10.12.1965

Cher Deligne,

Je vous propose une simplification pour la démonstration du théorème de dualité, qui permet d'éviter tout recours au théorème de pureté relative. Vous vous rappelez qu'on était réduit au cas où $f:X\ \ Y$ est de dimension relative 1, $F=A_X$ et $G=A_Y$. Le proéédé de passage à la limite de Exp VI, par.6, permet de supposer la base noethérienne, et même si on y tien de dimension finie (car de type fini sur $\underline{Z}$). On raisonne par récurrence sur $n=\dim X$. Si $n=0$, on sait le vérifier. Supposons le théorème démontré en dimension $< n$. Se localisant sur Y, on peut supposer Y strictement local. Alors, si y est son point fermé, on a $\dim(Y-y)\ \ n$, et comme on est réduit à prouver le théorème séparément pour $X x_Y (Y-y)$ et $X x_Y y$, on gagne. - Autre remarque: le théorème de dualité peut se démontrer, essentiellement de la même façon et avec le même énoncé, pour un morphisme lisse $f:X\ \ Y$ compactifiable, lorsque Y est muni d'un faisceau d'anneaux A quelconque tel que il existe un entier n premier aux caractéristiques résiduelles annulant A, et X d'un faisceau d'anneaux B, et f étant donné comme morphisme de (X,B) dans (Y,A), de sorte qu'on a un homomorphisme de faisceau d'anneaux $f^{-1}(A)\ \ B$. On définit alors

$$f^!(K^\cdot) = R\ \underline{\mathrm{Hom}}^\cdot_{f^{-1}(A)}(B, f^{-1}(K)\otimes T_{X/Y}\ \ 2d) .$$

La définition de l'homomorphisme trace et la démonstration du théorème de dualité se décomposent alors en le cas où $f^{-1}(A)\ \ B$ est un isomorphisme, qui se traite comme le cas $A=(\underline{Z}/n\underline{Z})_Y$, et le cas où $f=id$, qui est trivial. Je pense qu'il vaut le coup d'inclure cette forme générale du théorème de dualité, soit de prime abord, soit à la fin dans un numéro-rattrappage. Je n'ai pas regardé si par hasard il pourrait se déduire du cas particulier

49

A $=(\underline{Z}/n\underline{Z})_Y$ comme simple corollaire, mais ça m'étonnerait. La même remarque s'applique d'ailleurs également au théorème de dualité ~~x~~globale, qui s'énonce pour des faisceaux d'anneaux plus généraux que le faisceau constant $\underline{Z}/n\underline{Z}$.]

Il me semble que la relation de nature transcendante qui lie la cohomologie de De-Rham ou de Hodge aux cohomologies ℓ-adiques, lorsque le corps de base est $\underline{C}$, via la cohomologie entière, devrait avoir ~~unxxrxixi xx~~ analogue lorsque le corps de base est alg clos valué complet non archimédien, à corps résiduel de caractéristique p, ~~xxxxxxxxxxxxxxx~~ et corps des fractions K de caractéristique zéro, savoir que $H^*(X,\underline{Z}_p)$ doit s'envoyer alors de façon $\underline{Z}_p$-linéaire dans la cohomologie de De-Rham $H^*(X)$, qui serait isomorphe alors à $H^*(X,\underline{Z}_p)\otimes_{\underline{Z}_p} K$. Pour définir un tel homomorphisme, on pourrait penser à utiliser l'espace rigide-analytique au sens de Tate défini par X (NB c'est un site qui ne peut être défini par une topologie au sens ordinaire, ce qui explique les difficultés conceptuelles initiales de Tate pour arriver à définir la notion d'espace rigide-analytique), soit X^{an}. On espère que les arguments habituels prouveront que pour des faisceaux de torsion, la cohomologie de $X_{ét}$ coïncide avec celle de X^{an}, et un excès d'optimisme nous ferait espérer que la cohomologie de X^{an} à coéfficients constants $\underline{Z}_p$ est bien la limite projective des cohomologies à coéfficients dans les $\underline{Z}/p^n\underline{Z}$, donc coïncide avec la cohomologie p-adique $H(X_{ét},\underline{Z}_p)$ (définie précisément comme une limite analogue). Si cela était vrai, l'immersion canonique de $\underline{Z}_p$ dans les fonctions constantes sur X^{an} semblerait permettre d'envoyer $H(X^{an},\underline{Z}_p)$ dans la cohomologie de De Rham de X^{an}, qui par Gaga rigide-analytique n'est autre que celle de X . L' "excès" plus haut serait justifié essentiellement par un "lemme

50

de Poincaré" rigide-analytique, disant que sur X^{an}, le complexe de De-Rham est bien une résolution du faisceau des fonctions constantes à valeurs dans le corps de base. Notez bien que c'est certainement trivial pour l'analytique p-adique ordinaire, étant une simple question de séries convergentes dans ce cas, mais que la question pour la topologie rigide-analyique (qui est beaucoup plus grossière) est plus délicate. Je vous avoue d'ailleurs que j'ai de grands doutes que les choses marchent aussi simplement que ça, i.e. que la cohomologie rigide-analytique à coéfficients constants tout bêtes donne les "bons" nombres de Betti. Je crois me rappeler que Tate m'avait dit que c'était déjà faux pour le H^1 des courbes elliptiques - il faudrait lui demander quel était son argument; apparemment, on trouverait un peu plus que pour la cohomologie étale, mais quand même pas toute la cohomologie. Il reste plausible néanmoins, quoi qu'il en soit, que la topologie rigide-analytique aura son rôle à jouer dans ces questions.

Notez qu'en caractéristique $p > 0$, on a un homomorphisme évident de $H^*(X, \underline{F}_p)$ dans la cohomologie de De-Rham, comme on voit en calculant cette dernière pour la cohomologie étale et non pour la cohomologie de Zariski (ce qui donne le même résultat, puisque les composantes du complexe de De Rham sont quasi-cohérents), et utilisant la suite spectrale en cohomologie étale

$$H^*(X) \Longleftarrow H^p(X, \underline{H}^q(\underline{\Omega}))\ .$$

Cet homomorphisme se factorise d'ailleurs à travers $H^*(X, F_p) \to H^*(X, \underline{O}_X)$, ce dernier s'envoyant dans $H^*(X)$ grace à l'homomorphisme de puissance p-ème $f \rightsquigarrow f^p$, induisant un isomorphisme $\underline{O}_X \simeq \underline{H}^o(\underline{\Omega})$. Le composé des homomorphismes canoniques $H^n(X, \underline{O}_X) \to H^n(X) \to H^n(X, \underline{O}_X)$ (ce dernier

51

résultant de l'autre suite spectrale pour la cohomologie de De Rham) ne peut guère être autre chose que l'homomorphisme de Frobenius. Il faut dire que tout ça est bien éculé, et qu'on ne pourra dire ~~deux~~ des choses vraiment intéressantes et nouvelles qu'en faisant appel à la "vraie" cohomologie p-adique.

Bien cordialement

52