Motifs à coefficients dans un corps de nbs.

Soit d'abord $\mathcal{C}$ une $\otimes$-catégorie sur un corps K. Si K' est une extension finie de K, on désigne par $\mathcal{C}^{K'}$ la catégorie des objets de $\mathcal{C}$ sur lesquels K' opère K-linéairement, i.e. des $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ munis d'un homom. de K-algèbres $K' \to \mathrm{End}(X)$. C'est encore une $\otimes$-catégorie, en définissant $X \otimes_{K'} Y$ comme le quotient de $X \otimes_K Y$ par les $\lambda \otimes id_Y - id_X \otimes \lambda$ ($\lambda \in K'$), et $\underline{\mathrm{Hom}}_{K'}(X,Y)$ comme le [illegible] $\underline{\mathrm{Hom}}(\lambda_X, id_Y) - \underline{\mathrm{Hom}}(id_X, \lambda_Y)$. noyau de $\underline{\mathrm{Hom}}_K(X,Y)$ dans

Quand G est défini par un schéma en groupes affine G sur K qui est un foncteur fibre F sur $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}^{K'}$ est défini par le groupe [illegible] $G_{K'} = G \otimes_K K'$, qui [illegible] le foncteur fibre sur $\mathcal{C}^{K'}$ $F_{K'}$ déduit trivialement de F.

On a un $\otimes$-foncteur naturel $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{K'}$, noté [illegible], et dont le composé avec le foncteur $X \mapsto X \otimes_K K'$, et dont le [illegible] "oubli" est bien $X \otimes_K \underline{K'}$ (où $\underline{K'}$ est [illegible] l'objet K' sur K, [illegible] de $\mathcal{C}$ défini par la vectorisation de dim finie $K \to \mathcal{C}$]. [illegible] un $\otimes$-foncteur déduit

Supposons $\mathcal{C}$ la catégorie des (iso)motifs (effectifs) sur un corps k, donc $K = \mathbb{Q}$, K' un corps de nbs. Donc E un motif à coeff. dans K', donc $K' \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E_0)$, E_0 le $\mathbb{Q}$-motif sous-jacent, un motif ordinaire dans $\mathcal{C}^{K'}$, avec [illegible]. Alors E est défini par E de $\mathcal{C}$, avec l'hom

138

donc que $K' \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E_0) \xrightarrow{\text{unité}} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\check{E}_0)$. Donnons nous une polarisation sur E_0 (ou Q-motif ~~sur~~ : E). Alors on trouve un iso $\check{E}_0 \simeq E_0(\rho)$ (E_0 de poids ρ), donc ~~$K' \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\check{E}_0)$~~

$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\check{E}_0) \simeq \mathrm{End}(E_0(\rho)) \simeq \mathrm{End}(E_0)$, et unité définit une involution unique sur $\mathrm{End}(E_0)$. Le motif dual $(E_\varphi)^\vee$ de E_φ (défini par φ) est défini par l'homo $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)' = \varphi'(\lambda)$ comme

$$\boxed{(E_\varphi)^\vee = (E_{\varphi'})(\rho)}$$

Cela ne veut pas en général un iso $(E_\varphi)^\vee \simeq E_\varphi(\rho)$!

Prenons l'exemple des K'-motifs de niveau zéro, poids 0. La catégorie est équivalente à la catégorie des vectoriels de dim finie sur K', ~~avec~~ avec opération continue de $\pi = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. La dualité correspond à l'opération contragrédiente de π. Les K'-motifs de rang 1 à isomorphisme près correspondent aux représentations continues $\pi \xrightarrow{\chi} K'^*$, et on a $(L_\chi)^\vee = L_{\check\chi}$, où $\check\chi(g) = \chi(g^{-1})$. Donc on a $L_\chi^\vee \simeq L_\chi$ ssi $\chi = \check\chi$ i.e. χ est à valeurs dans ± 1 !

139