[-] de De Rham à puissances divisées [?et moyen] des modules

A. Grothendieck

March 25, 2003

1 [Notes pour un exposé]

[page 1]

([1]).

1) Historique.

a) Notion de forme différentielle (POINCARÉ) et formule de Stokes

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \qquad \text{(d'où } H^*_{\mathrm{DR}}(X) \longrightarrow H^*(X, \mathbf{C}).)$$

b) Th. de DE RHAM (conjecturé par E. CARTAN). Mais [-] Maintenant est bien compris : th. des faisceaux [-]

c) Théorie de HODGE des integrales harmoniques (structure supplémentaire bigraduée sur $H^*_{\mathrm{DR}}(X)$ si X kählérienne compacte.)

d) Théorème de CARTAN-SERRE sur variétés de Stein (car Lemme de Poincaré valable dans l'analytique).

e) Cas des variétés algébriques ou schémas sur corps de base [?] (ou schéma de base général) : DWORK, WASHNITZER-MONSKY, plus tard le yoga 'cristallin' développé par BERTHELOT, ILLUSIE, MESSING, MAZUR (avec Hartshorne [?Herrera] qui, Bloch?). Ici on trouve des théories cohomologiques qui ne [?] sont plus à 'anneau de coefficients' de caracteristique [?] nulle, i.e. contenant $\mathbf{Q}$ – i.e. on perd [?] les phénomènes de torsion [?ne sont pas prendre]. Du point de vue Weil, c'était un défaut irréparable.

f) Th. de GROTHENDIECK pour variétés algébriques sur $\mathbf{C}$ (généralisé par DELIGNE, HARTSHORNE pour des coefficients plus généraux). Ceci donne [?] confiance (du moins en car. 0) en la signification topologique de la cohomomologie de De Rham 'algébrique' des schémas algébriques.

g) Complexe de DE RHAM-SULLIVAN pour espaces topologiques généraux : *formes différentielles singulières* C^∞ (resp. $\mathbf{C}$-algébriques, resp. $\mathbf{R}$-algébriques, resp. $\mathbf{Q}$-algébriques). Donne la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$, resp. $\mathbf{Q}$) (facile [-] Sullivan [- -]

$$\begin{array}{ccccc} C^\bullet_{\mathrm{DRS}\ \mathbf{R}\text{-alg.}} & \subseteq & C^\bullet_{\mathrm{DRS}\ C^\infty} & \subseteq & C^\bullet_{\mathrm{DRS}} \\ & & \cup\!\!\shortmid & & \\ & & C^\bullet_{[-]} & & \end{array}$$

[1]

géométrie	différentielle
—	analytique
—	algébrique
—	[?allasse]
topologie algébrique	PL semi-simplicial

[page 2]

Le type d'homotopie [?] de X est récupéré si X est simplement connexe – de façon plus précise, il y a (sauf erreur) une équivalence de catégories donné par $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}$ entre la catégorie homotopique faible des espaces connexes et simplement connexes (du point de vue singulier [?]), et une certaine catégorie dérivée formée avec les $\mathbf{Q}$-algèbres graduées [?] associatives anticommutatives à degrés ≥ 0 telles que $H^0(\mathcal{A}) \xleftarrow{\simeq} \mathbf{Q}$, $H^1(\mathcal{A}) \simeq 0$. Il y a une théorie des modèles minimaux pour de telles algèbres, une façon très simple de récupérer les $\pi_i \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ en termes d'un tel modèle ... (On renvoit [?] au papier de Sullivan.)

Mais à nouveau, on perd la torsion !

Donc du théorème d'isomorphie de Sullivan

$$H^\bullet(C^\bullet_{\mathrm{DRS}/\mathbf{Q}}(X,\mathbf{Q})) \simeq H^\bullet(X,\mathbf{Q})$$

$\forall\, n \geq 0$,

$[n]$	simplexe type de dimension n,
$\mathbf{\Delta}^{[n]}$	sa réalisation géométrique ([2]),
$E^{[n]}$	l'espace affine qu'il soustend `[plutôt engendre]` (avec une $\mathbf{Q}$-structure) ([3]),
$\mathrm{DRS}^\bullet_{[n]} = C^\bullet_{\mathrm{DR}}(E^{[n]})$	son complexe de De Rham $\mathbf{Q}$-algébrique.

C'est contravariant en $[n]$, d'où

$$\mathrm{DRS}^\bullet_* = (\mathrm{DRS}^\bullet_{[n]})_{n\geq 0}\,.$$

Algèbre différentielle graduée semi-simpliciale (et même simpliciale) - à degrés ≥ 0, anticommutative.

Pout tout espace topologique X, $S_*(X)$ son complexe singulier semi-simplicial. On a

$$C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(X,\mathbf{Q}) \simeq \mathrm{Hom}(S_*(X), \mathrm{DRS}^\bullet_*)\,,$$

[page 3]

i.e.

a) $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(X,\mathbf{Q})$ [?] dépend de la `[?si.]` $S_*(X)$ `[plutôt 'ne dépend que']`.

b) Sur $(\mathrm{Ss}) = (\mathrm{Ens})_*$, le foncteur $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(\ ,\mathbf{Q})$ est représentable par $\mathrm{DRS}^\bullet_*$.

Or

a) $\mathrm{DRS}^\bullet_*$ est une résolution de $\mathbf{Q}_*$ (dans la catégorie des groupes semi-simpliciaux). (Lemme de Poincaré algébrique sur l'espace $\mathbf{Q}$-affine $E^{[n]}$.

b) Les composantes DRS^i_* $(i \geq 0)$ de $\mathrm{DRS}^\bullet_*$ sont des objets abéliens acycliques du topos (Ss) (ce qui revient à dire que les [?] $\pi_j(\mathrm{DRS}^i_*)$ sont nuls, ce qu'on vérifie facilement).

---

[2] $\sum_0^n X_i = 1$, $X_i \geq 0$.

[3] $\sum_0^n X_i = 1$, `[-]`.

(Il [?] serait `[?Hom]` des formes C^∞ à coefficients dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, ou analytiques réels, ou analytiques complexes, ...)

On aimerait avoir une $\mathbf{Z}$-algèbre différentielle `[graduée]` $C^\bullet_{\mathrm{DR}}(X,\mathbf{Z})$ différentielle [?] `[?dont tout sur]` X `[?(ou` $S_*(X)$`)]` dont `[- - - -]` $\mathbf{Z}$ `[- - ?avait]` qu'il y a `[dans Hns autre]` ! On se `[?provient]` y est `[- ?emmmm]`.

Si on prend $C^\bullet_{\mathbf{Z}\text{-DR}}(E^{[n]})$ (où $E^{[n]}$ a même [?] $\mathbf{Z}$-structure affine), c'est a) qui devient déjà faux : pour intégrer $\int x^n\,dx$, il faut un dénominateur avec $\frac{x^{n+1}}{n+1}$! Mais en géométrie, on est déjà familiarisé avec une façon de sauter à pieds-joints par dessus le conneau, en introduisant des puissances divisées et des polynômes (ou séries formelles) à puissances divisées. Si $E^{[n]}$ avait son [?] origine sur $\mathbf{Z}$ (i.e. provenant canoniquement [?] d'un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini), on aurait un complexe de De Rham à puissances divisées. Mais pas pour un espace affine ! Notons

$$\begin{aligned}\mathrm{DRS}^\bullet_{[n]} &\simeq C^\bullet_{\mathrm{DR}/\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[(X_i)_{0\le i\le n}])/\textstyle\sum X\,\texttt{[-]}\\ &\simeq \mathbf{Q}[X_i,dX_i]/\textstyle\sum\,\texttt{[-]}\ ,\end{aligned}$$

`[page 4]`

Donc on aurait envie de prendre [?]

$$\mathbf{Z}\{X_i\}[dX_i]_{0\le i\le n}/(\textstyle\sum X_i-1,\sum dX_i)\ ,$$

où $\{\quad\}$ désigne les pôlynomes à puissances divisées, mais on n'est plus isomorphe à $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}[dX_0,\dots,dX_{n-1}]$ (`[?pléti]` bien une résolution de $\mathbf{Z}$), car si on `[?avant tirer]` de la relation [?] $\sum_0^n X_i-1=0$, $X_n=1-\sum_0^{n-1}X_i$ (et $dX_n=-\sum_0^{n-1}dX_i$ de $\sum_0^n dX_i=0$), on a le 'bec' [?] que $1-\sum_0^{n-1}X_i$ n'appartient pas à l'idéal à puissances divisées donné dans $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}$ [?] (donc on ne voit pas comment envoyer $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}$ dans $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}$ avec l'élément [?] $\sum_0^n X_i-1$ dans le noyau ...).

On s'en tire en prenant un anneau de coefficients différent de $\mathbf{Z}$, soit S, avec un 'paramètre' $t\in S$ fixé dont on sache *prendre des puissances divisées* (i.e. $t\in J$, J idéal à puissances divisées `[-]`), et en remplaçant [?] les équations $\sum X_i=1$ de $E^{[n]}$ par l'équation

$$\sum X_i = t \qquad \text{dans } S^{n+1}$$

et définissant

$$C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,[n]}(S,J,t)\ \simeq\ (S\{X_i\}_{0\le i\le n}[dX_i]_{0\le i\le n})/\left(\textstyle\sum X_i-t,\ \sum dX_i\right)\ .$$

On divise par l'idéal *à puissances divisées* engendré `[- -?]`

`[page 5]`

car dans $S\{X_i\}[dX_i]$ [?] l'idéal formé des formes [?] à puissances divisées d'augmentation dans J est à puissances divisées,

$$[C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,[n]}(S,J,t)\ \simeq]\qquad \left(S\{X_i\}_{0\le i\le n}/(\textstyle\sum X_i-t)_{\mathrm{pd}}\right)\otimes_S\Lambda^*(S^{[n]}/\operatorname{diag}S^{[n]})\ .$$

C'est une S-algèbre différentielle graduée anticommutative à degrés [?] `[-]` augmentée vers S/J et à puissances divisées sur l'idéal noyau de l'augmentation

$$C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,[n]}(S,J,t)\longrightarrow S/J \qquad (^4)\ ;$$

et comme telle isomorphe à $S\{X_0,\dots,X_{n-1}\}[dX$ [-], qui *est une résolution de S*. Pour $[n]$ variable, on trouve

$$C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,*}(S,J,t) \;=\; \left(C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,[n]}(S,J,t)\right)_{n\geq 0}\,,$$

qui est une résolution semi-simpliciale (et même simpliciale) de S, avec augmentation vers $S/J = k$, et puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, [?copn]. Elle dépend fonctoriellement de (S,J,t), et elle peut de [?fa un] pour $\mathcal{X}_* \in \mathrm{Ss}$

$$C^\bullet_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*;S,J,t) \;=\; \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_*, C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,*}(S,J,t))\,,$$

foncteur contravariant en $\mathcal{X}_*$ ([5]) (et si X espace topologique [?]

$$\begin{aligned} C^\bullet_{\mathrm{DRpd}}(X;\ ) \;&=\; C^\bullet_{\mathrm{DRpd}}(S_*(X);\ ) \\ &=\; \mathrm{Hom}(S_*(X), C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,*}(\ )\qquad). \end{aligned}$$

[À ne pas confondre : S (anneau de base) et S_* (ensemble simplicial singulier).]

Mais on ne peut dire en général quelle est sa cohomologie (on a seulement $H^\bullet_{\mathrm{DRpd}}(X;S,J,t) \longrightarrow H^\bullet(X,S)$), et en tous cas [- - -]

[page 6]

Alors soit k anneau commutative (associatif unitaire), et T une indéterminée, on prendra dorénavant

$$S \;=\; k\{T\}\,,\qquad J \;=\; k\{T\}^+ \;=\; \mathrm{Ker}\,(k\{T\}\longrightarrow k)\,,\qquad t \;=\; T\,.$$

Donc

$$\begin{cases} C^\bullet_{\mathrm{DRpd},[n]}(S,J,t) \;\simeq\; \underbrace{k\{T,X_0,\dots,X_n\}/(\sum X_i - T)_{\mathrm{pd}}}_{\simeq\, k\{X_0,\dots,X_n\}} \otimes_k \Lambda^\bullet k^{[n]}/k \\ S/J \;\simeq\; k\,. \end{cases}$$

Soit

$$\begin{aligned} \Phi_{k*} \;&=\; ([n]\longmapsto k^{[n]}) \underbrace{\hookleftarrow}_{\substack{\text{immersion}\\ \text{diagonale}}} k_* = ([n]\longmapsto k\ [?]) \\ \Psi_{k*} \;&=\; \Phi_{k*}/k_* \;=\; ([n]\longmapsto k^{[n]}/\underbrace{k}_{\text{diag.}})\,. \end{aligned}$$

On a alors

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}\,*}(k) \;\overset{\text{déf}}{=}\; C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,*}(k\{T\},k\{T\}^+,k) \;\simeq\; \Gamma^\bullet_k\Phi_{k*}\otimes_k \Lambda^\bullet\Psi_{k*}\ [?]\,,$$

$$\boxed{C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}\,*}(k) \;\simeq\; \Gamma^\bullet_k\Phi_{k*}\otimes_k \Lambda^\bullet\Psi_{k*}}\,.$$

[4] [?diff est stable - - -], i.e. $d(X^{[n]}) = X^{[n-1]}dx$ [?].

[5] à valeurs dans les S-algèbres graduées différentielles S/J-augmentatées à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la différentielle.

Structure. $k\{T\}$-Algèbre différentielle *bigraduée* (degré complexe [?] *et* degré extérieur, d'où degré total) ([6]) unitaire associative alternée (anticommutative et carrés des éléments de degré impair nuls), augmentation vers `[-]` à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, avec `[- - - -]`.

`[page 7]`

Ces structures sont héritées [?] par les

$$\boxed{\begin{aligned} C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) &\overset{\text{déf}}{=} C^{\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k\{T\}, k\{T\}^+, T) \\ &= \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_*, C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}\,*}(k)) \end{aligned}}$$

et dépendent de façon contravariant de $\mathcal{X}_*$ (covariant de k).

$\Phi_{k\,*}$ est un k-Module semi-simpliciale homotope à 0, donc $\Gamma^p_k(\Phi_{k\,*}) \otimes \Lambda^q \Psi_{k\,*}$ est homotope à $\Gamma^p_k(0) \otimes \Lambda^q \Psi_{k\,*}$, donc homotope à 0 si $p \neq 0$. Donc $C^{p,q}_{\mathrm{DRpd}\,*}(k)$ est homotope à 0 (donc acyclique) si $p = 0$ `[plutôt si` $p \neq 0$`]`. En degré total donné n, on a

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^{n,0}_{\mathrm{DRpd}\,*} & \to & C^{n-1,1}_{\mathrm{DRpd}\,*} & \to & C^{n-2,2}_{\mathrm{DRpd}\,*} & \to \cdots & C^{1,n-1}_{\mathrm{DRpd}\,*} \to C^{0,n}_{\mathrm{DRpd}\,*} \\ & & \uparrow & & & & & & \\ & & k_* & & & & & & \end{array},$$

i.e. on trouve une résolution de longueur n de k_* par des k-modules semi-simpliciaux qui sont acycliques sauf le dernier – donc on peut la considérer comme un tronqué de degré n d'une résolution flasque de k_* – la cohomologie de ses sections sur un $\mathcal{X}_*$ est donc la cohomologie de $\mathcal{X}_*$ tronquée en degré n :

$$H^{p,q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) = \begin{cases} H^q(\mathcal{X}_*, k) & \text{si } q \leq p+q, \text{ i.e. } p \geq 0 \\ \texttt{[- - - - -]}. & \end{cases}$$

`[page 8]`

`[- - - - -]` structure [?] de $k\{T\}$-module de $H^{\bullet,q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$? On voit que pour le *degré total* (égal au degré extérieur p *plus* q `[plutôt degré extérieur` q *plus* p`?]`), on trouve $H^0(\mathcal{X}_*, k) \otimes_k k\{T\}$ tronqué en dégré $\geq q$, donc

$$H^{\bullet,q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) \simeq \tau_q(H^0(\mathcal{X}_*, k) \otimes_k k\{T\}) \underbrace{[q]}_{\substack{\text{translation [?]} \\ \text{des degrés} \\ \text{par } -q}} .$$

Si on réindexe le bidegré par le couple (degré total, degré extérieure)

$$H'^{p,q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) = H^{\overbrace{n-q}^{p},q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$$

[6]Bigraduation venant de la *graduation* de S, en tant que `[-]` est hom. (ici de degré 2) [?].

(donc la condition de degré $p, q \geq 0$ devient $n \geq q \geq 0$, l'opérateur différentielle est de bidegré $(0,1)$, donc c'est un homomorphisme (*homogène*) de S-modules gradués), on trouve

$$H'^{\bullet,q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) \;\simeq\; \tau_q(H^q(\mathcal{X}_*, k) \otimes_k k\{T\}) \; .$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les structures multiplicatives (et bien entendu fonctoriels an $\mathcal{X}_*$, k, ...). Donc *a priori* on en récupère (via $H'^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$) les k-modules $H^q(\mathcal{X}_*, k)$ et leurs cup-accouplements `[- -]` les k-modules gradués $\tau_q(H^q(\mathcal{X}_*, k) \otimes_k k\{T\})$.

`[page 9]`

Ce qui donne un espoir que le complexe `[?de De Rham à]` p.d. de $\mathcal{X}_*$ à coefficients dans $k = S/J$ disons [?] (comme dans le cas $k = \mathbf{Q}$ qu'il contient) donne une information homotopique précise sur $\mathcal{X}_*$, c'est l'observation qu'en fait, pour un k-module M quelconque, on récupère M à isomorphisme canonique près par la connaissance d'un quelconque des tronqués $\tau_q(M \otimes_k S)$ (quelque grand que soit p ...), qu'on appelle le $q$ième ombre de M, et de même tout accouplement $M \otimes N \longrightarrow P$ est connu quand on connaît, pour q assez grand, l'accouplement correspondant $\tau_q(M_S) \otimes \tau_q(N_S) \longrightarrow \tau_q(P_S)$. Donc une k-algèbre gradué $H^\bullet$ à degrés ≥ 0 est connu à isomorphisme canonique près quand on connaît la k-algèbre bigraduée dont les composantes de degré 'extérieure' q sont les $\tau_q(H^q \otimes_k S)$ ... Cette 'théorie des ombres' étant supposée acquise, on veut que la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$ (en tant que S-algèbre différentielle bigraduée) implique celle de l'algèbre graduée $H^0(\mathcal{X}_*, k)$ – et en raffinant un peu, on veut qu'on trouve même $\mathrm{R}\Gamma(\mathcal{X}_*, k)$ comme étant `[- - -]` $D(k)$ `[- -]`

`[page 10]`

`[- - -]`

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathcal{X}_*, k) \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{X}_*, k) \;\longrightarrow\; \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{X}_*, k) \; .$$

Remarques et Problèmes

a) Si k est une $\mathbf{Q}$-algèbre, de sorte que $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(\mathcal{X}_*, k)$ est défini, on le reconstruit à partir de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$ par la formule

$$C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(\mathcal{X}_*, k) \;\simeq\; C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)/(T-1) \; .$$

Plus généralement, *quelque soit* k, on a

$$C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(\mathcal{X}_*, \underbrace{k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}}_{k_{\mathbf{Q}}}) \;\simeq\; C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)/(T-1) \; .$$

(et plus généralement encore, si (S, J, t) comme au début,

$$C^\bullet_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*; S, J, t)/(t-1) \;\simeq\; C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(\mathcal{X}_*, S_{\mathbf{Q}})/(t-1) \qquad)$$

`[plutôt` $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, S, J, t)/(t-1)$`]`.

b) Je suis convaincu que la structure à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation de

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) \;\longrightarrow\; H^0(\mathcal{X}_*, k) \;=\; \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_*, k_*)$$

est importante ([7]). Il n'est peut-être pas ici [?] de se poser la question pour $\mathcal{X}_*$ simplement connexe, si la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$ [?] *avec toutes ses structures* (y compris celle des puissances divisées) n'implique pas la connaissance du type d'homotopie de $\mathcal{X}_*$ `[-]`

`[page 11]`

plus précisément appelé *complexe de De Rham à puissances divisées virtuel sur* k, une k-bialgèbre différentielle k-augmentée, associative, unitaire, alternée à différentielles de bidegré $(-1, +1)$ à bidegrés ≥ 0, avec puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la differentielle $(d(x^{[n]}) = x^{[n-1]}dx)$, et telle que les $H^{\bullet,q}(C^{\bullet\bullet})[-q]$ sont des q-ombres (auquel cas on récupère à partir de $C^{\bullet\bullet}$ un élément de $D(k)$ avec structure multiplicative associative unitaire commutative ...), passe à une 'catégorie dérivée' de ces complexes en inversant les flèches qui sont des quasi-isomorphismes, d'où par $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$ un foncteur

$$\underbrace{(\mathrm{Hot})}_{\substack{\text{types}\\ \text{d'homotopie}}} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{DRpd})}_{\substack{\text{catégorie derivée}\\ \text{des complexes}\\ \text{DRpd}}} ,$$

et on peut se demander si sa restriction aux espaces connexes et simplement connexes avec des $H^i(X, \mathbf{Z})$ de type fini (cas $k = \mathbf{Z}$) induit une équivalence avec les complexes de De Rham à puissances divisées sur $\mathbf{Z}$ tels que $H^0(C^{\bullet\bullet}) \xleftarrow{\simeq} k$, $H^1(C^{\bullet\bullet})$ `[-]` les $H^i(C^{\bullet\bullet})$ `[- -]`

`[page 12]`

c) Je n'ai pas réfléchi si on peut reconstruire les opérations cohomologiques (type Steenrod ou Whitney) dans la catégorie des $\mathcal{X}_*$ par la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, -)$, et n'ai que des résultats partiels negatifs qui montrent qu'en dehors [?] des automorphismes multiplicatifs de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}\,*}(k)$, on ne trouve rien d'intéressant.

d) Il faudrait sans doute chercher [?] des modèles minimaux à la Sullivan, pour essayer entre autres d'exprimer les groupes d'homotopie de $\mathcal{X}_*$ en termes de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}\,*}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$ (cas où $\mathcal{X}_*$ simplement connexe avec condition de finitude ...). Je n'ai rien fait dans cette direction. Je n'ai même pas développé une formule de Künneth pour $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}$ d'un produit $\mathcal{X}_* \times \mathcal{Y}_*$ – il y a des difficultés techniques dues au fait qu'on ne peut sans doute supposer $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*$ ou $\mathcal{Y}_*, k)$ `[- - - - -]`

`[page 13]`

e) Le complexe de chaînes $C_\bullet(\mathcal{X}_*, k)$ permet de reconstruire tous les complexes de cochaînes $C^\bullet(\mathcal{X}_*, k')$ pour k' `[une]` k-algèbre variable, par

$$C^\bullet(\mathcal{X}_*, k) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbf{Z}}(C_\bullet(\mathcal{X}_*, k), k)$$

`[plutôt` $C^\bullet(\mathcal{X}_*, k') \simeq \mathrm{Hom}^\bullet_k(C_\bullet(\mathcal{X}_*, k), k')$`]`. (L'objet le plus fin est donc $C_\bullet(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$, on a alors $C_\bullet(\mathcal{X}_*, k) \simeq C_\bullet(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} k$ [?]).

Il est possible de même de définir une cobigèbre différentielle $C^{\mathrm{DRpd}}_{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k)$ k-coaugmenté à copuissances divisées telle que l'on ait, pour tout k-algèbre k'

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k') \simeq \mathrm{Hom}_k(C^{\mathrm{DRpd}}_{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k), k')$$

[7]Avec [?] condition de finitude sur $\mathcal{X}_*$, savoir les $H_i(\mathcal{X}_*)$ [?] de type fini.

(compatible avec toutes les structures).

On aura d'ailleurs

$$C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k') \simeq C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) \otimes_k k' .$$

L'objet le plus fin est $C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$. C'est lui qu'il conviendrait de considérer (au lieu de son 'dual' $C_{\mathrm{DRpd}}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$) si on veut aborder b) c) d) sans condition de finitude.

Notons que (tout comme $C_{\mathrm{DRpd}}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$, pour $\mathcal{X}_*$ variable, transforme $\varinjlim$ quelconques en $\varprojlim$) $C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$ coaugmenté [- -] $\varinjlim$ quelconques ([-] [?filt] [- -]

[page 14]

f) ([8]). **Faisceautisation.** Il y a une définition évidente de complexes de De Rham à puissances divisées sur k si k est un Anneau commutatif dans un topos. On aimerait, p.ex. en comparant un tel complexe à un autre quasi-isomorphe dont les composantes soient flasques (mais y en a-t-il toujours ?), définir des opérations [?] $\mathrm{R}f_*$ dans des catégories dérivées convenables pour de tels complexes, quand $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est un morphisme de topos (supposé au besoin de dimension cohomologique finie . . .). Si k est une $\mathbf{Q}$-Algèbre, le même problème se rencontre d'ailleurs déjà pour les complexes de type De Rham-Sullivan (et le problème est ouvert – et posé par DELIGNE – quand $\mathcal{X} = (\mathrm{Ens})^* =$ topos des ensembles cosimpliciaux, $\mathcal{Y} =$ topos ponctuel). Mais sauf erreur (si [mes] souvenirs sont exacts) il y a un topos qui marche pour les espaces topologiques paracompacts . . .

[page 15]

f) On peut associer à un espace topologique X ou un ensemble semi-simplicial $\mathcal{X}_*$ des invariants algébriques 'linéaires' *plus fins* a priori que le $C_{\mathrm{DRpd}}^{\bullet\bullet}$ (et même que $C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DRpd}}$, en dualisant . . .).

P.ex. on peut observer que $C_{\mathrm{DRpd}\,*}^{\bullet\bullet}(k) \xrightarrow{\simeq} \Gamma^\bullet\Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet\Psi_{*k}$ se déduit de $\mathcal{D}_*^{\bullet\bullet}(k) = \Gamma^\bullet\Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet\Phi_{*k}$ (qui est une algèbre k-augmentée à puissances divisées qui est une *résolution de* k) et de $T \in \Gamma(\mathcal{D}_{*k}^{1,0})$ comme conoyau de la multiplication par dT (i.e. on divise par l'idéal engendré par dT), ou encore en bidegré donné (p, q),

$$C_{*k}^{p,q} \simeq \mathrm{Ker}\,(\underbrace{\mathcal{D}_*^{p,q+1} \longrightarrow \mathcal{D}_*^{p,q+2}}_{\substack{\text{produit} \\ \text{par } dT}}) ,$$

d'où

$$C_{\mathrm{DRpd}}^{p,q}(\mathcal{X}_*, k) \simeq \mathrm{Ker}\,(\mathcal{D}^{p,q+1}(\mathcal{X}_*, k) \longrightarrow \mathcal{D}^{p,q+2}(\mathcal{X}_*, k)) ,$$

et on peut considérer les structures disons sur $C_{\mathrm{DRpd}}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k)$ comme déduites de certaines structures (à expliciter . . .) sur $\mathcal{D}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k)$. On peut aussi définir '*La* structure multiplicative à puissances divisées cohomologique du type d'homotopie $\mathcal{X}_*$' en sens convenable, qui permet de reconstituer aussi bien $C_{\mathrm{DRpd}}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k)$ que $\mathcal{D}_k^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k)$ (ou les complexes de De Rham-Sullivan . . . [- - -])

[page 16]

complexe de De Rham à puissances divisées (ou sinon $\mathcal{D}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$) suffit déjà pour récupérer toute la structure multiplicative à puissances divisées cohomologique de

[8] Voir f) ci-dessous.

$\mathcal{X}_*$ (sous réserve de conditions de finitude bien sûr). Dans le cas contraire, ce serait cette dernière qui serait le candidat algébrique 'linéaire' naturel pour exprimer le type d'homotopie $\mathcal{X}_*$ (du moins si $\mathcal{X}_*$ `[est]` connexe et simplement connexe, et en passant à une catégorie dérivée convenable bien sûr).

2 [Début d'un manuscrit]

`[page 1]`

$\mathbf{\Delta}$ = catégorie des simplexes Δ^n $(n \geq 0)$, $\Delta^n = [0, n] \subseteq \mathbf{N}$ avec relation d'ordre total.

$\mathbf{\Delta}^\wedge = \mathrm{Ss} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}}, (\mathrm{Ens})) = \mathrm{Ens}_*$.

Plus généralement, si $\mathcal{A}$ est une catégorie, on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_* &= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}}, \mathcal{A}) \\ \mathcal{A}^* &= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, \mathcal{A}) \,, \end{aligned}$$

donc

$$(\mathcal{A}^{\mathrm{o}})^* \simeq (\mathcal{A}_*)^{\mathrm{o}} \,, \qquad \mathcal{A}^* \simeq ((\mathcal{A}^{\mathrm{o}})_*)^{\mathrm{o}} \,,$$

où l'exposant o désigne le passage à la catégorie opposée.

Les objets de $\mathcal{A}_*$ (resp. $\mathcal{A}^*$) sont considérés comme des structures algébriques de type simple (sur une infinité d'objets de base) dans $\mathcal{A}$, les 'objets semi-simpliciaux' resp. 'semi-cosimpliciaux'. On écrira Ens_* quand on a en vue cet aspect, et $\mathbf{\Delta}^\wedge$ ou Ss quand on a plutôt le point de vue 'objet d'un topos' ou 'faisceau sur un topos' ([9]). Tous les développements qui suivent ont pour objet d'étudier ces objets (l'équivalent combinatoire des espaces topologiques) et leurs 'types d'homotopie', via des invariants qu'on peut leur associer, qui en dépendent de façon covariante ou contravariante. Nous avons ici en vue une étude systématique, dans l'esprit de l'algèbre universelle, de ces invariants (qui sont donc des foncteurs sur $\mathbf{\Delta}^\wedge = \mathrm{Ens}_*$), de leurs structures et des opérations qui peuvent être définies sur elles, permettant d'en déduire certaines complexes à partir d'autres plus simples.

`[page 2]`

Un objet de $\mathcal{A}_*$ sera généralement noté par un symbole de la forme K_*, où K_* désigne la famille des

$$K_*(\Delta^n) = K_{[n]} \,, \qquad K_* \overset{\text{par abus de notation}}{=} (K_{[n]})_{n \geq 0} \,,$$

avec les opérations semi-simpliciales entre elles. On fera attention qu'on écrit $K_{[n]}$ et non K_n, pour des raisons qui vont apparaître (impérieuses lorsque $\mathcal{A}$ est additive ...).

De même, un objet de $\mathcal{A}^*$ sera noté

$$K^* = ([n] \longmapsto K^{[n]}) \overset{\text{abus de notation}}{=} (K^{[n]})_n \,.$$

Nous aurons à travailler avec la situation où on a deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et une équivalence (notée $M \longmapsto M^\vee$)

$$\vee \,:\, \mathcal{A}^{\mathrm{o}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \,, \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{B}^{\mathrm{o}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$$

[9]On veut garder [?] à l'aspect [?] la nature algébrique très particulier de ce topos, la notation Ss quand on veut l'oublier, on profite de sa signification topologique.

(le plus souvent $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ et $(M^\vee)^\vee \underbrace{\simeq}_{\text{isomorphisme fonctoriel}} M$, avec compatibilité habituelle d'une autodualité...), on notera alors souvent pa la même lettre un objet de $\mathcal{A}_*$ (ou $\mathcal{A}^*$) et l'objet de $\mathcal{A}^*$ (resp. $\mathcal{A}_*$) qui lui correspond par application de $\vee$, mais en indiquant la variance par la position du signe $*$,

$$\begin{array}{rclcrcl} K^* & = & (K_*)^\vee & \qquad & K^{[n]} & = & (K_{[n]})^\vee \\ K_* & = & (K^*)^\vee & & K_{[n]} & = & (K^{[n]})^\vee . \end{array}$$

On s'intéressera surtout au cas où (k étant un anneau fixé) on a

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & k\text{-modules à gauche projectifs de type fini} \\ \mathcal{B} & = & k\text{-modules à droite projectifs de type fini} \end{array}$$

(si k est commutatif, on a $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ et [- -] autodualité sur [?] $\mathcal{A}$).

[page 3]

On a le foncteur canonique pleinement fidèle

$$(*) \qquad \mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}^\wedge = \mathrm{Ss} ,$$

l'image par ce foncteur de Δ^n est noté Δ^n_*, ou mieu $\Delta^{[n]}_*$ (puisqu'il est covariant en n). On a donc

$$\Delta^n_* \text{ (ou } \Delta^{[n]}_*) = (m \longmapsto \Delta^n_{[m]} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\Delta^m, \Delta^n))$$

[plutôt $\mathrm{Hom}_{\text{ensembles ordonnés}}$], et pour $X_* \in \mathrm{Ob}\, \mathbf{\Delta}^\wedge$

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n_*, X_*) \simeq X_*(\Delta^n) \simeq X_{[n]} ,$$

en particulier

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n_*, \Delta^m_*) \simeq \Delta^m_*(\Delta^n) \simeq \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(\Delta^n, \Delta^m)}_{(= \mathrm{Hom}_{\mathrm{ord.}}(\Delta^n, \Delta^m))} .$$

Pour n variable, $\Delta^n_* \in \mathbf{\Delta}^\wedge$ dépend de façon *covariante* de n, donc le foncteur $n \longmapsto \Delta^n_*$ (qui n'est autre que $(*)$) est un objet canonique de $\mathbf{\Delta}^{\wedge *}$, qu'on appelle *objet cosimplicial universel* et note Δ^* (ou mieux Δ^*_*),

$$\Delta^*_* \in \mathbf{\Delta}^{\wedge *} = (\mathrm{Ens}_*)^* ,$$

donc $\forall\, n \geq 0$

$$\Delta^{[n]}_* \in \mathbf{\Delta}^\wedge , \qquad \Delta^{[n]}_* = \Delta^n_* = \left(m \longmapsto \Delta^n_{[m]} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(\Delta^m, \Delta^m)\right) .$$

(Une parentèse de notation : Considérons [?] une catégorie de la forme $(\mathcal{A}_*)^*$, un objet de ladite est donc noté $K^* = (K^{[n]})_n$, où les $K^{[n]}$ sont des [objets de] $\mathcal{A}_*$, donc s'écrivent $K^{[n]}_*$,

$$K^{[n]}_* = (K^{[n]}_{[m]})_{m \geq 0} .$$

Ainsi, on est amené à noter

$$K^*_* \qquad \text{les objets de } (\mathcal{A}_*)^* \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, \mathcal{A}_*) \text{ [?]}$$

[- - -]

[page 4]

$$K^{[m]}_{[n]} = K(\Delta^m, \Delta^n) \in \mathcal{A}\,.$$

De même, on note

$$\begin{aligned} &K_*^{\;*} && \text{les objets de } (\mathcal{A}^*)_* \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}} \times \mathbf{\Delta}, \mathcal{A})\,, \\ &K^{**} && \text{les objets de } (\mathcal{A}^*)^* \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}, \mathcal{A})\,, \\ &K_{**} && \text{les objets de } (\mathcal{A}_*)_* \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}} \times \mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}}, \mathcal{A})\,. \end{aligned}$$

On fera attention que si on compose avec [?lieu] les foncteurs de symétrie $(\Delta^m, \Delta^n) \longmapsto (\Delta^n, \Delta^m)$ dans $\mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}$ ou dans $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}} \times \mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}}$, ou entre $\mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}}$ et $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}} \times \mathbf{\Delta}$, on n'utilise pas la même lettre pour désigner un objet (tel que K^*_* ou K^{**} disons) ou son transformé (qui devrait alors s'écrire $K_*^{\;*}$, ou encore une fois K^{**}), car cela conflicterait avec la convention plus haut de la 'montée de descente des indices' $K_*^{\;*} \simeq (K^*_*)^\vee$ dans le premier cas, et animerait à écrire $K^{[m][n]} = K^{[n][m]}$ dans le deuxième ! On utilisera au besoin un symbole 'de symétrie' tel que σ, pour dénoter le symétrique de K ($= K^*_*$, K^{**}) par ${}^\sigma K$ ($= ({}^\sigma K)_*^{\;*}$, $({}^\sigma K)^{**}$) ... D'ailleurs, si on a un objet K^*_* disons, alors pour tout $n \geq 0$, on peut considérer

$$K^*_{[n]} \overset{\text{déf}}{=} (m \longmapsto K^{[m]}_{[n]})$$

comme un objet de $\mathcal{A}^*$; le foncteur $[n] \longmapsto K^*_{[n]}$ de $\mathcal{A}^*_*$ n'est autre que ${}^\sigma K$.

On étend ces considérations et notations au cas de symboles K à plus de deux indices, pour désigner des objets de catégories de

[page 5]

la forme $\mathcal{A}^*{}_*{}^{**} = (((\mathcal{A}^*)_*)^*)^*$ p.ex. – dont les objets sont notés par des lettres à étoiles $K^{**}{}_*{}^* \ldots\big)$

Le rôle de $\mathbf{\Delta}^*_* \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{\Delta}^{\wedge *}$ comme 'objet cosimplicial universel' est explicité par la

Proposition 1. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie où les $\varprojlim$ existent (resp. $\mathcal{B}$ une catégorie où les $\varinjlim$ existent). Alors*

a) $\mathcal{A}^* \xleftarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{comm. à } \varinjlim}(\mathrm{Ss}, \mathcal{A})$ *par* $F \longmapsto F(\Delta^*)$.

b) $\mathcal{B}^* \xleftarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{comm. à } \varprojlim}(\mathrm{Ss}^{\mathrm{o}}, \mathcal{B})$ *par* $F \longmapsto F((\Delta^*)^{\mathrm{o}})$ *(où $(\Delta^*)^{\mathrm{o}}$ désigne l'objet simplicial de $\mathbf{\Delta}^{\wedge\mathrm{o}}$ défini par l'objet cosimplicial Δ^* de $\mathbf{\Delta}^{\wedge}$.)*

Bien sûr, b) n'est autre que a) appliqué à $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\mathrm{o}}$, et a) signifie que le foncteur 'restriction à $\mathbf{\Delta}$'

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\wedge}, \mathcal{A}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, \mathcal{A})$$

induit une équivalence sur la sous-catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{comm. à } \varinjlim}$ du premier membre. C'est vrai pour *toute* (essentiellement petite) catégorie $\mathcal{C}$ – pas seulement pour $\mathbf{\Delta}$, et bien connu. Le foncteur en sens inverse associe à $K_* = \varphi : \mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{A}$, le foncteur

[page 6]

$$X_* \longmapsto \varinjlim_{\Delta^n \in \Delta/X_*} \varphi(\Delta^n) = \varinjlim_{\Delta^n \in \Delta/X_*} K_{[n]} .$$

Dans le cas b) où on écrit

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\wedge\circ}, \mathcal{B}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\circ}, \mathcal{B}) ,$$

le foncteur en sens inverse associe à

$$K^* = \psi \, : \, \mathbf{\Delta}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{B}$$

le foncteur contravariant

$$X^* \longmapsto \varprojlim_{\Delta^n \in (\Delta/X_*)^{\circ}} \varphi(\Delta^n) = \varprojlim_{\Delta^n \in (\Delta/X_*)^{\circ}} K^{[n]}$$

[plutôt $\psi(\Delta^n)$].

Yoga : nous nous intéressons surtout (en première étape) aux invariants covariants attachés à X_*, à valeurs dans une catégorie $\mathcal{A}$, qui commutent aux $\varinjlim$ par rapport à X_* – ils sont donc exprimés (si $\mathcal{A}$ est 'grande' pour contenir les $\varinjlim$ quelconques) par des éléments de $\mathcal{A}^*$, i.e. des objets *cosimpliciaux* de $\mathcal{A}$. Pour les invariants contravariants en X_*, à valeurs dans une [catégorie] $\mathcal{B}$, nous nous attendons en premier lieu à ceux qui commutent aux $\varprojlim$ en X_*, pour $\mathcal{B}$ stable par $\varprojlim$, ils correspondent donc aux objets de $\mathcal{B}_*$, i.e. les objets semi-simpliciaux de $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ = (Ens), ils correspondent donc à des ensembles semi-simpliciaux [- - - -]

[page 7]

Ce n'est autre que le foncteur représenté par K_*, et on le notera aussi

$$X_* \longmapsto K_*(X_*) = \mathrm{Hom}(X_*, K_*) .$$

Si $\mathcal{B}$ = (Ab), K_* sera de même un objet de $\mathrm{Ss}_{\mathrm{ab}}$, et en effet le foncteur qu'il représente est automatiquement muni d'une structure additive. Même remarque pour toute structure algébrique (sur un ou plusieurs objets de base) qui 'peuvent s'exprimer en termes de $\varprojlim$ exclusivement' (groupes, anneaux, modules sur tels, etc.).

Remarque. Les invariants ainsi obtenus à coups de foncteurs représentables – plus généralement, d'objets simpliciaux ou cosimpliciaux de catégories $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{A}$ – sont de nature trop 'grosses' et 'fruste' pour être intéressants directement - en particulier, ce ne sont pas des invariants du type d'homotopie de X_*. On devra en extraire des invariants plus subtils qui soient des invariants du type d'homotopie de X_* – ceux-ci ne seront pas de nature si simples – i.e. 'représentés' par des objets simpliciaux ou cosimpliciaux. Notre propos ici de [- - - -]

[page 8]

vient [?] de décrire, un maximum de structure supplémentaire remarquable, et dans les catégories de structures de ce type (complexes de chaînes ou de cochaînes, algèbres cosimpliciales etc.) d'inverser les flèches qu'on obtient à partir d'équivalence d'homotopie dans Ss, et de passer à des 'catégories de fractions' en inversant ces flèches. L'invariant ainsi obtenu (plus 'grossier' bien sûr, mais plus subtil dans sa définition, et moins 'redondant') exprimera alors de façon plus ou moins complpète le type d'homotopie, on en saisira de façon adéquate tes ou tels aspects.

Dans le cas où $\mathcal{A}$ est une catégorie additive karoubienne (tout projecteur dans un objet a un noyau, ou ce qui revient au même, tout projecteur a un conoyau) le tapis de DOLD-PUPPE donne des équivalences canoniques

$$\mathcal{A}_* \underset{\mathrm{DP}_*}{\overset{\mathrm{ND}_\bullet}{\underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}}}} \mathcal{A}_\bullet \qquad ([10]) ,$$

où $\mathcal{A}_\bullet$ désigne la catégorie des *complexes de chaînes* dans $\mathcal{A}$. On désigne par une même lettre telle K deux objets qui se correspondent, mais en mettant en [- - - -]

[page 9]

s'agit de désigner l'avatar 'objet simplicial' ou 'complexe de chaînes' :

$$\begin{aligned} K_\bullet &= \mathrm{ND}_\bullet(K_*) , & K_* &= \mathrm{DP}_*(K_\bullet) \\ K_* &= (n \longmapsto K_{[n]}) , & K_\bullet &= (K_n, d_n)_{n\geq 0} . \end{aligned}$$

On est ainsi amené à noter par une notation $K_\bullet$ tout complexe de chaînes, par K_n ses composantes (ce qui exclut l'utilisation de la notation K_n pour la $n$ième composante de K_*, et nous oblige à adopter une notation telle que $K_{[n]}$!)

De même, le tapis de DOLD-PUPPE appliqué à $\mathcal{A}^\wedge$ nous donne des équivalences

$$\mathcal{A}^* \underset{\mathrm{DP}^*}{\overset{\mathrm{ND}^\bullet}{\underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}}}} \mathcal{A}^\bullet ,$$

et des notations

$$\begin{aligned} K^\bullet &= \mathrm{ND}^\bullet(K^*) , & K^* &= \mathrm{DP}^*(K^\bullet) \\ K^* &= (n \longmapsto K^{[n]}) , & K^\bullet &= (K^n, d^n)_{n\geq 0} . \end{aligned}$$

Ces foncteurs $\mathrm{ND}^\bullet$ et DP^* commutent aux foncteurs additifs. En particulier, dans le cas d'une équivalence

$$\mathcal{A} \overset{\vee}{\underset{\sim}{\longleftrightarrow}} \mathcal{B}^o$$

déjà envisagé, étendant aux complexes de chaînes et de cochaînes la convertion de la notation ou de la descente des indices, on trouve que les foncteurs ND et DP y commutent. Donc dans ce cas, la même lettre K désigne

[page 10]

quatre avatars possibles,

$$K^* , \qquad K_* , \qquad K^\bullet , \qquad K_\bullet ,$$

liés par les relations ci-dessus

$$\left\{ \begin{aligned} K^* &= \mathrm{DP}^*(K^\bullet) & K^\bullet &= \mathrm{ND}^\bullet(K^*) \\ K_* &= \mathrm{DP}_*(K_\bullet) & K_\bullet &= \mathrm{ND}_\bullet(K_*) \end{aligned} \right.$$

plus les relations

$$\left\{ \begin{aligned} K^* &= (K_*)^\vee , & K_* &= (K^*)^\vee , \\ K^\bullet &= (K_\bullet)^\vee , & K_\bullet &= (K^\bullet)^\vee . \end{aligned} \right.$$

---

[10] ND = 'non-dégénéré', DP = 'Dold-Puppe'.

Ces notations et remarques (i.e. équivalences de catégories) s'étendent aux objets dependants de plusieurs indices, p.ex. un même lettre K (désignant initialement un objet K^*_* de $(\mathcal{A}_*)^*$ disons), désignera également quatre avatars distincts

$$\begin{cases} K^*_* \in (\mathcal{A}_*)^* \,, & K^\bullet_* \in (\mathcal{A}_*)^\bullet \\ K^\bullet_\bullet \in (\mathcal{A}_\bullet)^\bullet \,, & K^*_\bullet \in (\mathcal{A}_\bullet)^* \end{cases}$$

avec des notations

$$\begin{matrix} K^{[n]}_{\ \ [m]} & K^{n}_{\ \ [m]} \\ K^{n}_{\ \ m} & K^{[n]}_{\ \ m} \end{matrix}$$

pour les composantes. De même, on aura, si on part p.ex. de $K^{**} \in (\mathcal{A}^*)^*$,

$$\begin{cases} K^{**} \in (\mathcal{A}^*)^* \,, & K^{\bullet *} \in (\mathcal{A}^\bullet)^* \\ K^{\bullet\bullet} \in (\mathcal{A}^\bullet)^\bullet \,, & K^{*\bullet} \in (\mathcal{A}^*)^\bullet \end{cases}$$

$$\begin{cases} K^{[n]\,[m]} & K^{n\,[m]} \\ K^{n\,m} & K^{[n]\,m} \,. \end{cases}$$

On notera qu'un objet de $(\mathcal{A}_*)^\bullet$ est un complexe de cochaînes $(K^{\,n}_*, d^n)$ dans la catégorie $\mathcal{A}_*$ des objets simpliciaux de $\mathcal{A}$,

`[page 11]`

ou au choix (moyennant l'équivalence de categories canonique

$$\sigma \,:\, (\mathcal{A}_*)^\bullet \xrightarrow{\ \simeq\ } (\mathcal{A}^\bullet)_* \qquad)$$

un objet semi-simplicial dans la catégorie $\mathcal{A}^\bullet$ des complexes de cochaînes, soit

$$n \longmapsto K^\bullet_{[n]} \,.$$

On interprète de même les objets des autres catégories mixtes

$$(*) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_{*\bullet} \,, & \mathcal{A}_{\bullet *} \,, & \mathcal{A}^*_\bullet \,, \\ \mathcal{A}^{*\bullet} \,, & \mathcal{A}^{\bullet *} \,, & \mathcal{A}^\bullet_* \,, \end{cases}$$

de façon analogue, les objets $K^{\bullet\bullet}$ de $(\mathcal{A}^\bullet)^\bullet$ sont les bicomplexes de cochaînes, des objets $K_{\bullet\bullet}$ de $(\mathcal{A}_\bullet)_\bullet = \mathcal{A}_{\bullet\bullet}$ sont les bicomplexes de chaînes, enfin les objets $K^\bullet_\bullet$ de $(\mathcal{A}_\bullet)^\bullet$ ou $K^\bullet_\bullet$ de $(\mathcal{A}^\bullet)_\bullet$ sont les bicomplexes mixtes chaînes-cochaînes (de chaînes pour un indice, de cochaînes pour un autre). Dans le cas de $K^{\bullet\bullet}$ ou $K_{\bullet\bullet}$ le complexe simple associé est un complexe de cochaînes resp. de chaînes, tandis que dans le cas mixte $K^\bullet_\bullet$ ou $K^\bullet_\bullet$ [?], on trouve des complexes simples avec des objets en degrés positifs ou négatifs a priori. (Il y aurait lieu de fixer une convention de degré, si pour le degré total l'opération différentielle est de degré $+1$ ou -1, suivant

`[page 12]`

qu'on donne la préférence aux cochaînes ou aux chaînes. (Je n'ai pas en un besoin urgent d'une telle convention de notation . . .))

Dans le cas d'une dualité

$$\vee \ : \ \mathcal{A} \xrightleftharpoons{\sim} \mathcal{B}^{\mathrm{o}}$$

on étend les conventions de montée et descente des indices aux objets à plusieurs indices, ainsi

$$(K_*^{\bullet})^{\vee} \ = \ K_{\bullet}^* \, .$$

Dans la suite d'objets mixtes (∗) de la page précédente, on a écrit l'un en dessous de l'autre des objets qui se correspondent par dualité.

Remarque. Il est essentiel pour notre [?septieur] de conventions de définir (disons) des bicomplexes de cochaînes (objets de $\mathcal{A}^{\bullet\bullet}$) avec deux operations différentielles $d^{\bullet}_{(1)}$ et $d^{\bullet}_{(2)}$ qui *commutent* – on n'utilisera donc pas les conventions de CARTAN-EILENBERG. Il faudra donc un signe à la différentielle totale.

Du point de vue de la proposition 1 et du yoga correspondant 'description d'invariants associés à des X_* de Ss', on peut dire que le tapis de DOLD-PUPPE

[page 13]

permet [?] une

Proposition 2. *Avec les notations et hypothèses de* [la] *proposition 1, avec* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *additives,* [on a :]

a) $\underline{\mathrm{Hom}}_{\substack{\mathrm{comm.} \\ \text{à } \varinjlim}}(\mathrm{Ss}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{\bullet}$.

b) $\underline{\mathrm{Hom}}_{\substack{\mathrm{comm.} \\ \text{à } \varprojlim}}((\mathrm{Ss})^{\mathrm{o}}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\bullet}$.

Nous allons expliciter cette correspondance du point de vue de l'algèbre universelle. Prenons d'abord le cas de b), avec $\mathcal{B} = (\mathrm{Ab})$ pour simplifier. Donc il faut préciser la relation entre

$$F \ : \ (\mathrm{Ss})^{\mathrm{o}} \underbrace{\longrightarrow}_{\substack{\text{commute} \\ \text{aux } \varprojlim}} \mathrm{Ab} \qquad \text{et} \qquad K_{\bullet} \ = \ (K_n, d_n) \ \in \ \mathrm{Ab}_{\bullet} \, ,$$

qui se déterminent mutuellement. On désigne comme de juste par K_* l'objet de Ab_* défini par $K_{\bullet}$. On a donc

$$F(X_*) \ \simeq \ \mathrm{Hom}_{\Delta^\wedge}(X_*, K_*) \ \simeq \ \mathrm{Hom}_{\Delta^\wedge_{\mathrm{ab}}}(\mathbf{Z}(X_*), K_*) \, ,$$

où $\mathbf{Z}(X_*)$ désigne le 'faiscau abélien libre engendré par X_*', en l'occurrence

$$\mathbf{Z}(X_*) \ = \ (n \longmapsto \mathbf{Z}(X_n) = \mathbf{Z}^{(X_n)}) \, .$$

Ce groupe abélien semi-simplicial sera aussi noté $\mathbf{C}_*(X_*)$, et $\mathbf{C}_{\bullet}(X_*)$ le complexe de chaînes associé par Dold-Puppe :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_*(X_*) \ = \ \mathbf{Z}(X_*) \ = \ (n \longmapsto \mathbf{Z}(X_n) = \mathbf{Z}^{(X_n)}) \\ \mathbf{C}_{\bullet}(X_*) \ = \ \mathrm{ND}_{\bullet}(\mathbf{C}_*(X_*)) \, . \end{cases}$$

Donc par Dold-Puppe on aura

[page 14]

$$F(X_*) \simeq \mathrm{Hom}_{\underbrace{\Delta^\wedge_{\mathrm{ab}}}_{=\mathrm{Ab}_*}}(\mathbf{C}_*(X_*), K_*) \underbrace{\simeq}_{\text{par D. P.}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}_\bullet}(\mathbf{C}_\bullet(X_*), K_\bullet)\,.$$

Donc le foncteur $F_{K_\bullet} = F : \mathrm{Ss}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Ab}$

$$X_* \longmapsto F_{K_\bullet}(X_*) = F(X_*)$$

associé à $K_\bullet \in \mathrm{Ab}$ est donné par

$$\boxed{F(X_*) = \mathrm{Hom}_\bullet(\mathbf{C}_\bullet(X_*), K_\bullet)}\,.$$

On en tire deux conclusions :

1°) Les valeurs sur X_* des foncteurs envisagés F ($\mathrm{Ss}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Ab}$, commutant aux $\varprojlim$) ne dépendent que de $\mathbf{C}_*(X_*) \in \mathrm{Ab}_*$ ('abélianisée de X_*'), ou ce qui revient au même, de $\mathbf{C}_\bullet(X_*) \in \mathrm{Ab}$; [le] complexe de chaînes $\mathbf{C}_\bullet(X_*)$ peut être considéré comme 'l'invariant additiv universel' de X_*. Quand on 'oublie X_* au [?pefet] de $\mathbf{C}_\bullet(X_*)^* = C_\bullet \in \mathrm{Ab}_\bullet$', les foncteurs envisagés (en tant que foncteurs en $C_\bullet$) sont encore exactement les foncteurs représentables sur $\mathrm{Ab}_\bullet$.

NB Quand le foncteur F a une structure plus riche, p.ex. une multiplication $F \otimes F \longrightarrow F$, i.e. est à valeurs dans les $\mathbf{Z}$-algèbres, cette structure sur $F(X_*)$ n'est pas reconstruite par

[page 15]

la seule connaissance de $C_\bullet \in \mathrm{Ab}_\bullet$, au lieu et place de X_*; il faut, pour le décrire en *termes de* $C_\bullet$ [?entdiner] des structures qu'on peut ainsi avoir sur $F(X_*)$ en termes de celle de F, de tenir compte de structures supplémentaires convenables de $C_\bullet$, qui peuvent s'expliciter en se rappellant que $C_\bullet$ provient d'un X_*. L'étude systématique de ces structures peut être considérée comme le contenu essentiel de nos reflexions. Mais bien sûr, dans le cas disons où on a sur F une structure de k-module, i.e. $F : \mathrm{Ss}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Ab}_k$ (où Ab_k est la catégorie des k-modules), il est inutile de se donner de structure supplémentaire sur $C^\bullet$, car grâce au fait que le $K_\bullet$ qui décrit F est maintenant dans $(\mathrm{Ab}_k)_\bullet$, i.e. qu'on a

$$k \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{Ab}_\bullet}(K_\bullet)\,,$$

k opère aussi sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}_\bullet}(C_\bullet, K_\bullet)$, dont on [?récoptunt] ainsi la structure de k-module. En fait, il suffit, au lieu de $C_\bullet$, de connaître seulement $C_{\bullet k} = C_\bullet \otimes_{\mathbf{Z}} k$ (noté $\mathbf{C}_{k*}(X_*)$), car on aura

[page 16]

$$\begin{cases} F(X_*) \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Ab}_k)_\bullet}(C_{k\bullet}, K_\bullet) \\ C_{k\bullet} = \mathbf{C}_{k*}(X_*) = \mathbf{C}_*(X_\bullet) \otimes_{\mathbf{Z}} k \end{cases}$$

[plutôt $\mathbf{C}_{k\bullet}(X_*) = \mathbf{C}_\bullet(X_*) \otimes_{\mathbf{Z}} k$]. Plus généralement, revenant au cas d'une catégorie additive générale $\mathcal{B}$ stable par $\varprojlim$ et $F : \mathrm{Ss}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $K_\bullet \in \mathcal{B}_\bullet$ se correspondant par la proposition 2, on peut encore écrire

$$F(X_*) \simeq \mathrm{Hom}_\bullet(\mathbf{C}_\bullet(X_*), K_\bullet)$$

en définissant le deuxième membre comme *objet de $\mathcal{B}$*, en définissant d'abord le bicomplexe de $\mathcal{B}$

$$\mathcal{H}om^{\bullet}_{\bullet}(C_\bullet, K_\bullet) \;=\; (\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(C_i, K_j))_{i,j}$$

(donc $\mathcal{H}om^i_j(C_\bullet, K_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(C_i, K_j)$ – l'objet $\mathrm{Hom}(A, M)$, pour $A \in \mathrm{Ab}$ et $M \in \mathcal{B}$, se définissant par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(N, \mathrm{Hom}(A, M)) \;\simeq\; \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(N, M))$$

(le foncteur du deuxième membre étant bien représentable en N, pour A, M fixés, grâce à l'hypothèse faite sur $\mathcal{B}$ d'être stable par $\varprojlim$).

On définit alors

$$\mathrm{Hom}_\bullet(C_\bullet, K_\bullet) \;\overset{\text{déf}}{=}\; \underbrace{Z^0}_{\substack{\text{cycles}\\ \text{de degré 0}\\ \text{pour [le] degré total}\\ \text{(notation cohomologique)}}}(\mathcal{H}om^{\bullet}_{\bullet}(C_\bullet, K_\bullet))\,.$$

Si enfin $\mathcal{B}$ est une catégorie k-linéaire (k commutatif), i.e. muni d'un homomorphisme d'anneaux

$$k \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{id}_{\mathcal{B}})\,,$$

[page 17]

alors la connaissance de $C_\bullet = \mathbf{C}_{k\bullet}(X_*) = \mathbf{C}_\bullet \otimes_{\mathbf{Z}} k$ est encore suffisant pour la construction de $F(X_*)$, car on aura maintenant

$$\begin{aligned} F(X_*) &\simeq \mathrm{Hom}_{k\bullet}(C_{\bullet k}, K_\bullet) \\ &\simeq Z^0(\underbrace{\mathcal{H}om_k{}^{\bullet}{}_{\bullet}(C_{\bullet k}, K_\bullet)}_{=\mathcal{H}om_k{}^i{}_j(C_{\bullet k}, K_\bullet) = \mathrm{Hom}_k(C_{i\,k}, K_j)}) \end{aligned}$$

($\mathrm{Hom}_k(A, M)$ pour $A \in \mathrm{Ab}_k$ et $M \in \mathcal{B}$ étant défini par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(N, \mathrm{Hom}_k(A, M)) \;\simeq\; \mathrm{Hom}_k(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(N, M)) \qquad).$$

2°) Si on regarde toutes les façons possibles d'envoyer

$$(\mathrm{Ss})^{\circ} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$$

dans $\mathcal{B}$ stable par $\varprojlim$, avec F y commutant, il y en a une 'universelle', dont toutes les autres sont 'spécialisations', obtenues en prenant $\mathcal{B}_0 = (\mathrm{Ab}_\bullet)^{\circ}$, et $F_0 : (\mathrm{Ss}^{\circ}) \longrightarrow \mathcal{B}_0 = (\mathrm{Ab}_\bullet)^{\circ}$ défini par

$$F_0(X_*) \;=\; \mathbf{C}_\bullet(X_*)$$

(qui dépend de X_* de façon contravariante quand $\mathbf{C}_\bullet(X_*)$ s'interprète comme objet de $(\mathrm{Ab}_\bullet)^{\circ}$). De façon précise :

[page 18]

Proposition 3 ([11]). *Considérons*

$$\mathrm{Ss}^{\circ} \xrightarrow{F_0} \mathcal{B}_0 \;=\; (\mathrm{Ab}_\bullet)^0 \;\simeq\; (\mathrm{Ab}^0)^{\bullet}$$

[11]Pouvons passer [?] pour l'assertion avant le tapis de DOLD-PUPPE.

défini par $F_0(X_*) = \mathbf{C}_\bullet(X_*)$. *Alors* $\mathcal{B}_0$ *est une catégorie additive avec* $\varprojlim$, *et pour toute autre telle catégorie* $\mathcal{B}$, *le foncteur*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\substack{\mathrm{comm.}\\ \text{à } \varprojlim}}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}) \longrightarrow \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}_{\substack{\mathrm{comm.}\\ \text{à } \varinjlim}}(\mathrm{Ss}^{\mathrm{o}}, \mathcal{B})}_{\simeq \mathcal{B}_\bullet \textit{ par prop. 2 b) [?]}}$$

donné par

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ F_0$$

est une équivalence de catégories.

Grâce au tapis de DOLD-PUPPE, on peut remplacer dans la définition de Γ_0, $\mathcal{B}_0$, $(\mathrm{Ab}_\bullet)^0$ par $(\mathrm{Ab}_*) = \mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}}$, $\mathbf{C}_\bullet(X_*)$ par $\mathbf{C}_*(X_*) = \mathbf{Z}(X_*)$, et l'équivalence à $\mathcal{A}_{\mathrm{ab}}$ devient

$$\underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathbf{\Delta}^{\wedge\mathrm{o}}_{\mathrm{Ab}}, \mathcal{B}) \xrightarrow[\sim]{?} \underline{\mathrm{Hom}}^!(\mathbf{\Delta}^{\wedge\mathrm{o}}, \mathcal{B}) ,$$

où l'indice [?] ! signifie qu'on se borne aux foncteurs qui commutent aux $\varprojlim$. Or sous cette forme, l'assertion est valable quelle que soit la catégorie (essentiellement petite) $\mathbf{\Delta}$.

On a un foncteur 'abélianisation'

$$X_* \longmapsto \mathbf{Z}(X_*) , \qquad \mathbf{\Delta}^\wedge \longrightarrow \mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}} ,$$

[page 19]

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta}^{\wedge\mathrm{o}} \xrightarrow{F_0} \mathcal{B}_0 = (\mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{o}} &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}}, \mathrm{Ab})^{\mathrm{o}} \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, \mathrm{Ab}^{\mathrm{o}}) \\ (&\simeq (\mathrm{Ab}^{\mathrm{o}})_* \simeq (\mathrm{Ab}_*)^{\mathrm{o}} \text{ , dans le cas que nous intéresse}) , \end{aligned}$$

commutant aux $\varprojlim$, d'où le foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{\Delta}^{\wedge\mathrm{o}}, \mathcal{B}) ,$$

dont on veut montrer que c'est une équivalence. Posant $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\mathrm{o}}$, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_0^{\mathrm{o}}$, et [?] $F_0 = (G_0)^{\mathrm{o}}$, on a

$$G_0 : \mathbf{\Delta}^\wedge \longrightarrow \mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}} , \qquad G_0(X) = \mathbf{Z}(X) ,$$

on doit prouver que

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}}, \mathcal{A}) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{\Delta}^\wedge, \mathcal{A}) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ G_0 \end{aligned}$$

est une équivalence, où ! en bas désigne les foncteurs qui commutent aux $\varinjlim$. Or le deuxième membre est isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, \mathcal{A})$ (par restriction à $\mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}^\wedge$). Le premier s'écrit ? en prenant $\varphi \in \underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}}, \mathcal{A})$ et notant que pour tout $M \in \mathcal{A}$, le foncteur $X \longmapsto \mathrm{Hom}(\varphi X, M)$ transforme $\varinjlim$ en $\varprojlim$, donc est représentable,

$$\mathrm{Hom}(\varphi X, M) \simeq \mathrm{Hom}(X, \psi M) ,$$

i.e. l'hypopthèse de commutation de φ aux $\varinjlim$ s'exprime par le fait qu'il admet un adjoint ψ - la condition à mettre sur $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}}$ pour qu'il provienne de φ étant que pour tout

X fixé dans $\mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}}$, $M \longmapsto \mathrm{Hom}(X, \psi M)$ soit représentable. Écrivant $\mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}} \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{\Delta}^\circ, (\mathrm{Ab}))$ [- - - -]

[page 20]

catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_!(\mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}}, \mathcal{A})$ par [?] ρ comme sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A} \times \mathbf{\Delta}^\circ, \mathrm{Ab}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{A}, \mathrm{Ab}))$, savoir les foncteurs λ satisfaisant une condition de représentabilité ci-dessus en $\mathcal{A}$. Or si $x \in \mathbf{\Delta}$, le foncteur $M \longmapsto \lambda(x)(M) \in \mathcal{A}$ [?] n'est autre que $M \longmapsto \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(x), \psi(M))$ (car $\lambda(x)(M) \overset{\text{déf}}{=} \psi(M)(x) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}^\wedge}(x, \psi(M)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}}}(\mathbf{Z}(x), \psi(M)))$, donc il doit être représentable (faire $X = \mathbf{Z}(x)$), donc $\psi(x) \in \mathcal{A}$, donc on est dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathcal{A}^\circ) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, \mathcal{A})$, on a pratiquement terminé ...)

Quel est alors le foncteur commutant aux $\varinjlim$ quelconques universel de $\mathbf{\Delta}^\wedge$ dans [une] catégorie $\mathcal{A}$ additive avec $\varinjlim$? C'est $X \longmapsto \mathbf{Z}(X) = \mathbf{Z}^{(X)}$ de $\mathbf{\Delta}^\wedge$ dans $\mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}}$ par le foncteur *'abélianisation'*. Sans doute, ça marche pour un topos quelconque. Mais ici (i.e. $\mathbf{\Delta}$ = catégorie des Δ^n) cela signifie :

Corollaire (grâce à DOLD-PUPPE).

a) L'objet cosimplicial $n \longmapsto \mathbf{C}_*(\Delta^n_*) = \mathbf{Z}(\Delta^n_*) = \mathbf{Z}^{\Delta^n_*}$ *de* $\mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}} = \mathrm{Ab}_*$ *est* universel *pour les objets cosimpliciaux dans des catégories additives avec* $\varinjlim$ *quelconques (pour des foncteurs entre telles catégories qui commutent aux* [- - -] *complexe de* [-]

[page 21]

dans $\mathbf{\Delta}^\wedge_{\mathrm{ab}} \simeq \mathrm{Ab}_*$ *est* universel *pour les complexes de cochaînes dans des catégories additives et avec* $\varinjlim$ *(NB Par* DOLD-PUPPE *on peut aussi interpréter* Ab_* *comme* $\mathrm{Ab}_\bullet$ *dans cette description de la catégorie contenant l'objet universel ...).*

b) En [?imlisant] *et interprétant* $n \longmapsto \mathbf{C}_*(\Delta^n)$ *comme objet* simplicial *dans* $(\mathrm{Ab}_*)^\circ = (\mathrm{Ab}^\circ)^*$, *regardée comme catégorie additive avec* $\varprojlim$ *, il est universel pour les [?] catégories* $\mathcal{A}$ *avec* $\varprojlim$ *et foncteurs entre telles y commutant. De même pour le complexe de chaînes associé.*

Du point de vue de l'Algèbre universelle, on peut exprimer le contenu de ces réflexions de la façon suivante.

1. Les invariants contravariants 'commutent aux $\varprojlim$ ' en $X_* \in \mathrm{Ss}$, à valeurs dans une catégorie *additive* $\mathcal{A}$ avec $\varprojlim$, s'exprimant au choix en termes d'objets simpliciaux de $\mathcal{A}$, ou de complexes de chaînes de $\mathcal{A}$.

2. Les constructions qu'on peut faire sur de tels invariants (pour $\mathcal{A}$ variable, de façon compatible aux foncteurs $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ commutant aux $\varprojlim$) s'expriment à l'aide des objets de $(\mathrm{Ab}_*)^\circ$ (où se trouve l'objet simplicial – pour [les] catégories additives à $\varprojlim$ – [- - - -]

[page 22]

et 1′), 2′) les énoncés duals (formés [?] à partir de 1), 2).)

Si F, K_*, $K_\bullet$ se correspondent dans 1, on a

$$\begin{cases} F(X_*) \simeq \mathrm{Hom}_*(\mathbf{C}_*(X_*), K_*) \simeq \mathrm{Hom}_\bullet(\mathbf{C}_\bullet(X_*), K_\bullet) \\ K_\bullet = \mathrm{ND}_\bullet(K_*)\,, \qquad K_* = \mathrm{DP}_*(K_\bullet)\,. \end{cases}$$

Si de même Ω est une 'opération sur des invariants' ([12]), et si $L_* \in \mathrm{Ab}_*$ et $L_\bullet \in \mathrm{Ab}_\bullet$ y sont associés, on aura

$$\begin{cases} \Omega(F) \simeq \overbrace{\mathrm{Hom}_*(L_*, K_*)}^{=\Omega_*(K_*)} \simeq \overbrace{\mathrm{Hom}_\bullet(L_\bullet, K_\bullet)}^{\Omega_\bullet(L_\bullet)} \\ L_\bullet = \mathrm{ND}_\bullet(L_*)\,, \qquad L_* = \mathrm{DP}_*(L_\bullet)\,. \end{cases}$$

(La signification du symbole Hom_* (resp. $\mathrm{Hom}_\bullet$) pour un C_* ou L_* dans Ab_* (resp. $C_\bullet$ ou $L_\bullet$ dans $\mathrm{Ab}_\bullet$) a été expliquée plus haut.)

Dualement, pour les invariants d'objets $X_* \in$ Ss covariants commutant aux $\varinjlim$, à valeurs dans $\mathcal{A}$, si G, K^*, $K^\bullet$ se correspondent, on aura

$$\begin{cases} G(X_*) \simeq \mathbf{C}_*(X_*) \otimes^* K^* \simeq \mathbf{C}_\bullet(X_*) \otimes^\bullet K^\bullet \\ K^\bullet = \mathrm{ND}^\bullet(K^*)\,, \qquad K^* = \mathrm{ND}^*(K^\bullet) \end{cases} \quad ([13])\,,$$

et si l'opération Ω, L_* et $L_\bullet$ se correspondent ($L_* \in \mathrm{Ab}_*$, $L_\bullet \in \mathrm{Ab}_\bullet$), on aura

$$\begin{cases} \Omega(G) \simeq L_* \otimes^* K^* \simeq L_\bullet \otimes^\bullet K^\bullet \\ L_\bullet = \mathrm{ND}_\bullet(L_*)\,, \qquad L_* = \mathrm{DP}_*(L_\bullet)\,. \end{cases}$$

[page 23]

Remarques.

a) On trouve essentiellement les mêmes objets (L_* ou $L_\bullet$) pour exprimer des *opérations* sur [des] invariants additifs contravariants, ou sur [des] invariants 'additifs' covariants (du type envisagé) – c'était clair a priori, à cause du passage de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$ par passage à la catégorie opposée – mais l'opération définie par L_* dépend de L_* de façon contravariante dans le premier cas, covariante dans le deuxième.

b) On a en principe résolu, et de façon quasi-tautologique, la question initiale de déterminer les constructions possibles sur [des] invariants contravariants ou covariants 'additifs' du type envisagé : On trouve même [des] *grosses* catégories, Ab_* ou $\mathrm{Ab}_\bullet$ (par passage [?gris] de celle-ci à l'opposée). Cela tient au fait que l'on a admis des catégories $\mathcal{A}$ de valeurs $\mathcal{A}^\circ$ ou $\mathcal{B}$ assez spéciales, [?exvein] où on peut effectuer *toutes* les $\varprojlim$, ou toutes les $\varinjlim$ – ce qui a pour effet que ces mêmes opérations peuvent s'effectuer sur les invariants, et opèrent sur les invariants.

[page 24]

On trouvera que lorsqu'on est plus restrictif sur les opérations qu'on se permet, donc moins restrictif sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on trouve des catégories correspondentes d'opérations (ou constructions) sur [des] invariants plus petits – en même temps qu'on trouve des catégories 'universelles' plus petites pour tous les invariants additifs contravariants ou covariants possibles. De façon précise, il doit résulter des principes généraux (que [?] je n'ai pas défaillis) que si $F_0 : \mathbf{\Delta}^\circ \longrightarrow \mathcal{B}_0$ est l'objet de $((\mathrm{Ab}_*)^\circ)_* \simeq (\mathrm{Ab}_*^*)^\circ$ qui exprime l'objet semi-simplicial additif universel, alors la catégorie cherchée d'opérations (correspondant à un

[12] Ω a deux aspects : 'opération sur des K^*' (Ω^*) et 'opération sur des $K^\bullet$' ($\Omega^\bullet$) – pour trouver des objets de $\mathcal{B}$ à partir d'un complexe (simplicial ou de chaînes) dans $\mathcal{B}$.

[13] À préciser la signification de ces formules.

paquet $\mathcal{L}$ de catégories d'indices par rapport auxquelles on se propose de franchir sur des $\varprojlim$ – dans des catégories $\mathcal{B}$ où on regarde des invariants de nature contravariants – donc des $\varinjlim$ – dans le cas de catégories $\mathcal{A}$ où on regarde les invariants de nature covariant) est la sous-catégorie *pleine* $U_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{B}_0 = (\mathrm{Ab}_*)^{\mathrm{o}}$ engendrée par les $F_0(\Delta^n)$ grâce aux $\varinjlim$ de type $\mathcal{L}$, et correspond donc à la sous-catégorie pleine de Ab_* engendré par les $G_0(\Delta^n)$ grâce aux $\varprojlim$ de type $\mathcal{L}$

[page 25]

(c'est ce qu'on va vérifier directement dans certains cas remarquables, p.ex. celui où $\mathcal{L} = \emptyset$ et où on trouve la sous-catégorie pleine de Ab_* engendrée par les $G_0[n]$ [i.e. $G_0(\Delta^{[n]})$] grâce aux seules sommes finies.

c) On a oublié de noter que dans le cas particulier $\mathcal{B} = \mathrm{Ab}$, on trouve les mêmes types d'objets (savoir ceux de Ab_* ou de $\mathrm{Ab}_\bullet$ au choix) pour exprimer les différents *invariants* contravariants F possibles à valeurs dans Ab (commutant aux $\varprojlim$) et les *opérations* Ω qu'on peut faire sur des invariants contravariants opérer [?] (à valeurs dans une catégorie additive à $\varprojlim$).

On a déjà dit comment F correspond à $K_* \in \mathrm{Ab}_*$ ou $K_\bullet \in \mathrm{Ab}_\bullet$, [et] Ω correspond à $L_* \in \mathrm{Ab}_*$ ou $L_\bullet \in \mathrm{Ab}_\bullet$. Comment alors exprimer directement la correspondance entre F et Ω, si $K = L$? On trouve si $F_0 \simeq \underbrace{((\mathrm{Ab}_*)^{\mathrm{o}})_*}_{\simeq (\mathrm{Ab}_*^*)^{\mathrm{o}}} = \mathcal{B}_{0*}$ est l'invariant universel comme dessus, à valeurs dans $\mathcal{B}_0 = (\mathcal{B}_*)^{\mathrm{o}}$, alors pour tout $X_* \in \mathrm{Ss} = \Delta^\wedge$

$$\boxed{F(X_*) \simeq \Omega^*(C_*(X_*)^{\mathrm{o}}) \simeq \Omega^\bullet(\mathbf{C}_\bullet(X_*)^{\mathrm{o}})}\,, \qquad (^{14}),$$

[page 26]

où l'exposant o à $\mathbf{C}_*(X_*)$ ou $\mathbf{C}_\bullet(X_*)$ signifie le [?m], mais considéré comme objet non de Ab_* resp. de $\mathrm{Ab}_\bullet$, mais de $\mathcal{B}'^*$ resp. $\mathcal{B}'^\bullet$, où $\mathcal{B}' = \mathrm{Ab}^{\mathrm{o}}$, de sorte que Ω^* défini sur $\mathcal{B}'^*$ resp. $\mathcal{B}'^\bullet$ ($\Omega^*_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}'^* \longrightarrow \mathcal{B}^*$, $\Omega^\bullet_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}'^\bullet \longrightarrow \mathcal{B}^\bullet$) a une valeur sur $\mathbf{C}_*(X_*)^{\mathrm{o}}$ resp. $\mathbf{C}_\bullet(X_*)^{\mathrm{o}}$, et c'est cet élément de $\mathcal{B} = (\mathrm{Ab})^{\mathrm{o}}$ qui est $F(X_*)$ (à isomorphisme canonique près).

Tous ces développements sont encore valables pour une catégorie $\mathbf{\Delta}$ (essentiellement petite) quelconque – et aussi dans le cas [?] non additif – tant qu'on des $*$ et non des $\bullet$, qui, eux, nécessitent des catégories de valeurs additives et le tapis bien spécial de DOLD-PUPPE.

En fait (revenant sur [le] paquet $\mathcal{L}$ de catégories d'indices envisagé dans b)), on s'intéressera surtout aux invariants contravariants en X_* provenant d'objets $K_* \in \mathrm{Ab}_*$ qui sont dans $U_{\mathcal{L}}$ – i.e. qui peuvent se déduire des composantes $C_*^{[n]} \in (\mathrm{Ab})_*$ (et des opérations semi-simpliciales entre lesdites) à l'ordre des opérations Ω_* [?premier per ter] de $C_*^n \in (\mathrm{Ab})_*$ et des opérations différentielles entre [?] de telles opérations. Il revient au même de dire que l'on s'intéressera aux [- - -]

[page 27]

$$F : X_* \longmapsto F(X_*) : \mathbf{\Delta}^{\wedge\mathrm{o}} \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

[14] Attention, dans cette formule apparaît le caractère non autodual de la situation - il s'agit si on [- - - -] ([15]).

[15] On peut ici au moins, comme d'habituel, introduire un k, et remplacer partout Ab par Ab_k ...

qui permet se déduire du foncteur universel

$$\Delta^{\wedge \mathrm{o}} \xrightarrow{F_0} (\mathrm{Ab}_*)^{\mathrm{o}}$$

(défini par $(F_0)^{\mathrm{o}}(X_*) = \mathbf{C}_*(X_*)$ en lui appliquant l'opération Ω^* pour $\Omega^* \in U^{\mathcal{L}}$), ou encore qui se déduit du foncteur covariant [?] universel

$$\Delta^{\wedge} \xrightarrow{F_0^{\mathrm{o}} = (X_* \mapsto \mathbf{C}_*(X_*))} (\mathrm{Ab}_*)$$

qui se dénote par $\mathbf{C}_*$, en lui appliquant de tels Ω_*. `[?ter n]` formulations équivalentes en termes de $\Omega^\bullet$, $\Omega_\bullet$ opérant sur $(\mathrm{Ab}_\bullet)^\bullet$ ($\Omega^\bullet : \mathrm{Ab}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Ab}$, $\Omega_\bullet : \mathrm{Ab}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Ab}$), en remplaçant $\mathbf{C}_*(X_*)$ par $\mathbf{C}_\bullet(X_*)$ ([16]).

e) `[pas de d)]` Quel est le rôle dans tout ceci de Dold-Puppe ? On voit en travaillant que l'avantage de $\mathcal{A}_\bullet$ sur $\mathcal{A}_*$, c'est que la description d'un objet y est nettement plus simple – on se perd facilement dans la description des opérations semi-simpliciales ! – et si on a deux avatars $L_\bullet$, L_*, $L_\bullet$ est aussi nettement 'moins gros' que L_* (NB on a toujours $L_n \subseteq L_{[n]}$ comme facteur direct), L_* apparaît comme une sorte de version pléthorique de $L_\bullet$!

`[page 28]`

Néanmoins, alors que (dans le cas de $\mathcal{A} = \mathrm{Ab}_*$ disons) Ab_{k*} et $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ est `[?chum]` leur structure multiplicative – qui ne se correspondent *pas* par DP et ND – celle de Ab_{k*} est plus simple à beaucoup d'égards, et s'introduit d'ailleurs de bien des façons par la suite de façon absolument impérieuse, alors que celle de $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ ne s'introduit pratiquement pas. De plus, pour les opérations tensorielles de type Λ^i, Γ^i, Sym^i, elles manquent purement et simplement dans $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ (sauf de les `[defint]` par transport de structure via DP !) alors qu'elles sont évidentes sur Ab_{k*} ! Or ces structures également joueront un rôle essentiel par la suite.

[16] Sous réserve que $\mathcal{L}$ soit assez gros pour permettre au moins des noyaux de projecteurs !