STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

A. GROTHENDIECK

Autour de La “Longue Marche” à travers la théorie de Galois

Cote $n°$ 147

Ce texte a été déchiffré et transcrit par Mateo Carmona

§ I. — COURBES STANDARD

Soit k un corps algébriquement clos. Une "courbe standard" sur k es une schéma X sur k satisfaisant les conditions suivantes :

Généralisation sur une base quelconque.

Une *courbe standard* sur S (multiplicité schématique, disons) [] constructivement en termes d'un système a), b), c) comme ci-dessus, i.e.

[]

On construit alors $\widehat{X} = Y/\sigma$, [] vers les schémas relatifs [], est *pleinement fidèle* ([1]).

[]

1

§ II. — GRAPHE ASSOCIÉ À UNE COURBE STANDARD

Revenus au cas d'un corps de base k algébriquement clos, pour commencer. Soit X une courbe standard, d'où Y, I, $\widetilde{A}$, $\sigma_{\widetilde{A}}$.

Posons

(7) $$S = \pi_\circ(Y) \simeq [\,]\text{ des corps irréductibles de } X$$

On a alors le diagramme d'application canoniquement entre ensembles finis

(8) $$[\,]$$

où q est de degré 2 et définit l'involution $\sigma_{\widetilde{A}}$. Les applications σ et p sont induites par les [] en passant aux $\pi_\circ$.

Le système $(\widetilde{A} \xrightarrow{\sigma} S, \sigma_{\widetilde{A}})$ où [], peut être consideré comme définissant un *graphe*, dans S est l'un des sommets,

La *maquette* d'une courbe standard X consiste, pour définition, en les donnes suivantes

§ III. — COURBES "STABLES" ET MD-GRAPHES

Une courbe standard (sur k algébriquement clos) est "stable", si elle satisfait à l'un des conditions équivalentes suivantes

a) $\operatorname{Aut} X$ est fini

b) Pour tout α, $(Y_\alpha, I_\alpha \cup \widetilde{A}_\alpha)$ est anabélien i.e. $2g_\alpha + \widehat{\nu}_\alpha \geq 3$ i.e. $2g_\alpha - 2 + \widehat{\nu}_\alpha \geq 1$, i.e.

   1) Si $g_\alpha = 1$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 1$
   2) Si $g_\alpha = 0$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 3$

c) Tout champ de vecteurs sur Y nul sur $I \cup \widetilde{A}$ est nul.

d) $\underline{\mathrm{Aut}}_{(Y, \widetilde{A}_k, I)}$ est un schéma en groupes fini étale sur k. On voit que cette condition (sous la forme b)) ne dépend que de la *maquette* de la courbe. On dit que X est une *MD-courbe* (MD, initiale de "Mumford-Deligne" ou de "modulaire") si elle est stable, et 0-connexe (i.e. connexe non vide).

Les maquettes de telles courbes sont les maquettes 0-connexes et stables (i.e. dont les sommets de guère 1 sont de poids total ≥ 1, et les sommets de guère 0 sont de poids total ≥ 3), on les appellera les MD-graphes.

NB. Une maquette est une MD-graphe si et seule si

a) elle est 0-connexe (i.e. le graphe G est connexe $\neq \varnothing$)

b) elle n'est pas réduit à un seul sommet de guère 1, de poids total 0 []

c) les sommets []

Proposition. — *Si* $(G=(S,\widetilde{A},\sigma),I,\underline{g}:S\longrightarrow \mathbf{N})$ *est une MD-graphe, son type* (g,ν) *est anabélien, i.e.* $2g+\nu\geq 3$.

Si on avait $g=1$, $\nu=0$, alors la relation

$$g=1=\sum g_\alpha+h_1$$

montre que ou bien tous les g_α sont nuls et h_1 [], ou bien tous les g_α sauf une g_{α_0} sont nuls, []

[]

Soit G une maquette. On dit qu'une courbe standard sur un corps algébriquement clos est *de type* G, si sa maquette est isomorphe à G, on dit qu'elle est G*-épinglée* si on se donne un isomorphisme entre se maquette et G (c'est donc une structure []).

Soit $(\widehat{X},\underline{I})$ une courbe standard sur une base S quelconque, on dit qu'elle est de type G si ses fibres géométriques sont de type G. Alors les maquettes des fibres géométriques de $(\widehat{X},\underline{I})$ forment les fibres d'une schéma en maquettes (ou un MD-graphe) sur S $(\underline{S},\underline{\widetilde{A}},\sigma_{\underline{\widetilde{A}}},\underline{I},\underline{\widetilde{A}}\longrightarrow \underline{S},\underline{I}\longrightarrow \underline{S},\underline{S}\xrightarrow{g}\mathbf{N}_S)$ (système de revêtements finis étales de S et de morphismes entre ceux-ci), localement isomorphe à la maquette G donnée. On appelle G-épinglage entre $(\widehat{X},\underline{I})$ tout isomorphisme entre G_S et $\underline{G}(\widehat{X},\underline{I})$. Si

$$\Gamma=\operatorname{Aut}G \tag{18}$$

(groupe fini), les G-épinglages de $(\widehat{X},\underline{I})$ s'identifient aux sections d'une certain Γ_S-torseur, appelé *torseur de* G*-épinglages* de $(\widehat{X},\underline{I})$.

Considérons, sur une base S fixée, le catégorie ([]) des courbes standard G-épinglées. Pour tout $\alpha\in S$

§ IV. — LA THÉORIE DE MUMFORD-DELIGNE

Soient S une multiplicité schématique, X une schéma relatif sur S, propre sur S, $\underline{I}$ une sous-schéma fermé de X. On dit que $(X, \underline{I})$ est une MD-courbe relative sur S, si X, $\underline{I}$ sont plats de présentation finie sur S, et si pour tout point géométrique de S, la fibre $(X_{\bar{s}}, \underline{I}_{\bar{s}})$ est une MD-courbe géométrique sur $k(s)$ i.e. $X_{\bar{s}}$ est 0-connexe, de dimension 1, [] c'est une fonction localement constant sur S.

Fixons nous une type numérique (g, ν) *anabélien* $(2g+\nu \geq 1)$, et considérons, pour S variable, le groupoïde fibré

$$(24) \qquad S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}(S) = \text{ MD-courbes relatives sur } S, \text{ de type numérique égal à } (g,\nu)$$

On a alors le vraiment [] théorème suivant :

Théorème de Mumford-Deligne ([2]). — *Le groupoïde fibré* $S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}/S$ *sur* Sch *(plus généralement, sur les multiplicités schématiques...) est représentable pour une multiplicité schématique* $\widehat{M_{g,\nu}}$*, qui est* lisse *et* propre *sur* Spec $\mathbf{Z}$*, D'autre part* $M_{g,\nu}$ *est un ouvert de Zariski de* $\widehat{M_{g,\nu}}$*, schématiquement dense fibre par fibre.*

On en déduit aisément p. ex. la connexité des fibres géométriques

[2]On suppose $2g+\nu \geq 3$ (cas anabélien)

§ V. — SPÉCIALISATION DE MD-GRAPHES

§ VI. — MORPHISMES DE [ ]

§ VII. — ÉTUDE DES [ ]

§ VIII. — STRUCTURE []

§ XI. — LA STRUCTURE GROUPOIDALE DES [ ]

§ X. — STRUCTURES MDT DISCRÈTES : [ ]

§ XI. — DIGRESSION : DÉPLOYEMENT []

§ XII. — DIGRESSION SUR [ ]

§ XIII. — DIGRESSION SUR [ ]

Une *stratification globale*