, it seems to me that it is possible to associate in a natural way to a "differentiable theory" A a tame theory T (doubtless having the same field of constants), in such a way that every A-variety is automatically equipped with a T-tame structure and conversely for every T-tame compact space X, we can find a rare tame closed subset Y in X, such that $X \backslash Y$ comes from an A-variety, and moreover such that this A-variety structure is unique at least in the following sense: two such structures coincide in the complement of a rare tame subset $Y' \supset Y$ of X. The theory of dévissage of stratified tame structures (which was discussed in the preceding par.), in the case of smooth strata, should moreover raise much more precise questions of comparison of tame structures with structures of differentiable (or rather, $\mathbf{R}$-analytic) type. I suspect that the type of axiomatisation proposed here for the notion of "differentiable theory" would give a natural framework for the formulation of such questions with all desirable precision and generality.

7. Pursuing Stacks

Since the month of March last year, so nearly a year ago, the greater part of my energy has been devoted to a work of reflection on the *foundations of non-commutative (co)homological algebra*, or what is the same, after all, of *homotopical algebra*. These reflections have taken the concrete form of a voluminous stack of typed notes, destined to form the first volume (now being finished) of a work in two volumes to be published by Hermann, under the overall title *"Pursuing Stacks"*. I now foresee (after successive extensions of the initial project) that the manuscript of the whole of the two volumes, which I hope to finish definitively in the course of this year, will be about 1500 typed pages in length. These two volumes are moreover for me the first in a vaster series, under the overall title *"Mathematical Reflections"*, in which I intend to develop some of the themes sketched in the present report.

Since I am speaking here of work which is actually now being written up and is even almost finished, the first volume of which will doubtless appear this year and will contain a detailed introduction, it is undoubtedly less interesting for me to develop this theme of reflection here, and I will content myself with speaking of it only very briefly. This work seems to me to be somewhat marginal with respect to the themes I sketched before, and does not (it seems to me) represent a real renewal of viewpoint or approach with respect to my interests and my mathematical vision of before 1970. If I suddenly resolved to do it, it is almost out of desperation, for nearly twenty years have gone by since certain visibly fundamental questions, which were ripe to be thoroughly investigated, without anyone seeing them or taking the trouble to fathom them. Still today, the basic structures which occur in the homotopical point of view in topology are not understood, and to my knowledge, after the work of Verdier, Giraud and Illusie on this theme (which are so many beginnings still waiting for continuations…) there has been no effort in this direction. I should probably make an exception for the axiomatisation work done by Quillen on the notion of a category of models, at the end of the sixties, and taken up in various forms by various authors. At that time, and still now, this work seduced me and taught me a great deal, even while going in quite a different direction from the one which was and still is close to my heart. Certainly, it introduces derived categories in various non-commutative contexts, but without entering into the question of the essential internal structures of such a category, also left open in the commutative case by Verdier, and after him by Illusie. Similarly, the question of putting one's finger on the natural "coefficients" for a non-commutative cohomological formalism, beyond the stacks (which should be called 1-stacks) studied in the book by Giraud, remained open – or rather, the rich and precise intuitions concerning it, taken from the numerous examples coming in particular from algebraic geometry, are still waiting for a precise and supple language to give them form.

I returned to certain aspects of these foundational questions in 1975, on the occasion (I seem to remember) of a correspondence with Larry Breen (two letters from this correspondence will be reproduced as an appendix to Chap. I of volume 1, "History of Models", of Pursuing Stacks). At that moment the intuition appeared that ∞-groupoids should constitute particularly adequate models for homotopy types, the n-groupoids corresponding to *truncated* homotopy types (with $\pi_i = 0$ pour $i > n$). This same intuition, via very different routes, was discovered by Ronnie Brown and some of his students in Bangor, but using a rather restrictive notion of ∞-groupoid (which, among the 1-connected homotopy types, model only products of Eilenberg-Mac Lane spaces). Stimulated by a rather haphazard correspondence with Ronnie Brown, I finally began this reflection, starting with an attempt to define a wider notion of ∞-groupoid (later rebaptised stack in ∞-groupoids or simply "stack", the implication being: over the 1-point topos), and which, from one thing to another, led me to Pursuing Stacks. The volume "History of Models" is actually a completely unintended digression with respect to the initial project (the famous stacks being temporarily forgotten, and supposed to reappear only around page 1000...).

This work is not completely isolated with respect to my more recent interests. For example, my reflection on the modular multiplicities $\widehat{M}_{g,\nu}$ and their stratified structure renewed the reflection on a theorem of van Kampen in dimension > 1 (also one of the preferred themes of the group in Bangor), and perhaps also contributed to preparing the ground for the more important work of the following year. This also links up from time to time with a reflection dating from the same year 1975 (or the following year) on a "De Rham complex with divided powers", which was the subject of my last public lecture, at the IHES in 1976; I lent the manuscript of it to I don't remember whom after the talk, and it is now lost. It was at the moment of this reflection that the intuition of a "schematisation" of homotopy types germinated, and seven years later I am trying to make it precise in a (particularly hypothetical) chapter of the History of Models.

The work of reflection undertaken in Pursuing Stacks is a little like a debt which I am paying towards a scientific past where, for about fifteen years (from 1955 to 1970), the development of cohomological tools was the constant Leitmotiv in my foundational work on algebraic geometry. If in this renewal of my interest in this theme, it has taken on unexpected dimensions, it is however not out of pity for a past, but because of the numerous unexpected phenomena which ceaselessly appear and unceremoniously shatter the previously laid plans and projects – rather like in the thousand and one nights, where one awaits with bated breath through twenty other tales the final end of the first.

8. Digressions on 2-dimensional geometry

Up to now I have spoken very little of the more down-to-earth reflections on two-dimensional topological geometry, directly associated to my activities of teaching and "directing research". Several times, I saw opening before me vast and rich fields ripe for the harvest, without ever succeeding in communicating this vision, and the spark which accompanies it, to one of my students, and having it open out into a more or less long-term common exploration. Each time up through today, after a few days or weeks of investigating where I, as scout, discovered riches at first unsuspected, the voyage suddenly stopped, upon its becoming clear that I would be pursuing it alone. Stronger interests then took precedence over a voyage which at that point appeared more as a digression or even a dispersion, than a common adventure.

One of these themes was that of planar polygons, centred around the modular varieties which can be associated to them. One of the surprises here was the irruption of algebraic geometry in a context which had seemed to me quite distant. This kind of surprise, linked to the omnipresence of algebraic geometry in plain geometry, occurred several times.

Another theme was that of curves (in particular circles) immersed in a surface, with particular attention devoted to the "stable" case where the singular points are ordinary double points (and also the more general theme where the different branches at a point mutually cross), often with the additional hypothesis that the immersion is "cellular", i.e. gives rise to a map. A variation on the situations of this type is that of immersions of a surface with non-empty boundary, and first of all a disk (which was pointed out to me by A'Campo around ten years ago). Beyond the question of the various combinatorial formulations of such situations, which really represent no more than an exercise of syntax, I was mainly interested in a dynamical vision of the possible configurations, with the passage from one to another via continuous deformations, which can be decomposed into compositions of two types of *elementary operations* and their inverses, namely the "*sweeping*" of a branch of a curve over a double point, and the *erasing* or the *creation* of a bigon. (The first of these operations also plays a key role in the "dynamical" theory of systems of pseudo-lines in a real projective plane.) One of the first questions to be asked here is that of determining the different *classes of immersions* of a circle or a disk (say) modulo these elementary operations; another, that of seeing which are the immersions of the boundary of the disk which come from an immersion of the disk, and to what extent the first determine the second. Here also, it seems to me that it is a systematic study of the relevant modular varieties (of infinite dimension here, unless a purely combinatorial description of them can be given) which should give the most efficient "focus", forcing us in some sense to ask ourselves the most relevant questions. Unfortunately, the reflection on even the most obvious and down-to-earth questions has remained in an embryonic state. As the only tangible result, I can cite a theory of canonical "dévissage" of a stable cellular immersion of a circle in a surface into "undecomposable" immersions, by "telescoping" such immersions. Unfortunately I did not succeed in transforming my lights on the question into a DEA thesis, nor other lights (on a complete theoretical description, in terms of fundamental groups of topological 1-complexes, of the immersions of a surface with boundary which extend a given immersion of its boundary) into the beginnings of a doctoral thesis. . .

A third theme, pursued simultaneously over the last three years at different levels of teaching (from the option for first year students to the three third-cycle theses now being written on this theme) deals with the topologico-combinatorial classification of systems of lines or pseudo-lines. Altogether, the participation of my students here has been less disappointing than elsewhere, and I have had the pleasure of occasionally learning interesting things from them which I would not have thought of. Things being what they are, however, our common reflection was limited to a very elementary level. Lately, I finally devoted a month of intensive reflection to the development of a purely combinatorial construction of a sort of “modular surface” associated to a system of n pseudo-lines, which classifies the different possible “relative positions” (stable or not) of an $(n+1)$-st pseudo-line with respect to the given system, in other words: the different possible “affinisations” of this system, by the different possible choices of a “pseudo-line at infinity”. I have the impression of having put my finger on a remarkable object, causing an unexpected order to appear in questions of classification which up to now appeared fairly chaotic! But the present report is not the place to dwell further on this subject.

Since 1977, in all the questions (such as the two last themes evoked above) where two-dimensional maps occur, the possibility of realising them canonically on a conformal surface, so on a complex algebraic curve in the compact oriented case, remains constantly in filigree throughout my reflection. In practically every case (in fact, in all cases except that of certain spherical maps with “few automorphisms”) such a conformal realisation implies in fact a *canonical Riemannian metric*, or at least, canonical up to a multiplicative constant. These new elements of structure (without even taking into account the arithmetic element which was considered in par. 3) are of a nature to deeply transform the initial aspect of the questions considered, and the methods of approaching them. A beginning of familiarisation with the beautiful ideas of Thurston on the construction of Teichmüller space, in terms of a very simple game of hyperbolic Riemannian surgery, confirms me in this presentiment. Unfortunately, the very modest level of culture of almost all the students who have worked with me over these last ten years does not allow me to investigate these possibilities with them even by allusion, since the assimilation of even a minimal combinatorial language already frequently encounters considerable psychical obstacles. This is why, in some respect and more and more in these last years, my teaching activity has often acted like a weight, rather than a stimulus for the unfolding of a somewhat advanced or even merely delicate geometric reflection.

9. Assessment of a teaching activity

The occasion appears to be auspicious for a brief assessment of my teaching activity since 1970, that is, since it has taken place in a university. This contact with a very different reality taught me many things, of a completely different order than simply pedagogic or scientific. Here is not the place to dwell on this subject. I also mentioned at the beginning of this report the role which this change of professional milieu played in the renewal of my approach to mathematics, and that of my centres of interest in mathematics. If I pursue this assessment of my teaching activity on the research level, I come to the conclusion of a clear and solid failure. In the more than ten years that this activity has taken place, year after year in the same university, I was never at any moment able to suscitate a place where "something happened" – where something "passed", even among the smallest group of people, linked together by a common adventure. Twice, it is true, around the years 1974 to 1976, I had the pleasure and the privilege of awakening a student to a work of some consequence, pursued with enthusiasm: Yves Ladegaillerie in the work mentioned earlier (par. 3) on questions of isotopy in dimension 2, and Carlos Contou-Carrére (whose mathematical passion did not await a meeting with myself to blossom) an unpublished work on the local and global Jacobians over general base schemes (of which one part was announced in a note in the CR). Apart from these two cases, my role has been limited throughout these ten years to somehow or other conveying the rudiments of the mathematician's trade to about twenty students on the research level, or at least to those among them who persevered with me, reputed to be more demanding than others, long enough to arrive at a first acceptable work written black on white (and even, sometimes, at something better than acceptable and more than just one, done with pleasure and worked out through to the end). Given the circumstances, among the rare people who persevered, even rarer are those who will have the chance of carrying on the trade, and thus, while earning their bread, learning it ever more deeply.

10. Epilogue

Since last year, I feel that as regards my teaching activity at the university, I have learned everything I have to learn and taught everything I can teach there, and that it has ceased to be really useful, to myself and to others. To insist on continuing it under these circumstances would appear to me to be a waste both of human resources and of public funds. This is why I have applied for a position in the

CNRS (which I left in 1959 as freshly named director of research, to enter the IHES). I know moreover that the employment situation is tight in the CNRS as everywhere else, that the result of my request is doubtful, and that if a position were to be attributed to me, it would be at the expense of a younger researcher who would remain without a position. But it is also true that it would free my position at the USTL to the benefit of someone else. This is why I do not scruple to make this request, and to renew it if is not accepted this year.

In any case, this application will have been the occasion for me to write this sketch of a programme, which otherwise would probably never have seen the light of day. I have tried to be brief without being sibylline and also, afterwards, to make it easier reading by the addition of a summary. If in spite of this it still appears rather long for the circumstances, I beg to be excused. It seems short to me for its content, knowing that ten years of work would not be too much to explore even the least of the themes sketched here through to the end (assuming that there is an "end"...), and one hundred years would be little for the richest among them!

Behind the apparent disparity of the themes evoked here, an attentive reader will perceive as I do a profound unity. This manifests itself particularly by a common source of inspiration, namely the geometry of surfaces, present in all of these themes, and most often front and centre. This source, with respect to my mathematical "past", represents a renewal, but certainly not a rupture. Rather, it indicates the path to a new approach to the still mysterious reality of *"motives"*, which fascinated me more than any other in the last years of this past[62]. This fascination has certainly not vanished, rather it is a part of the fascination with the most burning of all the themes evoked above. But today I am no longer, as I used to be, the voluntary prisoner of interminable tasks, which so often prevented me from springing into the unknown, mathematical or not. The time of *tasks* is over for me. If age has brought me something, it is lightness.

[62]On this subject, see my commentaries in the "Thematic Sketch" of 1972 attached to the present report, in the last section "motivic disgressions", (loc. cit. pages 17-18)

Notes

1. The expression "out of reach" here (and also later for a completely different question), appears to me to be decidedly hasty and unfounded. I have noted myself on other occasions that when oracles (here myself!) declare with an air of deep understanding (or doubt) that such and such a problem is "out of reach", it is actually an entirely subjective affirmation. It simply means, apart from the fact that the problem is supposed to be not yet solved, that the person speaking has no ideas on the question, or probably more precisely, that he has no feelings and no motivation with regard to it, that it "does nothing to him" and that he has no desire to do anything with it – which is frequently a sufficient reason to want to discourage others. As in the remark of M. de la Palisse, this did not stop the beautiful and regretted conjectures of Mordell, Tate, and Shafarevitch from succumbing although they were all reputed to be "out of reach", poor things! – Besides, in the very days which followed the writing up of the present report, which put me into contact with questions from which I had distanced myself during the last year, I noticed a new and remarkable property of the outer action of an absolute Galois group on the fundamental group of an algebraic curve, which had escaped me until now and which undoubtedly constitutes at least a new step towards the formulation of an algebraic characterisation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. This, with the "fundamental conjecture" (mentioned in par. 3 below) appears at present as the principal open question for the foundation of an "anabelian algebraic geometry", which starting a few years ago, has represented (by far) my strongest centre of interest in mathematics.

2. With the exception of another "fact", at the time when, around the age of twelve, I was interned in the concentration camp of Rieucros (near Mende). It is there that I learnt, from another prisoner, Maria, who gave me free private lessons, the definition of the circle. It impressed me by its simplicity and its evidence, whereas the property of "perfect rotundity" of the circle previously had appeared to me as a reality mysterious beyond words. It is at that moment, I believe, that I glimpsed for the first time (without of

course formulating it to myself in these terms) the creative power of a "good" mathematical definition, of a *formulation* which describes the essence. Still today, it seems that the fascination which this power exercised on me has lost nothing of its force.

3. More generally, beyond the so-called "anabelian" varieties, over fields of finite type, anabelian algebraic geometry (as it revealed itself some years ago) leads to a description, uniquely in terms of profinite groups, of the category of schemes of finite type over the absolute base $\mathbf{Q}$ (or even $\mathbf{Z}$), and from there, in principle, of the category of all schemes (by suitable passages to limits). It is thus a construction which "pretends" to ignore the rings (such as $\mathbf{Q}$, algebras of finite type over $\mathbf{Q}$, etc.) and the algebraic equations which traditionally serve to describe schemes, while working directly with their étale topoi, which can be expressed in terms of systems of profinite groups. A grain of salt nevertheless: to be able to hope to reconstitute a scheme (of finite type over $\mathbf{Q}$ say) from its étale topos, which is a purely topological invariant, we must place ourselves not in the category of schemes (here of finite type over $\mathbf{Q}$), but in the one which is deduced from it by "localisation", by making the morphisms which are "universal homeomorphisms", i.e. finite, radicial and surjective, be invertible. The development of such a translation of a "geometric world" (namely that of schemes, schematic multiplicities etc.) in terms of an "algebraic world" (that of profinite groups and systems of profinite groups describing suitable topoi (called "étale") can be considered as the ultimate goal of Galois theory, doubtless even in the very spirit of Galois. The sempiternal question "and why all this?" seems to me to have neither more nor less meaning in the case of the anabelian geometry now in the process of birth, than in the case of Galois theory in the time of Galois (or even today, when the question is asked by an overwhelmed student…); the same goes for the commentary which usually accompanies it, namely "all this is very general indeed!".

4. We thus easily conceive that a group like $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$, with its "arithmetic" structure, is positively a machine for constructing "motivic" representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ and its open subgroups, and that we thus obtain, at least in prin-

ciple, all the motivic representations which are of weight 1, or contained in a tensor product of such representations (which already makes quite a packet!) In 1981 I began to experiment with this machine in a few specific cases, obtaining various remarkable representations of Γ in groups $G(\hat{\mathbf{Z}})$, where G is a (not necessarily reductive) group scheme over $\mathbf{Z}$, starting from suitable homomorphisms

$$\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z}) \longrightarrow G_0(\mathbf{Z}),$$

where G_0 is a group scheme over $\mathbf{Z}$, and G is constructed as an extension of G_0 by a suitable group scheme. In the "tautological" case $G_0 = \mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$, we find for G a remarkable extension of $\mathrm{Gl}(2)_{\mathbf{Z}}$ by a torus of dimension 2, with a motivic representation which "covers" those associated to the class fields of the extensions $\mathbf{Q}(i)$ and $\mathbf{Q}(j)$ (as if by chance, the "fields of complex multiplication" of the two "anharmonic" elliptic curves). There is here a principle of construction which seemed to me very general and very efficient, but I didn't have (or take) the leisure to unravel it and follow it through to the end – this is one of the numerous "hot points" in the foundational programme of anabelian algebraic geometry (or "Galois theory", extended version) which I propose to develop. At this time, and in an order of priority which is probably very temporary, these points are:

a) Combinatorial construction of the Teichmüller tower.

b) Description of the automorphism group of the profinite compactification of this tower, and reflection on a characterisation of $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ as a subgroup of the latter.

c) The "motive machine" $\mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$ and its variations.

d) The anabelian dictionary, and the fundamental conjecture (which is perhaps not so "out of reach" as all that!). Among the crucial points of this dictionary, I foresee the "profinite paradigm" for the fields $\mathbf{Q}$ (cf. b)), $\mathbf{R}$ and $\mathbf{C}$, for which a plausible formalism remains to be uncovered, as well as a description of the inertia subgroups of Γ, via which the passage from characteristic zero to characteristic $p > 0$ begins, and to the absolute ring $\mathbf{Z}$.

e) Fermat's problem.

5. I would like to point out, however, a more delicate task (apart from the task pointed out in passing on cubic complexes), on the combinatorial interpretation of regular maps associated to congruence subgroups of $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$. This work was developed with a view to expressing the "arithmetic" operation of $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ on these *"congruence maps"*, which is essentially done via the intermediary of the cyclotomic character of Γ. A point of departure was the combinatorial theory of the "bi-icosahedron" developed in a C4 course starting from purely geometric motivations, and which (it afterwards proved) gives rise to a very convenient expression for the action of Γ on the category of icosahedral maps (i.e. congruence maps of index 5).

6. Let us note in relation to this that the isomorphism classes of compact tame spaces are the same as in the "piecewise linear" theory (which is *not*, I recall, a tame theory). This is in some sense a rehabilitation of the "Hauptvermutung", which is "false" only because for historical reasons which it would undoubtedly be interesting to determine more precisely, the foundations of topology used to formulate it did not exclude wild phenomena. It need (I hope) not be said that the necessity of developing new foundations for "geometric" topology does not at all exclude the fact that the phenomena in question, like everything else under the sun, have their own reason for being and their own beauty. More adequate foundations would not suppress these phenomena, but would allow us to situate them in a suitable place, like "limiting cases" of phenomena of "true" topology.

7. In fact, to reconstruct the system of spaces

$$(i_0, \ldots i_n) \mapsto X_{i_0, \ldots, i_n}$$

contravariant on $\mathrm{Drap}(I)$ (for the inclusion of flags), it suffices to know the X_i (or *"unfolded strata"*) and the X_{ij} (or *"joining tubes"*) for $i, j \in I$, $i < j$, and the morphisms $X_{ij} \longrightarrow X_j$ (which are "bounding" inclusions) and $X_{ij} \longrightarrow X_i$ (which are proper fibrations, whose fibres F_{ij} are called *"joining fibres"* for the strata of index i and j). In the case of a tame multiplicity, however, we must also know the *"junction spaces"* X_{ijk} $(i < j < k)$ and their morphisms in X_{ij}, X_{jk} and above all $X_{i,k}$, included in the following hexagonal commutative diagram, where the two squares on the right are Cartesian, the arrows $\hookrightarrow$ are immersions (not necessarily embeddings here), and the other arrows are proper fibrations:

$$\begin{tikzcd}
 & X_{ij} \arrow[r, hook] \arrow[dl] & X_k & \\
X_i & & X_{ijk} \arrow[r, hook] \arrow[ul] \arrow[dl] & X_{jk} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & X_{ij} \arrow[r, hook] \arrow[ul] & X_j &
\end{tikzcd}$$

(N.B. This diagram defines X_{ijk} in terms of X_{ij} and X_{jk} over X_j, but not the arrow $X_{ijk} \longrightarrow X_{ik}$, since $X_{ik} \longrightarrow X_k$ is *not* necessarily an embedding.)

In the case of actual stratified tame spaces (which are not, strictly speaking, multiplicities) we can conveniently express the unfolding of this structure, i.e. the system of spaces $X_{i_0,\dots,i_n}$ in terms of the tame space X_* sum of the X_i, which is equipped with a *structure of an ordered object* (in the category of tame spaces) having as graph X_{**} of the order relation the sum of the X_{ij} and the X_i (the latter being on the diagonal). Among the essential properties of this ordered structure, let us only note here that $\mathrm{pr}_1 : X_{**} \longrightarrow X_*$ is a (locally trivial) proper fibration, and $\mathrm{pr}_2 : X_{**} \longrightarrow X_*$ is a "bounding" embedding. We have an analogous interpretation of the unfolding of a stratified tame multiplicity, in terms of a *category structure* (replacing a simple ordered structure) "in the sense of tame multiplicities", such that the composition map is given by the morphisms $X_{ijk} \longrightarrow X_{ik}$ above.

RAPPORT D'ACTIVITÉ
(1.10.1984 — 15.12.1984)
par Alexandre Grothendieck, attaché de recherches au CNRS

Les mois écoulés ont été consacrés avant tout à la préparation des volumes 1 et 2 des Réflexions Mathématiques, qui paraîtront sans doute courant 1985, sous les titres *"Récoltes et Semailles"* et *"Pursuing stacks"*, part 1: *"The Modelizing Story"*. Je prévois que cette préparation m'absorbera jusque vers la fin février, après quoi je compte reprendre la réflexion sur les fondements d'une "algèbre topologique" (commencé avec la première partie de "À la Poursuite des Champs"), en reprenant le fil de la réflexion de l'"Histoire de Modèles" là où je l'avais laissé. Je donne quelques précisions au sujet de ce programme de travail dans "Esquisse d'un Programme", par. 7.

Il s'agit ici de refondre, dans une discipline autonome (que je propose d'appeler *"algèbre topologique"*) qui jouerait le rôle un peu du pendant "algébrique" de la topologie générale, un certaine nombre de visions parcellaires provenant de l'algèbre (co)homologique (commutative ou non-commutative), l'algèbre homotopique, le formalisme algébrico-géométrique des topos (qui est une sorte de paraphrase dûment généralisée de la topologie générale), y compris le formalisme des champs, gerbes etc développé dans la thèse de Giraud, enfin la théorie des n-catégories et celle des n-champs de telles n-catégories (encore dans les limbes). Le besoin d'une telle discipline nouvelle, et certaines des principales idées-force que je compte développer dans le maître d'oeuvre "À la Poursuite des Champs", me sont apparus progressivement entre 1955 et la fin des années soixante, en contrepoint ininterrompu avec le développement d'une *"géométrie arithmétique"*, synthèse (entièrement imprévue encore jusqu'aux débuts des années soixante) de la géométrie algébrique, de la topologie et de l'arithmétique. Je développe réflexions rétrospectives au sujet de la naissance, l'essor et la fortune (et parfois, infortune) ultérieure de ces disciplines nouvelles, ici et là au cours de la réflexion plus vaste poursuivi dans "Récoltes et Semailles". Qu'il me suffise ici de dire que dans mes propres motivations, aujourd'hui comme il y a vingt ans, l'algèbre topologique (laissée pour compte après mon "départ" en 1970) est avant tout un des principaux *outils d'appoint* pour le développement de cette "géométrie arithmétique", dont le développement jusqu'au stade d'une pleine maturité m'apparaît comme une des principales tâches qui se posent à la mathématique de notre temps.

Un des signes principaux d'une telle maturité serait une maîtrise complète des notions et idées autour de la notion de *motif*, que j'ai introduites et développées tout au long des années soixante (tombées dans un oubli soudain dès mon "départ" en 1970 et —- à une exhumation partielle près en 1982 — jusqu'à aujourd'hui même...), ainsi qu'une maîtrise des principales notions et idées de*géométrie algébrique anabélienne* que j'ai dégagées depuis 1978. En termes imagés, on peut dire que ces deux courants d'idées, le courant "abélien" incarné par la notion de motif, et le courant "anabélien" exemplifié par la structure géométrique-arithmétique de la "tour de Teichmüller", sont à la "géométrie arithmétique" dans son enfance, ce que courants "complexes de cochaînes — catégories dérivées commutatives" sont à l'algèbre topologique (encore in utero).

La différence essentielle entre ces deux disciplines ne se situe cependant nullement dans leur état d'avancement relatif, circonstance des plus contingentes, apte à changer radicalement en l'espace de quelques années, ne serait-ce que par la vertu de l'écriture de "Pursuing Stacks". Elle se situe plutôt dans une différence de profondeur. Comme c'était le cas naguère pour le développement d'une "topologie générale" (faite sur mesure pour l'analyste, bien plus que pour le géomètre), le travail essentiel à accomplir pour la mise sur pied de l'"algèbre topologique" est, avant toute autre chose, le *développement d'un langage*, dont le manque se fait sentir (à moi tout au moins) à tous les pas. La dimension de cette tâche me semble être du même ordre que celle à laquelle se sont vus confrontés Hausdorf et d'autres, dans l'entre-deux-guerres. Elle n'a pas de commune mesure avec la tâche posée par le développement de la géométrie arithmétique, jusqu'au point d'un sentiment de "maîtrise" des principaux courants d'idées qui y confluent. On mesurera cette différence de "dimensions", en se rappelant que la "maîtrise" du "courant anabélien" impliquerait, notamment, une description "purement algébrique" du groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$, et de la famille de ses sous-groupes de décomposition et d'inertie associées aux différents nombres premiers. La structure de ces derniers (correspondants aux cas "locaux" des corps p-adiques) ont été déterminés récemment par Uwe Jannsen, Kay Wingberg et (dans le cas $p = 2$) Volkier Diekert, avec une relation principale rappelant étrangement celle qui décrit le groupe fondamental principale d'une courbe algébrique sur le corps des complexes. Mais on est loin sans doute d'une description analogue dans le cas "global".

Pour terminer ce rapport préliminaire, je me sens en mesure d'apporter quelques précisions pratiques au programme "tous azimuths" exposé dans l'Esquisse d'un Programme (qui sera jointe à "Récoltes et Semailles", ainsi que le présent rapport, l'Esquisse Thématique et quelques autres textes de nature mathématique, pour constituer le volume 1 des Réflexions Mathématiques). Je tiens d'abord, avant toute autre chose, à m'acquitter (comme je le dis dans l'Esquisse d'un Programme, par. 7) "d'une dette vis-à-vis de mon passé scientifique", en esquissant tout au moins dans les grandes lignes des principales visions d'ensemble auxquelles j'étais parvenu entre 1955 et 1970 et qui, sans avoir trouvé alors la forme d'exposés systématiques et publiés, ont été laissés pour compte par mes ex-élèves après mon "départ" en 1970. Il s'agit d'une part de l'ensemble d'intuitions et d'idées en direction de l'"algèbre topologique", à laquelle j'ai fait allusion tantôt, et d'autre part d'un "vaste tableau des motifs" qu'il s'agit de "brosser à grands traits", apte à servir à la fois de maître d'oeuvre pour l'édification d'une théorie qui reste conjecturale, t de fil conducteur très sûr et de fécond instrument de découverte, pour pouvoir prédire "à quoi on est en droit de s'attendre" dans une foule de situations impliquant les propriétés géométrico-arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. (Une version très parcellaire de certaines de mes idées à de sujet est présentée, sans que mon nom y soit prononcé, dans le volume "Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties" des Lecture Notes (n° 900), 1982, par Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, Kuang-yen Shih.) Je compte poursuivi cette partie de mon programme, au cours des deux ou trois années qui suivent, dans les deux ou trois volumes des Réflexions Mathématiques faisant suite aux deux volumes dont je suis en train de terminer la préparation. Ceci fait, je prévois de me consacrer prioritairement au programme de géométrie algébrique anabélienne — d'une part, tracer à grands traits les principales idées, conjectures et résultats déjà obtenus, et d'autre part, entreprendre une étude géométrie-arithmétique minutieuse de la "tour de Teichmüller", et plus particulièrement, de ses deux premiers étages.

Le 10.12.1984

Alexandre Grothendieck

LE BI-ICOSAÈDRE

Extrait de "Récoltes et Semailles"

[…] Il me faut d'abord donner quelques explications préliminaires purement géométriques, sur la combinatoire de l'icosaèdre gauche et sur la notion de bi-icosaèdre gauche. Comme il semblerait que je sois le seul qui ait jamais pris la peine (et le plaisir) de regarder l'icosaèdre (ordinaire ou "gauche", au choix) du point de vue combinatoire, et qu'il n'y a donc aucune référence dans la littérature sur ces choses (qui devraient être "bien connues" depuis plus de deux mille ans), je me fais un plaisir de développer ici "en forme" le peu dont nous aurons besoin, pour nous y reconnaître[63].

Dans la suite, on se donne un ensemble S à six éléments (S, comme "sommets"). Les éléments de S s'appelleront *"sommets"*, et les parties à deux éléments de S (ou

[63]Mes réflexions sur l'icosaèdre, avec un fort accent sur l'aspect combinatoire, datent de 1977, où j'ai fait un cours de DEA d'une année sur ce thème magnifique. Cela a été en même temps ma première grosse frustration dans mon expérience enseignante. Malgré le niveau délibérément très élémentaire et très "visuel" où j'ai placé le cours, avec l'espoir de voir s'y impliquer les auditeurs (étudiants de troisième cycle ou enseignants à mon Université), je n'ai pas réussi à vraiment déclencher une étincelle de vrai intérêt et de participation en aucun. La seule exception a été la mise au point, par un ou deux parmi les auditeurs, de tracés de la projection stéréographique sur le plan de l'icosaèdre (vu comme inscrit sur la sphère unité, avec les arêtes figurées par des arcs de grand cercle), en faisant apparaître en même temps le dodécaèdre dual. Il es vrai que ces tracés stéréographiques (en prenant comme centre de projection soit un sommet, soit le milieu d'une arête, soit le centre d'un face) sont de toute beauté, surtout quand on tient compte du coloriage canonique des arêtes (voire, des faces également) en cinq couleurs…

"paires") dans S s'appelleront *"arêtes"*. Enfin, pour abréger, on appellera *"triangles"* (de S) les parties de S à trois éléments. Si on désigne par $A(S)$ ou A, et par $T(S)$ ou T l'ensemble des arêtes et l'ensemble des triangles de S, on vérifie aussitôt que l'on a

$$(S) = 6, \quad A = 15, \quad T = 20$$

(où la première relation est mise pour mémoire). (NB si E est un ensemble fini, (E) désigne le nombre de ses éléments.)

Définition **1**. — *Une partie F de l'ensemble T des triangles de S est appelée une* structure icosaédrale *(sous-entendu : gauche) sur S, si toute arête de S est contenue dans exactement deux triangles appartenant à F.*

En d'autres termes, si on appelle *"faces"* les triangles éléments de F, la condition envisagée dit que *chaque arête est contenue dans exactement deux faces*. Un ensemble S à six éléments muni d'une structure icosaédrale F est appelé un *icosaèdre combinatoire* (sous entendu : "gauche", pour ne pas confondre avec l'icosaèdre "ordinaire", qui a douze sommets au lieu de six), ou simplement un icosaèdre (gauche). Si $I = (S, F)$ et $I' = (S', F')$ sont deux tels icosaèdres, on appelle *isomorphisme* de l'un avec l'autre toute bijection

$$u : S \xrightarrow{\sim} S'$$

telle que $u(F) = F'$, i.e. telle que les faces de I' soient exactement les images par u des faces de I.

On peut "regarder" un icosaèdre en "centrant" son attention soit sur un sommet, soit sur une arête, soit sur une face, de façon à obtenir trois types de "perspectives" différentes, pour l'étudier. Ce sera la perspective centrée sur une face, qui sera la plus commode pour notre propos actuel. Voici l'énoncé récapitulatif, contenant tout ce qui nous sera nécessaire (et au delà) :

Théorème **1**. —

a) Deux icosaèdres (combinatoires gauches) sont toujours isomorphes, et plus précisément, il y a exactement 60 *isomorphismes de l'un avec l'autre.*

b) Un icosaèdre a exactement dix faces. Si f est une face d'un icosaèdre $I = (S, F)$, f'' une face d'un icosaèdre $I' = (S', F')$, alors pour toute bijection u_0 de f avec

f', il existe un isomorphisme et un seul u de I avec I', tel que u transforme f en f'' et induise entre f et f' la bijection u_0.

c) *Soit $I = (S,F)$ un icosaèdre, et F' le complémentaire de F dans T, i.e. l'ensemble des triangles de S qui ne sont* pas *des faces. Alors pour toute face $f \in F$ de I, son complémentaire f' dans S (i.e. l'ensemble des sommets qui n'appartiennent* pas *à la face f) est dans F' (i.e. est un triangle qui n'est* pas *une face de I). L'application*

$$f \mapsto f' : F \longrightarrow F'$$

est une bijection de F avec F'. Enfin, F' est également une structure icosaèdrale sur S (appelée structure icosaèdrale complémentaire *de la structure F).*

d) *Soient S un ensemble de sommets à six éléments,*

$$\mathrm{Ic}(S) \subset P(T(S)) \quad (= \textit{ens. des parties de } T(S))$$

l'ensemble des structures icosaèdrales sur S. Alors $\mathrm{Ic}(S)$ a douze éléments, et l'application

$$F \mapsto F', \quad \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \mathrm{Ic}(S)$$

et une involution sans points fixes de cet ensemble (i.e. on a, pour tout F dans $\mathrm{Ic}(S)$, $(F')' = F$ et $F' \neq F$.)

e) *Soient F une structure icosaèdrale sur S, F' la structure complémentaire, $f \in F$ une face de F, $f' \in F'$ la face de F' complémentaire de f. Pour tout sommet $s \in f$, soit s' le "troisième sommet" de l'unique face $f(s)$ de F, distincte de f, contenant l'arête $a_s = f - \{s\}$. On a alors $s' \in f'$, et l'application*

$$s \mapsto s' : f \longrightarrow f'$$

est une bijection de f avec f', notée

$$u_f : f \xrightarrow{\sim} f'.$$

On définit de même (en interchangeant les rôles de F et de F') une bijection

$$u_{f'} : f' \xrightarrow{\sim} f.$$

Ses bijections sont inverses l'une de l'autre :

$$u_{f'}u_f = \mathrm{id}_f, \quad u_f u_{f'} = \mathrm{id}_{f'}.$$

f) Soit S un ensemble à six éléments, f un triangle de S, f' le triangle complémentaire, P_f l'ensemble des bijections de f avec f' (c'est un ensemble à six éléments), et $\varepsilon_f = \{f, f'\}$ la partie à deux éléments de $T(S)$ (ensemble des triangles), formée de f et de f'. Pour toute structure icosaèdrale F sur S, soit

$$c(F) = (\alpha(F), u(F)) \in \varepsilon_f \times P_f$$

défini ainsi : $\alpha(F)$ est égal à f ou à f', suivant que $f \in F$ ou $f' \in F$ (i.e. $\alpha(F)$ est l'unique élément de ε_f tel que $\alpha(F) \in (F)$, et $u(F)$ est égal à u_f (notations de d))). On a donc défini une application

$$c : \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cette application est bijective. *En d'autres termes, "il revient au même" de se donner une structure icosaèdrale F sur S, ou de se donner un couple d'éléments (φ, u), où φ est l'un des deux éléments f, f' (celui qui doit être face de F), et où u est une bijection $f \xrightarrow{\sim} f'$.*

Démonstration du théorème. La partie a) est conséquence de b), compte tenu qu'il y a exactement 6 bijections de f avec f' et 10 faces de I', et que $60 = 10\ 6$. D'autres part, dans d) le fait que $F \mapsto F'$ soit une involution sans points fixes, est évident sur la définition donnée dans c). Quant au fait que $\mathrm{Ic}(S)$ a douze éléments, cela résulte aussitôt de a) par un argument de "comptage" standard (vu que le groupe de toutes les bijections de S avec lui même a $6! = 654321 = 720$ éléments, et que le sous-groupe stabilisateur de F en a soixante, d'où le nombre

$$12 = 720/60 \quad .)$$

Une autre façon de retrouver 12 (via la "perspective autour d'une face" expliquée dans f)) est par[64]

$$12 = 2 \times 6.$$

[64]Il s'agit ici de la description, utilisant la "perspective" centrée sur une face. Il y a deux autres

Il y a donc à prouver seulement les parties b), c), e), f). Dans b), c), f) on part d'une structure icosaédrale donnée (S,F). Comme chaque arête est contenue dans deux faces, il existe au moins une face, soit f. Sot f' son complémentaire dans S, et considérons l'application

$$u_f : f \longrightarrow f', \quad a \mapsto a'$$

définie dans e). Montrons qu'elle est injective, donc bijective (puisque f et f' ont même nombre d'éléments, savoir trois). Si on avait deux sommets distincts $a \neq b$ dans f, tels que $a' = b'$, alors posant

$$c = a' = b'$$

et désignant par s le troisième sommet de f, on aurait une configuration

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, dash] & & b \arrow[dl, dash] \\ & s \arrow[d, dash] & \\ & c & \end{tikzcd},$$

avec trois faces $\{s,b,c\}$, $\{s,c,a\}$, $\{s,a,b\}$ se rajustant cycliquement autour de s, le long d'arêtes communes $\{s,a\}$, $\{s,b\}$, $\{s,c\}$. Je dis que ce n'est pas possible.

---

descriptions toutes aussi instructives de l'ensemble $\mathrm{Ic}(S)$, obtenues par la perspective centrée soit sur une arête, soit sur un sommet. Enfin, je signale aussi la bijection canonique suivante

$$\mathrm{Ic}(S)\,\mathrm{Bic}(S) \times \omega(S),$$

où $\mathrm{Bic}(S)$ désigne l'ensemble des structures biicosaédrales sur S, et $\omega(S)$ l'ensemble à deux éléments formé des "orientations" de S (i.e. l'ensemble quotient de l'ensemble des "repères" de S i.e. des numérations de ses éléments de 1 à 6, par l'action du sous-groupe alterné du groupe symétrique G_6). L'application est obtenue en associant à toute structure icosaédrale F, d'une part la structure biicosaédrale associée $\{F,F'\}$, et d'autre part une certaine orientation $\mathrm{or}(F)$ de S canoniquement associée à F, que je me dispense de décrire ici. Il se trouve que l'on a

$$\mathrm{or}(F) \neq \mathrm{or}(F'),$$

de sorte que les deux structures icosaédrales correspondant à une même structure biicosaédrale $\{F,F'\}$ sont "repérées" par les deux orientations possibles de S.

Soient en effet u et v les deux points de S distincts des points précédents s, a, b, c, considérons l'arête $\{s, u\}$, et soit h une face qui la contienne. Alors le troisième sommet de h (distinct de s et u par définition) ne peut pas être égale à un des trois points a, b, c, disons a, car l'arête $\{s, a\}$ serait contenue dans trois faces de l'icosaèdre. Donc le troisième sommet est v, et l'arête $\{s, u\}$ ne serait contenue que dans le seul triangle $\{s, u, v\}$, absurde.

Nous avons maintenant qui si a, b, c sont les trois sommets de la face f, alors les sommets a', b', c' dans f' sont distincts, donc les six sommets de l'icosaèdre sont a, b, c, a', b', c'. Nous pouvons maintenant écrire la liste de l'ensemble de toutes les faces de l'icosaèdre, via la "perspective par rapport à f". Pour bien visualiser cette liste, il est pratique de faire un dessin, où les sommets sont figurés par des points du plan, les arêtes par des segments joignant ces points, et les faces par des aires triangulaires délimitées par les trois arêtes contenues dan la face. De plus, pour une bonne visibilité du graphisme, on va faire figurer chacun des points a', b', c' (mais non a, b, c) en *deux* exemplaires, dont le deuxième sera désigné (en tant que point du plan) par a'', b'', c'' respectivement. Ainsi, a' et a'' sont des points différents du plan, mais qui désignent le même élément de l'ensemble "abstrait" S.

On trouve la figure suivante, qui peut aussi être interprétée comme une vue "en perspective" de l'icosaèdre régulier ordinaire dans l'espace, vue "centrée" sur une face (nommée $\{a, b, c\}$)

Sur cette figure apparaissent dix figures (triangulaires), parmi lesquelles les quatre faces de départ

$$(1) \qquad f = \{a, b, c\}, \quad f_a = \{b, c, a'\}, \quad f_b = \{c, a, b'\}, \quad f_c = \{a, b, c'\}$$

plus les six faces "externes", se raccordant par paires le long des trois arêtes $\{a, a''\} = \{a, a'\}$, $\{b, b''\} = \{b, b'\}$, $\{c, c''\} = \{c, c'\}$. Donc, en toutes lettres

$$(2) \qquad f_{a,b} = \{a, a'', b'\} = \{a, a', b'\},$$

et les cinq triangles similaires $f_{a,c}$, $f_{b,c}$, $f_{b,a}$, $f_{c,a}$, $f_{c,b}$. Pour montrer que $f_{a,b}$ (par exemple) est bien une face, on note que l'arête $\{a, a''\} = \{a, a'\}$ doit appartenir à deux faces, dont le troisième sommet ne peut être ni b ni c (car chacune des arêtes a, b et a, c sont déjà contenues dans deux parmi les quatre faces (1)), donc il ne reste comme possibilité que b' et c', d'où les faces $f_{a,b}$ et $f_{a,c}$.

Je dis que l'ensemble de ces dix faces épuise l'ensemble F de toutes les faces. Pour ceci, comptons le nombre d'arêtes figurant dans notre graphisme représentatif. Trois pour f, deux supplémentaires pour chacun des trois triangles f_a, f_b, f_c (ça fait neuf), trois arêtes de la forme $\{a, a''\} = \{a, a'\}$ (fait douze), et six qui forment le contour de la figure (arêtes de la forme $\{a', b''\}$ etc), ça fait dix-huit, alors qu'il n'y en a que quinze arêtes en tout ! Mais on note que les arêtes telles que $\{a', b''\}$ et $\{a'', b'\} = \{b', a''\}$, symétriques par rapport au centre de la figure, représentant une seule et même arête de S (savoir $\{a', b'\}$ en l'occurrence), ce qui fait que le compte est bon : toutes les arêtes de S figurent sur notre tracé, et une seule fois sauf celles de triangle $\{a', b', c'\}$, lesquelles y figurent deux fois.

Ceci dit, un rapide coup d'oeil sur la figure nous convainc que chacune des arêtes qui y figurent, appartient bien à exactement deux parmi les dix faces précédentes et une seule. Si donc il existait une face h qui ne faisant pas partie de ce paquet de dix, alors une arête contenue dans h appartiendrait à au moins trois faces, absurde.

Ainsi, on est arrivé expliciter le "tracé" d'un icosaèdre quelconque, à partir d'une de ses faces, comme une "figure standard". La partie b) du théorème 1 est une conséquence immédiat de cette détermination.

Ainsi, b) donc aussi a) sont prouvés, prouvons c). Le fait que pour une face f (que nous pouvons prendre comme notre face centrale), le triangle complémentaire ne soit pas une face, est immédiat sur notre tracé, puisque $f' = (a', b', c')$ ne figure pas parmi nos dix faces. Comme l'ensemble T des triangles à 20 éléments et que F en a dix, F' en a dix, et comme l'application $f \mapsto f'$ de F dans F' est évidement injective, elle est bijective. En d'autres termes, pour qu'un triangle f de S soit une face, il faut *et il suffit* que le triangle complémentaire ne le soit pas.

Pour terminer de prouver c), il reste à prouver que F' est une structure icosaédrale, donc que pour toute arête L de S, il y a exactement deux triangles éléments de F' qui la contiennent. Passant aux complémentaires dans S, cela revient à dire que toute partie "carrée" de S (i.e. une partie ayant quatre éléments), contient exactement deux faces (pour la structure icosaédrale F). Or les faces non contenues dans cette partie $S - L$ sont exactement celles qui rencontrent son complémentaire $L = \{a, b\}$, i.e. celles qui contiennent soit a, soit b. Or l'ensemble F_a des faces contenant le sommet a a exactement cinq éléments (voir le tracé, où on peut bien sûr supposer que a est bien un sommet de la face de départ f utilisée pour faire le tracé), et de même pour F_b, d'autre part l'intersection $F_a \cap F_b$ est formée des faces qui contiennent l'arête $\{a, b\}$, donc a exactement deux éléments. Il s'ensuit que $F_a \cup F_b$ a $5+5-2=8$ éléments. Comme F en a dix, il reste bien deux éléments de F pour être contenus dans $S-L$.

Il reste à prouver e) et f). Dans e), il ne reste plus qu'à prouver la relation

$$u_{f'} u_f = \mathrm{id}_f,$$

et la relation symétrique (qui s'en déduira en échangeant les rôles de F et de F'). Utilisant encore f pour faire le tracé plus haut, cette relation se lit sur la figure : l'appliquant à a par exemple (ce sera pareil pour b et c) cette relation $(a')' = a$ équivaut simplement à dire que le triangle $\{b', c', a\}$ est une face pour F', c'est à dire, n'est *pas* une face pour la structure de départ, ce qui est bien le cas.

Reste à prouver f), i.e. la bijectivité de l'application

$$c : F \mapsto (\alpha(F), u(F)) : \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cela signifie que pour tout couple (φ, u), où φ est un des triangles f, f' et où u est une bijection $u : f \xrightarrow{\sim} f'$, il existe une unique structure icosaédrale F dont il provienne. Si $\varphi = f$, cela revient à dire qu'il existe une unique structure icosaédrale admettant f comme face, et donnant lieu à la bijection u - et c'est bien ce que nous avons vu dans la construction explicite de tantôt. Si $\varphi = f''$, cela signifie qu'il existe une unique structure F tel que $f' \in F$, et que $u_f = u$. Désignant par F' la structure icosaédrale complémentaire, cela signifie aussi qu'il existe une unique structure icosaédrale F' telle que $f \in F'$ et $u_f = u$, ce qui (au changement de notation près) est ce qu'on vient de voir.

Cela achève la démonstration du théorème 1.

Définition **2**. — *Soit S un ensemble à six éléments. On appelle* structure biicosaédrale *(combinatoire gauche) sur S, une paire formée de deux structures icosaédrales complémentaires l'une de l'autre.*

En vertu de la partie d) du théorème, il y a donc sur S exactement $12/2 = 6$ structures biicosaédrales. D'après la partie f), si f est un triangle de S et f' le triangle complémentaire, l'ensemble S^* de ces six structures icosaédrales est en correspondance biunivoque canonique avec $P_f =$ ensemble des bijections de f avec f'. De façon plus précise, si on identifie l'ensemble $\mathrm{Ic}(S)$ des structures icosaédrales sur S avec l'ensemble produit $\varepsilon_f \times P_f$ comme dans f), alors l'opération $F \mapsto F'$ de passage à la structure icosaédrale complémentaire s'interprète comme l'opération

$$(\varphi, u) \mapsto (\varphi', u),$$

où pour tout φ dans l'ensemble à deux éléments $\varepsilon_f = \{f, f''\}$, φ' désigne l'autre élément de ε_f.

On appelle *biicosaèdre combinatoire gauche*" (ou simplement *biicosaèdre*) un couple $(S, \{F, F'\})$ formé d'un ensemble S à six éléments, et 'une structure biicosaédrale $\{F, F'\}$ sur S, formée de deux structures icosaédrales F, F' complémentaires l'une de l'autre.

On définit les *isomorphismes* de tels objets de la façon habituelle. On notera que deux biicosaèdres sont isomorphes, et l'ensemble des isomorphismes de l'un sur l'autre a exactement 120 éléments. Par exemple, si on regarde les automorphismes d'un biicosaèdre $(S, \{F, F'\})$, ceux-ci forment un "groupe" (au sens technique mathématique du terme : stabilité par composition et par passage à l'inverse), lequel se décompose en deux sous-ensembles disjoints, ayant chacun 60 éléments (faisant donc bine un total de 120) : le premier est formé des bijection de S avec lui-même (ou "permutations" de S) qui transforment F en lui-même, ou ce qui revient au même, F' en lui-même - en d'autres termes, ce sont les automorphismes de l'icosaèdre (S, F) (ou (S, F')). Le deuxième est formé des permutations qui transforment F en F', ou ce qui revient au même, F' en F, c'est à dire encore les isomorphismes de l'icosaèdre (S, F) avec (S, F'). Par la partie a du théorème 1, il y en a bien 60 également.

Là je me suis laissé entraîner à en dire nettement plus que ce qu'il faut pour mon propos "philosophique"[65]. La chose essentielle, c'est de bien voir la structure de l'icosaèdre (gauche), mise en évidence sur le tracé de la page PU 119, la

[65](14 avril) Par contre, c'est peu pour mon ardeur de mathématicien, laquelle s'est à nouveau réveillée ces jours derniers - et voilà repartie ma réflexion sur l'icosaèdre, cet amour mathématique de mon âge mûr ! Je vais donc peut-être rajouter à ces notes (en appendice ?) quelques compléments sur la combinatoire de l'icosaèdre et sur la géométrie des ensembles à six éléments…

notion d'icosaèdre complémentaire (donnant lieu à la notion de biicosaèdre), et enfin la description de structures icosaédrales ou biicosaédrales sur S, en termes de l'ensemble P_f des six bijection d'une triangle préalablement donné f de S, avec son complémentaire f'. Enfin, du point de vue de l'intuition géométrique spatiale de la structure combinatoire, il est fort utile, pour s'y reconnaître, d'avoir chez soi un modèle en carton de l'icosaèdre régulier ordinaire[66], lequel a douze sommets, trente arêtes et vingt faces, et de "visualiser" un icosaèdre combinatoire gauche, comme décrit (de façon essentiellement canonique, en un sens qu'il serait facile à expliciter[67]), en termes d'un icosaèdre "ordinaire" ou "pythagoricien" (vu comme un solide dans l'espace), en prenant comme sommets, arêtes et faces de l'icosaèdre gauche, les *paires* de sommets, arêtes ou faces diamétralement opposées du solide pythagoricien. C'est bien dans cet esprit qu'a été fait le tracé de la page PU 119, où les paires $\{a',a''\}$, $\{b',b''\}$ et $\{c',c''\}$ désignent justement des paires de sommets opposés de l'icosaèdre-solide, et de même pour les paires d'arêtes ($\{a',b''\}$, $\{a'',b'\}$) etc, qu'il nous avait fallu justement identifier à une seule arête.

[66]J'en ai un chez moi, et de toute beauté, qui représente la "copie" d'un élément de première année de Fac, pour un examen de fin d'année d'un "cours d'option" (en collaboration avec Christine Voisin) sur l'icosaèdre (en 1976, je crois). Contrairement à mon cours de DEA l'année suivante sur le même thème, ce cours adressé à des étudiants frais émoulus du lycée avait rencontré une participation chaleureuse. Les résultats à l'examen étaient si brillants que mes collègues professeurs ont cru à un canular que j'aurais monté pour discréditer le fonction enseignante, et ils ont diminué d'office toutes les notes d'un tiers (les 18 sur 20 devenant 12 sur 20). C'est à cette occasion que j'ai appris avec stupéfaction que la plupart de mes collègues considéraient comme choquante l'idée qu'un étudiant puisse prendre du plaisir à étudier et à préparer un examen. Eux-mêmes s'étaient bien assez emmerdés pour faire les études et arriver à leur belle situation de prof. de Fac, il n'y avait vraiment aucune raison que les autres à présent ne s'emmerdent à leur tour…

[67]Si on a deux telles "réalisations" par des icosaèdres-solides (ou "pythagoriciens"), alors il existe une *unique* similitude directe de l'un avec l'autre, compatible avec ces réalisations i.e. avec les "marquages" des paires de sommets opposés par les points de S. Si les deux icosaèdres ont même "taille" i.e. même longueurs d'arêtes, alors la similitude en question sera même un "déplacement".

VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES

I. Vers une géométrie des formes (topologiques)

[Apprendre] vers une construction récouvrante (sur l'action naturelles) d'une "géométrie des formes de dimension $\leq n$".

Une "forme de dim 0" soit pour définition [] dont les éléments sont appelés les "lieux" de la forme.

Modèle de dimension 1. — Une tel modèle

[]

1) Deux ensembles de [] L_α (ensemble des *lieux* de modèles) et S (ensemble des *segments* des modèle)

2) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}(L)$, $I \longrightarrow \widetilde{I}$ (lieux sur un segment) - i.e. une relation entre S et L.

3) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}_2(L)$ []

N.B. J'ignore s'il faut supposer que I est connu, quand on connaît

Modèle d'une forme 1-dimensionnelle

L ensemble de "lieux"
S ensemble de "segments"

II. Réalisations topologiques des réseaux

1. — [] topologique

Soit X un espace topologique, $A \subset X$ partie fermée non vide de X. $X_{/A}$ l'espace déduit de X en [] A en un point, a le point déduit de A par []. Si X' est une partie de X contenant A, alors $X'_{/A} \hookrightarrow X_{/A}$ identifié $X'_{/A}$ à un sous-espace topologique de X.

Les fermées de $X'_{/A}$ s'identifient aux fermées de X' qui on bien contient A

III. Réseaux via découpages

Je voudrais définir une [] axiomatique a structure [] réseaux sur un [] L ([] de "lieux").

[]

Exemple 2 Soit L un ensemble ordonnée, on suppose L filtrant croissante, filtrant décroissant, sans plus grand [] plus petit élément, localement filtrant croissante et filtrant décroissante divisible.

On appellera un tel ensemble une *[] ordonnée*.

IV. Analysis situs (première mouture)

V. Algèbre des figures

VI. Analysis situs (deuxième mouture)

Avant de décrire ce qu'est une [], je vais décrire ce qui sera [] avec notion de multistrates" - la famille des multistrates choisies jouant un peu le rôle des une famille d'ouverts [] donc une topologie, ou une famille génératrice d'éléments d'un topos. Je vais donc commencer pas

I. "Algèbre des figures" ou "Ateliers".

1. — Une *algèbre des figures* implique avant tout trois types d'objets, les *lieux*, les *multistrates*, les *figures*, formant trois ensembles

$$L, M, F \tag{1.1}$$

liées entre eux par diverses applications, et [] muni de diverses structures. Ainsi, on a des applications canoniques invectives

$$L \overset{b)}{\hookrightarrow} M \overset{a)}{\hookrightarrow} F \tag{1.2}$$

que nous utiliserons souvent pour identifier un lieu à une multistrate particulière, et une multistrate à une figure particulière ou L à une sous-ensemble de M, M à un sous-ensemble de F.

Il y a d'autre part deux entre paires d'applications, que voici :

(1.3) []

où Fig(M) désigne la partie de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ formée des figures ensemblistes dans M. On peut considérer que le première application correspond à une relation entre M et F, appelée relation d'incidence. Pour une figure F, $\widehat{T}$ s'appelle l'ensemble des *multistrates incidentes*, ou le *déployement* de la figure F. Si $X \in M$, $F \in \widetilde{F}$, on dire que le multistrate X est *incidente* à la figure F ou encore que c'est une *strate de la figure* F, si $X \in \widetilde{F}$. D'autre part, tout élément X de M (i.e. toute multistrate), [] comme une figure par (1.2), admet un déployement $\widetilde{X}$, et on pose

(1.4) []

et il résultera des axiomes que c'est une figure ensembliste des M, [] fidèlement par l'un $\widetilde{F}$ des strates de F.

En fait, M sera muni d'une relation d'ordre $\leq$, [] plus bas, et $\widetilde{F} \subset M$ sera une partie fermée de M, et pour tout $X \in \widetilde{F}$, on aura

$$\widetilde{X} = \{Y \in M \mid Y \leq X\} \tag{1.5}$$

À cause de cette interpolation, la passage de $\widetilde{F} \subset M$ à $\mathrm{Fig}_M(F)$ est à tout [], que cette figure ensembliste des M un semble revenant important - mais à voir…

VII. Analysis situs (troisième mouture)

VIII. Analysis situs (quatrième mouture)