C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 258-261 (18 janvier 1971). Série A

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Représentations linéaires de schémas en groupes affines.* Note (*) de M. **Neantro Saavedra Rivano**, transmise par M. Henri Cartan.

La correspondance qui, à un schéma en groupes affine, associe la catégorie de ses représentations linéaires, permet d'établir un dictionnaire entre groupes affines et certaines $\otimes$-catégories.

1. La catégorie Rep(G).

1.1. Soient S un schéma, G un S-monoïde affine [(¹), I, 4]. On note Rep(G) la catégorie des représentations linéaires de G dans des $\mathcal{O}_S$-Modules quasi-cohérents (i.e., G-$\mathcal{O}_S$-Modules quasi-cohérents à gauche),

$$\omega^G : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Qcoh}(S)$$

le foncteur « oubli de l'action G ». On notera que Rep(G) est canoniquement une $\otimes$-catégorie ACU, $\omega^G$ un $\otimes$-foncteur ACU (²), et que la formation de la $\otimes$-catégorie Rep(G) au-dessus de Qcoh(S) est fonctorielle en le monoïde G. Si $u : G \to G'$ est un morphisme de S-monoïdes affines, on notera $\mathrm{Rep}(u) : \mathrm{Rep}(G') \to \mathrm{Rep}(G)$ le $\otimes$-foncteur ACU qu'il induit.

Supposons que G soit S-plat, ce qui pour S affine équivaut à la commutation de $\omega^G$ avec les limites projectives finies, et entraîne que Rep(G) est une catégorie abélienne. On appelle *foncteur fibre* sur Rep(G) un $\otimes$-foncteur ACU $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-linéaire $\omega : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Qcoh}(S)$ qui soit fidèle, exact et qui commute avec les limites inductives. En prenant comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères, on obtient une catégorie Fib(G) dont l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets sera noté fib(G).

1.2. Soient $C$ une $\otimes$-catégorie ACU, $a$, $b$ des $\otimes$-foncteurs ACU $C \to \mathrm{Qcoh}(S)$. On note $\mathit{Hom}^{\otimes}(a, b)$ le préfaisceau sur la catégorie $\mathrm{Sch}_{/S}$ qui à un S-schéma S′ associe l'ensemble

$$\mathit{Hom}^{\otimes}(a, b) = \mathrm{Hom}^{\otimes}(a_{S'}, b_{S'})$$

des $\otimes$-morphismes unifères de $a_{S'}$ dans $b_{S'}$, la notation $a_{S'}$ désignant le $\otimes$-foncteur ACU composé de $a$ et de l'extension des scalaires $\mathrm{Qcoh}(S) \to \mathrm{Qcoh}(S')$. On définit de même $\mathit{Isom}^{\otimes}(a, b)$, $\mathit{End}^{\otimes}(a)$, $\mathit{Aut}^{\otimes}(a)$. Il s'agit en fait de faisceaux pour la topologie fidèlement plate quasi compacte (fpqc) [(¹), VII, 4].

Revenant à la situation de 1.1, la définition même de G-$\mathcal{O}_S$-Module montre qu'on dispose d'un morphisme canonique de faisceaux en monoïdes sur S :

$$G \to \mathit{End}^{\otimes}(\omega^G) \qquad (1.2.1)$$

69

qui associe à $g \in G(S')$ le $\otimes$-endomorphisme de $(\omega^G)_{S'}$ induisant sur chaque $G$-$\mathcal{O}_S$-Module $\mathcal{F}$ la multiplication par $g$ dans $\omega^G(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$.

PROPOSITION 1.3. — *Soient* S *un schéma*, G *un* S-*monoïde affine. Alors*, (1.2.1) *est un isomorphisme.*

On en déduit aisément :

COROLLAIRE 1.4. — *Soient* G, G′ *des* S-*monoïdes affines. L'application* $u \mapsto \mathrm{Rep}(u)$ *induit une bijection de l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{S\text{-mon}}(G, G')$ *des morphismes de monoïdes* $u : G \to G'$ *sur l'ensemble des foncteurs*

$$F : \quad \mathrm{Rep}(G') \to \mathrm{Rep}(G)$$

*tels que* $\omega^G \circ F = \omega^{G'}$.

THÉORÈME 1.5. — *Soient* S *un schéma affine*, G *un* S-*groupe affine et plat, et soient* ω, ω′, *des foncteurs fibre sur* Rep(G). *On a alors :*

(*a*) $\mathit{Isom}^{\otimes}(\omega, \omega') = \mathit{Hom}^{\otimes}(\omega, \omega')$ ;

(*b*) ω *et* ω′ *sont localement isomorphes pour la topologie fpqc, i.e., il existe un recouvrement* $\{S_i \to S\}$ *de* S *au sens de la topologie fpqc, et des* $\otimes$-*isomorphismes* $\omega_{S_i} \simeq \omega'_{S_i}$.

Si on note Tors(G) la catégorie des torseurs à droite sous G [(5), chap. II], on peut déduire du théorème qui précède et de 1.3 :

COROLLAIRE 1.6. — *La correspondance* $\omega \mapsto \mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega^G, \omega)$ *induit une équivalence de catégories*

(1.6.1) $$\mathrm{Fib}(G) \to \mathrm{Tors}(G),$$

*et en particulier une bijection*

(1.6.2) $$\mathrm{fib}(G) \to H^1(S_{\mathrm{fpqc}}, G),$$

*où* $S_{\mathrm{fpqc}}$ *désigne le site des* S-*schémas munis de la topologie fpqc.*

*Remarque* 1.7. — Si le S-groupe affine et plat G est de présentation finie (resp. lisse), on peut dans l'assertion (*b*) de 1.5 remplacer la topologie fpqc par la topologie fppf (resp. étale).

2. CONDITIONS DE FINITUDE.

2.1. Il s'agit ici d'exhiber des sous-$\otimes$-catégories de Rep(G), qui soient de nature « finie », et qui donnent des résultats semblables à ceux présentés au paragraphe précédent. On va se limiter au cas où S est le spectre d'un corps $k$, où les résultats sont plus sympathiques.

Soit G un $k$-monoïde affine. On note $\mathrm{Rep}_0(G)$ la sous-$\otimes$-catégorie pleine de Rep(G) des G-$k$-modules de rang fini sur $k$, $\omega_0^G : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Modf}(k)$ le foncteur « oubli de l'action de G ». Si T est un $k$-schéma, et on note Loclib(T) la $\otimes$-catégorie ACU $k$-linéaire des $\mathcal{O}_T$-Modules localement libres de rang fini, on appelle *foncteur fibre sur* $\mathrm{Rep}_0(G)$ *à valeurs dans* T un $\otimes$-foncteur ACU $k$-linéaire $\omega : \mathrm{Rep}_0(G) \to \mathrm{Loclib}(T)$ qui soit fidèle et exact. On obtient encore une catégorie $\mathrm{Fib}_0(G, T)$.

70

De même que dans 1.2, on a un morphisme canonique de faisceaux en monoïdes

(2.1.1) $$G \to \mathcal{E}nd^{\otimes}(\omega_0^{\mathrm{G}}).$$

Proposition 2.2. — *Soient $k$ un corps, G un $k$-monoïde affine, T un $k$-schéma. On a alors :*

*(a) Le morphisme (2.1.1) est un isomorphisme.*

*(b) Si $\omega$, $\omega'$ sont des foncteurs fibre sur* $\mathrm{Rep}_0(\mathrm{G})$ *à valeurs dans* T, *et si* G *est un groupe,* $\omega$ *et* $\omega'$ *sont localement isomorphes pour la topologie fpqc.*

La collection des catégories $\mathrm{Fib}_0(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ définit de façon naturelle une catégorie fibrée [(6), VI, 6.1] au-dessus de $\mathrm{Sch}_{/k}$, qu'on notera $\mathrm{FIB}_0(\mathrm{G})$. Si TORS(G) dénote la catégorie fibrée au-dessus de $\mathrm{Sch}_{/k}$ des torseurs sous $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}$ pour T variable [(5), *loc. cit.*], la proposition 4.2 peut encore s'énoncer comme suit :

Corollaire 2.3. — *Le foncteur* $\omega \mapsto \mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_0^{\mathrm{G}}, \omega)$ *définit une équivalence de catégories fibrées*

(2.3.1) $$\mathrm{FIB}_0(\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{TORS}(\mathrm{G})$$

*au-dessus de* $\mathrm{Sch}_{/k}$.

La partie (*a*) de 2.2 avait été signalée par Cartier [(3), th. 1] dans le cas d'un groupe algébrique linéaire.

## 3. Un théorème d'existence.

3.1. On peut donner une caractérisation axiomatique des catégories Rep(G) pour G un S-monoïde affine, et S un schéma affine. Si S est le spectre d'un corps $k$, celle-ci prend la forme suivante :

Théorème 3.2. — *Soit $C$ une $\otimes$-catégorie ACU $k$-linéaire. Alors $C$ est $\otimes$-équivalente à une $\otimes$-catégorie* $\mathrm{Rep}_0(\mathrm{G})$ *avec* G *un $k$-monoïde affine si et seulement s'il existe un $\otimes$-foncteur ACU $k$-linéaire, exact et fidèle* $\omega : C \to \mathrm{Modf}(k)$. *Le $k$-monoïde* G *est un groupe si et seulement si $C$ possède des objets Hom* (7).

## 4. Quelques traductions.

— La correspondance établie plus haut entre groupes et $\otimes$-catégories permet de traduire des propriétés de théorie des groupes dans un langage catégorique. Avant d'en donner quelques exemples, posons une définition. Si V est un objet d'une $\otimes$-catégorie ACU abélienne $C$, on dit que V est un *$\otimes$-générateur* de $C$, si tout objet de $C$ est quotient d'un sous-objet d'un objet de la forme P(V), $\mathrm{P} \in \mathbf{N}[t]$, où dans l'expression P(V), la somme (resp. le produit) est remplacé par $\oplus$ (resp. $\otimes$).

Soient G, G′ des $k$-groupes ($k$ un corps), $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de $k$-groupes, V un G-$k$-module de rang fini sur $k$.

71

(i) G *est de type fini sur* $k$ *si et seulement si la* $\otimes$*-catégorie* $\mathrm{Rep}_0(G)$ *possède un* $\otimes$*-générateur.*

(ii) *L'action de* G *dans* V *est fidèle si et seulement si* $V \oplus \check{V}$ *est un* $\otimes$*-générateur de* $\mathrm{Rep}_0(G)$, *ou encore si et seulement si tout objet de* $\mathrm{Rep}_0(G)$ *est quotient d'un sous-objet d'un objet de la forme* $P(V, \check{V})$, $P \in \mathbf{N}[t_1, t_2]$.

(iii) $u$ *est un épimorphisme de faisceaux fpqc si et seulement si* $u$ *est un morphisme fidèlement plat, ou encore si et seulement si*

$$\mathrm{Rep}_0(u) : \mathrm{Rep}_0(G') \to \mathrm{Rep}_0(G)$$

*est pleinement fidèle et identifie* $\mathrm{Rep}_0(G')$ *à une sous-catégorie de* $\mathrm{Rep}_0(G)$ *stable par sous-objets.*

(iv) $u$ *est un monomorphisme si et seulement si* $u$ *est une immersion fermée, ou encore si et seulement si tout objet de* $\mathrm{Rep}_0(G)$ *est quotient d'un sous-objet d'un objet de la forme* $\mathrm{Rep}_0(u)(V')$, *où* $V' \in \mathrm{ob}[\mathrm{Rep}_0(G')]$.

(*) Séance du 11 janvier 1971.

(1) M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, SGA 4, I. H. E. S.

(2) J. Benabou, *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 1887. Le signe ACU est pour Associatif, Commutatif, Unifère, et on assume que les contraintes ACU sont compatibles entre elles. Enfin, pour nous, si F est un $\otimes$-foncteur, la flèche $F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$ est un *isomorphisme*.

(3) P. Cartier, *Comptes rendus*, 242, 1956, p. 322.

(4) M. Demazure et A. Grothendieck, SGA 3, Lecture Notes in Mathematics nos 151, 152 et 153, Springer-Verlag.

(5) J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Notes miméographiées, Columbia University.

(6) A. Grothendieck, SGA 1, I. H. E. S.

(7) On dit qu'une $\otimes$-catégorie ACU $C$ *possède des objets Hom* si, pour deux objets quelconques X, Y de $C$, le foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}(Z \otimes X, Y)$ est représentable.

(*Institut des Hautes Études Scientifiques,*
35, *route de Chartres,*
91-*Bures-sur-Yvette,*
*Essonne.*)

183186. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

72