A. Grothendieck, La théorie de Fredholm, *Matematika*, 1958, Volume 2, Issue 5, 51–104

ТЕОРИЯ ФРЕДГОЛЬМА [1])

А. Гротендик

Введение

§ 1. Содержание работы. Как было подмечено впервые А. Растоном [7], естественной областью теории Фредгольма являются введенные Р. Шаттеном «операторы со следами», определяющиеся непосредственно в теории топологических тензорных произведений. В настоящей работе, как и в [7], дано изложение теории Фредгольма в этом общем аспекте. Поскольку оно возникло независимо [2]) и в отличном от [7] виде (насколько это возможно для двух изложений столь ограниченной темы), мне казалось небесполезным его опубликование. Конечно, в такой теме, как теория Фредгольма, претендовать на оригинальность не приходится, и эта статья является только дидактическим изложением. Она предполагает хорошее знакомство с линейной и мультилинейной алгеброй, а также с основными понятиями теории банаховых пространств. (Мы будем следовать терминологии, принятой в «Элементах математики» Н. Бурбаки.)

Я особенно старался развить наиболее естественным образом *алгебраический механизм* теории Фредгольма. Это сделано в гл. I, которая имеет чисто алгебраический характер. Интенсивное использование тензорных произведений и внешних произведений, которое может оттолкнуть некоторых читателей, лежит тем не менее в существе дела и необходимо для понимания теории. Теория Фредгольма в собственном смысле получается в гл. II непосредственным продолжением по непрерывности, как только сформулированы основные определения относительно тензорных произведений (гл. II, § 1). Наконец, гл. III показывает, как с помощью общих результатов о топологических тензорных произведениях общая теория может быть применена к весьма различным случаям. Классический случай рассмотрен довольно подробно, а другие случаи лишь эскизно.

В заключение заметим, что изложение значительно упрощается, если не рассматривать сингулярный случай (кратные нули определителя Фредгольма). Если к тому же хотят ограничиться существованием и основными свойствами определителя Фредгольма (самая существенная часть теории), то достаточно нескольких страниц, коль скоро известно определение топологического тензорного произведения.

§ 2. Мультилинейные отображения и многочлены. Дифференцирование многочленов. Мы будем рассматривать векторные пространства над телом k. Пусть F, E_i $(i=1, \ldots, n)$ — векторные пространства; множество n-линейных отображений произведения $\prod\limits_i E_i$ в F есть векторное пространство, обозначаемое символом $B(E_1, \ldots, E_n; F)$. Если $u(x_1, \ldots, x_n)$ означает такое ото-

---

[1]) Grothendieck A., La théorie de Fredholm, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 319–384.

[2]) Первая редакция этого изложения датируется 1952 г. Законченная рукопись была принята в 1953 г. журналом *Summa Brasiliensis Mathematicae*, но вследствие долгих отсрочек публикации я взял ее обратно, чтобы опубликовать в настоящем журнале.

бражение, то, зафиксировав p переменных, например $x_1, \ldots, x_p$, получим мультилинейную функцию относительно остальных $n-p$ переменных со значениями в F, т. е. элемент из $B(E_{p+1}, \ldots, E_n; F)$; этот элемент будет зависеть p-линейно от $x_1, \ldots, x_p$. *Таким образом получается канонический изоморфизм пространства* $B(E_1, \ldots, E_n; F)$ *на* $B(E_1, \ldots, E_p; B(E_{p+1}, \ldots, E_n; F))$. [В частности, $B(E, F; G)$ отождествляется с $L(E; L(F, G))$ и, таким образом (при $G=k$), пространство $B(E, F)$ билинейных форм на $E \times F$ отождествляется с пространством $L(E; F')$ линейных отображений E в пространство F', сопряженное с F.] Если все E_i совпадают с одним и тем же пространством E, то предыдущее отождествление индуцирует также отождествление n-линейных *симметричных* отображений пространства E^n в F с *некоторыми* p-линейными *симметричными* отображениями пространства E^p в пространство $(n-p)$-линейных *симметричных* отображений пространства E^{n-p} в F. Если рассматриваемые пространства E_i, F являются *пространствами Банаха* (вещественными или комплексными), а $B(E_1, \ldots, E_n; F)$ означает пространство n-линейных *ограниченных* отображений $\prod\limits_i E_i$ в F, наделенных своей естественной нормой

$$\|u\| = \sup_{\|x_i\| \leqslant 1} \|u(x_1, \ldots, x_n)\|, \tag{1}$$

то рассмотренный выше алгебраический изоморфизм индуцирует изоморфизм между *нормированными* пространствами $B(E_1, \ldots, E_n; F)$ и $B(E_1, \ldots, E_p; B(E_{p+1}, \ldots, E_n))$.

Предположим для простоты, что тело скаляров обладает характеристикой 0, а в остальном будем по-прежнему считать его произвольным. *Одночленом степени* n называют отображение f пространства E в F, имеющее вид

$$f(x) = u(\underbrace{x, \ldots, x}_{n}), \tag{2}$$

где u есть n-линейное отображение E^n в F. Одночлены степени n, отображающие E в F, образуют очевидным образом векторное пространство; если E имеет базис (e_i), то они представляют собой те отображения E в F, которые выражаются через однородные многочлены степени n (с коэффициентами из F) относительно составляющих λ_i элемента x по базису (e_i) (многочлены могут быть бесконечными, если базис бесконечен). Если f — одночлен, определенный согласно (2), то будем иметь также

$$f(x) = v(x, \ldots, x),$$

где v есть n-линейное *симметричное* отображение пространства E^n в F, заданное выражением

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} u(x_{\sigma.1}, \ldots, x_{\sigma.n})$$

(здесь $\mathfrak{S}_n$ означает группу перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$). Таким образом, в представлении (2) всегда можно считать n-линейную функцию u *симметричной*, что мы и будем делать в последующем. Одночлен степени n, соответствующий n-линейному симметричному отображению E^n в F, мы будем обозначать для краткости через $u(x)$ $(x \to u(x))$:

$$u(x) = u(x, \ldots, x),$$

что не может повлечь недоразумения. Обратно, как будет показано, n-линейная симметричная функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ вполне определена, если известен соответствующий ей одночлен $u(x)$.

Многочленом степени $\leqslant n$, отображающим E в F, называют всякую сумму одночленов, отображающих E в F, степень которых $\leqslant n$. Такой многочлен может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x)=f_0(x)+\ldots+f_n(x), \tag{3}$$

где f_i означает одночлен степени i (следует заметить, что пространства одночленов различных степеней линейно независимы). Пусть f — многочлен, отображающий E в F, и пусть $x\in E$, $h\in E$; тогда $f(x+\lambda h)$ есть многочлен скалярного аргумента λ со значениями в F (даже в конечномерном векторном подпространстве пространства F). Производная этого многочлена в точке $\lambda=0$ вполне определена; ее называют *производной* (*частной*) *функции* f *в точке* x *по направлению* h и обозначают $f'_h(x)$. Для фиксированных x и h эта производная зависит линейно от f, так что достаточно найти производную одночлена степени n, заданного формулой (2) (в которой u предполагается n-линейной симметричной функцией). Но для этого случая тотчас же получаем, что

$$u'_h(x)=n\,u\,(\underbrace{x,\ \ldots,\ x}_{n-1},\ h). \tag{4}$$

Из этой формулы видно, что $f'_h(x)$ при фиксированном x является *линейной* функцией от h [т. е. элементом пространства $L(E, F)$]. Эту функцию называют *производной* (*полной*) *многочлена* f *в точке* x и обозначают $f'(x)$. Таким образом, согласно определению,

$$f'_h(x)=f'(x)\,h. \tag{5}$$

С другой стороны, из (4) видно, что отображение $x\to f'(x)$ пространства E в $L(E, F)$ есть многочлен степени $\leqslant n-1$ (если f — многочлен степени $\leqslant n$); это отображение, обозначаемое через f', называется *производной функцией* многочлена f. Можно, далее, определить вторую производную f'' многочлена f как производную многочлена f'; для фиксированного $x\in E$ $f''(x)$ есть элемент пространства $L(E;\ L\ (E;\ F))$ или пространства $B(E,\ E;\ F)$ (см. указанное выше отождествление), а отображение $x\to f''(x)$ есть многочлен степени $\leqslant n-2$, отображающий E в $B(E,\ E;\ F)$. Вообще p-я производная $f^{(p)}$ многочлена f определяется рекуррентно как производная многочлена $f^{(p-1)}$; это — многочлен степени $\leqslant n-p$, отображающий E в $B(\underbrace{E,\ \ldots,\ E}_{p};\ F)$. Определим тем же рекуррентным способом последовательные частные производные $f^{(p)}_{h_p,\ldots,h_1}(x)$; тогда

$$f^{(p)}_{h_p,\ldots,h_1}(x)=f^{(p)}(x)\,(h_1,\ \ldots,\ h_p). \tag{6}$$

Если $f(x)=u(x)=u(x,\ \ldots,\ x)$ (u — симметричное n-линейное отображение E^n в F), то, применяя (4) шаг за шагом, получим

$$u^{(p)}(x)\,(h_1,\ \ldots,\ h_p)=n\,(n-1)\ \ldots\ (n-p+1)\,u\,(\underbrace{x,\ \ldots,\ x}_{n-p},\ h_1,\ \ldots,\ h_p) \tag{7}$$

для $p\leqslant n$ и $u^{(p)}(x)=0$ для $p>n$. Отсюда заключаем прежде всего, что $f^{(p)}(x)$ есть (для фиксированного x), *симметричное* p-линейное отображение E^p в F (перестановочность порядка частных дифференцирований), и это остается, очевидно, в силе для любого многочлена. Далее, отсюда заключаем еще, что симметричная n-линейная функция $u(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ вполне определена, коль скоро известен соответствующий ей одночлен, ибо в силу (7) $n!\ u(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ равно $u^{(n)}(x)\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ (каково бы ни было $x\in E$). Существует даже явное «конечное» [а не дифференциальное, как в (7)] выражение функции $u(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ через $u(x)$:

$$n!\ u(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\Delta_{x_n,\ldots,x_1}u(0)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_{n-p}\leqslant n}u(x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_{n-p}}). \tag{8}$$

Правая часть в (8) есть разность n-го порядка одночлена $u(x)$ (для $x=0$), которая определяется рекуррентно посредством следующих равенств (выражения, входящие в эти равенства, рассматриваются как функции от x):

$$\Delta_{x_1} u(x) = u(x+x_1) - u(x),$$

$$\Delta_{x_n, \ldots, x_1} u(x) = \Delta_{x_n}(\Delta_{x_{n-1}, \ldots, x_1} u(x)).$$

Равенство двух последних членов в (8) проверяется непосредственно (индукцией по n). Равенство с первым членом устанавливается, как обычно в классическом анализе.

Отметим, наконец, что еще имеет место *формула Тейлора*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(h, \ldots, h), \tag{9}$$

где f — многочлен, степень которого $\leqslant n$. В самом деле, эту формулу достаточно проверить для случая, когда f — одночлен степени $\leqslant n$, а в этом случае (9) есть формула бинома:

$$u(\underbrace{x+h, \ldots, x+h}_{p}) = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} u(\underbrace{x, \ldots, x}_{q}, \underbrace{h, \ldots, h}_{p-q}).$$

§ 3. Аналитические отображения банаховых пространств. Если E и F — банаховы пространства, то мы ограничимся рассмотрением *непрерывных* одночленов и многочленов, отображающих E в F. Это сводится к требованию непрерывности симметричных мультилинейных функций, служащих для их определения, что будет (в силу теоремы о замкнутом графике) практически всегда иметь место. *Нормой* одночлена $u(x) = u(x, \ldots, x)$ степени n называют норму соответствующей симметричной n-линейной функции

$$\|u\| = \sup_{\|x_i\| \leqslant 1} \|u(x_1, \ldots, x_n)\|.$$

Величина $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$ также является нормой в пространстве одночленов степени n, отображающих E в F, но менее удобной; она эквивалентна предыдущей, ибо, в силу (8), имеем

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| \leqslant \|u\| \leqslant k(n) \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|,$$

где

$$k(n) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!\,(n-p)} (n-p)^n \leqslant \frac{1}{n!} \sum_{p} \binom{n}{p} n^p n^{n-p} = \frac{1}{n!}(n+n)^n = \frac{(2n)^n}{n!},$$

откуда, по формуле Стирлинга, $k(n) = o((2e)^n)$, и, следовательно,

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| \leqslant \|u\| \leqslant k \cdot (2e)^n \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|, \tag{10}$$

где k — некоторая универсальная постоянная.

Отображение f открытого множества $U \subset E$ в F называется *аналитическим*, если при любом $x \in U$ для достаточно малых $\|h\|$ имеем

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(h), \tag{11}$$

где u_n образуют последовательность одночленов (u_n степени n) таких, что ряд $\sum \|u_n\| z^n$ имеет отличный от нуля радиус сходимости, т. е. таких, что

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim} \|u_n\|^{1/n} < +\infty \tag{12}$$

[впрочем, неравенство (10) показывает, что для проверки условия (12) можно заменить $\|u_n\|$ величинами $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|u_n(x)\|$]. Тогда ряд (11) сходится абсолютно для $\|h\|<R$, равномерно для $\|h\|\leqslant R'<R$, и f непрерывно. Кроме того, легко заметить, что u_n в (11) определяются единственным образом. Истолковывая u_n как симметричное n-линейное отображение E^n в F, можно рассматривать $n!\,u_n$ как производную n-го порядка отображения f в точке x. Можно проверить, что при таком определении производная порядка p отображения f есть аналитическое отображение множества U в банахово пространство непрерывных симметричных p-линейных отображений E^p в F, разложение которого в точке x получается «почленным дифференцированием» разложения (11).

Отображение f пространства E в F называется *целым аналитическим*, если оно задано рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x), \tag{13}$$

где u_n образуют последовательность одночленов (u_n степени n) таких, что ряд $\sum\|u_n\|z^n$ есть целая функция, т. е. таких, что

$$\lim\|u_n\|^{1/n}=0 \tag{14}$$

[здесь также можно заменить $\|u_n\|$ на $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|u_n(x)\|$]. Для целого отображения ряд в правой части (13) сходится абсолютно при любом x и равномерно при $\|x\|\leqslant M$ (M произвольно) к функции $f(x)$, аналитической на E (в смысле данного выше определения); производная p-го порядка отображения f тоже является целой аналитической функцией на E (со значениями в банаховом пространстве непрерывных симметричных p-линейных отображений E^p в F), заданной рядом

$$f^{(p)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n^{(p)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+p}^{(p)}(x), \tag{15}$$

так что

$$f^{(p)}(x)(h_1,\ldots,h_p)=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+p}^{(p)}(x)(h_1,\ldots,h_p)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+p)!}{n!}u_{n+p}(\underbrace{x,\ldots,x}_{n},h_1,\ldots,h_p). \tag{16}$$

Глава I

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 1. Обозначения и напоминания. Пусть E и F — векторные пространства с конечным или бесконечным числом измерений над телом k с характеристикой 0; E' — пространство, сопряженное с E (т. е. пространство всех линейных форм на E); $\langle x, x'\rangle$ — каноническая билинейная форма на $E\times E'$; $L(E, F)$ — пространство всех линейных отображений E в F; $L_f(E, F)$ — подпространство отображений конечного ранга, которое можно отождествить с тензорным произведением $E'\otimes F$, если сопоставить каждому тензору вида $x'\otimes y$ линейное отображение $x\to\langle x, x'\rangle y$ [2]. Если $E=F$, то мы будем писать $L(E)$ и $L_f(E)$. Символ $\overset{n}{\otimes}E$ (соответственно $\overset{n}{\wedge}E$) означает тензорную (соответственно внешнюю или антисимметричную) степень с показателем n

пространства E ([2], § 4 и 5); $\overset{n}{\otimes} E$ находится в естественной отделимой двойственности с $\overset{n}{\otimes} E'$ (причем $\overset{n}{\otimes} E'$ отождествляется с пространством, сопряженным с $\overset{n}{\otimes} E$, если E конечномерно), ибо для простых тензоров имеем

$$\langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n,\ x_1' \otimes \ldots \otimes x_n' \rangle = \langle x_1, x_1' \rangle \ldots \langle x_n, x_n' \rangle. \tag{1}$$

Аналогично $\overset{n}{\wedge} E$ находится в естественной отделимой двойственности с $\overset{n}{\wedge} E'$ (причем $\overset{n}{\wedge} E'$ отождествляется с пространством, сопряженным с $\overset{n}{\wedge} E$, если E конечномерно), ибо для простых мультивекторов имеем

$$\langle x_1 \wedge \ldots \wedge x_n,\ x_1' \wedge \ldots \wedge x_n' \rangle = \det(\langle x_i, x_j' \rangle). \tag{2}$$

Существует канонический гомоморфизм φ_n тензорного произведения $\overset{n}{\otimes} E$ на $\overset{n}{\wedge} E$, определенный равенством

$$\varphi_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n, \tag{3}$$

и канонический изоморфизм a_n внешнего произведения $\overset{n}{\wedge} E$ в $\overset{n}{\otimes} E$ такой, что его сопряженный определяет канонический изоморфизм тензорного произведения $\overset{n}{\otimes} E'$ на $\overset{n}{\wedge} E'$; из предыдущих формул вытекает, что a_n есть классический *оператор антисимметризации*

$$a_n(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma x_{\sigma.1} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma.n}, \tag{4}$$

где $\mathfrak{S}_n$ — группа перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, а ε_σ равно $+1$ или -1, смотря по тому, *четна* или *нечетна* перестановка σ.

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — линейные отображения E в F; *тензорным произведением* $u_1 \otimes \ldots \otimes u_n$ этих отображений называют линейное отображение $\overset{n}{\otimes} E$ в $\overset{n}{\otimes} F$, определенное на простых тензорах следующим образом:

$$(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = u_1 x_1 \otimes \ldots \otimes u_n x_n; \tag{5}$$

внешним произведением отображений $u_1, \ldots, u_n$ (обозначаемым $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ или $\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} u_i$) называют линейное отображение $\overset{n}{\wedge} E$ в $\overset{n}{\wedge} F$, определенное равенством

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_n = \frac{1}{n!} \varphi_n \circ (u_1 \otimes \ldots \otimes u_n) \circ a_n, \tag{6}$$

где φ_n и a_n определены формулами (3) и (4) (первая при этом рассматривается в применении к F). Непосредственно проверяется, что $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ не зависит от порядка сомножителей $u_1, \ldots, u_n$; таким образом, отображение $(u_1, \ldots, u_n) \to u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ есть n-линейное симметричное отображение $(L(E, F))^n$ в $L(\overset{n}{\wedge} E, \overset{n}{\wedge} F)$. Кроме того, обозначая через $\overset{n}{\wedge} u$ внешнее произведение n одинаковых отображений ($u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u$), получаем

$$(\overset{n}{\wedge} u) x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = u x_1 \wedge \ldots \wedge u x_n, \tag{7}$$

что дает классическое определение внешней степени линейного отображения ([2], § 5). Таким образом, отображение

$$(u_1, \ldots, u_n) \to u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$$

может быть также определено как n-линейное симметричное отображение $(L(E, F))^n$ в $L(\overset{n}{\wedge} E, \overset{n}{\wedge} F)$, соответствующее одночленной функции n-й степени $u \to \overset{n}{\wedge} u$ (Введение, § 2). Если u_i—простые тензоры вида

$$u_i = a_i' \otimes b_i \qquad (a_i' \in E',\ b_i \in F),$$

то

$$\bigotimes_i u_i = A' \otimes B, \quad \text{где } A' = \bigotimes_i a_i',\ B = \bigotimes_i b_i,$$

и (6) дает[1])

$$\wedge u_i = \frac{1}{n!}({}^t a_n A') \otimes (\varphi_n B) = \frac{1}{n!}\varphi_n A' \otimes \varphi_n B,$$

т. е.

$$(a_1' \otimes b_1) \wedge \ldots \wedge (a_n' \otimes b_n) = \frac{1}{n!}(a_1' \wedge \ldots \wedge a_n') \otimes (b_1 \wedge \ldots \wedge b_n). \tag{8}$$

С помощью формулы (8) можно находить внешние произведения любых операторов конечного ранга; для других операторов это и не потребуется в дальнейшем.

Рассмотрим более общий случай; пусть дано k пар целых чисел (p_i, q_i) $(i = 1, \ldots, k)$ и для каждого i — линейное отображение U_i произведения $\overset{p_i}{\wedge} E$ в $\overset{q_i}{\wedge} F$; внешним произведением отображений U_i (обозначаемым $U_1 \wedge \ldots \wedge U_k$ или $\bigwedge_i U_i$) называют линейное отображение $\overset{p}{\wedge} E$ в $\overset{q}{\wedge} F$ (где $p = \sum p_i$, $q = \sum q_i$) такое, что

$$U_1 \wedge \ldots \wedge U_k = \frac{1}{p!/p_1! \ldots p_k!} \varphi \circ (U_1 \otimes \ldots \otimes U_k) \circ a, \tag{9}$$

где φ — естественный гомоморфизм $\bigotimes_{1 \leq i \leq k} \overset{q_i}{\wedge} F$ на $\overset{q}{\wedge} F$, полученный из k-линейного отображения $(X_1, \ldots, X_k) \to X_1 \wedge \ldots \wedge X_k$ произведения $\prod_{1 \leq i \leq k} \overset{q_i}{\wedge} F$ в $\overset{q}{\wedge} F$, а a — естественный изоморфизм $\overset{p}{\wedge} E$ в $\bigotimes_{1 \leq i \leq k} \overset{p_i}{\wedge} E$, сопряженный к которому определяет естественный гомоморфизм $\bigotimes_{1 \leq i \leq k} \overset{p_i}{\wedge} E'$ на $\overset{p}{\wedge} E'$. Если U_i — простые тензоры вида $U_i = X_i' \otimes Y_i$ $(X_i' \in \overset{p_i}{\wedge} E',\ Y_i \in \overset{q_i}{\wedge} F)$, то получаем непосредственно явное выражение

$$(X_1' \otimes Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_k' \otimes Y_k) = \frac{1}{p!/p_1! \ldots p_k!}(X_1' \wedge \ldots \wedge X_n') \otimes (Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n). \tag{10}$$

Из этой формулы снова видно, что внешнее произведение отображений U_i *коммутативно* (т. е. не зависит от порядка сомножителей) и *ассоциативно*, т. е. если $1 \leqslant \alpha < \beta < \ldots < \gamma < k$, то

$$U_1 \wedge U_2 \wedge \ldots \wedge U_k =$$
$$= (U_1 \wedge \ldots \wedge U_\alpha) \wedge (U_{\alpha+1} \wedge \ldots \wedge U_\beta) \wedge \ldots \wedge (U_{\gamma+1} \wedge \ldots \wedge U_k) \tag{11}$$

(по крайней мере в случае, когда U_i конечного ранга, и, в частности, когда E конечномерно; но, как легко убедиться, общий случай легко сводится к этому случаю).

---

[1]) ${}^t a_n$ обозначает оператор в $\overset{n}{\otimes} E'$, сопряженный к оператору a_n. — *Прим. ред.*

Предложение 1. *Пусть $u \in L_f(E, F)$; тогда $\overset{n}{\wedge} u = 0$, если $n >$ ранга отображения u.*

В самом деле, значение $\overset{n}{\wedge} u$ для простого мультивектора $\underset{i}{\wedge} x_i$ равно внешнему произведению n векторов ux_i, и так как последние расположены в векторном пространстве размерности $< n$, то это значение равно нулю.

Следствие. *Пусть $u_i \in L_f(E, F)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Если k из отображений u_i совпадают с одним и тем же оператором ранга $< k$, то $\underset{i}{\wedge} u_i = 0$.*

В самом деле, в силу отмеченных выше коммутативности и ассоциативности внешнего произведения, имеем

$$\wedge u_i = (\overset{k}{\wedge} u) \wedge V,$$

где V — линейное отображение $\overset{n-k}{\wedge} E$ в $\overset{n-k}{\wedge} F$. Поскольку $\overset{k}{\wedge} u = 0$, получаем требуемое следствие.

§ 2. Фундаментальные формы.

Определение 1. *Пусть E — векторное пространство. Фундаментальной n-линейной формой на $(L_f(E))^n$ (n — целое число > 0) называют линейную симметричную форму α_n на $(L_f(E))^n$, определенную равенством*

$$\alpha_n(u_1, \ldots, u_n) = \operatorname{Tr} u_1 \wedge \ldots \wedge u_n. \tag{1}$$

Поскольку отображение $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ конечного ранга, его след вполне определен. Формулы (2) и (8) § 1 в случае простых u_i дают

$$\alpha_n(x_1' \otimes x_1, \ldots, x_n' \otimes x_n) = \frac{1}{n!} \det(\langle x_i, x_j' \rangle) \tag{2}$$

или, если каждое u_i имеет вид $u_i = \sum_{\rho_i} x'^i_{\rho_i} \otimes x^i_{\rho_i}$,

$$\alpha_n(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho_1, \ldots, \rho_n} \det(\langle x^i_{\rho_i}, x'^j_{\rho_j} \rangle). \tag{3}$$

Если $u_1 = \ldots = u_n = u$, то вместо $\alpha_n(u, \ldots, u)$, где α_n — симметричная n-линейная форма, пишут коротко $\alpha_n(u)$; таким образом,

$$\alpha_n(u) = \operatorname{Tr} \overset{n}{\wedge} u \text{ и, в частности, } \alpha_1(u) = \operatorname{Tr} u. \tag{4}$$

Наконец, уславливаются считать

$$\alpha_0(u) = 1 \text{ (единичный элемент тела } k). \tag{5}$$

Отметим формулу

$$\alpha_n(Au_1, \ldots, Au_n) = \alpha_n(u_1A, \ldots, u_nA) \quad [u_i \in L_f(E),\ A \in L(E)], \tag{6}$$

которая для простых u_i проверяется непосредственно с помощью (2), если принять во внимание соотношения

$$A \circ (x' \otimes x) = x' \otimes Ax, \qquad (x' \otimes x) \circ A = ({}^tAx') \otimes x.$$

В случае, когда A обратимо, формула (6) может быть записана следующим образом:

$$\alpha_n(Au_1A^{-1}, \ldots, Au_nA^{-1}) = \alpha_n(u_1, \ldots, u_n),$$

откуда видно, что α_n инвариантно относительно автоморфизмов пространства E, что, впрочем, тривиально. Таким же путем доказывается следующая формула [совпадающая с (6) в случае, когда E конечномерно]:

$$\alpha_n(uA_1, \ldots, uA_n) = \alpha_n(A_1u, \ldots, A_nu), \quad [u \in L_f(E),\ A_i \in L(E)]. \tag{7}$$

Поскольку $L_f(E) = E' \otimes E$, n-линейная форма α_n на $L_f(E)$ может быть также отождествлена с линейной формой на $\overset{n}{\otimes}(E' \otimes E)$, т. е. с $2n$-линейной формой на $E^n \times E'^n$, сводящейся к $\det(\langle x_i, x'_j\rangle)/n!$. Последняя альтернирует относительно $x_1, \ldots, x_n$ и относительно $x'_1, \ldots, x'_n$; мы будем говорить, что n-линейная форма на $(L_f(E))^n$ является *биальтернирующей*, если определяемая ею $2n$-линейная форма на $E^n = E'^n$ альтернирует одновременно относительно x_i и относительно x'_i. Очевидно, что такая n-линейная форма будет вместе с тем симметричной (для доказательства надо рассмотреть ее значения для $u_i = x'_i \otimes x_i$). Тогда из аксиоматического определения тензорного и внешнего произведений непосредственно ясно, что n-линейные биальтернирующие формы $f(u_1, \ldots, u_n)$ на $(L_f(E))^n$ соответствуют взаимно однозначно линейным формам g на $\overset{n}{\wedge} E' \otimes \overset{n}{\wedge} E$:

$$f(u_1, \ldots, u_n) = g(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n). \tag{8}$$

В частности, если $A \in L(\overset{n}{\wedge} E)$, то $\operatorname{Tr}(A \circ (u_1 \wedge \ldots \wedge u_n))$ есть биальтернирующая n-линейная форма на $(L_f(E))^n$, и этим путем получаются все биальтернирующие n-линейные формы, если E конечномерно. Если $A = 1$ (тождественный оператор на $\overset{n}{\wedge} E$), то получаем снова $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$.

Предложение 2. *С точностью до постоянного множителя $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$ является единственной биальтернирующей n-линейной формой на $(L_f(E))^n$, удовлетворяющей условию*

$$\alpha_n(Au_1, \ldots, Au_n) = \alpha_n(u_1A, \ldots, u_nA), \quad [A,\ u_i \in L_f(E)].$$

В самом деле, α_n биальтернирует и удовлетворяет (6) при любом $A \in L(E)$ (не обязательно конечного ранга). Обратно, пусть f—n-линейная форма, удовлетворяющая условиям предложения; тогда она определена линейной формой g на $\overset{n}{\wedge} E' \otimes \overset{n}{\wedge} E$ посредством формулы (8). При этом g будет удовлетворять условию

$$g(BU) = g(UB), \quad [U = \bigwedge_i u_i,\ B = \overset{n}{\wedge} A,\ A,\ u_i \in L_f(E)] \tag{9}$$

(в чем можно убедиться, проверяя для простых тензоров u_i формулы

$$Au_1 \wedge \ldots \wedge Au_n = (\overset{n}{\wedge} A)(\bigwedge_i u_i), \quad u_1A \wedge \ldots \wedge u_nA = (\bigwedge_i u_i)(\overset{n}{\wedge} A),$$

которые будут справедливы и для операторов бесконечного ранга). Формула (9), очевидно, справедлива для любого $U \in \overset{n}{\wedge} E' \otimes \overset{n}{\wedge} E$ и для любой линейной комбинации B операторов вида $\overset{n}{\wedge} A\,[A \in L_f(E)]$. Но по известному свойству одночленов, ассоциированных с симметричной функцией [Введение, § 2, формула (8)], среди этих линейных комбинаций имеются все операторы вида $B = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ $[A_i \in L_f(E)]$; поэтому формула (9) остается справедливой для таких операторов B и, следовательно, для всех $B \in \overset{n}{\wedge} E' \otimes \overset{n}{\wedge} E$. Если E конечномерно и $F = \overset{n}{\wedge} E$, то g есть линейная форма на $L(F)$, тождественно удовлетворяющая (9); таким образом, g пропорциональна следу и f пропорциональна α_n. Это заключение остается в силе и в случае, когда E произвольной размерности; в самом деле, подсчет значения $f(u_1, \ldots, u_n)$ для заданных u_i связан только с конечным числом операторов u_i конечного ранга; следовательно, доказательство рассматриваемого предложения сводится к его доказательству для операторов u_i, отображающих E в фиксированное *конечномерное пространство* N и обращающихся в нуль на дополнительном пространстве M (так что E представляется в виде прямой суммы M и N); но такие операторы соответствуют взаимно однозначно операторам в пространстве N, так что f определяет n-линейную форму на $(L(N))^n$, обладающую свойствами f и потому пропорциональную α_n. При этом очевидно, что коэффициент пропорциональности не изменяется, если увеличивать N и уменьшать M, и потому является постоянным. Отметим попутно, что таким же образом доказывается, что α_n есть единственная биальтернирующая n-линейная форма на $(L_f(E))^n$, инвариантная относительно автоморфизмов пространства E. [В случае, когда E конечномерно, это означает, что условие предложения 2 выполняется для *обратимых* $A \in L(E)$.]

Отметим, что, в силу определения 1 и следствия из предложения 1, форма $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$ обращается в нуль всякий раз, когда k из операторов u_i совпадают с одним и тем же оператором u, ранг которого $< k$.

§ 3. Тейлорово разложение для $\det(1+u)$. Пусть E имеет конечную размерность m; тогда α_n равны нулю для $n > m$, ибо в этом случае $\bigwedge^n E$, а потому и $\bigwedge^n u$ суть нули. Для $n=m$ из определений α_n и определителя ([2], § 6) получаем

$$\alpha_m(u) = \det u \qquad (m = \dim E). \tag{1}$$

Имеем также

$$\alpha_n(1) = \dim \bigwedge^n E$$

(где 1 — тождественный оператор в E), откуда

$$\alpha_n(1) = \binom{m}{n} \qquad (m = \dim E). \tag{2}$$

Предложение 3. *Пусть E — векторное пространство размерности m; тогда*

$$\alpha_n(u_1, \ldots, u_p, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-p}) = \left(\binom{m}{n} \Big/ \binom{m}{p}\right) \alpha_p(u_1, \ldots, u_p). \tag{3}$$

В самом деле, левая часть есть p-линейная форма на $(L(E))^p$, которая удовлетворяет, очевидно, условиям предложения 2 (по крайней мере для случая обратимых A, которым можно ограничиться в силу принципа продолжения алгебраических тождеств) и пропорциональна $\alpha_p(u_1, \ldots, u_p)$; значение коэффициента пропорциональности получается, если положить $u_1 = \ldots = u_p = 1$ и применить формулу (2).

Следствие. *Для оператора u в E имеет место фундаментальная формула*

$$\det(1+u) = \sum_0^\infty \alpha_n(u) \tag{4}$$

(где сумма в правой части фактически конечна, ибо $\alpha_n(u)$ равны нулю для $n > m$). В самом деле, имеем формулу бинома

$$\det(1+u) = \alpha_m(1+u) = \sum_{0 \leq p \leq m} \binom{m}{p} \alpha_m(\underbrace{u, \ldots, u}_{p}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-p}),$$

откуда, в силу (3), и получается (4).

Отметим теперь, что если E — векторное пространство конечной или бесконечной размерности, а u — оператор конечного ранга m в E, то $\alpha_n(u)$ равно нулю для $n > m$, и правая часть в (4) есть конечная сумма, которую мы принимаем за *определение* $\det(1+u)$ в этом общем случае. Ясно, что это является также определителем сужения отображения $1+u$ на всякое векторное подпространство F пространства E, содержащее $u(E)$ [ибо из формулы (2) § 2 видим, что $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$ не изменяется, если взять сужение операторов u_i на векторное подпространство F пространства E, содержащее $u_i(E)$]. Отсюда заключаем, что обычные свойства определителя остаются в силе и, в частности, имеем

$$\det(1+u)(1+v) = \det(1+u)\det(1+v), \quad [u, v \in L_f(E)]. \tag{5}$$

[Заметить, что $(1+u)(1+v)$ имеет вид $1+w$, где $w=u+v+uv$ есть оператор конечного ранга.]

Предположим для простоты, что E конечномерно, и обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ собственные значения оператора u в алгебраически замкнутом расширении тела k. Тогда, как известно,

$$\det(1+zu) = (1+\lambda_1 z)\ldots(1+\lambda_n z)$$

(в чем можно убедиться, беря u в виде матрицы, наддиагональные элементы которой равны нулю); сравнивая с (4) и приравнивая друг другу полиномы $\det(1+zu)$ и $\prod_i (1+z\lambda_i)$ аргумента z, находим

$$\alpha_n(u) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_n}. \tag{6}$$

§ 4. $\boldsymbol{D^p(u)}$ **и** $\boldsymbol{R^p(u)}$. Теперь уместно ввести p-ю производную функции $u \to \alpha_n(u)$, являющуюся одночленом степени $n-p$, отображающим $L_f(E)$ в пространство симметричных p-линейных форм на $(L_f(E))^p$, заданных формулой

$$\alpha_n^p(u)(v_1, \ldots, v_p) = \frac{n!}{(n-p)!}\alpha_n(\underbrace{u, \ldots, u}_{n-p}, v_1, \ldots, v_p) \tag{1}$$

(см. Введение, § 3). Ей соответствует симметричное $(n-p)$-линейное отображение $(u_1, \ldots, u_{n-p}) \to \alpha_n^p(u_1, \ldots, u_{n-p})$, определенное формулой

$$\alpha_n^p(u_1, \ldots, u_{n-p})(v_1, \ldots, v_p) = \frac{n!}{(n-p)!}\alpha_n(u_1, \ldots, u_{n-p}, v_1, \ldots, v_p). \tag{2}$$

Если положить для краткости

$$D(u) = \det(1+u), \tag{3}$$

то естественно рассматривать в качестве «p-й производной» функции $u \to D(u)$ отображение $u \to D^p(u)$ пространства $L_f(E)$ в пространство симметричных p-линейных форм на $(L_f(E))^p$ такое, что

$$D^p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p(u), \tag{4}$$

т. е.

$$D^p(u)(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^p(u)(v_1, \ldots, v_p) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!}\alpha_n(\underbrace{u, \ldots, u}_{n-p}, v_1, \ldots, v_p). \tag{5}$$

Правые части этих формул имеют определенный смысл, ибо член ранга n равен нулю для $n-p >$ ранга u (так что в действительности приходится брать конечные суммы). Производные $\alpha_n^p(u)(v_1, \ldots, v_p)$, а потому также и $D^p(u)$ представляют собой p-линейные *биальтернирующие* (см. выше § 2) формы на $(L_f(E))^p$. Имеют место тейлоровы разложения

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n(u+v) &= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\alpha_n^p(u)(v, \ldots, v), \\ D(u+v) = \det(1+u+v) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(u)(\underbrace{v, \ldots, v}_{n-p}). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Первое есть не что иное, как формула бинома, а второе получается из первого на основании определений. Имеет место более общее тейлорово разложение для $D^p(u+v)$, которое мы не будем выписывать.

Представим эти результаты в несколько иной форме. Пусть p и n — заданные целые числа, $p>0$, $n \geqslant 0$, а $u_1, \ldots, u_n$; $v_1, \ldots, v_{p-1}$ — заданные элементы из $L_f(E)$; рассмотрим линейную форму

$$v \longrightarrow \alpha_{n+p}^p(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v) = \frac{(n+p)!}{n!}\alpha_{n+p}(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_{p-1}, v)$$

на $L_f(E)$. Если E конечномерно, то она имеет вид $v \longrightarrow \operatorname{Tr} Av$, где A — вполне определенный элемент из $L(E)$. Но это остается справедливым и в случае, когда E произвольной размерности, т. е. (в измененных обозначениях) функция $v \longrightarrow \alpha_{m+1}(w_1, \ldots, w_m, v)$ имеет вид $\operatorname{Tr} Av$, где A — некоторый надлежащим образом выбранный элемент из $L(E)$. Чтобы в этом убедиться, можно взять w_i в виде

$$w_i = x_i' \otimes x_i,$$

и тогда для $v = x' \otimes x$ [формула (2), § 2] будем иметь

$$\alpha_{m+1}(w_1, \ldots, w_m, v) = \\ = \frac{1}{(m+1)!}\det\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1'\rangle & \ldots & \langle x_1, x_m'\rangle & \langle x_1, x'\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle x_m, x_1'\rangle & \ldots & \langle x_m, x_m'\rangle & \langle x_m, x'\rangle \\ \langle x, x_1'\rangle & \ldots & \langle x, x_m'\rangle & \langle x, x'\rangle \end{pmatrix} = \operatorname{Tr} Av, \tag{7}$$

где $A \in L(E)$ задан символически определителем

$$A = \frac{1}{(m+1)!}\det\begin{pmatrix} & M & & x_1 \\ & & & \vdots \\ & & & x_m \\ x_1' & \ldots & x_m' & 1 \end{pmatrix}, \qquad M = (\langle x_i, x'\rangle)^{1)}. \tag{8}$$

Формула

$$\alpha_{m+1}(w_1, \ldots, w_m, v) = \operatorname{Tr} Av$$

остается справедливой для любого $v \in L_f(E)$, откуда и вытекает наше утверждение.

Возвращаясь к $\alpha_{n+p}^p(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v)$, мы можем определить без всякой двусмысленности элемент $R_n^p(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1})$ из $L(E)$ формулой

$$\operatorname{Tr} vR_n^p(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}) = \alpha_{n+p}^p(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v) = \\ = \frac{(n+p)!}{n!}\alpha_{n+p}(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_{p-1}, v); \tag{9}$$

---

[1]) Определитель обозначает очевидным образом разложение вида

$$\det M1 + \sum_{i,j} \mu_{ij} x_i' \otimes x_j.$$

при этом R_n^p будет рассматриваться как симметричное n-линейное отображение пространства $(L_f(E))^n$ в пространство симметричных $(p-1)$-линейных отображений $(L_f(E))^{p-1}$ в $L(E)$. Таким образом, для $R_n^p(u)=R_n^p(\underbrace{u, \ldots, u}_{})$ определяющей формулой будет

$$\operatorname{Tr} vR_n^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}) = \alpha_{n+p}^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v) =$$
$$= \frac{(n+p)!}{n!}\alpha_{n+p}(\underbrace{u, \ldots, u}_{n}, v_1, \ldots, v_{p-1}, v). \tag{10}$$

Положим, наконец, для любого $u \in L_f(E)$

$$R^p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^p(u); \tag{11}$$

говоря подробнее, $R^p(u)$ есть $(p-1)$-линейное отображение $(L_f(E))^{p-1}$ в $L(E)$, заданное формулой

$$R^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}). \tag{12}$$

Суммы в (11) и (12) являются в действительности конечными, ибо из (10) видно, что $R_n^p(u)$ есть нуль, если $n >$ ранга u. Из формул (5) и (10) тотчас получаем

$$\operatorname{Tr} vR^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}) = D^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v) \quad (p \geqslant 1), \tag{13}$$

что позволяет определить $R^p(u)$, исходя из $D^p(u)$. При $p=0$ естественно положить

$$R_n^0(u_1, \ldots, u_n) = \alpha_n(u_1, \ldots, u_n)\mathbf{1}, \text{ откуда } R_n^0(u) = \alpha_n(u)\,\mathbf{1}, \tag{14}$$
$$R^0(u) = D(u)\,\mathbf{1} \qquad [= \det(\mathbf{1}+u)\,\mathbf{1}]; \tag{15}$$

$R_n^1(u)$ и $R^1(u)$ для данного u — вполне определенные элементы из $L(E)$. Ввиду их важной роли, значок 1 мы будем отбрасывать, так что

$$\left.\begin{aligned} &R(u) = R^1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(u), \\ &\operatorname{Tr} vR_n(u_1, \ldots, u_n) = (n+1)\alpha_{n+1}(u_1, \ldots, u_n, v), \\ &\operatorname{Tr} vR(u) = D^1(u)\,v. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

§ 5. Общие рекуррентные соотношения. Формулы Фредгольма. Следующая формула, выражающая α_{m+1} с помощью α_m, позволяет развить теорию Фредгольма.

Предложение 4. *Пусть* $u_1, \ldots, u_n, v$ — *элементы из* $L_f(E)$; *тогда*

$$(n+1)\,\alpha_{n+1}(u_1, \ldots, u_n, v) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} \alpha_n(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i v, u_{i+1}, \ldots, u_n) + \alpha_n(u_1, \ldots, u_n)\operatorname{Tr} v =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} \alpha_n(u_1, \ldots, u_{i-1}, vu_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) + \alpha_n(u_1, \ldots, u_n)\operatorname{Tr} v. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу (1) для

$$u_i = x_i' \otimes x_i, \quad v = x' \otimes x,$$

но тогда она сводится (с точностью до обозначений и до сомножителя $1/n!$) к формуле разложения определителя в правой части (7) § 4 по элементам последней строки (соответственно последнего столбца), ибо

$$u_i \circ v = \langle x, x_i' \rangle x' \otimes x_i, \quad v \circ u_i = \langle x_i, x' \rangle x_i' \otimes x.$$

Следствие 1. *Для любого* $u \in L_f(E)$ *имеем*

$$R_n(u) = \alpha_n(u)\, 1 - uR_{n-1}(u) = \alpha_n(u)\, 1 - R_{n-1}(u)\, u \tag{2}$$

и вообще

$$\begin{aligned} R_n^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p) &= -uR_{n-1}^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p) + \\ &+ \alpha_{n+p}^p(u)(v_1, \ldots, v_p)\, 1 - \sum_{i=1}^n v_i R_n^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p) = \\ &= -(R_{n-1}^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p))\, u + \\ &+ \alpha_{n+p}^p(u)(v_1, \ldots, v_p)\, 1 - \sum_{i=1}^p (R_n^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p))\, v_i, \end{aligned} \tag{3}$$

каковы бы ни были целые числа $n > 0$, $p \geqslant 0$ (*знак* ^ *над* v_i *означает, что этот член должен быть пропущен*).

Докажем, например, равенство первых двух частей формулы (3). По формуле (1) и определению $R_n^q(u)$ [§ 4, формула (10)] произведения этих частей на $v \in L_f(E)$ слева имеют одинаковые следы, и отсюда выводится искомое равенство. Кроме того, это рассуждение показывает, что формулы (2) и (3) остаются справедливыми для $n = 0$, если условиться считать $R_{-1}^q(u) = 0$. Суммируя выражения в каждой из трех частей формулы (2) [соответственно (3)] для $n = 0, 1, \ldots$, получаем следующее следствие, содержащее сущность теории Фредгольма.

Следствие 2. *Для любого* $u \in L_f(E)$ *имеем*

$$(1 + u)\, R(u) = R(u)(1 + u) = \det(1 + u)\, 1 \tag{4}$$

и вообще ($p \geqslant 0$)

$$\left.\begin{aligned} &(1 + u)\, R^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p) = \\ &\quad = (D^p(u)(v_1, \ldots, v_p))\, 1 - \sum_{i=1}^p v_1 R^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p), \\ &(R^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p))(1 + u) = \\ &\quad = (D^p(u)(v_1, \ldots, v_p))\, 1 - \sum_{i=1}^p (R^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p))\, v_i. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из рекуррентных формул (2) выводится выражение для $R_n(u)$ [$R_0(u) = 1$ по второй формуле (16), § 4]

$$\left.\begin{aligned} &R_0(u) = 1, \quad R_1(u) = (\operatorname{tr} u)\, 1 - u, \ \ldots, \\ &R_n(u) = \alpha_n(u)\, 1 - \alpha_{n-1}(u)\, u + \alpha_{n-2}(u)\, u^2 - \ldots + (-1)^n u^n. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Можно было бы, отправляясь от формулы (6) или непосредственно от (1), найти явное выражение для $\alpha_n(u)$ через степени следа $\operatorname{Tr} u$, но мы получим это выражение попутно в гл. II. [§ 3 формула (5)].

Предположим, что E имеет размерность m; для любого $z \in k$ будем иметь

$$\det(z1 - u) = z^m \det\left(1 - \frac{1}{z} u\right) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \alpha_n(u)\, z^{m-n} = P(z)$$

[§ 3, формула (4)], где P — многочлен степени m аргумента z, известный под названием *характеристического многочлена* отображения u. На основании (6) видим, что

$$(-1)^m R_m(u) = P(u),$$

откуда $P(u) = 0$ [ибо $R_m(u) = 0$ по второй формуле (16), § 4]. Если E бесконечной размерности, то $R_m(u)$ обращается в нуль для *достаточно больших* m.

Предложение 5. *Пусть u — оператор конечного ранга в E. Для того чтобы $1+u$ было обратимо, необходимо и достаточно, чтобы $\det(1+u) \neq 0$, и в этом случае имеет место формула Фредгольма*

$$\begin{aligned}(1+u)^{-1} &= \frac{1}{\det(1+u)} R(u) = \\ &= 1 - \frac{u}{\det(1+u)} R(u) = \\ &= 1 - u + u^2 - \ldots - (-1)^{n-1} u^{n-1} + \frac{(-1)^n u^n}{\det(1+u)} R(u).\end{aligned} \tag{7}$$

Если $A(1+u) = 1$, то $A = 1 - Au = 1 + v$, где $v = -Au \in L_f(E)$. Но из $(1+u)(1+v) = 1$ получаем, переходя к определителям, что

$$\det(1+u)\det(1+v) = 1,$$

откуда вытекает, что $\det(1+u) \neq 0$. Обратно, если это условие выполнено, то (4) означает, что вторая часть формулы (7), имеющая тогда смысл, является обращением оператора $(1+u)$. Принимая во внимание этот результат, видим, что произведение последней части формулы (7) на $(1+u)$ совпадает с $1 + (-1)^{n-1} u^n + (-1)^n u^n = 1$, чем доказательство и заканчивается.

Таким образом, приходим к тому, что собственные значения оператора u — нули полинома относительно $z \det(1 - zu)$. Используя формулу (5) вместо (4), можно было бы также просто рассмотреть случай, когда $\det(1+u) = 0$. Чтобы избежать повторений, мы ограничимся тем, что сделаем это в гл. II, § 4, там, где рассматриваются операторы Фредгольма.

§ 6. Тензоры $d^p(u)$ и $r^p(u)$. Формулы (6) и (7) § 2 непосредственно дают, в силу определений, две группы формул коммутирования

$$\left.\begin{aligned}\alpha^p_{n+p}(Au)(Av_1, \ldots, Av_p) &= \alpha^p_{n+p}(uA)(v_1 A, \ldots, v_p A), \\ R^p_n(Au)(Av_1, \ldots, Av_{p-1}) &= R^p_n(uA)(v_1 A, \ldots, v_{p-1} A), \\ D^p(Au)(Av_1, \ldots, Av_p) &= D^p(uA)(v_1 A, \ldots, v_p A), \\ R^p(Au)(Av_1, \ldots, Av_{p-1}) &= R^p(uA)(v_1 A, \ldots, v_{p-1} A);\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha^p_{n+p}(uA)(uA_1, \ldots, uA_p) &= \alpha^p_{n+p}(Au)(A_1 u, \ldots, A_p u), \\ R^p_n(uA)(uA_1, \ldots, uA_{p-1}) &= R^p_n(Au)(A_1 u, \ldots, A_{p-1} u), \\ D^p(uA)(uA_1, \ldots, uA_p) &= D^p(Au)(A_1 u, \ldots, A_p u), \\ R^p(uA)(uA_1, \ldots, uA_{p-1}) &= R^p(Au)(A_1 u, \ldots, A_p u),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$[u, v_i \in L_f(E), \quad A, A_i \in L(E)].$$

Положим $A = 1$ в первой и третьей из формул (2); тогда для $u \in L_f(E)$ можно определить p-линейные формы $d^p_n(u)(A_1, \ldots, A_p)$ и $d^p(u)(A_1, \ldots, A_p)$ на $(L(E))^p$ или, что то же самое, линейные формы $d^p_n(u)$ и $d^p(u)$ на $\overset{p}{\otimes} L(E)$

посредством формул

$$\left.\begin{aligned}\langle d_n^p(u), A_1\otimes\ldots\otimes A_p\rangle &= \alpha_{n+p}^p(u)(uA_1, \ldots, uA_p) = \alpha_{n+p}^p(u)(A_1u, \ldots, A_pu),\\ \langle d^p(u), A_1\otimes\ldots\otimes A_p\rangle &= D^p(u)(uA_1, \ldots, uA_p) = D^p(u)(A_1u, \ldots, A_pu).\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Таким образом, имеем

$$d^p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^p(u), \tag{4}$$

причем ряд в правой части является фактически конечным $[d_n^p(u) = 0$, если $n >$ ранга $u]$. В частности,

$$d_n^0(u) = \alpha_n(u), \quad d^0(u) = \det(1+u). \tag{5}$$

На основании (3) непосредственно ясно, что $2p$-линейное отображение

$$\langle d_n^p(u), x_1'\otimes x_1\otimes\ldots\otimes x_p'\otimes x_p\rangle,$$

ассоциированное с $d_n^p(u)$ на $E'^p\times E^p$, является альтернирующим относительно x_i' и относительно x_i; другими словами, рассматриваемое как p-линейная форма на $(E'\otimes E)^p$, отображение $d_n^p(u)$ является *биальтернирующим* (§ 2). То же самое имеет место и для $d^p(u)$.

Теперь можно ввести (в вычислительных целях) более общее $(n+p)$-линейное отображение

$$(u_1, \ldots, u_{n+p}) \longrightarrow \delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$$

пространства $(L_f(E))^{n+p}$ в пространство, сопряженное с $\overset{p}{\otimes} L(E)$, где δ_n^p определено равенством

$$\langle \delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}), A_1\otimes\ldots\otimes A_p\rangle = \alpha_{n+p}^p(u_1, \ldots, u_n)(u_{n+1}A_1, \ldots, u_{n+p}A_p), \tag{6}$$

а также ввести $(n+p)$-линейную *симметризацию* $d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ отображения δ_n^p:

$$d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}) = \frac{1}{(n+p)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+p}} \delta_n^p(u_{\sigma\cdot 1}, \ldots, u_{\sigma(n+p)}). \tag{7}$$

Форма $d_n^p(u)$, определенная согласно (3), есть не что иное, как

$$d_n^p(u) = d_n^p(\underbrace{u, \ldots, u}_{n+p}) = \delta_n^p(\underbrace{u, \ldots, u}_{n+p}). \tag{8}$$

Если $u_i = x_i'\otimes x_i$, то на основании (6) получаем

$$\begin{aligned}&\langle \delta_n^p(x_1'\otimes x_1, \ldots, x_{n+p}'\otimes x_{n+p}), A_1\otimes\ldots\otimes A_p\rangle = \\ &= \frac{1}{n!}\det\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1'\rangle \ldots & \langle x_1, x_n'\rangle\, \langle A_1x_1, x_{n+1}'\rangle & \ldots \langle A_px_1, x_{n+p}'\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle x_{n+p}, x_1'\rangle \ldots & \langle x_{n+p}, x_1'\rangle\, \langle A_1x_{n+p}, x_{n+1}'\rangle & \ldots \langle A_px_{n+p}, x_{n+p}'\rangle\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{9}$$

Свяжем $(\overset{p}{\otimes} E)\otimes(\overset{p}{\otimes} E')$ отделимой двойственностью с $\overset{p}{\otimes} L(E)$ посредством естественного объединения в пары

$$\langle x_1\otimes\ldots\otimes x_p\otimes x_1'\otimes\ldots\otimes x_p', A_1\otimes\ldots\otimes A_p\rangle = \prod_{i=1}^{p}\langle A_ix_i, x_i'\rangle; \tag{10}$$

тогда формула (9) показывает, что $\delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ есть элемент из $(\overset{p}{\otimes} E) \otimes (\overset{p}{\otimes} E')$, записываемый коротко в виде

$$\delta_n^p(x_1' \otimes x_1, \ldots, x_{n+p}' \otimes x_{n+p}) =$$

$$= \frac{1}{n!} \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1' \rangle & \ldots & \langle x_1, x_n' \rangle & \overbrace{x_1 & \ldots & x_1}^{p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle x_{n+p}, x_1' \rangle & \ldots & \langle x_{n+p}, x_n' \rangle & x_{n+p} & \ldots & x_{n+p} \end{pmatrix} \otimes x_{n+1}' \otimes \ldots \otimes x_{n+p}'; \quad (11)$$

здесь det означает элемент из $\overset{p}{\otimes} E$, т. е. тензор, полученный с помощью разложения

$$\det((\alpha_{ij})_{i,j \leq m}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon_\sigma \alpha_{\sigma.1,1} \ldots \alpha_{\sigma.m,m},$$

в котором порядок сомножителей α_{ij} существен, а их произведения в случае, когда некоторые из α_{ij} являются векторами, суть *тензорные* произведения.

Формула (11) позволяет вычислять $\delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ для произвольных аргументов $u_i \in E' \otimes E$; следовательно, в силу линейности, $\delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ всегда является элементом из $(\overset{p}{\otimes} E) \otimes (\overset{p}{\otimes} E')$. Согласно (7) и (8), то же самое имеет место для $d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ и $d_n^p(u)$.

Для последующих оценок нам будет нужно преобразовать выражение (11), группируя в разложении определителя те члены, которые отличаются друг от друга только числовыми коэффициентами $\langle x_{\sigma.1}, x_1' \rangle \ldots \langle x_{\sigma.n}, x_n' \rangle$ и для которых множитель

$$x_{\sigma(n+1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n+p)}$$

один и тот же. Непосредственная выкладка дает

$$\delta_n^p(x_1' \otimes x_1, \ldots, x_{n+p}' \otimes x_{n+p}) =$$

$$= \frac{1}{n!} \Big(\sum_{(i_1, \ldots, i_p)} \varepsilon_{i_1, \ldots, i_p} \det((\langle x_{j_\alpha}, x_{j_\beta}' \rangle)_{\alpha,\beta \leq n}) x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_p} \Big) \otimes x_{n+1}' \otimes \ldots \otimes x_{n+p}', \quad (12)$$

где $(i_1, \ldots, i_p)$ — переменная система различных между собой индексов, принимающих значения от 1 до $n+p$; $j_1, \ldots, j_n$ — возрастающая последовательность отличных от i индексов, заключенных между 1 и $n+p$; $\varepsilon_{i_1 \ldots i_p} = +1$ или -1, смотря по тому, является ли перестановка

$$(1, \ldots, n+p) \to (j_1, \ldots, j_n, i_1, \ldots, i_p)$$

четной или нечетной.

Очевидно, что p-линейные формы на $(L(E))^p$, определенные элементами из $(\overset{p}{\otimes} E) \otimes (\overset{p}{\otimes} E')$, отождествляются с некоторыми $(p-1)$-линейными отображениями $(L(E))^{p-1}$ в $E' \otimes E = L_f(E)$ [рассматриваемое как подпространство пространства, сопряженного с $L(E)$]. Следовательно, если заданы

$$d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}) \in (\overset{p}{\otimes} E) \otimes (\overset{p}{\otimes} E'),$$

то тем самым заданы $(p-1)$-линейные отображения $r_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ пространства $(L(E))^{p-1}$ в $L_f(E)$ такие, что

$$\operatorname{Tr} A_p r_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})(A_1, \ldots, A_{p-1}) =$$

$$= \langle d_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}), A_1 \otimes \ldots \otimes A_p \rangle \quad [u_i \in L_f(E), A_i \in L(E)]. \quad (13)$$

Выражение $r_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ находится в $(n+p)$-линейной симметричной зависимости от u_i, и положив $r_n^p(u) = r_n^p(u, \ldots, u)$, будем иметь

$$\operatorname{Tr} A_p r_n^p(u)(A_1, \ldots, A_{p-1}) = d_n^p(u)(A_1, \ldots, A_p);$$

здесь правая часть по определению равна

$$\alpha_{n+p}^p(u)(uA_1, \ldots, uA_p) = \operatorname{Tr}(R_n^p(u)(uA_1, \ldots, uA_{p-1}))\, uA_p$$

или

$$\alpha_{n+p}^p(u)(A_1 u, \ldots, A_p u) = \operatorname{Tr}(R_n^p(u)(A_1 u, \ldots, A_{p-1} u))A_p u$$

[формула (3) § 6 и формула (10) § 4] и, следовательно,

$$r_n^p(u)(A_1, \ldots, A_{p-1}) = R_n^p(u)(uA_1, \ldots, uA_{p-1})\, u = \\ = uR_n^p(u)(A_1 u, \ldots, A_{p-1} u). \tag{14}$$

Наконец, положим

$$r^p(u) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^p(u) \tag{15}$$

(где сумма в правой части фактически конечна); это будет $(p-1)$-линейное отображение $(L(E))^{p-1}$ в $L_f(E)$, удовлетворяющее соотношению

$$\operatorname{Tr} A_p r^p(u)(A_1, \ldots, A_{p-1}) = d^p(u)(A_1, \ldots, A_p) \tag{16}$$

и связанное с R^p равенством

$$r^p(u)(A_1, \ldots, A_{p-1}) = (R^p(u)(uA_1, \ldots, uA_{p-1}))\, u = \\ = uR^p(u)(A_1 u, \ldots, A_{p-1} u) \tag{17}$$

(последние две формулы получаются сразу из (13) и (14) суммированием по n). В частности, мы будем писать $r_n(u)$ и $r(u)$ вместо $r_n^1(u)$ и $r^1(u)$, чтобы обозначить (u фиксировано) элементы из $L_f(E)$, определенные соотношениями

$$r_n(u) = uR_n(u) = R_n(u)\, u, \quad r(u) = uR(u) = R(u)\, u. \tag{18}$$

A priori рассмотрение D^p и R^p более естественно и более просто, чем рассмотрение d^p и r^p; но эти последние определяют настоящие тензоры и ими легче пользоваться в теории интегральных уравнений, ибо они могут быть выражены через простые «ядра». Отметим сейчас же еще один вид формулы решения Фредгольма [§ 5, формула (7)]:

$$(1+u)^{-1} = 1 - \frac{1}{\det(1+u)} r(u), \tag{19}$$

получающийся на основании равенства $uR(u) = r(u)$ [формула (18)].

Можно было бы легко выразить D^p через d^p, но мы воздержимся от написания соответствующей формулы.

Глава II

ТЕОРИЯ ФРЕДГОЛЬМА В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

Теория, которая следует дальше, является непосредственным применением предыдущих общих алгебраических результатов. Первые четыре параграфа применимы без всяких изменений к полным нормированным пространствам над произвольным v-нормированным полным телом с характеристикой 0 (гл. I соответствует случаю, когда эта нормировка тривиальна). Однако чтобы не затруднять некоторых читателей, мы будем предполагать, что речь идет о полных нормированных пространствах над телом R вещественных чисел или над телом C комплексных чисел, т. е. о пространствах Банаха.

Пусть E — банахово пространство; тогда E' будет обозначать пространство, сопряженное с E топологически, т. е. пространство линейных ограниченных форм на E, наделенное своей естественной нормой. Пусть дано еще одно банахово пространство F; через $L(E, F)$ мы будем обозначать пространство линейных непрерывных отображений E в F, а через $B(E, F)$ — пространство билинейных непрерывных форм на $E \times F$; оба эти пространства наделены хорошо известными естественными нормами.

§ 1. Топологическое тензорное произведение пространств Банаха. Пусть E_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — банаховы пространства ($n \geqslant 2$). Введем, следуя Р. Шаттену [8], норму $u \to \|u\|_1$ в тензорном произведении $\otimes E_i$ пространств E_i:

$$\|u\|_1 = \inf \sum_i \|x_1^i\| \cdot \|x_2^i\| \ldots \|x_n^i\|, \tag{1}$$

где inf берется по всем конечным последовательностям $(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ в $\prod_i E_i$ таким, что

$$u = \sum_i x_1^i \otimes x_2^i \otimes \ldots \otimes x_n^i.$$

Непосредственно ясно, что $\|u\|_1$ есть полунорма в $\otimes E_i$; покажем, что это есть норма. Пусть F — какое-либо банахово пространство и A — линейное отображение $\otimes E_i$ в F, непрерывное в смысле полунормы $\|u\|_1$; тогда соответствующее мультилинейное отображение $\tilde{A}$

$$\tilde{A}(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$$

является непрерывным, и его норма $\leqslant \|A\|$, ибо очевидно, что

$$\|x_1 \otimes \ldots \otimes x_n\|_1 \leqslant \|x_1\| \ldots \|x_n\|.$$

Обратно, если A — линейное отображение $\otimes E_i$ в F такое, что $\tilde{A}$ непрерывно, то, согласно определению (1), A непрерывно и имеет норму $\leqslant \|\tilde{A}\|$. Отсюда вытекает, что если $u \in \otimes E_i$ и $\|u\|_1 = 0$, то всякое линейное отображение произведения $\otimes E_i$ в банахово пространство F, определенное *непрерывным* мультилинейным отображением $\prod_i E_i$ в F, обращается в нуль на u. В частности, это будет иметь место для линейных форм, определенных элементами из $\otimes E_i'$. Но, в силу теоремы Хана — Банаха[1]), пространства E_i и E_i' находятся в отделимой двойственности; следовательно, это будет иметь место также для пространств $\otimes E_i$ и $\otimes E_i'$, откуда вытекает, что u есть нуль. Теперь мы можем сформулировать

Определение 1. *Пусть E_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — банаховы пространства. Полным тензорным произведением пространств E_i называют банахово пространство $\hat{\bigotimes}_{1 \leqslant i \leqslant n} E_i$, получающееся пополнением пространства $\bigotimes_{1 \leqslant i \leqslant n} E_i$ по норме $\|u\|_1$, определенной согласно* (1). *Элементы пространства $\hat{\otimes} E_i$ называются ядрами Фредгольма.*

Попутно нами получена

[1]) Особенно теорема Хана — Банаха кажется необходимой для доказательства того, что мы имеем истинную норму; я не знаю, будет ли это так, если перейти к полным нормированным пространствам над произвольным v-нормированным полным телом. Если нет, то можно условиться рассматривать фактор-пространство (наделенное фактор-нормой) произведения $\bigotimes_i E_i$ по подпространству элементов нулевой нормы как истинное топологическое тензорное произведение пространств E_i.

Теорема 1. *Пусть F и E_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — банаховы пространства; существует канонический изоморфизм (изоморфизм нормированных векторных пространств) между пространством непрерывных n-линейных отображений произведения $\prod E_i$ в F и пространством непрерывных линейных отображений тензорного произведения $\hat{\otimes} E_i$ в F.*

Эта теорема оправдывает даваемое произведению $\hat{\otimes} E_i$ название топологического тензорного произведения.

Следствие. *Пространство, сопряженное с $\hat{\otimes} E_i$, изоморфно (как нормированное пространство) пространству непрерывных n-линейных форм на $\prod E_i$.*

Легко убедиться либо непосредственно, либо с помощью теоремы 1, что операция «полного тензорного умножения» является ассоциативной (с точностью до канонического изоморфизма). Более того, если $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (группа перестановок из $1, 2, \ldots, n$), то ему канонически соответствует изоморфизм произведения $\hat{\otimes} E_i$ на $\hat{\otimes} E_{\sigma.i}$, обозначаемый снова через σ, заданный на простых тензорах формулой

$$\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma.1} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma.n}.$$

Пусть теперь E и F — два банаховых пространства; существует естественный изоморфизм $u \to \tilde{u}$ произведения $E' \otimes F$ в $L(E, F)$, образ которого есть множество непрерывных линейных отображений конечного ранга пространства E в F. Соответствующее ему билинейное отображение $(x', y) \to x' \otimes y$ произведения $E' \times F$ в $L(E, F)$ имеет норму $\leqslant 1$, и потому отображение $u \to \tilde{u}$ может быть продолжено по непрерывности в линейное отображение (которое будет снова записываться в виде $u \to \tilde{u}$) с нормой $\leqslant 1$ топологического тензорного произведения $E' \hat{\otimes} F$ в $L(E, F)$ (теорема 1):

$$\|\tilde{u}\| \leqslant \|u\|_1. \tag{2}$$

Определение 2. *Пусть E и F — банаховы пространства. Отображением Фредгольма (или ядерным отображением, или отображением со следом) пространства E в F называют отображение, принадлежащее образу произведения $E' \hat{\otimes} F$ при каноническом отображении последнего в $L(E, F)$. Совокупность отображений Фредгольма пространства E в F отождествляется, таким образом, с некоторым фактор-пространством произведения $E' \hat{\otimes} F$. Фактор-норма называется t-нормой и обозначается снова через $\|u\|_1$.*

Во всех известных случаях отображение $u \to \tilde{u}$ произведения $E' \hat{\otimes} F$ в $L(E, F)$ взаимно однозначно; тогда пространство отображений Фредгольма E в F отождествляется с $E' \hat{\otimes} F$ (нормированным, как указано выше), а на $E' \otimes F$ t-норма совпадает с нормой, индуцированной посредством $E' \hat{\otimes} F$. К сожалению, неизвестно, так ли обстоит дело в общем случае[1]), и это требует иногда некоторых предосторожностей. Во всех случаях, когда $u \in E' \hat{\otimes} F$, $x \in E$, мы будем обыкновенно писать ux или $u.x$ вместо $\widetilde{u}x$, что, очевидно, допустимо.

Пусть E_i, F_i ($i = 1, 2$) — банаховы пространства, u_i — непрерывное линейное отображение E_i в F_i ($i = 1, 2$); тогда $u_1 \otimes u_2$ есть линейное отображение $E_1 \otimes E_2$ в $F_1 \otimes F_2$, соответствующее билинейному отображению

$$(x_1, x_2) \to u_1 x_1 \otimes u_2 x_2$$

[1]) См. [5] гл. I, § 5, где эта проблема изучается детально и где я привожу ряд случаев положительного решения.

произведения $E_1 \times E_2$ в $F_1 \otimes F_2$, имеющему норму $\leqslant \|u_1\| \cdot \|u_2\|$. Таким образом (теорема 1), имеем

$$\|u_1 \otimes u_2\| \leqslant \|u_1\| \cdot \|u_2\|, \tag{3}$$

и $u_1 \otimes u_2$ продолжается по непрерывности в непрерывное линейное отображение $E_1 \hat{\otimes} E_2$ в $F_1 \hat{\otimes} F_2$, которое обозначается по-прежнему через $u_1 \otimes u_2$ и удовлетворяет (3). Непосредственно видно, что $u_1 \otimes u_2$ зависит билинейно от аргументов u_1 и u_2 и что имеет место формула транзитивности

$$(v_1 \otimes v_2) \circ (u_1 \otimes u_2) = (v_1 \circ u_1) \otimes (v_2 \circ u_2); \tag{4}$$

подробное разъяснение этого предоставляем читателю.

Заметим, что если u_1 и u_2 — топологические векторные изоморфизмы, то часто этого нельзя сказать про $u_1 \otimes u_2$. В самом деле, утверждение, что $u_1 \otimes u_2$ — топологический векторный изоморфизм, означает (при переходе к транспонированному отображению), что всякая непрерывная билинейная форма на $E_1 \otimes E_2$ может быть переведена в непрерывную билинейную форму на $F_1 \otimes F_2$, что, вообще говоря, неверно. Более того, если u — отображение Фредгольма пространства E в F, отображающее E в замкнутое векторное подпространство F_0 и обращающееся в нуль на замкнутом векторном подпространстве N_0 пространства E, то отображения $E/N_0 \to F$ и $E \to F_0$, порождаемые отображением u, не являются обычно преобразованиями Фредгольма. Однако, если u_1 и u_2 — изоморфизмы (соответственно метрические изоморфизмы) и для $i=1, 2$ существует непрерывная проекция p_i (соответственно проекция p_i с нормой 1) пространства F_i на E_i, где E_i отождествляется с некоторым подпространством в F_i, то $u_1 \otimes u_2$ является изоморфизмом (соответственно метрическим изоморфизмом), ибо в этом случае $p_1 \otimes p_2$ есть непрерывное (соответственно с нормой 1) линейное отображение $F_1 \hat{\otimes} F_2$ в $E_1 \hat{\otimes} E_2$, являющееся левым обратным к $u_1 \otimes u_2$.

Пусть теперь E, F, G, H — банаховы пространства,

$$u \in E' \hat{\otimes} F, \quad A \in L(G, E), \quad B \in L(F, H);$$

положим

$$u.A\,({}^tA \otimes 1)\,u \in G' \hat{\otimes} E, \quad B.u = (1 \otimes B)\,u \in E' \hat{\otimes} H. \tag{5}$$

Если $u \in E' \otimes F$, то $u.A \in G' \otimes E$ и $B.u \in E' \otimes H$ будут обыкновенными *композициями* операторов, если рассматривать u, $u.A$ и $B.u$ как операторы конечного ранга. Отсюда, продолжая по непрерывности, получаем

$$\widetilde{u.A} = \tilde{u}.A, \quad \widetilde{B.u} = B.\tilde{u}. \tag{6}$$

Отправляясь от $u \in E' \otimes H$ и действуя таким же образом, приходим к формулам ассоциативности

$$B\,(u.A) = (B.u)\,A \tag{7}$$

и

$$A_1\,(A_2.u) = (A_1.A_2)\,u, \quad (u.B_1)\,B_2 = u\,(B_1.B_2), \tag{8}$$

на чем подробно останавливаться не будем.

Пусть, наконец, E, F, G — три банаховых пространства и

$$u \in E' \hat{\otimes} F, \quad v \in F' \hat{\otimes} G;$$

тогда очевидно, что

$$\tilde{v}.u = v.\tilde{u} \in E' \hat{\otimes} G$$

(достаточно проверить для $u \in E' \otimes F$, $v \in F' \otimes G$); этот элемент из $E' \hat{\otimes} G$ называют композицией ядер Фредгольма v и u и обозначают $v.u$ или просто vu. Имеем $\widetilde{v.u} = \tilde{v}.\tilde{u}$; если, кроме того, $w \in G' \hat{\otimes} H$, то имеем формулу ассоциативности

$$w(vu) = (wv)u.$$

В частности, если $E = F = G$, то *видим, что $E' \hat{\otimes} E$ есть полная нормированная алгебра*. Если E — пространство бесконечной размерности, то эта алгебра не имеет единичного элемента; в самом деле, в противном случае такому элементу соответствовал бы единичный оператор в E, и так как оператор Фредгольма всегда *компактен* (как предел в смысле равномерной сходимости операторов конечного ранга), то единичный шар в E оказался бы относительно компактным, откуда следовало бы, что E конечномерно. Для пространства E бесконечной размерности можно также рассматривать полную нормированную алгебру, полученную присоединением единицы к $E' \hat{\otimes} E$.

Хотя это и не будет необходимо для развертываемой здесь теории, отметим следующий результат, конкретизирующий элементы полного тензорного произведения $E \hat{\otimes} F$: *элементы произведения $E \hat{\otimes} F$ представляют собой суммы абсолютно сходящихся рядов*

$$u = \sum \lambda_i x_i \otimes y_i,$$

где (λ_i) — суммируемая последовательность положительных чисел, а (x_i) [соответственно (y_i)] — последовательность элементов единичного шара в E (соответственно в F). Для заданного $\varepsilon > 0$ можно предположить, что

$$\sum \lambda_i \leqslant \|u\|_1 + \varepsilon.$$

[Отметим, впрочем, что для (λ_i), (x_i), (y_i), заданных, как указано выше, ряд $\sum \lambda_i x_i \otimes y_i$ всегда абсолютно сходится в $E \hat{\otimes} F$ к элементу с нормой $\leqslant \sum \lambda_i$.]

Доказательство. Пусть A (соответственно B) — множество элементов из E (соответственно из F) с нормой, равной 1; $i \to x_i$ и $i \to y_i$ — проекции произведения $I = A \times B$ соответственно на A и B. Обозначим через $l^1(I)$ пространство всех суммируемых семейств (λ_i), множеством индексов которого является I. Непосредственно ясно, что отображение $(\lambda_i) \to \sum \lambda_i x_i \otimes y_i$ пространства $l^1(I)$ в $E \hat{\otimes} F$ отображает единичный шар первого пространства на плотное подмножество единичного шара второго пространства. Отсюда следует, что действительно имеется метрический гомоморфизм первого пространства *на* второе, чем сформулированный результат и установлен.

Впрочем, в предыдущем представлении $u = \sum \lambda_i x_i \otimes y_i$ можно сделать, так, чтобы $x_i \to 0$ и $y_i \to 0$; для этого следует заменить (λ_i) медленнее сходящимся рядом, что позволит умножить члены последовательностей (x_i) и (y_i) на числа, стремящиеся к 0. Отсюда вытекает, что линейная форма на $B(E, F)$, определенная посредством $u \in E \hat{\otimes} F$, непрерывна в топологии равномерной сходимости на произведении двух компактов. [Легко видеть, хотя это не является здесь важным, что всякая непрерывная в предыдущей топологии линейная форма на $B(E, F)$ принадлежит $E \hat{\otimes} F$.] Отметим теперь, что если билинейная форма $\tilde{u}$ на $E' \times F'$, определенная посредством $u \in E \hat{\otimes} F$, обращается в нуль, то это означает, что u ортогонально к $E' \otimes F'$; таким образом, утверждение, что $\tilde{u} = 0$ влечет $u = 0$, означает, что $E' \otimes F'$ плотно в $B(E, F)$ в смысле слабой топологии, определенной посредством $E \hat{\otimes} F$. Согласно предыдущему, для этого достаточно, чтобы $E' \otimes F'$ было плотно в $B(E, F)$ в смысле топологии равномерной сходимости на произведении двух компактов. Но чтобы последнее имело место, достаточно, чтобы тождественное отображение пространства E или F можно было аппроксимировать равномерно на всяком компакте с помощью эндоморфизмов конечного ранга (действительно, это позволяет посредством композиции с произвольной непрерывной билинейной формой A аппроксимировать последнюю равномерно на произведении компактов билинейными формами конечного ранга). Это условие, по-видимому, выполняется во всех случаях, с которыми приходится встречаться практически.

§ 2. Продолжение фундаментальных функций на $E' \hat{\otimes} E$.

Предложение 1. *Пусть E — банахово пространство, $n > 0$, $p \geqslant 0$; тогда n-линейные отображения $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$ $[\alpha^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n)$, $R^p_n(u_1, \ldots, u_n)$ соответственно] пространства $(E' \otimes E)^n$ в тело скаляров [в пространство непрерывных p-линейных форм на $(E' \hat{\otimes} E)^p$, в пространство непрерывных $(p-1)$-линейных отображений $(E' \hat{\otimes} E)^{p-1}$ в $L(E)$ соответственно] непрерывны и, следовательно, могут быть продолжены до n-линейных отображений пространства $(E' \hat{\otimes} E)^n$ в то же пространство, что и прежде. Аналогично $(n+p)$-линейные отображения $d^p_n(u_1, \ldots, u_{n+p})$ [соответственно $r^p_n(u_1, \ldots, u_{n+p})$] пространства $(E' \otimes E)^{n+p}$ в $(\overset{p}{\hat{\otimes}} E) \hat{\otimes} (\overset{p}{\hat{\otimes}} E')$ [соответственно в пространство непрерывных $(p-1)$-линейных отображений $(L(E))^{p-1}$ в $E' \hat{\otimes} E$] непрерывны и, следовательно, могут быть продолжены по непрерывности до $(n+p)$-линейных отображений пространства $(E' \hat{\otimes} E)^{n+p}$ в то же пространство, что и прежде.*

Имеют место оценки

$$\left.\begin{aligned}
&\|\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)\| \leqslant \frac{k_n}{n!}\|u_1\|_1 \ldots \|u_n\|_1, \quad \text{т. е.}\ \|\alpha_n\| \leqslant \frac{k_n}{n!},\\
&\|\alpha^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n)\| \leqslant \frac{k_{n+p}}{n!}\|u_1\|_1 \ldots \|u_n\|_1, \quad \text{т. е.}\ \|\alpha^p_{n+p}\| \leqslant \frac{k_{n+p}}{n!},\\
&\|R^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_p)\| \leqslant \frac{k_{n+p}}{n!}\|u_1\|_1 \ldots \|u_n\|_1, \quad \text{т. е.}\ \|R^p_n\| \leqslant \frac{k_{n+p}}{n!},\\
&\|d^p_n(u_1, \ldots, u_{n+p})\| \leqslant (n+p)\ldots(n+1)\frac{k_n}{n!}\|u_1\|_1 \cdots \|u_{n+p}\|_1,\\
&\|r^p_n(u_1, \ldots, u_{n+p})\| \leqslant (n+p)\ldots(n+1)\frac{k_n}{n!}\|u_1\|_1 \ldots \|u_{n+p}\|_1,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где положено

$$k_n = \sup_{\substack{x_i \in E^n\\ x'_j \in E'^n\\ \|x_i\|,\ \|x'_j\| \leqslant 1}} \det\left((\langle x_i, x'_j\rangle)_{i,j \leqslant n}\right). \quad (1')$$

Кроме того, каково бы ни было $u \in E' \hat{\otimes} E$, ряды

$$\left.\begin{aligned}
D(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(u),\\
D^p(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^p_{n+p}(u),\\
R^p(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} R^p_n(u),\\
d^p(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} d^p_n(u),\\
r^p(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^p_n(u)
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

являются абсолютно сходящимися в теле скаляров [*соответственно в пространстве непрерывных p-линейных форм на* $(E' \hat{\otimes} E)^p$; *в пространстве* $(p-1)$-*линейных отображений* $(E' \hat{\otimes} E)^{p-1}$ *в* $L(E)$; *в* $(\overset{p}{\otimes} E) \hat{\otimes} (\overset{p}{\hat{\otimes}} E')$; *в пространстве* $(p-1)$-*линейных отображений* $(L(E))^{p-1}$ *в* $E' \hat{\otimes} E$ *и определяют, таким образом, целые функции аргумента* $u \in E' \hat{\otimes} E$. *Следовательно,* $D^p(u)$ *есть не что иное, как p-я производная от* $D(u)$ (*см. Введение,* § 3). *Кроме того, величины, о которых идет речь в настоящем предложении, удовлетворяют всем тождествам, полученным в гл.* I.

Доказательство. Начнем с доказательства неравенств (1) для $u_i \in E' \otimes E$; тогда рассматриваемые мультилинейные отображения могут быть продолжены, и формулы (1) останутся справедливыми для любой системы u_i в $E' \hat{\otimes} E$. В силу определения величин $\alpha^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n)$ и $R^p_n(u_1, \ldots, u_n)$, вторая и третья формулы (1) получаются из первой; пятая формула (1) выводится из четвертой, ибо непосредственной проверкой можно убедиться, что $(p-1)$-линейное отображение $(L(E))^{p-1}$ в $E' \hat{\otimes} E$, определенное элементом W из $(\overset{p}{\hat{\otimes}} E) \hat{\otimes} (\overset{p}{\hat{\otimes}} E')$, имеет норму, не превышающую нормы W (согласно теореме 1, это достаточно проверить для простого W). Докажем первое и четвертое неравенства для простых $\tilde{u}_i$, после чего с помощью теоремы 1 можно перейти к общему случаю. Пусть $u_i = x'_i \otimes x_i$, тогда

$$\alpha_n(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!} \det(\langle x_i, x'_j \rangle),$$

и если x_i, x'_i имеют нормы $\leqslant 1$, то модуль правой части мажорируется величиной $k_n/n!$, откуда получаем первое неравенство. В силу формулы (7) гл. I, § 6, четвертое неравенство достаточно доказать для $\delta^p_n(u_1, \ldots, u_{n+p})$, а это может быть сделано с помощью формулы (12) того же параграфа. Чтобы закончить доказательство, достаточно показать, что ряды, входящие в (2), определяют целые функции; тогда формулы, установленные в гл. I, тривиальным образом продолжаются по непрерывности. Но из классического неравенства Адамара и (1′) следует, что $k_n \leqslant n^{n/2}$, откуда, в силу формулы Стирлинга, $n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$, получаем

$$\frac{k_n}{n!} \leqslant \frac{n^{n/2}}{n!} \leqslant k \left(\frac{e^2}{n} \right)^{(n+1)/2}, \tag{3}$$

где k — универсальная постоянная, которую можно легко определить. Отсюда и заключаем, что ряды в (2) являются целыми. Изучая род определителя Фредгольма

$$D(-zu) = \det(\mathbf{1} - zu),$$

можно видеть, что в общем случае оценки (1) и (3) не могут быть существенно улучшены. Однако, если E — гильбертово пространство, то $k_n = 1$ при любом n.

Мы будем часто писать $\det(\mathbf{1} + u)$ вместо $D(u)$ или $D^0(u)$; в случае, когда размерность E бесконечна, det будет рассматриваться как функция, определенная на гиперплоскости $\mathbf{1} + E' \hat{\otimes} E$ алгебры T (полученной присоединением единицы к $E' \otimes E$); эта гиперплоскость устойчива относительно умножения, и имеет место формула

$$\det(\mathbf{1} + u)(\mathbf{1} + v) = \det(\mathbf{1} + u) \det(\mathbf{1} + v), \tag{4}$$

которую можно записать в виде

$$D(u + v + uv) = D(u)\, D(v).$$

Транспозиционные формулы. Существует каноническое линейное отображение $u \to {}^t u$ произведения $E' \hat{\otimes} E$ в $E'' \hat{\otimes} E'$, определенное на простых тензорах $x' \otimes x$ равенством ${}^t(x' \otimes x) = x \otimes x'$ (где в правой части x рассматривается как элемент из E''); это — отображение с нормой $\leqslant 1$ произведения $E' \hat{\otimes} E$ в $E'' \hat{\otimes} E'$ (§ 1, теорема 1), причем

$$\|{}^t u\|_1 \leqslant \|u\|_1 \tag{5}$$

и ${}^t\tilde{u} = \widetilde{{}^t u}$ (достаточно проверить для $u = x' \otimes x$), чем оправдывается используемое обозначение. Также и естественное линейное отображение (с нормой $\leqslant 1$) произведения $(\hat{\otimes}^p E) \hat{\otimes} (\hat{\otimes}^p E')$ в $(\hat{\otimes}^p E') \hat{\otimes} (\hat{\otimes}^p E'')$ будет обозначаться через $X \to {}^t X$. Имеют место следующие транспозиционные формулы:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_n({}^t u_1, \ldots, {}^t u_n) = \alpha_n(u_1, \ldots, u_n), \text{ откуда } \alpha_n({}^t u) = \alpha_n(u), \\ &R_n^p({}^t u_1, \ldots, {}^t u_n)({}^t v_1, \ldots, {}^t v_{p-1}) = {}^t R_n^p(u_1, \ldots, u_n)(v_n, \ldots, v_{p-1}), \\ &\text{откуда } R_n^p({}^t u)({}^t v_1, \ldots, {}^t v_{p-1}) = {}^t R_n^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}), \\ &d_n^p({}^t u) = {}^t d_n^p(u) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и, в частности,

$$\operatorname{Tr} {}^t u = \operatorname{Tr} u, \quad R_n({}^t u) = {}^t R_n(u); \tag{7}$$

отсюда получаются «глобальные формулы»

$$\left.\begin{aligned} &D^p({}^t u)({}^t v_1, \ldots, {}^t v_p) = D^p(u)(v_1, \ldots, v_p), \\ &R^p({}^t u)({}^t v_1, \ldots, {}^t v_{p-1}) = {}^t R^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и, в частности,

$$\det(1 + {}^t u) = \det(1 + u), \quad R({}^t u) = {}^t R(u). \tag{9}$$

Все эти формулы немедленно вытекают из определений и из первой формулы (6), которая очевидна для $u_i = x_i' \otimes x_i$ [применить формулу (2) § 2, гл. 1] и остается в силе для любых u_i.

Замечание. Фундаментальные функции $\alpha_n(u)$, $R_n(u)$, ... определены только для аргумента $u \in E' \hat{\otimes} E$, но *не* для соответствующего ему оператора Фредгольма, которому отвечает элемент фактор-пространства пространства $E' \hat{\otimes} E$. Поэтому говорить о следе оператора Фредгольма мы имеем право только тогда, когда убедимся, что каноническое отображение $E' \hat{\otimes} E$ в $L(E)$ взаимно однозначно, а это во всех известных конкретных случаях проверяется легко[1]).

§ 3. Дополнительные сведения об определителях и следах. Рассмотрим полную нормированную алгебру T, получаемую присоединением единицы к $E' \hat{\otimes} E$. В T можно определить показательную функцию

$$\exp u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n. \tag{1}$$

[1]) Строго говоря, первая строка формулы (7) § 6, гл. I не имеет смысла, ибо $(1+u)^{-1}$ и $\dfrac{1}{\det(1+u)} R(u)$ не принадлежат одному и тому же пространству [первое — элемент из T, а второе — элемент из $L(E)$]. Но можно легко определить $R(u)$ как элемент из T, а не из $L(E)$ [ему будет тогда соответствовать канонически некоторый элемент из $L(E)$], чтобы сделать рассматриваемую формулу корректной.

Если $u \in E' \hat{\otimes} E$, то, очевидно, имеем

$$\exp u \in 1 + E' \hat{\otimes} E,$$

и, следовательно, $\det(\exp u)$ имеет смысл. При этом имеет место классическая формула

$$\det(\exp u) = \exp(\operatorname{Tr} u) \qquad (u \in E' \hat{\otimes} E), \tag{2}$$

применяя которую к $\ln(1+u)$, получаем

$$\det(1+u) = \exp(\operatorname{Tr} \ln(1+u)) \qquad (u \in E' \hat{\otimes} E, \|u\|_1 < 1), \tag{3}$$

где $\ln(1+u)$ определяется рядом

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} u^n \qquad (\|u\|_1 < 1). \tag{4}$$

Чтобы доказать (2), можно ограничиться ввиду непрерывности рассмотрением $u \in E' \otimes E$, что приводит нас к случаю, когда E конечномерно. Но (2) непосредственно ясно для операторов u, которые могут быть представлены в диагональной форме, а так как последние плотны в $L(E)$ (когда телом скаляров является C, что можно, очевидно, предположить[1]), то (2) будет иметь место для любого $u \in L(E)$. Заменяя u через zu в (2) (z — скалярный параметр) и приравнивая члены с одинаковыми степенями z в обеих частях равенства, получаем попутно формулы (которые, впрочем, не имеют практического значения):

$$\alpha_n(u) = (-1)^n \sum \frac{1}{i_1! \ldots i_n!} \left(\operatorname{Tr} \frac{u}{1}\right)^{i_1} \ldots \left(\operatorname{Tr} \frac{u^n}{n}\right)^{i_n}, \tag{5}$$

где суммирование распространяется на все системы неотрицательных целых чисел $(i_1, \ldots, i_n)$, таких, что

$$1 i_1 + \ldots + n i_n = n.$$

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения об элементах ядра J канонического отображения $u \to \tilde{u}$ пространства $E' \hat{\otimes} E$ в $L(E)$, хотя возможно, что это ядро всегда является нулем. Следующая лемма резюмирует необходимые здесь понятия.

Лемма. *Ядро J канонического отображения $u \to \tilde{u}$ произведения $E' \hat{\otimes} E$ в $L(E)$ совпадает с левым аннулятором и правым аннулятором алгебры $E' \hat{\otimes} E$, т. е.*

$$u \in J \Longleftrightarrow u(E' \hat{\otimes} E) = \{0\} \Longleftrightarrow (E' \hat{\otimes} E) u = \{0\}.$$

Кроме того, если $u \in J$ или даже если только $u^2 = 0$, то

$$\det(1+u) = \exp(\operatorname{Tr} u). \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку

$$u(x' \otimes x) = x' \otimes ux, \quad (x' \otimes x) u = {}^t u x' \otimes x,$$

видим, что равенство $\tilde{u} = 0$ указывает на то, что $uv = 0$ и $vu = 0$ для любого $v \in x' \otimes x$. Но это влечет $uv = 0$ и $vu = 0$ для всех $v \in E' \otimes E$, а по непрерывности и для всех $v \in E' \hat{\otimes} E$, чем внутренняя алгебраическая характеристика ядра J установлена. Ядро J будем называть *радикалом* алгебры $E' \hat{\otimes} E$.

---

[1]) Если телом скаляров является R, то E можно включить в банахово пространство с телом скаляров C. — *Прим. ред.*

Пусть $u \in J$ или только $u^2 = 0$; тогда для достаточно малых z будем иметь [формула (3)]

$$\det(1 + zu) = \exp(\operatorname{Tr} \ln(1 + zu)).$$

Но из (4) для достаточно малых z следует

$$\operatorname{Tr} \ln(1 + zu) = \operatorname{Tr} zu = z \operatorname{Tr} u$$

и

$$\det(1 + zu) = \exp(z \operatorname{Tr} u),$$

причем обе части последнего равенства суть целые функции от z; следовательно, это равенство справедливо при любом z и, в частности, при $z = 1$.

Предположим, что E есть топологическая прямая сумма двух подпространств E_1 и E_2, а p_1 и p_2 — соответствующие проекторы (которые непрерывны)

$$\left.\begin{aligned} p_1^2 = p_1,\ p_2^2 = p_2,\ p_1 + p_2 = 1, \\ p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0,\ p_1(E) = E_1,\ p_2(E) = E_2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Положим

$$P_{ij} u = p_i u p_j \tag{8}$$

(по поводу обозначения в правой части см. § 1), где $u \in E' \hat{\otimes} E$, а $i, j = 1, 2$; из формул (7) следует, что P_{ij} — *проекторы* в $E' \hat{\otimes} E$ $(P_{ij}^2 = P_{ij})$, которые попарно *ортогональны* $(P_{ij} P_{i'j'} = 0$, если $i \neq i'$ или $j \neq j')$ и дают в сумме тождественное отображение $(\sum_{ij} P_{ij} = 1)$; в частности, для любого $u \in E' \hat{\otimes} E$ имеем

$$u = p_1 u p_1 + p_2 u p_2 + p_1 u p_2 + p_2 u p_1. \tag{9}$$

Но $\operatorname{Tr} p_1 u p_2 = \operatorname{Tr} p_2 p_1 u$ (основное свойство следа) $= \operatorname{Tr} 0 = 0$ и также $\operatorname{Tr} p_2 u p_1 = 0$, откуда

$$\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr} u_1 + \operatorname{Tr} u_2 \quad (u_i = p_i u p_i). \tag{10}$$

Покажем, что если u взято так, что $\tilde{u}$ оставляет *инвариантным* E_1 *или* E_2, *то*

$$\det(1 + u) = \det(1 + u_1) \det(1 + u_2) \quad (u_i = p_i u p_i). \tag{11}$$

В самом деле, пусть, например, E_1 инвариантно; тогда $p_2 \tilde{u} p_1 = 0$, т. е. $p_2 \tilde{u} p_1$ принадлежит *радикалу* J алгебры $E' \hat{\otimes} E$ (ибо $p_2 \tilde{u} p_1 = \widetilde{p_2 u p_1}$). Положив

$$v = p_1 u p_1 + p_2 u p_2 + p_1 u p_2, \quad w = p_2 u p_1,$$

$$1 + u = 1 + v + w = (1 + v)(1 + w)$$

$(v.w = 0$ по определению радикала), будем иметь

$$\det(1 + u) = \det(1 + v) \det(1 + w).$$

Но по предыдущей лемме

$$\det(1 + w) = \exp(\operatorname{Tr} w) \quad \text{и} \quad \operatorname{Tr} w = \operatorname{Tr} p_2 u p_1 = 0;$$

поэтому

$$\det(1 + w) = 1 \quad \text{и} \quad \det(1 + u) = \det(1 + v),$$

и остается доказать для $u \in E' \hat{\otimes} E$ следующее равенство:

$$\det(1 + p_1 u p_1 + p_2 u p_2 + p_1 u p_2) = \det(1 + p_1 u p_1) \det(1 + p_2 u p_2).$$

При этом ввиду непрерывности достаточно рассмотреть $u \in E' \otimes E$; тогда $v = p_1 u p_1 + p_2 u p_2 + p_1 u p_2 \in E' \otimes E$, и последняя формула означает, что $\det(1 + v)$ равен произведению определителей двух операторов, из которых первый задан в E_1 посредством сужения $1+v$, а второй задан в E/E' посредством факторизации $1+v$; это хорошо известно, когда E конечномерно, а в общем случае, исходя отсюда, непосредственно проверяется для оператора v конечного ранга, оставляющего E_1 инвариантным.

Чтобы использовать формулы (10) и (11), требуется иное истолкование величин $\operatorname{Tr} p_i u p_i$ и $\det(1+p_i u p_i)$. Пусть

$$H_i = P_{ii}(E' \hat{\otimes} E) = p_i (E' \hat{\otimes} E)\, p_i.$$

H_i может быть отождествлено с $E_i' \hat{\otimes} E_i$: в самом деле, отождествим E_1' с векторным подпространством пространства E', ортогональным к E_2; я утверждаю, что естественное отображение φ_1 произведения $E_1' \hat{\otimes} E_1$ в $E' \hat{\otimes} E$ (тензорное произведение тождественных отображений) есть *изоморфизм* первого пространства *на* H_1. Рассмотрим для этого непрерывное линейное отображение $\psi_1 = {}^t p_1 \otimes p_1$ произведения $E' \hat{\otimes} E$ в $E_1' \hat{\otimes} E_1$; применяя формулу (4) § 1, получаем

$$\psi_1 \varphi_1 = 1, \quad \varphi_1 \psi_1 = P_{11},$$

чем и доказано, что φ_1 есть изоморфизм $E_1' \hat{\otimes} E_1$ на образ H_1 проектора P_{11}. Тот же результат будем иметь для $E_2' \hat{\otimes} E_2$, погруженного в $E' \hat{\otimes} E$ посредством изоморфизма φ_2. Если $u_1 \in E_1' \hat{\otimes} E_1$, то $\widetilde{\varphi_1 u_1}$ будет оператором в E, совпадающим с $\tilde{u}_1$ на E_1 и равным нулю на E_2; аналогично можно охарактеризовать $\widetilde{\varphi_2 u_2}$. Таким образом, φ_1 и φ_2 — *представления алгебр* $E_1' \hat{\otimes} E_1$ и $E_2' \hat{\otimes} E_2$, а H_1 и H_2 — *подалгебры* алгебры $E' \hat{\otimes} E$, канонически изоморфные $E_1' \hat{\otimes} E_1$ и $E_2' \hat{\otimes} E_2$, из которых каждая принадлежит аннулятору другой:

$$H_1 . H_2 = H_2 . H_1 = \{0\}; \tag{12}$$

последнее очевидно из соотношений

$$(p_1 u p_1)(p_2 v p_2) = (p_1 u)(p_1 p_2)(v p_2) \text{ и } p_1 p_2 = 0.$$

Отметим еще, что если $u \in H_i$, то $\operatorname{Tr} u$ [соответственно $\det(1+u)$] равен $\operatorname{Tr} u_i$ [соответственно $\det(1+u_i)$], где u_i — элемент из $E_i' \otimes E_i$, соответствующий u (приводится к случаю конечного числа измерений); отсюда новое истолкование формул (10) и (11).

Резюмируем основное содержание предшествующего.

Предложение 2. *Пусть E_1 и E_2 — подпространства банахова пространства E, каждое из которых служит топологическим дополнением другого, p_1 и p_2 — соответствующие проекторы. Тогда $E_1' \hat{\otimes} E_1$ и $E_2' \hat{\otimes} E_2$ отождествляются соответственно с взаимно ортогональными подалгебрами*

$$H_1 = p_1 (E' \hat{\otimes} E)\, p_1 \quad \text{и} \quad H_2 = p_2 (E' \hat{\otimes} E)\, p_2$$

алгебры $E' \hat{\otimes} E$ $(H_1 . H_2 = H_2 . H_1 = \{0\})$. Это отождествление согласуется с функциями $\operatorname{Tr} u$ и $\det(1+u)$. Кроме того, для $u \in E' \hat{\otimes} E$ имеем

$$\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr} u_1 + \operatorname{Tr} u_2 \quad (u_i = p_i u p_i),$$

и если $\tilde{u}$ оставляет инвариантным E_1 или E_2, то

$$\det(1+u) = \det(1+u_1)\det(1+u_2).$$

§ 4. Теория Фредгольма.

Предложение 3. *Пусть E — банахово пространство, $u \in E' \hat{\otimes} E$. Для того чтобы оператор $1+u$ был обратим (в алгебре T, полученной присоединением единицы к $E' \hat{\otimes} E$), необходимо и достаточно, чтобы $1+\tilde{u}$*

был обратим в алгебре $L(E)$. *Обратный к* $1+u$ *в* T *имеет вид* $1+v$, *где* $v \in E' \hat{\otimes} E$.

Предположим, что $1+u$ имеет в T обратный $1+v (v \in T)$. Тогда $(1+u)(1+v)=1$, т. е. $u+v+uv=0$, откуда $v=-u-uv$. Следовательно, $v \in E' \hat{\otimes} E$ (ибо $E' \hat{\otimes} E$ есть *идеал* в T) и $1+\tilde{v}$ будет оператором, обратным к $1+\tilde{u}$ в $L(E)$. Обратно, предположим, что $1+\tilde{u}$ имеет обратный в $L(E)$; предыдущее рассуждение показывает, что последний будет иметь вид $1+\tilde{v}$, где $\tilde{v}$ — оператор Фредгольма в E, т. е. канонический образ некоторого $v \in E' \hat{\otimes} E$. Формула

$$(1+\tilde{u})\ (1+\tilde{v})=1$$

записывается в виде $\tilde{u}+\tilde{v}+\tilde{u}\tilde{v}=0$ и означает, что образ элемента $w=u+v+uv$ есть нуль в $L(E)$, т. е. что w принадлежит аннулятору алгебры $E' \hat{\otimes} E$ (см. лемму § 3). Также и $w'=u+v+vu$ будет принадлежать аннулятору алгебры $E' \hat{\otimes} E$. Таким образом, имеем

$$u+(v-w)+u(v-w)=u+v-w+uv=0,$$

т. е. $(1+(v-w))$ есть правый обратный оператор для $1+u$. По тем же соображениям $(1+(v-w'))$ есть левый обратный оператор для $1+u$. Итак, $1+u$ обратим, что и завершает доказательство.

Следствие. *Спектр элемента* u *в* T *совпадает со спектром оператора* $\tilde{u}$ *в* $L(E)$.

(Напомним, что *спектр* элемента A алгебры с единицей есть множество скаляров μ, таких, что оператор $\mu 1 - A$ или $1-(1/\mu) A$, если $\mu \neq 0$, необратим.) Таким образом, безразлично, изучать ли обратимость $1+u$ в T или обратимость $1+\tilde{u}$ в $L(E)$. Следующая теорема дает решение проблемы обратимости.

Теорема 2. *Пусть* E — *банахово пространство*, $u \in E' \hat{\otimes} E$. *Для того чтобы элемент* $1+u$ *был обратим* (*в алгебре* T, *полученной присоединением единицы к алгебре* $E' \hat{\otimes} E$), *необходимо и достаточно, чтобы* $\det(1+u) \neq 0$, *и тогда имеет место формула Фредгольма*

$$(1+u)^{-1}=\frac{1}{\det(1+u)} R(u)=1-\frac{u}{\det(1+u)} R(u)=$$
$$=1-u+u^2-\ldots+(-1)^{n-1} u^{n-1}+\frac{(-1)^n u^n}{\det(1+u)} R(u). \qquad (1)$$

Доказательство то же, что и в гл. I (предложение 5 § 6).

Применим теорему 2 к случаю, когда вместо u написано $-zu$; тогда будем иметь

Следствие. *Пусть* $u \in E' \hat{\otimes} E$; *отличные от нуля скаляры, принадлежащие спектру элемента* u [*т. е. те значения* μ, *для которых элемент* $1-(1/\mu) u$ *необратим*], *представляют собой величины, обратные нулям целой относительно* z *функции* $\det(1-zu)$ (*определителя Фредгольма для* u). *Функция* $(1-zu)^{-1}$, *определенная в области, дополнительной к множеству нулей определителя* $\det(1-zu)$, *является мероморфной во всей комплексной плоскости* z[1]).

---

[1]) Мы предполагаем здесь скаляры комплексными. В противном случае можно было бы говорить, что $(1-zu)^{-1}$ — мероморфная функция *вещественной* переменной z, но более точный результат получился бы при расширении тела вещественных скаляров пространства E на тело комплексных скаляров (т. е. при рассмотрении E как вещественного векторного

Перейдем к изучению уравнения $(1-zu)x=y$ для значений параметра z, обращающих в нуль определитель Фредгольма. Положим

$$\left.\begin{aligned} D^p(z) &= D^p(-zu), \quad d^p(z)=(-1)^p d^p(-zu),\\ R^p(z) &= R^p(-zu), \quad r^p(z)=(-1)^p r^p(-zu), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем будем писать $D(z)$ вместо $D^0(z)$ или $\det(1-zu)$. Пусть λ — нуль функции $D(z)$. Так как $D^q(\lambda)(u,\ldots,u)$ является с точностью до знака q-й производной (в точке λ) целой функции $D(z)$, не равной тождественно нулю ($D(0)=1$), то существует наименьшее значение q такое, что $D^q(\lambda)\neq 0$; обозначая это значение через p, будем иметь

$$D^p(\lambda)\neq 0, \quad D^{p-1}(\lambda)=0. \tag{3}$$

Таким образом, p есть наименьшее целое число такое, что $R^p(\lambda)\neq 0$. Напишем формулы (5) § 5 гл. I для двух последовательных значений $p-1$ и p, заменяя при этом u на $-\lambda u$. Принимая во внимание, что $R^{p-1}(\lambda)=0$, получаем

$$(1-\lambda u)R^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_{p-1}) = (R^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_{p-1}))(1-\lambda u)=0, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1-\lambda u)R^{p+1}(\lambda)(v_1,\ldots,v_p)=\\ &\qquad = (D^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_p))\,1-\sum_{i=1}^{p} v_i R^p(\lambda)(v_1,\ldots,\hat v_i,\ldots,v_p),\\ &(R^{p+1}(\lambda)(v_1,\ldots,v_p))(1-\lambda u)=\\ &\qquad = (D^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_p))\,1-\sum_{i=1}^{p}(R^p(\lambda)(v_1,\ldots,\hat v_i,\ldots,v_p))\,v_i. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Согласно (4), образ каждого из операторов $1-\lambda u$ и $R^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_{p-1})$ содержится в ядре другого. Покажем, что ядро оператора $1-\lambda u$ *порождается* образами операторов $R^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_{p-1})$, соответствующих всевозможным системам (v_i) переменных $v_i\in E'\hat\otimes E$, и что образ оператора $1-\lambda u$ есть *пересечение* ядер операторов $R^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_{p-1})$. Для этого возьмем $v_1,\ldots,v_p\in E'\hat\otimes E$ такие, что $D^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_p)\neq 0$ [они существуют, ибо $D^p(\lambda)\neq 0$], и рассмотрим оператор

$$A=\frac{1}{D^p(\lambda)(v_1,\ldots,v_p)}\sum_{i=1}^{n}(R^p(\lambda)(v_1,\ldots,\hat v_i,\ldots,v_p))\,v_i. \tag{6}$$

Если $(1-\lambda u).x=0$, т. е. если x принадлежит пространству $E^1_{1/\lambda}$ собственных векторов оператора u, соответствующих собственному значению $1/\lambda$, то $x=Ax$ [вторая формула (5)]; с другой стороны [первая формула (4)], для любого $y\in E$ имеем

$$(1-\lambda u)Ay=0, \qquad \text{или} \qquad Ay\in E^1_{1/\lambda}.$$

Таким образом, A проектирует E на пространство $E^1_{1/\lambda}$. Возьмем $y\in E$ такое, чтобы уравнение

$$(1-\lambda u).x=y \tag{7}$$

имело решение; в силу последней формулы (4), необходимым (и достаточным) условием для этого будет

$$(R^p(\lambda)(v_1,\ldots,\hat v_i,\ldots,v_p))\,y=0 \qquad (i=1,\ldots,p); \tag{8}$$

подпространства комплексного банахова пространства $F=E+iE$) и при рассмотрении пространства $L(E)$ как вещественного векторного подпространства комплексного банахова пространства $L(F)=L(E)+iL(E)$. Тогда $(1-zu)^{-1}$ было бы мероморфной функцией в *комплексной плоскости* со значениями в $L(F)$.

достаточным условием будет даже

$$(v_i R^p(\lambda)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p))\, y = 0 \quad (i = 1, \ldots, p), \tag{9}$$

ибо тогда, в силу первой формулы (5), получим решение

$$x = \frac{1}{D^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)} (R^{p+1}(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)).y, \tag{10}$$

которое может быть записано [посредством (9)] также в виде

$$x = y + \frac{1}{D^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)} (\lambda u R^{p+1}(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)).y. \tag{11}$$

Отметим, что в предыдущих формулах в качестве v_i можно взять элементы $v_i = a_i' \otimes a$ [потому что, если $D^p(\lambda)$ обращается в нуль на всех системах такого вида, то $D^p(\lambda)$ равно нулю тождественно].

Таким образом, векторы

$$x_i = (R^p(\lambda)(a_1' \otimes a_1, \ldots, \widehat{a_i' \otimes a_i}, \ldots, a_p' \otimes a_p)).a_i \tag{12}$$

принадлежат $E^1_{1/\lambda}$; я утверждаю, что они образуют *базис* этого пространства (которое имеет размерность $p > 0$). В самом деле, $E^1_{1/\lambda} = A(E)$, где A дано формулой (6), и x_i порождают $E^1_{1/\lambda}$; они линейно независимы, ибо, в силу (12),

$$\langle x_i, a_j' \rangle = \operatorname{Tr}(R^p(\lambda)(a_1' \otimes a_1, \ldots, \widehat{a_i' \otimes a_i}, \ldots, a_p' \otimes a_p))\, a_j' \otimes a_i =$$

$$= D^p(\lambda)(a_1' \otimes a_1, \ldots, \widehat{a_i' \otimes a_i}, \ldots, a_p' \otimes a_p, a_j' \otimes a_i),$$

а поскольку $D^p(\lambda)(z_1' \otimes z_1, \ldots, z_p' \otimes z_p)$ *биальтернирует* (т. е. обращается в нуль, если два из z_i или два из z_i', отвечающие различным индексам, совпадают), то

$$\langle x_i, a_j' \rangle = k\delta_{ij}, \quad k = D^p(\lambda)(a_1' \otimes a_1, \ldots, a_p' \otimes a_p) \neq 0 \tag{13}$$

(δ_{ij} — индексы Кронекера).

Используем теперь транспозиционные формулы (8) и (9) в конце § 2. Так как число λ является также нулем для

$$\det(1 - z\,{}^t u) = \det(1 - zu),$$

то, применяя предшествующие рассуждения к ${}^t u$ вместо u, получим прежнее значение p и сможем выбрать ${}^t v_i = a_i \otimes a_i'$ так, что

$$x_i' = (R^p(-\lambda\,{}^t u)({}^t v_1, \ldots, {}^t\hat{v}_i, \ldots, {}^t v_p)).a_i'$$

будут образовывать базис пространства $E'^1_{1/\lambda}$ собственных векторов оператора ${}^t u$, соответствующих собственному значению $1/\lambda$ (в самом деле, $D^p(-\lambda\,{}^t u)({}^t v_1, \ldots, {}^t v_p) = D^p(-\lambda u)(v_1, \ldots, v_p) \neq 0$); этот базис можно записать еще в виде

$$x_i' = ({}^t R^p(\lambda)(a_1' \otimes a_1, \ldots, \widehat{a_i' \otimes a_i}, \ldots, a_p' \otimes a_p)).a_i'. \tag{14}$$

Наконец, для того чтобы уравнение (7) было разрешимо для данного $y \in E$ [т. е. чтобы $y \in (1 - \lambda u)(E)$], необходимо и достаточно, чтобы y было ортогонально к $E'^1_{1/\lambda}$:

$$\langle y, x_i' \rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, p). \tag{15}$$

Условие необходимо, так как

$$\langle y, x_i' \rangle = \langle (1 - \lambda u).x, x_i' \rangle = \langle x, (1 - \lambda\,{}^t u).x_i' \rangle = 0;$$

оно достаточно, потому что условия (9) записываются для $v_1 = a_i' \otimes a_i$ в виде

$$\langle (R^p(\lambda)(a_1' \otimes a_1, \ldots, \widehat{a_i' \otimes a_i}, \ldots, a_p' \otimes a_p)).y, a_i' \rangle a_i = 0,$$

где, согласно (14), скалярный коэффициент в левой части равен $\langle y, x_i' \rangle$.

Первая часть следующей теоремы резюмирует главные из предшествующих результатов.

Теорема 3. *Пусть E — банахово пространство, $u \in E' \hat{\otimes} E$, λ — нуль определителя $D(z) = \det(1 - zu)$.*

1. *Пусть p — наименьшее целое число такое, что $D^p(\lambda) \neq 0$ [имеются в виду обозначения, введенные в формулах (2)]; тогда существуют $a_i \in E$ и $a_i' \in E'$ $(i = 1, \ldots, p)$ такие, что*

$$D^p(\lambda)(a_1' \otimes a_1, \ldots, a_p' \otimes a_p) \neq 0.$$

Векторы x_i (соответственно x_i'), определенные согласно (12) [соответственно (14)], образуют базис пространства $E^1_{1/\lambda}$ (соответственно $E'^1_{1/\lambda}$) решений уравнений $(1 - \lambda u).x = 0$ [соответственно $(1 - \lambda\, {}^t u).x' = 0$]; эти два пространства имеют размерность p. Для того чтобы уравнение (относительно x)

$$(1 - \lambda u).x = y$$

имело решение, необходимо и достаточно, чтобы y было ортогонально к $E'^1_{1/\lambda}$, т. е. чтобы y удовлетворяло условиям $\langle y.x_i' \rangle = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$; соответствующее частное решение определяется тогда посредством (10) или (11), где $v_i = a_i' \otimes a_i$.

2. *Имеют место равенства*

$$D^p(\lambda) = d^p(\lambda), \quad R^p(\lambda) = r^p(\lambda), \tag{16}$$

и, следовательно, всюду в предшествующем изложении можно заменить $D^p(\lambda)$ на $d^p(\lambda)$ и $R^p(\lambda)$ на $r^p(\lambda)$; p является также наименьшим целым числом таким, что $d^p(\lambda) \neq 0$. Наконец, формула (11), дающая решение, принимает вид

$$x = y + \frac{1}{d^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)} (r^{p+1}(v_1, \ldots, v_p)).y. \tag{17}$$

Докажем вторую часть теоремы. Вторая формула (16) содержится в первой [определения, гл. I, § 6, формула (13)], а она вытекает из следующего факта: $D^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)$ *не изменяется при умножении какого-либо из v_i слева или справа на λu* (таким образом, можно умножать на λu произвольное число элементов v_i). Рассмотрим умножение слева, и пусть оно относится к v_p; по первой формуле (4) (или по второй, если умножение производится справа) имеем

$$\operatorname{Tr}(R^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_{p-1}))(\lambda v_p u) = \operatorname{Tr}(R^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_{p-1}))\, v_p.$$

Поскольку $D^q(\lambda) = 0$ влечет $d^q(\lambda) = 0$, число p является наименьшим из q таких, что $d^q(\lambda) \neq 0$. Наконец, в силу (16), имеем $D^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p) = D^p(\lambda)(\lambda v_1 u, \ldots, \lambda v_p u)$ и, значит, в (11) можно заменить v_i на $\lambda v_i u$ [причем будем иметь $D^p(\lambda)(\lambda v_1 u, \ldots, \lambda v_p u) \neq 0$]; таким образом, получаем решение

$$x = y + \frac{(-1)^{p+1}}{D^p(\lambda)(\lambda v_1 u, \ldots, \lambda v_p u)} ((-\lambda u) R^{p+1}(\lambda)(-\lambda v_1 u, \ldots, -\lambda v_p u)).y;$$

эта формула совпадает с (17), ибо знаменатель равен $d^p(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)$, а числитель равен $r^{p+1}(\lambda)(v_1, \ldots, v_p)$ [гл. I, § 6, формула (17), написанная для $-\lambda u$ вместо u]. Тем самым теорема 3 полностью доказана.

Следствие 1. *Пусть $u \in E' \hat{\otimes} E$, λ — скаляр; $1 - \lambda \tilde{u}$ есть топологический гомоморфизм E в E. Размерность ядра этого гомоморфизма конечна и равна коразмерности образа.*

В самом деле, формула обращения (10) показывает, что отображение $v=1-\lambda\tilde{u}$ пространства E на $v(E)$ непрерывно обратимо справа и, таким образом, v есть топологический гомоморфизм. Кроме того (в обозначениях теоремы), $v(E)$ ортогонально векторному подпространству размерности p пространства E', т. е. имеет коразмерность p, что является также размерностью ядра отображения v. В частности, имеет место

Следствие 2. *Пусть $u\in E'\hat{\otimes}E$, λ — скаляр. Для того чтобы оператор $1-\lambda\tilde{u}$ в E был обратим, необходимо и достаточно, чтобы его ядро было нулем.*

Теорема 3 содержит все желательные сведения относительно решения уравнения $(1-\lambda u)x=y$, но не дает полной спектральной теории оператора u для его собственного значения $1/\lambda$. Чтобы идти дальше, нужно рассмотреть ядра $E^p_{1/\lambda}$ итерированных операторов $(1-\lambda u)^p$. Эти пространства образуют возрастающую последовательность подпространств пространства E, которая либо строго возрастает, либо строго возрастает до некоторого номера k, начиная с которого остается постоянной[1]). Объединение $E_{1/\lambda}$ пространств $E^p_{1/\lambda}$ мы будем называть *спектральным подпространством*, соответствующим собственному значению $1/\lambda$ оператора u; размерность пространства $E_{1/\lambda}$ называется *порядком собственного значения* $1/\lambda$. Если порядок n собственного значения $1/\lambda$ конечен, то имеет место второй из отмеченных выше двух случаев, причем $k\leqslant n$, а $E_{1/\lambda}$ совпадает с ядром оператора $(1-\lambda u)^p$ для всех целых $p\geqslant k$, в частности, для $p=n$. Мы увидим [без использования теории Рисса компактных операторов в банаховом пространстве[2])], что в нашем случае n конечно, точнее говоря, имеет место

Теорема 4. *Пусть E — банахово пространство, $u\in E'\hat{\otimes}E$, λ — нуль порядка n целой функции $\det(1-zu)$. Тогда $1/\lambda$ есть собственное значение порядка n оператора, определенного посредством u. Ядро $E_{1/\lambda}$ и образ $F_{1/\lambda}$ оператора $(1-\lambda u)^n$ представляют собой топологические дополнения в E, и $(1-\lambda u)$ индуцирует изоморфизм $F_{1/\lambda}$ на себя.*

Доказательство. Пусть n' — порядок собственного значения $1/\lambda$, т. е. размерность пространства $E_{1/\lambda}=\bigcup\limits_p E^p_{1/\lambda}$; покажем, что $n'\leqslant n$, т. е. что $\dim E^p_{1/\lambda}\leqslant n$ для всех p. Пространство $E^p_{1/\lambda}$ является по определению ядром оператора $(1-\lambda u)^p$; но $(1-\lambda u)^p=1+v_p$, где $v_p\in E'\hat{\otimes}E$, а ядро такого оператора конечномерно (теорема 3, следствие 1); таким образом, $E^p_{1/\lambda}$ конечномерно и имеет топологическое дополнение F[3]). Пусть p_1 и p_2 — проекторы, соответствующие этому разложению на прямую сумму. Пространство $E^p_{1/\lambda}$, очевидно, инвариантно относительно u, откуда следует (предположение 2 § 3, примененное к $-zu$), что

$$\det(1-zu)=\det(1-zu_1)\det(1-zu_2)\quad (u_i=p_iup_i);\tag{18}$$

[1]) Этот чисто алгебраический факт проверяется тривиально для последовательности итераций произвольного линейного оператора U (в данном случае $U=1-\lambda u$).

[2]) Поэтому излагаемая здесь теория применима в действительности к операторам Фредгольма в полном нормированном пространстве над произвольным v-нормированным полным телом с характеристикой 0 (тогда как теория Рисса перестает действовать, ибо операторы Фредгольма могут уже не быть компактными).

[3]) Вообще это требует теоремы Хана—Банаха, но здесь F обладает дополнением a priori (даже если не имеется в виду тело вещественных или комплексных чисел). В самом деле, мы видели, что если v — оператор Фредгольма в E, то можно найти базис $x_1,\ldots,x_p$ ядра оператора $1+v$ и элементы $a'_1,\ldots,a'_p$ из E' такие, что $\langle x_i, a'_j\rangle=\delta_{ij}$ [см. формулу (13)]; тогда $\sum a'_i\otimes x_i$ является непрерывным проектором пространства E на ядро оператора $1+v$.

но u_1 — оператор в конечномерном пространстве $E^p_{1/\lambda}$, имеющий единственное собственное значение $1/\lambda$, и, следовательно,

$$\det(1 - zu_1) = \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^d = (-1)^d (z-\lambda)^d, \text{ где } d = \dim E^p_{1/\lambda}.$$

Принимая во внимание (18), находим, что λ есть нуль по крайней мере порядка d определителя $\det(1 - zu)$, откуда $d \leqslant n$ и $n' \leqslant n$. При этом не может быть $n' < n$; в самом деле, возьмем в предыдущем рассуждении $p = n$ (таким образом, $E^p_{1/\lambda} = E^n_{1/\lambda}$); если $n' < n$, то из (18) будет следовать, что λ есть нуль определителя $\det(1 - zu_2)$, и, таким образом (теорема 3, следствие 2), будет существовать отличный от нуля элемент $x \in F$ такой, что

$$(1 - \lambda u_2).x = 0, \text{ т. е. } (1 - \lambda u).x \in E^n_{1/\lambda};$$

отсюда заключаем, что $(1 - \lambda u)^{n+1} x = 0$ и $x \in E_{1/\lambda}$, что абсурдно. Положим теперь

$$(1 - \lambda u)^n = 1 + v, \quad \text{где} \quad v \in E' \hat{\otimes} E;$$

остается показать, что ядро N и образ M оператора $1 + v$ являются топологическими дополнениями друг друга и что $1 - \lambda u$ индуцирует изоморфизм M на себя. Известно, что M ортогонально ядру N' оператора $1 + {}^t v$ и что N и N' имеют одну и ту же размерность (теорема 3); я утверждаю, что двойственность между N и N' отделима; в самом деле, если элемент $y \in N$ ортогонален к N', то имеем

$$y = (1 + v)\, x,$$

и так как $(1 + v)\, y = 0$, то

$$(1 + v)^2.x = (1 - \lambda u)^{2n}.x = 0,$$

откуда $x \in E_{1/\lambda}$ и $(1 - \lambda u)^n.x = 0$ (т. е. $y = 0$). Возьмем в N и N' биортогональные базисы (e_i) и (e'_i); оператор $\sum e'_i \otimes e_i$ будет непрерывным проектором E на N с ядром M, а N и ортогональное к N' пространство M будут топологическими дополнениями друг друга. Наконец, M инвариантно относительно u, а потому и относительно $1 - \lambda u$ (ибо это есть образ пространства E при отображении $1 + v = (1 - \lambda u)^n$, коммутирующем с u), и всякий элемент из M, принадлежащий ядру отображения $1 - \lambda u$, есть нуль, так как принадлежит N; отсюда следует (теорема 3, следствие 2), что $1 - \lambda u$ индуцирует *изоморфизм* M на себя.

Чтобы закончить, дадим некоторые указания насчет поведения мероморфной функции

$$(1 - z\tilde{u})^{-1} = \frac{1}{\det(1 - zu)} R(-zu)$$

в окрестности нуля λ знаменателя. Пусть по-прежнему $N = E_{1/\lambda}$ — ядро оператора $(1 - \lambda u)^n$, а M — его образ (n означает порядок нуля λ). Поскольку N и M инвариантны относительно u, имеем

$$\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \tag{19}$$

($u_i = p_i u h_i$, где p_i — проекторы E на N и M, соответствующие разложению $E = N + M$). Отсюда получаем

$$(1 - z\tilde{u})^{-1} = (1 - z\tilde{u}_1)^{-1} + (1 - z\tilde{u}_2)^{-1}, \tag{20}$$

причем правая часть рассматривается как оператор, являющийся прямой суммой двух операторов, определенных соответственно на N и M. Если мы хотим иметь формулы обращения в самой алгебре T, а не в $L(E)$, то (19) нужно писать в виде $u = u_1 + u_2 + w$, где w принадлежит радикалу алгебры $E' \hat{\otimes} E$; к правой части формулы (20) (с опущенными знаками $\sim$) следует прибавить поправочный член w. Второй член в правой части (20) остается голоморфным при $z=\lambda$ (теорема 4); чтобы оценить первый, положим

$$1-\lambda u_1=N_0, \quad \text{откуда} \quad u_1=\frac{1}{\lambda}(1-N_0); \tag{21}$$

оператор N_0 является нильпотентным в N, ибо $N_0^n=0$, и

$$(1-zu_1)=-\frac{z-\lambda}{\lambda}\left(1-\frac{z}{z-\lambda}N_0\right);$$

но если $w^n=0$, то $(1-w)^{-1}=1+w+\ldots+w^{n-1}$ и, следовательно,

$$(1-zu_1)^{-1}=-\frac{\lambda}{z-\lambda}\left(1+\frac{z}{z-\lambda}N_0+\ldots+\left(\frac{z}{z-\lambda}\right)^{n-1}N_0^{n-1}\right). \tag{22}$$

Заменим $z/(z-\lambda)$ на $1+\lambda/(z-\lambda)$; тогда получим разложение

$$(1-zu_1)^{-1}=A_1(z-\lambda)^{-1}+N_2(z-\lambda)^{-2}+\ldots+N_n(z-\lambda)^{-n}, \tag{23}$$

где $A_1=-\lambda 1+N_1$ и где N_i — нильпотентные операторы. Отождествляя операторы в N с элементами из $L(E)$, будем иметь

$$A_1=-\lambda P_{1/\lambda}+N_1, \tag{24}$$

где $P_{1/\lambda}=p_1$ — *спектральный проектор*, соответствующий собственному значению $1/\lambda$ оператора u; операторы N_i будут теперь нильпотентны в E, будут отображать E в спектральное пространство $N=E_{1/\lambda}$ (обращаясь в нуль на ядре M оператора $P_{1/\lambda}$) и будут коммутировать с u, а также между собой; таким образом, (23) дает главную часть разложения мероморфной функции (20) в окрестности точки $z=\lambda$ (которая, как видно из разложения, является полюсом). Итак,

$$(1-z\tilde{u})^{-1}=\rho(z)+A_1(z-\lambda)^{-1}+N_2(z-\lambda)^{-2}+\ldots+N_n(z-\lambda)^{-n}, \tag{25}$$

где $\rho(z)$ — функция, голоморфная при $z=\lambda$ (это оператор, равный нулю на спектральном пространстве $E_{1/\lambda}$ и совпадающий с $(1-zu)^{-1}$ на дополнительном подпространстве M), а остальные члены те же, что и раньше.

На основании соотношения

$$R(z)=D(z)(1-zu)$$

можно с помощью (25) охарактеризовать первые члены разложения целой голоморфной функции $R(z)$ в окрестности $z=\lambda$ [принимая во внимание, что λ есть нуль в точности n-го порядка функции $D(z)$]:

$$\begin{aligned}R(z)=M_0+M_1(z-\lambda)+\ldots+M_{n-2}(z-\lambda)^{n-2}+\\ +B_{n-1}(z-\lambda)^{n-1}+(z-\lambda)^n\sigma(z),\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$B_{n-1}=kP_{1/\lambda}+M_{n-1} \qquad \left[k=-\frac{\lambda}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}D(\lambda)\right]; \tag{27}$$

здесь M_i — нильпотентные операторы, отображающие E в $E_{1/\lambda}$, которые равны нулю на M и коммутируют с u (и между собой); $\sigma(z)$ — целая голоморфная функция аргумента z.

Из формул (24), (25), (26), (27), $\lambda\neq 0$, $k\neq 0$ вытекает, что $E_{1/\lambda}$ есть образ A_1 и B_{n-1} и что M есть ядро A_1 и B_{n-1}. Это может служить характеристикой пространств $E_{1/\lambda}$ и M, потому что A_1 есть *вычет* в точке λ мероморфной функции $(1-z\tilde{u})^{-1}$, а B_{n-1} (с точностью до множителя $(n-1)!$) есть $(n-1)$-я производная от $R(z)$ в точке $z=\lambda$. *Наконец, спектральный проектор $P_{1/\lambda}$ есть вычет в точке λ мероморфной функции* $-\frac{1}{z}(1-z\tilde{u})^{-1}$ *или также мероморфной функции* $-\frac{1}{D(z)}uR(z)$; доказательство достаточно провести для первой функции [которая равна $-\frac{1}{z}-\frac{1}{D(z)}uR(z)$ и имеет поэтому тот же вычет в точке λ, что и $-\frac{1}{D(z)}uR(z)]$, оно получается[1]), если выразить $-\frac{1}{z}(1-z\tilde{u})^{-1}$ посредством (22) и заметить, что вычеты всех членов полученной суммы равны нулю, кроме вычета первого члена, который равен 1.

Замечание. Целое число p, которое фигурирует в теореме 3, не превышает порядка n нуля λ определителя $\det(1-zu)$, ибо

$$p=\dim E^1_{1/\lambda},\quad n=\dim E_{1/\lambda}\quad \text{и}\quad E^1_{1/\lambda}\subset E_{1/\lambda}.$$

Равенство $p=n$ имеет место в том и только том случае, когда $E^1_{1/\lambda}=E_{1/\lambda}$, т. е. когда пространство собственных векторов, отвечающих собственному значению $1/\lambda$, совпадает с соответствующим спектральным пространством. В этом случае оператор N_0 из (21) (а потому также операторы N_i и M_i) равен нулю, так что (25) и (26) принимают вид

$$(1-z\tilde{u})^{-1}=\rho(z)-\lambda P_{1/\lambda}(z-\lambda)^{-1}, \tag{28}$$
$$R(z)=kP_{1/\lambda}(z-\lambda)^{n-1}+(z-\lambda)^n\sigma(z). \tag{29}$$

В частности, это имеет место всякий раз, когда u является *эрмитовым* или даже только *нормальным* (т. е. коммутирующим со своим сопряженным) оператором Фредгольма в гильбертовом пространстве (потому что в конечномерном гильбертовом пространстве нормальный оператор, имеющий только одно собственное значение, дает преобразование подобия).

§ 5. Обобщение на локально выпуклые пространства. Мы будем рассматривать сейчас исключительно *отделимые локально выпуклые* пространства E (на теле вещественных или комплексных чисел). *Абсолютно выпуклым* множеством в E называют всякое выпуклое звездно-симметричное множество. Если абсолютно выпуклое множество A ограничено в E, то E_A будет обозначать порожденное им векторное пространство с нормой

$$\|x\|_A=\inf_{x\in\lambda A}|\lambda|. \tag{1}$$

E_A — нормированное пространство; его единичным шаром является A, если, например, A замкнуто в E; E_A — банахово пространство (т. е. полное), если, например, A полно. Пусть V — абсолютно выпуклая окрестность нуля в E, а E_V — нормированное пространство, полученное факторизацией с помощью полунормы

$$\|x\|_V=\inf_{x\in\lambda V}|\lambda|. \tag{2}$$

$\hat{E}_V$ будет обозначать пополнение E_V. Существует естественное непрерывное линейное отображение E в $\hat{E}_V$, причем прообразом единичного шара является замыкание V.

Пусть E_i $(i=1,\ldots,n)$ — локально выпуклые пространства; обозначим через $\mathfrak{B}(E_1,\ldots,E_n)$ пространство n-линейных форм на $\prod E_i$, непрерывных относительно каждой переменной. Пусть в каждом E_i дано ограниченное

[1]) Оно получается также из следующего более общего предложения, без сомнения, хорошо известного, которое имеет место для *компактного* оператора u в E, обладающего собственным значением α: спектральный проектор оператора u относительно собственного значения α совпадает с интегралом Коши $\frac{1}{2\pi i}\int(\xi-u)^{-1}d\xi$, взятым в положительном направлении по контуру, окружающему α и не содержащему других собственных значений (таким образом, можно найти более общий «спектральный проектор», соответствующий открыто-замкнутой части спектра элемента u какой-либо полной нормированной алгебры с единицей). Данный в тексте результат получается отсюда заменой переменной $z\to 1/\xi$.

абсолютно выпуклое множество A_i такое, что $(E_i)_{A_i}$ полно, и пусть $u \in \hat{\bigotimes_i} (E_i)_{A_i}$. Всякая n-линейная форма f на $\prod_i E_i$, непрерывная по каждой переменной в отдельности, индуцирует непрерывную по отдельным переменным n-линейную форму $f_{(A_i)}$ на произведении банаховых пространств $(E_i)_{A_i}$; эта форма, как хорошо известно, является непрерывной. Следовательно, можно рассматривать скалярное произведение $\langle u, f_{(A_i)} \rangle$, которое является линейной формой от $f \in \mathfrak{B}(E_1, \ldots, E_n)$.

Определение 3. *Ядром Фредгольма относительно локально выпуклых пространств* E_i $(i = 1, \ldots, n)$ *называют всякую линейную форму на* $\mathfrak{B}(E_1, \ldots, E_n)$, *которая определена, как и выше, элементом пространства* $\hat{\bigotimes_i} (E_i)_{A_i}$ [*где* A_i *означает при любом* i *ограниченное абсолютно выпуклое множество в* E_i *такое, что* $(E_i)_{A_i}$ *полно*]. *Пространство ядер Фредгольма обозначается через* $E_1 \overline{\otimes} E_2 \overline{\otimes} \ldots \overline{\otimes} E_n$ *или* $\overline{\otimes} E_i$.

Можно проверить, что это в самом деле векторное пространство; оно находится в естественной двойственности с $\mathfrak{B}$ $(E_1, \ldots, E_n)$ и может быть наделено естественной локально выпуклой топологией пространства, сопряженного с $\mathfrak{B}$ $(E_1, \ldots, E_n)$ ([5], гл. I, § 3, пп. 1′ и 2), но оно не будет, вообще говоря, полно; здесь эта топология бесполезна. В случае, когда E_i — банаховы пространства, получаем снова пространство $\hat{\bigotimes_i} E_i$, определенное в § 1.

Используя теорему, отмеченную в конце § 1, или, скорее, ее (непосредственное) обобщение на n банаховых пространств, легко приходим к выводу, что *всякий элемент из* $\overline{\bigotimes_i} E_i$ *происходит от некоторого элемента пространства* $\hat{\bigotimes_i} (E_i)_{A_i}$, *где* A_i — *компактные абсолютно выпуклые множества в* E_i. (Действительно, это справедливо, если E_i — банаховы пространства.)

Пусть теперь E и F — два локально выпуклых пространства; наделим E' локально выпуклой топологией, промежуточной между слабой и сильной. Пусть $u_0 \in E'_B \hat{\otimes} F_A$, где A (соответственно B) — ограниченное абсолютно выпуклое множество в F (соответственно в E') такое, что F_A (соответственно E'_B) полно; u_0 определяет непрерывное линейное отображение $X \to u_0 X$ пространства $(E'_B)'$ в F_A. В композиции с естественным отображением $x \to x_B$ пространства E в $(E'_B)'$ оно дает линейное отображение пространства E в F_A, которое будет записываться в виде $x \to u_0 x$. По определению, для $x \in E$, $y' \in F'$ имеем

$$\langle u_0 x, y' \rangle = \langle u_0 x_B, y' \rangle = \langle u_0, x_B \otimes y' \rangle = \langle u, x \otimes y' \rangle,$$

где u — элемент из $E' \overline{\otimes} F$, определенный посредством u_0, а $x \otimes y'$ рассматривается как элемент из $\mathfrak{B}(E', F)$. Таким образом, отображение $x \to u_0 x$ пространства E в F зависит только от $u \in E' \overline{\otimes} F$; его можно обозначить через $\tilde{u}$ или $x \to ux$. По определению,

$$\langle ux, y' \rangle = \langle u, x \otimes y' \rangle. \tag{3}$$

Эти линейные отображения $x \to ux$ пространства E в F не зависят от топологии, взятой в E', ибо даже для слабой топологии (которая a priori дает больше всего отображений) всякое $u \in E' \overline{\otimes} F$ определено посредством $u_0 \in E'_B \hat{\otimes} F_A$, где B — *слабо компактное* абсолютно выпуклое множество в E' (см. выше), a fortiori ограниченное и полное для *сильной* топологии в E'. Можно предположить B компактным для сильной топологии, а A компактным в F.

Определение 4. *Пусть E и F — два локально выпуклых пространства, E' — сопряженное с E пространство, наделенное сильной топологией. Отображением Фредгольма пространства E в F называют всякое отображение, определенное ядром Фредгольма из $E'\overline{\otimes}F$, т. е. некоторым $u_0 \in E'_B\hat{\otimes}F_A$, где A (соответственно B) — абсолютно выпуклое множество в F (соответственно в E').*

Если E и F — банаховы пространства, то получаем снова определение, введенное в § 1.

«Напоминание. Пусть A (соответственно B) — ограниченное абсолютно выпуклое множество в F (соответственно в E') такое, что F_A (соответственно E'_B) полно, $u_0 \in E'_B\hat{\otimes}F_A$; отображение Фредгольма, определенное посредством u_0, является композицией отображений

$$E \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\beta} F_1 \xrightarrow{\gamma} F, \tag{4}$$

где $E_1 = \hat{E}_{B^0}$ (B^0 — поляра B в E), $F_1 = F_A$, α и γ означают канонические отображения, β — отображение Фредгольма E_1 в F_1, определенное посредством u_0. Пусть T — локально выпуклая топология в E, промежуточная между топологией Макки $\tau(E, E')$ и топологией равномерной сходимости на сильно компактных абсолютно выпуклых множествах в E'. Согласно предыдущему, отображения Фредгольма пространства E в F суть композиции последовательности (4), где E_1 и F_1 — *банаховы* пространства, α — непрерывное в T линейное отображение, γ — непрерывное линейное отображение F_1 в F, β — отображение Фредгольма E_1 в F_1. A fortiori, всякое отображение Фредгольма слабо непрерывно [ибо непрерывно в топологии $\tau(E, E')$ и в данной топологии в F], но оно может не быть непрерывным. *Ядерным* отображением пространства E в F называют композицию отображений (4), где α предполагается непрерывным; таким образом, это отображение отвечает элементу пространства $E'_B\hat{\otimes}F_A$, где B — слабо замкнутое *равностепенно* непрерывное абсолютно выпуклое множество в E', а A — ограниченное абсолютно выпуклое множество в F такое, что F_A полно. Ядерное отображение непрерывно. Отображения Фредгольма E в F совпадают с ядерными отображениями пространства E, наделенного топологией τ, в F (можно было бы ограничиться рассмотрением только ядерных отображений).

Отметим, что понятие отображения Фредгольма пространства E в F зависит только от сопряженных систем (E, E') и (F, F'). Более того, если система (E, E') дана, то оно зависит только от семейства ограниченных множеств в F, и даже только от семейства ограниченных абсолютно выпуклых множеств A таких, что F_A полно (или от семейства компактных абсолютно выпуклых множеств в F). Практически в векторном пространстве F никогда не встречаются две отделимые локально выпуклые топологии, которые давали бы два различных семейства ограниченных абсолютно выпуклых множеств A таких, что F_A полно (т. е. для которых имелось бы линейное отображение некоторого банахова пространства H в F, непрерывное в одной топологии и разрывное в другой); таким образом, всякая локально выпуклая топология, какую только можно взять в векторном пространстве F, приводит к одному и тому же понятию отображения Фредгольма пространства E в F».

Для упрощения будем предполагать далее, что все сопряженные пространства наделены сильной топологией. Определим, как и в случае банаховых пространств, композиции $u.\,A$, $B.\,u$, $B.\,u.\,A$ (где $u \in E'\overline{\otimes}F$, A — слабо непрерывное линейное отображение локально выпуклого пространства G в E, B — слабо непрерывное линейное отображение F в локально выпуклое пространство H); это будут соответственно элементы из $G'\overline{\otimes}F$, $E'\overline{\otimes}H$, $G'\overline{\otimes}H$.

Свойства ассоциативности остаются в силе. Это позволяет составить композицию двух ядер Фредгольма $u \in E' \overline{\otimes} F$ и $v \in F' \overline{\otimes} G$; тогда

$$vu \in E' \overline{\otimes} G \quad \text{и} \quad v.\,u = \tilde{v}.u = v.\,\tilde{u}.$$

В частности, $E' \overline{\otimes} E$ *есть алгебра* (без единицы, если размерность E бесконечна).

Рассмотрим билинейную каноническую форму e на $E' \otimes E$; она непрерывна по каждой переменной в отдельности, и для любого $u \in E' \overline{\otimes} E$ можно положить

$$\operatorname{Tr} u = \langle u, e \rangle. \tag{5}$$

В более общем случае определяем для $u_i \in E' \overline{\otimes} E$ $(i = 1, \ldots, n)$ величины $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$ следующим образом: все u_i происходят от некоторых элементов u_i^0 одного и того же пространства $E'_B \hat{\otimes} E_A$; для аргументов $v_i \in E'_B \hat{\otimes} E_A$ величины $\alpha_n(v_1, \ldots, v_n)$ удовлетворяют условию

$$\alpha_n(x'_1 \otimes x_1, \ldots, x'_n \otimes x_n) = \frac{1}{n!} \det(\langle x_i, x'_j \rangle)$$

$(x_i \in E_A,\ x'_j \in E'_B)$, и $\alpha_n(u_1^0, \ldots, u_n^0)$ зависит только от u_i (но не от A, B и не от выбора u_i^0); последнее вытекает из того, что $\alpha_n(x' \otimes x, v_2, \ldots, v_n)$— билинейная функция f на $E' \times E$, непрерывная по каждой переменной в отдельности, и такая, что

$$\alpha_n(v_1, \ldots, v_n) = \begin{cases} \langle v_1, f_{B,A} \rangle \ (\text{где } f_{B,A} - \text{сужение } f \text{ на } E'_B \times E_A), \\ \langle u_1, f \rangle \ (\text{где } u_1 - \text{элемент из } E' \overline{\otimes} E, \text{ определяемый элементом } v_1), \end{cases}$$

т. е. равная нулю, если $u_1 = 0$. Имея α_n, можно с помощью обычной формулы определить еще α^p_{n+p}.

Пусть n, p — целые числа $\geqslant 0$, u_i, v_j $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, p-1)$ — элементы пространства $E' \overline{\otimes} E$ и $x \in E$. Элементы u_i и v_j происходят от элементов u_i^0, v_j^0 одного и того же пространства $E'_B \hat{\otimes} E_A$, и можно предположить, что $x \in A$. Поскольку существует естественное непрерывное линейное отображение пространства E'_B в $(E_A)'$, получаем элементы $\bar{u}_i^0$, $\bar{v}_j^0$ из $(E_A)' \hat{\otimes} E_A$ и элемент $R^p_n(\bar{u}_1^0, \ldots, \bar{u}_n^0)(\bar{v}_1^0, \ldots, \bar{v}_{p-1}^0)\,x$ из E_A (следовательно, из E), зависящий линейно от $x \in E_A$. Для $x' \in E'$ имеем

$$\langle R^p_n(\ldots)(\ldots)\,x, x' \rangle = \alpha^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}, x' \otimes x),$$

и этот элемент зависит только от u_i, v_j и x (но не от A, B, u_i^0, v_j^0). Итак, для заданных u_i, v_j получаем линейное отображение $R^p_n(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1})$ пространства E в себя

$$\langle R^p_n(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1})\,x, x' \rangle = \alpha^p_{n+p}(u_1, \ldots, u_n)(v_1, \ldots, v_{p-1}, x' \otimes x), \tag{6}$$

которое является мультилинейной и симметричной функцией от u_i и v_j. Вместо $R^p_n(\underbrace{u, \ldots, u}_{n})$ пишут коротко $R^p_n(u)$; для заданного $u \in E' \overline{\otimes} E$ это есть $(p-1)$-линейное отображение $(E' \overline{\otimes} E)^{p-1}$ в пространство линейных отображений E в E. Полученные линейные отображения в E имеют вид $\lambda.\,1 + \tilde{u}$, где $u \in E' \overline{\otimes} E$; таким образом, они слабо непрерывны.

Аналогично определяются величины

$$d^p_n(u_1, \ldots, u_{n+p}) \quad \text{и} \quad d^p_n(u) = d^p_n(\underbrace{u, \ldots, u}_{n+p}),$$

которые являются элементами из $(\overline{\overset{p}{\otimes}} E)\overline{\otimes}(\overline{\overset{p}{\otimes}} E')$ (для заданных $u_i \in E'\overline{\otimes} E$), и соответствующие $(p-1)$-линейные отображения

$$r_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p}) \quad \text{и} \quad r_n^p(u) = r_n^p(\underbrace{u, \ldots, u}_{n+p})$$

пространства $(\mathfrak{B}(E', E'))^{p-1}$ в $E'\overline{\otimes} E$.

Кроме того, с помощью оценок, сделанных в § 2, проверяется сходимость рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(u), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+p}^p(u)(v_1, \ldots, v_p),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1}), \qquad \sum_{n=0} d_n^p(u) \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n^p(u)(v_1, \ldots, v_{p-1});$$

первые два — абсолютно сходящиеся числовые ряды; третий абсолютно сходится в пространстве $L(E_V, E_A)$, где V — абсолютно выпуклая окрестность нуля в пространстве E, наделенном топологией $\tau(E, E')$, а A — компактное абсолютно выпуклое множество в E; четвертый происходит от абсолютно сходящегося ряда в пространстве $(\overset{p}{\hat{\otimes}} E_A)\hat{\otimes}(\overset{p}{\hat{\otimes}} E'_B)$; наконец, последний ряд абсолютно сходится в пространстве $E'_B \hat{\otimes} E_A$. Таким образом, определены функции

$$D(u) = \det(1+u), \; D^p(u), \; R^p(u), \; d^p(u) \quad \text{и} \quad r^p(u).$$

Все эти величины удовлетворяют тождествам, приведенным в гл. I; в частности, имеет место соотношение

$$(1+u)R(u) = R(u)(1+u) = \det(1+u), \tag{7}$$

а также более общие соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&(1+u)R^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p) = \\
&\qquad = (D^p(u)(v_1, \ldots, v_p))\,1 - \sum_{i=1}^{p} v_i R^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p), \\
&(R^{p+1}(u)(v_1, \ldots, v_p))(1+u) = \\
&\qquad = (D^p(u)(v_1, \ldots, v_p))\,1 - \sum_{i=1}^{p} (R^p(u)(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p))\,v_i.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) позволяют развернуть теорию Фредгольма в точности так же, как в случае банаховых пространств; теоремы 2, 3 и 4 остаются полностью в силе. Следует всегда помнить, что *отличные от нуля собственные значения оператора и являются величинами, обратными нулям целой функции* $\det(1+zu)$, *причем порядок собственного значения* (определенный в § 4) *совпадает с порядком нуля аналитической функции.*

Более отчетливое представление об элементах пространства $E\overline{\otimes} F$ получается, если использовать теорему, отмеченную в конце § 1: *элементы из* $E\overline{\otimes} F$ *представляют собой ряды* $\sum \lambda_i x_i \otimes y_i$, *где* (λ_i) — *суммируемая последовательность, а* (x_i) [*соответственно* (y_i)] — *последовательность, состоящая из элементов компактного абсолютно выпуклого множества в* E (*соответственно в* F). В частности, когда элементы из $E'\overline{\otimes} E$ представлены такими рядами, величины $\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)$ легко выразить при помощи рядов.

Глава III

ПРИЛОЖЕНИЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ

§ 1. Определение операторов Фредгольма посредством интегралов. Пусть M — локально компактное пространство, μ — мера на этом пространстве; обозначим через $\mathscr{L}^1(\mu)$ пространство суммируемых по мере μ функций (или скорее классов функций) на M, наделенное своей естественной нормой

$$\|\varphi\|_1=\int|\varphi(s)|\,d|\mu|(s);$$

оно является банаховым пространством. Пусть, далее, E — банахово пространство; через $\mathscr{L}^1_E(\mu)$ обозначим пространство интегрируемых отображений (или скорее классов отображений) M в E, наделенное нормой

$$\|f\|_1=\int\|f(s)\|\,d|\mu|(s),$$

которое тоже является банаховым пространством. Пусть $\varphi.a$ обозначает для любых $\varphi\in\mathscr{L}^1(\mu)$ и $a\in E$ функцию $\varphi(s)a$ из $\mathscr{L}^1_E(\mu)$; тогда имеем

$$\|\varphi.a\|_1\leqslant\|\varphi\|_1\|a\|,$$

и $(\varphi, a)\to\varphi.a$ есть билинейное отображение с нормой $\leqslant 1$ пространства $\mathscr{L}^1(\mu)\times E$ в $\mathscr{L}^1_E(\mu)$; оно определяет, таким образом, линейное отображение с нормой $\leqslant 1$ пространства $\mathscr{L}^1(\mu)\hat{\otimes}E$ в $\mathscr{L}^1_E(\mu)$.

Теорема 1. *Пусть M — локально компактное пространство, μ — мера на M, E — банахово пространство. Естественное линейное отображение пространства $\mathscr{L}^1(\mu)\hat{\otimes}E$ в $\mathscr{L}^1_E(\mu)$ есть метрический изоморфизм первого пространства на второе.*

Образ первого пространства есть плотное множество во втором, и потому достаточно показать, что имеется метрический изоморфизм первого пространства во второе. Пусть F_0 — плотное подпространство пространства $F=\mathscr{L}^1(\mu)$, состоящее из «ступенчатых» функций; тогда $F_0\hat{\otimes}E$ плотно в $F\hat{\otimes}E$. Всякий элемент f из $F_0\otimes E$ может быть записан в виде $\sum_i\varphi_{A_i}\otimes a_i$, где $a_i\in E$, а φ_{A_i} — характеристические функции попарно *не пересекающихся интегрируемых множеств* A_i. Его образ $\tilde{f}=\sum_i\varphi_{A_i}a_i$ в $\mathscr{L}^1_E(\mu)$ имеет норму $\sum|\mu|(A_i)\|a_i\|$, которая a priori $\leqslant$ нормы f. С другой стороны, по определению нормы в $F\hat{\otimes}E$, из выражения $f=\sum_i\varphi_{A_i}\otimes a_i$ следует, что

$$\|f\|_1\leqslant\sum\|\varphi_{A_i}\|_1\|a_i\|=\sum|\mu|(A_i)\|a_i\|=\|\tilde{f}\|_1$$

и, таким образом, индуцированное отображение произведения $E_0\otimes E$ в $\mathscr{L}^1_E(\mu)$ изометрично.

Эта теорема является одной из самых полезных в теории топологических тензорных произведений, и в [5] мы рассматриваем (гл. I, § 2, п. 2) другое ее доказательство, а также многочисленные применения. Предшествующее может быть целиком применено к пространству $l^1(I)$ (с v-нормированным полным телом), построенному на произвольном множестве индексов I.

Следствие 1. *Пусть M — локально компактное пространство, наделенное мерой μ, E — банахово пространство; отображения Фредгольма и пространства E в $\mathscr{L}^1(\mu)$ определены интегрируемым отображением f про-*

странства M в E' посредством формулы

$$u.x(s) = \langle x, f(s)\rangle. \tag{1}$$

t-норма отображения u (см. § 1 гл. II) *равна норме f в $\mathscr{L}^1_E(\mu)$*

$$\|u\|_1 = \|f\|_1.$$

Разумеется, формула (1) означает в действительности, что $u.x$ есть *класс* функций $s \to \langle x, f(s)\rangle$. Отображения Фредгольма пространства E в $\mathscr{L}^1(\mu)$ определяются элементами пространства $E' \hat{\otimes} \mathscr{L}^1(\mu)$, которое, согласно теореме 1, отождествляется с $\mathscr{L}^1_{E'}(\mu)$; это приводит к характеристике отображений Фредгольма пространства E в $\mathscr{L}'(\mu)$ и показывает, что естественное отображение $E' \hat{\otimes} \mathscr{L}^1(\mu)$ в пространство непрерывных операторов, отображающих E в F, взаимно однозначно; отсюда данное выражение t-нормы оператора u.

Следствие 2. *Пусть M — локально компактное пространство, $\mathscr{C}_0(M)$ — пространство непрерывных скалярных функций на M, равных нулю в бесконечности, наделенное равномерной нормой, E — банахово пространство. Для всякой меры μ на M и всякого μ-интегрируемого отображения f пространства M в E отображение*

$$u.\varphi = \int \varphi(s) f(s)\, d\mu(s) \tag{2}$$

пространства $\mathscr{C}_0(M)$ в E есть отображение Фредгольма, которое имеет t-нормой $\int \|f(s)\|\, d|\mu|(s)$. Обратно, всякое отображение Фредгольма пространства $\mathscr{C}_0(M)$ в E получается указанным образом.

По теореме 1, отображение f определяет элемент из $\mathscr{L}^1(\mu) \hat{\otimes} E$ и, следовательно, из $(\mathscr{C}_0(M))' \hat{\otimes} E$ [ибо $\mathscr{L}^1(\mu)$ отождествляется с нормированным векторным подпространством пространства, сопряженного с $\mathscr{C}_0(M)$]; соответствующее ему отображение Фредгольма u, очевидно, определяется формулой (2). Естественное отображение $\mathscr{L}^1(\mu) \hat{\otimes} E$ в $\mathscr{M}^1(M) \hat{\otimes} E$ [где $\mathscr{M}^1(M)$ означает сопряженное с $\mathscr{C}_0(M)$ пространство ограниченных мер на M] есть метрический изоморфизм, ибо $\mathscr{L}^1(\mu)$ отождествляется с нормированным векторным подпространством пространства $\mathscr{M}^1(M)$ и существует естественная проекция с нормой 1 пространства $\mathscr{M}^1(M)$ на $\mathscr{L}^1(\mu)$ (которая всякой ограниченной мере ν на M сопоставляет ее «составляющую по μ» в разложении Рисса этой меры); с другой стороны, для любой последовательности $\mu_i \in \mathscr{M}^1(M)$ существует мера $\mu \in \mathscr{M}^1(M)$ такая, что

$$\mathscr{L}^1(\mu) \supset \mathscr{L}^1(\mu_i) \quad \text{при любом } i$$

[можно взять $\mu = \sum_i (|\mu_i|/2^i \|\mu_i\|)$]; таким образом, объединение подпространств $\mathscr{L}^1(\mu) \hat{\otimes} E$ пространства $\mathscr{M}^1(M) \hat{\otimes} E$, будучи плотным и полным, совпадает с $\mathscr{M}^1(M) \hat{\otimes} E$. С помощью формулы (2) получаются всевозможные отображения пространства $\mathscr{C}_0(M)$ в E; если u равно нулю, то $f \in \mathscr{L}^1_E(\mu)$ тоже равно нулю, и каноническое отображение $\mathscr{M}^1(M) \hat{\otimes} E$ в пространство отображений Фредгольма $\mathscr{C}_0(M)$ в E является взаимно однозначным. Отсюда данное выражение t-нормы для u.

Следствия 1 и 2 позволяют определить операторы Фредгольма, отображающие E в $\mathscr{L}^1(\mu)$ и $\mathscr{C}_0(M)$ в E. Отметим один важный частный случай.

Следствие 3. *Пусть M и L — два компактных пространства, μ — мера на L, $K(s, t)$ — непрерывная функция на $M \times L$. Линейное ото-*

бражение $\varphi \to K.\varphi$ *пространства* $C(L)$ *в* $C(M)$

$$K.\varphi(s) = \int K(s, t)\,\varphi(t)\,d\mu(t) \tag{3}$$

есть отображение Фредгольма с t-нормой, равной

$$\int \sup_s |K(s, t)|\,d|\mu|(t).$$

В самом деле, будем рассматривать $K(s, t)$ как непрерывное отображение $t \to K_t$ пространства L в $C(M)$; тогда

$$K.\varphi = \int \varphi(t)\,K_t\,d\mu(t),$$

и мы имеем случай, рассмотренный в следствии 2.

Пусть теперь E и F — банаховы пространства, M — локально компактное пространство, наделенное мерой μ.

Обозначим через $\mathscr{L}^{\infty}_{E'_s}(\mu)$ пространство скалярно измеримых и скалярно ограниченных отображений M в E' [т. е. таких отображений $g(s)$, что функция $\langle x, g(s)\rangle$ измерима и ограничена на M при любом $x \in E$], точнее, фактор-пространство пространства этих отображений по модулю таких отображений $g(s)$, что функция $\langle x, g(s)\rangle$ локально почти всюду равна нулю для каждого $x \in E$. Функция $g \in \mathscr{L}^{\infty}_{E'_s}(\mu)$ определяет линейное отображение пространства E в $\mathscr{L}^{\infty}(\mu)$; по теореме о замкнутом графике это отображение непрерывно, и его норму мы обозначим через $\|g\|_{\infty}$. С этой нормой $\mathscr{L}^{\infty}_{E'_s}(\mu)$ является банаховым пространством. Далее мы ставим себе целью определить для любых $g \in \mathscr{L}^{\infty}_{E'_s}(\mu)$ и $f \in \mathscr{L}^{1}_{F}(\mu)$ элемент из $E' \hat{\otimes} F$, который будем записывать в виде интеграла

$$\int g(s) \otimes f(s)\,d\mu(s)$$

и который должен зависеть билинейно от f, g и иметь норму $\leqslant \|f\|_1 \|g\|_{\infty}$; это будет билинейное отображение произведения $\mathscr{L}^{\infty}_{E'_s}(\mu) \times \mathscr{L}^{1}_{F}(\mu)$ в $E' \hat{\otimes} F$. В силу теоремы 1, имеем

$$L^1_F(\mu) = L^1(\mu) \hat{\otimes} F;$$

таким образом, поставленная задача сводится к определению трилинейного отображения произведения $\mathscr{L}^{\infty}_{E'_s}(\mu) \times \mathscr{L}^{1}(\mu) \times F$ в $E' \hat{\otimes} F$ с нормой $\leqslant 1$; для этого сопоставим тройке (g, φ, a) элемент $(g.\varphi) \otimes a$, где

$$g.\varphi = \int \varphi(s)\,g(s)\,d\mu(s) \quad \text{(слабый интеграл в } E');$$

поскольку (определение слабого интеграла) $\varphi \to g.\varphi$ есть отображение пространства $\mathscr{L}^1(\mu)$, индуцированное транспозицией естественного линейного отображения E в $\mathscr{L}^{\infty}(\mu)$, определенного посредством g, его норма равна $\|g\|_{\infty}$, откуда

$$\|g.\varphi\| \leqslant \|g\|_{\infty} \|\varphi\|_1$$

и

$$\|(g.\varphi) \otimes a\| \leqslant \|g\|_{\infty} \|\varphi\|_1 \|a\|.$$

Пусть $A \in L(F, E)$, ${}^tA$ — непрерывная билинейная форма на $E' \times F$, определенная посредством A; я утверждаю, что

$$\left.\begin{aligned} \left\langle \int g(s) \otimes f(s)\,d\mu(s), {}^tA \right\rangle &= \int \langle g(s) \otimes f(s), {}^tA\rangle\,d\mu(s) \\ &\left(= \int \langle A.f(s), g(s)\rangle\,d\mu(s) \right) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[это оправдывает отчасти использованное интегральное обозначение: речь идет о слабом интеграле в пространстве $E'\hat{\otimes}F$, находящемся в двойственности (возможно, неотделимой) с подпространством $L(F, E)$ обычного сопряженного с $E'\hat{\otimes}F$ пространства $B(E', F)\approx L(F, E'')$]. Поскольку $s\longrightarrow Af(s)$ есть интегрируемое отображение M в E, функция $\langle Af(s), g(s)\rangle$ суммируема [аппроксимировать $Af(s)$ последовательностью ступенчатых функций] и имеет в $\mathscr{L}^1(\mu)$ норму $\leqslant \|A\|.\ \|g\|_\infty\|f\|_1$. Чтобы проверить равенство двух крайних членов в (4), можно, таким образом, ограничиться случаем, когда f имеет вид $\varphi\otimes a\,[\varphi\in\mathscr{L}^1(\mu),\ a\in F]$, а тогда это ясно непосредственно. В частности, когда $A=y'\otimes x$ $(y'\in F',\ x\in E)$, формула (4) дает

$$\Big\langle\Big(\int g(s)\otimes f(s)\,d\mu(s)\Big).\,x,\ y'\Big\rangle=\int\langle(g(s)\otimes f(s)).\,x,\ y'\rangle\,d\mu(s)=$$
$$=\int\langle x,\ g(s)\rangle\langle f(s),\ y'\rangle\,d\mu(s),\tag{5}$$

откуда видим, что оператор Фредгольма, определенный посредством $\int g(s)\otimes f(s)\,d\mu(s)$, есть $\int g(s)\otimes f(s)\,d\mu(s)$, рассматриваемый как слабый интеграл в пространстве $L(E, F)$ (находящемся в двойственности с $E\otimes F'$).

Пусть дано n элементов из $E'\hat{\otimes}E$

$$u_i=\int g_i(s)\otimes f_i(s)\,d\mu(s)\in E'\hat{\otimes}E\qquad [g_i\in L^\infty_{E'_s}(\mu),\ f_i\in L^1_E(\mu)];\tag{6}$$

ограничиваясь случаем простых f_i, находим

$$\alpha_n(u_1, \ldots, u_n)=\frac{1}{n!}\int\ldots\int\det(\langle f_i(s_i),\ g_j(s_j)\rangle)\,d\mu(s_1)\ldots d\mu(s_n).\tag{7}$$

Применяя тот же метод, а также формулу (11) § 6 гл. I, получаем

$$\delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})=\int\ldots\int\Delta_1 g_{n+1}(s_{n+1})\otimes\ldots\otimes g_{n+p}(s_{n+p})\,d\mu(s_1)\ldots d\mu(s_{n+p}),\tag{8}$$

где определитель

$$\Delta_1=\det\begin{pmatrix}\langle f_1(s_1),\ g_1(s_1)\rangle & \ldots & \langle f_1(s_1),\ g_n(s_n)\rangle & \overbrace{f_1(s_1)\ldots f_1(s_1)}^{p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \langle f_{n+p}(s_{n+p}),\ g_1(s_1)\rangle & \ldots & \langle f_{n+p}(s_{n+p}),\ g_n(s_n)\rangle & f_{n+p}(s_{n+p})\ldots f_{n+p}(s_{n+p})\end{pmatrix}$$

означает элемент из $(\overset{p}{\otimes}E)\otimes(\overset{p}{\otimes}E')$, определенный в гл. I (§ 6); интеграл в правой части (8) следует, строго говоря, определить как введенный выше символ

$$\int g(s)\otimes f(s)\,d\mu(s),$$

но если ограничиться рассмотрением $2n$-линейной формы на $E'^p\times E^p$, определенной посредством $\delta_n^p(u_1, \ldots, u_{n+p})$ (что достаточно для дальнейшего), то правую часть (8) можно считать слабым интегралом в пространстве $B(\underbrace{E', \ldots, E'}_{p}, \underbrace{E, \ldots E}_{p})$, находящемся в двойственности с $(\overset{p}{\otimes}E')\otimes(\overset{p}{\otimes}E)$.

Формулы (7) и (8) при $u_1=\ldots=u$ принимают вид

$$\alpha_n(u)=\frac{1}{n!}\int\ldots\int\det(\langle f(s_i),\ g(s_j)\rangle)\,d\mu(s_1)\ldots d\mu(s_n),\tag{9}$$

$$\delta_n^p(u)=\frac{1}{n!}\int\ldots\int\Delta g(s_{n+1})\otimes\ldots\otimes g(s_{n+p})\,d\mu(s_1)\ldots d\mu(s_{n+p}),\tag{10}$$

где

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \langle f(s_1), g(s_1)\rangle & \ldots & \langle f(s_1), g(s_n)\rangle & \overbrace{f(s_1)\ldots f(s_1)}^{p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle f(s_{n+p}), g(s_1)\rangle & \ldots & \langle f(s_{n+p}), g(s_n)\rangle & f(s_{n+p})\ldots f(s_{n+p}) \end{pmatrix}.$$

Резюмируя, получаем

Предложение 1. *Пусть E и F — банаховы пространства, M — локально компактное пространство, наделенное мерой μ. Для любых $g \in \mathcal{L}^{\infty}_{E'_s}(\mu)$ и $f \in \mathcal{L}'_F(\mu)$ можно определить единственным образом элемент u из $E' \hat{\otimes} F$ (обозначаемый интегралом $\int g(s) \otimes f(s)\, d\mu(s)$) условием, что он зависит билинейно и непрерывно от g и f и при $f = \varphi \otimes a$ ($\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $a \in F$) совпадает с $(g.\varphi) \otimes a$ [где $g.\varphi = \int \varphi(s) g(s)\, d\mu(s)$ означает слабый интеграл в E']. Для любого $A \in L(F, E)$ имеет место формула (4), и оператор Фредгольма, определенный посредством u, равен интегралу $\int g(s) \otimes f(s)\, d\mu(s)$, рассматриваемому как слабый интеграл в пространстве $L(E, F)$, находящемся в двойственности с $E \otimes F'$. Если $F = E$, то имеют место формулы (9) и (10).*

По-видимому, все явные представления операторов Фредгольма посредством ядер входят в схему предложения 1. Уточним теперь вид формул решения Фредгольма для интегральных операторов в классическом случае.

§ 2. Классический случай: оператор определен непрерывным ядром. Пусть M — компактное пространство, наделенное мерой μ, $K(s, t)$ — непрерывная функция на $M \times M$; оператор $f \to K.f$ в пространстве $\mathscr{C}(M)$ непрерывных функций на M, определенный (посредством $K(s, t)$) равенством

$$K.f(s) = \int K(s, t) f(t)\, d\mu(t), \tag{1}$$

есть оператор Фредгольма (теорема 1, следствие 3), обозначаемый опять буквой K; его можно записать в обозначениях предложения 1 следующим образом:

$$K = \int \varepsilon_t \otimes K_t\, d\mu(t), \tag{2}$$

где ε_t означает при любом $t \in M$ элемент сопряженного с $\mathscr{C}(M)$ пространства $\mathscr{M}(M)$ такой, что $\langle \varphi, \varepsilon_t\rangle = \varphi(t)$, а K_t — элемент $s \to K(s, t)$ из $\mathscr{C}(M)$. Отображение $t \to \varepsilon_t$ есть слабо непрерывное отображение M в $\mathscr{M}(M)$, а $t \to K_t$ — непрерывное отображение M в $\mathscr{C}(M)$; предложение 1, таким образом, применимо. Как уже было сказано, делать различие между ядрами и операторами Фредгольма здесь бесполезно и (2) можно рассматривать как интеграл операторной функции. Выпишем для этого случая формулы (9) и (10) из § 1, причем для простоты используем классическое обозначение

$$K\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_n \\ t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} = \det (K(s_i, t_j))_{i, j \leq n}; \tag{3}$$

мы получаем непрерывную функцию $2n$ аргументов $s_i, t_j \in M$, и формула (9) § 1 принимает вид

$$\alpha_n(K) = \frac{1}{n!} \int \ldots \int K\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_n \\ t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} d\mu(s_1) \ldots d\mu(s_n), \tag{4}$$

откуда

$$\det(1 - zK) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \alpha_n(K) z^n.$$

Вообще всякая непрерывная функция $N\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix}$ на $M^p \times M^p$ определяет $2p$-линейную непрерывную форму на $(\mathscr{M}(M))^p \times (\mathscr{M}(M))^p$ посредством формулы

$$\langle N, \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p \otimes \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_p \rangle =$$
$$= \int \ldots \int N\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} d\mu_1(s_1) \ldots d\mu_p(s_p)\, d\nu_1(t_1) \ldots d\nu_p(t_p); \tag{5}$$

отсюда, рассматривая композицию с естественным линейным отображением пространства $\mathscr{C}(M)$ в $\mathscr{L}^1(M) \subset \mathscr{M}(M)$, получаем непрерывную $2p$-линейную форму на $(\mathscr{M}(M))^p \times (\mathscr{C}(M))^p$, выраженную формулой

$$\langle N, \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \rangle =$$
$$= \int \ldots \int N\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} d\mu_1(s_1) \ldots d\mu_p(s_p)\, \varphi_1(t_1)\, d\mu(t_1) \ldots \varphi_p(t_p)\, d\mu(t_p). \tag{6}$$

Если в $2p$-линейной форме (5) фиксировать $2p-1$ аргументов μ_i, ν_i (например, все, кроме ν_p), то линейная форма относительно аргумента, который остается свободным, будет слабо непрерывной [под слабой топологией мы понимаем здесь слабую топологию пространства, сопряженного с $\mathscr{C}(M)$] и будет выражаться явным образом через элемент из $\mathscr{C}(M)$

$$t \to \int \ldots \int N\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_{p-1}, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_{p-1}, & t \end{pmatrix} d\mu_1(s_1) \ldots d\mu_p(s_p)\, d\nu_1(t_1) \ldots d\nu_{p-1}(t_{p-1}).$$

Отсюда заключаем, что если фиксировать $p-1$ пар элементов (μ_i, ν_i), например те, которые отвечают индексам $i = 1, \ldots, p-1$, то линейное отображение $\mathscr{M}(M)$ в $\mathscr{C}(M)$, сопоставляющее всякому $\nu_p \in \mathscr{M}(M)$ линейную форму (элемент из $\mathscr{C}(M)$) аргумента μ_p, определенную формулой (5), будет непрерывным для слабых топологий на $\mathscr{M}(M)$ и на $\mathscr{C}(M)$; это отображение, а значит, также соответствующее ему линейное отображение $\mathscr{C}(M)$ в $\mathscr{C}(M)$ [полученное посредством композиции с каноническим отображением $\mathscr{C}(M)$ в $\mathscr{M}(M)$] задается ядром

$$\langle N, \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_{p-1} \otimes \varepsilon_s \otimes \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_{p-1} \otimes \varepsilon_t \rangle, \tag{7}$$

которое является непрерывной функцией двух переменных s и $t \in M$.

Введем теперь следующую непрерывную функцию аргументов s_i, t_j:

$$d_n^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \int \ldots \int K\begin{pmatrix} \sigma_1, & \ldots, & \sigma_n, & s_1, & \ldots, & s_p \\ \sigma_1, & \ldots, & \sigma_n, & t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} d\mu(\sigma_1) \ldots d\mu(\sigma_n). \tag{8}$$

Я утверждаю, что соответствующая ей $2p$-линейная форма на $(\mathscr{M}(M))^p \times \times (\mathscr{C}(M))^p$ есть не что иное, как $d_n^p(K)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить

$$\langle d_n^p(K), \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_p \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \rangle$$

по формуле (10) § 1; возьмем в качестве переменных интегрирования $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, t_1, \ldots, t_p$ и выразим скалярные произведения $\langle K_{\sigma_j}, \mu_i \rangle$ и $\langle K_{t_j}, \mu_i \rangle$ посредством интегралов

$$\int K(s_i, \sigma_j)\, d\mu(s_i) \quad \text{и} \quad \int K(s_i, t_j)\, d\mu(s_i);$$

производя в полученном $(n+2p)$-кратном интеграле интегрирование по $d\mu(\sigma_1) \ldots d\mu(\sigma_n)$, получаем

$$\int \ldots \int d_n^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} d\mu_1(s_1) \ldots d\mu_p(s_p)\, \varphi_1(t_1)\, d\mu(t_1) \ldots \varphi_p(t_p)\, d\mu(t_p).$$

Таким образом,

$$d_n^p(-zK) = (-1)^p d_n^p(z)$$

[в обозначениях гл. II, § 4, формула (2)] дано ядром (порядка $2p$) $(-z)^{p+n} d_n^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix}$, а $d_n^p(z)$ — ядром $z^p\left((-1)^n d_n^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} z^n\right)$.

Рассматривая $d_n^p(K)$ как элемент банахова пространства $\mathscr{C}(M^p \times M^p)$, заданный посредством (8), мы покажем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n d_n^p(K) z^n$ есть целая функция со значениями в этом пространстве, откуда будет следовать, что $d^p(z)$ определено непрерывным ядром

$$d^p\left(\begin{matrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{matrix}\middle| z\right) = z^p \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n d_n^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} z^n. \tag{9}$$

В самом деле, в силу оценки Адамара, правая часть в (3) мажорируется посредством $n^{n/2}\|K\|_\infty^n$ (где $\|K\|_\infty = \sup|K(s, t)|$), откуда [определение (8)]

$$\|d_n^p\|_\infty \leqslant \frac{1}{n!}(n+p)^{(n+p)/2}\|K\|_\infty^{n+p}\|\mu\|^n \tag{10}$$

[эта оценка может быть улучшена (см. гл. II, § 2), но для нас она будет достаточна], и по формуле Стирлинга

$$(\|d_n^p\|)_\infty^{1/n} = o\left(\|K\|_\infty\right)\|\mu\| \frac{n^{n/2}}{(n!)^{1/n}} \to 0.$$

Теперь мы в состоянии дать окончательные формулы решения с помощью ядра $K(s, t)$. Предположим для простоты, что носителем μ является все M; тогда $2p$-линейная форма на $(\mathscr{M}(M))^p \times (\mathscr{C}(M))^p$, определенная непрерывным ядром $N\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix}$, равна нулю в том и только том случае, когда N тождественно равно нулю [в самом деле, образ $\mathscr{C}(M)$ в $\mathscr{M}(M)$ будет слабо плотным; поэтому $2p$-линейная форма на $(\mathscr{M}(M))^p \times (\mathscr{M}(M))^p$, определенная посредством N, будет нулем, откуда и получается наше утверждение, если положить $\mu_i = \varepsilon_{s_i}$, $\nu_i = \varepsilon_{t_i}$].

Теорема 2. *Пусть M — компактное пространство, наделенное мерой μ, носителем которой является M, K — непрерывная функция на $M \times M$; рассмотрим оператор в $\mathscr{C}(M)$, определенный посредством K [формула (1)], который будем обозначать тоже через K. Для того чтобы оператор $1 - \lambda K$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы $d^0(\lambda) \neq 0$, и тогда решение уравнения $f - \lambda K.f = g$ (с неизвестным f) определяется формулой*

$$f(s) = g(s) + \frac{1}{d^0(\lambda)}\int d^1\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix}\middle|\lambda\right) g(t)\, d\mu(t). \tag{11}$$

Если же λ есть нуль порядка $n > 0$ функции $d^0(z)$, то $1/\lambda$ является собственным значением порядка n оператора K. Существует наименьшее целое число p такое, что

$$d^p\left(\begin{matrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{matrix}\middle|\lambda\right) \neq 0$$

для надлежащим образом выбранной системы значений s_i и t_i. Для такой системы p функций

$$f_i(s) = d^p\left(\begin{matrix} s_1, & \ldots, & s_{i-1}, & s, & s_{i+1}, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_{i-1}, & t_i, & t_{i+1}, & \ldots, & t_p \end{matrix}\middle|\lambda\right) \tag{12}$$

образуют базис пространства решений однородного уравнения $f - \lambda K.f = 0$, а p функций

$$g_i(t) = d^p\left(\begin{matrix} s_1, & \ldots, & s_{i-1}, & s_i, & s_{i+1}, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_{i-1}, & t, & t_{i+1}, & \ldots, & t_p \end{matrix}\middle|\lambda\right) \tag{13}$$

(отождествляемых с мерами плотности g_i относительно μ) — базис пространства решений союзного уравнения $g - \lambda^t K.g = 0$. Для того чтобы уравнение $f - \lambda K.f = g$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int g g_i d\mu = 0 \quad \text{для } i = 1, \ldots, p.$$

Частное решение этого уравнения будет тогда иметь вид

$$f(s) = g(s) + \frac{1}{d^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix}\lambda\Bigg)} \int d^{p+1}\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p, & s \\ t_1, & \ldots, & t_p, & t \end{pmatrix}\lambda\Bigg) g(t)\, d\mu(t). \tag{14}$$

Принимая во внимание общую теорию Фредгольма, развернутую в гл. II (§ 4, теоремы 2, 3, 4), нужно только доказать, что (12) [соответственно (13)] определяет базис пространства решений уравнения $f - \lambda K.f = 0$ (соответственно $g - \lambda^t K.g = 0$) и что при условии ортогональности $\int g g_i d\mu = 0$ формула (14) дает решение уравнения $f - \lambda K.f = g$. Для любой системы элементов $\mu_2, \ldots, \mu_n$ из $\mathcal{M}(M)$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из $\mathcal{C}(M)$ элемент

$$s \to \langle d^p(\lambda), \varepsilon_s \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p \rangle \text{ из } \mathcal{C}(M)$$

[который определяет линейную форму $\mu_1 \to \langle d^p(\lambda), \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_p \rangle$ на $\mathcal{M}(M)$] является решением уравнения $f - \lambda K.f = 0$; в силу слабой непрерывности, это остается справедливым, если заменить φ_i произвольными $\nu_i \in \mathcal{M}(M)$; полагая

$$\mu_i = \varepsilon_{s_i} \quad (i = 2, \ldots, n), \qquad \nu_i = \varepsilon_{t_i} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

видим, что $f_i(s)$ есть решение уравнения $f - \lambda K.f = 0$. Я утверждаю с другой стороны, что f_i линейно независимы и даже, точнее, что

$$f_i(s_j) = k\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $k = d^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix}\lambda\Bigg) \neq 0$.

Чтобы в этом убедиться, достаточно использовать тот факт, что $d^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix}\lambda\Bigg)$ есть альтернирующая функция аргументов s_i, т. е. такая, которая изменяет знак при перестановке двух аргументов s_i и, следовательно, обращается в нуль, если два из s_i совпадают; это свойство вытекает из того, что

$$\langle d^p(\lambda), \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p \rangle$$

альтернирует относительно μ_i. Таким образом, f_i — это p линейно независимых решений уравнения $f - \lambda K.f = 0$, и поскольку пространство этих решений имеет размерность p (гл. II, теорема 3), f_i образует базис. Легко проверяется, что оператор ${}^tK$ в $\mathcal{M}(M)$, являющийся транспозицией K, индуцирует в $\mathcal{C}(M)$ оператор, определенный ядром

$${}^tK(s, t) = K(t, s);$$

применим предшествующие выводы к ядру

$$(s, t) \to K(t, s);$$

функции g_i, заданные посредством (13), представляют p линейно независимых решений уравнения $g - \lambda^t K.g = 0$ в $\mathcal{C}(M)$. Так как пространство решений *в* $\mathcal{M}(M)$ имеет размерность p, то g_i образуют базис этого пространства. Наконец, известно (гл. II, теорема 3), что условия $\int g g_i\, d\mu = 0$

необходимы и достаточны для того, чтобы уравнение $f-\lambda K.f=g$ имело решение; тогда при любых $\mu_i\in\mathscr{M}(M)$ и $\varphi_i\in\mathscr{C}(M)$ $(i=1,\ \ldots,\ p)$ функция

$$\varphi(s)=\langle d^p(\lambda),\mu_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p\rangle\, g(s)+$$
$$+\langle d^{p+1}(\lambda),\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_p\otimes\varepsilon_s\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p\otimes g\rangle$$

будет решением уравнения

$$\varphi-\lambda K.\varphi=\langle d^p(\lambda),\ \mu_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p\rangle\, g;$$

в силу слабой непрерывности, это остается справедливым, если заменить φ_i произвольными $\nu_i\in\mathscr{M}(M)$. Полагая

$$\mu_i=\varepsilon_{s_i},\quad \nu_i=\varepsilon_{t_i}\qquad (i=1,\ \ldots,\ p),$$

видим, что функция $f(s)$, заданная посредством (14), есть решение уравнения $f-\lambda K.f=g$. Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

Дополнительные замечания. Пусть $K(s,t)$ — непрерывная функция на $M\times M$; она определяет естественным образом линейное отображение $\mathscr{M}(M)$ в $\mathscr{C}(M)$ (независимо от задания меры μ на M), сопоставляющее мере $\nu\in\mathscr{M}(M)$ функцию

$$K.\nu(s)=\int K(s,t)\,d\nu(t). \tag{15}$$

Имеем очевидным образом

$$\|K.\nu\|\leqslant\|K\|_\infty\|\nu\| \tag{16}$$

[где $\|K\|_\infty=\sup\limits_{s,t}|K(s,t)|$] и, кроме того, для $\nu,\ \lambda\in\mathscr{M}(M)$

$$\langle K.\nu,\ \lambda\rangle=\langle {}^tK.\lambda,\ \nu\rangle, \tag{17}$$

где ${}^tK$ — ядро, транспонированное к K. Отсюда заключаем, что $\nu\to K.\nu$ *есть линейное слабо непрерывное отображение* $\mathscr{M}(M)$ *в* $\mathscr{C}(M)$ *с нормой* $\leqslant\|K\|_\infty$ [под слабой топологией в $\mathscr{M}(M)$ мы понимаем слабую топологию пространства, сопряженного с $\mathscr{C}(M)$], транспозицией которого является $\lambda\to{}^tK.\lambda$. Таким образом, имеем естественное линейное отображение пространства $\mathscr{C}(M\times M)$ в $L(\mathscr{M}(M),\mathscr{C}(M))$ с нормой $\leqslant 1$ [сопоставляя элементу $K\in\mathscr{C}(M\times M)$ оператор $\nu\to K.\nu$]; но, как хорошо известно, элементы вида $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\otimes g_i$ [$f_i,\ g_i\in\mathscr{C}(M)$] образуют плотное множество в $\mathscr{C}(M\times M)$ и определяют операторы конечного ранга, которые a fortiori компактны; отсюда, в силу непрерывности, следует, что операторы $\nu\to K.\nu$ *компактны*. [Кроме того, легко видеть, что получается даже *изоморфизм* (по отношению к нормам) пространства $\mathscr{C}(M\times M)$ *на* пространство слабо непрерывных компактных линейных отображений $\mathscr{M}(M)$ в $\mathscr{C}(M)$; но мы не будем это использовать здесь.] Отображение $f\to K.f$, определенное посредством (1), есть не что иное, как композиция естественного отображения $f\to f\mu$ пространства $\mathscr{C}(M)$ в $\mathscr{M}(M)$ (определенного заданием μ) и предыдущего отображения $\nu\to K.\nu$. Можно поставить вопрос об общем решении уравнения

$$\nu-\lambda K.\nu=\nu_0, \tag{18}$$

где правая часть ν_0 задана в $\mathscr{M}(M)$, а неизвестное ищется тоже в $\mathscr{M}(M)$. Здесь $\lambda K.\nu$ является a priori *функцией*, непрерывной на M, которая отождествляется с определяемой ею мерой. Поскольку $\nu\to K.\nu$ есть транспонированный к оператору в $\mathscr{C}(M)$, определенному ядром ${}^tK(s,t)=K(t,s)$, можно применить теорию Фредгольма (теорема 2). Таким образом, получаем сразу следующее предложение.

Если $d^0(\lambda)\neq 0$, *то уравнение* (18) *имеет решение, и притом единственное, при любом* $\nu_0\in\mathscr{M}(M)$; *это решение выражается формулой*

$$\nu=\nu_0+\frac{1}{d^0(\lambda)}\,d^1(\lambda)\,\nu_0, \tag{19}$$

где $d^1(\lambda)$ *означает непрерывное ядро* $(s, t) \to d^1\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$. *В особом случае* $d^0(\lambda) = 0$ *уравнение* (18) *имеет решение тогда и только тогда, когда* (*в обозначениях теоремы* 2) ν_0 *ортогонально ко всем* $g_i \in \mathscr{C}(M)$, *определенным формулой* (13); *частное решение имеет тогда вид*

$$\nu = \nu_0 + \frac{1}{d^p\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ t_1, & \ldots, & t_p \end{pmatrix}\!\!\left|\lambda\right.} d^{p+1}\left(\begin{matrix} s_1, & \ldots, & s_p, & s \\ t_1, & \ldots, & t_p, & t \end{matrix}\middle|\lambda\right)_{s,t} . \nu_0 \tag{20}$$

(где во втором слагаемом правой части непрерывное относительно s, t ядро действует на меру ν_0). *Наконец, заданные посредством* (12) *функции* f_i, *отождествляемые с мерами* $f_i\mu$, *образуют базис пространства решений однородного уравнения*

$$\nu - \lambda K . \nu = 0.$$

Отметим, что если E — какое-либо векторное пространство, промежуточное между $\mathscr{C}(M)$ и $\mathscr{M}(M)$, и если в формулах (19) и (20) считать $\nu_0 \in E$, то решение ν, определяемое этими формулами, будет в E [как сумма элемента из E и элемента из $\mathscr{C}(M) \subset E$]; также f_i, принадлежа $\mathscr{C}(M)$, находятся в E, и g_i могут рассматриваться как линейные формы *на* E. Таким образом, теория уравнения (18), где $1 - \lambda K$ взято для операторов *в* E, в точности та же, как и в специальном случае, когда $E = \mathscr{M}(M)$. Например, можно взять

$$E = \mathscr{L}^p(\mu), \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty.$$

§ 3. **Примеры случаев, отличных от классического.** Формализм, развернутый в гл. II (§ 4) и в гл. III (§ 1), достаточно гибок, чтобы охватить формулы решения Фредгольма для операторов, определенных посредством интегралов, которые не встречаются в классической теории. Мы ограничимся краткими указаниями, относящимися к некоторым примерам.

Пример 1. Операторы Фредгольма в $\mathscr{L}^1(\mu)$. Пусть M — локально компактное пространство, наделенное мерой μ (не обязательно ограниченной); мы знаем, что операторы Фредгольма в $\mathscr{L}^1(\mu)$ можно рассматривать как элементы пространства $\mathscr{L}^1(\mu) \widehat{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mu)$, которое конкретизировано теоремой 1. Это дает примечательный класс ядер (отличных от классических), определенных интегрируемыми отображениями $s \to K(s, t)$ пространства M в банахово пространство $\mathscr{L}^\infty(\mu)$; их t-нормой является

$$\int (\operatorname{Vrai} \sup_t |K(s, t)|) \, d\mu(s). \tag{1}$$

Можно было бы попытаться придать соответствующим формулам Фредгольма тот же вид, что и в теореме 2. Это возможно, если принять известные меры предосторожности для получения утверждений, не нарушаемых при изменении $K(s, t)$ на множестве нулевой меры. Во-первых, следует придать левой части формулы (8) § 2 (рассматриваемой как класс измеримых функций на $M^p \times M^p$, отличающихся друг от друга на множестве нулевой меры) смысл, не зависящий от указанного изменения $K(s, t)$; уже для $n = 1$ и $p = 0$ правая часть (8) не определена $\Big[$ибо для вычисления $\int K(s, s)\, d\mu(s)$ требуется знать значения $K(s, s)$ почти всюду, а это не имеет места$\Big]$; но нетрудно с помощью определенных предписаний для вычисления интеграла, входящего в (8), придать левой части смысл, отвечающий формулам Фредгольма. Во-вторых, следует только показать, что *почти для всех* систем (s_i, t_i), таких, что $d^p\left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_p \\ t_1, \dots, t_p \end{matrix}\middle| \lambda\right) \neq 0$, функции f_i (соответственно g_i), определенные формулой (12) [соответственно (13)], образуют базис пространства решений уравнения $f - \lambda K.f = 0$ (соответственно $g - \lambda^t K.g = 0$) и что формула (14) дает решение уравнения $f - \lambda K.f = g$ (если решение существует). Чтобы избежать этих трудностей, может быть, удобнее сохранить формулы решения в виде, данном в гл. II (§ 4), ибо это исключает «почти всюду». Но это обязывает писать в формуле (14) $(p+1)$-кратный интеграл вместо простого интеграла. Эти технические затруднения исчезают, если $K(s, t)$ — *непрерывная* функция на $M \times M$; в этом случае, соответствующем теореме 2, последняя остается полностью в силе. В самом деле, формула (8) § 2 выражает тогда величины d_n^p без всякой неопределенности как *непрерывные* функции на $M^p \times M^p$, а формула (9) отождествляет $d^p = \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_p \\ t_1, \dots, t_p \end{matrix}\middle| z\right)$ с непрерывными функциями на $M^p \times M^p$, значения которых, таким образом, определены в каждой точке.

Пример 2. Случай ядерных пространств. Операторы Фредгольма в $(\mathscr{E})$. Рассмотрение операторов Фредгольма в общих (не обязательно нормируемых) локально выпуклых пространствах особенно интересно в связи с теорией *ядерных пространств* ([5], гл. II, § 2 и 3). В самом деле, локально выпуклое пространство E является ядерным в том и только в том случае, когда всякое непрерывное линейное отображение E в банахово пространство F *ядерно* (определение ядерных отображений см. в гл. II, § 5, Напоминание). Отсюда тотчас вытекает, что если E — какое-либо локально выпуклое пространство, в котором все замкнутые и ограниченные множества полны (так называемое *квазиполное* пространство), то ядерные линейные отображения E в F совпадают с ограниченными линейными отображениями (ограниченность означает, что некоторая окрестность нуля в E переходит в ограниченное множество из F). A fortiori, *всякое ограниченное линейное отображение ядерного пространства E в квазиполное локально выпуклое пространство есть отображение Фредгольма.* Кроме того, из теории ядерных пространств следует, что эти отображения в большинстве случаев, встречающихся на практике, конкретизируются весьма просто, например, посредством ядер определенного типа ([5], гл. III, § 3). Пусть $E = F = \mathscr{E}(U) = \mathscr{E}$ означает пространство бесконечно дифференцируемых функций на открытом множестве $U \subset R^n$, наделенное своей естественной топологией [которое является ядерным пространством $(\mathscr{F})$, согласно цитированной выше статье [5]]; тогда операторы Фредгольма в $\mathscr{E}$ (т. е. ограниченные эндоморфизмы пространства $\mathscr{E}$) представляют собой операторы $\varphi \to K.\varphi$, определенные обобщенными ядрами $K_{x,y}$ [10] (обобщенными функциями на $U \times U$), которые являются конечными суммами производных различных порядков по y от непрерывных функций $f(x, y)$ на $U \times U$; эти функции обладают частными производными по x всевозможных порядков, непрерывны по x, y и равны нулю (независимо от x), если y принадлежит дополнению компакта $K' \subset U$. Для такого ядра K определяются (как и в § 2) $2p$-кратные ядра d_n^p и $d^p(z)$, которые (для заданного z) являются обобщенными функциями на $U^p \times U^p$ того же типа, что и K (U заменено на U^p). Формулы Фредгольма записываются непосредственно, но они должны быть взяты в виде, соответствующем теореме 3 гл. II (§ 4) [ибо утверждение теоремы 2 гл. III (§ 2) теряет здесь всякий смысл].

Пример 3. Пространства голоморфных функций. Пусть U — открытое множество на сфере Римана Ω, причем $U \neq \varnothing$ и $U \neq \Omega$, $P(U)$ — пространство голоморфных функций на U, равных нулю на бесконечности, если $\infty \in U$; наделив $P(U)$ его естественной топологией, получим пространство типа $(\mathscr{F})$, являющееся замкнутым топологическим векторным подпространством ядерного пространства $\mathscr{E}(U)$. Пространство $P(U)$ ядерно ([5], § 2, п. 2). Согласно ([6], § 5, предложение 4), ограниченные операторы (и, значит, операторы Фредгольма) в $P(U)$ — это операторы, определенные функциями K, голоморфными на множестве $U \times V$, где V — окрестность (зависящая от K) множества $\complement_2 U$, посредством формулы

$$f \to K.f(s) = \int_{\Gamma} f(t) K(s, t)\, dt; \tag{2}$$

здесь правая часть есть интеграл Коши, взятый по контуру Γ, ограничивающему простую область, содержащую $\complement_2 U$, замыкание которой содержится в V. Интеграл не зависит ни от окрестности V (которую можно заменить для данного K меньшей окрестностью множества $\complement_2 U$), ни от Γ. Две такие функции F и G, определенные соответственно в $U \times V_1$ и $U \times V_2$, определяют один и тот же эндоморфизм пространства $P(U)$ в том и только в том случае, когда они совпадают на множестве $U \times V$, где V — окрестность множества $\complement_2 U$, содержащаяся в $V_1 \cap V_2$. Для оператора (2) можно тогда вывести формулы Фредгольма, совпадающие с приведенными в § 2 во всем, кроме интегрирования по контуру Γ (наделенному «мерой Коши» dt) и по его степеням Γ^p, которое выступает вместо интегрирования по пространству U, где определены $f \in P(U)$. По поводу возможных обобщений операторов вида (2) см. [6a].

Отметим, чтобы закончить, что ядерные операторы в *ядерных* пространствах обладают весьма специальными свойствами, не имеющими места для общих операторов Фредгольма (например, в банаховых пространствах). Таким образом, определитель Фредгольма $\det(1 - zu)$ (вполне определенный заданием ядерного оператора u) имеет *порядок* 0 и, в частности, последовательность его собственных значений *быстро убывает* ([5], § 2, п. 4).

Примечание переводчика

За последнее десятилетие появилось довольно много работ, посвященных абстрактной теории Фредгольма, охватывающей проблемы разрешимости операторных уравнений Фредгольма. При этом алгебраический аппарат, используемый авторами, позволяет ввести абстрактные аналоги определителей и миноров Фредгольма, в терминах которых устанавливаются потом теоремы о разрешимости уравнений, соответствующие классическим теоремам Фредгольма.

А. Растон в ряде статей (см. [7], [11]—[13]) развил теорию определителей для линейных уравнений в банаховых пространствах. Введенное им понятие определителя относится к классу операторов со «следами». Этот класс более узок, чем класс вполне непрерывных (компактных) операторов, но содержит все операторы конечного ранга. К работам Растона близко примыкает приведенная выше статья А. Гротендика. Для нее тоже характерно систематическое использование аппарата мультилинейной алгебры (теории тензорных и внешних произведений) и t-нормировка тензорных произведений банаховых пространств, позволяющая посредством предельного перехода выделить требуемый класс операторов со следами.

Независимо от работ Растона и Гротендика построение теории Фредгольма для линейных уравнений в банаховых пространствах было дано Г. Лежанским [14], [15], который не использовал при этом понятия прямого произведения банаховых пространств и понятия следа оператора. Развитая Лежанским теория определителей для линейных уравнений в банаховых пространствах была потом изложена Р. Сикорским [16] в несколько измененном виде, соответствующем более симметричным предположениям, позволившим получить полную симметрию результатов для данного линейного уравнения и сопряженного с ним уравнения.

Недавно Сикорским [17] было показано, что теория Растона более специальна, чем теория Лежанского, т. е. что операторы, обладающие следами, всегда удовлетворяют предпосылкам теории Лежанского, но (это показывает приводимый Сикорским пример) существуют операторы, которые удовлетворяют теории Лежанского, но не удовлетворяют теории Растона; для гильбертова пространства обе теории оказываются эквивалентными.

ЛИТЕРАТУРА[1])

1. Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932. [Украинский перевод: Банах С. С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.]
2. Bourbaki N., Éléments de Mathématique, Livre II: Algébre, chap. III, Act. Scient. et Ind., № 1044, Paris, Hermann, 1948.
3. Bourbaki N., Intégration, chap. I—IV, Act. Scient. et Ind., № 1175, Paris, Hermann, 1952.
4. Dieudonné J., Schwartz L., La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **1** (1949), 61—101. [Есть русский перевод. См. сб. *Математика*, **2**:**2** (1958), 77—107.]
5. Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs Amer. Math. Soc., № 16, 1955.
6. Grothendieck A., Sur certains espaces de fonctions holomorphes, *J. de Grelle*, **192** (1953), 35—64 et 77—95).

6a. Grothendieck A., Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles, *J. d'Analyse Math.*, *Jérusalem*, **2** (1952—1953), 243—280.

7. Ruston A., Direct products of Banach spaces and linear functional équations, *Proc. London Math. Soc.*, **1** (1951), 327—384.
8. Schatten R., A theory of cross-spaces, Princeton University Press, 1950.
9. Schwartz L., Théorie des distributions, t. I et II, Act. Scient. et Ind., № 1091, et 1122, Paris, Hermann, 1950 et 1951.
10. Schwartz L., *J. d'Analyse Math.*, *Jérusalem*, **4**, p. I (1954—1955), 88—148.

11*. Ruston A., On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to trace class of a general Banach space, *Proc. London Math. Soc.*, **1** (1951), 109—124.

12*. Ruston A., Formulae of Fredholm type for compact linear operators on a general Banach space, *Proc. London Math. Soc.*, **3** (1953), 368—377.

13*. Ruston A., Operators with a Fredholm theory, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 318—326.

14*. Leżanski T., The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **13** (1953), 244—276.

15*. Leżanski T., Sur les fonctionelles multiplikatives, *Studia Math.*, **14** (1953), 13—23.

16*. Sikorski R., On Leźanski determinants of linear equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **14** (1953), 24—48.

17*. Sikorski R., On determinants of Lezanski and Ruston, *Studia Math.*, **16** (1957), 99—112.

[1]) Звездочкой отмечена литература, добавленная переводчиком.