

FACULTE DES SCIENCES D'ALGER  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

SEMINAIRES 1965 – 1966

# Introduction au Langage Fonctoriel

Rédigé d'après un cours de Monsieur A. Grothendieck.

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

<https://agrothendieck.github.io/>

## TABLE DE MATIÈRES

0. Cadre logique . . . . .	5
I. Généralités sur les catégories . . . . .	8
1. Type de diagramme . . . . .	8
2. Catégorie . . . . .	9
3. Exemples de catégories . . . . .	12
4. Produit de catégories, somme de catégories . . . . .	16
5. Équivalence de catégories . . . . .	17
6. Exemples de catégories . . . . .	17
7. Catégorie filtrante . . . . .	18
II. Catégorie abélienne . . . . .	19
1. Catégorie additive . . . . .	19
2. Catégorie additive . . . . .	19
3. Catégorie additive . . . . .	20
4. Diagrammes dans une catégorie abélienne . . . . .	20
5. Diagrammes dans une catégorie abélienne . . . . .	20
III. Foncteurs représentables . . . . .	21
1. Généralités . . . . .	21
2. Application . . . . .	23
3. Structures algébriques dans les catégories . . . . .	23

Ce fascicule contient une rédaction succincte d'une série d'exposés que Monsieur A. Grothendieck a bien voulu venir faire à Alger au cours du mois de Novembre 1965. Il a pour but de familiariser un débutant avec les éléments du langage fonctoriel, langage qui sera utilisé par la suite dans les divers séminaires : Algèbre Homologique dans les catégories abéliennes, Fondement de la  $K$ -théorie...

Les propositions non démontrées sont de deux types : des sorites dont la démonstration tiendra lieu d'exercices, des propositions moins évidentes (signalés par une astérisque) dont on trouvera les démonstrations dans les ouvrages de références.

## § 0. — CADRE LOGIQUE

---

Lorsque l'on définit une catégorie, il y a des inconvénients à supposer que les forment une classe, au sens de la théorie des ensembles de Gödel-Bernays. En effet, si l'on sait définir les applications d'une classe dans une autre, ces applications ne forment cependant pas elles-mêmes une classe. En particulier on ne saurait parler de la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre. Aussi se placera-on dans le cadre de la théorie des ensembles de Bourbaki pour définir les *Univers*.

### **Univers :**

On appelle *univers* un ensemble  $\mathfrak{U}$  vérifiant les axiomes suivants :

$U_1$  Si  $Y$  appartient à  $X$  et si  $X$  appartient à  $\mathfrak{U}$ , alors  $Y$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .

$U_2$  Si  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $\mathfrak{U}$  alors  $\{X, Y\}$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .

$U_3$  Si  $X$  est un ensemble appartenant à  $\mathfrak{U}$ , l'ensemble  $\mathfrak{P}(X)$  des parties de  $X$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .

$U_4$  Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensembles appartenant à  $\mathfrak{U}$ , et si  $I$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ , alors  $\bigcup_{i \in I} X_i$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .

On déduit de ces axiomes les propositions suivantes :

(1) Si  $X$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ ,  $\{X\}$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .

- (2)  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $\mathfrak{U}$  si et seulement si le couple<sup>1</sup>  $(X, Y)$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .
- (3) L'ensemble vide est un élément de  $\mathfrak{U}$  (puisque c'est un élément de  $\mathfrak{P}(X)$  pour tout ensemble  $X$  de l'univers  $\mathfrak{U}$ ).
- (4) Si  $Y$  est contenu dans  $X$  et si  $X$  appartient à  $\mathfrak{U}$  alors  $Y$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .
- (5) Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensembles de  $\mathfrak{U}$  et si  $I$  appartient à  $\mathfrak{U}$ , alors  $\prod_{i \in I} X_i$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .
- (6) Si  $X$  est un ensemble appartenant à  $\mathfrak{U}$ ,  $\text{Card}(X) < \text{Card}(\mathfrak{U})$ .
- (7) L'univers  $\mathfrak{U}$  n'est pas un élément de  $\mathfrak{U}$ . En effet si  $\mathfrak{U}$  appartient à  $\mathfrak{U}$ , alors  $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$  appartient à  $\mathfrak{U}$ . Soit  $E$  appartenant à  $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$  (donc  $E$  appartient à  $\mathfrak{U}$ ) défini ainsi :
- $$E = \{X \in \mathfrak{U} \mid X \notin X\}$$
- On aurait alors :  $E$  appartient à  $E$  si et seulement si  $E$  n'appartient pas à  $E$  !
- (8) L'intersection d'une famille quelconque d'univers est un univers. En particulier si  $E$  est un ensemble et s'il existe un univers contenant  $E$ , alors il existe un plus petit univers contenant  $E$  qu'on appelle l'univers engendré par  $E$ .

Si  $E_0$  est un ensemble quelconque, on se propose de chercher s'il existe un plus petit univers  $\mathfrak{U}$  contenant  $E_0$ . Il apparaît naturel de plonger  $E_0$  dans un ensemble  $E_1$  par le procédé suivant :

Soit  $G_0$  l'ensemble ainsi défini :  $X \in G_0 \iff (\exists Y)(Y \in E_0 \text{ et } X \in Y)$  et  $F_1 = E_0 \cup G_0$

Soit  $G_1 : X \in G_1 \iff (\exists Y)(\exists Z)(Y \in F_1, Z \in F_1 \text{ et } X = \{Y, Z\})$  et  $F_2 = F_1 \cup G_1$

Soit  $G_2 : X \in G_2 \iff (\exists Y)(Y \in F_2 \text{ et } X = \mathfrak{P}(Y))$  et  $F_3 = F_2 \cup G_2$

---

<sup>1</sup>On rappelle que le couple  $(X, Y)$  est l'ensemble  $\{X, \{X, Y\}\}$

Soit  $G_3 : X \in G \iff (\exists I)(\exists (X_i)_{i \in I})(I \in F_3, \forall i \in I, X_i \in F_3 \text{ et } X = \bigcup_{i \in I} X_i)$  et  $F_4 = F_3 \cup G_3$ .

On pose alors  $E_1 = F_4 \cup \{E_0\}$

En itérant cette opération on forme une suite transfinie d'ensembles :

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_\alpha \subset E_{\alpha+1} \subset \dots$$

Pour qu'il existe un plus petit univers contenant  $E_0$ , il faut et il suffit que cette suite devienne stationnaire 'partir d'un certain rang (c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha$  tel que  $E_{\alpha+1} = E_\alpha$ )  $E_\alpha$  sera précisément l'univers  $\mathfrak{U}$  recherché.

En particulier si l'on prend  $E_0 = \emptyset$ , on montre que  $\mathfrak{U} = E_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ .  
Lorsqu'on part d'un ensemble  $E_0$  infini, on ne peut prouver l'existence d'un univers  $\mathfrak{U}$  contenant  $E_0$ . Il convient donc d'ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome suivant :

**(a<sub>1</sub>) Axiome des univers :**

Pour tout ensemble  $X$ , il existe un univers  $\mathfrak{U}$ , tel que  $X$  soit élément de  $\mathfrak{U}$ .

De plus comme on ne souhaite pas sortir d'un univers  $\mathfrak{U}$  par l'usage du symbole  $\tau$  de Hilbert on introduit l'axiome supplémentaire :

**(a<sub>2</sub>)** Si  $R$  est une relation,  $x$  une lettre figurant dans  $R$ , et s'il existe un élément  $X$  d'un univers  $\mathfrak{U}$  tel que  $(X|x)R$  soit vrai alors l'objet  $\tau_x(R(x))$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .

## § I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES CATÉGORIES

---

### 1. Type de diagramme

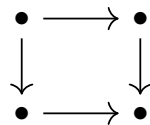
#### 1.1 Définition

Un *type de diagramme*  $D$  est la donnée d'un quadruple  $D = (\text{Fl}, \text{Ob}, s, b)$  où :  
Fl et Ob sont des ensembles respectivement appelés ensemble des *flèches* (ou des morphismes...), ensemble des *objets* (ou des sommets)  
 $s$  et  $b$  sont des applications de Fl dans Ob respectivement appelés *source*, *but*.

Un type de diagrammes sera souvent noté :  $[\ ]$

*Exemples* : On peut représenter certains types de diagramme :

- 1 seul objet;    • • •    (pas des flèches)



#### 1.2 Morphisme d'un type de diagrammes dans une autre :

Si  $D = (\text{Fl}_D, \text{Ob}_D, s_D, b_D)$  et  $D' = (\text{Fl}_{D'}, \text{Ob}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$  sont deux types de diagramme, un *morphisme*  $F$  de  $D$  dans  $D'$  est un couple d'applications  $F = (F_0, F_1) : F_0 : \text{Ob}_D \longrightarrow \text{Ob}_{D'}, F_1 : \text{Fl}_D \longrightarrow \text{Fl}_{D'}$ , tel que les diagrammes suivants commutent



:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Fl}_D & \xrightarrow{F_1} & \text{Fl}_{D'} \\
 s_D \downarrow & & \downarrow s_{D'} \\
 \text{Ob}_D & \xrightarrow{F_0} & \text{Ob}_{D'}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Fl}_D & \xrightarrow{F_1} & \text{Fl}_{D'} \\
 b_D \downarrow & & \downarrow b_{D'} \\
 \text{Ob}_D & \xrightarrow{F_0} & \text{Ob}_{D'}
 \end{array}$$

si  $D''$  est un troisième type de diagrammes et  $F' = (F'_0, F'_1)$  un morphisme de  $D'$  dans  $D''$ , on définit le *composé* des morphismes  $F$  et  $F'$ , c'est le morphisme  $F'' = (F''_0, F''_1)$  de  $D$  dans  $D''$  ou  $F''_0 = F'_0 F_0$ ,  $F''_1 = F'_1 F_1$ . Le morphisme noté  $1_D = (1_{\text{Fl}_D}, 1_{\text{Ob}_D})$  de  $D$  sur  $D$  est le *morphisme identique de  $D$* .

### 1.3 Sous-type de diagramme d'un type de diagrammes.

Soit  $D = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, s_D, b_D)$  un type de diagrammes. On dit que  $D' = (\text{Ob}_{D'}, \text{Fl}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$  est un *sous-type de diagrammes* de  $D$  si  $\text{Ob}_{D'}$  est inclus dans  $\text{Ob}_D$ ,  $\text{Fl}_{D'}$  est inclus dans  $\text{Fl}_D$  et si  $s_{D'}$  (respectivement  $b_{D'}$ ) est la restriction à  $\text{Fl}_{D'}$  de  $s_D$  (respectivement  $b_D$ ).

**1.4.** Si  $D = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, s_D, b_D)$  est un type de diagrammes le type de diagramme noté  $D^\circ = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, b_D, s_D)$  est appelé type de *diagrammes opposé de  $D$* .

Un *morphisme contravariant de types de diagrammes* de  $D$  dans  $D'$  est un morphisme de type de diagramme de  $D^\circ$  dans  $D'$

## 2. Catégorique

Définition (2.1). — Une catégorie  $C$  est la donnée :

- (i) d'un *type de diagramme*  $(\text{Fl}, \text{Ob}, s, b)$  appelé type de diagramme sous-jacent à  $C$ , noté  $(\text{Fl}_C, \text{Ob}_C, s_C, b_C)$
- (ii) d'une *application* du produit fibré  $(\text{Fl}_C, b_C) \times_{\text{Ob}_C} (\text{Fl}_C, s_C)$  dans  $\text{Fl}_C$ , appelé loi de composition des flèches, notée  $\mu_C : (f, g) \longrightarrow g \circ f = gf$  et vérifiant les propriétés :
  - (a)  $(gf)h = g(fh)$  pour tous les éléments  $f, g, h$  de  $\text{Fl}_C$  tels que cette écriture ait un sens.

- (aa) pour tout objet  $X$  il existe une flèche  $1_X$  telle que  $s_C(1_X) = b_C(1_X) = X$ , appelée *flèche identique* de  $X$  vérifiant  $1_X f = f$ ,  $f 1_X = f$  pour toute flèche  $f$  telle que cette écriture ait un sens.

On remarque que pour tout objet  $X$ , la flèche  $1_X$  est unique.

**Notations.** Chaque fois que l'on écrit  $gf$ , il est entendu que la composition a un sens, c'est-à-dire que  $b(f) = s(g)$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont deux objets d'un type de diagramme  $D$  (resp. d'une catégorie  $C$ ), l'ensemble des flèches de source  $X$ , de but  $Y$  est noté  $\text{Hom}_D(X, Y)$  ou  $\text{Fl}_D(X, Y)$  (resp.  $\text{Hom}_C(X, Y)$ ...)

Une flèche de source  $X$  et de but  $Y$  est aussi notée  $f : X \longrightarrow Y$ .

## 2.2 Foncteurs.

Soient  $C$  et  $C'$  deux catégories dont  $D$  et  $D'$  sont respectivement les types de diagrammes sous-jacents. Un *foncteur* de  $C$  dans  $C'$  est un *morphisme*  $F = (F_0, F_1)$  du type de diagramme  $D$  dans le type de diagramme  $D'$ , *compatible* avec la composition des flèches, c'est-à-dire tel que  $F_1(fg) = F_1(f)F_1(g)$ .

Pour tout  $X$ ,  $F_1(1_X)$  est alors la flèche identique de  $F_0(X)$ . Si  $C''$  est une troisième catégorie de type de diagramme  $D''$ ,  $F'$  un foncteur de  $C'$  dans  $C''$ , le *foncteur composé* des foncteurs  $F$  et  $F'$ ,  $F'' = F'F$  est le composé des morphismes de type de diagramme sous-jacent 1.2. On vérifie que  $F''$  est compatible avec la composition des flèches. Pour tout catégorie  $C$ , de type de diagramme  $D$ , on définit un *foncteur identique*  $1_C = 1_D$ .

**2.3.** Soit  $C$  une catégorie de type de diagramme sous-jacent  $D$ . La *catégorie opposée* de  $C$ , notée  $C^\circ$ , est la catégorie de type de diagramme  $D^\circ$ , et dont la loi de composition des flèches  $\mu_{C^\circ}$  est définie par  $\mu_{C^\circ}(f, g) = \mu_C(g, f)$ .

On remarque que  $C^{\circ\circ} = C$ .

Un *foncteur contravariant* de  $C$  dans  $C'$  on lui associe canoniquement un fonc-

teur  $F^\circ$  de  $C^\circ$  dans  $C'^\circ$ :

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C^\circ \\ F \downarrow & & \downarrow F^\circ \\ C' & \longrightarrow & C'^\circ \end{array}$$

On remarque que  $(FG)^\circ = F^\circ G^\circ$ ,  $1_C^\circ = 1_{C^\circ}$ ,  $F^{\circ\circ} = F$

## 2.4 Monomorphisme - Epimorphisme.

**2.4.1.** On dit qu'une flèche  $f : X \longrightarrow Y$  d'une catégorie  $C$  est un *monomorphisme* si pour tout objet  $T$  de  $C$  l'application naturelle qui à  $u : T \longrightarrow X$ , fait correspondre  $f u$  de  $\text{Hom}(T, X)$  dans  $\text{Hom}(T, Y)$  est *injective*. Une flèche  $f : X \longrightarrow Y$  d'une catégorie  $C$  est un *épimorphisme* si  $f$  est un monomorphisme en tant que flèche de  $C^\circ$  ou, ce qui est équivalent, si pour tout objet  $T$  de  $C$  l'application naturelle de  $\text{Hom}(Y, T)$  dans  $\text{Hom}(X, T)$  est *injective*.

Une flèche est un *bimorphisme* si c'est un monomorphisme et un épimorphisme.

**2.4.2.** Une flèche  $f$  de  $C$  est *inversible à gauche* (ou *rétractable*) s'il existe une flèche  $g : b(f) \longrightarrow s(f)$  telle que  $gf = 1_{s(f)}$ ;  $g$  est une *rétraction* de  $f$ .

Une flèche  $f$  de  $C$  est *inversible à droite* (ou *sectionnable*) s'il existe une flèche  $g : b(f) \longrightarrow s(f)$  telle que  $fg = 1_{b(f)}$ ;  $g$  est une *section* de  $f$ .

Une flèche rétractable et sectionnable est appelée un *isomorphisme*, il existe alors un  $g : b(f) \longrightarrow s(f)$  unique tel que  $fg = 1_{b(f)}$  et  $gf = 1_{s(f)}$ ,  $g$  est *l'inverse* de  $f$ .

**2.4.3.** Une flèche rétractable est un monomorphisme. Une flèche sectionnable est un épimorphisme. Donc un isomorphisme est un bimorphisme. Les réciproques sont *fausses*.

## 2.5 Sous-objet, objet quotient.

Soit  $X$  un objet quelconque d'une catégorie  $C$ , on définit sur l'ensemble des monomorphismes de but  $X$  une *relation de préordre*:  $i \leq i'$  si et seulement si  $i i'$  se factorise par  $i$  c'est-à-dire si et seulement si il existe un morphisme  $u$  tel que le

diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & X \\ & \nwarrow u \quad \nearrow i' & \\ & B' & \end{array}$$

c'est-à-dire tel que  $i' = i u$ .

On remarque que  $u$  est un monomorphisme, et est déterminé de façon unique. On considère la relation d'équivalence associée à cette relation de préordre. Dans chaque classe d'équivalence on choisit (par exemple grâce au symbole  $\tau$ ) un monomorphisme que l'on appelle *sous objet* de  $X$ . Par abus du langage on appellera aussi sous-objet de  $X$  la source d'un tel monomorphisme. On notera  $(B, i)$  un sous objet de  $X$ , ou simplement  $B$ . La relation de préordre ci-dessus induit donc une relation d'ordre sur l'ensemble des sous objets de  $X$ . Si  $B, B'$  sont deux sous objets de  $X$ , la borné inférieure (resp. la borne supérieure) lorsqu'elle existe, est notée  $B \wedge B'$  (resp.  $B \vee B'$ ). Par exemple, dans la catégorie des ensembles, notée  $\text{Ens}$ ,  $B \wedge B' = B \cap B'$ ,  $B \vee B' = B \cup B'$ .

Dualement on définit les *objets quotients* d'un objet  $X$ , et une relation d'ordre sur leur ensemble.

## 2.6 Sous catégorie d'une catégorie.

Soit  $C$  une catégorie de type de diagramme sous-jacent  $D$ , on dit que  $C'$ , de type de diagramme  $D'$  est une *sous catégorie* si  $D'$  est un sous-type de diagramme de  $D$  et si de plus  $\mu_{C'}$  (loi de composition des flèches dans  $C'$ ) est la restriction de  $\mu_C$  au produit fibre  $(\text{Fl}_{C'}, b_{C'}) \times_{\text{Ob}_{C'}} (\text{Fl}_{C'}, s_{C'})$ .

On remarque que pour tout couple  $X, Y$  d'objets de  $C'$  on a :  $\text{Fl}_{C'}(X, Y) \subset \text{Fl}_C(X, Y)$ . Si de plus on a l'égalité on dit que  $C'$  est une *sous-catégorie pleine* de  $C$ .

## 3. Exemples de catégories

**3.1.** Soit une catégorie dont l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, alors l'ensemble des flèches se trouve naturellement muni d'une structure de monoïde unitaire. Soit  $M$  une telle catégorie,  $C$  une catégorie quelconque, un foncteur  $F = (F_0, F_1)$  de  $M$  dans  $C$  est essentiellement un homomorphisme de monoïde

de  $\text{Fl}_M$  dans  $\text{Hom}(X, X)$ , où  $X$  est l'image par  $F_0$  de l'unique objet de  $M$ . On appelle *groupoïde* une catégorie dans laquelle toute flèche est inversible ; si de plus l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, l'ensemble des flèches est muni alors d'une structure de groupe.

**3.2..** Soit  $I$  un ensemble préordonné, on appelle *catégorie associée* à  $I$ , la catégorie notée  $\text{Cat}(I)$ , dont l'ensemble des objets est  $I$ , et dont l'ensemble des flèches est le graphe de la relation de préordre ; si  $(i, j)$  est une flèche  $s(i, j) = j$ ,  $b(i, j) = i$ , la composition des flèches se définit évidemment par  $(i, j)(j, k) = (i, k)$   $(i, i)$  est la flèche identité de  $i$ . Les propriétés (a) et (a a) se vérifient immédiatement.

Inversement, pour toute catégorie  $C$  on peut définir sur  $\text{Ob } C$  une relation de préordre, à savoir :  $X \leq Y \Leftrightarrow \text{Hom}_C(X, Y) \neq \emptyset$ . Une catégorie  $C$  est isomorphe à une catégorie  $\text{Cat}(I)$  si et seulement si toute flèche de  $\text{Fl } C$  est un monomorphisme. Il suffit de prendre  $I = \text{Ob } C$  muni de la relation de préordre précédente.

### 3.3 Catégories de types de diagramme, catégories de catégories.

Dans cette section, on choisit une fois pour toute un univers  $\mathfrak{U}$ , et tous les ensembles utilisés sont des éléments de  $\mathfrak{U}$ .

Soit l'ensemble des "types de diagramme dans  $\mathfrak{U}$ ", notée  $\text{Diag}_{\mathfrak{U}}$ , (resp. l'ensemble des "catégories dans  $\mathfrak{U}$ ", noté  $\text{Cat}_{\mathfrak{U}}$ ) c'est-à-dire des types de diagramme  $D$  (resp. des catégories  $C$ ) tels que les ensembles  $\text{Ob}_D, \text{Fl}_D$  (resp.  $\text{Ob}_C, \text{Fl}_C$ ) soient des éléments de  $\mathfrak{U}$ . En considérant 1.2 (resp. 2.2) on définit la *catégorie des types de diagramme* dans  $\mathfrak{U}$  notée  $\text{Diag}_{\mathfrak{U}}$  (resp. la *catégorie des catégories dans  $\mathfrak{U}$*  notée  $\text{Cat}_{\mathfrak{U}}$ ).

Explicitons par exemple  $\text{Cat}_{\mathfrak{U}}$ , le type de diagramme est le suivant : l'ensemble des objets est  $\text{Cat}_{\mathfrak{U}}$ , l'ensemble des flèches est l'ensemble des triples  $(F, C, C')$  où  $F$  est un foncteur de la catégorie  $C$  dans la catégorie  $C'$ ,  $s(F, C, C') = C$ ,  $b(F, C, C') = C'$ . La loi de composition des flèches est la composition des foncteurs définie en 2.2. On vérifie les propriétés (a) et (aa).

### 3.4 Catégorie des morphismes de type de diagramme d'un type de diagramme dans une catégorie, catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre.

Soient  $D = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, s_D, b_D)$  un type de diagramme et  $C'$  une catégorie de

type de diagramme sous-jacent  $(\text{Ob}_{C'}, \text{Fl}_{C'}, s_{C'}, b_{C'})$ . Un morphisme de type de diagramme  $D$  dans  $C'$  est aussi appelé *diagramme de type  $D$  dans  $C'$* .

On considère l'ensemble des morphismes de type de diagramme de  $D$  dans  $C'$  noté  $\text{Diag}(D, C')$ . Soient  $F = (F_0, F_1)$ ,  $G = (G_0, G_1)$  deux morphismes de type de diagramme de  $D$  dans  $C'$ . Une *flèche de source  $F$  de but  $G$*  est une application  $u$  de  $\text{Ob}_D$  dans  $\text{Fl}_{C'}$  ( $u(x)$  sera souvent noté  $u_X$ ) telle que pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$  de  $D$ , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_0(X) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_0(Y) \\ u(X) \downarrow & & \downarrow u(Y) \\ G_0(X) & \xrightarrow{G_1(f)} & G_0(Y) \end{array}$$

Si  $u$  et  $v$  sont deux flèches,  $u : F \longrightarrow G$ ,  $v : G \longrightarrow H$ , la *flèche composée*  $vu : F \longrightarrow H$  est définie  $vu(X) = v(X)u(X)$  pour tout  $X$  de  $\text{Ob}_D$ .

La *flèche identique* de  $F$  notée  $1_F$  est définie par  $1_F(X) = 1_{F_0}(X)$  pour tout  $X$  de  $\text{Ob}_D$ . On vérifie les propriétés (a) et (a a). On a alors défini la *catégorie des morphismes de type de diagramme de  $D$  dans  $C'$* , encore appelée *catégorie des diagrammes de type  $D$  dans  $C'$*  et notée  $\text{Diag}(D, C')$ .

Si  $C$  et  $C'$  sont deux catégories de types de diagrammes sous-jacents  $D$  et  $D'$ , on définit également la *catégorie des foncteurs de  $C$  dans  $C'$*  notée  $\text{Hom}(C, C')$ .

C'est par définition une *sous-catégorie pleine* de  $\text{Diag}(D, C')$ .

### 3.5 Exemples de catégories de diagramme de type donné dans une catégorie.

**3.5.1.** Si  $D$  est tel que  $\text{Ob}_D$  se réduit à un seul élément et si l'ensemble des flèches est vide, alors  $\text{Diag}(D, C')$  est canoniquement isomorphe à la catégorie  $C'$ .

**3.5.2.** Si  $D$  est du type suivant :  $\bullet \longrightarrow \bullet$ , alors la catégorie  $\text{Diag}(D, C')$  est appelée *catégorie des flèches de  $C'$* , notée  $\text{Fl}(C')$ .

Les objets s'identifient aux éléments de  $\text{Fl } C'$  et un morphisme de la flèche  $f : X \longrightarrow Y$ , dans la flèche  $f' : X' \longrightarrow Y'$  est défini par un couple de flèche  $(u, v)$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ X' & \longrightarrow & Y'. \end{array}$$

3.5.3. Si  $D$  est du type suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

les objets de  $\text{Diag}(D, C')$  sont essentiellement les “carrés” (non nécessairement commutatifs) de  $C'$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & T, \end{array}$$

et un morphisme d’un tel carré dans un autre est défini par un quadruple de flèches  $(u, v, r, s)$  tel que tous les côtés latéraux de “cube” suivant, où interviennent ces flèches, soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \longrightarrow & Y \\ & \swarrow u & \downarrow & & \swarrow v \\ X' & \longrightarrow & Y' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \swarrow s & Z & \longrightarrow & T \\ Z' & \longrightarrow & T' & & \swarrow r \end{array}$$

### 3.6 Diagramme avec relations de commutation.

3.6.1. Soit  $D$  un type de diagramme, on appelle *chemin* une suite finie  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de flèches de  $D$  formellement composable, c’est-à-dire telle que  $s(f_{i+1}) = b(f_i)$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . On considère le type de diagramme dont les objets sont ceux de  $D$ , dont les flèches sont les chemins  $c = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$  avec  $s(c) = s(f_1)$  et

$b(c) = b(f_n)$ . Sur ce type de diagramme on définit la composition des chemins, elle consiste à mettre “bout à bout” deux chemins s’ils sont formellement composables. On obtient ainsi une catégorie notée  $\hat{D}$ , appelée *catégorie libre engendré par le type de diagramme  $D$* .

Soit  $C$  une catégorie, pour tout morphisme de type de diagramme  $\varphi : D \longrightarrow C$ , il existe un foncteur et un seul  $\hat{\varphi} : \hat{D} \longrightarrow C$  tel que pour tout chemin  $c = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\hat{\varphi}_1(c) = \varphi_1(f_1) \dots \varphi_1(f_{n-1})$ .

**3.6.2.** On appelle *donnée de commutation* sur  $D$ , la donnée d’un ensemble  $R$  de couples de flèches de  $\hat{D}$ ,  $(c, c')$  tels que  $s(c) = s(c')$  et  $b(c) = b(c')$ .

Soit  $C$  une catégorie, on dit qu’un diagramme  $\varphi$  de type  $D$  dans  $C$  vérifie les *relations de commutation*  $R$  si pour tout couple  $(c, c')$  de  $R$ ,  $\hat{\varphi}_1(c) = \hat{\varphi}_1(c')$ . On note  $\text{Diag}_R(D, C)$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Diag}(D, C)$  formée par les diagrammes de type  $D$  vérifiant  $R$ .

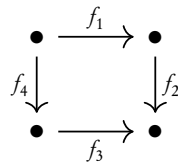
**3.6.3.** Dans  $\text{Fl} \hat{D}$  on définit la relation d’équivalence  $R$  suivante :

$R(c, c')$  si et seulement si  $s(c) = s(c')$  et  $b(c) = b(c')$ , la classe de  $c$  sera notée  $\bar{c}$ .

Soit  $\tilde{D}$  la catégorie telle que  $\text{Ob}(\tilde{D}) = \text{Ob}(\hat{D}) = \text{Ob}(D)$  et  $\text{Fl}(\tilde{D}) = \text{Fl}(\hat{D})/R$  avec  $s(\bar{c}) = s(c)$  et  $b(\bar{c}) = b(c)$ . La catégorie  $\text{Hom}(\tilde{D}, C)$  est appelée catégorie des diagrammes de type  $D$  *commutatifs* dans  $C$  et notée  $\text{Diagcomm}(D, C)$ .

### Exemple

Soit  $D$  le type de diagramme représenté par



Alors  $\text{Ob} \hat{D} = \text{Ob}(D)$ ,  $\text{Fl} \hat{D} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, (f_2, f_1), (f_3, f_4)\}$  chemin vide, dans  $\tilde{D}$  on identifie  $(f_2, f_1)$  et  $(f_3, f_4)$  on peut donc représenter  $\tilde{D}$  par

[]

## 4. Produit de catégories, somme de catégories

### 4.1 Produit de catégories



Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de catégories,  $I$  un ensemble.

**4.1.1.** *La catégorie produit* des catégories  $C_i$ , notée  $C = \prod_{i \in I} C_i$  est ainsi définie

:

$$\text{Ob } C = \prod_{i \in I} \text{Ob } C_i, \text{Fl } C = \prod_{i \in I} \text{Fl } C_i, s = \prod_{i \in I} s_i, b = \prod_{i \in I} b_i.$$

Si  $f = (f_i)_{i \in I}$  et  $g = (g_i)_{i \in I}$  sont deux flèches, la flèche composé  $gf$  est la flèche  $(g_i f_i)_{i \in I}$ ; la flèche identique sur  $\prod_{i \in I}$  est la flèche  $\pi_{i \in I} 1_{X_i}$ .

On définit une famille de foncteurs notée  $(\text{pr}_i)_{i \in I}$ ,  $\text{pr}_i : \prod_{i \in I} C_i \longrightarrow C_i$  est tel que  $\text{pr}_i((X_i)_{i \in I}) = X_i$ ,  $\text{pr}_i((f_i)_{i \in I}) = f_i$ .

**Proposition 4.1.2.** — *Pour tout catégorie  $T$ , l'application de  $\text{Hom}(T, \prod_{i \in I} C_i)$  dans  $\prod_{i \in I} \text{Hom}(T, C_i)$  qui à  $u$  fait correspondre  $(\text{pr}_i \circ u)_{i \in I}$  est bijective.*

## 4.2 Multifoncteurs

### 4.2.2.

## 4.3 Somme de catégories

### 4.3.1.

### 4.3.2.

### 4.3.3.

## 5. Équivalence de catégories

### 5.1

#### 1.2 Morphisme

#### 1.2 Morphisme

## 6. Exemples de catégories

### 6.1

Soit  $I$  un type de diagramme,  $C$  une catégorie

## 1.2 Morphisme

## 1.2 Morphisme

## 1.2 Morphisme

## 1.2 Morphisme

## 1.2 Morphisme

## 1.2 Morphisme

## 1.2 Morphisme

# 7. Catégorie filtrante

## 7.1 Définitions :

## 7.2 Exemples

7.2.1. Si dans une catégorie  $C$ , pour tout couple d'objets le produit (resp. la somme) existe, et si pour tout couple de morphismes le noyau (resp. le conoyau) existe, alors  $C$  est filtrante à gauche (resp. filtrante à droite).

7.2.2. La catégorie associée à un ensemble préordonné  $I$  est filtrante si et seulement si  $I$  est filtrante.

7.2.3. Dans la catégorie des ensembles, des groupoïdes, des modules sur un anneau..., les *limites inductives filtrantes*, c'est-à-dire les limites inductives de foncteurs d'une catégorie filtrante dans la catégorie en question, sont des foncteurs exacts à gauche, donc *exacts*, puisqu'on sait qu'ils sont exacts à droite.

## § II. — CATÉGORIE ABÉLIENNE

---

### 1. Catégorie additive

On peut donner deux versions de la définition d'une catégorie additive, l'une consiste à *se donner* sur les ensembles  $\text{Hom}(X, Y)$  une structure de groupe abélien, cette structure supplémentaire étant soumise à certaines conditions ; l'autre consiste à construire canoniquement une loi de groupe sur tout  $\text{Hom}(X, Y)$  en termes *d'axiomes* convenables sur la catégorie  $C$ .

#### 1.1 Version 1

Une catégorie additive est une catégorie

#### 1.1 Version 1

#### 1.1 Version 1

#### 1.1 Version 1

#### 1.1 Version 1

### 2. Catégorie additive

#### 1.1 Version 1

1.1 Version 1

### **3. Catégorie additive**

1.1 Version 1

1.1 Version 1

1.1 Version 1

### **4. Diagrammes dans une catégorie abélienne**

1.1 Version 1

1.1 Version 1

### **5. Diagrammes dans une catégorie abélienne**

1.1 Version 1

1.1 Version 1

1.1 Version 1

## § III. — FONCTEURS REPRÉSENTABLES

---

### 1. Généralités

#### 1.1 Définition

Soit  $\mathfrak{U}$  un univers,  $C$  une catégorie telle que pour tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $C$ ,  $Hom(X, Y)$  appartient à  $\mathfrak{U}$ . On rappelle que  $Hom(., .)$  est un bifoncteur de  $C \times C$  dans  $Ens_{\mathfrak{U}}$  contravariant par rapport à la première variable, covariant par rapport à la seconde.

1.1.1. On appelle *catégorie des préfaisceaux* sur  $C$ , la catégorie  $Hom(C^o, Ens_{\mathfrak{U}})$ , que l'on note  $\widehat{C}$ .

On définit un foncteur  $\varepsilon$  de  $C$  dans  $\widehat{C}$ . A tout objet  $Y$  de  $C$ ,  $\varepsilon$  fait correspondre le foncteur contravariant de  $C$  dans  $Ens_{\mathfrak{U}} : Hom(., Y)$ , que l'on note  $h_Y$ .

Tout morphisme  $f : Y \longrightarrow Y'$ ,  $\varepsilon$  associe le morphisme fonctoriel naturel de  $Hom(., Y)$  dans  $Hom(., Y')$ .

1.1.2. On dit que le foncteur  $h_Y$  est le *foncteur représenté* par  $Y$ .

On dit qu'un préfaisceau  $F$  est *représentable*, s'il existe un objet  $Y$  de  $C$  et un *isomorphisme*  $\varphi$  de  $h_Y$  sur  $F$ . On dit alors que  $F$  est représenté par le couple  $(Y, \varphi)$  ou encore que le couple  $(Y, \varphi)$  est une *donnée de représentation* de  $F$ .

#### 1.2 Propriétés

**Théorème 1.2.1.** — *Si  $F$  est un préfaisceau sur  $C$ ,  $Y$  un objet de  $C$ , il existe une bijection de  $Hom(h_Y, F)$  sur  $F(Y)$ , fonctorielle en  $Y$ ,  $F$ .*

a. []

b.

c.

**Corollaire 1.2.2.** — *Si  $F$  est un préfaisceau représentable, représenté par  $(X, \varphi)$   $Y$  un objet de  $C$ , il existe une bijection de  $\text{Hom}(Y, X)$  sur  $\text{Hom}(h_Y, h_X)$ .*

C'est dire que le foncteur canonique  $\varepsilon$  est *pleinement fidèle*, ce qui permet de “plonger” canoniquement toute catégorie  $C$  dans la catégorie  $\widehat{C}$  des préfaisceaux sur  $C$ .

Aussi nous arrivera-t-il d'*identifier* un objet  $Y$  de  $C$  à  $h_Y$ , un morphisme fonctoriel de  $h_Y$  dans  $F$  à l'élément de  $f(Y)$  correspondant. Une donnée de représentation de  $F$  est définie à un isomorphisme unique près : en effet, si  $(X, \varphi), (X', \varphi')$  sont deux données de représentation de  $F$ ,  $h_X$  et  $h'_X$  sont isomorphes, comme  $\varepsilon$  est pleinement fidèle  $X$  et  $X'$  sont isomorphes ainsi que  $\varphi$  et  $\varphi'$ .

**Proposition 1.2.3.** — *Soit  $F$  un préfaisceau sur  $C$ .*

*Le couple  $(X, \alpha)$ , où  $X$  est un objet de  $C$ ,  $\alpha$  un élément de  $F(X)$  définit une donnée de représentation de  $F$  si et seulement si pour tout couple  $(Y, \beta)$  où  $Y$  est un objet de  $C$ ,  $\beta$  un élément de  $F(Y)$ , il existe un unique morphisme  $v : Y \longrightarrow X$  tel que  $\beta = F(v)\alpha$ .*

*Si  $(X, \alpha)$  définit une donnée de représentation de  $F$ ,  $\alpha$  s'identifie à un isomorphisme de  $h_X$  sur  $F$ ,  $\beta$  s'identifie à un morphisme de  $h_Y$  dans  $F$ , et un morphisme  $v$  s'identifie à un morphisme de  $h_Y$  dans  $h_X$ . Pour tout objet  $Y$ , et tout morphisme  $\beta : h_Y \longrightarrow F$ , il existe bien un unique morphisme  $h_Y \longrightarrow h_Y$  tel que  $\beta = \alpha u$ , à savoir  $u = \alpha^{-1} \beta$  [] Réciproquement si  $(X, \alpha)$  jouit d'une telle propriété universelle, pour tout  $Y$  il existe une bijection de  $\text{Hom}(Y, X) = h_X(Y)$  sur  $\text{Hom}(h_Y, F) \simeq F(Y)$ , donc  $\alpha$  est un isomorphisme fonctoriel, et  $(X, \alpha)$  définit une donnée de représentation de  $F$ .*

## 2. Application

De nombreuses notions peuvent s'interpréter avantageusement en langage de foncteurs représentables.

**2.1.** Soit  $C$  une catégorie,  $D$  un type de diagramme et  $\varphi : D \longrightarrow C$ . Pour tout objet  $Y$  de  $C$ , on définit le diagramme constant  $C_Y$  : pour tout objet  $i$  de  $D$   $C_Y(i) = Y$ , pour toute flèche  $f$  de  $D$   $C_Y(f) = 1_Y$ . Pour tout objet  $Y$  de  $C$ , l'ensemble des systèmes admissibles  $(Y, u_i)_{i \in \text{Ob } D}$  de  $\varphi$  est l'ensemble  $\text{Hom}(C_Y, \varphi)$ .

Soit  $F$  le préfaisceau sur  $C$  défini par  $F(Y) = \text{Hom}(C_Y, \varphi)$ . En appliquant 1.2.3 on obtient la

**Proposition 2.1.1.** — *La limite projective de  $\varphi$  existe si et seulement si le foncteur  $F$  est représentable.*

Si  $\varphi$  ne possède pas de limite projective dans  $C$ , on utilise souvent le procédé suivant on plonge  $C$  dans  $\widehat{C}$  au moyen du foncteur  $\varepsilon$  et on appelle limite projective de  $\varphi$  la limite projective de  $\varepsilon\varphi$ , qui existe toujours puisque  $\widehat{C} = \text{Hom}(C^\circ, \text{Ens}_{\mathbb{U}})$ .

**2.2.** On considère la catégorie des modules sur un anneau commutatif  $A$ ,  $\text{Mod}_A$ . Soient  $M$  et  $N$  deux modules, le foncteur de  $\text{Mod}_A$  dans  $\text{Ens}$  qui à tout module  $P$  fait correspondre l'ensemble  $\text{Bil}_A(M \times N, P)$  des applications bilinéaires de  $M \times N$  dans  $P$  est *représentable*, et le module qui le représente est le produit tensoriel  $M \otimes_A N$ .

**2.3.** On peut définir dualement un foncteur  $\varepsilon' : C^\circ \longrightarrow \text{Hom}(C, \text{Ens})$ . On définira alors un foncteur représentable et l'on vérifiera que cette notion recouvre celle de limite inductive.

## 3. Structures algébriques dans les catégories

On se propose de *définir* une structure algébrique par exemple une structure de groupe sur un objet  $X$  d'une catégorie  $C$ . On peut procéder de deux façons.

**3.1.** La plus naturelle consiste à généraliser dans la catégorie  $C$ , la notion habituelle de structure algébrique sur un ensemble.

Supposons que dans  $C$  le produit  $X \amalg X$  existe, une *loi de composition interne* sur  $X$  est la donnée d'un morphisme  $m_X : X \amalg X \longrightarrow X$ .

Les axiomes définissant sur  $X$  une *structure de  $C$ -groupe* vont s'exprimer en terme de commutativité de diagrammes. Supposons que  $X \amalg X \amalg X$  existe, on a les isomorphismes canoniques :  $(X \amalg X) \amalg X \simeq X \amalg X \amalg X \simeq X \amalg (X \amalg X)$ .

**3.1.1.** La loi est *associative* si le diagramme suivant est commutatif :

[]

Supposons de plus qu'il existe dans  $C$  un objet final  $E$ , il existe alors un unique morphisme  $e : X \longrightarrow E$ .

**3.1.2.** Il existe un morphisme  $w : E \longrightarrow X$  tel que les diagrammes suivants soient commutatifs

[]

On montre que  $w$  est alors déterminé de façon unique.

**3.1.3.** Il existe un morphisme  $s : X \longrightarrow X$  tel que le diagramme suivant soit commutatif

[]

ainsi que celui obtenu en permettant  $s$  et  $1_X$ . On montre que le morphisme  $s$  est déterminé de façon unique.

On pourrait de façon duale définir une structure de  $C$ -cogroupe.

**3.2.** Sans faire d'hypothèses sur la catégorie  $C$ , on peut définir une structure sur  $X$  en se ramenant au cas *ensembliste*. Les limites projectives existent dans  $\widehat{C}$ , ainsi pour deux éléments  $F, F'$  de  $\widehat{C}$ , pour tout objet  $X$  de  $C$ ,  $F \amalg F'(X) = F(X) \amalg F'(X)$ .

Une *loi de composition interne* sur  $X$  est la donnée d'un morphisme  $M_X : h_X \amalg h_X \longrightarrow h_X$ . Cela revient à se donner pour tout objet  $Y$  de  $C$ , une loi de composition interne sur l'ensemble  $h_X(Y)$  qui soit fonctorielle, c'est-à-dire telle que pour tout  $u : Y \longrightarrow Y'$ ,  $h_X(u) : h_X(Y') \longrightarrow h_X(Y)$  soit un morphisme au sens de la structure considérée.

**3.3.** Dans le cas particulier où le produit  $X \amalg X$  existe dans  $C$ ,  $h_X \amalg h_X$  est canoniquement isomorphe à  $h_{X \amalg X}$ , une loi de composition interne sur  $X$  peut donc être considérée comme un morphisme  $M_X : h_{X \amalg X} \longrightarrow h_X$  il lui est donc canoniquement associé (III, 1.2.2) un morphisme  $m_X : X \amalg X \longrightarrow X$  tel que



$$\varepsilon(m_X) = h_{m_X} = M_X.$$

**3.3.1.** Si l'on suppose que  $X \amalg X \amalg X$  existe,  $X \amalg X \amalg X$  étant canoniquement identifié à  $(X \amalg X) \amalg X$  l'application  $M_X(Y) \amalg 1_{h_X(Y)}$  s'identifie pour tout objet  $Y$  de  $C$  à  $h_{m_X \amalg 1_X}(Y)$ . Il est donc *équivalent* de dire que la loi  $M_X$  est associative, c'est-à-dire que pour tout  $Y$  le diagramme suivant est commutatif :

[]

ou que le diagramme **3.1.1** est commutatif.

**3.3.2.** S'il existe dans  $C$  un objet final...

$E, h_E$  est objet final de  $C$ , le morphisme  $\Omega : h_E \longrightarrow h_X$  induit un morphisme  $w : E \longrightarrow X$  qui vérifie la propriété **3.1.2**.

**3.3.3.** Pour tout  $Y$  de  $C$  il existe un morphisme  $S(Y) : h_X(Y) \longrightarrow h_X(Y)$  fonctoriel par rapport à  $Y$ , soit  $S : h_X \longrightarrow h_X$  est un morphisme auquel est canoniquement associé un morphisme  $s : X \longrightarrow X$  tel que  $\varepsilon(s) = h_s = S$ , et tel que le diagramme **3.1.3** correspondant soit commutatif.

**3.4.** Il faut remarquer qu'il y a des structures que l'on ne peut définir de cette façon, par exemple si leur définition fait intervenir des limites inductives, car  $\varepsilon : C \longrightarrow \widehat{C}$  ne commute pas aux limites inductives.

## QUELQUES OUVRAGES DE RÉFÉRENCES

- [1] ECKMANN - HILTON — *Group-like structure in general categories*. I. Math. Ann. **145** (1962) 227-255 ; II. Math. Ann. **151** (1963), 150-186 ; III. Math. Ann. **150** (1963) 165-187.