Villecoin 18.5.1959

Mon cher Serre,

Tate m'a écrit de son côté sur ses histoires de courbes elliptiques, et pour me demander si j'avais des idées sur une définition globale des variétés anaplytiques sur des corps valués complets. Je dois avouer que je n'ai pas du tout compris pourquoi ses résultats suggèreraient l'existence d'une telle définition, et suis encore sceptique. Je n'ai pas non plus l'impression d'avoir rien compris à son théorème, qui ne fait que exhiber par des formules brutales un certain isomorphisme de groupes analytiques; on conçoit que d'autres formules tout aussi explicites en donnerairent un autre pas plus mauvais (sauf preuve du contraire !)

J'ai réfléchi un petit peu à la partie 'infinitésimale' du groupe fondamental, juste assez pour me convaincre que ça existe et est raisonnable. Voici un contexte (certainement insuffisant d'ailleurs) où ça marche. On a un schéma S (connexe) (par exemple un schéma algébrique sur un corps k), une catégorie auxiliaire $\underline{C}$ (par exemple la catégorie des schémas algébriques finis sur k), une catégorie $\underline{G}$ dont les objets sont des $\underline{C}$-groupes, et les morphismes des morphismes de $\underline{C}$-groupes (par exemple les groupes algébriques finis sur k). On suppose que dans $\underline{C}$ les produits fibrés existent, et que $\underline{G}$ satisfait aux conditions suivantes: (i) $\underline{G}$ est stable par produits, et si $u,v : G \to G'$ sont des morphismes dans $\underline{G}$, alors le noyau du couple (u,v) i.e. le sous-groupe maximum de G où u, v coïncident -qui existe, car s'exprime par un produit fibré- est dans $\underline{G}$. (ii) Si $u: G \to G'$ est un morphisme dans $\underline{G}$, le groupe image existe, est isomorphe à un quotient de G comme il se doit, et est dans $\underline{G}$. (iii) Toute suite décroissante de sous-groupes $\in \underline{G}$ d'un $G \in \underline{G}$ est stationnaire. On suppose donné de plus un foncteur covariant F de $\underline{G}$ dans les schémas en groupes sur S (par exemple $G \to S \times_k G$), et on suppose : (iv) Le foncteur F commute aux produits, aux noyaux de couples de morphismes, images (on pourra dire que F est "exact"). (v) Si H est de la forme F(G) $(G \in \underline{G})$ alors H est "spécial" i.e. admet une suite exacte

2

de schémas en groupes finis et plats sur S

$$e \to H_{inf} \to H \to H_{sép} \to e$$

où H_{inf} est purement infinitésimal (i.e. la projection $H_{inf} \to S$ est géométriquement injectif) et où $H_{sép}$ est non ramifié sur S. (Dans le cas d'un corps de base k, une telle suite exacte est déduite d'une suite exacte analogue pour un groupe algébrique fini G sur k; d'ailleurs si k est parfait, cette suite splitte canoniquement, car $G_{réd}$ est alors un sous-groupe de G, isomorphe à $G_{sép}$ par la projection $G \; G_{sép}$. Faire attention cependant que $G_{réd}$ va opérer sur G_{inf}, on aura seulement un produit semi-direct). Enfin

~~La condition (v) est certainement superflue~~

(vi) S est réduit.

Les conditions (v) et (vi) ont une sale gueule, et sont essentiellement provisoires. Elles servent à ~~assurer la validité~~ cause du

Lemme Soit H comme dans (v), S comme dans (vi), P un fibré principal homogène sous H, Q un autre, u,v deux isomorphismes de P dans Q transformant un "point marqué" ~~donné~~ donné en un autre donné, alors u=v. (On est ramené, en tordant H, au cas où P est trivial, et alors cela résulte du fait suivant: une section de Q est un isomorphisme de S sur une composante connexe de $Q_{réd}$).

Remarque néanmoins que les conditions (i) à (vi) n'excluent pas des groupes structuraux tordus (relativement à un corps de base k).

Soit maintenant a un "point marqué" de S (i.e. une extension algébriquement close du corps résiduel d'un s∈S). Pour tout G∈$\underline{G}$, on désigne par Z(S,a;G) ou simplement Z(G) l'ensemble des classes (à isomorphisme près) de fibrés principaux homogènes sur S, de groupe F(G), munis d'un point marqué au dessus de a. Evidemment Z(G) est un foncteur de $\underline{G}$ dans la catégorie des ensembles. Ce foncteur satisfait aux conditions suivantes: 1) Il commute aux produits ~~(finis)~~ car F y commute) 2) il commute aux noyaux de couples, en d'autres termes si $G'' \to G \rightrightarrows G'$ est exact dans $\underline{G}$, alors $Z(G'') \to Z(G) \rightrightarrows Z(G')$ est exacte, i.e. Z(G") s'identifie à l'ensemble des éléments de Z(G) dont l'image dans Z(G') par Z(u) et Z(v) est la même. (Ceci résulte de l'exactitude de F, et du lemme).

3

De ces deux propriétés résulte formellement qu'on peut trouver un système projectif filtrant $(G_i)_{i\in I}$ dans $\underline{G}$, avec des morphismes $G_i \to G_j$ qui sont des épimorphismes dans $\underline{C}$, "essentiellement unique" dans un sens facile à préciser, tel que l'on ait un isomorphisme fonctoriel

$$Z(G) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{\underline{G}}(G_i, G)$$

C'est ce système projectif (pris modulo une équivalence qui intuitivement signifie qu'on a passé à la limite projective des G_i) qui peut être noté $\pi_1^{\underline{G}}(S,a)$ et joue le rôle d'un groupe fondamental de S en a (relativement à la catégorie $\underline{G}$ de groupes, munie du foncteur F). Dans le cas d'un corps de base k, $\underline{G}$ étant la catégorie des groupes algébriques finis sur k, on pourra écrire $\pi_1(S/k,a)$, c'est le groupe proalgébrique (mais avec partie infinitésimale) fondamental du k-schéma S. Lorsque k est parfait, la décomposition d'un groupe algébrique fini en partie infinitésimale et partie réduite montre que le groupe fondamental est produit semi-direct de sa partie réduite ou séparable (qui correspond à un groupe compact discontinu ordinaire, sur lequel le groupe fondamental ordinaire de k – i.e. le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k – opère), par sa partie infinitésimale, qui elle ne dépend d'ailleurs plus du choix du point base a de S. Noter que la partie séparable du groupe fondamental peut se réconstituer facilement à l'aide du groupe fondamental ordinaire de S et de son homomorphisme naturel dans $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, mais il est "plus grand" que le groupe fondamental ordinaire, parceque il correspond à la classification de revêtements principaux de groupe structural non seulement un groupe fini ordinaire, mais un groupe fini et séparable sur k (i.e. un groupe fini ordinaire sur lequel on fait opérer $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ de façon non nécessairement triviale). J'avoue que si k n'est pas algébriquement clos, le groupe fondamental ci-dessus n'est sans doute pas le bon; on devrait sans doute prendre le groupe fondamental de $S \otimes_k \bar{k}$, qui est un groupe proalgébrique défini sur $\bar{k}$, noter qu'il est muni d'une donnée de descente de $\bar{k}$ à k et est par suite défini en réalité sur k; avec cette définition, si S=Spec(k), la partie séparable du groupe fondamental de S (relativement à la ponctuation de S définie par une clôture algébrique $\bar{k}$ de k) n'est autre que

à tout

Lorsqu'on astreint [illegible] un k

126

(4

~~Gal($\bar{k}/k$), mais où on fait opérer Gal($\bar{k}/k$) par automorphismes intérieurs. Ainsi, le groupe des points rationnels sur k du groupe fondamental de Spec(k) s'identifie au centre de Gal($\bar{k}/k$).~~

Voici comment on voit l'existence du système projectif (G_i). Un couple (G,z), avec $G\in\underline{G}$ et $z\in Z(G)$, est dit <u>minimal</u> si on ne peut trouver un sous-groupe $G'\subset\underline{G}$ de G, $\neq G$, tel que z soit de la forme $Z(i)(z')$, avec $z'\in Z(G')$ et $i:G'\to G$ l'injection. On dit qu'un couple (G,z) <u>est majoré</u> par un couple (G',z') si on peut trouver un homomorphisme $u:G'\to G$ tel que $z=Z(u)(z')$. Il résulte de (iii) que tout couple (G,z) est majoré par un couple minimal, et de la propriété 2) de Z que si (G',z') est minimal et domine (G,z), alors il existe <u>un seul</u> $u:G'\to G$ tel que $z=Z(u)(z')$. De ceci résulte que les couples (G,z) minimaux forment un système projectif pour la relation de domination, d'ailleurs filtrant (car (G,z) et (G',z') sont dominés par $(G\times G',(z,z'))$ lui-même dominé par un (G'',z'') minimal), c'est le système cherché. On peut si on veut choisir un couple (G,z) dans tout système de couples (minimaux) isomorphes, de telle façon que l'ensemble d'indices I devient ordonné et non seulement préordonné. (N.B. Ce genre de raisonnements formels est aussi celui qui sert en théorie des modules ...).

Je ne sais encore comment devrait être formulée la suite exacte d'homotopie, pour bien faire l'inclusion dans le groupe fondamental d'une partie infinitésimale devrait donner une théorie satisfaisante du comportement du groupe fondamental par spécialisation. J'espère que si $f:X\to Y$ est un morphisme propre et séparable à fibres absolument connexes i.e. tel que $f_*(\underline{O}_X)=\underline{O}_Y$, X étant muni (pour simplifier) d'une sections sur Y qui détermine des points-base sur les fibres, alors les groupes fondamentaux <u>totaux</u> des fibres de X forment sur Y un proschéma en groupes $\pi_1(X/Y,s)$, de façon précise qu'on peut trouver un système projectif filtrant $(G_i)_{i\in I}$ de schémas en groupes G_i 'spéciaux' sur Y, avec des homomorphismes $G_i\to G_j$ qui soient des épimorphismes de Y-schémas (i.e. correspondant à un homomorphisme injectif de faisceaux cohérents sur Y), de telle façon que les groupes fondamentaux totaux des fibres de X se déduisent dudit pro-schéma en groupes par simple spécialisation. (C'est en tous cas ce que semble indiquer le cas où X est un schéma abélien sur Y, cf plus bas).

127

(5

Lorsqu'il n'y a pas de corps de base, il n'est pas clair cependant comment et à quels groupes fondamentaux pour X,Y on peut rattacher les groupes fondamentaux des fibres, pour tenir lieu de suite exacte d'homotopie. S'il y a un corps de base, une conjecture de départ serait que ~~l'image inverse par f de~~ $\Pi_1(X/Y)$, le pro-schéma en groupes $\Pi_1(X)$ ~~sur X~~ qui définit le système local des groupes fondamentaux de X en ses divers points, et enfin l'image inverse par f du pro-schéma en groupes analogue $\Pi_1(Y)$ sur Y, sont reliés par une suite exacte ~~(qui serait définie d'ailleurs indépendamment de l'existence d'une section de X sur Y, car le premier pro-schéma en groupes sur X nommé serait défini en tous cas).~~ Il y a de la joie en perspective pour les groupes d'homotopie supérieurs ...

Il n'est pas dit que la conjecture envisagée soit plus difficile à démontrer que la partie déjà connue pour les groupes fondamentaux ordinaires. Elle impliquerait que pour des schémas complets X,Y au dessus d'un corps alg clos k, on a $\Pi_1(X\times Y/k) = \Pi_1(X/k)\times\Pi_1(Y/k)$. Utilisant tes raisonnements, on en conclut que si X est une variété abélienne sur k, alors $\Pi_1(X/k)$ est abélien, et qu'un revêtement principal minimal X' de X est une variété abélienne isogène à X. On en déduit

$$\Pi_1(X/k) = \varprojlim {}_nX$$

où ${}_nX$ est le noyau (avec sa partie infinitésimale aussi, bien sûr) de la multiplication par n, l'homomorphisme de ${}_{mn}X$ dans ${}_nX$ étant induit par la multiplication par m. (Utilisant Cartier, ce groupe fondamental est dual, au sens de Cartier, au groupe ind-algébrique limite inductive des ${}_nX^*$, où X^* est la variété duale de X). Prenant la p-composante de ce groupe fondamental, on trouve ce qui, pour le nombre premier p, doit jouer le rôle du module de Weil. Il est hors de doute (et Cartier doit l'avoir fait) qu'il est possible d'associer fonctoriellement à un groupe proalgébrique infinitésimal abélien un module sur l'anneau de Witt, et qu'il soit facile de vérifier qu'en l'occurence ce module se décompose en les trois morceaux que tu connais bien (correspondants aux trois types principaux de (φ_p- groupes algébriques abéliens), On trouve ainsi

128

(6

pour ton théorème une formulation plus naturelle (qui devrait fournir une démonstration uniforme, sans distinction du cas $\ell \neq p$ et $\ell = p$), de même qu'on voit en même temps que ta somme abracadabrante se comporte bien quand on fait varier X dans une famille, i.e si X est un schéma abélien sur Y (car alors les ${}_nX$ seront d'excellents schémas en groupes finis et plats sur Y, dont on peut prendre formellement la limite projective ...).

J'espère arriver dans l'année prochaine à une théorie satisfaisante du groupe fondamental, et achever la rédaction des Chapitres IV, V, VI, VII (ce dernier étant le groupe fondamental), en même temps que des catégories. Dans deux ans résidus, dualité, intersections, Chern, Riemann-Roch. Dans trois ans cohomologie de Weil, et un peu d'homotopie si Dieu veut. Et entre-temps, je ne sais quand, le grand théorème d'existence avec Picard etc, un peu de courbes algébriques, les schémas abéliens. Sauf difficultés imprévues ou enlisement, le multiplodoque devrait être fini d'ici 3 ans, ou 4 au maximum. On pourra commencer à faire de la géométrie algébrique !

Bien à toi

129