SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
DU BOIS-MARIE
1967 - 1969

# GROUPES DE MONODROMIE
# EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
# ( SGA 7 I )

*Dirigé par*
A. GROTHENDIECK
*avec la collaboration de*
M. RAYNAUD *et* D.S. RIM

# INTRODUCTION

Soient $S$ un schéma et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. Si $f$ est propre et lisse, et que le nombre premier $\ell$ est inversible sur $S$, les groupes de cohomologie $\ell$-adique $\mathrm{H}^i(X_{\bar{s}}, \mathbf{Z}_\ell)$ des fibres géométriques de $f$ forent un système local $\ell$-adique sur $S$. Pour $f$ seulement supposé propre, ces groupes sont les fibres d'un faisceau $\ell$-adique $\mathrm{R}^i f_* \mathbf{Z}_\ell$ sur $S$. La *théorie des cycles évanescents* met en relation la ramification de ce faisceau sur $S$ et les singularités de $f$.

Nous ne considérerons que le cas où $S$ est un trait hensélien ( = spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien). C'est en pratique le cas essentiel. Je renvoie à (I 2.1) pour une description heuristique de la théorie. Soient $S = \mathrm{Spec}(V)$, $k(\bar{\eta})$ une clôture algébrique du corps des fractions $k(\eta)$ de $V$ et $k(\bar{s})$ la clôture algébrique correspondante du corps résiduel $k(s)$ ($k(\bar{s})$ est le corps résiduel du normalisé $\overline{V}$ de $V$ dans $k(\bar{\eta})$). Dans le cas particulier où $X$ est propre et plat sur $S$, de dimension relative $n$, et où $f$ ne présente qu'un point de non lissité $x \in X_S$, on définit des $Gal(\bar{\eta}/\eta)$-modules $\varphi^i$, de nature purement locale au voisinage de $x$, nuls pour $i \notin [0, n]$ (I 4.2), et on construit une suite exacte longue de $Gal(\bar{\eta}/\eta)$-modules

$$\dots \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_{\bar{s}}, \mathbf{Z}_\ell) \xrightarrow{sp} \mathrm{H}^i(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Z}_\ell) \longrightarrow \varphi^i \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(X_s, \mathbf{Z}_\ell) \longrightarrow \dots$$

(le $Gal(\bar{s}, s)$-module $\mathrm{H}^i(X_{\bar{s}}, \mathbf{Z}_\ell)$ est regardé comme un $Gal(\bar{\eta}/\eta)$-module avec action triviale de l'inertie ; $sp$ est la flèche de spécialisation).

On donne aussi des critères, valables pour l'instant seulement en caractéristique 0, pour que les $\varphi^i$ pour $i$ petits soient nuls (par exemple, si $X$ est de plus localement d'intersection complète, $\varphi^i = 0$ pour $i \neq n$ (I. 4.5)).

Le *théorème de monodromie* affirme que l'action du sous-groupe d'inertie $I$ de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$

est quasi-unipotente : pour $T \in I$, il existe des entiers $N > 0$, $M > 0$ tels que l'endomorphisme $(T^M - I)^N$ de $\mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{Z}_\ell)$ soit nul. On donne de ce théorème deux démonstrations. La première (I.1.2), de nature arithmétique, s'applique dès que les groupes de cohomologie considérés ont des propriétés de finitude raisonnables. Le point clef est que, lorsque $k(s)$ est de type fini sur son sous-corps premier, l'action de $I$ est quasi-unipotente pour *toute* représentation $\ell$-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$. La seconde démonstration, plus géométrique, requiert la pureté et la résolution des singularités : elle n'est pour l'instant valable qu'en caractéristique $0$ ou pour un $\mathrm{H}^1$. Elle apporte de précieuses informations sur l'exposant de nilpotence $N (N \leq i+1$ pour un $\mathrm{H}^i)$. Ainsi qu'on le verra ultérieurement, elle se prête bien, sur $\mathbf{C}$, à la comparaison avec la théorie transcendante.

Ces résultats, appliqués au $\mathrm{H}^1$ des variétés abéliennes, i.e. à leur module de Tate, permettent d'étudier la réduction $mod\, p$ de celles-ci. On donne ainsi deux démonstrations du théorème de réduction stable des variétés abéliennes selon lequel, après ramification, la fibre spéciale connexe du modèle de Néron est extension d'une variété abélienne par un tore. La première (I. 6) reprend la méthode de la démonstration arithmétique du théorème de monodromie. La seconde (IX 3.6) s'appuie sur une analyse beaucoup plus fine du modèle de Néron, et des ses propriétés de polarisation.

Les exposés I à V de Grothendieck n'ont pas été rédigés. Ils ont été résumés dans un exposé I. Les résultats énoncés y sont démontrés de façon succinte, mais essentiellement complète.

L'exposé II applique la méthode des pinceaux de Lefschetz et (I 5.3) à l'étude du groupe fondamental. Pour $S$ une surface sur un corps algébriquement clos $k$, d'exposant caractéristique $p$, on montre que le groupe profini $\pi_1^{(p)}(S, s)$, complété en dehors de $p$ du groupe fondamental, est de pro-$(p)$-présentation finie.

Comme expliqué plus haut, les exposés III à V n'existent pas.

L'exposé VI contient, avec quelques compléments, la théorie des déformations de Schlessinger. On y prend soin de tenir compte des automorphismes infinitésimaux des objets qu'on classifie, et de ne pas passer trop brutalement au foncteur des classes d'isomorphie d'objets. On y donne aussi une nouvelle construction des $\underline{\mathrm{Ext}}^i(L_{X/S}, -)$ ($L_{X/S}$ complexe cotangent relatif de $X/S$). Cet exposé sert dans le reste du séminaire surtout via l'étude qui y est faite des déformations des singularités quadratiques ordinaires.

Les exposés VII et VIII sont consacrés à la théorie des biextensions. Cette théorie joue un rôle essentiel dans l'exposé IX, pour exprimer ce qu'il advient d'une polarisation quand on passe d'une variété abélienne à un modèle de Néron de celle-ci. Cet exposé IX contient la démonstration du théorème de réduction stable des variétés abéliennes, et diverses applications.

La suite de ce séminaire : SGA 7 II, par P. Deligne et N. Katz, paraîtra ultérieurement.

Bures sur Yvette, mai 1972,
P. DELIGNE

# TABLE DE MATIÈRES

Introduction . . . . . . . . . . 2
Exposé I. Résumé des premiers exposés de A. Grothendieck
rédigé par P. Deligne . . . . . . . . . . 6
Exposé II. Propriété de finitude du groupe fondamental
par Michèle Raynaud . . . . . . . . . . 7
Exposé VI. Formal deformation theory
by D. S. RIM . . . . . . . . . . 8
Exposé VII. Biextensions de faisceaux de groupes
par A. Grothendieck . . . . . . . . . . 9
Exposé VIII. Compléments sur les biextensions. Propriétés générales des biextensions des schémas en groupes
par A. Grothendieck . . . . . . . . . . 10
Exposé IX. Modèles de Néron et monodromie
par A. Grothendieck . . . . . . . . . . 11

# § I. — RÉSUMÉ DES PREMIERS EXPOSÉS DE A. GROTHENDIECK RÉDIGÉ PAR P. DELIGNE

**0. Préliminaires**

**1. Démonstration arithmétique du théorème de monodromie**

**2. Cycles évanescents**

**3. Démonstration géométrique du théorème de monodromie**

**4. Critères de nullité pour les faisceaux de cycles évanescents**

**5. Action de la monodromie sur les $\pi_1$**

**6. Appendice par P. Deligne : démonstration arithmétique du théorème de réduction stable**

## § II. — PROPRIÉTÉS DE FINITUDE DU GROUPE FONDAMENTAL

PAR MICHÈLE RAYNAUD

# § VI. — FORMAL DEFORMATION THEORY
# BY D. S. RIM

---

## 1. Formal existence theorem

We recall the notion of cofibered category (SGA 1 [VI]).

Let $C$ be a fixed category. A cofibered category $A$ over $C$ is, by definition, a category $A$ together with a functor $P : A \longrightarrow C$ such that

Ax.1 For any map $f$ in $C$ and any object $a$ in $A$ with $P(a) =$ the source of $f$, there exists an $f$-morphism $\alpha : a \longrightarrow b$ which is cocartesian (i.e. for any $f$-morphism $\alpha' : a \longrightarrow b'$ there exists a unique $T$-morphism $\tau : b \longrightarrow b'$ in $A$ such that $\alpha' = \tau \circ \alpha$ where $T =$ the target of $f$).

Ax.2 A composit[e] of cocartesian morphism in $A$ is again cocartesian.

The following properties of a cofibered category $P : A \longrightarrow C$ follow immediately from the definitions:

(Cancellation) Let []

(Factori[s]ation) Given cocartesian []

Let $A$ be a cofibered category over $C$. For each object $S$ in $C$ we denote by $A(S)$ the subcategory of $A$ whose objects are the objects $a$ in $A$ such that

# § VII. — BIEXTENSIONS DE FAISCEAUX DE GROUPES

PAR A. GROTHENDIECK

# § VIII. — COMPLÉMENTS SUR LES BIEXTENSIONS. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES BIEXTENSIONS DES SCHÉMAS EN GROUPES

PAR A. GROTHENDIECK

# § IX. — MODÈLES DE NÉRON ET MONODROMIE
PAR A. GROTHENDIECK