Gr-catégories

par

Hoàng Xuân Sính

Institut pédagogique n°2 de Hanoi
Département de mathématiques

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona avec la collaboration de David Michael Roberts. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

https://agrothendieck.github.io/

TABLE DE MATIÈRES

Introduction 4
I. $\otimes$-catégories et $\otimes$-foncteurs 10
1. $\otimes$-catégories 10
2. Contraintes pour une loi $\otimes$ 12
3. Compatibilités entre contraintes 20
4. $\otimes$-foncteurs 29
5. $\otimes$-équivalences 35
II. Gr-catégories et Pic-catégories 40
1. Gr-catégories 40
2. Pic-catégories 44
III. Pic-enveloppe d'une $\otimes$-catégorie 47
1. Le problème de rendre des objets "objets unité" 47
2. Le problème d'inverses des objets 50
3. Applications 51
Bibliographie 54

INTRODUCTION

Ce travail se compose de trois chapitres. Le premier ressemble un certain nombre de définitions et résultats nécessaires pour les chapitres qui suivent sur les catégories munis d'une loi $\otimes$ qu'on peut trouver dans [2], [6], [11], [14], [15], la terminologie employée dans ce chapitre étant de Neantro Saavedra Rivano [14]. Une $\otimes$-*catégorie* est une catégorie munie d'une loi $\otimes$. Une $\otimes$-catégorie *associative* est une $\otimes$-catégorie munie d'un isomorphisme de trifoncteurs appelé *constrainte d'associativité*

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

vérifiant un condition dite *l'axiome du pentagone*. Une $\otimes$-catégorie *commutative* est une $\otimes$-catégorie munie d'un isomorphisme de bifoncteurs appelé *contrainte de commutativité*

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

vérifiant la relation $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X \otimes Y}$. Une contrainte de commutativité est *stricte* si

$$c_{X,X} = \mathrm{id}_{X \otimes X} .$$

pour tout X. Enfin une $\otimes$-catégorie est dite *unifère* s'il est donnée un objet $\mathbf{1}$ et des isomorphismes fonctoriels

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \mathbf{1} \otimes X$$

$$d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \mathbf{1}$$

tels que

$$g_1 = d_1$$

le triple $(\mathbf{1}, g, d)$ constitue une *contrainte d'unité*.

Une ⊗*-catégorie AC* (resp. *AU*) est une ⊗-catégorie associative et commutative (resp. associative et unifère) vérifiant une contrainte condition de compatibilité. Une ⊗*-catégorie ACU* est une ⊗-catégorie AC et AU.

Un ⊗*-foncteur* d'une ⊗-category $\mathscr{C}$ dans une ⊗-catégorie $\mathscr{C}'$ est un couple $(F, \breve{F})$ où F est un foncteur de $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ et $\breve{F}$ un isomorphisme de bifoncteurs

$$\breve{F}_{X,Y} : FX \otimes FY \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$$

Un ⊗*-foncteur associatif* (resp. *commutatif, unifère*) est un ⊗-foncteur d'une ⊗-catégorie associative (resp. commutative, unifère) dans une ⊗-catégorie associative (resp. commutative, unifère) vérifiant une condition dite condition de *compatibilité* avec les contraintes d'associativité (resp. de commutativité, d'unité). Un ⊗*-foncteur AC* est un ⊗-foncteur associatif et commutatif, un ⊗*-foncteur ACU* est ⊗-foncteur associatif, commutatif et unifère.

Pour deux ⊗-foncteurs $(F, \breve{F})$, $(G, \breve{G})$ d'une ⊗-catégorie $\mathscr{C}$ dans une ⊗-catégorie $\mathscr{C}'$, un ⊗*-morphism* de $(F, \breve{F})$ dans $(G, \breve{G})$ est un morphisme fonctoriel $\lambda : F \longrightarrow G$ rendant commutatif le carré

$$\begin{tikzcd} FX \otimes FY \arrow[r, "\breve{F}_{X,Y}"] \arrow[d, "\lambda_X \otimes \lambda_Y"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\lambda_{X \otimes Y}"] \\ GX \otimes GY \arrow[r, "\breve{G}_{X,Y}"] & G(X \otimes Y) \end{tikzcd}$$

Le deuxième chapitre est réservé à l'étude des Gr-catégories et des Pic-catégories. Une Gr*-catégorie* est une ⊗-catégorie AU, dont tous les objets sont inversibles, et dont la catégorie sous-jacente est une groupoïde (i.e. toutes les flèches sont des isomorphismes). Une Gr-catégorie ressemble donc a un groupe. On tire de cette définition que si $\mathscr{P}$ est une Gr-catégorie, l'ensemble $\pi_0(\mathscr{P})$ des classes à isomorphisme près d'objets de $\mathscr{P}$, muni de la loi de composition induite par l'opération ⊗, est un groupe ; le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{1}) = \pi_1(\mathscr{P})$ est un groupe commutatif ; et pour tout $X \in Ob(\mathscr{P})$

$$\gamma_X : u \mapsto u \otimes \mathrm{id}_X = \mathrm{Aut}(\mathbf{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X)$$

$$\delta_X : u \mapsto \mathrm{id}_X \otimes u = \mathrm{Aut}(\mathbf{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X)$$

On attache ainsi à une Gr-catégorie $\mathscr{P}$, des groupes $\pi_0(\mathscr{P})$, $\pi_1(\mathscr{P})$ où $\pi_1(\mathscr{P})$ est commutatif. On peut définir au plus, une action de $\pi_0(\mathscr{P})$ dans $\pi_1(\mathscr{P})$ de la façon suivante : si $s \in \pi_0(\mathscr{P})$ est représenté par $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})$, et $u \in \pi_1(\mathscr{P})$ on pose

$$su = \delta_X^{-1}\gamma_X(u)$$

$\pi_1(\mathscr{P})$ en devient un $\pi_0(\mathscr{P})$-module à gauche.

Soient M un groupe, N un M-module (abélien à gauche). Un *préépinglage* de type (M,N) pour une Gr-catégorie $\mathscr{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

compatibles avec les actions de M sur N, $\pi_0(\mathscr{P})$ sur $\pi_1(\mathscr{P})$. Une Gr-catégorie *préépinglage de type* (M,N) est une Gr-catégorie munie d'un préépinglage. Enfin, un *morphisme* de Gr-catégorie préépinglees de type (M,N) : $(\mathscr{P},\varepsilon) \longrightarrow (\mathscr{P}',\varepsilon')$ est un $\otimes$-foncteur associatif tel que les triangles

$$\begin{tikzcd} \pi_0(\mathscr{P}) \arrow[rr] & & \pi_0(\mathscr{P}') \\ & M \arrow[ul, "\varepsilon_0"] \arrow[ur, "\varepsilon'_0"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(\mathscr{P}) \arrow[rr] & & \pi_1(\mathscr{P}') \\ & N \arrow[ul, "\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon'_1"'] & \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. On en déduit que tout tel morphisme est une $\otimes$-équivalence, donc l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépingleés de type (M,N) est égal à l'ensemble des *composantes connexes* de la 2-catégorie des Gr-catégories préépingleés de type (M,N). Si on considère le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^3(M,N)$ du groupe M à valeurs dans le M-module N (au sens de la cohomologie des groupes [12]) on obtient une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépingleés de type (M,N) et l'ensemble $\mathrm{H}^3(M,N)$.

Une Pic-*catégorie* est une Gr-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité, ce qui fait qu'une Pic-catégorie ressemble à un groupe commutatif. On vérifie aussitôt qu'une condition sur une Gr-catégorie $\mathscr{P}$ est que $\pi_0(\mathscr{P})$ soit commutatif et agisse trivialement sur $\pi_1(\mathscr{P})$. Une Pic-catégorie est *stricte* si sa contrainte de commutativité est stricte.

Soient M, N des groupes abéliens. Un *préépinglage* de type (M,N) pour une Pic-catégorie $\mathscr{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

Une Pic-catégorie *préépinglé de type* (M,N) est une Pic-catégorie munie d'une préépinglage. On définit *les morphismes* de tels objets de la même façon qu'on a fait pour les Gr-catégories.

Pour formuler les propositions, on introduit deux complexes de groupes abéliens libres

$$L_\bullet(M) \colon L_3(M) \xrightarrow{d_3} L_2(M) \xrightarrow{d_2} L_1(M) \xrightarrow{d_1} L_0(M) \longrightarrow M$$
$${}'L_\bullet(M) \colon {}'L_3(M) \xrightarrow{{}'d_3} {}'L_2(M) \xrightarrow{{}'d_2} {}'L_1(M) \xrightarrow{{}'d_1} {}'L_0(M) \longrightarrow M$$

dont le première est une résolution tronqué de M, i.e. est une suite exacte. On obtient une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de Pic-catégories préépingleés de type (M,N) et l'ensemble $\mathrm{H}^2(\mathrm{Hom}({}'L_\bullet(M), N))$. L'exactitude du complexe $L_\bullet(M)$ nous donne la trivialité de la classification des Pic-catégories strictes préépingleés de type (M,N), i.e. toutes les Pic-catégories strictes préépingleés de type (M,N) sont équivalentes.

Enfin la troisième chapitre donne la construction de la solution de deux problèmes universels : celui de rendre des objets "objets unité" et celui d'inverses des objets.

Soient $\mathscr{A}$ une $\otimes$-catégorie AC, $\mathscr{A}'$ une autre $\otimes$-catégorie AC dont la catégorie sous-jacent est un groupoïde, et $(T, \breve{T}) : \mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{A}$ un $\otimes$-foncteur AC. On cherche à rendre les objets TA' de $\mathscr{A}$, $A' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A}')$, "objet unité", c'est à dire on cherche :

1° Une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{P}$;

2° Un $\otimes$-foncteur AC $(D, \breve{D}) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{P}$;

3° Un $\otimes$-isomorphisme

$$\lambda : (D, \breve{D}) \circ (T, \breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\mathscr{P}}, \breve{I}_{\mathscr{P}})$$

où $(I_{\mathscr{P}}, \breve{I}_{\mathscr{P}})$ est le $\otimes$-foncteur $1_{\mathscr{P}}$ constant de $\mathscr{A}'$ dans $\mathscr{P}$. Le triple $(\mathscr{P}, (D, \breve{D}), \lambda)$ est tel qu'il soit universel[1] pour le triple $(\mathscr{Q}, (E, \breve{E}), \mu)$ vérifiant 1°, 2°, 3°.

Pour le problème d'inverses des objets, on considère une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{C}$, une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{C}'$ dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, et un $\otimes$-foncteur ACU $(F, \breve{F}) : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$. On cherche une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{P}$ et un $\otimes$-foncteur ACU $(D, \breve{D}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{P}$ ayant les propriétés suivantes :

1° DFX' est inversible dans $\mathscr{P}$ pour tout $X' \in \operatorname{Ob} \mathscr{C}'$.

2° Pour tout $\otimes$-foncteur ACU $(\mathscr{E}, \breve{\mathscr{E}})$ de $\mathscr{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{Q}$ tel que $\mathscr{E}FX'$ soit inversible dans $\mathscr{Q}$ pour tout $X' \in \operatorname{Ob} \mathscr{C}'$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E', \breve{E}')$ unique (à $\otimes$-isomorphisme unique près) de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{Q}$ tel que $(\mathscr{E}, \breve{\mathscr{E}}) \simeq (E', \breve{E}') \circ (D, \breve{D})$.

Ce problème se ramène au premier. Il suffit de poser $\mathscr{A}' = \mathscr{C}'$, $\mathscr{A} = \mathscr{C}' \times \mathscr{C}$, $TX' = (FX', X')$, et de remarquer que si $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{Q}$ son des $\otimes$-catégories ACU, $\underline{\operatorname{Hom}}^{\otimes, ACU}(\mathscr{C}, \mathscr{Q})$ la catégorie des $\otimes$-foncteurs ACU de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{Q}$, alors on a une équivalence canonique de catégories

$$\underline{\operatorname{Hom}}^{\otimes, ACU}(\mathscr{C} \times \mathscr{C}', \mathscr{Q}) \xrightarrow{\sim} \underline{\operatorname{Hom}}^{\otimes, ACU}(\mathscr{C}, \mathscr{Q}) \times \underline{\operatorname{Hom}}^{\otimes, ACU}(\mathscr{C}', \mathscr{Q}).$$

la $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{P}$ ainsi définie est appelée la *$\otimes$-catégorie de fractions* de la catégorie $\mathscr{C}$ définie par $(\mathscr{C}', (F, \breve{F}))$ la $\otimes$-catégorie de fractions de $\mathscr{C}^{\mathrm{is}}$ définie par $(\mathscr{C}^{\mathrm{is}}, (\mathrm{id}_{\mathscr{C}^{\mathrm{is}}}, \mathrm{id}))$ est une Pic-catégorie, on l'appelle la Pic-*enveloppe* de la catégorie $\mathscr{C}$ et on la note $\underline{\operatorname{Pic}}(\mathscr{C})$. Pour $\mathscr{C} = \mathscr{P}(R)$, catégorie des R-modules projectifs de type fini (R un anneau unitaire) et $\mathscr{P} = \operatorname{Pic}(\mathscr{P}(R))$, on obtient

$$\pi_0(\mathscr{P}) \simeq K^0(R)$$

$$\pi_1(\mathscr{P}) \simeq K^1(R)$$

où $K^0(R)$ est le groupe de Grothendieck et $K^1(R)$ le groupe de Whitehead [1].

La considération de la $\otimes$-catégorie de fractions d'un $\otimes$-catégorie ACU nous donne le résultat suivant :

[1] 1-universel ou 2-universel ?

Soient $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, Z un objet quelconque de $\mathscr{C}$, S le foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ définie par

$$X \mapsto X \otimes Z$$

On appelle *catégorie de suspension* de la $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{C}$ définie par l'objet Z, le triple $(\mathscr{P}, i, p)$, solution du problème universel[2] pour les triples $(\mathscr{Q}, j, q)$ où $\mathscr{Q}$ est une catégorie, j un foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{Q}$, q une équivalence de $\mathscr{Q}$ dans $\mathscr{Q}$, tels que le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "S"] \arrow[d, "j"'] & \mathscr{C} \arrow[d, "j"] \\
\mathscr{Q} \arrow[r, "q"] & \mathscr{Q}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif (*à isomorphisme fonctoriel près*) i.e. $qj \simeq jS$.

Dans le cas où $\mathscr{C}$ est la catégorie homotopique ponctuée $\underline{\mathrm{Htp}}_*$ munie du produit contracté $\wedge$, des contraintes d'associaitvité, de commutativité, d'unité habituelles et Z la 1-sphère S^1, S est par conséquent le foncteur de suspension, on retrouve la définition connue de catégorie de suspension.

Soient $\mathscr{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de la $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{C}$ engendré par Z et $\mathscr{P}$ la catégorie des fractions de $\mathscr{C}$ définie par $(\mathscr{C}', (F, \mathrm{id}))$ où $F : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ est le foncteur d'inclusion. On obtient un foncteur $g : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ de la catégorie de suspension $\mathscr{P}$ dans la $\otimes$-catégorie de fractions $\mathscr{P}$. Si g n'est pas fidèle (ce qui se déduit dans le cas où $\mathscr{C} = \underline{\mathrm{Htp}}_*$, $Z = S^1$ et la loi $\otimes$ est le produit contracté $\wedge$) alors il est impossible de construire dans $\mathscr{P}$ une loi $\otimes$ telle que $\mathscr{P}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, et inversible dans $\mathscr{P}$ et i immergé dans un couple $(i, \breve{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{P}$.

Ces deux problèmes universels ont été posés par Monsieur Grothendieck lors de lors de son séjours à l'Université de Hanoi en Novembre 1967. Je tiens à lui exprimer ici tous nous remerciements pour ses précieuses directives.

[2]problème 2-universelle

§ I. — $\otimes$-CATÉGORIES ET $\otimes$-FONCTEURS

1. $\otimes$-catégories

1. Définition des $\otimes$-catégories

Définition **(1)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie; un foncteur $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ est appelé une* $\otimes$-structure *sur $\mathscr{C}$, ou encore une* loi $\otimes$ *sur $\mathscr{C}$. Une* $\otimes$-catégorie *est une catégorie $\mathscr{C}$ munie d'une $\otimes$-structure qu'on note $\otimes_{\mathscr{C}}$, ou simplement $\otimes$, si aucune confusion n'est possible; a des objets X, Y de $\mathscr{C}$, on associe donc un objet $X \otimes Y$ de $\mathscr{C}$ appelé* produit tensoriel des objets *X et Y, qui dépend fonctoriellement de (X, Y), i.e. à des flèches $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$ de $\mathscr{C}$, on a une flèche $f \otimes g : X \otimes Y \longrightarrow X' \otimes Y'$ de $\mathscr{C}$ appelé* produit tensoriel des flèches *f et g, vérifiant les relations* $\mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{Id}_Y = \mathrm{Id}_{X \otimes Y'}$ *$f'f \otimes g'g = (f' \otimes g')(f \otimes g)$ au cas où f, f' et g, g' sont composables.*

Définition **(2)**. — *Soit X un objet d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$. On dit que X est* régulier *si les foncteurs, définis pour les applications*

$$Y \mapsto Y \otimes X, \quad f : Y \longrightarrow Z \mapsto f \otimes \mathrm{Id}_X : Y \otimes X \longrightarrow Z \otimes X$$

et

$$Y \mapsto X \otimes Y, \quad f : Y \longrightarrow Z \mapsto \mathrm{Id}_X \otimes f : X \otimes Y \longrightarrow X \otimes Z$$

de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ sont des équivalences de catégories. On vérifie aisément que si X est régulier et si $X' \simeq X$ i.e. X' est isomorphique a X, alors X' est aussi régulier.

2. Exemples des $\otimes$-catégories

1) Soit $\mathscr{C}$ une catégorie dans laquelle le produit des couples d'objets existe. Pour tout couple (X, Y), choisissons un produit $(X \times Y, p_X, p_Y)$. On définit alors une $\otimes$-structure sur $\mathscr{C}$ en posant pour des objets X, Y

$$X \otimes Y = X \times Y,$$

pour des flèches $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$,

$$f \otimes g = f \times g.$$

On vérifie sans difficulté que, dans cette $\otimes$-catégorie, les objets réguliers sont les objets finaux.

2) Soit $\mathscr{C}$ la catégorie Mod(A) des modules sur un anneau commutatif unitaire A. Le produit tensoriel de A-modules définit une loi $\otimes$ sur $\mathscr{C}$. Ici les objets réguliers sont les A-modules projectifs de rang 1 [4].

3) Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On définit une catégorie $\mathscr{C}$ de la façon suivante: les objets de $\mathscr{C}$ sont les lacets de X localisés en x_0; si w_1, w_2 sont des lacets, $Hom_{\mathscr{C}}(w_1, w_2)$ est l'ensemble d'homotopies $w_1 \longrightarrow w_2$ modulo la relation d'homotopie. La composition des lacets définit une $\otimes$-structure sur $\mathscr{C}$. Dans cette $\otimes$-catégorie tous les objets sont réguliers.

4) Soient $\mathscr{C}$ une catégorie additive, $\mathscr{E}$ une catégorie cofibré sur $\mathscr{C}$ [10]. Pour tout objet A de $\mathscr{C}$, la fibre de $\mathscr{E}$ en A est notée $\mathscr{E}(A)$. L'homomorphisme [] dans $\mathscr{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\mathscr{E}(A) \times \mathscr{E}(A) \longrightarrow \mathscr{E}(A)$$

qui fait de $\mathscr{E}(A)$ une $\otimes$-catégorie.

5) Soient M un groupe, N un M-module abélien à gauche. On construit une catégorie $\mathscr{C}$ dont les objets sont les éléments de M, les morphismes sont des automorphismes. Pour $S \in M$, on définit

$$Aut_{\mathscr{C}}(S) = \{S\} \times N$$

La composition des flèches dans $\mathscr{C}$ provient de l'addition dans N. On définit sur $\mathscr{C}$ une loi $\otimes$ de la façon suivante: si S_1, $S_2 \in M$, on pose

$$S_1 \otimes S_2 = S_1 S_2;$$

Si (S_1, u_1), (S_2, u_2) sont des morphismes ($u_1, u_2 \in \mathbf{N}$), on pose

$$(S_1, u_1) \otimes (S_2, u_2) = (S_1 S_2, u_1 + S_1 u_2).$$

Ici tous les objets de la $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ sont réguliers en vertu du fait que M est un groupe et l'ensemble des flèches de $\mathscr{C}$ muni de la loi $\otimes$ est aussi un groupe, à savoir le produit semi-direct $M.N$.

Dans le cas où N est un M-module abélien à droite, on définit la loi $\otimes$ dans $\mathscr{C}$ par

$$S_1 \otimes S_2 = S_1 S_2$$

$$(S_1, u_1) \otimes (S_2, u_2) = (S_1 S_2, u_1 S_2 + u_2).$$

2. Contraintes pour une loi $\otimes$

1. Contraintes d'associativité

Définition **(1)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie.* Une contrainte d'associativité *pour $\mathscr{C}$ est un isomorphisme fonctoriel a*

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

*tel que pour des objets X, Y, Z, T de $\mathscr{C}$ le diagramme suivant soit commutatif (*axiome du pentagone*)*

[]

Définition **(2)**. — *On appelle* $\otimes$-catégorie associative une $\otimes$-catégorie *munie d'une contrainte d'associativité.*

Définition **(3)**. — *Deux contraintes d'associativité a et a' d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ sont dites* cohomologues *s'il existe un automorphisme fontoriel φ du foncteur $\otimes$: $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif*

[]

pour des objets X, Y, Z de $\mathscr{C}$.

Exemples.

1) Toutes les $\otimes$-catégories données dans ($\S 1, n°2$) sont des $\otimes$-catégories associatives.

2) Dans l'exemple 5) du ($\S 1, n^2$), il y a une contrainte d'associativité évidente à savoir l'identité. On va vois qu'il y un a d'autres. Se donner un morphisme de trifoncteurs a revient dans ce cas à se donner une application $f : M^3 \longrightarrow N$, sa relation entre f et a étant

$$a_{S_1,S_2,S_3} = (S_1S_2S_3, f(S_1, S_2, S_3)).$$

Lorsqu'on écrit l'axiome du pentagone en utilisant cette relation, on trouve [] où l'on a posé $X = S_1$, $Y = S_2$, $Z = S_3$, $T = S_4$. Autrement dit $f : M^3 \longrightarrow N$ définit une contrainte d'associativité si et seulement si f est un 3-cocycle de M à valeurs dans le M-module N, au sens de la cohomologie des groupes [12]. On explicite de même (1) pour démontrer que des 3-cocyles f, f' déterminent des contraintes d'associativité cohomologues si et seulement si f, f' sont des cocycles cohomologues. On trouve donc, dans ce cas, que le groupe des contraintes d'associativité, sous-groupe du groupe des automorphismes du foncteur $(S_1, S_2, S_3) \mapsto S_1S_2S_3$, est isomorphe au groupe $Z^3(M,N)$ des 3-cocyles de M à valeurs dans N. De même, le groupe des contraintes d'associativité modulo cohomologie est iomorphe au groupe cohomologique

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$, indexé par un ensemble fini non vide totalement ordonné $(I,<)$. au moyen des X_i et de la loi $\otimes$, nous allons construire des objets de $\mathscr{C}$ qu'on appelle des *produits des X_i relativement à l'ordre* $>$. Par exemple pour $I = \{\alpha\}$, nous avons un seul produit X_α; pour $I = \alpha, \beta$ avec $\alpha < \beta$, nous avons aussi un seul produit $X_\alpha \otimes X_\beta$; pour $I = \alpha, \beta, \gamma$ avec $\alpha < \beta < \gamma$, nous avons deux produits $X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma)$ et $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma$; pour $I = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ avec $\alpha < \beta < \gamma\delta$, nous avons cinq produits $X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes (X_\gamma \otimes X_\delta))$, $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes (X_\delta \otimes X_\delta)$, $((X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma) \otimes X_\delta$, $(X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma)) \otimes X_\delta$, $X_\alpha \otimes ((X_\beta \otimes X_\gamma) \otimes X_\delta)$. Parmi ces produits relativement à l'ordre $<$, nous allons en choisie un que nous appelons le produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$.

Définition **(4)**. — *Soit* $(X_i)_{i \in J}$ *une famille d'objets d'une* $\otimes$*-catégorie* $\mathscr{C}$, *indexée par un ensemble totalement ordonné non vide* $(J, <)$. *Pour chaque ensemble non vide fini* $I \subset J$ *(totalement ordonnée par l'ordre induit), on appelle le* produit canonique de la famille Soit $(X_i)_{i \in I}$ relativement à l'ordre $<$, *l'objet de* $\mathscr{C}$, *noté [], et défini par récurrence sur le nombre d'éléments de* I *de la manière suivante :*

1° *Si* $I = \beta$, *alors [];*

2° *Si* I *a* p *éléments* ($p > 1$) *avec* β *le plus grand élément et* I' *l'ensemble des éléments* $< \beta$ *de* I, *alors[].*

D'après cette définition, pour $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, le produit canonique de la famille $(X_i)_{i \in I}$ relativement à l'ordre $\alpha < \beta < \gamma$ est $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma$. Dans ce qui suit de ce $n°$, nous dirons *produit canonique* (resp. *produit*) de la famille $(X_i)_{i \in I}$ relativement à l'ordre $<$ (resp. produit de la famille $(X_i)_{i \in I}$ relativement à l'ordre $<$) si aucune confusion n'est à craindre.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ associative, indexé par un ensemble non vide totalement ordonné $(J, <)$, les ensembles non vides $I \subset J$ considérés ci-dessus sont des ensembles finis totalement ordonnés par l'ordre induit.

Définition **(5)**. — *Pour chaque couple* (I_1, I_2) *de sous-ensembles non vides de* I, *tels que* $I = I_1 \amalg I_2$ *et que tout* $i_1 \in I_1$ *est plus petit que tout* $i_2 \in I_2$, *soit* φ_{I_1, I_2} *un isomorphisme fonctoriel ou les* X_i, $i \in I$, *[] défini par récurrence sur le nombre d'éléments de* I_2 *de la manière suivante:*

1° *Si* $I_2 = \{p\}$ *alors [] est l'identité ;*

2° *Si [] avec* p *le plus grand élément et* I_2' *l'ensemble des éléments* $< \beta$ *de* I_2, *alors* φ_{I_1, I_2} *est définie par le diagramme commutatif suivant []*

Proposition **(1)**. — *Pour chaque triple* (I_1, I_2, I_3) *de sous-ensembles non vides de* I *tels qu'on ait* $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ *et* $i_1 < i_2 < i_3$ *pour* $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, $i_3 \in I_3$, *le diagramme suivant est commutatif []*

Démonstration. Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur le nombre d'éléments de I_3.

1° Si $I_3 = \{\beta\}$, alors (2) devient le diagramme [] qui est commutatif par définition de $\varphi_{I_1,I_2 \amalg \{\beta\}}$

2° Si I_3 a $p > 1$ éléments avec β le plus grand élément et I_3' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_3, nous démontrons la commutativité de (2) en considérant le diagramme suivant [] dans lequel les régions (II), (VII) sont commutatives par [], les régions (I), (IV), (VI) par définition de []; la région (III) par évidence ; la région (VIII) par l'axiome du pentagone ; enfin le circuit extérieur par hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de la région (V) qui n'est pas autre que le diagramme (2) [] de la définition de [] (Déf. 4).

Proposition **(2)**. — *Chaque produit*[3] *Y d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe au produit canonique []par un isomorphisme*

$$y : [] \xrightarrow{\sim} Y$$

fonctoriel en les X_i

Démonstration. Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Pour $I = \{\beta\}$, l'isomorphisme est l'identité $X_\beta = X_\beta$. Pour I ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que Y doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, Z et T étant des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \amalg I_2$ et $i_1 < i_2$ pour $i_1 \in I_1$ et $i_2 \in I_2$, on définit y par la composé des isomorphismes [] où [] sont des isomorphismes définis par hypothèse de récurrence : l'isomorphisme y construit comme ci-dessus est appelé *l'isomorphisme canonique*.

Proposition **(3)**. — *Soient I_1, I_2, I_3 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ et $i_1 < i_2 < i_3$ pour $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, $i_3 \in I_3$, et soient Y, Z, T des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, $(X_i)_{i\in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme [] est commutatif, b et b' étant isomorphismes canoniques.*

Démonstration. Considérons le diagramme [] où [] sont les isomorphismes canoniques. Remarquons d'abord que les composés des isomorphismes horizontaux du diagramme donnent respectivement les isomorphismes canoniques [] du

[3] []

diagramme (3). On a la commutativité de la région (I) en vertu de la proposition 1, et celle de la région (II) par la naturalité de a. D'où la commutativité du circuit extérieur, et donc celle de (3).

On peut énoncer la proposition 3 sous forme plus générale, dont la vérification est immédiate.

Proposition **(4)**. — *Soient Y_1, Y_2 des produits de $(X_i)_{i\in I}$ et $\tau : Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ un isomorphisme contient à l'aide de a, a^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$; alors le diagramme [] où b_1, b_2 sont des isomorphismes canoniques, est commutatif.*

Proposition **(5)**. — *Soient Y_1, Y_2,... Y_n des produits de $(X_i)_{i\in I}$ $\tau_{i,i+1} : Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$ et $\tau_{n,1} : Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ des isomorphismes contraints au moyen de a, a^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$. Alors le polygone suivant [] est commutatif.*

Démonstration. En effet, le diagramme [] où les b_i, $i = 1, 2, .., n$, sont des isomorphismes canoniques, a les régions (2), (3), ... (n) et le circuit extérieurs commutatifs en vertu de la proposition 4. D'où la commutativité de la région (1) qui est la polygone considéré de la proposition.

Exemple

3) En vertu de la proposition 5, le pentagone suivant est commutatif []

2. Contraintes de commutativité

Définition **(6)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une* contrainte de commutativité *pour $\mathscr{C}$ est un isomorphisme fonctoriel c*

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

tel qu'on ait

$$c_{X,Y} \circ c_{Y,X} = \mathrm{Id}_{Y\otimes X} \tag{4}$$

Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité est appelé une $\otimes$-catégorie commutative.

Définition **(7)**. — *Deux contraintes de commutativité c et c' d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ sont dites* cohomologues *s'il existe une automorphisme fonctoriel φ du foncteurs*

$\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ *tel que le diagramme suivante soit commutatif*

[]

Définition **(8)**. — *Si $\mathscr{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité c, X un objet de $\mathscr{C}$, on appelé* symétrie canonique *de $X \otimes X$ l'automorphisme*

$$c_X = c_{X,X} : X \otimes X \xrightarrow{\sim} X \otimes X.$$

On dit que la contrainte de commutativité c est stricte *si les symétries canoniques sont des identités; $\mathscr{C}$ est alors appelé une* $\otimes$-catégorie strictement commutative.

Exemple. — Dans l'exemple 5) de ($\S 1, n°2$), on vérifie aussitôt qu'il existe des contraintes de commutativité si te seulement si M est commutatif et opère trivialement sur N. Se donner une contrainte de commutativité c revient dans ce cas à se donner une fonction antisymétrique $k : M^2 \longrightarrow N$, la relation entre k et c étant

$$c_{S_1,S_2} = (S_1 S_2, k(S_1, S_2)).$$

Ici le groupe des contraintes de commutativité, sous-groupe du groupe des automorphismes du foncteurs $(S_1, S_2) \mapsto S_1 S_2$, est isomorphe canoniquement au groupe $\mathrm{Aut}^2(M, N)$ des fonctions antisymétriques $M^2 \longrightarrow N$. Quand on écrit la commutativité de diagramme [] par S_1, S_2 respectivement et en posant [] on obtient [] avec [] Il en résulte que le groupe des classes de cohomologie de contraintes de commutativité dans ce cas s'identifie à [] où [] est le groupe des fractions antisymétriques de la forme [] avec $h \in C^2(M, N)$.

3. Contraintes d'unité

Définition **(9)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une* contrainte d'unité *pour $\mathscr{C}$, ou simplement une* unité *pour $\mathscr{C}$ est un triple $(\mathbb{1}, g, d)$, où $\mathbb{1}$ est un objet de $\mathscr{C}$ appelé* objet unité *et g, d sont des isomorphismes fonctoriels*

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{1} \otimes X, \quad d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \mathbb{1}$$

vérifiant la condition

$$g_{\mathbb{1}} = d_{\mathbb{1}}.$$

On note encore d l'isomorphisme $g_{\mathbb{1}} = d_{\mathbb{1}}$. On peut remarquer que les foncteurs

$$X \mapsto \mathbb{1} \otimes X \quad \text{et} \quad X \mapsto X \otimes \mathbb{1}$$

sont des équivalences de catégories, d'où l'objet $\mathbb{1}$ est régulier (§1, n°1, Déf. 2). Une $\otimes$-catégorie munie d'une unité est dite *unifère*.

Proposition **(6)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte d'unité* $(\mathbb{1}, g, d)$. *Pour tout objet X de $\mathscr{C}$, on a les formules*

$$g_{\mathbb{1}\otimes X} = \mathrm{Id}_{\mathbb{1}} \otimes g_X, \quad d_{X\otimes\mathbb{1}} = d_X \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{1}}\,.$$

Démonstration. La naturalité de g, d donne les diagrammes commutatifs [] ce qui démontre les formules.

Proposition **(7)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une unité* $(\mathbb{1}, g, d)$ *; alors le monoïde* $\mathrm{End}(\mathbb{1})$ *est commutatif.*

Démonstration. Grâce a l'isomorphisme [] il suffit donc de prouver que $\mathrm{End}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})$ est commutatif. Puisque $\mathbb{1}$ est régulier (Déf. 2), tout endomorphisme f de $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ peut s'exprimer

$$f = u \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{1}} \otimes v, \quad u, v \in \mathrm{End}(\mathbb{1}).$$

Si f' est un autre endomorphisme, on a

$$f = u' \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{1}} \otimes v'$$

d'où

$$f f' = (u \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{1}})(\mathrm{Id}_{\mathbb{1}} \otimes v') = u \otimes v' = (\mathrm{Id}_{\mathbb{1}} \otimes v')(u \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{1}}) = f' f$$

Remarques.

1) En vertu de la naturalité de g, d et de la relation $g_{\mathbb{1}} = d_{\mathbb{1}}$, on a $u \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{1}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{1}} \otimes u$ pour tout $u \in \mathrm{End}(\mathbb{1})$.

2) Dans la démonstration ci-dessus, on utilise seulement l'hypothèse que $\mathbb{1}$ soir régulier et $\mathbb{1} \simeq \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$. Donc la proposition reste valable pour tout objet régulier Z tel que $Z \simeq Z \otimes Z$.

Nous allons maintenant définir deux homomorphismes γ, δ du monoïde $\mathrm{End}(\mathbb{1})$ dans le monoïde $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathscr{C}})$ des morphismes fonctoriels du foncteur identique $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$, qui nous serviront au chapitre II.

Proposition **(8)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une unité $(\mathbb{1}, g, d)$. Les applications [] définies respectivement par les diagrammes commutatifs [] sont des homomorphismes transforment l'élément unité en l'élément unité pour tout objet X de $\mathscr{C}$.*

Démonstration. La vérification est immédiate. En plus, la naturalité de g, d donne

$$\gamma_{\mathbb{1}}(u) = \delta_{\mathbb{1}}(u) = u$$

Proposition **(9)**. — $(\gamma_X(u))_{X\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$, $(\delta_X(u))_{X\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$ *sont des morphismes fonctoriels du foncteur identique* $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ *de* $\mathscr{C}$.

Démonstration. Considérons les diagrammes [] où f est une flèche quelconque. Dans ces diagrammes la commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII) est donnée par la naturalité de g, d; celle de (II) et (VII) est immédiate en composant les flèches ; enfin celle de (IV), (V), (IX), (X) résulte des diagrammes commutatifs (8). On en déduit la commutativité des [] extérieurs, ce qui montre la fonctorialité de $\gamma_X(u)$ et $\delta_X(u)$.

Proposition **(10)**. — *Les applications [] sont des homomorphismes de monoïdes.*

Démonstration. Résultat immédiat des propositions 8 et 9.

Exemple. Dans l'exemple 5 du (§1, $n°2$), la donnée d'une unité revient à celle d'une couple [] de foncteurs $M \longrightarrow N$ vérifiant la relation []. Dans les diagrammes (8), si on remplace X par S, on trouve

$$\gamma_S(u) = (S, u), \quad \delta_S(u) = (S, Su)$$

ce qui montre que $\gamma \neq \delta$ en général. Cet exemple montre qu'une $\otimes$-catégorie peut avoir plusieurs unités.

Définition **(10)**. — *Soient* $(\mathbb{1}, g, d)$, $(\mathbb{1}', g', d')$ *des unités pour la $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$. On appelle* morphisme *de* $(\mathbb{1}, g, d)$ *dans* $(\mathbb{1}', g', d')$ *un morphisme* $\lambda : \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{1}'$ *ren-*

dant commutatif les diagrammes [] pour tout objet X de $\mathscr{C}$. En faisant $X = \mathbb{1}$, on voit que λ est un isomorphisme, et que pour $(\mathbb{1}, g, d)$, $(\mathbb{1}', g', d')$ données, il y a au plus un te λ[4]

3. Compatibilités entre contraintes

1. Associativité et commutativité

Définition **(1)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte d'associativité a et une contrainte de commutativité c pour $\mathscr{C}$ sont* compatibles *si pour des objets X, Y, Z de $\mathscr{C}$, le diagramme suivant est commutatif (*axiome de l'hexagone*) [] Un couple (a, c) vérifiant l'axiome de l'hexagone est appelée une* contrainte mixte d'associativité-commutativité, *ou plus simplement une* contrainte AC *pour la catégorie $\mathscr{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AC est appelée une* $\otimes$-catégorie AC*. Elle est dite* stricte *si c l'est (§2, $n^\circ 2$, Déf. 8).*

Définition **(2)**. — *Deux contraintes AC (a, c) et (a', c') pour une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ sont dites* cohomologues *s'il existe un automorphisme fonctoriel φ du foncteur $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ tel que les diagrammes (1) du (§2, $n^\circ 1$) et (5) du (§2, $n^\circ 2$) soient commutatifs.*

Ici, pour avoir une proposition analogue à (§2, $n^\circ 1$, Prop. 5), nous allons []] les notions de produit et produit canonique d'une famille d'objets de $\mathscr{C}$ $(X_i)_{i\in I}$ relativement à un ordre donnée dans I. Comme nous possédons maintenant, en plus de la contrainte d'associaitivité , la contrainte de commutativité, nous allons donc introduire la notion de produit d'une famille $(X_i)_{i\in I}$. Dans ce qui suit de ce n°, on considère une famille d'objets $(X_i)_{i\in J}$ d'une $\otimes$-catégorie AC $\mathscr{C}$, indexé par un ensemble non vide totalement ordonné $(J, <)$. Les ensembles $I \subset J$ considérés sont supposés finis, non vide. On appelle *ordre canonique* de I l'ordre induit. Donc si I possède p éléments, I [] autres que l'ordre canonique.

Définition **(3)**. — *Un* produit *de $(X_i)_{i\in I}$ est le produit de $(X_i)_{i\in I}$ à un ordre quelconque de I.*

[4] Il y []

Exemple. Soit I α,β,γ avec l'ordre canonique $\alpha < \beta < \gamma$. En dehors de cet ordre, I possède cinq autre ordres. Donc on a 12 produits de $(X_i)_{i\in I}$ qui sont [] Nous notons toujours par [] le produit canonique de $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre canonique.

Définition **(4)**. — *Pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \coprod I_2$, définissons un isomorphisme fonctoriel en les X_i, $i \in I$ [] par récurrence sur le nombre d'éléments de I, Notons β le plus grand élément de I.*

1. 1° *[]*

2. 2° *I a $p > 2$ éléments []*

Proposition **(1)**. — *Par chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles non vides de I tels qu'on ait $I = I_1 \coprod I_2$, le diagramme suivant est commutatif []*

Démonstration. En vertu de la symétrie de I_1, I_2 dans (7) on peut toujours supposer le plus grand éléments β de I appartement à I_1 pour fixer les idées. Pour démontrer la commutativité de (7) nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de I. D'abord remarquons que pour $I_1 = \{\beta\}$, le diagramme (7) devient [] compte tenu des relations (3) et (5). Ce diagramme est évidemment commutatif, en particulier pour $I = \{\alpha, \beta\}$.

Supposons la commutativité de (7) pour les ensembles I ayant $p - 1 \leq 2$ éléments, nous allons la montrer pour les ensembles I ayant p éléments. Pour cela considérons le diagramme suivant [] où I_1' est l'ensemble des éléments $< \beta$ de I_1. Dans ce diagramme la région (I) est commutative par hypothèse de récurrence ; (II) par définition de []. (diag (6) ; (IV)) par l'axiome de l'hexagone ; et enfin le circuit extérieur par définition de [] (diag (4)). On en déduit la commutativité de (III), d'où l'assertion.

Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$ nous allons considérons les diagrammes suivants []

Lemme. — *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Le diagramme (8) et (9) sont commutatifs.

b) Le diagramme (10) et (11) sont commutatifs.

c) Le diagramme (12) et (13) sont commutatifs.

Démonstration. [ ]. Considérons le diagramme suivant [ ] où la commutativité de régions (II), (VI) et des [ ] extérieurs [ ] de la proposition 1 ; celle de (III) vient de la naturalité de [ ]

Proposition **(2)**. — *Pour chaque triple* (I_1, I_2, I_3) *de sous-ensembles non vides de* I *tels que* $I = I_1 \coprod I_2 \coprod I_3$, *le diagramme (8) est commutatif.*

Démonstration. Soit β le plus grand élément de I. D'après le lemme précédent, pour démontrer la commutativité de (8), on peut toujours supposer $\beta \in I_3$. D'abord remarquons que pour $I_3 = \ \beta$ le diagramme (8) devient [ ]

Ce diagramme est commutatif par définition de [ ] (diag (4)) ; celle de (II), (VI) résulte de la naturalité de a ; celle de (VII) résulte de l'axiome du pentagon ; enfin celle du circuit extérieur est donnée par l'hypothèse de récurrence. D'où la commutativité de (IV).

Proposition **(3)**. — *Chaque produit* Y *d'une famille* $(X_i)_{i \in I}$ *est isomorphe au produit canonique [ ] relativement à l'ordre canonique par un isomorphisme [ ] fonctoriel en les* X_i.

Démonstration. Nous allons construire y par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Pour $I = \{\beta\}$ l'isomorphisme est l'identité $X_\beta = X_{\beta'}$ pour I ayant $p > 1$ éléments, en remarquant que Y doit être de la forme $Y = Z \otimes T$, Z et T étant de produits de $(X_i)_{i \in I_1}$, $(X_i)_{i \in I_2}$ respectivement avec $I = I_1 \amalg I_2$, l'isomorphisme y est défini comme le composé des isomorphismes [ ] où z et t sont des isomorphismes données par l'hypothèse de récurrence. L'isomorphisme y construit comme ci-dessus est appelé *l'isomorphisme canonique*.

Nous allons maintenant énoncer des propositions dont la démonstration est analogue à celle dans (§2, $n°$1, Prop. 3, 4 et 5).

Proposition **(4)**. — *Soient* I_1, I_2, I_3 *des sous-ensembles non vides de* I *tels que* $I = I_1 \amalg I_2 \amalg I_3$ *; et soient* Y, Z, T *des produits de* $(X_i)_{i \in I_1}$, $(X_i)_{i \in I_2}$, $(X_i)_{i \in I_3}$ *respectivement. Alors le diagramme suivant est commutatif,* b *et* b' *étant isomorphismes canoniques définis dans la prop. 3 [ ]*

Proposition **(5)**. — *Soient I_1, I_2 des sous-ensembles non vides de I tels que $I = I_1 \coprod I_2$; et soient Y, Z des produits de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement. Alors le diagramme [] est commutatif, f et f' étant les isomorphismes canoniques.*

Proposition **(6)**. — *Soient Y_i, Y_2 des produits de $(X_i)_{i\in I}$ et $\mu : Y_1 \longrightarrow Y_2$ un isomorphisme construit à l'aide de a, a^{-1}, c, c^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$; alors le diagramme [] où b_1, b_2 sont les isomorphismes canoniques, est commutatif.*

Proposition **(7)**. — *Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des produits [] des isomorphismes construits au moyen de a, a^{-1}, c, c^{-1}, des identités et de la loi $\otimes$; alors le diagramme suivant [] est commutatif*

Exemple. Le polygone suivant est commutatif []

Remarque. Supposons $X_1 = X_4 = X$ et $X_2 = X_5 = Y$ dans le polygone ci-dessus. Alors si on remplace la flèche [] le polygone n'est plus commutatif sauf dans le cas où la catégorie $\mathscr{C}$ est stricte. Donc quand on est dans une $\otimes$-catégorie AC non stricte et on a [] avec un polygone du [] dont les sommets sont des produits d'objets non différents, il nous faut prouver [].

2. Associativité et unité

Définition **(5)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie. On dit qu'une contrainte d'associativité a et une contrainte d'unité $(\mathbb{1}, g, d)$ pour $\mathscr{C}$ sont* compatibles, *si pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathscr{C}$ les triangles suivants [] sont commutatifs.*

Un couple comme ci-dessus est appelé une contrainte mixte d'associativité-unité, *ou plus simplement une* contrainte AU *pour la $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AU est appelé une* $\otimes$-catégorie AU.

Nous allons voir que ces conditions de compatibilité sont [].

Proposition **(8)**. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) (16) est commutatif.

b) (15) et (17) sont commutatifs.

c) les diagrammes suivants sont commutatifs pour tout X de $\mathscr{C}$ []

Démonstration. b) $\Rightarrow$ c). Évident. c) $\Rightarrow$ a). Considérons les diagrammes suivants [] où la commutativité des régions (I), (IV) résulte de la fonctorialité de a et il en est de même de celle de (IX) si on remarque qu'on a [] ; celle de (II) et du circuit extérieur de (18) est donnée par l'hypothèse en tenant compte des relations [] D'où la commutativité du circuit extérieur de (19).

a) $\Rightarrow$ b). Considérons les diagrammes ci-dessus dont la commutativité du région (I), (IV), (VII), (IX) découle de la naturalité de a ; celle de (III), (VIII) et des circuits extérieures résulte de l'hypothèse ; [] (V), (X) [] de l'axiome du pentagone. On en déduit la commutativité de (II) et (VI) et par conséquent celle de (15) et (17) puisque $\mathbb{1}$ est régulier (§$1 n^\circ 1$, Déf. 2). [] Soit toujours $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie AC avec []

Définition **(6)**. — *Pour chaque couple* (I_1, I_2) *de sous-ensembles de* I *tels que* $I = I_1 \amalg I_2$ *et que la relation* $i_1 \in I_1$ *et* $i_2 \in I_2$ *implique la relation* $i_1 < i_2$*, définissons un isomorphisme fonctoriel en les* X_i*,* $i \in I$*, [] de la manière suivante : []*

Proposition **(9)**. — *Pour chaque triple* (I_1, I_2, I_3) *de sous-ensembles de* I *tels que [] le diagramme suivant est commutatif []*

Démonstration. []

Proposition **(10)**. — *Pour toute famille* $(X_i)_{i \in I}$*, les diagrammes suivantes sont commutatifs []*

Démonstration. On a la commutativité de ces diagrammes en vertu de (20), (21), (22).

Proposition **(11)**. — *Chaque produit* Y *d'une famille* $(X_i)_{i \in I}$ *est isomorphe au produit canonique [] fonctoriel en les* X_i*,* $i \in I'$*,* I' *étant le sous-ensemble de* I *se composant des éléments* $i \in I$ *tels que* $X_i \neq 1$.

Démonstration. []

Ici nous avons aussi les propositions don la démonstration est comme celle dans (§$2, n^\circ 1$).

Proposition **(12)**. — *Soient* I_1*,* I_2*,* I_3 *des sous-ensembles non vides de* I *tels que* $I = I_1 I_2 \amalg I_3$ *et* $i_1 < i_2 < i_3$ *pour* $i_1 \in I_1$*,* $i_2 \in I_2$*,* $i_3 \in I_3$ *; et soient* Y*,* Z*,* T *des produits* *de $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$, $(X_i)_{i\in I_3}$ respectivement. Alors le diagramme [] est commutatif ; b et b' étant les isomorphismes canoniques et I' l'ensemble des éléments i de I tels que $X_i \neq 1$.*

Proposition **(13)**. — *Soit Y un produit d'une famille non vide $(X_i)_{i\in I}$, les diagrammes suivants sont commutatifs [] y, y', y'' étant les isomorphismes canoniques ; I' l'ensemble des éléments i de I tels que $X_i \neq \mathbb{1}$.*

Proposition **(14)**. — *Soient Y_1, Y_2 des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$ respectivement ou $I_1 \subset I_2$ et $X_i = \mathbb{1}$ pour $i \in$ []. Soit [] est commutatif ; y_1, y_2 étant les isomorphismes canoniques ; I_1' l'ensemble des $i \in I_1$ tels que $X_i \neq 1$.*

Proposition **(15)**. — *Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ des produits des familles non vides $(X_i)_{i\in I_1}$, $(X_i)_{i\in I_2}$,... $(X_i)_{i\in I_n}$ respectivement et tels que []*

I étant [] des $i \in I_j$ pour lesquels $X_i \neq \mathbb{1}$, ce qui veut dire que l'ensemble des $i \in I_j$ [] des identités et de la loi $\otimes$. Alors le polygone suivant [] est commutatif.

Exemples.

1. 1) Le polygone suivant est commutatif []

2. 2) Reprenons l'exemple 5) du ($\S 1, n°2$). Se donner une contrainte d'associativité a et une contrainte d'unité $(\mathbb{1}, g, d)$ dans ce cas revient à se donner respectivement un 3-cocycle f de M à valeurs dans le M-module N ($\S, n°1, Ex$) et un couple (l, r) de fonctions $M \longrightarrow N$ vérifiant $l(1) = r(1)$ ($\S 2, n°3, Ex$), las relations entre a et f, (g, d) et (l, r) étant :

$$a_{S_1,S_2,S_3} = (S_1S_2S_3, f((S_1, S_2, S_3)))$$

$$g_S = (S, P(S))$$

$$d_S = (S, r(S))$$

Nous supposons ici, pour simplifier le problème, que f est un 3-cocycle normalisé, i.e.

[]

Proposition **(16)**. — *Soient* $(a,(\mathbb{1},g,d))$ *et* $(a,(\mathbb{1}',g',d'))$ *deux contraintes AU pour une* $\otimes$*-catégorie* $\mathscr{C}$. *Alors il existe un morphisme unique* λ *qui est un isomorphisme de* $(\mathbb{1},g,d)$ *dans* $(\mathbb{1}',g',d')$.

Démonstration. S'il existe un morphisme [ ]

Puisque $\mathbb{1}$ est régulier, alors il existe deux isomorphismes

$$\lambda,\lambda' : \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{1}'$$

tels que [ ]

Proposition **(17)**. — *Soit* $\mathscr{C}$ *une* $\otimes$*-catégorie AU et soit* $(a,(\mathbb{1},g,d))$ *sa contrainte AU. On a les formules suivantes* $(\S 2, n^\circ 3, Prop.8)$ *où* $X,Y \in \mathscr{C}$, $u \in \mathrm{End}(\mathbb{1})$ *[ ]*

Démonstration. Considérons le diagramme suivante [ ] D'où la commutativité des [ ] extérieurs, ce qui nous donne les formules considérées.

3. Commutativité et unité

Définition **(7)**. — *Soit* $\mathscr{C}$ *une* $\otimes$*-catégorie. Une contrainte de commutativité c et une contrainte d'unité* $(\mathbb{1},g,d)$ *sont dites* compatibles*, si pour tout objet* X *de* $\mathscr{C}$, *le triangle [ ] est commutatif. On a en particulier [ ]*

Un couple $(c,(\mathbb{1},g,d))$ comme ci-dessus est appelé une *contrainte mixte de commutativité unité*, ou plus simplement une *contrainte CU* pour la $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte CU est appelé une $\otimes$*-catégorie CU*.

Proposition **(18)**. — *Dans une* $\otimes$*-catégorie CU* $\mathscr{C}$, *les homomorphismes* γ_X *et* δ_X $(\S 2, n^\circ 3,$ *Prop* $8)$ *sont égaux pour tout objet* X *de* $\mathscr{C}$.

Démonstration. Considérons le diagramme suivant [ ] où le commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de γ_X et δ_X; celle de (II) résulte de la naturtalité de c; et enfin cette de (IV), (V) résulte de la condition de compatibilité (31). On obtient $\gamma_X(u) = \delta_X(u)$ pour tout $u \in \mathrm{End}(\mathbb{1})$, donc

$$\gamma_X = \delta_X \tag{33}$$

pour tout $X \in (\mathscr{C})$.

4. Associativité, commutativité et unité

Définition **(8)**. —

Proposition **(19)**. —

Démonstration.

Proposition **(20)**. —

Démonstration.

Proposition **(21)**. —

Démonstration.

Proposition **(22)**. —

Démonstration.

Proposition **(23)**. —

Démonstration.

Proposition **(24)**. —

Proposition **(25)**. —

Proposition **(26)**. —

Proposition **(27)**. —

Proposition **(28)**. —

Exemple. —

5. Objets invertibles

Dans ce n°, $\mathscr{C}$ désigne une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AU $(a, (1, g, d))$.

Définition **(9)**. — *Soit X un objet de $\mathscr{C}$. On dit que X est* inversible *s'il existe des objets X', X'' de $\mathscr{C}$ tels que $X' \otimes X \simeq 1$, $X \otimes X'' \simeq 1$.*

Définition **(29)**. — *Si [] alors $X' \simeq X''$.*

Démonstration. []

Corollaire. — *X est inversible si et seulement s'il existe X' tel que $X' \otimes X \simeq 1$ et $X \otimes X' \simeq 1$.*

Démonstration. []

Définition **(30)**. — *X est inversible si et seulement si X est régulier.*

Démonstration. []

Définition **(31)**. — *Soient X un objet*

Démonstration. []

Définition **(10)**. —

Proposition **(32)**. —

Proposition **(33)**. —

Proposition **(34)**. —

Démonstration.

Proposition **(35)**. —

Démonstration.
Exemple.

Proposition **(36)**. —

Proposition **(37)**. —

Démonstration.

4. ⊗-foncteurs

1. Définition de ⊗-foncteurs

Définition **(1)**. — *Un* ⊗-foncteur *d'une ⊗-catégorie $\mathscr{C}$ dans une ⊗-catégorie $\mathscr{C}'$ est un couple $(F, \breve{F})$ d'une foncteur $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ et d'un isomorphisme fonctoriel*

$$\breve{F}_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$$

On dit que $(F, \breve{F})$ est un ⊗-foncteur *strict*, si pour tous $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a

$$F(X \otimes Y) = FX \otimes FY$$

$$\breve{F}_{X,Y} = \mathrm{Id}_{F(X \otimes Y)}$$

Si $(F, \breve{F})$, $(G, \breve{G})$ sont des ⊗-foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$, un ⊗-*morphisme* de $(F, \breve{F})$ dans $(G, \breve{G})$ est un morphisme fonctoriel $\lambda : F \longrightarrow G$ rendant commutatif, pour $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, le carré [] Si de plus λ est un isomorphisme de foncteurs on dit qu'on a un ⊗-*isomorphisme*. En autre, si $(H, \breve{H})$ est une autre ⊗-foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et $\mu : G \longrightarrow H$ un ⊗-morphisme de $(G, \breve{G})$ dans $(H, \breve{H})$, on vérifie aussitôt que $\mu \circ \lambda$ est aussi un ⊗-morphisme qu'on appelle le ⊗-*morphisme composé* des ⊗-morphisme λ et μ. On obtient aussi une catégorie $\mathscr{H}om^{\otimes}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ dont les objets sont les ⊗-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et les morphismes les ⊗-morphismes.

Définition **(2)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ des ⊗-catégories, $(F, \breve{F})$ et $(F', \breve{F}')$ des ⊗-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}''$ respectivement. Nous définissons le* ⊗-foncteur composé *de $(F, \breve{F})$ et $(F', \breve{F}')$ comme le couple $(F'', \breve{F}'')$, noté $(F', \breve{F}') \circ (F, \breve{F})$ ou $(F'F, \breve{F'F})$, où*

$$F'' = F' \circ F$$

$$\breve{F}'' = (F' * \breve{F}) \circ (\breve{F}' * (F, F))$$

c'est à dire que pour des objets X, Y de $\mathscr{C}$, $\breve{F}''_{X,Y}$ est défini par le triangle commutatif []

En outre, si $(G, \breve{G}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$, $(G', \breve{G}') : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}''$ sont aussi des ⊗-foncteurs, $\lambda : F \longrightarrow G$, $\lambda' : F' \longrightarrow G'$ des ⊗-morphismes, on vérifie immédiatement que $F' * \lambda$ et $\lambda' * G$ sont des ⊗-morphismes, d'où $\lambda' * \lambda : F'F \longrightarrow G'G$

est aussi un $\otimes$-morphisme. On dispose donc d'une 2-catégorie $\otimes$—, ayant comme objets les $\otimes$-catégories, et comme catégories de morphismes les $\mathscr{H}om^{\otimes}(\mathscr{C},\mathscr{C}')$.

2. Compatibilités avec des contraintes

Définition **(3)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'associativité a et a' respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F,\breve{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est* compatible *avec a, a', si pour tous $X,Y,Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, le diagramme [] est commutatif. On dit alors que $(F,\breve{F})$ est un* $\otimes$-foncteur associatif. *La sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om^{\otimes}(\mathscr{C},\mathscr{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs associatifs est notées $\mathscr{H}om^{\otimes,A}(\mathscr{C},\mathscr{C}')$.*

Proposition **(1)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'associativité a, a', a'' respectivement; $(F,\breve{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$, $(F',\breve{F}') : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}''$ des $\otimes$-foncteurs associatifs. Alors le $\otimes$-foncteur composé $(F'F, F'F)$ est aussi associatif.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant [] dans lequel la commutativité des régions [] est compatible avec a et a''.

Remarque.

1) Avec la définition 3, on peut dire que deux contraintes d'associativité a, a' sur $\mathscr{C}$ sont cohomologues (§2, $n°1$, Déf. 3) si et seulement si il existe un $\otimes$-foncteur $(F,\breve{F}) : (\mathscr{C},a) \longrightarrow (\mathscr{C},a')$ compatible avec a, u' et tel que $F = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$.

Définition **(4)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes de commutativité c et c' respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F,\breve{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est* compatible *avec c, c', si pour tous $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, le diagramme [] est commutatif. On dit alors que $(F,\breve{F})$ est un* $\otimes$-foncteur commutatif. *La sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om^{\otimes}(\mathscr{C},\mathscr{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs commutatifs est notée $\mathscr{H}om^{\otimes,C}(\mathscr{C},\mathscr{C}')$.*

On vérifie aussitôt la proposition suivante :

Proposition **(2)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'associativité commutativité c, c', c'' respectivement; $(F,\breve{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$, $(F',\breve{F}) : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}''$ des $\otimes$-foncteurs commutatifs. Alors le $\otimes$-foncteur composé $(F'F, F\breve{'}F)$ est aussi commutatif.*

Remarque.

2) Dans le langage de la définition 4, on dit que deux contraintes de commutativité c, c' sur $\mathscr{C}$ sont cohomologues (§, n°2, Déf. 7). Si et seulement s'il existe un $\otimes$-foncteur $(F, \breve{F}) : (\mathscr{C}, c) \longrightarrow (\mathscr{C}, c')$ compatible avec c, c' et tel que $F = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$.

Définition **(5)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'unité $(\mathbb{1}, g, d)$, $(\mathbb{1}', g', d')$ respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F, \breve{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est* compatible *avec $(\mathbb{1}, g, d)$, $(\mathbb{1}', g', d')$ s'il existe un isomorphisme $\widehat{F} : \mathbb{1}' \longrightarrow F(\mathbb{1})$ rendant commutatifs les diagrammes [] On dit alors que $(F, \breve{F})$ est un* $\otimes$-foncteur unifère.

Remarque.

3) L'isomorphisme $\widehat{F}$ est unique. En effet, en vertu de l'existence de $\widehat{F}$, on a $F(\mathbb{1})$ régulier puisqu'il est isomorphe à $\mathbb{1}'$ qui est régulier. Donc dans (3), [] on a l'unicité de $\widehat{F}$ du fait que $F(\mathbb{1})$ est régulier.

Proposition **(3)**. — *Soient $\mathscr{C}^*$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ des $\otimes$-catégories munies de contraintes d'unité $(\mathbb{1}, g, d)$, $(\mathbb{1}', g', d')$, $(\mathbb{1}'', g'', d'')$ respectivement ; $(F, \breve{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$, $(F', \breve{F}') : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}''$ des $\otimes$-foncteurs unifères. Alors le $\otimes$-foncteurs composé $(F'F, \breve{F'F})$ est aussi unifère.*

Démonstration. Soient $\breve{F} : \mathbb{1}' \xrightarrow{\sim} F(\mathbb{1})$, $\breve{F}' : \mathbb{1}'' \xrightarrow{\sim} F'(\mathbb{1}')$ [] Définissons un isomorphisme, noté $\breve{F'F}$, entre $\mathbb{1}''$ et $F'F(\mathbb{1})$ par le triangle commutatif suivant [] Montrons qu'on a la commutativité des carrés [] Nous démontrons seulement la commutativité de l'un des carrés, la démonstration pour l'autre étant analogue. Pour cela considérons le diagramme [] dans lequel la commutativité de la région (II) vient de la définition de $\breve{F'F}$; celle de (III) et du contour extérieure est le résultat de la compatibilité de $(F, \breve{F})$, $(F', \breve{F}')$ avec les unités ; celle de (IV) de la définition de $\breve{F'F}$; enfin celle de (V) de la fonctorialité de $\breve{F}'$. D'où la commutativité de (I).

Définition **(6)**. — *Soient $(F, \breve{F})$, $(G, \breve{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ avec $\breve{F} : \mathbb{1}' \xrightarrow{\sim} F(\mathbb{1})$, $\breve{G} : \mathbb{1}' \longrightarrow G(\mathbb{1})$. On dit qu'un $\otimes$-morphisme $\lambda : F \longrightarrow G$ est* *unifère si le triangle [] est commutatif. D'où si λ est un $\otimes$-morphisme unifère, $\lambda_{\mathbb{1}}$ est un isomorphisme. La réciproque est aussi vraie.*

Proposition **(4)**. — *Soient $(F,\breve{F})$, $(G,\breve{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ avec $\widehat{F} : \mathbb{1}' \xrightarrow{\sim} F(\mathbb{1})$ les isomorphismes de compatibilité. Un $\otimes$-morphisme $\lambda : F \longrightarrow G$ tel que $\lambda_{\mathbb{1}}$ soit un isomorphisme est unifère.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant [] dont la commutativité des régions (I), (III) résulte de la compatibilité de $(F,\breve{F})$, $(G,\breve{G})$ avec les unités ; celle de (II) vient du fait que λ est en un $\otimes$-morphisme ($n^\circ 1$, Déf. 1) ; celle de (IV) découle de la naturalité de g' et celle de (V) de la naturalité de λ. D'où la commutativité du circuit extérieur qui nous donne [] ou du fait que $F\mathbb{1}$ est régulier [] c'est à [] le diagramme (4) commutatif.

Corollaire. — *Soient $(F,\breve{F})$, $(G,\breve{G})$ des $\otimes$-foncteurs unifères de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et $\lambda : F \longrightarrow G$ un $\otimes$-isomorphisme. Alors λ est unifère.*

Démonstration. En effet λ_X est un isomorphisme pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, en particulière pour $X = \mathbb{1}$.

[]

Proposition **(5)**. — *$(F,\breve{F})$ est compatible avec les contraintes d'associativité a, a' données respectivement sur $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ si et seulement si $(G,\breve{G})$ l'est.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant [] dont la commutativité des régions (I), (II), (IV), (V) vient de ce que α est un $\otimes$-morphisme ; celle de VI résulte de la naturalité de a' et celle de (VII) de la naturalité de α. D'où la région (III) est commutative si et seulement si le circuit extérieur l'est, ce qui démontre la proposition.

Proposition **(6)**. — *$(F,\breve{F})$ est compatible avec les contraintes de commutativité c, c' données respectivement sur $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ si et seulement si $(G,\breve{G})$ l'est.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant [] dont la commutativité des régions (I), (III) vient des fait de ce que α est un α est un $\otimes$-morphisme et celle des régions (IV), (V) de la naturalité de c' et α respectivement. D'où l'équivalence de la commutativité de la région (II) et de circuit extérieure.

Proposition **(7)**. — *$(F, \breve{F})$ est compatible avec les unités $(\mathbb{1}, g, d)$, $(\mathbb{1}', g', d')$ données respectivement sur $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ si et seulement su $(G, \breve{G})$ l'est.*

Démonstration. En raison de la symétrie du problème, nous allons démontrer que si $(F, \breve{F})$ est unifère, $(G, \breve{G})$ l'est. Puisque $(F, \breve{F})$ est unifère, il existe un isomorphisme $\widehat{F} : \mathbb{1}' \xrightarrow{\sim} F(\mathbb{1})$ tel que les diagrammes (3) soient commutatifs. Définissons $\widehat{G} : \mathbb{1}' \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{1})$ par le triangle commutatif [] et considérons le diagramme suivant. [] dans lequel la commutativité de la région (I) résulte de la naturalité de α ; celle de (II) vient de l'hypothèse que $(F, \breve{F})$ soit unifère ; celle de (III) de la définition de $\widehat{G}$; celle de (IV) de la naturalité de g' ; enfin celle de (V) du fait que α est un $\otimes$-morphisme. D'où la commutativité du circuit extérieur. On a ainsi démontré la commutativité de l'un des diagrammes (3), la démonstration pour celle de l'autre étant analogue.

Définition **(7)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories AU et $(F, \breve{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. On dit que F est* compatible *avec les contraintes AU, ou encore qu'il est un* $\otimes$-foncteur AU *s'il est un $\otimes$-foncteur associatif, unifère. On note $\mathscr{H}om^{\otimes, AU}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la sous-catégorie de $\mathscr{H}om^{\otimes}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ ayant comme objets les $\otimes$-foncteurs AU, comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères.*

On définit de façon analogue quand on a [] à des contraintes mixtes AC, CU, ACU.

Proposition **(8)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories AU munies des contraintes mixtes d'associativité-unité [] respectivement. Soit $(F, \breve{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ un $\otimes$-foncteur associatif. Alors $(F, \breve{F})$ est unifère si et seulement si $F(\mathbb{1})$ est régulier.*

Démonstration. Supposons $(F, \breve{F})$ []. Alors il existe $\widehat{F} : \mathbb{1}' \xrightarrow{\sim} F\mathbb{1}$, donc $F\mathbb{1}$ est régulier. Inversement, si $F\mathbb{1}$ est régulier, on peut définir un isomorphisme $\widehat{F} : \mathbb{1}' \xrightarrow{\sim} F\mathbb{1}$ par le diagramme commutatif suivant [] Il nous faut maintenant démontrer que $\widehat{F}$ rend commutatif les diagrammes (3). Pour cela, prouvons d'abord que le diagramme suivant est commutatif [] Ou l diagramme suivant []

[] maintenant au diagramme [] Pour démontrer sa commutativité, considérons le diagramme suivant où le diagramme qui nous intéresse se retrouve en la région (V) [] régulier près, [] Dans ce diagramme [] démonstration de la commutativité du diagramme [] est analogue en se servant de la commutativité de (5).

Dans ce qui suit de ce $n°$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ désignent des $\otimes$-catégories ACU et $(F, \breve{F})$ un $\otimes$-foncteur ACU de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. Nous reprenons les notions de produit canonique [], d'isomorphisme [] développés dans (§3, $n°4$).

Définition **(8)**. — *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathscr{C}$ (rappelons-nous que I est toujours supposé fini). Définissons un ismorphisme fonctoriel [] de la manière suivante []*

Proposition **(9)**. — *Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathscr{C}$ et I_1, I_2 des sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \coprod I_2$. Le diagramme suivante est commutatif []*

Démonstration.

1° []

2° []

3° []

Revenons à la démonstration de la commutativité du diagramme (10). D'après ce que nous [] le diagramme (10) devient [] qui est commutatif par définition de []

Corollaire. — *Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathscr{C}$, I_1 et I_2 des sous-ensembles de I tels que $I = I_1 \coprod I_2$, I_1' et I_2' les sous-ensembles respectivement de I_1 et I_2 des éléments i tels que $X_i \neq \mathbb{1}$, [] étant les isomorphismes canonique définis dans (§3, $n°4$, Prop []).*

Démonstration. Il suffit d'appliquer l proposition 9 et la fonctorialité de $\breve{F}$.

Proposition **(10)**. — *Soit Y un produit d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ et soit I' l'ensemble des éléments $i \in I$ tels que $X_i \neq \mathbb{1}$. Les diagrammes suivants sont commutatifs []*

Démonstration. La proposition résulte de (§3, $n°4$, Prop. 26).

Proposition **(11)**. — *Tout diagramme dans $\mathscr{C}'$ construit à l'aide de [] des identités et de la loi $\otimes$, est commutatif.*

Démonstration. D'abord en vertu de la commutativité des diagrammes (1), (2), (3), on peut remplacer Fa, Fc, $\widehat{F}$ [] Ou ce diagramme est commutatif en vertu de

(§3, $n°4$, Prop 28), on en déduit par suite la commutativité du diagramme considéré.

Exemple. Le diagramme suivant est commutatif [] On a des propositions analogues à la proposition 11 quand on [] à des contraintes d'associativité, commutativité, unité, ou des contraintes mixtes AC, AU, CU. Bornons-nous au cas AC, nous avons la proposition :

Proposition **(12)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories AC et $(F,\breve{F})$ un $\otimes$-foncteur AC de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. Tout diagramme dans $\mathscr{C}'$ construit à l'aide de a', a'^{-1}, c', c'^{-1}, Fa, Fa^{-1}, Fc, Fc^{-1}, $\breve{F}$, $\breve{F}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$, est commutatif.*

5. $\otimes$-équivalences

1. Définition de $\otimes$-équivalences

Définition **(1)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F,\breve{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. On dit que $(F,\breve{F})$ est une* $\otimes$-équivalence *si et seulement si F est une équivalence.*

Proposition **(1)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F,\breve{F})$ une $\otimes$-équivalence de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. Soit $F' : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ un foncteur quasi-inverse de F, i.e. [] α et α' vérifiant les relations [] Alors il existe un isomorphisme fonctoriel et un seul*

$$\breve{F}'_{X',Y'} : F'X' \otimes F'Y' \xrightarrow{\sim} F'(X' \otimes Y')$$

tel que $(F,\breve{F})$ soit un $\otimes$-foncteur et α, α' des $\otimes$-morphismes.

Démonstration. Supposons que $\breve{F}'$ existe. Considérons le $\otimes$-foncteur composé $(FF', \breve{FF'}) = (F,\breve{F}) \circ (F'\breve{F}')$. D'après (§4 n°, Déf. 2) $\breve{FF'}_{X',Y'}$ est défini par le triangle commutatif [] En exprimant que α' est un $\otimes$-morphisme, $\breve{F}'$ doit être tel que le diagramme suivant soit commutatif [] D'où l'unicité de $\breve{F}'$ puisque F est pleinement fidèle. Prenons $\breve{F}'$ défini par le diagramme commutatif (2). $\breve{F}'$ est bien fonctoriel en X', Y'; α' un $\otimes$-morphisme. Il nous reste à démontrer que α est un $\otimes$-morphisme. Ou cela résulte de la proposition suivante :

Proposition **(2)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F,\breve{F})$ et $(F',\breve{F}')$ des $\otimes$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}$ respectivement tels que [] avec α, α' vérifiant les relations (1). Alors α est un $\otimes$-morphisme si et seulement si α' l'est.*

Démonstration. En vertu de la symétrie du problème, il nous suffit de démontrer que si α', est un $\otimes$-morphisme, alors α est aussi un α-morphisme, c'est à dire on doit avoir le diagramme suivant commutatif [] Considérons donc le diagramme suivant [] dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de $\breve{F}$; celle de (III) de la fonctorialité de α'; enfin celle du []

En vertu de la définition 1 et la proposition 1, on peut énoncer la proposition :

Proposition **(3)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F,\breve{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. $(F,\breve{F})$ est une $\otimes$-équivalence si et seulement si $(F,\breve{F})$ peut être mis dans un quadruple*

$$((F,\breve{F}),(F',\breve{F}'),\alpha,\alpha')$$

tel que $(F',\breve{F}')$ soit un $\otimes$-foncteur de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}$, $\alpha : F'F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, $\alpha' : FF' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, des $\otimes$-isomorphismes vérifiant (1). $((F,\breve{F}),(F',\breve{F}'),\alpha,\alpha')$ *est appelé* quadruple de $\otimes$-équivalence *entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.*

Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories et $((F,\breve{F}),(F',\breve{F}'),\alpha,\alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On a les propositions suivantes :

Proposition **(4)**. — $(F,\breve{F})$ *est compatible avec les contraintes d'associativité a, a' données respectivement sur $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ si et seulement si $(F',\breve{F}')$ l'est.*

Démonstration. En raison de la symétrie du problème, il nous suffit de démontrer que si $(F',\breve{F}')$ est compatible avec a, a', alors il en est de même de $(F,\breve{F})$, i.e. le diagramme (1) dans (§4, n°2) est commutatif. Ou ce diagramme se retrouve en la région (II) (à image par F' près) du diagramme suivant [] dans lequel le commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII) résulte de la définition de $\breve{F'F}$; celle [] puisque F' est pleinement fidèle.

Proposition **(5)**. — $(F,\breve{F})$ *est compatible avec les contraintes de commutativité c, c' données respectivement sur $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ si et seulement si $(F',\breve{F}')$ l'est.*

Démonstration. De la même manière que dans la proposition 4, nous considérons le diagramme suivant [] où la commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de $\breve{F'F}$; celle de (V) de l'application de (§4, n°2, Prop 6) au $\otimes$-

isomorphisme $\alpha : F'F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$; d'où la proposition.

Proposition **(6)**. — *$(F,\breve{F})$ est compatible avec les unités $(1,g,d)$, $(1',g',d')$ donnés respectivement sur $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ si et seulement si $(F,\breve{F})$ l'est.*

Démonstration. Toujours par raison de symétrie, nous démontrons seulement que si $(F',\breve{F}')$ est compatible avec les unités considérés, il en est de même de$(F,\breve{F})$. D'abord nous définissons $\hat{F} : 1 \longrightarrow F1$ [] Nous devons maintenant dés [] la commutativité du digramme [] Pour cela considérons le diagramme suivant [] où nous avons immédiatement la commutativité des régions [] étant analogue.

Définition **(2)**. — *Soit $(F,\breve{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ un $\otimes$-foncteur avec pleinement fidèle d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}'$ munie d'une contrainte d'associativité a' (resp. commutativité c'). Le diagramme commutatif (1) du (§4, n°2) (resp. le diagramme commutatif (2) du (§4, n°) montre qu'il existe sur $\mathscr{C}$ une et une seule contrainte d'associativité (resp. commutativité) compatible avec $(F,\breve{F})$ et a' (resp. c'). On l'appelle contrainte d'associativité (resp. commutativité)* induite *par $(F,\breve{F})$, et on la note F^*a' (resp. F^*c').*

Proposition **(7)**. — *Soient $(F,\breve{F})$, $(G,\breve{G}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ des $\otimes$-foncteurs avec F, G pleinement fidèle, et soit $\alpha : F \xrightarrow{\sim} G$ un $\otimes$-isomorphisme. Soit a' (resp. c') une contrainte d'associativité (resp. commutativité) sur $\mathscr{C}'$. Alors $F^*a' = G^*a'$ (resp. $F^*c' = G^*c'$).*

Démonstration. En vertu de la définition 2, on a $(F,\breve{F})$ compatible avec les contraintes d'associativité [] en vertu de l'unicité de G^*a' (resp. G^*c').

Proposition **(8)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories, $((F,\breve{F}),(F',\breve{F}'),\alpha,\alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Les applications [] entre l'ensemble des contraintes d'associativité (resp. commutativité) sur $\mathscr{C}$ et l'ensemble des contraintes d'associativité (resp. commutativité) sur $\mathscr{C}'$ son inverses l'une de l'autre.*

Démonstration. Posons $a = F^*(a')$ (resp. $c = F^*(c')$), on a $(F,\breve{F})$ compatible avec les contraintes d'associativité (resp. commutativité) a, a' (resp. c, c'), d'où [] il en est de même donc du $(F,\breve{F})$. D'où $a = F^*(a')$ (resp. $c = F^*(c')$).

Proposition **(9)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories, $((F,\breve{F}),(F',\breve{F}'),\alpha,\alpha')$ un* *quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Soit $(\mathbb{1}, g, d)$ une unité pour $\mathscr{C}$. Alors $(\mathbb{1}' = F\mathbb{1}, g', d')$ avec g', d' définis par les diagrammes commutatifs [] est une unité pour $\mathscr{C}'$, et $(F, \breve{F})$ est compatible avec $(\mathbb{1}, g, d)$, $(\mathbb{1}', g', d')$*

Démonstration. Nous allons d'abord démontrer $g'_{\mathbb{1}} = d'_{\mathbb{1}}$. Pour cela, considérons d'abord le diagramme suivant [] dont la commutativité des régions (I), (IV) résulte de la naturalité de d, g respectivement ; celle de (III) est évidente ; enfin celle du circuit extérieur découle de la relation $d_{\mathbb{1}} = g_{\mathbb{1}}$. D'où la commutativité de (V).

Ensuite considérons le diagramme suivant [] nous donc $g'_{\mathbb{1}} = d'_{\mathbb{1}}$.

Démontrons maintenant que $(F, \breve{F})$ est compatible avec $(\mathbb{1}, g, d)$, $(\mathbb{1}', g', d')$. Nous démontrons seulement la commutativité du diagramme [] où $\widehat{F} = \mathrm{Id}_{F\mathbb{1}}$, la démonstration pour d_X, d'_{FX} étant []. Pour cela, considérons le diagramme suivant [] dont la commutativité de la région (I) résulte [] D'où la commutativité du circuit extérieur qu'est celle [].

2. Transport de structure

Définition **(3)**. — *Soient $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ une équivalence de catégories et $F' : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ un quasi-inverse de F. On a $F'F[]\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, $FF'[]\mathrm{Id}_{\mathscr{C}'}$, avec α, α' vérifiant les relations (1) du n°1. Supposons que $\mathscr{C}$ soit munie d'une structure $\otimes$. Définissons une loi $\otimes$ sur $\mathscr{C}'$ en posant [] pour $X', Y' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$ et $u', v' \in \mathrm{Fl}(\mathscr{C}')$. On dit que la loi $\otimes$ définie par les formules (7) est obtenue par* transport *de la loi $\otimes$ dans $\mathscr{C}$ au moyen de (F, F', α, α').*

Proposition **(10)**. — *Les hypothèses étant celles de la définition 3 et la loi $\otimes$ sur $\mathscr{C}'$ celle par transport au moyen de (F, F', α, α'), il existe des isomorphismes fonctoriels [] tels que α, α' soient des $\otimes$-morphismes.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\breve{F}$ et $\breve{F}'$ tels que α, α' soient des $\otimes$-morphismes. Nous devons donc avoir la commutativité des diagrammes (2) (*n*°1) qui exprime que α' est un $\otimes$.morphisme. [] Pour cette raison, posons [] ce qui donne, compte tenu des relations (1) et (7) [] Par suit, pour avoir le diagramme (2) commutatif, nous devons poser [] ou [] compte tenu de (7). Il nous reste à définir $\breve{F}_{X,Y}$, pour $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, par le diagramme commutatif [] ce qui donne [] ou, compte tenu de (1) [ ]

Donc, en appliquant la proposition 2, on peut [ ] qu'avec [ ] α, α' sont des $\otimes$-morphismes, ce qui achève la démonstrations.

§ II. — Gr-CATÉGORIES ET Pic-CATÉGORIES

1. Gr-catégories

1. Définition des Gr-catégories

Définition **(1)**. — *Une* Gr-catégorie $\mathscr{P}$ *est une* $\otimes$*-catégorie AU (Chap I, § 3, n°2, Déf 5) dont tous les objets sont inversibles (Chap I, § 3, n°5, Déf 9), et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, i.e. tous les flèches sont des isomorphismes. Il résulte de la définition que tous les objets de* $\mathscr{P}$ *sont réguliers (Chap I, § 3, n°5, Déf 18).*

Proposition **(1)**. — *Soient* $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ *des* Gr*-catégories et* $(F,\breve{F}) : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}'$ *un* $\otimes$*-foncteur associatif. Alors* $(F,\breve{F})$ *est unifère.*

Démonstration. On a aussitôt la proposition en remarquant que $F(1)$ est régulier, 1 étant l'objet unité de $\mathscr{P}$, et en appliquant la proposition 8 du (Chap I, § 4, n°2).

Proposition **(2)**. — *Soient* $\mathscr{P}$ *une* Gr*-catégorie,* $\mathscr{P}'$ *une* $\otimes$*-catégorie AU,* 1 *et* $1'$ *les objets unités de* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *respectivement. Soit* $(F,\breve{F}) : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}'$ *une* $\otimes$*-équivalence telle qu'on ait* $F : 1 \simeq 1'$. *Alors* $\mathscr{P}'$ *est une* Gr*-catégorie.*

Démonstration. D'abord toutes les flèches de $\mathscr{P}'$ sont des isomorphismes en vertu du fait que toutes les flèches de $\mathscr{P}$ sont des isomorphismes et F est une équivalence.

Montrons maintenant que tous les objets de $\mathscr{P}'$ sont inversibles. Soit Y un objet de $\mathscr{P}'$. Puisque F est une équivalence, il existe $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})$ tel que $Y \simeq FX$, $\mathscr{P}$ est une Gr-catégorie, ses objets sont donc inversibles, pour conséquent il existe $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})$ tel que $X' \otimes X \simeq X \otimes X' \simeq 1$ (Chap I, § 3, n° 5, Cor de la Prop 17). Vous avons

[]

Ce qui preuve bien que Y est inversible.

2. Premières invariants d'une Gr**-catégories**

Définition **(2)**. — *Soit $\mathscr{P}$ une* Gr*-catégorie. Nous poserons par le suite:*

$$\pi_0(\mathscr{P}) = \textit{ ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de } \mathscr{P},$$

$$\pi_1(\mathscr{P}) = \mathrm{Aut}(1).$$

$\pi_0(\mathscr{P})$ muni de la loi de composition, qu'on note multiplicativement, induite par l'opération $\otimes$, est un groupe, l'élément unite 1 étant la classe des objets isomorphes à 1. Ainsi, on revient d'attacher à une Gr-catégorie $\mathscr{P}$, des groupes $\pi_0(\mathscr{P})$, $\pi_1(\mathscr{P})$, où $\pi_1(\mathscr{P})$ est commutatif (Chap I, $S2$, n°3, Prop 7). La loi de composition de $\pi_1(\mathscr{P})$ est noté [] additivement.

Exemple. Soit G un groupoïde, et posons $\mathscr{P} = (G)$. Alors $\mathscr{P}$ est de façon naturelle une Gr-catégorie, la loi $\otimes$ étant donnée par la composition des foncteurs. On pourrait appeler $\pi_0(\mathscr{P})$ le groupe des *automorphismes extérieures* de G, et $\pi_1(\mathscr{P})$ le centre de G.

On a les propositions suivantes pour une Gr-catégorie $\mathscr{P}$.

Proposition **(3)**. — *Les homomorphismes γ_X et δ_X définis dans (Chap I, §2, n°3, Prop. 8) sont des isomorphismes.*

Démonstration. Résultat immédiat de ce que X est régulier.

Proposition **(4)**. — *Soit $\mathscr{Q}$ une composante connexe de $\mathscr{P}$. Les applications*

$$\mathrm{Aut}(1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathscr{Q}}) \tag{1}$$

$$u \mapsto (\gamma_X u)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{Q})}$$

et

$$(1) \qquad \mathrm{Aut}(1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathscr{Q}})$$

$$u \mapsto (\delta_X u)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{Q})}$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. En vertu de [ ]

Corollaire. — *Soient $X, Y \in s$ avec $s \in \pi_0(\mathscr{P})$. On a [ ] pour tout $u \in \mathrm{Aut}(1) = \pi_1(\mathscr{P})$.*

Démonstration. Posons
[ ]

Proposition **(5)**. — *L'action de $\pi_0(\mathscr{P})$ sur $\pi_1(\mathscr{P})$ définie par la relation [ ]*

Démonstration. [ ]

Proposition **(6)**. — *L'action de $\pi_0(\mathscr{P})$ sur $\pi_1(\mathscr{P})$ définie par la relation [ ]*

Remarque. Soit $\mathscr{P}_0$ la composante connexe de $1 \in \pi_0(\mathscr{P})$, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathscr{P}$ des objets isomorphes à 1 : on voit alors que $\mathscr{P}_0$ est un groupoïde connexe *commutatif*, donc les groupes $\mathrm{Aut}(X)$ ($X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P}_0)$) sont canoniquement isomorphes entre eux, ou encore canoniquement isomorphes au groupe $\pi_1(\mathscr{P}) = \mathrm{Aut}(1)$. Ces isomorphismes

$$\mathrm{Aut}(1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$$

$$u \mapsto f u f^{-1}$$

où $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P}_0)$ et $f : 1 \longrightarrow X$ une flèche quelconque, coïncident avec les isomorphismes γ_X, δ_X. En effet, en vertu de la relation (9) dans (Chap. I, §2, n°, Prop. 8) nous avons

$$\gamma_1(u) = \delta_1(u) = u$$

pour tout $u \in \mathrm{Aut}(1)$. Puisque $(\gamma_X u)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})}$ et $(\delta_X u)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})}$ sont commutativité des diagrammes suivants

[]

pour toute flèche $f : 1 \longrightarrow X$, ce qui montre que γ_X, δ_X coïncident avec les isomorphismes $u \mapsto f u f^{-1}$.

3. Structure des Gr-catégories

Définition **(3)**. — *Soient $\mathscr{P}$ une* Gr*-catégorie, $(a,(1,g,d))$ la contrainte AU de $\mathscr{P}$, $\pi_0(\mathscr{P})$ et $\pi_1(\mathscr{P})$ les groupes attachés a $\mathscr{P}$ dans (n°2, Déf. 2). On construit une catégorie dont les objets sont les éléments de $\pi_0(\mathscr{P})$, les morphismes sont des automorphismes. On pose pour chaque $s \in \pi_0(\mathscr{P})$*

$$\mathrm{Aut}(s) = \{s\} \times \pi_1(\mathscr{P})$$

la composition des flèches étant l'addition de $\pi_1(\mathscr{P})$. Pour chaque classe $s = c l X \in \pi_0(\mathscr{P})$, on choisit une représentant noté X_s; et pour chaque $X \in s$, on choisit une isomorphisme $i_X : X_s \xrightarrow{\sim} X$, tel que

$$i_{X_s} = \mathrm{Id}_{X_s}\,.$$

Proposition **(7)**. — *Le foncteur*

Démonstration. []

Définition **(4)**. — *Définissons une loi []*

Définition **(5)**. — *Soit $\mathscr{P}$ []*

Proposition **(8)**. — *Soient $\mathscr{P}$ []*

Démonstration. []

Proposition **(9)**. — *Les hypothèses étant celles de la proposition 8 []*

Démonstration. []

Proposition **(10)**. — *Pour un changement d'épinglage de $\mathscr{P}$ []*

Démonstration. []

Proposition **(11)**. — *Les foncteurs []*

Proposition **(12)**. — *Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ []*

Démonstration. []

Définition **(6)**. — *Soit M un groupe, N un M-module abélien à gauche. Un* préépinglage de type (M,N) *pour une* Gr*-catégorie $\mathscr{P}$ est une couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes*

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

compatibles avec les actions de M sur N et de $\pi_0(\mathscr{P})$ []

Proposition **(13)**. — *Il y a une bijection canonique entre []*

Démonstration. []

Exemple. Soit $\mathscr{P}$ la $\otimes$-catégorie définie dans []

2. Pic-catégories

1. Définition des Pic-catégories

Définition **(1)**. — *Une* Pic-catégorie *est une* Gr*-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité. Une* Pic*-catégorie est dite* stricte *si sa contrainte de commutativité est stricte (Chap I, §2, n°2, Déf. 8).*

Exemples.

Proposition **(1)**. — *Soit $\mathscr{P}$ une* Pic*-catégorie, et soient $\pi_0(\mathscr{P})$, $\pi_1(\mathscr{P})$ le groupe et le $\pi_0(\mathscr{P})$-module respectivement attaché à $\mathscr{P}$, considéré comme une* Gr*-catégorie (§1, n°2, Déf. 2 et Prop. 5). Alors le groupe $\pi_0(\mathscr{P})$ est commutatif et agit trivialement sur $\pi_1(\mathscr{P})$.*

Démonstration. []

Proposition **(2)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(3)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU stricte avec comme contrainte ACU : $(a, c, (1, g, d))$. Soient $p_X : X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} 1$, $t_X : X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} 1$ des isomorphismes. Alors la commutativité du diagramme*

[]

est équivalente à la commutativité du diagramme

[]

Démonstration. Posons $s = X$, pour conséquent $-s = X^{-1}$. Prenons dans la Pic-catégorie $\mathscr{P}$, construite à partir de $\mathscr{C}$ comme ci-dessus, un épingláge tel que

$$X_s = X, X_{-s} = X^{-1}, i_{X \otimes X-1} = p_X^{-1}, i_{X^{-1} \otimes X} = t_X^{-1}$$

Dans ces conditions, en notant toujours par

[]

2. Structure des Pic**-catégories**

Définition **(2)**. — *Soient M, N des groupes abéliens. Un* préépinglage de type (M, N) *pour une* Pic*-catégorie $\mathscr{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes*

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P}).$$

Une Pic*-catégorie préépinglé de type* (M, N) est une Pic-catégorie munie d'un préépinglage.

[]

Proposition **(4)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(5)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(6)**. — *[]*

Démonstration. []

Corollaire **(1)**. — *[]*

Démonstration. []

Corollaire (**2**). — *[]*

Démonstration. []

Définition (**3**). — *[]*

Définition (**4**). — *[]*

Proposition (**7**). — *[]*

Démonstration. []

Proposition (**8**). — *Le noyau de l'application []*

Démonstration. []

Proposition (**9**). — *Il y a un monomorphisme j []*

Démonstration. Considérons l'homomorphisme []

Proposition (**10**). — *Si M est libre, j est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit []

Corollaire. — *Si M est libre, alors []*

Démonstration. []

Proposition (**11**). — *Il y a un monomorphisme*

$$h : \mathrm{H}^2(\mathrm{Hom}('L_\bullet(M), N)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, {}_2N)$$

qui est un isomorphisme si M est libre.

Démonstration. Soit [] ce qui achève la démonstration.

§ III. — Pic-ENVELOPPE D'UNE ⊗-CATÉGORIE ACU

Dans ce chapitre nous nous occuperons de deux problèmes universels, celui de rendre des objets "objets unité" et celui d'inversion des objets.

1. Le problème de rendre des objets "objets unité"

Pour pouvoir résoudre le problème, occupons-nous de problème suivant.

1. Le problème de rendre des endomorphismes des identité

Proposition **(1)**. — *Soient $\mathscr{A}$ une catégorie, φ une partie de* $\mathrm{Fl}(A)$ *[]*

Démonstration. Soient A, B des objets de $\mathscr{A}$ et $R_{A,B}$ une relation linéaire dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ de la manière suivante ; pour $u, v \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$, on a $uR^{\mathscr{A}}_{A,B}v$ si et seulement s'il existe un entier []

$$A \mapsto KA$$

$$\overline{u} : A \longrightarrow B \mapsto Ku : KA \longrightarrow KB$$

est le seul foncteur de $\mathscr{A}^{\varphi}$ dans $\mathscr{B}$ tel que $K = K' \circ H$.

Remarque. Quand la catégorie $\mathscr{A}$ est un groupoïde []

Définition **(1)**. — *Soit $\mathscr{A}$ une ⊗-catégorie associative, et soit $\mathscr{E}$ la partie de* $\mathrm{Fl}\,\mathscr{A}$ *se composant des flèches qui sont des endomorphismes. On dit qu'une partie de $\mathscr{E}$ est* multiplicative *si* $\mathrm{Id}_X \in$ *pour tout* $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$*, et si le produit tensoriel de deux flèches de appartient à . On dit aussi que est une partie multiplicative de $\mathscr{A}$.*

Pour tout partie de $\mathscr{E}$, il existe des parties multiplicatives de $\mathscr{E}$ contenant , par exemple $\mathscr{E}$ lui-même. L'intersection de toutes ces parties est la plus petite partie multiplicative de $\mathscr{E}$ contenant ; on dit qu'elle est *engendré* par . Il est immédiat que c'est l'ensemble formé de tous les produits tensoriels finis de flèches de .

Proposition **(2)**. — *Soient $\mathscr{A}$ une $\otimes$-catégorie AC, (a,c) sa contrainte AC, une partie multiplicative de $\mathscr{A}$. Il existe une $\otimes$-catégorie AC $\mathscr{A}$ et un $\otimes$-foncteur AC $(H,\breve{H})$ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ ayant les propriétés suivantes : []*

Démonstration. Considérons la relation d'équivalence []

Définition **(2)**. — *Soient $\mathscr{A}$ une $\otimes$-catégorie AC, (a,c) sa contrainte AC, une partie multiplicative de $\mathscr{A}$. On appelle* $\otimes$-catégorie AC quotient *de $\mathscr{A}$ définie par et on désigne par $\mathscr{A}$, la catégorie $\mathscr{A}$ définie par [] On appelle* $\otimes$-foncteur canonique *de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ le $\otimes$-foncteur AC :*

$$A \mapsto A$$

$$u : A \longrightarrow B \mapsto \overline{u} : A \longrightarrow B.$$

On a aussitôt la proposition suivante

Proposition **(3)**. — *Soient $\mathscr{A}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $(a,c,(\Phi,g,d))$ sa contrainte ACU, une partie multiplicative de $\mathscr{A}$. La catégorie $\mathscr{A}$ est une $\otimes$-catégorie ACU, sa contrainte d'unité étant $(\Phi,,)$, et le $\otimes$-foncteur canonique de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ est un $\otimes$-foncteur ACU. La catégorie $\mathscr{A}$ et le $\otimes$-foncteur canonique de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ constitue une solution du problème universel*

$$(K,\breve{K}) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}, \quad K(u) = \mathrm{Id} \text{ pour tout } u \in$$

où $\mathscr{B}$ est une $\otimes$-catégorie ACU et $(K,\breve{K})$ un $\otimes$-foncteur ACU.

2. Le problème de rendre des objets "objets unité"

Tout d'abord, introduisons un $\otimes$-foncteur

Définition **(3)**. — *[]*

Proposition **(4)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(5)**. — *[]*

Démonstration. []
Remarques. []

Proposition **(6)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(7)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(8)**. — *[]*

Démonstration. []
Remarque.

Proposition **(9)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(10)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(11)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(12)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(13)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(14)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(15)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(16)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(17)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(18)**. — *[]*

Démonstration. []
Remarque.

Définition **(4)**. — *[]*

Proposition **(19)**. — *[]*

Démonstration. []

2. Le problème d'inverses des objets

1. Construction de la ⊗-catégorie des fractions d'une ⊗-catégorie ACU

Dans tout ce n°, $\mathscr{C}$ est une ⊗-catégorie munie d'une constrainte []

Lemme **(1)**. — *[]*

Démonstration. []

Lemme **(2)**. — *[]*

Démonstration. []
Remarque. []

Lemme **(3)**. — *[]*

Démonstration. []

Lemme **(4)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(1)**. — *[]*

Démonstration. []

Définition **(1)**. — *$\mathscr{P}$ est appelée la* ⊗-catégorie de fractions *de $\mathscr{C}$ définie par* $(\mathscr{C}', (F, \check{F}))$ *et* $(D, \check{D})$ *le* ⊗-foncteur canonique *de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{P}$.*

2. Pic-enveloppe d'une ⊗-catégorie ACU

Définition **(2)**. — *[]*

Remarque. Dire que le diagramme (14) est commutatif dans [] est dire que si l'on pose

[]

tels que

[]

3. Applications

1. Groupe de Grothendieck et groupe de Whitehead

R étant un anneau constante, on rappelle les définitions suivantes [1].

Définition **(1)**. — *On appelle* groupe de Grothendieck *des R-modules projectifs à gauche de type fini le groupe abélien $K_0(R)$ engendré par les $[X]$, X étant un R-module projectif à gauche de type fini et les générateurs $[X]$ satisfaisant à la relation*

$$[X] = [X'] + [X'']$$

si le R-module X est isomorphe à la somme directe $X' \otimes X''$.

Définition **(2)**. — *On appelle* groupe de Whitehead *de R le groupe abélien $K_1(R)$ engendré par les $[(X, f)]$; où X est R-module projectif à gauche de type fini, $f : X \xrightarrow{\sim} X$ un automorphisme de R-module; les relations entre les générateurs étant []*

Proposition **(1)**. — $\pi_0(\mathscr{P}) \simeq K_0(R)$

Démonstration. []

Proposition **(2)**. — $\pi_1(\mathscr{P}) \simeq K_1(R)$

Démonstration. []

2. Catégorie de suspension

Soient $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, $S : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ un foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$. On se propose de chercher une catégorie $\mathscr{P}$; un foncteurs i de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{P}$ et un foncteur p de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ tels que le triple $(\mathscr{P}, i, p)$ possède les propriétés suivantes :

1. 1° p est une équivalence de catégories et $iS \simeq pi$.

2. 2° Pour tout triple $(\mathscr{Q}, j, q)$ ayant la propriété 1°, il existe un foncteur f et un seul (défini à isomorphisme fonctoriel près) de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{Q}$ tel que $fi \simeq j$, $fp \simeq qf$.

Proposition **(3)**. — *Le triple* $(\mathscr{P}, i, p)$ *existe.*

Démonstration. Soient N l'ensemble des entiers naturels, $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $m, n \in N$. On note $\varphi((X, m), (Y, n))$ l'ensemble suivant

la loi de composition des flèches de $\mathscr{P}$ étant le produit des classes défini ci-dessus. Ensuite on défini le foncteur i par

$$i : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{P}$$

[] et le foncteur p par

$$p : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$$

[]

Il est clair que $p < a, b, u >$ ne dépend pas du représentant (a, b, u).

Soit $\widetilde{p}$ un autre foncteur de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ défini par

$$\widetilde{p} : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$$

[] On vérifie aussitôt que [] ce qui montre que p est une équivalence de catégories. Enfin la définition des foncteurs i, p donnée $iS \simeq pi$ le triple $(\mathscr{P}, i, p)$ vérifie donc la propriété 1°.

Proposition **(4)**. — *[]*

Démonstration. []

Définition **(3)**. — *[]*

Proposition **(5)**. — *[]*

Remarque. []

Proposition **(6)**. — *[]*

Démonstration. []

Définition **(4)**. — *Une sous-catégorie $\mathscr{A}$ d'une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{C}$ est* $\otimes$-stable *si elle vérifie []*

Proposition **(7)**. — *Soient $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU []*

Démonstration. []

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS, H — *K-theory and stable algebra*. Publ. maths de L'IHES, n°22

[2] BÉNABOU, J — *Thèse*, Paris 1966

[3] BOURBAKI, N — *Théorie des ensembles*

[4] — *Algèbre commutative*

[5] — *Algèbre multilinéaire*

[6] DELIGNE, P — *Champs de Picard strictement commutatifs*, SGA 4 XVIII

[7] EILENBERG, S ET KELLY, G M — *Closed category*, Proceedings of the conference on categorical algebra (421.561). Springer Verlag 1965

[8] FREYD, P — *Stable homotopy*, Proceedings of the conferece on categorical agebra (121.176). Springer Verlag 1965

[9] GROTHENDIECK, A — *Biextensions de faisceaux de groupes*, SGA 7, VII

[10] — *Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif*, Lecture notes in mathematics n°79. Springer Verlag 1968

[11] MACLANE, S — *Categorical algebra*, Bull. Amer. Mat. Soc. 71 (1965)

[12] — *Homology*, Springer Verlag 1967

[13] MITCHELL, B — *Theory of categories*, Academic Press 1965

[14] NEANTRO SAAVEDRA RIVANO — *Thèse*, Paris (1970?)

[15] — *Catégories tannakiennes*, Lecture notes in mathematics n°265. Springer Verlag 1972

[16] SPANIER, E — *Algebraic topology*, McGraw-Hill, 1966