Gr-catégories

Hoàng Xuân Sính

Institut pédagogique n°2 de Hanoi

Département de mathématiques

Ce texte a été édité et transcrit par Mateo Carmona et David Michael Roberts

https://agrothendieck.github.io/

TABLE DE MATIÈRES

Introduction 4

Summary 10

I. $\otimes$-catégories et $\otimes$-foncteurs 18

1. $\otimes$-catégories 18
2. Contraintes pour une loi $\otimes$ 20
3. Compatibilités entre contraintes 27
4. $\otimes$-foncteurs 30
5. $\otimes$-équivalences 33

II. Gr-catégories et Pic-catégories 36

1. Gr-catégories 36
2. Pic-catégories 40

III. Pic-enveloppe d'une $\otimes$-catégorie 43

1. Le problème de rendre des objets "objets unité" 43
2. Le problème d'inverses des objets 45
3. Applications 46

Bibliographie 48

INTRODUCTION

Ce travail se compose de trois chapitres. Le premier ressemble un certain nombre de définitions et résultats nécessaires pour les chapitres qui suivent sur les catégories munis d'une loi $\otimes$ qu'on peut trouver dans [2], [6], [11], [14], [15], la terminologie employée dans ce chapitre étant de Neantro Saavedra Rivano [14]. Une $\otimes$-*catégorie* est une catégorie munie d'une loi $\otimes$. Une $\otimes$-catégorie *associative* est une $\otimes$-catégorie munie d'un isomorphisme de trifoncteurs appelé *constrainte d'associativité*

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z, \quad X$$

vérifiant un condition dite *l'axiome du pentagone*. Une $\otimes$-catégorie *commutative* est une $\otimes$-catégorie munie d'un isomorphisme de bifoncteurs appelé *contrainte de commutativité*

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

vérifiant la relation

$$c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = \mathrm{Id}_{X \otimes Y}$$

Une contrainte de commutativité est *stricte* si $c_{X,X} = \mathrm{Id}_{X\otimes}$ pour tout X. Enfin une $\otimes$-catégorie est dite *unifier* s'il [] un objet $\underline{1}$ et des isomorphismes fonctoriels

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X$$

$$d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

tels que

$$g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$$

le triple $(\underline{1}, g, d)$ constitue une *contrainte d'unité*.

Une $\otimes$*-catégorie AC* (resp. *AU*) est une $\otimes$-catégorie associative et commutative (resp. associative et unifère) vérifiant une contrainte condition de compatibilité. Une $\otimes$*-catégorie ACU* est une $\otimes$-catégorie AC et AU.

Un $\otimes$*-foncteur* d'une $\otimes$-category $\mathscr{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}'$ est un couple $(F, \breve{F})$ où F est un foncteur de $\mathscr{C} \longrightarrow cC'$ et $\breve{F}$ un isomorphisme de bifoncteurs

$$\breve{F}_{X,Y} : FX \otimes FY \longrightarrow F(X \otimes Y) \quad X, Y \in Ob(\mathscr{C})$$

Un $\otimes$*-foncteur associatif* (resp. *commutatif, unifère*) est un $\otimes$-foncteur d'une $\otimes$-catégorie associative (resp. commutative, unifère) dans une $\otimes$-catégorie associative (resp. commutative, unifère) vérifiant une condition dite condition de *compatibilité* avec les contraintes d'associativité (resp. de commutativité, d'unité). Un $\otimes$*-foncteur AC* est un $\otimes$-foncteur associatif et commutatif, un $\otimes$*-foncteur ACU* est $\otimes$-foncteur associatif, commutatif et unifère.

Pour deux $\otimes$-foncteurs $(F, \breve{F})$, $(G, \breve{G})$ d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}'$, un $\otimes$*-morphism* de $(F, \breve{F})$ dans $(G, \breve{G})$ est un morphisme fonctoriel $X : F \longrightarrow G$ rendant commutatif le carré

$$\begin{tikzcd}
FX \otimes FY \arrow[r, "\breve{F}_{X,Y}"] \arrow[d, "\lambda_X \otimes \lambda_Y"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\lambda_{X \otimes Y}"] \\
GX \otimes GY \arrow[r, "\breve{G}_{X,Y}"] & G(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

Le deuxième chapitre est réservé à l'étude des Gr-catégories et des Pic-catégories. Une *Gr-catégorie* est une $\otimes$-catégorie AU, dont tous les objets sont inversibles, et dont la catégorie sous-jacente est une groupoïde (i.e. toutes les flèches sont des isomorphismes). Une Gr-catégorie ressemble donc a un groupe. On tire de cette définition que si $\mathscr{P}$ est une Gr-catégorie, l'ensemble $\pi_0(\mathscr{P})$ des classes à isomorphisme près d'objets de $\mathscr{P}$, muni de la loi de composition à droite par l'opération $\otimes$, est un groupe ; le groupe $\text{Aut}(\underline{1}) = \pi_1(\mathscr{P})$ est un groupe commutatif ; et pour tout $X \in Ob(\mathscr{P})$

$$\gamma_X : u \mapsto u \otimes \text{Id}_X = \text{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(X)$$

$$\delta_X : u \mapsto \text{Id}_X \otimes u = \text{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(X)$$

On attache ainsi à une Gr-catégorie $\mathscr{P}$, des groupes $\pi_0(\mathscr{P})$, $\pi_1(\mathscr{P})$ où $\pi_1(\mathscr{P})$ est commutatif. On peut définir au plus, une action de $\pi_0(\mathscr{P})$ dans $\pi_1(\mathscr{P})$ de la façon suivante : si $s \in \pi_0(\mathscr{P})$

est représenté par $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})$, et $u \in \pi_1(\mathscr{P})$ on pose

$$su = \delta_X^{-1}\gamma_X(u)$$

$\pi_1(\mathscr{P})$ en devient en $\pi_0(\mathscr{P})$-module à gauche.

Soient M un groupe, N un M-module (abélien à gauche). Un *préépinglage* de type (M,N) pour une Gr-catégorie $\mathscr{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

compatibles avec les actions de M sur N, $\pi_0(\mathscr{P})$ sur $\pi_1(\mathscr{P})$. Une Gr-catégorie *préépinglage de type* (M,N) est une Gr-catégorie munie d'une préépinglage. Enfin, un *morphisme* de Gr-catégorie préépinglees de type (M,N) : $(\mathscr{P},\varepsilon) \longrightarrow (\mathscr{P}',\varepsilon')$ est un $\otimes$-foncteur associatif tel que les triangles

$$\begin{tikzcd} \pi_0(\mathscr{P}) \arrow[rr] & & \pi_0(\mathscr{P}') \\ & M \arrow[ul, "\varepsilon_0"] \arrow[ur, "\varepsilon_0'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_1(\mathscr{P}) \arrow[rr] & & \pi_1(\mathscr{P}') \\ & N \arrow[ul, "\varepsilon_1"] \arrow[ur, "\varepsilon_1'"'] & \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. On en déduit que tout tel morphisme est une $\otimes$-équivalence, donc l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépingleés de type (M,N) est égal à l'ensemble des *composantes connexes* de la 2-catégorie des Gr-catégories préépingleés de type (M,N). Si on considère le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^3(M,N)$ du groupe M à valeurs dans le M-module N (avec soin de la cohomologie des groupes [12]) on obtient une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépingleés de type (M,N) et l'ensemble $\mathrm{H}^3(M,N)$.

Une Pic-*catégorie* est une Gr-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité, ce qui fait qu'une Pic-catégorie ressemble à un groupe commutatif. On vérifie aussitôt qu'une condition sur une Gr-catégorie $\mathscr{P}$ est que $\pi_0(\mathscr{P})$ soit commutatif et agisse trivialement sur $\pi_1(\mathscr{P})$. Une Pic-catégorie est *stricte* si sa contrainte de commutativité est stricte.

Soient M, N des groupes abéliens. Un *préépinglage* de type (M,N) pour une Pic-catégorie $\mathscr{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

Une Pic-catégorie *préépinglé de type* (M,N) est une Pic-catégorie munie d'une préépinglage. On définit *les morphismes* de tels objets de la même façon qu'on a fait pour les Gr-catégories.

Pour formuler les propositions, on introduit deux complexes de groupes abéliens libres

$$L_\bullet : L_3(M) \xrightarrow{d_3} L_2(M) \xrightarrow{d_2} L_1(M) \xrightarrow{d_1} L_0(M) \longrightarrow M$$
$$'L_\bullet : 'L_3(M) \xrightarrow{'d_3} 'L_2(M) \xrightarrow{'d_2} 'L_1(M) \xrightarrow{'d_1} 'L_0(M) \longrightarrow M$$

dont le première est une résolution tronqué de M, i.e. est une suite exacte. On obtient une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de Pic-catégories préépingleés de type (M,N) et l'ensemble $\mathrm{H}^2(\mathrm{Hom}('L_\bullet(M),N))$. L'exactitude du complexe $L_\bullet(M)$ nous donne la trivialité de la classification des Pic-catégories strictes préépingleés de type (M,N), i.e. toutes les Pic-catégories strictes préépingleés de type (M,N) sont équivalentes.

Enfin la troisième chapitre donne la construction de la solution de deux problèmes universels à celui de rendre des objets "objets unité" et celui d'inverses des objets.

Soient $\mathscr{A}$ une $\otimes$-catégorie AC, $\mathscr{A}'$ une autre $\otimes$-catégorie AC dont la catégorie sous-jacent est un groupoïde, et $(T,\breve{T}) : \mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{A}$ un $\otimes$-foncteur AC. On cherche à rendre les objets TA' de $\mathscr{A}$, $A' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A}')$, "objet unité", c'est à dire on cherche

1° Une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{P}$;

2° Un $\otimes$-foncteur AC $(D,\breve{D}) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{P}$;

3° Un $\otimes$-isomorphisme

$$\lambda : (D,\breve{D}) \circ (T,\breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\mathscr{P}}, \breve{P}_{\mathscr{P}})$$

où $(I_{\mathscr{P}}, \breve{P}_{\mathscr{P}})$ est le $\otimes$-foncteur $1_{\mathscr{P}}$ constant de $\mathscr{A}'$ dans $\mathscr{P}$. Le triple $(\mathscr{P},(D,\breve{D}),\lambda)$ est tel qu'il soit universel pour le triple $(\mathscr{Q},(E,\breve{E}),\mu)$ vérifiant 1°, 2°, 3°.

Pour le problème d'inverses des objets, on considère une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{C}$, une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{C}'$ dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, et un $\otimes$-foncteur ACU $(F,\breve{F}) : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$. On cherche une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{P}$ est un $\otimes$-foncteur ACU $(D,\breve{D})$: $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{P}$ ayant les propriétés suivantes :

1° $\mathscr{D}FX'$ est inversible dans $\mathscr{P}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$

2° Pour tout $\otimes$ foncteur ACU $(\mathscr{E},\breve{\mathscr{E}})$ de $\mathscr{C}$ dans une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{Q}$ tel que $\mathscr{E}FX'$ soit inversible dans $\mathscr{Q}$ pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$, il existe un $\otimes$-foncteur ACU $(E',\breve{E}')$ unique (à $\otimes$-isomorphisme [] près) de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{Q}$ tel que $(\mathscr{E},\breve{\mathscr{E}}) \simeq (E',\breve{E}')\circ(D,\breve{D})$.

Ce problème se ramène au premier. Il suffit de poser $\mathscr{A}' = \mathscr{C}'$, $\mathscr{A} = \mathscr{C}' \times \mathscr{C}$, $TX' = (FX',X')$, et de remarquer que si $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{Q}$ son des $\otimes$-catégories ACU, $\mathscr{H}om^{\otimes,ACU}(\mathscr{C},\mathscr{Q})$ la catégorie des $\otimes$-foncteurs ACU de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{Q}$, alors on a une équivalence canonique de catégories

$$\mathscr{H}om^{\otimes,ACU}(\mathscr{C}\times\mathscr{C}',\mathscr{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om^{\otimes,ACU}(\mathscr{C},\mathscr{Q}) \times \mathscr{H}om^{\otimes,ACU}(\mathscr{C}',\mathscr{Q}).$$

la $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{P}$ ainsi définie est appelée la *$\otimes$-catégorie de fractions* de la catégorie $\mathscr{C}$ définie par $(\mathscr{C}',(F,\breve{F}))$ la $\otimes$-catégorie de fractions de $\mathscr{C}^{is}$ définie par $(\mathscr{C}^{is},(\mathrm{Id}_{\mathscr{C}^{is}},\mathrm{Id}))$ est une Pic-catégorie, on appelle la Pic-*enveloppe* de la catégorie $\mathscr{C}$ et on la note $(\mathscr{C})$. Pour $\mathscr{C} = \mathscr{P}(R)$, catégorie des R-modules projectifs de type fini (R est [] unitaire) et $\mathscr{P} = \mathrm{Pic}(\mathscr{P}(R))$, on obtient

$$\pi_0(\mathscr{P}) \simeq K^0(R)$$
$$\pi_1(\mathscr{P}) \simeq K^1(R)$$

où $K^0(R)$ est le groupe de Grothendieck et $K^1(R)$ le groupe de Whitehead [1].

La considération de la $\otimes$-catégorie de fractions d'un $\otimes$-catégorie ACU nous donne le résultat suivant :

Soient $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, Z un objet quelconque de $\mathscr{C}$, S le foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ définie par

$$X \xrightarrow{\sim} X \otimes Z$$

On appelle *catégorie de suspension* de la $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{C}$ définie par l'objet Z, le triple $(\mathscr{P},i,p)$, solution du problème universel pour les triples $(\mathscr{Q},j,q)$ où $\mathscr{Q}$ est une catégorie, j un foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{Q}$, q une équivalence de $\mathscr{Q}$ dans $\mathscr{Q}$, tels que le carré

[]

soit commutatif (*à isomorphisme fonctoriel près*) i.e. $qj \simeq js$.

Dans le cas où $\mathscr{C}$ est la catégorie homotopique ponctuée Htp_* munie du produit contracté $\cup$, des contraintes d'associaitvité, de commutativité, d'unité habituelles et [], S est par conséquent le foncteur de suspension, on retrouve la définition connue de catégorie de suspension.

Soient $\mathscr{C}'$ la sous-catégorie $\otimes$-stable de la $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{C}$ engendré par Z et $\mathscr{P}$ la catégorie des fractions de $\mathscr{C}$ définie par $(\mathscr{C}', (F, \mathrm{Id}))$ où $F : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ est le foncteur d'inclusion. On obtient un foncteur $g : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ de la catégorie de suspension $\mathscr{P}$ dans la $\otimes$-catégorie de fractions $\mathscr{P}$. Si G n'est pas fidèle (ce qui se produit dans le cas où $\mathscr{C} = \mathrm{Htp}_*$, $Z = S^4$ es la loi $\otimes$ est le produit contracte $\cup$) alors il est impossible de construire dans $\mathscr{P}$ une loi $\otimes$ telle que $\mathscr{P}$ en soit une $\otimes$-catégorie ACU, [] inversible dans $\mathscr{P}$ et i [] dans un couple $(i, \check{i})$ qui est un $\otimes$-foncteur ACU de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{P}$.

Ces deux problèmes universels ont été posés par Monsieur Grothendieck lors de [] à l'Université de Hanoi en Novembre 1967. Je tiens à lui exprimer ici tous nous remerciements pour ses [] directives.

SUMMARY

The purpose of these notes is to study the Gr-categories and give some applications of them. Below is a brief description of the organisation of the work.

Chapter I gives some definitions and results, which are used continually in the sequel, on $\otimes$-categories one can find in [2], [6], [11], [14], [15], the terminology employed in this chapter being of Neantro Saavedra Rivano [14]. A *$\otimes$-category* is a category $\mathscr{C}$ together with a *law* $\otimes$, i.e. a covariant bifunctor

$$\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$$

$$(X, Y) \mapsto X \otimes Y$$

An *associativity constraint* for a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ is an isomorphism of bifunctors

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z, \quad X, Y, Z \in Ob(\mathscr{C})$$

satisfying the *pentagon axiom*, i.e. all the pentagonal diagrams

[]

are commutative. A $\otimes$-category together with an associativity constraint is called a *$\otimes$-associativity category*.

A *commutativity constraint* for a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ is an isomorphism of bifunctors

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X, \quad X, Y \in Ob(\mathscr{C})$$

verifying the relation

$$c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = \mathrm{Id}_{X \otimes Y}$$

The commutativity constraint c is said to be *strict* if $c_{X,X} = \mathrm{Id}_{X\otimes}$ for all $X \in Ob(\mathscr{C})$. A $\otimes$-category together with a commutativity constraint is a *$\otimes$-commutative category*. A $\otimes$-commutative category is *strict* if its commutativity constraint is strict.

An *unity constraint* for a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ is a triple $(\underline{1}, g, d)$ where $\underline{1}$ is an object of $\mathscr{C}$, g and d natural isomorphisms

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X, \quad d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}, \quad X \in Ob(\mathscr{C})$$

such that $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$. A $\otimes$-category together with an unity constraint is a *$\otimes$-unifer category*.

A $\otimes$-category $\mathscr{C}$ together with an associativity constraint a and a commutaivity constraint c is a *$\otimes$-AC category* if the *hexagonal axiom* is fulfilled, i.e. all the hexagonal diagram commutes

[]

A $\otimes$-category $\mathscr{C}$ together with a associativity constraint a and an unity contraint $(\underline{1}, g, d)$ is a *$\otimes$-AU category* if all the following triangles commute

[]

A *$\otimes$-ACU category* is a $\otimes$-AC and AU category. An object X of a $\otimes$-ACU category $\mathscr{C}$ is *invertible* if there are two objects $X', X'' \in Ob(\mathscr{C})$ such that $X' \otimes X \simeq X \otimes X'' \simeq \underline{1}$.

A *$\otimes$-functor* from a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ to a $\otimes$-category $\mathscr{C}'$ is a pair $(F, \breve{F})$ where F is a functor $\mathscr{C} \longrightarrow cC'$ and $\breve{F}$ an isomorphism of bifunctors

$$\breve{F}_{X,Y} : FX \otimes FY \longrightarrow F(X \otimes Y) \quad X, Y \in Ob(\mathscr{C})$$

A $\otimes$-functor $(F, \breve{F})$ from a $\otimes$-associative category $\mathscr{C}$ to a $\otimes$-associative category $\mathscr{C}'$ is *associative* if the following diagram commutes:

[]

where a is the associativity constraint of $\mathscr{C}$ and a' of $\mathscr{C}'$.

A $\otimes$-functor $(F, \breve{F})$ from a $\otimes$-commutative category $\mathscr{C}$ to a $\otimes$-commutative category $\mathscr{C}'$ is *commutative* if the following diagram commutes :

[]

c and c' being the commutativity constraints of $\mathscr{C}$ and $\mathscr{C}'$ respectively.

A $\otimes$-functor $(F, \breve{F})$ from a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ with an unity constraint $(\underline{1}, g, d)$ to a $\otimes$-category $\mathscr{C}'$ with an unity constraint $(\underline{1}', g', d')$ is a*$\otimes$-unifer functor* if there exists an isomorphism $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$ such that the following diagrams commute:

[]

It follows from the definition that the isomorphism $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$, it it exists, is unique.

A $\otimes$-*AC functor* is an $\otimes$-associative and commutative functor.

A $\otimes$-*ACU functor* is a $\otimes$-associative, commutative and unifer functor.

Let $(F, \breve{F})$ and $(G, \breve{G})$ be $\otimes$-functors from a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ to a $\otimes$-category $\mathscr{C}'$. A $\otimes$-*morphism* from the $\otimes$-functor $(F, \breve{F})$ to the $\otimes$-functor $(G, \breve{G})$ is a morphism of functors $\lambda : F \longrightarrow G$ such that the following diagram commutes

[]

Chapter II is a study of Gr-categories and Pic-categories. A Gr-*category* is a $\otimes$-AU category, the objects of which are all invertible, and the base category a groupoid (i.e. all arrows are isomorphisms). Thus a Gr-category is like a group. We obtain from this definition that if $\mathscr{P}$ is a Gr-category, the set $\pi_0(\mathscr{P})$ of the classes up to isomorphism of objects of $\mathscr{P}$, together with the operation induced by the law $\otimes$ of $\mathscr{P}$, is a group; the group $\mathrm{Aut}(\underline{1}) = \pi_1(\mathscr{P})$ is a commutative group; and for all $X \in Ob(\mathscr{P})$

$$\gamma_X : u \mapsto u \otimes \mathrm{Id}_X = \mathrm{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X)$$

$$\delta_X : u \mapsto \mathrm{Id}_X \otimes u = \mathrm{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X)$$

We attribute thus to a Gr-category $\mathscr{P}$ two groups $\pi_0(\mathscr{P})$ and $\pi_1(\mathscr{P})$ where $\pi_1(\mathscr{P})$ is commutative. Furthermore we can define an action of $\pi_0(\mathscr{P})$ on $\pi_1(\mathscr{P})$ by the formula

$$su = \delta_X^{-1}\gamma_X(u)$$

for $s \in \pi_0(\mathscr{P})$ represents d by X and $u \in \pi_1(\mathscr{P})$. The commutative group $\pi_1(\mathscr{P})$ together with this action is a left $\pi_0(\mathscr{P})$-module.

Let M be a group, N a left M-module. A *preepinglage* of type (M, N) for a Gr-category $\mathscr{P}$ is a pair $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ of isomorphisms

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

compatible wit the action of M on N, $\pi_0(\mathscr{P})$ on $\pi_1(\mathscr{P})$. A Gr-category *preeplingled* of type (M, N) is a Gr-category $\mathscr{P}$ together with preepinglage. Finally, an *arrow* of Gr-categories preepingled of type (M, N) $(\mathscr{P}, \varepsilon) \longrightarrow (\mathscr{P}', \varepsilon')$ is a $\otimes$-associative functor such that the following triangles commute:

[]

It follows from this definition that a such arrow is a $\otimes$-equivalence. Thus the set of the equivalence classes of Gr-categories preepingled of type (M,N) is equal to the set of connected components of the category of Gr-categories preepingled of type (M,N).

If we consider the cohomology group $\mathrm{H}^3(M,N)$ of the group M with coefficients N (in the sense of the group cohomology [12]) we obtain a canonical bijection between the set $\mathrm{H}^3(M,N)$ and the set of the equivalence classes of Gr-categories preepingled of type (M,N).

A Pic-*category* is a Gr-category together with a commutativity constraint which is compatible with its associativity constraint, i.e. the hexagon axiom is satisfied. Thus a Pic-category is like a commutative group. We verify immediately that a necessary condition for the existence of a Pic-category structure on a Gr-category is that $\pi_0(\mathscr{P})$ must be commutative and act trivially on $\pi_1(\mathscr{P})$. A Pic-category is *strict* if its commutativity constraint is strict.

Let M, N be abelian groups. A *preepinglage* of type (M,N) for a Pic-category $\mathscr{P}$ is a pair $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ of isomorphisms

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

A Pic-category *preepingled* of type (M,N) is a Pic-category together with a preepinglage. We define the *arrow* of such objects in the same way as for Gr-categories.

For next propositions, let us consider two complexes of free abelian groups

$$L_\bullet(M) : L_3(M) \xrightarrow{d_3} L_2(M) \xrightarrow{d_2} L_1(M) \xrightarrow{d_1} L_0(M) \longrightarrow M$$

$$'L_\bullet(M) :' L_3(M) \xrightarrow{'d_3}\, ' L_2(M) \xrightarrow{'d_2}\, ' L_1(M) \xrightarrow{'d_1}\, ' L_0(M) \longrightarrow M$$

where

[]

so that $L_\bullet(M)$ is a truncated resolution of M. One obtains a canonical bijection between the set of the equivalence classes of Pic-categories preepingled of type (M,N) and the set $\mathrm{H}^2(Hom('L_\bullet(M),N))$. The exactitude of the complex $L(M)$ gives us e triviality of the classification of Pic-categories preepingled of type (M,N) which are strict, i.e. all Pic-categories preepingled of type (M,N) which are strict, are equivalent.

Finally chapter III gives us the construction of the solution of two universal problems: *problem of making objects "unity objects"* and *problem of reversing objects*.

Let $\mathscr{A}$ be a $\otimes$-AC category, $\mathscr{A}'$ another $\otimes$-AC category whose base category is a groupoid, and $(T, \breve{T}) : \mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{A}$ a $\otimes$-AC functors. We try to make the objects TA' of $\mathscr{A}$, $A' \in Ob(\mathscr{A}')$, "unity object", i.e. we try to get:

1°) A $\otimes$-ACU category $\mathscr{P}$

2°) A $\otimes$-AC functor $(D, \breve{D}) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{P}$

3°) A $\otimes$-isomorphism

$$\lambda : (,\breve{D}) \circ (T, \breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\mathscr{P}}, \breve{I}_{\mathscr{P}})$$

where $(I_{\mathscr{P}}, \breve{I}_{\mathscr{P}})$ is the $\otimes$-constant functors $\underline{1}_{\mathscr{P}}$ from $\mathscr{A}'$ to $\mathscr{P}$. The triple $(\mathscr{P}, (D, \breve{D}), \lambda))$ must be universal for triples $(\mathscr{Q}, (E, \breve{E}), \mu)$ satisfying 1°, 2°, 3°.

For the description of the triple $(\mathscr{P}, (D, \breve{D}), \lambda)$, we introduce a quotient category of a $\otimes$-AC category as follows:

Let $\mathscr{A}$ be a $\otimes$-AC category, Y a *multiplicative subset* of $\mathscr{A}$ (that means a subset of the set of all endomorphisms of $\mathscr{A}$ such that $Id_X \in Y$ for all $X \in Ob(\mathscr{A})$ and the tensor product of two arrows of Y belongs to Y). The *$\otimes$-AC category quotient A^Y* of $\mathscr{A}$ with respect to Y is the solution of the universal problem

$$(K, \breve{K}) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}, \quad K(u) = \text{Id for all } u \in Y$$

where B is a $\otimes$-AC category and $(K, \breve{K})$ a $\otimes$-AC functor.

Now let us give an idea of the construction of the triple $(\mathscr{P}, (D, \breve{D}, \lambda))$ for $\mathscr{A}' \neq \varnothing$:

1° $\mathrm{Ob}(\mathscr{P}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$

2° $Hom_{\mathscr{P}}(A, B) = \varphi(A, B)_{/R_{A,B}}, A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})$

$\varphi(A, B)$ being the set of all triples (A', B', u) where $A', B' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{A}')$, $u \in Fl(\mathscr{A})$, $u : A \otimes TA' \longrightarrow B \otimes TB'$; $R_{A,B}$ the equivalence relation defined in $\varphi(A, B)$ as follows

$$(A'_1, B'_1, u) R_{A,B} (A'_2, B'_2, u)$$

if and only if there are objects C'_1, C'_2 and isomorphisms

$$u' : A'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} A'_2 \otimes C'_2, \quad v' : B'_1 \otimes C'_1 \xrightarrow{\sim} B'_2 \otimes C'_2$$

of $\mathscr{A}'$ such that the following diagram commutes in $\mathscr{A}^{\varphi}$ $\otimes$-AC quotient category of $\mathscr{A}$ with respect to the multiplicative subset of $\mathscr{A}$ generated by the endomorphisms of the form $T(c_{A',A'})$;

[]

We denote by $[A', B', u]$ the class which has (A', B', u) as representative

3° Composition of arrows in $\mathscr{P}$. Let $[A', B, u] : A \longrightarrow B$, $[B'', C'', v] : B \longrightarrow C$ be arrows in $\mathscr{P}$. We define

$$[B'', C'', v] \circ [A', B', u] = [A' \otimes B'', B' \otimes C', w] : A \longrightarrow C$$

where w is such that the following diagram commutes:

[]

4° $\otimes$-structure on $\mathscr{P}$

$$A \otimes E \ (\text{in } \mathscr{P}) = A \otimes E \ (\text{in } \mathscr{A})$$

$$[A', B', u] \otimes [E', F', v] = [A' \otimes E', B' \otimes F', w]$$

where w is defined by the commutative diagram (1)

5° ACU constraint in $\mathscr{P}$.

$$([A', A', a \otimes \mathrm{Id}], [A', A', c \otimes Id], (1_{\mathscr{P}} = TA'_0, g_A = [A'_0 \otimes A', A', t_A], d_A = [A'_0 \otimes A', A', p_A]))$$

where A'_0 is a fixed object of $\mathscr{A}'$, A' an arbitrary object of $\mathscr{A}'$, g_A and d_A natural isomorphisms

$$g_A : A \longrightarrow 1_{\mathscr{P}} \otimes A, \quad d_A : A \longrightarrow A \otimes 1_{\mathscr{P}}$$

with t_A and p_A defined by the commutativity diagrams (2)

6° $(D, \check{D})$ is defined by

$$DA = A, \quad D_u = [A', A', u \otimes \mathrm{Id}_{TA'}], \quad \check{D}_{A,B} = \mathrm{Id}_{A \otimes B}$$

[]

For the problem of reversing objects, let us consider a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ with a ACU constraint $(a, c, (1, g, d))$ a $\otimes$-category $\mathscr{C}'$ with a ACU constraint $(a', c', (1', g', d'))$, the base category of which is a groupoid, and a $\otimes$-ACU functor $(F, \breve{F}) : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$. We try to find a $\otimes$-ACU category $\mathscr{P}$ and a $\otimes$-ACU functor $(D, \breve{D}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{P}$ having the following properties

1° DFX' is invertible in $\mathscr{P}$ for all $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$

2° For all $\otimes$-ACU functor $(E, \breve{E})$ from $\mathscr{C}$ to a $\otimes$-ACU category $\mathscr{Q}$ such that EFX' is invertible in $\mathscr{Q}$ for all $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$, there exists a $\otimes$-ACU functor $(E', \breve{E}')$, unique up to $\otimes$-isomorphism, from $\mathscr{P}$ to $\mathscr{Q}$ such that $(E, \breve{E}) \simeq (E', \breve{E}' \circ (D, \breve{D}))$.

This problem is reduced by the first by putting $\mathscr{A}' = \mathscr{C}'$, $\mathscr{A} = \mathscr{C} \times \mathscr{C}'$, $TX' = (FX', X')$ and by remarking that if $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{Q}$ are $\otimes$-ACU categories, $\mathscr{H}om^{\otimes,ACU}(\mathscr{C}, \mathscr{Q})$ the category of all $\otimes$-ACU functors from $\mathscr{C}$ to $\mathscr{Q}$, then there is a canonical equivalence of categories

$$\mathscr{H}om^{\otimes,ACU}(\mathscr{C} \times \mathscr{C}', \mathscr{Q}) \longrightarrow \mathscr{H}om^{\otimes,ACU}(\mathscr{C}, \mathscr{Q}) \times \mathscr{H}om^{\otimes,ACU}(\mathscr{C}', \mathscr{Q})$$

The $\otimes$-ACU category $\mathscr{P}$ thus defined is called the *$\otimes$-category of fractions* of the category $\mathscr{C}$ with respect to $(\mathscr{C}', (F, \breve{F}))$. The $\otimes$-category of fractions of $\mathscr{C}^{is}$ with respect to $(\mathscr{C}^{is}, (\mathrm{Id}_{\mathscr{C}^{is}}, \mathrm{Id}))$ is a Pic-category which is called the Pic-*envelope* of the category $\mathscr{C}$, and denoted by $\mathrm{Pic}(\mathscr{C})$.

For an application of the Pic-envelope, we take $\mathscr{C} = P(R)$, category of all finitely generated R-modules (R a ring) and $\mathscr{P} = \mathrm{Pic}(P(R))$, then one obtain

$$\pi_0(\mathscr{P}) \simeq K^0(R)$$

$$\pi_1(\mathscr{P}) \simeq K^1(R)$$

where $K^0(R)$is the Grothendieck group and $K^1(R)$ the whitehead group [1].

The use of the $\otimes$-category of fractions of a $\otimes$-ACU category gives us the following result:

Let $\mathscr{C}$ be a $\otimes$-ACU category, Z an arbitrary object of $\mathscr{C}$ different from the unity object $\underline{1}$, S the functor from $\mathscr{C}$ to $\mathscr{C}$ defined by

$$X \mapsto X \otimes Z.$$

The *suspension category* of the $\otimes$-ACU category $\mathscr{C}$ defined by the object Z is the triple $(\mathscr{P}, i, p)$ which solves the universal problem for triples $(\mathscr{Q}, j, q)$ where $\mathscr{Q}$ is a category, j a functor from $\mathscr{C}$ to $\mathscr{Q}$, and q an equivalence of categories from $\mathscr{Q}$ to $\mathscr{Q}$, so that the following diagram commutes

[]

up to natural isomorphism. In the case where $\mathscr{C}$ is the homotopy category of pointed topological spaces $\underline{\mathrm{Htp}}_*$ together with the smash [] (the smash [] of two spaces X and Y, with the base points x_0 and y_0, is obtained from the product $X \times Y$ by [] the subset [] to a single point which is taken as the base point of []), and the usual ACU constraint; and Z is the 1-sphere S^1 hence S^1 is the suspension functor, we get the well-known definition of the suspension category.

Let $\mathscr{C}'$ be the $\otimes$-stable subcategory of $\mathscr{C}$ generated by Z and $\mathscr{P}$ the $\otimes$-category of fractions of $\mathscr{C}$ with respect to $(\mathscr{C}', (F, \mathrm{Id}))$ where $F : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ is the inclusion functor. One obtains a functor $G : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ from the suspension category to the $\otimes$-category of fractions of $\mathscr{P}$. If G is not faithful, that is the case of the homotopy category of pointed topological spaces $\underline{\mathrm{Htp}}_*$ together with the smash $\wedge$ and the 1-sphere S^1; then it is impossible to construct in $\mathscr{P}$ a law $\otimes$ such that $\mathscr{P}$ together with this law is a $\otimes$-ACU category, iZ invertible in $\mathscr{P}$, and i embedded in a pair $(i, \breve{i})$ which is a $\otimes$-ACU functor from $\mathscr{C}$ to $\mathscr{P}$.

§ I. — ⊗-CATÉGORIES ET ⊗-FONCTEURS

1. ⊗-catégories

1. Définition des ⊗-catégories

Définition **(1)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie; un foncteur $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ est appelé une* ⊗-structure *sur $\mathscr{C}$, ou encore une* loi ⊗ *sur $\mathscr{C}$. Une* ⊗-catégorie *est une catégorie $\mathscr{C}$ munie d'une ⊗-structure qu'on note $\otimes_{\mathscr{C}}$, ou simplement ⊗, si aucune confusion n'est possible; a des objets X, Y de $\mathscr{C}$, on associe donc un objet $X \otimes Y$ de $\mathscr{C}$ appelé* produit tensoriel des objets *X et Y, qui dépend fonctoriellement de (X, Y), i.e. à des flèches $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$ de $\mathscr{C}$, on a une flèche $f \otimes g : X \otimes Y \longrightarrow X' \otimes Y'$ de $\mathscr{C}$ appelé* produit tensoriel des flèches *f et g, vérifiant les relations* $\mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{Id}_Y = \mathrm{Id}_{X \otimes Y'}$ $f'f \otimes g'g = (f' \otimes g')(f \otimes g)$ *au cas où f, f' et g, g' sont composables.*

Définition **(2)**. — *Soit X un objet d'une ⊗-catégorie $\mathscr{C}$. On dit que X est* régulier *si les foncteurs, définis pour les applications*

$$Y \mapsto Y \otimes X, \quad f : Y \longrightarrow Z \mapsto f \otimes \mathrm{Id}_X : Y \otimes X \longrightarrow Z \otimes X$$

et

$$Y \mapsto X \otimes Y, \quad f : Y \longrightarrow Z \mapsto \mathrm{Id}_X \otimes f : X \otimes Y \longrightarrow X \otimes Z$$

de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ sont des équivalences de catégories. On vérifie aisément que si X est régulier et si $X' \simeq X$ i.e. X' est isomorphique a X, alors X' est aussi régulier.

2. Exemples des ⊗-catégories

1) Soit $\mathscr{C}$ une catégorie dans laquelle le produit des couples d'objets existe. Pour tout couple (X,Y), choisissons un produit $(X\times Y, p_X, p_Y)$. On définit alors une $\otimes$-structure sur $\mathscr{C}$ en posant pour des objets X, Y

$$X\otimes Y = X\times Y,$$

pour des flèches $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$,

$$f\otimes g = f\times g.$$

On vérifie sans difficulté que, dans cette $\otimes$-catégorie, les objets réguliers sont les objets finaux.

2) Soit $\mathscr{C}$ la catégorie Mod(A) des modules sur un anneau commutatif unitaire A. Le produit tensoriel de A-modules définit une loi $\otimes$ sur $\mathscr{C}$. Ici les objets réguliers sont les A-modules projectifs de rang 1 [4].

3) Soit (X,x_0) un espace topologique pointé. On définit une catégorie $\mathscr{C}$ de la façon suivante: les objets de $\mathscr{C}$ sont les lacets de X localisés en x_0; si w_1, w_2 sont des lacets, $Hom_{\mathscr{C}}(w_1,w_2)$ est l'ensemble d'homotopies $w_1 \longrightarrow w_2$ modulo la relation d'homotopie. La composition des lacets définit une $\otimes$-structure sur $\mathscr{C}$. Dans cette $\otimes$-catégorie tous les objets sont réguliers.

4) Soient $\mathscr{C}$ une catégorie additive, $\mathscr{E}$ une catégorie cofibré sur $\mathscr{C}$ [10]. Pour tout objet A de $\mathscr{C}$, la fibre de $\mathscr{E}$ en A est notée $\mathscr{E}(A)$. L'homomorphisme [] dans $\mathscr{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\mathscr{E}(A)\times\mathscr{E}(A)\longrightarrow\mathscr{E}(A)$$

qui fait de $\mathscr{E}(A)$ une $\otimes$-catégorie.

5) Soient M un groupe, N un M-module abélien à gauche. On construit une catégorie $\mathscr{C}$ dont les objets sont les éléments de M, les morphismes sont des automorphismes. Pour $S\in M$, on définit

$$Aut_{\mathscr{C}}(S) = \{S\}\times N$$

La composition des flèches dans $\mathscr{C}$ provient de l'addition dans N. On définit sur $\mathscr{C}$ une loi $\otimes$ de la façon suivante: si $S_1, S_2\in M$, on pose

$$S_1\otimes S_2 = S_1S_2;$$

Si (S_1, u_1), (S_2, u_2) sont des morphismes $(u_1, u_2 \in N)$, on pose

$$(S_1, u_1) \otimes (S_2, u_2) = (S_1 S_2, u_1 + S_1 u_2).$$

Ici tous les objets de la $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ sont réguliers en vertu du fait que M est un groupe et l'ensemble des flèches de $\mathscr{C}$ muni de la loi $\otimes$ est aussi un groupe, à savoir le produit semi-direct $M.N$.

Dans le cas où N est un M-module abélien à droite, on définit la loi $\otimes$ dans $\mathscr{C}$ par

$$S_1 \otimes S_2 = S_1 S_2$$

$$(S_1, u_1) \otimes (S_2, u_2) = (S_1 S_2, u_1 S_2 + u_2).$$

2. Contraintes pour une loi $\otimes$

1. Contraintes d'associativité

Définition **(1)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie.* Une contrainte d'associativité *pour $\mathscr{C}$ est un isomorphisme fonctoriel a*

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

*tel que pour des objets X, Y, Z, T de $\mathscr{C}$ le diagramme suivant soit commutatif (*axiome du pentagone*)*

[]

Définition **(2)**. — *On appelle* $\otimes$-catégorie associative une $\otimes$-catégorie *munie d'une contrainte d'associativité.*

Définition **(3)**. — *Deux contraintes d'associativité a et a′ d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ sont dites* cohomologues *s'il existe un automorphisme fontoriel φ du foncteur $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif*

[]

pour des objets X, Y, Z de $\mathscr{C}$.

Exemples.

1) Toutes les $\otimes$-catégories données dans ($\S 1, n°2$) sont des $\otimes$-catégories associatives.

2) Dans l'exemple 5) du ($\S 1, n^2$), il y a une contrainte d'associativité évidente à savoir l'identité. On va vois qu'il y un a d'autres. Se donner un morphisme de trifoncteurs a revient dans ce cas à se donner une application $f : M^3 \longrightarrow N$, sa relation entre f et a étant

$$a_{S_1,S_2,S_3} = (S_1 S_2 S_3, f(S_1, S_2, S_3)).$$

Lorsqu'on écrit l'axiome du pentagone en utilisant cette relation, on trouve [] où l'on a posé $X = S_1$, $Y = S_2$, $Z = S_3$, $T = S_4$. Autrement dit $f : M^3 \longrightarrow N$ définit une contrainte d'associativité si et seulement si f est un 3-cocycle de M à valeurs dans le M-module N, au sens de la cohomologie des groupes [12]. On explicite de même (1) pour démontrer que des 3-cocyles f, f' déterminent des contraintes d'associativité cohomologues si et seulement si f, f' sont des cocycles cohomologues. On trouve donc, dans ce cas, que le groupe des contraintes d'associativité, sous-groupe du groupe des automorphismes du foncteurs $(S_1, S_2, S_3) \mapsto S_1 S_2 S_3$, est isomorphe au groupe $Z^3(M, N)$ des 3-cocyles de M à valeurs dans N. De même, le groupe des contraintes d'associativité modulo cohomologie est iomorphe au groupe cohomologique

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$, indexé par un ensemble fini non vide totalement ordonné $(I, <)$. au moyen des X_i et de la loi $\otimes$, nous allons construire des objets de $\mathscr{C}$ qu'on appelle des *produits des X_i relativement à l'ordre* $>$. Par exemple pour $I = \{\alpha\}$, nous avons un seul produit X_α; pour $I = \alpha, \beta$ avec $\alpha < \beta$, nous avons aussi un seul produit $X_\alpha \otimes X_\beta$; pour $I = \alpha, \beta, \gamma$ avec $\alpha < \beta < \gamma$, nous avons deux produits $X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma)$ et $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma$; pour $I = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ avec $\alpha < \beta < \gamma\delta$, nous avons cinq produits $X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes (X_\gamma \otimes X_\delta))$, $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes (X_\delta \otimes X_\delta)$, $((X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma) \otimes X_\delta$, $(X_\alpha \otimes (X_\beta \otimes X_\gamma)) \otimes X_\delta$, $X_\alpha \otimes ((X_\beta \otimes X_\gamma) \otimes X_\delta)$. Parmi ces produits relativement à l'ordre $<$, nous allons en choisie un que nous appelons le produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$.

Définition **(4)**. — *Soit $(X_i)_{i\in J}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$, indexée par un ensemble totalement ordonné non vide $(J, <)$. Pour chaque ensemble non vide fini $I \subset J$ (totalement ordonnée par l'ordre induit), on appelle le* produit canonique de la famille Soit $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$, *l'objet de $\mathscr{C}$, noté [], et défini par récurrence sur le nombre d'éléments de I de la manière suivante :*

1° *Si $I = \beta$, alors [];*

2° *Si I a p éléments ($p > 1$) avec β le plus grand élément et I' l'ensemble des éléments $< \beta$ de I, alors[].*

D'après cette définition, pour $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, le produit canonique de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $\alpha < \beta < \gamma$ est $(X_\alpha \otimes X_\beta) \otimes X_\gamma$. Dans ce qui suit de ce $n°$, nous dirons *produit canonique* (resp. *produit*) de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$ (resp. produit de la famille $(X_i)_{i\in I}$ relativement à l'ordre $<$) si aucune confusion n'est à craindre.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ associative, indexé par un ensemble non vide totalement ordonné $(J, <)$, les ensembles non vides $I \subset J$ considérés ci-dessus sont des ensembles finis totalement ordonnés par l'ordre induit.

Définition **(5)**. — *Pour chaque couple (I_1, I_2) de sous-ensembles non vides de I, tels que [] [] défini par récurrence sur le nombre d'éléments de I_2 de la manière suivante: []*

Proposition **(1)**. — *Pour chaque triple (I_1, I_2, I_3) de sous-ensembles non vides de I tels qu'on ait [] []*

Démonstration. Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur le nombre d'éléments de I_3. []

Proposition **(2)**. — *Chaque produit Y d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ est isomorphe au produit canonique [] par un isomorphisme*

$$y : []$$

fonctoriel en les X_i

Démonstration. Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur le nombre d'éléments de I. []

Proposition **(3)**. — *Soient I_1, I_2, I_3 des sous-ensembles non vides de I tels que [] Alors le diagramme [] est commutatif, b et b' étant isomorphismes canoniques.*

Démonstration. Considérons le diagramme []

Proposition **(4)**. — *Soient* Y_1, Y_2 *des produits de* $(X_i)_{i\in I}$ *et* $\tau : Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_2$ *un isomorphisme contient à l'aide de* a, a^{-1}, *des identités et de la loi* $\otimes$*; alors le diagramme [] où* b_1, b_2 *sont des isomorphismes canoniques, est commutatif.*

Proposition **(5)**. — *Soient* Y_1, Y_2,...Y_n *des produits de* $(X_i)_{i\in I}$ $\tau_{i,i+1} : Y_i \xrightarrow{\sim} Y_{i+1}$ $(i = 1,2,...,n-1)$ *et* $\tau_{n,1} : Y_n \xrightarrow{\sim} Y_1$ *des isomorphismes contraints au moyen de* a, a^{-1}, *des identités et de la loi* $\otimes$. *Alors le polygone suivant [] est commutatif.*

Démonstration. En effet, le diagramme []
où les b_i, $i = 1,2,..,n$, sont des isomorphismes canoniques, []
Exemple

3) En vertu de la proposition 5, le pentagone suivant est commutatif []

2. Contraintes de commutativité

Définition **(6)**. — *Soit* $\mathscr{C}$ *une* $\otimes$*-catégorie. Une* contrainte de commutativité *pour* $\mathscr{C}$ *est un isomorphisme fonctoriel* c

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

tel qu'on ait

$$c_{X,Y} \circ c_{Y,X} = \mathrm{Id}_{Y\otimes X}$$

Une $\otimes$*-catégorie munie d'une contrainte de commutativité est appelé une* $\otimes$-catégorie commutative.

Définition **(7)**. — *Deux contraintes de commutativité* c *et* c' *d'une* $\otimes$*-catégorie* $\mathscr{C}$ *sont dites* cohomologues *s'il existe une automorphisme fonctoriel* φ *du foncteurs* $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ *tel que le diagramme suivante soit commutatif*

[]

Définition **(8)**. — *Si* $\mathscr{C}$ *est une* $\otimes$*-catégorie munie d'une contrainte de commutativité* c, X *un objet de* $\mathscr{C}$, *on appelé* symétrie canonique *de* $X \otimes X$ *l'automorphisme*

$$c_X = c_{X,X} : X \otimes X \xrightarrow{\sim} X \otimes X.$$

On dit que la contrainte de commutativité c est stricte *si les symétries canoniques sont des identités; $\mathscr{C}$ est alors appelé une* $\otimes$-catégorie strictement commutative.

Exemple. — Dans l'exemple 5) de ($\S 1, n°2$), on vérifie aussitôt qu'il existe des contraintes de commutativité si te seulement si M est commutatif et opère trivialement sur N. Se donner une contrainte de commutativité c revient dans ce cas à se donner une fonction antisymétrique $k : M^2 \longrightarrow N$, la relation entre k et c étant

$$c_{S_1,S_2} = (S_1S_2, k(S_1,S_2)).$$

Ici le groupe des contraintes de commutativité, sous-groupe du groupe des automorphismes du foncteurs $(S_1,S_2) \mapsto S_1S_2$, est isomorphe canoniquement au groupe $\mathrm{Aut}^2(M,N)$ des fonctions antisymétriques $M^2 \longrightarrow N$. Quand on écrit la commutativité de diagramme [] par S_1, S_2 respectivement et en posant

[]

on obtient

[]

avec

[]

Il en résulte que le groupe des classes de cohomologie de contraintes de commutativité dans ce cas s'identifie à [] où [] est le groupe des fractions antisymétriques de la forme [] avec $h \in C^2(M,N)$.

3. Contraintes d'unité

Définition **(9)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une* contrainte d'unité *pour $\mathscr{C}$, ou simplement une* unité *pour $\mathscr{C}$ est un triple $(\underline{1}, g, d)$, où $\underline{1}$ est un objet de $\mathscr{C}$ appelé* objet unité *et g, d sont des isomorphismes fonctoriels*

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X, \quad d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

vérifiant la condition

$$g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}.$$

On note encore d l'isomorphisme $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$. On peut remarquer que les foncteurs

$$X \mapsto \underline{1} \otimes X \quad \text{et} \quad X \mapsto X \otimes \underline{1}$$

sont des équivalences de catégories, d'où l'objet $\underline{1}$ est régulier (§1, n°1, Déf. 2). Une $\otimes$-catégorie munie d'une unité est dite *unifère*.

Proposition **(6)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte d'unité $(\underline{1}, g, d)$. Pour tout objet X de $\mathscr{C}$, on a les formules*

$$g_{\underline{1}\otimes X} = \mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes g_X, \quad d_{X\otimes \underline{1}} = d_X \otimes \mathrm{Id}_{\underline{1}}.$$

Démonstration. La naturalité de g, d donne les diagrammes commutatifs [] ce qui démontre les formules.

Proposition **(7)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une unité $(\underline{1}, g, d)$; alors le monoïde* End($\underline{1}$) *est commutatif.*

Démonstration. [] l'isomorphisme [] il suffit donc de prouver que End($\underline{1} \otimes \underline{1}$) est commutatif. Puisque $\underline{1}$ est régulier (Déf. 2), tout endomorphisme f de $\underline{1} \otimes \underline{1}$ peut s'exprimer

$$f = u \otimes \mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes v, \quad u, v \in \mathrm{End}(\underline{1}).$$

Si f' est un autre endomorphisme, on a

$$f = u' \otimes \mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes v'$$

d'où

$$f f' = (u \otimes \mathrm{Id}_{\underline{1}})(\mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes v') = u \otimes v' = (\mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes v')(u \otimes \mathrm{Id}_{\underline{1}}) = f' f$$

Remarques.

1) En vertu de la naturalité de g, d et de la relation $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$, on a $u \otimes \mathrm{Id}_{\underline{1}} = \mathrm{Id}_{\underline{1}} \otimes u$ pour tout $u \in \mathrm{End}(\underline{1})$.

2) Dans la démonstration ci-dessus, on utilise seulement l'hypothèse que $\underline{1}$ soir régulier et $\underline{1} \simeq \underline{1} \otimes \underline{1}$. Donc la proposition reste valable pour tout objet régulier Z tel que $Z \simeq Z \otimes Z$.

Nous allons maintenant définir deux homomorphismes γ, δ du monoïde End($\underline{1}$) dans le monoïde End($\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$) des morphismes fonctoriels du foncteur identique $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$, qui nous serviront au chapitre II.

Proposition **(8)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie munie d'une unité $(\underline{1}, g, d)$. Les applications [] définies respectivement par les diagrammes commutatifs [] sont des homomorphismes transforment l'élément unité en l'élément unité pour tout objet X de $\mathscr{C}$.*

Démonstration. La vérification est immédiate. En plus, la naturalité de g, d donne

$$\gamma_{\underline{1}}(u) = \delta_{\underline{1}}(u) = u$$

Proposition **(9)**. — $(\gamma_X(u))_{X\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$, $(\delta_X(u))_{X\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$ *sont des morphismes fonctoriels du foncteur identique* $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ *de* $\mathscr{C}$.

Démonstration. Considérons les diagrammes [] où f est une flèche quelconque. Dans ces diagrammes la commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII) est donnée par la naturalité de g, d ; celle de (II) et (VII) est immédiate en composant les flèches ; enfin celle de (IV), (V), (IX), (X) résulte des diagrammes commutatifs (8). On en déduit la commutativité des [] extérieurs, ce qui montre la fonctorialité de $\gamma_X(u)$ et $\delta_X(u)$.

Proposition **(10)**. — *Les applications [] sont des homomorphismes de monoïdes.*

Démonstration. Résultat immédiat des propositions 8 et 9.

Exemple. Dans l'exemple 5 du (§1, $n°2$), la donnée d'une unité revient à celle d'une couple [] on trouve

$$\gamma_S(u) = (S, u), \quad \delta_S(u) = (S, Su)$$

ce qui montre que $\gamma \neq \delta$ en général. Cet exemple montre qu'une $\otimes$-catégorie peut avoir plusieurs unités.

Définition **(10)**. — *Soient $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ des unités pour la $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$. On appelle* morphisme *de $(\underline{1}, g, d)$ dans $(\underline{1}', g', d')$ un morphisme $\lambda : \underline{1} \longrightarrow \underline{1}'$ rendant commutatif les diagrammes [] pour tout objet X de $\mathscr{C}$. En faisant $X = \underline{1}$, on voit que λ est un isomorphisme, et que pour $(\underline{1}, g, d)$, $(\underline{1}', g', d')$ données, il y a au plus un te λ*[1]

[1] Il y []

3. Compatibilités entre contraintes

1. Associativité et commutativité

Définition (1). — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie*

Définition (2). —

Définition (3). —

Définition (4). —

Proposition (1). —

Démonstration.

Lemme. —

Démonstration.

Proposition (2). —

Démonstration.

Proposition (3). —

Démonstration.

Proposition (4). —

Proposition (5). —

Proposition (6). —

Proposition (7). —

2. Associativité et unité

Définition **(5)**. —

Proposition **(8)**. —

Démonstration.

Définition **(6)**. —

Proposition **(9)**. —

Démonstration.

Proposition **(10)**. —

Démonstration.

Proposition **(11)**. —

Démonstration.

Proposition **(12)**. —

Démonstration.

Proposition **(13)**. —

Proposition **(14)**. —

Proposition **(15)**. —

Proposition **(16)**. —

Démonstration.

Proposition **(17)**. —

Démonstration.

3. Commutativité et unité

Définition **(7)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une contrainte de commutativité c et une contrainte d'unité* $(\underline{1}, g, d)$ *sont dites* compatibles, *si pour tout objet X de $\mathscr{C}$, le triangle [] est commutatif. On a en particulier []*

Un couple $(c, (\underline{1}, g, d))$ comme ci-dessus est appelé une *contrainte mixte de commutativité unité*, ou plus simplement une *contrainte CU* pour la $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$. Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte CU est appelé une *$\otimes$-catégorie CU*.

Proposition **(18)**. — *Dans une $\otimes$-catégorie CU $\mathscr{C}$, les homomorphismes γ_X et δ_X* (§2, $n°3$, *Prop* 8) *sont égaux pour tout objet X de $\mathscr{C}$.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant [] où le commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de γ_X et δ_X; celle de (II) résulte de la naturtalité de c; et enfin cette de (IV), (V) résulte de la condition de compatibilité (31). On obtient $\gamma_X(u) = \delta_X(u)$ pour tout $u \in \mathrm{End}(\underline{1})$, donc

$$\gamma_X = \delta_X \tag{33}$$

pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

4. Associativité, commutativité et unité

5. Objets invertibles

Dans ce n°, $\mathscr{C}$ désigne une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte AU $(a, (1, g, d))$.

Définition **(9)**. — *Soit X un objet de $\mathscr{C}$. On dit que X est* inversible *s'il existe des objets X', X'' de $\mathscr{C}$ tels que $X' \otimes X \simeq 1$, $X \otimes X'' \simeq 1$.*

Définition **(29)**. — *Si [] alors $X' \simeq X''$.*

Démonstration. []

Corollaire. — *X est inversible si et seulement s'il existe X' tel que $X' \otimes X \simeq 1$ et $X \otimes X' \simeq 1$.*

Démonstration. []

Définition **(30)**. — *X est inversible si et seulement si X est régulier.*

Démonstration. []

Définition **(31)**. — *Soient X un objet*

4. ⊗-foncteurs

1. Définition de ⊗-foncteurs

Définition **(1)**. — *Un* ⊗-foncteur *d'une ⊗-catégorie $\mathscr{C}$ dans une ⊗-catégorie $\mathscr{C}'$ est un couple $(F,\breve{F})$ d'une foncteur $F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}'$ et d'un isomorphisme fonctoriel*

$$\breve{F}_{X,Y}:F(X)\otimes F(Y)\xrightarrow{\sim}F(X\otimes Y)$$

On dit que $(F,\breve{F})$ est un ⊗-foncteur *strict*, si pour tous $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a

$$F(X\otimes Y)=FX\otimes FY$$

$$\breve{F}_{X,Y}=\mathrm{Id}_{F(X\otimes Y)}$$

Si $(F,\breve{F})$, $(G,\breve{G})$ sont des ⊗-foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$, un ⊗-*morphisme* de $(F,\breve{F})$ dans $(G,\breve{G})$ est un morphisme fonctoriel $\lambda:F\longrightarrow G$ rendant commutatif, pour $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, le carré
[]

Si de plus λ est un isomorphisme de foncteurs on dit qu'on a un ⊗-*isomorphisme*. En autre, si $(H,\breve{H})$ est une autre ⊗-foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et $\mu:G\longrightarrow H$ un ⊗-morphisme de $(G,\breve{G})$ dans $(H,\breve{H})$, on vérifie aussitôt que $\mu\circ\lambda$ est aussi un ⊗-morphisme qu'on appelle le ⊗-*morphisme composé* des ⊗-morphisme λ et μ. On obtient aussi une catégorie $\mathscr{H}om^{\otimes}(\mathscr{C},\mathscr{C}')$ dont les objets sont les ⊗-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et les morphismes les ⊗-morphismes.

Définition **(2)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ des ⊗-catégories, $(F,\breve{F})$ et $(F',\breve{F}')$ des ⊗-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}''$ respectivement. Nous définissons le* ⊗-foncteur composé *de $(F,\breve{F})$ et $(F',\breve{F}')$ comme le couple $(F'',\breve{F}'')$, noté $(F',\breve{F}')\circ(F,\breve{F})$ ou $(F'F,\breve{F'F})$, où*

$$F''=F'\circ F$$

$$\breve{F}''=(F'*\breve{F})\circ(\breve{F}'*(F,F))$$

c'est à dire que pour des objets X, Y de $\mathscr{C}$, $\check{F}''_{X,Y}$ est défini par le triangle commutatif []

En outre, si $(G, \check{G}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$, $(G', \check{G}') : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}''$ sont aussi des $\otimes$-foncteurs, $\lambda : F \longrightarrow G$, $\lambda' : F' \longrightarrow G'$ des $\otimes$-morphismes, on vérifie immédiatement que $F' * \lambda$ et $\lambda' * G$ sont des $\otimes$-morphismes, d'où $\lambda' * \lambda : F'F \longrightarrow G'G$ est aussi un $\otimes$-morphisme. On dispose donc d'une 2-catégorie $\otimes$—, ayant comme objets les $\otimes$-catégories, et comme catégories de morphismes les $\mathscr{H}om^{\otimes}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$.

2. Compatibilités avec des contraintes

Définition **(3)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'associativité a et a' respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F, \check{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est* compatible *avec a, a', si pour tous $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, le diagramme*

[]

est commutatif. On dit alors que $(F, \check{F})$ est un $\otimes$-foncteur associatif. *La sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om^{\otimes}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs associatifs est notées $\mathscr{H}om^{\otimes,A}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$.*

Proposition **(1)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'associativité a, a', a'' respectivement; $(F, \check{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$, $(F', \check{F}') : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}''$ des $\otimes$-foncteurs associatifs. Alors le $\otimes$-foncteur composé $(F'F, F'F)$ est aussi associatif.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant

[]

Remarque. []

Définition **(4)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes de commutativité c et c' respectivement. On dit qu'un $\otimes$-foncteur $(F, \check{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est* compatible *avec c, c', si pour tous $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, le diagramme*

[]

est commutatif. On dit alors que $(F, \check{F})$ est un $\otimes$-foncteur commutatif. *La sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}om^{\otimes}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ dont les objets sont les $\otimes$-foncteurs commutatifs est notée $\mathscr{H}om^{\otimes,C}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$.*

On vérifie aussitôt la proposition suivante :

Proposition **(2)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ des $\otimes$-catégories munies des contraintes d'associativité* *commutativité* c, c', c'' *respctivement;* $(F,\breve{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$, $(F',\breve{F}) : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}''$ *des* $\otimes$*-foncteurs commutatifs. Alors le* $\otimes$*-foncteur composé* $(F'F, F'\breve{}F)$ *est aussi commutatif.*

Remarque. [ ]

Définition **(5)**. —

Remarque. [ ]

Proposition **(3)**. —

Définition **(6)**. —

Proposition **(4)**. —

Corollaire. —

Proposition **(5)**. —

Proposition **(6)**. —

Proposition **(7)**. —

Définition **(7)**. —

Proposition **(8)**. —

Définition **(8)**. —

Proposition **(9)**. —

Corollaire. —

Proposition **(10)**. —

Proposition **(11)**. —

Démonstration.

Exemple. Le diagramme suivant est commutatif

[]

On a des propositions analogues à la proposition 11 quand on [] à des contraintes d'associativité, commutativité, unité, ou des contraintes mixtes AC, AU, CU. Bornons-nous au cas AC, nous avons la proposition :

Proposition **(12)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories AC et $(F,\breve{F})$ un $\otimes$-foncteur AC de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. Tout diagramme dans $\mathscr{C}'$ construit à l'aide de a', a'^{-1}, c', c'^{-1}, Fa, Fa^{-1}, Fc, Fc^{-1}, $\breve{F}$, $\breve{F}^{-1}$, des identités et de la loi $\otimes$, est commutatif.*

5. $\otimes$-équivalences

1. Définition de $\otimes$-équivalences

Définition **(1)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F,\breve{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. On dit que $(F,\breve{F})$ est une* $\otimes$-équivalence *si et seulement si F est une équivalence.*

Proposition **(1)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F,\breve{F})$ une $\otimes$-équivalence de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. Soit $F' : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ un foncteur quasi-inverse de F, i.e. [] α et α' vérifiant les relations [] Alors il existe un isomorphisme fonctoriel et un seul*

$$\breve{F}'_{X',Y'} : F'X' \otimes F'Y' \xrightarrow{\sim} F'(X' \otimes Y')$$

tel que $(F,\breve{F})$ soit un $\otimes$-foncteur et α, α' des $\otimes$-morphismes.

Démonstration. Supposons que $\breve{F}'$ existe. Considérons le $\otimes$-foncteur composé $(FF',F\breve{F}') = (F,\breve{F})\circ(F'\breve{F}')$. D'après (§4 n°, Déf. 2) $F\breve{F}'_{X',Y'}$ est défini par le triangle commutatif [] En exprimant que α' est un $\otimes$-morphisme, $\breve{F}'$ doit être tel que le diagramme suivant soit commutatif [] D'où l'unicité de $\breve{F}'$ puisque F est pleinement fidèle. Prenons $\breve{F}'$ défini par le diagramme commutatif (2). $\breve{F}'$ est bien fonctoriel en X', Y'; α' un $\otimes$-morphisme. Il nous reste à démontrer que α est un $\otimes$-morphisme. Ou cela résulte de la proposition suivante :

Proposition **(2)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F,\breve{F})$ et $(F',\breve{F}')$ des $\otimes$-foncteurs de $\mathscr{C}$*

dans $\mathscr{C}'$ et de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}$ respectivement tels que [] avec α, α' vérifiant les relations (1). Alors α est un $\otimes$-morphisme si et seulement si α' l'est.

Démonstration. En vertu de la symétrie du problème, il nous suffit de démontrer que si α', est un $\otimes$-morphisme, alors α est aussi un α-morphisme, c'est à dire on doit avoir le diagramme suivant commutatif [] Considérons donc le diagramme suivant [] dont la commutativité de la région (I) résulte de la fonctorialité de $\breve{F}$; celle de (III) de la fonctorialité de α'; enfin celle du []

En vertu de la définition 1 et la proposition 1, on peut énoncer la proposition :

Proposition **(3)**. — *Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories, $(F,\breve{F})$ un $\otimes$-foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$. $(F,\breve{F})$ est une $\otimes$-équivalence si et seulement si $(F,\breve{F})$ peut être mis dans un quadruple*

$$((F,\breve{F}),(F',\breve{F}'),\alpha,\alpha')$$

tel que $(F',\breve{F}')$ soit un $\otimes$-foncteur de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}$, $\alpha : F'F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, $\alpha' : FF' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, des $\otimes$-isomorphismes vérifiant (1). $((F,\breve{F}),(F',\breve{F}'),\alpha,\alpha')$ est appelé quadruple de $\otimes$-équivalence *entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.*

Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ des $\otimes$-catégories et $((F,\breve{F}),(F',\breve{F}'),\alpha,\alpha')$ un quadruple de $\otimes$-équivalence entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On a les propositions suivantes :

Proposition **(4)**. — *$(F,\breve{F})$ est compatible avec les contraintes d'associativité a, a' données respectivement sur $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ si et seulement si $(F',\breve{F}')$ l'est.*

Démonstration. En raison de la symétrie du problème, il nous suffit de démontrer que si $(F',\breve{F}')$ est compatible avec a, a', alors il en est de même de $(F,\breve{F})$, i.e. le diagramme (1) dans (§4, n°2) est commutatif. Ou ce diagramme se retrouve en la région (II) (à image par F' près) du diagramme suivant [] dans lequel le commutativité des régions (I), (III), (VI), (VIII) résulte de la définition de $F'\breve{}F$; celle [] puisque F' est pleinement fidèle.

Proposition **(5)**. — *$(F,\breve{F})$ est compatible avec les contraintes de commutativité c, c' données respectivement sur $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ si et seulement si $(F',\breve{F}')$ l'est.*

Démonstration. De la même manière que dans la proposition 4, nous considérons le diagramme suivant [] où la commutativité des régions (I), (III) résulte de la définition de $F'\breve{}F$;

celle de (V) de l'application de (§4, n°2, Prop 6) au $\otimes$-isomorphisme $\alpha : F'F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$; d'où la proposition.

Proposition **(6)**. — *$(F,\breve{F})$ est compatible avec les unités $(1,g,d)$, $(1',g',d')$ donnés respectivement sur $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ si et seulement si $(F,\breve{F})$ l'est.*

Démonstration. Toujours par raison de symétrie, nous démontrons seulement que si $(F',\breve{F}')$ est compatible avec les unités considérés, il en est de même de$(F,\breve{F})$. D'abord nous définissons $\hat{F} : 1 \longrightarrow F1$ [] Nous devons maintenant dés [] la commutativité du digramme [] Pour cela considérons le diagramme suivant [] où nous avons immédiatement la commutativité des régions [] étant analogue.

Définition **(2)**. — *Soit $(F,\breve{F}) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ un $\otimes$-foncteur avec pleinement fidèle d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}'$ munie d'une contrainte d'associativité a' (resp. commutativité c'). Le diagramme commutatif (1) du (§4, n°2) (resp. le diagramme commutatif (2) du []*

Proposition **(7)**. — *[]*

Démonstration.

Proposition **(8)**. — *[]*

Démonstration.

Proposition **(9)**. — *[]*

Démonstration.

2. Transport de structure

§ II. — Gr-CATÉGORIES ET Pic-CATÉGORIES

1. Gr-catégories

1. Définition des Gr-catégories

Définition **(1)**. — *Une* Gr-catégorie $\mathscr{P}$ *est une* $\otimes$*-catégorie AU (Chap I, § 3, n°2, Déf 5) dont tous les objets sont inversibles (Chap I, § 3, n°5, Déf 9), et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, i.e. tous les flèches sont des isomorphismes. Il résulte de la définition que tous les objets de* $\mathscr{P}$ *sont réguliers (Chap I, § 3, n°5, Déf 18).*

Proposition **(1)**. — *Soient* $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ *des* Gr*-catégories et* $(F, \breve{F}) : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}'$ *un* $\otimes$*-foncteur associatif. Alors* $(F, \breve{F})$ *est unifère.*

Démonstration. On a aussitôt la proposition en remarquant que $F(1)$ est régulier, 1 étant l'objet unité de $\mathscr{P}$, et en appliquant la proposition 8 du (Chap I, § 4, n°2).

Proposition **(2)**. — *Soient* $\mathscr{P}$ *une* Gr*-catégorie,* $\mathscr{P}'$ *une* $\otimes$*-catégorie AU,* 1 *et* $1'$ *les objets unités de* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *respectivement. Soit* $(F, \breve{F}) : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}'$ *une* $\otimes$*-équivalence telle qu'on ait* $F : 1 \simeq 1'$. *Alors* $\mathscr{P}'$ *est une* Gr*-catégorie.*

Démonstration. D'abord toutes les flèches de $\mathscr{P}'$ sont des isomorphismes en vertu du fait que toutes les flèches de $\mathscr{P}$ sont des isomorphismes et F est une équivalence.

Montrons maintenant que tous les objets de $\mathscr{P}'$ sont inversibles. Soit Y un objet de $\mathscr{P}'$. Puisque F est une équivalence, il existe $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})$ tel que $Y \simeq FX$, $\mathscr{P}$ est une Gr-catégorie, ses objets sont donc inversibles, pour conséquent il existe $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})$ tel que $X' \otimes X \simeq X \otimes X' \simeq 1$ (Chap I, § 3, n° 5, Cor de la Prop 17). Vous avons

[]

Ce qui preuve bien que Y est inversible.

2. Premières invariants d'une Gr-catégories

Définition **(2)**. — *Soit $\mathscr{P}$ une* Gr-*catégorie. Nous poserons par le suite:*

$$\pi_0(\mathscr{P}) = \textit{ ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de } \mathscr{P},$$

$$\pi_1(\mathscr{P}) = \mathrm{Aut}(1).$$

$\pi_0(\mathscr{P})$ muni de la loi de composition, qu'on note multiplicativement, induite par l'opération $\otimes$, est un groupe, l'élément unite 1 étant la classe des objets isomorphes à 1. Ainsi, on revient d'attacher à une Gr-catégorie $\mathscr{P}$, des groupes $\pi_0(\mathscr{P})$, $\pi_1(\mathscr{P})$, où $\pi_1(\mathscr{P})$ est commutatif (Chap I, *S*2, n°3, Prop 7). La loi de composition de $\pi_1(\mathscr{P})$ est noté [] additivement.

Exemple. Soit G un groupoïde, et posons $\mathscr{P} = (G)$. Alors $\mathscr{P}$ est de façon naturelle une Gr-catégorie, la loi $\otimes$ étant donnée par la composition des foncteurs. On pourrait appeler $\pi_0(\mathscr{P})$ le groupe des *automorphismes extérieures* de G, et $\pi_1(\mathscr{P})$ le centre de G.

On a les propositions suivantes pour une Gr-catégorie $\mathscr{P}$.

Proposition **(3)**. — *Les homomorphismes γ_X et δ_X définis dans (Chap I, §2, n°3, Prop. 8) sont des isomorphismes.*

Démonstration. Résultat immédiat de ce que X est régulier.

Proposition **(4)**. — *Soit $\mathscr{Q}$ une composante connexe de $\mathscr{P}$. Les applications*

(1) $$\mathrm{Aut}(1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathscr{Q}})$$

$$u \mapsto (\gamma_X u)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{Q})}$$

et

(1) $$\mathrm{Aut}(1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathscr{Q}})$$

$$u \mapsto (\delta_X u)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{Q})}$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. En vertu de []

Corollaire. — *Soient $X, Y \in s$ avec $s \in \pi_0(\mathscr{P})$. On a [] pour tout $u \in \mathrm{Aut}(1) = \pi_1(\mathscr{P})$.*

Démonstration. Posons

[]

Proposition **(5)**. — *L'action de $\pi_0(\mathscr{P})$ sur $\pi_1(\mathscr{P})$ définie par la relation []*

Démonstration. []

Proposition **(6)**. — *L'action de $\pi_0(\mathscr{P})$ sur $\pi_1(\mathscr{P})$ définie par la relation []*

Remarque. Soit $\mathscr{P}_0$ la composante connexe de $1 \in \pi_0(\mathscr{P})$, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathscr{P}$ des objets isomorphes à 1 : on voit alors que $\mathscr{P}_0$ est un groupoïde connexe *commutatif*, donc les groupes $\mathrm{Aut}(X)$ ($X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P}_0)$) sont canoniquement isomorphes entre eux, ou encore canoniquement isomorphes au groupe $\pi_1(\mathscr{P}) = \mathrm{Aut}(1)$. Ces isomorphismes

$$\mathrm{Aut}(1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$$

$$u \mapsto f u f^{-1}$$

où $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P}_0)$ et $f : 1 \longrightarrow X$ une flèche quelconque, coïncident avec les isomorphismes γ_X, δ_X. En effet, en vertu de la relation (9) dans (Chap. I, §2, n°, Prop. 8) nous avons

$$\gamma_1(u) = \delta_1(u) = u$$

pour tout $u \in \mathrm{Aut}(1)$. Puisque $(\gamma_X u)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})}$ et $(\delta_X u)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})}$ sont commutativité des diagrammes suivants

[]

pour toute flèche $f : 1 \longrightarrow X$, ce qui montre que γ_X, δ_X coïncident avec les isomorphismes $u \mapsto f u f^{-1}$.

3. Structure des Gr**-catégories**

Définition **(3)**. — *Soient $\mathscr{P}$ une* Gr*-catégorie, $(a,(1,g,d))$ la contrainte AU de $\mathscr{P}$, $\pi_0(\mathscr{P})$ et $\pi_1(\mathscr{P})$ les groupes attachés a $\mathscr{P}$ dans (n°2, Déf. 2). On construit une catégorie dont les objets sont les éléments de $\pi_0(\mathscr{P})$, les morphismes sont des automorphismes. On pose pour chaque $s \in \pi_0(\mathscr{P})$*

$$\mathrm{Aut}(s) = \{s\} \times \pi_1(\mathscr{P})$$

la composition des flèches étant l'addition de $\pi_1(\mathscr{P})$. Pour chaque classe $s = cl X \in \pi_0(\mathscr{P})$, on choisit une représentant noté X_s; et pour chaque $X \in s$, on choisit une isomorphisme $i_X : X_s \xrightarrow{\sim} X$, tel que

$$i_{X_s} = \mathrm{Id}_{X_s}.$$

Proposition **(7)**. — *Le foncteur*

Démonstration. []

Définition **(4)**. — *Définissons une loi []*

Définition **(5)**. — *Soit $\mathscr{P}$ []*

Proposition **(8)**. — *Soient $\mathscr{P}$ []*

Démonstration. []

Proposition **(9)**. — *Les hypothèses étant celles de la proposition 8 []*

Démonstration. []

Proposition **(10)**. — *Pour un changement d'épinglage de $\mathscr{P}$ []*

Démonstration. []

Proposition **(11)**. — *Les foncteurs []*

Proposition **(12)**. — *Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ []*

Démonstration. []

Définition **(6)**. — *Soit M un groupe, N un M-module abélien à gauche. Un* préépinglage de type (M,N) *pour une* Gr*-catégorie* $\mathscr{P}$ *est une couple* $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ *d'isomorphismes*

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

compatibles avec les actions de M sur N et de $\pi_0(\mathscr{P})$ []

Proposition **(13)**. — *Il y a une bijection canonique entre []*

Démonstration. []

Exemple. Soit $\mathscr{P}$ la $\otimes$-catégorie définie dans []

2. Pic-**catégories**

1. Définition des Pic-catégories

Définition 1. — *Une* Pic-catégorie *est une* Gr*-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité. Une* Pic*-catégorie est dite* stricte *si sa contrainte de commutativité est stricte (Chap I, §2, n°2, Déf. 8).*

Exemples.

Proposition **(1)**. — *Soit $\mathscr{P}$ une* Pic*-catégorie, et soient $\pi_0(\mathscr{P})$, $\pi_1(\mathscr{P})$ le groupe et le $\pi_0(\mathscr{P})$-module respectivement attaché à $\mathscr{P}$, considéré comme une* Gr*-catégorie (*§1*, n°*2*, Déf. 2 et Prop. 5). Alors le groupe $\pi_0(\mathscr{P})$ est commutatif et agit trivialement sur $\pi_1(\mathscr{P})$.*

Démonstration. []

Proposition **(2)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(3)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU stricte avec comme contrainte ACU : $(a, c, (1, g, d))$. Soient $p_X : X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} 1$, $t_X : X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} 1$ des isomorphismes. Alors la commutativité du diagramme*

[]

est équivalente à la commutativité du diagramme

[]

Démonstration. Posons $s = X$, pour conséquent $-s = X^{-1}$. Prenons dans la Pic-catégorie $\mathscr{P}$, construite à partir de $\mathscr{C}$ comme ci-dessus, un épingláge tel que

$$X_s = X, X_{-s} = X^{-1}, i_{X \otimes X-1} = p_X^{-1}, i_{X^{-1} \otimes X} = t_X^{-1}$$

Dans ces conditions, en notant toujours par
[]

2. Structure des Pic**-catégories**

Définition 2. — *Soient M, N des groupes abéliens. Un* préépinglage de type (M,N) *pour une* Pic-*catégorie $\mathscr{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes*

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P}).$$

Une Pic-*catégorie préépinglé de type* (M,N) est une Pic-catégorie munie d'un préépinglage.
[]

Proposition **(4)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(5)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(6)**. — *[]*

Démonstration. []

Corollaire **(1)**. — *[]*

Démonstration. []

Corollaire **(2)**. — *[]*

Démonstration. []

Définition **(3)**. — *[]*

Définition **(4)**. — *[]*

Proposition **(7)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(8)**. — *Le noyau de l'application []*

Démonstration. []

Proposition **(9)**. — *Il y a un monomorphisme j []*

Démonstration. Considérons l'homomorphisme []

Proposition **(10)**. — *Si M est libre, j est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit []

Corollaire. — *Si M est libre, alors []*

Démonstration. []

Proposition **(11)**. — *Il y a un monomorphisme*

$$h : \mathrm{H}^2(\mathrm{Hom}('L_\bullet(M), N)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_Z(M,_2 N)$$

qui est un isomorphisme si M est libre.

Démonstration. Soit [] ce qui achève la démonstration.

§ III. — Pic-ENVELOPPE D'UNE $\otimes$-CATÉGORIE ACU

Dans ce chapitre nous nous occuperons de deux problèmes universels, celui de rendre des objets "objets unité" et celui d'inversion des objets.

1. Le problème de rendre des objets "objets unité"

Pour pouvoir résoudre le problème, occupons-nous de problème suivant.

1. Le problème de rendre des endomorphismes des identité

Proposition **(1)**. — *Soient $\mathscr{A}$ une catégorie, φ une partie de* Fl(A) *[]*

Démonstration. Soient A, B des objets de
Remarque.

Définition **(1)**. — *Soit []*

Proposition **(2)**. — *[]*

Démonstration. []

Définition **(2)**. — *Soit []*

Proposition **(3)**. — *[]*

2. Le problème de rendre des objets "objets unité"

Tout d'abord, introduisons un $\otimes$-foncteur

Définition **(3)**. — *[]*

Proposition **(4)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(5)**. — *[]*

Démonstration. []
Remarques. []

Proposition **(6)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(7)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(8)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(9)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(10)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(11)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(12)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(13)**. — *[]*

Démonstration. [ ]

Proposition **(14)**. — *[ ]*

Démonstration. [ ]

Proposition **(15)**. — *[ ]*

Démonstration. [ ]

Proposition **(16)**. — *[ ]*

Démonstration. [ ]

Proposition **(17)**. — *[ ]*

Démonstration. [ ]

Proposition **(18)**. — *[ ]*

Démonstration. [ ]

Définition **(4)**. — *[ ]*

Proposition **(19)**. — *[ ]*

Démonstration. [ ]

2. Le problème d'inverses des objets

1. Construction de la ⊗-catégorie des fractions d'une ⊗-catégorie ACU

Dans tout ce n°, $\mathscr{C}$ est une ⊗-catégorie munie d'une constrainte [ ]

Lemme **(1)**. — *[ ]*

Démonstration. [ ]

Lemme **(2)**. — *[ ]*

Démonstration. [ ]

Remarque. []

Lemme **(3)**. — *[]*

Démonstration. []

Lemme **(4)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(1)**. — *[]*

Démonstration. []

Définition **(1)**. — *$\mathscr{P}$ est appelée la* $\otimes$-catégorie de fractions *de $\mathscr{C}$ définie par $(\mathscr{C}', (F, \check{F}))$ et $(D, \check{D})$ le* $\otimes$-foncteur canonique *de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{P}$.*

2. Pic-enveloppe d'une $\otimes$-catégorie ACU

Définition **(2)**. — *[]*

Remarque. Dire que le diagramme (14) est commutatif dans [] est dire que si l'on pose
[]
tels que
[]

3. Applications

1. Groupe de Grothendieck et groupe de Whitehead

R étant un anneau constante, on rappelle les définitions suivantes [1].

Définition **(1)**. — *On appelle* groupe de Grothendieck *des R-modules projectifs à gauche de type fini le groupe abélien $K_0(R)$ engendré par les $[X]$, X étant un R-module projectif à gauche de type fini et les générateurs $[X]$ satisfaisant à la relation*

$$[X] = [X'] + [X'']$$

si le R-module X est isomorphe à la somme directe $X' \otimes X''$.

Définition **(2)**. — *On appelle* groupe de Whitehead *de R le groupe abélien $K_1(R)$ engendré par les $[(X,f)]$; où X est R-module projectif à gauche de type fini, $f : X \xrightarrow{\sim} X$ un automorphisme de R-module; les relations entre les générateurs étant []*

Proposition **(1)**. — $\pi_0(\mathscr{P}) \simeq K_0(R)$

Démonstration. []

Proposition **(2)**. — $\pi_1(\mathscr{P}) \simeq K_1(R)$

Démonstration. []

2. Catégorie de suspension

Soient $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU, []

Proposition **(3)**. — *[]*

Démonstration. []

Proposition **(4)**. — *[]*

Démonstration. []

Définition **(3)**. — *[]*

Proposition **(5)**. — *[]*

Remarque. []

Proposition **(6)**. — *[]*

Démonstration. []

Définition **(4)**. — *Une sous-catégorie $\mathscr{A}$ d'une $\otimes$-catégorie ACU $\mathscr{C}$ est* $\otimes$-stable *si elle vérifie []*

Proposition **(7)**. — *Soient $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU []*

Démonstration. []

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS, H — *K-theory and stable algebra*. Publ. maths de L'IHES, n°22

[2] BÉNABOU, J — *Thèse*, Paris 1966

[3] BOURBAKI, N — *Théorie des ensembles*

[4] — *Algèbre commutative*

[5] — *Algèbre multilinéaire*

[6] DELIGNE, P — *Champs de Picard strictement commutatifs*, SGA 4 XVIII

[7] EILENBERG, S ET KELLY, G M — *Closed category*, Proceedings of the conference on categorical algebra (421.561). Springer Verlag 1965

[8] FREYD, P — *Stable homotopy*, Proceedings of the conferece on categorical agebra (121.176). Springer Verlag 1965

[9] GROTHENDIECK, A — *Biextensions de faisceaux de groupes*, SGA 7, VII

[10] — *Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif*, Lecture notes in mathematics n°79. Springer Verlag 1968

[11] MACLANE, S — *Categorical algebra*, Bull. Amer. Mat. Soc. 71 (1965)

[12] — *Homology*, Springer Verlag 1967

[13] MITCHELL, B — *Theory of categories*, Academic Press 1965

[14] NEANTRO SAAVEDRA RIVANO — *Thèse*, Paris (1970?)

[15] — *Catégories tannakiennes*, Lecture notes in mathematics n°265. Springer Verlag 1972

[16] SPANIER, E — *Algebraic topology*, McGraw-Hill, 1966