

**COLLECTED WORKS**  
**Vol II. Mathematical letters and Unpublished works**

Mathematical Reflections

by  
Alexandre GROTHENDIECK

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

<https://agrothendieck.github.io/>

## CONTENTS

1949	15
Lettre à le Directeur de l'Institut Henri Poincaré, 2.5.1949 . . . . .	15
1950	15
Lettre à J. Dixmier, 20.11.1950	16
Lettre à J. Dixmier, 10.12.1950	17
1951	18
Lettre à J. Dixmier, 7.6.1951	19
1952	19
Lettre à J. Dixmier, 2.5.1952	20
1954	21
Lettre à J. Dixmier, 28.6.1954	22
Lettre à J. Dixmier, 18.7.1954	24
Lettre à J. Dixmier, 13.8.1954	27
1955	32
Lettre à J. Dixmier, 24.1.1955	33

<b>A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf</b>	<b>35</b>
Introduction . . . . .	35
I. General fibre spaces . . . . .	37
II. Sheaves of sets . . . . .	40
III. Group bundles and sheaves of groups . . . . .	41
IV. Fibre spaces with structure sheaf . . . . .	41
V. The classification of fibre spaces with structure sheaf . . . . .	41
<b>1960</b>	<b>41</b>
<b>Lettre à N. Bourbaki, 9.10.1960</b>	<b>42</b>
Letter to N. Bourbaki, 9.10.1960 . . . . .	43
<b>1962</b>	<b>43</b>
<b>Letter to J. Murre, 18.7.1962</b>	<b>44</b>
<b>Letter to J. Tate, 5.2.1962</b>	<b>48</b>
<b>Letter to H. Hironaka, 6.7.1962</b>	<b>53</b>
<b>1963</b>	<b>56</b>
<b>Letter to M. Atiyah, 14.10.1963</b>	<b>57</b>
<b>1964</b>	<b>57</b>
<b>Lettre à J.P. Serre, 12.8.1964</b>	<b>58</b>
<b>1965</b>	<b>59</b>
<b>Categories tannakiennes</b>	<b>60</b>
Catégories tannakiennes définies par des cristaux . . . . .	60
4. . . . .	60
5. $F$ -cristaux de pente nulle . . . . .	61
6. . . . .	61
7. . . . .	61

8. . . . .	61
9. . . . .	61
10. Cas $k$ fini . . . . .	61
<b>Filtrations sur foncteurs fibres pour catégories tensorielles</b>	<b>62</b>
<b>Quelques exemples de catégories tensorielles</b>	<b>63</b>
<b>Motifs à coefficients sur un corps de <math>[]</math></b>	<b>70</b>
<b>Motifs</b>	<b>71</b>
1. La catégorie $\mathcal{M}^+(X)$ . . . . .	71
2. Variances avec $X$ . . . . .	71
3. Cas $X = \varprojlim X_i$ . . . . .	72
4. Foncteurs $T_\ell$ . . . . .	72
5. Les $\mathbf{Q}_\ell(-n)$ . . . . .	73
6. La catégorie $\mathcal{M}(X)$ . . . . .	74
7. Les foncteurs $\text{Hom}$ et $\text{RHom}$ . . . . .	74
8. Motifs constants, tordus et polynômes caractéristiques . . . . .	75
9. Filtration de $\mathcal{M}^+(X)$ et $\mathcal{M}(X)$ . . . . .	76
10. Motifs constants tordus. Anneaux $\mathcal{M}^+(X)$ et $\mathcal{M}(X)$ . . . . .	78
11. Interprétation topologique des types dimensionnels (cas “géométrique”) . . . . .	78
12. L’homomorphisme fondamental $L(K) \longrightarrow M^+(K)$ et invariants bi- rationnels fondamentaux . . . . .	79
13. Caractérisation galoisienne des filtrations . . . . .	79
14. Invariants de Galois et théorèmes de commutation . . . . .	79
15. Cohomologie absolue . . . . .	79
16. Relations avec les points rationnels et la cohomologie des variétés abéliennes sur des schémas de type fini... . . . .	79
17. Formes positives . . . . .	79
18. Dictionnaire : Fonctions $L$ — Cohomologie à action galoisienne . .	79
19. Relation avec la théorie de Hodge . . . . .	79

<b>Lettre à J. Dieudonné, 29.9.1965</b>	<b>80</b>
Letter to J. Dieudonné, 29.9.1965 . . . . .	82
<b>Lettre à P. Deligne, 10.12.1965</b>	<b>84</b>
<b>Introduction au Langage Fonctoriel</b>	<b>86</b>
0. Cadre logique . . . . .	86
I. Généralités sur les catégories . . . . .	89
II. Catégorie abélienne . . . . .	117
III. Foncteurs représentables . . . . .	131
Quelques ouvrages de références . . . . .	137
<b>1966</b>	<b>137</b>
<b>Letter to J. Coates, 6.1.1966</b>	<b>138</b>
<b>Lettre à J. Tate, 5.1966</b>	<b>141</b>
<b>Letter to J. Murre</b>	<b>167</b>
<b>Letter to J. Murre</b>	<b>170</b>
<b>Letter to J. Murre</b>	<b>171</b>
<b>1967</b>	<b>172</b>
<b>Letter to J. Coates, 4.1.1967</b>	<b>173</b>
<b>Lettre à J. Dieudonné, 27.8.1967</b>	<b>177</b>
<b>Lettre à J. Dieudonné, 15.9.1967</b>	<b>178</b>
<b>Letter to S. Anantharaman, 11.9.1967</b>	<b>180</b>
<b>Letter to J. Murre, 24.4.1967</b>	<b>182</b>
<b>1968</b>	<b>182</b>

Tapis de Quillen	183
Tapis de Quillen	184
1. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux . . . . .	184
2. $n$ -catégories, catégories $n$ -uples, et Gr-catégories . . . . .	187
3. Point de vue “motivique” en théorie du cobordisme . . . . .	187
1969	188
Résumé de quelques résultats de Kostant	189
Letter to Kostant, 22.10.1969	190
Letter to J. Lipman, 21.5.1969	192
Letter to J. Lipman, 22.8.1969	193
Letter to J. Lipman, 16.9.1969	194
Letter to J. Lipman, 12.6.1969	195
Lettre à L. Illusie, 2-4 Déc 1969	197
1970	197
Programme de la théorie de Dieudonné sur une base $S$ où $p$ est localement nilpotent	198
Lettre à Michon, 3.11.1970	199
Letter to I. Barsotti, 5.11.1970	200
Letter to J. Lipman, 3.3.1970	206
Lettre à D Ferrand, 3.11.1970	207
Lettre à J.L. Verdier, 3.11.1970	208

<b>Lettre à P. Deligne, 3.11.1970</b>	<b>209</b>
<b>1971</b>	<b>209</b>
<b>Lettre à J.L. Verdier, 23.6.1971</b>	<b>210</b>
<b>1972</b>	<b>211</b>
<b>Curriculum vitae</b>	<b>211</b>
Principales publications . . . . .	213
<b>Esquisse thématique des principaux travaux mathématiques</b>	<b>216</b>
1. Analyse Fonctionnelle . . . . .	216
2. Algèbre Homologique . . . . .	217
3. Topologie . . . . .	218
4. Algèbre . . . . .	219
5. Géométrie Analytique . . . . .	220
6. Groupes Algébriques . . . . .	222
7. Groupes discrets . . . . .	222
8. Groupes formels . . . . .	223
9. Arithmétique . . . . .	223
10. Géométrie Algébrique . . . . .	224
Bibliographie . . . . .	229
<b>1973</b>	<b>234</b>
<b>Fonctions holomorphes (Théorie de Cauchy)</b>	<b>235</b>
0. Introduction . . . . .	235
1. Prélude . . . . .	235
2. Intégrales curvilignes . . . . .	235
3. Primitives d'une forme différentiable . . . . .	235
4. Fonctions holomorphes . . . . .	235
2. Développement en série d'une fonction holomorphe . . . . .	235
6. Homotopie des chemins . . . . .	235



<b>Fonctions holomorphes (Suite et fin)</b>	<b>236</b>
7. Principe du maximum . . . . .	236
8. Développement de Laurent . . . . .	236
9. Calcul des résidus . . . . .	236
<b>Letter to F. Knudsen, 19.5.1973</b>	<b>237</b>
<b>Lettre à H. Seydi, 13.2.1973</b>	<b>241</b>
<b>Lettre à L Illusie, 3.5.1973</b>	<b>245</b>
<b>1974</b>	<b>249</b>
<b>Esquisse d'une théorie des Gr-Catégories</b>	<b>250</b>
1. Structure des Gr-catégories . . . . .	250
2. Catégories de Picard . . . . .	253
3. Catégories de Picard enveloppantes . . . . .	253
Bibliographie . . . . .	253
<b>Lettre à P. Deligne, J. Giraud et J.-L Verdier 23.6.1974</b>	<b>254</b>
<b>Lettre à P. Deligne, 7.8.1974</b>	<b>255</b>
<b>1975</b>	<b>258</b>
<b>Lettre à L. Breen 5.2.1975</b>	<b>259</b>
<b>Lettre à L. Breen 17.2.1975</b>	<b>270</b>
Letter to L. Breen 17.2.1975 . . . . .	277
<b>Letter to L. Breen, 17/19.7.1975</b>	<b>284</b>
Letter to L. Breen, 17/19.7.1975 . . . . .	285
<b>Complexe de De Rham à puissance divisée et ombres des modules</b>	<b>305</b>
<b>Notations semi-simpliciaux. Constructions universelles</b>	<b>316</b>

<b>Faisceautisation du topos de De Rham</b>	<b>318</b>
<b>1981</b>	<b>318</b>
<b>La “Longue Marche” à Travers la Théorie de Galois</b>	<b>319</b>
<b>Structures Stratifiées</b>	<b>320</b>
1. La situation la plus élémentaire . . . . .	320
2. Stratification globale . . . . .	321
3. Stratification globale . . . . .	322
4. Topos canoniques associées à une stratification globale . . . . .	322
<b>1982</b>	<b>324</b>
<b>1983</b>	<b>324</b>
<b>Brief an G. Faltings, 27.6.1983</b>	<b>325</b>
Letter to G. Faltings, 27.6.1983 . . . . .	326
<b>Notes Anabéliennes</b>	<b>337</b>
I. Résultats de fidélité . . . . .	337
II. La question de pleine fidélité . . . . .	350
III. Étude des sections de $E_U$ sur $\Gamma$ . . . . .	355
IV. Sections d’extensions et anneaux de valuations généraux . . . . .	368
<b>Structure à l’infini des <math>M_{g,\nu}</math></b>	<b>374</b>
1. Courbes standard . . . . .	374
2. Graphe associé à une courbe standard . . . . .	375
3. Courbes “stables” et $MD$ -graphes . . . . .	377
4. La théorie de Mumford-Deligne . . . . .	378
5. Spécialisation des $MD$ -graphes . . . . .	379
6. Morphismes de $[]$ de graphes et de maquettes . . . . .	380
7. Étude des $[]$ de $\dim \leq 2$ $[]$ détermination des graphes correspondantes	380
8. Structure $[]$ . . . . .	380

9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ([ ] MDT-structure) : cas [ ], . . . . .	380
10. Structures MDT analytiques : [ ] . . . . .	380
11. Digression : [ ] Structure à l’infini des groupoïdes fondamentaux . .	380
12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une [ ] et leur dévis- sages en “topos élémentaires” . . . . .	380
13. Digression sur stratification “locales” [ ] . . . . .	380
<b>Pursuing stacks</b>	<b>381</b>
<b>Récoltes et Semailles</b>	<b>382</b>
Les conjectures de Weil . . . . .	382
$\mathcal{D}$ -modules et cristaux . . . . .	387
Le Bi-icosaèdre . . . . .	387
<b>1984</b>	<b>397</b>
<b>Esquisse d’un Programme</b>	<b>398</b>
1. Envoi . . . . .	398
2. Un jeu de “Lego-Teichmüller” et le groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$ . . .	399
3. Corps de nombres associés à un dessin d’enfant . . . . .	406
4. Polyèdres réguliers sur les corps finis . . . . .	413
5. Haro sur la topologie dite “générale”, et réflexions heuristiques vers une topologie dite “modérée” . . . . .	419
6. “Théories différentielles” (à la Nash) et “théories modérées” . . . . .	428
7. À la Poursuite des Champs . . . . .	433
8. Digressions de géométrie bidimensionnelle . . . . .	436
9. Bilan d’une activité enseignante . . . . .	439
10. Épilogue . . . . .	440
Notes . . . . .	441
<b>Sketch of a Programme</b>	<b>447</b>
1. Envoi . . . . .	447
2. A game of “Lego-Teichmüller” and the Galois group $\overline{\mathbf{Q}}$ over $\mathbf{Q}$ . . . .	448

3. Number fields associated to a child's drawing . . . . .	454
4. Regular polyhedra over finite fields . . . . .	461
5. Denunciation of so-called "general" topology, and heuristic reflections towards a so-called "tame" topology . . . . .	467
6. "Differentiable theories" (à la Nash) and "tame theories" . . . . .	476
7. Pursuing Stacks . . . . .	480
8. Digressions on 2-dimensional geometry . . . . .	483
9. Assessment of a teaching activity . . . . .	485
10. Epilogue . . . . .	486
Notes . . . . .	488
<b>Rapport d'activité</b>	<b>493</b>
<b>Brief an V. Diekert, 3.4.1984</b>	<b>497</b>
<b>Letter to L. Bers, 15.4.1984</b>	<b>498</b>
<b>1986</b>	<b>503</b>
<b>Vers une Géométrie des Formes</b>	<b>504</b>
I. Vers une géométrie des formes (topologiques) . . . . .	504
II. Réalisations topologiques des réseaux . . . . .	505
III. Réseaux via découpages . . . . .	505
IV. Analysis situs (première mouture) . . . . .	505
V. Algèbre des figures . . . . .	505
VI. Analysis situs (deuxième mouture) . . . . .	505
VII. Analysis situs (troisième mouture) . . . . .	506
VIII. Analysis situs (quatrième mouture) . . . . .	506
<b>1987</b>	<b>506</b>
<b>Letter to P. Blass, 8.7.1987</b>	<b>507</b>
<b>1990</b>	<b>507</b>

Les Dérivateurs	508
1991	508
Lettre à R. Thomason, 2.4.1991	509
Letter to R. Thomason, 2.4.1991 . . . . .	524
Lettre à A Y, 24.6.1991	527
Undated	528
Grothendieck-Mumford correspondance	529
Grothendieck-Serre correspondance	530
Grothendieck-Brown correspondance	531



## Lettre à le Directeur de l'Institut Henri Poincaré, 2.5.1949

Paris le 2.5.1949

Monsieur le Directeur<sup>1</sup> de l'Institut Henri Poincaré.

J'ai l'honneur de solliciter de votre haute bienveillance l'autorisation de travailler à la bibliothèque de l'Institut H. Poincaré.

Je suis licencié ès Sciences.

Recevez, Monsieur le Directeur, mes salutations distinguées.

Alexandre Grothendieck  
6 rue du demi-cercle  
Montreuil (Seine)<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>N.d.T E. Borel

<sup>2</sup>Avis très favorable

Paris, le 2 mai 1949

H. Cartan

## Lettre à J. Dixmier, 20.11.1950<sup>3</sup>

A. Grothendieck

33 rue du Maréchal Gérard  
Nancy (M et M)

Nancy le 20.11.1950

Cher Monsieur Dixmier,

---

<sup>3</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGD201150scan.pdf>



## Lettre à J. Dixmier, 10.12.1950<sup>4</sup>

A. Grothendieck  
33 rue du Maréchal Gérard  
Nancy (M et M)

Nancy le 10.12.1950

Cher Monsieur Dixmier,

Merci pour votre lettre et votre tirage à part. – Malheureusement, la suggestion que vous me faites ne m’apporte rien de neuf, car les minimisations dont vous parlez sont à fortiori incluses dans le fait de prendre un flot compact convexe *minimal* (ce qui est possible grâce au théorème de Zorn).

Il est bien vrai que dans un espace complet quelconque, l’enveloppe convexe fermé d’une partie flot compacte est encore flot compacte. Godement nous a donné la démonstration dans le cas où l’espace est séparable ; dans le cas général, on remarque que d’après le théorème d’Eberlein, il suffit de montrer que toute *suite* extraite de l’enveloppe convexe admet un point faiblement adhérent, ce qui ramène immédiatement au cas séparable. — Notez qu’il existe un assez grand nombre de théorèmes dont l’énoncé ne fait intervenir aucune condition de dénombrabilité, et qui ne peuvent se démontrer sans l’aide du théorème d’Eberlein (j’en connais cinq exemples au moins). Cela tient à ce que l’emploi des suites permet d’appliquer le théorème de Lebesgue sur l’intégrale d’une limite simple de fonctions bornées dans leur ensemble !

Vous me demandez avec raison comment, du théorème sur la moyenne des fonctions flot p.p., on pourrait déduire que tout groupe  $G$  borné d’opérateurs dans un Hilbert est semblable à un groupe d’opérateurs unitaires. Si on savait que les fonctions sur  $G$  de la forme  $\varphi_{x,y}(s) = \langle T^s x, T^s y \rangle$  sont flot p.p., on n’aurait qu’à considérer la forme bilinéaire sur  $H : B(x,y) = M_s(\langle T^s x, T^s y \rangle) = M(\varphi_{x,y})$ , où  $M$  est la moyenne invariante sur l’espace des fonctions flot p.p., et l’affirmation apparaîtrait aisément. J’avais cru voir que ces  $\varphi_{x,y}$  sont en effet flot p.p., mais n’en aperçois plus la raison maintenant que je vous écris, de sorte qu’il me semble

---

<sup>4</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGD161250scan.pdf>

bien possible que je me suis trompé – mais je n’en suis pas convaincu. Comme ces semaines-ci je suis partiellement pris par des soucis matériels de recherche de logement et de déménagement, et ai d’autre part une autre recherche en cours, je ne peux pas avant quelques semaines examiner la question de près, aussi j’ai préféré vous répondre tout de suite. – Il est à noter que la  $\sigma$ -translation à droite de  $\varphi_{xy}$  est  $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$ , or si  $\sigma$  parcourt le groupe  $G$ ,  $T^\sigma x$  et  $T^\sigma y$  y parcourent des parties flot relativement compactes de  $H$ . D’autre part  $(a, b) \longrightarrow \varphi_{ab}$  est application bilinéaire continue de  $H \times H$  dans  $C^\infty(G)$ . Il n’en suit malheureusement pas pour autant que l’ensemble des  $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$  est une partie flot relativement compacte de  $C^\infty(G)$ , car il est possible de trouver une application bilinéaire continue du produit de deux Hilberts dans un Banach, telle que l’image du produit des deux boules unité ne soit pas flot relativement compacte. – Peut-être m’étais-je trompé sur ce point ?

Je vous joins le tirage à part de ma dernière note.

Recevez mes cordiales salutations

A. Grothendieck

P. S. Les autres résultats de ma précédente lettre, et de celle-ci, ont été regardé par moi avec assez de soin pour être tout à fait certains !

## Lettre à J. Dixmier, 7.6.1951

A. Grothendieck  
3 chemin du Grand Moulin  
Nancy

Nancy le 7.6.1951

Cher Dixmier,

Pouvez-vous m'envoyer votre article sur la trace dans les anneaux de type fini, et votre papier aux Annals sur les "fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs..."?

Je vous signale une réponse (quasi-triviale) à une question que vous posez dans ce dernier papier (vous en connaissez probablement la réponse aujourd'hui): vous demandez si dans  $T'$ , convergence faible (i.e.: pour  $\sigma(T', B)$ ) implique convergence forte, pour les suites. La réponse est non, car soit  $a \in H, a \neq 0$ , l'application  $x \longrightarrow a \otimes x$  de  $H$  dans  $T'$  est évidemment un isomorphisme dans; mais si la propriété envisagée était vraie pour  $T'$ , elle le serait pour ses sous-espaces, donc pour  $H$ , ce qui est faux.

Je vous envoie mes meilleures salutations

A. Grothendieck

## Lettre à J. Dixmier, 2.5.1952

Nancy le 2.5.1952

Cher Dixmier,

Je n'ai jamais prouvé ni prétendu avoir prouvé le théorème dont tu parles, et qui d'ailleurs est faux. Il est en effet immédiat qu'il équivaudrait à l'énoncé suivant: Si  $K$  est un espace compact muni d'une mesure  $\mu$ ,  $M$  l'espace des fonctions sur  $K$  qui sont mesurables pour  $\mu$ , muni de la topologie de la convergence *simple*,  $F$  un sous-espace de  $M$  contenant une suite partout dense, alors il existe pour tout  $\varepsilon > 0$  un compact  $K_1 \subset K$  avec  $|\mu|(K \setminus K_1) < \varepsilon$ , les  $f \in F$  ayant toutes une restriction à  $K_1$  continue. Or, prends  $K = (0, 1)$  avec la mesure de Lebesgue, il est (je pense) connu, et facile à démontrer (excellent exercice Bourbaki) qu'il existe une suite de fonctions mesurables sur  $K$  à laquelle toute fonction numérique définie sur  $K$  soit adhérente, ce qui prouve en particulier que  $M$  lui-même est déjà séparable, or  $M$  est loin d'avoir la propriété voulu !

Néanmoins, ton théorème sous sa forme initiale est vrai si  $F$  est métrisable, comme tu t'en es sans doute convaincu tout seul, car on se ramène alors au cas où la fonction faiblement mesurable donnée prend ses valeurs dans une partie *équicontinue* de  $F'$ , cas où l'énoncé est trivial et figure déjà dans une rédaction antérieure. Comme le théorème est vrai encore lorsque  $F$  est le dual faible d'un espace métrisable séparable  $F$  (puisque alors  $t \rightarrow \lambda_t$  est *fortement* mes.), ou le dual d'un espace de Banach  $F'$  (comme par exemple  $\ell^\infty$ ) pour lequel la boule unité du dual faible  $F$  de  $F'$  admet une suite partout dense (même méthode que pour  $F$  du type  $(f)$ ), il reste que dans les cas usuels, le théorème envisagé est valable. On pourrait même remarquer (re-exercice ?) que la catégorie d'espaces localement convexes séparables  $F$  pour lesquels l'énoncé envisagé est vrai, est stable pour le produit topologique ou la somme directe d'un ensemble dénombrable d'espaces facteurs, et par l'opération de prendre un quotient ou une topologie moins fine – donc aussi pour les limites inductives dénombrables etc – en fait, on attrape tous les espaces raisonnables de l'Analyse.

Bien à toi

A. Grothendieck

## Lettre à J. Dixmier, 28.6.1954

A. Grothendieck  
1052 rua Oscar Freire  
Sao Paulo (Brésil)

Sao Paulo le 28.6.1954

Cher Dixmier,

Connais-tu la réponse à la question suivante. Soit  $\underline{A}$  un anneau d'opérateurs dans un Hilbert  $H$ , existe-t-il une projection  $u$  de norme 1 de  $R(H)$  sur  $\underline{A}$ , compatible avec l'involution, et telle que  $u(ATB) = Au(T)B$  pour  $A, B \in \underline{A}$ ? C'est vrai si  $H$  est de dimension finie (et évidemment c'est bien facile dans ce cas), ou si  $\underline{A} \supset \underline{A}'$ , et de ce dernier cas on déduit facilement que c'est vrai si  $\underline{A}$  est commutative (commencer à appliquer le résultat précédent à un anneau commutatif maximal  $\underline{B}$  contenant  $\underline{A}$ , d'autre part on sait qu'il existe une projection de  $\underline{B}$  sur  $\underline{A}$  qui a les propriétés voulues). Bien entendu, même si  $\underline{A}$  est commutatif maximal, il n'y a pas unicité de la projection  $u$ . Voici la démonstration du deuxième cas  $\underline{A} \subset \underline{A}'$ : Soit  $K$  le spectre de  $\underline{A}'$ ,  $\Omega$  l'ensemble des partitions finies de  $K$  en ensembles ouverts et fermés, muni de sa relation d'ordre naturelle; pour  $\omega = (\omega_i) \in \Omega$  on pose  $u_\omega(T) = \sum_i T_{\omega_i} T T_{\omega_i}$ , on considère un ultrafiltre sur  $\Omega$  plus fin que le filtre des sections croissantes, et on pose  $u(T) = \lim u_\omega(T)$  (limite faible !) – Le problème m'intéresse pour pouvoir ramener les propriétés vectorielles-topologiques d'algèbres autoadjointes uniformément fermées quelconques d'opérateurs, aux propriétés de  $R(H)$ , d'où facilement aux propriétés de l'algèbre  $R_0(H)$  des opérateurs compacts, ce qui ramènera souvent à des propriétés de nature métrique sur les  $R(H)$  où  $H$  est de dimension finie. De même, les propriétés des espaces duals de  $C^*$ -algèbres (et aussi des espaces  $L^1$  qui interviennent en intégration non commutative) se ramèneraient aux propriétés des espaces  $H \widehat{\otimes} H$ .

À propos, en vue de simplifier l'exposé de Godement sur la transformation de Fourier des groupes loc. comp. unimod., j'ai eu besoin du résultat suivant, qui se démontre assez facilement en se ramenant à  $R(H)$ : les formes linéaires positives sur une  $C^*$ -algèbre engendrent le dual. Cela est-il connu, ou te semble-t-il utile de publier une petite note là-dessus?

J'espère que cette lettre t'arrivera, et que tu pourras me donner une réponse positive.

Bien à toi

A. Grothendieck

## Lettre à J. Dixmier, 18.7.1954

Sao Paulo le 18.7.1954

Cher Dixmier,

Bien merci pour la copie de ton bouquin, que je n'ai reçu qu'il y a quelques jours, et dont j'ai commencé la lecture avec grand intérêt. Je ne suis pas sur de pouvoir faire des remarques très utiles pour la rédaction, mais bien entendu je lis le crayon à la main, et te communiquerai mes observations à l'occasion. Pour l'instant, je m'aperçois que systématiquement tu n'énonces que pour les seules algèbres de von Neumann des définitions et propositions valables souvent pour des  $C^*$ -algèbres arbitraires, c'est parfois dommage. Pour l'instant, je te signale des erreurs (?) de détail. Page 7, il me semble que la caractérisation de  $T$  dans le lemme 2, 2°, n'est pas correcte. Page 12, fin du No 2 à la ligne 5 de la fin, je pense que "et un seul" est faux, déjà si  $A_i = B_i = \underline{\mathbb{C}}$  (mais n'ai pas cherché le contre-exemple). Page 22 lignes 9-10 "il suffit" est manifestement faux, tu penses sans doute au cas  $B = 0$ . D'autres remarques plus tard. Quelques questions: une sous-algèbre autoadjointe uniformément fermée de  $L(H)$ , stable pour le sup des familles filtrantes croissantes majorées, est-elle faiblement fermée ? Une  $C^*$ -algèbre pour laquelle le sup d'une famille filtrante croissante majorée existe toujours, est-elle isomorphe à une algèbre de von Neumann ? Je ne le sais pas même dans le cas commutatif, ce qui prouve que je ferai bien de lire ton article dans "Summa Brasiliensis", as-tu encore des tirages à part ? Je suis aussi bien curieux de la suite du bouquin, et te suis reconnaissant pour tout papier que tu peux me passer là dessus. Feras-tu un Plancherel abstrait pour les  $C^*$ -algèbres, qui inclurait la théorie des caractères de Godement ?

La lecture du début de ton bouquin m'a permis aussi de répondre par l'affirmative à la question de ma lettre précédente (je viens de trouver la démonstration aujourd'hui, et ne l'ai pas encore mise par écrit canoniquement, mais je pense qu'il n'y a pas d'erreur). Soit  $M$  une sous-algèbre autoadjointe abélienne maximale dans le commutant de  $A'$  de l'algèbre de von Neumann  $A$ , on sait qu'il existe une projection de  $L(H)$  sur  $M'$  ayant les propriétés voulues, il suffit donc de trouver une projection analogue de  $M'$  sur  $A$ . J'arrive à la prouver par un raisonnement direct (grâce au fait que  $M'$  est engendré au sens de v.N. par  $A$  et la sous-algèbre abéli-



enne  $M$  du commutant de  $A$ ), tout à fait différent du raisonnement du premier cas, calqué plutôt sur la preuve du théorème analogue, bien connu, pour une algèbre Stonienne plongée dans un  $C(K)$ . Le raisonnement prouve presque qu'il existe même une projection de  $M'$  sur  $A$  qui est un homomorphisme, et je pense que ça doit en effet pouvoir se prouver (c'est en tous cas vrai dans le cas de la dimension finie, donc il y a de l'espoir!). – En zornifiant sur l'ensemble des sous- $C^*$ -algèbres  $B$  de  $M'$  contenant  $A$ , pour lesquelles une projection  $B \longrightarrow A$  du type voulu existe, il faut pouvoir passer de  $B$  à son adhérence faible (ce qui est un des deux pas essentiels du raisonnement, inutile dans le cas commutatif rappelé plus haut). Pour ça, on doit introduire le bidual  $B''$  de  $B$ , le munir canoniquement d'une structure d'algèbre de von Neumann telle que l'application naturelle  $B'' \longrightarrow \overline{B}$  soit un homomorphisme *normal* de  $B''$  sur  $\overline{B}$  (*donc se relève*, d'où facilement une application cherchée  $\overline{B} \longrightarrow A$  en composant  $\overline{B} \longrightarrow B'' \longrightarrow A$ ). Pour ces histoires de bidual de  $C^*$ -algèbre, il faut seulement utiliser le résultat sur le dual que je t'avais signalé dans ma lettre précédente, et qui est presque trivial : *Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre,  $u$  une forme linéaire hermitienne continue sur  $A$ , alors on a  $u = v - w$ , où  $v$  et  $w$  sont positives, et  $\|v\| + \|w\| = \|u\|$ .* Démonstration : Soit  $K$  la partie de  $A'$  formée des formes positives de norme  $\leq 1$ , c'est une partie convexe faiblement compacte contenant 0, et il est trivial que pour  $x \in A$ ,  $x$  hermitien, on a  $\|x\| = \sup |\langle x, x' \rangle|$ ,  $x' \in K$ . Se bornant aux sous-espaces hermitiens de  $A$  et  $A'$ , le théorème des bipolaires montre que la boule unité de  $A'_h$  est l'enveloppe convexe symétrique faiblement fermée de  $K$ , i.e. l'ensemble des  $x$  ( $??$ )  $\lambda u - \mu w$ , où  $\lambda, \mu \leq 0$ ,  $\lambda + \mu = 1$ ,  $v, w \in K$  (cet ensemble est déjà faiblement compact, car  $K$  l'est), ce qui prouve le théorème. Si on ne suppose plus  $u$  hermitienne, on aura  $u = v + iw$  avec  $v, w$  hermitiennes et  $\|v\|, \|w\| \leq \|u\|$ , et on peut appliquer à  $v$  et  $w$  le résultat précédent. – De plus, le raisonnement prouve que réciproquement, si  $A$  est une algèbre normée complète qui satisfait au théorème précédent (mais où on suppose  $v$  et  $w$  “bornées” – ce qui est automatiquement vrai si  $A$  a une unité), alors (du moins sur sa partie hermitienne) sa norme est la norme polaire de  $K$  donc une norme satisfaisant aux identités algébriques qui caractérisent les  $C^*$ -algèbres. Si on suppose seulement que les formes positives engendrent algébriquement le dual de  $A$ , on peut encore dire (en utilisant Baire) que la norme de  $A$  est *équivalente* à la  $C^*$ -norme polaire de

$K$ , donc que par un changement de norme  $A$  devient une  $C^*$ -algèbre. – Enfin, il est probable que dans l'énoncé du théorème plus haut,  $v$  et  $w$  soient uniques (peut-être en leur imposant d'autres conditions); il en résulterait que si  $u$  est centrale,  $v$  et  $w$  le sont etc. Mais je ne me suis pas amusé à regarder ça de près.

Merci aussi pour ta lettre où tu réponds à mes questions. Je te salue amicalement

A. Grothendieck

## Lettre à J. Dixmier, 13.8.1954

1052 rua Oscar Freire  
Sao Paulo (Brésil)  
USA

Sao Paulo le 13.8.1954

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre détaillée du 28.7. C'est bien dommage que tu penses la théorie des  $C^*$ -algèbres trop vaste pour être englobée dans ton bouquin. Mais où serait le mal d'un livre de 400 pages ou plus sur ce sujet, ça serait au contraire bien agréable qu'il en existe un, car ce n'est certes pas amusant de s'orienter à tâtons dans la littérature courante. Je regrette surtout que tu ne fasses pas Plancherel ; car il ne coûte vraiment pas cher, puisqu'on a déjà la bonne technique des algèbres de  $v.N.$ , et un Plancherel joliment présenté ferait certainement du bien. D'ailleurs, si j'ai bien compris, c'est surtout pour des Plancherels et Cie que sert toute la théorie des  $C^*$ -algèbres.

Je précise un point de ma lettre précédente, qui te semblait obscur. Soit  $A$  une  $*$ -algèbre,  $P$  l'ensemble des formes positives, unitaires, bornées (au sens algébrique) et normées (i.e.  $f(1) = 1$  s'il y a unité) sur  $A$ . Soit pour tout  $x \in A$  :  $N(x)^2 = \sup_{f \in P} f(x * x)$ , alors on a aussi  $N(x) = \sup \|U_x\|$ , où  $U$  parcourt toutes les représentations unitaires de  $A$ . Donc  $N$  est une norme sur  $A$  telle que l'algèbre complétée de  $A$  soit une  $C^*$ -algèbre, et les représentations unitaires de  $A$  correspondent biunivoquement à celles de cette  $C^*$ -algèbre (qui se substitue donc avantageusement à  $A$  dans diverses questions, p. ex. Plancherel)<sup>5</sup>. Supposons maintenant que  $A$  soit déjà muni d'une norme  $\|x\|$  qui en fasse une algèbre normée complète, et pour simplifier supposons qu'il existe une unité. Alors les formes positives unitaires et bornées sont identiques aux formes positives *continues*, les formes normées sont celles telles que  $f(1) = 1$ , ou encore celles de norme 1. Elles forment une partie convexe faiblement compacte de la partie hermitienne du dual de  $A$ . La partie hermitienne de ce dual est le dual de la partie hermitienne de  $A$ , il revient

---

<sup>5</sup>Si  $x \in A$  est hermitienne,  $N(x) = \sup_{f \in P} |f(x)|$

donc au même de dire que sur  $A_b$ , la norme donnée est égale à  $N(x) = \sup |f(x)|$ , ou que la boule unité de  $A'_b$  est l'enveloppe disquée (disquée = convexe symétrique) faiblement fermée de  $P$ . Cette dernière par raison de faible compacité n'est autre que l'ensemble des formes  $f - g$ ,  $f$  et  $g$  positives,  $\|f\| + \|g\| \leq 1$ . S'il en est donc ainsi, la norme donnée est identique à la norme  $N$  sur  $A_b$ , et par suite *équivalente* à  $N$  sur  $A$  (car du point de vue réel, une algèbre normée involutive est somme directe topologique de sa partie hermitienne et de sa partie antihermitienne). Donc  $A$  est complète pour  $N$ , donc à condition de changer  $\|x\|$  par une norme équivalente,  $A$  devient une  $C^*$ -algèbre. Si on ne veut plus que les deux normes coïncident sur la partie hermitienne, il suffisait même de supposer que toute forme hermitienne sur  $A$  est différence de deux formes positives, i.e. que  $SA'_b$  est engendré par l'enveloppe disquée  $Q$  de  $P$ . Car  $A'_b$  étant tonnelé, il en résulte que  $Q$  est un voisinage de  $O$ , donc par polarité que les normes  $\|x\|$  et  $N(x)$  sur  $A_b$  (donc aussi sur  $A$ ) sont équivalentes.

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre. Par bitransposition, toute représentation unitaire de  $A$ , soit  $x \rightarrow U(x)$ , se prolonge en une application de même norme du bidual  $A''$  dans  $L(H)$ , et de façon précise sur l'adhérence faible de  $U(A)$ . Si toute forme positive sur  $A$  est de la forme  $(U(x)a, a)$  (pour ceci, on prend pour  $U$  la somme hilbertienne des représentations unitaires associées aux diverses formes positives normées sur  $A$ ), la bitransposée  $U''$  est biunivoque, et identifie donc  $A''$  à une algèbre de von Neumann. On voit aussitôt que la topologie ultrafaible de  $A''$  est  $\sigma(A'', A')$ , en particulier les formes positives normales sur  $A''$  sont les formes positives quelconques sur  $A$ . De plus, on constate aussitôt que si  $V$  est une représentation unitaire de  $A$ , alors  $V''$  est une représentation normale de  $U''$  (ce qui établit une correspondance biunivoque entre les représentations unitaires quelconques de  $A$ , et les représentations normales de  $A''$ ). Cela établit d'ailleurs le fait (facile directement aussi) que la structure d'algèbre de v.N. sur  $A''$  est canonique. Ceci me semble commode dans bien des cas. Ainsi on appellera support d'une forme positive sur  $A$  le support de la forme normale sur  $A''$  qu'elle définit (mais gaffe, si  $A$  est de v.N. et si la forme donnée est déjà normale, ça fait deux supports différents). Deux formes positives seront dites disjointes si leurs supports sont orthogonaux. Cette fois-ci, il n'y a pas d'ambiguïté quand  $A$  est déjà une algèbre de von Neumann et  $u$  et  $v$  normales,

comme il résulte par exemple de la proposition (bien facile): deux formes positives  $\mu, \nu$  sur la  $C^*$ -algèbre  $A$  sont disjointes si et seulement si  $\|\mu - \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$ .

J'en viens à la question d'unicité de la décomposition d'une forme linéaire hermitienne  $\varphi$  comme différence de deux formes positives disjointes  $\mu$  et  $\nu$ . On peut supposer  $A$  une algèbre de v.N. et  $\mu, \nu$  normales. Alors on a un résultat plus général : Soient  $\mu, \nu$  deux formes positives (finies ou non) normales définies sur  $A^+$ , et semi-finies (par quoi on entend qu'il existe un idéal bilatère faiblement dense, sur la partie positive duquel  $\mu$  resp.  $\nu$  est fini). La notion de support est définie de façon évidente; supposons les supports de  $\mu$  et  $\nu$  orthogonaux. Alors je dis que  $\mu$  et  $\nu$  sont uniquement déterminés par la connaissance de la forme  $\mu - \nu$  (qui est une forme linéaire sur un idéal bilatère faiblement dense convenable de  $A$  ; noter que l'ensemble des idéaux bilatères faiblement denses est une base de filtre, ce qui précise le sens de l'énoncé précédent). La démonstration est absolument élémentaire (pas de décompositions spectrales !), on montre directement comment  $\mu$  et  $\nu$  peuvent s'exprimer en termes de  $\varphi = \mu - \nu$ . En fait, on peut encore affaiblir la notion de semi-fini dans cette démonstration. Corollaire: si  $\varphi$  est centrale,  $\mu$  et  $\nu$  sont des traces etc. Mais question: si on ne suppose pas  $\mu$  et  $\nu$  disjointes, peut-on écrire pourtant  $\varphi$  comme différence de deux formes positives normales semi-finies *disjointes* ? C'est bien plausible, mais je n'ai pas encore regardé. – Bien entendu, si on ne suppose plus que  $A$  est une algèbre de v.N., on a des mêmes énoncés sans condition de normalité, mais la condition de semi-finitude étant ici remplacée par l'existence d'un idéal bilatère dense (*pour la norme*) sur lequel la forme positive envisagée est finie (ce qui rejoint le point de vue de Godement dans son exposé de Plancherel). On devra passer comme toujours à  $A''$  (mais j'avoue que je n'ai pas fait les vérifications).

Enfin, dans la décomposition canonique  $\varphi = \mu - \nu$  avec  $\mu$  et  $\nu$  positives,  $\|\varphi\| = \|\mu\| + \|\nu\|$ , si  $A$  est de v.N. et  $\varphi$  ultrafaiblement continue, alors  $\mu$  et  $\nu$  le sont aussi (i.e. sont normales). Il suffit d'exhiber une telle décomposition, avec  $\mu$  et  $\nu$  normales. Mais la topologie ultrafaible de  $A$  étant induite par la top. ultrafaible d'un  $L(H)$ , on peut supposer  $A = L(H)$ . Mais alors on a une forme bien explicite des formes hermitiennes ultrafaiblement continues, données par des opérateurs à trace hermitiens, dont la décomposition spectrale donne la décomposition voulue.

Malheureusement, je n'ai pas vu de démonstration générale du théorème de commutation suivant (qu'il suffit maintenant d'énoncer pour les formes positives): Soit  $A$  alg. de v.N.,  $u$  une forme positive normale sur  $A$  (en fait, il devrait être inutile de supposer  $u$  finie, semi-finie devrait suffire), soit  $B$  son "commutant" dans  $A$ . Alors,  $B$  contient son commutant  $B'$  dans  $A$ . Cela suggère une théorie de la commutation, qui serait la suivante: dis-moi si par hasard tu ne sais pas si elle est fausse. (Mais il me semble que le seul cas présentant des difficultés – i.e. qui ne se réduit pas par des techniques connues de décompositions spectrales – est celui d'une algèbre purement infinie). On prend les commutants dans  $A$  (laissant tomber  $L(H)$ !), notation  $B', B''$  etc. Une sous-algèbre de v.N. de  $A$  est dite close, si elle est identique à son bicommutant (question : suffit-il qu'elle contienne le centre ?) Soit  $P$  l'ensemble des formes positives normales semi-finies sur  $A$ . (Il est cependant possible que la définition donnée plus haut de semi-finie soit trop stricte. Car alors sur un facteur purement infinie, donc simple, une forme semi-finie serait automatiquement finie ; alors ça semble trop beau que la théorie esquissée ci-dessous puisse marcher). On dit que  $x \in A$  et  $U \in P$  commutent, si  $u(xy) = u(yx)$  pour tout  $y$  dans un idéal bilatère faiblement dense assez petit (définition sujette à variation, voir ci-dessus). D'où notion de commutant  $\gamma(B)$  dans  $P$  d'une partie de  $A$ , et commutant  $\gamma(M)$  dans  $A$  d'une partie  $M$  de  $P$ . Voici ce qui devrait être vrai (et est vrai dans le cas d'une algèbre semi-finie):

Th. 1. — *Les parties de  $A$  qui sont des commutants  $\gamma(M)$  ( $M \subset P$ ) sont exactement les sous-algèbres closes.*

(Ce théorème serait faux, déjà pour  $A = L(H)$ , si on restreignait  $P$  aux formes finies). Une partie  $M$  de  $P$  est dite close, si c'est le commutant  $\gamma(B)$  d'une partie de  $A$ . Une intersection de parties closes est close, d'où partie close engendrée. Si  $M \subset P$ , soit  $\sigma(M) = \gamma(M)'$ ,  $M \longrightarrow \sigma(M)$  établit une correspondance biunivoque entre les parties closes de  $P$  et celles de  $A$ . On dit que  $M$  et  $N$  commutent, si  $\sigma(M)$  et  $\sigma(N)$  commutent. Pour ceci, il faut et il suffit que tout élément de  $M$  commute à tout élément de  $N$ . Partie commutative de  $P$  : qui commute à elle-même. Deuxième conjecture:

Th. 2. — *Tout  $u \in P$  commute à lui-même, i.e. la partie close qu'il engendre est*

commutative (ou encore  $\gamma(M)$  contient son commutant, ou encore  $\sigma(u)$  est commutative). Alors (supposant pour simplifier que  $\text{supp. } u = 1$ ), la partie close engendrée par  $u$  est identique à l'ensemble des bornes supérieures dans  $P$  des ensembles de formes  ${}^x u = u^x$ , où  $x$  parcourt la partie positive de  $\sigma(u)$ . Si  $u$  est finie, l'ensemble des formes finies qui sont dans la partie close engendrée par  $u$ , est aussi l'adhérence de l'ensemble des  ${}^x u = u^x$  (pour la norme du dual de  $A$ ).

On pose bien entendu  ${}^x u(y) = u(yx)$ ,  $u^x(y) = u(xy)$  ; si  $x$  est positive et  $x \in \sigma(u)$ , alors  ${}^x u = u^x$  est une forme positive (semi-finie). Enfin:

Th. 3. — Pour qu'une partie close  $M$  de  $P$  (resp. de la partie  $P_0$  de  $P$  formée des formes positives finies) soit commutative, il faut et il suffit que ce soit un lattice (existence du sup de deux éléments).

En vertu du théorème de Kakutani, il s'ensuivra que l'espace vectoriel engendré par  $M$  (dans le cas où  $M \subset P_0$ ) est isomorphe avec toutes ces structures à un espace  $L_1$ , dont le dual sera alors  $\sigma(M)$ <sup>6</sup>. — Bien entendu, on dira qu'une partie de  $P_0$  est close si c'est l'intersection de  $P_0$  avec sa clôture dans  $P$ .

Dans le cas où  $A$  est finie, la théorie se simplifie, car il suggit dans le th. 1 de ne considérer que des formes positives finies ; elle est d'ailleurs à peu près triviale dans ce cas. Dans le cas général, si on est embêté par la considération de formes positives non finies, on peut ignorer l'énoncé 1, et n'envisager que les deux autres énoncés, dans le cas de formes finies.

Dernière question, qui ne devrait pas être très vache : sait-on si toute forme linéaire ultrafaiblement continue  $u$  sur l'algèbre de v.N.  $A$  admet une décomposition polaire  $u = {}^U v$ , avec  $v$  forme positive normale, et  $U$  partiellement isométrique ? Bien entendu, il y a aussi des questions d'unicité, sous des conditions faciles à préciser.

Pour la démonstration du théorème sur la projection de  $L(H)$  sur une sous-algèbre de v.N., je t'enverrai une copie dès que j'aurai rédigé ça. J'écirai peut-être un petit article à l'occasion.

---

<sup>6</sup>Où du moins un quotient de  $\sigma(M)$  (car dans le cas du type purement infini, s'introduit une question de supports. Ainsi,  $M = \{0\}$  est alors stable, c'est le commutant  $\gamma(A)$  de  $A$ , donc  $\sigma(M) = Z$ , or  $Z \neq 0$  n'est pas le dual de  $\{0\}$  !)

J'espère que mes questions ne finissent pas par t'embêter. Meilleures salutations.

A. Grothendieck

P.S. Écris-moi plutôt à mon adresse personnelle, c'est plus sur. – Je sais démontrer qu'en décomposant une distribution centrale de type positif sur un groupe de Lie, on peut se borner à des caractères qui sont des distributions (d'ordre un de plus). Ce n'est pas bien profond d'ailleurs. Est-ce que ça se savait déjà ?



## Lettre à J. Dixmier, 24.1.1955

A. Grothendieck  
1645 Kentucky Street  
Lawrence (Kansas)  
USA

Lawrence 24.1.1955

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre. Bien que je me doutais qu'une partie des notions introduites dans mon papier (sinon toutes) devaient être connues, je ne connaissais aucune bibliographie, et ne savais pas, en effet, que les  $\Delta_A(t)$  avaient été considérés par [Richard] Kadison. A-t-il aussi la "formule fondamentale"  $\Delta_{|AB|} \leq \Delta_{|A|} \Delta_{|B|}$  ?

Je ne t'ai jamais demandé si une forme linéaire hermitienne ultrafaiblement continue sur une  $C^*$ -algèbre se décompose sous la forme  $\varphi_1 - \varphi_2$ , avec  $\varphi_1, \varphi_2 \gg 0$  et  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  disjointes. Si je me rappelle bien, je t'ai au contraire donné la démonstration dans la dernière lettre de Sao Paulo (mais *l'as-tu reçue* ?) C'était une lettre fort longue, écrite à la machine, où je posais un tas de conjectures<sup>7</sup>. Je n'ai jamais eu de réponse. Mais peut-être n'as-tu pas pu déchiffrer mon écriture dans une lettre antérieure (?!). En effet, on prouve

- a) Toute  $\varphi$  hermitienne continue sur une  $C^*$ -algèbre  $A$  s'écrit  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , avec  $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \gg 0$  (Hahn-Banach) ;
- b) Cette décomposition est unique. La condition  $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$  équivaut aussi au fait que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont disjointes ;
- c) Si  $\varphi$  est ultrafaiblement continue (sur  $A$  supposé de von Neumann),  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  le sont.

---

<sup>7</sup>Je t'y donnais aussi la démonstration explicite que si  $A$  est une  $*$ -algèbre normée complète telle que toute forme linéaire hermitienne continue sur  $A$  est différence de deux formes positives, alors (par changement de norme)  $A$  est équivalente à une  $C^*$ -algèbre.

c) est immédiat, car il suffit de prouver l'existence d'au moins une décomposition  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2 \in A_*$ ,  $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ . Par Hahn-Banach, on est ramené au cas où  $A = L(H)$ . Mais alors  $A_* = L'(H)$  (espace des opérateurs de Fredholm), et la décomposition d'un opérateur de Fredholm hermitien en sa partie positive et négative donne le résultat cherché.

Quant à la preuve de b), je n'ai pas les papiers sous la main (ils sont dans une grosse malle qui va arriver dans quelques semaines). Aussi il vaut mieux que je te la donne quand j'aurai les papiers. J'ai une rédaction complète de ce fourbi (il n'y a donc pas de canular imprévu à craindre, je pense !).

As-tu l'intention de regarder les questions que je pose dans mon papier sur les inégalités de convexité. Et si oui, penses-tu que le fourbi mérite une rédaction soigneuse dans un "joint paper" ? En ce cas, il serait sans doute préférable que tu assumes la rédaction, pour le bien du lecteur !

Je suis en train de passer en revue mes éléments de top. alg. et me délecte dans des diagrammes variés. J'ai beaucoup de temps à moi, et suis ici tout à fait bien.

Amitiés

A. Grothendieck

# A GENERAL THEORY OF FIBRE SPACES WITH STRUCTURE SHEAF

University of Kansas, (1955)<sup>8</sup>

---

## Introduction

When one tries to state in a general algebraic formalism the various notions of fibre space: general fibre spaces (without structure group, and maybe not even locally trivial); or fibre bundle with topological structure group  $G$  as expounded in the book of Steenrod (The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press); or the “differentiable” and “analytic” (real or complex) variants of theses notions; or the notions of algebraic fibre spaces (over an abstract field  $k$ ) - one is led in a natural way to the notion of fibre space with a structure sheaf  $\mathbf{G}$ . This point of view is also suggested a priori by the possibility, now classical, to interpret the (for instance “topological”) classes of fibre bundles on a space  $X$ , with *abelian* structure group  $G$ , as the elements of the first cohomology group of  $X$  with coefficients in the sheaf  $\mathbf{G}$  of germs of continuous maps of  $X$  into  $G$ ; the word “continuous” being replaced by “analytic” respectively “regular” if  $G$  is supposed an analytic re-

---

<sup>8</sup>National Science Foundation Research Project on Geometry of Function Space. Research Grant NSF - G 1126. Report No. 4. First Edition August, 1955. Second Edition May, 1958

spectively an algebraic group (the space  $X$  being of course accordingly an analytic or algebraic variety). The use of cohomological methods in this connection have proved quite useful, and it has become natural, at least as a matter of notation, even when  $G$  is not abelian, to denote by  $H^1(X, \mathbf{G})$  the set of classes of fibre spaces on  $X$  with structure sheaf  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}$  being as above a sheaf of germs of maps (continuous, or differentiable, or analytic, or algebraic as the case may be) of  $X$  into  $G$ . Here we develop systematically the notion of fibre space with structure sheaf  $\mathbf{G}$ , where  $\mathbf{G}$  is any sheaf of (not necessarily abelian) groups, and of the first cohomology set  $H^1(X, \mathbf{G})$  of  $X$  with coefficients in  $\mathbf{G}$ . The first four chapters contain merely the first definitions concerning general fibre spaces, sheaves, fibre spaces with composition law (including sheaves of groups) and fibre spaces with structure sheaf. The functor aspect of the notions dealt with has been stressed throughout, and as it now appears should have been stressed even more. As the proofs of most of the facts stated reduce of course to straightforward verifications, they are only sketched or even omitted, the important point being merely a consistent order in the statement of the main facts. In the last chapter, we define the cohomology set  $H^1(X, \mathbf{G})$  of  $X$  with coefficients in the sheaf of groups  $\mathbf{G}$ , so that the expected classification theorem for fibre spaces with structure sheaf  $\mathbf{G}$  is valid. We then proceed to a careful study of the exact cohomology sequence associated with an exact sequence of sheaves  $e \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{H} \longrightarrow e$ . This is the main part, and in fact the origin, of this paper. Here  $\mathbf{G}$  is any sheaf of groups,  $\mathbf{F}$  a subsheaf of groups,  $\mathbf{H} = \mathbf{G}/\mathbf{F}$ , and according to various supplementary hypotheses of  $\mathbf{F}$  (such as  $\mathbf{F}$  normal, or  $\mathbf{F}$  normal abelian, or  $\mathbf{F}$  in the center) we get an exact cohomology sequence going from  $H^0(X, \mathbf{F})$  (the group of section of  $\mathbf{F}$ ) to  $H^1(X, \mathbf{G})$  respectively  $H^1(X, \mathbf{H})$  respectively  $H^2(X, \mathbf{G})$ , with more or less additional algebraic structures involved. The formalism thus developed is quite suggestive, and as it seems useful, in particular in dealing with the problem of classification of fibre bundles with a structure group  $G$  in which we consider a sub-group  $F$ , or the problem of comparing say the topological and analytic classification for a given analytic structure group  $G$ . However, in order to keep this exposition in reasonable bounds, no examples have been given. Some complementary facts, examples, and applications for the notions developed will be given in the future. This report has been written

mainly in order to serve the author for future reference; it is hoped that it may serve the same purpose, or as an introduction to the subject, to somebody else.

Of course, as this report consist in a fortunately straightforward adaptation of quite well known notions, no real difficulties had to be overcome and there is no claim for originality whatsoever. Besides, at the moment to give this report for mimeography, I hear that results analogous to those of chapter 5 were known for some years to Mr. Frenkel, who did not publish them till now. The author only hopes that this report is more pleasant to read than it was to write, and is convinced that anyhow an exposition of this sort had to be written.

*Remark* (added for the second edition). It has appeared that the formalism developed in this report, and specifically the results of Chapter V, are valid (and useful) also in other situations than just for sheaves on a given space  $X$ . A generalization for instance is obtained by supposing that a fixed group  $\pi$  is given acting on  $X$  as a group of homeomorphisms, and that we restrict our attention to the category of fibre spaces over  $X$  (and specially sheaves) on which  $\pi$  operates in a manner compatible with its operations on the base  $X$ . (See for instance A. Grothendieck, Sur le mémoire de Weil; Généralisations des fonctions abéliennes, Séminaire Bourbaki Décembre 1956). When  $X$  is reduced to a point, one gets (instead of sheaves) sets, groups, homogeneous spaces etc. admitting a fixed group  $\pi$  of operators, which leads to the (commutative and non-commutative) cohomology theory of the group  $\pi$ . One can also replace  $\pi$  by a fixed Lie group (operating on differentiable varieties, on Lie groups, and homogeneous Lie spaces). Or  $X$ ,  $\pi$  are replaced by a fixed ground field  $k$ , and one considers algebraic spaces, algebraic groups, homogeneous spaces *defined over*  $k$ , which leads to a kind of cohomology theory of  $k$ . All this suggests that there should exist a comprehensive theory of non-commutative cohomology in suitable categories, an exposition of which is still lacking. (For the “commutative” theory of cohomology, see A. Grothendieck, Sur quelques points d’Algèbre Homologique, Tohoku Math. Journal, 1958).

## I. General fibre spaces

Unless otherwise stated, none of the spaces to occur in this report have to be supposed separated.

## 1.1 Notion of fibre space

**Definition 1.1.1.** — A fibre space over a space  $X$  is a triple  $(X, E, p)$  of the space  $X$ , a space  $E$  and a continuous map  $p$  of  $E$  into  $X$ .

We do not require  $p$  to be onto, still less to be open, and if  $p$  is onto, we do not require the topology of  $X$  to be the quotient topology of  $E$  by the map  $p$ . For abbreviation, the fibre space  $(X, E, p)$  will often be denoted by  $E$  only, it being understood that  $E$  is provided with the supplementary structure consisting of a continuous map  $p$  of  $E$  into the space  $X$ .  $X$  is called the *base space* of the fibre space,  $p$  the *projection*, and for any  $x \in X$ , the subspace  $p^{-1}(x)$  of  $E$  (which is closed if  $\{x\}$  is closed) is the *fibre* of  $x$  (in  $E$ ).

Given two fibre spaces  $(X, E, p)$  and  $(X', E', p')$ , a *homomorphism* of the first into the second is a pair of continuous maps  $f : X \longrightarrow X'$  and  $g : E \longrightarrow E'$ , such that  $p'g = fp$ , i.e. commutativity holds in the diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

Then  $g$  maps fibres into fibres (but not necessarily *onto!*); furthermore, if  $p$  is surjective, then  $f$  is uniquely determined by  $g$ . The continuous map  $f$  of  $X$  into  $X'$  being given,  $g$  will be called also a  $f$ -homomorphism of  $E$  into  $E'$ . If, moreover,  $E''$  is a fibre space over  $X'$ ,  $f'$  a continuous map  $X' \longrightarrow X''$  and  $g' : E' \longrightarrow E''$  a  $f'$ -homomorphism, then  $g'g$  is a  $f'f$ -homomorphism. If  $f$  is the identity map of  $X$  onto  $X$ , we say also  $X$ -homomorphism instead of  $f$ -homomorphism. If we speak of homomorphisms of fibre spaces over  $X$ , without further comment, we will always mean  $X$ -homomorphisms.

The notion of *isomorphism* of a fibre space  $(X, E, p)$  onto a fibre space  $(X', E', p')$  is clear: it is a homomorphism  $(f, g)$  of the first into the second, such that  $f$  and  $g$  are onto-homeomorphisms.

### 1.2 Inverse image of a fibre space, inverse homomorphisms

Let  $(X, E, p)$  be a fibre space over the space  $X$ , and let  $f$  be a continuous map of a space  $X'$  into  $X$ . Then the *inverse image* of the fibre space  $E$  by  $f$  is a fibre space  $E'$  over  $X'$ .  $E'$  is defined as the subspace of  $X' \times E$  of points  $(x', y)$  such that  $f x' = p y$ , the projection  $p'$  of  $E'$  into the base  $X'$  being given by  $p'(x', y) = x'$ . The map  $g(x', y) = y$  of  $E'$  into  $E$  is then an  $f$ -homomorphism, inducing for each  $x' \in X'$  a *homeomorphism* of the fibre of  $E'$  over  $x'$  onto the fibre of  $E$  over  $f x'$ .

[]

### 1.3 Subspace, quotient, product

Let  $(X, E, p)$  be a fibre space,  $E'$  any subspace of  $E$ , then the restriction  $p'$  of  $p$  to  $E'$ , defines  $E'$

[]

### 1.4 Trivial and locally trivial fibre spaces

Let  $X$  and  $F$  be two spaces,  $E$  the product space, the projection of the product on  $X$  defines  $E$  as a fibre space over  $X$ , called the *trivial fibre space over  $X$  with fibre  $F$* .

All fibres are canonically homeomorphic with  $F$ .

[]

### 1.5 Definition of fibre spaces by coordinate transformations

Let  $X$  be a space,  $(U_i)$  a covering of  $X$ , for each

[]

### 1.6 The case of locally trivial fibre spaces

The method of the preceding section for constructing fibre spaces over  $X$  will be used mainly in the case where we are given a fibre space over  $T$  over  $X$ , and where, given an open covering  $(U_i)$  of  $X$ , we consider the fibre spaces

[]

## 1.7 Sections of fibre spaces

**Definition 1.7.1.** — Let  $(X, E, p)$  be a fibre space; a section of this fibre space (or, by pleonasm, a section of  $E$  over  $X$ ) is a map  $x$  of  $X$  into  $E$  such that  $px$  is the identity map of  $X$ . The set of continuous sections of  $E$  is noted  $H^0(X, E)$ .

It amounts to the same to say that  $s$  is a function the value of which at each  $x \in X$  is in the fibre of  $x$  in  $E$  (which depends on  $x$ !).

The existence of a section implies of course that  $p$  is onto, and conversely if we do not require continuity. However, we are primarily interested in continuous sections. A section of  $E$  over a subset  $Y$  of  $X$  is by definition a section of  $E|Y$ . If  $Y$  is open, we write  $H^0(Y, E)$  for the set  $H^0(Y, E|Y)$  of all continuous sections of  $E$  over  $Y$ .

$H^0(X, E)$  as a functor. Let  $E, E'$  be two fibre spaces over  $X$ ,  $f$  an  $X$ -homomorphism of  $E$  into  $E'$ . For any section  $s$  of  $E$ , the composed map  $fs$  is a section of  $E'$ , continuous if  $s$  is continuous. We get thus a map, noted  $f$ , of  $H^0(X, E)$  into  $H^0(X, E')$ . The usual functor properties are satisfied:

- a. If the two fibre spaces are identical and  $f$  is the identity, then so is  $f$ .
- b. If  $f$  is an  $X$ -homomorphism of  $E$  into  $E'$  and  $f'$  an  $X$ -homomorphism of  $E'$  into  $E''$  ( $E, E', E''$  fibre spaces over  $X$ ) then  $(f'f) = f'f$ .

Let  $(X, E, p)$  be a fibre space,  $f$  a continuous map of a space  $X'$  into  $X$ , and  $E'$  the inverse image of  $E$  under  $f$ .

## II. Sheaves of sets

Throughout this exposition, we will now use the word “section” for “continuous section”.

### 2.1 Sheaves of sets

**Definition 2.1.1.** — Let  $X$  be a space. A sheaf of sets on  $X$  (or simply a sheaf) is a fibre space  $(E, X, p)$  with base  $X$ , satisfying the condition: each point  $a$  of  $E$  has an open neighbourhood  $U$  such that  $p$  induces a homeomorphism of  $U$  onto an open subset  $p(U)$  of  $X$ .



This can be expressed by saying that  $p$  is an interior map and a local homeomorphism. It should be kept in mind that, even if  $X$  is separated,  $E$  is not supposed separated (and will in most important instances not be separated).

[]

## 2.2

### 2.3 Definition of a sheaf by systems of sets

### 2.4 Permanence properties

### 2.5 Subsheaf, quotient sheaf. Homeomorphism of sheaves

### 2.6 Some examples

- a.
- b.
- c.
- d. **Sheaf of germs of subsets.** Let  $X$  be a space, for any open set  $U \subset X$  let  $P(U)$  be the set of subsets of  $U$ . If  $V \subset U$ , consider the map  $A \rightarrow A \cap V$  of  $P(U)$  into  $P(V)$ . Clearly the conditions of transitivity, and of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, so that the sets  $P(U)$  appear as the sets  $H^0(U, P(X))$  of sections of a well determined sheaf on  $X$ , the elements of which are called *germs of sets in  $X$* . Any condition of a local character on subsets of  $X$  defines a subsheaf of  $P(X)$ , for instance the sheaf of *germs of closed sets* (corresponding to the relatively closed sets in  $U$ ), or if  $X$  is an analytic manifold, the sheaf of germs of analytic sets, etc.

Other important examples of sheaves will be considered in the next chapter.

## III. Group bundles and sheaves of groups

## IV. Fibre spaces with structure sheaf

## V. The classification of fibre spaces with structure sheaf

## Lettre à N. Bourbaki, 9.10.1960

Paris le 9.10.1960

Monsieur et cher Maître,

Je Vous remercie pour votre lettre, empreinte à la fois de sagesse et de mansuétude. Il semble vain en effet qu'un différend personnel puisse être l'occasion du départ d'une disciple. Je reconnais qu'il était vain que j'attende du Maître qu'il arbitre une querelle qui ne le concerne pas, et qu'un tel arbitrage ne pouvait résoudre rien.

Je me suis interrogé plusieurs fois pendant les années de ma collaboration avec le Maître si mes habitudes peu sociables, mon caractère passionné et ma répugnance à vaincre les répugnances d'autrui, ne me rendaient inapte à une collaboration fertile pendant les congrès. Sans plus vouloir chercher la cause ailleurs qu'en moi-même, je pense maintenant qu'il en est bien ainsi, et que j'ai atteint avant l'âge traditionnel le moment où je servirai mieux le Maître par mon départ, qu'en restant sur Ses amicales instances.

Je m'efforcerai de rester digne des enseignements que Vous m'avez prodigués pendant si longtemps et de ne pas trahir l'esprit du Maître, qui, je l'espère, restera visible dans mon travail comme par le passé.

Votre très dévoué élève et serviteur,

A. Grothendieck

## Letter to N. Bourbaki, 9.10.1960<sup>9</sup>

Paris 9.10.1960

Dear Sir and my dear Master,

I thank You for your letter, marked by both wisdom and clemency. Indeed it seems pointless that a personal disagreement could be the occasion for the departure of a disciple. I recognize that it was pointless for me to wait for the Master to arbitrate a quarrel that did not concern him and that such arbitration would resolve nothing.

I have asked myself many times over the years of my collaboration with the Master whether my lack of social skill, my impassioned character, and my repugnance for overcoming the repugnance of others, did not render me unsuitable for a productive collaboration during the meetings. No longer wanting to search for the cause anywhere except in myself, I now think that it is better this way and that I reached earlier than the traditional age the moment when I would better serve the Master by my departure, rather than remaining as a result of His kind insistence.

I will endeavor to remain worthy of the teachings that You for so long lavished upon me and not to betray the spirit of the Master who, I hope, will remain visible in my work as it has been in the past.

Your very devoted pupil and servant,

A. Grothendieck

---

<sup>9</sup>Translated by W. Messing

## Letter to J. Murre, 18.7.1962<sup>10</sup>

July 18, 1962

My dear Murre,

I recently had some thought on finiteness conditions for Picard preschemes, and substantially improved on the results stated in the last section of my last Bourbaki talk. The main result stated there for a simple projective morphism with connected geometric fibers (namely that the pieces  $\underline{\text{Pic}}_{X/S}^P$  are of finite type over  $S$ ) has been extended by Mumford to the case where instead of  $f$  simple we assume only  $f$  flat with integral geometric fibers, (at least if these are normal). Using his result (the proof of which is quite simple and beautiful), I could get rid of the normality assumption, and even (as in theorem 4.1. of my talk) restrict to the consideration of the two first non trivial coefficients of the Hilbert polynomials. The key results for the reduction are the following (the proofs being very technical, and rather different for (i) and (ii), except that (ii) uses (i) to reduce to the normal case; moreover (ii) uses Mumford's result and the equivalence criteria as developed in my last Seminar):

- (i) Let  $X, Y$  be proper over  $S$  noetherian, let  $f : X \longrightarrow Y$  be a *surjective*  $S$ -morphism, assume for simplicity of the statement that the Picard preschemes exist, then  $f : \underline{\text{Pic}}_{Y/S} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S}$  is of finite type (and in fact affine if  $S$  is the spectrum of a field), i.e. a subset  $M$  of  $\underline{\text{Pic}}_{Y/S}$  is quasi-compact iff its image in  $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$  is.
- (ii) The same conclusion holds for a canonical immersion  $X \longrightarrow Y$ , if  $Y/S$  is projective with fibers all components of which are of dimension  $\geq 3$ , and if  $X$  is the sub-scheme of zeros of a section over  $Y$  of an invertible sheaf  $\underline{L}$  ample with respect to  $S$ .

A connected result is that for any  $X/S$  proper, and integer  $n \neq 0$ , the  $n$ -th power homomorphism in the Picard prescheme is of finite type.

---

<sup>10</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGM1862scan.pdf>

I tell you about this, namely (i), because of the method of proof, involving of course considerations of non flat descent. The fact that I do not have any good effectivity criterion does not hamper, by just recalling what the effectivity of a given descent datum means. Now it turns out that by a slightly more careful analysis of the situation, one can prove the following theorem, of a type very close to the one you have proved recently, and to some you still want to prove as I understand it.

*Theorem. — Let  $S$  be an integral noetherian scheme,  $X$  and  $X'$  proper over  $S$  and  $f : X' \longrightarrow X$  a surjective  $S$ -morphism, look at the corresponding homomorphism for the Picard functors  $f^\bullet : \underline{\text{Pic}}_{X/S} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X'/S}$ . Assume:*

- a) the existence problems  $A$  and  $B$  defined below for  $X/S$  has always a solution (this is certainly true when  $X/S$  is projective).*
- b) the morphism  $f_S : X'_S \longrightarrow X_S$  induced on the generic fiber is a morphism of descent, i.e.  $\underline{\mathcal{O}}_{X_S} \longrightarrow f(\underline{\mathcal{O}}_{X'_S}) = h(\underline{\mathcal{O}}_{X''_S})$  is exact. Then, provided we replace  $S$  by a suitable non empty open set, the homomorphism  $f^\bullet$  is representable by a quasi-affine morphism, more specifically in the factorisation of  $f^\bullet$  via the functor representing suitable descent data,  $f^\bullet = v u$  with  $u$  affine and  $v$  a monomorphism (as you well know),  $v$  is in fact representable by finite direct sums of immersions.*

*Corollary 1. — Without assuming b), but instead in a) allowing  $X/S$  to be replaced by suitable other schemes  $X_i$  finite over  $X$ , the same conclusion holds, namely  $f^\bullet$  is representable by quasi-affine morphisms.*

This follows from the theorem, using a suitable factorisation of  $f$ . For instance, using Chow's lemma and the Main existence theorem in my first talk on Picard schemes, one gets:

*Corollary 2. — Assume  $X/S$  proper satisfies the condition*

- a') for every  $X'$  finite over  $X$ , there exists a non empty open subset  $S_1$  of  $S$  such that problem  $A$  for  $X' / S_1$  has always solution (this condition is satisfied if  $X/S$  is projective).*

*Then provided we replace  $S$  by a suitable  $S_1$  non empty and open,  $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$  exists, is separated, its connected components are of finite type over  $S$ .*

**N.B.** The proof does not give any evidence towards the fact that in the theorem, one could replace “quasi-affine” by “affine”. This is true however over a field, because a quasi-affine algebraic group is affine!

It would be interesting to have a counterexample, say, over a ring of dimension 1 such as  $k[t]$ ,  $X$  and  $X'$  projective and simple over  $S$  and  $X' \rightarrow X$  birational, or alternatively,  $X$  and  $X'$  projective and normal over  $S$ , and  $f : X' \rightarrow X$  finite. A counterexample in the latter case would of course provide a counterexample to the effectivity problem for a finite morphism raised in my first talk on descent...

“Problem A” is the following: given  $X/S$  and Module  $F$  on  $X$ , to represent the functor on the category of  $S$ -preschemes taking any  $S'/S$  into a one-element or into the empty set, according as to whether  $F'$  on  $X'/S'$  is flat with respect to  $S'$  or not, where  $X' = X \times_S S'$ ,  $F' = F \times_S S'$ .

Given  $X/S$ , we say that “Problem A for  $X/S$  has always a solution” if for every constant  $F'$  on some  $X'/S'$ , the previous functor on  $\text{Sch}/S'$  is representable by a  $S'$ -scheme of finite type. The main step in my proof of existence of Hilbert schemes shows that this condition is satisfied when  $X/S$  is projective. In the proof, essential use is made of the Hilbert polynomial, in fact we get a solution as a disjoint sum of subschemes of  $S$  corresponding to various Hilbert polynomials. Still I would expect that the functor is representable as soon as  $X/S$  is proper. In view of the application we have in mind here, it would be sufficient (for any integral  $S$ ) to find in  $S$  a non empty open set  $S_1$  such Problem A has always a solution for  $X_1 = X \times_S S_1$  over  $S_1$ . To prove this weaker existence result, it is well possible that a reduction to the projective case is possible, using Chow’s lemma and some induction on the relative dimension perhaps. I also would expect that a proof will be easier when working over a complete noetherian local ring, hence the case of a general noetherian local ring by flat descent. And it is well possible that, putting together two such partial results, a proof of the existence in general could be obtained. (I met with such difficulties already time ago in a very analogous non projective existence problem, which beside I did not solve so far!). This problem A has been met also by Hartshorne (A Harvard Student), but I doubt he will work seriously on it. Thus I now wrote you in the hope you may be interested to have a try on this problem. As a general fact, our knowledge of non projective existence theorems

is exceedingly poor, and I hope this will change eventually.

Sincerely yours.

A. Grothendieck

## Letter to J. Tate, 5.2.1962

Paris Feb 5, 1962

Dear John,

In connection with my Bourbaki talk, I pondered again on Picard schemes. For instance, as I told Mumford, I proved that if  $X/S$  is projective and simple, then  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$  is of finite type over  $S$ . More generally, the decomposition of  $\text{Pic}_{X/S}$  according to the Hilbert polynomials (in fact, the first two non trivial coefficients of the polynomial suffice) consists of pieces which are of finite type, hence projective over  $S$ . Another way of stating this is to say that a family of divisors  $D_i$  on the geometric fibers of  $X/S$  is "limited" iff the projective degrees of the  $D_i$  and  $D_i^2$  are bounded.

Another result, of interest in connection with your seminar, is a proof of the fact that, for an abelian scheme  $A/k$ ,  $k$  a perfect field, the absolute formal scheme of moduli over  $\mathbb{W}_\infty(k)$  is simple over  $k$ . This comes from the following general fact: Let  $X_0/S_0$  be simple,  $X'_0/X_0$  étale,  $S_0$  subscheme of  $S$  defined by an ideal  $J$  of square 0. Let  $\xi_0 \in H^2(X_0, \mathcal{G}_{X_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} J)$  and  $\xi'_0 \in H^2(X'_0, \mathcal{G}_{X'_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} J)$  be the obstruction for lifting. Then  $\xi'_0$  is the inverse image of  $\xi_0$  under the obvious map. As a consequence, if  $X_0/S_0$  is abelian, taking  $X'_0 = X_0$ ,  $X'_0 \rightarrow X_0$  multiplication by  $n$  prime to the residue characteristic, we get  $\xi_0 = n^*(\xi_0)$ . If  $S = \text{Spec } \Lambda$ ,  $\Lambda$  local artin, and  $mJ = 0$ , then we are reduced to an obstruction in the  $H^2$  of the reduced  $X_0 \otimes_{\Lambda_0} k = A$ , satisfying  $\xi = n^*(\xi)$  for  $n$  prime to  $p$ . Using the structure

$$H^*(A, \mathcal{G}_{A/k}) \simeq \bigwedge^* H^1(A, \mathcal{O}_A) \otimes t_A,$$

we get  $n^*(\xi) = n^3 \xi$ , hence  $(n^3 - 1)\xi = 0$ . Taking  $n = -1$  we get  $2\xi = 0$ , hence  $\xi = 0$ , and we win!

I just noticed the proof does not give any information for residue char. = 2! Here is a simple proof valid in any char.: Consider the obstruction  $\eta_0$  for lifting  $X_0 \times_{S_0} X_0$ , then  $\eta_0 = \xi_0 \otimes 1 + 1 \otimes \xi_0$ , and  $\eta_0$  is invariant under the automorphism  $(x, y) \rightsquigarrow (x, y + x)$  of  $X_0 \times_{S_0} X_0$ . Thus we get an element  $\xi = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i \wedge e_j$  in  $H^2(A, \mathcal{O}_A) = \bigwedge^2 t$ , s.th.  $\eta = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e'_i \wedge e'_j + \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e''_i \wedge e''_j$  in  $\bigwedge^2(t \oplus t)$  is



*invariant* under  $(x, y) \rightsquigarrow (x, y + x)$ , carrying  $e'_i \rightsquigarrow e'_i + e''_i$  and  $e''_i \rightsquigarrow e''_i$ , hence trivially  $\xi = 0$ !

As a consequence, we get that the scheme of moduli for the *polarized* abelian schemes, with polarizations degree  $d$ , is simply over  $\mathbf{Z}$  at all those primes  $p$  which do not divide  $d$ . This comes from the fact that the obstruction to polarized lifting lies in a module  $H^2(A, E)$ , where  $E$  is an extension (the “Atiyah extension”) (\*)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow E \longrightarrow \mathfrak{G}_{A/k} \longrightarrow 0$$

whose class  $c$  in  $H^1(A, \Omega_{A/k}^1)$  is just the Chern class  $\frac{dL}{L}$  of the invertible sheaf  $L$  on  $A$  defining the polarization. Now in the exact sequence of cohomology for (\*), the map

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathfrak{G}_{A/k}) & \xrightarrow{\partial^{(i)}} & H^{i+1}(\mathcal{O}_A) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \bigwedge^i t' \otimes t & & \bigwedge^{i+1} t' \end{array} \quad t = t_A, \quad t' = t_{\hat{A}}$$

is trivially described in terms of

$$c \in H^1(A, \Omega_{A/k}^1) \simeq \text{Hom}(t, t'),$$

where the homomorphism  $c : t \longrightarrow t'$  is just the tangent map for  $\varphi : A \longrightarrow \hat{A}$  defined by the polarization. This map being surjective by assumption,  $\partial^{(i)}$  is surjective, hence  $H^i(E) \longrightarrow H^i(\mathfrak{G}_{A/k})$  is injective, in particular

$$H^2(E) \longrightarrow H^2(\mathfrak{G}_{A/k})$$

is *injective*. As the obstructions obtained in  $H^2(\mathfrak{G}_{A/k})$  are zero, the same holds for the polarized obstructions in  $H^2(E)$ , hence the assertion of the simplicity. (If however  $p|d$ , simplicity *does not hold at any point* of  $M$  over  $p$ !)

Using the simplicity for the formal scheme of moduli of abelian varieties, I can prove the following:

Let  $X/\Lambda$  be flat, proper,  $k \xrightarrow{\sim} H^0(X_0, \mathcal{O}_0)$ , where  $\Lambda$  is local artin with residue field  $k$ . Assume  $\text{Pic}_{X_0/k}$  exists, and is *simple* over  $k$ , i.e.  $\dim \text{Pic}_{X_0/k} = \dim H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$  (always true in char 0). Then

- a)  $\text{Pic}_{X/\Lambda}^0$  exists and is an *abelian* scheme over  $\Lambda$ .

- b) The “base extension property” holds for  $R^i f_*(\mathcal{O}_X)$  in dimension 1, and more generally in any dimension  $i$  such that

$$\bigwedge^i H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \longrightarrow H^i(X_0, X_0)$$

is *surjective*, and  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$  is free over  $\Lambda$ .

Idea of proof:

- a)  $\text{Pic}_{X/k}^0$  is constructed stepwise. Having  $\text{Pic}_{X_{n-1}/k}^0 = A_{n-1}$ , to get  $A_n$  we first lift *arbitrarily*  $A_{n-1}$  to an abelian scheme  $A'_n$ . We then try to construct the can. invertible “Weil sheaf” on  $X_n \times_{\Lambda_n} A'_n$ , extending the given Weil sheaf on  $X_n \times_{\Lambda_{n-1}} A_{n-1}$ . The obstruction lies in

$$H^2(X_0 \times A_0, \mathcal{O}_{X_0 \times A_0}) \simeq H^2(\mathcal{O}_{X_0}) \times H^2(\mathcal{O}_{A_0}) \times H^1(\mathcal{O}_{X_0}) \otimes H^1(\mathcal{O}_{A_0})$$

and in fact, as easily seen, in the last factor  $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \otimes H^1(A_0, \mathcal{O}_{A_0}) \simeq t_{A_0} \otimes H^1(A_0, \mathcal{O}_{A_0}) \simeq H^1(A_0, \mathfrak{G}_{A_0/k})$ . This space is exactly the group operating in a simply transitive way on the set of all extensions of  $A_{n-1}$ . Thus we can *correct*  $A'_n$  in just one way to get an  $A_n$  with a “Weil sheaf” on it!

This does it.

- b) Let  $\omega$  be the conormal sheaf to the unit section of  $A = \text{Pic}_{X/S}^0$ , thus  $\omega$  is *free* because  $A/S$  is simple, and by definition of  $\text{Pic}_{X/S}^0$  we have

$$H^1(X, \mathcal{O}_A) \simeq \text{Hom}(\omega, \mathcal{O}_S)$$

This description holds also after any base extension, hence the fact that  $H^1(X, \mathcal{O}_S)$  is free over  $\Lambda$  and its formation commutes with base extension. This implies also  $H^1(X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \longrightarrow H^1(X_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$  surjective, hence  $H^i(X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \longrightarrow H^i(X_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$  is surjective for the  $i$ ’s as in the theorem, ok.

Corollary. — *Let  $A/S$  be any abelian scheme, then the modules  $R^i f_*(\mathcal{O}_A)$  on  $S$  are locally free and in fact  $\simeq \bigwedge^i R^1 f_*(\mathcal{O}_A)$ . If  $\text{Pic}_{A/S}$  exists, then  $\text{Pic}_{A/S}^0$  is open and is an abelian scheme over  $S$ .*

(Moreover, biduality holds, as follows easily from the statement over a field...)

Corollary. — Let  $f : X \longrightarrow S$  be flat, proper,  $k(s) \xrightarrow{\sim} H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$  for every  $s$ , let  $s \in S$  be such that  $\dim H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \dim \text{Pic}_{X_s/k(s)}$ , (the latter defined, if  $\text{Pic}_{X_s/k(s)}$  is not known to exist, in terms of the formal Picard scheme). Then  $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$  is free at  $s$ .

This is always applicable if  $\text{char } k = 0$ .

I do not know if, in the case considered, the  $R^i f_*(\mathcal{O}_X)$  or even  $R^i f_*(\Omega_{X/S}^j)$  are also free at  $s$ , even in  $\text{char } 0$ . It is true for  $f_*(\Omega_{X/S}^1)$  whenever we know that  $\dim H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \dim H^0(X_s, \Omega_{X_s}^1)$ , for instance if  $\text{char } k(s) = 0$  and  $f : X \longrightarrow S$  is projective and simple. (If moreover  $S$  is reduced, Hodge theory implies all  $R^i f_*(\Omega_{X/S}^j)$  are free at  $s$ ; but if  $S$  is artin, I have no idea!)

I now doubt very much that it be true in general that  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$  is flat over  $S$ , or even only universally open over  $S$ , when  $X/S$  is simply. Here is an idea of an example, inspired by Igusa's surface. Let  $A/S$  be an abelian scheme,  $G$  a finite group of automorphisms of  $A$ . If  $G$  operates without fixed points on  $B/S$  projective and simple over  $S$ , with  $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} g_*(\mathcal{O}_B)$ , we construct  $X = B \times_G \hat{A}$  which is an abelian scheme over  $Y = B/G$ , and one checks

$$\text{Pic}_{X/S} \simeq \text{Pic}_{Y/S} \times_S (\text{Pic}_{\hat{A}/S})^G$$

(where upper  $G$  denotes the subscheme of invariants), hence

$$\boxed{\text{Pic}_{X/S}^\tau \simeq \text{Pic}_{Y/S}^\tau \times_S A^G}$$

Hence for getting examples of bad  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$ , we are led to study schemes of the type  $A^G$ , with  $S$  say spectrum of a discrete valuation ring  $V$ . Thus we are led to the questions:

- a) Can it occur that there are components of  $C = A^G$  which do not dominate  $S$ ? For instance,  $A_1^G = \text{unit subgroup}$  (set theoretically, or even scheme-theoretically) and  $A_0^G \neq \text{unit subgroup}$  set theoretically - where  $A_0, A_1$  are the special and the general fibers.
- b) If  $C_1 = A_1^G$  is connected (for instance is the unit subgroup), and hence  $C^\circ = C_0^\circ \cup C_1^\circ$  is open, can it occur that  $C^\circ$  is non flat over  $S$  [for instance  $C_1 = \{e\}$ ,  $C_0^\circ \neq \{e\}$ ]?

such that multiplication  $p : \text{Pic}_{X/S} \longrightarrow \text{Pic}_{X/S}$  is *not* universally open, i.e. such that there exists an irreducible component  $C$  of  $\text{Pic}_{X/S}$  not dominating  $S$ , but such that  $pC$  is contained in a component dominating  $S$ . [N.B. if  $n$  prime to all residue char., multiplication by  $n$  in any  $\text{Pic}_{X/S}$  is étale.]

Best regards to Karin, kids etc.

Schurik

P.S. I just proved: If  $X \longrightarrow S$  is *simple* and *projective*, then  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$  is *projective* over  $S$ . Method:

- a) From the fact that the fibers of  $\text{Pic}_{X/S}^0$  are proper, follows that  $\text{Pic}_{X/S}^0$  is proper over  $S$ , hence closed in  $\text{Pic}_{X/S}$ , hence easily that  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$  is *closed* in  $\text{Pic}_{X/S}$ . It remains to prove it is of *finite type* over  $S$  – hence proper over  $S$ , and quasi-projective over  $S$ , hence projective.
- b) For every  $n > 0$ , the kernel of  $\text{Pic}_{X/S} \xrightarrow{n} \text{Pic}_{X/S}$  is of finite type over  $S$  [and even more: the multiplication  $\mu$  by  $n$  is of finite type, hence finite]. If  $n$  is prime to the residue characteristics, this follows from the fact that  $\mu$  is *étale* and has finite fibers. This reduces to the case  $S$  of char  $p > 0$ ,  $n = p$ . Then I use a technique of descent involving the “relative  $p$ -power scheme”  $(X/S)^{(p)}$ , following a suggestion of Serre.
- c) For variable  $s \in S$  ( $S$  noetherian), the Néron-Severi torsion group of  $X_s$  remains of bounded order. This can be shown using the method of Matsusaka’s proof for the finiteness of the “torsion group”.

From a), b), c), the theorem follows.

**Remark:** Using the Picard-Igusa inequality for  $\rho = \text{rank}$  of Néron-Severi, and Lefschetz type theorems I told you about, one gets also that  $\rho(X_s)$  remains bounded for  $s \in S$  ( $S$  noetherian).

**Question:** Is  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$  always of finite type over  $S$ , under merely the usual assumptions for existence of  $\text{Pic}_{X/S}$ ? I have no proof even if  $X \longrightarrow S$  is normal! Same question for  $\rho$ . This seems related to the question of uniform majorization of the Mordell-Weil-Néron-Lang finiteness theorem, for a *variable* abelian variety.

## Letter to H. Hironaka, 6.7.1962<sup>11</sup>

Neuilly July 6 1962

Dear Hironaka,

I had a little thought over our conversation last Tuesday, it occurred to me that the type of argument I used yields in fact the following stronger result:

Theorem. — *Let  $f : X \longrightarrow Y$  be a proper morphism of analytic spaces over  $\mathbf{C}$ , let  $y \in Y$ ,  $Y_n = (\underline{O}_y / \underline{m}_y^{n+1})$ ,  $X_n = X \times_Y Y_n$ ,*

$$\mathrm{Pic}(X_y) = R^1 f(\underline{O}_X^\bullet)_y = \varinjlim \mathrm{Pic}(f^{-1}(U)) \quad y \in U,$$

$$\mathrm{Pic}(\hat{X}_y) = \varprojlim \mathrm{Pic}(X_n),$$

*and consider the canonical homomorphisms*

$$\mathrm{Pic}(X_y) \xrightarrow{u} \mathrm{Pic}(\hat{X}_y) \xrightarrow{v_n} \mathrm{Pic}(X_n)$$

*Then the following are true:*

- (i) *The inverse system  $(\mathrm{Pic}(X_n))_{n \in \mathbf{N}}$  satisfies the condition of Mittag-Leffler (even with Artin-Riesz type of uniformity).*
- (ii)  *$\mathrm{Im} v_n = \mathrm{Im} v_n u =$  (in virtue of (i)) *set of universal images of  $\mathrm{Pic}(X_n)$  in the inverse system  $(\mathrm{Pic}(X_m))_{m \in \mathbf{N}}$ .**
- (iii) *In order for  $u$  to be an isomorphism, it is nec and suff that  $R^1 f_*(\underline{O}_X)_y$  is a module of finite length.*

*In fact (i) can be more precise:*

- (ibis) *In the inverse system  $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/\mathbf{C}})_{n \in \mathbf{N}}$  of analytic groups, the system of the “Néron-Séveri groups” is constant for  $n$  large, whereas for  $m > n$  and  $n$  large, the Kernel and Cokernel of*

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X_m/\mathbf{C}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/\mathbf{C}}$$

*are just vector groups.*

---

<sup>11</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGH662scan.pdf>

Parts (i) and (ii) yield the

Corollary 1. — *The following conditions are equivalent*

- (i) *There exists an open  $U \ni y$  such that  $X|_U$  is projective over  $U$*
- (ii) *For every  $n$ ,  $X_n$  is a projective analytic space.*

For instance, if  $\dim X_0 \leq 1$ , then (ii) and hence (i) holds.

The proof of the theorem only uses Grauert's analogues of the algebraic theorems of finiteness and comparison for direct images (of his blue paper) and the usual exact sequences  $0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \underline{O} \longrightarrow \underline{O}^\bullet \longrightarrow 0$ , together with some standard use of Mittag-Leffler story and five lemma. It is valid in fact for any  $H^i(\underline{O}^\bullet)$ , not only  $i = 1$  (which seems the only one however to have geometric significance).

In the case of a formal scheme proper over a complete noeth. local ring with residue field of *characteristic* 0, the analogon of the previous theorem (reducing to statements (i), (i bis)) hold true, and I wrote a purely algebraic proof of this, relying only on the fact that the kernel and Cokernel of  $\underline{\text{Pic}}_{X_{n+1}} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X_n}$  are without torsion, and Néron's finiteness theorem; in particular, the analogon of corollary 1 holds true in this case. These results break down of course in  $\text{car.} > 0$ .

However, using the (as yet unwritten !) *GAGA* of Serre-Grauert-Remmert-Grothendieck (of Grauert-Remmert's paper, complemented by the method of an old talk of mine in Cartan's Seminar, to recover the case of proper morphisms of schemes from the projective one, via Chow's lemma...), the analytic theorem above yields an interesting intrinsic property of analytic algebras over  $\mathbf{C}$ , with respect to algebraic geometry over such a local ring:

Theorem. — *Let  $A$  be an analytic algebra over  $\mathbf{C}$  (we can suppose  $A$  to be the ring of convergent power series in  $n$  variables),  $\hat{A}$  its completion,  $Y$  and  $\hat{Y}$  the spectra,  $X$  a proper scheme over  $Y$ ,  $\hat{X} = X \times_Y \hat{Y}$ . Then*

- (i) *The inverse system  $(\text{Pic}(X_n))$  satisfies MLAR (as stated above, this depends only on the  $\text{car.}$  0 assumption for the residue field).*
- (ii)  *$\text{Pic}(X)$  and  $\text{Pic}(\hat{X})$  have same image in  $\text{Pic}(X_n)$ , — namely the group of “universal images”. (NB recall  $\text{Pic}(\hat{X}) \simeq \varprojlim \text{Pic}(X_n)$ ).*

(iii) In order for  $\text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(\hat{X})$  to be an isomorphism, it is necessary and sufficient that  $\text{supp } R^1 f_*(\underline{O}_X) \subset (y)$ , i.e.  $H^1(X, \underline{O}_X)$  of finite length over  $A$ . (NB It amounts also to the same to ask that the inverse system of the subgroups  $\text{Pic}'(X_n)$  of universal images is constant for large  $n$ ).

We get for example:

Corollary 1. — *The following conditions are equivalent:*

- (i)  $X/Y$  projective
- (ii)  $\hat{X}/\hat{Y}$  projective
- (iii) For every  $n$ ,  $X_n/Y_n$  projective.

This applies for instance if  $\dim X_0 \leq 1$ .

Now applying your theorem of *resolution of singularities*, and Mumford's method of relating the local Picard group of  $A$  to the global Picard group of a regular scheme dominating  $A$  birationally, one gets from the last statement (iii) of last theorem:

Corollary 2. — *Let  $A$  be as above, assume  $Y' = Y - (y)$  regular, and let  $\hat{Y}' = \hat{Y} - (\hat{y})$ . Then  $\text{Pic}(Y') \longrightarrow \text{Pic}(\hat{Y}')$  is an isomorphism.*

This explains “à priori” (when  $A$  is normal) why Mumford was able to introduce on the group of divisor-classes of  $A$  a structure of an analytic group (which in fact is algebraic...), which from the algebraic point of view should be possible rather for the group of divisors classes of the completion  $\hat{A}$ ; of course Mumford uses directly the same kind of argument I used.

I do not know if in the last statement, the hypothesis that  $Y'$  is regular (“ $y$  isolated singularity”) is essential; we could dispense with it and replace it by “ $A$  reduced” if you can prove by your theory of resolution the following: if  $f : X \longrightarrow Y$  is proper “birational”,  $X$  regular, then  $R^1 f_*(\underline{O}_X) = 0$ . I understand you prove this if  $Y$  also is regular (which is easily checked by your theory), but I wonder if this is really needed. I would not be surprised either if in this statement,  $Y'$  can be replaced by any open subset of  $Y$  (replacing of course  $\hat{Y}'$  by the inverse

image of the latter). Moreover, I would expect the analogous statements to hold for  $\pi_1$ , more generally for all “topological” invariants as Weil homology, homotopy groups etc, that can be defined for schemes. This should be related to the fact that all these invariants vanish for the geometric fibers of the morphism  $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ . This is easy to check at least for  $\pi_0$  (and is true in fact for any henselian ring which is a “good” ring); however I do not know if this is true also for  $\pi_1$ .

Besides, I would not be surprised if most of the previous results (namely parts (ii) and (iii) of the second theorem, and the two corollaries, as well as the conjectures of the previous sections) did hold true for any “good” ring which is henselian or at least for the “henselian closures” of the local rings arising from algebras of finite type over a field, or over the integers, - although I do not have any result along these lines (except those stemming from my remark on  $\bar{k}_0$ ). This can be stated of course directly in terms of conjectures for the latter local rings without explicit reference to a henselian closure, for instance corollary 2 would yield the conjectural statement: Let  $A$  be a local ring of an algebra of finite type over a field,  $\hat{A}$  its completion,  $Y$  and  $\hat{Y}$  the spectra,  $Y'$  and  $\hat{Y}'$  the complements of the closed points, then any invertible sheaf on  $\hat{Y}'$  can be defined by an invertible sheaf on some  $Y'_1$ , where  $Y_1$  is local and  $Y_1 \longrightarrow Y$  is étale with trivial residue field extension (i.e. inducing an isomorphism for the completions  $A \longrightarrow A_1$ ). I wonder what information is given by Mumford’s example in his blue paper, p.16, which I believe yields a case where the invertible sheaf considered does not come from an invertible sheaf on  $Y'$ ? I was not able to understand his construction.

Anyhow, one should be able to determine whether or not the analytic algebras over  $\mathbb{C}$  have any significant intrinsic property which is not shared by all “good” henselian rings with residue field of char. 0 (I recall that by good I mean “quotient of a regular local ring  $B$  such that the fibers of  $\mathrm{Spec} \hat{B} \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$  are universally regular”).

Please give my regards to Waka, and also Mireille’s; she just got the parcel from Waka, and was extremely pleased, in fact, she slipped into her new bed-shirt on the spot, and is delighted by it in every respect.

Sincerely yours



Letter to M. Atiyah, 14.10.1963

(On the Rham cohomology of algebraic varieties)

*Extract from*

**Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 29 (1966), p. 95-103<sup>12</sup>**

...In connection with Hartshorne's seminar on duality, I had a look recently at your joint paper with Hodge on "Integrals of the second kind"<sup>13</sup>. As Hironaka has proved the resolution of singularities<sup>14</sup>, the "Conjecture C" of that paper (p. 81) holds true, and hence the results of that paper which depend on it. Now it occurred to me that in this paper, the whole strength of the "Conjecture C" has not been fully exploited, namely that the theory of "integrals of second kind" is essentially contained in the following very simple

*Theorem 1. — Let  $X$  be an affine algebraic scheme over the field  $\mathbb{C}$  of complex numbers; assume  $X$  regular (i.e. "non singular"). Then the complex cohomology  $H^*(X, \mathbb{C})$  can be calculated as the cohomology of the algebraic De Rham complex (i.e. the complex of differential forms on  $X$  which are "rational and everywhere defined").*

This theorem had been checked previously by Hochschild and Kostant when  $X$  is an affine homogeneous space under an algebraic linear group, and I think they also raised the question as for the general validity of the result stated in theorem 1.

---

<sup>12</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/RCAVscan.pdf>

<sup>13</sup>M. F. Atiyah and W. V. D. Hodge, Integrals of the second kind on an algebraic variety, *Annals of Mathematics*, vol. 62 (1955), p. 56-91. This paper is referred to by A-H in the sequel.

<sup>14</sup>H. Hironaka, Resolution of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Annals of Maths.*, vol. 79 (1964), p. 109-326.

## Lettre à J.P. Serre, 12.8.1964<sup>15</sup>

Bures le 12.8.1964

Mon cher Serre,

Je commence à avoir de faibles lumières sur la façon de faire des VA avec les cycles algébriques équivalentes à zéro d'une variété projective non singulière  $X$  (sur un corps alg clos  $k$ ). Si  $X$  est connexe de dimension  $n$ , je sais associer à chaque entier  $i$  compris entre 1 et  $n$  une VA  $J^i(X)$ , jouant le rôle d'une "jacobienne intermédiaire" au sens de Weil, correspondant à des classes de cycles de codimension  $i$  (pour une relation d'équivalence que je ne sais pas bien identifier pour l'instant, mais qui mérite certainement d'être appelée "équivalence d'Albanese"). Je suis moralement sûr que ce sont "les bonnes", bien que je n'ai pas prouvé grand-chose dessus pour l'instant ; par contre, j'ai des conjectures en pagaille. Je te signale seulement que  $J^1 = \text{Pic}^\circ$  et  $J^n = \text{Alb}^\circ$ , que  $J^i$  et  $J^{n+1-i}$  sont canoniquement duales l'une de l'autre, que  $\dim J^i \leq \frac{1}{2} b_{2i-1}$  (nombre de Betti) - de façon plus précise  $T_\ell(J^i)$  est un quotient d'un sous-module de  $H^{2i-1}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$  (et quand on sera plus savant, on saura prouver que c'est même un sous-module dudit), en caractéristique 0 on peut également remplacer la cohomologie de Weil par la cohomologie de Hodge  $H^i(X, \underline{\Omega}_X^{i-1}) \dots$

Moyennant un certain nombre de choses non prouvées (qui risquent d'ailleurs d'être vaches) le théorème de positivité de Hodge se ramène à l'énoncé suivant, que je ne sais pas prouver, et que j'ai envie de te communiquer car il est bien terre à terre. Moralement, il s'agit de prouver que dans le cas où  $\dim X = 2m - 1$ , l'autodualité de  $J^m$  (qui s'exprime par une classe de correspondance divisoriale sur  $J^m \times J^m$  *symétrique*, donc provenant - du moins modulo le facteur 2- d'un élément du groupe de Néron Severi de  $J^m$ ) est *positive* i.e. l'élément en question de Néron-Severi est ample, i.e. une polarisation. Pratiquement, cela s'explique ainsi : Soit  $T$  une variété de paramètres connexe non singulière munie d'un point marqué  $a$ ,  $z$  une classe de cycles de codimension  $m$  sur  $T \times X$  (à équivalence linéaire près, mettons), telle que  $z(a) = 0$  dans  $X$ , soient  $p$  et  $q$  les deux projections de  $T \times T \times X$

---

<sup>15</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGS12864scan.pdf>

sur  $T \times X$ ,  $r$  sa projection sur  $T \times T$ , considérons

$$D = r_*(p^*(z)q^*(z))$$

qui est une classe de diviseurs sur  $T \times T$ , que nous considérons comme une classe de correspondance divisorielle sur  $T \times T$ . Si  $A = \text{Alb}^\circ(T)$  (NB si tu veux, tu peux supposer  $T = A$  et a l'origine), elle provient donc d'une classe de correspondance sur  $A \times A$ , évidemment symétrique. Soit  $N$  le "noyau" de cette classe (i.e. le noyau de  $A \longrightarrow$  (duale de  $A$ ) qu'elle définit), on obtient alors une classe de correspondance symétrique sur  $J \times J$ , où  $J = A/N$ . A prouver que cette dernière est *positive* ! Je me demande si les spécialistes "abéliens" pourraient avoir une idée sur une telle question, peut-être Matsusaka ? Ou toi-même ? Notes d'ailleurs que cette question te dévoile pratiquement le méthode de construction des  $J^i$  généraux ; si tu veux, tu peux te borner aussi au cas où te disposes d'une sous-variété de codimension  $m - 1$   $Y$  de  $X$ , non singulière si tu y tiens, où  $T = \text{Pic}^\circ(Y)$ , considéré comme paramétrant les diviseurs alg équiv à zéro de  $Y$ , mais considérés comme classes de cycles de codimension  $m$  de  $X$ .

Merci pour la copie de la lettre à Ogg !

Bien à toi

# CATÉGORIES TANNAKIENNES

à partir de 1958<sup>16</sup>

---

## Catégories tannakiennes définies par des cristaux

1. — Soit  $k$  un corps de car.  $p > 0$ , qu'on regarde comme algèbre sur  $\mathbf{Z}_p$ , dont l'idéal maximal est muni de puissances divisées. Cela donne un sens au site cristallin de  $k$  (sur  $\mathbf{Z}_p$ , qualifié aussi de "absolu"), et aux Modules loc. libres de type fini (resp. de présentation finie), sur ledit, qu'on appellera aussi cristaux en modules (localement libres resp. de présentation finie) sur  $k$ . Ces cristaux forment une  $\otimes$ -catégorie  $\mathbf{Z}_p$ -linéaire. On peut expliciter cette catégorie à l'aide d'un  $p$ -anneau  $W$  de corps résiduel  $k$ , comme la catégorie des modules libres de type fini

2. —

3. —

4.

La catégorie tannakienne  $\mathrm{Fcriso}(k)$  est un invariant arithmétique intéressant attaché à  $k$  (fonctoriellement) ; sa connaissance équivaut à celle de la gerbe associée (sur  $\mathbf{Q}_p$ ), soit  $\mathbf{G}(k)$  ?

---

<sup>16</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/tannascan.pdf>

## 5. $F$ -cristaux de pente nulle

On définira plus loin la *pente* d'un  $F$ -cristal "homogène". Ici, nous allons introduire directement les  $F$ -cristaux de pente nulle

6.

Considérons maintenant un homomorphisme de corps

$$k \longrightarrow k',$$

d'où un homomorphisme de catégories tannakiennes sur  $\mathbf{Q}_p$

7.

8.

9.

Pour  $k$  quelconque, on trouve un  $\otimes$ -homomorphisme canonique défini à isomorphisme unique près (on utilise un choix d'une clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$ , mais ce choix est inessentiel...)

10. Cas  $k$  fini

FILTRATIONS SUR FONCTEURS FIBRES POUR  
CATÉGORIES TENSORIELLES  
à partir de 1958<sup>17</sup>

---

---

<sup>17</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/tensfibscan.pdf>

# QUELQUES EXEMPLES DE CATÉGORIES TENSORIELLES<sup>18</sup> à partir de 1958<sup>19</sup>

---

- 1) Soit  $M$  un groupe. Soit  $\mathcal{C}_M$  la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps  $k$ , munis d'une graduation de type  $M$ . C'est une catégorie tensorielle sur  $k$ , munie d'un foncteur fibre sur  $k$ , le foncteur "oubli de la graduation". Le groupe algébrique associé est le groupe de type multiplicatif  $D_k(M)$  (SGA 3 I 4.7.3). Par exemple si  $M = \mathbf{Z}^r$ , on trouve  $G = \mathbf{G}_m^r$ .

Application : Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie tensorielle sur  $k$  munie d'un foncteur fibre  $F$  sur  $k$ , donc associée à un schéma en groupes affine  $G$  sur  $k$ . On cherche toutes les façons de mettre, pour chaque  $M \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , une graduation de type  $M$  sur  $F(V)$ , de façon fonctorielle en  $M$ , et compatible (dans un sens évident) avec les produits tensoriels. Elles correspondent aux  $\otimes$ -foncteurs de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}_M$  compatibles avec les foncteurs fibres, donc aux homomorphismes de  $D_k(M)$  dans  $G$ . Par exemple, si  $M = \mathbf{Z}^r$ , il faut prendre les homomorphismes de  $\mathbf{G}_m^r$  dans  $G$ .

Dans la situation précédente, on peut se demander quand une  $\otimes$ -gradation de type  $M$  du foncteur  $F$  correspond à une graduation de type  $M$  du foncteur identique de  $\mathcal{C}$ , i.e. pour tout  $V$ , la graduation de  $F(V)$  provient d'une graduation de  $V$ . On trouve qu'il faut et il suffit pour cela que l'homomorphisme correspondant  $D_k(M) \longrightarrow G$  soit central. Par exemple, si  $\mathcal{C}$  est la catégorie des motifs sur  $k$ , et si

---

<sup>19</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/notsaascan.pdf>

on dispose d'un foncteur fibre  $F$  de  $\mathcal{C}$  sur  $k$ , alors on trouve un homomorphisme central canonique  $i : \mathbf{G}_m \longrightarrow G$ . D'ailleurs, la donnée du motif de Tate (qui est de rang 2, et de "poids" 2 pour la graduation naturelle) correspond à la donnée d'un homomorphisme  $j : G \longrightarrow \mathbf{G}_m = \mathrm{Gl}(l)$ . Le fait que  $T$  soit de poids 2 s'exprime par la relation

$$ji(\lambda) = \lambda^2.$$

Lorsque  $k$  est de caractéristique nulle, on a toujours un foncteur fibre naturel : le *foncteur de Hodge*, qui à la cohomologie motivique d'une variété (projective lisse)  $X$  associe le vectoriel bigradué  $\mathrm{III}^q(X, \underline{\Omega}_{X/k}^p)$ . Donc pour le groupe de Galois motivique correspondant  $G$ , on trouve un homomorphisme naturel

$$\mathbf{G}_m^2 \longrightarrow G,$$

i.e. deux homomorphismes commutant l'un à l'autre

$$i_1, i_2 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G.$$

Le fait que la graduation totale dans la cohomologie de Hodge corresponde au poids des motifs s'exprime par la relation

$$i(\lambda) = i_1(\lambda)i_2(\lambda);$$

on fera attention que  $i_1$  et  $i_2$  ne sont pas centraux (car la bigraduation en cohomologie de Hodge ne correspond pas à une bigraduation d'un motif !))

- 2) Prenant toujours pour  $\mathcal{C}$  la catégorie des motifs sur  $k$ , avec  $k$  de car. nulle, on a un autre foncteur fibre canonique, le *foncteur de De Rham* qui associe à la cohomologie motivique d'une variété  $X$  le vectoriel  $H^*(X, \Omega_{X/k}^*)$  (espace d'hypercohomologie). Ce vectoriel n'est plus bigradué mais seulement gradué et filtré, la filtration étant celle associée à la suite spectrale d'hypercohomologie, commençant avec la cohomologie de Hodge. On sait d'ailleurs que cette suite spectrale dégénère (théorie de Hodge), donc  $\mathrm{Gr}(H_{\mathrm{DR}}(V)) \simeq H_{\mathrm{Hdg}}(V)$  (isomorphisme fonctoriel en le motif  $V$ ). On peut se proposer d'analyser à quelle structure supplémentaire, sur le groupe de Galois motivique associé au foncteur fibré  $H_{\mathrm{DR}}$ , correspond la filtration canonique de ce foncteur.



De façon générale, étant donné une catégorie tensorielle  $\mathcal{C}$  sur  $k$  munie d'un foncteur fibre  $F$ , on peut se proposer de déterminer les filtrations sur  $F$  (décroissantes, discrètes, indexées par  $\mathbf{Z}$ ) compatibles avec les produits tensoriels (en utilisant la notion évidente de produit tensoriel de deux espaces vectoriels filtrés). On notera qu'une telle donnée ne pourra plus s'exprimer par un homomorphisme d'un certain groupe algébrique dans  $G$  (le groupe de Galois de  $\mathcal{C}$  en  $F$ ), car la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur  $k$ , munis d'une filtration décroissante discrète indexée par  $\mathbf{Z}$ , n'est pas une catégorie abélienne (les bimorphismes ne sont pas des isomorphismes). Mais à une telle donnée est associée un deuxième foncteur fibre  $F(V) = \text{Gr } F(V)$ , à valeurs cette fois-ci dans les vectoriels gradués (NB  $F$  joue le rôle de la cohomologie de De Rham,  $F'$  celle de la cohomologie de Hodge, muni de la graduation par). La donnée de  $F'$  correspond à un homomorphisme  $i_1 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G'$ . Considérons alors sur  $F'$  la filtration décroissante associée à sa graduation, et soit  $H'_{i_1} = \underline{\text{AutFilt}}^1(F') \subset \underline{\text{Aut}}(F') = G'$  le sous-schéma en groupes de  $G$  qui correspond aux  $\otimes$ -automorphismes de  $F'$  (ou plutôt des  $F'_{k'}$ ,  $k'$  une  $k$ -algèbre quelconque) qui respectent sa filtration et induisant l'identité sur le graduée associée ; il est canoniquement déterminé par  $i$ . On peut aussi regarder le sous-schéma

$$Q = \underline{\text{IsomFilt}}^1(F, F') \subset P = \underline{\text{Isom}}(F, F')$$

du schéma  $P$  des  $\otimes$ -isomorphismes de  $F$  avec  $F'$ , qui correspond aux automorphismes respectant les filtrations de  $F$  et  $F'$  et induisant l'identité sur les graduées associées. C'est à priori un pseudo-foncteur à gauche sous  $H'$ , i.e. il est vide ou un torseur à droite sous  $H'$ . **Il faudrait prouver** que c'est bien un torseur (i.e. que sur une extension convenable  $k'$  de  $k$ , on peut trouver un isomorphisme de  $F_{k'}$  avec  $F'_{k'}$  respectant les filtrations). Donc on trouve une restriction du groupe d'opérateurs (à gauche)  $G'$  de  $P$  au sous-groupe  $H'$ , par un  $H'$ -torseur à gauche  $Q$ .

Moyennant la vérification laissée en suspens à l'instant, on trouve alors que la donnée d'un "foncteur fibre *filtré*"  $F$  de  $\mathcal{C}$  sur  $k$  revient à la donnée

- (i) D'un foncteur fibre  $F'$  (d'où un groupe de Galois  $G' = \underline{\text{Aut}}(F')$ ) ;
- (ii) D'une graduation de type  $\mathbf{Z}$  de  $F'$ , i.e. un homomorphisme

$$i_1 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G',$$

(iii) D'un torseur à gauche  $Q'$  sous  $H'_{i_1}$ .

A ces données, on associe simplement le foncteur fibre tordu

$$F = F' \bigwedge^{H'_{i_1}} Q',$$

$F$  étant filtré par la filtration déduite de celle de  $F'$  (associée à la graduation de  $F'$ ) en tordant par  $Q'$ .

On constate aisément que le groupe  $H'$  est nécessairement une limite projective de groupes algébriques *unipotents*. On en conclut aussitôt que si  $\mathcal{C}$  est à engendrement fini (ou, plus généralement, à engendrement dénombrable, de façon que  $G'$  donc aussi  $H'$  soit limite projective d'une *suite* de groupes algébriques) alors tout torseur sous  $H'$  est trivial ; cela signifie ici que tout foncteur fibre filtré est en fait associé à un foncteur fibre gradué (en prenant la filtration correspondant à la graduation) i.e. que la filtration dudit foncteur admet un splittage compatible avec les produits tensoriels. Mais le choix d'un tel splittage équivaut à celui d'un point sur un certain torseur à droite  $Q = Q'$  sous le schéma en groupes  $H$  des automorphismes de  $F$  respectant la filtration et induisant l'identité sur le gradué associé ; il n'est pas du tout canonique !

- 3) Appelons *pré-structure de Hodge* sur un espace vectoriel  $V$  de dimension finie sur  $\mathbf{Q}$ , la donnée d'une bigraduation sur  $V \otimes_{\mathbf{Q}} C = V_C$ ,  $V_{\mathcal{C}} = \coprod_{p,q} V^{p,q}$ , telle que a) la graduation totale correspondante soit "définie sur  $\mathbf{Q}$ " i.e.  $\coprod_{p+q=n} V^{p,q}$  provienne d'un sous espace  $V_{\mathbf{Q}}^n$  de  $V$ , et b) on a  $\overline{V}^{p,q} = V^{q,p}$ , où  $x \mapsto \overline{x}$  désigne la conjugaison complexe. (NB Généralisation à des corps plus généraux laissée à Saavedra). Les vectoriels  $V$  munis d'une pré-structure de Hodge forment une catégorie tensorielle sur  $\mathbf{Q}$  dans un sens évident, muni d'un foncteur fibre canonique, le foncteur "oubli"  $F$ . On trouve donc un groupe de Galois  $G$ , et plus généralement toute  $\otimes$ -sous-catégorie  $\mathcal{C}$  de la catégorie précédente nous définit un groupe de Galois  $G$ . La bigraduation sur le foncteur  $F_{\mathcal{C}}(V) = V \otimes_{\mathbf{Q}} \mathcal{C}$  correspond, en vertu de 1) (où il convient cependant de se permettre une extension du corps de base sur le foncteur fibre envisagé...) d'un homomorphisme  $\mathcal{G}_{mC}^2 \longrightarrow G_{\mathcal{C}}$ , i.e. de deux homo-

morphismes qui commutent

$$i_1, i_2 : \mathcal{G}_{m\mathbb{C}} \longrightarrow G_{\mathcal{C}}.$$

Les deux conditions a) et b) imposées aux structures envisagées s'interprètent respectivement par les faits que l'homomorphisme

$$i_{\mathcal{C}} = i_1 i_2 : \lambda \mapsto i_1(\lambda) i_2(\lambda)$$

est “défini sur  $\mathbf{Q}$ ” i.e. provient d'un homomorphisme

$$i : \mathbf{G}_m \longrightarrow G,$$

(nécessairement central, car les composantes homogènes  $V_{\mathbf{Q}}^n$  d'une pré-structure de Hodge sont évidemment munis d'une pré-structure de Hodge de façon que  $V$  soit la somme directe de  $V_{\mathbf{Q}}^n$  en tant que pré-structure de Hodge), et par la condition que l'on a

$$i_2 = \overline{i_1} \quad \text{i.e.} \quad i_2(\lambda) = \overline{i_1(\overline{\lambda})} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathcal{C}.$$

Si à toute variété projective lisse  $X$  sur  $\mathbf{C}$  on associe sa cohomologie rationnelle  $H^*(X, \mathbf{Q}) = V$ , de sorte que  $V_{\mathbf{C}} = H^*(X, \mathbf{C})$  est isomorphe canoniquement (par la théorie de Hodge) à  $H_{\text{Hdg}}(X) = \coprod H^q(X, \underline{\Omega}_{X/\mathbf{C}}^p)$ , on voit qu'on trouve ainsi une pré-structure de Hodge sur  $H(X, \mathbf{Q})$ , d'où un  $\otimes$ -foncteur naturel de la catégorie des motifs sur  $\mathbf{C}$  dans la catégorie des pré-structures de Hodge. La conjecture de Hodge standard équivaut à dire que ce foncteur est *pleinement fidèle*, i.e. que l'homomorphisme naturel qui va du groupe de Galois de Hodge précédent  $G$  dans le groupe de Galois motivique (associé au  $\otimes$ -foncteur de Betti  $H_{\text{Bet}}$ ) est un épimorphisme. Ou encore que pour toute catégorie  $\mathcal{C}_0$  de motifs de type fini sur  $\mathbf{C}$ , désignant par  $\mathcal{C}$  la  $\otimes$ -catégorie de pré-structures de Hodge engendrée par les  $H_{\text{Bet}}(M)$  pour  $M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_0)$ , l'homomorphisme de groupes algébriques  $G \longrightarrow G_0$  associé au foncteur de Betti-Hodge  $\mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}$  est un épimorphisme (i.e. surjectif sur les points à valeurs complexes, disons).

On appelle *polarisation* d'une pré-structure de Hodge de poids  $n$  la donnée d'un accouplement de pré-structures de Hodge

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbf{Q}(n),$$

où  $\mathbf{Q}(n)$  est l'espace vectoriel trivial de  $\mathbf{Q}$  sur  $\mathbf{Q}$ , avec  $\mathbf{Q}C = C$  muni du bidegré  $(n, n)$ , ayant la propriété que la forme hermitienne correspondant sur  $V_{\mathcal{C}}$ ,

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, \bar{y})(-i)^{p-q} \quad \text{pour } x \text{ de bidegré } (p, q-p)$$

soit définie positive. Une *structure de Hodge* est une pré-structure de Hodge admettant une polarisation. Les structures de Hodge forment une sous- $\otimes$ -catégorie de la catégorie des pré-structures de Hodge. La théorie de Hodge nous assure que le foncteur de Betti-Hodge sur la catégorie des motifs sur  $\mathbf{C}$  prend ses valeurs en fait dans la catégorie des structures de Hodge (une polarisation d'une variété projective lisse  $V$  définit canoniquement une polarisation de la structure de Hodge associée sur la cohomologie de Betti-Hodge). NB. On n'a aucune idée sur ce que pourrait être l'image essentielle du foncteur précédent, par exemple s'il y a lieu d'espérer qu'on trouve toutes les structures de Hodge (donc une équivalence de catégories : motifs sur  $\mathbf{C} \longrightarrow$  structures de Hodge) ; cela semble peu probable, mais on n'a aucune indication sérieuse dans un sens ou l'autre.

La catégorie des structures de Hodge est semi-simple. Si  $G$  est le groupe de Galois d'une  $\otimes$ -catégorie  $\mathcal{C}$  de pré-structures de Hodge, à engendrement fini si on veut (pour simplifier), alors on peut expliciter en termes du groupe de Galois associé et de sa structure  $i_1$  ci-dessus la condition pour que les objets de  $\mathcal{C}$  soient en fait des structures de Hodge. Ceci est un exercice plaisant et délectable, qui devrait figurer dans un travail systématique sur les  $\otimes$ -catégories, dans le chapitre des exemples. On trouve des restrictions très sérieuses sur le groupe  $G$  muni de  $i_1$  (en plus du fait que  $G$  soit réductif).

- 4) Je laisse le soin à Saavedra de déterminer quelle structure supplémentaire on obtient sur la structure de Hodge "complexe" associée à une variété projective lisse complexe  $X$ , lorsqu'on se donne cette dernière comme déduite d'une variété projective réelle  $X_{\mathbf{R}} = X_0$ . On trouve une notion de "structure de Hodge réelle", donnant naissance à une  $\otimes$ -catégorie correspondante. Dans le groupe de Galois motivique de celui-ci, en plus de la structure  $i_1$ , on trouve un élément  $f_{\infty}$  de  $G(\mathbf{Q})$ , d'ordre 2 (jouant le rôle d'un "élément de Frobenius à l'infini"), qui correspond à l'automorphisme du foncteur de Betti  $X_0 \mapsto H(X_0(\mathcal{C}), \mathbf{Q})$  déduit de l'homéomorphisme  $x \mapsto \bar{x}$  de  $X_0(\mathcal{C})$ . Il faut expliciter les relations entre cet élément et  $i_1, i_2$  !

- 5) Soit  $\mathcal{C}$  une  $\otimes$ -catégorie tensorielle, munie d'un foncteur fibre sur  $k$  de caractéristique nulle. A prouver que, pour que le groupe de Galois  $G$  correspondant soit profini, il faut et il suffit que pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}$ , la  $\otimes$ -catégorie engendrée soit semi-simple et n'ait qu'un nombre fini d'objets simples non isomorphes. Si  $\mathcal{C}$  est quelconque, la sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}_0$  de  $\mathcal{C}$  qui correspond au pro-groupe quotient de  $G$  formé des  $G_i/G_i^\circ$  (où  $G = \varprojlim G_i$ , et  $G_i^\circ$  est la composante neutre de  $G_i$ ) est formée exactement des objets  $M$  ayant la propriété précédente.

Il serait intéressant de trouver des énoncés correspondants en caractéristique quelconque.

- 6) La notion de polarisation d'un motif sur un corps (elle-même déduite de celle de polarisation d'une variété algébrique) donne une structure supplémentaire remarquable dans la catégorie des motifs : si  $M$  est un motif de poids  $n$ , on sait parmi les formes symétriques ( $n$  pair) resp. alternées ( $n$  impair)  $M \otimes M \longrightarrow T(n)$  (où  $T$  est le motif de Tate) distinguer celles qui sont "définies positives" ou encore des "polarisations". Cette notion se reflète par exemple par des structures supplémentaires sur les groupes de Galois motiviques. Il y a lieu de faire une étude axiomatique abstraite d'une telle notion de polarisation sur une  $\otimes$ -catégorie générale au dessus d'un sous-corps du corps des réels. On pourra en rediscuter à l'occasion.

# MOTIFS À COEFFICIENTS SUR UN CORPS DE $\mathbb{F}_q$

à partir de 1958<sup>20</sup>

---

---

<sup>20</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/motcoescan.pdf>

# MOTIFS

1965 1970<sup>21</sup>

---

## 1. La catégorie $\mathcal{M}^+(X)$

À tout préschéma noethérien (éventuellement de type fini sur un anneau noethérien)  $X$  est associé une *catégorie abélienne*  $\mathcal{M}^+(X)$ , dite catégorie des *motifs effectifs* sur  $X$ . C'est une  $\mathbf{Q}$ -catégorie abélienne, i.e., pour tout  $M \in \text{Ob}(\mathcal{M}^+(X))$  et tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \neq 0$ ,  $n1_M$  est un isomorphisme de  $M$ . De plus  $\mathcal{M}^+(X)$  est muni d'un produit tensoriel commutatif et unitaire<sup>22</sup>, exact à droite, l'unité est notée  $\mathbb{1}_X$  ou  $\mathbf{Q}_X(0)$ . On considère aussi la catégorie dérivée bornée  $D^b(\mathcal{M}^+(X))$  de  $\mathcal{M}^+(X)$ . Le produit tensoriel est étendu en un bifoncteur  $M \otimes N$  en  $M, N \in \text{Ob}(D^b(\mathcal{M}^+(X)))$ .

## 2. Variances avec $X$

Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme de préschémas noethériens, il lui est associé un *foncteur exact*  $f^* : \mathcal{M}^+(Y) \longrightarrow \mathcal{M}^+(X)$  compatible avec  $\otimes$ , d'où  $\mathbb{L}f^* : D^b(\mathcal{M}^+(Y)) \longrightarrow D^b(\mathcal{M}^+(X))$ . On a transitivité.

Si  $f$  est de type fini, et propre ou  $Y$  excellent, on a même un foncteur  $Rf_* : D^b(\mathcal{M}^+(X)) \longrightarrow D^b(\mathcal{M}^+(Y))$  satisfaisant aux formules de transitivité, et la for-

---

<sup>21</sup>Transcription par Elbaz-Vincent et J. Malgoire <https://agrothendieck.github.io/divers/motiscan.pdf>

<sup>22</sup>On peut en termes des données construire des  $\bigwedge^i M$  etc...

mule de projection<sup>23</sup>

$$Rf_*(M \otimes Lf^*(N)) \simeq Rf_*(M) \otimes N.$$

### 3. Cas $X = \varprojlim X_i$

Supposons  $X = \varprojlim X_i$ , système projectif filtrant essentiellement affine. Alors pour les foncteurs images inverses, on a

$$\mathcal{M}^+(X) \simeq \varinjlim \mathcal{M}^+(X_i).$$

En particulier, si  $X$  est de type fini sur  $S = \text{Spec}(A)$ , alors  $X$  est limite de préschémas  $X_i$  de type fini sur  $\mathbf{Z}$ , et la détermination de  $\mathcal{M}^+(X_i)$  avec ses structures déjà envisagées est ramenée au cas des préschémas de type fini.

De même si  $(S_i)$  est un système projectif filtrant essentiellement affine,  $S = \varprojlim S_i$ , et si  $X, Y$  de type fini sur  $S$  sont définis par  $(X_i), (Y_i)$  de la façon habituelle, si on prend des  $M_{i_0} \in \text{Ob}(\mathcal{D}^b(\mathcal{M}^+(X_{i_0})))$ , d'où  $M_i, M$ , on aura pour  $f_{i_0} : X_{i_0} \longrightarrow Y_{i_0}$  la relation

$$Rf_*(M) = \varinjlim v_i^*(Rf_{i_*}(M_i))$$

où  $v_i : Y \longrightarrow Y_i$  est le morphisme canonique.

### 4. Foncteurs $T_\ell$

Soit  $\ell$  un nombre premier<sup>24</sup> tel que  $\ell 1_X \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  soit inversible. Alors on a un foncteur

$$T_\ell = T_\ell^{(X)} : \mathcal{M}^+(X) \longrightarrow \mathcal{M}_\ell^+(X),$$

où  $\mathcal{M}_\ell(X)$  est la catégorie formée des “ $\mathbf{Q}_\ell$ -modules constructibles sur  $X$ ”, i.e., la catégorie déduite de la catégorie des “systèmes  $\ell$ -adiques de faisceaux de  $\ell$ -torsion constructibles” en négligeant précisément les faisceaux de torsion. Le foncteur  $T_\ell$ ,

<sup>23</sup>Considérer aussi la formule de dualité entre  $Rf_*$ ,  $f^*$ , et les foncteur  $f^!$ ,  $Rf_!$  et leurs relations  $[[\dots]]$ , enfin le formulaire standard reliant tous ces foncteurs...

<sup>24</sup>N. d. T (note du transcripteur) : Grothendieck note l'ensemble des nombres premiers  $\mathbb{P}$ , que nous avons préféré éviter pour ne pas induire de confusions



est compatible avec  $\otimes$  et **unité, exact et fidèle** (mais non pleinement fidèle), **compatible avec le changement de base  $f^*$ , et compatible également avec  $Rf_*$** <sup>25</sup>. [N. B.  $T_\ell$  s'étend évidemment en un foncteur  $D^b(\mathcal{M}(X)) \longrightarrow D^b(\mathcal{M}_\ell(X))$ ]. La détermination des  $T_\ell$  est encore ramenée au cas où  $X$  est de type fini sur  $\mathbf{Z}$ . N. B. Ceci exclu le choix limite  $\mathcal{M}^+(X) = 0$  pour tout  $X$ , car il faudrait qu'on ait  $R^*f_*(\mathbf{Z}_\ell) = 0$  pour  $f, \ell$ , ce qui n'est vrai en général...

*Signalons aussi la compatibilité de  $T_\ell$  avec l'isomorphisme de Künneth.*

## 5. Les $\mathbf{Q}_\ell(-n)$

Pour tout  $X$ , on a un élément canonique  $\mathbf{Q}_X(-1)$ <sup>26</sup> ou  $\mathbb{1}_X(-1) \in \text{Ob}(\mathcal{M}^+(X))$ , dont la formation est compatible avec les changements de base (il suffit donc de le considérer sur  $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ ), avec des isomorphismes,

$$T_\ell(\mathbf{Q}(-1)) \simeq \mathbf{Q}_\ell(-1) = T_\ell(\mathbb{G}_m)^{-1}$$

et le cas échéant ( $X$  sur  $\mathbf{Q}$ ).

On peut définir  $\mathbf{Q}(-1)$  comme  $R^2f_*(1_{\mathbb{P}_X^1})$ , où  $f : \mathbb{P}_X^1 \longrightarrow X$  est la projection canonique. Posant

$$\mathbf{Q}(-n) = \mathbf{Q}(-1)^{\otimes n}, \quad \text{pour } n \geq 0,$$

on peut prouver, à l'aide des axiomes déjà posés, que si  $f : X \longrightarrow S$  est lisse projectif à fibres géométriques connexes non vides, partout de dimension relative  $d$ , alors

$$R^{2d}f_*(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbf{Z}_S(-d),$$

et si on enlève l'hypothèse " $f$  projectif" mais seulement  $f$  quasiprojectif, on trouve encore

$$R^{2d}f_!(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbf{Z}_S(-d).$$

On veut de plus, si  $X/S$  est lisse et  $Y \xhookrightarrow{i} X$  est lisse sur  $S$ , de codimension  $d$  dans  $X$ , l'isomorphisme

$$Ri^!(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbf{Q}_Y(-d),$$

<sup>25</sup>compatibilité avec  $f^!$ ,  $Rf_!$ , avec hom résidu, etc...

<sup>26</sup>N.d.T : Il semble que dans sa première mouture toute la théorie était sur  $\mathbf{Z}$ , puis après relecture(s), Grothendieck a changé plusieurs  $\mathbf{Z}$  en  $\mathbf{Q}$ . Nous avons donc gardé ce qui semble être l'ultime révision.

compatible avec les isomorphismes déjà connus du point de vue  $\ell$ -adique...

## 6. La catégorie $\mathcal{M}(X)$

Le foncteur

$$M \rightsquigarrow M(-1) = M \otimes \mathbf{Q}(-1),$$

de  $\mathcal{M}^+(X)$  dans lui-même est *pleinement fidèle* mais pas une équivalence en général. Il y a donc une façon canonique d'élargir  $\mathcal{M}^+(X)$  en  $\mathcal{M}(X)$  de telle façon que  $-\mathbf{Q}(-1)$  devienne une équivalence, en prenant la pseudo-limite inductive des

$$\mathbf{M}^+(X) \xrightarrow{-\otimes \mathbf{Q}(-1)} M^+(X) \xrightarrow{-\otimes \mathbf{Q}(-1)} M^+(X).$$

On<sup>27</sup> prolonge à  $\mathcal{M}(X)$  la structure  $\otimes$ , alors  $\mathbf{Q}(-1)$  devient inversible, soit  $\mathbf{Q}(1)$  son inverse, et tout élément de  $\mathcal{M}(X)$  peut s'écrire, pour  $n$  assez grand, sous la forme  $M_n(n)$ , avec  $M_n \in \text{Ob}(\mathcal{M}^+(X))$ . [Pour  $n$  fixé,  $M_n$  est bien déterminé par  $M$  à isomorphisme unique près, et

$$(M_n(n) \simeq M_{n+1}(n+1)) \Leftrightarrow (M_{n+1} \simeq M_n(-1)),$$

on retrouve la description de  $\mathcal{M}(X)$  en termes de pseudo-limites inductives].

Les foncteurs  $T_\ell$  s'étendent à  $\mathcal{M}(X)$ , de façon unique, de façon à rester compatibles avec  $\otimes$ .

## 7. Les foncteurs $\text{Hom}$ et $\text{RHom}$

Dans  $\mathcal{M}(X)$ , on a aussi des foncteurs  $\underline{\text{Hom}}$ , liés à  $\otimes$  par la formule habituelle

$$\text{Hom}(P \otimes Q, R) \simeq \text{Hom}(P, \underline{\text{Hom}}(Q, R)),$$

$$\simeq \text{Hom}(Q, \underline{\text{Hom}}(P, R)),$$

et qui s'étendent en  $\text{RHom}(P, Q)$ ,  $P, Q \in \text{Ob}(\text{D}^b(\mathcal{M}(X)))$ , satisfaisant à la relation analogue relativement à  $\underline{\otimes}$ . **La formation des  $\underline{\text{Hom}}$  et  $\text{RHom}$  est compatible avec les  $T_\ell$ .** [N. B. On retrouve la formation des  $f^!$ ...]

---

<sup>27</sup>  $\mathcal{M}^+(X)$  est une *sous-catégorie abélienne épaisse* de  $\mathcal{M}(X)$  ; l'appartenance à  $\mathcal{M}^+(X)$  se vérifie fibre par fibre ...

## 8. Motifs constants, tordus et polynômes caractéristiques

Soient  $\ell, \ell'$  des nombres premiers, premiers aux caractéristiques résiduelles de  $X$ . Soit  $M \in \text{Ob}(\mathcal{M}^+(X))$ . On veut que

$$\begin{array}{c} T_\ell(M) \quad \text{faisceau constant tordu} \\ \Updownarrow \\ T_{\ell'}(M) \quad \text{faisceau constant tordu} \end{array}$$

et que sous ces conditions,  $T_\ell(M)$  et  $T_{\ell'}(M)$  doivent avoir même rang en chaque point.

Pour vérifier l'égalité des rangs, on est ramené au cas où  $X$  est le spectre d'un corps (fini si on veut, on clôture algébrique d'un tel). Plus généralement, si  $u$  est un endomorphisme de  $M$  (avec  $X = \text{Spec}(k)$ ,  $k$  un corps), on en déduit

$$T_\ell(u) \in \text{End}(T_\ell(M)), \quad T_{\ell'}(u) \in \text{End}(T_{\ell'}(M)),$$

et je dis que l'on a

$$\boxed{\text{Tr}(T_\ell(u)) = \text{Tr}(T_{\ell'}(u)) \in \mathbf{Q},}$$

d'où, remplaçant  $u$  par  $\Lambda^i(u)$ , le fait

$$\boxed{P(T_\ell(u), t) = P(T_{\ell'}(u), t) \in \mathbf{Q}[t].}$$

[Ici il s'agit des polynômes caractéristiques].

Pour ceci, notons que

$$u \in \text{Hom}(\mathbb{1}_X, \text{Hom}(M, M^2)) = \text{Hom}(\mathbb{1}_X, \check{M} \otimes M),$$

et on a un *morphisme contraction*<sup>28</sup>

$$\check{M} \otimes M \longrightarrow \mathbb{1}_X,$$

d'où un  $c(u) \in \text{Hom}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_X)$ , et

$$\text{Tr}(T_\ell(u)) = T_\ell(c(u)) \in \mathbf{Q}_\ell,$$

et il suffit de savoir :

$$\boxed{X \text{ connexe} \Rightarrow \text{Hom}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_X) = \mathbf{Q} \text{id}_{\mathbb{1}_X} .}$$

---

<sup>28</sup>à inclure dans le formalisme tensoriel

## 9. Filtration de $\mathcal{M}^+(X)$ et $\mathcal{M}(X)$

### 9.1 Filtration par le poids.

$$\mathcal{M}^{+0}(X) \subset \mathcal{M}^{+1}(X) \subset \dots \subset \mathcal{M}^{+i}(X) \subset \dots$$

*filtration exhaustive* de  $\mathcal{M}(X)$ , [L'appartenance à  $\mathcal{M}^{+i}(X)$  se vérifie fibre par fibre (géométrique si on veut), et dans le cas  $X$  de type fini sur  $\mathbf{Z}$ , il suffit de vérifier en les points fermés (pour ceux-ci, il y a un critère par Frobenius, cf. plus bas)<sup>29</sup>], compatible avec  $f^*$ , et  $M|_x \in \text{Ob}(\mathcal{M}^{+i}(k(x))) \Rightarrow \exists x \in U$  voisinage de  $\bar{x}$ , tel que  $M|_U \in \text{Ob} \mathcal{M}^{+i}(U)$ ). Soit  $f : X \longrightarrow Y$ , alors

$$R^j f_! : \mathcal{M}^{+i}(X) \longrightarrow \mathcal{M}^{+j}(Y);$$

de plus,  $\mathcal{M}^{+i}(k)$  ( $k$  un corps algébriquement clos) est “engendré” par les sous-espaces  $R^j f_!(\mathbb{1}_X)$  pour  $X$  si on veut projectif lisse de  $\dim \leq j$  sur  $k$ .

[au<sup>30</sup> sens que tout  $M \in \text{Ob}(\mathcal{M}^i(k))$  a une filtration dont les facteurs sont isomorphes à de tels sous-espaces].

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{+i}(X) \otimes \mathcal{M}^{+j}(X) \subset \mathcal{M}^{+i+j}(X), \\ \mathbf{Z}(-1) \in \text{Ob}(\mathcal{M}^{+2}(X)) \end{cases}$$

d'où

$$\mathcal{M}^{+i}(X) \otimes \mathbf{Z}(-j) \subset \mathcal{M}^{+i+2j}(X), \quad \text{pour } j \geq 0.$$

On a mieux :

$$M \in \text{Ob}(\mathcal{M}^{+i}(X)) \Leftrightarrow M(-j) \in \text{Ob}(\mathcal{M}^{+i+2j}(X)).$$

De cette façon, la filtration de  $\mathcal{M}^+(X)$  par les  $\mathcal{M}^{+i}(X)$  ( $i \geq 0$ ) peut se prolonger en une filtration de  $\mathcal{M}(X)$  par des  $\mathcal{M}^i(X)$  ( $i \in \mathbf{Z}$ ) de telle façon que pour  $i \geq 0$ , ce soit la filtration déjà envisagée, et pour  $i$  quelconque, on définit

$$M \in \text{Ob}(\mathcal{M}^i(X)) \Leftrightarrow M(-j) \in \text{Ob}(\mathcal{M}^{i+2j}(X)),$$

<sup>29</sup> généraliser compatibilités avec  $\varprojlim$  de préschémas

<sup>30</sup> indice en bas

où on prend  $j$  assez grand pour que  $M(-j) \in \text{Ob}(\mathcal{M}^+(X))$ . On notera que<sup>31</sup>

$$\mathcal{M}^{+i}(X) = \mathcal{M}^i(X) \cap \mathcal{M}^+(X),$$

si  $i \geq 0$ , et pour tout  $i$  si on définit  $\mathcal{M}^{+i}(X) = \{0\}$  si  $i < 0$ . On aura

$$\otimes \mathcal{Q}(-1) : M^i(X) \cong \mathcal{M}^{i+2}(X),$$

$$\otimes \mathcal{Q}(j) : M^i(X) \cong \mathcal{M}^{i+2j}(X),$$

mais on fait attention que l'inclusion

$$\mathbf{Q}(-1) \otimes M^{+i}(X) \hookrightarrow M^{+i+2}(X),$$

plus généralement

$$\mathbf{Q}(-j) \otimes M^{+i} \hookrightarrow M^{+i+2j}(X),$$

est *stricte* en général, i.e n'est pas une équivalence de catégories.

Noter<sup>32</sup> que  $\mathcal{M}^{+i}(X)$  est *épaisse* dans  $\mathcal{M}^{+j}(X)$ , et de même  $\mathcal{M}^i(X)$  épaisse dans  $\mathcal{M}^j(X)$  ( $i \leq j$ ).

Les quotients  $G_i^+(X) = \text{Gr}_i(\mathcal{M}^+(X)) \simeq \mathcal{M}_i^+(X)/\mathcal{M}_{i-1}^+(X)$  et  $G_i(X) = \text{Gr}_i(\mathcal{M}(X)) \simeq \mathcal{M}_i(X)/\mathcal{M}_{i-1}(X)$  sont fort intéressants. Notons que les  $G_i(X)$  sont tous équivalents par twisting  $G_i(X) \simeq G_{i+2j}(X)$ , en particulier tous équivalents canoniquement à  $G_0(X)$ . D'ailleurs

$$G_i^+(X) \hookrightarrow G_i(X) \simeq G_0(X),$$

équivalent à une sous-catégorie pleine et *épaisse* de  $G_i(X) \simeq G_0(X)$ .

## 9.2 Filtration par le “type dimensionnel”.

On pose pour  $i \geq 0$ ,

$$D_i(\mathcal{M}^+(X)) = \begin{cases} \text{sous-catégorie pleine de } \mathcal{M}^+(X) \\ \text{formée des objets qui se dévissent loc. étale (du moins fibre par fibre)} \\ \text{en objets de la forme} \\ M(-j), \quad \text{avec } M \in \text{Ob}(\mathcal{M}^{+i}(X)), j \in \mathbb{Z}, i \geq 0 \end{cases}$$

---

<sup>31</sup>indices en bas

<sup>32</sup>indices en bas

i.e., on prend (du moins pour  $X = \text{Spec}(K)$  d'un corps) la filtration minimum qui majore celle par le poids, qui soit stable par  $\otimes \mathbf{Q}(-1)$ , et *épaisse*.

Les  $D_i(\mathcal{M}^+(X))$  sont stables par image inverse, et pour l'image directe on a

$$R^j f_!(D_i(\mathcal{M}^+(X))) \subset D_{i+j}(\mathcal{M}^+(Y)),$$

$$R^j f_*(D_i(\mathcal{M}^+(X))) \subset D_{i+j}(\mathcal{M}^+(Y)).$$

[On a seulement  $R^j f_*(\mathcal{M}^{+i}(X)) \subset \mathcal{M}^{+i+2j}(Y)$  !<sup>33</sup>]

Ici on a

$$M \in \text{Ob}(D_i(\mathcal{M}^+(X))) \Leftrightarrow M(-j) \in \text{Ob}(D_i(\mathcal{M}^+(X))),$$

et la filtration<sup>34</sup> de  $\mathcal{M}^+(X)$  par les  $D_i(\mathcal{M}^+(X))$  s'étend en une filtration des  $\mathcal{M}(X)$  par des  $D_i(\mathcal{M}(X))$  induisant la filtration donnée,

$$M \in \text{Ob}(D_i(\mathcal{M}(X))) \Leftrightarrow M(-j) \in \text{Ob}(D_i(\mathcal{M}(X))) \quad \text{pour } j \text{ grand.}$$

On a

$$D_i(\mathcal{M}(X)) \otimes D_j(\mathcal{M}(X)) \subset D_{i+j}(\mathcal{M}(X)),$$

mais  $\mathbf{Z}(j) \in D_0(M(X))$  pour tout  $j$ , et de même en mettant des  $+$ .

Enfin, on a

$$\underline{\text{Ext}}^i(D_j(\mathcal{M}(X)), D_k(\mathcal{M}(X))) \subset D_{j+k}(\mathcal{M}(X)).$$

(pas de formule aussi simple en termes des  $\mathcal{M}_\alpha(X)$  !).

## 10. Motifs constants tordus. Anneaux $\mathcal{M}^+(X)$ et $\mathcal{M}(X)$

## 11. Interprétation topologique des types dimensionnels (cas “géométrique”)

Soit  $X$  non singulière sur  $k$  alg. clos. Considérons la filtration  $X$  par la codimension<sup>35</sup>, et la suite spectrale

$$H^*(X, \mathbf{Q}_\ell) \Leftarrow E_1^{p,q} = \Pi_{x \in X[p]} H^{q-p}(X, \mathbf{Q}_\ell)(-p)$$

<sup>33</sup> Cela distingue formellement les filtrations  $D_i(M)$  et  $\mathcal{M}_i$  !

<sup>34</sup> toutes formulées en termes de la dim de  $X$

<sup>35</sup> attention terme initial  $E_1$  et non  $E_2$  !!

où on pose

$$\begin{cases} X[p] = \{x \in X \mid \dim(\mathcal{O}_{X,x}) = p\}, \\ H^*(X, \mathbf{Z}_\ell(-p)) = \varinjlim_{U \text{ ouvert } \neq \emptyset \text{ de } \bar{X}} H^*(U, \mathbf{Q}_\ell(-p)) \end{cases}$$

On veut que cette suite spectrale d'une suite spectrale de motifs. [du moins à partir de  $E_r^{p,q}$  avec  $r \geq 2$ , sinon il faudrait parler de ind-motifs, ou bien prendre une filtration *finie* convenable de  $X$  par des sous-schémas fermés]. Le morceau en dim  $n^{36}$  de filtration  $\geq p$  est visiblement de type dimensionnel  $\leq n - 2p$ . On veut que ce soit *exactement* le morceaux de type dimensionnel  $n - p$ .

**12. L'homomorphisme fondamental  $L(K) \longrightarrow M^+(K)$  et invariants birationnels fondamentaux**

**13. Caractérisation galoisienne des filtrations**

**14. Invariants de Galois et théorèmes de commutation**

**15. Cohomologie absolue**

**16. Relations avec les points rationnels et la cohomologie des variétés abéliennes sur des schémas de type fini...**

**17. Formes positives**

**18. Dictionnaire : Fonctions  $L$  — Cohomologie à action galoisienne**

**19. Relation avec la théorie de Hodge<sup>37</sup>**

---

<sup>36</sup>Si  $X$  est **projectif** (hypothèse essentielle même si  $X$  de dim 1)

<sup>37</sup>N.d.T : semble avoir été reconsidérer et traiter dans le document...

## Lettre à J. Dieudonné, 29.9.1965<sup>38</sup>

29.9.1965

Cher Dieudonné,

Merci de ta lettre du 24 et pour la table des matières des par. 16 à 19. Je serais content de recevoir à l'occasion la table des matières provisoire des par. 20 et 21 ; d'accord pour les joindre au fascicule 4 du Chap IV. Mais comment vaux-tu subdiviser mon ancien par.20, et quels seront les titres des deux morceaux ? Comme je commence à me perdre dans le plan, et qu'il est parfois commode de pouvoir référer sans trop déconner à un n° de paragraphe, je te donne ici ce qui me semble être le plan actuel, dis-moi si tu es d'accord :

20. ???

21. ???

22. Systèmes linéaires, compléments sur le groupe de Picard.

23. Grassmaniennes.

24. Formes lisses, singularités quadratiques ordinaires.

25. Sections hyperplanes et bordel.

26. Résultant et discriminant.

27. Extensions infinitésimales.

Le 25. risque d'ailleurs d'être fort long, et je te vois déjà vouloir le subdiviser en deux ! Pourtant,  $27 = 3^3$  est un bien joli nombre !

Il n'est pas question que je publie l'ex-Appendice au par.18 sous mon nom ; ta rédaction n'a à peu près plus rien de commun avec les vagues notes manuscrites que je t'avais passées, si même je t'en ai jamais passé, et ne me suis borné à te dire : il n'y a qu'à faire pareil que pour les anneaux complets... Il serait d'autre part dommage que ton travail de mise au point soit perdu pour les éventuels utilisateurs

---

<sup>38</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGD29965scan.pdf>



(il finit toujours par s'en trouver...). C'est pourquoi je te demande de bien vouloir reconsidérer la question d'en faire un "joint paper".

Pour par. 20, 10.9.1, il faut bien entendu utiliser le fait que l'ensemble des points de  $Z_\lambda$  en lesquels  $F_\lambda$  restreint à la fibre est de  $\text{prof} > 0$  donné, est *constructible* (on a même du prouver au par. 12 qu'il est ouvert, avec les hypothèses de platitude et de présentation finie qu'on a faites). Comme son image inverse dans  $Z$  est tout, c'est que c'est déjà tout un peu plus loin que  $\lambda$ . C'est vraiment toujours le même argument qui revient !

Bien à toi

A. Grothendieck

## Letter to J. Dieudonné, 29.9.1965

29.9.1965

Dear Dieudonné,

Thank you for the letter of the 24th and for the table of contents of par. 16 to 19. I would be happy to receive one day the tentative table of contents for par 20 and 21. It's ok to adjoin them to volume 4 of Ch. IV. But how are you going to subdivide my old par. 20 and what will be the titles of the two parts? Since I am beginning to be lost in the plan and it is often convenient to be able to refer to (without saying too many stupid things) to a number in a paragraph, I give you here what seems to me to be the actual plan, tell me if you agree.

20. ???

21. ???

22. Linear systems complements about the Picard group

23. Grassmanians

24. Smooth forms ordinary quadratic singularities

25. Hyperplane sections et bordel

26. Resultant and discriminant

27. Infinitesimal extensions

The 25th is at risk in addition of being too long and you may wish to subdivide it into two. Still  $27 = 3^3$  is a very pretty number!

It is out of the question that I should publish the appendix to para. 18 under my name. Your formulation (writeup) has almost nothing in common with the vague manuscript notes that I sent to you, and limiting myself to saying: Even if I had given you any you just have to do the same as for complete rings... It would be on the other hand a pity if your work about its formal setting should be lost for the possible users (il finit toujours par s'en trouver...) There can always be some

to be found. That is why I ask you to reconsider the question of making a “joint paper”.

As for par. 20, 10.9.1 it is of course necessary to use the fact that the set of points of  $Z_\lambda$  where  $F_\lambda$  restricted to the fiber is of the depth  $> n$  given is *constructible* (we have to prove the same meme in par. 12 that it is open with the assumption of flatness and of finite presentation which we make). Since its inverse image in  $Z$  is everything that is already a little further than  $\lambda$ . This is really always the same argument qui revient!

That repeats itself.

Bien à toi

A. Grothendieck

Lettre à P. Deligne, 10.12.1965<sup>39</sup>

10.12.1965

Cher Deligne,

Je vous propose une simplification pour la démonstration du théorème de dualité, qui permet d'éviter tout recours au théorème de pureté relative. Vous vous rappelez qu'on était réduit au cas où  $f : X \longrightarrow Y$  est dimension relative 1,  $F = A_X$  et  $G = A_Y$ . Le procédé de passage à la limite de Exp VI, par. 6, permet de supposer la base noethérienne, et même si on y tient de dimension finie (car de type fini sur  $\mathbf{Z}$ ). On raisonne par récurrence sur  $n = \dim X$ . Si  $n = 0$ , on sait le vérifier. Supposons le théorème démontré en dimension  $< n$ . Se localisant sur  $Y$ , on peut supposer  $Y$  strictement local. Alors, si  $y$  est son point fermé, on a  $\dim(Y - y) = n$ , et comme on est réduit à prouver le théorème séparément pour  $X \times_Y (Y - y)$  et  $X \times_Y y$ , on gagne. – Autre remarque : le théorème de dualité peut se démontrer, essentiellement de la même façon et avec le même énoncé, pour un morphisme lisse  $f : X \longrightarrow Y$  compactifiable, lorsque  $Y$  est muni d'un faisceau d'anneaux  $A$  quelconque tel que il existe un entier  $n$  premier aux caractéristiques résiduelles annulant  $A$ , et  $X$  d'un faisceau d'anneaux  $B$ , et  $f$  étant donné comme morphisme de  $(X, B)$  dans  $(Y, A)$ , de sorte qu'on a un homomorphisme de faisceau d'anneaux  $f^{-1}(A) \longrightarrow B$ . On définit alors

$$f^!(K^\bullet) = R\mathrm{Hom}_{f^{-1}(A)}^\bullet(B, f^{-1}(K) \otimes_{T_X/T} 2d).$$

La définition de l'homomorphisme trace et la démonstration du théorème de dualité se décomposent alors en le cas où  $f^{-1}(A) \longrightarrow B$  est un isomorphisme, qui se traite comme le cas  $A = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_Y$ , et le cas où  $f = \mathrm{id}$ , qui est trivial. Je pense qu'il vaut le coup d'inclure cette forme générale du théorème de dualité, soit de prime abord, soit à la fin dans un numéro-page. Je n'ai pas regardé si par hasard il pourrait se déduire du cas particulier  $A = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_Y$  comme simple corollaire, mais ça m'étonnerait. La même remarque s'applique d'ailleurs également au théorème de dualité local, qui s'énonce pour des faisceaux d'anneaux plus généraux que le faisceau constant  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .

---

<sup>39</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGD101265scan.pdf>

Il me semble que la relation de nature transcendante qui lie la cohomologie de De-Rham ou de Hodge aux cohomologies  $\ell$ -adiques, lorsque le corps

[]

Noter qu'en caractéristique  $p > 0$ , on a un homomorphisme évident de  $H^*(X, F_p)$  dans la cohomologie de De-Rham, comme on voit en calculant cette dernière pour la cohomologie étale et non pour la cohomologie de Zariski (ce qui donne la même résultat, puisque les composantes du complexe de De Rham sont quasi-cohérents), et utilisant la suite spectrale en cohomologie étale

$$H^*(X) \leftarrow H^p(X, H^q(\Omega)).$$

Cet homomorphisme se factorise d'ailleurs à travers  $H^*(X, F_p) \longrightarrow H^*(X, \mathbf{O}_X)$ , ce dernier s'envoyant dans  $H^*(X)$  grâce à l'homomorphisme de puissance  $p$ -ème  $f \longrightarrow f^p$ , induisant un isomorphisme  $\mathbf{O}_X \simeq H^0(\Omega)$ . Le composé des homomorphismes canoniques  $H^n(X, \mathbf{O}_X) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(X, \mathbf{O}_X)$  (ce dernier résultant de l'autre suite spectrale pour la cohomologie de De Rham) ne peut guère être autre chose que l'homomorphisme de Frobenius. Il faut dire que tout ça est bien éculé, et qu'on ne pourra dire des choses vraiment intéressantes et nouvelles qu'en faisant appel à la "vraie" cohomologie  $p$ -adique.

Bien cordialement

INTRODUCTION AU LANGAGE FONCTORIEL,  
Rédigé par M. Karoubi d'après un cours de Monsieur A.  
Grothendieck.

Séminaires 1965 – 1966. Faculté des sciences d'Alger<sup>40</sup>

---

Ce fascicule contient une rédaction succincte d'une série d'exposés que Monsieur A. Grothendieck a bien voulu venir faire à Alger au cours du mois de Novembre 1965. Il a pour but de familiariser un débutant avec les éléments du langage fonctoriel, langage qui sera utilisé par la suite dans les divers séminaires : Algèbre Homologique dans les catégories abéliennes, Fondement de la  $K$ -théorie...

Les propositions non démontrées sont de deux types : des sorites dont la démonstration tiendra lieu d'exercices, des propositions moins évidentes (signalés par une astérisque) dont on trouvera les démonstrations dans les ouvrages de références.

## 0. Cadre logique

Lorsque l'on définit une catégorie, il y a des inconvénients à supposer que les forment une classe, au sens de la théorie des ensembles de Gödel-Bernays. En effet, si l'on sait définir les applications d'une classe dans une autre, ces applications ne forment cependant pas elles-mêmes une classe. En particulier on ne saurait parler

---

<sup>40</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/ilfg.pdf>

de la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre. Aussi se placera-on dans le cadre de la théorie des ensembles de Bourbaki pour définir les *Univers*.

### Univers :

On appelle *univers* un ensemble  $\mathfrak{U}$  vérifiant les axiomes suivants :

- (U<sub>1</sub>) Si  $Y$  appartient à  $X$  et si  $X$  appartient à  $\mathfrak{U}$ , alors  $Y$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .
- (U<sub>2</sub>) Si  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $\mathfrak{U}$  alors  $\{X, Y\}$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .
- (U<sub>3</sub>) Si  $X$  est un ensemble appartenant à  $\mathfrak{U}$ , l'ensemble  $\mathfrak{P}(X)$  des parties de  $X$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .
- (U<sub>4</sub>) Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensembles appartenant à  $\mathfrak{U}$ , et si  $I$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ , alors  $\bigcup_{i \in I} X_i$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .

On déduit de ces axiomes les propositions suivantes :

- (1) Si  $X$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ ,  $\{X\}$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .
- (2)  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $\mathfrak{U}$  si et seulement si le couple<sup>41</sup>  $(X, Y)$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .
- (3) L'ensemble vide est un élément de  $\mathfrak{U}$  (puisque c'est un élément de  $\mathfrak{P}(X)$  pour tout ensemble  $X$  de l'univers  $\mathfrak{U}$ ).
- (4) Si  $Y$  est contenu dans  $X$  et si  $X$  appartient à  $\mathfrak{U}$  alors  $Y$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .
- (5) Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensembles de  $\mathfrak{U}$  et si  $I$  appartient à  $\mathfrak{U}$ , alors  $\prod_{i \in I} X_i$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .
- (6) Si  $X$  est un ensemble appartenant à  $\mathfrak{U}$ ,  $\text{Card}(X) < \text{Card}(\mathfrak{U})$ .
- (7) L'univers  $\mathfrak{U}$  n'est pas un élément de  $\mathfrak{U}$ . En effet si  $\mathfrak{U}$  appartient à  $\mathfrak{U}$ , alors  $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$  appartient à  $\mathfrak{U}$ . Soit  $E$  appartenant à  $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$  (donc  $E$  appartient à  $\mathfrak{U}$ ) défini ainsi:  

$$E = \{X \in \mathfrak{U} \mid X \notin X\}$$

On aurait alors :  $E$  appartient à  $E$  si et seulement si  $E$  n'appartient pas à  $E$  !

---

<sup>41</sup>On rappelle que le couple  $(X, Y)$  est l'ensemble  $\{X, \{X, Y\}\}$

- (8) L'intersection d'une famille quelconque d'univers est un univers. En particulier si  $E$  est un ensemble et s'il existe un univers contenant  $E$ , alors il existe un plus petit univers contenant  $E$  qu'on appelle l'univers engendré par  $E$ .

Si  $E_0$  est un ensemble quelconque, on se propose de chercher s'il existe un plus petit univers  $\mathfrak{U}$  contenant  $E_0$ . Il apparaît naturel de plonger  $E_0$  dans un ensemble  $E_1$  par le procédé suivant :

Soit  $G_0$  l'ensemble ainsi défini :  $X \in G_0 \iff (\exists Y)(Y \in E_0 \text{ et } X \in Y)$  et  $F_1 = E_0 \cup G_0$

Soit  $G_1 : X \in G_1 \iff (\exists Y)(\exists Z)(Y \in F_1, Z \in F_1 \text{ et } X = \{Y, Z\})$  et  $F_2 = F_1 \cup G_1$

Soit  $G_2 : X \in G_2 \iff (\exists Y)(Y \in F_2 \text{ et } X = \mathfrak{P}(Y))$  et  $F_3 = F_2 \cup G_2$

Soit  $G_3 : X \in G \iff (\exists I)(\exists (X_i)_{i \in I})(I \in F_3, \forall i \in I, X_i \in F_3 \text{ et } X = \bigcup_{i \in I} X_i)$  et  $F_4 = F_3 \cup G_3$ .

On pose alors  $E_1 = F_4 \cup \{E_0\}$

En itérant cette opération on forme une suite transfinie d'ensembles :

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_\alpha \subset E_{\alpha+1} \subset \dots$$

Pour qu'il existe un plus petit univers contenant  $E_0$ , il faut et il suffit que cette suite devienne stationnaire 'partir d'un certain rang (c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha$  tel que  $E_{\alpha+1} = E_\alpha$ )  $E_\alpha$  sera précisément l'univers  $\mathfrak{U}$  recherché.

En particulier si l'on prend  $E_0 = \emptyset$ , on montre que  $\mathfrak{U} = E_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ . Lorsqu'on part d'un ensemble  $E_0$  infini, on ne peut prouver l'existence d'un univers  $\mathfrak{U}$  contenant  $E_0$ . Il convient donc d'ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome suivant :

**(a<sub>1</sub>) Axiome des univers :**

Pour tout ensemble  $X$ , il existe un univers  $\mathfrak{U}$ , tel que  $X$  soit élément de  $\mathfrak{U}$ .

De plus comme on ne souhaite pas sortir d'un univers  $\mathfrak{U}$  par l'usage du symbole  $\tau$  de Hilbert on introduit l'axiome supplémentaire :



( $a_2$ ) Si  $R$  est une relation,  $x$  une lettre figurant dans  $R$ , et s'il existe un élément  $X$  d'un univers  $\mathfrak{U}$  tel que  $(X|x)R$  soit vrai alors l'objet  $\tau_x(R(x))$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .

## I. Généralités sur les catégories

### 1. Type de diagramme

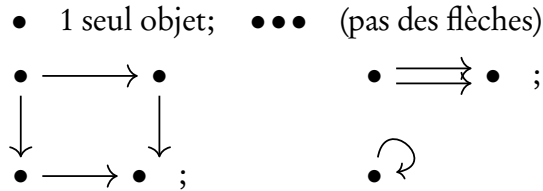
#### 1.1 Définition

Un *type de diagramme*  $D$  est la donnée d'un quadruple  $D = (\text{Fl}, \text{Ob}, s, b)$  où :  
 $\text{Fl}$  et  $\text{Ob}$  sont des ensembles respectivement appelés ensemble des *flèches* (ou des morphismes...), ensemble des *objets* (ou des sommets)  
 $s$  et  $b$  sont des applications de  $\text{Fl}$  dans  $\text{Ob}$  respectivement appelés *source*, *but*.

- Un type de diagrammes sera souvent noté :

$$\begin{array}{c} \text{Fl} \\ \downarrow s \quad \downarrow b \\ \text{Ob} \end{array}$$

- *Exemples* : On peut représenter certains types de diagramme :



#### 1.2 Morphisme d'un type de diagrammes dans une autre :

Si  $D = (\text{Fl}_D, \text{Ob}_D, s_D, b_D)$  et  $D' = (\text{Fl}_{D'}, \text{Ob}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$  sont deux types de diagramme, un *morphisme*  $F$  de  $D$  dans  $D'$  est un couple d'applications  $F = (F_0, F_1) : F_0 : \text{Ob}_D \longrightarrow \text{Ob}_{D'}, F_1 : \text{Fl}_D \longrightarrow \text{Fl}_{D'}$ , tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fl}_D & \xrightarrow{F_1} & \text{Fl}_{D'} \\ s_D \downarrow & & \downarrow s_{D'} \\ \text{Ob}_D & \xrightarrow{F_0} & \text{Ob}_{D'} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Fl}_D & \xrightarrow{F_1} & \text{Fl}_{D'} \\ b_D \downarrow & & \downarrow b_{D'} \\ \text{Ob}_D & \xrightarrow{F_0} & \text{Ob}_{D'} \end{array}$$

si  $D''$  est un troisième type de diagrammes et  $F' = (F'_0, F'_1)$  un morphisme de  $D'$  dans  $D''$ , on définit le *composé* des morphismes  $F$  et  $F'$ , c'est le morphisme  $F'' = (F''_0, F''_1)$  de  $D$  dans  $D''$  ou  $F''_0 = F'_0 F_0$ ,  $F''_1 = F'_1 F_1$ . Le morphisme noté  $1_D = (1_{\text{Fl}_D}, 1_{\text{Ob}_D})$  de  $D$  sur  $D$  est le *morphisme identique* de  $D$ .

### 1.3 Sous-type de diagramme d'un type de diagrammes.

Soit  $D = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, s_D, b_D)$  un type de diagrammes. On dit que  $D' = (\text{Ob}_{D'}, \text{Fl}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$  est un *sous-type de diagrammes* de  $D$  si  $\text{Ob}_{D'}$  est inclus dans  $\text{Ob}_D$ ,  $\text{Fl}_{D'}$  est inclus dans  $\text{Fl}_D$  et si  $s_{D'}$  (respectivement  $b_{D'}$ ) est la restriction à  $\text{Fl}_{D'}$  de  $s_D$  (respectivement  $b_D$ ).

1.4. Si  $D = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, s_D, b_D)$  est un type de diagrammes le type de diagramme noté  $D^\circ = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, b_D, s_D)$  est appelé type de *diagrammes opposé* de  $D$ .

Un *morphisme contravariant de types de diagrammes* de  $D$  dans  $D'$  est un morphisme de type de diagramme de  $D^\circ$  dans  $D'$

## 2. Catégorie

Définition (2.1). — Une catégorie  $C$  est la donnée :

- (i) d'un *type de diagramme*  $(\text{Fl}, \text{Ob}, s, b)$  appelé type de diagramme sous-jacent à  $C$ , noté  $(\text{Fl}_C, \text{Ob}_C, s_C, b_C)$
- (ii) d'une *application* du produit fibré  $(\text{Fl}_C, b_C) \times_{\text{Ob}_C} (\text{Fl}_C, s_C)$  dans  $\text{Fl}_C$ , appelé loi de composition des flèches, notée  $\mu_C : (f, g) \longrightarrow g \circ f = gf$  et vérifiant les propriétés :
  - (a)  $(gf)h = g(fh)$  pour tous les éléments  $f, g, h$  de  $\text{Fl}_C$  tels que cette écriture ait un sens.
  - (aa) pour tout objet  $X$  il existe une flèche  $1_X$  telle que  $s_C(1_X) = b_C(1_X) = X$ , appelée *flèche identique* de  $X$  vérifiant  $1_X f = f$ ,  $f 1_X = f$  pour toute flèche  $f$  telle que cette écriture ait un sens.

On remarque que pour tout objet  $X$ , la flèche  $1_X$  est unique.

**Notations.** Chaque fois que l'on écrit  $gf$ , il est entendu que la composition a un sens, c'est-à-dire que  $b(f) = s(g)$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont deux objets d'un type de diagramme  $D$  (resp. d'une catégorie  $C$ ), l'ensemble des flèches de source  $X$ , de but  $Y$  est noté  $\text{Hom}_D(X, Y)$  ou  $\text{Fl}_D(X, Y)$  (resp.  $\text{Hom}_C(X, Y)$ ...)

Une flèche de source  $X$  et de but  $Y$  est aussi notée  $f : X \longrightarrow Y$ .

## 2.2 Foncteurs.

Soient  $C$  et  $C'$  deux catégories dont  $D$  et  $D'$  sont respectivement les types de diagrammes sous-jacents. Un *foncteur* de  $C$  dans  $C'$  est un *morphisme*  $F = (F_0, F_1)$  du type de diagramme  $D$  dans le type de diagramme  $D'$ , *compatible* avec la composition des flèches, c'est-à-dire tel que  $F_1(fg) = F_1(f)F_1(g)$ .

Pour tout  $X$ ,  $F_1(1_X)$  est alors la flèche identique de  $F_0(X)$ . Si  $C''$  est une troisième catégorie de type de diagramme  $D''$ ,  $F'$  un foncteur de  $C'$  dans  $C''$ , le *foncteur composé* des foncteurs  $F$  et  $F'$ ,  $F'' = F'F$  est le composé des morphismes de type de diagramme sous-jacent 1.2. On vérifie que  $F''$  est compatible avec la composition des flèches. Pour tout catégorie  $C$ , de type de diagramme  $D$ , on définit un *foncteur identique*  $1_C = 1_D$ .

**2.3.** Soit  $C$  une catégorie de type de diagramme sous-jacent  $D$ . La *catégorie opposée* de  $C$ , notée  $C^\circ$ , est la catégorie de type de diagramme  $D^\circ$ , et dont la loi de composition des flèches  $\mu_{C^\circ}$  est définie par  $\mu_{C^\circ}(f, g) = \mu_C(g, f)$ .

On remarque que  $C^{\circ\circ} = C$ .

Un *foncteur contravariant* de  $C$  dans  $C'$  on lui associe canoniquement un foncteur  $F^\circ$  de  $C^\circ$  dans  $C'^\circ$ :

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C^\circ \\ F \downarrow & & \downarrow F^\circ \\ C' & \longrightarrow & C'^\circ \end{array}$$

On remarque que  $(FG)^\circ = F^\circ G^\circ$ ,  $1_C^\circ = 1_{C^\circ}$ ,  $F^{\circ\circ} = F$

## 2.4 Monomorphisme - Epimorphisme.

**2.4.1.** On dit qu'une flèche  $f : X \longrightarrow Y$  d'une catégorie  $C$  est un *monomorphisme* si pour tout objet  $T$  de  $C$  l'application naturelle qui à  $u : T \longrightarrow X$ , fait correspondre  $f u$  de  $\text{Hom}(T, X)$  dans  $\text{Hom}(T, Y)$  est *injective*. Une flèche  $f : X \longrightarrow Y$  d'une catégorie  $C$  est un *épimorphisme* si  $f$  est un monomorphisme en tant que flèche de  $C^\circ$  ou, ce qui est équivalent, si pour tout objet  $T$  de  $C$  l'application naturelle de  $\text{Hom}(Y, T)$  dans  $\text{Hom}(X, T)$  est *injective*.

Une flèche est un *bimorphisme* si c'est un monomorphisme et un épimorphisme.

**2.4.2.** Une flèche  $f$  de  $C$  est inversible à gauche (ou *rétractable*) s'il existe une flèche  $g : b(f) \longrightarrow s(f)$  telle que  $gf = 1_{s(f)}$ ;  $g$  est une *rétraction* de  $f$ .

Une flèche  $f$  de  $C$  est *inversible à droite* (ou *sectionnable*) s'il existe une flèche  $g : b(f) \longrightarrow s(f)$  telle que  $fg = 1_{b(f)}$ ;  $g$  est une *section* de  $f$ .

Une flèche rétractable et sectionnable est appelée un *isomorphisme*, il existe alors un  $g : b(f) \longrightarrow s(f)$  unique tel que  $fg = 1_{b(f)}$  et  $gf = 1_{s(f)}$ ,  $g$  est *l'inverse* de  $f$ .

**2.4.3.** Une flèche rétractable est un monomorphisme. Une flèche sectionnable est un épimorphisme. Donc un isomorphisme est un bimorphisme. Les réciproques sont *fausses*.

## 2.5 Sous-objet, objet quotient.

Soit  $X$  un objet quelconque d'une catégorie  $C$ , on définit sur l'ensemble des monomorphismes de but  $X$  une *relation* de *préordre*:  $i \leq i'$  si et seulement si  $ii'$  se factorise par  $i$  c'est-à-dire si et seulement si il existe un morphisme  $u$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & X \\ & \nwarrow u & \nearrow i' \\ & B' & \end{array}$$

c'est-à-dire tel que  $i' = i u$ .

On remarque que  $u$  est un monomorphisme, et est déterminé de façon unique. On considère la relation d'équivalence associée à cette relation de préordre. Dans chaque classe d'équivalence on choisit (par exemple grâce au symbole  $\tau$ ) un

monomorphisme que l'on appelle *sous objet* de  $X$ . Par abus du langage on appellera aussi sous-objet de  $X$  la source d'un tel monomorphisme. On notera  $(B, i)$  un sous objet de  $X$ , ou simplement  $B$ . La relation de préordre ci-dessus induit donc une relation d'ordre sur l'ensemble des sous objets de  $X$ . Si  $B, B'$  sont deux sous objets de  $X$ , la borné inférieure (resp. la borne supérieure) lorsqu'elle existe, est notée  $B \wedge B'$  (resp.  $B \vee B'$ ). Par exemple, dans la catégorie des ensembles, notée  $\text{Ens}$ ,  $B \wedge B' = B \cap B'$ ,  $B \vee B' = B \cup B'$ .

Dualement on définit les *objets quotients* d'un objet  $X$ , et une relation d'ordre sur leur ensemble.

## 2.6 Sous catégorie d'une catégorie.

Soit  $C$  une catégorie de type de diagramme sous-jacent  $D$ , on dit que  $C'$ , de type de diagramme  $D'$  est une *sous catégorie* si  $D'$  est un sous-type de diagramme de  $D$  et si de plus  $\mu_{C'}$  (loi de composition des flèches dans  $C'$ ) est la restriction de  $\mu_C$  au produit fibre  $(\text{Fl}_{C'}, b_{C'}) \times_{\text{Ob}_{C'}} (\text{Fl}_{C'}, s_{C'})$ .

On remarque que pour tout couple  $X, Y$  d'objets de  $C'$  on a :  $\text{Fl}_{C'}(X, Y) \subset \text{Fl}_C(X, Y)$ . Si de plus on a l'égalité on dit que  $C'$  est une *sous-catégorie pleine* de  $C$ .

## 3. Exemples de catégories

**3.1.** Soit une catégorie dont l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, alors l'ensemble des flèches se trouve naturellement muni d'une structure de monoïde unitaire. Soit  $M$  une telle catégorie,  $C$  une catégorie quelconque, un foncteur  $F = (F_0, F_1)$  de  $M$  dans  $C$  est essentiellement un homomorphisme de monoïde de  $\text{Fl}_M$  dans  $\text{Hom}(X, X)$ , où  $X$  est l'image par  $F_0$  de l'unique objet de  $M$ . On appelle *groupoïde* une catégorie dans laquelle toute flèche est inversible ; si de plus l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, l'ensemble des flèches est muni alors d'une structure de groupe.

**3.2.** Soit  $I$  un ensemble préordonné, on appelle *catégorie associée* à  $I$ , la catégorie notée  $\text{Cat}(I)$ , dont l'ensemble des objets est  $I$ , et dont l'ensemble des flèches est le graphe de la relation de préordre ; si  $(i, j)$  est une flèche  $s(i, j) = j$ ,  $b(i, j) = i$ , la composition des flèches se définit évidemment par  $(i, j)(j, k) = (i, k)$   $(i, i)$  est la flèche identité de  $i$ . Les propriétés (a) et (a a) se vérifient immédiatement.

Inversement, pour toute catégorie  $C$  on peut définir sur  $\text{Ob } C$  une relation de préordre, à savoir :  $X \leq Y \Leftrightarrow \text{Hom}_C(X, Y) \neq \emptyset$ . Une catégorie  $C$  est isomorphe à une catégorie  $\text{Cat}(I)$  si et seulement si toute flèche de  $\text{Fl } C$  est un monomorphisme. Il suffit de prendre  $I = \text{Ob } C$  muni de la relation de préordre précédente.

### 3.3 Catégories de types de diagramme, catégories de catégories

Dans cette section, on choisit une fois pour toute un univers  $\mathfrak{U}$ , et tous les ensembles utilisés sont des éléments de  $\mathfrak{U}$ .

Soit l'ensemble des "types de diagramme dans  $\mathfrak{U}$ ", notée  $\text{Diag}_{\mathfrak{U}}$ , (resp. l'ensemble des "catégories dans  $\mathfrak{U}$ ", noté  $\text{Cat}_{\mathfrak{U}}$ ) c'est-à-dire des types de diagramme  $D$  (resp. des catégories  $C$ ) tels que les ensembles  $\text{Ob}_D, \text{Fl}_D$  (resp.  $\text{Ob}_C, \text{Fl}_C$ ) soient des *éléments de  $\mathfrak{U}$* . En considérant 1.2 (resp. 2.2) on définit la *catégorie des types de diagramme* dans  $\mathfrak{U}$  notée  $\underline{\text{Diag}}_{\mathfrak{U}}$  (resp. la *catégorie des catégories* dans  $\mathfrak{U}$  notée  $\underline{\text{Cat}}_{\mathfrak{U}}$ ).

Explicitons par exemple  $\underline{\text{Cat}}_{\mathfrak{U}}$ , le type de diagramme est le suivant : l'ensemble des objets est  $\text{Cat}_{\mathfrak{U}}$ , l'ensemble des flèches est l'ensemble des triples  $(F, C, C')$  où  $F$  est un foncteur de la catégorie  $C$  dans la catégorie  $C'$ ,  $s(F, C, C') = C$ ,  $b(F, C, C') = C'$ . La loi de composition des flèches est la composition des foncteurs définie en 2.2. On vérifie les propriétés (a) et (aa).

### 3.4 Catégorie des morphismes de type de diagramme d'un type de diagramme dans une catégorie, catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre

Soient  $D = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, s_D, b_D)$  un type de diagramme et  $C'$  une catégorie de type de diagramme sous-jacent  $(\text{Ob}_{C'}, \text{Fl}_{C'}, s_{C'}, b_{C'})$ . Un morphisme de type de diagramme  $D$  dans  $C'$  est aussi appelé *diagramme de type  $D$  dans  $C'$* .

On considère l'ensemble des morphismes de type de diagramme de  $D$  dans  $C'$  noté  $\text{Diag}(D, C')$ . Soient  $F = (F_0, F_1)$ ,  $G = (G_0, G_1)$  deux morphismes de type de diagramme de  $D$  dans  $C'$ . Une *flèche* de *source*  $F$  de *but*  $G$  est une application  $u$  de  $\text{Ob}_D$  dans  $\text{Fl}_{C'}$  ( $u(x)$  sera souvent noté  $u_x$ ) telle que pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$

de  $D$ , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_0(X) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_0(Y) \\ \downarrow u(X) & & \downarrow u(Y) \\ G_0(X) & \xrightarrow{G_1(f)} & G_0(Y) \end{array}$$

Si  $u$  et  $v$  sont deux flèches,  $u : F \longrightarrow G$ ,  $v : G \longrightarrow H$ , la flèche composée  $vu : F \longrightarrow H$  est définie  $vu(X) = v(X)u(X)$  pour tout  $X$  de  $\text{Ob}_D$ .

La flèche identique de  $F$  notée  $1_F$  est définie par  $1_F(X) = 1_{F_0}(X)$  pour tout  $X$  de  $\text{Ob}_D$ . On vérifie les propriétés (a) et (a a). On a alors défini la catégorie des morphismes de type de diagramme de  $D$  dans  $C'$ , encore appelée catégorie des diagrammes de type  $D$  dans  $C'$  et notée  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$ .

Si  $C$  et  $C'$  sont deux catégories de types de diagrammes sous-jacents  $D$  et  $D'$ , on définit également la catégorie des foncteurs de  $C$  dans  $C'$  notée  $\underline{\text{Hom}}(C, C')$ .

$C'$  est par définition une sous-catégorie pleine de  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$ .

### 3.5 Exemples de catégories de diagramme de type donné dans une catégorie

**3.5.1.** Si  $D$  est tel que  $\text{Ob}_D$  se réduit à un seul élément et si l'ensemble des flèches est vide, alors  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$  est canoniquement isomorphe à la catégorie  $C'$ .

**3.5.2.** Si  $D$  est du type suivant :  $\bullet \longrightarrow \bullet$ , alors la catégorie  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$  est appelée catégorie des flèches de  $C'$ , notée  $\underline{\text{Fl}}(C')$ .

Les objets s'identifient aux éléments de  $\text{Fl } C'$  et un morphisme de la flèche  $f : X \longrightarrow Y$ , dans la flèche  $f' : X' \longrightarrow Y'$  est défini par un couple de flèche  $(u, v)$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ X' & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

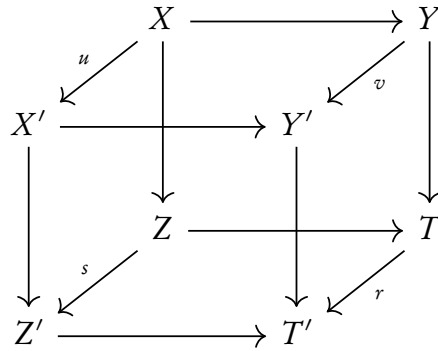
**3.5.3.** Si  $D$  est du type suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

les objets de  $\text{Diag}(D, C')$  sont essentiellement les “carrés” (non nécessairement commutatifs) de  $C'$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & T, \end{array}$$

et un morphisme d’un tel carré dans un autre est défini par un quadruple de flèches  $(u, v, r, s)$  tel que tous les côtés latéraux de “cube” suivant, où interviennent ces flèches, soient commutatifs :



### 3.6 Diagramme avec relations de commutation

**3.6.1.** Soit  $D$  un type de diagramme, on appelle *chemin* une suite finie  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de flèches de  $D$  formellement composable, c’est-à-dire telle que  $s(f_{i+1}) = b(f_i)$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . On considère le type de diagramme dont les objets sont ceux de  $D$ , dont les flèches sont les chemins  $c = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$  avec  $s(c) = s(f_1)$  et  $b(c) = b(f_n)$ . Sur ce type de diagramme on définit la composition des chemins, elle consiste à mettre “bout à bout” deux chemins s’ils sont formellement composables. On obtient ainsi une catégorie notée  $\hat{D}$ , appelée *catégorie libre engendré par le type de diagramme  $D$* .

Soit  $C$  une catégorie, pour tout morphisme de type de diagramme  $\varphi : D \longrightarrow C$ , il existe un foncteur et un seul  $\hat{\varphi} : \hat{D} \longrightarrow C$  tel que pour tout chemin  $c = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\hat{\varphi}_1(c) = \varphi_1(f_1) \dots \varphi_1(f_{n-1})$ .

**3.6.2.** On appelle *donnée de commutation* sur  $D$ , la donnée d’un ensemble  $R$  de couples de flèches de  $\hat{D}$ ,  $(c, c')$  tels que  $s(c) = s(c')$  et  $b(c) = b(c')$ .

Soit  $C$  une catégorie, on dit qu’un diagramme  $\varphi$  de type  $D$  dans  $C$  vérifie les *relations de commutation*  $R$  si pour tout couple  $(c, c')$  de  $R$ ,  $\hat{\varphi}_1(c) = \hat{\varphi}_1(c')$ . On note



$\underline{\text{Diag}}_R(D, C)$  la sous-catégorie pleine de  $\underline{\text{Diag}}(D, C)$  formée par les diagrammes de type  $D$  vérifiant  $R$ .

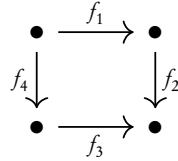
**3.6.3.** Dans  $\text{Fl}\hat{D}$  on définit la relation d'équivalence  $R$  suivante :

$R(c, c')$  si et seulement si  $s(c) = s(c')$  et  $b(c) = b(c')$ , la classe de  $c$  sera notée  $\bar{c}$ .

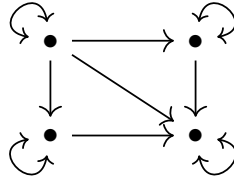
Soit  $\tilde{D}$  la catégorie telle que  $\text{Ob}(\tilde{D}) = \text{Ob}(\hat{D}) = \text{Ob}(D)$  et  $\text{Fl}(\tilde{D}) = \text{Fl}(\hat{D})/R$  avec  $s(\bar{c}) = s(c)$  et  $b(\bar{c}) = b(c)$ . La catégorie  $\underline{\text{Hom}}(\tilde{D}, C)$  est appelée catégorie des diagrammes de type  $D$  *commutatifs* dans  $C$  et notée  $(D, C)$ .

### Exemple

Soit  $D$  le type de diagramme représenté par



Alors  $\text{Ob}\hat{D} = \text{Ob}(D)$ ,  $\text{Fl}\hat{D} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, (f_2, f_1), (f_3, f_4)\}$  chemin vide, dans  $\tilde{D}$  on identifie  $(f_2, f_1)$  et  $(f_3, f_4)$  on peut donc représenter  $\tilde{D}$  par



## 4. Produit de catégories, somme de catégories

### 4.1 Produit de catégories

Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de catégories,  $I$  un ensemble.

**4.1.1.** La catégorie *produit* des catégories  $C_i$ , notée  $C = \prod_{i \in I} C_i$  est ainsi définie:

- $\text{Ob } C = \prod_{i \in I} \text{Ob } C_i$ ,  $\text{Fl } C = \prod_{i \in I} \text{Fl } C_i$ ,  $s = \prod_{i \in I} s_i$ ,  $b = \prod_{i \in I} b_i$ .
- Si  $f = (f_i)_{i \in I}$  et  $g = (g_i)_{i \in I}$  sont deux flèches, la flèche composée  $gf$  est la flèche  $(g_i f_i)_{i \in I}$ ; la flèche identique sur  $\prod_{i \in I}$  est la flèche  $\prod_{i \in I} 1_{X_i}$ .

On définit une famille de foncteurs notée  $(\text{pr}_i)_{i \in I}$ ,  $\text{pr}_i : \prod_{i \in I} C_i \longrightarrow C_i$  est tel que  $\text{pr}_i((X_i)_{i \in I}) = X_i$ ,  $\text{pr}_i((f_i)_{i \in I}) = f_i$ .

**Proposition 4.1.2.** — *Pour tout catégorie  $T$ , l'application de  $\text{Hom}(T, \prod_{i \in I} C_i)$  dans  $\prod_{i \in I} \text{Hom}(T, C_i)$  qui à  $u$  fait correspondre  $(\text{pr}_i \circ u)_{i \in I}$  est bijective.*

## 4.2 Multifoncteurs

**4.2.1.** On considère une famille  $(C_i)_{i \in I}$  de catégories, deux sous-ensembles  $J$  et  $K$  de  $I$  tels que  $I = J \cup K$ ,  $J \cap K \neq \emptyset$ . Soit  $C$  la catégorie produit de  $\prod_{i \in I} C_i$  et de  $\prod_{i \in I} C_i^\circ$ . Un *multifoncteur* de  $\prod_{i \in I} C_i$  dans une catégorie  $C'$ , *covariant* par rapport aux indices  $i$  de  $J$  et *contravariant* par rapport aux indices  $i$  de  $K$  est un foncteur de  $C$  dans  $C'$ .

**4.2.2. Exemples.** Si  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  sont trois catégories on considère le *produit* de catégories  $\underline{\text{Hom}}(C, C') \prod \underline{\text{Hom}}(C', C'')$  l'application de  $\text{Hom}(C, C') \prod \text{Hom}(C', C'')$  dans  $\text{Hom}(C, C'')$  qui à  $(F, G)$  fait correspondre  $GF$  permet de définir un *bifoncteur*, deux fois covariant de  $\underline{\text{Hom}}(C, C') \prod \underline{\text{Hom}}(C', C'')$  dans  $\text{Hom}(C, C'')$ . Soient  $F$  et  $F'$  deux foncteurs de  $C$  dans  $C'$ ,  $G$  et  $G'$  deux foncteurs de  $C'$  dans  $C''$ ,  $u : F \longrightarrow F'$  et  $v : G \longrightarrow G'$ , au couple  $(u, v)$  de flèche on fait correspondre la flèche notée  $v^*u : GF \longrightarrow G'F'$  définie pour tout objet  $X$  de  $C$  par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G_\circ F_\circ(X) & \xrightarrow{G_1(u(X))} & G_\circ F'_\circ(X) \\ v(F_\circ(X)) \downarrow & \searrow v^*u(X) & \downarrow v(F'_\circ(X)) \\ G'_\circ F_\circ(X) & \xrightarrow{G'_1(u(X))} & G'_\circ F'_\circ(X) \end{array}$$

On vérifiera que  $v^*u$  est bien un morphisme *fonctoriel*, c'est-à-dire que pour toute  $f : X \longrightarrow Y$  de  $C$  le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G_\circ F_\circ(X) & \xrightarrow{v^*u(X)} & G'_\circ F'_\circ(X) \\ G_1 F_1(f) \downarrow & & \downarrow G'_1 F'_1(f) \\ G_\circ F_\circ(Y) & \xrightarrow{v^*u(Y)} & G'_\circ F'_\circ(Y) \end{array}$$

et que l'application qui à  $(u, v)$  fait correspondre  $v^*u$  respecte la composition des flèches.

Si l'on fixe  $F$  appartenant à  $\underline{\text{Hom}}(C, C')$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}(C', C'')$ ) on obtient un foncteur de  $\underline{\text{Hom}}(C', C'')$  dans  $\underline{\text{Hom}}(C, C'')$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}(C, C')$  dans  $\underline{\text{Hom}}(C, C'')$ ) noté  $F_*$  (resp.  $F^*$ ).

**4.2.3.** Si  $C'$  et  $C''$  sont deux catégories, définissons un bifoncteur  $\varphi$  de  $C' \prod \underline{\text{Hom}}(C', C'')$  dans  $C''$ .

A l'objet  $(X, G)$  on fait correspondre  $\varphi_o(X, G) = G_o(X)$ .

A la flèche  $(f, v)$ , où  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $v : G \longrightarrow G'$  on ait correspondre  $\varphi_1(f, v)$  définie par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G_o(X) & \xrightarrow{G_1(f)} & G_o(Y) \\ v(X) \downarrow & \searrow \varphi_1(f, v) & \downarrow v(Y) \\ G'_o(X) & \xrightarrow{G'_1(f)} & G'_o(Y) \end{array}$$

Si  $A$  est une catégorie ponctuelle ( $\text{Ob } A = \{\emptyset\}$ ,  $\text{Fl}_A = 1_{\{\emptyset\}}$ ), pour toute catégorie  $C$ ,  $\underline{\text{Hom}}(A, C)$  est canoniquement isomorphe à  $C$ , et le bifoncteur ci-dessus peut s'interpréter comme un foncteur de  $\underline{\text{Hom}}(A, C') \prod \underline{\text{Hom}}(C', C'')$  dans  $\underline{\text{Hom}}(A, C'')$ ; ce n'est autre que celui définie en 4.2.2.

### 4.3 Somme de catégories

**Rappel.** Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles,  $S = \coprod_{i \in I} X_i$  sa somme. Pour tout  $x$  élément de  $S$  on sait qu'il existe un unique indice noté  $i(x)$  et un élément  $x_{i(x)}$  dans  $X_{i(x)}$  tels que  $x = (x_{i(x)}, i(x))$ .

**4.3.1.** Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de catégories,  $I$  un ensemble. La catégorie *somme de la famille*  $(C_i)_{i \in I}$  notée  $S = \coprod C_i$  est définie par le *type de diagramme* suivant :  $\text{Ob } S = \coprod_{i \in I} C_i$ ,  $\text{Fl } S = \coprod_{i \in I} \text{Fl } C_i$ ,  $s = \coprod_{i \in I} s_i$ ,  $b = \coprod_{i \in I} b_i$ , et la *composition des flèches* suivante : deux flèches  $f = (f_{i(f)}, i(f))$  et  $g = (g_{i(g)}, i(g))$  sont composables si et seulement si  $b(f) = s(g)$  si et seulement si  $i(f) = i(g) = i$  et  $b_i(f_i) = s_i(g_i)$ , on a alors  $gf = (g_i f_i, i)$ , l'identité pour un objet  $X$  est la flèche  $1_X = (1_{X_{i(x)}, i(x)})$ .

On définit une *famille de foncteurs* notée  $(\text{inj}_i)_{i \in I}$ ,  $\text{inj}_i : C_i \longrightarrow S$ , tel que  $\text{inj}_i(X_i) = (X_i, i)$ ,  $\text{inj}_i(f_i) = (f_i, i)$ .

**Proposition 4.3.2.** — Pour toute catégorie  $T$ , l'application de  $\text{Hom}(\coprod_{i \in I} C_i, T)$  dans  $\prod_{i \in I} \text{Hom}(C_i, T)$ , qui à  $u$  fait correspondre  $(u \circ \text{inj}_i)_{i \in I}$ , est bijective.

**4.3.3.** Soit  $\prod_{i \in I} C_i$  (resp.  $\coprod_{i \in I} C_i$ ) la catégorie produit (resp. somme) d'une famille  $(C_i)_{i \in I}$  de catégories, alors pour tout catégorie  $T$ , la *bijection* naturelle de  $\text{Hom}(T, \prod_{i \in I} C_i)$  dans  $\prod_{i \in I} \text{Hom}(T, C_i)$  (resp.  $\text{Hom}(\coprod_{i \in I} C_i, T)$  dans  $\prod_{i \in I} \text{Hom}(C_i, T)$ ) est un *isomorphisme* de  $\underline{\text{Hom}}(T, \prod_{i \in I} C_i)$  dans  $\prod_{i \in I} \underline{\text{Hom}}(T, C_i)$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}(\coprod_{i \in I} C_i, T)$  dans  $\prod_{i \in I} \underline{\text{Hom}}(C_i, T)$ ).

## 5. Équivalence de catégories

**5.1 Définition.** Soit  $F = (F_0, F_1)$  un foncteur d'une catégorie  $C$  dans une catégorie  $C'$ .

**5.1.1.** Le foncteur est dit *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ ,  $F_1|_{\text{Hom}(X, Y)}$ , restriction de  $F_1$  à  $\text{Hom}(X, Y)$ , est *injectif* (resp. *bijectif*).

Si  $F_1$  est injectif (resp. bijectif) alors  $F$  est fidèle (resp. pleinement fidèle). Les réciproques sont fausses.

**5.1.2.** Le foncteur  $F$  est dit *essentiellement surjectif* si pour tout objet  $X'$  de  $C'$ , il existe un objet  $X$  de  $C$  tel que  $F_0(X)$  soit isomorphe à  $X'$ .

**5.1.3.** Un foncteur  $F$  est appelé une *équivalence de catégories* s'il est *pleinement fidèle* et *essentiellement surjectif*.

**5.1.4.** Ces propriétés se conservent par la composition de foncteurs.

**5.1.5.** On dit que la catégorie  $C$  est *équivalente* à la catégorie  $C'$ , s'il existe un foncteur  $F : C \longrightarrow C'$  qui soit une équivalence de catégories ; on définit ainsi une relation d'équivalence sur  $\text{Cat}_{\mathbb{U}}$ . En effet la relation est évidemment réflexive, elle est transitive **5.1.4**, elle est symétrique du fait de la proposition suivante :

**Proposition 5.1.6.** — *Le foncteur  $F$  de  $C$  dans  $C'$  est une équivalence de catégories si et seulement si il existe un foncteur  $G$  de  $C'$  dans  $C$ , tel que  $GF$  soit isomorphe à  $1_C$  et  $FG$  soit isomorphe à  $1_{C'}$ . Un tel foncteur  $G$  est appelé un quasi-inverse de  $F$ .*

Alors que l'inverse d'un morphisme lorsqu'il existe est unique, un foncteur peut avoir plusieurs quasi-inverses qui sont isomorphes entre eux.

**Démonstration.** Supposons que  $F$  soit une équivalence de catégories. Puisque  $F$  est *essentiellement surjectif*, pour tout objet  $X'$  de  $C'$ , l'ensemble des objets de  $C$  tels que l'image par  $F_0$  soit isomorphe à  $X'$  est non vide. On en choisit un (grâce

au symbole  $\tau$  !)  $X$  et l'on note  $u_x$ , un isomorphisme de  $F_0(X)$  sur  $X'$ .

On pose alors  $G_0(X') = X$ .

Pour toute flèche  $f' : X' \longrightarrow Y'$ , on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} F_0(X) & \xrightarrow{u_x} & X' \\ & & \downarrow f' \\ F_0(Y) & \xrightarrow{u_y} & Y' \end{array}$$

Il existe une unique flèche de  $F_0(X)$  dans  $F_0(Y)$  rendant le diagramme commutatif ( $u_y^{-1}f'u_x$ ). Puisque  $F$  est *pleinement fidèle*, cette flèche est l'image par  $F_1$  d'une unique flèche  $f : X \longrightarrow Y$ .

On pose  $G_1(f') = f$ .

Par construction de  $G = (G_0, G_1)$  on a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\approx} & G_0F_0(X) \\ \downarrow & & \downarrow G_1F_1(f) \\ Y & \xrightarrow{\approx} & G_0F_0(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\approx} & F_0G_0(X') \\ \downarrow & & \downarrow F_0G_0(f') \\ Y' & \xrightarrow{\approx} & F_0G_0(Y') \end{array}$$

ce qui montre que  $GF$  est isomorphe à  $1_C$ , et  $FG$  isomorphe à  $1_{C'}$ .

Réciproquement supposons que  $F$  possède un quasi-inverse  $G$  ; alors  $F$  est évidemment *essentiellement surjectif*, d'autre part  $F_1|_{\text{Hom}(X,Y)}$  est une *bijection* de  $\text{Hom}(X,Y)$  sur  $\text{Hom}(F_0(X),F_0(Y))$  pour tout couple d'objets  $(X,Y)$ . En effet  $F_1|_{\text{Hom}(X,Y)}$  est une *surjection* sur  $\text{Hom}(F_0(X),F_0(Y))$ . C'est aussi une *injection*, soient deux flèches,  $f$  et  $g$  de  $X$  dans  $Y$  telles que  $F_1(f) = F_1(g)$ , alors  $G_1F_1(f) = G_1F_1(g)$ , comme il y a une seule flèche de  $X$  dans  $Y$  rendant le diagramme ci-dessus commutatif, on a  $f = g$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\approx} & G_0F_0(X) \\ f \downarrow \downarrow g & & \downarrow G_0F_0(f)=G_0F_0(g) \\ Y & \xrightarrow{\approx} & G_0F_0(Y) \end{array}$$

## 5.2

**Proposition 5.2.1.** — *Si  $F$  est un foncteur d'une catégorie  $C$  dans une catégorie  $C'$ , les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a)  $F$  est pleinement fidèle ;

(b) Il existe une sous-catégorie pleine  $C'_1$  de  $C'$  telle que  $F$  se factorise par  $C'_1$  au moyen d'un foncteur qui est une équivalence de catégories.

Si  $F$  est pleinement fidèle, il suffit de prendre  $C'_1$  l'image par  $F$  de  $C$ , ou l'image essentielle de  $F$  par  $C$  (c'est-à-dire l'ensemble des objets de  $C'$  isomorphes à  $F(X)$   $X$  variant dans  $\text{Ob}_C$ ).

Réciproquement si  $F$  se factorise par  $C'_1$  sous-catégorie pleine de  $C'$ , le foncteur  $\text{inj} : C'_1 \longrightarrow C$  est pleinement fidèle, et la composition avec une équivalence de catégorie donne un foncteur pleinement fidèle.

**Proposition 5.2.2.** — Soit  $F$  un foncteur de  $C$  dans  $C'$ ,  $T$  une catégorie,  $F_*$  le foncteur de  $\underline{\text{Hom}}(C', T)$  dans  $\underline{\text{Hom}}(C, T)$  4.2.1 on a les propriétés suivantes :

(i) Si  $F$  est fidèle alors  $F_*$  est fidèle ;

(ii) Si  $F$  est pleinement fidèle alors  $F_*$  est pleinement fidèle ;

(iii) Si  $F$  est une équivalence de catégories alors  $F_*$  est une équivalence de catégories.

Si l'on considère  $F^*$  le foncteur  $\underline{\text{Hom}}(T, C)$  dans  $\underline{\text{Hom}}(T, C')$ , seule la propriété (iii) est vraie.

**Proposition 5.2.3.** — Soit  $F$  un foncteur de  $C$  dans  $C'$  pleinement fidèle ; alors une flèche  $f$  de  $C$  est inversible si et seulement si  $F_1(f)$  est inversible.

**Proposition 5.2.4.** — Soit dans  $\text{Cat}_{\mathfrak{U}}$  une famille de foncteurs  $(F_i)_{i \in I}$ ,  $I$  élément de  $\mathfrak{U}$ ,  $F_i : C_i \longrightarrow C'_i$ , et soit  $\prod_{i \in I} F_i : \prod_{i \in I} C_i \longrightarrow \prod_{i \in I} C'_i$ , on a les propriétés suivantes:

(i) Si pour tout  $i$  élément de  $I$ ,  $F_i$  est fidèle alors  $\prod_{i \in I} F_i$  est fidèle.

(ii) Si pour tout  $i$  élément de  $I$ ,  $F_i$  est pleinement fidèle alors  $\prod_{i \in I} F_i$  est pleinement fidèle.

(iii) Si pour tout  $i$  élément de  $I$ ,  $F_i$  est une équivalence de catégories alors  $\prod_{i \in I} F_i$  est une équivalence de catégories.

On énoncera la proposition duale.

### 5.3 Exemple

Soient  $X$  un espace topologique, connexe par arc, localement simplement connexe par arc,  $x$  un élément de  $X$ . On note  $\text{Rev}(X)$ , la catégorie des revêtements de  $X$  éléments d'un univers  $\mathcal{U}$  donné,  $\Pi = \Pi_1(X, x)$ ,  $\text{Ens}(\Pi)$  la catégorie des ensembles de  $\mathcal{U}$  sur lesquels  $\Pi$  opère.

Proposition. — *Les catégories  $\text{Rev}(X)$  et  $\text{Ens}(\Pi)$  sont équivalentes.*

Au revêtement  $E, X, p$  on fait correspondre la fibre  $F = p^{-1}(x)$ ,  $\Pi$  opère sur  $F$  ; si  $E', X, p'$  est un revêtement et  $f : E \rightarrow E'$  un morphisme de revêtement, à  $f$  on fait correspondre  $f|_{p^{-1}(x)} : F \rightarrow F'$  qui est compatible avec  $\Pi$ . On a ainsi défini un foncteur  $\alpha : \text{Rev}(X) \rightarrow \text{Ens}(\Pi)$ .

Construisons un foncteur quasi-inverse. Soit  $F$  un ensemble sur lequel  $\Pi$  opère. La revêtement universel  $\tilde{X}$  de  $X$  est un fibré principal de groupe  $\Pi$ , on considère le fibré associé  $\tilde{X} *_\Pi F$  de fibre  $F$ , c'est un revêtement de  $X$ , on définit ainsi un foncteur  $\beta : \text{Ens}(\Pi) \rightarrow \text{Rev}(X)$ . On vérifiera que  $\beta\alpha \simeq 1_{\text{Rev}(X)}$  et  $\alpha\beta \simeq 1_{\text{Ens}(\Pi)}$ .

## 6. Limite projective, limite inductive

6.1. Soit  $I$  un type de diagramme,  $C$  une catégorie et  $\varphi$  un morphisme de type de diagramme de  $I$  dans  $C$  (c'est-à-dire un diagramme de type  $I$  dans  $C$ ).

6.1.1. Une famille  $(u_i)_{i \in \text{Ob } I}$  de morphismes de  $C$ , de source  $X$ ,  $u_i : X \rightarrow \varphi_0(i)$  est dite *admissible pour  $\varphi$* , si pour toute flèche  $f : i \rightarrow j$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \varphi_0(i) \\ & \nearrow u_i & \downarrow \varphi_1(f) \\ X & & \\ & \searrow u_j & \downarrow \\ & & \varphi_0(j) \end{array}$$

Une telle famille est notée  $(X, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$ .

6.1.2. On appelle *limite projective* du diagramme  $\varphi$ , une famille admissible pour  $\varphi : (X, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$ , qui est “universelle” dans le sens suivant : pour toute

famille admissible pour  $\varphi : (Y, (v_i)_{i \in \text{Ob } I})$ , il existe un unique morphisme  $u : Y \longrightarrow X$  tel que pour tout élément  $i$  de  $\text{Ob } I$ , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_0(i) & \\ v_i \nearrow & & \nwarrow u_i \\ Y & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

Deux limites projectives du diagramme  $\varphi$  sont canoniquement isomorphes. Si l'ensemble des limites projectives d'un diagramme  $\varphi$  n'est pas vide, on en choisit une que l'on note  $\varprojlim_I \varphi$  (ou si aucune confusion n'est possible  $\varprojlim \varphi$ ).

Si  $\varprojlim_I \varphi = (X, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$ , par abus de langage on dira que  $X$  est la limite projective de  $\varphi$ , il est alors sous entendu qu'on s'est donné avec  $X$  la famille  $(u_i)_{i \in \text{Ob } I}$  qu'on n'explicite pas sans doute parce qu'elle est évidente.

**6.1.3.** Si  $F$  est un foncteur de la catégorie  $C$  de type de diagramme sous-jacent  $D$ , dans la catégorie  $C'$ , la limite projective du foncteur  $F$  est la limite projective du morphisme de type de diagramme sous-jacent à  $F$  (c'est-à-dire du morphisme  $F : D \longrightarrow C'$ ).

#### 6.1.4 Exemples.

Si  $C$  est la catégorie  $\text{Ens}_{\mathbb{U}}$  des ensembles d'un univers  $\mathbb{U}$ ,  $I$  un type de diagramme,  $\varphi : I \longrightarrow \text{Ens}_{\mathbb{U}}$ ,  $\varprojlim_I \varphi$  est un sous ensemble du produit  $\prod_{i \in \text{Ob } I} \varphi_0(i)$  défini ainsi :

$$(X_i)_{i \in \text{Ob } I} \in \varprojlim \varphi \Leftrightarrow (\forall f)(f \in \text{Fl } I, f : i \longrightarrow j, X_j = \varphi_1(f)X_i)$$

*En particulier :*

- a) Si  $I$  est un type de diagramme discret (c'est-à-dire tel que  $\text{Fl}_I = \emptyset$ ) on récupère pour  $\varprojlim \varphi$  le produit  $\prod_{i \in \text{Ob } I} \varphi_0(i)$
- b) Si  $I$  est la catégorie associé à un ensemble préordonné, un diagramme  $\varphi$  est essentiellement un "système projectif d'ensembles" (Bourbaki, Théorie des Ensembles) et l'on retrouve la notion classique de limite projective.

**6.2.** Soit  $C$  une catégorie,  $I$  un type de diagramme et  $\varphi$  un morphisme de  $I$  dans  $C$ . A tout objet  $Y$  de  $C$  on associe le morphisme  $\varphi^Y$  de  $I$  dans  $\text{Ens}_{\mathbb{U}}$  ainsi défini :



Si  $i$  appartient à  $\text{Ob}_I$ ,  $\varphi_0^Y(i) = \text{Hom}(Y, \varphi_0(i))$

Si  $\alpha$  appartient à  $\text{Fl}_I$ ,  $\alpha : i \longrightarrow j$ ,  $\varphi_1^Y(\alpha)$  est l'application de  $\text{Hom}(Y, \varphi_0(i))$  dans  $\text{Hom}(Y, \varphi_0(j))$  qui à  $f$  correspondre  $\varphi_1(\alpha)f$ .

**Proposition.** — *La famille admissible  $(X, (u_i)_{i \in \text{Ob}_I})$  est limite projective de  $\varphi$  si et seulement si pour tout  $Y$  l'application naturelle  $*_Y$  de  $\text{Hom}(Y, X)$  dans  $\prod_{i \in \text{Ob}_I} \text{Hom}(Y, \varphi_0(i))$  induit une bijection de  $\text{Hom}(Y, X)$  sur  $\varprojlim \varphi^Y$ .*

*La famille admissible  $(X, (u_i)_{i \in \text{Ob}_I})$  est limite projective de  $\varphi$  si et seulement si  $*_Y$  est une bijection dont l'image est l'ensemble des familles admissibles pour  $\varphi$  de source  $Y$ . Or ce sous-ensemble de  $\prod_{i \in \text{Ob}_I} (Y, \varphi(i))$  est par définition  $\varprojlim_I \varphi^Y$  6.1.4.*

### 6.3. Exemples de limites projectives dans une catégorie quelconque.

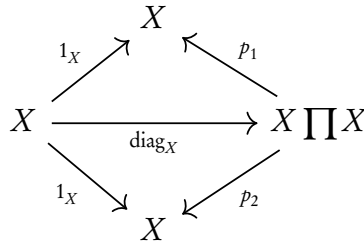
**6.3.1.** Soit  $I$  un type de diagramme *discret*, et  $\varphi$  un morphisme de  $I$  dans  $C$ . Si la limite projective de  $\varphi$  existe,  $\varprojlim \varphi = (P, (p_i)_{i \in \text{Ob}_I})$ , on dit que la famille  $(p_i)_{i \in \text{Ob}_I}$  représente  $P$  comme produit des  $X_i = \varphi(i)$ ,  $P$  est noté  $\prod_{i \in \text{Ob}_I} X_i$ .

Le produit vérifie donc la propriété suivante :

Pour tout objet  $Z$  l'application de  $\text{Hom}(Z, \prod_{i \in \text{Ob}_I} X_i)$  dans  $\prod_{i \in \text{Ob}_I} \text{Hom}(Z, X_i)$  qui à  $f$  fait correspondre  $(p_i f)_{i \in \text{Ob}_I}$  est une bijection.

La famille de morphisme  $(p_i f)_i$  est appelée quelque fois famille des *composantes* du morphisme  $f$ .

Considérons par exemple  $X \prod X$ , il existe un unique morphisme de  $X$  dans  $X \prod X$  de composantes  $1_X, 1_X$  noté  $\text{diag}_X$ .



Dans le cas particulier où  $I$  est le type de diagramme vide  $((\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)!)$  la limite projective d'un morphisme de  $I$  dans  $C$  est appelée *objet final* de la catégorie. C'est un objet  $\Omega$  de  $C$  tel que pour tout objet  $Y$  de  $C$ , il existe un morphisme et un seul de  $Y$  dans  $\Omega$ .

**6.3.2.** Si  $I$  est le type de diagramme suivant:  $\bullet \rightrightarrows \bullet$ , la limite projective d'un diagramme de type  $I$  dans  $C$ :  $X \rightrightarrows Y$  s'appelle, lorsqu'elle existe, *noyau du couple* de morphismes  $(f, g)$ . C'est la donnée d'un objet  $Z$  et d'un morphisme  $u : Z \longrightarrow X$  possédant les propriétés suivantes :

- (i)  $f u = g u$
- (ii) pour tout objet  $Z'$  et tout morphisme  $u' : Z' \longrightarrow X$  tel que  $f u' = g u'$ , il existe un morphisme unique  $v$  de  $Z'$  dans  $Z$  tel que  $u$  factorise  $u'$ .

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{u} & X & \rightrightarrows & Y \\ & \swarrow v & \nearrow u' & & \\ & Z' & & & \end{array}$$

Le morphisme  $u$  (quelque fois aussi l'objet  $Z$ ) sera noté  $\text{Ker}(f, g)$ .

**Remarque :**  $u$  est un monomorphisme.

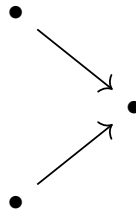
Un diagramme du type  $Z \xrightarrow{u} X \rightrightarrows Y$  est dit *exact* s'il fait de  $u$  le noyau du couple  $(f, g)$ .

Proposition. — *Le diagramme*

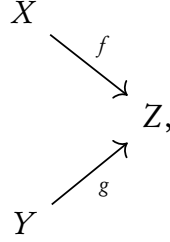
$$Z \longrightarrow X \rightrightarrows Y$$

*est exact si et seulement si pour tout objet  $M$ , le diagramme  $\text{Hom}(M, Z) \longrightarrow \text{Hom}(M, X) \rightrightarrows \text{Hom}(M, Y)$  de  $\underline{\text{Ens}}_{\mathbb{U}}$  est exact, c'est-à-dire la première flèche est injective et son image est le sous ensemble de  $\text{Hom}(M, X)$  des coïncidences de  $\alpha$  et  $\beta$ .*

**6.3.3.** Soit le type de diagramme  $I$ :

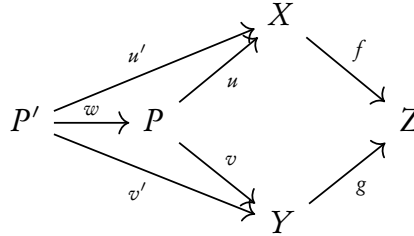


La limite projective d'un diagramme de type  $I$  dans  $C$  :



si elle existe est appelée *produit fibré* de  $(X, f)$  et  $(Y, g)$  au dessus de  $Z$  ; il est noté  $(X, f) \prod_Z (Y, g)$ . C'est la donnée d'un *objet*  $P$  et de *deux*<sup>42</sup> *morphismes*,  $u : P \longrightarrow X$ ,  $v : P \longrightarrow Y$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $f u = g v$
- (ii) pour tout objet  $P'$  et tout couple de morphismes  $u' : P' \longrightarrow X$ ,  $v' : P' \longrightarrow Y$ , tels que  $f u' = g v'$  il existe un morphisme et un seul  $w$  de  $P'$  dans  $P$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :



**Remarque :** Si  $f$  (resp.  $g$ ) est un monomorphisme,  $v$  (resp.  $u$ ) est un monomorphisme.

**6.4.** Soit  $C$  une catégorie, telle que pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  soit élément d'un univers  $\mathfrak{U}$ .

**6.4.1.** Soit  $(I_\alpha)_\alpha$  une famille de type de diagrammes,  $I_\alpha$  appartenant à  $\mathfrak{U}$  pour tout  $\alpha$ , on dit que dans  $C$  les limites *projectives de type*  $(I_\alpha)_\alpha$  *existent* si, pour tout  $\alpha$ , tout  $\varphi : T_\alpha \longrightarrow C$  admet une limite projective.

Cette définition donne un sens aux locutions : *Dans  $C$  les limites projectives existent* (la famille  $(I_\alpha)_\alpha$  est formée de tous les types de diagrammes appartenant à

---

<sup>42</sup>Il est inutile de se donner  $r : P \longrightarrow Z$  tel que  $r = f u = g v$ .

$\mathcal{U}$ ), les *limites projectives finies existent* (la famille  $(I_\alpha)_\alpha$  est formée de tous les types de diagrammes finis, c'est-à-dire tels que l'ensemble  $\text{Ob } I_\alpha$  soit fini), les *produits existent* (la famille  $(I_\alpha)_\alpha$  est formée de tous les types de diagrammes discrets...), les *noyaux existent* ( $(I_\alpha)_\alpha$  se réduit au type de diagramme suivant :  $\bullet \rightrightarrows \bullet$ ), etc...

**6.4.2.** On vérifiera les assertions suivantes :

Dans la catégorie  $C$  les *limites projectives finies* existent si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) Les produits finis existent
- (b) Les produits fibrés existent.

La condition (a) est équivalente à la condition (a') les deux-produits existent et il existe un objet final.

De plus le couple de conditions (a) (b) est équivalente au couple (a) (b') avec (b') les noyaux existent.

Dans la catégories  $C$ , les *limites projectives* existent si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a<sub>1</sub>) Les produits existent
- (b) Les produits fibrés existent.

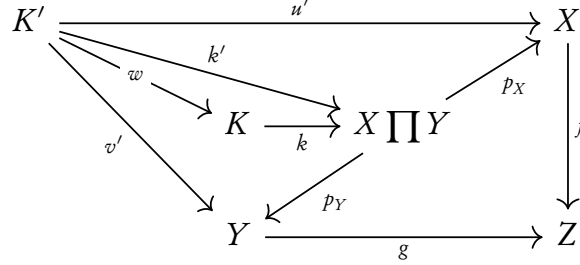
Le couple de conditions (a<sub>1</sub>)(b) est équivalente au couple (a<sub>1</sub>)(b').

Évoquons la démonstration de l'équivalence de (a)(b) et (a)(b').

Supposons (a) et (b') vérifiés et considérons deux morphismes  $f : X \longrightarrow Z$ ,  $g : Y \longrightarrow Z$ . Soient  $X \amalg Y$  le produit de  $X$  et de  $Y$ ,  $p_X : X \amalg Y \longrightarrow X$ ,  $p_Y : X \amalg Y \longrightarrow Y$ , les morphismes canoniques, et  $k : K \longrightarrow X \amalg Y$  le noyau de couple de morphismes  $(p_X f, p_Y g)$ ;  $(K, u = p_X k, v = p_Y k)$  définissent le *produit fibré* de  $(X, f)$  et  $(Y, g)$  au dessus de  $Z$ . En effet :

- (i) Par définition du noyau,  $f u = g v$ .
- (ii) Soient un objet  $K'$  et deux morphismes,  $u' : K' \longrightarrow X$ ,  $v' : K' \longrightarrow Y$  tels que  $f u' = g v'$ . Par définition du produit il existe un morphisme unique  $k' : K' \longleftarrow X \amalg Y$  tel que  $u' = p_X k', v' = p_Y k'$ . Puisque  $f p_X k' = g p_Y k'$

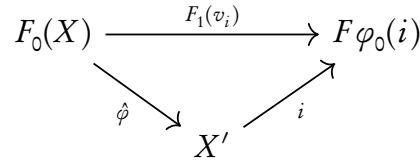
par définition du noyau il existe un unique morphisme  $w : K' \longrightarrow K$  tel que  $k' = kw$ , donc tel que  $u' = uv$  et  $v' = vw$ .



Réciproquement supposons (a) et (b) vérifiés, et considérons deux morphismes  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $g : X \longrightarrow Y$ . Soient le morphisme  $\varphi : X \longrightarrow Y \amalg Y$  de composantes  $(f, g)$ , et le morphisme  $\text{diag} : Y \longrightarrow Y \amalg Y$  ; on considère alors le produit fibré,  $(K, k, k')$ , de  $(X, \varphi)$  et  $(Y, \text{diag})$  au dessus de  $Y \amalg Y$  et l'on vérifie que  $k : K \longrightarrow X$  possède les propriétés de noyau du couple de morphismes  $(f, g)$ .

**6.4.3.** Soient un type de diagramme  $I$ , un morphisme de type de diagramme  $\varphi : I \longrightarrow C$  et un foncteur  $F$  de la catégorie  $C$  dans une catégorie  $C'$ . Si  $(Y, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$  est une famille admissible pour  $\varphi$  alors  $(F_0(Y), (F_1(u_i)_{i \in \text{Ob } I}))$  est une famille admissible pour  $F\varphi : I \longrightarrow C'$ .

Si la limite projective de  $\varphi$  existe,  $\varprojlim_I \varphi = (X, (v_i)_i)$  et si la limite projective de  $F\varphi$  existe,  $\varprojlim_I F\varphi = (X', (v'_i)_i)$  il existe alors un unique morphisme  $\hat{\varphi} : F_0(X) \longrightarrow X'$  tel que pour tout élément  $i$  de  $\text{Ob } I$  le diagramme suivant soit commutatif :



On dit que le foncteur  $F$  *commute aux limites projectives de type  $I$* , si pour toute  $\varphi : I \longrightarrow C$  admettant une limite projective, et tel que  $F\varphi : I \longrightarrow C'$  admettons une limite projective, le morphisme  $\hat{\varphi}$  est un isomorphisme. Ce qui traduit par la formule :

$$F(\varprojlim_I \varphi) \simeq \varprojlim_I F\varphi$$

Soit  $(I_\alpha)_\alpha$  une famille de type de diagramme,  $I_\alpha$  appartenant à  $\mathbb{U}$  pour tout  $\alpha$ , on dit que le foncteur  $F$  *commute aux limites projectives de types  $(I_\alpha)_\alpha$*  si pour tout  $\alpha$ ,  $F$  commute aux limites projectives de type  $I_\alpha$ .

Ces définitions donnent un sens aux locutions : le foncteur  $F$  *commute aux limites projectives*, *commute aux limites projectives finies*, *commute aux produits*, *commute aux noyaux*, etc...

**Exemple :** Si  $C$  est une catégorie définie par des espèces de structures algébriques, ou topologiques, ou algébro-topologiques, on définit un foncteur *oubli la structure* noté  $\text{Oub}$  de  $C$  dans  $\text{Ens}$ , qui à un objet de  $C$  associe l'ensemble sous-jacent, et à un morphisme de  $C$  associe l'application d'ensembles sous-jacente. Pour ces catégories, le foncteur  $\text{Oub}$  commute généralement aux limites projectives. Par exemple considérons la catégorie notée  $\underline{\text{Top}}$ , des espaces topologiques, un type de diagramme  $I$  et un morphisme de type de diagramme,  $\varphi$ , de  $I$  dans  $C$ . On sait que  $\varprojlim_I \text{Oub } \varphi$  existe, c'est un sous-ensemble de  $\prod_{i \in \text{Ob } I} \text{Oub } \varphi_0(i)$ , lequel peut être muni canoniquement d'une structure topologique (topologie initiale). On vérifie alors que le sous-espace topologique  $\varprojlim \text{Oub } \varphi$  satisfait à la propriété universelle de la limite projective de  $\varphi$  dans  $\underline{\text{Top}}$ . On en déduit que dans  $\underline{\text{Top}}$ , les limites projectives existent et que de par leur construction même, le foncteur  $\text{Oub}$  commute aux limites projectives.

**6.4.4.** Soient  $C$  et  $C'$  deux catégories et  $F$  un foncteur de  $C$  dans  $C'$ . Le foncteur  $F$  est dit *exact à gauche*, s'il *commute aux limites projectives finies*, où ce qui est équivalent lorsque dans  $C$  les limites projectives finies existent, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- (a)  $F$  commute aux produits finis.
- (b)  $F$  commute aux produits fibrés.

La condition (a) est équivalente à

- (a')  $F$  commute aux deux-produit et transforme objet final en objet final.

Le couple de condition (a)(b) est équivalente au couple (a')(b') avec

- (b')  $F$  commute aux noyaux.

De plus si dans  $C$  les limites projectives existent,  $F$  commute aux limites projectives si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (a<sub>1</sub>)  $F$  commutes aux produits

(b)  $F$  commute aux produits fibrés (ou aux noyaux).

### 6.5. Limite inductive :

Soit un type de diagramme  $I$ , une catégorie  $C$ , et un morphisme de type de diagramme  $\varphi : I \longrightarrow C$ .

**6.5.1.** Une famille de morphismes de  $C$  est dite *coadmissible* pour  $\varphi$  si elle est admissible pour  $\varphi^\circ$ .

**6.5.2.** On appelle *limite inductive* de  $\varphi$ , une limite projective de  $\varphi^\circ$ . Une limite inductive de  $\varphi$ ,  $(X, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$ , est donc “universelle” au sens suivant ; pour toute famille coadmissible pour  $\varphi$ ,  $(Y, (v_i)_{i \in \text{Ob } I})$  il existe un morphisme unique  $u : X \longrightarrow Y$  tel que pour tout élément  $i$  de  $\text{Ob } I$  le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_\circ(i) & \\ v_i \swarrow & & \searrow u_i \\ Y & \xleftarrow{u} & X \end{array}$$

Deux limites inductives de  $\varphi$  étant canoniquement isomorphes, si l'ensemble des limites inductives de  $\varphi$ , n'est pas vide on en choisit une que l'on note  $\varinjlim \varphi$ . On peut alors écrire :  $\varinjlim \varphi \simeq \varprojlim \varphi^\circ$ .

### 6.6. Exemples de limites inductives

**6.6.1.** Soit  $I$  un type de diagramme *discret*, et  $\varphi : I \longrightarrow C$ . Si la limite inductive de  $\varphi$  existe,  $\varinjlim \varphi = (S, (e_i)_{i \in \text{Ob } I})$  on dit que la famille  $(e_i)_i$  *représente*  $S$  comme *somme directe* des  $X_i = (i)$ . On note  $S = \coprod_{i \in \text{Ob } I} X_i$ .

Le somme directe vérifie donc la propriété suivante :

Pour tout objet  $Z$  l'application de  $\text{Hom}(\coprod_{i \in \text{Ob } I} X_i, Z)$  dans  $\prod_{i \in \text{Ob } I} \text{Hom}(X_i, Z)$  qui à  $f$  fait correspondre  $(f e_i)_{i \in \text{Ob } I}$  est une *bijection*.

Dans le cas particulier où le type de diagramme  $I$  est *vide*, la limite inductive est appelée *objet initial* de la catégorie  $C$ . Donc  $\varepsilon$  est un objet initial si et seulement si pour tout objet  $Y$  de  $C$ ,  $\text{Card Hom}(\varepsilon, Y) = 1$ .

Un objet initial et final est appelé un *objet nul* il est souvent noté  $0_C$ .

**6.6.2.** Si  $I$  est le type de diagramme :  $\bullet \rightrightarrows \bullet$ , la limite inductive d'un diagramme de type  $I$  dans  $C$  :  $X \rightrightarrows Y$  s'appelle, lorsqu'elle existe, le *conoyau*

du couple de morphisme  $(f, g)$ . C'est la donnée d'un objet  $Z$  et d'un morphisme  $u : Y \longrightarrow Z$  tel que :

(i)  $uf = ug$

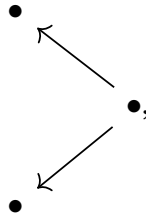
(ii) pour tout objet  $Z'$  et tout morphisme  $u' : Y \longrightarrow Z'$  tel que  $u'f = u'g$ , il existe un morphisme unique  $v$  de  $Z$  dans  $Z'$  tel que  $v$  factorise  $u'$  :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{u} & Z \\ & \xrightarrow{g} & & \searrow u' & \swarrow v \\ & & & Z & \end{array}$$

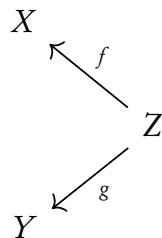
Le morphisme  $u$ , (et quelque fois par abus de langage l'objet  $Z$ ) sera noté  $\text{Coker}(f, g)$ .

*Remarque :*  $u$  est un épimorphisme.

**6.6.3.** Soit le type de diagramme  $I$  :



la limite inductive d'un diagramme de type  $I$  dans  $C$  :



si elle existe est appelée somme *amalgamée* de  $(X, f)$  et  $(Y, g)$  au-dessus de  $Z$ , elle est notée  $(X, f) \amalg_Z (Y, g)$ . C'est donc la donnée d'un objet  $S$  et de deux morphismes  $u : X \longrightarrow S$ ,  $v : Y \longrightarrow S$  vérifiant les propriétés... que le lecteur précisera.

**Remarque :** Si  $f$  (resp.  $g$ ) est un épimorphisme,  $v$  (resp.  $u$ ) est un épimorphisme.



### Exemple :

Dans la catégorie des *anneaux commutatifs avec élément unité*, on considère trois anneaux  $X, Y, Z$  et les morphismes  $f : Z \longrightarrow X, g : Z \longrightarrow Y$ . Grâce à  $f$  on munit  $X$  d'une structure de  $Z$ -module, l'application de  $Z \times X$  étant définie par  $(xy) \rightsquigarrow f(x)y$ .

On procède de même pour  $Y$  avec  $g$ , et  $Z$  avec l'application identique. On montrera que le  $Z$ -module  $X \otimes_Z Y$  muni de la multiplication  $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'$  et les homomorphismes d'anneaux  $u : X \longrightarrow X \otimes_Z Y$  tel que  $u(x) = x \otimes e_Y$  (où  $e_Y$  est l'élément unité de  $Y$ ) et  $v : Y \longrightarrow X \otimes_Z Y$  tel que  $v(y) = e_X \otimes y$ , définissent la somme amalgamée  $(X, f) \amalg_Z (Y, g)$ .

**6.6.4.** Dans les catégories définies par des espèces de structures algébriques, les *limites inductives existent*, mais l'exemple qui précède montre que leur construction n'est pas aussi simple que dans le cas projectif. Cependant dans le cas particulier de la catégorie Top, on constate que le foncteur Oub commute aux limites inductives. Soit  $\varphi : I \longrightarrow \underline{\text{Top}}$  un morphisme de type de diagramme, on considère la limite inductive de Oub.  $\varphi : I \longrightarrow \underline{\text{Ens}}, (E, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$ . On munit  $E$  de la topologie la plus fine rendant les  $u_i$  continues ; il suffit de prendre pour ouverts de  $E$ , les éléments  $U$  de  $\mathfrak{P}(E)$  tels que pour tout  $i$   $\varphi_i^{-1}(U)$  soit un ouvert de  $\varphi(i)$ . On vérifie que l'espace topologique  $E$  est bien la limite inductive cherchée. Mais cette construction n'est valable qu'exceptionnellement, on montrera par exemple qu'elle est en échec dans le cas , catégorie des espaces topologiques compacts.

**6.7.** On énoncera les définitions et propriétés duales de celles développées dans le paragraphe 6.4. On établira des conditions nécessaires et suffisantes d'existence *des limites inductives* (resp. finies) dans une catégorie  $C$ . On définira un foncteur  $F$  de  $C$  dans  $C'$  commutant aux limites inductives de type  $I$ ... On définira un foncteur exact à droite.

**6.7.1.** Un *foncteur exact* est un foncteur exact à gauche et exact à droite.

**6.7.2.** Bien qu'il n'y ait théoriquement rien à ajouter pour un *foncteur contravariant*  $F$  de  $C$  dans  $C'$ , il faut cependant remarquer que  $F$  commute aux limites projectives (resp. inductives) de type  $I$ , si pour tout  $\varphi : X \longrightarrow C$  admettant une limite inductive (resp. projective) et tel que  $F\varphi$  admette une limite projective (resp. inductive) on a  $\varprojlim_I (F\varphi) \simeq F(\varinjlim_I \varphi)$  (resp.  $\varinjlim_I (F\varphi) \simeq F(\varprojlim_I \varphi)$ ).

## 6.8. Propriétés générales des limites inductives et projectives.

**6.8.1.** Soit  $C$  une catégorie,  $I$  un type de diagramme. Les diagrammes de type  $I$  dans  $C$  qui admettent une limite projective forment une sous catégorie strictement pleine de  $\underline{\text{Diag}}(I, C)$ , notée  $\underline{\text{Diag}}p(I, C)$ . L'application qui à  $\varphi$  fait correspondre  $\varprojlim_I \varphi$ , de  $\underline{\text{Diag}}p(I, C)$  dans  $\text{Ob } C$ , définit un foncteur de  $\underline{\text{Diag}}p(I, C)$  dans  $C$ . En effet si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux objets de  $\underline{\text{Diag}}p(I, C)$ ,  $u$  une flèche de  $\varphi$  dans  $\psi$ , par définition de  $\varprojlim \varphi$ ,  $\varprojlim \psi$  et de  $u$ , pour tout couple  $(i, j)$  d'objets de  $I$  et toute flèche  $f : i \longrightarrow j$  on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \varprojlim \varphi & \xrightarrow{u_i} & \varphi_{\circ}(i) & \xrightarrow{u(i)} & \psi_{\circ}(i) & \xleftarrow{v_i} & \varprojlim \psi \\ & \searrow u_j & \downarrow \varphi_1(f) & & \downarrow \psi_1(f) & \swarrow v_j & \\ & & \varphi_{\circ}(j) & \xrightarrow{v(j)} & \psi_{\circ}(j) & & \end{array}$$

La famille  $(\varprojlim \varphi, (u(i)u_i)_{i \in \text{Ob } I})$  est admissible pour  $\psi$ , il existe donc une flèche *unique* de  $\varprojlim \varphi$  dans  $\varprojlim \psi$ , que l'on note  $\varprojlim u$ , et telle que  $v_i \varprojlim u = u(i)u_i$  pour tout  $i \in \text{Ob } I$ .

Le foncteur ainsi défini se note  $\varprojlim(I, C)$  ou  $\varprojlim : \underline{\text{Diag}}p(I, C) \longrightarrow C$ .

**Proposition.** — *Pour tout type de diagramme  $I$ , et toute catégorie  $C$ , le foncteur  $\varprojlim(I, C)$  commute aux limites projectives.*

Dualement on définit un foncteur de  $\underline{\text{Diag}}i(I, C)$  dans  $C$ , noté  $\varinjlim(I, C)$  qui commute aux limites inductives.

Il n'y a aucun énoncé, valable pour toute catégorie, sur la commutativité entre les limites projectives et inductives.

**Proposition 6.8.2.** — *Soit  $I$  un type de diagramme,  $C'$  un catégorie où les limites projectives (resp. inductives) de type  $I$  existent. Alors pour tout type de diagramme  $D$ , (resp. toute catégorie  $C$ ) les limites projectives (resp. inductives) de types  $I$  existent dans  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}(C, C')$ ).*

Soit  $\varphi$  un diagramme de type  $I$  dans  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$ . A tout objet  $d$  de  $D$ , l'application  $i \rightsquigarrow \varphi(i)d$  associe un morphisme  $\Phi_d : I \longrightarrow C'$  ( $\Phi_d(i) = \varphi(i)(d)$ ).

Soit  $X_d = \varprojlim \Phi_d$  l'application  $d \rightsquigarrow X_d$  définit un morphisme  $\Phi$  de  $D$  dans  $C$

$$\begin{array}{ccc} d & \longrightarrow & X_d \\ \delta \downarrow & & \downarrow \Phi_1 \\ d' & \longrightarrow & X_{d'} \end{array} \quad \delta) = \varprojlim_I \varphi(i)(\delta)$$

Soit une famille admissible  $(\Omega, (v_i)_{i \in \text{Ob } I})$  pour le morphisme  $\varphi$ . Pour tout objet  $d$  de  $D$ , il existe alors un morphisme  $v_d$  unique de  $\Omega(d)$  dans  $X_d$  tel que pour tout  $i$  de  $\text{Ob } I$  le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega(d) & \xrightarrow{v_i(d)} & \varphi(i)(d) = \Phi_d(i) \\ & \searrow v_d & \nearrow \\ & X_d & \end{array}$$

Donc  $\Phi = \varprojlim_I \varphi$ .

**6.8.3.** Dans  $\underline{\text{Cat}} \mathfrak{U}$ , pour tout type de diagramme  $I$  élément de  $\mathfrak{U}$ , les limites projectives (resp. inductives) de type  $I$  existent. Si  $I$  est discret on retrouve le produit (resp. la somme) de catégories.

## 7. Catégorie filtrante

### 7.1 Définitions :

**7.1.1.** Une catégorie  $I$  est *pseudo-filtrante* à gauche si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

a) Pour tout diagramme de  $I$  de type

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ & \searrow \alpha & \\ & & Z \\ & \nearrow \beta & \\ Y & & \end{array}$$

il existe un objet  $M$  et deux morphismes,  $f : M \longrightarrow X$ ,  $g : M \longrightarrow Y$ .

- b) Pour tout diagramme de  $I$  du type  $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{smallmatrix} Y$  il existe un morphisme  $h : T \longrightarrow X$  tel que  $uh = vh$ .

Une catégorie  $I$  est pseudo filtrante à droite si  $I^\circ$  est pseudo filtrante à gauche. On écrira les conditions a'), b') correspondantes.

**7.1.2.** Une catégorie  $I$  est connexe si la propriété suivante est vérifiée :

- c) Pour tout couple  $(P, Q)$  d'objets, il existe une suite finie d'objets :  $P_0 = P, P_1, \dots, P_i, P, \dots, P_n = Q$ , telle que  $\text{Hom}(P_i, P_{i+1}) \neq \emptyset$ , où  $\text{Hom}(P_{i+1}, P_i) \neq \emptyset$  pour  $i = 0, \dots, n-1$ .

**7.1.3.** Une catégorie  $I$  est *filtrante à gauche* (resp. à droite) si les conditions a), b), c) (resp. a'), b'), c')) sont vérifiées.

**Remarque :**

On considère la condition suivante :

- $\alpha$ ) Pour tout couple d'objets  $(X, Y)$  de  $I$ , il existe un objet  $M$  et deux morphismes  $f : M \longrightarrow X, g : M \longrightarrow Y$ .

La condition  $\alpha$ ) est équivalente au couple de conditions (a), c)).

Donc une catégorie  $I$  est *filtrante à gauche* (resp. à droite) si les conditions  $\alpha$ ), b) (resp.  $\alpha'$ ) b')) sont vérifiées.

Une catégorie  $I$  est *filtrante* si elle est filtrante à gauche et à droite.

## 7.2 Exemples

**7.2.1.** Si dans une catégorie  $C$ , pour tout couple d'objets le produit (resp. la somme) existe, et si pour tout couple de morphismes le noyau (resp. le conoyau) existe, alors  $C$  est filtrante à gauche (resp. filtrante à droite).

**7.2.2.** La catégorie associée à un ensemble préordonné  $I$  est filtrante si et seulement si  $I$  est filtrante.

**7.2.3.** Dans la catégorie des ensembles, des groupoïdes, des modules sur un anneau..., les *limites inductives filtrantes*, c'est-à-dire les limites inductives de foncteurs d'une catégorie filtrante dans la catégorie en question, sont des foncteurs exacts à gauche, donc *exacts*, puisqu'on sait qu'ils sont exacts à droite.

## II. Catégorie abélienne

### 1. Catégorie additive

On peut donner deux versions de la définition d'une catégorie additive, l'une consiste à *se donner* sur les ensembles  $\text{Hom}(X, Y)$  une structure de groupe abélien, cette structure supplémentaire étant soumise à certaines conditions ; l'autre consiste à construire canoniquement une loi de groupe sur tout  $\text{Hom}(X, Y)$  en termes d'*axiomes* convenables sur la catégorie  $C$ .

#### 1.1 Version 1

Une catégorie additive est une catégorie  $C$  où pour tout couple d'objets  $(X, Y)$  de  $C$  est donnée une structure de groupe abélien sur  $\text{Hom}(X, Y)$ , les axiomes suivants étant vérifiés :

$CA_1$ . pour tout triplet d'objets  $(X, Y, Z)$  de  $C$ , l'application  $(u, v) \rightsquigarrow vu$  de  $\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z)$  dans  $\text{Hom}(X, Z)$  est *bilinéaire*.

$CA_2$ . Les sommes directes finies existent, ou ce qui est équivalent il existe un objet initial *et* pour tout couple d'objets la somme existe.

L'axiome  $CA_2$  est équivalent à l'axiome  $CA'_2$ . Les produits finis existent ou ce qui est équivalent il existe un objet final et pour tout couple d'objets le produit existe.

**1.1.1.** Tout objet initial est final. En effet si  $\varepsilon$  est un objet initial,  $\text{Hom}(\varepsilon, X)$  se réduit à un seul élément noté  $0$  (puisque c'est l'élément neutre pour le groupe  $\text{Hom}(\varepsilon, X)$  en particulier  $\text{Hom}(\varepsilon, \varepsilon) = 1_\varepsilon = 0$ , donc pour tout élément  $f$  de  $\text{Hom}(Y, \varepsilon)$ ,  $f = 1_\varepsilon f = 0$  ;  $\text{Hom}(Y, \varepsilon)$  se réduit, à l'élément  $0$ ).

Il y a donc équivalence entre les propositions suivantes :

$\varepsilon$  est un objet initial

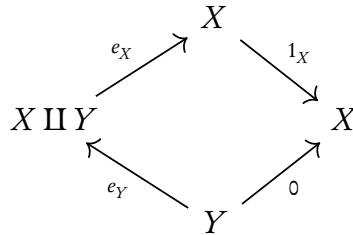
$\varepsilon$  est un objet final

$$1_\varepsilon = 0$$

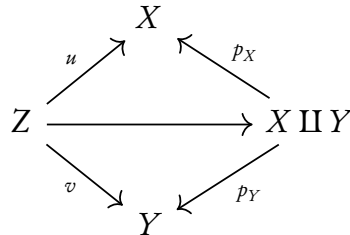
Dans une catégorie additive il existe donc un *objet nul*, deux objets nuls étant canoniquement isomorphes, parmi les objets nuls on en choisit un que l'on note aussi 0.

Remarque : Dans une catégorie  $C$  à objet nul 0, pour tout couple d'objet  $(X, Y)$  on définit un morphisme nul de  $X$  dans  $Y$  qui est le composé de  $X \longrightarrow 0$  et  $0 \longrightarrow Y$ . Dans le cas où  $C$  est additive ce morphisme nul est évidemment l'élément neutre du groupe  $\text{Hom}(X, Y)$ .

1.1.2. Si pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ , la somme  $X \amalg Y$  existe, alors le produit existe et  $X \amalg Y \simeq X \prod Y$ , on peut *choisir*  $X \prod Y = X \amalg Y$ , on note cet objet  $X \oplus Y$ . Si  $(e_X, e_Y)$  représentent  $X \amalg Y$  comme somme de  $X$  et  $Y$  le diagramme suivant :



montre qu'il existe un unique morphisme  $p_X : X \amalg Y \longrightarrow X$  tel que  $p_X e_X = 1_X$  et  $p_X e_Y = 0$ . De même il existe un unique morphisme  $p_Y : X \amalg Y \longrightarrow Y$  tel que  $p_Y e_Y = 1_Y$  et  $p_Y e_X = 0$ . On vérifie que les applications  $e_X p_X + e_Y p_Y$  et  $1_{X \amalg Y}$  ont les mêmes composantes donc  $e_X p_X + e_Y p_Y = 1_{X \amalg Y}$ . Alors  $p_X$  et  $p_Y$  représentent  $X \amalg Y$  comme produit de  $X$  et de  $Y$ , en effet pour tout objet  $Z$  de  $C$  et tout couple de morphismes  $u : Z \longrightarrow X$ ,  $v : Z \longrightarrow Y$ , l'application  $e_X u + e_Y v : Z \longrightarrow X \amalg Y$  rend le diagramme suivant commutatif, et c'est la seule.



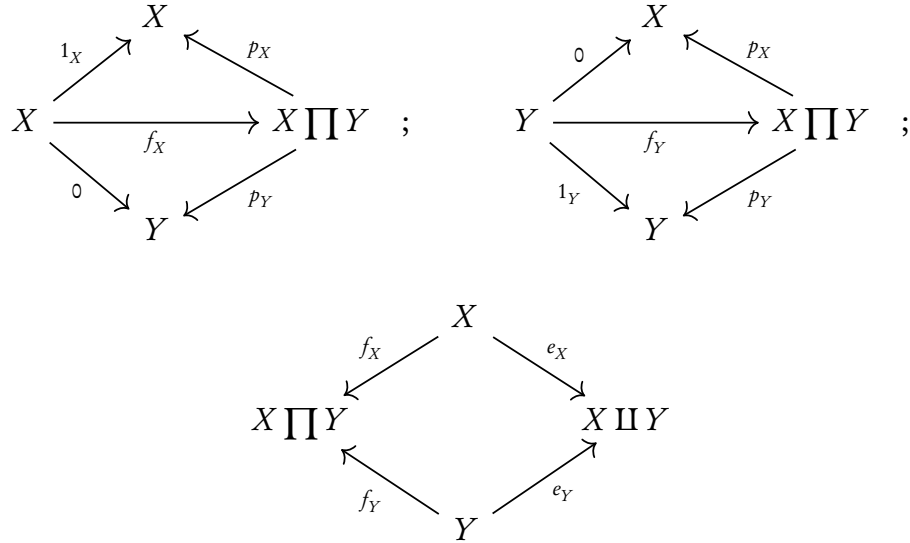
## 1.2 Version 2

Soit  $C$  une catégorie satisfaisant aux axiomes suivants :

$C A'_1$  Il existe un objet nul

$C A'_2$  Pour tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $C$ , le produit et la somme existent.

La catégorie  $C$  admettant un objet nul, il existe un unique morphisme  $C_{XY} : X \amalg Y \longrightarrow X \prod Y$  tel que les diagrammes suivants soient commutatifs.



$C A'_3$  Pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ ,  $C_{XY}$  est un *isomorphisme*.

A tout couple  $(u, v)$  de morphismes de  $X$  dans  $Y$  on fait correspondre alors un morphisme de  $X$  dans  $Y$  défini par le diagramme suivant :

$$X \xrightarrow{(u,v)} Y \prod X \xrightarrow{C_{XY}^{-1}} X \amalg Y \longrightarrow Y$$

On obtient ainsi sur  $\text{Hom}(X, Y)$  une structure de monoïde commutatif avec élément unité. L'application naturelle de  $\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z)$  dans  $\text{Hom}(X, Z)$  est bilinéaire.

$C A'_4$  Pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ , le monoïde  $\text{Hom}(X, Y)$  construit ci-dessus est un *groupe*.

On montre le lemme suivant : Soit  $C$  une catégorie, il existe au plus une fonction qui à tout couple d'objets  $(X, Y)$  de  $C$  associe une structure de monoïde associatif

sur  $\text{Hom}(X, Y)$  tel que la composition des morphismes soit bilinéaire<sup>43</sup>. On en déduit que les définitions 1.1 et 1.2 d'une catégorie additive sont équivalentes.

### 1.3 Noyau et conoyau d'un morphisme

Dans une *catégorie avec objet nul* on considère un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$ .

1.3.1. Le *noyau* (resp. *conoyau*) de  $f$  est, lorsqu'il existe, le *noyau* (resp. *conoyau*) du couple de morphismes  $(f, 0)$ .

Le noyau de  $f$  est donc un morphisme  $u : K \longrightarrow X$  tel que :

(i)  $f u = 0$

(ii) pour tout morphisme  $u' : K' \longrightarrow X$ , tel que  $f u' = 0$ , il existe un morphisme unique  $v : K' \longrightarrow K$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow v & \nearrow u' & & \\ & K' & & & \end{array}$$

Le morphisme  $u$  (et quelque fois aussi l'objet  $K$ ) est *noté*  $\text{Ker } f$ . On rappelle que le noyau de  $f$  est un *monomorphisme*.

Dualement on écrira la définition du conoyau de  $f$ , noté  $\text{Coker } f$ , qui est un *épimorphisme*.

Sous la seule hypothèse de l'existence d'un objet nul dans une catégorie  $C$ , tout monomorphisme (resp. épimorphisme) a un noyau (resp. un conoyau) nul.

1.3.2. Dans une *catégorie additive*, la réciproque est vraie, et l'on a la :

Proposition. — *Un morphisme est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si son noyau (resp. conoyau) est nul.*

### 1.4 Foncteur additif

1.4.1. Soient  $C$  et  $C'$  deux catégories additives,  $F$  un foncteur de  $C$  dans  $C'$ , les conditions suivantes sont équivalentes

---

<sup>43</sup>Ce lemme est un cas particulier d'une proposition que l'on trouvera dans : Eckmann-Hilton. Group-like structures in general categories. Math. Ann. (62-63)



- (a) Pour tout couple d'objets  $(X, Y)$  de  $C$ , l'application  $F_{\circ}|_{\text{Hom}(X, Y)} : \text{Hom}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}(F(X), F(Y))$  est un *morphisme de groupe abélien*.
- (b) Le foncteur  $F$  commute aux sommes finies.
- (c) Le foncteur  $F$  commute aux produits finis.

On appelle *foncteur additif* un foncteur vérifiant l'une de ces conditions.

#### 1.4.2. Exemples :

Soit  $C$  une catégorie additive ; pour tout objet  $X$  de  $C$ , le *foncteur*  $\text{Hom}(X, .)$  de  $C$  dans la catégorie des groupes abéliens  $\underline{\text{Ab}}$ , défini par  $Y \rightsquigarrow \text{Hom}(X, Y)$  et le foncteur contravariant  $\text{Hom}(., X)$ , sont additifs.

Soit  $\underline{\text{Mod}}_A^S$  la catégorie des modules à gauche sur un anneau  $A$ , pour tout module à droite  $X$  sur  $A$  le foncteur  $X \otimes_A .$  de  $\underline{\text{Mod}}_A^S$  dans  $\underline{\text{Ab}}$  défini par  $Y \rightsquigarrow X \otimes_A Y$  et  $f \rightsquigarrow 1_X \otimes f$  est additif.

Plus généralement un foncteur exact à droite ou à gauche, d'une catégorie additive dans une autre est additif.

### 1.5 Image, coimage d'un morphisme

Dans une catégorie avec objet nul, soit  $f$  un morphisme admettant un noyau et un conoyau. Si le conoyau de  $\text{Ker } f$  (resp. le noyau de  $\text{Coker } f$ ) existe, on l'appelle *coimage de  $f$* , on le note  $\text{Coim } f$  (resp. *image de  $f$* ,  $\text{Im } f$ ). Si  $\text{Im } f$ ,  $\text{Coim } f$  existent, soit  $\hat{f}$  l'unique morphisme de  $X$  dans  $K'$  tel que  $\text{Im } f \hat{f} = f$ ,  $\text{Im } f$  est un mono, donc  $\hat{f} \text{Ker } f = 0$  et il existe un *unique morphisme  $\bar{f}$  de  $K'$  dans  $C'$*  tel que  $f = \text{Im } f \bar{f} \text{Coim } f$ .

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\text{Ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{Coker } f} & C \\ & & \downarrow \text{Coim } f & \searrow \hat{f} & \uparrow \text{Im } f & & \\ & & C' & \xrightarrow{\bar{f}} & K' & & \end{array}$$

## 2. Catégorie abélienne

2.1. Une *catégorie abélienne* est une catégorie additive qui vérifie les axiomes suivants

$AB_1$  Pour tout morphisme, le noyau et le conoyau existent.

$AB_2$  Pour tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $\bar{f} : C' \longrightarrow K'$  est un isomorphisme.

Une conséquence de ces axiomes est que tout morphisme  $f$  se décompose de façon canonique en un monomorphisme et un épimorphisme  $f = \text{Im} f \text{ Coim} f$ .

On remarque également que pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes de même but (resp. de même source)  $A$  le produit fibré (resp. la somme amalgamée) existe.

On vérifie par exemple que  $(X, f) \prod_A (Y, g) = \text{Ker}(f p_X \longrightarrow g p_Y)$  ou  $X = s(f)$ ,  $Y = s(g)$ .

## 2.2 Axiomes supplémentaires dans une catégorie abélienne

Pour une catégorie  $C$  appartenant à un univers  $\mathfrak{U}$  il est quelque fois utile d'ajouter certains des axiomes suivants :

### 2.2.1.

$AB_{3\mathfrak{U}}$  . Pour tout objet  $I$  de  $\underline{\text{Diag}}_{\mathfrak{U}}$ , les diagrammes de type  $I$  dans  $C$  possèdent une limite inductive.

**Remarque.** Pour qu'il en soit ainsi il suffit que les sommes indexées par tout  $I$  appartenant à  $\mathfrak{U}$  existent.

### 2.2.2.

$AB_{4\mathfrak{U}}$  .  $AB_{3\mathfrak{U}}$  est vérifié et pour tout objet  $I$  de  $\underline{\text{Diag}}_{\mathfrak{U}}$ , la somme  $\prod_{i \in I} u_i$  d'une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de monomorphismes est un monomorphisme.

**Remarque.** Cela revient à dire que la somme directe commute aux noyaux, et se trouve donc être un foncteur exact.

### 2.2.3.

$AB_{5\mathfrak{U}}$  (est strictement plus fort que  $AB_{4\mathfrak{U}}$ ) :  $AB_{3\mathfrak{U}}$  est vérifié et pour tout catégorie filtrante  $I$ , élément de  $\mathfrak{U}$ , le foncteur  $\varinjlim_I : \underline{\text{Hom}}(I, C) \longrightarrow C$  est exact.

On énonce de façon duale des axiomes notés  $AB_{3\mathfrak{U}}^*$ ,  $AB_{4\mathfrak{U}}^*$ ,  $AB_{5\mathfrak{U}}^*$ . Il serait déraisonnable de prétendre imposer simultanément à une catégorie les axiomes  $AB_{5\mathfrak{U}}$  et  $AB_{5\mathfrak{U}}^*$ , car alors tout objet de  $C$  est nul...

**2.2.4. Famille génératrice.** Soit  $C$  une catégorie. On dit qu'une famille  $(Ai)_{i \in I}$  d'objet, de  $C$ , est une *famille génératrice* si pour tout objet  $X$  de  $C$  et tout monomorphisme  $f : Y \longrightarrow X$  qui n'est pas un isomorphisme, il *existe*  $i$  appartenant à  $I$  et un morphisme  $u : Ai \longrightarrow X$ , tels que  $u$  ne se factorise pas par  $f$ .

Un objet de  $C$  est un *générateur* si la famille réduite à ce élément est une famille génératrice.

**Proposition.** — Soit  $(Ai)_{i \in I}$ , une famille d'objets de  $C$  telle que la somme  $A = \coprod_{i \in I} Ai$  existe. La famille  $(Ai)_{i \in I}$  est une famille génératrice si et seulement si  $A$  est un générateur.

En effet, soient un objet  $X$  et un monomorphisme  $f : Y \longrightarrow X$  ; pour qu'un morphisme  $u : A \longrightarrow X$  se factorise par  $f$  il faut et il suffit que pour tout  $i$  élément de  $I$  la composante  $u_i$  se factorise par  $f$ .

Une catégorie  $C$  admet toujours une famille génératrice, à savoir la famille de tous les objets. Mais pour une “grosse catégorie”, par exemple la catégorie de tous les groupes appartenants à un univers donné  $\mathfrak{U}$ . Aussi s'imposent-on l'axiome :

$AB_{6\mathfrak{U}}$  . Il existe famille génératrice  $(Ai)_{i \in I'}$  de  $C$  avec  $I$  élément de  $\mathfrak{U}$ .

**Exemple :** Soit  $A$  un anneau appartenant à un univers  $\mathfrak{U}$ , la catégorie  $\text{Mod}_A^S$  de tous les modules à gauche sur  $A$  admet  $A$ , considéré comme  $A$  module à gauche, comme générateur.

On définit dualement les notions de famille cogénératrice, de cogénérateur, on énonce un axiome  $AB_{6\mathfrak{U}}^*$  dual de  $AB_{6\mathfrak{U}}$ .

**2.2.5.** Il sera bon de vérifier que la catégorie  $\text{Mod}^S A\mathfrak{U}$  est abélienne et satisfait aux axiomes précédemment énoncés, à ceci près que  $AB_{5\mathfrak{U}}^*$  et que  $AB_{6\mathfrak{U}}^*$  n'est pas évident...

### 3. Exactitude dans une catégorie abélienne

#### 3.1 Suite exacte

Une suite de morphismes  $(u_i)_{i \in [a,b]}$ ,  $[a,b] \subset \mathbb{Z}$  telle que  $s(ui) = b(u_{i-1})$  est “nulle” (resp. *exacte*) si pour tout  $i$ ,  $a < i \leq b$ ,  $u_i u_{i-1} = 0$  (resp.  $\text{Ker } u_i$  est isomorphe à  $\text{Im } u_{i-1}$ , ou ce qui est équivalent  $\text{Coker } u_{i-1}$  est isomorphe à  $\text{Coim } u_i$ .)

On appelle suite *exacte courte* une suite exacte du type  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ . Une telle suite est aussi appelée une *extension* de  $A'$  par  $A''$ .

Par définition même d'une suite exacte, un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si la suite  $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y$  (resp.  $X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ ) est *exacte*.

### 3.2 Suite scindée

On dit qu'une suite exacte courte  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  *se scinde* si elle possède l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- (a)  $f$  est *rétractable*, c'est-à-dire il existe  $r : A \longrightarrow A'$  tel que  $rf = 1_{A'}$
- (b)  $g$  est *sectionnable*, c'est-à-dire il existe  $s : A'' \longrightarrow A$ , tel que  $gs = 1_{A''}$
- (c) il existe  $s : A'' \longrightarrow A$  (resp.  $r : A \longrightarrow A'$ ) tel que  $(f, s)$  (resp.  $(g, r)$ ) représente  $A$  comme somme directe (resp. produit direct) de  $A'$  et  $A''$ .
- (d) Il existe  $r : A \longrightarrow A'$  et  $s : A'' \longrightarrow A$  tels que  $fr + sg = 1_A$  on dit aussi que  $A'$  ou  $A''$  est *facteur direct* de  $A$ .

### 3.3 Foncteur exact

**Proposition 3.3.1.** — Soient  $C$  et  $C'$  deux catégories abéliennes  $T$  un foncteur de  $C$  dans  $C'$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $T$  est exact à droite (resp. à gauche)
- (b)  $T$  est additif et pour toute suite exacte  $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  (resp.  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$ ) la suite  $T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'') \longrightarrow 0$  (resp.  $0 \longrightarrow T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'')$ ) est exacte.

**Remarque.** Si l'on considère un foncteur contravariant  $T$  de  $C$  dans  $C'$ , la proposition se traduit ainsi :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a')  $T$  est exact à droite (resp. à gauche)

(b')  $T$  est *additif* et pour toute suite exacte  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$  (resp.  $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ ) la suite  $T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$  (resp.  $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$ ) est exacte.

On en déduit qu'un foncteur  $T$  (resp. un foncteur contravariant) est *exact* si et seulement si  $T$  est *additif* et pour toute suite exacte  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ , la suite  $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$  (resp.  $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$ ) est exacte.

**3.3.2 Exemples.** Si  $C$  est une catégorie abélienne, pour tout objet  $X$  de  $C$ , les foncteurs  $\text{Hom}(X, \cdot)$  et  $\text{Hom}(\cdot, X)$  sont exacts à gauche.

Pour tout module à droite  $X$  sur  $A$ , le foncteur  $X \otimes_A \cdot : \text{Mod}_A^S \longrightarrow \text{Ab}$  est exact droite.

**3.3.3.** On dit qu'un foncteur  $T$  (resp. un foncteur contravariant) est *semi exact* s'il est additif et si pour toute suite exacte  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  la suite  $T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'')$  (resp.  $T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A')$ ) est exacte.

## 4. Diagrammes dans une catégorie abélienne

**4.1.** Deux théorèmes vont nous permettre de transposer certains résultats connus sur les catégories des groupes abéliens, ou de modules, dans une catégorie abélienne quelconque.

**Théorème de Freyd 4.1.2.** — *Pour toute catégorie abélienne appartenant à un univers  $\mathfrak{U}$ , il existe un anneau  $A$  appartenant à  $\mathfrak{U}$  et un foncteur exact et pleinement fidèle de  $C$  dans  $\text{Mod}_{A\mathfrak{U}}^S$ .*

Ce résultat implique le théorème précédent.

**Lemme 4.1.3.** — *Soit  $C$  et  $C'$  des catégories abéliennes et  $F$  un foncteur exact de  $C$  dans  $C'$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $F$  est fidèle
- (b) Pour tout objet  $X$  de  $C$ ,  $F(X) = 0$  implique  $X = 0$
- (c)  $F$  est conservatif, c'est-à-dire pour toute flèche  $u$  de  $C$ ,  $F(u)$  est inversible implique que  $u$  est inversible.

(d) Pour tout flèche  $u$  de  $C$ ,  $F(u)$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) implique que  $u$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).

## 4.2 Applications

Lemme des 5 **4.2.1.** — Dans une catégorie abélienne  $C$ , on considère le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{-2} & \longrightarrow & A_{-1} & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ \downarrow f_{-2} & & \downarrow f_{-1} & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ B_{-2} & \longrightarrow & B_{-1} & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 \end{array}$$

Si  $f_{-1}$  et  $f_1$  sont des monomorphismes (resp. des épimorphismes) et si  $f_{-2}$  est un épimorphisme (resp.  $f_2$  un monomorphisme), alors  $f_0$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).

On en déduit que si  $f_{-1}$  et  $f_1$  sont des isomorphismes, si  $f_{-2}$  est un épimorphisme, et  $f_2$  un monomorphisme, alors  $f_0$  est un isomorphisme.

Ce résultat est bien connu dans  $\text{Ab}_{\mathbb{U}}$  et se transpose dans  $C$  à l'aide du théorème **4.1.1** et du lemme **4.1.3**.

**4.2.2.** On appelle *carré cartésien* le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ v' \uparrow & & \uparrow v \\ B' & \xrightarrow{u'} & A' \end{array}$$

dans lequel  $B'$  est le produit fibré de  $(A, u)$  et  $(A', v)$  au dessus de  $B$ .

Dans une catégorie abélienne si  $v$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme)  $v'$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), on a la même propriété pour  $u$ .

On écrira la propriété duale dans le carré cocartésien.

**4.2.3.** Par les mêmes méthodes on montrera dans une catégorie abélienne la propriété connue dans  $\text{Mod}_A^S$  sous le nom de “lemme de serpent”.

**4.3.** Le résultat suivant sera fort utilisé :

**Proposition 4.2.3.** — Soit  $C'$  une catégorie additive (resp. abélienne) pour tout type de diagramme  $D$  la catégorie  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$  est additive (resp. abélienne). De plus si  $C'$  vérifie l'un des axiomes  $AB_{1\mathfrak{U}}$  à  $AB_{6\mathfrak{U}}$  ou l'un des axiomes duaux  $AB_{3\mathfrak{U}}^*$  à  $AB_{6\mathfrak{U}}^*$  il en est de même de  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$ .

## 5. Objet injectif. Objet projectif

### 5.1 Soit $C$ une catégorie abélienne.

**Proposition 5.1.1.** — Pour tout objet  $Q$  de  $C$  les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) Le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, Q)$  (exact à gauche) est exact.
- (b) Pour tout monomorphisme  $f : X \longrightarrow Y$  et pour tout morphisme  $u : X \longrightarrow Q$ , il existe un monomorphisme  $v : Y \longrightarrow Q$  tel que  $vf = u$ .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow u & \swarrow v & \\ & & Q & & \end{array}$$

- (c) Toute suite exacte  $0 \longrightarrow Q \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  se scinde.

La proposition 3.3.1 montre que les assertions (a) et (b) sont équivalentes.

### 5.2

**Lemme 5.2.1.** — Soit  $(A_k)_{k \in K}$ ,  $K$  appartenant à un univers  $\mathfrak{U}$ , une famille génératrice d'une catégorie  $C$  dans laquelle les produits fibrés existent et telle que pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  appartient à  $\mathfrak{U}$ . Alors pour tout objet  $Y$  de  $C$  les sous-objets de  $Y$  forment un ensemble dont le cardinal est élément de  $\mathfrak{U}$ .

Si les produits fibrés existent, tout couple  $(X, i)$ ,  $(X', i')$  de sous-objets de  $Y$  admet une borne inférieure à savoir le sous-objet de  $Y$ ,  $(X, i) \prod_Y (X', i')$ .

A tout sous-objet  $(X, i)$  de  $Y$  on fait correspondre la famille  $(H_i^k)_{k \in K}$  où pour tout  $k$ ,  $H_i^k$  est le sous-ensemble de  $\text{Hom}(A_k, Y)$  formé par les morphismes qui se

factorisent par  $i$ . Supposons qu'il existe un autre sous-objet  $(X', i')$  de  $Y$  tel que pour tout  $k$   $H_i^k = H_{i'}^k$ . Alors pour tout  $k$  et tout morphisme  $f_k : A_k \longrightarrow X$ , il existe un morphisme  $g_k$  tel que  $if_k = i'g_k$ , et par définition du produit fibré, il existe un morphisme unique  $A_k \longrightarrow XAX'$  grâce auquel  $f_k$  (resp.  $g_k$ ) se factorise par le monomorphisme canonique  $XAX' \longrightarrow X$  (resp.  $XAX' \longrightarrow X'$ ). On en déduit que  $X = X'$ . Il y a donc une correspondance biunivoque entre les sous-objets de  $Y$  et un sous-ensemble de  $\prod_{k \in K} \mathfrak{P}(\text{Hom}(A_k, Y))$ . Or  $\text{Hom}(A_k, Y)$  appartient à  $\mathfrak{U}$  par hypothèse  $\mathfrak{P}(\text{Hom}(A_k, Y))$  appartient à  $\mathfrak{U}$  en vertu de l'axiome  $\mathfrak{u}_3$  des univers, et  $\prod_{k \in K} \mathfrak{P}(\text{Hom}(A_k, Y))$  appartient à  $\mathfrak{U}$  puisque  $K$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ , donc les sous-objets de  $Y$  forment un ensemble dont le cardinal appartient à  $\mathfrak{U}$ .

Soit  $u, v$  deux morphismes de même but, on dit que  $v$  *prolonge*  $u$  si

- (i)  $s(u) < s(v)$ , soit  $i$  le morphisme injection canonique de  $s(u)$  dans  $s(v)$
- (ii)  $u = vi$ .

**Théorème 5.2.2.** — *Soit  $C$  une catégorie abélienne telle que pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ ,  $\text{Card Hom}(X, Y)$  appartient à  $\mathfrak{U}$  et vérifiant  $AB_{5\mathfrak{U}}$ ,  $(A_k)_{k \in K}$ ,  $K$  élément de  $\mathfrak{U}$ , une famille génératrice. Un objet  $Q$  de  $C$  est injectif si et seulement si pour tout  $k$  appartient à  $K$ , pour tout sous-objet  $V$  de  $A_k$ , et pour tout morphisme  $u : Y \longrightarrow Q$ , il existe un morphisme  $v : A_k \longrightarrow Q$  qui prolonge  $u$ .*

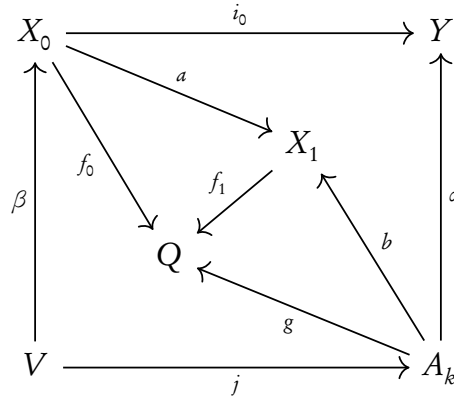
Soit un objet  $Y$  de  $C$ , un sous-objet  $X$  de  $Y$  et un morphisme  $f : X \longrightarrow Q$ . On considère l'ensemble  $E$  des morphismes de but  $Q$ , dont la source est un sous-objet de  $Y$  et qui prolonge  $f$  ; cet ensemble ordonné par la relation :  $f' < f''$  si et seulement si  $f''$  prolonge  $f'$  est *inductif*. Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une partie totalement ordonnée de  $E$ ,  $I$  étant un élément de  $\mathfrak{U}$  5.2.1,  $L = \varinjlim_I s(f_i)$  existe et c'est un sous-objet de  $Y$  en vertu de  $AB_{5\mathfrak{U}}$ , de plus il existe un morphisme  $l : L \longrightarrow Q$  qui prolonge  $f_i$  pour tout  $i$ . L'ensemble  $E$  admet donc un *élément maximal*  $f_0 : X_0 \longrightarrow Q$ .

Montrons que  $X_0 = Y$ . Pour cela supposons que  $X_0$  soit différent de  $Y$  et montrons qu'il existe un sous-objet  $X_1$  de  $Y$ ,  $X_0 < X_1$  et un morphisme  $l : X_1 \longrightarrow Q$  qui prolonge  $f$ .

Si le monomorphisme canonique  $i_0 : X_0 \longrightarrow Y$  n'est pas un isomorphisme, il existe  $k$  appartenant à  $K$  et  $\alpha : A_k \longrightarrow Y$  qui ne se factorise par  $i_0$ . Soit  $V$



l'image inverse de  $X_0$  par  $\alpha$ , c'est-à-dire  $\text{Ker}(\text{Coker } i_0 \alpha)$ , il existe un morphisme  $\beta : V \longrightarrow X_0$  unique tel que  $i_0 \beta = \alpha j$  avec  $j = \text{Ker}(\text{Coker } i_0 \alpha)$ . On considère  $X_1$ ,  $a, b$  la somme amalgamée de  $(X_0, \beta)$  et  $(A_k, j)$  au dessus de  $V$ , c'est un sous-objet de  $Y$ , en effet  $X_1$  est isomorphe à  $X_0 \vee \text{Im } \alpha$ . Comme  $j$  est un monomorphisme,  $a$  est un monomorphisme et  $X_0$  est un sous-objet de  $X_1$ , de plus  $X_0$  est différent de  $X_1$ , car  $\alpha$  se factoriserait alors par  $i_0$  au moyen de  $b$ . Par hypothèse le morphisme  $f_0 \beta : V \longrightarrow Q$  se prolonge en un morphisme  $g : A_k \longrightarrow Q$ . Comme  $gj = f_0 \beta$  il existe un morphisme  $f_1 : X_1 \longrightarrow Q$  tel que  $f_0 = f_1 a$ .



On énoncera le théorème dual.

**5.2.3.** Dans la catégorie  $\text{Mod}_{\mathcal{A}\mathcal{U}}^S$  un objet  $Q$  est injectif si et seulement si pour tout idéal à gauche  $V$  de  $A$  et tout morphisme  $u : V \longrightarrow Q$  il existe un élément  $x$  de  $Q$  tel que  $u(\lambda) = \lambda x$  pour tout  $\lambda$  appartenant à  $V$ .

**5.3.** On dit qu'une catégorie abélienne  $C$  possède *assez d'objets injectifs* (resp. assez d'objets projectifs) si pour tout objet  $X$  de  $C$  il existe un *objet injectif*  $Q$  (resp. un objet projectif  $P$ ) et un *monomorphisme*  $X \longrightarrow Q$  (resp. un *épimorphisme*  $P \longrightarrow X$ ).

**Théorème 5.3.1.** — Soit  $C$  une catégorie vérifiant  $AB_{5\mathcal{U}}$  et telle que pour tout couple d'objets  $(X, Y)$   $\text{Hom}(X, Y)$  appartient à  $\mathcal{U}$ . S'il existe un générateur, la catégorie  $C$  possède assez d'objets injectifs.

Soit  $X$  un objet quelconque de  $C$ ,  $A$  le générateur,  $(B_k)_{k \in K}$  l'ensemble de tous les sous-objets de  $A$ ,  $K$  appartient à  $\mathcal{U}$  en vertu du lemme 5.2.1, on pose  $J(X) = \bigcup_{k \in K} \text{Hom}(B_k, X)$ .

Soient  $B = \coprod_{k \in K} B_k^{(\text{Hom}(B_i, X))^{44}}$ , le morphisme de  $B$  dans  $X$  dont les composantes sont tous les morphismes de tous les sous-objets de  $A$  dans  $X$ , et  $i$  le monomorphisme de  $B$  dans  $A^{I(X)}$  somme directe des monomorphismes canoniques de  $B_i$  dans  $A$ ,  $i$  est bien un monomorphisme d'après  $AB_{5\mathbb{U}}$ .

On considère  $T_1(X) = (x, f) \coprod_B (i, A^{I(X)})$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & A^{I(X)} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ X & \xrightarrow{j_1} & T^1(X) \end{array}$$

Puisque  $i$  est un monomorphisme,  $j_1$  est monomorphisme, mais  $T^1(X)$  n'est pas en général injectif. On définit par *récurrence transfinie*, une suite d'objets  $T^\lambda(X)$  et pour tout couple  $(\lambda', \lambda)$  tel que  $\lambda' < \lambda$  un monomorphisme  $T^{\lambda'}(X) \longrightarrow T^\lambda(X)$ , de la façon suivante :

Si  $\lambda$  n'est pas un ordinal limite on pose  $T^\lambda(X) = T^1(T^{\lambda-1}(X))$

si  $\lambda$  est un ordinal limite on pose  $T^\lambda(X) = \varinjlim_{\lambda' < \lambda} T^{\lambda'}(X)$ , on remarque qu'on ne sortira pas de l'univers si l'ensemble des  $\lambda' < \lambda$  appartient à l'univers.

Pour tout couple  $(\lambda', \lambda)$ ,  $\lambda' < \lambda$  on obtient par cette construction un monomorphisme canonique  $T^{\lambda'}(X) \longrightarrow T^\lambda(X)$ .

On pose  $T^\circ(X) = X$ .

Soit  $\alpha$  le plus petit ordinal dont le cardinal est strictement plus grand que  $\text{Card } K$ . Montrons que  $T^\alpha(X)$  est injectif.

Soit  $(V, i)$  un sous-objet de  $A$  et  $u : V \longrightarrow T^\alpha(X)$ . Pour tout  $\lambda < \alpha$ , on note  $S^\lambda$  l'image inverse par  $u$  de  $T^\lambda(X)$ ,  $\alpha$  est un ordinal limite,  $T^\lambda(X) = \varinjlim_{\lambda' < \lambda} T^{\lambda'}(X)$  et en vertu de  $AB_{5\mathbb{U}}$   $V = \varinjlim_{\lambda < \alpha} S^\lambda$ . Le cardinal de l'ensemble des sous-objets de  $V$  est inférieur à  $\text{Card } K$  et l'ensemble des ordinaux inférieurs à  $\alpha$  a un cardinal supérieur à  $\text{Card } K$ , donc il existe  $\lambda_0 < \alpha$  à partir du que la suite  $S^\lambda$  est *stationnaire*. Donc  $u$  se factorise par  $u_0 : V \longrightarrow T^{\lambda_0}(X)$  et par définition de  $T_1(T^{\lambda_0}(X))$  il existe

<sup>44</sup>Si  $Y$  est un objet de  $C$ ,  $I$  un ensemble appartenant à  $\mathbb{U}$ , on note  $Y^{(I)}$  la somme  $\coprod_{i \in I} Y_i$  où pour tout  $i$ ,  $Y_i = Y$ .

un morphisme  $\bar{u} : A \longrightarrow T^{\lambda_0+1}(X)$  tel que le diagramme suivant soit commutatif. Donc  $u$  se prolonge en un morphisme  $v : A \longrightarrow T^\alpha(X)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V & & \\
 & \swarrow & \downarrow i & \searrow & \\
 & u_0 & A & u & \\
 & \swarrow & \downarrow \bar{u}_0 & \searrow & \\
 T^{\lambda_0}(X) & \longrightarrow & T^{\lambda_0+1} & \longrightarrow & T^\alpha(X)
 \end{array}$$

On énoncera le théorème dual.

**5.3.2.** Dans  $\text{Mod}_{\mathcal{A}\mathfrak{U}}^S$ ,  $A$  appartenant à  $\mathfrak{U}$ , qui vérifie  $AB_{5\mathfrak{U}}$  et dont  $A$  est un générateur, il existe assez d'injectifs. On déduit de 5.1.1 qu'il existe assez de projectifs.

### III. Foncteurs représentables

#### 1. Définition et propriétés

##### 1.1 Définition

Soit  $\mathfrak{U}$  un univers,  $C$  une catégorie telle que pour tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $C$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  appartient à  $\mathfrak{U}$ . On rappelle que  $\text{Hom}(., .)$  est un bifoncteur de  $C \times C$  dans  $\text{Ens}_{\mathfrak{U}}$  contravariant par rapport à la première variable, covariant par rapport à la seconde.

**1.1.1.** On appelle *catégorie des préfaisceaux* sur  $C$ , la catégorie  $\underline{\text{Hom}}(C^o, \text{Ens}_{\mathfrak{U}})$ , que l'on note  $\hat{C}$ .

On définit un foncteur  $\varepsilon$  de  $C$  dans  $\hat{C}$ . A tout objet  $Y$  de  $C$ ,  $\varepsilon$  fait correspondre le foncteur contravariant de  $C$  dans  $\text{Ens}_{\mathfrak{U}} : \text{Hom}(., Y)$ , que l'on note  $h_Y$ .

Tout morphisme  $f : Y \longrightarrow Y'$ ,  $\varepsilon$  associe le morphisme fonctoriel naturel de  $\text{Hom}(., Y)$  dans  $\text{Hom}(., Y')$ .

**1.1.2.** On dit que le foncteur  $h_Y$  est le *foncteur représenté* par  $Y$ .

On dit qu'un préfaisceau  $F$  est *représentable*, s'il existe un *objet*  $Y$  de  $C$  et un *isomorphisme*  $\varphi$  de  $h_Y$  sur  $F$ . On dit alors que  $F$  est représenté par le couple  $(Y, \varphi)$  ou encore que le couple  $(Y, \varphi)$  est une *donnée de représentation* de  $F$ .

##### 1.2 Propriétés

**Théorème 1.2.1.** — Si  $F$  est un préfaisceau sur  $C$ ,  $Y$  un objet de  $C$ , il existe une bijection de  $\text{Hom}(h_Y, F)$  sur  $F(Y)$ , fonctorielle en  $Y$ ,  $F$ .

- a. Soit  $u$  un morphisme de  $h_Y$  dans  $F$ . On rappelle (Chap. 1, 3.4) qu'à tout objet  $X$  de  $C$   $u$  fait correspondre une application  $u(X)$  de  $\text{Hom}(X, Y)$  dans  $F(X)$  que l'on notera  $u_X$ . Soit  $\alpha : \text{Hom}(h_Y, F) \longrightarrow F(Y)$  telle que  $\alpha(u) = u_Y(1_Y)$
- b. Soit  $\beta : F(Y) \longrightarrow \text{Hom}(h_Y, F)$ , qui à tout élément  $v$  de  $F(Y)$  fait correspondre le morphisme  $\beta(v) : h_Y \longrightarrow F$ , tel que pour tout objet  $X$  et tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  on ait  $\underline{\beta(v)}_X(f) = F(f)(v)$ . On vérifie en effet que pour tout morphisme  $g : X \longrightarrow X'$  le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(X', Y) = h_Y(X') & \xrightarrow{h_Y(g)} & \text{Hom}(X, Y) = h_Y(X) \\ \underline{\beta(v)}_{X'} \downarrow & & \downarrow \underline{\beta(v)}_X \\ F(X') & \xrightarrow{F(g)} & F(X) \end{array}$$

- c. Pour tout morphisme fonctoriel  $u$  de  $h_Y$  dans  $F$  et tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  on a  $u_X h_Y(f) = F(f) u_Y$ , en particulier  $F(f) u_Y(1_Y) = u_X(f)$ , donc  $\beta \alpha(u) = u$ . Inversement pour tout élément  $v$  de  $F(Y)$ ,  $\alpha \beta(v) = \underline{\beta(v)}_Y(1_Y) = F(1_Y)(v) = 1_F(Y)(v) = v$ .

**Corollaire 1.2.2.** — Si  $F$  est un préfaisceau représentable, représenté par  $(X, \varphi)$   $Y$  un objet de  $C$ , il existe une bijection de  $\text{Hom}(Y, X)$  sur  $\text{Hom}(h_Y, h_X)$ .

C'est dire que le foncteur canonique  $\varepsilon$  est *pleinement fidèle*, ce qui permet de “plonger” canoniquement toute catégorie  $C$  dans la catégorie  $\hat{C}$  des préfaisceaux sur  $C$ .

Aussi nous arrivera-t-il d'identifier un objet  $Y$  de  $C$  à  $h_Y$ , un morphisme fonctoriel de  $h_Y$  dans  $F$  à l'élément de  $F(Y)$  correspondant. Une donnée de représentation de  $F$  est définie à un isomorphisme unique près : en effet, si  $(X, \varphi)$ ,  $(X', \varphi')$  sont deux données de représentation de  $F$ ,  $h_X$  et  $h'_X$  sont isomorphes, comme  $\varepsilon$  est pleinement fidèle  $X$  et  $X'$  sont isomorphes ainsi que  $\varphi$  et  $\varphi'$ .

**Proposition 1.2.3.** — Soit  $F$  un préfaisceau sur  $C$ .

Le couple  $(X, \alpha)$ , où  $X$  est un objet de  $C$ ,  $\alpha$  un élément de  $F(X)$  définit une donnée de représentation de  $F$  si et seulement si pour tout couple  $(Y, \beta)$  où  $Y$  est un objet de  $C$ ,  $\beta$  un élément de  $F(Y)$ , il existe un unique morphisme  $v : Y \longrightarrow X$  tel que  $\beta = F(v)\alpha$ .

Si  $(X, \alpha)$  définit une donnée de représentation de  $F$ ,  $\alpha$  s'identifie à un isomorphisme de  $h_X$  sur  $F$ ,  $\beta$  s'identifie à un morphisme de  $h_Y$  dans  $F$ , et un morphisme  $v$  s'identifie à un morphisme de  $h_Y$  dans  $h_X$ . Pour tout objet  $Y$ , et tout morphisme  $\beta : h_Y \longrightarrow F$ , il existe bien un unique morphisme  $h_Y \longrightarrow h_X$  tel que  $\beta = \alpha u$ , à savoir  $u = \alpha^{-1}\beta$

$$\begin{array}{ccc} h_X & \xrightarrow{\approx \alpha} & F \\ & \nwarrow u \quad \nearrow \beta & \\ & h_Y & \end{array}$$

Réciproquement si  $(X, \alpha)$  jouit d'une telle propriété universelle, pour tout  $Y$  il existe une bijection de  $\text{Hom}(Y, X) = h_X(Y)$  sur  $\text{Hom}(h_Y, F) \simeq F(Y)$ , donc  $\alpha$  est un isomorphisme fonctoriel, et  $(X, \alpha)$  définit une donnée de représentation de  $F$ .

## 2. Application

De nombreuses notions peuvent s'interpréter avantageusement en langage de foncteurs représentables.

**2.1.** Soit  $C$  une catégorie,  $D$  un type de diagramme et  $\varphi : D \longrightarrow C$ . Pour tout objet  $Y$  de  $C$ , on définit le diagramme constant  $C_Y$  : pour tout objet  $i$  de  $D$   $C_Y(i) = Y$ , pour toute flèche  $f$  de  $D$   $C_Y(f) = 1_Y$ . Pour tout objet  $Y$  de  $C$ , l'ensemble des systèmes admissibles  $(Y, u_i)_{i \in \text{Ob } D}$  de  $\varphi$  est l'ensemble  $\text{Hom}(C_Y, \varphi)$ .

Soit  $F$  le préfaisceau sur  $C$  défini par  $F(Y) = \text{Hom}(C_Y, \varphi)$ . En appliquant 1.2.3 on obtient la

**Proposition 2.1.1.** — *La limite projective de  $\varphi$  existe si et seulement si le foncteur  $F$  est représentable.*

Si  $\varphi$  ne possède pas de limite projective dans  $C$ , on utilise souvent le procédé suivant on plonge  $C$  dans  $\hat{C}$  au moyen du foncteur  $\varepsilon$  et on appelle limite projective de  $\varphi$  la limite projective de  $\varepsilon\varphi$ , qui existe toujours puisque  $\hat{C} = \text{Hom}(C^o, \text{Ens}_{\mathbb{U}})$ .

**2.2.** On considère la catégorie des modules sur un anneau commutatif  $A$ ,  $\text{Mod}_A$ . Soient  $M$  et  $N$  deux modules, le foncteur de  $\text{Mod}_A$  dans  $\text{Ens}$  qui à tout module  $P$  fait correspondre l'ensemble  $\text{Bil}_A(M \times N, P)$  des applications bilinéaires de  $M \times N$  dans  $P$  est *représentable*, et le module qui le représente est le produit tensoriel  $M \otimes_A N$ .

**2.3.** On peut définir dualement un foncteur  $\varepsilon' : C^o \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(C, \text{Ens})$ . On définira alors un foncteur représentable et l'on vérifiera que cette notion recouvre celle de limite inductive.

### 3. Structures algébriques dans les catégories

On se propose de *définir* une structure algébrique par exemple une structure de groupe sur un objet  $X$  d'une catégorie  $C$ . On peut procéder de deux façons.

**3.1.** La plus naturelle consiste à généraliser dans la catégorie  $C$ , la notion habituelle de structure algébrique sur un ensemble.

Supposons que dans  $C$  le produit  $X \amalg X$  existe, une *loi de composition interne* sur  $X$  est la donnée d'un morphisme  $m_X : X \amalg X \longrightarrow X$ .

Les axiomes définissant sur  $X$  une *structure de  $C$ -groupe* vont s'exprimer en terme de commutativité de diagrammes. Supposons que  $X \amalg X \amalg X$  existe, on a les isomorphismes canoniques :  $(X \amalg X) \amalg X \simeq X \amalg X \amalg X \simeq X \amalg (X \amalg X)$ .

**3.1.1.** La loi est *associative* si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X \amalg X & \xrightarrow{m_X \amalg 1_X} & X \amalg X \\ \downarrow 1_X \amalg m_X & & \downarrow m_X \\ X \amalg X & \xrightarrow{m_X} & X \end{array}$$

Supposons de plus qu'il existe dans  $C$  un objet final  $E$ , il existe alors un unique morphisme  $e : X \longrightarrow E$ .

**3.1.2.** Il existe un morphisme  $w : E \longrightarrow X$  tel que les diagrammes suivants

soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 E \amalg X & \xrightarrow{\omega \amalg 1_X} & X \amalg X \\
 \nwarrow \simeq & & \swarrow m_X \\
 & X &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X \amalg E & \xrightarrow{1_X \amalg \omega} & X \amalg X \\
 \nwarrow \simeq & & \swarrow m_X \\
 & X &
 \end{array}$$

On montre que  $w$  est alors déterminé de façon unique.

**3.1.3.** Il existe un *morphisme*  $s : X \longrightarrow X$  tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{(s, 1_X)} & X \amalg X \\
 e \downarrow & & \downarrow \\
 E & \xrightarrow{\omega} & X
 \end{array}$$

ainsi que celui obtenu en permettant  $s$  et  $1_X$ . On montre que le morphisme  $s$  est déterminé de façon unique.

On pourrait de façon duale définir une structure de  $C$ -cogroupe.

**3.2.** *Sans faire d'hypothèses* sur la catégorie  $C$ , on peut définir une structure sur  $X$  en se ramenant au cas *ensembliste*. Les limites projectives existent dans  $\hat{C}$ , ainsi pour deux éléments  $F, F'$  de  $\hat{C}$ , pour tout objet  $X$  de  $C$ ,  $F \amalg F'(X) = F(X) \amalg F'(X)$ .

Une *loi de composition interne* sur  $X$  est la donnée d'un *morphisme*  $M_X : h_X \amalg h_X \longrightarrow h_X$ . Cela revient à se donner pour tout objet  $Y$  de  $C$ , une loi de composition interne sur l'ensemble  $h_X(Y)$  qui soit fonctorielle, c'est-à-dire telle que pour tout  $u : Y \longrightarrow Y'$ ,  $h_X(u) : h_X(Y') \longrightarrow h_X(Y)$  soit un morphisme au sens de la structure considérée.

**3.3.** Dans le cas particulier où le produit  $X \amalg X$  existe dans  $C$ ,  $h_X \amalg h_X$  est canoniquement isomorphe à  $h_{X \amalg X}$ , une loi de composition interne sur  $X$  peut donc être considérée comme un morphisme  $M_X : h_{X \amalg X} \longrightarrow h_X$  il lui est donc canoniquement associé (III, 1.2.2) un morphisme  $m_X : X \amalg X \longrightarrow X$  tel que  $\varepsilon(m_X) = h_{m_X} = M_X$ .

**3.3.1.** Si l'on suppose que  $X \amalg X \amalg X$  existe,  $X \amalg X \amalg X$  étant canoniquement identifié à  $(X \amalg X) \amalg X$  l'application  $M_X(Y) \amalg 1_{h_X(Y)}$  s'identifie pour tout objet  $Y$  de  $C$  à  $h_{m_X \amalg 1_X}(Y)$ . Il est donc *équivalent* de dire que la loi  $M_X$  est associative, c'est-à-dire que pour tout  $Y$  le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) \amalg h_X(Y) \amalg h_X(Y) & \xrightarrow{M_X(Y) \amalg 1} & h_X(Y) \amalg h_X(Y) \\ \downarrow 1 \amalg M_X(Y) & & \downarrow M_X(Y) \\ h_X(Y) \amalg h_X(Y) & \xrightarrow{M_X(Y)} & h_X(Y) \end{array}$$

ou que le diagramme 3.1.1 est commutatif.

**3.3.2.** S'il existe dans  $C$  un objet final...

$E, h_E$  est objet final de  $\hat{C}$ , le morphisme  $\Omega : h_E \longrightarrow h_X$  induit un morphisme  $w : E \longrightarrow X$  qui vérifie la propriété 3.1.2.

**3.3.3.** Pour tout  $Y$  de  $C$  il existe un morphisme  $S(Y) : h_X(Y) \longrightarrow h_X(Y)$  fonctoriel par rapport à  $Y$ , soit  $S : h_X \longrightarrow h_X$  est un morphisme auquel est canoniquement associé un morphisme  $s : X \longrightarrow X$  tel que  $\varepsilon(s) = h_s = S$ , et tel que le diagramme 3.1.3 correspondant soit commutatif.

**3.4.** Il faut remarquer qu'il y a des structures que l'on ne peut définir de cette façon, par exemple si leur définition fait intervenir des limites inductives, car  $\varepsilon : C \longrightarrow \hat{C}$  ne commute pas aux limites inductives.



## Quelques ouvrages de références

- [1] ECKMANN - HILTON — *Group-like structure in general categories*. I. Math. Ann. **145** (1962) 227-255 ; II. Math. Ann. **151** (1963), 150-186 ; III. Math. Ann. **150** (1963) 165-187.
- [2] EHRESMANN — *Catégories et structures*. (Dunod 1965).
- [3] FREYD — *Abelian categories*. Harter et Row Publishers N-Y 1964.
- [4] GABRIEL — *Des catégories abéliennes*. Thèse. Bulletin Société Mathématique de France (1962) 323 - 448.
- [5] GROTHENDIECK —  
*Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tohoku Math. Journal. Vol. 9 p. 119 - 221 (1977).  
*Éléments de géométrie algébrique*. I.H.E.S Publications mathématiques (1961 - 62).
- [6] HILTON — *Catégories non abéliennes*. Séminaire d'été de Montreal (1964).
- [7] MITCHELL — *Theory of categories*. Academic Press (1965).

## Letter to J. Coates, 6.1.1966<sup>45</sup>

6.1.1966

Dear Coates,

Here a few more comments to my talk on the conjectures. The following proposition shows that the conjecture  $C_\ell(X)$  is independent of the chosen polarization, and has also some extra interest, in showing the part played by the fact that  $H^i(X)$  should be “motive-theoretically” isomorphic to its natural dual  $H^{2n-i}(X)$  (as usual, I drop the twist for simplicity).

*Proposition. — The condition  $C_\ell(X)$  is equivalent also to each of the following conditions:*

- a)  $D_\ell(X)$  holds, and for every  $i < n$ , there exists an isomorphism  $H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^i(X)$  which is algebraic (i.e. induced by an algebraic correspondence class; we do not make any assertion on what it induces in degrees different from  $2n - i$ ).*
- b) For every endomorphism  $H^i(X) \longrightarrow H^i(X)$  which is algebraic, the coefficients of the characteristic polynomial are rational, and for every  $i < n$ , there exists an isomorphism  $H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^i(X)$  which is algebraic.*

*Proof.* — I sketched already how  $D_\ell(X)$  implies the fact that for an algebraic endomorphism of  $H^i(X)$ , the coefficients of the characteristic polynomial are rational numbers. Therefore we know that a) implies b), and of course  $C_\ell(X)$  implies a). It remains to prove that b) implies  $C_\ell(X)$ . Let  $u : H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^i(X)$  be the given isomorphism which is algebraic, and  $v : H^i(X) \longrightarrow H^{2n-i}(X)$  the algebraic isomorphism in the opposite direction, induced by  $L_X^{n-i}$ . Then  $uv = w$  is an automorphism of  $H^i(X)$  which is algebraic, and the Hamilton-Cayley formula  $u^b - \sigma_1(w)u^{b-1} + \dots + (-1)^b \sigma_b(w) = 0$  (where the  $\sigma_i(w)$  are the coefficients of the characteristic polynomial of  $w$ ) whos that  $w^{-1}$  is a linear combination of the  $w^i$ , with coefficients of the type  $+/- \sigma_i(w)/\sigma_b(w)$  (N.B.  $b = \text{rank } H^i$ ). The

---

<sup>45</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGC6166scan.pdf>

assumption implies that these coefficients are rational, which implies that  $w^{-1}$  is algebraic, and so is  $w^{-1}u = v^{-1}$ , which was to be proved.

N.B. In characteristic 0, the statement simplifies to:  $C(X)$  equivalent to the existence of algebraic isomorphisms  $H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^i(X)$ , (as the preliminary in b) is then automatically satisfied). Maybe with some extra care this can be proved too in arbitrary characteristics.

Corollary. — *Assume  $X$  and  $X'$  satisfy condition  $C_\ell$ , and let  $u : H^i(X) \longrightarrow H^{i+2D}(X')$  ( $D \in \mathbf{Z}$ ) be an isomorphism which is algebraic. Then  $u^{-1}$  is algebraic.*

Indeed, the two spaces can be identified “algebraically” (both directions!) to their dual, so that the transpose of  $u$  can be viewed as an isomorphism  $u' : H^{i+2D}(X') \longrightarrow H^i(X)$ . Thus  $u'u$  is an algebraic automorphism  $w$  of  $H^i(X)$ , and by the previous argument we see that  $w^{-1}$  is algebraic, hence so is  $u^{-1} = w^{-1}u'$ .

As a consequence, we see that if  $x \in H^i(X)$  is such that  $u(x)$  is algebraic ( $i$  being now assumed to be even), then so is  $x$ . The same result should hold in fact if  $u$  is a monomorphism, the reason being that in this case there should exist a left-inverse which is algebraic; this exists indeed in a case like  $H^{n-1}(X) \longrightarrow H^{n-1}(Y)$  (where we take the left inverse  $\bigwedge_X \varphi_*$ ). But to get it in general, it seems we need moreover the Hodge index relation. (The complete yoga then being that we have the category of motives which is semi-simple!). Without speaking of motives, and staying down on earth, it would be nice to explain in the notes that  $C(X)$  together with the index relation  $I(X \times X)$  implies that the ring of correspondences classes for  $X$  is semi-simple, and how one deduces from this the existence of left and right inverses as looked for above.

This could be given in an extra paragraph (which I did not really touch upon in the talk), containing also the deduction of the Weil conjectures from the conjectures  $C$  and  $A$ .

A last and rather trivial remark is the following. Let's introduce variants  $A'_\ell(X)$  and  $A''_\ell(X)$  as follows:

$A'_\ell(X)$  : if  $2i \leq n-1$ , any element  $x$  of  $H^i(X)$  whose image in  $H^i(Y)$  is algebraic, is algebraic.

$A''_\ell(X)$  : if  $2i \geq n-1$ , any algebraic element of  $H^{i+2}(X)$  is the image of an algebraic element of  $H^i(Y)$ .

Let us consider also the specifications  $A'_\ell(X)^\circ$  and  $A''_\ell(X)^\circ$ , where we restrict to the critical dimensions  $2i = n - 1$  if  $n$  odd,  $2i = n - 2$  if  $n$  even. All these conditions are in the nature of “weak” Lefschetz relations, and they are trivially implied by  $A_\ell(X)$  resp.  $C_\ell(X)$  (in the first case, applying  $\varphi$  we see that  $L_X X$  is algebraic; in the second, we take  $y = \bigwedge_Y \varphi^+(x)$ ). The remark then is that these pretendently “weak” variants in fact imply the full Lefschetz relations for algebraic cycles, namely:

*Proposition. —  $C_\ell(X)$  is equivalent to the conjunction  $C_\ell(Y) + A_\ell(X \times X)^\circ + A'_\ell(X \times X)^\circ$ , hence (by induction) also to the conjunction of the conditions  $A'_\ell$  and  $A''_\ell$  for all of the varieties  $X \times X, Y \times Y, Z \times Z, \dots$ . Analogous statement with  $X \times Y, Y \times Z$  etc instead of  $X \times X, Y \times Y$  etc.*

This comes from the remark that  $A_\ell(X)^\circ$  follows from the conjunction of  $A'_\ell(X)^\circ$  and  $A''_\ell(X)^\circ$ , as one sees by decomposing  $L_X^2 : H^{2m-2}(X) \longrightarrow H^{2m+2}(X)$  into  $H^{2m+2}(X) \xrightarrow{\varphi^k} H^{2m+2}(Y) \xrightarrow{\varphi_\alpha} H^{2m}(X) \xrightarrow{L_X} H^{2m+2}(X)$  if  $\dim X = 2m$  is even, and  $H^{2m+1-1}(X) \longrightarrow H^{2m+1+1}$  into  $H^{2m}(X) \xrightarrow{\varphi^*} H^{2m}(Y) \xrightarrow{\varphi_*} H^{2m+2}(X)$  if  $\dim X = 2m + 1$  is odd.

Sincerely yours

Cher John,

J'ai réfléchi aux groupes formels et à la cohomologie de De Rham, et suis arrivé à un projet de théorie, ou plutôt de début de théorie, que j'ai envie de t'exposer, pour me clarifier les idées.

### Chapitre 1. — La notion de cristal

Commentaire terminologique : Un cristal possède deux propriétés caractéristiques : la *rigidité*, et la faculté de *croître*, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de soufre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs etc.

1.0. — Soit  $S$  un préschéma, au dessus d'un autre  $R$ ; dans le cas qui nous intéressera le plus, on aura  $R = \text{Spec}(\mathbf{Z})$ . Soit  $C$  la catégorie des  $R$ -préschémas  $T$  sous  $S$ , (i.e. munis d'un  $R$ -morphisme  $S \longrightarrow T$ ), tels que  $S \longrightarrow T$  soit une immersion fermée définie par un idéal localement nilpotent. On a le foncteur "oubli" de  $C$  dans  $\text{Sch}$ , et la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur des préschémas variables induit donc une catégorie fibrée sur  $C$ , associant à tout  $T$  la catégorie des Modules quasi-cohérents sur  $T$ .

Définition (1.1). — *On appelle cristal de modules (sous-entendu: quasi-cohérents) sur  $S$ , relativement à  $R$ , une section cartésienne de la catégorie fibrée précédente au dessus de  $C$ . Plus généralement, pour toute catégorie fibrée  $\mathcal{F}$  sur  $\text{Sch}_{/R}$ , on définit la notion de " $\mathcal{F}$ -cristal" sur  $S$ , ou "cristal en objets de  $\mathcal{F}$ ", de la façon correspondante. Ceci donne un sens aux expressions: cristal en algèbres, en algèbres commutatives, en préschémas relatifs etc, sur  $S$  relativement à  $R$ . Quand  $R = \text{Spec}(\mathbf{Z})$ , on parlera de "cristal absolu" sur  $S$ , de l'espèce considérée.*

1.2. — Les  $\mathcal{F}$ -cristaux sur  $S$  forment une catégorie, qui dépend fonctoriellement de  $\mathcal{F}$ . Ceci permet, en particulier, de définir sur la catégorie des cristaux

<sup>46</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGT66scan.pdf>

de modules sur  $S$  les opérations tensorielles habituelles: produit tensoriel de deux cristaux de modules etc, satisfaisant aux propriétés habituelles.

**1.3.** — Regardons de même ce qui se passe quand on fixe  $\mathcal{F}$  et fait varier  $R, S$ . Tout d’abord, si  $R \longrightarrow R' \longrightarrow R$ , alors tout cristal sur  $S$  relativement à  $R$  en définit un relativement à  $R'$ , par simple restriction. En particulier, un cristal absolu définit un cristal relatif, pour tout préschéma de base  $R$  de  $S$ .

Fixons maintenant  $R, S$ , et soit  $S' \longrightarrow S$  un morphisme. On définit alors de façon naturelle un foncteur “image inverse” allant des cristaux de type  $\mathcal{F}$  sur  $S$  vers les cristaux de type  $\mathcal{F}$  sur  $S'$  (tout relatif à  $R$ ). Pour s’en assurer, il suffit de définir un foncteur  $C' \longrightarrow C$  (ou  $C'$  est défini en termes de  $S'$  comme  $C$  en termes de  $S$ ), compatible avec les foncteurs “oubli”. Or si  $S' \longrightarrow T'$  est un objet de  $C'$ , il y a une construction évidente de somme amalgamée dans la catégorie des préschémas, qui donne un  $T = S \amalg_{S'} T'$  et un morphisme  $S \longrightarrow T$ , qui fait de  $T$  un objet de  $C$ , ce qui définit le foncteur cherché.

On peut donc dire que pour un  $S$  variable sur  $R$ , les cristaux de type  $\mathcal{F}$  sur  $S$  forment une *catégorie fibrée* sur  $\text{Sch}_R$ , grâce à la notion d’image inverse précédente.

Les deux variantes (en  $R$ , et en  $S$ ) sont compatibles dans un sens évident, et peuvent être regardées comme provenant d’une variance en  $(R, S)$  directement.

**1.4.** — On a un foncteur naturel et évident qui va des cristaux de modules (disons) sur  $S$  (rel à  $R$ ) dans des Modules quasi-cohérents sur  $S$ : c’est le foncteur “valeurs en  $S$ ”. On fera attention que ce foncteur n’est en général pas même fidèle (cf exemple 1.5. plus bas). Il est donc un peu dangereux de vouloir considérer un cristal de modules sur  $S$  comme étant un Module quasi-cohérent  $\mathcal{M}$  sur  $S$ , muni d’une structure supplémentaire, sa “structure cristalline”. Dans certains cas cependant (cf 1.8.), le foncteur cristaux de modules  $\rightsquigarrow$  Modules est fidèle et le point de vue précédent devient plus raisonnable.

**1.5. Exemple 1: relations avec les vecteurs de Witt.** — Supposons que  $S$  soit le spectre d’un corps *parfait*  $k$ , et  $R = \text{Spec}(\mathbf{Z})$ . Soit  $W$  l’anneau de Cohen de corps résiduel  $k$ : si  $\text{car } k > 0$ , c’est l’anneau des vecteurs de Witt défini par  $k$ , si  $\text{car } k = 0$ , c’est  $k$  lui-même; dans ce dernier cas, supposons  $k$  *algébrique* sur  $\mathbf{Q}$ . Alors il est bien connu que la catégorie  $C$  de 1.0. est équivalente à celle des  $W$ -algèbres lo-

cales, annulées par une puissance de l'idéal maximal de  $W$ , à extension résiduelle triviale. Écrivant  $W = \varprojlim W_n$  comme à l'accoutumé, dans le cas  $p > 0$ , on trouve que la donnée d'un cristal de modules (absolu) sur  $k$  équivaut à celle d'un système projectif  $(M_n)$  “ $p$ -adique” de modules  $M_n$  sur les  $W_n$  ; donc les cristaux de modules de présentation finie sur  $k$  forment une catégorie équivalente à celle des modules de type fini sur  $W$ . Si  $p = 0$ , alors la catégorie des cristaux de modules sur  $k$  est équivalente à celle des vectoriels sur  $k = W$ . Ces descriptions sont compatibles avec les notions de changement de base pour  $k$  variable. Elles se formulent évidemment pour toute autre espèce de cristaux, défini par une catégorie fibrée  $\mathcal{F}$ .

Dans le cas envisagé, le foncteur “valeur en  $S$ ”, sur la catégorie des cristaux de présentation finie sur  $k$ , s'identifie au foncteur  $\otimes_W k$  sur la catégorie des modules de type fini sur  $W$ , foncteur qui (si  $p > 0$ ) n'est pas fidèle.

**1.6. Exemple 2.  $S$  étale sur  $R$ .** — Si  $S = R$ , la catégorie  $C$  admet  $R$  lui-même comme objet final, donc le foncteur “valeur en  $R$ ” est une équivalence de la catégorie des cristaux sur  $R$ , de type  $\mathcal{F}$  donné, avec la catégorie  $\mathcal{F}_R$ . En particulier, un cristal de modules sur  $\text{Spec } \mathbf{Z}$  est essentiellement la même chose qu'un  $\mathbf{Z}$ -module.

De façon un peu plus général, si  $S$  est étale sur  $R$ , alors  $S$  est un objet final de  $C$ , et les cristaux de modules (disons) sur  $S$ , relativement à  $R$ , s'identifient aux Modules quasi-cohérents sur  $S$ .

**1.7. Exemple 3 :  $S$  un sous-préschéma de  $R$ .** — Comme la notion de cristal relatif sur  $S$  ne change pas si on remplace  $R$  par un ouvert par lequel se factorise  $S$ , on peut supposer  $S$  fermé dans  $R$ , défini par un idéal quasi-cohérent  $J$ . Soit  $S_n = V(J^{n+1})$  le  $n$ -ème voisinage infinitésimal de  $R$  dans  $S$ . Alors la famille des objets  $S_n$  de  $C$  est finale dans  $C$ , d'où on conclut facilement qu'un cristal de type  $\mathcal{F}$  sur  $S$  s'identifie à une suite  $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'objets des  $F_{S_n}$  qui se recollent. En particulier, si  $R$  est localement noethérien, un cristal de modules sur  $S$  relativement à  $R$ , de présentation finie, s'identifie à un Module cohérent sur le complété formel de  $R$  le long de  $S$ .

Cet exemple contient le cas de car  $p > 0$  de l'exemple 1, si on note qu'à priori, grâce à Cohen, un cristal absolu sur  $k$ , c'est pareil qu'un cristal relativement à  $W$ .

On peut aussi donner un énoncé commun aux exemples 2 et 3, en partant du cas où on se donne un  $S \longrightarrow R$  non *ramifié*, ce qui permet en effet de construire

encore des “voisinages infinitésimaux”  $S_n$ .

**1.8. Relation avec la notion de stratification.** — Les données  $R, S, \mathcal{F}$  étant comme d’habitude, considérons pour chaque entier  $n \geq 0$  le voisinage infinitésimal  $\Delta_n$  de la diagonale de  $S \times_R S$ , qui s’envoie dans  $S$  par les deux projections  $pr_1$  et  $pr_2$ . Si  $E$  est un objet de  $\mathcal{F}_S$ , une  $n$ -*connexion* sur  $E$  (relativement à  $R$ ) est la donnée d’un isomorphisme  $pr_1^*(E) \simeq pr_2^*(E)$  qui induit l’identité sur la diagonale. Une  $\infty$ -*connexion* ou *pseudo-stratification* de  $E$ , est la donnée pour tout  $n$  d’une  $n$ -connexion, de telle façon que ces  $n$ -connexions se recollent. Enfin, une *stratification* sur  $E$  est la donnée d’une pseudo-stratification qui satisfait aux conditions formelles d’une donnée de descente, quand on fait intervenir les voisinages infinitésimaux de tous ordres de la diagonale de  $S \times_R S \times_R S$ . Ces notions donnent lieu à des sorties analogues à ceux de 1.2. et 1.3. Notons que lorsque  $S$  est “formellement non ramifié sur  $R$ ” i.e.  $\underline{\Omega}_{S/R}^1 = 0$ , alors toutes ces notions deviennent triviales: un objet  $E$  admet alors toujours exactement une connexion de tout ordre, donc une seule pseudo-stratification, et celle-ci est une stratification: donc la catégorie des objets de  $\mathcal{F}_S$  munis d’une stratification relativement à  $R$  est alors équivalente, par le foncteur “valeur en  $S$ ”, à la catégorie  $\mathcal{F}_R$  elle même. (Dans tous les cas, le foncteur “valeur en  $S$ ” est fidèle).

Ceci défini, on voit que pour tout cristal  $\mathcal{M}$  sur  $S$  de type  $\mathcal{F}$  (relativement à  $R$ ), sa valeur  $\mathcal{M}(S) = M$  est un objet de  $\mathcal{F}_S$  muni d’une *stratification canonique* relativement à  $R$ , d’où un foncteur: cristaux relatifs de type  $\mathcal{F} \rightsquigarrow$  objets de  $\mathcal{F}$  munis d’une stratification. La remarque de 1.4. montre d’ailleurs que ce foncteur n’est pas toujours fidèle. Il y a cependant des cas intéressants où ce foncteur est une *équivalence de catégories*: il en est en tous cas ainsi si  $S \longrightarrow R$  est “*formellement lisse*”, par exemple si c’est un morphisme lisse, ou si  $S$  et  $R$  sont des spectres de corps  $k_0, k$ , avec  $k$  une extension *séparable* de  $k_0$ . (Quand d’ailleurs  $S \longrightarrow R$  est même formellement étale, alors les deux catégories: celle des cristaux et celle des objets à stratification, deviennent équivalentes, par le foncteur “valeur en  $S$ ”, à  $\mathcal{F}_S$  lui-même, ce qui nous redonne l’exemple à la noix de 1.5 où  $k$  est de car. nulle). Sauf erreur, on a encore une équivalence de catégories si  $S \longrightarrow R$  est *plat et localement de présentation finie*, (du moins si  $R$  localement noétherien, et se bornant aux Modules cohérents) mais je n’ai pas écrit la démonstration.



### 1.9. Une digression sur la notion de stratification en caractéristique nulle.

— Quand  $S$  est lisse sur  $R$  (en fait, il suffit que  $S$  soit différentiellement lisse sur  $R$ , i.e. le morphisme diagonal  $S \longrightarrow S \times_R S$  une immersion régulière), et si  $R$  est de caractéristique nulle, alors une stratification d'un Module  $M$  sur  $S$  (relativement à  $R$ ) est connue quand on connaît la 1-connexion qu'elle définit, et on peut se donner celle-ci arbitrairement, soumise à la seule condition que le "tenseur courbure", qui est une certaine section de  $\underline{\Omega}_{S/R}^2 \otimes \text{End}(M)$ , soit nul. (Cela peut aussi s'exprimer en disant qu'on fait opérer le faisceau  $\underline{\text{Der}}_{S/R}$  des dérivations relatives de  $S$  sur  $R$ , sur  $M$ , de façon à satisfaire aux relations habituelles, y compris celle de transformer crochet en crochet). J'ignore dans quelle mesure l'hypothèse de lissité est nécessaire pour cet énoncé, ou si (dans le cas lisse disons) on peut formuler un énoncé analogue pour toute catégorie fibrée  $\mathcal{F}$  sur  $\text{Sch}_R$ . Mais bien entendu, l'hypothèse de caractéristique nulle faite sur  $R$  est tout à fait essentielle. Si  $R$  est de caractéristique  $p > 0$ , l'énoncé qui remplace le précédent (et qui sauf erreur est dû à Cartier) est que dans ce cas, la donnée d'une "connexion sans torsion" sur  $M$  <sup>47</sup> équivaut à une "donnée de descente" sur  $M$  relativement à Frobenius  $S \longrightarrow S^{(p/R)}$ . Il y a loin de là à une stratification !

**1.10. La notion de  $p$ -cristal et ses variantes.** — Nous supposons maintenant que  $S$  est de caractéristique  $p > 0$ , et  $R = \text{Spec}(\mathbb{Z})$  (ou  $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ , spectre des entiers  $p$ -adiques, cela reviendrait au même). Si  $\mathcal{M}$  est un cristal de modules sur  $S$ , de présentation finie, alors en vertu de 1.5., pour tout  $s \in S$ , si  $s'$  est le spectre d'une clôture parfaite de  $k(s)$ , l'image inverse  $\mathcal{M}(s')$  de  $\mathcal{M}$  en  $s'$  peut être interprétée comme un module de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt  $W(k(s'))$ . Ainsi, la notion de cristal de modules sur  $S$  (au sens absolu) semble convenable pour formaliser la notion de "*famille algébrique*" de modules sur les anneaux de vecteurs de Witt aux différents points parfaits au dessus de  $S$ . Bien entendu, la notion de cristal est plus fine que ça encore, et doit donner, j'espère, la bonne notion de "famille" lorsque, disons,  $S$  est le spectre d'un corps de fonctions (donc pas nécessairement parfait). Je vais maintenant introduire une structure supplémentaire, qui devrait permettre de formuler, de même, la notion de "famille algébrique de modules de Dieudonné", paramétrée par  $S$ ,

---

<sup>47</sup>"compatible avec puissances  $p$ -èmes"

Considérons le morphisme “puissance  $p$ -ème”

$$S \xrightarrow{\text{frob}_S} S,$$

il permet d’associer, à tout cristal (absolu) sur  $S$ , d’espèce quelconque, un cristal image inverse:

$$\mathcal{M}^{(p)} = \text{frob}_S(\mathcal{M}).$$

On appelle  $p$ -cristal sur  $S$  un cristal  $\mathcal{M}$  sur  $S$ , muni d’un morphisme de cristaux

$$\mathcal{M}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{M}.$$

Évidemment, les  $p$ -cristaux sur  $S$  d’espèce  $\mathcal{F}$  donnée forment encore une catégorie, dépendant fonctoriellement de  $\mathcal{F}$  (pour les foncteurs *covariants* cartésiens de catégories fibrées), ce qui permet par exemple, pour les  $p$ -cristaux de modules sur  $S$ , d’introduire toutes les opérations tensorielles habituelles covariantes (produits tensoriels, puissances alternées et symétriques etc). Pour définir le *dual* d’un  $p$ -cristal de modules, il y a lieu d’introduire une notion duale de celle de  $p$ -cristal d’espèce  $\mathcal{F}$ , c’est celle de  $p^{-1}$ -cristal d’espèce  $\mathcal{F}$  : c’est un cristal d’espèce  $\mathcal{F}$ , avec un morphisme de cristaux en sens inverse:

$$V : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{(p)}.$$

Ainsi un contrafoncteur cartésien entre catégories fibrées sur  $S$  transforme  $p$ -cristaux en  $p^{-1}$ -cristaux, et inversement. Les  $p^{-1}$ -cristaux de modules se multiplient tensoriellement entre eux comme les  $p$ -cristaux de modules.

Pour obtenir une notion “autoduale”, il y a lieu d’introduire la notion de *bi-cristal de poids 1* sur  $S$ , qu’on pourrait aussi appeler un *cristal de Dieudonné* sur  $S$ , lorsque  $\mathcal{F}$  est fibré en catégories additives: c’est un cristal muni à la fois d’une  $p$ -structure et d’une  $p^{-1}$ -structure, satisfaisant aux relations

$$FV = p \text{Id}_M, \quad VF = \text{Id}_{M^{(p)}}.$$

Cette notion semble tout à fait adéquate à l’étude des groupes formels, ou ce qui revient moralement au même, à l’étude de la cohomologie de De Rham en

dimension 1. En dimension supérieure  $i$ , il y a lieu d'introduire la notion de *bi-cristal de poids  $i$* , qui est un cristal muni de  $F$  et  $V$  satisfaisant aux relations

$$FV = p^i \text{Id}_M, \quad VF = p^i \text{Id}_{M^{(p)}}.$$

Par exemple, on définit le *bicristal de Tate de poids  $2i$* , qui est défini par le cristal de modules unité (associant à tout  $T$  sous  $S$  le module  $\underline{O}_T$  lui-même), et les morphismes de cristaux

$$F = p^i \text{Id}_{T^i}, \quad V = p^i \text{Id}_{T^i}.$$

Ainsi le bicristal de Tate de poids  $2i$  est la puissance tensorielle  $i$ -ème du bicristal de Tate de poids 1. (**N.B.** les bicristaux de poids quelconques se multiplient tensoriellement, de façon que les poids s'ajoutent).

**1.11.** — Si on veut “rendre inversible” le bicristal de Tate  $T^1$ , on est obligé, qu'on le veuille ou non, de passer à une catégorie de fractions de la catégorie des cristaux de modules sur  $S$ , (qui entre parenthèses est une catégorie  $\mathbf{Z}_p$ -linéaire, (i.e. les  $\text{Hom}$  sont des  $\mathbf{Z}_p$ -modules...), tout comme les catégories de  $p$ -cristaux etc qu'on en déduit). Il revient donc au même de passer à une catégorie de fractions, en déclarant qu'on veut rendre notre catégorie abélienne  $\mathbf{Q}$ -linéaire, ou en déclarant qu'on la veut rendre  $\mathbf{Q}$ -linéaire : il faut faire le quotient par la sous-catégorie abélienne épaisse formée des objets de torsion, qui sont aussi des objets de  $p$ -torsion<sup>48</sup>. On trouve la catégorie des “*cristaux de modules à isogénie près*”, ou *isocristaux*, sur  $S$ . Utilisant cette nouvelle notion, on définit comme ci-dessus la notion de  $p$ -isocristal, comme étant la donnée d'un isocristal  $\mathcal{M}$  muni d'un homomorphisme  $F : \mathcal{M}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{M}$ . La notion de bi-isocristal de poids  $i$ , qui serait calquée de celle de bicristal de poids  $i$ , n'est pas très raisonnable alors, car  $V$  doit être alors donné en termes de  $F$  comme  $p^i F^{-1}$ . Il y a lieu plutôt d'appeler *bi-isocristal* (sans précision de poids) un  $p$ -isocristal pour lequel  $F$  est un *isomorphisme*, et de ne pas choisir entre les différents  $p^i F^{-1}$  possibles; il vaut mieux également ne pas parler ici de  $p^{-1}$ -isocristal, la notion intéressante étant celle de bi-isocristal, qui est manifestement *autoduale* quand on se restreint aux objets de type fini: le dual de  $(\mathcal{M}, F)$  est  $(\mathcal{M}, {}^t F^{-1})$ , où  $\mathcal{M}$  est le iso-cristal dual de  $M$ .

<sup>48</sup>et cela revient simplement à garder les mêmes objets, et à prendre comme nouveaux  $\text{Hom}$  les  $\text{Hom} \otimes_{\mathbf{ZQ}}$ .

On peut également, bien sûr, localiser par rapport à  $p$  en partant déjà de la catégorie des bi-isocristaux de poids  $i$ , on trouve les *bicristaux de poids  $i$  à isogénie près*, qui forment une catégorie abélienne  $\text{Isbcr}(S, i)$ , et un foncteur exact “oubli de  $V$ ”

$$\text{Isbcr}(S, i) \longrightarrow \text{Isbcr}(S),$$

à valeurs dans la catégorie  $\text{Isbcr}(S)$  des iso-bicristaux sur  $S$ . Ce foncteur est *pleinement fidèle*, de sorte que *les bi-isocristaux forment une généralisation commune des bicristaux de poids  $i$  à isogénie près*. Pour préciser ce point, désignant par  $\text{Bcr}(S, i)$  la catégorie des bicristaux de poids  $i$  sur  $S$ , il y a lieu d’introduire des foncteurs canoniques

$$\text{Bcr}(S, i) \longrightarrow \text{Bcr}(S, i + 1) \longrightarrow \dots,$$

donnés par  $(\mathcal{M}, F, V) \rightsquigarrow (\mathcal{M}, F, pV)$ . Quand on localise ces foncteurs par  $p$ , on trouve des foncteurs

$$\text{Isbcr}(S, i) \longrightarrow \text{Isbcr}(S, i + 1) \longrightarrow \dots$$

qui se trouvent être *pleinement fidèles* : on peut donc considérer que, pour  $i$  croissant, la notion de “bicristal de poids  $i$ , à isogène près” constitue une généralisation de plus en plus large de celle de “cristal de Dieudonné”. La notion de “bi-isocristal” est à ce titre une généralisation qui englobe toutes les précédentes, et qui de plus a la louable vertu d’être stable par produit tensoriel, *et* passage au dual. Cela semble donc une catégorie toute indiquée comme catégorie des valeurs pour un foncteur “cohomologie de De Rham” convenable, lorsqu’on se décide à travailler à isogénie près.

**1.12. Exemple 1 : Cas où  $S$  est le spectre d’un corps parfait  $k$ .** — Alors la donnée d’un cristal de modules de type fini sur  $k$  équivaut à la donnée d’un module de type fini  $M$  sur  $W$ , la formation du motif  $\mathcal{M}^{(p)}$  correspond à la formation

$$M^{(p)} = M \otimes_W (W, f_W),$$

où  $f_W$  est l’endomorphisme de frobenius de  $W$ , et  $(W, f_W)$  est la  $W$ -algèbre définie par  $f_W$ . Par suite un structure de  $p$ -cristal sur  $M$  revient à la donnée d’un homomorphisme de  $W$ -modules  $M^{(p)} \longrightarrow M$ , ou si on préfère, à la donnée d’un homomorphisme  $f_W$ -semi-linéaire

$$F_M : M \longrightarrow M.$$

Comme l'application  $x \longrightarrow x \otimes 1$  de  $M$  dans  $M \otimes_W (W, f_W)$  est bijective,  $f_W$  étant un automorphisme de  $W$ , on peut considérer la bijection inverse, qui est  $f_W^{-1}$ -semi-linéaire. Par suite, la donnée d'une  $p^{-1}$ -structure sur  $M$  revient à la donnée d'un homomorphisme  $f_W^{-1}$ -linéaire:

$$V_M : M \longrightarrow M.$$

la donnée d'un couple  $(F, V)$  définit sur  $M$  une structure de bi-cristal de poids  $i$  si et seulement si on a

$$FV = VF = p^i Id_M.$$

En particulier, pour  $i = 1$ , on retrouve la notion de *module de Dieudonné*: la catégorie des cristaux de Dieudonné sur  $k$  est canoniquement équivalente à celle des modules de Dieudonné relativement à  $k$ .

La catégorie des isocristaux de type fini sur  $k$  est équivalente à la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps des fractions  $K$  de  $W$ . Donc un biisocristal (de type fini) sur  $k$  s'identifie à un tel vectoriel, muni d'un  $f_K$ -endomorphisme bijectif.

Toutes ces descriptions sont compatibles avec les opérations tesorielles, et la formation d'images inverses pour  $k$  variable.

On peut se demander, avec la description précédente des bi-isocristaux, quels sont ceux qui sont les couples  $(E, F)$ ,  $E$  un vectoriel sur  $K$  et  $F$  un automorphisme semi-linéaire, tels que, si on pose  $V = p^i F^{-1}$ , pour tout  $x \in E$ , l'ensemble de ses transformés par les différents monômes non commutatifs en  $F$ ,  $V$  soit une partie *bornée* de  $E$ : c'est une pure tautologie. Pour qu'il existe un  $i$  ayant cette propriété, il faut et il suffit que pour tout  $x \in E$ , l'ensemble des  $F^n x$  soit borné. Bien entendu, c'est là une propriété qui est stable par changement de  $F$  en  $pF$  (correspondant à la tensorisation par le bi-isocristal de Tate de poids 2), mais non par le changement de  $F$  en  $p^{-1}F$  (correspondant à la tensorisation par l'inverse  $T^{-1}$  du bi-isocristal précédent). Comme on tient beaucoup à inverser Tate, on voit qu'il n'est pas naturel, en fait, de poser une condition de croissance sur l'ensemble des itérés de  $F$ . De façon précise, appelant *effectis* les bi-isocristaux qui proviennent d'un objet d'un Isbicr( $S, i$ ), on voit que tout bi-isocristal est de la forme  $T^{-i} \otimes_{\underline{N}}$ , avec  $\underline{N}$  effectif: on n'a pas ajouté plus de nouveaux objets qu'il n'était absolument nécessaire !

**1.13. Exemple 2 :  $S$  lisse sur un corps parfait  $k$ .** — Déterminons d’abord dans ce cas les cristaux sur  $S$ , sans plus. Wout d’abord, sans condition de lissité, on voit à l’aide de la propriété caractéristique de  $W$  que la catégorie  $C$  introduite dans 1.0. ne change pas, essentiellement, quand on remplace  $R = \text{Spec}(\mathbf{Z})$  par  $R = \text{Spec}(W)$ . D’autre part, il résulte aussitôt des définitions que la donnée d’un cristal sur  $S$ , relativement à  $W$ , revient à la donnée d’un système cohérent de cristaux sur  $S$ , relatifs aux  $W_n = W/p^{n+1}W$ . (**NB** On n’a pas formulé avec la généralité qui convenait l’exemple 3 de 1.7.!) Théoriquement, on est donc ramené à déterminer, pour chaque  $n$ , la catégorie des cristaux sur  $S$  relatifs à  $W_n$ , et les foncteurs restrictions entre ces catégories. D’ailleurs, il est inoffensif de se localiser sur  $S$ , par exemple de supposer au besoin  $S$  affine. Utilisant maintenant la lissité de  $S$ , on peut donc supposer que pour tout  $n$ ,  $S$  se remonte en un  $S_n$  lisse sur  $W_n$ , de façon que ces choix se recollent (il suffit pour ceci  $S$  lisse et affine). Or, il résulte encore facilement des définitions, utilisant seulement que  $S = S_0 \longrightarrow S_n$  est une immersion fermée définie par un Idéal nilpotent, que le foncteur restriction des cristaux sur  $S_n$  (relativement à une base quelconque - ici on prendra  $W_n$ ) vers les cristaux sur  $S_0$ , est une équivalence de catégories, donc un cristal sur  $S$  relativement à  $W_n$  s’identifie à un cristal sur  $S_n$  relativement à  $W_n$ . Comme  $S_n b$  est lisse sur  $W_n$ , il résulte de ce qui a été dit dans 1.8. que les cristaux en question s’identifient aux objets (de l’espace  $\mathcal{F}$  considérée) sur  $S_n$ , munis d’une stratification relativement à  $R_n = \text{Spec}(W_n)$ . Les foncteurs restrictions sur les cristaux s’expriment alors par les foncteurs restrictions correspondants pour objets stratifiés. En résumé: *un cristal  $\mathcal{M}$  sur  $S$  s’identifie à un système cohérent  $(\mathcal{M}_n)$  d’objets à stratification sur les différents  $S_n$  sur  $R_n = \text{Spec}(W_n)$ .* Pour relier ceci à des objets qui soient plus dans la nature d’objets “définis en caractéristique nulle”, supposons d’abord que l’on puisse même relever  $S$  en un schéma  $X$  propre sur  $R = \text{Spec}(W)$ , hypothèse évidemment bien restrictive. On voit alors, utilisant les théorèmes de comparaison EGA III 4.5 que *dans le cas de cristaux de modules cohérents sur  $S$ , la catégorie des dits est canoniquement équivalente à la catégorie des Modules cohérents  $M$  sur  $X$ , munis d’une stratification relativement à  $R = \text{Spec}(W)$ .* (**N.B.** Il se trouve donc, à posteriori, que cette dernière catégorie est essentiellement indépendante du relèvement choisi  $X$  de  $S$ ). Considérant la fibre générique  $X_K$  de  $X$  sur  $R$ , qui est un schéma

propre et lisse sur un corps de caractéristique nulle, on trouve donc un foncteur remarquable “restriction” ou “localisation”, allant de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur  $S$ , dans la catégorie des Modules cohérents sur  $X_K$ , stratifiés relativement à  $X_K$ . Or (oubli de 1.8.) on voit facilement qu’un Module cohérent stratifié sur un préschéma localement de type fini sur un corps est nécessairement localement libre. De plus comme ici  $K$  est de caractéristique nulle, et  $X_K$  lisse dessus, on a signalé dans 1.8. que la notion de stratification s’explique très simplement comme celle de “connexion intégrable”. [Enfin, lorsque  $S$  donc  $X_K$  est géométriquement connexe, et que  $K$  peut se plonger dans le corps des complexes  $\mathcal{C}$ , alors la notion de module cohérent à action intégrable sur  $X_K$  s’interprète en termes de représentations linéaires (complexes) du groupe fondamental transcendant de  $X_{\mathcal{C}}^{an}$ , de façon bien connu. Si par exemple le groupe fondamental transcendant est le groupe unité, alors on conclût par descente que tout Module cohérent stratifié sur  $X_K$  est trivial, ce qui en termes de  $S$  s’énonce en disant que tout cristal de modules cohérents sur  $S$  est isogène à un cristal “croissant”, i.e. à un cristal qui est l’image inverse d’un cristal sur  $k$ , (lui-même défini par un module de type fini sur  $W$ ). De ceci et de la rigidité de la notion de cristal on déduit facilement, par exemple, que tout  $p$ -cristal cohérent sur  $S$  ou tout bi-cristal de poids  $i$  donné (par exemple tout cristal de Dieudonné) est isogène à un fournit de même espèce *trivial*. On voit donc là un principale d’approche transcendante pour l’étude des familles de groupes formels (par exemple) en caractéristique  $p$ ...] Quand à la notion d’isocristal (de modules cohérents) sur  $S$ , on constate aussitôt que le foncteur précédent induit un foncteur *pleinement fidèle* de la catégorie de ces derniers, dans la catégorie des modules cohérents stratifiés sur  $X_K$ . Il s’impose évidemment d’en déterminer l’image essentielle, et pour commencer d’examiner si par hasard ce foncteur ne serait pas une équivalence de catégories. Cela me <sup>49</sup> semble un peu *trop optimiste*, mais je ne suis sûr de rien, faute d’avoir regardé. Tout ce qu’on peut dire à priori, c’est que la condition cherchée sur un Module stratifié doit être de nature locale en les points de  $X$  qui sont maximaux dans  $S$ .

Quand on ne suppose pas  $S$  propre et remonté globalement, mais qu’on suppose seulement qu’on a remonté  $S$  formellement, en un *schéma formel*  $X$  sur  $R$ ,

---

<sup>49</sup>effectivement []

alors il est vrai (en fait, de façon essentiellement triviale) que *la catégorie des cristaux de modules cohérents sur  $S$  est équivalente à la catégorie des Modules cohérents sur le schéma formel  $X$ , munis d'une stratification relativement à  $\mathrm{Spec}(W) = R$*  (quand on transcrit de façon évidente toutes les définitions envisagées dans 1.8. dans le cadre formel). Si on veut encore, comme il est légitime, trouver un analogue la restriction à  $X_K$  envisagées plus haut, il faut définir  $X_K$  comme *l'espace rigide-analytique sur  $K$  défini par le schéma formel  $X$* , et considérer sur  $X_K$  des Modules cohérents munis de *stratifications au sens rigide-analytique*, ou ce qui revient au même, de connexions intégrables en ce sens. De tels Modules sont encore nécessairement localement libres. On trouve ainsi un foncteur des cristaux de Modules cohérents sur  $S$  dans les Modules cohérents stratifiés sur  $X_K$ , induisant un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux cohérents sur  $S$ , dans la catégorie des Modules cohérents stratifiés sur  $X_K$ . Comme tout à l'heure (et même plus, si on peut dire, car c'est vraiment ici la situation "naturelle"), il s'impose de regarder quelle est l'image essentielle. On peut également se demander si les Modules cohérents stratifiés sur un espace rigide-analytique n'admettraient pas une description simple, en termes d'un groupe plus ou moins discret jouant le rôle du groupe fondamental dans la théorie transcendante sur le corps de complexes. La description donnée des cristaux sur  $S$ , toute triviale qu'elle soit, a déjà des conséquences intéressantes pour la structure de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur  $S$ : cette catégorie est noethérienne (si  $S$  est noethérien i.e. de type fini sur  $k$ ), tout objet contient donc un plus grand sous-objet de torsion, de plus objets sans torsion correspondent dans la description ci-dessus aux Modules stratifiés sans torsion sur  $X$ , lesquels sont alors automatiquement localement libres. Il est bien probable que des résultats analogues doivent être vrais sans hypothèse du genre lissité sur  $S$ .

**1.14.** — Il faut encore expliciter, dans la description générale précédente, le foncteur  $[\ ]$ , pour pouvoir décrire de façon générale, si en plus de la donnée de  $S$  sur  $k$ , on a un  $S'$  lisse sur  $k'$  parfait, et des automorphismes  $S' \rightarrow S$  et  $\mathrm{Spec}(k') \rightarrow \mathrm{Spec}(k)$  donnant lieu à un carré commutatif, et si enfin on peut relever  $S'$  formellement en  $X'$ , et  $S' \rightarrow S$  en  $X' \rightarrow X$ , donnant un carré commutatif avec  $\mathrm{Spec}(W') \rightarrow \mathrm{Spec}(W)$ , alors la notion d'image inverse de cristaux de modules cohérents, de  $S$  à  $S'$ , s'explicite en termes d'image inverse de Modules



cohérents stratifiés, de  $X$  à  $X'$ . Lorsque  $k = k'$ ,  $S = S'$ , et que les morphismes envisagés sont les puissances  $p$ -èmes, on est donc conduit à chercher à relever ce morphisme à  $X$  de façon compatible avec le morphisme  $\mathrm{Spec}(W) \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$  déduit de  $f_W$ , ou ce qui revient au même, de relever le morphisme canonique  $S \longrightarrow S^{(p/k)}$  en un morphisme de  $R$ -schémas formels  $X \longrightarrow X \times_R (R, f_R)$ . C'est en tous cas toujours possible si  $S$  est affine, cas auquel on peut se ramener. Ayant donc ainsi un morphisme

$$f_X : X \longrightarrow X,$$

compatible avec  $f_R$  sur  $R = \mathrm{Spec}(W)$ , et induisant  $f_S$  sur  $S$ , le foncteur  $[\ ]$  s'explicite comme l'image inverse ordinaire de Modules stratifiés sur  $X$  relativement à  $R$ , resp. (dans le cas de isocristaux) de Modules stratifiés sur l'espace rigide-analytique  $X_K$ , pour le "morphisme"  $X_K \longrightarrow X_K$  d'espaces rigide-analytiques (relatif à  $f_K$  sur le corps de base !) induit par  $f_K$ . Bien que  $f_K$  et par suite  $f_{X_K}$  loin d'être unique, le foncteur envisagé qu'il définit ne dépend pas, essentiellement, des choix faits.

**1.15. Bicristaux et biisocristaux sur une base quelconque.** — Ne supposons plus nécessairement  $S$  de caractéristique déterminé  $p$ . Pour chaque nombre premier  $p$ , soit  $S_p$  la fibre  $V(pI_{\mathcal{O}_S})$  de  $S$  sur le point  $p\underline{Z}$  de  $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ . Un bicristal de poids  $i$  sur  $S$  est par définition la donnée d'un cristal de Modules  $\mathcal{M}$  sur  $S$ , et pour chaque  $p$  d'une structure de bi-cristal de poids  $i$  sur la restriction  $\mathcal{M}_p$  de  $\mathcal{M}$  à  $S_p$ , définie par la donnée de  $F_p, V_p$ . On définit de même la notion de bi-isocristal sur  $S$ , étant entendu qu'un isocristal est un objet de la catégorie des isocristaux sur  $S$  (comme de juste), définie à partir de la catégorie des cristaux de modules en "localisant" par rapport à des entiers  $n > 0$  arbitraires, i.e. en tensorisant les Hom sur  $\mathcal{Z}$  par  $\mathcal{Q}$ . - Lorsque  $S$  est de caractéristique nulle, le supplément de structure impliqué par "bi" est évidemment vide, tandis que si  $S$  est de type fini sur  $\mathcal{Z}$  et domine  $\mathrm{Spec}(\mathcal{Z})$ , alors la notion envisagée est d'une essentiellement arithmétique, les différents  $F_p$  jouant le rôle d'homomorphismes de Frobenius, comme de bien entendu; dans le cas du poids 1, en particulier, on peut considérer que le cristal avec sa bi-structure supplémentaire permet de relier entre eux les groupes formels en les diverses caractéristiques auxquels il donne naissance...

**1.16. Un retour en arrière.** — La définition 1.1. et le sortie 1.3. sont un petit peu canulés. Au lieu de prendre dans 1.0. pour  $C$  la catégorie des  $R$ -flèches

$S \longrightarrow T$  qui..., il faut prendre la catégorie des  $R$ -flèches  $U \longrightarrow T$  qui..., où  $U$  est un ouvert induit non précisé de  $S$ . De plus, la définition n'est guère raisonnable alors que si la catégorie fibrée envisagée  $\mathcal{F}$  est un "champ" pour la topologie de Zariski sur  $\text{Sch}_{/R}$ , i.e. si on peut y recoller flèches et objets. Ceci est nécessaire en tous cas pour pouvoir dans 1.3. définir la notion d'image inverse, la définition que j'y ai donnée n'étant raisonnable que si  $S, S'$  sont affines. Dans le cas général, il faut se localiser sur  $S$  et  $S'$  pour se ramener à cette situation. Autrement on bute sur des canulars idiots de nature globale, comme le fait que sans restrictions sur  $S' \longrightarrow S$ , la construction envisagée de somme amalgamée fait sortir de la catégorie des préschémas... Il est probable qu'il y aura bien d'autres canulars de détail dans ces notes, mais, je pense, sans conséquence !

Il est évidemment tentant de vouloir interpréter les cristaux de modules comme faisceaux de modules sur un certain site. C'est possible, en prenant le "*site cristallogène de  $S$  sur  $R$* ", qui est précisément le site dont la catégorie sous-jacente  $C$  est celle des  $R$ -morphisms  $U \longrightarrow T$  ( $U$  ouvert de  $S$ ,  $U \longrightarrow T$  immersion fermée surjective définie par Ideal nilpotent sur  $T$ ), la topologie est celle de Zariski: on prend comme familles couvrantes "de définition" de  $(U \longrightarrow T)$  les familles définies par des recouvrements ouverts  $(T_i)$  de  $T$ , chaque  $T_i$  muni de la structure induite, et définissant  $(U_i \longrightarrow T_i)$  par  $U_i = U \cap T_i$ . Un faisceau d'ensembles sur ce site s'identifie à un système de faisceaux d'ensembles  $F_{U \longrightarrow T}$  sur les objets but des objets de  $C$ , avec, pour tout flèche  $(U \longrightarrow T) \longrightarrow (U' \longrightarrow T')$  de  $C$ , un homomorphisme de l'image inverse de  $F_{U' \longrightarrow T'}$  [ ]  $T$ , dans  $F_{U \longrightarrow T}$  (homomorphisme qui n'est pas nécessairement un isomorphisme !) et qui sont un isomorphisme si  $T \longrightarrow T'$  est une immersion ouverte. En particulier, associant à tout  $(U \longrightarrow T)$  le faisceau  $\mathcal{O}_T$  sur  $T$ , on trouve un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_C$  sur  $C$ . Ceci posé, les cristaux de modules (quasi-cohérents) sur  $S$  s'identifient aux Modules quasi-cohérents (i.e. localement conoyau d'un homomorphisme de Modules libres) sur  $\mathcal{O}_C$  ; les cristaux "de présentation finie" i.e. les cristaux de Modules de présentation finie, correspondant exactement aux Modules de présentation finie sur  $\mathcal{O}_C$ .

Quand on a un  $R$ -morphisme  $S' \longrightarrow S$ , je ne vois pas de morphisme naturel correspondant entre les *sites* cristallogènes correspondants à  $S, S'$ . Ce n'est pas bien gênant, car introduisant les *topos cristallogènes*  $\text{Topcr}_{S/R}$  et  $\text{Topcr}_{S'/R}$  définis par les

sites en question, on définit par la méthode esquissée dans 1.3. un morphisme

$$\mathrm{Topcr}_{S'/R} \longrightarrow \mathrm{Topcr}_{S/R},$$

correspondant à la notion naturelle de “image inverse de faisceaux” au sens inverse (qui, j’avoue devrait être définie avec le plus grand soin).

**1.17.** — On est donc dans une situation où on peut faire marcher la machine cohomologique. Étant loin de mes bases, je n’ai pas tenté sérieusement de tirer au clair si les images directes supérieures qu’on définit ainsi, et en particulier les groupes de cohomologie du site cristallogène, donnent ce qu’on voudrait.

Le test-clef est le suivant: *si  $R$  est le spectre d’un corps, et si  $S$  est lisse sur  $R$ , et propre sur  $R$  dans le cas de la caractéristique  $p > 0$ , on voudrait trouver, comme cohomologie à coefficients dans  $\underline{O}_C$  lui-même, la cohomologie de De Rham de  $S$  relativement à  $R$ . Plus généralement, sans condition sur  $R$ , si  $f : S' \longrightarrow S$  est propre et lisse, on voudrait trouver comme “valeur en  $S'$ ”  $R^1 f_{\mathrm{cris}*}(\underline{O}_{C'})$  (cf 1.4.) le faisceau de cohomologie de De Rham  $R^i f_*(\Omega_{S'/S}^*)$ , et on voudrait <sup>50</sup> que la connexion canonique à la Gauss-Manin sur ce dernier soit celle associée à la stratification canonique provenant de la structure cristalline (cf 1.8.).*

L’existence d’une connexion de Gauss-Manin en cohomologie de De Rham (que j’ai vérifié pour n’importe quel morphisme lisse), et le tapis de Washnitzer-Monsky, sont en tous cas des indications assez fortes pour conduire à penser qu’il doivent exister une théorie cohomologique, en termes de cristaux, donnant de telles valeurs pour l’argument  $\underline{O}_C$ . Au cas où la cohomologie du site cristallogène ne donnerait pas les résultats qu’il faut, on pourrait essayer (au lieu de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie de *tous* les Modules sur le site annelé cristallogène) de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie des seuls Modules quasi-cohérents sur le site cristallogène, i.e. dans la catégorie des cristaux de modules.

## Chapitre 2. — La cohomologie de De Rham est un cristal

**2.1.** — L’affirmation du titre n’est pour l’instant qu’une hypothèse ou un vœux pieux mais je suis convaincu qu’elle est essentiellement correcte. Comme je l’ai dit dans 1.17., il y a pour le moment deux indications dans cette directions

---

50

- a) Le travail de Washnitzer-Monsky. Deux grosses imperfections dans leur tapis: 1° ils n'obtiennent que des invariants cohomologiques *locaux* sur leur variété lisse en caractéristique  $p > 0$ , via leurs relèvements; pour avoir un invariante global, ils doivent se limiter à la dimension 1. On peut penser que cela tient à leur manque de familiarité avec les machines cohomologiques. 2° leurs invariants sont des (faisceaux de) vectoriels sur le corps des fractions de  $W$ , et non sur  $W$ , i.e. ils n'obtiennent que des invariants “modulo isogénie”. Il semble bien, en effet, que leur démonstration d'invariance fait intervenir de façon essentielle des dénominateurs. Il n'est pas exclu, d'après cette indication, que dans le titre du Chapitre il faille remplacer “cristal” par “isocristal” (et “est” par “définit”). Ce serait bien dommage, mais n'exclurait pas pour autant l'existence d'une bonne théorie cohomologique pour les cristaux, qui pour un morphisme propre et lisse et le “cristal unité” coïnciderait *modulo isogénie* avec ce que donne De Rham. Le est décisif reste celui indiqué dans 1.17, savoir: donnent-ils un résultat positif seulement en caractéristique zéro, ou en toute caractéristique ?
- b) L'existence des connexions de Gauss-Manin. J'ai vérifié pour tout morphisme lisse  $f : X \longrightarrow S$  l'existence d'une connexion canonique (absolue) sur les  $R^i f$  au sens de De Rham relatif, ou plus correctement, sur le complexe  $Rf_*(\Omega_{X/S}^\bullet)$ , considéré comme objet de la catégorie dérivée  $D(\mathcal{O}_S)$ . A vrai dire, je n'ai pas vérifié pour cette connexion une condition de “nullité de la  $[]$ ”; c'est vérifié en tous cas (par voie transcendante !) si  $S$  est lisse, sur  $R$  réduit de caractéristique nulle. [Il faut noter d'ailleurs qu'il n'y a pas d'espoir de montrer que la connexion en question provient toujours d'une stratification: c'est *faux* en caractéristique  $p > 0$ ; la raison étant que la cohomologie de De Rham pour une variété algébrique non complète (par exemple affine) n'est plus du tout raisonnable, étant beaucoup trop grosse. Pour pouvoir espérer une stratification sur  $Rf_*(\Omega_{X/S}^\bullet)$ , sans restriction de caractéristique, il faut donc supposer  $f$  *propre*.]
- c) La nécessité d'une interprétation cristallographique de la cohomologie de De Rham est également suggérée par le problème que j'avais signalé dans mon papier bleu sur De Rham: si  $R$  est le spectre du corps des complexes,  $S$  lisse sur  $R$  et  $X$

lisse et propre sur  $S$ , alors la théorie transcendante de la cohomologie fournit une suite spectrale

**2.2.** — Je vais préciser l’affirmation du titre, en me plaçant dans l’éventualité optimiste bien sûr où on n’aurait pas besoin de s’isogéniser. Comme les cristaux de modules sur un préschéma  $S$  forment une catégorie abélienne, on peut prendre la catégorie dérivée; ces objets seront appelés simplement “complexes de cristaux”. Un tel animal induit sur  $S$ , plus généralement sur tout objet-but  $T$  d’un objet  $(U \longrightarrow T)$  du site cristallogène  $C$  de  $S$ , un complexe de Modules ordinaire (envisagé comme objet de la catégorie dérivée des faisceaux de Modules sur  $S$ , resp.  $T$ ). Un complexe de cristaux est dit pseudo-cohérent (resp. parfait, resp. ...) si pour tout objet  $(U \longrightarrow T)$  de  $C$ , le complexe induit sur  $T$  est pseudo-cohérent (resp. ...). Ceci posé, voilà la théorie qu’on voudrait: A tout morphisme lisse et propre  $f : X \longrightarrow S$ , serait associé un complexe de cristaux (absolu)  $\mathrm{DR}(f)$  sur  $S$ , appelé cohomologie de De Rham cristalline de  $f$ . Ce complexe doit être parfait, sa formation doit être compatible avec tout changement de base sur  $S$  (l’image inverse des complexes des cristaux étant entendu, bien entendu, au sens de catégories dérivées...), et bien sûr  $\mathrm{DR}(f)$  dépend fonctoriellement (de façon contravariant) de  $X$  sur  $S$ . Tôt ou tard, il faudra expliciter aussi une formule de Künneth  $\mathrm{DR}(f \times_S g) \simeq \mathrm{DR}(f) \otimes \mathrm{DR}(g)$ , et une formulé de dualité, qui pour  $f$  partout de dimension relative  $d$  s’exprime comme un accouplement, définissant une autodualité,  $\mathrm{DR}(f) \times \mathrm{DR}(f) \longrightarrow T^d[2d]$ , où  $T^d$  est le cristal de Tate de poids  $2d$ , et où  $[2d]$  indique qu’on translate les degrés de  $2d$  (attention au facteur 2 !). Enfin, on veut comme de juste un isomorphisme  $\mathrm{DR}(f)(S) \simeq Rf_*(\Omega_{X/S}^\bullet)$ , fonctoriel en  $X$ , compatible avec les changements de base, avec Künneth et la dualité (déjà connus pour la cohomologie de De Rham ordinaire).

Par prudence, je me suis abstenu de dire quoi que ce soit sur le cas  $f$  non propre, dont il faudrait parler tout au moins si on voulait faire sérieusement le lien avec Washnitzer-Monsky.

**2.3. La cohomologie de De Rham comme biisocristal** — A supposer qu’on ait une théorie du type envisagé dans 2.2., on trouve pour chaque entier  $p$  un homomorphisme de Frobenius

$$F_p : \mathrm{DR}(f)_p^{(p)} \longrightarrow \mathrm{DR}(f)_p,$$

où l'indice  $p$  au complexe de cristaux  $\mathrm{DR}(f)$  désigne la restriction à  $S_p = V(p.1)$  (au sens des catégories dérivées), qui d'après les conditions de 2.2. n'est autre que  $\mathrm{DR}(f_p), f_p : X_p \longrightarrow S_p$  étant induit par  $f$ . Utilisant toujours la même condition de compatibilité avec le changement de base, on constate que  $\mathrm{DR}(f_p)^{(p)}$  n'est autre que  $\mathrm{DR}(f_p^{(p)})$ , où  $f_p^{(p)} : X_p^{(p/S_p)} \longrightarrow S_p$  est le morphisme structural de frobenius relatif de  $X_p$  sur  $S_p$ . Or on a le morphisme de frobenius  $X_p^{(p/S)} \longrightarrow X$ , qui est un  $S$ -morphisme, qui par fonctorialité de  $\mathrm{DR}$  nous donne  $\mathrm{DR}(f_p)^{(p)} \longrightarrow \mathrm{DR}(f)_p$  comme on voulait. Il faut prouver que cet homomorphisme est en fait une isogénie, donc que l'isocrystal défini par  $\mathrm{DR}(f)$  devient, à l'aide des  $F_p$ , un bi-isocrystal. Mais utilisant la relation de dualité écrite dans 2.2. (à vrai dire, l'écriture  $T^p$  pour le cristal unité ne prend son sens que lorsque on le regarde comme muni de sa structure de bi-cristal naturelle, qui n'intervient qu'ici), on peut transposer  $F$  en un  $V$ , tel que  $FV = VF = p^{2d}$ , ce qui prouve notre assertion.

D'ailleurs, lorsque l'on passe du cristal de De Rham  $\mathrm{DR}(f)$  à l'isocrystal correspondant, donc des objets de cohomologie  $\mathrm{DR}^i(f)$  aux isocristaux correspondants, il sera vrai (tout comme pour les  $R^i f_*$  de De Rham en caractéristique nulle) que leur formation commute à tout changement de base, de sorte que chacun des isocristaux  $\mathrm{DR}^i(f)$  devient à son propre titre un bi-isocrystal. Au moment de rédiger 1.10. il m'avait semblé que, sans mettre du iso dans le coup,  $\mathrm{DR}^i(f)$  devrait être un bi-cristal de poids  $i$ , mais je m'étais canulé, il faudrait pour cela une polarisation de  $X$  de  $S$  qui définisse un isomorphisme (pas seulement une isogénie) de  $\mathrm{DR}^i(f)$  avec  $\mathrm{DR}^{2d-i} \otimes T^{-(d-i)}$ , ce qui n'existe évidemment que très exceptionnellement; une fois qu'on l'a, on définit  $V$  dans  $\mathrm{DR}^i$  en transposant  $F$  dans  $\mathrm{DR}^{2d-i}$ .

**2.4. Cas d'un schéma abélien** — Il semble que ce ne soit guère que dans ce cas-là où il soit bien raisonnable de parler de bi-cristaux et non seulement de bi-isocristaux. De façon précise,  $\mathrm{DR}^1(f)$  a dans ce cas une structure de bicristal, défini par les  $F_p$  précédents, et des  $V_p$  qui se définissent encore, par fonctorialité de  $\mathrm{DR}$ , à l'aide de l'homomorphisme "Verschiebung"  $A_p^{(p/S_p)} \longrightarrow A_p$  (défini avec la généralité qui convient dans les notes de Gabriel dans SGAD). Comme  $\mathrm{DR}^1(A/S)$  est un foncteur multiplicatif en  $A$ , grâce à Kunneth postulé dans 2.2., et que l'on a  $FV = VF = pId$  sur les schémas abéliens en car  $p$ , on en conclut les mêmes relations dans  $\mathrm{DR}^1$ . Cela montre donc que  $\mathrm{DR}^1(A)$  est un bicristal de poids 1, i.e. un

*cristal de Dieudonné*. Lorsque  $S$  est le spectre d'un corps parfait de caractéristique  $p \neq 0$ , un tel cristal s'identifie simplement, d'après 1.12, à un module de Dieudonné sur  $W = W(k)$ . Bien sûr, *on doit trouver que ce module n'est autre que le module de Dieudonné du groupe formel* (ou plutôt, du groupe  $p$ -divisible) *défini par la variété abélienne*  $A$ . Débarrasser de l'hyperstructure axiomatique-conjectural de 2.2., on peut exprimer ainsi la construction obtenue du module de Dieudonné:

- 1° Soit  $A$  un schéma abélien sur un schéma affine  $S$ . On sait que pour tout morphisme  $S \rightarrow T$  d'immersion fermée surjective, défini par Idéal nilpotent sur  $T$ ,  $A$  se prolonge en un schéma abélien  $B$  sur  $T$ . On peut regarder la cohomologie de De Rham ordinaire  $R^1 g_* (\Omega_{B/T}^\bullet)$ , où  $g : B \rightarrow T$  est le morphisme structural, et on sait que c'est un Module localement libre de rang  $2g$
- 2° Supposons que  $S$  soit le spectre d'un corps parfait  $k$  de car  $p > 0$ , alors le cristal précédent s'identifie à un module libre de rang  $2g$  sur  $W = W(k)$ . On y introduit les structures  $F$  et  $V$ , en utilisant comme ci-dessus les homomorphismes  $F : A \rightarrow A^{(p)}$  et  $V : A^{(p)} \rightarrow A$ . On trouve ainsi un module de Dieudonné  $M$ , et: *Deuxième affirmation* : C'est bien celui défini par Dieudonné. En d'autres termes: si  $A$  est n'importe quel anneau local artinien de corps résiduel  $k$ , et  $B$  un prolongement de  $A$  en un schéma abélien sur  $\Lambda$ , alors la cohomologie de De Rham  $H_{\text{DR}}^1(B) = H^1(B, \Omega_{B/\Lambda}^\bullet)$  est canoniquement et fonctoriellement isomorphe à  $M \otimes_W \Lambda$ , où  $M$  est le module de Dieudonné classique de  $A$ , et où on tient compte du théorème de Cohen qui munit  $\Lambda$  d'une structure canonique de  $W$ -algèbre (N.B. la fonctorialité de l'isomorphisme garantira automatiquement qu'il est compatible avec  $F$  et  $V$ ).

**2.5.** — Je n'ai pas vérifié, à vrai dire, les deux affirmations, mais n'ai pas le moindre doute qu'elles sont correctes telles quelles. Cette façon de voir le module de Dieudonné permet de plus d'explicitier de façon remarquable les variations infinitésimales de structure de la variété abélienne  $A$  donnée, en caractéristique  $p > 0$ , en termes du module de Dieudonné: les prolongement de  $A$  en un schéma abélien  $B$  sur  $\Lambda$  doivent correspondre exactement aux modules quotients libres

de rang  $g$  de  $M \otimes_{\mathbb{W}} \Lambda$  qui redonnent, modulo  $p$ , le module quotient de rang  $g$  canonique de  $M \otimes_{\mathbb{W}} k = H_{\text{DR}}^1(A)$ , (correspondant à la filtration canonique de cette cohomologie). Plus généralement et plus précisément :

3° Considérons, pour tout schéma abélien  $A$  sur une base  $S$ , sur la cohomologie de De Rham  $R^1 f_*(\Omega_{A/S}^\bullet) = H^1(f)$ , la filtration canonique

$$0 \leftarrow R^1 f_*(\mathcal{O}_A) \leftarrow H^1(f) \leftarrow R^0 f_*(\Omega_{A/S}^1) \leftarrow 0.$$

Donc pour tout  $B$  sur  $T$  comme dans 1°, on a sur  $\mathcal{M}(T) = \text{DR}^1(A/S)(T) = H^1(g)$  une filtration naturelle, ne dépendant que de la classe à isomorphisme près connue de  $\mathcal{M}(S) = H^1(f)$  provenant de  $A$ . Ceci dit, *troisième affirmation : on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre classes de prolongements de  $A$  à  $T$ , et prolongements de la filtration donnée de  $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_S$  en une filtration de  $\mathcal{M}(T)$* . Plus précisément encore, le foncteur  $B[\cdot](A, \varphi)$ , de la catégorie des schémas abéliens  $B$  sur  $T$ , dans la catégorie des schémas abéliens  $A$  sur  $S$ , munis d'une filtration  $\varphi$  de  $\text{DR}^1(A/S)(T)$  prolongement celle de  $\text{DR}^1(A/A)(S)$  (N.B. il ne s'agit que de filtrations à quotients localement libres, bien sûr) est une équivalence de catégories.

Ce énoncé est évidemment fort suggestif aussi pour des généralisations en cohomologie de De Rham de dimension supérieure, pour un morphisme lisse et projectif quelconque, tenant compte de la filtration canonique de celle ci. On voit bien en tous cas que ce dernier élément de structure n'est *pas* de nature cristalline, i.e. donnée par une filtration du cristal de De Rham postulé dans 2.2., mais est au contraire dans la nature d'un élément de structure "continu", dont la variation doit refléter fidèlement les variations de structure de motif donnant naissance au cristal envisagé. Pour arriver à préciser ce dernier point, il faudrait des fondements un peu plus fermes de la théorie des motifs, comme de celle (certainement beaucoup plus élémentaire) des cristaux et de la cohomologie de De Rham. Une autre généralisation, (suggérée par comparaison du 3° avec Serre-Tate, disant que si  $S$  est de caractéristique  $p > 0$ , alors étendre  $A$  à  $T$ , c'est pareil qu'étendre le groupe  $p$ -divisible correspondant), concerne la théorie des groupes formels, dont il sera question au Chapitre 3. Pour préparer le terrain, je vais présenter d'une façon un peu différente le cristal  $\text{DR}^1(A/S)$  associé à un schéma abélien, en utilisant explicitement la structure de groupe du dit.



**2.6.** — De façon générale, paraphrasant sur une base quelconque une vieille construction de Serre (c'est de lui que je l'ai apprise, du moins), on trouve que pour tout schéma abélien  $A$  sur une base  $S$ , il y a une extension naturelle de  $A$  par le fibré vectoriel  $V(R^1 f_*(\mathcal{O}_A)) = V(\sqcup_A)$ , (où  $A$  est le schéma abélien dual de  $A$ ). Attention à la notation, le fibré vectoriel  $V(\mathcal{E})$  est contravariant en  $\mathcal{E}$ , ces sections sont les homomorphismes  $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_S$  ! L'extension en question est universelle parmi les extensions de  $A$  par des fibrés vectoriels, est fonctorielle en  $A$ , et compatible avec changement de base. Appelons la  $G(A)$ . Ainsi, le faisceau de Lie de  $G(A)$  est une extension

$$[]$$

qui est duale de la suite exacte envisagée dans 2.5., dont nous avons donc ici une construction indépendante en termes d'extensions de  $A$  par des groupes vectoriels. On peut en profiter pour préciser en affirmant que, pour un prolongement  $B$  de  $A$ , de  $S$  à  $T$ , le schéma en groupes  $G(B/S)$  est déterminé, à isomorphisme canonique (et même unique) près, par la seule donnée de  $A$  et de  $S \longrightarrow T$ , indépendamment du choix particulier du prolongement  $B$ . En d'autres termes, on trouve un *cristal en schémas de groupes lisses*  $\mathcal{G}(A/S)$ , et pour chaque prolongement infinitésimal  $B$  de  $A$  à un  $T$ , un isomorphisme canonique  $\mathcal{G}(A/S)(T) \simeq G(B/T)$ ; tout ça bien sûr fonctoriel en  $A$  et compatible avec changements de base. D'autre part, on peut préciser alors 3° en indiquant quel est le foncteur quasi-inverse de celui envisagé dans cet énoncé: l'extension de la filtration de  $DR^1(A/S)(S)$  en une filtration du faisceau de Lie  $DR^1(A/S)(T)[\ ]$  de  $\mathcal{G}(A/S)(T)$  revient à étendre le sous-groupe vectoriel canonique de  $\mathcal{G}(A/S)(S)$  en un sous-groupe vectoriel de  $\mathcal{G}(A/S)(T)$ , et l'on trouve  $B$  en passant simplement au quotient.

N.B. Je suis tombé sur la connexion canonique de  $G(A/S)$  en essayant de simplifier la construction de Manin de l'application  $A(S) \longrightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$  associée à une équation de Picard-Fuchs sur  $S$ , relativement à  $A$ . Pour ceci, il suffit de noter que localement sur  $S$  toute section de  $A$  sur  $S$  se remonte en une section de  $G = G(A/S)$  sur  $S$  ! La donnée de la connexion de  $G$  permet alors de prendre la dérivée de cette section, qui est un élément de  $\Gamma(S, \sqcup_G \otimes \Omega_S^1)$ , déterminé modulo une section de l'image du faisceau  $[\ ]$ , correspondant à l'indétermination du relèvement d'une section de  $A$  en une section de  $G$ . Les équations de Picard-Fuchs sont définies tout

juste pour arriver, d'une telle section de  $[]$  (qui en fait est un *cocycle*, compte tenu de la connexion canonique de  $\sqcup_G$  provenant de  $G$ ), avec l'indétermination qu'on vient de préciser, à tirer une section de  $\mathcal{O}_S$ ... (Du moins en caractéristique nulle, cas dans lequel se place Manin de toutes façons).

Voici les résultats positifs que j'ai vérifiés dans la direction des assertions précédentes :

- a) Si  $S$  est de caractéristique nulle, les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par l'introduction du schéma en groupes  $G(A)$ ) sont vraies.
- b) Sans restriction sur  $S$ , il est vrai que  $G(A)$  n'a pas d'automorphismes infinitésimaux<sup>51</sup>, donc si pour deux relèvements infinitésimaux données  $B, B'$  de  $A$ ,  $G(B)$  et  $G(B')$  sont isomorphes, l'isomorphisme entre eux est unique. Donc si l'hypothèse précédente est vérifiée quels que soient les relèvements infinitésimaux de  $A$  au dessus d'un ouvert  $U$  de la base  $S$ , alors les  $G(B)$  définissent effectivement un cristal en groupes sur  $S$ , à fortiori les  $H(B)$  définissent un cristal de modules, et  $G(A)$  et  $H_{\text{DR}}^1(A/S)$  sont munis de stratifications absolues canoniques, fonctorielle d'ailleurs en  $A$  satisfaisant aux conditions envisagées, et compatible avec tout changement de base qui invarie notre hypothèse sur  $A$ .
- c) Les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par  $G(A)$ ) sont vraies par les relèvements infinitésimaux d'ordre 1, ou tout au moins lorsque  $T$  est de la forme  $D(\mathcal{J})$ , schémas des nombres duals d'ordre fini par un  $\mathcal{J}$  quasi-cohérent.<sup>52</sup>

**2.7.** — Arrivé à ce point de mes brillantes conjectures, je m'aperçois avec consternation qu'elles sont fausses telles quelles, malgré les indications concordantes militant en leur faveur. De façon précise, soit  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$ . Je dis qu'il *n'est pas possible, pour tout  $k$ -schéma  $S$  de type fini, de dimension  $\leq 1$* <sup>53</sup>, avec  $S_{r_g}$  régulier, et tout schéma elliptique  $A$  sur  $S$ , de mettre sur  $H_{\text{DR}}^1(A/S)$  une stratification relativement à  $k$ , qui soit fonctorielle en  $A$  et compatible avec les changements de base. L'ennui, comme d'habitude, provient des courbes elliptiques de

---

<sup>51</sup>faux

<sup>52</sup>à vérifier, c'est peut-être faux

<sup>53</sup>ou même  $\leq 0$  !

Hasse nul. Appliquant en effet les deux fonctorialités postulées, on trouve que l'homomorphisme "frobenius" qui va de  $M^{(p)}$  dans  $M$  ( $M = H_{\text{DR}}^1(A/S)$ ) serait compatible avec la stratification. Si alors  $S \in S$  est un point correspondant à un  $A_S$  de Hasse nul, i.e. tel que frobenius sur  $H_{\text{DR}}^1(A_S)$  soit de carré nul, on en conclurait aisément, grimpant sur les voisinages infinitésimaux de  $S$ , que la même propriété serait vraie aux points voisins de  $S$ , ce qui est évidemment faux p.ex. pour la famille modulaire.

Ceci montre que décidément, il faut en rabattre, et que dans le titre du Chapitre et les considérations de 2.2., c'est à condition de prendre partout des isocristaux qu'il reste une chance d'une théorie du genre de celle envisagée précédemment. Il est fort possible d'ailleurs que la notion de isocristal que j'ai adoptée est encore trop restrictive, en ce sens que dans la description de 1.13. il faudra peut-être prendre des stratifications en caractéristique nulle qui ne se prolongeraient pas nécessairement sur le schéma formel sur  $W =$  vecteurs de Witt tout entier. C'est une analyse soigneuse du calcul-clef de Washnitzer-Monsky qui devrait permettre de tirer cette question au clair.

2.8. — Il se pose la question, d'autre part, pour quels schémas abéliens les énoncés 1° et 3° de 2.4, 2.5. et 2.6. sont valables, en dehors du cas déjà signalé:  $S$  de caractéristique nulle.

Il n'est pas exclu entièrement, cependant, que en restant en car.  $p > 0$ , l'énoncé sur la non-variation infinitésimal de  $G(A)$  avec  $A$ ,  $A$  partout ordinaire, soit vrai. Cela impliquerait que sur l'ouvert des valeurs "ordinaires" de l'invariant, le  $H_{\text{DR}}^1$  a une stratification canonique, mais celle-ci ne se prolongerait pas à la courbe modulaire toute entière. Mais je dois dire que ce drôle de comportement, où on aurait une stratification naturelle en car.  $p$  et une autre en car. 0, sans qu'elles veuillent se recoller, semble assez canularesque.

[Les considérations précédentes font bien ressortir la nature "infinite" de la notion de stratification, par contraste avec celle de connexion, malgré les trompeuses apparences de la caractéristique nulle. Ainsi, sur le  $H_{\text{DR}}^1$  de la famille modulaire sur  $F$  de schémas elliptiques, il y a au dessus de la fibre générique  $S_Q$  de  $S$  une stratification naturelle, mais nous venons de voir (ou presque...) que cette stratification ne s'étend pas en une stratification sur  $S_U$ ,  $U$  un ouvert non vide de  $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ . (Le

“presque” provient du fait qu’il n’est pas absolument clair si la stratification qu’on obtiendrait ainsi en caractéristique  $p$  serait respectée par Frobenius; il faut absolument tirer au clair cet exemple particulier !). C’est en un sens assez moral, puisque pour nous le module à stratification doit jouer dans une large mesure le rôle d’un faisceau  $\ell$ -adique, dont il partage également les propriétés de rigidité.]

Pour en revenir à l’alinéa précédent, concernant un schéma abélien “ordinaire” en car  $p > 0$ , s’il n’est pas exclu que le  $H_{DR}^1$  admette une stratification canonique fonctorielle, il me semble cependant exclu, malheureusement, que celle-ci provienne d’un cristal de modules sur  $S$ , i.e. que ceci reste vrai en remplaçant  $S$  par toute extension infinitésimale, pas nécessaire de car  $p$ , (tout au moins en admettant que la connexion associée à la stratification en question soit la connexion de Gauss-Manin). En effet, appliquant une telle hypothèse au schéma modulaire  $S$  sur  $\mathbf{Z}_p$  précédent, dont on enlèverait les points de Hasse nul d’abord d’où  $S'$ , on conclurait sauf erreur que la stratification qu’on a en caractéristique nulle sur  $H_{DR}^1$  se prolongerait à  $S$  tout entier, car elle se “recollerait” en un sens évident avec la stratification qu’on aurait au dessus du complété  $p$ -adique de  $S'$  (ce qui doit impliquer le prolongement sur  $S$  de façon assez formelle). Mais alors on aurait en car  $p$  une stratification du  $H_{DR}^1$  au dessus du schéma modulaire tout entier, Hasse nul inclus, ce qui est absurde comme on l’a déjà remarqué. Il faut en conclure, hélas, que si les isocristaux, et le cas échéant les modules stratifiés même en caractéristique  $p > 0$ , ont des chances d’être des outils convenables pour l’étude de familles de variétés abéliennes, celle de cristal elle-même semble irrémédiablement trop fine, même en se restreignant à des familles de variétés abéliennes “ordinaires” en car  $p > 0$ . Elle peut tout au mieux de prêter au cas d’un schéma de base réduit à un point, spectre d’un corps pas nécessairement parfait, et on peut alors espérer les résultats les plus satisfaisants en se bornant aux variétés abéliennes ordinaires ? - Pour que la notion de cristal elle-même puisse être utilisée pour des schémas abéliens sur des bases plus générales, il semble donc qu’il faille imposer aux familles envisagées des restrictions très sérieuses, consistant à imposer la variation infinitésimale du  $G(A)$ . Cela semble assez proche du point de vue de Serre, qui étudie les variations de variétés abéliennes (éventuellement à multiplication complexe donnée) en imposant à priori l’espace tangent (et l’action de la multiplication complexe dessus)...

### Chapitre 3. — Remarques sur les groupes $p$ -divisibles

**3.1.** — Bien sûr, en même temps que pour les variétés abéliennes, je dois en rabattre sur les groupes formels. Je veux simplement signaler que la construction de  $G(A)$  dans 2.6. doit pouvoir se paraphraser sans difficulté pour un groupe  $p$ -divisible  $\emptyset$  sur un préschéma  $S$  à caractéristiques résiduelles égales au même  $p$ . En effet les homomorphismes de ce groupe dans le groupe formel associé à  $G_a$  sont triviales (en particulier,  $\emptyset$  n'a pas d'automorphismes infinitésimaux), d'autre part (sauf erreur) le faisceau en modules des  $H^2$  de  $\emptyset$  à valeurs dans le groupe formel associé à  $G_a$  (au sens du complexe du groupe  $\emptyset$ , variante formelle), est un Module localement libre de rang  $g^*$ , où  $g^*$  est la dimension du groupe dual de  $\emptyset$ , soit  $\emptyset^*$ ; plus précisément, ce Module doit être canoniquement isomorphe à  $\text{Lie}(\emptyset^*) = t_{\emptyset^*}$ . (Tout ceci est suggéré par les résultats de Tate et Lubin sur les modules de groupes formels; je dois avouer d'ailleurs que je n'ai pas essayé de tirer au clair ce qu'il faut entendre, dans ce contexte, par "le groupe formel associé à  $G_a$ ", et s'il y a lieu de prendre le groupe formel purement infinitésimal). Il s'impose alors de paraphraser la construction de Serre, en regardant l'extension universelle de  $\emptyset$  par un groupe formel vectoriel, qui sera ici le groupe formel (covariant) de  $t_{\emptyset^*}$ . Désignant par  $G(\emptyset)$  cette extension, son algèbre de Lie  $H(\emptyset)$  sers une extension

$$(*) \quad 0 \longrightarrow t_{\emptyset^*}^v \longrightarrow H(\emptyset) \longrightarrow t_{\emptyset} \longrightarrow 0.$$

Bien entendu,  $G(\emptyset)$  et par suite  $H(\emptyset)$  seront fonctoriels en  $\emptyset$ , et compatibles avec changement de base. Alors qu'il est certainement vrai, dans un sens qu'il conviendrait de préciser, que  $G(\emptyset)$  varie "moins que  $\emptyset$ ", quand on fait varier  $\emptyset$  infinitésimalement dans une famille, il n'est pas vrai pour autant que  $G(\emptyset)$  soit indépendant de telles variations (à l'exception, probablement, de celles du premier ordre), i.e. puisse être considéré comme provenant d'un cristal en groupes plus ou moins formels. Cela sera le cas seulement, sans doute, quand  $\emptyset$  sera extension d'un groupe ind-étale par un groupe  $p$ -divisible torique, et  $S$  réduit à un point (?). Dans le cas général, il semble intéressant d'étudier les variations infinitésimales de  $\emptyset$ , quand on se fixe celles de  $G(\emptyset)$  à l'aide d'un cristal en groupes  $\underline{G}$ .

**3.2.** — En tous cas, l'extension  $(*)$  semble un invariant intéressant du groupe  $p$ -divisible envisagé. Il subsiste, par passage à la limite, en passant au cas où  $S$  est

par exemple le spectre d'un anneau  $A$  noethérien  $j$ -adique séparé et complet, où  $J$  est un idéal tel que  $A/J$  soit à caractéristiques résiduelles égales à  $p$ . On trouve par exemple un bon invariant quand  $A$  est un anneau de valuation discrète complet, éventuellement d'inégales caractéristiques, à caractéristique résiduelle  $p$ . Dans le cas où le groupe formel réduit a la structure triviale mentionnée plus haut dans 3.1., que la donnée d'un relèvement du groupe  $p$ -divisible qu'on a sur  $k$  en un groupe  $p$ -divisible sur  $A$ , soit entièrement équivalente à la donnée d'un relèvement de la filtration de  $M \otimes_W k$  donnée par  $(*)$ , en une filtration de type  $(g, g^*)$  de  $M \otimes_W A$ . Il serait bien intéressant d'essayer de déterminer, en termes d'une telle donnée, quel est le module de Tate correspondant à la fibre générique de  $\emptyset$  ! On aimerait préciser également, pour des groupes  $p$ -divisibles plus généraux, quelle quantité d'information est liée à l'extension  $(*)$ , qui remplace ici le  $H^1$  de De Rham.

## Letter to J. Murre<sup>54</sup>

Dear Murre,

I am glad to hear that you are still willing to give the talk on unramified functors. Here what I can say to your questions.

1. The theorem about passage to quotient I alluded to is the following:

*Theorem. — Let  $f : X \longrightarrow Y$  be a morphism of  $S$ -preschemes, assume either  $X$  and  $Y$  locally of finite presentation over  $S$ , or  $Y$  locally noetherian and  $X$  locally of finite type over  $Y$ . Assume that the equivalence relation  $R = X \times_Y X$  defined by  $f$  is flat over  $X$  i.e.  $\text{pr}_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$  is flat. Then the quotient  $X/R$  exists in the strongest reasonable sense, i.e. one can factor  $f$  into a compositum  $X \longrightarrow Z \longrightarrow Y$ , with  $X \longrightarrow Z$  faithfully flat locally of finite presentation,  $Z$  locally of finite presentation over  $X$  (in fact of finite presentation over  $S$  if  $X$  is so) and  $Z \longrightarrow Y$  a monomorphism.*

Of course the factorization is unique, and the theorem can be expressed by saying that the quotient sheaf (for the fpqc topology)  $X/R$  is representable. That is in fact how the theorem is proved.

Raynaud has recently made a very nice (and non trivial) application of this theorem, by proving the following: if  $S$  is the spectrum of a discrete valuation ring,  $G$  a group prescheme of finite type over  $S$ ,  $H$  a closed and flat sub-group scheme, such that  $G_t/H_t$  is quasi-affine (where  $t$  is the generic point of  $S$ ) then  $G/H$  is representable as a quasi-affine and flat  $S$ -scheme, which is even affine if  $H$  is invariant (i.e. if  $G$  is a flat group scheme of finite type with affine generic fibre, then  $G$  is affine). This extends immediately to a base which is regular of dimension one. Raynaud is now trying to extend his construction to the case when he drops the quasi-affineness assumption, namely to construct still  $G/H$  as a quasi-projective scheme over  $S$ .

2. Theorem of the cube.

---

<sup>54</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGM1scan.pdf>

I believe we discussed about it time ago, but maybe the proof I told you was valid only if one assumes the Pic functor of one of the factors involved representable. To prove unramifiedness of the functor  $\underline{\text{Corr}}$  however you need only a weak infinitesimal form of the theorem of the square, for which you will find a proof in the manuscript notes I am joining on correspondence classes, containing also the proof of the statements you were recalling in your question 4. I hope you will be able to read them, I agree the handwriting is wretched and the notes moreover very sketchy. - On the other hand, I recall you that the theorem of the cube follows rather formally once one knows separatedness of  $\underline{\text{Corr}}_S(X, Y)$  for two of the three factors involved, and using the usual formal properties of the Picard functor (among which commutation with inverse limits of Artin rings is the less trivial).

3. As for the separatedness of  $\underline{\text{Corr}}_S(X, Y)$ , this is about trivial whenever the Pic functor of one of the factors  $X, Y$  is separated? Now this is certainly the case if for  $X$  if its geometric fibers are integral, (a fortiori if  $X$  is an abelian scheme over  $S$ !).

To show this, one may assume  $S$  the spectrum of a discrete valuation ring, and one is reduced to show that if  $\underline{L}$  is an invertible sheaf on  $X$  whose restriction to the general fiber  $X_t$  is trivial, then  $\underline{L}$  is trivial. Now  $X_1$  is an open subset of  $X$ , and the assumption on  $\underline{L}$  can be expressed by saying that  $\underline{L}$  is defined by a Cartier divisor whose support is contained in the special fiber  $X_0$ . Now  $X_0$  itself is already a Cartier divisor (defined by a global equation  $f = 0$ ) and moreover is an integral subscheme of  $X$ , from this follows that the divisor  $D$  is a multiple of  $X_0$  (assume for simplicity the fibers of  $X$  geometrically normal, and hence  $X$  normal!), hence  $D$  is linearly equivalent to 0, what we wanted to prove.

I am convinced however that  $\underline{\text{Corr}}$  is always separated (with the usual assumptions of properness, flatness, and direct image of the structure sheaf, for both functors, of course). This is easily seen to be true if the Pic functor of either factor is representable, by a simple use of dimension theory (namely, we have a morphism  $X \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{Y/S}$  whose image has a general fiber of dimension zero, hence the same holds for the special fiber...). But it is true also, by an immediate adaptation of the same argument, if we suppose only that  $\underline{\text{Pic}}_{Y/S}$  is pre-ét-représentable say, i.e. is a quotient of a representable functor  $Q$  by an étale equivalence relation (in fact,



quasi-finite and flat would do as well), with  $Q$  locally of finite type over  $S$ . Now this assumption is certainly satisfied if  $Y$  is *projective* over  $S$ , as one sees by using the representation of  $\underline{\text{Pic}}_{Y/S}$  (or rather big open pieces of it) as the quotient of a suitable scheme of immersions of  $Y$  into some  $p^r$ , by the action of the projective group operating freely, and taking a quasi-section of the corresponding equivalence relation... On the other hand, if one does not assume  $X$  not  $Y$  projective over  $S$ , one may think of using Chow's lemma; as  $S$  is the spectrum of a discrete valuation ring, one does not lose flatness in using Chow's lemma, unfortunately one will lose however, I am afraid, the assumption  $H^0(X_0, \underline{\mathcal{O}}_{X_0}) \simeq k(s)$ , and I am afraid that this will make serious technical trouble. Another interesting approach, via topology, is to try to prove that under the usual assumptions on  $X$ , the "specialization morphism" from the fundamental group of the general geometric fiber to the one of the special fiber has an image of finite index - or at least that this is so after making the groups abelian. It seems to me that the latter statement can be proved via the Picard functor, when  $X$  is assumed projective over  $S$ .

I am sending you some notes, including a sketch of the proof of the theorem of representability of unramified functors, although I do not think they latter can be of any use to you, as I have a hard time myself to read them. I think the notes you took when we discussed the matter a few months ago should be much more detailed; anyhow, there are certainly no simplifications in my notes relative to yours, the inverse is more plausible.

Sincerely yours

## Letter to J. Murre<sup>55</sup>

Dear Murre,

I am very sorry I did not succeed to convey the intuitive idea behind the general nonsense of my notes. It seems to me that the basic example in order to understand the idea is example 1, where you can take  $Z$  to be a standard Kummer covering for definiteness,  $Z = Z_a^n$ , and  $S$  normal. Intuitively, when look at (normal, say)  $S'$  coverings of  $S$  whose ramification type is not worse than the one of  $Z$  over  $S$ , you mean that the normalized inverse image  $Z'$  of  $S'$  over  $Z$  is étale. From the birational point of view, assuming  $S'$  connected and therefore corresponding to a field extension  $K'$  of the field of functions  $K$  of  $S$ , this means simply that  $K'$  of the field of functions  $K$  of  $S$ , this means simply that  $K'$  is isomorphic to a subextension of an extension of the function field  $L$  of  $Z$ , unramified with respect to the model  $Z$ ; when  $S$

[]

Your interpretation of the Kummer case in the final formulation of example 3 is indeed the one I had in mind. Also, when I wrote  $n'/n$ , I meant of course the order relation of divisibility (it may be convenient to introduce this order relation explicitly, for simplicity of notations).

I realize that all the indications I have given you so far are extremely sketchy, and as a consequence that I am charging you with a considerable amount of work to put some sense and order into all that. Thus it is I, not you, who should apologize for causing a lot of trouble! I look forward with great pleasure meeting you in Bures. As I am having some russian and chinese on friday's, I will probably drop by on June 2.

With best regards

---

<sup>55</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGM2scan.pdf>

## Letter to J. Murre<sup>56</sup>

Dear Murre,

Thank you very much for your notes on the tame fundamental group, which I at least finished reading. I see you wrote them with much care, and I am all the more sorry that my own fault, there is a number of misstatements which, I am afraid, will force you to do a serious recasting of the whole exposition. My notes definitely were too sketchy, and my oral explanations, I am afraid, partly wrong, which induced you into error a few times. Here the most serious drawbacks.

1.16 is false already when  $H$  is the unit group and when there is a single  $a$ , say  $a = b^n$ ,  $Y' = YT/(T^n - a)$ . Then  $Y = S$ , and a morphism of  $Y$  into  $Y'$  compatible with  $H = e$   $H'$  is just a section of  $Y'$ , which exists indeed; however  $H \rightarrow H'$  is not surjective. 3.6. is equally false, as you see by the previous example, using the given section to define an  $H'$ -morphism  $H' \rightarrow Y'$  which is not an isomorphism. As a consequence, the proof in your notes of 3.7. breaks down (as it uses 1.16) and so does the proof of 3.8. (I did not try to check 3.8. by some different proof).

I am afraid 6.4. is false as stated, and that the statement is correct only if the  $D_i$  are regular. Indeed, the end of the proof seemed to me very dubious; be careful that the inertia groups are determined only up to interior automorphism! There is however a (tautological) generalization of the theorem for regular  $D_i$ , corresponding to the data of a single divisor  $D$  with normal crossings, and a variant of the notion of tame ramification for such a divisor, by demanding that the coverings should be tamely ramified locally for the étale topology for the family of local irreducible components of  $D$ ; it is this notion of tameness which should seem more adapted to the situation of par. 9.

The proof of 7.1. is not correct, when you contend on line -9: there remains to be proven the following... Already when  $D = 0$ , the proof here would have to introduce connected étale coverings which are *not Galois*! This very strongly suggests that a notion of tame ramification should be introduced also for non Galois coverings. The same remark applies to the proof of 10.1. Maybe you could get along some way in 7.1. using the normality assumptions, but I am convinced

---

<sup>56</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGM3scan.pdf>

that these assumptions are anyhow artificial, as well as the assumption that the  $D_i$  should be reduced somewhere. You do not seem to make any use of these facts, really.

Also, one feels that 7.5. should be generalized to the case of a tamely ramified covering, and that it should come out trivially once the generalities have been dealt with properly.

I hope that the theory will come out more clearly and correctly by devoting some care to generalities on ramification data (not necessarily of Kummer type). I will try to write something up within the next days. Please excuse me for the trouble I caused you by not learning my lesson well enough before I put you to work!

It will be very nice indeed to have an appendix on Lefschetz theorem for the fundamental group, and it should not be hard to write it. However, it would be safer to wait till the general theory of tame ramification is written up!

Sincerely yours

## Letter to J. Coates, 4.1.1967<sup>57</sup>

4.1.1967

Dear Coates,

I want to add a few more comments to the talk on algebraic cycles and to what I told you on the phone.

I think the best will be to state the index conjecture right after the statement of the main results of Hodge theory, adding that this conjecture will take its whole significance only when coupled with “conjecture  $A$ ” in the next paragraph. This will give more freedom in the next paragraph to express some extra relationships between various conjectures, such as  $A + \text{index implies } B$ .

In characteristic zero, state some known extra features: index theorem holds, the properties  $A_\ell$  to  $D_\ell$  are independent of  $\ell$  (because of the existence of Betti cohomology, so that these properties are equivalent to the corresponding one’s for rational cohomology),  $A$  and  $C$  are independent of the chosen polarisation  $x$  (for  $A$  because it is equivalent with  $B$ , for  $C$  because it can be expressed in terms of  $A$ ,  $C(X) = (A(X \times X) + A(Y \times Y) + \dots)$ )

Thus the conditions without ambiguity can be called  $A(X)$  to  $D(X)$ , without subscript  $\ell$  and without indication of polarisation. Say too that it is known that  $C(X)$  is of finite dimension over  $\mathbf{Q}$ , (so that  $A$  can also be expressed in terms of an equality of dimensions of  $C^i$  and  $C^{n-1}$ , which again proves it is independent of  $\ell$ ), but that this is not known in characteristic  $p > 0$ . Contrarily to what I hastily stated in my talk (influenced from my recollections of the characteristic 0 case) it is not clear to me if in characteristic  $p > 0$  the conditions  $A_\ell(X, \xi)$  and  $C_\ell(X, \xi)$  are independent of the polarisation  $\xi$ ; if you do not find some proof of this independence, then the possible dependence should be pointed out, as well as the fact that we do not have a proof that  $A$  to  $D$  are independent of  $\ell$ . Of course, if the index theorem is proved for  $X$ , then  $A_\ell(X, \xi) = B_\ell(X)$  is again independent of the polarisation, and analogous remark for  $C_\ell(X, \xi)$ .

When speaking about condition  $C_\ell(X, \xi)$ , emphasise at once its stability properties by products (the proof I suggested works indeed) specialisation (with possi-

---

<sup>57</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGC4167.pdf>

ble change of characteristics), hyperplane or more generally linear sections. Give an extra proposition for the relations with the property  $A$ , via a formal proposition as follows:

Proposition. — *Conditions équivalentes sur  $X$  (variété polarisée):*

(i)  $C_\ell(X)$

(ii)  $C_\ell(Y)$  et  $A_\ell(X \times X)$

(ii bis)  $C_\ell(Y)$  et  $A_\ell(X \times X)^\circ$ , où l'exposant  $^\circ$  signifie qu'on se borne à exprimer la condition  $A$  pour l'homomorphisme en dimension critique  $H^{2n-2} \longrightarrow H^{2n+2}$ .

(iii)  $C_\ell(Y)$  et  $A_\ell(X \times Y)$ .

(iii bis)  $C_\ell(Y)$  et  $A_\ell(X \times X)^\circ$ , où l'exposant  $^\circ$  signifie qu'on se borne à exprimer la condition  $A$  en dimension critique  $H^{(2n-1)-1} \longrightarrow H^{(2n-1)+1}$ .

(iv)  $C_\ell(Y)$ , et pour tout  $i \leq n-1$ , l'homomorphisme naturel  $H^i(Y) \longrightarrow H^i(X)$  inverse à gauche de  $\varphi^i : H^i(X) \longrightarrow H^i(Y)$  (induit par  $\Lambda_X \varphi_*$ ) est induit par une classe de correspondance algébrique (induisant ce qu'elle veut sur les autres  $H^i(Y)$ ).

(iv bis)  $C_\ell(Y)$ , et pour  $j \geq n+1$ , l'homomorphisme naturel  $H^j(X) \longrightarrow H^{j-2}(Y)$  inverse à droite de  $\varphi_{j-2} : H^{j-2}(Y) \longrightarrow H^j(X)$  (induit par  $\varphi^* \Lambda_X$ ) est induit par une classe de correspondance algébrique (induisant ce qu'elle veut sur les autres  $H^i(X)$ ).

Corrolaire. — *Ces conditions équivalent aussi à*

(v)  $A_\ell(X \times X) + A_\ell(Y \times Y)^\circ + A_\ell(Z \times Z) + \dots$ , où  $X \supset Y \supset Z$  est une suite décroissante de sections hyperplanes.

(vi)  $A_\ell(X \times Y)^\circ + A_\ell(Y \times Z)^\circ + \dots$ , avec les mêmes notations.

Of course, the products and hyperplane sections are endowed with the polarisations stemming from the polarisation on  $X$ . The conditions (v) and (iv) have the slight interest that they allow to express the conjecture  $A(k) = C(k)$  in terms

of  $A(T)^\circ$  for every  $T$  of even (resp. odd dimension), where the upper  $^\circ$  means that it is sufficient to look at what happens in critical dimensions.

For the proof of the proposition, I told you already the equivalence of (i) and (ii), (ii bis). The equivalence of (iv) and (iv bis) is trivial by transposition, they imply (i) because  $H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^i(X)$  is the composition  $H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^{2n-i-2}(Y) \longrightarrow H^i(Y) \longrightarrow H^i(X)$  where the extreme arrows are the ones of (iv bis) and (iv) and the middle one is induced by  $\Lambda_Y^{(n-1)-i}$ , and they are implied by (iii bis) because of the formula

$$(\Lambda_X \varphi_*) L_Y + L_X (\Lambda_X \varphi_*) = (\varphi_* \Lambda_Y \varphi^* + id_X) \varphi_*.$$

On the other hand (iii)  $\Rightarrow$  (iii bis) is trivial, and so is (i)  $\Rightarrow$  (iii) because of the stabilities. N.B.  $(\varphi^* \Lambda_X) L_X + L_Y (\varphi^* \Lambda_X) = \varphi^* (\varphi_* \Lambda_Y \varphi^* + id_X)$ .

For the list of the known facts, you can state that:

- 1) In arbitrary characteristic,  $C(X)$  is known if  $\dim X \leq 2$ , because more generally, it is known that in arbitrary dimension  $n$ ,  $H^{2n-1}(X) \longrightarrow H^1(X)$  is induced by an algebraic correspondence class; also, in arbitrary dimension, it is known that  $\pi_0, \pi_{2n}, \pi_1, \pi_{2n-1}$  are algebraic (trivial for the first two, not quite trivial for the two next one's). If  $\dim X = 3$ , it is not known however, even in characteristic 0, if  $C(X)$  or only  $D(X)$  hold, nor  $A(X)$  and  $B(X)$  in characteristic  $p > 0$ , also if for 1-cycles,  $\tau$ -equivalence is the same as numerical equivalence...

By the way, the fact that the  $\pi_1$  for a surface are algebraic was pointed out (Tate tells me) by Hodge in Algebraic correspondences between surfaces, Proc, London Math. Soc. Series 2, Vol XLIV, 1938, p. 226. It is rather striking that this statement should not have struck the algebraic geometers more, and has fallen into oblivion for nearly thirty years!

- 2) In characteristic 0,  $A(X)$  is known for  $\dim X \leq 4$ . But  $A(X)^\circ$  is not known if  $\dim X = 5$ ; the first interesting case would be for a variety  $X \times X$ ,  $X$  of dimension 3 and  $Y$  a hyperplane section, as this would prove  $C(X)$ , see above.

Thus the main problems arise already for 1-cycles on threefolds, and partially even in characteristic 0. Urged by Kleiman's question, I will look again at my old scribbles on that subject (when I pretend to reduce the "strong" form of Lefschetz to the "weak" one). As for the suggestion I made on the phone, to try to get any  $X$  as birationally equivalent to a non singular  $X'$ , which is a specialisation of a non singular  $X''$ , itself birationally equivalent to a non singular hypersurface - this cannot work as Serre pointed out, because such an  $X$  would have to be simply connected ! Thus if one wants to reduce somehow to the case of hypersurfaces, one will have to work also with singular ones, and see how to reformulate for singular varieties the standard conjectures...

Sincerely yours



## Lettre à J. Dieudonné, 27.8.1967<sup>58</sup>

27.8.1967

Cher Dieudonné,

---

<sup>58</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGD27867scan.pdf>

## Lettre à J. Dieudonné, 15.9.1967<sup>59</sup>

15.9.1967

Cher Dieudonné,

Tes objections de ta lettre du 11 Septembre sont encore fondées. D'ailleurs, il ne me semble pas évident que le fait de pouvoir trouver  $p, q$  fixes tels qu'on ait des suites exactes  $A_n^p \longrightarrow A_n^q \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$ , permette de s'en tirer ; tant mieux si tu y arrives. L'existence de ces  $p$  et  $q$  me semble d'autre part facile, en utilisant le

*Lemme. — Soit  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module,  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  des éléments de  $A$  engendrant l'idéal unité, supposons que pour tout  $i$ , le  $A_{f_i}$ -module  $M_{f_i}$  soit engendré par  $m_i$  générateurs. Alors  $M$  est engendré par  $m$   $m_i$  générateurs.*

**Démonstration.** Soient  $g_j^i \longrightarrow M_{f_i}$  ( $1 \leq j \leq m_i$ ) les générateurs de  $M_{f_i}$ , on aura donc  $g_j^i = h_j^i / f_i^{N_{ij}}$ , avec  $h_j^i \in M$ . Alors les  $h_j^i$  pour  $j$  fixes engendrent  $M$  sur l'ouvert  $\text{Spec}(A_{f_i})$  de  $\text{Spec}(A_f)$ , donc comme pour  $i$  variable ces ouverts recouvrent  $\text{Spec}(A)$ , il s'ensuit que les  $h_j^i$  pour  $i, j$  variables engendrent  $M$ , donc  $M$ , ce qui établit le lemme.

Revenant alors à la situation de 10.10.5, on sait que  $M = \lim M_n$  est un  $A$ -module de type fini, considérons alors un épimorphisme  $u : A^q \longrightarrow M$ . Soient  $f_i \longrightarrow A$  dont les images dans  $A_0$  engendrent l'idéal unité, et tel que sur les ouverts correspondants  $X_i$  de  $X = \text{Spec } f(A)$ ,  $F$  admette une présentation finie. Alors  $u$  restreint à  $X_i$  définit un épimorphisme  $A_i^q \longrightarrow M_i$ , et comme  $M_i$  est de présentation finie, il existe un homomorphisme  $v_i$  rendant exacte la suite  $A_i^p \longrightarrow A_i^q \longrightarrow M_i \longrightarrow 0$ . Tensorisant par  $A_0$ , on en déduit une suite exacte  $(A_n)_{f_i}^p \longrightarrow (A_n)_{f_i}^q \longrightarrow (M_n)_{f_i} \longrightarrow 0$ , ce qui montre que si  $R_n = \text{Ker}(A_n^q \longrightarrow M_n)$ , alors  $R_n$  est sur  $\text{Spec}((A_n)_{f_i})$  engendré par  $p$  éléments. Donc en vertu du lemme  $R_n$  est engendré par  $m p$  éléments où  $m$  est le nombre des  $f_i$ , et  $m p$  est bien indépendant de  $n$ .

La difficulté qui semble rester est de trouver les suites exactes que tu demandes de telle façon qu'elles se recollent, pour  $n$  variable. Donc,  $u$  étant déjà choisi, de

<sup>59</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGD15967scan.pdf>

trouver un homomorphisme  $A^p \longrightarrow A^q$  dont l'image soit  $\text{Ker } u \dots$  Si tu y arrives, on pourrait présenter encore 10.10.5 sous forme de trois conditions équivalentes, mais en demandant dans b) une “présentation finie uniformément en  $n$ ”. Sinon, il faudrait trouver un contre-exemple à l'implication a)  $\Rightarrow$  c), car il me semble

- a)  $F$  est localement libre de type fini.
- b)  $F$  est isomorphe à la limite projective d'une suite  $(F_n)$  de  $\underline{O}_{X_n}$ -Modules localement libres de type fini qui se recollent.
- c)  $F$  est isomorphe à un  $M$ , avec  $M$  un  $A$ -module projectif de type fini.

Pour la démonstration, on procède comme dans 10.10.5 en utilisant EGA IV 18.3.2.1. Ce lemme devrait d'ailleurs venir en corollaire après 0<sub>I</sub> 7.2.9.

Pour les modifications que je préconisais pour I 10.11, elles tombent à l'eau si on n'arrive pas à arranger 10.10.5 sans hypothèses noethériennes ; on peut cependant dire que si  $F$  sur  $X$  est de présentation finie, alors il est limite projective de faisceaux  $F_n$  de présentation finie sur les  $X_n$  qui se recollent (mais on n'a pas une réciproque), et que  $F$  est localement libre sans les  $F_n$  le sont. Et les autres énoncés du n° 10.11. restent valables sans hypothèses noethérienne, sauf 10.7.11.2 et la partie “injectivité” dans 10.11.9 (sauf erreur).

## Letter to S. Anantharaman, 11.9.1967<sup>60</sup>

11.9.1967

Dear Anantharaman,

Matsumura proved that if  $X$  is proper over a field  $k$ , then  $\underline{\mathrm{Aut}}_{X/k}$  is representable by a group scheme locally of finite type over  $k$ . I think I can systematize the key step of his argument in the following way. Consider a scheme  $S$ , and a morphism

$$\varphi : Z \longrightarrow X$$

of  $S$ -schemes which are proper, flat and of finite presentation. Let  $Y$  be locally of finite presentation and separated over  $S$ , then  $\varphi$  induces a homomorphism of functors  $u \rightsquigarrow u\varphi$ :

$$\varphi' : \underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Z, Y).$$

Then one can define a subfunctor of  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  where  $\varphi'$  is “unramified” in a rather obvious sense, and this turns out to be an “open subfunctor”, say  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y; \varphi)$ . Now look at the induced homomorphism

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y; \varphi) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Z, Y).$$

Using the main result of Murre’s talk, one can prove that the latter morphism is representable by unramified separated morphisms locally of finite presentation ; as a consequence, if  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(Z, Y)$  is representable, so is  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y; \varphi)$ .

To get, given  $X$  and  $Y$ , a representability theorem for  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$ , one tries to find morphisms  $\varphi_i : Z_i \longrightarrow X$  as above, such that the open subfunctors  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y; \varphi_i)$  cover  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  (as a fpqc sheaf), and such that the functors  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(Z_i, Y)$  are all representable. If for instance  $S$  is the spectrum of a field  $k$ , and if  $X$  has “enough” points radicial over  $k$  (which is always true if  $k$  is alg. closed) then we can take for  $Z_i$  all finite subschemes of  $X$  whose points are radicial over  $k$ , and we get that  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  is representable (any  $Y$  locally of finite presentation and separated over  $k$ ); if we do not make any assumptions on  $X$  except properness over  $k$ , the previous assumption becomes true after finite ground-field extension

---

<sup>60</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGA967scan.pdf>

$k'/k$ , so that we get that for every  $Y$  as above,  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y) \times_S (k')$  is representable. From this Matsumaras theorem stated at the beginning follows in a standard way by descent arguments. The result holds too for  $\underline{\mathrm{Isom}}_k(X, Y)$  instead of  $\underline{\mathrm{Aut}}_k(X)$ , but as you probably know,  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  is not always representable, even if  $X$  is a quadratic extension of  $S = \mathrm{Spec} k$ ,  $Y$  being proper non projective.

Over an arbitrary base  $S$ , one can give a fairly general statement of a representability theorem, the points radicial over  $k$  used above being replaced by suitable flat subschemes of  $X$ . As particular cases, we get for instance that if  $X$  has integral geometric fibers and a section along which  $X$  is smooth, then  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  is representable; and if  $X$  has reduced geometric fibers, then  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  is representable locally for the étale topology over  $S$ . Also, if  $Y$  is quasi-projective over  $S = \mathrm{Spec} k$ , then  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  is representable.

To fix the ideas, I gave the statements for  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$ , but one has quite analogous results of course for the  $\prod_{X/S} P/X$  functors, which I guess will imply rather formally the other ones.

If you are interested, I can send you a photocopy of the statement of the general theorem of representability I alluded to above, and a couple of corollaries (I already listed here the most striking ones).

Sincerely yours

## Letter to J. Murre, 24.4.1967<sup>61</sup>

11.9.1967

Dear Murre,

I am sending you enclosed the sketch which I promised on ramification data,  
as well as your manuscript

---

<sup>61</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LMG24467scan.pdf>

TAPIS DE QUILLEN  
6.9.1968

---

## TAPIS DE QUILLEN

10.9.1968<sup>62</sup>

---

### I. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux

A toute catégorie  $C$ , on associe un ensemble semi-simplicial  $S(C)$ , trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$S : \text{Cat} \longrightarrow \text{Simpl}.$$

Les systèmes locaux d'ensemble sur  $SC$  correspondent aux foncteurs sur  $C$  qui transforment toute flèche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à  $C$ ). Les  $H^i$  sur  $SC$  d'un tel système local ( $H^0$  pour ensembles,  $H^1$  pour groupes,  $H^i$  quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs  $\varprojlim^{(i)}$  dérivés de  $\varprojlim$ , ou si on préfère, des  $H^i$  (du *topos*  $C$ ). On voit ainsi à quelle condition un foncteur  $C \longrightarrow C'$  induit un homotopisme  $SC \longrightarrow SC'$  : en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il  $f$  et  $s$  que pour tout système de coefficients  $F'$  sur  $C'$ , l'homomorphisme naturel  $\varprojlim_{C'}^{(i)} F' \longrightarrow \varprojlim_C^{(i)} F$  soit un isomorphisme (pour les  $i$  pour lesquels cela a un sens).

A  $C$  on peut associer le topos  $\tilde{C}$ , qui varie de façon *covariante* avec  $C$ . (NB le foncteur  $C \mapsto \tilde{C}$  n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??).

Les systèmes de coefficients ensemblistes sur  $C$  ( $\stackrel{\text{def}}{=}$  les foncteurs  $C^\circ \longrightarrow \text{Ens}$  transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux lo-

---

<sup>62</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/tapisQscan.pdf>



calement constants i.e. les objets localement constants de  $\tilde{C}$ , définis intrinsèquement en termes de  $\tilde{C}$ . Ainsi, le fait pour un foncteur  $F : C \longrightarrow C'$  d'induire un homotopisme  $S(C) \longrightarrow S(C')$  ne dépend que du morphisme de topos  $\tilde{F} : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}'$  induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant  $F'$  sur  $C'$  i.e. sur  $\tilde{C}'$ , les applications induites  $H^i(\tilde{C}', F') \longrightarrow H^i(\tilde{C}, \tilde{F}^*(F'))$  sont des isomorphismes (pour les  $i$  pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T : \text{Simpl} \longrightarrow \text{Cat},$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial  $X$  la catégorie  $T(X) = \Delta_{/X}$  des simplexes sur  $X$ , dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des  $X_n \dots$  (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie  $\Delta$  des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les  $X_n$ ). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout  $X$ ,  $ST(X)$  est isomorphe canoniquement à  $X$  dans la catégorie homotopique construite avec  $\text{Simpl}$ , et que pour toute  $C$ , la catégorie  $TS(C)$  est canoniquement "homotopiquement équivalente à  $C$ " i.e. canoniquement isomorphe à  $C$  dans la catégorie quotient de  $\text{Cat}$  obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. Ces isomorphismes sont fonctoriels en  $X$ . Il en résulte formellement qu'un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  dans  $\text{Simpl}$  est un homotopisme si et seulement si en est ainsi de  $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$ , d'où des foncteurs  $S' : \text{Cat}' \longrightarrow \text{Simpl}'$  et  $T' : \text{Simpl}' \longrightarrow \text{Cat}'$  entre les catégories "homotopiques", construites avec  $\text{Cat}$  resp.  $\text{Simpl}$ , qui sont quasi-inverses l'un de l'autre.

De plus, Quillen construit un isomorphisme canonique et fonctoriel dans  $\text{Cat}'$  entre  $C$  et la catégorie opposée  $C^\circ$ , ou ce qui revient au même, un isomorphisme canonique et fonctoriel dans  $\text{Simpl}'$  entre  $S(C)$  et  $S(C^\circ)$ . La définition est telle que le foncteur induit sur les systèmes locaux sur  $C$  transforme le foncteur contravariant  $F$  sur  $C$ , transformant toute flèche en flèche inversible, en le foncteur covariant (i.e. contravariant sur  $C^\circ$ ) ayant mêmes valeurs sur les objets, et obtenu sur les flèches en remplaçant  $F(u)$  par  $F(u)^{-1}$ ; en d'autres termes, l'effet de l'homotopisme de Quillen sur les groupoïdes fondamentaux est l'isomorphisme évident entre les groupoïdes fondamentaux de  $C$  et de  $C^\circ$ , compte tenu que le deuxième est l'opposé du premier. Comme application, Quillen obtient une interprétation faisceutique de la cohomologie d'un ensemble semi-simplicial à co-

efficients dans un système local covariant  $F$  (défini classiquement par le complexe cosimplicial des  $C^n(F) = \prod_{x \in X_n} F(x)$ ): on considère le système local contravariant défini par  $F$ , on l'interprète comme un faisceau sur  $T(X)$  i.e. objet de  $\text{Simpl}/_X$ , et on prend sa cohomologie. - Cependant, quand  $F$  est un système de coefficients covariant pas nécessairement local, on n'a toujours pas d'interprétation de ses groupes de cohomologie classiques en termes faisceautiques; ni, lorsque  $F$  est contravariant, de son homologie, ou inversement de sa cohomologie faisceautique en termes classiques.

A propos de la notion de foncteur qui est un homotopisme. Quillen montre qu'un tel foncteur  $F : C \longrightarrow C'$  induit une équivalence entre la sous-catégorie triangulée  $D_{lc}^b(C')$  de la catégorie dérivée bornée de celle des faisceaux abéliens sur  $C'$ , dont les faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux, et la catégorie analogue pour  $C$ ; et réciproquement. On peut dans cet énoncé introduire aussi n'importe quel anneau de base (à condition de le supposer  $\neq 0$  dans le cas de la réciproque); la partie dire vaut aussi avec un anneau de coefficients par nécessairement constant, mais constant tordu. Je pense que ce résultat (facile) doit pouvoir se généraliser ainsi : Soit  $f : X \longrightarrow X'$  un morphisme de topos qui soit tel que pour tout faisceau localement constant sur  $X'$ ,  $f$  induise un isomorphisme sur les cohomologies (avec cas non commutatif inclus). Supposons que  $X$  et  $X'$  soit *localement homotopiquement trivial*, i.e. que pour tout entier  $n \geq 1$ , tout objet  $U$  ait un recouvrement par des  $U_i \longrightarrow U$ , tels que a) tout système local sur  $U$  devient constant sur  $U_i$ , et toute section sur  $U$  devient constant sur  $U_i$  et b) pour tout groupe abélien  $G$ , les  $H^j(U, G) \longrightarrow H^j(U_i, G)$  sont nuls pour  $1 \leq j \leq n$ <sup>63</sup>. Alors le foncteur  $D_{lc}^b(X') \longrightarrow D_{lc}^b(X)$  induit par  $f$  est une équivalence. Même énoncé si on met dans le coup un système local d'anneaux sur  $X'$ . Enfin,  $f$  induit une équivalence entre la catégorie des coefficients locaux sur  $C$  et celle des coefficients locaux sur  $C'$ .

Principe de démonstration : on commence par prouver ce dernier résultat, en notant que si un topos est localement hom. trivial, il est loc. connexe et loc. simplement connexe, d'où une bonne théorie du  $\pi_0$  et du  $\pi_1$  (qui sont ici dis-

---

<sup>63</sup> Attention, cette condition n'est typiquement *pas* satisfaite par les schémas avec leur topologie étale) mais bien par [] avec top. Zariski).

crets), et on est ramené à un cas particulier du critère d'homotopisme de Artin et Mazur, savoir un critère cohomologique pour qu'un homomorphisme de groupes  $G \longrightarrow H$  (ici les groupes  $\pi_1$  de  $X, X'$ ) soit un isomorphisme : il doit induire des isomorphismes sur les  $H^0$  et  $H^1$  (y inclus dans le cas non commutatif...). On prouve la pleine fidélité en se ramenant par la suite spectrale encore, cela résultera du fait suivant : si  $X$  est localement hom. trivial, alors la catégorie des faisceaux abéliens loc. constants est stable par  $\underline{\text{Ext}}^i$ , et le foncteur  $M \mapsto M_X$  de  $\text{Ab}$  dans  $X_{\text{ab}}$  commute aux dits  $\text{Ext}^i$ . En fait,  $X$  et  $X'$  étant loc. homp. triviaux, les conditions suivantes sur  $f$  seront équivalentes :

- a)  $f$  est un homotopisme, i.e. induit pour tout système local (pas néc. commutatif) sur  $X'$  un isomorphisme sur les  $H^i$ .
- b)  $f$  induit une équivalence  $D_{lc}^b(X') \longrightarrow D_{lc}^b(X)$ .
- a')  $f$  induit une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux abéliens sur  $X'$  et  $X$ , et des isomorphismes sur les  $H^i$  correspondants (donc on ne prend ici que des coefficients commutatifs).

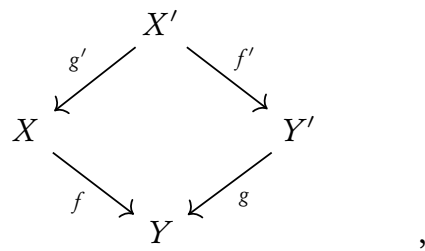
J'ignore si on peut dans a) se borner aux systèmes locaux commutatifs. L'équivalence entre a) et b) fournit une première justification ou motivation pour définir des types d'homotopie via la catégorie  $D_{lc}^b(X)$ , éventuellement muni de la sous-catégorie pleine de tous les systèmes locaux sur  $X$ , et du foncteur cohomologique sur  $D_{lc}^b(X)$  à valeurs dans le dite catégorie, et bien sur du produit tensoriel (mais alors on sort de  $D^b$  pour entrer dans  $D^-$ , redactor demerdetur).

## 2. $n$ -catégories, catégories $n$ -uples, et Gr-catégories

### 3. Point de vue "motivique" en théorie du cobordisme

Soit  $C$  la catégorie des variétés différentiables (pas nécessairement orientables), les morphismes étant les classes d'homotopie d'applications continues. Si  $B$  est une catégorie, on s'intéresse aux couples  $(F_\bullet, F^\bullet)$  d'un foncteur covariant et d'un foncteur contravariant de  $C$  dans  $B$ , satisfaisant les conditions que pour tout  $X \in$

Ob  $C$ , on a  $F_{\bullet}(X) = F^{\bullet}(X)$ , et que si on a un produit fibré ordinaire



avec  $f$  et  $g$

RÉSUMÉ DE QUELQUES RÉSULTATS DE KOSTANT  
(sous-groupes simples de rang 1)

---

## Letter to Kostant, 22.10.1969<sup>64</sup>

Massy 22.10.1969

Dear Kostant,

I read again through your papers in the Amer. Journ. on “The principal three-dimensional subgroup...” and “Lie group representations on polynomial rings”, prompted by some nice work of Brieskorn on Klein singularities. I very much appreciate this work of yours, and would appreciate getting reprints of any latter work you may have available. As I already felt when your work appeared, it cries for careful reconsideration in the framework of Alg. Geometry, and suggests number of interesting problems. I wonder if you know the answer to some of them. For instance, I feel it would be of interest to classify (for a given complex simple adjoint Lie group, say) quadruples  $(T, B, T', B')$ , where  $T$  and  $T'$  are maximal tori “in apposition” (in your terminology), and  $B$  and  $B'$  Borel subgroups of  $G$  containing  $T$  resp.  $T'$ . The number of conjugacy classes of such animals is equal to  $\text{card}(W)^2/hz\varphi(h)$ , where  $W$  is the Weyl group,  $h$  the Coxeter number,  $z$  the order of the center of  $\tilde{G}$ , and  $\varphi(h) = \text{card}(\mathbf{Z}/h\mathbf{Z})^*$  is the Euler indicatrix; if you want to classify such data with moreover a generating element (principal regular in your terminology) given for the finite group of order  $h$   $T \cap N(T')$ , then we get  $\text{card}(W)^2/hz$  choices. One of the reasons I think this question is interesting is that the stability subgroup in  $G$  of such a quadruple is  $T \cap T' = e$ <sup>65</sup>, hence such a structure makes  $G$  entirely “rigid” up to exterior automorphisms. Among the first questions one may wish to ask in this direction are the following: is it true that for some, or for all such quadruples,  $B$  and  $B'$  are “in general position” i.e.  $B \cap B'$  is a torus (necessarily maximal), so that  $B$  and  $B'$  are “opposite” to each other with respect to the latter? Is there in any sense a *distinguished* conjugacy class of such quadruples (which should then be, of course, invariant by action of exterior automorphisms)? What are the groups of automorphisms of such quadruples (they are isomorphic to subgroups of the group of exterior automorphisms of  $G$ )?

---

<sup>64</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGK69scan.pdf>

<sup>65</sup>NB.  $N(T) \cap N(T')$  is an extension of  $(\mathbf{Z}/h\mathbf{Z})^*$  by  $[\ ]$

In a different direction, it would be interesting to know more about the canonical morphism  $\underline{g} \longrightarrow \underline{h}/W$ , where  $\underline{g}$  is the Lie algebra of  $G$  and  $\underline{h}$  a Cartan subalgebra, and of the orbits of  $G$  on  $\underline{g}$ , and the analogous morphism of Steinberg  $G \longrightarrow T/W$  and the orbits of  $G$  acting on itself. Do you know for instance exactly how varies the rank ( $=$  rang of the tangent map) of this map ? There are some reasons to believe that for points of unipotent orbits of dimension  $n - r - 2$  (just the next lower after the maximal dimension  $n - r$ ), the rank is  $r - 1$  in case all roots have same length (that is the corresponding diagrams  $A, D, E_6, E_7, E_8$  are those corresponding to Klein singularities), and  $< r - 1$  in all other cases; in the first case, I would expect that there is just one orbit as stated, by the way, and maybe this property will be characteristic of the “homogeneous” case when all roots have same length. Also, what can be said of the dimension of the set of all Borel subgroups containing a given element  $g \in G$ , resp. whose Lie algebra contains a given element  $x \in \underline{g}$ ? If  $2N = n - r$  is the number of roots and if the dimension of the previous variety to be equal to  $i$ ; the inequality  $\leq i$  would imply, by generalizing a depth argument of Brieskorn, that the singularities of the fibers of your map  $\underline{g} \longrightarrow \underline{h}/W$  (resp. Steinberg’s  $G \longrightarrow T/W$  in case  $G$  is simply connected instead of adjoint) are “rational”, i.e. if  $F$  is such a fiber and  $F' \xrightarrow{f} F$  a resolution of singularities of  $F$ , then  $R^i f_*(\underline{O}_{F'}) = 0$  for  $i > 0$ . Maybe the answer to most of the questions I am asking are well known and I am just ignorant; for some of them, it would indeed be scandalous that the experts do not know the answer! In any case, I would be grateful for any comment you would have on any of my questions.

Sincerely yours

A. Grothendieck

## Letter to J. Lipman, 21.5.1969<sup>66</sup>

21.5.1969

Dear Lipman,

I got a copy of your nice work on rational singularities. Just one comment to the “main unanswered question” on p. (iv) of your manuscript: the answer is quite evidently [] eventually for the reason you indicate yourself. The simple example would be to start with an elliptic curve  $E$  over a field  $k$ , such that  $E(k) = 0$ , a torsor (= princ. hom. space)  $C$  under  $E$  of order  $n \geq 3$ , and the projective cone of the natural projective embedding of  $C$  [] (or the smallest []  $\text{Pic}^n(C) \neq \emptyset$ , if  $\text{Br}(k)$  is not zero); [] the completion of the local ring at the origin of that cone.

This example is also an example where  $A$  is functorial, but  $A[[t]]$  is not: the main reason is that the local Picard scheme (cf SGA 2 XIII p.19) is of  $\dim > 0$ , although  $P(k) = 0$ .

Sincerely yours,

A. Grothendieck

---

<sup>66</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGL22169scan.pdf>



## Letter to J. Lipman, 22.8.1969<sup>67</sup>

Massy 22.8.1969

Dear Lipman,

Thank you for your letter.

---

<sup>67</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGL82269scan.pdf>

## Letter to J. Lipman, 16.9.1969<sup>68</sup>

Massy 16.9.1969

Dear Lipman,

Following your letter I am sending you the outline of a program of work for the local Picard schemes,

---

<sup>68</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGL1669scan.pdf>

## Letter to J. Lipman, 12.6.1969<sup>69</sup>

Massy 12.6.1969

Dear Lipman,

Thanks for your letter. The answer to your question whether  $\hat{A}[[T]]$  factorial implies  $A$  has a rational singularity is affirmative, at least in the equal characteristic case. This comes from the construction of the local Picard scheme  $G$  over the residue field in this case (cf. SGA 2 XIII 5), as it is easily checked that  $A$  has a rational singularity if and only if  $G$  is of dimension zero. In the contrary case, as the neutral component  $G^\circ$  is smooth of  $\dim > 0$ , there would exist a non constant formal arc passing through the origin of  $G^\circ$ , and it is easily seen that this arc defines a non trivial divisor class of  $A[[T]]$ . This argument will work in the unequal characteristics case too, provided we can extend to this case the construction of the local Picard scheme (and its universal property). I hope this could be done, at least for a perfect residue field, but never checked this point. (I proposed this to Lichtenbaum seven years ago, but I am afraid he never looked into this!)

As for the question you mention concerning the  $H^1(Z, \underline{O}_Z)$  of the Zariski-Riemann space  $Z$  of  $A$ , I confess I have not much feeling for that animal, but I guess this is equivalent with the direct limit of the  $H^1(X, \underline{O}_X)$  for all models birational and proper over  $\text{Spec } A$  (which, in case we have resolution, would be also the  $H^1$  of any regular such model). The idea that this direct system might be essentially constant, and that this may be used to prove resolution, had been mentioned to me also, five or six years ago, by Artin, but I believe he could not push it through. An analogous problem, whose solution would be needed in order to construct local Picard schemes for noetherian local (excellent ?) rings of higher dimension, is the following: does there exists a birational proper model  $X$  of  $\text{Spec}(A) = S$ , inducing an isomorphism  $X|(S - s) \simeq (S - s)$  ( $s = \text{closed point}$ ), such that every invertible sheaf on  $S - s = X - X_0$  extend to an invertible sheaf on  $X$ ? If  $s$  is an isolated singularity, this would follow of course from resolution. In case  $s$  is not isolated, it seems the answer is not known even for complete local rings of char. 0.

---

<sup>69</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGL61269scan.pdf>

In any case, I asked Hironaka who does not know.

Sincerely yours,

A. Grothendieck

*Comments:* 1). Pic of a curve is reduced ( $H^2 = 0$ ) and is smooth.

## Lettre à L. Illusie, 2-4 Déc 1969<sup>70</sup>

les 2-4 déc. 1969

Cher Illusie,

Le travail avance, mais avec une lenteur ridicule.

---

<sup>70</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGI69scan.pdf>

PROGRAMME DE LA THÉORIE DE DIEUDONNÉ SUR  
UNE BASE  $S$  OÙ  $p$  EST LOCALEMENT NILPOTENT

---

## Lettre à Michon, 3.11.1970<sup>71</sup>

Massy le 3.11.1970

Chère Madame Michon,

Je m'aperçois que dans les exemplaires SGA d'archives que j'ai emportés de chez vous, il manque les suivants:

SGA 4 *XVII*,      SGA 4 *VI* première partie

D'autre part j'ai besoin de ces exemplaires pour faire l'édition photooffset en préparation. Pourriez vous me les retrouver ?

Bien cordialement

A. Grothendieck

---

<sup>71</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGM131170scan.pdf>

## Letter to I. Barsotti, 5.11.1970<sup>72</sup>

Bures May 11.1970

Dear Barsotti,

I would like to tell you about a result on specialization of Barsotti-Tate groups (the so-called  $p$ -divisible groups on Tate's terminology) in characteristic  $p$ , which perhaps you know for a long time, and a corresponding conjecture or rather question, whose answer may equally be known to you.

First some terminology. Let  $k$  a perfect field of characteristic  $p > 0$ ,  $W$  the ring of Witt vectors over  $k$ ,  $K$  its field of fractions. An  $F$ -cristal over  $k$  will mean here a free module of finite type  $M$  over  $W$ , together with a  $\sigma$ -linear endomorphism  $F_M : M \longrightarrow M$  (where  $\sigma : W \longrightarrow W$  is the Frobenius automorphism) such that  $F_M$  is injective i.e.  $F(M)$  contains  $p^n M$  for some  $n \geq 0$ . I am rather interesting in  $F$ -iso-cristals, namely  $F$ -cristals up to isogeny, which can be interpreted as finite dimensional vector spaces  $E$  over  $K$ , together with a  $\sigma$ -linear automorphism  $F_E : E \longrightarrow E$ , such that there exists a "lattice"  $M \subset E$  mapped into itself by  $F_E$ ; I will rather call such objects *effective*  $F$ -isocristals (and drop the suffix "iso" (and even  $F$ ) when the context allows it), and consider the larger category of  $(E, F_E)$ , with no assumption of existence of stable lattice  $M$  made, as the category of  $F$ -isocristals. It is obtained from the category of effective  $F$ -isocristals and its natural internal tensor product, by "inverting" formally the "Tate cristal"  $K(-1) = (K, F_{K(-1)} = p)$ : the isocristals  $(E, F_E)$  such that  $(E, p^n F_E)$  is effective (i.e. the set of iterates of  $(p^n F_E)$  is bounded for the natural norm structure) can be viewed as those of the form  $E_0(n) = E_0 \otimes K(-1)^{\otimes(-n)}$ , with  $E_0$  an effective  $F$ -(iso)-cristal.

Assume now  $k$  algebraic closed. Then by Dieudonné's classification theorem as reported on in Manin's report, the category of  $F$ -(iso)cristals over  $k$  is semi-simple, and the isomorphism classes of simple elements of this category can be indexed by  $\mathbf{Q}$  (the group of rational numbers), or what amounts to the same, by pairs of relative prime integers

$$r, s \in \mathbf{Z}, \quad r \geq 1, \quad (s, r) = 1$$

---

<sup>72</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGB1170scan.pdf>



to such a pair corresponding the simple object

$$\mathbf{E}_{s/r} = \mathbf{E}_{r,s}$$

whose rank is  $r$ , and which for  $s \geq 0$  can be described by the cristal over the prime field  $\mathbf{F}_p$  as

$$\mathbf{E}_{s/r} = \mathbf{Q}_p[T]/(T^r - p^s), \quad F_{s/r} = \text{multiplication by } T.$$

For  $s \leq 0$ , we get  $E_{s/r}$  by the formula

$$\mathbf{E}_\lambda = (\mathbf{E}_\lambda)^\vee,$$

where  $^\vee$  denotes ordinary dual endowed with the contragredient  $F$  automorphism. In Manin's report, only effective  $F$ -cristals are considered, with the extra restriction that  $F_E$  is topologically nilpotent, but by Tate twist this implies the result as I state it now. Indexing by  $\mathbf{Q}$  rather than by pairs  $(s, r)$  has the advantage that we have the simple formula

$$E_\lambda \otimes E_{\lambda'} \simeq \text{sum of cristals } E_{\lambda+\lambda'}.$$

In other words, if we decompose each cristals in its isotypic component corresponding to the various "slopes"  $\lambda \in \mathbf{Q}$ , so that we get a natural graduation on it with group  $\mathbf{Q}$ , we see that this graduation is compatible with the tensor product structure:

$$E(\lambda) \otimes E'(\lambda') \subset (E \otimes E')(\lambda + \lambda').$$

The terminology of "slope" of isotypic cristal, and of the sequence of slopes occurring in any cristal (when decomposing it into its isotypic components) is due, I believe, to you, as discussed on formal groups in Pisa about three years ago; but I did not appreciate then the full appropriateness of the notion and of the terminology. Let's define the sequence of slopes of a cristal  $(E, F_E)$  by its isotypic decomposition, repeating each  $\lambda$  a number of times equal to  $\text{rank } E(\lambda)$  (bearing in mind that if  $\lambda = s/r$  with  $(s, r) = 1$ , then the multiplicity of  $\lambda$  in  $E$  i.e.  $\text{rank } E(\lambda)$  is a multiple of  $r$ ); moreover it is convenient to order this sequence in increasing order. This definition makes still a good sense if  $k$  is not algebraically closed, by passing over to the algebraic closure of  $k$ ; in fact, the isotypic decomposition over

$\bar{k}$  descends to  $k$ , so we get much better than just a pale sequence of slopes, but even a canonical “iso-slope” (“isopentique” in french) decomposition over  $k$

$$E = \oplus_{\lambda \in Q} E(\lambda)$$

(NB This is true only because we assumed  $k$  perfect ; there is a reasonable notion of  $F$ -cristal also if  $k$  is not perfect, but then we should get only a *filtration* of a cristal by increasing slopes...). Now if  $k$  is a finite field with  $q$  elements, of rank  $a$  over the prime field, and if  $(E, F_E)$  is a cristal over  $k$ , then  $F_E^a$  is a linear endomorphism of  $E$  over  $K$ , and it turns out that the slopes of the cristal are just the valuations of the proper values of  $F_E^a$ , for a valuation  $\bar{Q}_p$  normalised in such a way that

$$v(q) = 1, \quad \text{i.e.} \quad v(p) = 1/a.$$

(This is essentially the “technical lemma” in Manin’s report, the restrictive conditions in Manin being in fact not necessary.) Thus, the sequence of slopes of the cristal, as defined above, is just the sequence of slopes of the *Newton polygon* of the characteristic polynomial of the arithmetic Frobenius endomorphism  $F_E^a$ , and their knowledge is equivalent to the knowledge of the  $p$ -adic valuations of the proper values of this Frobenius!

Lets come back to a general perfect  $k$ . Then the cristals which are effective are those whose slopes are  $> 0$ ; those which are Dieudonné modules, i.e. which correspond to Barsotti-Tate groups over  $k$  (not necessarily connected) are those whose slopes are in the closed interval  $[0, 1]$  : slope zero corresponds to ind-étale groups, slope one to multiplicative groups. Moreover, an arbitrary cristal decomposes canonically into a direct sum

$$E = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} E_i(-i),$$

where  $(-i)$  are Tate twists (corresponding to multiplying the  $F$  endomorphism by  $b^i$ ), and the  $E_i$  have slopes  $0 \leq \lambda < 1$  (or, if we prefer,  $0 < \lambda \leq 1$ ), and hence correspond to Barsotti-Tate groups up to isogeny over  $k$ , without multiplicative component (resp. which are connected). The interest of this remark comes from the fact that if  $X$  is a proper and smooth scheme over  $k$ , then the cristallin cohomology groups  $H^i(X)$  can be viewed as  $F$ -cristals,  $H^i$  with slopes between 0 and

$i$ <sup>73</sup> and define in this way a whole avalanche of Barsotti-Tate groups over  $k$  (up to isogeny), which are quite remarkable invariants whose knowledge should be thought as essentially equivalent with the knowledge of the characteristic polynomials of the “arithmetic” Frobenius acting on (any reasonable) cohomology of  $X$  (although the arithmetic Frobenius is not really defined, unless  $k$  is finite!).

Now the result about specialization of Barsotti-Tate groups. This is as follows: assume the BT groups  $G, G'$  are such that  $G'$  is a specialization of  $G$ . Let  $\lambda_1, \dots, \lambda_b$  ( $b$  = “height”) be the slopes of  $G$ , and  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_b$  the ones for  $G'$ . Then we have the equality

$$\sum \lambda'_i = \sum \lambda_i \quad (= \dim G = \dim G') \quad (1)$$

and the inequalities

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1, \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda'_1 + \lambda'_2, \dots, \sum_{i=1}^j \lambda_i \leq \sum_{i=1}^j \lambda'_i \dots \quad (2)$$

In other words, the “Newton polygon” of  $G$  (i.e. of the polynomial  $\Pi_i(1+(p^{\lambda_i}T))$ ) lies below the one of  $G'$ , and they have the same end-points  $(0,0)$  and  $(b,N)$ .

I get this result through a generalized Dieudonné theory for BT groups over an arbitrary base  $S$  of char.  $p$ , which allows to associate to such an object an  $F$ -cristal over  $S$ , which heuristically may be thought of as a *family* of  $F$ -cristals in the sense outlined above, parametrized by  $S$ . Using this theory, the result just stated is but a particular case of the analogous statement about specialization of arbitrary cristals.

Now this latter statement is not hard to prove at all: passing to  $\wedge^b E$  and  $\wedge^b E'$ , the equality (1) is reduced to the case of a family of rank one cristals, and to the statements that such a family is just a twist of some fixed power of the (constant) Tate cristal. And the general equality (2) is reduced, passing to  $\wedge^j E$  and  $\wedge^j E'$ , to the first inequality  $\lambda_1 \leq \lambda'_1$ . Raising both  $E$  and  $E'$  to a tensor-power  $r$ th such that  $r\lambda_1$  is an integer, we may assume that  $\lambda_1 = 0$ , so the statement boils down to the following: if the general member of the family is an *effective* cristal, so are all others. This is really checked in terms of the explicit definition of “cristal over  $S$ ”.

---

<sup>73</sup>This is not proved now in complete generality, but is proved if  $X$  lifts formally to char. zero, and is certainly true in general.

The wishful conjecture I have in mind now is the following: the necessary conditions (1) (2) that  $G'$  be a specialization of  $G$  are also sufficient. In other words, starting with a BT group  $G_0 = G'$ , and taking its formal modular deformation in char.  $p$  (over a modular formal variety  $S$  of dimension  $dd^*$ ,  $d = \dim G_0$ ,  $d^* = \dim G_0^*$ ), and the BT group  $G$  over  $S$  thus obtained, we want to know if for every sequence of rational numbers  $\lambda_i$  between 0 and 1, satisfying (1) and (2), these numbers occur as the sequence of slopes of a fiber of  $G$  at some point of  $S$ . This does not seem too unreasonable, in view of the fact that the set of all  $(\lambda_i)$  (satisfying the conditions just stated) is indeed finite, as is of course the set of slope-types of all possible fibers of  $G$  over  $S$ .

I should mention that the inequalities (2) were suggested to me by a beautiful conjecture of Katz, which says the following: if  $X$  is smooth and proper over a finite field  $k$ , and has in dimension  $i$  Hodge numbers  $h^0 = h^{0,i}, h^1 = h^{1,i-1}, \dots, h^i = h^{i,0}$ , and if we consider the characteristic polynomial of the arithmetic Frobenius  $F^a$  operating on some reasonable cohomology group of  $X$  (say  $\ell$ -adic for  $\ell \neq p$ , or cristallin), then the Newton polygon of this polynomial should be *above* the one of the polynomial  $\prod (1 + p^i T)^{h^i}$ , in a very heuristic and also very suggestive way, this could now be interpreted by stating (without any longer assuming  $k$  finite) that the cristallin  $H^i$  of  $X$  is a specialisation of a cristal whose sequence of slopes is: 0  $h^0$  times, 1  $h^1$  times,  $\dots$ ,  $i h^i$  times. If  $X$  lifts formally to char zero, then we can introduce also the Hodge numbers of the lifted variety, which are numbers satisfying

$$h'^0 \leq h^0, \dots, h'^i \leq h^i,$$

and one should expect a strengthening of Katz's conjecture to hold, with the  $h'^j$  replaced by the  $h^j$ . Thus the transcendental analogon of a char.  $p$   $F$ -cristl seems to be something like a Hodge structure or a Hodge filtration and the sequence of slopes of such a structure should be defined as the sequence in which  $j$  enters with multiplicity  $h'^j = \text{rank } Gr^j$ . (NB. Katz made his conjecture only for global complete intersections, however I would not be as cautious as he!). I have some idea how Katz's conjecture with the  $h^i$ 's (not the  $h'^i$ 's for the time being) may be attacked by the machinery of cristalline cohomology, at least the first inequality among (2); on the other hand, the formal argument involving exterior powers,

outlined after (2), gives the feeling that it is really the first inequality  $\lambda_1 \leq \lambda'_1$  which is essential, the other should follow once we have a good general framework.

I would very much appreciate your comments to this general non-sense, most of which is certainly quite familiar to you under a different terminology.

Very sincerely yours,

A. Grothendieck

## Letter to J. Lipman, 3.3.1970<sup>74</sup>

Massy March 3, 1970

Dear Dr. Lipman,

Thanks a lot for your interesting letter. Your method seems the most natural indeed, moreover it seems rather natural to restrict to perfect rings on arguments.

You should not take too seriously my suggestion to prove actual representability, and I would not be surprised if this were actually false. Of course, it would be nice to know the answer, still. I will appreciate hearing about your progress.

I have put you on my permanent mailing list, and given instructions for mailing whatever is still available. Unfortunately a lot has become unavailable, but I hope most of it will come out in Springer's lecture notes during 1970.

Sincerely yours

A. Grothendieck

---

<sup>74</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGL3370scan.pdf>

## Lettre à D Ferrand, 3.11.1970<sup>75</sup>

Massy le 3.11.1970

Cher Ferrand,

J'aimerais savoir si je peux compter sur ton exposé SGA 6 XI dans un avenir assez rapproché (disons d'ici fin décembre). Dans le cas contraire, je pense qu'il serait préférable que je publie SGA 6 sans l'exposé XI. Il serait quand même raisonnable, après le travail que tu t'es tapé, que tu en fasses au moins un article d'exposition, et j'aimerais savoir alors où tu penses le publier, pour que je puisse y référer dans l'introduction à SGA 6.

Bien cordialement

---

<sup>75</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGF31170scan.pdf>

## Lettre à J.L. Verdier, 3.11.1970<sup>76</sup>

Massy le 3.11.1970

Cher Verdier,

Ne m'étant guère occupé de Math depuis trois mois, je suis un peu perdu pour SGA 4. Si je me rappelle bien, tu as rédigé ou es en train de rédiger les parties suivantes, qui sont exactement ce qui manque pour que SGA 4 soit complet :

V

VI par. 5 et suivants

Si je me rappelle bien, VI était en fait terminé d'être rédigé, il fallait seulement y apporter quelques modifications dont on avait discuté avant ton départ. De plus, je pense que tu as avec toi l'exposé

VI B

de Saint Donat, et je t'envoie également l'Appendice à XVII du même, dont j'avais apparemment lu les premières pages. Pourrais tu me le renvoyer (ou le renvoyer à St Donat) avec tes annotations et commentaires ?

Tu dois avoir un exemplaire du tirage de XVII ; le XVIII n'a pas été tapé sur Stencils, mais directement sur papier pour offset ; la frappe est terminée, et Deligne est censé la corriger.

Écris-moi stp où tu en es avec ta part de rédaction, et avec la lecture de VI B. Pour des raisons techniques, ce serait bien agréable mois qui viennent. Dis-moi en tous cas si tu as l'intention de terminer, et si oui, quand tu penses avoir terminé.

Bien cordialement

---

<sup>76</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGV31170scan.pdf>



## Lettre à P. Deligne, 3.11.1970<sup>77</sup>

Massy le 3.11.1970

Cher Deligne,

Pourrais-tu me dire si tu as terminé de regarder l'exposé de Rim SGA 7 VI, et si oui, me l'envoyer avec tes commentaires (sinon, me dire si tu as l'intention de le regarder et quand) ?

J'ai demandé à Mlle Altazin, qui a tapé ton exposé SGA 4 XVIII, de te l'envoyer avec le manuscrit, pour que tu le corriges. Pourrais-tu me dire si tu l'as reçu et si tu as l'intention de faire les corrections ? Quand elles seront faites, ou si tu ne veux pas les faire, envoyés moi le texte au net stp.

As-tu eu des nouvelles de Ferrand pour SGA 6 XI ?

Bien cordialement

---

<sup>77</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGD31170scan.pdf>

**Lettre à J.L. Verdier<sup>78</sup>, 23.6.1971<sup>79</sup>**

Massy le 23.6.1971

Cher Verdier,

Merci pour ta lettre du 23 Mai. C'est dommage que tu ne m'aies pas envoyé ce malheureux exercice 4.10.6, cela aurait permis d'envoyer enfin à l'imprimeur le fascicule 1 de SGA 4. La personne qui a frappé le texte termine maintenant, elle partira en vacances et Springer rend la machine qu'elle avait en location, faute d'autres manuscrits. Cela remet donc la publication même de ce fascicule sine die.

Bien cordialement

---

<sup>79</sup>Transcribed with the collaboration of M. Küster

## CURRICULUM VITAE DE ALEXANDRE GROTHENDIECK<sup>80</sup>

Vous trouverez ci-joint l'exposé des titres et travaux des candidats à  
une direction de recherche

---

Né le 28 mars 1928 à Berlin, de mère allemande et de père apatride, émigré de Russie en 1921, mes parents émigrent d'Allemagne en 1933, participent à la révolution espagnole ; je les rejoins en mai 1939. Mes parents sont internés, d'abord mon père en 1939, puis ma mère en 1940 avec moi. Mon père est déporté du camp de Vernet en août 1942 pour Auschwitz et est resté disparu; ma mère meurt en 1957 des suites d'une tuberculose contractée au camp de concentration. Je reste près de deux ans dans des camps de concentration français, puis suis recueilli par une maison d'enfants du "Secours suisse" au Chambon-sur-Lignon, où je termine mes études de lycée en 1945. Études de licence (mathématiques) à Montpellier 1945-48, auditeur libre à l'École Normale Supérieure à Paris en 1948-49, où je suis le premier séminaire Cartan sur la théorie des faisceaux, et un cours de Leray du Collège de France sur la théorie de Schauder du degré topologique dans les espaces localement convexes. De 1949 à 1953 je poursuis des recherches à Nancy sur les espaces vectoriels topologiques, comme élève de J. Dieudonné et de L. Schwartz, aboutissement à ma thèse de doctorat en 1953, sur la théorie des produits tensoriels topologiques

---

<sup>80</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/CVscan.pdf>

et des espaces nucléaires, publiée dans les “Memoirs of the American Mathematical Society”. Je passe alors deux ans à l’Université de Sao Paulo (Brésil), où je continue et mène à leur aboutissement naturel certaines recherches liées aux produits tensoriels topologiques [6, 7], mais en même temps, sous l’influence de J. P. Serre, commence à me familiariser avec des questions de topologie algébrique et d’algèbre homologique. Ces dernières continueront à m’occuper jusqu’à aujourd’hui, et son encore très loin d’être menées à leur terme. Ce sont elles qui m’occuperont surtout pendant l’année 1955 passée à l’Université du Kansas (USA) ; j’y développe une théorie commune pour la théorie de Cartan-Eilenberg des foncteurs dérivés des foncteurs de modules et la théorie de Leray-Cartan de la cohomologie des faisceaux [8], et développe des notions de “cohomologie non commutative” dans le contexte des faisceaux et des espaces fibrés à faisceau structural, qui trouveront leur cadre naturel quelques années plus tard avec la théorie des topos (aboutissement naturel du point de vue faisceautique en topologie générale) [16, SGA 4].

À partir de 1956 je suis resté en France, à l’exception de séjours de quelques semaines ou mois dans des universités étrangères. De 1950 à 1958 j’ai été chercheur au CNRS, avec le grade de directeur de recherches en 1958. De 1959 à 1970 j’ai été professeur à l’Institut des Hautes Études Scientifiques. Ayant découvert à la fin de 1959 que l’IHES était subventionné depuis trois ans par le Ministère des Armées, et après des essais infructueux pour inciter mes collègues à une action commune sans équivoque contre la présence de telles subventions, je quitte l’IHES en septembre 1970.

Depuis 1959 je suis marié à une française, et je suis père de quatre enfants. Je suis apatride depuis 1940, et ai déposé une demande de naturalisation française au printemps 1970.

Depuis 1956 jusqu’à une date récente, mon intérêt principal s’est porté sur la géométrie algébrique. Mon intérêt pour la topologie, la géométrie analytique, l’algèbre homologique ou le langage catégorique a été constamment subordonné aux multiples besoins d’un vaste programme de construction de la géométrie algébrique, dont une première vision d’ensemble remonte à 1958. Ce programme est poursuivi systématiquement dans [16, 17], d’abord dans un isolement relatif, mais progressivement avec l’assistance d’un nombre croissante de chercheurs de

valeur. Il est loin d'être achevé à l'heure actuelle. L'extraordinaire crise écologique que nous aurons à affronter dans les décades qui viennent, rend peu probable qu'il le sera jamais. Elle nous imposera d'ailleurs une perspective et des critères de valeur entièrement nouveaux, qui réduiront à l'insignifiance ("irrelevance") beaucoup des plus brillants progrès scientifiques de notre siècle, dans la mesure où ceux-ci restent étrangers au grand impératif évolutionniste de notre temps : celui de la survie. Cette optique s'est imposée à moi avec une force croissante au cours de discussions avec de nombreux collègues sur la responsabilité sociale des scientifiques, occasionnées par ma situation à l'IHES depuis la fin de 1969. Elle m'a conduit en juillet 1970 à m'associer à la fondation d'un mouvement international et interprofessionnel "Survivre", et à consacrer aux questions liées à la survie une part importante de mon énergie. Dans cette optique, la seule valeur de mon apport comme mathématicien est de me permettre aujourd'hui, grâce à l'estime professionnelle et personnelle acquise parmi mes collègues, de donner plus de force à mon témoignage et à mon action en faveur d'une stricte subordination de toutes nos activités, y compris nos activités de scientifiques, aux impératifs de la survie, et à la promotion d'un ordre stable et humain sur notre planète, sans lequel la survie de notre espèce ne serait ni possible, ni désirable.

A Grothendieck

## Principales publication

### Espaces Vectoriels Topologiques

1. *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. 74 (1952), p. 168-186.
2. *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, J. Crelle 192 (1953), p. 35-64 et 77-95.
3. *Espaces Vectoriels Topologiques*, Notes polyc., Sao Paulo (1954), 240 p.
4. *Sur les espaces  $(F)$  et  $(DF)$* , Summa Bras. 3 (1954), p. 57-123.

5. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. AMS, n° 16 (1955), 329 p.
6. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologique*, Bull. Sao Paulo 8 (1953), p. 1-79.
7. *La théorie de Fredholm*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 319-384.

### Topologie et algèbre homologique

8. *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku M.j., 9 (1957), p. 119-221.
9. *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 1-7.

### Géométrie analytique

10. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J., 79 (1957), p. 121-138.
11. *Techniques de construction en géométrie analytique*, Sem. H. Cartan, 13 (1960/61), exposés 7 à 17.

### Géométrie algébrique

12. *La théorie des classes de Chern*, Bull. SMF 86 (1958), p. 137-154.
13. *Sur une note de Mattuck-Tate*, J. Crelle 200 (1958), p. 137-154.
14. *The cohomologie theory of abstract algebraic varieties*, Proc. Int Congress, Edinburgh (1958), p. 103-118.
15. *Éléments de Géométrie Algébrique* (rédigés avec la coll. de Jean DIEUDONNÉ), Chap. I-IV, publ. Math. IHES (1960/67), env. 1800 pages.
16. *Séminaires de Géométrie Algébrique* (SGA 1, ..., 7), IHES, 1960/69, env. 4000 pages (en cours de réédition chez Springer, Lecture Notes) :

SGA 1 Théorie du Groupe Fondamental

SGA 2 Cohomologie locale et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux

SGA 3 (en coll. avec M. Demazure) Schémas en Groupes des Topos et Cohomologie étale des Schémas

SGA 5 Cohomologie  $\ell$ -adique et fonctions  $L$

SGA 6 (en coll. avec J. Berthelot et J.L. Illusie) Théorie des Intersections et Théorèmes de Riemann-Roch

SGA 7 Groupe de Monodromie en Géométrie Algébrique

17. *Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens*, Invent. Math. 2 (1966), p. 59-78.
18. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (en coll. avec J. Giraud, S. Kleiman, M. Raynaud, J. Tate), North Holland, 1968.
19. *Catégorie cofibrées additives et complexe cotangent relatif*, Lecture Notes in Maths., Springer n° 79 (1968), 167 pages.

# ESQUISSE THÉMATIQUE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE A. GROTHENDIECK<sup>81</sup>

---

Les numéros entre crochets renvoient, soit à la bibliographie sommaire jointe à mon Curriculum Vitae (numéros de [1] à [19]), soit au complément à cette bibliographie placée à la fin du présent rapport (numéros entre [1 bis] et [20 bis]). Enfin, nous avons joint en dernière page une liste par ordre alphabétique des auteurs de certains des travaux cités dans le présent rapport qui ont été directement suscités ou influencés par les travaux de A. Grothendieck ; le renvoi à cette dernière bibliographie se fait par le sigle [\*] derrière le nom de l’auteur cité, comme pour I. M. Gelfand [\*].

## 1. Analyse Fonctionnelle ([1] à [7], [6 bis])

Mes travaux d’Analyse Fonctionnelle (de 1949 à 1953) ont porté surtout sur la théorie des espaces vectoriels topologiques. Parmi les nombreuses notions introduites et étudiées (produits tensoriels topologiques [5,6], applications nucléaires et applications de Fredholm [5,6,7], applications intégrales et ses variantes diverses [5,6], applications de puissance  $p$ -ième sommable [5], espaces nucléaires [5], espaces  $(DF)$  [4], etc.), c’est la notion d’*espace nucléaire* qui a connu la meilleure fortune : elle a fait jusqu’à aujourd’hui l’objet de nombreux séminaires et publications. En particulier, un volume du traité de I. Gelfand [\*] sur les “Fonctions

---

<sup>81</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/esquithemIscan.pdf>, <https://agrothendieck.github.io/divers/esquithemIIscan.pdf>



Généralisées” lui est consacré. Une des raisons de cette fortune provient sans doute de la théorie des probabilités, car il s’avère que parmi tous les EVT, c’est dans les espaces nucléaires que la théorie de la mesure prend la forme la plus simple (théorème de Minlos). Les résultats de [6], plus profonds, semblent avoir été moins bien assimilés par les développements ultérieurs, mais ils apparaissent comme source d’inspiration dans un certain nombre de travaux délicats assez récents sur des inégalités diverses liées à la théorie des espaces de Banach, notamment ceux de Pelczynski. Signalons également les résultats assez fins de [6] et de [8 bis] sur les propriétés de décroissance de la suite des valeurs propres de certains opérateurs dans les espaces de Hilbert et dans les espaces de Banach généraux.

*Références* : L. Schwartz, J. Dieudonné, I. Gelfand, P. Cartier, J. L. Lions.

## 2. Algèbre Homologique ([8], [9], [19], [9 bis])

Depuis 1955, me plaçant au point de vue de “l’usager” et non celui de spécialiste, j’ai été amené continuellement à élargir et à assouplir le langage de l’algèbre homologique, notamment sous la poussée des besoins de la géométrie algébrique (théories de dualité, théories du type Riemann-Roch, cohomologies  $\ell$ -adiques, cohomologies du type de De Rham, cohomologies cristallines...). Deux directions principales à ces réflexions : développement d’une algèbre homologique non commutative (amorcée dans [10 bis] et systématisée dans la thèse de J. Giraud [\*]); théorie des catégories dérivées (développée systématiquement par J. L. Verdier, exposée dans Hartshorne [\*], Illusie [\*] et [16 SGA 4 Exp. XVIII]). Ces deux courants de réflexion sont d’ailleurs loin d’être épuisés, et sont sans doute appelés à se rejoindre, soit au sein d’une “algèbre homotopique” dont une esquisse préliminaire a été faite par Quillen [\*], soit dans l’esprit de la théorie des  $n$ -catégories, particulièrement bien adaptée à l’interprétation géométrique des invariants cohomologiques (cf. le livre cité de J. Giraud et le travail de Mme. M. Raynaud [\*]).

*Références* : J.L. Verdier, P. Deligne, D. Quillen, P. Gabriel.

### 3. Topologie ([16, SGA 4], [9])

Jusqu'à présent, c'est surtout le  $K$ -invariant des espaces topologiques que j'avais introduit à l'occasion de mes recherches sur le théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique, qui a connu la fortune la plus brillante, étant le point de départ de très nombreuses recherches en topologie homotopique et topologie différentielle. De nombreuses constructions que j'avais introduits pour les besoins de la démonstration algébrique du théorème de Riemann-Roch (telles les opérations  $\lambda_i$  et leurs liens avec les opérations du groupe symétrique) sont devenues pratique courante non seulement en géométrie algébrique et en algèbre, mais également en topologie et en théorie des nombres, notamment dans les travaux de mathématiciens comme Atiyah, Hirzebruch, Adams, Quillen, Bass, Tate, Milnor, Karoubi, Shih, etc...

Plus fondamental me semble néanmoins l'élargissement de la topologie générale, dans l'esprit de la théorie des faisceaux (développée initialement par J. Leray), contenu dans le point de vue des topos ([16, SGA 4]). J'ai introduit ces topos à partir de 1958 en partant du besoin de définir une cohomologie  $\ell$ -adique des variétés algébriques (plus généralement, des schémas), qui convienne à l'interprétation cohomologique des célèbres conjectures de Weil. En effet, la notion traditionnelle d'espace topologique ne suffit pas à traiter le cas des variétés algébriques sur un corps autre que le corps des complexes, la topologie proposée précédemment par Zariski ne donnant pas lieu à des invariants cohomologiques "discrets" raisonnables. A l'heure actuelle, le point de vue des topos, et la notion de "localisation" correspondante, font partie de la pratique quotidienne du géomètre algébriste, et il commence à se répandre également en *théorie des catégories* et en *logique mathématique* (avec la démonstration par B. Lawvere [\*] du théorème de Cohen d'indépendance de l'axiome du continu, utilisant une adaptation convenable de la notion de topos). Il n'en est pas encore de même en topologie et en géométrie différentielle et analytique, malgré certains premiers essais dans ce sens (comme la tentative de démonstration par Sullivan d'une conjecture d'Adams en  $K$ -théorie, par réduction à une propriété de l'opération de Frobenius sur les variétés algébriques en car.  $p > 0$ ).

*Références* : M. Atiyah, F. Hirzebruch, H. Bass, J. Leray, M. Artin, D. Quillen,

#### 4. Algèbre ([15], [16], [18])

Comme l'algèbre homologique, l'algèbre a été pour moi un outil à développer, et non un but en soi. J'ai parlé au par. 2 de mes contributions à l'algèbre homologique, et au par. 3 de mes contributions à la  $K$ -théorie; celle-ci comprend une partie purement algébrique (qui, une fois étendue en une théorie des  $K^i$  supérieurs, finira par devenir une partie de l'algèbre homologique ou homotopique). Ainsi, un certain nombre de mes résultats en géométrie algébrique se spécialisent en des résultats en algèbre pure, comme la relation  $K(A[t]) \simeq K(A)$ , où  $A$  est un anneau. Mises à part ces retombées, on peut signaler les contributions ci-dessous.

- a) *Algèbre catégorique* : En fait, de façon continue depuis 1953, je me suis senti dans l'obligation, au fur et à mesure des besoins, de développer une panoplie catégorique toujours insuffisante. La plupart des résultats et des notions ainsi introduites se trouvent développés un peu partout dans [15, 16], notamment dans le premier exposé de SGA 4. Il ne peut être question de passer en revue ici même sommairement les notions qui sont ainsi entrées dans l'usage courant. Signalons seulement ici le langage des *univers* (pour éliminer des difficultés logiques dans la manipulation intensive des catégories), et celui de la *descente* (développé de façon systématique par Giraud [\*]).

*Références* : J. Giraud, P. Gabriel.

- b) *Algèbre commutative* : Dans le langage géométrique des "schémas", l'algèbre commutative peut être considérée comme étant, essentiellement, l'étude locale des schémas. C'est ainsi que [15], et notamment le Chap. IV de cet ouvrage, contient de très nombreux résultats nouveaux d'algèbre commutative, dont il ne peut être question ici d'énumérer même les plus couramment utilisés. Notons seulement ici, en algèbre locale, la notion d'anneau *excellent* et ses propriétés de permanence (dont l'absence constituait sans doute la lacune la plus marquante de l'ouvrage de M. Nagata sur les anneaux locaux).

*Références* : M. Nagata, P. Samuel, M. Raynaud, O. Zariski.

- c) *Théorie du groupe de Brauer* : Mes contributions découlent pour l'essentiel de l'application de la cohomologie étale (développée dans [16, SGA 3]) à la théorie du groupe de Brauer. J'ai fait un exposé d'ensemble sur les résultats connus sur ce groupe dans [18].

*Références* : M. Artin, J. Tate, J.P. Serre

- d) *Théorie des algèbres de Lie* : Comme sous-produit de recherches sur les groupes algébriques en car.  $p > 0$ , je trouve certains résultats délicats sur les sous-algèbres de Borel ou de Cartan de certaines algèbres de Lie, notamment sur les corps de base imparfaits (cf. [16, SGA 6, Exp. XIII et XIV]).

*Références* : M. Demazure, J. Tits, J.P. Serre

## 5. Géométrie Analytique ([10], [11], [16 bis])

Mon influence sur la géométrie analytique est due moins aux résultats nouveaux que j'ai pu y démontrer (la plupart contenus dans les réf. cit.), que par les points de vue directement inspirés par la géométrie algébrique que j'ai pu y introduire, et les nombreuses suggestions d'énoncés que j'ai pu y faire.

Un des plus anciens est le théorème de finitude de Grauert pour les morphismes propres d'espaces analytiques, aboutissant à sa généralisation récente en un théorème qui s'énonce en termes de catégories dérivées (formulation sur laquelle j'avais insisté de longue date, et qui a été prouvée indépendamment par R. Kiehl [\*] et O. Forster et K. Knorr [\*]). D'autres théorèmes de finitude (de Frisch et Siu) pour les images directes supérieures d'un faisceau cohérent par une immersion ouverte, utilisant la profondeur du faisceau en les points du complémentaire, sont inspirés de théorèmes analogues en géométrie algébrique [16, SGA 2]; remarques analogues pour des théorèmes sur la cohomologie à supports compacts des faisceaux algébriques cohérents, complétés par un théorème d'existence, et leur interprétation en termes de théorèmes du type de Lefschetz pour la cohomologie cohérente (la version algébrique faire partie de la thèse de Mme. Michèle Raynaud (en cours de publication), et la version analytique est due à Trautmann [\*]). Parlant en termes de grands thèmes de recherche plutôt qu'en termes de résultats techniques particuliers, je pense qu'outre les thèmes déjà nommés, les thèmes suivants

ont été directement suscités ou tout au moins influencés par des idées que j’avais développées en géométrie algébrique:

- a) *Techniques de construction d’espaces analytiques*, aboutissant aussi bien à des espaces “modulaires” “globaux” comme les espaces modulaires de Picard, pour certains espaces analytiques compacts comme dans [11] (le cas général ne semble pas encore traité), qu’à des espaces modulaires “locaux” de déformation d’une structure analytique complexe donnée, ou au modèle de la Géométrie Formelle (“th. d’existence des modules formels”, cf. [15 bis, Exp. no 195]). Dans certains cas, les énoncés obtenus en géométrie algébrique sont directement applicables (cf. M. Hakim [\*]), dans d’autres de nouvelles difficultés surgissent, pas toujours surmontées à l’heure actuelle. Parmi les travaux définitifs dans ce sens, on peut citer la thèse de A. Douady [\*].
- b) *Théorèmes de dualité locaux et globaux pour les faisceaux cohérents*, développés notamment par J.L. Verdier [\*] et J.P. Ramis et G. Ruget [\*], inspirés par la théorie que j’avais développée dans le cas des schémas, exposée dans R. Hartshorne [\*].
- c) *Formulations de théorèmes du type de Riemann-Roch* pour des variétés analytiques compactes ou des morphismes propres de telles variétés, cf. [16, SGA 6, Exp. 0]. Les problèmes essentiels restent toujours ouverts.
- d) *Théorèmes de De Rham analytiques complexes [16 bis], cohomologie cristalline complexe*. Certains des résultats et des idées que j’avais développés à ce sujet ont été utilisés dans des développements théoriques divers, comme la théorie de Hodge généralisée de P. Deligne [\*].
- e) *Espaces rigide-analytiques*. M’inspirant de l’exemple de la “courbe elliptique Tate”, et des besoins de la “géométrie formelle” sur un anneau de valuation discrète complet, j’étais parvenu à une formulation partielle de la notion de variété rigide-analytique sur un corps valué complet, qui a joué son rôle dans la première étude systématique de cette notion par J. Tate [\*]. Par ailleurs, les “cristaux” que j’introduis sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique  $> 0$  peuvent s’interpréter parfois en termes de fibrés vectoriels à

connexion intégrable sur certains types d'espaces rigide-analytiques sur des corps de caractéristique nulle; ceci fait pressentir l'existence de relations profondes entre cohomologie cristalline en  $\text{car.} > 0$ , et cohomologie de systèmes locaux sur des variétés rigide-analytiques en  $\text{car.}$  nulle.

*Références* : J. P Serre, H. Grauert, H. Cartan, P. Deligne, A. Douady, B. Malgrance, K. Knorr, R. Kiehl, J. Tate.

## **6. Groupes Algébriques ([16 SGA 3 - en trois volumes] [12 bis])**

Ce sujet relève à la fois de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes. Le travail cité SGA 3 se place surtout sur des schémas de base généraux, et la part de la géométrie algébrique y est certes considérablement plus large que celle de la théorie des groupes. Néanmoins, grâce à la technique des schémas, nous y obtenons des résultats nouveaux même dans le cas de groupes définis sur un corps de base, les plus intéressants (relatifs surtout au cas d'un corps de base imparfait) étant contenus dans SGA 3, Exp XIV. Ma contribution principale, continuant dans la voie ouverte par A. Borel et C. Chevalley dans le contexte de la géométrie algébrique habituelle, a été de montrer le parti qu'on pouvait tirer d'une application systématique de la théorie des schémas aux groupes algébriques et aux schémas en groupes.

*Références* : J. Tits, F. Bruhat, M. Demazure, P. Gabriel, A. Borel, D. Mumford.

## **7. Groupes discrets ([18, Exp VIII], [13 bis])**

Dans [18, Exp. VIII] je développe une théorie purement algébrique des classes de Chern des représentations d'un groupe discret sur un corps de base (ou même un anneau de base) quelconque, avec des applications de nature arithmétique sur l'ordre des classes de Chern des représentations complexes. Cette théorie peut être considérée comme cas particulier d'une théorie des classes de Chern des représentations linéaires de schémas en groupes quelconques, elle-même contenue dans la théorie des classes de Chern  $\ell$ -adiques des fibrés vectoriels sur des topos annelés quelconques. Dans [13 bis], j'établis, à peu de choses près, que pour un groupe discret  $G$ , la théorie des représentations linéaires de  $G$  (sur un anneau de base quelconque) ne dépend que du complété profini  $\hat{G}$  de  $G$ .

## 8. Groupes formels ([17] [16 SGA 7] [14 bis])

C'est un sujet qui relève à la fois de la théorie des groupes, de celle des groupes de Lie, de la géométrie algébrique, de l'arithmétique, et (sous la forme voisine des groupes de Barsotti-Tate) de la théorie des systèmes locaux. Ici encore, la théorie des schémas permet une grande aisance, et c'est dans ce contexte par exemple que se place d'emblée I. Manin [\*a], dans son exposé classique de la théorie de Dieudonné. Ma principale contribution, en dehors de cette simplification conceptuelle, a été le développement d'une "théorie de Dieudonné" pour les groupes de Barsotti-Tate sur des schémas de base généraux à caractéristiques résiduelles  $> 0$ , en termes du "cristal de Dieudonné" associé à un tel groupe. Une esquisse de cette théorie a été exposée dans divers cours et séminaires, y compris dans mon cours au Collège de France en 1970/71 et 71/72; certains énoncés principaux sont esquissés dans les C.R. du Congrès International de Nice en 1970 [14 bis]. Une partie de ces idées est développée dans la thèse de W. Messing [\*], et les besoins techniques de la théorie ont été la motivation pour le développement par L. Illusie [\*] de sa théorie des déformations des schémas en groupes commutatifs, vérifiant des conjectures suggérées par cette "théorie de Dieudonné cristalline". Par ailleurs, les relations entre schémas abéliens et groupes de Barsotti-Tate associés sont explorées et exploitées également dans [17] et dans [16, SGA 7, Exp. IX].

*Références* : J. Tate, B. Mazur, A. Néron, L. Illusie, J.N. Katz, W. Messing, I. Manin.

## 9. Arithmétique ([16 SGA 5, Exp XVI] [18, Exp III])

Ma contribution principale a consisté (en collaboration avec M. Artin) en la démonstration de la rationalité des fonctions  $L$  associées à des faisceaux  $\ell$ -adiques généraux sur des variétés algébriques sur des corps finis, comprenant comme cas particulier les fonctions  $L$  associées à des caractères de groupes finis opérant sur de telles variétés. S'inspirant des conjectures de Weil, on arrive en effet à exprimer ces fonctions  $L$  en termes de produits alternés de polynômes caractéristiques de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la "cohomologie à support propre" de la variété envisagée. Bien au delà d'une simple question de rationalité, ces ré-

sultats ouvrent la voie à une approche cohomologique systématique d’invariants arithmétiques subtils comme les fonctions  $\zeta$  et  $L$  des variétés, et l’interprétation en termes arithmétiques de théorèmes tels que les théorèmes de dualité (démontrés à l’heure actuelle) et de Lefschetz pour les sections hyperplanes (non démontrés encore en car.  $> 0$ ). Il y a là un champ d’étude immense, qui par la nature des choses devrait se trouver, tôt ou tard, centré sur la notion de “motif” (dénominateur commun des divers types de cohomologie qu’on sait attacher à une variété algébrique) – mais qui probablement ne sera jamais exploré jusqu’au bout, l’heure de ce genre d’investigations étant déjà passée (même si rares sont ceux qui en ont pris conscience).

*Références* : J.P. Serre, A. Weil, B. Dwork, J. Tate, M. Artin, P. Deligne...

## 10. Géométrie Algébrique ([12] à [19], [15 bis] à [20 bis])

C’est dans cette direction que mon influence a été la plus directe et la plus profonde, puisque c’est dans cette optique que se placent pour l’essentiel mes travaux depuis 1959. Voici les thèmes principaux sous lesquels on peut placer mes contributions:

- a) *Travail de fondement* : Il s’agissait de dégager un cadre suffisamment vaste pour servir de fondement commun à la géométrie algébrique habituelle (y compris celle développée par des auteurs comme A. Weil, O. Zariski, C. Chevalley, J.P. Serre sur des corps de base quelconques) et à l’arithmétique. C’est fait pour l’essentiel dans [15, Chap. I,II et des parties des Ch. III et IV], avec l’introduction et l’étude de la *notion de schéma*. Des généralisations ont été développées par la suite, dans le même esprit, avec les schémas formels [15, Chap. I, par. 10], la théorie des “algebraic spaces” de M. Artin (cf. Knutson [\*]), les “algebraic stacks” ou “multiplicités algébriques” de P. Deligne et D. Mumford (\*), des “schémas relatifs” de la thèse de M. Hakim [\*] (en attendant les “multiplicités formelles” et les “multiplicités algébriques relatives” sur des topos annelés généraux, etc). Ces généralisations montrent la part conceptuelle importante qui revient, dans le langage des schémas, à la notion générale de la localisation, c’est à dire à celle de *topos* (dont il a été question au par. 3). Les fondements développés dans [15] et [16] sont aujourd’hui le “pain quotidien” de la grande majorité des géomètres algébristes,



et leur importance a été soulignée à de nombreuses occasions par des mathématiciens aussi divers que O. Zariski, J.P. Serre, H. Hironaka, D. Mumford, I. Manin, F. Chafarévitch.

- b) *Théorie locale des schémas et des morphismes de schémas* : Dans ce contexte se placent les développements d'algèbre commutative mentionnés au par. 4, et l'étude détaillée de notions comme celles de morphisme lisse, étale, net, plat, etc. Les quatre volumes de [15, Chap. IV] sont consacrés à ces développements, qui ont d'ailleurs inspiré des développements analogues en théorie des espaces analytiques et rigide-analytiques
- c) *Techniques de construction de schémas* : Parmi les techniques développées, exposées surtout dans [15 bis] et des séminaires non publiés (par moi-même et d'autres), il y a la *théorie de la descente* (cf. aussi [16, SGA I, Exp. V, VI]), celle des *schémas quotients*, des *schémas de Hilbert*, des *schémas de Picard*, des "*modules*" formels, le *théorème d'existence* des faisceaux de modules algébriques associés à des modules formels ([15, Chap. III, par. 5]). Le point de vue adopté est surtout celui de la construction d'un schéma à partir du foncteur qu'il représente. Dans cette optique, je n'étais pas parvenu à une véritable caractérisation maniable des foncteurs représentables par un schéma relatif (localement de type fini sur un schéma noethérien) – c'est M. Artin qui y est parvenu ultérieurement [\*], en remplaçant la notion de schéma par celle, plus générale et plus stable, d'espace algébrique. Parmi d'autres recherches dans la même direction, suscitées par mes travaux, il y a celles de J. Murre sur les schémas de Picard sur un corps [\*], celles de D. Mumford et de M. Raynaud [\*] sur ces mêmes schémas sur des bases générales, et dans une certaine mesure ceux de D. Mumford [\*] et de S. Seshadri sur le passage au quotient, pour n'en citer que quelques-uns.
- d) *Théories cohomologiques* :
  - 1°) *Cohomologie "cohérente"* : résultats de finitude, de comparaison avec la cohomologie formelle, cf. [15, Chap. III]. Théorèmes de dualité et des résidus : un exposé systématique de mes idées et résultats est développé dans le séminaire de R. Hartshorne [\*], cf. aussi [18 bis].

- 2°) *Cohomologie  $\ell$ -adique* : définition de la cohomologie étale, théorèmes de comparaison, de finitude, de dimension cohomologique, de Lefschetz faible, [16 SGA 4]; théorèmes de dualité, formules de Lefschetz et d'Euler-Poincaré, application aux fonctions  $L$ , [16, SGA 15].
- 3°) *Cohomologie de De Rham* : [16 bis], [17 bis].
- 4°) *Cohomologie cristalline* : quelques idées de départ sont esquissées dans [18, Exp. IX], puis reprises et systématisées dans la thèse de P. Berthelot [\*], et dans le travail de P. Berthelot et L. Illusie sur les classes de Chern cristalline [\*].
- e) *Théorie du groupe fondamental* ([16, SGA 1], SGA 2, SGA 7, Exp. I et II], [15 bis, no 182], [19 bis]) :
- D'un point de vue algébrico-géométrique, tout était à faire, depuis la définition du groupe fondamental d'une variété quelconque, en passant par des propriétés "de descente" incluant des résultats assez formels du type de van Kampen, jusqu'au calcul du groupe fondamental dans les premiers cas non triviaux, comme celui d'une courbe algébrique privée de certains points; on peut y adjoindre les théorèmes de génération et de présentation finie du groupe fondamental d'une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Ce programme est accompli pour l'essentiel dans SGA 1, en utilisant à la fois les résultats classiques sur le corps des complexes (établis par voie transcendante) et une panoplie d'outils faits sur mesure (théorie de la descente, étude des morphismes étales, théorème d'existence de faisceaux cohérents...). Les autres références contiennent des résultats plus spéciaux: théorèmes du type de Lefschetz dans SGA 2, action des groupes de monodromie locale sur le groupe fondamental d'une fibre dans SGA 7, Exp. I, calculs de certains groupes fondamentaux locaux dans [19 bis], via les groupes fondamentaux de certains schémas formels. Tous ces résultats ont été utilisés couramment dans de nombreux travaux, et en ont inspiré d'autres comme la thèse de Mme. Michèle Raynaud [\*].
- f) *Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* pour les groupes de Picard, le groupe fondamental, la cohomologie étale, la cohomologie cohérente. Il s'agit ici

de la comparaison entre les invariants (cohomologiques ou homotopiques) d'une variété algébrique et d'une section hyperplane. Les idées de départ sont développées dans [16, SGA 2]. Cependant, pour des énoncés “définitifs”, en termes de conditions nécessaires et suffisantes, se reporter plutôt à la thèse de Mme. Michèle Raynaud [\*] déjà citée.

g) *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch :*

La principale idée nouvelle, c'est qu'il y a presque identité entre le groupe “de Chow” des classes de cycles sur une variété  $X$ , et un certain groupe de “classes de faisceaux cohérents” (tout au moins modulo torsion), à savoir le groupe  $K(X)$  (mentionné dans le par. 3). Dans un contexte modeste c'est exposé dans [12] et le travail de A. Borel et J.P. Serre [\*], dans un contexte plus ambitieux cela donne l'imposant séminaire [16, SGA 7]. Dans le même esprit, cf. [12 bis].

Par ailleurs, l'idée (que je semble avoir été le premier à introduire avec ma formulation du théorème de Riemann-Roch) de reformuler un théorème sur une variété (dû en l'occurrence à F. Hirzebruch) en un théorème plus général sur un morphisme de variétés, a connu par la suite une grande fortune, non seulement en géométrie algébrique, mais aussi en topologie algébrique et topologie différentielle (à commencer par la “formule de Riemann-Roch différentiable”, développée par M.F. Atiyah et F. Hirzebruch sous l'inspiration de ma formulation “relative” du théorème de Riemann-Roch).

h) *Schémas abéliens :*

En termes plus classiques, ce sont les familles de variétés abéliennes, paramétrées par un schéma quelconque. Les résultats les plus importants que j'y ai établis sont le “*théorème de réduction semi-stable*” et ses conséquences et variantes [16, SGA 7, Exp. IX], le théorème d'*existence de morphismes de schémas abéliens* contenu dans [17] et ses variantes (généralisé par P. Deligne [\*] en un théorème sur la cohomologie de Hodge-De Rham relative d'une famille de variétés projectives complexes non singulières), enfin une théorie des *déformations infinitésimales des schémas abéliens* (non publiée sur une base

quelconque), en termes de la déformation d'une filtration de Hodge sur un  $H^1$  relatif de De Rham (interprété comme une cohomologie cristalline).

i) *Groupes de monodromie :*

Mes principales contributions sont exposées (en partie par P. Deligne) dans le premier volume de [16, SGA 7], donnant des propriétés fondamentales de l'action du groupe de monodromie locale sur la cohomologie comme sur le groupe fondamental d'une fibre. Parmi les principales applications, il y a le théorème de "réduction semi-stable" des schémas abéliens signalé au paragraphe précédent.

j) *Divagations motiviques :*

Nous entrons ici dans le domaine du rêve éveillé mathématique, où on s'essaie à deviner "ce qui pourrait être", en étant aussi insensément optimiste que nous le permettent les connaissances parcellaires que nous avons sur les propriétés arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. La notion de motif peut se définir en toute rigueur avec les moyens du bord (c'est fait par I. Manin [\*] et M. Demazure [\*]), mais dès qu'on veut aller plus loin et formuler des propriétés fondamentales "naturelles", on bute sur des conjectures actuellement indémontrables, comme celles de Weil ou de Tate, et d'autres analogues que la notion même de motif suggère irrésistiblement. Ces propriétés ont fait l'objet de nombreuses conversations privées et de plusieurs exposés publics, mais n'ont jamais fait l'objet d'une publication, puisqu'il n'est pas d'usage en mathématique (contrairement à la physique) de publier un rêve, si cohérent soit-il, et de suivre jusqu'au bout où ses divers éléments nous peuvent entraîner. Il est évident pourtant, pour quiconque se plonge suffisamment dans la cohomologie des variétés algébriques, "qu'il y a quelque chose" – que "les motifs existent". Il y a quelques années encore, j'ai joué avec l'idée d'écrire contrairement à l'usage, un livre entièrement conjectural sur les motifs – une sorte de science-fiction mathématique. J'en ai été empêché par des tâches plus urgentes que des tâches de mathématicien, et je doute fort actuellement qu'un tel livre soit jamais écrit, ni qu'on arrive jamais (même conjecturalement) à se faire une idée d'ensemble à la fois pré-

cise et suffisamment vaste sur le formalisme des motifs. Avant qu'on n'y parvienne, il sera sans doute devenu évident pour tous, sous la poussée des événements, la science spéculative et parcellarisée ne faisant plus vivre son homme, qu'il est des tâches plus urgentes que de mettre sur pied même la plus belle théorie du monde, conjectural ou non.

## **Complément à la bibliographie sommaire jointe au Curriculum Vitae de A. Grothendieck (travaux non inclus dans la dite bibliographie)**

### **Analyse fonctionnelle**

- 1 bis. *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles*, Journal d'Analyse Math. vol II, pp. 243-280 (1952/53).
- 2 bis. *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*, Boletim da Soc. Mat. de Sao Paulo, vol. 8°, pp. 85-110 (1953).
- 3 bis. *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type  $C(K)$* , Canadian Journal of Math., Vol. 5, pp. 125-173 (1953).
- 4 bis. *Sur certains sous-espaces vectoriels de  $L^p$* , Can. J. Math. vol. 6, pp. 158-160 (1953).
- 5 bis. *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces  $L^1$* , Can. Journ. Math. vol. 7, pp. 552-561 (1955).
- 6 bis. *Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de Von Neumann munies d'une trace*, Séminaire Bourbaki n° 115 (Mars 1955).
- 7 bis. *Un résultat sur le dual d'une  $C^*$ -algèbre*, Journ. de Math. vol. 36, pp. 97-108 (1957).
- 8 bis. *The trace of certain operators*, Studia Mathematica t. 20 (1961) pp. 141-143.

## Algèbre Homologique

- 9 bis. *A general theory of fiber spaces with structure sheaf*, University of Kansas, 1955.
- 10 bis. *Standard conjectures on algebraic cycles*, Proc. Bombay, Coll. on Alg. Geom. 1968, pp. 193-199.

## Algèbre

- 11 bis. (en collaboration avec J. Dieudonné) *Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques*, Journal of Algebra, vol. 5, pp. 305-324 (1967).

## Groupes algébriques

- 12 bis. Exposés 4 (Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections) et 5 (torsion homologique et sections rationnelles), in Anneaux de Chow et applications, Sémin. Chevalley à l'ENS, 1958, (36 p + 29 p.).

## Groupes discrets

- 13 bis. *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets*, Manuscripta Math. vol 2, pp. 375-396 (1970).

## Groupes Formels

- 14 bis *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes Congr. Int. math. 1970, t. 1., pp. 431-436.

## Géométrie Algébrique

- 15 bis. *Techniques de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique* (recueil des exposés Bourbaki n° 182, 190, 195, 212, 221, 232, 236), Secrétariat de l'IHP, rue Pierre Curie, Paris (1958-1962).

- 16 bis. *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES, vol. 29, pp. 95-103 (1966).
- 17 bis. *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons*, Topology, vol. 8, pp. 299-303 (1969).
- 18 bis. *Local cohomology* (notes by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math. n° 41 (1967), Springer.
- 19 bis. (en coll. avec J.P. Murre) *The tame fundamental group of a formal neighbourhood...* Lecture Notes in Math. n° 208 (1971), Springer.
- 20 bis. (avec H. Seydi), *Platitude d'une adhérence à schématique et lemme de Hironaka généralisé*, Manuscripta Math. 5, pp. 323-339 (1971).

## Liste de travaux cités, suscites ou influences par les travaux de A. Grothendieck

M. ARTIN, Algebraization of Formal Moduli, I (in Global Analysis, pp. 21-71, University of Tokyo Press, Princeton University Press, 1968), II Existence of modifications, Annals of Mathematics, Vol. 91, pp. 88-135 (1970).

M.F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 65, pp 276-281 (1959).

P. BERTHELOT, Cohomologie cristalline des schémas propres et lisses de caractéristique  $p > 0$ , Thèse, Université Paris VII, 1971 (paraîtra dans Lecture Notes of Math. chez Springer).

P. BERTHELOT et L. ILLUSIE, Classes de Chern en cohomologie cristalline, C.R. Acad. Sci. Paris t. 270, pp. 1695-1697 (22 juin 1970) et p. 1750-1752 (29 juin 1970).

A. BOREL et J.P. SERRE, Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck), Bull. Soc. Math. France, t. 86, pp. 97-136 (1958).

P. DELIGNE, Théorie de Hodge I (Actes du Congrès International des mathématiciens, Nice 1970) et II, Publications Math. n° 40, pp. 5-57 (1971).

P. DELIGNE et D. MUMFORD, The irreducibility of the space of curves of a given genus, Pub. Math. n° 36, pp. 75-110 (1969).

M. DEMAZURE, Motifs des variétés algébriques, Sémin. Bourbaki n° 365, 1969/70.

A. DOUADY, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts..., Ann. Inst. Fourier, vol. 16, pp. 1-98 (1966).

O. FORSTER et K. KNORR, Relativ-analytische Raume und die Kohärenz von Bildgarden, Inventiones Math. Vol. 16, pp. 113-160 (1972).



I.M. GELFAND et N. Ja. VILENKIN, Les distributions, tome 4, Applications de l'analyse harmonique, Dunod, Paris, 1968 (traduction).

J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne, Grundlehren des Maths. Wiss. Bd. 179, 1971, Springer.

M. HAKIM, Topos annelés et schémas relatifs, Ergebnisse des Math. Bd. 64, 1972, Springer.

R. HARTSHORNE, Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics n° 20 (1966).

L. ILLUSIE, Complexe Cotangent et Déformations I, Lecture Notes in Math. n° 239 (1971), Springer et II, idem, n° 283 (1972).

R. KIEHL, Relativ analytische Raume, Inventiones Math. vol. 16, pp. 40-112 (1972).

D. KNUTSON, Algebraic spaces, Lecture Notes in Math. n° 203 (1971), Springer.

F.N. LAWVERE, Toposes, algebraic geometry and logic, Lecture notes in Math., n° 274 (1972), Springer.

I. MANIN,

a) Théorie des groupes formels commutatifs sur des corps de caractéristique finie, (en russe) Uspekhi mat. Nauk, 1963, t. 18, pp. 3-90. (Il existe une traduction anglaise de l'Amer. Math. Soc).

b) Correspondances, motifs et transformations monoïdales (en russe), Mat. Sbornik t. 77, pp. 475-507.

W. MESSING, The crystals associated to a Barsotti-Tate group, Lecture Notes in Math. n° 264 (1971) Springer.

D. MUMFORD, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Math. Bd 34, 1965, Springer.

J.P. MURRE, On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups, Pub. Math. n° 23, pp. 5-43 (1964).

D. QUILLEN, Homotopical algebra, Lecture Notes in Math. n° 43 (1967), Springer.

M. RAYNAUD, Spécialisation du Foncteur de Picard, Publications Math. n° 38, pp. 27-76 (1970).

Mme. M. RAYNAUD, Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et cohomologie étale, Thèse Paris 1972 (paraîtra dans Lecture Notes of Math.)

J.P. RAMIS et G. RUGET, Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe, Pub. Math. n° 38, pp. 77 à 91 (1970).

J. TATE, Rigid-analytic spaces, Inventiones Mathematicae, vol. 12, pp. 257-289 (1971).

G. TRAUTMANN, Abgeschlossenheit von Garbendmoduln und Fortsetzbarkeit kohärenter analytischer Garben, Inventiones Math. vol. 5, pp. 216-230 (1968).

J.L.VERDIER, J.P. RAMIS et G. RUGET, Dualité relative en géométrie analytique complexe, Inventiones Math., vol. 13, pp. 261-283 (1971).

# FONCTIONS HOLOMORPHES

## (Théorie de Cauchy)

M. P. II<sup>82</sup>

---

### 0. Introduction

La théorie présentée dans les fascicules précédent

### 1. Prélude

### 2. Intégrales curvilignes

### 3. Primitives d'une forme différentiable

### 4. Fonctions holomorphes

### 5. Développement en série entière d'une fonction holomorphe

### 6. Homotopie de chemins

---

<sup>82</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/funchol1.pdf>

# FONCTIONS HOLOMORPHES

(Suite et fin)

M. P. II<sup>83</sup>

---

7. Principe du maximum

8. Développement de Laurent

9. Calcul des résidus

---

<sup>83</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/funchol2.pdf>

## Letter to F. Knudsen, 19.5.1973<sup>84</sup>

Buffalo May 19, 1973

Dear Finn Knudsen,

Mumford sent me your notes on the determinant of perfect complexes, asking me to write you some comments, if I have any. Indeed I do have several - except for the obvious one that it is nice to have written up with details at least *one* full construction of that damn functor! I did not enter into the technicalities of your construction, which perhaps will allow to get a better comprehension of the main result itself. The main trouble with your presentation seems to me that the bare statement of the main result looks rather mysterious and not “natural” at all, despite your claim on page 3b! The mysterious character is of course included in the alambicated sign of definition 1.1. Here two types of criticism come to mind:

- 1) The sign looks complicated - are there not simpler sign conventions for getting a nice theory of  $\det^*$  and its variance? It seems to me that Deligne wrote down a system that really did look natural at every stage - however he never wrote down the explicit construction, as far as I know, and the chap who had undertaken to do so, gave up in disgust after a year or two of letting the question lie around and rot!
- 2) Even granted that your conventions are as simple or simpler than other ones, the very fact that they are so alambicated and technical calls for an elucidation, somewhat of the type you give on page 3b with those  $\varepsilon_i$ 's. That is one would like to *define* first what any theory of  $\det^*$  should be (with conventions of sign as yet unspecified), stating say something like a *uniqueness theorem* for every given system of signs chosen for canonical isomorphisms, and moreover *characterizing* those systems of sign conventions which allow for an existence theorem - which will include the existence of at least one such system of signs. If one has good insight into all of them, it will be a

---

<sup>84</sup>Editor Note: See Knudsen, Finn F. *Determinant functors on exact categories and their extensions to categories of bounded complexes*. Michigan Math. J., 50 (2): 407-444, 2002

matter of taste and convenience for the individual mathematician (or the situation he has to deal with in any instance) to make his own choice!

A second point is the introduction of such evidently superfluous assumptions like working on Noetherian (!) schemes, whereas the construction is clearly so general as to work, say, over any ringed space and even ringed topos - and of course it will be needed in this generality, for instance on analytic spaces, or on schemes with groups of automorphisms acting, etc. Its just a question of some slight extra care in the writing up. It is clear in any case that the question reduces to defining  $\det^*$  for strictly perfect complexes (i.e. which are free of finite type in every degree), and for homotopy classes of homotopy equivalences between such complexes, as well as for short exact sequences of such complexes. (NB! One may wish to deal, more generally, in the Illusie spirit, with strictly perfect complexes filtered - by a filtration which is finite but possibly not of level two - by sub-complexes with strictly perfect quotients.) Now this allows to restate the whole thing in a more general setting, which could make the theory more transparent, namely:

An additive category  $C$  (say free (or projective) modules of finite type over a commutative ring  $A$ ) is given, as well as a category  $P$  which is a groupoid, endowed with an operation  $\otimes$  together with associativity, unity and commutativity data, satisfying the usual compatibilities (see for instance Saavedra's thesis in Springer's lecture notes) and with all objects "invertible". In the example for  $C$ , we take for  $P$  invertible  $\mathbf{Z}$ -graded modules over  $A$ , with tensor product, the commutative law  $L \otimes L' \simeq L' \otimes L$  involving the Koszul sign  $(1)^{dd'}$  where  $d$  and  $d'$  are the degrees of  $L$  and  $L'$  respectively. We are interested in functors (or a given functor)  $f : (C, \text{isom}) \longrightarrow P$ , together with a functorial isomorphism  $f(M + N) \simeq f(M) \otimes f(N)$ , compatible with the associativity and commutativity data (cf. Saavedra for this notion of a  $\otimes$ ); for instance, in the example chosen, we take  $f(M) = \det^*(M)$ , the determinant module where  $*$  stands for the degree which we put on the determinant module (our convention will be to put the degree equal to the rank of  $M$ , which will imply that our functor is indeed compatible with the commutativity data). It can be shown (this was done by a North Vietnamese mathematician, Sinh Hoang Xuan) that given  $C$  (indeed any associative and commutative  $\otimes$ -category would do), there exists a universal way

of sending  $C$  to  $P$  as above - in the case considered, this category can be called the category of “stable” projective modules over  $A$ , and its main invariants (isomorphism classes of objects, and automorphisms of the unit object) are just the invariants  $K^0(A)$  and  $K^1(A)$  of myself and Dieudonné-Bass; but this existence of a universal situation is irrelevant for the technical problem to come. Now consider the category  $K = K^b(C)$ , of bounded complexes of  $C$ , up to homotopy. It is a triangulated category<sup>85</sup>, and as such we can define the notion of a  $\otimes$ -functor from  $K$  into  $P$ ; it’s first of all a  $\otimes$ -functor for the additive structure of  $K$  (the internal composition of  $K$  being  $\otimes$ ), but with moreover an extra structure consisting giving isomorphisms  $g(M) \simeq g(M') \otimes g(M'')$  whenever we have an exact triangle  $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow M'$ . This should of course satisfy various conditions, such as functoriality with respect to the triangle, case of split exact triangle  $M = M' \oplus M''$ , case of the triangle obtained by completing a quasi-isomorphism  $M' \longrightarrow M$ , and possibly also a condition of compatibility in the case of an exact triangle of triangles. (I guess Deligne wrote down the reasonable axioms some day; it may be more convenient to work with the filtered  $K$ -categories of Illusie, using of course finite filtrations that split in the present context). Of course if we have such a  $g : K \longrightarrow P$ , taking its “restriction” to  $C$  we get an  $f : C \longrightarrow P$ . The beautiful statement to prove would then be that conversely, every given  $f$  extends, uniquely up to isomorphism, to a  $g$ , in other terms, that the restriction functor from the category of  $g$ ’s to the category of  $f$ ’s is an equivalence. The whole care, for such a statement, will of course be to give the right set of “sign conventions” for defining admissible  $g$ ’s (that is compatibilities between the two or three structures on the set of  $g(M)$ ’s - which in fact all can be reduced to giving the isomorphisms attached

---

<sup>85</sup>Be careful that one has to take the term “triangulated category” in a slightly more precise sense than in Verdier’s notes, the “category of triangles” being something more precise than a mere category of distinguished diagrams in  $K$ . We have a functor from the former to the latter, but it is not even a faithful one. (Illusie’s treatment in terms of filtered complexes, in his Springer lecture notes, is a good reference) It is with respect to the category of “true” triangles only that the isomorphism  $g(M) \simeq g(M') \otimes g(M'')$  will be functorial. For instance, if we have an *automorphism* of a triangle, inducing  $u, u', u''$  upon  $M, M'$  and  $M''$ , then functoriality is expressed by the relation  $\det u = \det u' \det u''$  (which implies, replacing  $u$  by  $id + tu$ ,  $t$  an indeterminate, that  $\text{Tr } u = \text{Tr } u' + \text{Tr } u''$ ) but this relation may become *false* if we are not careful to take automorphisms of true triangles, instead of taking mere automorphisms of diagrams.

to exact triangles). In this general context, the group of signs  $\pm 1$  is replaced by the subgroup of elements of order 2 of the group  $K^1(P) = \text{Aut}(1_P)$  (which is always a commutative group). The “sign map”  $n \longrightarrow (1)^n$  from the group of degrees to the group of signs is replaced here by a canonical map  $K^0(P)$  (= group of isomorphism classes of  $P$ )  $\longrightarrow K^1(P)$ , associating to every  $L$  in  $P$  the symmetry automorphism of  $L \otimes L$  (viewed as coming from an automorphism of the unit object by tensoring with  $L \otimes L$ ). What puzzles me a little is that apparently, you have not been able to define  $g$  in terms intrinsic to the triangulated category  $K = K^b(C)$  - the signs you introduce in 1.1 do depend on the actual complexes, not only on their homotopy classes. I guess the whole trouble comes from the order in which we write any given tensor product in  $P$ , in describing  $\det^*(M^\bullet)$  we had to choose such an order rather arbitrarily, and it is passing from one such to another that involves “signs”.

If  $C$  is an *abelian* category, there should be a variant of the previous theory, putting in relations on the  $\otimes$ -functors  $f : C \longrightarrow P$  together with the extra structure of isomorphisms  $f(M) \simeq f(M') \otimes f(M'')$  for all short exact sequences  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$  satisfying a few axioms, and  $\otimes$ -functors  $g : D^b(C) \longrightarrow P$ . There should also be higher dimensional analogous, involving  $P$ 's that are  $n$ -categories instead of mere 1-categories, and hence involving (implicitly at least) the higher  $K$ -invariants  $K^i(C)$  ( $i \geq 0$ ). But of course, first of all the case of the relation between  $C$  and  $K^b(C)$  in the simplest case should be elucidated!

I am finishing this letter at the forum where I have no typewriter. I hope you can read the handwriting!

Best wishes

A. Grothendieck



## Lettre à H. Seydi, 13.2.1973<sup>86</sup>

Châtenay le 13.2.1973

Cher Seydi,

Je viens de regarder votre travail sur les ombres, après une lecture plus approfondie par Illusie, dont je vous envoie ci-joint les commentaires détaillés. Comme lui, je pense que la théorie n'est par tout à fait au propre à décourager le lecteur. Une rédaction plus satisfaisante risque de vous demander pas mal de travail et de retarder votre soutenance inutilement. Comme vos résultats d'algèbre commutative sont parfaitement suffisants pour avoir sur ceux-ci. Si vous en avez l'envie, vous rédigerez par la suite sans vous presser un article sur les ombres - peut-être en collaboration avec autre mathématicien, au cas où cela vous inspirerait plus.

Pour qu'un travail sur les ombres soit commodément utilisable, il faudrait d'abord qu'il y ait un résumé des principaux résultats de la théorie, à quoi le lecteur peut se reporter, pour voir clairement de quoi il s'agit sans être troublé par les bizarreries de plan pouvant résulter de certaines nécessités de démonstration. De plus, il en est possible que de poser dès le début quelle théorie on veut obtenir, vous permette de voir plus clair vous-même et de court-circuiter notablement la construction effective de la théorie. En somme, il s'agit de poser d'emblée la question de trouver un foncteur

$$X \mapsto \text{Omb}(X)$$

des schémas formels noethériens vers les espaces localement annelés, et un homomorphisme fonctoriel

$$i_X : X \longrightarrow \text{Omb}(X),$$

satisfaisant à un certain nombre de propriétés naturelles, dont on ferait la liste, et qu'on pourrait espérer caractéristiques (i.e. de nature à définir la théorie à isomorphisme unique près sur le foncteur Omb cherché). Ou encore, on peut dégager d'abord un ensemble de propriétés caractéristiques (caractérisation de la théorie) et énoncer ensuite des propriétés supplémentaires importantes. Pour contribuer à donner de l'ouverture à l'exposé, il faudrait également faire une liste de problèmes

---

<sup>86</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGS13273scan.pdf>

naturels qui devraient être résolus, et une liste de situations où la théorie développée s'introduit de façon naturelle (cf les exemples indiqués par Illusie ; il y en a d'autres dans le travail d'Artin sur l'existence d'éclatements et de contractions, et dans un travail de Hironaka que j'ai oublié, mais que vous pourriez lui demander).

**Propriétés caractéristiques.** On peut, pour les formuler, introduire la notion d'espace *annelé géométrique* : c'est un espace annelé qui est noethérien, sobre (toute partie fermée irréductible a exactement un point générique), avec  $\underline{O}_S$  cohérent, ses fibres locaux et noethériens, tel que pour tout  $F$  constant et tout idéal cohérent  $J$  tels que  $\text{supp } F \subset \text{supp } \underline{O}_S/J$ , il existe un  $n \geq 0$  tel que  $J^n F = 0$ , tel que pour toute partie fermée  $T$  de  $S$  il existe un idéal cohérent  $J$  tel que  $T = V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \text{supp } \underline{O}_S/J$ , et tel que pour tout ouvert  $U$  de  $S$ , toute section  $f$  de  $\underline{O}_U$  et tout faisceau cohérent  $F$  sur  $S$ , et toute section  $h$  de  $F$  sur  $U_f = U - V(f)$ , il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $f^n h$  se prolonge en une section de  $F$  sur  $U$ . Il faudra demander de plus, soit que tout faisceau cohérent sur un ouvert de  $S$  se prolonge en un faisceau cohérent sur  $S$  (ou serait-ce conséquence du reste), ou du moins que les conditions b) et c) restent valables quand on remplace  $S$  par un ouvert quelconque, car on veut que tout ouvert d'un espace géométrique soit géométrique. La propriété b) implique que  $V(J) \subset V(J')$  implique (donc équivaut) à l'existence d'un  $n$  tel que  $J'^n \subset J$ , donc  $V(J) = V(J')$  à l'existence d'un  $n$  tel que  $J'^n \subset J$  et  $J^n \subset J'$ . Donc l'ensemble des parties fermées de  $S$ , avec sa relation d'ordre réticulée, s'identifie grâce à

[]

**Propriétés supplémentaires.** Il y a d'abord les propriétés qui relient de façon plus géométrique  $X$  et  $\text{Omb}(X)$ , qui n'ont guère été dégagés, sauf le fait que  $i_X$  est un homéomorphisme de  $X$  sur une partie fermée de  $\text{Omb}(X)$ , provenant du fait plus précis que pour tout  $n$ ,  $i_X$  induit sur  $X_n$  une immersion fermée. D'ailleurs, la connaissance de l'espace annelé  $S$  et de sa partie fermée  $S_0$  permet de retrouver  $X$  à isomorphisme unique près comme le "complété formel" de  $S$  le long de  $S_0$ . On peut se demander de trouver les propriétés sur un couple  $(S, S_0)$  qui assurent qu'il provient bien d'un schéma formel comme ci-dessus. Il faut évidemment que  $S$  soit géométrique, et que si  $S$  est défini par l'idéal  $J$ , alors  $(S_0, \underline{O}_S/J|_{S_0})$  soit un schéma - mais ce n'est évidemment pas suffisant. Mais définissant alors  $S$  de façon évidente,

ainsi que  $S \xrightarrow{j} S$ , une condition néc et suff est évidemment que  $j^* : \text{Coh}(S) \longrightarrow \text{Coh}(S)$  soit une équivalence de catégories.

Il devrait être vrai que pour tout espace géométrique

[]

**Autres questions à traiter ou à signaler.**

- 1) La catégorie des Algèbres de présentation finie sur  $X$  et sur  $\text{Omb}(X)$  est “la même”: devrait être facile, en termes d’une caractérisation de la catégorie des Alg. de prés. finie sur un  $Y$  en termes de  $\text{Coh}(Y)$ , comme les objets de  $\text{Ind}(\text{Coh}(Y))$  munis d’une multiplication  $A \otimes A$  ayant certaines propriétés... caractérisation qui devrait être valable pour des  $Y$  tels que  $X$  (schéma formel noethérien) et  $S$  (ombre d’un tel)... (Il faudrait donner bien sûr des conditions générales sympa sur  $Y$  qui soient manifestement vérifiées pour  $X, S$ ).
- 2) Le foncteur image inverse par  $i_X$  allant des schémas relatifs propre sur  $S = \text{Omb}(X)$  vers les schémas relatifs propres sur  $X$ , est une équivalence de catégories. (NB dans le cas relatif projectif cela devrait se ramener à 1) dans le cas d’Algèbres graduées...) NB si on prend des schémas de présentation finie sans plus, le foncteur n’est même pas fidèle, comme on voit en prenant des schémas relatifs sur  $S - X_0$ .
- 3) Un schéma relatif de présentation finie sur  $X$  en définit-il un sur  $S = \text{Omb}(X)$ ? D’après 1) et 2) cela devrait être vrai tout au moins dans le cas affine relatif ou propre relatif. Le cas  $X$  affine est déjà intéressant à regarder !
- 4) Pour tout faisceau cohérent  $F$  sur  $S = \text{Omb}(X)$ , l’homomorphisme canonique induit par  $i_X$

$$H^i(S, F) \longrightarrow H^i(S, i_X(F))$$

est-il un isomorphisme ? (Si oui, cela impliquerait l’énoncé analogue pour les  $\text{Ext}^1$  globaux de Modules cohérents) Cela résulterait d’un théorème d’effacement de classes de cohomologie de faisceaux cohérents par immer-

sion dans un cohérent (ou dans un -cohérent), sur des espaces tels que  $X$  (schéma formel) et  $S$  (ombre d'un tel).

- 5) Bien entendu, des questions analogues se posent en cohomologie étale - mais ce n'est sans doute pas le lieu dans un premier exposé de fondements !
- 6) Application de la théorie pour associer fonctoriellement un espace annelé géométrique à tout espace rigide-analytique quasi-cohérent sur le corps des quotients d'un anneau de valuation discrète complet, en utilisant la théorie de Raynaud, de tel façon qu'à la fibre générique d'un schéma formel de type fini sur  $V$  soit associé  $\text{Omb}(X) - X_0$ . C'est évident modulo la théorie de Raynaud - mais il resterait à étudier les propriétés de fidélité du foncteur obtenu. Serait-il pleinement fidèle. (C'est lié à la question suivante : soient  $X, X'$  schémas formels de type fini sur  $X$ ,  $S = \text{Omb}(X)$ ,  $S' = \text{Omb}(X')$ ,  $\mu : S \longrightarrow S'$  un  $K$ -morphisme d'espaces localement annelés ( $K$  étant le corps des fractions de  $V$ ), existe-il un éclatement  $\overline{X}$  de  $X$  le long d'un sous-schéma concentré sur la fibre spéciale, et un morphisme  $f : \overline{X} \longrightarrow X'$  qui induise  $\mu$  ?) Relations entre propriétés locales sur l'espace rigide-analytique et sur son ombre...

## Lettre à L Illusie, 3.5.1973

Buffalo le 3.5.1973

Cher Illusie,

Je t'envoie quelques afterthoughts de notre conversation mathématique sur les motifs. J'avais dit à tort que les isomotifs n'ont pas de "modules infinitésimaux", c'est-à-dire que si  $i : S_0 \longrightarrow S$  est une immersion nilpotente, le foncteur image inverse de motifs est une équivalence de catégories. Cela doit être vrai en car.  $p > 0$  (plus généralement si  $\mathcal{O}_S$  est annulé par une puissance de  $p$ ), pour la raison heuristique (qu'on peut expliciter entièrement lorsqu'on travaille dans le contexte bien assis des schémas abéliens, ou des groupes de Barsotti-Tate) que lorsqu'on se ramène par dévissage au cas d'une nilimmersion d'ordre 1 ( $J^2 = 0$ ), on peut définir une obstruction à la déformation sur  $S$  d'un homomorphisme (ou isomorphisme) de (pas iso) motif sur  $S_0$ , qui sera tué par  $p^i$  si  $p^i$  tue  $J$ , donc qui sera tué lorsqu'on passe aux isomotifs. Par contre, en caractéristique nulle, les schémas abéliens à isogénie près ont la même théorie des modules infinitésimaux que les schémas abéliens tout court, et il faut s'attendre à la même chose pour les motifs et isomotifs. En termes des théories de systèmes de coefficients de de Rham ou de Hodge, l'élément de structure "filtration de DR" introduit bel et bien un élément de continuité, qui a pour effet de rendre faux le fait que pour ces coefficients, le foncteur image inverse par nilimmersion soit une équivalence. Il semble que donc qu'il faille bannir cette propriété (hors du cas des schémas de torsion) du yoga des "coefficients discrets". À moins qu'il se trouve que les besoins du formalisme (construction de foncteurs adjoints du type etc.) nous impose de modifier la notion de faisceau de Hodge ou de DR sur un schéma  $X$ , en partant du genre de notion que nous avons regardée ensemble, et en passant ensuite aux catégories correspondantes associées à  $X'$ , où  $X'$  est réduit et  $X' \longrightarrow X$  est fini radiciel surjectif. Mais j'espère qu'il ne sera pas nécessaire de canuler ces notions ainsi. Une question liée est celle-ci : si  $X$  est de car. 0, un motif serein sur  $X$  qui est "effectif de poids 1" définit-il bien un schéma abélien à isogénie près, ou seulement un schéma abélien à isogénie près au-dessus d'un  $X'$  comme ci-dessus ? Ce dernier devrait être le cas en tout cas en car.  $p > 0$ , si on veut qu'un morphisme fini surjectif soit un morphisme de de-

scente effective pour les isomotifs (et cela à son tour doit être vrai, étant vrai pour les  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceaux, si on veut que le foncteur isomotifs  $\longrightarrow \mathbf{Q}_\ell$ -faisceaux commute aux opérations habituelles et est fidèle – et on le veut à tout prix). Ainsi, en car.  $p > 0$ , si  $k$  est un corps, un isomotif effectif de poids 1 sur  $k$  devrait être, non un schéma abélien à isogénie près sur  $k$ , mais sur la clôture parfaite de  $k$  !

Je n’ai pas le cœur net non plus sur la nécessité de mettre du “iso” partout dans la théorie des motifs. Je ne serais pas tellement étonné qu’il y a en caractéristique nulle une théorie des motifs (et *pas* iso), qui s’envoie dans les théories  $\ell$ -adiques (sur  $\mathbf{Z}_\ell$ , pas  $\mathbf{Q}_\ell$ ) pour tout  $\ell$ . Pour ce qui est des coefficients de Hodge, il devrait être assez trivial de les définir “pas iso”, de telle façon que les  $\mathbf{Z}$ -faisceau de torsion algébriquement constructibles (sur  $X$  de type fini sur  $\mathbf{C}$ ) en forment une sous-catégorie pleine, et avec un foncteur vers les  $\mathbf{Z}$ -faisceau algébriquement constructibles (“foncteur de Betti”). En caractéristique  $p > 0$ , j’ai des doutes très sérieux pour l’existence d’une théorie des motifs pas iso du tout, à cause des phénomènes de  $p$ -torsion (surtout pour les schémas qui ne sont pas projectifs et lisses). Ainsi, si on admet la description de Deligne des “motifs mixtes” de niveau 1 comme le genre de choses permettant de définir un  $H^1$  motivique d’un schéma pas pas projectif ou pas lisse, on voit que déjà pour une courbe algébrique sur un corps imparfait  $k$ , la construction ne peut fournir en général qu’un objet du type voulu sur la clôture parfaite de  $k$ . par contre, il pourrait être vrai que seul la  $p$ -torsion canule, et qu’il suffise de localiser par tuage de  $p$ -torsion, c’est-à-dire moralement de travailler avec des catégories  $\mathbf{Z}[1/p]$ -linéaires. On aurait alors encore des foncteurs allant des “motifs” (pas iso) vers les  $\mathbf{Z}_\ell$ -faisceaux (quel que soit  $\ell \neq p$ ) mais pas vers les  $F$ -cristaux, mais seulement vers les  $F$ -isocristaux. Dans cette théorie, on renoncerait donc simplement à regarder en car.  $p$  des phénomènes de  $p$ -torsion. Pourtant il est “clair” que ceux-ci existent et sont fort intéressants, tout au moins pour les morphismes propres et lisses, et on a bien l’impression que la cohomologie cristalline (plus fine que DR) pas iso en donne la clef. (Au fait, Berthelot est-il parvenu à des conjectures plausibles à ce sujet ?) On peut donc espérer que pour les motifs sereins et semi-simples fibre par fibre, on a des catégories sur  $\mathbf{Z}$ , pas seulement sur  $\mathbf{Z}[1/p]$ , les Hom étant des  $\mathbf{Z}$ -modules de type fini. Cette impression peut être fondée par exemple sur le joli comportement des schémas abéliens sur

les corps des fractions d'un anneau de val. discrète : dans la théorie de spécialisation, il se trouve qu'à aucun moment la  $p$ -torsion ne canule.

Bien sûr, alors même qu'on arriverait à travailler avec des catégories de motifs pas iso, dans "l'état actuel de la science", pour en déduire une théorie de groupes de Galois motiviques, étant obligé de s'appuyer sur ce que Saavedra a rédigé, on est obligé à tensoriser tout par  $\mathbf{Q}$ , et on ne trouve que des groupes algébriques sur  $\mathbf{Q}$  ou des extensions de  $\mathbf{Q}$ . Néanmoins, on a certainement dans l'idée que les "vrais" groupes de Galois motiviques (associés à des foncteurs-fibres comme la cohomologie  $\ell$ -adique, ou la cohomologie de Betti) sont des schémas en groupes sur  $\mathbf{Z}_\ell$  et sur  $\mathbf{Z}$  plutôt que sur  $\mathbf{Q}_\ell$  et sur  $\mathbf{Q}$ , et par là on devrait rejoindre le point de vue des groupes de type arithmétique de gens comme Borel, Griffiths, etc.

Encore une remarque : alors même qu'on travaille avec des isomotifs, on peut associer à un tel  $M$  quelque chose de mieux qu'une suite infinie de  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceaux (lorsqu'il y a une infinité de  $\ell$  premiers aux car. résiduelles). En fait, on a ce qu'on pourrait appeler un faisceau "adélique", i.e. un faisceau de modules (moralement) sur l'anneau des adèles finis de  $\mathbf{Q}$ . De façon précise, on peut considérer tous les  $T_\ell(M)$  sauf un nombre fini comme étant des  $\mathbf{Z}_\ell$ -faisceaux (pas seulement des  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceaux). Éliminant toute métaphysique motivique, on peut dire que la théorie de Jouanolou écrite en fixant un  $\ell$ , pourrait être développée avec des modifications techniques mineures pour avoir une théorie des " $A$ -faisceaux", où  $A$  est l'anneau des adèles, ou un facteur direct  $A'$  de celui-ci obtenu en ne prenant qu'un paquet de nombres premiers (pas nécessairement tous). On obtient ainsi une théorie de coefficients (au sens technique dont nous avons discuté) ayant comme anneau de coefficients la  $\mathbf{Q}$ -algèbre  $A$  resp.  $A'$ . Comme  $A$  et  $A'$  sont "absolument plats", il n'y a pas introduction de  $\underline{\text{Tor}}_i$  gênants et de canulars de degrés infinis dans cette théorie.

Pour en revenir au yoga des coefficients "discrets", où j'avais énoncé une propriété de trop apparemment, par contre il y en a une autre que nous n'avions pas explicitée. Il s'agit de la définition de l'objet de Tate sur  $S$  comme l'inverse de l'objet (inversible pour  $\otimes$ )

$$T(-1) = R^2 f_*(1_P) = R^2 g_!(1_E)$$

où  $f : P \longrightarrow S$  resp.  $g : E \longrightarrow S$  sont les projections de la droite projective resp.

la droite affine sur  $S$ . D'autre part, les objets (définis en fait sur le schéma de base  $S_0$  de la théorie de coefficients) interviennent également dans la formulation des théorèmes de pureté relative ou absolue et la définition des classes fondamentales locales (qui, j'espère, doit être possible en termes des données initiales de la théorie de coefficients envisagée, sans constituer une donnée supplémentaire), et dans le calcul de  $f^!$  pour  $f$  lisse (donc pour  $f$  lissifiable), pour ne parler que du démarrage du formalisme cohomologique. En fait, on les retrouve ensuite à chaque pas.

Une dernière remarque. Je crois qu'il vaudrait la peine de formaliser, dans le cadre d'une théorie de coefficients plus ou moins arbitraires, les arguments de dévissage qui ont conduit, dans le cas des coefficients étales, aux théorèmes de finitude pour  $f$  propre, puis pour  $f$  séparé de type fini seulement (moyennant résolution des singularités). Ces dévissages apparaîtraient maintenant comme des pas destinés à prouver *l'existence* de (en même temps, s'il y a lieu, que sa commutation aux changements de base). À vrai dire, il n'est pas clair pour moi que l'on arrivera à des formulations qui s'appliqueraient directement aux  $\mathbf{Z}_\ell$ -faisceaux, disons; en fait, ce n'est pas ainsi que procède Jouanolou dans ce cas, qui au contraire se ramène aux énoncés déjà connus dans le cas des coefficients de torsion (procédé qui n'a guère de chance de s'axiomatiser dans le cas qui nous intéresse). Par contre, pensant directement au cas des motifs, on peut songer à utiliser un dévissage qui s'appuie entre autres sur les propriétés suivantes (quitte à se tirer par les lacets de souliers pour les établir chemin faisant) : (a) un (iso)motif se dévisse en motifs sereins sur des schémas irréd. normaux (NB on suppose qu'on travaille sur des schémas excellents); (b) un motif serein sur un schéma normal irréductible se dévisse en motifs sereins "simples" – en fait, il suffit de faire le dévissage en le point générique; (c) un motif simple (pourvu qu'on remplace la base  $S$  par un voisinage ouvert assez petit du point générique) est un facteur direct d'un  $R^i f_{(1_X)}$ , où  $f : X \longrightarrow S$  est propre et lisse, tout du moins moyennant tensorisation par un objet de Tate  $T(j)$  convenable. Ainsi, moyennant au moins deux gros grains de sel qu'il faudrait essayer d'explicitier un jour, les motifs généraux (toujours iso, bien sûr) se ramènent aux motifs plus ou moins naïfs tels qu'ils sont décrits notamment dans Manin et Demazure. Cela s'applique tout aux moins aux objets–quant aux morphismes, c'est une autre paire de manches – et encore pire pour les  $\text{Ext}^i \dots$



À ce propos, on peut se convaincre que l'application qui va des classes d'extension de deux motifs (dans la catégorie abélienne des motifs) vers le  $\text{Ext}^1$  défini comme  $\text{Hom}(M, N[1])$  (Hom dans la catégorie triangulée) ne devrait pas être bijective (mais sans doute injective). Plaçons-nous en effet sur une base  $S$  spectre d'un corps fini, prenons pour  $M$  et  $N$  le motif unité  $1_S = T_S(0) = T(0)$ , de sorte que le  $\text{Ext}^1$  n'est autre que  $H^1(S, T(0))$ . Les calculs  $\ell$ -adiques du  $H^1$  nous suggèrent fortement que le  $H^1$  absolu motivique est canoniquement isomorphe à  $\mathbf{Q}$ . Mais d'autre part les classes d'extension de  $T(0)$  par  $T(0)$  doivent être nulles (sur tout corps  $K$ ) si  $M$  et  $N$  sont des motifs de poids  $r$  et  $s$  avec  $r \neq s$ , si on admet le yoga de la filtration d'un motif par poids croissants, avec gradué associé semi-simple. (NB En fait, sur un corps fini, la catégorie des motifs devrait être tout entière semi-simple, i.e. toute extension devrait être triviale, i.e. la filtration croissante précédente devrait splitter canoniquement : cela résulte du fait que l'endomorphisme de Frobenius du motif opère avec des "poids" différents sur les composantes des différents poids—plus un petit exercice de catégories tannakiennes.)

Bien cordialement

Alexandre

# ESQUISSE D'UNE THÉORIE DES Gr-CATÉGORIES

par Mme Hoang Xuan Sinh

---

Nous donnons un résumé de quelques résultats sur les Gr-catégories, faisant l'objet d'un travail détaillé que l'auteur compte présenter prochainement comme thèse de doctorat [1].

## 1. Structure des Gr-catégories

Notre terminologie est celle de Saavedra [2]. Nous nous intéressons à des catégories  $C$  munies d'une opération binaire  $(X, Y) \mapsto X \otimes Y$  (foncteur de  $C \times C$  dans  $C$ ) associative et unitaire à isomorphisme donné près (satisfaisant des conditions de compatibilité explicitées dans loc. cit.), appelées aussi  $\otimes$ -catégorie AU (associatives-unitaires). On dit qu'une telle catégorie est une Gr-catégorie si c'est un groupoïde et si tout objet  $X$  de  $C$  est "inversible", i.e. admet un objet "inverse"  $Y = X^{-1}$  (satisfaisant  $X \otimes Y \simeq Y \otimes X \simeq 1_C$ , où  $1_C$  désigne l'objet unité de  $C$ ). Les exemples abondent :

*Exemples.*

- 1 .  $X$  étant un espace topologique ponctué par  $x \in X$ , on prend pour  $C$  la catégorie des lacets de  $X$  en  $x$ , avec comme morphismes les classes d'homotopie d'homotopies entre lacets, comme opération  $\otimes$  la composition des lacets (qui n'est pas associative, mais associative "à homotopie près").

Variante :  $G$  est un espace de Hopf associatif (ou simplement homotopique-

ment associatif en un sens suffisamment fort),  $C$  la catégorie dont les objets sont les points de  $G$ , les morphismes les classes d'homotopie de chemins entre points de  $G$ , la loi  $\otimes$  étant induite par la loi de composition de  $G$ . (N.B. Lorsque  $G$  admet un espace classifiant  $X$ , on retrouve essentiellement l'exemple précédent).

- 2 . Si  $F$  est un faisceau sur un espace topologique (ou plus généralement sur un topos), la catégorie  $C$  des  $F$ -torseurs, munie de la composition de Baer, est une Gr-catégorie (et même une catégorie de Picard stricte, cf. plus bas). On peut considérer la catégorie  $C$  des Modules inversibles sur un espace (ou topos) localement annelé  $(X, \underline{O}_X)$  comme le cas particulier correspondant au cas  $F = \underline{O}_X^*$ .
- 3 . Si  $A$  est une catégorie, la sous-catégorie pleine  $C$  de  $\underline{\text{Hom}}(A, A)_{\text{is}}$  formée des équivalences de  $A$  avec elle-même, munie de l'opération de composition des foncteurs, est une Gr-catégorie. Au lieu de prendre pour  $A$  une catégorie, on peut pas généralement prendre pour  $A$  un objet d'une 2-catégorie quelconque. Si p.ex.  $F$  est un faisceau en groupes (pas nécessairement commutatif) sur un espace topologique (ou un topos)  $X$ , prenant pour  $A$  le "champ" sur  $X$  formé des  $F$ -foncteurs à droite, la Gr-catégorie des auto-équivalences de  $A$  avec lui-même s'interprète comme la catégorie des "bitorseurs" sous  $F$ , i.e. des faisceaux  $P$  sur lesquels  $F$  opère à la fois à droite et à gauche, ces opérations commutant et chacune d'elles faisant de  $P$  un  $F$ -torseur (à droite ou à gauche) sous  $F$ , — la composition  $\otimes$  étant la composition de Baer évidente. Lorsque  $F$  est encore de la forme  $\underline{O}_X^*$  ( $\underline{O}_X$  étant un faisceau d'anneaux, qu'on ne suppose plus nécessairement commutatif) ces bitorseurs s'interprètent aussi en termes de bi-Modules "inversibles" sous  $\underline{O}_X$ .

*Structure.* — Soit  $C$  une Gr-catégorie, on lui associe

- a) le groupe  $\pi_0(C)$  des classes d'isomorphisme d'objets de  $C$ ,
- b) le groupe  $\pi_1(C)$  des automorphismes de  $1_C$  (objet unité de  $C$ )
- c) une action de  $\pi_0(C)$  sur  $\pi_1(C)$ , en associant à tout objet  $X$  de  $C$

l'automorphisme  $p(X)$  de  $1_C$  déduit des deux isomorphismes

$$\text{Aut}(1_C) \rightrightarrows \text{Aut}(X)$$

donnés par  $u \mapsto u \otimes \text{id}_X$  et  $u \mapsto \text{id}_X \otimes u$ .

On prouve que  $\pi_1(C)$  est un groupe *commutatif* et que l'on obtient bien par c) une structure de  $\pi_0(C)$ -module sur celui-ci. Ceci posé, si on choisit pour tout  $a \in \pi_0(C)$  un représentant  $L_a \in \text{Ob } C$  de  $a$ , et pour deux  $a, b$  un isomorphisme

$$\varphi_{a,b} : L_a \otimes L_b \simeq L_{ab},$$

alors pour trois éléments  $a, b, c \in \pi_0(C)$ , l'isomorphisme d'associativité

$$(L_a \otimes L_b) \otimes L_c \simeq L_a \otimes (L_b \otimes L_c),$$

compte tenu des isomorphismes  $\varphi_{a,b}$ ,  $\varphi_{ab,c}$ ,  $\varphi_{b,c}$  et  $\varphi_{a,bc}$ , peut s'interpréter comme un isomorphisme

$$L_{abc} \simeq L_{abc},$$

ou encore comme la tensorisation à gauche avec un élément bien déterminé

$$f(a, b, c) \in \pi_1(C).$$

Les  $\varphi_{a,b}$  étant choisis, on voit donc que la donnée d'un isomorphisme d'associativité fonctoriel  $(L \otimes L') \otimes L'' \simeq L \otimes (L' \otimes L'')$  équivaut à la donnée de l'application

$$f : \pi_0 \times \pi_0 \times \pi_0 \longrightarrow \pi_1.$$

On vérifie alors que l'axiome standard d'autocompatibilité d'une donnée d'associativité (axiome du pentagone) s'exprime précisément par la condition que  $f$  soit un *3-cocycle* du groupe  $\pi_0$  à valeurs dans le groupe  $\pi_1$ . D'autre part, l'indétermination dans le choix du système d'isomorphismes  $\varphi_{a,b}$  est précisément donnée par une 2-cochaîne arbitraire, et on voit que si on change  $\varphi$  par une 2-cochaîne  $g$ ,  $f$  est changé en  $f + dg$  - donc l'ensemble des  $f$  correspondants à des choix différents de  $\varphi$  est exactement une classe de 3-cohomologie

$$k(C) \in H^3(\pi_0(C), \pi_1(C)).$$

En précisant ces réflexions, on trouve que la classification, à  $\otimes$ -équivalence près, des Gr-catégories, se fait précisément en termes de un groupe  $\pi_0$ , d'un groupe commutatif  $\pi_1$  sur lequel  $\pi_0$  opère, et d'une classe de cohomologie (qui peut être prise arbitraire) dans  $H^3(\pi_0, \pi_1)$ . La loi de groupe du  $H^3$  admet d'ailleurs une interprétation "géométrique" à la Baer, en termes d'opérations sur les Gr-catégories.

*Cas particuliers.* — Dans l'exemple

## 2. Catégories de Picard

## 3. Catégories de Picard enveloppantes

## Bibliographie

[1 ]. Gr-catégories

[2 ]. NEANTRO SAAVEDRA RIVANO — *Catégories tannakiennes*, Lecture notes in mathematics n°265. Springer Verlag 1972

**Lettre à P. Deligne, J. Giraud et J.-L Verdier 23.6.71974<sup>87</sup>**

Villecun le 23.6.71974

Chers Deligne, Giraud, Verdier,

Vous savez peut-être qu'une mathématicienne vietnamienne, Hoang Xuan Sinh

Pour ce qui est des formalités administratives, c'est la frère de Hoan Xuan Man, qui habite à Antony, qui s'en occupera pour elle. À toutes fin utile, je vous passe son adresse :

Hoang Xuan Sinh, 49 rue de Châtenay, Estérel, 92 Antony, Tél BER 63 79.

Dans l'attente d'une réponse prochaine, bien cordialement

Schurik

PS. N'ayant pas l'adresse de Giraud, je demande à Verdier s'il peut bien lui transmettre la lettre et le rapport. Je pense que celui-ci doit pouvoir servir comme rapport de thèse aussi vis à vis de l'administration universitaire en France.

---

<sup>87</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGDVG23674scan.pdf>

7.8.1974

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par mon jambe d'assurer un cours de 1<sup>er</sup> cycle au 1<sup>er</sup> trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les fourbis de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". à ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si  $M, N$  sont deux faisceaux abéliens sur un topos  $X$ , et  $\tau_{\leq 2} \mathrm{RHom}(M, N) = E(M, N)$  est le complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} \mathbf{H}^i = {}^i(M, N) & \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ \mathbf{H}^i = 0 & \text{si } i \notin [0, 2], \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

$$(T) \quad \begin{array}{ccc} & \mathrm{Hom}(M, 2N)[-2] & \\ \swarrow & & \searrow \\ E(M, N) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E'(M, N), \end{array}$$

donc  $E'(M, N)$  est un complexe dont les invariants  $\mathbf{H}^i$  sont ceux de  $E(M, N)$  en degré  $i \neq 2$ , et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*) \quad 0 \longrightarrow {}^2(M, N) \longrightarrow \overbrace{\mathbf{H}^2(E'(M, N))}^{P(M, N)} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Hom}(M, 2N) \longrightarrow 0.$$

Heuristiquement,  $E'(M, N)$  est le complexe qui exprime le "2-champ de Picard strict" formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) "épinglés" par  $M, N$  sur des objets variables de  $X$ , en admettant que ta théorie pour les 1-champs de Picard stricts s'étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute); de même  $E(M, N)$  correspond aux champs de Picard *stricts* épinglés par  $M, N$ . La suite exacte  $(*)$  se construit en tous cas canoniquement

---

<sup>89</sup>Transcribed with the collaboration of M. Künzer

“à la main”, où le terme médian est le faisceau des classes à “équivalence” près des champs de Picard épinglés par  $M, N$ , or étant l’invariant qui s’obtient en associant à toute section  $L$  d’un champ de Picard la symétrie de  $L \otimes L$ , interprété comme section de  $2N$ . Je sais prouver (sauf erreur) que tout homomorphisme  $M \longrightarrow 2N$  provient d’un champ de Picard convenable (épinglé par  $M, N$ ) (a priori l’obstruction est dans  $\text{Ext}^3(X; M, N)$ , mais un argument ‘universel’ prouve qu’elle est nulle). Cela prouve que l’extension  $(*)$  est bien proche d’être splittée : toute section du troisième faisceaux, sur un objet quelconque de  $X$ , se remonte – en d’autres termes, l’extension a une section “ensembliste”. Bien sûr, il y a mieux en fait : toute section sur un  $U \in \text{Ob} X$  “provient” d’un élément de  $H^2(U, E'(M, N))$  (hypercohomolo -  $H^2$ ).

*Exemple.* Soit  $A$  un anneau sur  $X$ , soient  $M, N$  respectivement les faisceaux  $K^0, K^1$  associés au champ additif des  $A$ -Modules projectifs de type fini (p. ex.). Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par  $M, N$ , d’où une section canonique du terme médian  $P(M, N)$  de  $(*)$ .

*NB.* Tout ce qui précède a les fonctorialités évidentes en  $M, N, X, \dots$

*Question.* Le triangle exact (T) et la suite exacte  $(*)$  sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie ...) ? Connaissent-ils des variantes “supérieures” ? (Un principe “géométrique” pour les obtenir pourrait être via des  $n$ -champs de Picard non nécessairement stricts ... )

Je profite de l’occasion pour soulever une question sur la “cohomologie relative”. Soit  $q : X \longrightarrow Y$  un morphisme de topos. Si  $F$  est un faisceau abélien (ou un complexe d’iceux) sur  $Y$ , peut-on définir *fonctoriellement* en  $F$  la cohomologie relative  $R\Gamma(YX, F)$  (de la catégorie dérivée de  $\text{Ab}(Y)$  dans celle de  $\text{Ab}$ ) ? L’interprétation “géométrique” en termes d’opérations sur des  $n$ -champs de Picard ( $n$  “grand”) suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente “à la main” que dans les deux cas extrêmes :

- (a)  $q$  est “ $(-1)$ -acyclique”, i.e. pour tout  $F$  sur  $Y$ ,  $F \longrightarrow q_* q^* F$  est injectif (NB C’est le cas de  $Y/P \longrightarrow Y$  si  $P \longrightarrow e_Y$  est un épimorphisme – c’est donc le cas de  $e \longrightarrow_G$  plus haut.)



On prend

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Coker}(F \longrightarrow q_*(\underbrace{C(q^*(F))}_{\text{résolution injective}})))[-1]).$$

(b)  $\forall F$  injectif sur  $Y$ ,  $q^*(F)$  est injectif et  $F \longrightarrow q_*q^*F$  est un épimorphisme (exemple :  $q$  inclusion d'un ouvert  $Ue_Y$ ). On prend

$$\mathrm{R}\Gamma_Y(\mathrm{Ker}(\underbrace{C(F) \longrightarrow q_*q^*(C(F))}_{\text{résolution injective}})).$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d'un morphisme de complexes (tel que

$$F \longrightarrow q_*(q^*(F)) \quad )$$

n'est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) par rapport à la flèche dont on veut prendre le cône. Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

*Question pour Illusie :* Dans sa théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des  $H^3(G/X, -)$  resp. des  $\mathrm{Ext}^2(X; -, =)$ . Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (supposée écrite) des Gr-champs – resp. via ta théorie des champs de Picard ? J'ai [phrase incomplète]

Je te signale que j'ai réfléchi aux Gr-champs sur  $X$ . Si  $G$  est un Groupe sur  $X$ ,  $N$  un  $G$ -Module, les Gr-champs sur  $X$  “épinglés par  $G, N$ ” forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l'opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à 1 échelon à qui lui correspond est le tronqué

$$\tau_{\leq 2}(\mathrm{R}\Gamma(GX, N)[1]).$$

(NB la cohomologie de  $\mathrm{R}\Gamma(GX, N)$  commence en degré 1.) Plus géométriquement, un Gr-champ sur  $X$  épinglé par  $(G, N)$  est essentiellement “la même chose” qu'une 2-gerbe sur  $G$ , liée par  $N$ , et munie d'une trivialisation au dessus de  $X \approx_e (G)/P$  (où  $P$  est l'objet de  $G$  “torseur universel sous  $G$ ”). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se trouve que dans celle-ci, les 3-flèches sont triviales (i.e. si source = but, ce sont des identités) – cela ne fait qu'exprimer  $H^0(G/X, N) = 0$  (i.e.  $H^0(G, N) \longrightarrow H^0(X, N)$  injectif...). Donc la 3-catégorie

peut être regardée comme une 2-catégorie – et “c’est” celle des Gr-champs sur  $X$  épinglés par  $G, N$ . Si on veut localiser sur  $X$ , et décrire le 2-*champs* de Picard sur  $X$  des champs de Picard (sur des objets variables de  $X$ ) épinglés par  $G, N$ , on trouve qu’il est exprimé par le complexe

$$\tau_{\leq 2}(\mathbf{R} p_{G*} \operatorname{Coker}(N \longrightarrow \mathbf{R} q_{G*} \overbrace{C(q_G^* N))}^{\text{résolution injective})),$$

où  $p_G : {}_G \longrightarrow X$  et  $q_G : {}_e \approx X \simeq ({}_G)_P \longrightarrow {}_G$ . Toutes ces descriptions étant compatibles avec des variations de  $G, N, X$ , cela donne en principe une description de la 2-catégorie des Gr-champs, avec  $X, G, N$  variables...

## Lettre à L. Breen 5.2.1975

Villecun 5.2.1975

Cher Breen,

...Pour tout le reste de ta lettre, elle mériterait un lecteur plus averti, aussi, pour qu'elle ne soit pas entièrement perdue au monde, je vais l'envoyer à Illusie ! J'ai néanmoins constaté, avec intérêt, ton intérêt à demi refoulé pour des 2-catégories de Picard,  $n$ -catégories et autre faune de ce genre, et ton espoir que je te prouverai peut-être que ces animaux sont tout à fait indispensables pour faire des maths sérieuses dans telle circonstance. J'ai bien peur que cet espoir ne soit déçu, je crois que jusqu'à maintenant on a toujours pu d'en tirer en éludant de tels objets et l'engrenage dans lequel ils pourraient nous entraîner. Est-ce nécessairement une raison pour continuer à les éluder ? Les situations où on a l'impression "d'éluder" en effet me semblent en tous cas devenir toujours plus nombreuses - et si on s'abstenait de tirer une situation complexe et chargée de mystère au clair, chaque fois qu'on ne serait pas *forcé* de le faire pour des raisons techniques provenant de la math déjà faite, - il y aurait sans doute beaucoup de parties des maths aujourd'hui réputées "sérieuses" qui n'auraient jamais été développées (Il n'est pas dit non plus que le mode s'en trouverait plus mal...). Ton commentaire (que j'ai également entendu chez Deligne) que la classification d'objets géométriques relativement merdiques se réduit finalement à des invariants cohomologiques essentiellement "bien connus" et relativement simples n'est pas non plus convainquant; n'est ce pas négliger la différence entre la *compréhension d'un objet géométrique*, et la détermination de sa "classe à isomorphisme (ou équivalence) près" ?

Tu me demandes des exemples "convainquants" de 2-catégories de Picard. Voici quelques exemples, en vrac (je ne sais s'ils seraient convainquants !):

- 1) Si  $L$  est un lien<sup>90</sup> de centre  $Z$  sur le topos  $X$ , les *gerbes liées par  $Z$*  forment une 2-catégorie de Picard stricte, représentée par le complexe  ${}_X(Z)$  tronqué

---

<sup>90</sup>For the notion of a "lien" (or "tie"), which is one of the main ingredients of the non-commutative cohomology panoply of Giraud's theory, I refer to his books (Springer, Grundlehren 179, 1971). A *Picard category* is a groupoid endowed with an operation  $\otimes$  together with associativity, unity and commutativity data for this operation, which make it resemble to a commutative

en degré 2, dont les objets de cohomologie non triviaux sont les  $H^i(X, Z)$ ,  $0 \leq i \leq 2$ . Les gerbes liées par  $L$  forment un *pseudo-2-torseur* sous le gerbe précédente, qui est un 2-torseur (i.e. non vide) si et seule si une certaine obstruction dans  $H^3(X, Z)$  est nulle. Pour comprendre cette classe de notre point de vue, il y a lieu de passer aux 2-champs correspondants: le 2-champ de Picard strict des  $Z$ -gerbes sur des objets variables de  $X$ , et le 2-champ des  $L$ -gerbes sur des objets variables. Ce dernier est bel et bien un 2-torseur sous le champ précédent, or la classification de ces 2-torseurs (à 2-équivalence près) se fait par le  $H^3(X, Z)$ , (tout comme les  $Z$ - $L$ -gerbes peuvent être interprétées comme des torseurs sous la  $Z$ - $L$ -champ de Picard strict des  $Z$ -torseurs, et sont classifiées par le  $H^2(X, Z)$ ). On voit déjà, bien sûr, poindre ici l'oreille de la 3-catégorie de Picard stricte des 2-gerbes liées par  $Z$ , ou (de façon équivalente) des 2-torseurs sous le 2-champ de Picard strict des  $Z$ - $L$ -gerbes; cette 3-catégorie de Picard stricte étant décrite par  ${}_X(Z)$  tronqué en dimension 3, ayant comme invariants de cohomologie non triviaux les  $H^i(X, Z)$  ( $0 \leq i \leq 3$ ). Quant au 3-champ de Picard correspondant, il est décrit par une résolution injective de  $Z$  tronqué en degré 3, alors que le 2-champ de Picard précédent se décrivait en tronquant en degré 2.

- 2) Si  $M$  et  $N$  sont deux faisceaux abéliens sur  $X$ , les *champs de Picard* (N.B. 1-champs !) *d'invariants*  $M$  et  $N$  forment eux-même une 2-catégorie de Picard stricte, représentée sans doute par le complexe  $(X(M), N)$ <sup>91</sup> tronqué en de-

---

group. A “*Champ de Picard*” (or “Picard stack”) is defined accordingly, by relativizing over an arbitrary space or topos (replacing the groupoid by a stack of groupoids over this topos). The necessary “general nonsense” on these notions is developed rather carefully in an exposé of Deligne in SGA 4 (SGA 4 XVIII 1.4). In this letter to Larry Breen, I am assuming “known” the notion of an  $n$ -stack (for  $n = 3$  at any rate), and the corresponding notion of (strict) *Picard  $n$ -stack*, which should be describable (as was explained in Deligne’s notes in the case  $n = 1$ ) by an  $n$ -truncated chain complex in the category of abelian sheaves on  $X$  (viewed mainly as an object of the relevant derived category). The “strictness” condition on usual Picard stacks refers to the restriction that the commutativity isomorphism within an object  $L \otimes L'$ , when  $L = L'$ , should reduce to the identity. It is assumed (without further explanation) that the condition carries over in a natural way to Picard  $n$ -stacks, in such a way as to allow an interpretation of these by truncated objects in a suitable derived category, as hinted above.

<sup>91</sup>When  $M$  is any abelian sheaf on a topos, the “MacLane resolution”  $X(M)$  is a certain canonical

gré 2, dont les invariants de cohomologie non triviaux sont donc “le drôle de  $\text{Ext}^2$ ” de ma lettre à Deligne, et les honnêtes  $\text{Ext}^i(M, N)$  ( $0 \leq i \leq 2$ ). Les champs de Picard stricts forment une sous-2-catégorie de Picard pleine, représentée par  $(M, N)$  tronqué en degré 2, d’invariants les  $\text{Ext}^i(M; N)$  ( $0 \leq i \leq 2$ ). Bien sûr,  $\text{Ext}^2$  donne les 0-objets à équivalence près,  $\text{Ext}^1$  les automorphismes à isomorphisme près de l’objet nul,  $\text{Ext}^0$  les automorphismes de l’automorphisme identique audit... Je n’ai pas réfléchi à une bonne interprétation géométrique de la  $n$ -catégorie de Picard associée à  $(M, N)$  tronqué en degré  $n$ , et encore moins bien sûr pour  $(X(M), N)$ , mais sans doute il faut regarder dans la direction des  $n$ -champs de Picard.

- 3) Soit  $G$  un Groupe sur  $X$ , opérant sur un faisceau abélien  $N$ . Les *champs en Gr-catégories sur  $X$  liés par  $(G, N)$*  forment une 2-catégorie de Picard, dont les invariants sont  $H^3(B_G \text{ mod } X, N)$ ,  $H^2(B_G \text{ mod } X, N)$  et  $Z^1(G, N)$  (groupe des 1-cocycles de  $G$  à coefficients dans  $N$ ) - je te laisse le soin de deviner quel est le complexe qui le décrit ! J’ai écrit il y a quelques mois à Deligne cf. LGD7874 à ce sujet, et l’ai prié de t’envoyer une copie de la lettre.
- 4) Soit  $X$  un topos localement annelé, on peut considérer les *Algèbres d’Azumaya sur  $X$*  (i.e. les Algèbres localement isomorphes à une algèbre de matrices d’ordre  $n$ ,  $n \geq 1$ ) comme les objets d’une 2-catégorie de Picard, où la catégorie  $\text{Hom}(A, B)$ , pour  $A$  et  $B$  des Algèbres d’Azumaya, est la catégorie des “trivialisations” de  $A^\circ \otimes B$ , i.e. des couples  $(E, \varnothing)$ ,  $E$  un Module localement libre et  $\varnothing$  un isomorphisme  $(E) \simeq A^\circ \otimes B$ . Il faut travailler un peu pour définir les accouplements  $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}(A, C)$ ; l’opération  $\otimes$  dans la 2-catégorie de Picard à construire est bien sûr le produit tensoriel d’Algèbres, et l’opération “puissance  $-1$ ” est le passage à l’algèbre

---

left resolution of  $M$  by sheaves of  $\mathbf{Z}$ -modules which are “free”, and more specifically, which are finite direct sums of sheaves of the type  $\mathbf{Z}^{(T)}$ , where  $T$  is any sheaf of the type  $M^n$  (finite product of copies of  $M$ ). This canonical construction was introduced by MacLane (for abelian groups), and gained new popularity in the French school of algebraic geometry and homological algebra in the late sixties, because it gives a very handy way to relate the  $\text{Ext}^i(M, N)$  invariants (when  $N$  is another abelian sheaf on  $X$ ) to the “spacial” cohomology of  $M$  (i.e. of the induced topos  $X_{/M}$ ) with coefficients in  $N$ .

opposée. On vérifie qu'en associant à toute Algèbre d'Azumaya la 1-gerbe de ses trivialisations, on trouve un  $2\text{-}\otimes$ -foncteur de la 2-catégorie de Picard (dite "de Brauer") dans celle des 1-gerbes liées par  $G_m$ , qui est 2-fidèle. Les invariants de la première sont donc les groupes  $H^2(X, G_m)_{\text{Br}}$ ,  $H^1(X, G_m)$  et  $H^0(X, G_m)$ , où dans le premier terme l'indice Br désigne le sous-groupe du  $H^2$  formé des classes de cohomologie provenant d'Algèbres d'Azumaya. On aurait envie de parler du 2-champ de Picard des Algèbres d'Azumaya sur des objets variables de  $X$ , mais c'est bien une 2-catégorie de Picard fibrée sur  $X$ , mais pas tout à fait un 2-champ (whatever that means), sans doute - la condition de 2-recollement (whatever that means) ne doit pas être satisfaite - sinon il n'y aurait pas d'indice Br au  $H^2$ ...

La considération des  $n$ -catégories de Picard strictes (qui s'imposent à nous pas à pas dans un contexte essentiellement "commutatif") me semblent la clef du passage de l'algèbre homologique ordinaire ("commutative"), en termes de complexes, à une algèbre homologique non commutative, du fait qu'elles donnent une interprétation géométrique correcte des "complexes tronqués à l'ordre  $n$ " (en tant qu'objets de catégories dérivées), donc, essentiellement (par passage à la limite sur  $n$ ) des complexes tout courts. L'idée naïve qui se présente est alors que les "complexes non commutatifs" (qui seraient les objets-fantômes d'une algèbre homologique non commutative) sont peut-être ce qui reste des  $n$ -catégories de Picard (strictes) quand on oublie leur caractère additif, i.e. leur structure de Picard - c'est à dire qu'on ne retient que la  $n$ -catégorie ! (Quand on se place sur un topos  $X$ , on s'intéresse donc aux  $n$ -champs sur  $X$ ...) A vrai dire, cette idée est venue d'abord d'une autre direction, quand il s'est agi en géométrie algébrique de démontrer des *théorèmes de Lefschetz* à coefficients discrets en cohomologie étale, dans le cas d'une variété projective disons et de toute section hyperplane, ou d'une variété quasi-projective et de presque toute section hyperplane (pour ne mentionner que le cas global le plus simple), sous les hypothèses de profondeur cohomologique "le plus naturelles" (en fait, essentiellement des conditions nécessaires et suffisantes de validité du dit théorème). Dans le cas commutatif, les techniques de dualité nous suggèrent très clairement quels sont les meilleurs énoncés possibles, cf. l'exposé de Mme Raynaud dans SGA 2SGA2. Mais ces techniques ne valent qu'en se re-

streignant à des coefficients premiers aux caractéristiques, alors que des démonstrations directes plus géométriques (développées dans SGA 2 avant le développement du formalisme de la cohomologie étale) donnaient des résultats très voisins pour le  $H^0$  et le  $H^1$  (ou le  $\pi_0$  et le  $\pi_1$ , si on préfère) sans telles restrictions, du moins dans le cas propre (i.e. projectif, au lieu de quasi-projectif). En fait, ce sont les “résultats les meilleurs possibles” eux-mêmes, énoncés comme conjectures dans SGA 2 dans l’exposé cité de Mme Raynaud, qui sont démontrés ultérieurement par elle dans sa thèse Raynaud1975. Ce qui est remarquable de notre point de vue, c’est que les énoncés les plus forts se présentent le plus naturellement sous forme d’énoncés sur des *1-champs* sur le site étale de la variété algébrique considérée - la notion de “profondeur  $\geq i$  (pour  $i = 1, 2, 3$ ) s’énonçant aussi le plus naturellement en termes de champs. Non seulement cela, mais alors même qu’on voudrait ignorer la notion technique de champ et travailler exclusivement en termes de  $H^0$  et  $H^1$  en utilisant à bloc le formalisme cohomologique non commutatif de Giraud, pour démontrer disons un théorème de bijectivité  $\pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$  (ce qui est le résultat le plus profond établi dans la thèse de Mme Raynaud), il semble bien qu’on n’y arrive pas, faute à ce formalisme d’avoir la souplesse nécessaire. En fait, il faut utiliser comme ingrédients techniques, de façon essentielle, les trois théorèmes suivantes directement pour les 1-champs “de torsion” (i.e. où les faisceaux en groupes d’automorphismes sont de ind-torsion): a) théorème de changement de base pour un morphisme propre, b) théorème de changement de base par un morphisme lisse c) théorème de “propreté cohomologique générique” pour un morphisme de type fini  $f : X \longrightarrow S$ ,  $S$  intègre (disant que l’on peut trouver dans  $S$  un ouvert  $U \neq \emptyset$  tel que pour *tout* changement de base  $S' \longrightarrow S$  se factorisant par  $u$ , la formule de changement de base est vraie). (Pour b) et c), il faut faire des hypothèses que les faisceaux d’automorphismes sont premiers aux caractéristiques, et dans c) ne servent que dans la version “générique” du théorème de Lefschetz). C’est avec en vue de telles applications que Giraud a pris la peine dans son bouquin (si je ne me trompe) de démontrer a), b) (et c) ?) dans le contexte des 1-champs et de leurs images directes et inverses. Mais du même coup il devient clair que le contexte “naturel” des théorèmes de changement de base en cohomologie étale, des théorèmes du type de Lefschetz (dits “faibles”) sur les “sections hyperplanes”, tout

comme de la notion de profondeur qui y joue un rôle crucial, doit être celui des  $n$ -champs. Et que le développement hypothétique de ce contexte ne risque pas de se réduire à une jonglerie purement formelle et absolument bordélique avec du “general nonsense”, mais qu’on se trouvera aussitôt confronté à des tests “d’utilisabilité” aussi sérieux que la démonstration des théorèmes de changement de base et ceux du type de Lefschetz (qui même dans le contexte commutatif ne sont pas piqués de vers...). [] pour variantes analytiques complexes etc.

Je ne sais si ces commentaires te “passent par dessus la tête” à ton tour, ni si elles te donnent l’impression qu’il aurait peut-être des choses intéressantes à tirer au clair. Si cela t’intéresse, je pourrais expliciter sous forme un peu plus systématique quelques ingrédients d’une hypothétique algèbre homologique non commutative et les liens de celle-ci à l’algèbre homologique commutative. Plus mystérieux pour moi (et pour cause, vu mon ignorance en homotopie) seraient les relations entre celle-là et l’algèbre homotopique, i.e. les structures semi-simpliciales, et je n’ai que des commentaires assez vagues à faire en ce sens (\*). Par ailleurs, je te rappelle que même l’algèbre homologique commutative n’est pas, il s’en faut, dans un état satisfaisant, pour autant que je sache, vu qu’on ne sait<sup>92</sup> toujours pas quelle est la “bonne” notion de catégorie triangulée. Or il me semble bien clair que ce n’est pas une question purement académique - même si on a pu se passer de le savoir jusqu’ici (en se bornant comme Monsieur Jourdain à “faire de la prose sans le savoir” - en travaillant sur des catégories de complexes, éventuellement filtrés, sans trop se demander quelles structures il y a sur ces catégories...).

Bien cordialement à toi

(\*) P.S. Réflexion faite, j’ai quand même envie de te mettre un peu en appétit, en faisant ces “quelques commentaires assez vagues”. Il s’agit du yoga qu’une (petite)  $n$ -catégorie ou groupoïdes (à  $n$ -équivalence près) “est essentiellement la même chose” qu’un ensemble semi-simplicial pris à homotopie près et où on néglige les  $\pi_i$  pour  $n + 1 \geq i$  (où, si tu préfères, “où on a tué les groupes d’homotopie

---

<sup>92</sup>Reflecting on the “right” version of the provisional Verdier notion of a triangulated category (which was supposed to describe adequately the relevant internal structure of the derived categories of abelian categories) is part of my present program for the notes on Pursuing stacks, and will be the main task in one of the chapters of volume two. For some indications along these lines, see also section 69 (sketching the basic notion of a “*derivator*”).



en dimension  $\geq n + 1$ ). Voici des éléments heuristiques pour ce yoga. Si  $K_\bullet$  est un ensemble simplicial (il peut être prudent de le prendre de Kan) on lui associe une  $n$ -catégorie  $C_n(K_\bullet)$ , dont les 0-objets sont les 0-simplexes, les 1-objets sont les chemins (ou homotopies) entre 0-simplexes, les 2-objets sont les homotopies entre chemins (à extrémités fixées) etc. Pour les  $n$ -objets, cependant, on ne prend pas les homotopies entre homotopies de fourbis, mais classes d'équivalence de homotopies (modulo la relation d'homotopie) entre homotopies. La composition des  $i$ -objets ( $i \geq 1$ ) se définit de façon évidente, on notera qu'elle n'est pas strictement associative, mais associative modulo homotopie. Donc la  $n$ -catégorie qu'on obtient n'est pas "stricte" - et on prévoit pas mal d'emmerdement pour définir de façon raisonnable une  $n$ -catégorie pas stricte (dans la description des compatibilités pour les "données d'associativité"). La mise sur pied du yoga qui suit pourrait constituer un fil d'Ariadne pour la définition en forme des  $n$ -catégories (pas strictes), les  $n$ -foncteurs entre elles (pas non plus stricts, et pour cause), les  $n$ -équivalences etc, au même titre que le yoga initial 'une  $n$ -catégorie est une catégorie ou les Hom et leurs accouplements de composition sont des  $(n - 1)$ -catégories et des accouplements entre telles". Cette  $n$ -catégorie  $C_n(K_\bullet)$  dépend fonctoriellement de  $K_\bullet$ , tout morphisme simplicial  $K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$  définit un  $n$ -foncteur  $C_n(K_\bullet \longrightarrow C_n(K'_\bullet))$ ; en fait, cela doit en dépendre même  $n$ -fonctoriellement, vu qu'on voit (en s'inspirant de ce qui précède et l'application à des ensembles semi-simpliciaux de la forme  $\text{Hom}_\bullet(K_\bullet, K'_\bullet)$ ) que les ensembles semi-simpliciaux forment eux-mêmes les 0-objets d'une  $n$ -catégorie, quel que soit  $n \dots$

En fait,  $C_n(K_\bullet)$  est un  $n$ -groupeïde, i.e. une  $n$ -catégorie où toute  $i$ -flèche ( $1 \leq i \leq n$ ) ( $= i$ -objet) est une "équivalence" i.e. admet un quasi-inverse (donc un inverse si la  $n$ -catégorie est "réduite"). Si  $C$  est une telle  $n$ -catégorie i.e. un  $n$ -groupeïde, et  $X$  un 0-objet de  $C$ , il s'impose de désigner par  $\pi_i(C, x)$  ( $0 \leq i \leq n$ ) successivement : l'ensemble des classes de 0-objets à équivalence près de 1-objets (ou 1-flèches)  $x \longrightarrow x$  (c'est un groupe, pas nécessairement commutatif), l'ensemble des classes modulo équivalence des 2-flèches  $1_x \longrightarrow 1_x$ , où  $1_x$  est la 1-flèche identique de  $x$  (c'est un groupe commutatif  $\pi_2(C, x)$ , ainsi que les groupes qui vont suivre), l'ensemble des classes modulo équivalence de 3-flèches  $1_{1_x} \longrightarrow 1_{1_x}$ , etc. Ces groupes forment, comme de juste, des "systèmes locaux" sur l'ensemble

des 0-objets de  $C$ , et modulo le grain de sel habituel, les  $\pi_i(C, x)$  ne dépendent que de la “composante connexe” du 0-objet  $x$  i.e. de sa classe modulo équivalence de 0-objets. Ceci dit, si  $C$  est de la forme  $C_n(K_\bullet)$ , il résulte pratiquement des définitions que l’on a des isomorphismes canoniques  $\pi_i(K_\bullet, x) \simeq \pi_i(C_n(K_\bullet))$  pour  $0 \leq i \leq n$ , qui pour  $x$  variable peuvent s’interpréter comme des isomorphismes de systèmes locaux. Il s’ensuit que pour une application semi-simplicial  $f : K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ , le  $n$ -foncteur correspondant  $C_n(K_\bullet) \longrightarrow C_n(K'_\bullet)$  est une  $n$ -équivalence si et seule si  $f$  induit un isomorphisme sur les  $\pi_0$  et sur les  $\pi_i$  en tout point ( $1 \leq i \leq n$ ). On serait plus heureux de pouvoir dire à la place “et de plus un homomorphisme surjectif pour  $i = n + 1$ , car c’est, il me semble, cela qu’il faudrait pour espérer pouvoir conclure que la catégorie localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, obtenue en inversant les flèches “qui induisent des isomorphismes sur les  $\pi_i$  pour  $0 \leq i \leq n$  (ou encore, “en négligeant” les ensembles semi-simpliciaux  $n$ -connexes), est équivalente à la catégorie localisée de la catégorie des  $n$ -catégories, où on rend inversibles les  $n$ -équivalences ? Quoi qu’il en soit, ces petites bavures devraient disparaître lorsqu’on “stabilise” en faisant augmenter  $n$ . A ce propos, on voit que le foncteur “troncature en dimension  $n$ ” de la théorie homotopique (consistant à tuer les groupes d’homotopie à partir de la dimension  $n + 1$ ) s’interprète dans la langage des  $n$ -catégories par l’opération faisant passer d’une  $N$ -catégorie ( $N > n$ ) à une  $n$ -catégorie, en conservant tels quels les  $i$ -objets ( $0 \leq i \leq n - 1$ ) et leur composition ( $1 \leq i \leq n - 1$ ), et en remplaçant les  $n$ -objets par les classes de  $n$ -objets “à équivalence près”, avec la composition obtenue par passage au quotient. De même, le foncteur d’inclusion évident en théorie homotopique, consistant à regarder un ensemble semi-simplicial “où on a négligé les  $\pi_i$  pour  $i \geq n + 1$ ” comme un ensemble semi-simplicial (dans la catégorie homotopique) qui se trouve avoir des  $\pi_i$  nuls pour  $i \geq n + 1$ , se traduit par le foncteur allant des  $n$ -catégories vers les  $N$ -catégories, obtenue en ajoutant à une  $n$ -catégorie des  $i$ -flèches ( $n + 1 \leq i \leq N$ ) identiques exclusivement. (Ainsi, un ensemble est regardé comme une catégorie “discrète”, une catégorie comme une 2-catégorie où les  $\text{Hom}(A, B)$ ,  $A$  et  $B$  des 0-objets, sont des catégories discrètes, etc...).

Bien entendu, rien n’empêche de considérer aussi la notion de  $\infty$ -catégorie, à laquelle celle de  $n$ -catégorie est comme la notion d’ensemble semi-simplicial tron-

qué à celle d'ensemble semi-simplicial. Sauf erreur, la localisée de la catégorie des  $\infty$ -catégories, pour les flèches de  $\infty$ -équivalence, est équivalente à “la catégorie homotopique”, localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, ou du moins une sorte de complétée de celle-là. Dans cette optique, le tapis consistant à interpréter une  $\infty$ -catégorie de Picard stricte (i.e. quelque chose qui ressemble à un groupe abélien de la catégorie des  $\infty$ -catégories) comme donnée (à  $\infty$ -équivalence près) par un complexe de chaînes regardé comme un objet d'une catégorie dérivée, est à relier au tapis de Dold-Puppe, interprétant ces derniers comme des groupes abéliens semi-simpliciaux.

Pour se donner confiance dans ce yoga général, on peut essayer d'interpréter en termes de  $n$ -catégories ou  $\infty$ -catégories des constructions familières en homotopie. Ainsi, l'espace des lacets  $\Omega(K_\bullet, x)$  correspond manifestement à la  $(n-1)$ -catégorie  $\text{Hom}(x, x)$  formée des  $i$ -flèches de  $C$  ( $1 \leq i \leq n$ ) dont la 0-origine et la 0-extrémité sont  $x$ , réindexées en les appelant  $(i-1)$ -flèches. Je n'aperçois pas à vue de nez un joli candidat pour la suspension en termes de  $n$ -catégories. Par contre le  $\text{Hom}_\bullet(K_\bullet, K'_\bullet)$  doit correspondre au  $\text{Hom}(C, C')$ , qui est une  $n$ -catégorie quand  $C, C'$  en sont. La “fibre homotopique” d'une application semi-simpliciale  $f : K_\bullet \rightarrow K'_\bullet$  (transformée d'abord, pour les besoins de la cause, en une fibration de Serre par le procédé bien connu de Serre-Cartan) correspond sans doute à l'opération bien familière de produit  $(n+1)$ -fibré (du moins les cas  $n=0, 1$  sont bien familiers !)  $C \times_{C'} C''$  pour des  $n$ -foncteurs  $c \rightarrow C'$  et  $C'' \rightarrow C'$ , dans le cas où  $C''$  est la  $n$ -catégorie ponctuelle, donc la donnée de  $C'' \rightarrow C'$  correspond à la donnée d'un 0-objet de  $C'$ . Les espaces  $K(\pi, n)$  ont une interprétation évidente comme  $n$ -gerbes liées par  $\pi$ . Enfin, on voit aussi poindre l'analogie du dévissage de Postnikov d'un ensemble semi-simplicial - mais la façon dont je l'entrevois (vue ma prédilection pour les topos) passe par la notion de topos classifiant d'un  $n$ -groupoïde (généralisant de façon évidente le topos classifiant d'un groupe). En termes de cette notion, on peut, il me semble, interpréter un  $n$ -groupoïde en termes d'un  $(n-1)$ -groupoïde (savoir son tronqué), muni d'une  $n$ -gerbe sur le topos classifiant, liée par  $\pi_n$  (“fordu” bien sûr par l'action du  $\pi_1 \dots$ ).

Bien sûr, il faut relativiser encore tout le yoga qu'on vient de décrire, au dessus d'un topos quelconque  $X$ . Il s'agirait donc de mettre en relation et d'identifier,

dans un certaine mesure, d'une part l'algèbre homotopique sur  $X$ , d'autre part l'algèbre catégorique sur  $X$  construite en termes de la notion de  $n$ -champ en groupoïdes ( $n \geq 0$  fini ou infini). On espère que la notion d'image inverse de faisceau semi-simplicial par un morphisme de topos  $f : X \longrightarrow X'$  (qui est évidente) correspond à la notion évidente d'image directe de  $n$ -champs; et inversement, la notion évidente d'image directe de  $n$ -champs par  $f$  devrait correspondre à une notion plus subtile d'image directe  ${}_{*}(K_{\bullet})$  d'un faisceau semi-simplicial, construit sans doute dans l'esprit des foncteurs dérivés à partir de la notion naïve (mais on hésite s'il faut mettre  ${}_{*}$  ou  ${}_{*}$ )... Les dévissages à la Postnikov doivent avoir encore une interprétation remarquablement simple en termes de  $n$ -champs. Comparer à la remarque de Giraud qu'un 1-champ en groupoïdes sur  $X$  peut s'identifier au couple d'un faisceau  $\pi_0$  sur  $X$ , et d'une 1-gerbe sur le topos induit  $X/\pi_0$  (dont le lien, comme de juste, devrait être noté  $\pi_1$  !). D'ailleurs, dans le cas des 1-champs en groupoïdes, la traduction de ces animaux en termes de topos classifiants au dessus de  $X$  est, je crois, développé en long et en large dans Giraud (il parle, si je me rappelle bien, d'"extensions" du topos  $X$ ). L'extension (si j'ose dire) de ce tapis aux  $n$ -champs ne devrait pas poser de problème.

Remords : tâchant de préciser heuristiquement la notion de topos classifiant d'un  $n$ -champ en groupoïdes (ou plus particulièrement, d'un  $n$ -groupoïde) pour  $n \geq 2$ , je vois que je n'y arrive pas à vue de nez. (Bien sûr, il suffirait (procédant de proche en proche) de savoir définir un topos classifiant raisonnable pour une  $n$ -gerbe, liée par un faisceau abélien  $\pi_n$ ). Donc je ne sais comment décrire le dévissage de Postnikov en termes de  $n$ -champs, sauf pour  $n \leq 2$ . Ceci est lié à la question d'une description directe des groupes de cohomologie d'un  $n$ -groupoïde  $C$  (ou d'un  $n$ -champ), à coefficients disons dans un système local commutatif, de façon que pour  $C = C_n(K_{\bullet})$ ,  $K_{\bullet}$  un ensemble semi-simplicial dont les  $\pi_i$  pour  $i \geq n+1$  sont nuls, on trouve les groupes de cohomologie correspondants de  $K_{\bullet}$ . Peut-on le faire en associant à  $C$ , de façon convenable, un ensemble semi-simplicial "nerf" de  $C$  ?

Bien entendu, si on réussit à définir un topos classifiant pour  $C$ , celui-ci devrait être homotope à  $K_{\bullet}$  ci-dessus, donc avoir les mêmes invariants homotopiques  $\pi_i$  et cohomologiques  $H^i$  ; itou pour les champs. La définition habituelle du topos clas-

sifiant, dans le cas  $n = 1$ , a bien cette vertu. Cas particulier typique de problème de la définition du topos classifiant : pour  $\pi$  un groupe commutatif, trouver un topos canonique (fonctoriel en  $\pi$  bien sûr...) ayant le type d'homotopie de  $K(\pi, n)$ , et qui généralise la définition du topos classifiant pour  $n = 1$  (topos des ensembles où  $\pi$  opère). On frémit à l'idée que les topos pourraient ne pas faire l'affaire, et qu'il y faille des " $n$ -topos" !! (J'espère bien que ces animaux n'existent pas...)

La théorie "d'algèbre homologique non commutative" que j'essaie de suggérer pourrait se définir, vaguement, comme l'étude parallèle des notions suivantes et de leurs relations des notions suivantes et de leurs relations multiples: a) espaces topologiques, topos, b) ensembles semi-simpliciaux, faisceaux semi-simpliciaux etc. c)  $n$ -catégories (notamment  $n$ -groupeïdes),  $n$ -champs (notamment  $n$ -champs en groupeïdes) etc. d) complexes de groupes abéliens, de faisceaux abéliens. (Les "etc" réfèrent surtout aux structures supplémentaires qu'on peut envisager sur les objets du type envisagé...). C'est donc de l'algèbre avec la présence constante de motivations provenant de l'intuition topologique. Si une telle théorie devait voir le jour, il lui faudrait bien un nom, je me demande si "algèbre topologique" ne serait pas le plus adéquat ("algèbre homologique non commutative" ne peut guère aller à la longue, pour des raisons évidentes). Ce qui est aujourd'hui parfois désigné sous ce [] n'est guère qu'un bric à brac de notions (telles que anneau topologique, corps topologique, groupe topologique etc) qui ne forment guère un corps de doctrine cohérent - il ne s'impose donc pas que cela accapare un nom qui servirait mieux d'autres usages. (Comparer le nouvel usage du terme "géométrie analytique" introduit par Serre, et qui ne semble guère avoir rencontré de résistance.)

Re-salut, et au plaisir de te lire

## Lettre à L. Breen 17.2.1975

Villecun 17.2.1975

Cher Breen,

Encore un “afterthought” à une lettre-fleuve sur le yoga homotopique. Comme tu sais sans doute, à un topos  $X$  on associe canoniquement un pro-ensemble simplicial, donc un “pro-type d’homotopie” en un sens convenable. Dans le cas où  $X$  est “localement homotopiquement trivial”, le pro-objet associé est essentiellement constant en tant que pro-objet dans la catégorie homotopique, donc  $X$  définit un objet de la catégorie homotopique usuelle, qui est son “type d’homotopie”. De même, si  $X$  est “localement homotopiquement trivial en  $\dim \leq n$ ”, il définit un type d’homotopie ordinaire “tronqué en  $\dim \leq n$ ” - construction familière pour  $i = 0$  ou  $1$ , même à des gens comme moi qui ne connaissent guère l’homotopie !

Ces constructions sont fonctorielles en  $X$ . D’ailleurs, si  $f : X \longrightarrow Y$  est un morphisme de topos, Artin-Mazur ont donné une condition nécessaire et suffisante *cohomologique* pour que ce soit une “équivalence d’homotopie en  $\dim \leq n$ ” : c’est que  $H^i(Y, F) \cong H^i(X, f^*(F))$  pour  $i \leq n$ , et tout faisceau de groupes *localement constant*  $F$  sur  $Y$ , en se restreignant de plus à  $i \leq 1$  dans le cas non commutatif. Ce critère, en termes de  $n$ -gerbes “localement constantes”  $F$  sur  $Y$ , s’interprète par la condition que  $F(Y) \longrightarrow F(X)$  est une  $n$ -équivalence pour tout tel  $F$  et  $i \leq n$ . Il est certainement vrai que ceci équivaut encore au critère suivant

- (A) Pour tout  $n$ -champ “localement constant”  $F$  sur  $Y$ , le  $n$ -foncteur  $F(Y) \longrightarrow f^*(F)(X)$  est une  $n$ -équivalence;

ou encore à

- (B) Le  $n$ -foncteur  $F \longrightarrow f^*(F)$  allant de la  $n$ -catégorie des  $(n-1)$ -champs localement constants sur  $Y$  dans celle des  $(n-1)$ -champs localement constants sur  $X$ , est une  $n$ -équivalence.

En d’autres termes, les constructions sur un topos  $X$  qu’on peut faire en termes de  $(n-1)$ -champs *localement constants* ne dépendent que de son “(pro)-type

d'homotopie  $n$ -tronquée", et le définissent. Dans le cas où  $X$  est localement homotopiquement trivial en  $\dim \leq n$ , donc définit un type d'homotopie  $n$ -tronqué ordinaire, on peut interpréter ce dernier comme un  $n$ -groupeïde  $C_n$ , (défini à  $n$ -équivalence près). En termes de  $C_n$ , les  $(n-1)$ -champs localement constants sur  $X$  doivent s'identifier aux  $n$ -foncteurs de la  $n$ -catégorie  $C_n$  dans la  $n$ -catégorie  $(n-1) - \text{Cat}$  de toutes les  $(n-1)$ -catégories. Dans le cas  $n = 1$  ceci n'est autre que la théorie de Poincaré de la classification des revêtements de  $X$  en termes du "groupeïde fondamental"  $C_1$  de  $X$ . Par extension,  $C_n$  mérite le nom de  *$n$ -groupeïde fondamental de  $X$* , que je propose de noter  $\Pi_n(X)$ . Sa connaissance induit donc celle des  $\pi_i(X)$  ( $0 \leq i \leq n$ ) et des invariants de Postnikov de tous les ordres jusqu'à  $H^{n+1}(\Pi_{n-1}(X), \pi_n)$ .

Dans le cas d'un topos  $X$  quelconque, pas nécessairement localement homotopiquement trivial en  $\dim \leq n$ , on espère pouvoir interpréter les  $(n-1)$ -champs localement constants sur  $X$  en termes d'un  $\Pi_n(X)$  qui sera un pro- $n$ -groupeïde. Ça a été fait en tous cas, plus ou moins, pour  $n = 1$  (du moins pour  $X$  connexe); le cas où  $X$  est le topos étale d'un schéma est traité in extenso dans SGA 3SGA3, à propos de la classification des tores sur une base quelconque.

Dans le cas  $n = 1$ , on sait qu'on récupère (à équivalence près) le 1-groupeïde  $C_1$  à partir de la 1-catégorie  $\text{Hom}(C_1, \text{Ens})$  de ces foncteurs dans  $\text{Ens} = 0 - \text{Cat}$  (i.e. des "systèmes locaux" sur  $C_1$  qui est un topos, dit "multigaloisien") comme la catégorie des "foncteurs fibres" sur le dit topos, i.e. la catégorie opposée à la catégorie des points de ce topos (lequel n'est autre que le *topos classifiant* de  $C_1$ ). Pour préciser pour  $n$  quelconque la façon dont le  $n$ -type d'homotopie d'un topos  $X$  (supposé localement homotopiquement trivial en  $\dim \leq n$ , pour simplifier), i.e. son  $n$ -groupeïde fondamental  $C_n$ , s'exprime en termes de la  $n$ -catégorie des " $(n-1)$ -systèmes locaux sur  $X$ " i.e. des  $(n-1)$ -champs localement constants sur  $X$ , et par là élucider complètement l'énoncé hypothétique (B) ci-dessus, il faudrait donc expliciter comment un  $n$ -groupeïde  $C_n$  se récupère, à  $n$ -équivalence près, par la connaissance de la  $n$ -catégorie  $C_n = n - \text{Hom}(C_n, (n-1) - \text{Cat})$  des  $(n-1)$ -systèmes locaux sur  $C_n$ . On aurait envie de dire que  $C_n$  est la catégorie des " $n$ -foncteurs fibres" sur  $C_n$ , i.e. des  $n$ -foncteurs  $C_n \longrightarrow (n-1) - \text{Cat}$  ayant certaines propriétés d'exactitude (pour  $n = 1$ , c'était la condition d'être les foncteurs image

inverse pour un morphisme de topos, i.e. de commuter aux  $\varprojlim$  quelconques et aux  $\varinjlim$  finies ...) C'est ici que se matérialise la peur, exprimée dans ma précédente lettre, qu'on finisse par tomber sur la notion de  $n$ -topos et morphismes de tels !  $C_n$  serait un topos (appelé le " $n$ -topos classifiant du  $n$ -groupoïde  $C_n$ ),  $(n-1)$ -Cat serait le  $n$ -topos "ponctuel" type, et  $C_n$  d'interprète modulo  $n$ -équivalence comme la  $n$ -catégorie des " $n$ -points" du  $n$ -topos classifiant  $C_n$ . Brr !

Si on espère encore pouvoir définir un bon vieux 1-topos classifiant pour un  $n$ -groupoïde  $C_n$ , comme solution d'un problème universel, je ne vois guère que le problème universel suivant : pour tout topos  $T$ , considérons  $\text{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$ . C'est une  $n$ -catégorie, mais prenons en la 1-catégorie tronquée  $\tau_1 \text{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$ . Pour  $T$  variable, on voudrait 2-représenter le 2-foncteur contravariant  $\text{Top}^\circ \longrightarrow 1\text{-Cat}$  par un topos classifiant  $B = B_{C_n}$ , donc trouver un  $\Pi_n(B) \xrightarrow{\varphi} C_n$  2-universel en le sens que pour tout  $T$ , le foncteur

$$\text{Hom}_{\text{Top}}(T, B) \xrightarrow{u \mapsto \varphi \circ \Pi_n(u)} \tau_1 \text{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$$

soit une équivalence. Pour  $n = 1$  on sait que le topos classifiant de  $C_1$  au sens usuel fait l'affaire, mais pour  $n = 2$  déjà, je doute que ce problème universel ait une solution. C'est peut-être lié au fait que le "théorème de Van Kampen", qu'on peut exprimer en disant que le 2-foncteur  $T \longrightarrow \Pi_1(T)$  des topos localement 1-connexes vers les groupoïdes transforme (à 1-équivalence près) sommes amalgamées (et plus généralement commute aux 2-limites inductives), n'est sans doute plus vrai pour le  $\Pi_2(T)$ . Ainsi, si  $T$  est un espace topologique réunion de deux fermés  $T_1$  et  $T_2$ , il n'est sans doute plus vrai que la donnée d'un 1-champ localement constant sur  $T$  "équivalait à" la donnée d'un 1-champ localement constant  $F_i$  sur  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ) et d'une équivalence entre les restrictions de  $F_1$  et  $F_2$  à  $T_1 \cup T_2$  (alors que l'énoncé analogue en termes de 0-champs, i.e. de revêtements, est évidemment correct).

L'énoncé (B) plus haut rend clair comment expliciter la cohomologie d'un  $n$ -groupoïde  $C_n$ . Si  $C_n = \Pi_n(X)$ , et si  $F$  est un  $(n-1)$ -champ localement constant sur  $X$ ,  $e_{n-1}^X$  est le  $(n-1)$ -champ "final", on a une  $(n-1)$ -équivalence de  $(n-1)$ -catégories

$$\Gamma_X(F) = F(X) \simeq \text{Hom}(e_{n-1}^X, F)$$

qui montre que le foncteur  $\Gamma_X$  "intégration sur  $X$ " sur les  $(n-1)$ -champs localement constants, qui inclut la cohomologie (non commutative) localement con-



stante de  $X$  en  $\dim \leq n-1$ , s'interprète en termes de “ $(n-1)$ -systèmes locaux” sur le groupoïde fondamental comme un  $\text{Hom}(e_{n-1}^{C_n}, F)$  où maintenant  $F$  est interprété comme un  $n$ -foncteur

$$C_n \xrightarrow{F} (n-1)\text{-Cat}$$

et  $e_{n-1}^{C_n}$  est le  $n$ -foncteur constant sur  $C_n$ , de valeur la  $(n-1)$ -catégorie finale.

Pour interpréter ceci en notation cohomologique, il faut que j'ajoute, comme “remords” à la lettre précédente, l'interprétation explicite de la cohomologie non commutative sur un topos  $X$ , en termes d'intégration de  $n$ -champs sur  $X$ . Soit  $F$  un  $n$ -champ de Picard strict sur  $X$ , il est donc défini par un complexe de cochaines  $L'$  sur  $X$

$$0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow L^n \longrightarrow 0$$

concentré en degrés  $0 \leq i \leq n$  (défini à isomorphisme unique près dans la catégorie dérivée de  $\text{Ab}(X)$ ). Ceci dit, les  $H^i(X, L')$  (hypercohomologie) pour  $0 \leq i \leq n$  s'interprètent comme  $H^i(X, L') = \pi_{n-i} \Gamma_X(F)$ .

Si on s'intéresse à tous les  $H^i$  (pas seulement pour  $i \leq n$ ) on doit, pour tout  $N \geq n$ , regarder  $L'$  comme un complexe concentré en degrés  $0 \leq i \leq N$  (en prolongeant  $L'$  par des 0 à droite). Le  $N$ -champ de Picard strict correspondant n'est plus  $F$  mais  $C^{N-n}F$ , où  $C$  est le foncteur “espace classifiant”, s'interprétant sur les  $n$ -catégories de Picard strictes comme l'opération consistant à “translater” les  $i$ -objets en des  $(i+1)$ -objets, et à rajouter un unique 0-objet; il se prolonge aux  $n$ -champs de Picard “de façon évidente”, on espère, de façon à commuter aux opérations d'image inverse de  $n$ -champs. On aura donc pour  $i \leq N$

$$H^i(X, L') = \pi_{N-i} \Gamma_X(C^{N-n}F) \quad i \leq N.$$

Ceci posé, il s'impose, pour tout  $n$ -champ de Picard strict  $F$  sur  $X$ , de poser

$$\boxed{H^i(X, F) = \pi_{N-i} \Gamma_X(C^{N-n}F) \quad \text{si} \quad N \geq i, n}$$

ce qui ne dépend pas du choix de l'entier  $N \geq \sup(i, n)$  [NB On a un morphisme canonique de  $(n-1)$ -groupoïdes,

$$C(\Gamma_X F) \longrightarrow \Gamma_X(CF),$$

comme le montrent les constructions évidentes en termes de complexes de cochaines, et on voit de même que celui-ci induit des isomorphismes pour les  $\pi_i$  pour  $1 \leq i \leq n+1$ .]

**NB** On voit en passant que pour un  $n$ -champ en groupoïdes  $F$  sur  $X$ , si on se borne à vouloir définir les  $H^i(X, F)$  pour  $0 \leq i \leq n$ , on n'a pas besoin sur  $F$  d'une structure de Picard, car il suffit de poser

$$H^i(X, F) = \pi_{n-i}(\Gamma_X(F)) \quad 0 \leq i \leq n.$$

Si d'autre part  $F$  est un  $n$ -Gr-champ (i.e. muni d'une loi de composition  $F \times F \longrightarrow F$  ayant les propriétés formelles d'une loi de groupe) le  $(n+1)$ -“champ classifiant” est défini, et on peut définir  $H^i(X, F)$  pour  $i \leq n+1$  par

$$H^i(X, F) = \pi_{n+1-i}(\Gamma_X(CF))$$

en particulier

$$H^{n+1}(X, F) = \pi_0(\Gamma_X(CF)) = \text{sections de } CF \text{ à équivalence près.}$$

Mais on ne peut former  $CCF = C^2F$  et définir  $H^{n+2}(X, F)$ , semble-t-il *que* si  $CF$  est lui-même un Gr- $(n+1)$ -champ, ce qui ne sera sans doute le cas que si  $F$  est un  $n$ -champ de Picard strict...

Venons en maintenant au cas où  $F$  est un  $n$ -champ *localement constant* sur  $X$ , donc défini par un  $(n+1)$ -foncteur

$$C_{n+1} \xrightarrow{F} n\text{-Cat. de Picard strictes.}$$

Alors, posant pour  $0 \leq i \leq n$

$$H^i(C_{n+1}, F) = \pi_{n-1}(\text{Hom}(e_n^{C_{n+1}}, F)),$$

“on a fait ce qu'il fallait” pour que l'on ait un isomorphisme canonique

$$H^i(C_{n+1}, F) \simeq H^i(X, F),$$

(valable en fait sans structure de Picard sur  $F$ ...). Il s'impose, pour tout  $\infty$ -groupoïde  $C$  et tout  $(n+1)$ -foncteur

$$C \xrightarrow{F} n\text{-Cat. de Picard strictes.}$$

de définir les  $H^i(C, F)$ , pour tout  $i$ , par

$$H^i(C, F) = \pi_{N-i} \text{Hom}(e_N^C, C^{N-n} F)$$

où on choisit  $N \geq \text{Sup}(i, n)$ . Si  $F$  n'a qu'une Gr-structure (pas nécessairement de Picard) on peut définir encore les  $H^i(C, F)$  pour  $i \leq n+1$  par

$$H^i(C, F) = \pi_{n+1-i} \text{Hom}(e_{n+1}^C, CF).$$

Dans le cas  $C = C_{n+1} = \Pi_{n+1}(X)$ , il doit être vrai encore (en vertu de (A) plus haut), que cet ensemble est canoniquement isomorphe à  $H^{n+1}(X, F) = \pi_0 \Gamma_X(CF)$  (c'est vrai et bien facile pour  $n = 0$ ). Décrire la flèche canonique entre les deux membres de

$$H^{n+1}(X, F) \simeq H^{n+1}(\Pi_{n+1} X, F) \quad ?$$

Si on veut réexpliciter (A) et (B), en termes du yoga (C), on arrive à la situation suivante:

On a un  $(n+1)$ -foncteur entre  $(n+1)$ -groupoïdes

$$f_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow D_{n+1}$$

induisant par troncature un  $n$ -foncteur

$$f_n : C_n \longrightarrow D_n$$

On doit avoir alors:

(A')  $f_n$  est une  $n$ -équivalence si et seule si le  $n$ -foncteur  $\varphi \longrightarrow \varphi \circ f_n$

$$f_n^* : \text{Hom}(D_n, (n-1)\text{-Cat}) \longrightarrow \text{Hom}(C_n, (n-1)\text{-Cat})$$

allant des  $(n-1)$ -systèmes locaux sur  $D_n$  (ou  $D_{n+1}$ , c'est pareil) vers les  $(n-1)$ -systèmes locaux sur  $C_n$ , est une  $n$ -équivalence.

(B')  $f_n$  est une  $n$ -équivalence si et seule si pour tout  $n$ -système local  $F$  sur  $D_{n+1}$ ,

$$F : D_{n+1} \longrightarrow n\text{-Cat},$$

le  $n$ -foncteur induit par  $f_{n+1}$

$$\underbrace{\text{Hom}(e_n^{D_{n+1}}, F)}_{\Gamma_{D_{n+1}}(F)} \longrightarrow \underbrace{\text{Hom}(e_n^{D_{n+1}}, f_{n+1}^* F)}_{\Gamma_{C_{n+1}}(F)}$$

est une  $n$ -équivalence.

La construction de la cohomologie d'un topos en termes d'intégration des champs ne fait aucun appel à la notion de complexe de faisceaux abéliens, encore moins à la technique des résolutions injectives. On a l'impression que dans son esprit, via la définition (qui reste à expliciter !) des  $n$ -champs, elle s'apparenterait plutôt aux calculs "Cechistes" en termes d'hyperrecouvrements. Or ces derniers se décrivent à l'aide d'une petite dose d'algèbre semi-simpliciale. Si oui, cela ferait essentiellement trois approches distinctes pour construire la cohomologie d'un topos :

- a) point de vue des complexes de faisceaux, des résolutions injectives, des catégories dérivées (*algèbre homologique commutative*);
- b) point de vue Cechiste ou semi-simplicial (*algèbre homotopique*);
- c) point de vue des  $n$ -champs (algèbre catégorique, ou *algèbre homologique non-commutative*).

Dans a) on "résoud" les coefficients, dans b) on résoud l'espace (ou topos) de base, et dans c) en apparence on ne résoud ni l'un ni l'autre.

Bien cordialement,

Alexandre

## Letter to L. Breen 17.2.1975

Villegun 17.2.1975

Dear Larry,

Here is an afterthought to “une lettre-fleuve” on the yoga of homotopy. As you doubtless know, to a topos  $X$  one associates canonically a pro-simplicial set, and so in a convenient sense a “pro-homotopy type”. When  $X$  is “locally homotopically trivial”, the associated pro-object is essentially constant as a pro-object in the homotopy category, and so  $X$  defines, in the usual homotopy category, an object which is the “homotopy type”. Similarly, if  $X$  is “locally homotopically trivial in  $\dim \leq n$ ”, it defines an ordinary homotopy type, but “truncated in  $\dim \leq n$ ” - this is a familiar construction for  $n = 0$  or  $1$ , even among those like me who know hardly any homotopy theory!

These constructions are functorial in  $X$ . Moreover, if  $f : X \longrightarrow Y$  is a morphism of topoi, Artin-Mazur have given a *cohomological* condition which is necessary and sufficient for  $f$  to be a “homotopy equivalence in  $\dim \leq n$ ”: it is that  $H^i(Y, F) \xrightarrow{\sim} H^i(X, f^*(F))$  for  $i \leq n$ , and all *locally constant* sheaves of groups  $F$  on  $Y$ , allowing for  $i \leq 1$  that  $F$  be non-commutative. This criterion, in terms of “locally constant”  $n$ -gerbes  $F$  on  $Y$ , can be interpreted as the condition that  $F(Y) \longrightarrow F(X)$  is an  $n$ -equivalence for all such  $F$  and  $i \leq n$ . It is certainly true that this is equivalent to the following criterion:

- (A) For every “locally constant”  $n$ -stack  $F$  on  $Y$ , the  $n$ -functor  $F(Y) \longrightarrow f^*(F)(X)$  is an  $n$ -equivalence;

or again

- (B) The  $n$ -functor  $F \longrightarrow f^*(F)$  which sends the  $n$ -category of locally constant  $(n - 1)$ -stacks in  $Y$  to that of locally constant  $(n - 1)$ -stacks on  $X$ , is an  $n$ -equivalence.

In other terms, the construction on a topos  $X$  which one can make in terms of  $(n - 1)$ -stacks which are *locally* constant, depend only on its “ $n$ -truncated pro-homotopy type”, and define it. In the case where  $X$  is locally homotopically trivial

in  $\dim \leq n$ , and so defines a  $n$ -truncated ordinary homotopy type, one can interpret these last as an  $n$ -groupoid  $C_n$ , (defined up to  $n$ -equivalence). In terms of these

- (C) The  $(n-1)$ -stacks on  $X$  should be able to be identified with the  $n$ -functors from the category  $C_n$   $n$ -category  $(n-1)\text{-Cat}$  of all  $(n-1)$ -categories.

In the case  $n = 1$ , this is nothing other than the Poincaré theory of the classification of coverings of  $X$  in terms of the “fundamental groupoid”  $C_1$  of  $X$ . By extension,  $C_n$  merits the name *fundamental  $n$ -groupoid* of  $X$ , which I propose to write  $\Pi_n(X)$ . Knowledge of this includes knowledge of the  $\pi_i(X)$  ( $0 \leq i \leq n$ ) and the Postnikov invariants of all orders up to  $H^{n+1}(\Pi_{n-1}(X), \pi_n)$ .

In the case of an arbitrary topos  $X$ , not necessarily locally homotopically trivial in  $\dim \leq n$ , one hopes to be able to interpret the  $(n-1)$ -stacks which are locally constant on  $X$  in terms of a  $\Pi_n(X)$  which will be a pro- $n$ -groupoid. This has been done, more or less, for  $n = 1$  (at least for connected  $X$ ); the case where  $X$  is the étale topos of a scheme is treated extensively in SGA 3, in relation to the classification of tori on an arbitrary base.

In the case  $n = 1$ , one knows that one can recover (up to equivalence) the 1-groupoid  $C_1$  from the 1-category  $(C_1, \text{Set})$  of the functors into  $\text{Set} = 0\text{-Cat}$  (i.e. the “local systems” on  $C_1$  which is a topos, called “multigaloisian”) - like the category of “fibred functors” on the above topos, i.e. the opposite category to the category of points of this topos (which is none other than the *classifying topos* of  $C_1$ ). To make precise for arbitrary  $n$  the way in which the homotopy  $n$ -type of a topos  $X$  (supposed for simplicity to be locally homotopically trivial in  $\dim \leq n$ ) i.e. its fundamental  $n$ -groupoid  $C_n$ , can be expressed in terms of the  $n$ -category of “local  $(n-1)$ -systems on  $X$ ” i.e. of the locally constant  $(n-1)$ -stacks on  $X$ , and to elucidate completely the hypothetical statement (B) above, it is necessary to make explicit how an  $n$ -groupoid  $C_n$  can be recovered, up  $n$ -equivalence, from the knowledge of the  $n$ -category

$$\underline{C}_n = n - (C_n, (n-1)\text{-Cat})$$

of local  $(n-1)$ -systems on  $C_n$ . One would like to say that  $C_n$  is the category of “fibred  $n$ -functors” on  $\underline{C}_n$ , i.e. of  $n$ -functors  $\underline{C}_n \longrightarrow (n-1)\text{-Cat}$  having certain

exactness properties (for  $n = 1$ , this is the condition of being the inverse image functor for a morphism of topoi, i.e. to commute with arbitrary  $\varprojlim$  and with finite  $\varinjlim$ ...). It is this which makes real the fear, expressed in my preceding letter, that one ends by falling upon the notion of  $n$ -topos and of morphisms of these!  $\underline{C}_n$  will be an  $n$ -topos, (called the “classifying  $n$ -topos” of the  $n$ -groupoid  $C_n$ ),  $(n - 1) - \text{Cat}$  will be the  $n$ -topos of points, and  $C_n$  will be interpreted modulo  $n$ -equivalence as the  $n$ -category of “ $n$ -points” of the classifying  $n$ -topos  $\underline{C}_n$ . Brr !

If one hopes to be able to define a good old classifying 1-topos for an  $n$ -groupoid  $C_n$ , as solution of a universal problem, I can see only how to recover the following universal problem: for every topos  $T$ , consider  $(\Pi_n(T), C_n)$ . This is an  $n$ -category, but take from it the truncated 1-category  $\tau_1(\Pi_n(T), C_n)$ . For variable  $T$ , one wants to 2-represent the contravariant 2-functor  $\text{Top}^\circ \longrightarrow 1 - \text{Cat}$  by a classifying topos  $B = B_{C_n}$ , and then to find a 2-universal  $\Pi_n(B) \xrightarrow{\varphi} C_n$  in the sense that for all  $T$ , the functor

$$\underline{\text{Hom}}_{\text{Top}}(T, B) \xrightarrow{u \mapsto \varphi \circ \Pi_n(u)} \tau_1 \underline{\text{Hom}}(\Pi_n(T), C_n)$$

is an equivalence. For  $n = 1$  one knows that the usual classifying topos of  $C_1$  does the job, but for  $n = 2$  already, I doubt that this universal problem has a solution. This is perhaps related to the fact that the “Van Kampen Theorem”, which one can express by saying that the 2-functor  $T \longrightarrow \Pi_1(T)$  of locally 1-connected topoi to groupoids transforms (up to 1-equivalence) amalgamated sums to amalgamated sums (and more generally commutes with inductive 2-limits), is doubtless no longer true for  $\Pi_2(T)$ . Thus, if  $T$  is a topological space which is the union of two closed sets,  $T_1$  and  $T_2$ , it is doubtless not true that giving a locally constant 1-stack on  $T$  “is equivalent to” giving a locally constant 1-stack  $F_i$  on  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ) and an equivalence between the restrictions of  $F_1$  and  $F_2$  to  $T_1 \cup T_2$  (while the analogous statement in terms of 0-stacks, i.e. for coverings, is evidently correct).

The statement (B) above makes it clear how to give explicitly the cohomology of an  $n$ -groupoid  $C_n$ . If  $C_n = \Pi_n(X)$ , and if  $F$  is a locally constant  $(n - 1)$ -stack on  $X$ , and  $e_{n-1}^X$  is the “final”  $(n - 1)$ -stack, one has an  $(n - 1)$ -equivalence of  $(n - 1)$ -categories

$$\Gamma_X(F) = F(X) \simeq \text{Hom}(e_{n-1}^X, F)$$

which shows that the functor  $\Gamma_X$  “integration on  $X$ ” for locally constant  $(n-1)$ -stacks, which includes the (non-commutative) locally constant cohomology of  $X$  in  $\dim \leq n-1$ , can be interpreted in terms of “local  $(n-1)$ -systems” on the fundamental groupoid as an  $(e_{n-1}^{C_n}, F)$  where now  $F$  is interpreted as an  $n$ -functor

$$C_n \xrightarrow{F} (n-1)\text{-Cat}$$

and  $e_{n-1}^{C_n}$  is the constant  $n$ -functor on  $C_n$ , with value the final  $(n-1)$ -category.

To interpret this in cohomology notation, it is necessary for me to add, as “apology” to the preceding letter, the explicit interpretation of the non-commutative cohomology on a topos  $X$ , in terms of integration of  $n$ -stacks on  $X$ . If  $F$  is a strict Picard  $n$ -stack on  $X$ , then it is defined by a complex  $L^\circ$  on  $X$

$$0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow L^n \longrightarrow 0$$

concentrated in degrees  $0 \leq i \leq n$  (defined uniquely up to isomorphism in the derived category of  $\text{Ab}(X)$ ). That said, the  $H^i(X, L')$  (hypercohomology) for  $0 \leq i \leq n$  can be interpreted as  $H^i(X, L') = \pi_{n-i} \Gamma_X(F)$ . If one is interested in all the  $H^i$  (not just for  $i \leq n$ ) one must, for all  $N \geq n$ , regard  $L^\circ$  as a complex concentrated in degrees  $0 \leq i \leq N$  by prolongation of  $L^\circ$  by 0 to the right). The corresponding strict Picard  $n$ -stack is no longer  $F$  but  $\underline{C}^{N-n}F$ , where  $\underline{C}$  is the “classifying space” functor, interpreted on strict Picard  $n$ -categories as the operation consisting of “translating” the  $i$ -objects to  $(i+1)$ -objects, and adjoining a unique 0-object; this extends one hopes, in “an obvious way”, to  $n$ -stacks, so as to commute with the operation of taking the inverse image of an  $n$ -stack. One has then for  $i \leq N$

$$H^i(X, L') = \pi_{N-i} \Gamma_X(C^{N-n}F) \quad i \leq N.$$

Given this, it is necessary to put, for all strict Picard  $n$ -stacks  $F$  on  $X$ ,

$$H^i(X, F) = \pi_{N-i} \Gamma_X(C^{N-n}F) \quad \text{if } N \geq i, n$$

which does not depend on the choice of integer  $N \geq \sup(i, n)$  [**N.B.** One has a canonical morphism of  $(n-1)$ -groupoids,

$$C(\Gamma_X F) \longrightarrow \Gamma_X(CF),$$



as the obvious constructions in terms of cochains show, and one sees in the same way that this induces isomorphisms on  $\pi_i$  for  $1 \leq i \leq n+1$ .]

**N.B.** One sees by the way that for  $F$  and  $n$ -stack of groupoids on  $X$ , if one restricts to defining the  $H^i(X, F)$  for  $0 \leq i \leq n$ , one has no need of a Picard structure on  $F$ , as it is sufficient to put

$$H^i(X, F) = \pi_{n-i}(\Gamma_X(F)) \quad 0 \leq i \leq n.$$

If on the other hand  $F$  is an  $n$ -Gr-stack (i.e.  $F$  has the structure of a composition law  $F \times F \longrightarrow F$  with the usual formal properties of a group) the “classifying  $(n+1)$ -stack” is defined, and one can define  $H^i(X, F)$  for  $i \leq n+1$  by

$$H^i(X, F) = \pi_{n+1-i}(\Gamma_X(CF))$$

in particular

$$H^{n+1}(X, F) = \pi_0(\Gamma_X(CF)) = \text{equivalence classes of sections } \underline{CF}.$$

But one can form  $C\underline{CF} = \underline{C}^2F$  and define  $H^{n+2}(X, F)$ , it seems *only* if  $\underline{CF}$  is itself a Gr- $(n+1)$ -stack, which is without doubt the case only if  $F$  is a strict Picard  $n$ -stack...

Let us now come to the case where  $F$  is a *locally constant*  $n$ -stack on  $X$ , and so is defined by an  $(n+1)$ -functor

$$C_{n+1} \xrightarrow{F} \text{strict Picard } n - \text{Cat}.$$

Then, putting for  $0 \leq i \leq n$

$$H^i(C_{n+1}, F) = \pi_{n-1}(\underline{\text{Hom}}(e_n^{C_{n+1}}, F)),$$

“one knows it fails”, as one has a canonical isomorphism

$$H^i(C_{n+1}, F) \simeq H^i(X, F),$$

valid in effect without Picard structure on  $F$ ... It is thus necessary for all  $i$  and for every  $\infty$ -groupoid  $C$  and every  $(n+1)$ -functor

$$C \xrightarrow{F} \text{strict Picard } n - \text{Cat},$$

to define

$$H^i(C, F) = \pi_{N-i} \underline{\text{Hom}}(e_N^C, C^{N-n} F)$$

where one chooses  $N \geq \text{Sup}(i, n)$ . If  $F$  has only a Gr-structure (not necessarily Picard) one can define the  $H^i(C, F)$  for  $i \leq n+1$  by

$$H^i(C, F) = \pi_{n+1-i} \underline{\text{Hom}}(e_{n+1}^C, CF).$$

In the case  $C = C_{n+1} = \Pi_{n+1}(X)$ , it must still be true (by virtue of (A) above), that this set is canonically isomorphic to  $H^{n+1}(X, F) = \pi_0 \Gamma_X(CF)$  (this is true and very easy for  $n = 0$ ). Can one describe the arrow between the two sides of

$$H^{n+1}(X, F) \simeq H^{n+1}(\Pi_{n+1} X, F) \quad ?$$

If one wishes to make (A) and (B) explicit again, in terms of the yoga (C), one comes to the following situation:

One has an  $(n+1)$ -functor between  $(n+1)$ -groupoids

$$f_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow D_{n+1}$$

which induces by truncation an  $n$ -functor

$$f_n : C_n \longrightarrow D_n$$

One must then have:

(A')  $f_n$  is an  $n$ -equivalence if and only if the  $n$ -functor

$$f_n^* : \underline{\text{Hom}}(D_n, (n-1)\text{-Cat}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(C_n, (n-1)\text{-Cat})$$

which sends the local  $(n-1)$ -systems on  $D_n$  (or, equally, on  $D_{n+1}$ ) to the local  $(n-1)$ -systems on  $C_n$ , is an  $n$ -equivalence.

(B')  $f_n$  is an  $n$ -equivalence if and only if for every local  $n$ -system  $F$  on  $D_{n+1}$ ,

$$F : D_{n+1} \longrightarrow n\text{-Cat},$$

the  $n$ -functor induced by  $f_{n+1}$

$$\underbrace{(e_n^{D_{n+1}}, F)}_{\Gamma_{D_{n+1}}(F)} \longrightarrow \underbrace{(e_n^{D_{n+1}}, f_{n+1}^* F)}_{\Gamma_{C_{n+1}}(F)}$$

is an  $n$ -equivalence.

The construction of the cohomology of a topos in terms of integration of stacks makes no appeal at all to complexes of abelian sheaves and still less to the technique of injective resolutions. One has the impression that in this spirit, *via* the definition (which remains to be made explicit!) of  $n$ -stacks, it is all related above all to the “Cechist” calculations in terms of hypercoverings. Now these last are written with the help of a small dose of semi-simplicial algebra. I do not know if a theory of stacks and of operations on them can be written *without* ever using semi-simplicial algebra. If yes, there would be essentially three distinct approaches for constructing the cohomology of a topos:

- a) viewpoint of complexes of sheaves, injective resolutions, derived categories (*commutative homological algebra*)
- b) viewpoint Cechist or semi-simplicial (*homotopical algebra*)
- c) viewpoint of  $n$ -stacks (categorical algebra, or *non-commutative homological algebra*).

In (a) one “resolves” the coefficients, in (b) one resolves the base space (or topos), and in (c) it appears one resolves neither the one nor the other.

Very cordially,

Alexandre

**Letter to L. Breen, 17/19.7.1975**

Villecun 17/19 Juillet 1975

Cher Larry,

Tout d'abord félicitations pour la naissance de ta fille,

## Letter to L. Breen, 17/19.7.1975

Villegun 17/19.7.1975

Dear Larry,

I am happy to finish by receiving an echo to my long letter and even a beginning to a constructive approach to a theory of the type I envisaged. The construction which you propose for the notion of a non-strict  $n$ -category, and of the nerve of the functor, has certainly the merit of existing, and of being a first precise approach, but otherwise can be subject to some evident criticism: it is very technical, unintuitive (yet at the level of 1 — Cat, etc, and even of 2 — Cat, everything is so clear “you just follow your nose...”). And finally the absence of a definition of a functor sending (semi-)simplicial sets to  $n$ -groupoids. This functor correspond to a geometric intuition so clear that a theory which does not include it seems to me kind of a joke! Perhaps in trying to write down (like a sort of list of Christmas presents!) in a complete and explicit enough way the notions which one would like to have at ones disposal, and the relations (functor, equivalence, etc.) which should link them, one would arrive finally at a kind of axiomatic description sufficiently complete which should either give the key to a explicit *ad hoc* construction, or should permit at least to enunciate and prove a theorem of existence and uniqueness<sup>93</sup> for a theory of the required type.

Otherwise, not having understood the idea of Segal in your last letter (which I have generously sent to Illusie...), I do not see how you define the Picard  $n$ -categories - but this matters little. As far as “strict” Picard  $n$ -categories are concerned, all I ask of them is that they finally form an  $(n + 1)$ -category  $(n + 1)$ -equivalent to that of chain complexes of length  $n$ . Agreed? I thank you for having rectified in my mind a big blunder, due to my great ignorance of algebraic topology and homotopy - I was in fact of the impression that  $H$ -spaces satisfying conditions of associativity and commutativity strict enough (say equivalent to an  $\Omega^i X$  with  $i$

---

<sup>93</sup>As was seen in section 9, ‘uniqueness’ here has to be understood in a considerably wider sense than I expected, when writing this letter to Larry Breen. It now appears that the whole theory of stacks of groupoids will depend on the choice of a “coherator”, as seen in section 13.

arbitrarily large) correspond to commutative topological groups (inspired by several analogies. . .). Thus I am entirely in agreement with your observations on p.5.

On the other hand, I am still intrigued by the following question: is there an analogue of the “tapis” of Dold-Puppe<sup>94</sup> for semi-simplicial groups (*not necessarily commutative*) and what form should it take? To tell the truth I consider the yoga

$$(*) \quad \text{simplicial sets} \longleftrightarrow \infty - \text{groupoids}$$

as being essentially the ultimate “set theoretic” version of Dold-Puppe, which I would deduce from (\*) by making explicit solely the fact that the abelian groups in  $\infty - \text{Cat}$  are “nothing else” than the chain complexes in  $\text{Ab}$ . One should therefore first determine what should be the groups in  $\infty - \text{Cat}$ . I can tell you what these are in  $1 - \text{Cat}$ . this will be discussed at length in the book of Mme. SinhGCS, I think in the chapter “*strict Gr-categories*” (i.e. the isomorphisms of associativity, for unity and inverse  $XX^{-1} \simeq 1$  are *identities*). One can make explicit for example how (*via* the fact that a Gr-category is Gr-equivalent to a strict Gr-category) the calculation with the Gr-categories reduces to a very algebraic calculation with the *strict* Gr-category, by a kind of “calculus of fractions” (by choice, left or right) of the type which is used in giving the construction of derived categories. In any case, here is the explicit formulation of the structures (groups in  $1 - \text{Cat}$ ) in terms of the theory of groups (1-categories in  $\text{Gr}$ <sup>95</sup>). The structure is described by a quadruplet  $(L_1, L_0, d, \theta)$  with

$$L_1 \xrightarrow{d} L_0$$

a homomorphism of ordinary groups,

$$\theta : L_0 \longrightarrow \text{Aut}_{\text{Gr}}(L_1)$$

---

<sup>94</sup>Tim Porter pointed out to me that “Dold-Puppe” is an inaccuracy name for this basic theorem, which should be called *Dold-Kan theorem*.

<sup>95</sup>AS was pointed out to me by Ronnie Brown, this structure was already well-known to J.H.C. Whitehead, under the name of “crossed module”, and extensive use and extensive generalizations of this notion (in quite different directions from those I was having in mind, in terms of Gr-stacks over an arbitrary topos) have been made by him and others. With respect to the question on next page, of generalizing this notion of “non-commutative chain complex” from length one to length two, Ronnie says there is a work in preparation by D. Conduché “Modules croisés généralisés de longueur 2”.

an operation of  $L_0$  on  $L_1$ , with the following two axioms:

- (a)  $d$  commutes with the operation of  $L_0$ , when  $L_0$  acts on  $L_1$  via  $\theta$  and on itself by inner automorphisms:

$$d(\theta(x_0)x_1) = \text{int}(x_0)d(x_1)$$

- (b)  $\theta(d(x_1)) = \text{int}(x_1)$ .

These properties imply that  $\text{Im } d$  is normal in  $L_0$  (hence  $\text{Coker } d = \pi_0$  is defined) and  $\pi_1 = \text{Ker } d$  is central in  $L_1$ , and finally that  $L_0$  operates on  $L_1$  leaving  $\pi_1$  invariant, and it operates *via*  $\pi_0$ . The principal cohomological invariant of this situation is evidently the Postnikov-Sinh invariant

$$\alpha \in H^3(\pi_0, \pi_1).$$

I have met these animals - without even looking for them - in many situations, which I will not list now (I came across them recently *a propos* the classification of “ordinary” formal groups over a perfect field, in terms of *affine* algebraic groups, and *commutative* formal groups, related by the strict Gr-structures of this type (except that one has to use this formalism in an arbitrary topos (not merely in )) - to make explicit the yoga that “the transcendent character of a formal group is concentrated essentially in the commutative formal groups”, discovered it seems by Dieudonné...). The question which I wish to raise is the generalisation to groups in  $n - \text{Cat}$ , where I expect to find a non-commutative chain complex

$$L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 1$$

with supplementary structures doubtless of the type of  $\theta$ , but what are they? It is understood that the topological significance of such structures is that they express exactly the “truncated homotopy type in  $\dim \leq n$ ” of topological groups, or equivalently the homotopy type in  $\dim \leq n + 1$  of pointed connected topological spaces...). Have you candidates to propose ?

Your reflections on biduality and homology, however formal, tie in with a crowd of developments, of which only some exists at present, and others would demand considerable work still. Here are the reminiscences which your naive

questions bring to mind: (A) The formalism of the  ${}_!, {}^!$  (combined with  ${}_*, {}^*$ , and  ${}_*$ , “the six operations”) carries implicitly in itself the definition of homology and the essential identity between homology and cohomology. One now has this formalism for quasi-coherent sheaves on schemes - seminar Hartshorne (Springer L.N. 20) - for the topological spaces and arbitrary sheaves of coefficients - Verdier, *exposé* Bourbaki (SNLM 300) - and for the étale cohomology of schemes for “discrete” coefficients (“ $\ell$ -adic” or torsion) prime to the residual characteristic (SGA 5), finally, for coherent sheaves on analytic spaces (Verdier-Ruget). (The formalism remains to be developed in the crystalline context, and in the characteristic 0 in the context of stratified modules with singularities, à la Deligne, with perhaps - over the field  $\mathbf{C}$  - the introduction of additional Hodge structures, finally in the context of motives; I am convinced that it exists about anywhere - maybe, wherever there is a formalism of a cohomological nature.)

Working in étale cohomology on a separated scheme of finite type over a field  $k$ , say, with a ring of coefficients  $\Lambda$  of torsion prime to the characteristic, the complex of sheaves  $f^!(\Lambda_e)$  (where  $\hat{f} : X \longrightarrow \mathrm{Spec} k = e$ ) plays the role of *complex of singular chains on  $X$  with coefficients in  $\Lambda$* , and  ${}_!(f^!\Lambda_e)$  plays the role of a *homology  $H_*(X/e)$* , vis a vis of course, of coefficients on  $e$  which are complexes of  $\Lambda$ -modules. You can easily justify this assertion with the help of the “global duality theorems”, by one or two tricks which I spare you here.

#### REMARKS.

- (1) There is no need to truncation, it works in all dimensions.
- (2) This is related (at least as far as the philosophy is concerned) to the fact that for the various types of coefficients (under conditions of “constructibility”) one has a theorem of “biduality”, at least if one allows resolution of singularities (but Deligne has told me I believe that he knows a proof without that), with values in a “dualizing complex”  $K_e$  (on  $e$ ),  $K_X$  (on  $X$ ). If for example  $\Lambda$  is “self-dualising” (or Gorenstein) for example  $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , one can take  $K_e = \Lambda$ , therefore the dualising complex  $K_X = f^!(K_e)$  is nothing else than the “complex of singular chains with coefficients in  $\Lambda$ ”.
- (3) One can do the same thing for coefficients such as  $\mathbf{Z}_\ell$  (Jouanolou, thesis non



published JOURNAL, I fear!)

- (4) This works also for  $f : X \longrightarrow S$  finitely presented separated if  $f$  has the properties of “cohomological local triviality” (properties “local upstairs”) for example  $f$  smooth; one finds that  $H_*(X/S) = f^!(\Lambda_S)$ .

(B) Artin-Mazur have studied in a spirit close to yours the *autoduality* of the Jacobian of a relative curve  $X/S$ . It is necessary to ask them for precise results, perhaps it works say if  $X/S$  is proper and flat or relative dimension 1 - in any case it is OK on a discrete valuation ring with smooth *generic* fibre. The special fibre could be very wild. (I have used their results in SGA 7 to prove, in the case of Jacobians, a duality conjecture on the group of connected components associated to the Neron models of abelian varieties dual one to another...). Towards the end of the 50's (beginning of 60's?), when the grand cohomological stuff ( $f^!$ ,  $f^!$ , étale cohomology, etc.) just came out from darkness, the course given by Serre on the theory of Rosenlicht and Lang on generalised jacobians and the geometric class field theory (see Serre's book) and later the “geometric” theory of *local* class field theory making use of pro-algebraic groups (see his article on this subject), made me reflect on the cohomological formulations of these and other results, which should be of a “geometric” nature, such that the “arithmetic” results over an arbitrary base field (or residue field)  $k$  (finite, for example) follow immediately by descent from the “geometric” case of base field  $\bar{k}$ . I exchanged letters with Serre - I don't know if I can find copies - but I recall that I sketched projects for some ambitious enough theories on generalised residues, generalised local jacobians, etc., in at least three different directions. But I have never, in spite of numerous attempts, succeeded in mobilising someone for developing one of these programmes. Here a few words on them:

(C) In the situation where  $X$  is of finite type over a *field*  $k$ , construction of a complex of generalised jacobians  $J_{*X/k}$  (of length equal to  $\dim X$ ).

This is a complex of affine commutative pro-algebraic groups on  $k$ , with the exception of  $J_0$  if I remember well, ( $J_0$  had as abelian part the abelian part of  $\text{Alb}_{X/k}$ , the usual generalised jacobian). It's construction, inspired by the residual complex, passes by generalised jacobians (in an appropriate cohomological sense) of the localisation  $\text{Spec}_{\mathcal{O}_{X,x}}$  of  $X$  at its different point. N.B.  $\mathbf{H}_O(J_*)$  was the “generalised

Jacobian” of  $X$ , i.e. there existed a homeomorphism  $X \longrightarrow \mathbf{H}_0$ , which was universal for homomorphisms of  $X$  into commutative locally proalgebraic groups. For  $X$  connected,  $\mathbf{H}_0$  is an extension of  $\mathbf{Z}$  by an appropriate proalgebraic group. It is possible that, at first, I restricted to the case of  $X$  smooth.

The cohomology role of this complex was that of a complex of *homology*

$$(*) \quad H^i(X, G_X) \simeq \text{Ext}^i(J_{*X/k}, G)$$

but for which coefficients? I believe I took arbitrary commutative algebraic groups  $G$  but worked with the Zariski topology (malédiction !). Even in the case of discrete  $G$ , I considered the Zariskian  $H^i$ , this gives slightly stupid cohomology groups, evidently. I realised that one should work ultimately in étale cohomology, and that the construction of the  $(J_i)_{X/k}$  will evidently be modified accordingly. As for the significance of the  $\text{Ext}^i$  (hypercohomology), at a moment where Serre had developed the formalism for proalgebraic groups, one was not too fearful of taking it in the category of such objects - and in the sense of a “derived category” which at that moment had never yet been explicitly defined and studied. (We have, after all, somewhat progressed since those days!). I have the impression, in view of these antique cogitations, heuristic as they were, that it should now be possible to develop at present such a theory of  $J_{*X/k}$ , in cohomology fppf, giving a formula (\*) without limitation on the degree  $i$  of the cohomology. (N. B. But  $J_*$  evidently no longer stops in  $\dim X = n$  but in  $\dim 2n$ . It is nevertheless possible that the components  $J_i$  might be of  $\dim 0$  for  $i > n$ ).

I believe that the construction of the  $J_*$  does not commute with base change, but merely does so in the derived category sense.

(D) Let  $X/k$  be a smooth scheme (for simplicity) over a field  $k$ , separated and of finite type, or relative dimension  $d$ , and  $n$  an integer  $> 0$ . If  $n$  is prime to the characteristic and if  $F$  is a sheaf of coefficients on  $X$  which is annihilated by  $n$ , the global duality tells us that  ${}_!(F)$  and  $_*((F, \mu_n^{\otimes d}))$  ( $\mu_n$  = sheaf of  $n$ -th roots of unity  $= \text{Ker}(G_m \xrightarrow{n} G_m)$ ) are dual to each other with values in  $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_k$ , for example  ${}_!(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$  and  $_*((\mu_n^{\otimes d}))$ , or  ${}_!(\mu_n^{\otimes d})$  and  $_*((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}))$ , are dual to each other - at least with a shift of amplitude  $2d$  in dimension. (As  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  is injective over itself, this gives in fact perfect duality

$$R^i f_!(F) \times R^{2d-i} f_*((F, \mu_n^{\otimes d})) \longrightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.)$$

If now one no longer assumes  $n$  prime to the characteristic, for example  $n$  is a power of  $p = \text{characteristic of } k > 0$ , it seems that everything collapses: to start with, one no longer knows (for  $d > 1$ ) by what to replace  $\mu_n^{\otimes d} \dots$ . The extraordinary miracle is that for  $d = 1$ , i.e.  $X$  a smooth curve, everything continues to work perfectly, provided one states things with care! The first verifications are made for example with  $F = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ,  $\mu_p$ , or  $\alpha_p$ , with  $X$  complete - one finds it's O.K. by virtue essentially of the autoduality of the jacobian. One can make these examples more sophisticated on taking *twisted* coefficients, and  $X$  not complete - one convinces oneself this works always! Simply, it is necessary to note that here the  $R^i f_*(F)$ ,  $R^i f_!(F)$  have a "continuous" structure (they are essentially proalgebraic groups). This corresponds to the well known phenomenon in class field theory that the structure of  $\pi_{1ab}$  of  $X$ , when  $X$  is not complete, is *continuous* - hence same holds for  $H^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$  say.

By the way, I point out for you that Serre once proposed (without ever writing it down, I think) a theory of duality for *commutative unipotent* algebraic groups, *modulo radical isogeny*, duality with values in  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  (or  $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ ). He found that if (when  $k$  is algebraically closed, say)  $G$  is such a group, then  $G' = \text{Ext}^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  can canonically be given a structure of quasi-algebraic group (i.e. defined modulo radical isogeny), doubtless in a unique manner provided it verifies some functorial properties, and on requiring that for  $G = \mathbf{G}_a$  one finds that  $\text{Ext}^1(\mathbf{G}_a, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{G}_a$  with the usual structure. Let  $\Delta G = G' = \text{Ext}^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ . One finds  $G \simeq \Delta\Delta G$  i.e.  $\Delta$  is an authentic autoduality! I call  $\Delta$  *Serre duality*. It surely goes over to ind-progroups on an arbitrary base field (not necessarily algebraically closed) in the case  $p > 0$ . Moreover, for finite étale groups, it is  $\text{Ext}^0(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  (pontrjagin duality) which gives a perfect duality. One could screw together, in an appropriate derived category, Serre duality and Pontrjagin duality, by taking  $G \mapsto \Delta G = (G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ : one calls this ("cohomological") Serre duality. This will be a magnificent autoduality, if one puts oneself in a derived category where the  $\mathbf{H}^i$  of the envisaged complexes are (up to passing to the limit) extensions of étale groups by connected unipotent groups. Now one gets only such complexes, by "integrating" finite coefficients  $F$  on  $X$  by  $!$  or  $*$ . This being said, by passing to the limit in the initial formulation (or equivalently by replacing the  $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_k$ , previously consid-

ered, by  $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_k$  on  $k$ , and forming  $f^!(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_k = (\mu_\infty)_X$  the duality formula takes the form

$$\Delta({}_!(F)) \simeq_* (DF[2]) \quad \text{“shift” of dimension}$$

where  $D$  is the “Cartier duality”  $(F, \mu_\infty)$  (or  $(F, \mathbf{G}_m)$  if one prefers?), and  $\Delta$  is the Serre duality: cohomology with proper supports and with arbitrary supports are exchanged by duality, when one takes upstairs Cartier duality, and downstairs Serre duality.

The validity of the duality formula is not open to doubt - the principal work for establishing it consist certainly in a careful description of the category of coefficients with which one is working, as well on  $X$  as on  $k$ , and of the functors  $D$  and  $\Delta$ . As the definition of an arrow is immediate, once the building of the machine has been accomplished, the validity of the formula should result without difficulty from the usual “dévissages” which allow one to verify the duality in the particular standard cases  $F = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mu_p, \alpha_p$  on a smooth, complete  $X$ . (N.B. the case of coefficients prime to the characteristic is already known.) Let us make explicit what the formula of duality says for  $R^1f_*(\mathbf{G}_X)$ , where  $G$  is a finite group étale on  $k$  (the most important case being  $G = (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})_k$ ); one recovers Serre’s description of “geometric class field theory” in terms of extensions by  $G$  of a generalised jacobian of  $X$ . Thus, the duality formula can be understood as a cohomological version, considerably enriched, of geometric class field theory. When the base field  $k$  is finite, to retrieve the class field theory in the classical form, one can use “the trick of Lang” (on the relation between the “arithmetic”  $\pi_1$  of a smooth, connected commutative algebraic group  $J$  on  $k$  and its  $H^0(k, J) = J(k)$ : the  $\pi_1^{\text{ar}}(J)$  classifies the isogenies above  $J$  with kernel a constant group  $\pi_1^{\text{ar}}(J) \simeq H^0(k, J)$ ) - i its cohomological form, which may be stated:

$$\Delta_{0K}(J^*) \simeq_K (\Delta J^*[1]),$$

where  $\Delta$  is Serre duality,  $\Delta_0$  Pontrjagin duality for the totally disconnected topological abelian groups (duality with values in  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ),  $J^*$  a complex of algebraic ind-progroups on  $k$ . Taking account of this “Lang duality formula” and applying  $_K$  to the formula of duality for geometric class fields, one gets the “duality formula of

arithmetic class field theory”:

$$\Delta_0(H_!(X, F)) \simeq H^*(X, D(F)[3])$$

(isomorphism of totally disconnected topological groups).

Another remark: when  $F$  is not an “étale sheaf”, but has a continuous structure such as  $\alpha_p$ , one must be careful in the definition of  $!(F)$ , for  $X$  non complete, starting from the compactification  $\tilde{X}$ ; thus, if  $F$  comes from an “admissible” sheaf  $\tilde{F}$  on  $\tilde{X}$ , one must have an exact triangle

$$\begin{array}{ccc} & \hat{!(\tilde{F})} & \\ \swarrow & & \searrow \\ !(F) & \xrightarrow{\quad} & Rf_{*}(\tilde{F}), \end{array}$$

where  $\hat{\tilde{F}}$  is the *formal completion* of  $\tilde{F}$  along  $\tilde{X} - X$  (a finite number of points...). It is here, unless I am mistaken, that appears the link with local class field theory, in its cohomological version, on which I am going now to say a few words.

#### (E) Local class field theory as a duality formula

Let  $V$  be a complete discrete valuation ring with residue field  $k$  - assume either that  $k$  has been lifted to  $k \subset V$  (and therefore  $V \simeq k[[T]]$ ) or that  $k$  is perfect of characteristic  $p > 0$ . In order to fix ideas, and to be sure that I’m on solid ground, I consider at first on  $K$  ( $=$  the field of fractions of  $V$ ) *finite* coefficients  $F$  (as on  $X$  previously) and I consider the objects  $H^1(K, F)$ , or  ${}_K(F)$ . The main work to be done consists in defining an adequate category of coefficients over  $k$  (perhaps the same one as in (D)) and a functor

$$F \mapsto R\Gamma_{\underline{K}}(F)$$

with values in the category of such coefficients, in such a manner that the following isomorphisms holds.

$${}_K(F) \simeq (R\Gamma_{\underline{K}}(F)).$$

This correspond to the intuition (acquired directly from elementary examples) according to which for  $k$  algebraically closed, say, the  $H^0(K, F)$ ,  $H^1(K, F)$ ... are endowed with a structure of  $k$ -algebraic group (ind-pro...). In this construction,

the ring scheme of Witt vectors over  $k$  (introduced by Serre) and the “Greenberg functor” (associating to a  $V$ -scheme a  $k$ -prescheme) will play an essential role.

This being done, the duality formula will be formally stated as in (D) above:

$$\Delta R\Gamma_K(F) \simeq R\Gamma_K(DF[1])$$

where  $D$  stands for Cartier duality,  $\Delta$  for Serre duality. When the residue field is finite, it becomes (via “Lang’s trick” mentioned previously)

$$\Delta_{0k}(F) \simeq_K (DF[2])$$

$\Delta_0$  standing for Pontrjagin duality. The formula contains local geometric class field theory à la Serre, and arithmetical local class field theory in its classical form.

**Remarks.**

(a) If  $F$  is prime to the residue characteristic the formula is very easy to prove and well known. It may be considered a very special case of the “induction formula” for a morphism  $i : s \mapsto S$ , in the duality formalism:

$$i^!(D_S(F)) = D_S(i^*(F))$$

(we take here the inclusion of  $p = \text{Spec}(k)$  in  $S = \text{Spec}(V)$ ). Thus the work to be done concerns the  $p$ -primary coefficients, for  $p = \text{characteristic } k > 0$ . The most subtle case is that of unequal characteristic.

(b) The functor may be obtained by composing  $Rj_*$  (where  $j : U = \text{Spec}(K) \longrightarrow \text{Spec}(V) = S$  is the inclusion) with a cohomological version of the “Greenberg functor”.

(c) In (D) and (E), I restricted myself to finite coefficients  $F$  - it’s for those that I am sure of what I assert. But it is certainly true that the duality formula is even richer, that something may still be asserted for example for  $F$  a not necessarily finite group scheme, for example an abelian scheme (with a few degenerate fibres in the case of (D)?), but I have never entirely clarified this question, even on a heuristic basis. I vaguely recall a formula which should be contained in the formalism (say if  $k$  is algebraically closed): for  $F$  an abelian scheme on  $K$ ,  $F$  the dual abelian scheme and  $G'$  the pro-algebraic group over  $k$  attached “à la Greenberg” to its Néron model, then one has

$$H^1(K, F) \stackrel{?}{\simeq} \text{Ext}_{k\text{-grp}}^1(G', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

(N.B. without any guarantee.) In principle, the previously mentioned duality conjecture concerning Néron models of SGA 6 should come out of the local duality machine.

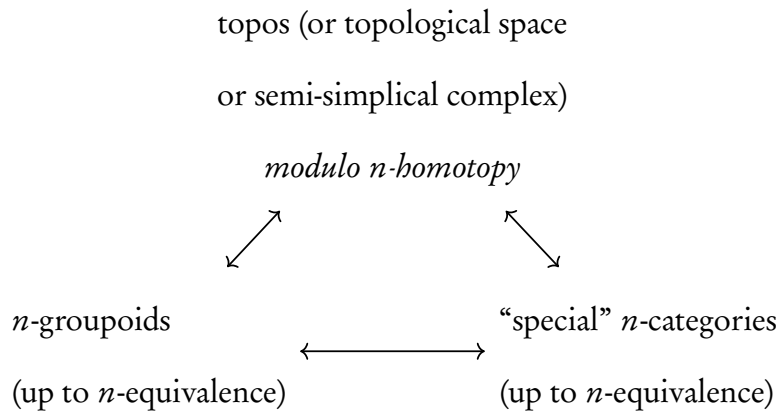
(d) You may ask Deligne if he didn't dive into questions (D) and (E) lately.

#### (F) Significance and limitations of the fppf topology

Since the attempts of Serre to find a “Weil cohomology” by using the cohomology of a scheme with coefficients not only discrete  $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) or  $\mu_{p^n}$  ( $n \rightarrow \infty$ ), but also continuous (for example  $W_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ ), which give good results for recovering a correct  $H^1$ , during numerous years I have come upon the impression, which I have tried in vain to make precise, that a correct “ $p$ -adic” “Weil cohomology”, in the case  $p > 0$  and  $k$  of characteristic  $p$ , should come, in one way or another, from the fppf cohomology, for finite coefficients for example, or more general coefficients, e.g. algebraic groups over  $k$ . The construction in (B) of the local jacobian complex was, of course, related to this hope: the homology might reveal what is hidden to us in cohomology! For some time now, one has at ones disposal the formalism of crystalline cohomology, and one knows (Berthelot) that (at least for  $X$  projective and smooth) it has the correct properties. If one uses that as a kind of standard by which to “measure” the other cohomologies, one finds that the part of the crystalline cohomology  $H_{\text{cris}}^i(X)$  which could be described in terms of fppf cohomology of  $X$  with coefficients in algebraic  $k$ -groups is a small part of  $H^i$  only; more precisely, using the very rigid supplementary structure of the  $H^i$  (modules of finite type on the ring  $W(k)$  of Witt vectors) which comes from the existence of the Frobenius homomorphism (an isogeny),  $H^i \xrightarrow{F} H^i$  (semi-linear), one finds that one keeps always in the part “of slope  $\leq 1$  (although the possible slopes vary between 0 and  $i \dots$ ). This explains why for  $i = 1$  one can obtain via fppf a correct  $H^i$ , although for  $H^2$  already all the attempts have been unfruitful. In truth, one conjectures that *all* the part of slope  $\leq 1$  in  $H_{\text{cris}}^i$  comes from fppf. But I have completely lost contact with these questions - people such as Mazur, Kats, Messing - and of course Deligne - should be knowledgeable as to the present states of these questions.

Your question 7 seems to indicate that there is a misunderstanding on your part on the significance of the “homotopy type” of  $X$ , for  $X$  a topos (for example

the étale topos of a scheme). Doubtless you must be confusing the homotopical algebra which one can perform on  $X$ , using semi-simplicial sheaves, stacks of all kinds, the relations between these - and the other point of view according to which  $X$  (with its very rich structure of topos) virtually disappears so as to become no more than a pale element of a “homotopical category” (or pro-homotopical), deduced from the topos by a very thorough process of “localisation”. At first sight, all that still remains with poor stripped  $X$ , are the  $\pi_i$  - and its cohomology groups with constant coefficients - or at the worst twisted constant coefficients. When one digs more into this definition of “what is left to this poor  $X$ ” one falls precisely on *the locally constant  $n$ -stacks* (as an  $f : X \longrightarrow X'$  which is a homotopy equivalence induces a  $(n + 1)$ -equivalence between the categories of locally constant  $n$ -stacks on  $X$  and on  $X'$ ) - which of course contain the abelian chain complexes of length  $n$  of sheaves with locally constant cohomology sheaves, and the hyper-cohomology of these. It is thus that one arrives at this triangle of objects which mutually determine each other



One says that an  $n$ -category  $E_n$  is “special” (or  *$n$ -galois*) if it is  $n$ -equivalent to the category of locally constant  $(n - 1)$ -stacks on an appropriate topological space (or a topos), or, what should be equivalent, if it is  $n$ -equivalent to the category of  $n$ -functors  $G_n \longrightarrow n - \text{Cat}$ , where  $G_n$  is an  $n$ -groupoid. If  $X, G_n, E_n$  correspond in this way, one calls  $G_n$  *the fundamental  $n$ -groupoid* of  $X$ , or of  $E_n$ , or says that  $E_n$  is *the category of local  $(n - 1)$ -systems* on  $X$ , or on  $G_n$ , or that  $X$  is *the geometric realisation* of  $G_n$  or of  $E_n$ . In analogy with the familiar case  $n = 1$ , it should be possible to interpret  $G_n$  as the full sub- $n$ -category of  $\text{Hom}_n(E_n, n - \text{Cat})$  formed



by the  $n$ -functors  $E_n \longrightarrow n\text{-Cat}$  satisfying certain exactness properties (one feels like saying: which commute with finite  $\varprojlim$  and arbitrary  $\varinjlim$ ); but this raises the disquieting vision of  $n$ -limits in  $n$ -categories. (N. B. The case  $n = 2$  begins to become familiar to us...). It is prudent in all of this to suppose that  $X$  is “locally homotopically trivial”, which ensures the pro-simplicial set which Artin-Mazur associate to it (with the help of nerves of hyper-coverings) is essentially constant in the ordinary homotopy category - thus  $X$  defines a homotopy type in the usual sense. This is surely *not* the case for the étale topos of a scheme. In such case, the fundamental  $n$ -groupoid should be conceived as a *pro- $n$ -groupoid* (nothing surprising in that, in view of the familiar theory of  $\pi_1$ ), and  $E_n$  as an (ind)- $n$ -category (the ind-structure will correspond to the exigencies of local triviality for a variable  $n$ -stack, relative to coverings more and more fine on  $X$ ).

I nevertheless understand your instinctive resistance to conceive this extreme stripping of a beautiful topos  $X$ , to the point of retaining only the meagre homotopy type. Even more, I am persuaded that going to the root of this instinctive resistance, one arrives at a generalisation and deepening of the notion of “homotopy type”, and to bring new grist to the mill of the development of a good homotopical yoga. Here is what I have in mind.

Let us speak first of sheaves (of sets, or of modules, etc.) instead of stacks, for simplicity, and place ourselves in the étale topos of a scheme. The locally constant sheaves - modulo a supplementary condition of finiteness which is sufficiently anodyne - form the easiest of the *constructible* sheaves, for the definition of which they serve as models. Supposing  $X$  coherent (= quasi-coherent and quasi-separated), then the general constructible sheaves are those for which there exists a finite partition  $X = \cup_{i \in I} X_i$  of  $X$  into “cells” or “strata”  $X_i$ , each locally closed and constructible, such that the restriction of  $F$  to every  $X_i$  is locally constant (also a finiteness condition...). Thus the category of constructible sheaves on  $X$  (which gives back the category of all sheaves on passing to a category of ind-objects...) may itself be thought of as an inductive limit of categories associated to finer and finer partitions on  $X$ . One can then, for such a fixed partition  $P$ , set out to study the category of sheaves (or complexes of sheaves, or stacks) which are “ $P$ -constructible” (or, more generally, which are “locally constant” on every

$X_i$ ). These categories will not have truly satisfying structures unless they are stable for the usual operations - such as  $\otimes$ , or  $Rj_*j^*$  where  $j : X_i \longrightarrow X$  is a “cell” of the partition, etc. In fact, if  $X$  is excellent and one has resolution of singularities at ones disposal, one knows that the torsion constructible sheaves (under the proviso of being prime to the characteristic) are stable for all these operations - but not for a finite partition of  $X$  fixed once and for all. To have such a finer stability, it is necessary to make some very strict hypotheses of “*equi-singularity*” on the given stratifications of  $X$ , along the strata. I think nonetheless that a refinement of known techniques will show that  $X$  admits arbitrarily fine stratifications having these properties of equi-singularity (and with the  $X_i$  regular and connected, but this does not matter for our present purpose).

By way of example, suppose that there are just two strata, the closed one  $X_0$ , and  $X_1 = X \setminus X_0$ . According to Artin’s devissage, giving oneself a sheaf  $F$  on  $X$  is equivalent to giving a sheaf  $F_0 = i_0^*(F)$  on  $X_0$ , a sheaf  $F_1 (= i_1^*F)$  on  $X_1$ , and a homomorphism  $F_0 \longrightarrow i_0^*i_{1*}(F_1) = \varphi(F_1)$ , where  $i_0, i_1$  are the inclusions  $X_0 \xrightarrow{i_0} X \xleftarrow{i_1} X_1$ . In order that  $F$  should be  $P$ -constructible, it is necessary and sufficient that  $F_0$  and  $F_1$  should be locally constant (plus some accessory finiteness conditions...), on  $X_0$  and  $X_1$  respectively. Then (by virtue of the hypothesis of equi-singularity) the same will be true of  $\varphi(F_1)$ , and the category of sheaves in which we are interested can be expressed entirely in terms of the category of locally constant sheaves on  $X_0$  and  $X_1$ , i.e. of the mere homotopy type of  $X_0$  and  $X_1$ , except that we must make explicit the nature of the left exact functor  $\varphi$ . I think tht this should be possible, in the context of *schemes* in which I am placed (technically rather sophisticated), on introducing an “*étale tubular neighbourhood*” of  $X_0$  in  $X_1$  (which is a very interesting topos, but not associated to a scheme). But this technical construction is only a paraphrase of an extraordinary simple topological intuition, which I will make explicit, supposing, to fix the ideas, that the base field is  $\mathbf{C}$  and so one may work with locally compact spaces in the usual sense. The topological idea behind the hypothesis of equi-singularity that there exists a *tubular neighbourhood*  $T$  of  $X_0$  in  $X$  retracting onto  $X_0$  and such that the pair  $(X_0, T)$  over  $X_0$  should be a locally trivial bundle, i.e. that  $T \setminus X_0$  is locally trivial over  $X_0$ . In fact if  $\partial T$  is the “boundary” of  $T$ , which also should be a locally trivial bundle on  $X_0$ , then  $T$  over

$X$  is the conic bundle (= bundle where fibres are cones)  $(\simeq (\partial T \times I) \amalg_{\partial T} X_0$  where  $I = [0, 1]$ ,  $\partial T \longrightarrow \partial T \times I$  is defined by  $x \mapsto (x, 1)$ , and  $\partial T \longrightarrow X_0$  is the projection) then  $\overset{\circ}{T} = T \setminus X_0 \simeq \partial T \times [0, 1[$  is  $X_0$ -homotopic to  $\partial T$ . If  $X_0$  and  $X_1$  are non singular, then so also will be  $\overset{\circ}{T}$  and  $\partial T$ , which are then topologically smooth fibrations on  $X_0$ . Moreover, putting  $\tilde{T}_1 = X_1 \setminus \overset{\circ}{T}$ , the inclusion  $\tilde{X}_1 \longrightarrow X_1$  is a homotopy equivalence, and  $X$  can be recovered, up to homeomorphism, from the diagram of spaces

$$\begin{array}{ccc} (\overset{\circ}{T} = T \setminus X_0 \simeq) \partial T & \xrightarrow[\text{inclusion}]{j} & \tilde{X}_1 (\simeq X_1) \\ \text{fibration} \downarrow p & & \\ X_0 & & \end{array}$$

as an amalgamated sum. In terms of this diagram of spaces, the above functor  $\varphi$  interprets immediately as

$$\varphi(F_1) \simeq p_* j^*(\tilde{F}_1)$$

where  $F_1 \longrightarrow \tilde{F}_1$  is the restriction from  $X_1$  to  $\tilde{X}_1$  (which is an equivalence of categories for the envisaged (locally constant) sheaves). Giving  $F = (F_0, F_1, u : F_0 \longrightarrow \varphi F_1)$  can then also be made explicit as giving

$$F_0, \tilde{F}_1, \tilde{u} : p^*(F_0) \longrightarrow j^*(\tilde{F}_1)$$

where  $F_0(\tilde{F}_1)$  are locally constant sheaves on  $X_0$  (respectively  $X_1$ ). It is necessary to recall that here  $p$  is a real fibration, and  $j$  is an inclusion (in practice, for the case  $X_0, X_1$  smooth, the inclusion of the boundary in a manifold with boundary).

If you prefer, one can also take the diagram which is less pretty (but a little more canonical)

$$\begin{array}{ccc} \overset{\circ}{T} & \xrightarrow{j'} & X_1 \\ p' \downarrow & & \\ X_0 & & \end{array}$$

coming essentially to the same thing, as it is formed from spaces homotopic to the preceding one. One can even replace  $X_0$  by  $T$  ( $X_0$  being a deformation retract of

it) and write

$$\begin{array}{ccc} \overset{\circ}{T} & \longrightarrow & X_1 \\ p'' \downarrow & & \\ T & & \end{array}$$

where “literally”  $p''$  is now an inclusion, but “morally”, it is a *fibration* with very pretty fibres (notably compact of finite dimension, and moreover non-singular varieties - this is much better than that which is given by the yoga of Cartan-Serre “every continuous mapping is equivalent to a fibration”...). This last diagram however has the advantage of being amenable to a purely algebraic, direct construction, in the context of schemes, once one has developed the construction of étale tubular neighbourhoods<sup>96</sup>.

The point I wish to come to, is that the consideration of sheaves (or complexes thereof, or  $n$ -stacks...) which are  $P$ -constructible on an  $X$ , where  $P$  is a given “equi-singular” stratification, reduces in our particular cases to the knowledge of a diagram of ordinary *homotopy types* (or pro-types, if one comes back to the étale topology)

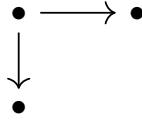
$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{j} & X_1 \\ p \downarrow & & \\ X_0 & & \end{array}$$

by taking local coefficients systems (or locally constant  $n$ -stacks) on the vertices  $X_0, X_1$ , which are related to each other by a homomorphism of compatibility of the type  $p^*(F_0) \longrightarrow j^*(F_1)$ . It should be an amusing exercise (which I have not yet done) to verify and to make explicit how the “six operations” on sheaves (either on  $X$ , or on a subspace which is a union of strata of  $X$ ) can be expressed in this dictionary, in the case, let us say, of non-singular strata (otherwise, there will be a difficulty with the dualising complexes, which one would prefer to have as objects

---

<sup>96</sup>Tim Porter pointed out to me that work on étale tubular neighbourhoods was done by D.A. Cox: “algebraic tubular neighbourhoods I, II”, Math. Scand. 42 (1978) 211-228, 229-242. I’ve not seen yet this work, and can’t say therefore whether it meets the rather precise expectations I have for a theory of tubular neighbourhoods, for the needs of a dévissage theory of stratified schemes (or, more generally, stratified topoi)

in our category), and to reestablish the known formulae involving these operations. But it appears probable that, to carry out this transcription well, it would be necessary, rather than considering a diagram of type



in the homotopical category formed from the category of semi-simplicial sets, to consider the category of diagrams of semi-simplicial sets, and to pass from these to the homotopical category of fractions<sup>97</sup>

I have recently more or less made explicit, while thinking on the foundations of “tame topology”, (i.e. where one eliminates from start all wild phenomena) how an equi-singular stratification, say with non singular strata, of a compact “tame space”, gives rise canonically to a diagram of space which are manifolds with boundary, the arrows of the diagram being essentially locally trivial fibrations of manifolds with boundary on the others (with fibres which are compact manifolds with boundary), *and* the inclusion of the boundary in these manifolds with boundary (in fact, one finds slightly more general inclusions, certain boundaries which appear being endowed with an “elementary” cellular decomposition, i.e. the closed strata are again manifolds with boundary which are glued together along common parts of the boundary; and it is also necessary to consider the inclusions of these pieces one in another...), and can be reconstituted from this diagram by gluing<sup>98</sup>. In other words, one has a canonical devissage description of tame compact spaces  $X$ , eventually endowed with equi-singular stratifications with non-singular strata, in terms of finite diagrams of a precise nature made out of manifolds with boundary. When we are interested in sheaves (or complexes of sheaves, or  $n$ -stacks) which are  $P$ -constructible on  $X$ , where  $P$  is such a fixed stratification, these may be described in terms of the envisaged diagram, of which only the “homotopy type” is to be retained. One foresees that the six operations on

<sup>97</sup>This is the typical game embodied in the “derivator” associated to the theory of usual homotopy types (compare section 69).

<sup>98</sup>Some more details on this program are outlined in “*esquisse d’un Programme*” (section 5), in *Réflexions Mathématiques 1*

these sheaves can be translated in an ad hoc manner to this homotopical context. Finally, if instead of having only one compact tame space  $X$ , one has, let us say, a tame morphism  $f : X \longrightarrow Y$  of such objects, then by choosing equi-singular stratifications on  $X$  and  $Y$  adapted to  $f$  (the strata of  $X$  being in particular locally trivial fibrations on those of  $Y \dots$ ), one should find a “morphism” from the diagram of manifolds with boundary expressing  $X$  into that expressing  $Y$  (with natural morphisms which essentially reduce to fibrations of compact manifolds with boundaries on other such objects) in such a way that the four operations  $*, \imath, \mathrm{Lg}^*, g^!$  between  $P_{X-}$  and  $P_{Y-}$  constructible sheaves on  $X$  and  $Y$  (or on locally closed sub-spaces  $X', Y'$  which are union of strata, such that  $f$  induces  $g : X' \longrightarrow Y'$ ) can be expressed in terms of standard operations between the mere homotopy types. Finally, all these constructions, still partially hypothetical (there is work on the foundations to be done!) should be able to be paraphrased in the framework of excellent schemes, by making use of the machinery of étale tubular neighbourhoods. In one or other case, the “fine homotopy type” of a tame space, respectively of an excellent scheme, is defined by passage to the limit from “ $P$ -homotopy type” associated to finer and finer equi-singular stratifications  $P$  (with non-singular strata).

This “fine” homotopy type would embody the knowledge, not only of sheaves or locally constant  $n$ -stacks, but (via a passage to the inductive limit) the knowledge of *all of them*. And it would depend, in a suitable sense, functorially on  $X$ . In the case of a scheme of finite type on an algebraically closed field  $k$  say, the strongest cohomological and homotopical *finiteness theorem* would be expressed precisely in terms of a fine homotopy type, and would say that *the ordinary homotopy types which are their constituents are essentially “finite polyhedra”* - and even compact manifolds with boundary - or in more precise fashion, their profinite completions (in the sense of Artin-Mazur) prime to the characteristic  $p$  of  $k$  are those of such polyhedra. One sees clearly how to begin on such programme in characteristic 0, but one foresees supplementary amusement, or even mystery, in the case  $p > 0$ , for the varieties which, even birationally, resist being lifted to characteristic 0!

From these essentially geometric thoughts, I could not at this moment draw up a precise programme for developing adequate algebraic structures to express

them. I restrict myself to several marginal remarks.

For a long time I have been intrigued by the idea of a “linearisation” of an (ordinary) homotopy type, i.e. questions of the type: if  $X$  is a homotopy type, how much cohomological information of the type: cohomology of  $X$  with variable coefficients  $M$  (constant or twisted constant), multiplicative structure  $H^i(X, M) \times H^j(X, N) \longrightarrow H^{i+j}(X, M \otimes N)$ , then eventually other cohomology operations - is it necessary to have to reconstruct entirely the homotopy type? (say, in this preliminary pre-derived category approach, assuming given the fundamental group  $\pi_1$ , and therefore the category of constant twisted coefficients ( $= \pi_1$ -modules), the functors  $H^i(-, M)$  over these, together with the structure of cohomological functors relative to exact sequences, the structure of cup-product, etc. - related by certain formal properties?) Once one has at one’s disposal the language of derived categories: the sub-category of the derived category of abelian complexes on  $X$ , formed from complexes the sheaves of cohomology of which are locally constant on  $X$ , with its triangulated structure and its multiplicative structure (and eventually ...) gives a more satisfying candidate for hoping to recover the homotopy type. I don’t really know if this suffices the recovery indeed<sup>99</sup>, but on the other hand I have no doubt that on pursuing “linearisation” to the end, that is to say by going to the *non-abelian* framework, and working with the  $(n + 1)$ -category (without any supplementary structure on it!) of locally constant  $n$ -stacks of constructible sheaves on  $X$ , for all  $n$ , one manages to reconstruct the homotopy type via its fundamental  $\infty$ -groupoid, as explained in my previous letter and recalled in this one. (This signifies in particular that all the possible and imaginable cohomology operations are already included in the data furnished by such a system of  $n$ -categories...).

Similarly, the more elaborate homotopy type, which are related to certain finite diagrams, which one can associate to certain types of stratification  $P$  of tame

---

<sup>99</sup>I was informed by knowledgeable people soon later that the answer is well known to be negative, by working with “rational homotopy types” (the cohomology of which is made up with vector spaces over  $\mathbb{Q}$ ). It is well known indeed that a 1-connected rational homotopy type is *not* known from its rational cohomology ring alone, which contains already all the information I was contemplating. At last this is so if we assume that  $H^i(X)$  is of finite dimension over  $\mathbb{Q}$  for all  $i$ . But is there a counterexample still when  $X$  is a homotopy type “of finite type”?

topological spaces  $X$ , let's say, should correspond in as perfect a fashion to the  $(n+1)$ -category of  $n$ -stacks on  $X$  which are locally constant on each of the strata of  $P$  (say: which are subordinated to  $P$ ). If the above description of homotopy types by the “locally constant derived category” was valid indeed, one would expect to recover here the mixed homotopy type from the corresponding sub-category of the derived category of abelian sheaves on  $X$ , provided by the complexes which have locally constant cohomology on each of the strata - with also the operations  $\otimes, \oplus$ , plus in case of need, the four operations  $Rg_!, Rg_*, Lg^*, g^!$  for the induced  $g : Z' \longrightarrow Z''$  of the various locally closed unions of strata... The problem here is that we don't at present even know what is a triangulated category, not any more than what is its non-commutative version, described probably more simple and more fundamentally: a “homotopical category” with operations of taking “fibres” and “cofibres”<sup>100</sup>.

It is surely time that I finish this “lettre-fleuve”, which is becoming more and more vague. Just one question: what is this marvellous formula of Bloch-Quillen to which you allude, of which I have never heard, and which makes my mouth water?

Very cordially yours,

---

<sup>100</sup>This “problem” is met with by the notion of a “derivator”, which “was in the air” already by the late sixties, but was never developed (instead even derived categories became tabu in the seventies...).



# COMPLEXE DE DE RHAM À PUISSANCES DIVISÉES ET OMBRES DES MODULES

IHÉS. 12 Décembre 1975

---

géométrie	différentielle
—	analytique
—	algébrique
—	arithmétique
topologie algébrique	$\left\{ \begin{array}{l} \text{PL} \\ \text{semi-simplicial} \end{array} \right.$

## 1) Historique

- a) Notion de forme différentielle (*Poincaré*) et formule de *Stokes*

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \quad (\text{d'où } H_{\text{DR}}^*(X) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{C}).)$$

- b) Th. de *De Rham* (conjecturé par *E. Cartan*). Mais [-] Maintenant bien compris à th. des faisceaux, lemme de *Poincaré*

- c) Théorie de *Hodge* des intégrales harmoniques (structure supplémentaire bigraduée sur  $H_{\text{DR}}^*(X)$  si  $X$  kählérienne compacte.)
- d) Théorème de *Cartan-Serre* sur variétés de Stein (car Lemme de Poincaré valable dans l'analytique).
- e) Cas des variétés algébriques ou schémas sur corps de base (ou schéma de base général) : *Dwork*, *Washnitzer-Monsky*, plus tard le yoga “cristallin” développé par *Berthelot*, *Illusie*, *Messing*, *Mazur* (cf avec *Hartshorne*, *Herrera*, *Ogus*, *Bloch* (?)). Ici on trouve des théories cohomologiques qui ne sont plus à “anneau de coefficients” de caractéristique nulle, i.e. contenant  $\mathbf{Q}$  — i.e. on perd [?] les phénomènes de torsion [?]. Du point de vue Weil, c'était un défaut irréparable.
- f) Th. de *Grothendieck* pour variétés algébriques sur  $\mathbf{C}$  (généralise par *Deligne*, *Hartshorne* pour des coefficients plus généraux). Ceci donne confiance (du moins en car. 0) en la signification topologique de la cohomologie de De Rham “algébrique” des schémas algébriques.
- g) Complexe de De Rham-Sullivan pour espaces topologiques généraux : *formes différentielles singulières*  $C^\infty$  (resp.  $\mathbf{C}$ -algébriques, resp.  $\mathbf{R}$ -algébriques, resp.  $\mathbf{Q}$ -algébriques). Donne la cohomologie à coefficients dans  $\mathbf{C}$  (resp.  $\mathbf{R}$ , resp.  $\mathbf{Q}$ ) (facile)

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{\text{DRSR-alg.}}^\bullet & \subset & C_{\text{DRS } C^\infty}^\bullet & \subset & C_{\text{DRS}}^\bullet \\
 & & \cup & & \\
 & & C_{\text{DR}}^\bullet & & 
 \end{array}$$

Sullivan montre mieux que le  $\mathbf{Q}$ -type d'homotopie de  $X$  est récupéré si  $X$  est simplement connexe - de façon plus précise, il y a (sauf erreur) une équivalence de catégories donnée par  $C_{\text{DRS}}^\bullet$  entre la catégorie homotopique faible des espaces connexes et simplement connexes (du point de vue singulier), et une certaine catégorie dérivée formée avec les  $\mathbf{Q}$ -algèbres graduées associatives anticommutatives à degrés  $\geq 0$  telles que  $H^0(A) \xleftarrow{\sim} \mathbf{Q}$ ,  $H^1(A) \simeq 0$ . Il y a une théorie des modèles minimaux pour de telles algèbres, une façon très simple de récupérer les  $\pi_i \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  en termes d'un tel modèle... (On renvoie au papier de Sullivan.)

Mais à nouveau, on prend la torsion !  
Donc du théorème d'isomorphisme de Sullivan

$$H^\bullet(C_{\text{DRS}/\mathbf{Q}}^\bullet(X, \mathbf{Q})) \simeq H^\bullet(X, \mathbf{Q})$$

$\forall n \geq 0$ ,

$[n]$  simplexe type de dimension  $n$ ,

$\Delta^{[n]}$  sa réalisation géométrique<sup>101</sup>,

$E^{[n]}$  l'espace affine qu'il soustend [plutôt engendré] (avec une  $\mathbf{Q}$ —structure)<sup>102</sup>,

$\text{DRS}_{[n]}^\bullet = C_{\text{DR}}^\bullet(E^{[n]})$  son complexe de De Rham  $\mathbf{Q}$ —algébrique.

C'est contravariant en  $[n]$ , d'où

$$\text{DRS}_*^\bullet = (\text{DRS}_{[n]}^\bullet)_{n \geq 0}.$$

Algèbre différentielle graduée semi-simpliciale (et même simpliciale) - à degrés  $\geq 0$ , anticommutative.

Pour tout espace topologique  $X$ ,  $S_*(X)$  son complexe singulier semi-simplicial.  
On a

$$C_{\text{DRS}}^\bullet(X, \mathbf{Q}) \simeq \text{Hom}(S_*(X), \text{DRS}_*^\bullet),$$

i.e.

- a)  $C_{\text{DRS}}^\bullet(X, \mathbf{Q})$  dépend de  $X$  si  $S_*(X)$  [plutôt 'ne dépend que']
- b) Sur  $(\text{Ss}) = (\text{Ens}_*)$ , le foncteur  $C_{\text{DRS}}^\bullet(-, \mathbf{Q})$  est représentable par  $\text{DRS}_*^\bullet$ .

Or

- a)  $\text{DRS}_*^\bullet$  est une résolution de  $\mathbf{Q}_*$  (dans la catégorie des groupes semi-simpliciaux). (Lemme de Poincaré algébrique sur l'espace  $\mathbf{Q}$ -affine  $E^{[n]}$ ).
- b) Les composantes  $\text{DRS}_*^i$  ( $i \geq 0$ ) de  $\text{DRS}_*^\bullet$  sont des objets abéliens acycliques du topos  $(\text{Ss})$  (ce qui revient à dire que leurs  $\pi_j(\text{DRS}_*^i)$  sont nuls, ce qu'on vérifie facilement).

(Il [?] serait [Hom] des formes  $C^\infty$  à coefficients dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , ou analytiques réels, ou analytiques complexes...)

On aimerait avoir une  $\mathbf{Z}$ -algèbre différentielle [graduée]  $C_{\text{DR}}^\bullet(X, \mathbf{Z})$  différentielle [?] [?dont tout sur]  $X$  [?(ou  $S_*(X)$ )] dont [?]  $\mathbf{Z}$  [?] qu'il y a [?]

Si on prend  $C_{\mathbf{Z}-\text{DR}}^\bullet(E^{[n]})$  (où  $E^{[n]}$  a même une  $\mathbf{Z}$ -structure affine), c'est a) qui devient déjà faux : pour intégrer  $\int x^n dx$ , il faut un dénominateur avec  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$  ! Mais en géométrie, on est déjà familiarisé avec une façon de sauter à pieds-joints par dessus le conneau, en introduisant des puissances divisées et de polynômes (ou séries formelles) à puissances divisées. Si  $E^{[n]}$  avait son origine sur  $\mathbf{Z}$  (i.e. provenant canoniquement d'un  $\mathbf{Z}$ -module libre de type fini), on aurait un complexe de De Rham à puissances divisées. Mais pas pour un espace affine ! Notons

$$\begin{aligned} \text{DRS}_{[n]}^\bullet &\simeq C_{\text{DR}/\mathbf{Q}}^\bullet(\mathbf{Q}[(X_i)_{0 \leq i \leq n}]/\Sigma X_i - 1) \\ &\simeq \mathbf{Q}[X_i, dX_i]_{0 \leq i \leq n}/\Sigma X_i - 1, \Sigma dX_i \\ &\simeq \mathbf{Q}[X_0, \dots, X_{n-1}][dX_0, \dots, dX_{n-1}] \end{aligned}$$

Donc on aurait envie de prendre

$$\mathbf{Z}\{X_i\}[dX_i]_{0 \leq i \leq n}/(\Sigma X_i - 1, \Sigma dX_i),$$

où  $\{\}$  désigne les polynômes à puissances divisées, mais on n'est plus isomorphe à  $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n+1}\}[dX_0, \dots, dX_{n-1}]$  ([?] bien une résolution de  $\mathbf{Z}$ ), car si on [?] de la relation [?]  $\Sigma_0^n X_i - 1 = 0$ ,  $X_n = 1 - \Sigma_0^{n-1} X_i$  (et  $dX_n = -\Sigma_0^{n-1} dX_i$  de  $\Sigma_0^n dX_i = 0$ ), on a le “bec” [?] que  $1 - \Sigma_0^{n-1} X_i$  n'appartient pas à l'idéal à puissances divisées donné dans  $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$  [?] (donc on ne voit pas comment envoyer  $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$  dans  $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$  avec l'élément [?]  $\Sigma_0^n X_i - 1$  dans le noyau...).

On s'en tire en prenant un anneau de coefficients différent de  $\mathbf{Z}$ , soit  $S$ , avec un “paramètre”  $t \in S$  fixé dont on sache *prendre des puissances divisées* (i.e.  $t \in J, J$  idéal à puissances divisées [?]), et en remplaçant [?] les équations  $\Sigma X_i = 1$  de  $E^{[n]}$  par l'équation

$$\Sigma X_i = t \quad \text{dans} \quad S^{n+1}$$

et définissant

$$C_{\text{DRpd}[n]}^{\bullet}(S, J, t) \simeq (S\{X_i\}_{0 \leq i \leq n})/(\Sigma X_i - t, \Sigma dX_i).$$

On divise par l'idéal à *puissances divisées* engendré  $[?]$  car dans  $S\{X_i\}[dX_i]$   $[?]$  l'idéal formé des formes  $[?]$  à puissances divisées d'augmentation dans  $J$  est à puissances divisées,

$$[C_{\text{DRpd}[n]}^{\bullet}(S, J, t) \simeq] \quad (S\{X_i\}_{0 \leq i \leq n}/(\Sigma X_i - t)_{\text{pd}}) \otimes_S \Lambda^*(S^{[n]}/\text{diag } S^{[n]}).$$

C'est une  $S$ -algèbre différentielle graduée anticommutative à degrés  $[?]$  augmentée vers  $S/J$  et à puissances divisées sur l'idéal noyau de l'augmentation

$$C_{\text{DRpd}[n]}^{\bullet}(S, J, t) \longrightarrow S/J^{103};$$

et comme telle isomorphe à  $S\{X_0, \dots, X_{n-1}\}[dX]$ , qui est une *résolution* de  $S$ . Pour  $[n]$  variable, on trouve

$$C_{\text{DRpd}*}^{\bullet}(S, J, t) = (C_{\text{DRpd}[n]}^{\bullet}(S, J, t))_{n \geq 0},$$

qui est une résolution semi-simpliciale (et même simpliciale) de  $S$ , avec augmentation vers  $S/J = k$ , et puissances divisées sur l'idéal d'augmentation,  $[?]$ . Elle dépend fonctoriellement de  $(S, J, t)$ , et elle peut de  $[? \text{ un}]$  pour  $X_* \in \text{Ss}$

$$C_{\text{DRpd}}^{\bullet}(X_*; S, J, t) = \text{Hom}(X_*, C_{\text{DRpd}}^{\bullet}(S, J, t)),$$

foncteur contravariant en  $X_*$ <sup>104</sup> (et si  $X$  espace topologique  $[?]$ )

$$\begin{aligned} C_{\text{DRpd}}^{\bullet}(X; ) &= C_{\text{DRpd}}^{\bullet}(S_*(X); ) \\ &= \text{Hom}(S_*(X), C_{\text{DRpd}*}^{\bullet}()). \end{aligned}$$

[À ne pas confondre :  $S$  (anneau de base) et  $S^*$  (ensemble simplicial singulier)].

Mais on ne peut dire en général quelle est sa cohomologie (on a seulement  $H_{\text{DRpd}}(X; S, J, t) \longrightarrow H^{\bullet}(X, S)$ ), et en tous cas  $[?]$

<sup>103</sup> $[?]$  i.e.  $d(X^{[n]}) = X^{[n-1]}dx[?]$ .

<sup>104</sup>à valeurs dans les  $S$ -algèbres graduées différentielles  $S/J$ -augmentées à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la différentielle.

Alors soit  $k$  anneau commutative (associatif unitaire), et  $T$  une indéterminée, on prendra dorénavant

$$S = k\{T\}, \quad J = k\{T\}^+ = \text{Ker}(k\{T\} \xrightarrow{\cdot T}), \quad t = T.$$

Donc

$$\begin{cases} C_{\text{DRpd},[n]}^\bullet(S, J, t) \simeq \underbrace{k\{T, X_0, \dots, X_n\} / (\sum X_i - T)_{\text{pd}}}_{\simeq k\{X_0, \dots, X_n\}} \otimes_k \Lambda^\bullet k^{[n]} / k \\ S/J \simeq k \end{cases}$$

Soit

$$\Phi_{k*} = ([n] \mapsto k^{[n]}) \longleftarrow k_* = ([n] \mapsto k[?])$$

immersion diagonale

$$\Psi_{k*} = \Phi_{k*} / k_* = ([n] \mapsto k^{[n]} / \underbrace{k}_{\text{diag}}).$$

On a alors

$$C_{\text{DRpd}*}^{\bullet\bullet}(k) \stackrel{\text{def}}{=} C_{\text{DRpd}*}^\bullet(k\{T\}, k\{T\}^+, k) \simeq \Gamma_k^\bullet \Phi_{k*} \otimes_k \Lambda^\bullet \Psi_{k*}[?],$$

$$\boxed{C_{\text{DRpd}*}^{\bullet\bullet}(k) \simeq \Gamma_k^\bullet \Phi_{k*} \otimes_k \Lambda^\bullet \Psi_{k*}}.$$

**Structure.**  $k\{T\}$ -Algèbre différentielle *bigradué* (degré complexe  $[?]$  et degré extérieur, d'où degré total)<sup>105</sup> unitaire associative alternée (anticommutative et carrés des éléments de degré impair nuls), augmentation vers  $[?]$  à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, avec  $[?]$ .

Ces structures sont héritées  $[?]$  par les

$$\boxed{\begin{aligned} C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k) &\stackrel{\text{def}}{=} C_{\text{DRpd}}^\bullet(X_*, k\{T\}, k\{T\}^+, T) \\ &= \text{Hom}(X_*, C_{\text{DRpd}*}^{\bullet\bullet}(k)) \end{aligned}}$$

et dépendent de façon contravariant de  $X_*$  (covariant de  $k$ ).

$\Phi_{k*}$  est un  $k$ -Module semi-simpliciale homotope à 0, donc  $\Gamma_k^p(\Phi_{k*}) \otimes \Lambda^q \Psi_{k*}$  est homotope à  $\Gamma_k^p(0) \otimes \Lambda^q \Psi_{k*}$ , donc homotope à 0 si  $p \neq 0$ . Donc  $C_{\text{DRpd}*}^{p,q}(k)$  est

<sup>105</sup>Bigraduation venant de la *graduation* de  $S$ , en tant que  $[?]$  est hom. (ici de degré 2)  $[?]$ .

homotope à 0 (donc acyclique) si  $p = 0$  [plutôt si  $p \neq 0$ ]. En degré total donné  $n$ , on a

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_{\text{DRpd}*}^{n,0} & \longrightarrow & C_{\text{DRpd}*}^{n-1,1} & \longrightarrow & C_{\text{DRpd}*}^{n-2,2} \longrightarrow \dots & C_{\text{DRpd}*}^{1,n-1} & \longrightarrow & C_{\text{DRpd}*}^{0,n} \\
 & & \uparrow & & & & & & & \\
 & & k_* & & & & & & & 
 \end{array}$$

i.e. on trouve une résolution de longueur  $n$  de  $k_*$  par des  $k$ -modules semi-simpliciaux qui sont acycliques sauf le dernier - donc on peut la considérer comme un tronqué de degré  $n$  d'une résolution flasque de  $k_*$  - la cohomologie de ses sections sur un  $X_*$  est donc la cohomologie de  $X_*$  tronquée en degré  $n$  :

$$H_{\text{DRpd}}^{p,q}(X_*, k) = \begin{cases} H^q(X_*, k) & \text{si } q \leq p + q, \text{ i.e. } p \geq 0 \\ [?] \end{cases}$$

[?] structure [?] de  $k\{T\}$ -module de  $H_{\text{DRpd}}^{\bullet,q}(X_*, k)$  ? On voit que pour le *degré total* (égal au degré extérieur  $p$  plus  $q$  [plutôt degré extérieur  $q$  plus  $p$  ?]), on trouve  $H^0(X_*, k) \otimes_k k\{T\}$  tronqué en degré  $\geq q$ , donc

$$H_{\text{DRpd}}^{\bullet,q}(X_*, k) \simeq \tau_q(H^0(X_*, k) \otimes_k k\{T\}) \underbrace{[q]}_{\text{translation } [?] \text{ de degrés pas } -q} .$$

Si on réindexe le bidegré par le couple (degré total, degré extérieure)

$$H_{\text{DRpd}}^{'p,q}(X_*, k) = H_{\text{DRpd}}^{\overbrace{n-q}^p, q}(X_*, k)$$

(donc la condition de degré  $p, q \geq 0$  devient  $n \geq q \geq 0$ , l'opérateur différentielle est de bidegré  $(0, 1)$ , donc c'est un homomorphisme (*homogène*) de  $S$ -modules gradués), or trouve

$$H_{\text{DRpd}}^{'\bullet,q}(X_*, k) \simeq \tau_q(H^q(X_*, k) \otimes_k k\{T\}).$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les structures multiplicatives (et bien entendu fonctoriels an  $X_*, k, \dots$ ). Donc *a priori* on en récupère (via  $H_{\text{DRpd}}^{'\bullet,q}(X_*, k)$ ) les  $k$ -modules  $H^q(X_*, k)$  et leurs cup-accouplements [?] les  $k$ -modules gradués

$\tau_q(H^q(X_*, k) \otimes_k k\{T\})$ ). Ce qui donne un espoir que le complexe de De Rham à p.d de  $X_*$  à coefficients dans  $k = S/J$  disons  $[?]$  (comme dans le cas  $k = \mathbf{Q}$  qu'il contient) donne une information homotopique précise sur  $X_*$ , c'est l'observation qu'en fait, pour un  $k$ -module  $M$  quelconque, on récupère  $M$  à isomorphisme canonique près par la connaissance d'un quelconque des tronqués  $\tau_q(M \otimes_k S)$  (quelque grand que soit  $p \dots$ ), qu'on appelle le  $q$ -ième ombre de  $M$ , et de même tout accouplement  $M \otimes N \longrightarrow P$  est connu quand on connaît, pour  $q$  assez grand, l'accouplement correspondant  $\tau_q(M_S) \otimes \tau_q(N_S) \longrightarrow \tau_q(P_S)$ . Donc une  $k$ -algèbre graduée  $H^\bullet$  à degrés  $\geq 0$  est connu à isomorphisme canonique près quand on connaît la  $k$ -algèbre bigraduée dont les composantes de degré "extérieure"  $q$  sont les  $\tau_q(H^q \otimes_k S) \dots$  Cette "théorie des ombres" étant supposée acquise, on veut que la connaissance de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  (en tant que  $S$ -algèbre différentielle bigraduée) implique celle de l'algèbre graduée  $H^0(X_*, k)$  - et en raffinant un peu, on veut qu'on trouve même  $R\Gamma(X_*, k)$  comme étant  $[?]$

$$R\Gamma(X_*, k) \otimes^L R\Gamma(X_*, k) \longrightarrow R\Gamma(X_*, k).$$

### Remarques et Problèmes

- a) Si  $k$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre, de sorte que  $C_{\text{DRS}}^\bullet(X_*, k)$  est défini, on le reconstruit à partir de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  par la formule

$$C_{\text{DRS}}^\bullet(X_*, k) C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k) / (T - 1).$$

Plus généralement, *quelque soit*  $k$ , on a

$$C_{\text{DRS}}^\bullet(X_*, \underbrace{k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}}_{k_{\mathbf{Q}}}) \simeq C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k) / (T - 1).$$

(et plus généralement encore, si  $(S, J, t)$  comme au début

$$C_{\text{DRpd}}^\bullet(X_*; S, J, t) / (t - 1) \simeq C_{\text{DRS}}^\bullet(X_*, S_{\mathbf{Q}}) / (t - 1) \quad )$$

[plutôt  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, S, J, t) / (t - 1)$ ].

- b) Je suis convaincu que la structure à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation de

$$C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k) \longrightarrow H^0(X_*, k) = \text{Hom}(X_*, k_*)$$



est importante<sup>106</sup>. Il n'est peut-être pas ici [?] de se poser la question pour  $X_*$  simplement connexe, si la connaissance de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  [?] avec toutes ses structures (y compris celle des puissances divisées) n'implique pas la connaissance du type d'homotopie de  $X_*$  [?] plus précisément appelé *complexe de De Rham à puissances divisées virtuel sur  $k$* , une  $k$ -bialgèbre différentielle  $k$ -augmentée, associative, unitaire, alternée à différentielles de bigèbre  $(-1, +1)$  à bidegrés  $\geq 0$ , avec puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la différentielle ( $d(x^{[n]}) = x^{[n-1]}dx$ ), et telle que les  $H^{\bullet,q}(C^{\bullet\bullet})[-q]$  sont des  $q$ -ombres (auquel cas on récupère à partir de  $C^{\bullet\bullet}$  un élément de  $D(k)$  avec structure multiplicative associative unitaire commutative...), passe à une "catégorie dérivée" de ces complexes en inversant les flèches qui sont des quasi-isomorphismes, d'où par  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  un foncteur

$$\underbrace{(\text{Hot})}_{\text{types d'homotopie}} \longrightarrow \underbrace{(\text{DRpd})}_{\text{catégorie dérivée des complexes DRpd}},$$

et on peut se demander si sa restriction aux espaces connexes et simplement connexes avec des  $H^i(X, \mathbf{Z})$  de type fini (cas  $k = \mathbf{Z}$ ) induit une équivalence avec les complexes de De Rham à puissances divisées sur  $\mathbf{Z}$  tels que  $H^0(C^{\bullet\bullet}) \xleftarrow{\sim} k$ ,  $H^1(C^{\bullet\bullet})$  [?] les  $H^i(C^{\bullet\bullet})$  [?]

- c) Je n'ai pas réfléchi si on peut reconstruire les opérations cohomologiques (type Steenrod ou Whitney) dans la catégorie des  $X_*$  par la connaissance de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, -)$ , et n'ai que des résultats partiels négatifs qui montrent qu'en dehors [?] des automorphismes multiplicatifs de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(k)$ , on ne trouve rien d'intéressant.
- d) Il faudrait sans doute chercher [?] des modèles minimaux à la Sullivan, pour essayer entre autres d'exprimer les groupes d'homotopie de  $X_*$  en termes de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, \mathbf{Z})$  (cas où  $X_*$  simplement connexe avec condition de finitude...). Je n'ai rien fait dans cette direction. Je n'ai même pas développé une formule de Künneth pour  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet}$  d'un produit  $X_* \times Y_*$  - il y a des difficultés techniques dues au fait qu'on ne peut sans doute supposer  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_* \text{ ou } Y_*, k)$  [?]

---

<sup>106</sup> Avec [?] condition de finitude sur  $X_*$ , savoir les  $H_i(X_*)$  [?] de type fini.

- e) Le complexe de chaînes  $C_\bullet(X_*, k)$  permet de reconstruire tous les complexes de cochaînes  $C^\bullet(X_*, k')$  pour  $k'$  [une]  $k$ -algèbre variable, par

$$C^\bullet(X_*, k) \simeq \text{Hom}_Z^\bullet(C_\bullet(X_*, k), k)$$

[plutôt  $C^\bullet(X_*, k') \simeq \text{Hom}_k^\bullet(C_\bullet(X_*, k), k')$ ]. (L'objet le plus fin est donc  $C_\bullet(X_*, \mathbf{Z})$ , on a alors  $C_\bullet(X_*, k) \simeq C_\bullet(X_*, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} k$  [?]).

Il est possible de même de définir une cobigèbre différentielle  $C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, k)$   $k$ -coaugmenté à copuissances divisées telle que l'on ait, pour tout  $k$ -algèbre  $k'$

$$C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k') \simeq \text{Hom}_k(C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, k), k')$$

(compatible avec toutes les structures).

On aura d'ailleurs

$$C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, k') \simeq C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, k) \otimes_k k'.$$

L'objet le plus fin est  $C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, \mathbf{Z})$ . C'est lui qu'il conviendrait de considérer (au lieu de son "dual"  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, \mathbf{Z})$ ) si on veut aborder b) c) d) sans condition de finitude. Notons que (tout comme  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, \mathbf{Z})$ , pour  $X_*$  variable, transforme  $\varinjlim$  quelconques en  $\varprojlim$ )  $C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, \mathbf{Z})$  coaugmenté [?]  $\varinjlim$  quelconques ([?])

- f) <sup>107</sup> **Faisceautisation.** Il y a une définition évidente de complexes de De Rham à puissances divisées sur  $k$  si  $k$  est un Anneau commutatif dans un topos. On aimerait, p.ex. en comparant un tel complexe à un autre quasi-isomorphisme dont les composantes soient flasques (mais y en a-t-il toujours ?), définir des opérations [?]  $Rf_*$  dans des catégories dérivées convenables pour de tels complexes, quand  $f : X \longrightarrow Y$  est un morphisme de topos (supposé au besoin de dimension cohomologique finie...). Si  $k$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre, le même problème se rencontre d'ailleurs déjà pour les complexes de type De Rham-Sullivan (et le problème est ouvert - et posé par *Deligne* - quand  $X = (\text{Ens})^* = \text{topos des ensembles cosimpliciaux}$ ,  $Y = \text{topos ponctuel}$ ). Mais sauf erreur (si [mes souvenirs sont exacts]) il y a un topos qui marche pour les espaces topologiques paracompacts...

---

<sup>107</sup>Voir f) ci-dessus.

f) On peut associer à un espace topologique  $X$  ou un ensemble semi-simplicial  $X_*$  des invariants algébriques “linéaires” *plus fins* a priori que le  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}$  (et même que  $C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}$ , en dualisant...).

P.ex. on peut observer que  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(k) \xrightarrow{\sim} \Gamma^\bullet \Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet \Psi_{\bullet k}$  se déduit de  $D_*^{\bullet\bullet}(k) = \Gamma^\bullet \Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet \Phi_{\bullet k}$  (qui est une algèbre  $k$ -augmentée à puissances divisées qui est une *résolution de  $k$* ) et de  $T \in \Gamma(D_{*k}^{1,0})$  comme conoyau de la multiplication par  $dT$  (i.e. on divise par l’idéal engendré par  $dT$ ), ou encore en bidegré donné  $(p, q)$ ,

$$C_{*k}^{p,q} \simeq \text{Ker}(D_*^{p,q+1} \xrightarrow[\text{produit par } dT]{} D_*^{p,q+2}),$$

d’où

$$C_{\text{DRpd}}^{p,q}(X_*, k) \simeq \text{Ker}(D^{p,q+1}(X_*, k) \longrightarrow D^{p,q+2}(X_*, k)),$$

et on peut considérer les structures disons sur  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  comme déduites de certaines structures (à expliciter...) sur  $D_*^{\bullet\bullet}(X_*, k)$ . On peut aussi définir “La structure multiplicative à puissance divisées cohomologique du type d’homotopie  $X'_*$  en sens convenable, qui permet de reconstituer aussi bien  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  que  $D_k^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  (ou les complexes de De De Rham-Sullivan...[?]) complexe de De Rham à puissances divisées (ou sinon  $D^{\bullet\bullet}(X_*, \mathbb{Z})$ ) suffit déjà pour récupérer toute la structure multiplicative à puissances divisées cohomologique de  $X_*$  (sous réserve de conditions de finitude bien sûr). Dans le cas contraire, ce serait cette dernière qui serait le candidat algébrique “linéaire” naturel pour exprimer le type d’homotopie  $X_*$  (du moins si  $X_*$  [est] connexe et simplement connexe, et en passant à une catégorie dérivée convenable bien sûr).

# NOTATIONS SEMI-SIMPLICIAUX. CONSTRUCTIONS UNIVERSELLES 1975 ou 1976

---

$\Delta$  = catégorie des simplexes  $\Delta^n$  ( $n \geq 0$ ),  $\Delta^n = [0, n] \subseteq \mathbf{N}$  avec relation d'ordre total.

$$\Delta^\wedge = \mathbf{Ss} = \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta^\circ, \mathbf{Ens}) = \mathbf{Ens}_*.$$

Plus généralement, si  $A$  est une catégorie, on pose

$$A_* = \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta^\circ, A)$$

$$A^* = \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta, A),$$

donc

$$(A^\circ)^* \simeq (A_*)^\circ, \quad A^* \simeq ((A^\circ)_*)^\circ,$$

où l'exposant  $^\circ$  désigne le passage à la catégorie opposée.

Les objets de  $A_*$  (resp.  $A^*$ ) sont considérés comme des structures algébriques de type simple (sur une infinité d'objets de base) dans  $A$ , les 'objets semi-simpliciaux' resp. 'semi-cosimpliciaux'. On écrira  $\mathbf{Ens}_*$  quand on a en vue cet aspect, et  $\Delta^\wedge$  ou  $\mathbf{Ss}$  quand on a plutôt le point de vue 'objet d'un topos' ou 'faisceau sur un topos'<sup>108</sup>. Tous les développements qui suivent ont pour objet d'étudier ces objets (l'équivalent combinatoire des espaces topologiques) et leurs 'types d'homotopie',

---

<sup>108</sup>On veut garder  $[?]$  à l'aspect  $[?]$  la nature algébrique très particulier de ce topos, la notation  $\mathbf{Ss}$  quand on veut l'oublier, on profite de sa signification topologique.

via des invariants qu'on peut leur associer, qui en dépendent de façon covariante ou contravariante. Nous avons ici en vue une étude systématique, dans l'esprit de l'algèbre universelle, de ces invariants (qui sont donc des foncteurs  $\Delta^{\wedge} = \text{Ens}_*$ ), de leurs structures et des opérations qui peuvent être définies sur elles, permettant d'en déduire certaines complexes à partir d'autres plus simples.

Un objet de  $A_*$  sera généralement noté par un symbole de la forme  $K_*$ , où  $K_*$  désigne la famille des

[]

Néanmoins, alors que (dans le cas de  $A = \text{Ab}_*$  disons)  $\text{Ab}_{k*}$  et  $\text{Ab}_{k\bullet}$  est leur structure multiplicative - qui ne se correspond *pas* par DP et ND — celle de  $\text{Ab}_{k*}$  est plus simple à beaucoup d'égards, et s'introduit d'ailleurs de bien des façons par la suite de façon absolument impérieuse, alors que celle de  $\text{Ab}_{k\bullet}$  ne s'introduit pratiquement pas. De plus, pour les opérations tensorielles de type  $\bigwedge^i, \Gamma^i, \text{Sym}^i$ , elles manquent purement et simplement dans  $\text{Ab}_{k\bullet}$  (sauf de les [définir] par transport de structure via DP !) alors qu'elles sont évidentes sur  $\text{Ab}_{k*}$  ! Or ces structures également joueront un rôle essentiel par la suite.

## FAISCEAUTISATION DU TOPOS DE DE RHAM

---

**1.**

Soit  $X$  un topos, et

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{u} \Phi$$

une immersion de  $\mathbf{Z}$  dans un faisceau  $\Phi$ , tel que

# LA “LONGUE MARCHÉ” À TRAVERS LA THÉORIE DE GALOIS<sup>109</sup>

---

---

<sup>109</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/galois.pdf>

# STRUCTURES STRATIFIÉES

---

## 1. La situation la plus élémentaire

En un sens qui apparaîtra, sera la suivante.

[ ]

de groupoïdes fondamentaux [ ] est cocartésien - ou encore, si  $Y, X, X^*$  sont connexes, et [ ] (i.e. par définition, un revêtement universel de [ ]) [ ] un isomorphisme canonique de groupes fondamentaux [ ] où [ ] est isomorphe extérieurement à  $\pi_1(Y)$ .

Pour expliciter  $\pi_1(X)$  en termes de données “élémentaires”, dont  $\pi_1(Y)$  et  $\pi_1(X^*)$  [ ] encore à expliciter la structure de [ ], qui s’envoie dans l’un et dans l’autre, donnant [ ] [ ] qui exprime (8). C’est ici que l’hypothèse de *locale* [ ] a un [ ] (celle de lissité [ ] comme devant techniquement initiale, [ ] de notre heuristique...).

On doit se [ ], dans ce cas, pour démontrer que les [ ] homotopique de [ ] sont celles d’une *fibration localement triviale des fibres* [ ]: [ ] - et c’est [ ] qui devrait [ ] le contexte toposique (p. ex. celui des schémas avec le topos étale) de *définition* de la “locale trivialité” [ ] homotopique [ ]  $Y \hookrightarrow X$ . (Bien sûr, dans le contexte schématique, il faudra de plus travailler avec des types d’homotopie profini, et même sans doute “localiser” ces types d’homotopie en l’un des [ ] premières qui sont distinctes des caractéristique résiduelle qui interviennent, ou que en n’est que alors ce contexte [ ] des théorèmes qu’il faut, cf Artin-Mazur...)

On ont en particulière une suite exacte d’homotopie [ ]

Si on suppose par exemple que [ ]



allusion, en devrait  $\square$  exprimer alors le *type d'homotopie de  $X$*  (et non seulement son  $\pi_1$ ) en termes de diagrammes de groupoïdes (8), ou ce qui revient au même, des diagrammes de groupes (10).

En tous cas, il est clair (indépendamment de toutes hypothèses de nullité de  $\square$   $\pi_i$ , ou de  $\square$ ) comment reconstruire en termes du diagramme (8),  $\square$  faisceaux sur  $X$ ,  $\square$  tels que l'on ait

$$(16) \quad F|_{X^*} \quad \text{et} \quad F|_Y \quad \text{localisation triviaux}$$

Cette catégorie  $F$  est équivalent en effet à celle des systèmes

$$(17) \quad (E_{X^*}, E_{Y,X}, \varphi)$$

$E_{X^*}$  est un système locale sur  $\pi$ ,  $X^*$  (un recouvrement étale de  $X^*$ ),  $E_{Y,X}$  un système locale sur  $\square$  un homomorphisme de systèmes locaux sur  $\square$

$$(18) \quad \varphi : p^*(E_{Y,X}) \longrightarrow i^*(E_{X^*}).$$

En termes de diagrammes de groupes (10)

## 2. Stratification globale : $\square$ (sans tubes)

Pour simplifier, je vais en placer sur un espace topologique  $X$  - par le suite  $X \square$  un topos quelconque. Les constructions qui suivent, relatifs à une "stratification globale",  $\square$  de la façon habituelle - ce qui  $\square$  alors à imposer des conditions supplémentaires de connexité et de locale connexité, qui pour  $\square$ . De même  $\square$ .

Soit  $I$  un ensemble ordonné,

$$(X_i)_{i \in I} \quad X_i \subset X$$

une famille de sous-espaces de  $X$ . On suppose  $\square$  Posant  $\square$  on a un morphisme canonique

$$(3) \quad X_{\Delta_0} \longrightarrow X$$

et l'hypothèse a) signifie que ce morphisme est fini - i.e. propre sépare et à fibres finies. C'est aussi une *immersion locale*. On introduit une partie fermé  $\square$  On voit alors que les deux projections  $\square$  ont respectivement les propriétés suivantes :  $\square$  Par ailleurs

### 3. Stratification globale : introduction au tubes

On [] les notations précédentes.

Pour toute couple  $(i \leq j) \in I \times I$ , considérons

### 4. Topos canoniques associées à une stratification globale

On va montrer comment, à une situation stratifiée donnée, on peut en associer d'autres.

A) Image inverse générale.

Rappelons les axiomes utilisés jusqu'à présent : []

Notons que pour tout  $X'$  au dessus de  $X$ , la famille des [] satisfait alors aux mêmes conditions.

D'ailleurs le système [] des  $X_{\Delta_r}$  - comme image inverse le lui des  $X'_{\Delta_r}$ , défini par les  $X'_i$ , [] des isomorphismes []

**NB.** Nous appliquons ces [] sauf en cas où  $X'$  est un ouvert de  $X$ . C'est pour [] prendre de telles images inverses [], qu'il [] été commode de supposer les  $X_i$  ou les  $X_i^*$  non-vides, ou encore par  $I \mapsto X_i$  est un *plongement* d'une ordonnée  $I \hookrightarrow \mathfrak{P}(X)$ .

Lorsque  $X' \longrightarrow X$  est une immersion locale propre (mais pas si c'est une immersion ouverte !) alors [] les images inverses de parties [] de  $X$  comment à [] des voisinages tubulaires de une telles parties []. Notons d'ailleurs que pour  $i < j$ , [] (sans hypothèse d'ailleurs que  $X' \longrightarrow X$  sont une immersion locale) [] d'où, dans le cas d'une immersion locale propre, des isomorphismes [] et plus généralement [] tout qui à faire.

Ceci montre en particulière que la démonstration du théorème de recollement, [] théorème énoncé p.22, est une [] *locale* sur  $X$ <sup>110</sup> - ce qui prenant par exemple de nos [] au cas où  $I$  est *fini*.

B) Cas d'un  $X_{I'}$ .

Soit  $I'$  une partie de  $I$  telle que

$$(7) \quad i \leq j \in I' \Rightarrow i \in I'$$

---

<sup>110</sup>non, ce n'est pas absolument clair []

et tout

$$(8) \quad X_{I'} = \bigcup_{i \in I'} X_i \quad (\text{partie fermée de } X)$$

On a bien sûr  $[\ ]$  (et aussi  $[\ ]$ ) à (11 d). Dans ces formules,  $I'$ ,  $I''$ , les  $I'_\alpha$  sont des parties de  $I$  satisfaisant (7) ( $[\ ]$  cribles de  $I$ ).

Si dans A) on prend  $X' = X$ , il est plus commode de travailler avec la stratification de  $X'$  définie par les  $X_i$  avec  $i \in I'$  - il est clair que les conditions (II) relatives à  $X' = X_{I'}$  sont satisfaites. Les “parties cribles” de  $X'$  pour cette stratification, ou pour celle induit au sens général des espaces au dessus de  $X$ , sont les mêmes -  $[\ ]$  sur  $X' = X_{I'}$ , des parties-cribles de l'espace stratifié  $X$ .

Ici, les espaces élémentaires pour la stratification de type  $I'$  de  $X' = X_{I'}$ , sont les espaces  $[\ ]$

$[\ ]$  pour une instant à  $X$ , et considérons l'un  $I_0$  des  $i \in I$  tel que  $X_i = \emptyset$ . C'est une crible, et on a  $X_i^* = \emptyset$ ,  $[\ ]$  si  $i \in I_0$ .  $[\ ]$  on voit que les diagrammes de type  $\tilde{I}$  défini par l'espace stratifié  $X$   $[\ ]$  en remplaçant  $I$  par  $I \setminus I_0$ , ou plus guère par  $I \setminus I'_0$ , où  $I'_0 \subset I'$  est une crible, ce qui donne lieu à un diagramme  $[\ ]$  qu'est *contenu* dans  $\tilde{I}$  (cela est vrai pour *toute* crible de  $I$ ).

Si par exemple on a deux cribles

$$(14) \quad I'' \subset I' \subset I$$

d'où

$$(15)$$

$[\ ]$  regarder plutôt la stratification de type  $I' \setminus I''$ , définie par les

$$(16)$$

dont les topos élémentaires sont dans les  $X_{i'}^*$  ( $i' \in I' \setminus I''$ ) et des  $[\ ]$  couples  $(i', j')$  avec  $i' \in I' \setminus I''$   $[\ ]$  on a

$$(17)$$

*mais il n'est pas clair en générale que ces soient mêmes semblant équivalences d'homotopie...*

Donc il [] il s'agit de [] les constructions sur une  $X_{I'}$ , et sur un [].

Je vais en [] par  $C$  sauf de regarder plus particulièrement ce qui se [] en l'induisant ainsi sur un ouvert  $U_{I', I''}$ .

C) Les [].

On suppose donnée des cribles

(18)

d'où

(19)

**Brief an G. Faltings, 27.6.1983**

27.6.1983

Lieber Herr Faltings,

Vielen Dank für ihre rasche Antwort und Übersendung der Separata!

## Letter to G. Faltings, 27.6.1983

27.6.1983

Dear Mr. Faltings,

Many thanks for your quick answer and for sending me your reprints! Your comments on the so-called “Theory of Motives” are of the usual kind, and for a large part can be traced to a tradition which is deeply rooted in mathematics. Namely that research (possibly long and exacting) and attention is devoted only to mathematical situations and relations for which one entertains not merely the hope of coming to a provisional, possibly in part conjectural understanding of a hitherto mysterious region – as it has indeed been and should be the case in the natural sciences – but also at the same time the prospect of a possibility of permanently supporting the newly gained insights by means of conclusive arguments. This attitude now appears to me as an extraordinarily strong psychological obstacle to the development of the visionary power in mathematics, and therefore also to the progress of mathematical insight in the usual sense, namely the insight which is sufficiently penetrating or comprehending to finally lead to a “proof”. What my experience of mathematical work has taught me again and again, is that the proof always springs from the insight, and not the other way round – and that the insight itself has its source, first and foremost, in a delicate and obstinate feeling of the relevant entities and concepts and their mutual relations. The guiding thread is the inner coherence of the image which gradually emerges from the mist, as well as its consonance with what is known or foreshadowed from other sources – and it guides all the more surely as the “exigence” of coherence is stronger and more delicate.

To return to Motives, there exists to my knowledge no “theory” of motives, for the simple reason that nobody has taken the trouble to work out such a theory. There is an impressive wealth of available material both of known facts and anticipated connections – incomparably more, it seems to me, than ever presented itself for working out a physical theory! There exists at this time a kind of “yoga des motifs”, which is familiar to a handful of initiates, and in some situations provides a firm support for guessing precise relations, which can then sometimes be actu-

ally proved in one way or another (somewhat as, in your last work, the statement on the Galois action on the Tate module of abelian varieties). It has the status, it seems to me, of some sort of secret science – Deligne seems to me to be the person who is most fluent in it. His first [published] work, about the degeneration of the Leray spectral sequence for a smooth proper map between algebraic varieties over  $\mathbf{C}$ , sprang from a simple reflection on “weights” of cohomology groups, which at that time was purely heuristic, but now (since the proof of the Weil conjectures) can be realised over an arbitrary base scheme. It is also clear to me that Deligne’s generalisation of Hodge theory finds for a large part its source in the unwritten “Yoga” of motives – namely in the effort of establishing, in the framework of transcendent Hodge structures, certain “facts” from this Yoga, in particular the existence of a filtration of the cohomology by “weights”, and also the semisimplicity of certain actions of fundamental groups.

Now, some words about the “Yoga” of anabelian geometry. It has to do with “absolute” alg. geometry, that is over (arbitrary) ground fields which are finitely generated over the prime fields. A general fundamental idea is that for certain, so-called “anabelian”, schemes  $X$  (of finite type) over  $K$ , the geometry of  $X$  is completely determined by the (profinite) fundamental group  $\pi_1(X, \xi)$  (where  $\xi$  is a “geometric point” of  $X$ , with value in a prescribed algebraic closure  $\overline{K}$  of  $K$ ), together with the extra structure given by the homomorphism:

$$(1) \quad \pi_1(X, \xi) \longrightarrow \pi_1(K, \xi) = \text{Gal}(\overline{K}/K).$$

The kernel of this homomorphism is the “geometric fundamental group”

$$(2) \quad \pi_1(\overline{X}, \xi) \quad (\overline{X} = X \otimes_K \overline{K}),$$

which is also the profinite compactification of the transcendent fundamental group, when  $K$  is given as a subfield of the field  $\mathbf{C}$  of the complex numbers. The image of (1) is an open subgroup of the profinite Galois group, which is of index 1 exactly when  $\overline{X}$  is connected.

The first question is to determine which schemes  $X$  can be regarded as “anabelian”. On this matter, I will in any case restrict myself to the case of non-singular  $X$ . And I have obtained a completely clear picture only when  $\dim X = 1$ .

In any case, being anabelian is a purely geometric property, that is, one which depends only on  $X$ , defined over the algebraic closure  $\overline{K}$  (or the corresponding scheme over an arbitrary algebraically closed extension of  $\overline{K}$ , such as  $\mathbb{C}$ ). Moreover,  $X$  should be anabelian if and only if its connected components are. Finally (in the one dimensional case), a (non-singular connected) curve over  $\overline{K}$  is anabelian when its Euler-Poincaré characteristic is  $< 0$ , in other words, when its fundamental group is not abelian; this latter formulation is valid at least in the characteristic zero case, or in the case of a proper (“compact”) curve – otherwise, one should consider the “prime-to- $p$ ” fundamental group. Other equivalent formulations: the group scheme of the automorphisms should be of dimension zero, or still the automorphism group should be finite. For a curve of type  $(g, \nu)$ , where  $g$  is the genus, and  $\nu$  the number of “holes” or “points at infinity”, then the anabelian curves are exactly those whose type is not one of

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (0,2) \quad \text{and} \quad (1,0)$$

in other words

$$2g + \nu > 2 \quad (\text{i.e. } -\chi = 2g - 2 + \nu > 0)$$

When the ground field is  $\mathbb{C}$ , the anabelian curves are exactly those whose (transcendent) universal cover is “hyperbolic”, namely isomorphic to the Poincaré upper half plane – that is, exactly those which are “hyperbolic” in the sense of Thurston.

In any case, I regard a variety as “anabelian” (I could say “elementary anabelian”), when it can be constructed by successive smooth fibrations from anabelian curves. Consequently (following a remark of M. Artin), any point of a smooth variety  $X/K$  has a fundamental system of (affine) anabelian neighbourhoods.

Finally, my attention has been lately more and more strongly attracted by the moduli varieties (or better modular *multiplicities*)  $M_{g,\nu}$  of algebraic curves. I am rather convinced that these also may be approached as “anabelian”, namely that their relation with the fundamental group is just as tight as in the case of anabelian curves. I would assume that the same should hold for the multiplicities of moduli of polarized abelian varieties.

A large part of my reflections of two years ago were restricted to the case of char. zero, an assumption which, as a precaution, I will now make. As I have not



occupied myself with this complex of questions for more than a year, I will rely on my memory, which at least is more easily accessible than a pile of notes – I hope I will not weave too many errors into what follows! A point of departure – among others – was the known fact that for varieties  $X, Y$  over an algebraically closed field  $K$ , when  $Y$  can be embedded into a [quasi-]abelian variety  $A$ , a map  $X \longrightarrow Y$  is determined, up to a translation of  $A$ , by the corresponding map on  $H^1$  ( $\ell$ -adic). From this, it follows in many situations (as when  $Y$  is “elementary anabelian”), that for a dominant morphism  $f$  (i.e.  $f(X)$  dense in  $Y$ ),  $f$  is known exactly when  $H^1(f)$  is. Yet the case of a constant map cannot obviously be included. But precisely the case when  $X$  is reduced to a point is of particular interest, if one is aiming at a “characterization” of the points of  $Y$ .

Going now to the case of a field  $K$  of finite type, and replacing  $H^1$  (namely the “abelianised” fundamental group) with the full fundamental group, one obtains, in the case of an “elementary anabelian”  $Y$ , that  $f$  is known when  $\pi_1(f)$  is known “up to inner automorphism”. If I understand correctly, one may work here with the quotients of the fundamental group which are obtained by replacing (2) with the corresponding abelianised group  $H^1(\bar{X}, \hat{\mathbf{Z}})$ , instead of with the full fundamental group. The proof follows rather easily from the Mordell-Weil theorem stating that the group  $A(K)$  is a finitely generated  $\mathbf{Z}$ -module, where  $A$  is the “jacobienne généralisée” of  $Y$ , corresponding to the “universal” embedding of  $Y$  into a torus under a quasi-abelian variety. Here the crux of the matter is the fact that a point of  $A$  over  $K$ , i.e. a “section” of  $A$  over  $K$ , is completely determined by the corresponding splitting of the exact sequence

$$(3) \quad 1 \longrightarrow H_1(\bar{A}) \longrightarrow \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(K) \longrightarrow 1$$

(up to inner automorphism); in other words by the corresponding cohomology class in

$$H^1(K, \pi_1(\bar{A})),$$

where  $\pi_1(A)$  can be replaced by the  $\ell$ -adic component, namely the Tate module  $T_\ell(\bar{A})$ .

From this result, the following easily follows, which rather amazed me two and a half years ago: let  $K$  and  $L$  be two fields of finite type (called “absolute fields”

for short), then a homomorphism is completely determined when one knows the corresponding map

$$(4) \quad \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(L)$$

of the corresponding “outer fundamental groups” (namely when this map is known up to inner automorphism). This strongly recalls the topological intuition of  $K(\pi, 1)$  spaces and their fundamental groups – namely the homotopy classes of the maps between the spaces are in one-to-one correspondence with the maps between the outer groups. However, in the framework of absolute alg. geometry (namely over “absolute” fields), the homotopy class of a map already determines it. The reason for this seems to me to lie in the extraordinary *rigidity* of the full fundamental group, which in turn springs from the fact that the (outer) action of the “arithmetic part” of this group, namely  $\pi_1(K) = \text{Gal}(K/L)$ , is extraordinarily strong (which is also reflected in particular in the Weil-Deligne statements).

The last statement (“The reason for this...”) came quickly into the type-writer – I now remember that for the above statement on *field* homomorphisms, it is in no way necessary that they be “absolute” – it is enough that they should be of finite type over a common ground field  $k$ , as long as one restricts oneself to  $k$ -homomorphisms. Besides, it is obviously enough to restrict attention to the case when  $k$  is algebraically closed. On the other hand, the aforementioned “rigidity” plays a decisive role when we turn to the problem of characterizing those maps (4) which correspond to a homomorphism  $K \longrightarrow L$ . In this perspective, it is easy to conjecture the following: when the ground field  $k$  is “absolute”, then *the* “geometric” outer homomorphisms are exactly those which commute with the “augmentation homomorphism” into  $\pi_1(K)$ . [see the correction in the PS: the image must be of finite index] Concerning this statement, one can obviously restrict oneself to the case when  $k$  is the prime field, i.e.  $\mathbf{Q}$  (in char. zero). The “Grundobjekt” of anabelian alg. geometry in char. zero, for which the prime field is  $\mathbf{Q}$ , is therefore the group

$$(5) \quad \Gamma = \pi_1(\mathbf{Q}) = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}),$$

where  $\overline{\mathbf{Q}}$  stands for the algebraic closure of  $\mathbf{Q}$  in  $\mathbf{C}$ .

The above conjecture may be regarded as the main conjecture of “birational” anabelian alg. geometry – it asserts that the category of “absolute birational alg. varieties” in char. zero can be embedded into the category of  $\Gamma$ -augmented profinite groups. There remains the further task of obtaining a (“purely geometric”) description of the group  $\Gamma$ , and also of understanding *which*  $\Gamma$ -augmented profinite groups are isomorphic to some  $\pi_1(K)$ . I will not go into these questions for now, but will rather formulate a related and considerably sharper conjecture for anabelian curves, from which the above follows. Indeed I see two apparently different but equivalent formulations:

- 1) Let  $X, Y$  be two (connected, assume once and for all) anabelian curves over the absolute field of char. zero, and consider the map

$$(6) \quad \text{Hom}_K(X, Y) \longrightarrow_{\pi_1(K)} (\pi_1(X), \pi_1(Y)),$$

where  $\text{Hom}_K$  denotes the set of outer homomorphisms of the profinite groups, and the index  $\pi_1(K)$  means the compatibility with augmentation into  $\pi_1(K)$ . From the above, one knows that this map is injective. I conjecture that it is bijective [see the correction in the P.S.]

- 2) This second form can be seen as a reformulation of 1) in the case of a constant map from  $X$  into  $Y$ . Let  $\Gamma(X/K)$  be the set of all  $K$ -valued points (that is “sections”) of  $X$  over  $K$ ; one considers the map

$$(7) \quad \Gamma(X/K) \longrightarrow_{\pi_1(K)} (\pi_1(K), \pi_1(X)),$$

where the second set is thus the set of all the “splittings” of the group extension (3) (where  $A$  is replaced by  $X \sim \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(K)$  is actually surjective, at least if  $X$  has a  $K$ -valued point, so that  $X$  is also “geometrically connected”), or better the set of conjugacy classes of such splittings under the action of the group  $\pi_1(X)$ . It is known that (7) is injective, and the main conjecture asserts that it is bijective [see the correction below].

Formulation 1) follows from 2), with  $K$  replaced by the function field of  $X$ . Moreover, it is indifferent whether  $X$  is anabelian or not and, if I am not mistaken, assertion 1) follows even for arbitrary non-singular  $X$  (without the assumption dim

$X = 1$ ). Concerning  $Y$ , it follows from the conjecture that assertion 1) remains true, as far as  $Y$  is “elementary anabelian” [see the correction in the PS], and correspondingly of course for assertion 2). This in principle now gives the possibility, by applying Artin’s remark, to obtain a complete description of the category of schemes of finite type over  $K$  “en termes de”  $\Gamma(K)$  and systems of profinite groups. Here again I have typed something a little too quickly, as indeed the main conjecture should first be justified and completed with an assertion about which (up to isomorphism) complete  $\Gamma(K)$ -augmented profinite groups arise from anabelian curves over  $K$ . Concerning only an assertion of “pleine fidélité” as in formulations 1) and 2) above, it should be possible to deduce the following, without too much difficulty, from these assertions, or even already (if I am not mistaken) from the above considerably weaker birational variant. Namely, let  $X$  and  $Y$  be two schemes which are “essentially of finite type over  $\mathbf{Q}$ ”, e.g. each one is of finite type over an absolute field of char. zero. (remaining undetermined).  $X$  and  $Y$  need to be neither non-singular nor connected, let alone “normal” or the like – but they must be assumed to be reduced. I consider the étale topoi  $X_{\text{ét}}$  and  $Y_{\text{ét}}$ , and the map

$$(8) \quad \text{Hom}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{top}}(X_{\text{ét}}, Y_{\text{ét}}),$$

where  $\text{Hom}_{\text{top}}$  denotes the (set of) homomorphisms of the topoi  $X_{\text{ét}}$  in  $Y_{\text{ét}}$ , and means that one passes to the (set of) isomorphism classes. (It should be noted moreover that the category  $\underline{\text{Hom}}_{\text{top}}(X_{\text{ét}}, Y_{\text{ét}})$  is *rigid*, namely that there can be only one isomorphism between two homomorphisms  $X_{\text{ét}} \longrightarrow Y_{\text{ét}}$ . When  $X$  and  $Y$  are multiplicities and not schemes, the assertion below should be replaced with a correspondingly finer one, namely one should state an *equivalence of categories* of  $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$  with  $\underline{\text{Hom}}_{\text{top}}(X_{\text{ét}}, Y_{\text{ét}})$ .) It is essential here that  $X_{\text{ét}}$  and  $Y_{\text{ét}}$  are considered simply as topological spaces, that is without their structure sheaves, whereas the left-hand side of (8) can be interpreted as  $\text{Hom}_{\text{top.ann.}}(X_{\text{ét}}, Y_{\text{ét}})$ . Let us first notice that from the already “known” facts, it should follow without difficulty that (8) is injective. In fact I now realize that in the description of the right-hand side of (8), I forgot an important element of the structure, namely that  $X_{\text{ét}}$  and  $Y_{\text{ét}}$  must be considered as topoi *over the absolute base*  $\mathbf{Q}_{\text{ét}}$ , which is completely described by the profinite group  $\Gamma = \pi_1(K)$  (5). So  $\text{Hom}_{\text{top}}$  should be read  $\text{Hom}_{\text{top}}/\mathbf{Q}_{\text{ét}}$ .

With this correction, we can now state the tantalizing conjecture that (8) should be *bijective*. This may not be [altogether] correct for *the* reason that there can exist radicial morphisms  $Y \longrightarrow X$  (so-called “universal homomorphisms”), which produce a topological equivalence  $Y_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} X_{\text{ét}}$ , without being an isomorphisms, so that there does not exist an inverse map  $X \longrightarrow Y$ , whereas it does exist for the étale topoi. If one now assumes that  $X$  is *normal*, then I conjecture that (8) is bijective. In the general case, it should be true that for any  $\varphi$  on the right-hand side, one can build a diagram

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ g \downarrow & \searrow f & \\ X & & Y \end{array}$$

(where  $g$  is a “universal homomorphism”), from which  $\varphi$  arises in the obvious way. I even conjecture that the same assertion is still valid without the char. zero assertion, that is when  $\mathbf{Q}$  is replaced by  $\mathbf{Z}$  – which is connected with the fact that the “birational” main conjecture must be valid in arbitrary characteristic, as long as we replace the “absolute” fields with their “perfect closures”  $K^{p^\infty}$ , which indeed have the same  $\pi_1$ .

I am afraid I have been led rather far afield by this digression about arbitrary schemes of finite type and their étale topoi – you may be more interested by a third formulation of the main conjecture, which sharpens it a little and has a peculiarly “geometric” ring. It is also the formulation I told Deligne about some two years ago, and of which he told me that it would imply Mordell’s conjecture. Again let  $X$  be an anabelian geometrically connected curve over the absolute field  $K$  of char. zero,  $\tilde{X}$  its universal cover, considered as a scheme (but not of finite type) over  $\bar{K}$ , namely as the universal cover of the “geometric” curve  $\bar{X}$ . It stands here as a kind of algebraic analogue for the transcendental construction, in which the universal cover is isomorphic to the Poincaré upper half-plane. I also consider the completion  $X^\wedge$  of  $X$  (which is thus a projective curve, not necessarily anabelian, as  $X$  can be of genus 0 or 1), together with its normalisation  $\tilde{X}^\wedge$  with respect to  $\tilde{X}$ , which represents a kind of compactification of  $\tilde{X}$ . (If you prefer, you can assume from the start that  $X$  is proper, so that  $X = X^\wedge$  and  $\tilde{X} = \tilde{X}^\wedge$ .) The group  $\pi_1(X)$  can be regarded as the group of the  $X$ -automorphisms of  $\tilde{X}$ , and it acts also on the

“compactification”  $\tilde{X}^\wedge$ . This action commutes with the action on  $\bar{K}$  via  $\pi_1(K)$ . I am now interested in the corresponding action

$$\text{Action of } \pi_1(X) \text{ on } \tilde{X}^\wedge(\bar{K}),$$

(the [set of]  $K$ -valued points, or what comes to the same thing, the points of  $X^\wedge$  distinct from the generic point), and in particular, for a given section of (3)

$$\pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(X),$$

I consider the corresponding action of the Galois group  $\pi_1(K)$ . The conjecture is now that *the latter action has (exactly) one fixed point*.

That it can have at most one fixed point follows from the injectivity in (7), or in any case can be proved along the same lines, using the Mordell-Weil theorem. What remains unproved is the *existence* of the fixed point, which is more or less equivalent to the surjectivity of (7). It now occurs to me that the formulation of the main conjecture via (7), which I gave a while ago, is correct only in the case where  $X$  is proper – and in that case, it is in effect equivalent to the third (just given) formulation. In the contrary case where  $X$  is not proper, so has “points infinitely far away”, each of these points clearly furnishes a considerable packet of classes of sections (which has the power of the continuum), which *cannot* be obtained via points lying at a finite distance. These correspond to the case of a fixed point in  $\tilde{X}^\wedge$  which does not lie in  $\tilde{X}$ . The uniqueness of the fixed point means among other things, besides the injectivity of (7), that the “packets” which correspond to different points at infinity have empty intersection; and thus any class of sections which does not come from a finite point can be assigned to a uniquely defined point at infinity.

The third formulation of the main conjecture was stimulated by certain transcendental reflections on the action of finite groups on complex algebraic curves and their (transcendentally defined) universal covers, which have played a decisive role in my reflections (during the first half of 1981, that is some two years ago) on the action of  $\Gamma$  on certain profinite anabelian fundamental groups (in particular that of  $\mathbb{P}^1(0, 1, \infty)$ ). (This role was mainly that of a guiding thread into a previously completely unknown region, as the corresponding assertions in char  $p > 0$

remained unproved, and still do today.) To come back to the action of the Galois groups as  $\pi_1(K)$ , these appear in several respects as analogous to the action of finite groups, something which for instance is expressed in the above conjecture in a particularly striking and precise way.

I took up the anabelian reflections again between December 81 and April 82, that time with a different emphasis – namely in an effort toward understanding the many-faceted structure of the [Teichmüller] fundamental groups  $T_{g,v}$  (or better, the fundamental groupoids) of the multiplicities of moduli  $\overline{M}_{g,v}$ , and the action of  $\Gamma$  on their profinite completions. (I would like to return to this investigation next fall, if I manage to extricate myself this summer from the writing up of quite unrelated reflections on the foundations of cohomological resp. homotopical algebra, which has occupied me for four months already.) I appeal to your indulgence for the somewhat chaotic presentation of a circle of ideas which intensively held my attention for six months, but with which I have had for the past two years only very fleeting contacts, if any. If these ideas were to interest you, and if you happened at some point to be in the south of France, it would be a pleasure for me to meet with you and to go into more details of these or other aspects of the “anabelian Yoga”. It would also surely be possible to invite you to Montpellier University for some period of time at your convenience; only I am afraid that under the present circumstances, the procedure might be a little long, as the university itself does not at present have funds for such invitations, so that the invitation would have to be decided resp. approved in Paris – which may well mean that the corresponding proposal would have to be made roughly one year in advance.

On this cheering note, I will put an end to this letter, which has somehow grown out of all proportion, and just wish you very pleasant holidays!

Best regards

Your Alexander Grothendieck

PS Upon rereading this letter, I realize that, like the second formulation of the main conjecture, also the generalisation to “elementary anabelian” varieties must be corrected, sorry! Besides I now see that the first formulation must be corrected

in the same way – namely in the case where  $Y$  is not proper, it is necessary to restrict oneself, on the left-hand side of (6), to non-constant homomorphisms, and on the right-hand side to homomorphisms  $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ , whose images are of finite index (i.e. open). In the case where  $Y$  is replaced by an elementary anabelian variety, the bijectivity of (6) is valid, as long as one restricts oneself to dominant homomorphisms on the left-hand side, keeping the same restriction (finite index image) on the right-hand side. The “birational” formulation should be corrected analogously – namely one must restrict oneself to homomorphisms (4) with finite index image.

Returning now to the map (7) in the case of an anabelian curve, one can specify explicitly which classes of sections on the right-hand side do not correspond to a “finite” point, thus do not come from an element on the left-hand side; and if I remember correctly, such a simple characterization of the image of (7) can be extended to the more general situation of an “elementary anabelian”  $X$ . As far as I now remember, this characterization (which is of course just as conjectural, and indeed in both directions, “necessary” and “sufficient”) goes as follows. Let

$$\pi_1(K)^\circ = \text{Kernel of } \pi_1(K) \longrightarrow \hat{\mathbf{Z}}^* \text{ (the cyclotomic character).}$$

Given a section  $\pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(X)$ ,  $\pi_1(K)$  and therefore also  $\pi_1(K)^\circ$  operates on  $\pi_1(X)$ , the geometric fundamental group. The condition is now that the subgroup fixed under this action be reduced to 1!



## NOTES ANABÉLIENNES

---

### I. Résultats de fidélité

À tout corps  $K$ , associons son topos étale  $B_K$ , qui est un topos (profini) galoisien. Le groupoïde des points de  $B_K$  est noté  $\Pi_K$ , il est anti-équivalent canoniquement à la catégorie des clôtures algébriques séparables de  $K$ . Si  $\bar{K}$  est une telle clôture, son groupe des  $K$ -automorphismes  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$  ou  $E_{\bar{K}/K}$  s'identifie au groupe des automorphismes des points de  $B_K$  associé à  $\bar{K}/K$  (il vaut peut-être mieux de dire à l'opposé de ce groupe - la variance des clôtures algébriques de  $K$  est comme celle des foncteurs fibres, à l'opposée de celles des points ...) Bien entendue,  $B_K$  se reconstitue à partir de  $\Pi_K$ , comme le topos des systèmes locaux (continues) sur  $\Pi_K$  - et en termes de  $E_{\bar{K}/K}$ , comme le topos des ensembles discrets à actions continues de  $E_{\bar{K}/K}$ .

Pour un homomorphisme de corps  $K \longrightarrow K'$ , i.e. un homomorphisme de schémas  $\text{Spec } K' \longrightarrow \text{Spec } K$ , on a un morphisme de topos correspondant

$$(1) \quad B_{K'} \longrightarrow B_K$$

associé à un homomorphisme de groupoïdes fondamentaux

$$(2) \quad \Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K.$$

Ceci [s'explique] en disant qu'un objet  $[] \Pi_{K'}$  (i.e. point de  $B_{K'}$ , ou revêtement universel de  $B_{K'}$ , ou clôture séparable  $\bar{K}'$  de  $K'$ ) en définit un des  $\Pi_K$  (ainsi, on

prend  $\bar{K}$  = clôture algébrique séparable de  $K'$  dans  $\bar{K}'$ ) et pour deux points correspondants, on a un homomorphisme de groupes fondamentaux correspondants, qui s'interprète par exemple comme

$$(3) \quad E_{\bar{K}'/K'} \longrightarrow E_{\bar{K}/K}$$

et qui peuvent de reconstitue l'homomorphisme de topos comme une “restriction des scalaires”.

L'image de (3) est le sous-groupe fermé de  $E_{\bar{K}/K}$  qui correspond à la sous-extension  $K_1$  de  $\bar{K}/K$ , clôture algébrique séparable de  $K$  dans  $K'$ , i.e.  $K_1 = \bar{K} \cap K'$ .

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{K} & \longrightarrow & \bar{K}' \end{array}$$

Quand  $K'$  est une extension de type fini de  $K$ ,  $K_1$  est une extension finie de  $K$ , et on en conclut que l'image de (3) est alors un sous-groupe d'indice fini, égale à  $E_{\bar{K},K}$  si et seule si  $K_1 = K$  i.e.  $K$  est séparablement algébrique clos dans  $K'$ . D'ailleurs, on montre sans mal que (si  $K$  est extension de type fini) l'homomorphisme (3) est injectif si et seule si  $K'$  est une extension algébrique de  $K$ . Donc il est bijectif si et seule si  $K'$  est une extension [radicielle] de  $K$ . Dans le suite nous nous bornons (précisément) aux corps de caractéristique 0, et la condition précédente signifie alors que  $K \longrightarrow K'$  est un *isomorphisme*.

Ainsi, le foncteur  $K \longrightarrow B_K$  ou  $K \longrightarrow \Pi_K$ , ou  $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K}/K}$ , est *conservatif* quand on se limite comme morphismes de corps  $K \longrightarrow K'$  (de caractéristique 0) à ceux que fait de  $K'$  une extension de type fini de  $K$ .

Par exemple il suffit de se limiter aux extensions de type fini des corps fermées  $\mathbf{Q}$  - on trouve un foncteur conservatif de la catégorie de ces corps dans celle de groupoïdes (ou de topos), au sens à un morphisme de corps qui donne une équivalence de groupoïdes (ou de topos) est un *isomorphisme*<sup>111</sup>.

Quand on prend des corps quelconques, le 2-foncteur  $K \longrightarrow B_K$  ou  $K \longrightarrow \Pi_K$  ou  $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K}/K}$  est cependant loin d'être fidèle. Ainsi, si  $K$  est séparablement clos,  $B_K$  est le “topos ponctuel”,  $\Pi_K$  le groupoïde ponctuel,  $E_{\bar{K}/K} \simeq 1$  - il est donc

---

<sup>111</sup>au cas []

que les morphismes entre corps séparablement clos ne sont pas décrits par les morphismes entre leurs topes étales, ou groupoïdes fondamentaux! Pour cette raison, il y a lieu d'associer à un corps  $K$  un objet plus fin que  $B_K$  ou  $\Pi_K$ , à savoir le système projectif des  $B_{K_i}$ , ou des  $\Pi_{K_i}$ , pour  $K_i$  sous-corps de  $K$  de type fini sur le corps  $[\ ]$ , et à un système  $(K, \bar{K})$  le système projectif des  $E_{\bar{K}_i/K_i}$ , où  $\bar{K}_i$  est le clôture algébrique séparable de  $K_i$  dans  $\bar{K}$ . On []

$$(4) \quad \begin{cases} \Pi_K \simeq \varprojlim \Pi_{K_i} \\ B_K \simeq \varprojlim B_{K_i} \\ E_{\bar{K}/K} \simeq \varprojlim E_{\bar{K}_i/K_i} \end{cases}$$

i.e. on reconstitue les objets  $B_K$ ,  $\Pi_K$ ,  $E_{\bar{K},K}$  à partir des systèmes projectifs correspondant - mais l'inverse n'est pas vrai. En fait, comme le foncteur

$$\text{Ind}(\text{Corps type fini}) \longrightarrow \text{corps}$$

de la catégorie des systèmes inductifs de corps de type fini, vers celle des corps, est une équivalence de catégories (pour des raisons triviales), il s'ensuit que les foncteurs  $K \longrightarrow B_K$ , ou  $K \longrightarrow \Pi_K$ , ou  $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K},K}$ , étant des corps vers les propriétés idoines, avoir [] les propriétés de fidélité des foncteurs  $K \longrightarrow B_K$ , ou  $K \longrightarrow \Pi_K$ , ou  $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K},K}$  [] aux corps absolument de type fini, auxquels nous allons pour la suite nous borner, la plupart des temps. Mais il sera nécessaire au cours de travail, de donner une description purement algébrique, par exemple, de pro-groupes finis associé par exemple à (plus précisément, à  $(C, C)$  !).

Le rôle dominant sous joué par le corps premier de caractéristique 0,  $\mathbf{Q}$  donc pour  $B_{\mathbf{Q}}$  et  $\Pi_{\mathbf{Q}}$ , qui a un objet canonique, noté  $\bar{\mathbf{Q}}_0$  - la clôture algébrique de  $\mathbf{Q}$  dans  $\bar{\mathbf{Q}}$ . On posera<sup>112</sup>

$$(5) \quad G_{\mathbf{Q}} = E_{\bar{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$$

Pour tout corps  $K$  de caractéristique 0 - en particulière pour les corps  $K$  de type fini sur  $\mathbf{Q}$ , lequel nous allons nous borner par la suite - on a donc des homomorphismes canoniques

$$(6) \quad B_K \longrightarrow B_{\mathbf{Q}} \quad \text{Quad} \quad \Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbf{Q}}$$

---

<sup>112</sup>et on écrit souvent  $\Gamma_{\bar{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$  au limite des  $E_{\bar{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$ , pour une clôture algébrique  $[\ ] \bar{\mathbf{Q}}$  de  $\mathbf{Q}$

qui l'explicitait, quand on a choisi un objet de  $\Pi_K$  i.e. un  $\bar{K}/K$ , d'où un  $\bar{Q}/Q$ , pour un homomorphisme de groupes profinis

$$(7) \quad E_{\bar{K}/K} \longrightarrow \Gamma_{\bar{Q}/Q}.$$

Par le suit, on regarde toujours  $B_K$ ,  $\Pi_K$  ou  $E_{\bar{K},K}$  comme muni de cette structure supplémentaire - ce sont les morphismes (de topos, de groupoïdes, ou de groupes profinis) "arithmétiques", dominant la situation.

Un intérêt particulier s'attende au noyau de (7), que je note  $\pi_{\bar{K},K}$  - on<sup>113</sup> l'appelle "partie géométrique" de groupe de Galois  $E_{\bar{K},K}$  par opposition au quotient  $E_{\bar{K},K}/\pi_{\bar{K},K} = \Gamma_{\bar{K},K} \hookrightarrow \Gamma_{\bar{Q},Q}$ , que j'appelle se partie "arithmétique" - celle-ci est un sous-groupe ouvert de  $\Gamma_{\bar{Q},Q}$ , qui son [], correspond au sous-corps  $\underline{K}$  de  $\bar{Q}/Q$ , extension finie  $/Q$  de  $\bar{Q}/Q$ , clôture algébrique de  $Q$  dans  $K$ , de sorte qu'on a une suite exacte

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_{\bar{K}/K} & \longrightarrow & E_{\bar{K}/K} & \longrightarrow & \Gamma_{\bar{K}/K} \longrightarrow 1 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \Gamma_{\bar{Q}/Q} \end{array}$$

On<sup>114</sup> va donner une interprétation de ce noyau, et de la suite exacte (8), en écrivant

$$(9) \quad K = \varinjlim_i A_i$$

où les  $A_i$  sont les sous- $Q$ -algèbres de type fini de  $K$ , correspondant au système projectif des "modèles affines"  $U_i = \text{Spec}(A_i)$  de  $K/$ . Parmi les  $A_i$ , il y a d'ailleurs un système [] fermé des  $A_i$  réguliers, i.e. des  $U_i$  lisses/, [] comme morphismes de transition des morphismes de localisation []. On peut même, d'après Mike Artin, prendre comme  $U_i$  des schémas "élémentaires" sur  $K_0$ , se dévissant en fibrations successives de courbes. Notons que  $\text{Spec} K = \eta$  est le point générique [] des  $U_i$ , qui sont [] sur  $k$  (clôture algébrique de dans  $K$ ).

Le choix de  $\bar{K}$  définit un point géométrique  $\bar{\eta}$  sur les  $U_i$ , d'où des groupes  $\pi_1(U_i, \bar{\eta}) = \Gamma_i$ , et [] bien connus

$$\text{Spec} K = \varprojlim U_i$$

<sup>113</sup> on va noter  $\Gamma = \Gamma_{\bar{K}/K}$  cette "partie arithmétique"

<sup>114</sup> NB  $\pi_{\bar{K}/K} = (1)$  si et seule si  $K$  algébrique sur  $Q$ , i.e. fini sur  $Q$ .

$$(10) \quad E_{\bar{K}/K} = \pi_1(\eta, \bar{\eta}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i [\ ] \quad (\Gamma_i = \pi_1(U_i, \bar{\eta}))$$

D'autre part, si on pose

$$(11) \quad \overline{U}_i = U_i \otimes_K$$

on a pour tout  $i$  une suite exacte d'homotopie

$$(12) \quad 1 \longrightarrow$$

qui forment un système projectif de suites exactes, ou d'extensions ayant toutes même quotient  $\Gamma'$ , et dont les noyaux

$$\pi_i = \pi_1(\overline{U}_i, \bar{\eta})$$

sont des groupes fondamentaux “géométriques” - que  $[\ ]$  d'ailleurs  $[\ ]$ , en utilisant un plongement de  $[\ ]$  dans  $\mathbb{C}$  (d'où un isomorphisme  $\simeq \bar{\circ}$ ), comme les  $[\ ]$  profinis de  $\pi_1(U_i(\mathbb{C}), \bar{\eta})$ , ou maintenant  $\bar{\eta}$  est interprète comme un point  $[\ ]$  aux variétés complexes  $U_i(\mathbb{C})$ .

La suite exacte (8) est donc le limite projectif des suites exactes d'homotopie (12) <sup>(115)</sup>, ce qui donne en particulière

$$(13) \quad \pi_{\bar{K}/K} \simeq \varprojlim_i$$

Utilisant les fibrations des  $U_i$  (dans le cas où on s'astreint prendre de variétés élémentaires d'Artin), on trouve que tout  $\pi_i$  est un groupe extension successive des groupes profinis *fibres* (où  $[\ ]$ ). Ceci redonne p. ex. que le dimension cohomologique de  $\pi_i$  est  $[\ ]$ , celle de  $E_i$  est  $\leq n + 2$  (pour des coefficients de  $m$ -torsion,  $[\ ]$ ) - et par passage à la limite, des  $[\ ]$  correspondantes pour les dimension cohomologiques de  $\pi_{\bar{K}/K}$  et  $E_{\bar{K}/K}$

$$(14) \quad \dim \text{coh} + \pi_{\bar{K}/K} \leq n, \quad \dim \text{coh } \Gamma_{\bar{K}/K} \leq n + 2$$

qui sont en fait même des *égalités* (sauf erreur), et donnant donc une description cohomologique simple de degré  $d$   $[\ ]$  absolu de  $K$ .

---

<sup>115</sup>cette interprétation

**Théorème (1).** — Soit  $K$  un corps extension de type fini de  $\mathbb{C}$ ,  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ . Alors pour tout sous-groupe ouvert  $E$  de  $E_{\bar{K}/K}$ , son centralisateur dans  $E_{\bar{K}/K}$  est réduit au groupe unité. Itou pour  $\pi_{\bar{K}/K}$ .

**Démonstration.** — Soit  $\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma_{\bar{K}/K}$  l'image de  $E$  dans  $\Gamma = \Gamma_{\bar{K}/K}$  qui est donc un sous-groupe ouvert. L'image dans  $\Gamma$  des centralisateurs de  $E'$  dans  $E$  [] centralisateur de  $\Gamma'$  dans  $\Gamma$ . Je dis qu'il est égale à 1, ce qui équivaut donc au

**Corollaire.** — Dans  $\mathbf{G} = \Gamma_{\mathbb{C}/\mathbb{C}}$ , le centralisateur de tout sous-groupe ouvert est réduit à (1).

OPS Ce sous-groupe ouvert  $\Gamma'$  invariant, il est bien connue <sup>(116)</sup> que son centre est réduit à 1 donc si  $Z$  est son centralisateur dans  $\Gamma$ , l'homomorphisme  $Z \longrightarrow \Gamma/\Gamma'$  est injectif donc  $Z$  est fini. Mais on sait que les seuls éléments  $\neq 1$  de  $\Gamma$  d'ordre fini sont les conjugués de  $\tau$ , conjugaison complexe. Mais le centralisateur de  $\tau$  dans  $\Gamma$  est réduit à [] donc on peut contenir  $\Gamma'$ , donc  $\tau \notin Z$ , donc  $Z = (1)$ .

[] à  $E \subset E_{\bar{K}/K}$ , on voit donc que son centralisateur  $Z$  dans  $E_{\bar{K}/K}$  est une image dans  $\Gamma$  réduite à  $\{1\}$  donc  $Z \subset \pi_{\bar{K}/K}$ . Soit  $\pi' \subset \pi = \pi_{\bar{K}/K}$  le [] de  $Z'$  sur  $\pi$ , c'est un sous-groupe ouvert de  $\pi$ , et on est ramené à voir que  $\text{Centr}_{\pi}(\pi') = \{1\}$ , i.e. le

**Corollaire.** — Soit  $\pi$  un groupe profini, extension successive de groupes profinis libres. Alors le centralisateur  $Z$  dans  $\pi$  de tout sous-groupe ouvert  $\pi'$  de  $\pi$  est réduit à  $\{1\}$ .

Par dévissage on est ramené au cas d'un groupe profini libre. On sait que  $\pi'$  est donc libre. OPS  $\pi'$  invariant, <sup>(117)</sup> et on admet que le centre d'un groupe profini libre est réduit à 1.

Donc  $Z \longrightarrow \pi/\pi'$  est injectif, donc  $Z$  est fini, et on admet que dans un groupe profini libre, il n'y a pas d'élément <sup>(118)</sup> d'ordre fini  $\neq 1$  - ce qui [] la démonstration.

**Scholie.** — Le fait que  $E_{\bar{K}/K}$  soit à centre trivial peut s'exploiter en disant que le groupoïde  $\Pi_K$  (ou le topos  $B_K$ ) [] à équivalence près, définie à isomorphisme unique près, quand on connaît le groupe extérieure associé à  $E_{\bar{K}/K}$ .

---

<sup>116</sup>à vérifier

<sup>117</sup>à vérifier

<sup>118</sup>à vérifier

Les homomorphismes  $E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$  associés à des homomorphismes  $K \longrightarrow K'$  d'extensions de type fini de  $k$ , ayant une image ouverte dans un centralisateur réduit à 1, on voit de même que l'homomorphisme de topos  $B_{K'} \longrightarrow B_K$  ou de groupoïdes  $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$ , sont déterminés à équivalence près (définie à isomorphisme unique près) par l'homomorphisme correspondant de groupes extérieurs. Il en est en particulier ainsi de morphisme structurel  $B_K \longrightarrow B$  ou  $\Pi_K \longrightarrow \Pi$  qu'on peut interpréter intrinsèquement comme un homomorphisme de groupes profinis extérieurs  $E_K \longrightarrow E$ . Mais nous suivons [1], en exploitant le fait que  $\pi_{\overline{K}/K}$  est lui-même associé à centre trivial. Cela signifie que l'extension de  $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$  par  $\pi_{\overline{K}/K}$  est entièrement connue, à isomorphisme près, pour  $\pi_{\overline{K}/K}$  et  $\Gamma$  fixés, en termes de l'action extérieure correspondant de  $\Gamma$  sur  $\pi$ , comme l'image inverse de l'extension universelle

$$1 \longrightarrow \text{Aut}(\pi) \longrightarrow \text{Autext}(\pi) \longrightarrow 1$$

Pour  $K$  fixé, donc  $k$  fixé, [1] qu'on fixe un  $\Gamma = \Gamma_k$  revient à dire qu'on fixe une clôture algébrique de  $k$ , [1] qu'on fixe un  $\pi_{\overline{K}/K} = \pi_1(K \otimes_k \overline{k})$  signifie [1] qu'on fixe une revêtement universel de  $\text{Spec}(K \otimes_k \overline{k}) = \eta \otimes_k \overline{k}$ , les deux ensembles reviennent à se donner le revêtement universel  $\overline{\eta} = \text{Spec}(\overline{K})$  de  $K$ . Par la suite, nous décrivons (avec une fidélité qui reste à [1]) les couples  $(K, \overline{K})$  d'une extension  $K$  de  $k$  de type fini, et d'une clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$ , par les triples  $(\pi, \Gamma, \varphi)$ , où  $\pi = \pi_{\overline{K}, K}$  et  $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}, K}$  sont des groupes profinis, et  $\varphi : \Gamma \longrightarrow \text{Aut}(\pi)$  une action extérieure de  $\Gamma$  sur  $\pi$  - ce qui peut se reconstituer l'extension  $\overline{K}$  de  $K$  par  $\pi_{\overline{K}, K}$ . J'ai oublié [1] qu'il faut *de plus* se donner  $\Gamma$  comme sous-groupe d'un  $\Gamma_0$  bien déterminé, i.e. qu'il faut se donner un objet de  $\Pi$  et une [1] fidèle de  $\Gamma$  dessus - pour reconstruire [1] cas donné un homomorphisme de groupoïdes profinis  $\Pi_K \longrightarrow \Pi$ , plus un objet de  $\Pi_K$  - ou encore, un morphisme de topos pro-galoisiens  $B_K \longrightarrow B$ , plus un point de  $B_K$ . On peut ainsi fixer un objet de  $\Pi$ , i.e. un point de  $B$ , i.e. un  $\overline{Q}$ , et étudier les  $K$ , avec un plongement de  $k$  (clôture algébrique de  $k$  dans  $K$ ) dans  $\overline{K}$  - mais [1] donner une clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$  qui induise  $\overline{k}$ . Ils sont décrits [2]

On a ainsi plusieurs [1] essentiellement équivalentes, pour décrire par voie profinie une extension  $K$  de type fini de  $k$  :

- 1) Pour le topos étale  $B_K$ , en tant que topos pro-galoisien sur  $B$  ;

- 2) Pour le groupoïde fondamental  $\Pi_K$  de ce topos (groupoïde de ces points, ou de ses revêtement universel) - en tant que groupoïde au dessus de  $\Pi$  ;
- 3) Pour le groupe extérieur  $E_K$ , au dessus de groupe extérieur  $E$  ou  $\Gamma$  ([]) ;
- 4) En termes d'une clôture algébrique  $\bar{K}/K$  (i.e. en décrivant le couple  $(K, \bar{K})$  plutôt que  $K$ ), par un objet  $\in (\Pi)$  et un homomorphisme de groupes profinis  $E \longrightarrow \Gamma$  ;
- 5) En termes d'une clôture algébrique fixe de , et où  $\Gamma = \Gamma$ , [ ] les couples  $(K, i)$  où  $i : k \longrightarrow$  est un plongement de la clôture algébrique  $\bar{k}$  de dans des : pour le groupes extérieur  $\pi_K = \pi_1(K)$ , sur lequel un sous-groupe ouvert  $\Gamma_K \subset \Gamma$  opère extérieurement par des groupes profinis extérieures  $\pi_1(K) = \Gamma_K$ , sur lesquels un sous-groupe ouvert  $\Gamma$  (non précisé [ ]) de  $\Gamma$ , opère extérieurement ;
- 6) En termes d'une / : pour le groupoïde  $\Pi_{K \otimes}$  [ ] .

Un homomorphisme de corps  $K \longrightarrow K'$  donne <sup>(119)</sup> [ ] à un homomorphisme de groupes extérieures,  $\pi' \longrightarrow \pi$ , où l'image de  $\pi'$  dans  $\pi$  est ouvert [ ] de centralisateur réduit à (1), ce qui implique [ ] que le morphisme de topos  $B_{K' \otimes K} \longrightarrow B_{K \otimes K}$  est déterminé (à isomorphisme unique près) par [ ] homomorphisme extérieur. De plus on a des actions extérieures de  $\Gamma = \Gamma_K \subset \Gamma_{K'}$  sur  $\pi'$  et  $\pi$ , de façon que  $\pi' \longrightarrow \pi$  [ ] et ceci suffit pour reconstitue, d'une part les groupes extérieures  $E, E'$  extensions ("extérieures") de  $\Gamma$  [ ]  $\pi, \pi'$  (et , à équivalence rigide près, les  $B_K, B_{K'}$  et  $B_K \longrightarrow B, B_{K'} \longrightarrow B$ ) et de plus l'homomorphisme d'extensions extérieures  $E \longrightarrow E'$  de  $\Gamma$ .

*Remarque.* — Quand  $\pi \neq (1)$ , i.e.  $K$  pas fini sur , le théorème 1 peut se renforcer, sauf erreur, en écrivant que pour tout sous-groupe  $\pi' \subset \pi$  ouvert dans  $\pi$ ,  $\text{Centr}_E(\pi') = \{1\}$ .

Si  $z$  est se centralisateur, on a  $z \cap \pi = (1)$  d'après le théorème 1, prouvons que l'image de  $z$  dans  $\Gamma_{\bar{K}, K} \subset \Gamma$ , est finie (ce qui [ ] alors, que  $z$  est d'ordre 1 ou 2, et dans le [ ] cas que son image des  $\Gamma$ , est [ ] pour un  $\tau$  de conjugaison complexe).

[ ]  $E$  pour un sous-groupe ouvert assez petit (ce qui revient à poser à une extension finie de  $K$ ) [ ]  $\pi' = \pi$ , alors l'image  $z'$  de  $z$  dans  $\Gamma$  est contenue dans le noyau

---

<sup>119</sup>on suppose pour simplifier qui c'est



de l'homomorphisme  $\varphi : \Gamma \longrightarrow [](\pi)$ . [] je sais prouver que cet homomorphisme est injectif (ou est ramené aussitôt au cas où  $K$  est de degré de [] 1, et on est ramené au cas des  $\pi_1$  d'une courbe algébrique ...)

**Théorème (2).** <sup>(120)</sup> — *Le foncteur  $K \longrightarrow \Pi_K/\Pi$  des extensions de type fini de vers les groupoïdes profinis sur  $\Pi$  est fidèle i.e. si deux homomorphismes  $f, g : K \longrightarrow K'$  définissent des homomorphismes de groupoïdes sur  $\Pi$  isomorphes*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{K'} & \xrightarrow{f^*, g^*} & \Pi_K \\ & \searrow p' \quad \swarrow p & \\ & \Pi & \end{array}$$

(i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs  $\alpha : f^* \longrightarrow g^*$  tel que pour tout objet  $\bar{\eta}'$  de  $\Pi_{K'}$ , le carré

$$\begin{array}{ccc} pf^*(\bar{\eta}') & \xrightarrow[p(\alpha)]{\sim} & pg^*(\bar{\eta}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ p(\bar{\eta}') & \xrightarrow{\sim} & p'(\bar{\eta}') \end{array}$$

est commutatif) alors  $f = g$ .

L'hypothèse sur  $f, g$  signifie aussi, en termes d'une clôture algébrique choisie  $\bar{K}'$  de  $K'$ , donnent via  $f$  []  $g$  deux clôtures algébriques de [] l'on peut trouver un isomorphisme [] celui-ci <sup>(121)</sup> ([] d'identifier  $E_{\bar{K}/K}$  et  $E_{\bar{K}'/K}$ ) de telle façon que les deux homomorphismes

$$f^*, g^* : E_{\bar{K}', K'} \longrightarrow E_{\bar{K}, K}$$

sont égaux. C'est sans doute plus claire en termes d'une clôture algébrique fixée de , en disant que les deux homomorphismes  $f^*, g^* : E_{K'} \longrightarrow E_K$  de groupes profinis extérieures (avec opérateurs  $\Gamma_{\bar{Q}, Q}$ ) sont égaux.

Écrivons comme []  $K = \varinjlim A_i$ , donc  $\eta = \text{Spec}(K) = \varprojlim U_i$ , on a (en termes d'un point géométrique quelconque  $\bar{\eta}$  de  $\text{Spec } K$  i.e. en termes d'un  $\bar{K}$ )

$$\pi_K = \varprojlim_i \pi_1(\bar{U}_i, \bar{\eta}), \quad \text{où} \quad \bar{U}_i = U_i \otimes_K \bar{K}$$

<sup>120</sup>En fait, ce théorème n'est pas spécial à - il [] avait sur un corps de [] quelconque est en fait

<sup>121</sup>induisant "l'identité" sur [] clôtures algébriques []

et il suffit de voir que pour tout  $i$ ,  $f|_{A_i} = g|_{A_i}$  [] le fait que  $\pi_1(f_i^*) = \pi_1(g_i^*) : \pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(U_i)$  (comme homomorphisme de groupes extérieures. On [] fixé, on a  $K' = \varinjlim A_j$ , où les  $A_j$  contiennent  $f_i(A_i)$  et  $g_i(A_i)$ , donc

$$\pi_{K'} = \varprojlim_j \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta}'), \quad \text{avec} \quad \overline{V}_j = \text{Spec}(A_j) \otimes_K.$$

Notons (prenant les  $V_j$  réguliers) que les homomorphismes de transition des le système projectif de  $\pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta}')$  sont surjectifs - donc  $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta}')$  est surjectif, ce qui implique que l'égalité de  $f^*$  et  $g^* : \pi_{K'}[\pi_1(\overline{U}_i)]$  (comme homomorphismes extérieures) implique celle de  $\pi_1(\overline{V}_j) \longrightarrow \pi_1(\overline{U}_j)$ .

Donc l'égalité  $f_i = g_i$  (d'où  $f = g$ ) est conséquence de résultat plus général). “[] géométrique”

**Corollaire (1).** — Soient  $X, Y$  des schémas de type fini réduits 0-connexes sur un corps algébriquement close  $k$ , et  $f, g : X \longrightarrow Y$  deux morphismes, on suppose que  $\pi_1(f), \pi_1(g) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$  sont égaux (en fait [] extérieurs) Alors

- a) Si  $Y$  se plonge par un  $i : Y \longrightarrow G$  un groupe algébrique commutatif extension d'une V.A par un tore, il existe un  $u \in Y$  (unique) tel que  $g(x) = f(x) + u$  et pour tout  $x \in X(h)$ , i.e.  $(i \circ g) = \tau_u \circ (i \circ f)$  ( $\tau_u$  [])
- b) Si  $Y$  est une variété élémentaire d'Artin, avec fibres successives des courbes abéliennes, et  $X$  [] et  $f$  ou  $g$  est dominant, alors  $f = g$ .

**Démonstration.** — a) L'unicité de [] est [] - i.e. il suffit <sup>(122)</sup> d'examiner les actions de  $\pi(f), \pi(g)$  sur les groupes abelianisés dans  $\pi_1$ , et même sur leurs composantes  $l$ -adiques. Prenant le Jacobienne généralisée de type “extension d'une V.A par une tore” de  $X$ , on sait que

- 1°) Les morphismes  $f : X \longrightarrow G$  tel que  $f(\alpha) = 0$  se factorisent de façon unique par  $X \xrightarrow{\text{can}} J \xrightarrow{\varphi} G$  avec  $\varphi$  un homomorphisme de groupes algébriques ;
- 2°) Un tel homomorphisme  $\varphi$  est connu quand on connaît ses actions sur les  $H_1(, \mathbb{Z})$  ce qui [] à la connaissance sur les points d'ordre [] que soit  $v$  - on ceux-ci sont denses ...

---

<sup>122</sup>En fait, dans a) il suffit de supposer que

$$3^\circ) H_1(X, \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H_1(J, \mathbb{Z}_l).$$

De ceci, on conclut (par 3°)) que  $H_1(f) = H_1(g)$  implique (si  $f = \varphi \circ \text{can}$ ,  $g = \psi \circ \text{can}$ )  $H_1(\varphi) = H_1(\psi)$ , donc par 2°) que  $\varphi = \psi$ , donc  $f = g$  []

Notons que l'on

b) on va pourtant prouver l'égalité sans l'hypothèse anabéliennes

[] L'hypothèse que  $\pi_1(f) = \pi_1(g)$  signifie donc qu'il existe  $\alpha \in \pi_1(Y)$ , tel que

$$\pi(f')(\gamma) = [] \pi(j)(\gamma)$$

pour tout  $\gamma \in \text{Im}(\pi_1(X) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(U))$ . [] cette image est un sous-groupe ouvert de  $\pi_1(U)$  ([] dominant !). Donc on est ramené à ceci: Soit  $U$  ouvert  $\neq \emptyset$  de  $Y$ ,  $u \in G$ , tels que  $\tau_u U \subset Y$  [et tels que (désignant par  $f, f'$  les morphismes  $y \rightarrow y$  et  $y \mapsto y$  en de  $U$  dans  $Y$ )  $\pi_1(f)$  et  $\pi_1(f')$  [] extérieurement en un sous-groupe ouvert de  $\pi_1(U)$ ] alors  $f = f'$  via  $u =$

Finalement, je [] que [] pas à la prouve par voie géométrique [] arithmétique.

**Corollaire (2).** — *La condition  $f = g$  de corollaire précédent, est valable si on suppose que  $K$  est de caractéristique 0,  $X$  [] est dans l'une des hypothèses suivantes*

- c) *l'image de  $\pi_1(F)$  est un sous-groupe ouvert de  $\pi_1(Y)$ ,  $Y$  est une variété élémentaire d'Artin anabélienne ;*
- d) *l'image de  $\pi_1(X)$  par  $\pi_1(f)$  a un centralisateur dans  $\pi_1(Y)$  réduit à (1), et  $Y$  se plonge dans un groupe algébrique extension d'une VA par un tore.*

Comme le centralisateur [] de un sous-groupe ouvert de  $\pi_1(Y)$  ( $\pi_1(Y)$  étant extension successive de groupes profinis fibres anabéliennes) est réduit à (1), comme un a un<sup>123</sup> plus haut, le cas c) est un cas particulier de d), [] dans le cas d), []  $X$  pour un ouvert d'Artin []

La situation  $X, Y, f, g$  provient, par extension de corps de [] d'une situation analogue sur un corps  $K$  extension de type fini de . Soit  $\bar{K}$  la clôture algébrique de  $K$  dans  $k$  [] de  $K$  à  $\bar{K}$ . On a donc [] satisfaisant la condition d) avec [] trivial.

---

<sup>123</sup>il faut

Mais ces hypothèses impliquent que les extensions  $E(X/K) = \pi_1(X)$ ,  $E(Y/K) = \pi_1(Y)$  de  $E_{\bar{K},K}$  [], ainsi que les homomorphismes [] induits, sont reconstruite à partir de [] et de l'action extérieure de  $E_{\bar{K},K}$  sur ces groupes. On va montrer maintenant le

**Corollaire (3).** — Soient  $X, Y$  deux schémas de type fini sur un corps  $K$  extension de type fini de  $\mathbb{Q}$ , On suppose que  $Y$  se plonge dans une extension d'une V.A. par un tore,  $X$  réduit,  $X, Y$  [] 0-connexe. Soit  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ , d'où des extensions "extérieures"  $E_{X,K}, E_{Y,K}$  de  $E_{\bar{K},K} = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  []  $\pi_1(\bar{X}), \pi_1(\bar{Y})$ , et pour tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$ , un morphisme [] de  $E_{X,K}$  []  $E_{Y,K}$ .

Soient  $f, g : X \rightrightarrows Y$  tels que [] - i.e. [] soient conjugués pour un élément de  $\pi_1(Y)$  [] alors  $f = g$ .

En fait, il suffit même que ls homomorphismes d'extensions [] soient égaux, []  $f = g$ . (C'est à dire, [] des hypothèses *anabéliennes*, des hypothèses [] géométriques sue les actions de [], [] on peut laisser tomber les aspects anabéliens [] sur les aspects abéliens []) [].

Il suffit de voir que [] à noyau abélien associée - l'hypothèse implique que  $f(x)$  et  $g(x)$  définissent le même donne de conjugaison de scindages. Donc il suffit maintenant de prouver le

**Théorème (3).** — Soit  $X$  un schéma de type fini sur un corps  $K$ , extension de type fini de  $\mathbb{Q}$ , on suppose que  $X$  est géométriquement 0-connexe et se plonge dans une extension d'une V. A. par un tore (p. ex.  $X$  est une variété élémentaire d'Artin, à fibres []).

Considérons une clôture algébrique  $\bar{K}/K$  et l'extension extérieure correspondant  $E_{X/K}$  dans  $E_{\bar{K}/K} = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  par  $\pi_1(\bar{X})$  ( $\bar{X} = X \otimes_K \bar{K}$ ) et l'extension déduite de  $\tilde{E}_{X/K}$  de  $E_{\bar{K}/K}$  par  $\pi_1(\bar{X})_{ab}$ . Considérons les applications

$$(*) \quad X(K) \longrightarrow \text{Classes de } \pi_1(\bar{X}) - \text{conjugaison de scindages de } E_{X/K} \text{ sur } E_{\bar{K}/K}$$

$$(**) \quad X(K) \longrightarrow \text{Classes de conjugaison de scindages}$$

Ces applications sont *injectives*.

Démonstration. — Il suffit de le [] pour le seconde application, et on est ramené au cas où  $X$  est lui-même un groupe algébrique  $G$ , extension d'une V. A. par une tore. Alors l'application est un homomorphisme de groupes

$$(16) \quad G(K)$$

obtenue ainsi. On considère pour tout [] la suite exacte []

$$0 \longrightarrow [] \longrightarrow G[] \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

[] suite exacte de cohomologie

[]

et passant à la limite, on trouve

$$0 \longrightarrow$$

le composé de (16) avec l'homomorphisme canonique

[]

compte tenu de

[]

[] que l'homomorphisme induite par

[]

dont le noyau [] est fermé des éléments de  $G(K)$  *infinitement divisibles* dans . []  
ici  $K$  étant un corps [] de type fini le théorème de Mordell-Weil [] que  $G(K)$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini - donc  $G(K) \longrightarrow \varprojlim G(K)_n$  est injectif. Donc []

Remarque. —

[]  $x$  dans le “revêtement universel abélien”  $\tilde{G}$  de  $G$  construit comme  $\varprojlim$  des revêtements  $G(n) \simeq G$  de  $G$ , donnée, []. L'énoncé dit que si [] est trivial - i.e. si [] mais dans ce cas [] soit [] étales.

est cependant possible que [] ...

[] aux conditions de de Corollaire 1, b), [] avec les groupes fondamentaux [], on trouve que

[]

*Complément.* — Retour sur une démonstration *géométrique* du Théorème 2, Corollaire 1 b). On peut supposer que ce est la Jacobienne généralisée de  $Y$ , et il suffit de montrer le

Lemme. — Soit  $Y$  une variété élémentaire d'Artin anabélienne (sur  $K$  algébriquement clos),  $Y \hookrightarrow J_Y^1$  son plongement dans sa Jacobienne généralisée,  $u \in J_Y^0(k)$  et  $U$  un ouvert non  $[]$  de  $Y$ , tels que  $U + u \subset Y$ . Alors  $u = 1$ , ou encore: l'application  $x \mapsto x []$  de  $U$  dans  $Y$  est l'identité.

Par dévissage, on es ramené au cas où  $Y$  est une courbe. Supposons le d'abord complète, de suite que  $U + u \subset Y$  implique  $Y + u \subset Y$  - alors la  $[]$  est bien connu (et résulte par exemple de la formation des points fixes, qui implique que  $[]$  ce qui  $[] J_Y^0(k)$  est nulle. Pour que  $x + u$  soit de la forme  $y$  ( $y \in Y$ ) il faut  $[]$  que  $u \in \alpha$  et  $y$  aient même image dans  $J_Y^1$ , ce qui  $[]$  Je veut mieux, dans le cas général, présenter les choses sous forme homologique. Considérons les deux morphismes  $U \hookrightarrow iY$  induisant et  $J : U \longrightarrow Y$  induit par lui, je dis que  $H_1(i) = H_1(j)$ , ou ce qui revient au même, puisque  $Y \xrightarrow{\alpha} J'_Y$  induit un isomorphisme  $H_1(\alpha) : H_1(Y) \longrightarrow H_1(J'_Y)$ , que

Si le genre est 0, on en concluait (puisque  $[]$ ). Dans le cas de genre 1, on en concluait maintenant que l'image de un des  $J_Y^0$  est égale à 1, et on  $[]$  comme précédemment.  $[]$

## II. La question de pleine fidélité

Soient  $K, K'$  deux extensions de type fini de  $\mathbf{Q}$  - est-il vrai que tout  $\Pi_{\mathbf{Q}}$ -homomorphisme  $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$  provient d'un homomorphisme de corps  $K' \longrightarrow K$ ? On est ramené aussitôt au cas où - une clôture algébrique  $\overline{\mathbf{Q}}$  de  $\mathbf{Q}$  étant choisie, d'où un  $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$  -  $K$  et  $K'$  ont des sous-corps  $k, k'$  (clôture algébrique de  $\mathbf{Q}$  dans  $K$  resp.  $K'$ ) isomorphes, avec des plongements  $k, k' \longrightarrow \mathbf{Q}$  de même image, que  $E_K$  et  $E_{K'}$  peuvent être considérés comme des extensions d'un même groupe  $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$  par  $\pi_K$  resp.  $\pi_{K'}$ . La question est alors si *tout* homomorphisme de  $\pi_{K'}$  dans  $\pi_K$  qui commute à l'action de  $\Gamma$ , est induit par un homomorphisme  $K \hookrightarrow K'$ . Pour construire ce dernier, il faudrait donc avoir une idée comment reconstruire  $K, K'$  à partir des extensions  $E_K, E_{K'}$ , ou encore à partir des groupes profinis extérieurs avec opération de  $\Gamma$  dessus. Et on pressent que le Théorème 3 du paragraphe précédent (appliqué notamment à  $\mathbb{P}_K^1$  convenablement troué...) pourrait donner la clef d'une telle construction.

Bien sûr, des homomorphismes extérieurs quelconques  $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$  n'auront pas de sens géométrique - l'idée est que les opérations du groupe  $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$  dessus soit si draconienne, qu'il n'est possible de trouver un homomorphisme extérieur qui y commute que par voie géométrique - par des plongements de corps. Donc il est essentiel ici que le corps de base ne soit pas quelconque, mais un corps tel que  $\mathbf{Q}$  (ou, ce qui revient manifestement au même, une extension de type fini de  $\mathbf{Q}$ ). Encore faut-il se borner aux homomorphismes  $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$  dont on décrète d'avance que l'image soit ouverte - sinon, prenant pour  $\pi_{K'}$  le groupe unité (i.e.  $K' = k$ ), on trouverait un homomorphisme  $K \longrightarrow k$  correspondant! Il faut pour le moins, pour travailler à l'aise à partir d'homomorphismes  $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$  (au lieu de  $E_{K'} \longrightarrow E_K$ ) supposer que le centralisateur dans  $\pi_K$  de l'image de tout sous-groupe ouvert de  $\pi_{K'}$  soit réduit à  $\{1\}$  - on dira que l'homomorphisme en question est *anabélien* alors - de telle façon qu'à partir de cet homomorphisme (commutant à  $\Gamma$ ) on reconstitue l'homomorphisme d'extensions  $E_K$  et  $E_{K'}$ , qui est l'objet vraiment essentiel. Par exemple, si justement  $K' = k$ , donc  $E_{K'} = \Gamma$ , ce qui nous intéressera, ce ne seront pas le  $\Gamma$ -homomorphismes de  $\pi_{K'} = \{1\}$  (!) dans  $\pi_K$ , mais bien les *sections* de  $E_K$  sur  $\Gamma$ .

Question-conjecture. — Soient  $K, K'$  deux corps, extensions de type fini de  $\mathbf{Q}$ , et un morphisme  $B_{K'} \longrightarrow B_K$  de topos sur  $B_{\mathbf{Q}}$ .

Les conditions suivantes sont-elles bien équivalentes [?]

- (a) L'homomorphisme provient d'un plongement de corps  $K \hookrightarrow K'$ .
- (b) L'image de l'homomorphisme extérieur  $E_{K'} \longrightarrow E_K$  a une image ouverte.
- (c) L'homomorphisme extérieure  $E_{K'} \longrightarrow E_K$  est anabélien<sup>124</sup>.

**NB.** On sait que (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c) et que (b) équivaut à  $\pi_K \longrightarrow \pi_{K'}$  a une image ouverte.

Une réponse affirmative impliquerait que si  $\deg_{\text{tr}} K'/\mathbf{Q} < \deg_{\text{tr}} K/\mathbf{Q}$ , alors il n'y a pas de tel homomorphisme  $E_{K'} \longrightarrow E_K$ , compatible avec les projections dans

---

<sup>124</sup>(c) n'est pas assez fort, cf. plus bas ...

$E_Q = \Gamma_Q$ , en particulier, il en résulterait que toute section de  $E_K$  sur  $\Gamma = \text{Im}(E_K \longrightarrow \Gamma_Q)$ , ou sur un sous-groupe ouvert  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ , a un centralisateur non-trivial dans  $E_K$  – et comme son centralisateur dans  $\Gamma$  est réduit à  $\{1\}$ , cela impliquerait que pour toute telle section, on aurait (si  $\pi_K \neq 1$ )  $\pi_K^{\Gamma'} \neq \{1\}$ . Or je m'aperçois que ceci est sans doute faux (cf. plus bas, numéro 3) – il faudrait renforcer (c) ci-dessus en [:]

(c') L'homomorphisme  $E_{K'}^\circ \longrightarrow E_K$  induit par  $E_{K'} \longrightarrow E_K$  est anabélien (où  $E_{K'}^\circ$  est le noyau de l'homomorphisme composé

$$E_{K'} \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}} \xrightarrow{\chi \text{ caractère cyclotomique}} \wedge$$

$\mathbf{Z}^* \text{ )}.$

Mais pour voir que cette condition est *nécessaire* pour que l'homomorphisme soit géométrique, il faudrait vérifier que pour tout sous-groupe ouvert  $E'$  d'un  $E_K$ , le centralisateur dans  $E_K$  (non seulement de  $E'$  lui-même, mais même de  $E'^\circ$ ) est réduit à 1 – ce qui résulte de la démonstration du Théorème 1, et du fait<sup>125</sup> que pour tout sous-groupe ouvert  $\Gamma'$  de  $\Gamma = \Gamma_Q$ , le centralisateur (non seulement de  $\Gamma'$ , mais même) de  $\Gamma'^\circ$  dans  $\Gamma$  est réduit à  $\{1\}$ .

Donc, la conjecture initiale revue et corrigée donné la

Conséquence (conjecturale). — *Pour tout section de  $E_K$  sur un sous-groupe ouvert  $\Gamma'$  de  $\Gamma_Q$ , de sorte que  $\Gamma'$  opère (effectivement) sur  $\pi_K$ , on a (si  $K$  pas algébrique sur  $\mathbf{Q}$ , i.e.  $\pi_K \neq \{1\}$ )  $\pi_K^{\Gamma'^\circ} \neq \{1\}$ .*

À vrai dire, à certains égards les  $\Gamma_K$  sont des groupes trop gros pour pouvoir travailler directement avec, il y a lieu de regarder  $\Gamma_K$  comme un  $\varprojlim$  de groupes  $\Gamma_{U/\mathbf{Q}}$  associés à des modèles affines de  $K$  – et on s'intéressera plus particulièrement à des modèles affines qui sont des variétés élémentaires – plus généralement, qui sont des  $K(\pi, 1)$  (au sens profini...). Il est possible qu'il faille d'ailleurs, dans l'énoncé de la conjecture de départ, prendre un homomorphisme extérieur  $E_{K'} \longrightarrow E_K$  dont on suppose d'avance (en plus de l'hypothèse anabélienne et de la compatibilité avec les homomorphismes dans  $\Gamma_Q$ ) qu'elle est compatible avec les *filtrations* de ces groupes, associés à ces modèles ("filtration modélique" (grossière)).

---

<sup>125</sup> à vérifier !



Nous allons alors, au même temps que des extension de type fini de  $\mathbf{Q}$ , les homomorphismes entre tels, et homomorphismes de groupes profinis associés, étudier la situation analogue pour des “modèles” élémentaires anabéliens, voire des modèles  $K(\pi, 1)$  généraux (On peut aussi regarder de tels modèles sur un corps  $K$ , extension de type fini de  $\mathbf{Q}$  – mais passons pour le moment sur cette situation mixte, un peu bâtarde...). Si  $U, V$  sont des tels modèles, tout morphisme  $V \longrightarrow U$  définit un morphisme de topos galoisiens sur  $B_{\mathbf{Q}}$ ,  $B_U \longrightarrow B_V$ , et si  $U$  est élémentaire anabélien, ce morphisme est connu quand on connaît seulement  $H_1(B_{\overline{U}}, \mathbf{Z}_{\ell}) \longrightarrow H_1(B_{\overline{V}}, \mathbf{Z}_{\ell})$  – ce qui est beaucoup moins que la classe d’isomorphie d’homomorphismes de  $B_{\mathbf{Q}}$ -topos. (En fait, sans hypothèse anabélienne sur  $V$ , dès que  $V$  se plonge dans une variété anabélienne,  $f$  est connu quand on connaît son action sur les topos étales...). Mais quels sont les homomorphismes  $B_U \longrightarrow B_V$ , ou  $E_U \longrightarrow E_V$ , qui correspondent à des morphismes de modèles ? Avec un peu de culot, on dirait [ : ]

*Conjecture fondamentale. — Soient  $U, V$  deux schémas de type fini sur  $\mathbf{Q}$ ,  $V$  séparé régulier,  $U$  une variété élémentaire anabélienne sur une extension finie de  $\mathbf{Q}$ . Considérons un morphisme  $B_V \longrightarrow B_U$  des topos étales sur  $\mathbf{Q}$  – ou, ce qui revient au même, un homomorphisme de groupes extérieurs*

$$f : E_V = \pi_1(V) \longrightarrow E_U = \pi_1(U),$$

*compatible avec les homomorphismes extérieurs dans  $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \pi_1(\mathbf{Q})$ <sup>126</sup>.*

*Conditions équivalentes [ : ]*

- (a) *Cet homomorphisme provient (à isomorphisme près) d’un morphisme  $V \longrightarrow U$  sur les modèles (qui est donc uniquement déterminé)*
- (b)  *$f|E_V^{\circ}$  est anabélien, i.e. l’image par  $f$  de tout sous-groupe ouvert de  $E_V^{\circ}$  a un centralisateur réduit à 1.*

Pour la nécessité de (b), on est ramené aussitôt au cas où  $V$  est réduit à un point, où cela se réduit à la

---

<sup>126</sup>**NB** Pour l’unicité, on est ramené aussitôt au cas où  $V$  lui-même est un modèle élémentaire anabélien, si ça nous chante.

Conséquence conjecturale. — Soit  $\Gamma' \subset \text{Im}(E_U \longrightarrow \Gamma_Q)$  un sous-groupe ouvert, correspondant à un corps  $k$  fini sur  $\mathbf{Q}$ , considérons un  $k$ -point de  $U$ , d'où un relèvement  $\Gamma' \longrightarrow E_U$ , de sorte que  $\Gamma'$  opère sur  $\pi_U$ . Ceci posé, on a  $\pi_U^{\Gamma'} = \{1\}$ .

On étudiera par la suite les relations entre cette “conséquence conjecturale”, et la précédente (d'apparence opposée !) concernant les  $E$ .

La conjecture fondamentale sur les modèles implique la conjecture fondamentale sur les corps, à condition de prendre soin, dans cette dernière, de se limiter aux homomorphismes compatibles aux filtrations modéliques.<sup>127</sup>

Plus généralement, prenant maintenant pour  $U$  des schémas qui sont des  $\varprojlim$  des modèles élémentaires anabéliens, avec morphismes de transition des immersions ouvertes affines (pour pouvoir passer à la  $\varprojlim$  dans la catégorie des schémas), pour  $V$  un schéma  $\varprojlim$  de schémas séparés réguliers de type fini sur  $\mathbf{Q}$  (morphismes de transition immersions ouvertes affines sans plus). Alors les morphismes *dominants* de schémas  $V \longrightarrow U$  doivent correspondre aux homomorphismes extérieurs  $E_V \longrightarrow E_U$  compatibles avec les projections dans  $E_Q = \Gamma_Q$ , et telle que l'image soit ouverte. Par exemple, on pourrait prendre pour  $U, V$  les spectres d'anneaux locaux réguliers essentiellement de type fini sur  $\mathbf{Q}$ .

—

Cette conjecture fondamentale (éventuellement revue et corrigée en cours de route !) étant admise, la question qui se pose ensuite est de déterminer les topologies (pro)galoisiennes sur  $B_Q$  qui proviennent de modèles élémentaires anabéliens – ou encore, les  $\pi_U = \pi_1(\overline{U})$  de tels modèles étant connus, de déterminer quelles sont [les] actions extérieures possibles de sous-groupes ouverts  $\Gamma$  de  $\Gamma_Q$  sur de tels groupes fondamentaux – et éventuellement question analogue pour d'autres types de groupes profinis, correspondant à des  $K(\pi, 1)$  qui se réaliseraient par des variétés algébriques (sur  $\mathbf{C}$ , disons), mais pas par des variétés élémentaires. (J'ai en vue autant des variétés modulaires, tels que, notamment, des variétés modulaires pour les courbes algébriques...) à partir de là, on reconstruirait par recollement, en termes profinis, tous les schémas lisses sur un corps de type fini sur  $\mathbf{Q}$  (ou plutôt la

<sup>127</sup> Et il vaut mieux se borner à l'équivalence de (a) et (b) – la condition (c) avec les centralisateurs risque de passer mal à la  $\varprojlim$ .

catégorie de ceux-là), ou plus généralement, sur un corps quelconque – puis, sans doute, par “recollement”, la catégorie des schémas localement de type fini sur un  $K$  – tant [?] des [varier?] la catégorie des fractions qui s’en déduit en rendant inversibles les homéomorphismes universels...

Les réflexions précédentes suggèrent aussi des énoncés comme le suivant : Pour un schéma de base  $S$  localement noethérien donné<sup>128</sup>, les foncteurs  $X \longrightarrow X_{\text{ét}}$ , allant de la catégorie des schémas réduits localement de présentation finis sur  $S$ , vers la 2-catégorie des topos au-dessus de  $X_{\text{ét}}$ , est 1-fidèle (deux homomorphismes  $f, g : X \rightrightarrows Y$  tels que les morphismes de topos  $f_{\text{ét}}, g_{\text{ét}} : X_{\text{ét}} \rightrightarrows Y_{\text{ét}}$  au-dessus de  $\text{Set}$  soient isomorphes, sont égaux) et même peut-être *pleinement fidèle*, quand on passe à la catégorie des fractions de  $(\text{Sch}_{\text{l.t.f.}})/S$  obtenue en rendant inversibles les homéomorphismes universels... Expriment ceci par exemple pour les automorphismes d’une courbe algébrique propre sur une extension finie de  $\mathbf{Q}$ , on retrouverait le “fait” que tout automorphisme extérieur de  $E_K$  ( $K$  le corps des fonctions de  $X$ ) qui respecte la structure à lacets [?] et qui commute à l’action de  $\Gamma$ , provient d’un automorphisme de  $X$ .

### III. Étude des sections de $E_U$ sur $\Gamma$

Soit  $U$  un schéma connexe lisse de type fini géométriquement 0-connexe sur le corps  $K$ , d’où  $E_U \longrightarrow E_K$ , et (<sup>129</sup>) on se propose d’étudier les sections mod  $\pi_{U,K}$ -conjugaison - plus généralement, on [] un même topos [] les sections  $E'_K \longrightarrow E_U$ , où  $E'_K$  est un sous-groupe ouvert de  $E_K$  (ce qui signifie que [] fait une extension de base finie sur  $K$ ). Si  $K$  de type fini sur le corps  $\mathbf{Q}$  et si  $U$  se plonge dans un schéma sur un groupe commutatif rigide l’application

$$U(K) \longrightarrow [] \text{ d'isomorphisme section de } B_U \text{ sur } B_K [ ] \pi_{U,K} \text{—conjugaison de sections de } E_U \text{ sur } E_K$$

est injectif. On va examiner d’entre façons “géométriques” de trouver des sections.

Supposons d’abord que  $U$  soit une courbe algébrique, que ne soit pas de type  $(0,0)$  ou  $(0,1)$ , i.e.  $\pi_1(\overline{U}) = \pi_{U,K} \neq \{0\}$ . On a que pour tout  $i \in \widehat{\overline{U}} \setminus \overline{U}$  (point à

<sup>128</sup>  $S$  de caractéristique 0 ?

<sup>129</sup> On a choisie un revêtement universel  $\tilde{U}$  de  $U$  pour définir  $X$ , et  $E_U, E_K$ , et  $E_U \longrightarrow E_K$ .

l'infini) le groupe de lacets  $L_i$  fournit un scindage (des  $[]$  i.e.  $[]$ ) en prenant son centralisateur  $Z(L_i)$  dans  $E$ , d'où

$$(2) \quad 1 \longrightarrow L_i \longrightarrow Z(L_i) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

et en prenant les scindages de cette extension. Il ne existe, p. ex. définis par une  $[]$  de  $\overline{O}_{\widehat{U},i}$ . L'un des données de conjugaison des scindages de (2) est un  $[]$

(3)

et  $[]$  injectivement de l'un des données de  $\pi$ -conjugaison de scindages.

*Proposition.* — <sup>(130)</sup> On suppose  $(g, v) \neq (0, 0), (0, 1)$  i.e.  $\pi_{\overline{U}} = \pi_{U,K} \neq (1)$ . Alors les classes de  $\pi$ -conjugaison scindage de (1) définis pour les scindages de (2) sont distinctes de celles associés aux points de  $U(K)$ . Si de plus  $(g, v) \neq (0, 2)$ , i.e. si  $[]$  est dans le cas anabélien, alors les classes de  $\pi$ -conjugaison de scindages de (1), associés à des scindages de (2) pour deux indices  $i = i_1$  et  $i = i_2$  distincts, soient distincts.

La première assertion s'obtient en "bordant" le trous  $i$ , alors la section envisagé devient la section de  $U \cup \{i\} = U'$  associée au point  $i$ , et celle est donc distincte de celle associée aux  $[]$  points de  $U'$ , i.e. aux points de  $U$  - a fortiori  $[]$  pour le sous-groupe  $[]$  par  $L_i$ . On  $[]$  de même pour  $[]$  que les  $[]$  de scindages associées a un  $L_{i_1}$  et un  $L_{i_2}$ ,  $i_1 \neq i_2$ , sont distinctes,  $[]$  sauf le cas de type  $(0, 3)$   $[]$  on tombe sur le type  $(0, 1)$ , où  $[]$  de résultat d'injectivité. Mais on peut  $[]$ , à condition d'admettre que pour un scindage de (2), faisant opérer  $\Gamma$  sur  $\pi$ , on a

$$(3) \quad \pi^{\Gamma^\circ} = L_i$$

(donc  $\pi^\Gamma = (1)$ , d'ailleurs) - résultat que on  $[]$  plausible.  $[]$  que le  $[]$  de conjugaison de sections détermine le  $[]$  de conjugaison de  $L_i$ , donc  $i$ .

**Conjecture (A).** — Soit  $U$  courbe algébrique anabélienne géométrique 0-connexe sur corps  $K$  de type fini sur  $\mathbf{Q}$ . Alors toute section de (1) est d'une des deux types précédents, i.e. soit définie par un point de  $U(K)$  <sup>131</sup>, Sont pas une section d'une extension (2), avec  $i \in I(\pi)^\Gamma$  i.e.  $[]$  un point de  $\widehat{U} \setminus U$ , rationnel sur  $K$ .

<sup>130</sup>C'est démontré sauf pour le type  $(0, 3)$   $[]$

<sup>131</sup>Il y a  $[]$  plus  $[]$

Si on obtient cette conjecture, alors on va conclurait, pour passage à la limite, en considérant le corps de fonctions  $L$  de  $U$  et  $E_L \longrightarrow E_K$  ( $E_L$  peut être considéré comme un groupe à lacets “infini” (avec une infinité des classes de sous-groupes lacets  $L_i \dots$ ) que tout scindage de cette extension provient d’une scindage d’une extension de type (2), avec  $i \in I$   $\Gamma = X(K)$  ( $X = \hat{U}$ ). Les classes conjugués de tels scindages se grouperaient donc pour paquets (en regardent les centralisateurs des sous-groupes image de  $\Gamma^\circ$  par ses sections,) et un  $[]$  ensemble des scindages qui est donc  $[](\Gamma^\circ)$  conjugués (même s’il ne sont eux-mêmes conjugués). Donc on retrouve  $[]$  une description de  $X(K)$  (donc ainsi de  $X(K')$ ) pour toute extension finie  $K'$  de  $K$ ) en termes de l’extension  $E_L$  de  $E_K$  par  $\pi_{L,K}$ , au même temps qu’une  $[]$  de reconstitue les  $U = X \setminus I$   $[]$

Donc en fait c’est la structure  $E_L \longrightarrow E_K$  qui est le plus riche a priori, et de loin plus commode pour le genre 0 et 1, où le considération des  $U$  de type  $(g, v)$  ( $2g + v \geq 3$ )  $[]$  le groupe “continue” d’automorphismes... La forme “modélisque” de la conjecture précédente revient à la forme “birationnelle”, quand on y précise cette  $[]$  en disant que tout scindage de  $E_U \longrightarrow E_K$  se revient au un scindage de  $E_L \longrightarrow E_K$  (on ainsi,  $[]$  un scindage de  $E_V \longrightarrow E_K$ , si  $V$  est un modèle  $[] U$ ).

On ne  $[]$  les conjectures précédentes (sous forme modélisque, disons) sous une forme plus géométrique, en introduisant, un même topos qu’un revêtement universel  $\tilde{U}$  de  $U$ ,  $[] X'$  de  $X$   $[] \tilde{U}$  (où  $X = \hat{U}$ ). (NB je m’abstient de le noter  $\tilde{X}$ ,  $[]$  il n’est pas  $[]$  sur  $X$ ). Notons que pour  $i \in I = \overline{X} - \overline{U}$ , l’un des  $L_i$  des  $\overline{\pi} = \pi(\overline{U})$   $[]$  en correspondance 1-1 avec  $[]$  fibre  $X'_i$  de  $X'$  au dessus de  $i$ .

$$X \longrightarrow \overline{X} \longrightarrow X'$$

Donc  $X'$  peut être considéré comme le  $[]$  de  $\tilde{U}$ , et de  $X' \setminus I =$  ensemble des sous-groupes lacets de  $\overline{\pi}$ , qui apparaissent ainsi comme des “points à l’infini” des revêtements universel  $\tilde{U}$ . D’ailleurs  $E_U$  s’interprète comme le groupe de  $[]$  schéma  $\tilde{U}$   $[]$ , et  $E_U \longrightarrow E_K$  comme l’homomorphisme de passage au quotient  $[]$  (NB.  $\overline{K}$  s’identifie a la clôture algébrique de  $K$  dans  $[]$ , donc  $E_U$  opère sur  $\text{Spec } \overline{K}$  de façon  $[]$ ) Une section de  $E_U$  sur  $E_K$  est donc une action de  $E_K$  sur  $\tilde{U}$ , compatible avec son action sur  $\tilde{U}$   $[]$  convenable (sans doute  $[] \overline{U}_i$  finis sur  $\overline{U}$  entre  $\overline{U}$  et  $\overline{U} \dots$ ). Considérons alors la

Conjecture (B). <sup>(132)</sup> — Toute telle action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{U}$  admet dans  $X' = \widehat{\tilde{U}}$  un point fixe et un seul.

Ceci signifie alors

a) S'il y a un point fixe à distance finie i.e.  $\tilde{X} \in \tilde{U}^T$ , alors

1°) L'image de  $\tilde{X}$  dans  $U$  est uniquement déterminée - c'est essentiellement le Théorème 3 dans §1 (des  $\alpha$  points distincts de  $U(K)$  définissent des classes de conjugaison des scindages distinctes) et

2°) <sup>133</sup>  $\pi^\Gamma = (1)$  (i.e. il n'y a pas d'autre point fixe dans  $\tilde{U}$  sur ce même  $x \in U(K)$ ), et []

3°) il n'y a pas au même temps ce point fixe à l'infini - i.e. il n'existe pas de  $L_i$  normalisé par  $\Gamma$ , i.e. une scindage des [] type n'est pas au même temps des deuxièmes (fait que nous avons et oublié directement, précédemment).

D'autre part, dans le cas de points fixes à l'infini, l'unicité de l'image dans  $X$  signifie qu'une même action effective [] à la fois un  $L_i$  et [] ( $v \neq J$ ) - Fait [] établi sauf dans le cas  $(g, v) = (0, 3)$  - et l'unicité au dessus d'une  $i \in I$  fixé signifie que le  $L_i$  ( $i$  fixé) normalisé par  $\Gamma$  est unique, ce qui est un affaiblissement de la relation

$$L_i = \text{Cen} \pi^{\Gamma^\circ}$$

pour ces opérations, conjecture plus haut.

En fait, je conjecture que dans la conjecture B, il est même vrai que  $\Gamma^\circ$  agissant sur  $X' = \widehat{\tilde{U}}$  a un point fixe et un seul (ce qui est plus haut, [] point fixe [] nécessairement fixe pour  $\Gamma$ ). Ceci implique dans le cas des points fixes à distance finie, qu'est alors  $\pi^{\Gamma^\circ} = (1)$ , comme il se devrait en général [] et dans le cas de points fixes à l'infini, que

$$\pi^{\Gamma^\circ} \subset \text{Norm}_\pi(L_i) = L_i$$

donc le []  $\pi^{\Gamma^\circ} = L_i$  [] !

---

<sup>132</sup>et même l'action induit de  $\Gamma^\circ$  doit avoir un point fixe [] plus bas

<sup>133</sup>C'est un cas particulier []

[ ] tous nos beaux énoncés devraient être valables, [ ] un corps de base  $K$  de type fini de  $\mathbf{Q}$ , mais [ ] que  $K$  est extension de type fini d'un corps cyclotomique (pas [ ] fini sur  $\mathbf{Q}$ ).

Nous pourrions définir les *courbes de Poincaré* sur un corps algébriquement clos de  $\bar{K}$  de caractéristique 0, comme étant les courbes isomorphes à des revêtements universels de courbes algébriques anabéliennes sur  $K$  (donc courbes anabéliennes  $\bar{U}, \bar{V}$  sur  $\bar{K}$  définissent des revêtements de Poincaré isomorphes, si et seule si existe un revêtement fini étale de l'un, isomorphes à un revêtement fini étale de l'autre). Étant donné une courbe de Poincaré  $\widehat{U}$  sur  $\bar{K}$ , on définit canoniquement sa complétion  $\widehat{U} [ ] \widehat{U}$ . Ceci posé :

**Conjecture (B').** — Soient  $K$  un corps de type fini sur  $\mathbf{Q}$  (ou sur un corps cyclotomique suffise peut-être),  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ ,  $U$  une courbe de Poincaré sur  $\bar{K}$ , de complétion  $\widehat{U} = X$ . Considérons une action de  $\Gamma = \Gamma_{\bar{K}, K}$  sur  $U$ , compatible avec sous-action sur  $\bar{K}$ , d'où une action de  $\Gamma$  sur  $X$ . Ceci posé : Il existe un point fixé et un seul de  $\Gamma^\circ$  agissent sur  $X$  ( $\Gamma^\circ$ , noyau de caractère cyclotomique  $\Gamma \xrightarrow{\chi} \widehat{\mathbf{Z}}^*$ ).

La différence avec la conjecture B, pour celle-ci [ ], [ ] d'un groupe profini  $\pi$ , [ ] librement sur  $U$  de façon que  $U_{/\pi}$  soit une courbe algébrique anabélienne sur  $\bar{K}$ .

Que donneraient les conjecture précédentes, quand on les applique à une situation où  $K$  est [ ] pour un modèle  $S$  de  $K$  (disons, élémentaire anabélienne), quand  $U_K$  provient d'une courbe relative  $U_S$  sur  $S$  - de sorte qu'on a un homomorphisme de groupes

$$(4) \quad E_{U_S} \longrightarrow E_S$$

de noyau  $\pi_{\bar{U}}$ , dont  $E_{U_K} \longrightarrow E_K$  est déduit pour changement de base i.e. par produit fibre

$$(5) \quad E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S} [ ]$$

Ainsi, les sections de  $E_{U_K}$  sur  $E_K$  correspondant aux relèvement continus  $E_K \longrightarrow E_{U_S}$  de l'homomorphisme surjectif  $E_K \longrightarrow E_S$  et parmi ce relèvement, ceux qui sont triviaux sur le noyau de  $E_K \longrightarrow E_S$  correspondants existent aux sections de  $E_{U_S}$  sur  $U_S$ . Nos conjectures impliquent donc qu'il y a existent deux sortes

telles sections : 1°) celles qui correspondent à des points de  $U_K/K$  i.e à des sections rationnelles des  $U_S$  sur  $S$  - mais on va vérifier sans mal, sans doute, qu'une telle section rationnelle ne correspond effectivement à une section de l'extension (4), que si c'est une section régulière (à vérifier tantôt). 2°) Celles correspondant à des  $i \in I(U_{\overline{K}})$  rationnels sur  $K$ , i.e. à une section de  $\widehat{U_S} \setminus U_S = S'$  (étales fini sur  $S$ ) sur  $S$ . Et il faudrait étudier encore à quelle conditions une telle section définit un paquet non vide de scindages de (4) - et comment déterminer exactement tous ces scindages.

Avant d'élucider ces deux points, un peu technique, je voudrais voir dans quelle manière la conjecture **A** (ou **B**) faite des ces §, permet de reconstruire la catégorie des modèles élémentaires anabéliennes sur  $\mathbf{Q}$ , et celle des extensions de type fini de  $\mathbf{Q}$  et des modèles élémentaires anabéliennes sur ceux-ci, en termes des groupes extérieurs (ou topos galoisiens) associés à partir bien sûr de la donnée fondamentale de  $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}, \overline{\mathbf{Q}}_0}$ , opérant extérieurement sur  $\widehat{\pi_{0,3}}$ , d'où déjà l'extension  $E_{0,3} = E_{U_{0,3}/\mathbf{Q}}$ , où  $U_{0,3} = \mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ .

Prenons les donne de  $\widehat{\pi_{0,3}}$ -conjugaison de  $[]$  sections de  $E_{0,3}$  sur  $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma$  i.e. les "points" telles que le centralisateur de  $\Gamma^0$  soit trivial (sections "admissibles")  $[]$  des topos  $B_{\widehat{\pi_{0,3}}, \Gamma_{\mathbf{Q}}} []$  sur  $B_{\Gamma_{\mathbf{Q}}} []$  - on trouve un ensemble sur lequel  $\Gamma$  opère (qui n'est autre que  $U_{0,3}(\overline{\mathbf{Q}}_0)$ , à isomorphisme canonique près). Pour tout ensemble fini  $I$  des sections, stable par  $[]$  la formation "forage de trous" doit nous fournir un groupe extérieur  $\pi_{0,3}(I)$ , de type  $[]$  sur lequel  $\Gamma$  opère (il voit mieux peut-être utiliser le yoga introduit par ailleurs des groupoïdes rigides - donc on peut  $[]$  ainsi  $[]$  de trous  $0, 1, \infty$  - on trouve donc l'équivalent groupoidal de la droite projective  $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^1$ , on l'appelle  $[]$  - qui correspond à un groupe extérieure à lacets infini sur lequel  $\Gamma$  opère - en fait, ce n'est autre que  $E_{K_1}$ , où

$$(6) \quad K_1 = \mathbf{Q}(T_1)$$

est l'extension transcendantal pour type de degré 1 de  $\mathbf{Q}$ .

Partant de (6), on construit de même l'équivalent groupoidal de  $U_{0,3}$  et on reconstruit comme précédent, pour avoir, sont des courbes de type  $(0, \nu_2)$  sur  $K_1$  (ou sur une extension finie de  $K_1$ ) sont des courbes relatives de tipe  $(0, \nu_2)$  sur une courbe sur  $\mathbf{Q}$  (ou une extension finie de  $\mathbf{Q}$ , ou une revêtement étale fini d'une telle  $U_{0,\nu_1}$ ).



On procède [] pour construire finalement tous les  $E_K$  sur  $E_Q$  ([] tout corps extension de type fini de  $\mathbf{Q}$ , est extension finie d'une extension transcendantale []) et tous les modèles élémentaires, où [] chaque avec la fibration [] sont une courbe de genre 0, suite un revêtement étale fini d'une telle fibration particulière. Sauf erreur, ça fait assez pour avoir un système fondamental de voisinages de tout point d'une  $X$  lisse sur un  $K$  et de reconstituer en principe les schémas lisses sur des  $K$ , pour recollages de tels morceaux avec des "immersions ouvertes". Mais [] que pour faire une telle description, il en faudrait développer un langage géométrique qui celle mieux à l'intuition géométrique, que les sempiternelles extensions de groupes profinis ... ou actions extérieures, et où les points rigides (à [] alors des clôtures algébriques de corps) jouent un rôle prépondérant. Je me faudra y revenir dessus - et en même temps, expliciter les topos étales (pas seulement le "morceau  $K(\pi, 1)$ ") [] entiers des schémas décrits ici par des extensions.

Reprenons le cas de  $U = U_S$  schéma relatif sur  $S$ , "élémentaire" sur  $S$  - à fibres successives anabéliennes (s'il le faut) ou de moins à  $\pi_1$  non nul,  $S$  étant lui-même (pour fixer les idées) lisse sur  $\mathbf{Q}$ , irréductible, corps de fonctions  $K$ , et reprenons la digression 5. Considérons une section rationnelle  $f$  de  $U$  sur  $S$ , définissant une section de  $E_{U_K}$  sur  $E_K$  - ou, ce qui revient au même, un relèvement de l'homomorphisme surjectif,  $E_K \longrightarrow E_S$  en  $E_K \longrightarrow E_{U_S}$  (composé de la section  $E_U \longrightarrow E_{U_K}$  []  $E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}$ ). Je veux montrer que  $f$  est pourtant définie i.e. une section de  $U_S$  sur  $S$ , si et seule si le section de  $E_{U_K}$  sur  $E_K$  provient d'une section de  $E_{U_S}$  sur  $E_S$ , i.e. si et seule si le relèvement  $E_K \longrightarrow E_{U_S}$  [] sur le noyau de  $E_K \longrightarrow E_S$ .

Notons que cette dernière condition est une condition "de codimension 1 sur  $S$ " - de façon plus précise, si  $Z$  est un sous-schéma fermé de  $S$  de codimension  $\geq 2$ , alors, posant  $S' = S \setminus Z$ , on a  $\pi_1(S') \xrightarrow{\sim} \pi_1(S) = E_S$  pour le "théorème de pureté" - donc le noyau de  $E_K \longrightarrow E_S$  est le même que celui de  $E_K \longrightarrow E_{S'}$ , ou, si [] (comme  $S'$  n'est pas un "modèle") que le sous-groupe fermé engendré pour les noyaux des  $E_K \longrightarrow E_{S'_i}$ , où les  $S'_i$  sont des ouvert "modèles" qui recouvrent  $S'$ . Si donc les conditions envisagés sont [] relativement aux  $S'_i$  (qui pourtant un recouvrement par  $S$ , []  $S'$ ) - ce qui est [] signifie que ce section rationnelle envisagé est [] sur les  $S'_i$ , i.e. sur  $S'$  - alors celle est vérifié relativement à  $S$  - ce qui est [] signifie que le section est [] sur  $S$ . Donc, [], il faudrait [] a priori qu'une section de  $U_{S'}$  sur  $S'$  []

une section de  $U_S$  sur  $S$ . [] d'une courbe relative  $U_S = X_S - T$ ,  $X$  lisse sur  $S$  de dimension relative 1,  $T$  fini [] sur  $S$ , []  $T$  décomposé sur  $S$ . Si  $X$  [] relatif  $\geq 1$ , on sait ([] Weil) que le section [] une section de  $X$ , soit  $D$  l'image inverse de  $T$ , c'est un diviseur sur  $S$ , dont le [] sur  $S' = S \setminus Z$  est nul, donc (comme  $\text{codim}(Z, S) \geq 1$ ) il est nul, OK.

(9)

(10)

avec des carrés cartésiens, et des flèches horizontales surjectives. L'homomorphisme  $E_{U_S} \longrightarrow E_K$  est composé d'un relèvement  $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$  de  $E_K \longrightarrow E_{D_n}$  avec l'homomorphisme canonique  $E_{U_{D_n}} \longrightarrow E_{U_S}$ . (relèvement  $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$  correspondant biunivoquement aux sections de  $E_{U_n}$  sur  $E_K$ , ou aux relèvements de  $E_K \longrightarrow E_S$  ou  $E_K \longrightarrow E_{U_S} \dots$ ).

Ceci dit <sup>134</sup>, j'ai envie de prouver que  $\varphi_n : E_K \longrightarrow E_{D_n}$  [] i.e. provient d'une section de  $E_{O_n}$  sur  $O_n$  si et seule si la section rationnelle correspondant de  $U_S/S$  est définie en  $n$ . Ceci impliquera l'assertion précédent (que la section  $\phi$  de  $E_{U_K}$  sur  $E_K$  provient d'une section de  $E_{U_S}$  sur  $E_S$ , si t seule si la section rationnelle correspondant isomorphe).

Mais il s'agit ici d'un énoncé en fait [] géométrique, que j'ai envie de reformuler sous forme plus générale :

**Théorème.** — Soit  $T$  un trait ([]),  $U$  un schéma relatif "élémentaire" sur  $T$ , anabélienne <sup>135</sup>,  $K$  le corps des fonctions de  $T$ , On [] un revêtement universel  $\tilde{U}$  de  $U$ , d'où une clôture algébriquement  $\bar{K}$  de  $K$ , et on considère l'extension  $E_U = \pi_1(U; \tilde{U})$  de  $E_K = \pi_1(K, \bar{K}) \simeq \text{Gal}(\bar{K}/K)$  par  $\pi = \pi_1(U_{\bar{K}}, \tilde{U})$ . On a donc un carre cartésien des groupes profinis

[]

---

<sup>134</sup>**N.B.**

<sup>135</sup>anabélienne [] - il suffit que les fibres de ordre 1 de la fibration élémentaire de  $U$  ne soient que de type  $(0,0)$  ou  $(0,1)$  - i.e. à  $\pi_1$  nul

où  $E_S$  s'identifie au quotient de  $E_K$  par le sous-groupe  $[\ ]$  engendré par un groupe d'inertie  $I_{K'} \simeq T_\infty(\overline{K})$ , cf plus haut. Soit  $f_K$ ,  $K$  un point de  $U_K \text{ rel}/K$ , d'où une section  $\Psi = \Psi_{f_K}$  de  $E_K$  sur  $E_{U_K}$ . Ceci posé les conditionnes suivantes sont équivalentes

- (a)  $f_K$  se prolonge en une section de  $U$  sur  $S$  ;
- (b)  $\Psi$  provient d'une section de  $E_U$  sur  $E_S$  ;
- (b') le compose  $E_K \xrightarrow{\Psi} E_{U_K} \longrightarrow E_U$  s'annule sur  $I_{K'}$ .

L'équivalence de (b) et (b'), et qu'elles soient impliquées par (a), est clair. C'est l'implication (b)  $\Rightarrow$  (a) qui demande une démonstration. On est  $[\ ]$  au cas où  $T$  est strictement local (donc  $E_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$  est réduit à son sous-groupes d'inertie, et  $E_S = (1)$ ). On est ramené de prendre un  $[\ ]$  au cas où  $U/S$  est une courbe relative élémentaire,  $U = X \setminus T$ ,  $X$  lisse et propre. Alors  $f$  se prolonge en une section  $f$  au  $X$  sur  $S$ , et la conclusion  $[\ ]$  que  $f(S) \subset U$ . Donc on est ramené  $[\ ]$  au

*Lemme. — Soit  $X$  schéma projectif lisse de donnée relation 1 connexe sur  $S$  trait strictement local, soit  $T \subset X$  sous-schéma, fini étale sur  $S$ , donc  $T \simeq I_S$ ,  $I$  ensemble fini, et soit  $U = X \setminus T$  (donc  $T$  est défini par une  $[\ ](g_i)_{i \in I}$  des sections disjointes de  $X$  sur  $S$ ) si  $g$  est de genre relatif,  $v = [\ ]I$ , on suppose  $(g, v) \neq (0, 1)$ . Soit  $i_0 \in I$ ,  $f$  une section de  $X/S$  distinctes des disjointes  $g_i$ , et telle que  $f$  et  $g_{i_0}$  coïncident en  $s$  (point fermé de  $S$ ). Si  $\eta = S \setminus s$ , on a donc un morphisme  $\eta \longrightarrow U$ , d'où  $\pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$ . Je dis que cet homomorphisme n'est pas trivial, et même, si  $v \geq 2$ , que pour la donnée  $[\ ]$  n'est pas trivial (pour  $[\ ]$  distinct de la caractéristique résiduelle).*

Comme la section rationnelle de  $J_{X/S}^1$  défini par  $f$  est régulière, on voit que le composé de l'homomorphisme envisagé avec  $H_n(J_{X/S}^1, \mathbf{Z}_\ell)$  est nul - i.e. le  $H_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)$  s'envoie dans la partie torique de  $H_1(U, \mathbf{Z}_\ell)$   $[\ ]$ , qu'est canoniquement isomorphe à  $T_\ell^I/T_\ell$ . (**N. B** cette partie est nulle si  $\text{card } I = i$ , et dans ce cas le critère homologique  $[\ ]$  insuffisant...) Il faudrait donc calculer cet homomorphisme

$$T_\ell(\simeq H_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)) \longrightarrow T_\ell^I/T_\ell$$

pour constater qu'il n'est pas nul dans le cas envisagé,  $v \geq 2$  (et traiter  $[\ ]$  le cas  $v = 1$ ). Je vais dériver le résultat : soit  $x = g_{i_0}(s)$ ,  $A = \underline{O}_{X,n}$ ,  $V$  l'anneau de  $S$ ,  $J_{i_0}$

l'idéal de l'homomorphisme  $A \xrightarrow{g_{i_0}^*} V$  associé à  $[\ ]$ , c'est donc un idéal inversible de  $A$  -soit de même  $J_f$  l'idéal associé à  $f^* = A \longrightarrow V$ , et considérons  $g_{i_0}^*(J_f)$ , c'est un idéal de  $V$  engendré par un générateur, et comme  $g_{i_0} \neq f$ , on voit que cet idéal n'est pas nul. Soit  $H = [\ ]\nu/g_{i_0}^*(J_f)$ , cet entier  $[\ ]$  de  $g_{i_0}$  et  $f$ , ces  $[\ ]$  comme une multiplicité d'intersection. Ceci posé, je  $[\ ]$  que l'homomorphisme

$$T_\ell \longrightarrow T_\ell^I/T_\ell$$

est le produit  $[\ ]$  des injections canoniques  $T_\ell \longrightarrow T_\ell^I$ , correspondant à l'indice  $i_0$ . Il faudrait que  $[\ ]$ .

Reste le cas  $\nu = 1$ , qui semble demander un traitement séparé <sup>136</sup>.  $[\ ]$  à vérifier (pour les groupes fondamentaux premiers à  $p$ ) c'est que l'homomorphisme extérieur  $\pi_1(U_s) \simeq \pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$  est égal à  $K_{i_0} \circ (\mu Id_T)$ , où  $K_{i_0}$  est l'homomorphisme "local"

$$[\ ]$$

associé à l'indice  $i_0$ . Je vais admettre à priori, qui une ne peut guère être difficile.

Pour terminer ce numéro, je veux encore étudier, dans la situation d'une  $U$  courbe relation sur une  $S$  avec  $U = X \setminus T$ ,  $X$  lisse et propre sur  $S$ ,  $T$  fini étale, avec sections  $g_i$  donnée de  $T$  sur  $S$ , les "sections de  $2^{eme}$  espèce" de l'extension

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow E_U \longrightarrow E_S \longrightarrow 1$$

associées <sup>137</sup> à  $i = i_0$  - que définit une classe de  $\pi$ -conjugaison de sous-groupes ouverts lacets  $L_i$  dans  $\pi$ . (On suppose qu'on a bien une telle suite exact i.e. que  $\pi_2(S) \longrightarrow \pi_1(\text{fibre})$  est nul, ce qui  $[\ ]$  le cas si  $\pi_2(S) = 0$ , p. ex  $[\ ]$ ) si on est dans le cas d'une modèle élémentaire au dessus d'un corps de caractéristique 0 (la reconstruction de ces  $[\ ]$  étant sans doute  $[\ ]$ , si on  $[\ ]$  aux groupes fondamentaux premiers aux cas résiduelles...)  $[\ ]$   $L_i$  dans  $E_U$  s'envoie *sur*  $E_S$ , on trouve donc des scindages pour cette extension, qu'on peut regarder comme une extension

$$(13) \quad 1 \longrightarrow T \longrightarrow N(L_i) \longrightarrow E_S \longrightarrow 1$$

<sup>136</sup>Ceci doit être indépendant de la  $[\ ]$  de  $\nu$  !

<sup>137</sup>en tous cas, même sous  $[\ ]$

La classe d'isomorphisme est un élément

(14)

que je ne propos d'étudier. On [] si  $S$  est un  $K(\pi, 1)$

(15)

d'ailleurs on a une suite exacte de Kummer (ou  $\text{Pic}(S) = []$ )

(16) 
$$0 \longrightarrow \text{Pic}(S)[[]]$$

d'où par passage à la limite

(17)

Dans le cas où  $S$  est un schéma élémentaire sur un corps de type fini sur  $\mathbf{Q}$ ,  $\text{Pic}(S)$  est un  $\mathbf{Z}$ -modèle de type fini (par Mordell-Weil-Néron), donc l'homomorphisme

(18) 
$$\text{Pic}(S) \longrightarrow \text{Pic}(S)^\wedge \longrightarrow H^2(S, T)$$

est *injectif*.

Sous nous [] de cette condition, considérons le cas général - je dis que la classe  $c$  (14) est donc l'image de (18), de façon précise que c'est l'image de l'élément

$$g_i \in \text{Pic}(S)$$

classe des faisceaux [] (on []) de  $X$  le [] de  $g_i$ . Principe d'une vérification : [] la complété formel de  $X$  [] de  $g_v(S)$ , [] ou interpréter la suite exacte (13) comme la suite exacte d'homotopie de ce topos [], au dessus de  $S$ . On a donc à prouver une histoire d'ombres...

Dans le cas "arithmétique", on voit donc que l'extension (13) est scindée si et seule si  $g_i = 0$  i.e. [], globalement sur  $S$ , []

Quand  $g_i = 0$ , parmi les scindages, il y a [] provenant [] d'une base de  $J_i/J_i^2$  qui soit [].

L'indétermination des choix d'une telle base [] celle des choix d'une section de (13) est donc

(20)

On a ici des suites exactes de Kummer

$$[ ]$$

d'où par passage à la limite

(21)

Dans le “cas arithmétique”  $[ ]$  on trouve donc

$$[ ]$$

Si le genre est zéro, prenant une de ces sections de  $T$  sur  $S$  comme section à l'infini, OPS ( $[ ]$  à se localiser)  $U_S = \mathbb{E}'_S \setminus T'$ , donc  $f$  s'identifie à une section de  $\mathbb{E}^1_S$  sur  $S'$ , i.e. de  $\underline{O}_S$  sur  $S$ , donc (comme  $\text{codim}(2, S) \geq 2$   $[ ]$ ) elle se prolonge en une section de  $\mathbb{E}'_S$ . Et on  $[ ]$  comme précédemment, OK. Considérons donc les diviseurs irréductibles  $D_i$  sur  $S$ , ou ce qui revient au même, les points  $x_v$  de  $X$  de codim 1, i.e tels que  $\underline{O}_{x_v}$  soit un  $[ ]$  () anneau de valuations discrète). Considérons son  $[ ] \overline{O}_{x_v}$  dans  $\overline{K}$ ,  $[ ]$  un idéal maximal  $[ ]$  (ces idéaux correspondent aux points  $[ ] \tilde{S}$  de  $S$  dans  $\overline{K}$  au dessus de  $x$ ) et considérons son stabilisateur  $N_n$  dans  $E_K$ , qui opère donc dans  $k(\tilde{x}) = \overline{k(x)}$ , et s'envoie en fait, on le sait, *sur*  $\text{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$ .

Soit  $I_{\tilde{x}}$  le noyau de l'homomorphisme obtenue ( $[ ]$  “géométriques” de  $[ ]$ ), donc on a une suite exacte

$$(7) \quad 1 \longrightarrow [ ] \text{Gal}(\overline{k(x)}/k(x)) \longrightarrow 1$$

et par Kummer une isomorphisme canonique<sup>138</sup>

(8)

On notera que si  $x$  est le  $[ ]$  du diviseurs  $D$ , alors  $k(x)$  est le corps des fonctions de  $D$ . C'est un corps de type fini sur  $\mathbf{Q}$ .

Il est immédiat (sans supposer que le corps de base pour  $S$  soit  $\mathbf{Q}$ ) que le noyau de  $E_K \longrightarrow E_S$  est le sous-groupe  $[ ]$  engendré par les  $I_{\tilde{n}}$ . Donc l'hypothèse que  $E_K \longrightarrow E_{U_S}$   $[ ]$  sur le dit noyau, signifie aussi qu'il  $[ ]$  sur  $[ ]$  des  $I_{\tilde{n}}$ . Soit alors  $U_{\underline{O}_x}$

---

<sup>138</sup> à corps de  $[ ]$  de car 0 !

induit par  $U$  sur  $\text{Spec } \mathbf{Q}_x$ , on a donc des factorisations d'ailleurs  $\mathbb{G}_n(S)$  n'a pas [], donc

22)

est injectif<sup>139</sup>. Ainsi, quand  $g_i = 0$  i.e. quand (13) admet des scindages "géométriques" (et il suffit []) ceux-ci forment un tore sous  $\mathbb{G}_m(S)$ , qui s'identifie à une sous-torseur des [] de tous les scindages de (13). Pour que la "description profinie de la géométrie algébrique absolu sur  $\mathbf{Q}$  soit complète, il y faudrait également caractériser (en termes de cette description profinie) le sous-ensemble remarquable.

Je voudrais enfin comprendre encore comment une section d'extensions des type (1) peut se "spécialiser" en une section de type (2), donc le cas des courbes relatives. Pour ceci, je reprends la [] situation

Dans la cas [] où  $f$  n'est pas définie sur  $S$ , on trouve une action de  $2^{nde}$  espèce, []  $L_i$  dans  $\pi$ .

À vrai dire

[]

(31)

J'ai l'action extérieure de  $T$  sur  $\pi$  n'est souvent pas triviale (je conjecture qu'elle l'est si et seule si il y a "bonne réduction") - donc le groupe  $E_K$  n'opère pas lui même extérieurement sur  $\pi$ . Mais tout scindage de (30) définit une extension de  $E_K$  par  $\pi$ , donc une action extérieure [] "admissible", définie par une courbe algébrique ? - Sans doute pas [], si ce n'est la courbe "réduit" de type  $(g, v)$  ([]) ? [] ce pourrait être celle ci :

*Conjecture-à-[] — Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a)  $U_\eta$  a bonne réduction sur  $S$  ;

(b) L'action extérieure de  $T$  sur  $\pi$  est triviale (ce qui signifie ainsi que tout [] scindage de (31) - p. ex défini par un point de  $U_\eta$  [] induit un homomorphisme  $T \longrightarrow \pi$ );

---

<sup>139</sup>(cas "[]")

(c) L'action de  $T$  sur  $\pi_{ab} = H_1(U_{\overline{\eta}})$  est triviale ;

(d) Iton pour

(e) En termes de une section de (30)

(f) En termes de une section de (30)

On a []

[]

J'ai donc [] un [] général (qui je pourrais à la occasion [] avec la généralité qui lui revient) pour construire des actions extérieures [] de groupes  $E_k$  ( $K$  extension de type fini de  $\mathbf{Q}$ ) sur des  $\pi$  à lacets, qui (sans doute) [] géométriques, par la considération de courbes de type  $(g, v)$  "se réduisent []". Mais je [] pas pour cette vrai à faire des actions effectives, associées à actions extérieures [] géométriques [] - i.e. d'une des deux types 1°, 1° [] de ce n°.

#### IV. Sections d'extensions et anneaux de valuations généraux

D'abord une révision de notations. Si  $X$  est une schéma connexe, je note

$$(1) \quad E_X = \Pi_1(X)$$

son groupe fondamental profini en tant que groupe extérieur, et si  $\tilde{X}$  est un revêtement universel profini de  $E_X$ , par

$$(2) \quad E_X^{(\tilde{X})} = \pi_1(X; \tilde{X}) = \text{Aut}_X(\tilde{X})$$

son groupe fondamental précisé - qu'est un groupe profini. Si  $X = \text{Spec}(A)$ , où  $A$  est un anneau (le plus souvent une corps) je note  $E_A$ , et  $E_A^{\tilde{A}=E_X^{(\tilde{X})}}$ . Si  $A$  est une  $A$ -algèbre telle que  $\text{Spec}(\tilde{A}) = \tilde{Y}$  soit une revêtement universel de  $X$  (ce qui le détermine à isomorphisme non unique près). Bien entendu, si  $\xi$  est une "point géométrique" de  $X$ , on note

$$(3) \quad E_X^\xi = \Pi_1(X_1\xi) = E_X^{\tilde{X}(\xi)},$$

où  $\tilde{X}(\xi)$  est le revêtement universel de  $X$  [] en  $\xi$ . Le choix de  $\xi$  correspond d'une [] [] et d'une extension séparablement close  $\Omega$  de  $k(x)$  ([] clôture algébrique



de  $k(x)$ ) et on note alors ainsi  $E_X^\Omega$  au lieu de  $E_X^\xi$  ( $\Omega$  sous entendu [] extension de  $k(x)$  donc avec sa structure de  $k(x)$  algèbre) []

$$(4) \quad E_X^\Omega = E_X^{\overline{k(x)}},$$

où  $\overline{k(\alpha)}$  est la clôture algébrique de  $k(\alpha)$  dans  $\Omega$ . Bien sur, si  $X = \text{Spec}(A)$ , on note aussi  $E_A^\Omega$  – notation [] utilisée []  $E_K^{\overline{K}}$ ,  $K$  un corps,  $\overline{K}$  une clôture algébrique [] séparable de  $K$ .

Si  $X$  est un  $Y$ -schéma, 1-connexe, on []

$$(5) \quad E(f) : E_X \longrightarrow E_Y, \quad \text{où } f : X \longrightarrow Y$$

$E_X$  est un foncteur en  $X$

$$(\text{Sch conn}) \longrightarrow \text{Group ext}$$

qui se précise pour l'homomorphisme injectif des groupes profinis

$$(6) \quad E_X^{\tilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\tilde{Y}}$$

où  $\tilde{Y}$  est le revêtement universel de  $Y$  défini par  $\tilde{X} \longrightarrow Y$  ( $\tilde{X}$  [] pouvoir écrire en fait  $E_Y^{\tilde{X}}$ , plus géométriquement  $E_Y^Z$  chaque fois qu'on a un  $Y$ -schéma  $Z$  1-connexe, jouent le rôle de “foncteur fibre” pour le topos  $B_{\pi(X)}$  des revêtements étales de  $Y$ .)

On peut désir que

$$(7) \quad (X, \tilde{X}) \mapsto E_X^{\tilde{X}}$$

est un foncteur, de la catégorie des schémas 0-connexes  $X$  munis d'un revêtement universel (on [] d'un  $Z$  1-connexe s'envoyant dans  $X$ ) vers celle des groupes profinis. Ceci s'applique en particulier en regardons la sous-catégorie des  $(X, \xi)$  munis d'un point géométrique - on a donc

$$(8) \quad E_X^\xi \longrightarrow E_Y^\eta$$

si on a un homomorphisme de schémas “géométriques profinis”  $(X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$ . On note que tout [] géométrique de  $X$  en un  $x \in X$  - i.e. une extension []  $\Omega$  de  $k(\alpha)$  [] - et l'homomorphisme (8) s'identifie ainsi à

$$(9) \quad E_X^{\overline{k(\alpha)}} \longrightarrow E_Y^{\overline{k(\eta)}}$$

où  $\overline{k(\alpha)}, \overline{k(\eta)}$  sont les clôtures séparables *dans*  $\Omega$ .

On posons

$$(10) \quad E_{X/Y}^{\tilde{X}} = \text{Ker}(E_X^{\tilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\tilde{X}} = E_Y^{\tilde{Y}})$$

C'est un foncteur par un triple  $\tilde{X} \longrightarrow X \longrightarrow Y$  avec  $X, Y$  0-connexe,  $\tilde{X}$  un revêtement universel, plus généralement, si  $T \longrightarrow X$  avec 1-connexe, on pose

$$(11) \quad E_{X/Y}^T = \text{Ker}(E_X^T \longrightarrow E_Y^T)$$

<sup>(140)</sup> on a un foncteur  $[]$ . Cas particulière  $E_{X/Y}^\xi$ ,  $\xi$  un point géométrique de  $X$ ,  $E_{X/Y}^\Omega, E_{X/A}^{\tilde{X}}$  (si  $Y = \text{Spec } A$ ),  $E_{B/A}^{\tilde{B}} \dots$

$[]$  on dispose d'une "suite exacte d'homotopie universel" (en dim 2) <sup>(141)</sup> pour  $X \longrightarrow Y$ , alors le donnée (pour  $X \longrightarrow Y$  donné) de  $T \longrightarrow X$ , (avec  $T$  1-connexe) peut s'interpréter par la donnée d'un composé

$$T \longrightarrow Y$$

et d'un relèvement en  $T \longrightarrow X$ , ou ce qui revient au même, d'une section de  $X_T = X \times_Y T$  sur  $T$ . Ceci posé,

$$X$$

on avoir un isomorphisme  $[]$  (avec l'hypothèse de "suite exacte d'homotopie" faut)

$$(12) \quad E_{X/Y}^T \simeq \pi_1(X_T; T) \simeq E_{X_T}^T$$

et on  $[]$

$$(13) \quad 1 \longrightarrow E_{X/Y}^T \longrightarrow E_X^T \longrightarrow E_Y^T \longrightarrow 1$$

(Cette hypothèse  $[]$  satisfait si  $Y = \text{Spec } K$ ,  $K$  un corps, Si  $X$  est géométriquement 0-connexe sur  $K$ ).

Plus généralement, si on a une suite exacte d'homotopie universel, mais pour  $[]$  avec  $E_X^T \longrightarrow E_Y^T$  surjectif,

---

<sup>140</sup>NB.  $E_{X/T}^T []$

<sup>141</sup>Cas où  $E_X^T \longrightarrow E_Y^T$  est [un] épimorphisme

On <sup>(142)</sup> [] une factorisation de  $X \longrightarrow Y$  en

$$(14) \quad X \longrightarrow Y' \longrightarrow Y$$

avec  $Y'$  étale fini ou pro-étales fini sur  $Y$  et  $E'_X \longrightarrow E_Y$ , était maintenant [un] épimorphisme, [] suite exacte universel d'homotopie bien sûr. On avoir donc isomorphismes []

$$(15) \quad E_{X/Y}^T \xrightarrow{\sim} E_{X/Y'}^T$$

qui peut donc se [] comme

$$(16) \quad E_{X \times_{Y'} T}^T \simeq E_{X/Y}^T$$

qu'on peut noter  $E_{X_T}^T$ , mais en faisant attention que []  $X_T$  [] non plus  $X \times_Y T$  (qui va être disconnexe si  $Y' \longrightarrow Y$  pas isomorphisme) mais  $X \times_Y T$ .

Bien sur, à isomorphisme []

s'identifie bel et bien au groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$  de  $\bar{K}/K$ ,  $\bar{K}$  est la clôture séparable de  $K$  telle que  $\text{Spec } \bar{K} \simeq \tilde{Y}$ . Souvent, on notons  $\Gamma$ , ou  $\Gamma_K$ ,  $\Gamma_K^{\bar{K}}$ , au lieu de  $E_Y$  - surtout si  $K$  est algébrique sur le corps premier, et [] donc plus de “partie géométrique” à distinguer d’une “partie arithmétique”...

Soit  $K$  un corps (qui pourrait être algébriquement clos),  $L$  une extension de type fini de  $K$ ,  $X$  un “modèle” propre régulière de  $L$ . Alors  $E_X^{\bar{L}}$  s'identifie à un quotient de  $E_L^{\bar{L}}$ , *qui ne dépend pas de modèle  $X$  défini*, comme il est [] c'est la partie “universelle géométrique” [] qui classifie les schémas (finis) étales sur  $L$  qui sont “non isomorphes” sur *tout* modèle régulière (propre ou non) de  $L/K$ .

Si  $U$  est un modèle quelconque, il se plonge dans un  $X$ , et on a des homomorphismes surjectifs []  $Z$  partie ferme de  $X$

$$E_X^{\bar{L}} = E_L^{\bar{L}} \simeq E_U^{\bar{L}} / \text{sous-groupe fermé []}$$

Notons que  $E_L^{\bar{L}}$  est limite projective de  $E_U^{\bar{L}}$ , pour des modèles réguliers ([]) variables

$$E_L^{\bar{L}} \simeq [] E_U^{\bar{L}}$$

---

<sup>142</sup>Sous l'hypothèse “suite exacte d'homotopie” mais avec fibres []

et de même, bien sûr

$$\pi_{L/K}^{\bar{L}} \simeq [\pi_{U/K}^{\bar{L}}.$$

[ ]

dont le choix “effectif” dépend de celui d’un revêtement universel ou encore d’un point géométrique [ ] de  $\tilde{K}_n$  - i.e. d’une clôture algébrique de  $\tilde{K}_n$  [ ]

[ ]

est que  $a \in U$ .

Ceci posé,  $E_U^{\bar{L}}$  se récupère à partir de  $E_L^{\bar{L}}$ , comme quotient de ce dernier, en prenant *tous* les  $V$  de  $L$  [ ] un centre sur  $U$  (il suffit même de prendre les  $V = \underline{O}_{U,n}$ , où se est [ ] de codim 1 des  $U$ ), et [ ] correspondants.

On peut regarder

[ ]

Mais il en est [ ] ainsi comme on voit en considérant  $V_1 = V \cap L_1$ , qu’est un anneau de valuations de  $L_1$ , <sup>(143)</sup> dont le corps [ ] fini sur  $K$  si celui de  $V$  l’est (donc  $V_1 \neq L_1$ ) - donc  $V_1$  correspond à une “place” des corps de fonctions d’une variable  $L_1$  sur  $K$ . [ ]  $E_K^\circ$  centralise  $T_{V_1}$

*Conjecture.* — Soient  $K, L$  des extensions de type fini de ,  $K \subset L$ . Alors

- a) Toute section de  $E_L$  sur  $E_K$  (au guère de tel, se revient au même...) normalise sur  $T_V$  associée à un anneau de valuations  $V$  de  $L$  contenant  $K$ , à corps résiduel algébrique sur  $K$  et  $V$  est *uniquement* <sup>(144)</sup> [ ] cette condition [ ] au dessus de  $E_K$ .
- b) Soit  $U$  un modèle “élémentaire” de  $L$  sur  $K$ , anabélien. Alors tout section de  $E_U^{\bar{L}}$  sur  $E_K^{\bar{K}}$  se relie [ ] une section de  $E_L^{\bar{L}}$  sur  $E_K^{\bar{K}}$ .

À noter que ce question 2° est [ ] locale [ ] elle doit être essentiellement “triviale”, que [ ] vraie un [ ] - par contre 1°, est une question de [ ] globale sur  $U$ , et sans doute [ ] façons triviale.

La validité des ces énonces, impliquant donc, pour les sections de  $E_U^{\bar{L}}$  sur  $E_K^{\bar{K}}$  associées à un anneau de valuations de  $L/K$  de corps résiduel  $K$ , que l’image de  $E_K^{\bar{L}}$  doit normaliser un sous-groupe [ ] de  $\pi_{L/K}^{\bar{L}}$ , qui est non trivial si la valuation [ ]

---

<sup>143</sup>Il faut [ ]

<sup>144</sup>[ ]

centre sur  $U$ , i.e. si le section n'est pas associé à un point  $K$ -rationnel de  $U$ , ce qui est justifiant [] des conjectures (qui prouvent d'abord [] !) de §2.

Avant de [] vers l'étude des questions 1°) et 2°) et ainsi des questions de normalisation et de centralisations [] précédemment a propos de  $N_V, I_V, \dots$ ),

## STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

---

### 1. Courbes standard

Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Une “courbe standard” sur  $k$  es une schéma  $X$  sur  $k$  satisfaisant les conditions suivantes :

- a)  $X$  quasi-projectif, toute composante irréductible est de dim 1
- b) Tout point de  $X$  est soit lisse, soit un “point quadratique” (ordinaire) - i.e. isom (loc. ét) à la courbe  $\text{Spec}(k[X, Y]/XY)$  au point 0.

Il est connu qu'on peut trouver une unique  $[\ ] \widehat{X}$  de  $X$ , telle que  $X$  soit un schéma propre, qui  $X$  s'identifie à un ouvert dense de  $\widehat{X}$ , et que  $\widehat{X}$  soit lisse sur les points de  $\widehat{X} \setminus X = I$ . Alors  $\widehat{X}$  est une courbe projective,  $I$  est une partie finie de  $\widehat{X}(k)$  contenant  $[\ ]$  ouvert des points des lissité de  $\widehat{X}$ .  $[\ ] A$  des points singuliers de  $X$  s'identifie à  $[\ ]$

La donnée de  $X$  équivaut à celle des  $(\widehat{X}, I)$ , où  $\widehat{X}$  est un schéma projectif, dont toute composante irréductible est de dim 1, et dont l'ensemble singulier est formé des points  $[\ ]$  ordinaires - et  $I$  est un sous-schéma fini étale de  $\widehat{X}^{\text{lisse}}$ , ou ce qui revient au même, une partie fini de  $\widehat{X}^{\text{lisse}}(k)$ .

Soit

Ainsi, à la courbe standard  $X$  nous avons associé les systèmes de données suivantes :

$[\ ]$

Inversement, [] on construit une courbe standard  $X$  en passant au quotient dans  $\tilde{A}_k Y \setminus I_k$  par l'involution  $\sigma$  - i.e.  $X$  est universel [] pour la donnée  $p$ :

[]

soumise à  $(pi)\sigma = pi$ .

Ainsi la catégorie des courbes standard sur  $k$  [] apparaît comme équivalente à celle des systèmes a) b) c) ci-dessus. (pour les iso)...

**N.B.** On récupère  $\widehat{X}$  comme quotient de  $Y$  par  $\sigma$ .

### Généralisation sur une base quelconque.

Une *courbe standard* sur  $S$  (multiplicité schématique, disons) [] défini constructivement en termes d'un système a), b), c) comme ci-dessus, i.e.

[]

On construit alors  $\widehat{X} = Y/\sigma$ , contenant  $A = \tilde{A}/\sigma$  et  $I$  comme sous-schémas fermés finis étales sur  $S$ , et []  $X = \widehat{X} \setminus I$ . On peut montrer que le foncteur

$$(Y, \tilde{A}, \widehat{I}, \sigma_{\tilde{A}}) \mapsto X$$

des systèmes (5) (pour les iso) vers les schémas relatifs [], est *pleinement fidèle* <sup>(145)</sup>.

**N.B.** []

[]

(par abus de langage, puisque c'est non seulement le schéma relatif  $Y$ , mais  $Y$  avec la structure supplémentaire  $\tilde{A}, I, \sigma_{\tilde{A}} \dots$ ).

## 2. Graphe associé à une courbe standard

Revenons au cas d'un corps de base  $k$  algébriquement clos, pour commencer. Soit  $X$  une courbe standard, d'où  $Y, I, \tilde{A}, \sigma_{\tilde{A}}$ .

Posons

$$(7) \quad S = \pi_0(Y) \simeq [] \text{ des corps irréductibles de } X$$

On a alors le diagramme d'application canoniquement entre ensembles finis

$$(8) \quad \quad \quad []$$

---

<sup>145</sup>faux tel quel

où  $q$  est de degré 2 et définit l'involution  $\sigma_{\tilde{A}}$ . Les applications  $\sigma$  et  $p$  sont induites par les  $[]$  en passant aux  $\pi_o$ .

Le système  $(\tilde{A} \xrightarrow{\sigma} S, \sigma_{\tilde{A}})$  où  $[]$ , peut être considéré comme définissant un *graphe*, dans  $S$  est l'un des sommets, et  $\tilde{A}$  l'un des  $[]$  l'application  $\sigma$  étant l'application "origine d'un  $[]$ ". Ce graphe ne dépend que de  $\widehat{X}$ , pas de  $X$  i.e. des choix de  $I \subset \widehat{X}(k)$ . C'est  $[]$  compte de ce choix que l'on considère,  $[]$  plus de la structure de graphe, le donnée supplémentaire

$$(9) \quad I \longrightarrow S$$

Le graphe indique comment les composantes irréductibles de  $X$  (figurés par les sommets) se récupèrent deux à deux - les points d'intersections, i.e. les points singuliers ("doubles"  $[]$ ) de  $X$ , correspondant aux arêtes. Si une composante irréductible  $X_\alpha$  correspond au sommet  $\alpha$  des graphes, alors les  $[]$  fermés en  $\alpha$  correspondent biunivoquement aux points doubles de  $X_\alpha$  - donc  $[]$   $X_\alpha$  sont lisses  $[]$  l'extrémité.

Il est clair que tout graphe fini peut être obtenue (à iso près) par une  $\widehat{X}$  convenable - et même avec des composantes  $X_\alpha$  de genre  $g_\alpha$  donné (i.e. des  $\tilde{X}_\alpha$  de genre  $g_\alpha \dots$ ). De plus,  $[]$   $I \longrightarrow S$  ( $I$   $[]$  fini), cela peut être réalisé par un  $I \subset \widehat{X}^{lisse}$ , i.e. par une courbe standard  $S$ .

La *maquette* d'une courbe standard  $X$  consiste, pour définition, en les données suivantes

$[]$

Une structure formée d'un graphe fini  $G = (S, \tilde{A}, \sigma)$ , d'un ensemble fini  $I$  au dessus de l'une des sommets de  $G$ , et d'une application "genre":  $S \xrightarrow{g} \mathbf{N}$ ,  $[]$  appelé ici une "maquette".

*Proposition. — Considérons la maquette d'une courbe standard  $X$*

*a) Soient  $\alpha, \beta \in S$ , alors  $\alpha, \beta$  appartiennent à la même composante connexe de graphe  $G$ , si et seule si  $X_\alpha$  et  $X_\beta$  appartiennent à la même composante connexe de  $X$ . Donc on a une bijection canonique*

$$(11) \quad \pi_0(G_X) \simeq \pi_0(X),$$

*en particulier  $X$  est connexe si et seule si  $G_X$  est connexe.*



b) Supposons  $X$  connexe i.e.  $\widehat{X}$  connexe, i.e.  $[\ ]$  on a alors  $[\ ]$  i.e.  $[\ ]$  où  $[\ ]$

.

### 3. Courbes “stables” et $MD$ -graphes

Une courbe standard (sur  $k$  algébriquement clos) est “stable”, si elle satisfait à l’un des conditions équivalentes suivantes

- a)  $\text{Aut } X$  est fini
- b) Pour tout  $\alpha$ ,  $(Y_\alpha, I_\alpha \cup \tilde{A}_\alpha)$  est anabélien i.e.  $2g_\alpha + \widehat{v}_\alpha \geq 3$  i.e.  $2g_\alpha - 2 + \widehat{v}_\alpha \geq 1$ , i.e.
  - 1) Si  $g_\alpha = 1$ , on a  $\widehat{v}_\alpha \geq 1$
  - 2) Si  $g_\alpha = 0$ , on a  $\widehat{v}_\alpha \geq 3$
- c) Tout champ de vecteurs sur  $Y$  nul sur  $I \cup \tilde{A}$  est nul.
- d)  $\underline{\text{Aut}}_{(Y, \tilde{A}_k, I)}$  est un schéma en groupes fini étale sur  $k$ . On voit que cette condition (sous la forme b)) ne dépend que de la *maquette* de la courbe. On dit que  $X$  est une *MD-courbe* (MD, initiale de “Mumford-Deligne” ou de “modulaire”) si elle est stable, et 0-connexe (i.e. connexe non vide).

Les maquettes de telles courbes sont les maquettes 0-connexes et stables (i.e. dont les sommets de guère 1 sont de poids total  $\geq 1$ , et les sommets de guère 0 sont de poids total  $\geq 3$ ), on les appellera les  $MD$ -graphes.

**NB.** Une maquette est une  $MD$ -graphe si et seule si

- a) elle est 0-connexe (i.e. le graphe  $G$  est connexe  $\neq \emptyset$ )
- b) elle n’est pas réduit à un seul sommet de guère 1, de poids total 0  $[\ ]$
- c) les sommets  $[\ ]$

Proposition. — Si  $(G = (S, \tilde{A}, \sigma), I, \underline{g} : S \longrightarrow \mathbf{N})$  est une  $MD$ -graphe, son type  $(g, v)$  est anabélien, i.e.  $2g + v \geq 3$ .

Si on avait  $g = 1$ ,  $\nu = 0$ , alors la relation

$$g = 1 = \sum g_\alpha + h_1$$

montre que ou bien tous les  $g_\alpha$  sont nuls et  $h_1$  [], ou bien tous les  $g_\alpha$  sauf une  $g_{\alpha_0}$  sont nuls, []

[]

Soit  $G$  une maquette. On dit qu'une courbe standard sur un corps algébriquement clos est *de type*  $G$ , si sa maquette est isomorphe à  $G$ , on dit qu'elle est  *$G$ -épinglée* si on se donne un isomorphisme entre sa maquette et  $G$  (c'est donc une structure []).

Soit  $(\widehat{X}, \underline{I})$  une courbe standard sur une base  $S$  quelconque, on dit qu'elle est de type  $G$  si ses fibres géométriques sont de type  $G$ . Alors les maquettes des fibres géométriques de  $(\widehat{X}, \underline{I})$  forment les fibres d'un schéma en maquettes (ou un MD-graphe) sur  $S$  ( $\underline{S}, \underline{\tilde{A}}, \sigma_{\tilde{A}}, \underline{I}, \underline{\tilde{A}} \longrightarrow \underline{S}, \underline{I} \longrightarrow \underline{S}, \underline{S} \xrightarrow{g} \mathbf{N}_S$ ) (système de revêtements finis étales de  $S$  et de morphismes entre ceux-ci), localement isomorphe à la maquette  $G$  donnée. On appelle  *$G$ -épinglage* entre  $(\widehat{X}, \underline{I})$  tout isomorphisme entre  $G_S$  et  $\underline{G}(\widehat{X}, \underline{I})$ . Si

$$(18) \quad \Gamma = \text{Aut } G$$

(groupe fini), les  $G$ -épinglages de  $(\widehat{X}, \underline{I})$  s'identifient aux sections d'un certain  $\Gamma_S$ -torseur, appelé *torseur de  $G$ -épinglages* de  $(\widehat{X}, \underline{I})$ .

Considérons, sur une base  $S$  fixée, la catégorie ([]) des courbes standard  $G$ -épinglées. Pour tout  $\alpha \in S$

**N.B.** Si  $\text{card } J = \nu$ , alors

[] Il en est donc de même dans  $M_{gJ}$ , donc ainsi de  $M_G$  (pour  $G$  semi-stable) et de  $M_{[G]} = (M_G, \Gamma)$ .

## 4. La théorie de Mumford-Deligne

Soient  $S$  une multiplicité schématique,  $X$  un schéma relatif sur  $S$ , propre sur  $S$ ,  $\underline{I}$  un sous-schéma fermé de  $X$ . On dit que  $(X, \underline{I})$  est une MD-courbe relative sur  $S$ , si  $X, \underline{I}$  sont plats de présentation finie sur  $S$ , et si pour tout point géométrique de

$S$ , la fibre  $(X_{\bar{s}}, I_{\bar{s}})$  est une MD-courbe géométrique sur  $k(s)$  i.e.  $X_{\bar{s}}$  est 0-connexe, de dimension 1, [] c'est une fonction localement constant sur  $S$ .

Fixons nous une type numérique  $(g, \nu)$  *anabélien* ( $2g + \nu \geq 1$ ), et considérons, pour  $S$  variable, le groupoïde fibré

$$(24) \quad S \mapsto \widehat{M}_{g,\nu}(S) = \text{MD-courbes relatives sur } S, \text{ de type numérique égal à } (g, \nu)$$

On a alors le vraiment [] théorème suivant :

Théorème de Mumford-Deligne <sup>(146)</sup>. — *Le groupoïde fibré  $S \mapsto \widehat{M}_{g,\nu}/S$  sur  $\text{Sch}$  (plus généralement, sur les multiplicités schématiques...) est représentable pour une multiplicité schématique  $\widehat{M}_{g,\nu}$ , qui est lisse et propre sur  $\text{Spec } \mathbf{Z}$ , D'autre part  $M_{g,\nu}$  est un ouvert de Zariski de  $\widehat{M}_{g,\nu}$ , schématiquement dense fibre par fibre.*

On en déduit aisément p. ex. la connexité des fibres géométriques

[], Nous allons revenir là dessus maintenant.

## 5. Spécialisation des MD-graphes

Soit

---

<sup>146</sup>On suppose  $2g + \nu \geq 3$  (cas anabélien)

6. Morphismes de  $[\mathcal{A}]$  de graphes et de maquettes
7. Étude des  $[\mathcal{A}]$  de  $\dim \leq 2$   $[\mathcal{A}]$  détermination des graphes correspondantes
8. Structure  $[\mathcal{A}]$
9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ( $[\mathcal{A}]$  MDT-structure) : cas  $[\mathcal{A}]$ ,
10. Structures MDT analytiques :  $[\mathcal{A}]$
11. Digression :  $[\mathcal{A}]$  Structure à l'infini des groupoïdes fondamentaux
12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une  $[\mathcal{A}]$  et leur dévissages en “topos élémentaires”
13. Digression sur stratification “locales”  $[\mathcal{A}]$

Une *stratification globale*

PURSUING STACKS  
(À la poursuite des Champs)  
First episode: the modelizing story  
(histoire de modèles)<sup>147</sup>

---

---

<sup>147</sup><https://arxiv.org/pdf/2111.01000.pdf>

## RÉCOLTES ET SEMAILLES

Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien

1983-1986<sup>148</sup>

---

Extraits

### Les conjectures de Weil

Les fameuses “conjectures de Weil”, pour une variété algébrique  $X$  définie sur un corps fini  $k$ , concernent la “fonction  $L$ ” (dite “de Artin-Weil”) associée à  $X$ . Celle-ci est définie comme une certaine série formelle à coefficients rationnels, dont la connaissance équivaut à celle du nombre de points de  $X$  rationnels sur le corps  $k$  et sur toutes ses extensions finies. La première assertion parmi ces conjectures, c’est que cette série formelle (à terme constant 1) est le développement en série d’une *fonction rationnelle* sur  $\mathbf{Q}$ . Toutes les autres affirmations concernent la forme particulière et les propriétés de cette fonction rationnelle, dans le cas particulier où  $X$  est connexe projective et non singulière — Au cœur de ces conjectures est une certaine formule, présumée canonique, présentant cette fonction rationnelle sous la forme

$$(L) \quad L(t) = \frac{P_0(t)P_2(t)\dots P_{2n}(t)}{P_1(t)\dots P_{2n-1}(t)},$$

---

<sup>148</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/ReS.pdf>

où les  $P_i$  ( $0 \leq i \leq 2n$ , avec  $n = \dim X$ ) sont des polynômes à coefficients entiers à terme constant 1. Le degré  $b_i$  de  $P_i$  est censé jouer le rôle d'un " $i$ .ème nombre de Betti" pour  $X$  (ou plus précisément, pour la variété correspondante  $\bar{X}$  sur la clôture algébrique  $\bar{k}$  du corps  $k$ ). Ainsi, quand  $X$  provient par "réduction en car.  $p > 0$ " d'une variété projective non singulière  $X_K$  définie sur un corps  $K$  de caractéristique nulle, alors  $b_i$  doit être égal au  $i$ .ème nombre de Betti (défini par voie transcendante) de la variété algébrique *complexe*, obtenue à partir de  $X_K$  par un plongement quelconque de  $K$  dans  $\mathbf{C}$ <sup>149</sup>. La fonction rationnelle doit satisfaire une *équation fonctionnelle*, qui équivaut à dire que les racines de  $P_{2n-1}$  sont exactement les  $q^n/\xi_\alpha$ , où  $q = p^f$  est le cardinal du corps de base  $k$ , et où  $\xi_\alpha$  parcourt les racines de  $P_i$ . (Moralement, cela devait "provenir" de l'existence d'une "dualité de Poincaré" pour la "cohomologie", non nommée et non définie, de la variété  $\bar{X}$ .) Je crois que Weil devait conjecturer également que pour  $i \neq n$ , les zéros de  $P_{2n-i}$  étaient exactement les  $q^{n-i}\xi_\alpha$ , où  $\xi_\alpha$  parcourt encore les zéros de  $P_i$  (ou, ce qui revient au même au vu de la condition de dualité, que les zéros de  $P_i$  se groupent par paires, de produit égal à  $q^i$  pour chacune). La "raison" heuristique ici est une autre propriété importante de la cohomologie des variétés projectives non singulières complexes, exprimée cette fois par le "théorème de Lefschetz" (version dite "vache"). Enfin, la dernière des conjectures de Weil, analogue "géométrique" de la conjecture de Riemann, est que les valeurs absolues des inverses des zéros de  $P_i$  sont toutes égales à  $q^{i/2}$  (assertion qui conduit à des estimations d'une grande précision sur des nombres de points de  $X$ <sup>150</sup>).

La rationalité de la fonction  $L$  d'une variété  $X$  générale avait été établie par Dwork en 1960, par des méthodes " $p$ -adiques" non cohomologiques. Cette méthode avait donc l'inconvénient de ne pas fournir d'interprétation cohomologique de la fonction  $L$ , et par suite ne se prête pas à une approche des autres conjectures, pour  $X$  projective non singulière. Dans ce dernier cas, l'existence d'un formal-

<sup>149</sup> Au moment où Weil faisait ses conjectures, il n'était pas même connu que les  $b_i$  définis ainsi étaient *indépendants* du plongement choisi de  $K$  dans  $\mathbf{Q}$ . Quelques années plus tard, cela allait résulter de la théorie de Serre de la cohomologie des faisceaux cohérents, qui donnait un sens "purelement algébrique" aux invariants plus fins  $h^{i,j}$  de la théorie de Hodge.

<sup>150</sup> De cette dernière des conjectures de Weil, résulte en même temps que l'écriture  $(L)$  de la fonction  $L$  est *unique*.

isme de cohomologie (sur un “corps de coefficients”  $\mathbf{R}$  de caractéristique nulle), incluant la dualité de Poincaré pour les variétés projectives non singulières, et un formalisme des classes de cohomologie associées aux cycles (transformant intersections en cup-produits), permet de façon essentiellement “formelle” de transcrire la classique “formule des points fixes de Lefschetz”. En appliquant cette formule à l’endomorphisme de Frobenius de  $\overline{X}$  et à ses itérés, on allait obtenir une expression (1) comme exigée par Weil, ou les  $P_i$ , sont des polynômes à coefficients dans  $\mathbf{R}$ . cela devait être clair pour Weil dès le moment où il avait énoncé ces conjectures (1949), et ça l’était en tous cas pour Serre comme pour moi dans les années cinquante — d’où justement la motivation initiale pour développer un tel formalisme. C’était là chose faite dès le mois de mars 1963, avec  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\ell$ ,  $\ell \neq p$ . Il y avait simplement deux grains de sel :

- a) Il n’était pas clair a priori (bien qu’on était persuadé que ce devait être vrai) que les polynômes  $P_i(t)$ , qui a priori étaient à coefficients dans l’anneau  $\mathbf{Z}_\ell$  des entiers  $\ell$ -adiques, étaient en fait des *entiers ordinaires*, et de plus, indépendants du nombre premier envisagé  $\ell$  ( $\ell \neq p = \text{car. } k$ ).
- b) De la rationalité de la fonction  $L$  pour une  $X$  projective non singulière, on ne pouvait déduire celle pour un  $X$  général, que si on disposait de la résolution des singularités.

Les problèmes soulevés par a) ont joué un rôle crucial, bien sur, pour l’éclosion et le développement du yoga *des motifs*, et dans la formulation ultérieure des *conjectures standard*, étroitement liées à ce yoga. Ils ont aussi stimulé la réflexion pour trouver également une théorie *cohomologique  $p$ -adique* (réalisée par la suite par la théorie “*cristalline*”), comme une approche possible pour prouver l’intégralité des coefficients des  $P_i$ , une fois qu’on saurait (p. ex. via une solution affirmative aux conjectures standard) qu’ils sont rationnels et indépendants de  $\ell$  ( $\gamma$  compris pour  $\ell = p$ ).

Quoi qu’il en soit, on avait donc dès 1963 l’expression (L) de la fonction  $L$  (mais qui a priori dépendait du choix de  $\ell$ ), l’équation fonctionnelle, et le bon comportement des nombres de Betti par spécialisation. Il restait donc à résoudre la question a), à prouver l’assertion pour les valeurs absolues des racines de  $P_i$ , et



enfin (pour faire bon poids) la relation “à la Lefschetz” sur les zéros de  $P_i$ . C’est ce qui a été fait dix ans plus tard dans l’article de Deligne “La conjecture de Weil I”, Pub. Math, de l’IHES n° 43 (1973) p. 273–308.

Comme ingrédients de cette démonstration de Deligne, on n’avait donc aucunement besoin d’une formule des points fixes plus sophistiquée que la formule “ordinaire”, qui était disponible (sans rien de “conjectural”) dès les débuts de 1963. Le seul autre ingrédient cohomologique dans l’article de Deligne, si je ne me trompe, est la théorie cohomologique des pinces de Lefschetz (version étale) que j’avais développée vers l’année 1967 ou 68, complétée par la formule de Picard-Lefschetz (prouvée dans le cadre étale par Deligne), l’un et l’autre exposés dans le volume SGA 7 II dont il a été question (et dont mon nom, comme par hasard, a quasiment disparu...).

La formule “plus sophistiquée” de points fixes, dite “*de Lefschetz-Verdier*”, a par contre joué un rôle *psychologique* important, pour m’encourager à dégager l’interprétation cohomologique (L) des fonctions  $L$ , valable pour toute variété  $X$  (pas nécessairement projective non singulière). Cette formule de Verdier me rappelait qu’il doit y avoir des formules de points fixes sans conditions de non-singularité sur  $X$  (comme il était bien connu déjà dans le cas de la formule de Lefschetz ordinaire), mais surtout, elle attirait mon attention sur le fait qu’il y a des formules de points fixes concernant la cohomologie à *coefficients dans un faisceau* (“constructible”) *quelconque*, interprétant une somme alternée de traces (dans des espaces de cohomologie à coefficients dans un tel faisceau) comme une somme de “termes locaux” correspondant aux points fixes d’un endomorphisme  $f : X \longrightarrow X$  (quand ceux-ci sont isolés). Dans cette motivation heuristique, le fait que cette formule de Lefschetz-Verdier “restait conjecturale”, en car.  $p > 0$  (faute de disposer de la résolution des singularités, et par là, du “théorème de bidualité”), *était entièrement irrelevant*<sup>151</sup>.

Comme si souvent, le pas essentiel ici a été de trouver “*la*” *bonne formulation*

---

<sup>151</sup> (20 mars) Ça l’était à tel point que l’an dernier, j’avais entièrement et depuis longtemps oublié ce fait, et suis tombé des nues en lisant (sous la plume de Deligne) que la formule de Lefschetz-Verdier “n’était établie que conjecturalement dans la version originale de SGA 5”. Je reviens sur ce point dans la réflexion du lendemain et du surlendemain (les 18 et 19 mars). (Dans les sousnotes n° 169<sub>6</sub> et 169<sub>7</sub>.)

(en l'occurrence pour une "formule cohomologique des fonctions  $L$ "). La formule de Verdier me suggérait de faire intervenir un faisceau  $\ell$ -adique (constructible) arbitraire, en lieu et place du faisceau de coefficients habituel (qui jusque là était resté implicite), savoir le faisceau constant  $\mathbf{Q}_\ell$ . Il fallait donc, en calquant la définition de Weil de la fonction  $L$  "ordinaire", en définir une "à coefficients dans  $F$ ". Une fois qu'on songe à le faire, la définition s'impose d'elle-même : c'est celle donnée dans mon exposé Bourbaki de décembre 1964 (Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions  $L$ , Sém. Bourbaki 279), qu'il est inutile de répéter ici. De plus, les "termes locaux" plausibles de la formule de Lefschetz-Verdier (en termes du faisceau de coefficients donné, et de la correspondance de Frobenius) s'imposaient également. Enfin (on est culotté ou on ne l'est pas !), pourquoi ne pas écrire la formule, ici, en abandonnant mime l'hypothèse de propreté de la formule de Lefschetz-Verdier "orthodoxe", mais en travaillant avec la cohomologie à *support propre* ? !

Ainsi, le pas essentiel, cette fois encore, avait été de dégager le "bon énoncé" (en l'occurrence, *la* "bonne formule"), *suffisamment générale* et par là-même, suffisamment *souple* pour se prêter à une démonstration, en "passant" sans problèmes à travers récurrences et "déviassages". Je n'aurais su (et personne à ce jour ne saurait) démontrer directement "la" formule des fonctions  $L$  "ordinaires", pour une  $X$  quelconque (ou même lisse, mais pas propre, ou inversement), en termes de cohomologie  $\ell$ -adique (à supports propres) à coefficients dans le faisceau  $\ell$ -adique *constant*  $\mathbf{Q}_\ell$ , sans passer par la généralisation faisceautique. (Pas plus que je n'aurais su, en car.  $p > 0$ , démontrer la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch *ordinaire*, si je ne l'avais d'abord généralisée comme une formule faisceautique pour une *application* propre de variétés algébriques lisses — et personne, à ma connaissance, ne saurait le faire aujourd'hui encore...)

Dans l'exposé Bourbaki en question, je me borne à donner l'énoncé général de la formule des fonctions  $L$  "à coefficients" dans un faisceau  $\ell$ -adique ordinaire, et je montre comment, par des déviassages très simples, on se ramène au cas où  $X$  est une courbe projective lisse et projective. Je savais bien qu'une fois arrivé là, *c'était gagné* — car on "tient en mains" suffisamment la dimension un, pour que la démonstration de la formule en question devienne une question de rou-

tine<sup>152</sup>. Je ne me suis pas occupé à ce moment de dégager une bonne formule de points fixes en dimension un et de la prouver, il me semblait que ce serait plutôt à Verdier de jouer. Il a donné une formule de points fixes, dite “de Woodshole”, l’année d’après, qui suffisait pour coiffer Frobenius et l’application aux fonctions  $L$ . J’ai pris connaissance de son énoncé, qui ne m’a pas vraiment satisfait, car il me semblait que les conditions qu’il imposait à sa correspondance cohomologique (pour les besoins d’une démonstration dont je n’ai pas pris connaissance) étaient un peu artificielles — j’aurais aimé une formule qui s’applique à tout endomorphisme d’une courbe algébrique. Le séminaire SGA 5 a été la première bonne occasion, pour développer une telle formule qui soit à mon goût. (C’est, sauf erreur, celle qui figure bel et bien dans l’exposé XII de l’édition-Illusie, ayant miraculeusement survécu aux vicissitudes qui ont frappé ce malheureux séminaire.) Les conjectures de Weil avaient été une motivation initiale, et un fil conducteur précieux, pour me “lancer” sur le développement d’un formalisme complet de cohomologie étale (et d’autres). Mais je sentais bien que le thème cohomologique, qui était au centre de mes efforts depuis huit ou neuf ans déjà et qui devait le rester encore pendant les années à venir jusqu’à mon départ en 1970, avait une portée plus vaste encore que les conjectures de Weil qui m’y avaient amené. Pour moi, l’endomorphisme de Frobenius n’était pas un “alpha et oméga” pour le formalisme cohomologique, mais un endomorphisme parmi bien d’autres...

## **$\mathcal{D}$ -modules et cristaux**

### **Le Bi-icosaèdre**

[...] Il me faut d’abord donner quelques explications préliminaires purement géométriques, sur la combinatoire de l’icosaèdre gauche et sur la notion de bi-

---

<sup>152</sup>Si je parle ici de “travail de routine”, ce n’est nullement dans un sens péjoratif. Les neuf dixièmes, si ce n’est même beaucoup plus, du travail mathématique est de ce type, aussi bien chez moi que chez tout autre mathématicien à qui il arrive de passer par des moments qui, justement, sont *autre chose*, des moments créateurs. Après Verdier, j’ai moi-même passé du temps à tourner la manivelle des techniques disponibles, délicates et bien huilées, pour trouver et prouver une formule de points fixes en dimension un qui me satisfasse (provisoirement du moins). C’était là du travail “de routine” tout comme l’avait été celui de Verdier.

icosaèdre gauche. Comme il semblerait que je sois le seul qui ait jamais pris la peine (et le plaisir) de regarder l'icosaèdre (ordinaire ou “gauche”, au choix) du point de vue combinatoire, et qu'il n'y a donc aucune référence dans la littérature sur ces choses (qui devraient être “bien connues” depuis plus de deux mille ans), je me fais un plaisir de développer ici “en forme” le peu dont nous aurons besoin, pour nous y reconnaître<sup>153</sup>.

Dans la suite, on se donne un ensemble  $S$  à six éléments ( $S$ , comme “sommets”). Les éléments de  $S$  s'appelleront “sommets”, et les parties à deux éléments de  $S$  (ou “paires”) dans  $S$  s'appelleront “arêtes”. Enfin, pour abréger, on appellera “triangles” (de  $S$ ) les parties de  $S$  à trois éléments. Si on désigne par  $A(S)$  ou  $A$ , et par  $T(S)$  ou  $T$  l'ensemble des arêtes et l'ensemble des triangles de  $S$ , on vérifie aussitôt que l'on a

$$\text{card}(S) = 6, \quad \text{card} A = 15, \quad \text{card} T = 20$$

(où la première relation est mise pour mémoire). (NB si  $E$  est un ensemble fini,  $\text{car}(E)$  désigne le nombre de ses éléments.)

Définition 1. — Une partie  $F$  de l'ensemble  $T$  des triangles de  $S$  est appelée une structure icosaédrale (sous-entendu : gauche) sur  $S$ , si toute arête de  $S$  est contenue dans exactement deux triangles appartenant à  $F$ .

En d'autres termes, si on appelle “faces” les triangles éléments de  $F$ , la condition envisagée dit que *chaque arête est contenue dans exactement deux faces*. Un ensemble  $S$  à six éléments muni d'une structure icosaédrale  $F$  est appelé un *icosaèdre com-*

---

<sup>153</sup>Mes réflexions sur l'icosaèdre, avec un fort accent sur l'aspect combinatoire, datent de 1977, où j'ai fait un cours de DEA d'une année sur ce thème magnifique. Cela a été en même temps ma première grosse frustration dans mon expérience enseignante. Malgré le niveau délibérément très élémentaire et très “visuel” où j'ai placé le cours, avec l'espoir de voir s'y impliquer les auditeurs (étudiants de troisième cycle ou enseignants à mon Université), je n'ai pas réussi à vraiment déclencher une étincelle de vrai intérêt et de participation en aucun. La seule exception a été la mise au point, par un ou deux parmi les auditeurs, de tracés de la projection stéréographique sur le plan de l'icosaèdre (vu comme inscrit sur la sphère unité, avec les arêtes figurées par des arcs de grand cercle), en faisant apparaître en même temps le dodécaèdre dual. Il est vrai que ces tracés stéréographiques (en prenant comme centre de projection soit un sommet, soit le milieu d'une arête, soit le centre d'une face) sont de toute beauté, surtout quand on tient compte du coloriage canonique des arêtes (voire, des faces également) en cinq couleurs...

*binatoire* (sous entendu : “gauche”, pour ne pas confondre avec l’icosaèdre “ordinaire”, qui a douze sommets au lieu de six), ou simplement un icosaèdre (gauche). Si  $I = (S, F)$  et  $I' = (S', F')$  sont deux tels icosaèdres, on appelle *isomorphisme* de l’un avec l’autre toute bijection

$$u : S \xrightarrow{\sim} S'$$

telle que  $u(F) = F'$ , i.e. telle que les faces de  $I'$  soient exactement les images par  $u$  des faces de  $I$ .

On peut “regarder” un icosaèdre en “centrant” son attention soit sur un sommet, soit sur une arête, soit sur une face, de façon à obtenir trois types de “perspectives” différentes, pour l’étudier. Ce sera la perspective centrée sur une face, qui sera la plus commode pour notre propos actuel. Voici l’énoncé récapitulatif, contenant tout ce qui nous sera nécessaire (et au delà) :

**Théorème 1.** —

- a) Deux icosaèdres (combinatoires gauches) sont toujours isomorphes, et plus précisément, il y a exactement 60 isomorphismes de l’un avec l’autre.
- b) Un icosaèdre a exactement dix faces. Si  $f$  est une face d’un icosaèdre  $I = (S, F)$ ,  $f''$  une face d’un icosaèdre  $I' = (S', F')$ , alors pour toute bijection  $u_0$  de  $f$  avec  $f'$ , il existe un isomorphisme et un seul  $u$  de  $I$  avec  $I'$ , tel que  $u$  transforme  $f$  en  $f''$  et induise entre  $f$  et  $f'$  la bijection  $u_0$ .
- c) Soit  $I = (S, F)$  un icosaèdre, et  $F'$  le complémentaire de  $F$  dans  $T$ , i.e. l’ensemble des triangles de  $S$  qui ne sont pas des faces. Alors pour toute face  $f \in F$  de  $I$ , son complémentaire  $f'$  dans  $S$  (i.e. l’ensemble des sommets qui n’appartiennent pas à la face  $f$ ) est dans  $F'$  (i.e. est un triangle qui n’est pas une face de  $I$ ). L’application

$$f \mapsto f' : F \longrightarrow F'$$

est une bijection de  $F$  avec  $F'$ . Enfin,  $F'$  est également une structure icosaédrale sur  $S$  (appelée structure icosaédrale complémentaire de la structure  $F$ ).

- d) Soient  $S$  un ensemble de sommets à six éléments,

$$\text{Ic}(S) \subset \mathfrak{P}(T(S)) \quad (= \text{ens. des parties de } T(S))$$

l'ensemble des structures icosaédrales sur  $S$ . Alors  $\text{Ic}(S)$  a douze éléments, et l'application

$$F \mapsto F', \quad \text{Ic}(S) \longrightarrow \text{Ic}(S)$$

et une involution sans points fixes de cet ensemble (i.e. on a, pour tout  $F$  dans  $\text{Ic}(S)$ ,  $(F')' = F$  et  $F' \neq F$ .)

- e) Soient  $F$  une structure icosaédrale sur  $S$ ,  $F'$  la structure complémentaire,  $f \in F$  une face de  $F$ ,  $f' \in F'$  la face de  $F'$  complémentaire de  $f$ . Pour tout sommet  $s \in f$ , soit  $s'$  le “troisième sommet” de l'unique face  $f(s)$  de  $F$ , distincte de  $f$ , contenant l'arête  $a_s = f - \{s\}$ . On a alors  $s' \in f'$ , et l'application

$$s \mapsto s' : f \longrightarrow f'$$

est une bijection de  $f$  avec  $f'$ , notée

$$u_f : f \xrightarrow{\sim} f'.$$

On définit de même (en interchangeant les rôles de  $F$  et de  $F'$ ) une bijection

$$u_{f'} : f' \xrightarrow{\sim} f.$$

Ses bijections sont inverses l'une de l'autre :

$$u_{f'} u_f = \text{id}_f, \quad u_f u_{f'} = \text{id}_{f'}.$$

- f) Soit  $S$  un ensemble à six éléments,  $f$  un triangle de  $S$ ,  $f'$  le triangle complémentaire,  $P_f$  l'ensemble des bijections de  $f$  avec  $f'$  (c'est un ensemble à six éléments), et  $\varepsilon_f = \{f, f'\}$  la partie à deux éléments de  $T(S)$  (ensemble des triangles), formée de  $f$  et de  $f'$ . Pour toute structure icosaédrale  $F$  sur  $S$ , soit

$$c(F) = (\alpha(F), u(F)) \in \varepsilon_f \times P_f$$

défini ainsi :  $\alpha(F)$  est égal à  $f$  ou à  $f'$ , suivant que  $f \in F$  ou  $f' \in F$  (i.e.  $\alpha(F)$  est l'unique élément de  $\varepsilon_f$  tel que  $\alpha(F) \in F$ ), et  $u(F)$  est égal à  $u_f$  (notations de d)). On a donc défini une application

$$c : \text{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

*Cette application est bijective. En d'autres termes, "il revient au même" de se donner une structure icosaédrale  $F$  sur  $S$ , ou de se donner un couple d'éléments  $(\varphi, u)$ , où  $\varphi$  est l'un des deux éléments  $f, f'$  (celui qui doit être face de  $F$ ), et où  $u$  est une bijection  $f \xrightarrow{\sim} f'$ .*

**Démonstration du théorème.** La partie a) est conséquence de b), compte tenu qu'il y a exactement 6 bijections de  $f$  avec  $f'$  et 10 faces de  $I'$ , et que  $60 = 10 \cdot 6$ . D'autres part, dans d) le fait que  $F \mapsto F'$  soit une involution sans points fixes, est évident sur la définition donnée dans c). Quant au fait que  $\text{Ic}(S)$  a douze éléments, cela résulte aussitôt de a) par un argument de "comptage" standard (vu que le groupe de toutes les bijections de  $S$  avec lui même a  $6! = 654321 = 720$  éléments, et que le sous-groupe stabilisateur de  $F$  en a soixante, d'où le nombre

$$12 = 720/60 \quad .)$$

Une autre façon de retrouver 12 (via la "perspective autour d'une face" expliquée dans f)) est par<sup>154</sup>

$$12 = 2 \times 6.$$

Il y a donc à prouver seulement les parties b), c), e), f). Dans b), c), f) on part d'une structure icosaédrale donnée  $(S, F)$ . Comme chaque arête est contenue dans

---

<sup>154</sup>Il s'agit ici de la description, utilisant la "perspective" centrée sur une face. Il y a deux autres descriptions toutes aussi instructives de l'ensemble  $\text{Ic}(S)$ , obtenues par la perspective centrée soit sur une arête, soit sur un sommet. Enfin, je signale aussi la bijection canonique suivante

$$\text{Ic}(S) \text{Bic}(S) \times \omega(S),$$

où  $\text{Bic}(S)$  désigne l'ensemble des structures biicosaédrales sur  $S$ , et  $\omega(S)$  l'ensemble à deux éléments formé des "orientations" de  $S$  (i.e. l'ensemble quotient de l'ensemble des "repères" de  $S$  i.e. des numérations de ses éléments de 1 à 6, par l'action du sous-groupe alterné du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_6$ ). L'application est obtenue en associant à toute structure icosaédrale  $F$ , d'une part la structure biicosaédrale associée  $\{F, F'\}$ , et d'autre part une certaine orientation  $\text{or}(F)$  de  $S$  canoniquement associée à  $F$ , que je me dispense de décrire ici. Il se trouve que l'on a

$$\text{or}(F) \neq \text{or}(F'),$$

de sorte que les deux structures icosaédrales correspondant à une même structure biicosaédrale  $\{F, F'\}$  sont "repérées" par les deux orientations possibles de  $S$ .

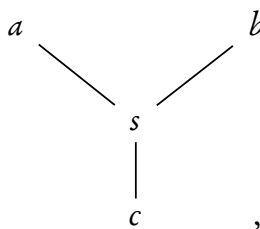
deux faces, il existe au moins une face, soit  $f$ . Soit  $f'$  son complémentaire dans  $S$ , et considérons l'application

$$u_f : f \longrightarrow f', \quad a \mapsto a'$$

définie dans e). Montrons qu'elle est injective, donc bijective (puisque  $f$  et  $f'$  ont même nombre d'éléments, savoir trois). Si on avait deux sommets distincts  $a \neq b$  dans  $f$ , tels que  $a' = b'$ , alors posant

$$c = a' = b'$$

et désignant par  $s$  le troisième sommet de  $f$ , on aurait une configuration



avec trois faces  $\{s, b, c\}$ ,  $\{s, c, a\}$ ,  $\{s, a, b\}$  se rajustant cycliquement autour de  $s$ , le long d'arêtes communes  $\{s, a\}$ ,  $\{s, b\}$ ,  $\{s, c\}$ . Je dis que ce n'est pas possible.

Soient en effet  $u$  et  $v$  les deux points de  $S$  distincts des points précédents  $s, a, b, c$ , considérons l'arête  $\{s, u\}$ , et soit  $h$  une face qui la contienne. Alors le troisième sommet de  $h$  (distinct de  $s$  et  $u$  par définition) ne peut pas être égale à un des trois points  $a, b, c$ , disons  $a$ , car l'arête  $\{s, a\}$  serait contenue dans trois faces de l'icosaèdre. Donc le troisième sommet est  $v$ , et l'arête  $\{s, u\}$  ne serait contenue que dans le seul triangle  $\{s, u, v\}$ , absurde.

Nous avons maintenant que si  $a, b, c$  sont les trois sommets de la face  $f$ , alors les sommets  $a', b', c'$  dans  $f'$  sont distincts, donc les six sommets de l'icosaèdre sont  $a, b, c, a', b', c'$ . Nous pouvons maintenant écrire la liste de l'ensemble de toutes les faces de l'icosaèdre, via la "perspective par rapport à  $f$ ". Pour bien visualiser cette liste, il est pratique de faire un dessin, où les sommets sont figurés par des points du plan, les arêtes par des segments joignant ces points, et les faces par des aires triangulaires délimitées par les trois arêtes contenues dans la face. De plus, pour une bonne visibilité du graphisme, on va faire figurer chacun des points  $a', b', c'$  (mais



non  $a, b, c$ ) en *deux* exemplaires, dont le deuxième sera désigné (en tant que point du plan) par  $a'', b'', c''$  respectivement. Ainsi,  $a'$  et  $a''$  sont des points différents du plan, mais qui désignent le même élément de l'ensemble "abstrait"  $S$ .

On trouve la figure suivante, qui peut aussi être interprétée comme une vue "en perspective" de l'icosaèdre régulier ordinaire dans l'espace, vue "centrée" sur une face (nommée  $\{a, b, c\}$ )

Sur cette figure apparaissent dix figures (triangulaires), parmi lesquelles les quatre faces de départ

$$(1) \quad f = \{a, b, c\}, \quad f_a = \{b, c, a'\}, \quad f_b = \{c, a, b'\}, \quad f_c = \{a, b, c'\}$$

plus les six faces "externes", se raccordant par paires le long des trois arêtes  $\{a, a''\} = \{a, a'\}$ ,  $\{b, b''\} = \{b, b'\}$ ,  $\{c, c''\} = \{c, c'\}$ . Donc, en toutes lettres

$$(2) \quad f_{a,b} = \{a, a'', b'\} = \{a, a', b'\},$$

et les cinq triangles similaires  $f_{a,c}, f_{b,c}, f_{b,a}, f_{c,a}, f_{c,b}$ . Pour montrer que  $f_{a,b}$  (par exemple) est bien une face, on note que l'arête  $\{a, a''\} = \{a, a'\}$  doit appartenir à deux faces, dont le troisième sommet ne peut être ni  $b$  ni  $c$  (car chacune des arêtes  $a, b$  et  $a, c$  sont déjà contenues dans deux parmi les quatre faces (1)), donc il ne reste comme possibilité que  $b'$  et  $c'$ , d'où les faces  $f_{a,b}$  et  $f_{a,c}$ .

Je dis que l'ensemble de ces dix faces épuise l'ensemble  $F$  de toutes les faces. Pour ceci, comptons le nombre d'arêtes figurant dans notre graphisme représentatif. Trois pour  $f$ , deux supplémentaires pour chacun des trois triangles  $f_a, f_b, f_c$  (ça fait neuf), trois arêtes de la forme  $\{a, a''\} = \{a, a'\}$  (fait douze), et six qui forment le contour de la figure (arêtes de la forme  $\{a', b''\}$  etc), ça fait dix-huit, alors qu'il n'y en a que quinze arêtes en tout ! Mais on note que les arêtes telles que  $\{a', b''\}$  et  $\{a'', b'\} = \{b', a''\}$ , symétriques par rapport au centre de la figure, représentant une seule et même arête de  $S$  (savoir  $\{a', b'\}$  en l'occurrence), ce qui fait que le compte est bon : toutes les arêtes de  $S$  figurent sur notre tracé, et une seule fois sauf celles de triangle  $\{a', b', c'\}$ , lesquelles y figurent deux fois.

Ceci dit, un rapide coup d'oeil sur la figure nous convainc que chacune des arêtes qui y figurent, appartient bien à exactement deux parmi les dix faces précédentes et une seule. Si donc il existait une face  $h$  qui ne faisant pas partie de ce

paquet de dix, alors une arête contenue dans  $b$  appartiendrait à au moins trois faces, absurde.

Ainsi, on est arrivé expliciter le “tracé” d’un icosaèdre quelconque, à partir d’une de ses faces, comme une “figure standard”. La partie b) du théorème 1 est une conséquence immédiat de cette détermination.

Ainsi, b) donc aussi a) sont prouvés, prouvons c). Le fait que pour une face  $f$  (que nous pouvons prendre comme notre face centrale), le triangle complémentaire ne soit pas une face, est immédiat sur notre tracé, puisque  $f' = (a', b', c')$  ne figure pas parmi nos dix faces. Comme l’ensemble  $T$  des triangles à 20 éléments et que  $F$  en a dix,  $F'$  en a dix, et comme l’application  $f \mapsto f'$  de  $F$  dans  $F'$  est évidemment injective, elle est bijective. En d’autres termes, pour qu’un triangle  $f$  de  $S$  soit une face, il faut *et il suffit* que le triangle complémentaire ne le soit pas.

Pour terminer de prouver c), il reste à prouver que  $F'$  est une structure icosaédrale, donc que pour toute arête  $L$  de  $S$ , il y a exactement deux triangles éléments de  $F'$  qui la contiennent. Passant aux complémentaires dans  $S$ , cela revient à dire que toute partie “carrée” de  $S$  (i.e. une partie ayant quatre éléments), contient exactement deux faces (pour la structure icosaédrale  $F$ ). Or les faces non contenues dans cette partie  $S - L$  sont exactement celles qui rencontrent son complémentaire  $L = \{a, b\}$ , i.e. celles qui contiennent soit  $a$ , soit  $b$ . Or l’ensemble  $F_a$  des faces contenant le sommet  $a$  a exactement cinq éléments (voir le tracé, où on peut bien sûr supposer que  $a$  est bien un sommet de la face de départ  $f$  utilisée pour faire le tracé), et de même pour  $F_b$ , d’autre part l’intersection  $F_a \cap F_b$  est formée des faces qui contiennent l’arête  $\{a, b\}$ , donc a exactement deux éléments. Il s’ensuit que  $F_a \cup F_b$  a  $5 + 5 - 2 = 8$  éléments. Comme  $F$  en a dix, il reste bien deux éléments de  $F$  pour être contenus dans  $S - L$ .

Il reste à prouver e) et f). Dans e), il ne reste plus qu’à prouver la relation

$$u_{f'} u_f = \text{id}_f,$$

et la relation symétrique (qui s’en déduira en échangeant les rôles de  $F$  et de  $F'$ ). Utilisant encore  $f$  pour faire le tracé plus haut, cette relation se lit sur la figure : l’appliquant à  $a$  par exemple (ce sera pareil pour  $b$  et  $c$ ) cette relation  $(a')' = a$  équivaut simplement à dire que le triangle  $\{b', c', a\}$  est une face pour  $F'$ , c’est à dire, n’est *pas* une face pour la structure de départ, ce qui est bien le cas.

Reste à prouver f), i.e. la bijectivité de l'application

$$c : F \mapsto (\alpha(F), u(F)) : \text{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cela signifie que pour tout couple  $(\varphi, u)$ , où  $\varphi$  est un des triangles  $f, f'$  et où  $u$  est une bijection  $u : f \xrightarrow{\sim} f'$ , il existe une unique structure icosaédrale  $F$  dont il provienne. Si  $\varphi = f$ , cela revient à dire qu'il existe une unique structure icosaédrale admettant  $f$  comme face, et donnant lieu à la bijection  $u$  - et c'est bien ce que nous avons vu dans la construction explicite de tantôt. Si  $\varphi = f''$ , cela signifie qu'il existe une unique structure  $F$  tel que  $f' \in F$ , et que  $u_f = u$ . Désignant par  $F'$  la structure icosaédrale complémentaire, cela signifie aussi qu'il existe une unique structure icosaédrale  $F'$  telle que  $f \in F'$  et  $u_f = u$ , ce qui (au changement de notation près) est ce qu'on vient de voir.

Cela achève la démonstration du théorème 1.

**Définition 2.** — Soit  $S$  un ensemble à six éléments. On appelle structure biicosaédrale (*combinatoire gauche*) sur  $S$ , une paire formée de deux structures icosaédrales complémentaires l'une de l'autre.

En vertu de la partie d) du théorème, il y a donc sur  $S$  exactement  $12/2 = 6$  structures biicosaédrales. D'après la partie f), si  $f$  est un triangle de  $S$  et  $f'$  le triangle complémentaire, l'ensemble  $S^*$  de ces six structures icosaédrales est en correspondance biunivoque canonique avec  $P_f =$  ensemble des bijections de  $f$  avec  $f'$ . De façon plus précise, si on identifie l'ensemble  $\text{Ic}(S)$  des structures icosaédrales sur  $S$  avec l'ensemble produit  $\varepsilon_f \times P_f$  comme dans f), alors l'opération  $F \mapsto F'$  de passage à la structure icosaédrale complémentaire s'interprète comme l'opération

$$(\varphi, u) \mapsto (\varphi', u),$$

où pour tout  $\varphi$  dans l'ensemble à deux éléments  $\varepsilon_f = \{f, f''\}$ ,  $\varphi'$  désigne l'autre élément de  $\varepsilon_f$ .

On appelle *biicosaèdre combinatoire gauche* (ou simplement *biicosaèdre*) un couple  $(S, \{F, F'\})$  formé d'un ensemble  $S$  à six éléments, et d'une structure biicosaédrale  $\{F, F'\}$  sur  $S$ , formée de deux structures icosaédrales  $F, F'$  complémentaires l'une de l'autre.

On définit les *isomorphismes* de tels objets de la façon habituelle. On notera que deux biicosaèdres sont isomorphes, et l'ensemble des isomorphismes de l'un sur l'autre a exactement 120 éléments. Par exemple, si on regarde les automorphismes d'un biicosaèdre  $(S, \{F, F'\})$ , ceux-ci forment un "groupe" (au sens technique mathématique du terme : stabilité par composition et par passage à l'inverse), lequel se décompose en deux sous-ensembles disjoints, ayant chacun 60 éléments (faisant donc bien un total de 120) : le premier est formé des bijection de  $S$  avec lui-même (ou "permutations" de  $S$ ) qui transforment  $F$  en lui-même, ou ce qui revient au même,  $F'$  en lui-même - en d'autres termes, ce sont les automorphismes de l'icosaèdre  $(S, F)$  (ou  $(S, F')$ ). Le deuxième est formé des permutations qui transforment  $F$  en  $F'$ , ou ce qui revient au même,  $F'$  en  $F$ , c'est à dire encore les isomorphismes de l'icosaèdre  $(S, F)$  avec  $(S, F')$ . Par la partie a du théorème 1, il y en a bien 60 également.

Là je me suis laissé entraîner à en dire nettement plus que ce qu'il faut pour mon propos "philosophique"<sup>155</sup>. La chose essentielle, c'est de bien voir la structure de l'icosaèdre (gauche), mise en évidence sur le tracé de la page PU 119, la notion d'icosaèdre complémentaire (donnant lieu à la notion de biicosaèdre), et enfin la description de structures icosaédrales ou biicosaédrales sur  $S$ , en termes de l'ensemble  $P_f$  des six bijection d'une triangle préalablement donné  $f$  de  $S$ , avec son complémentaire  $f'$ . Enfin, du point de vue de l'intuition géométrique spatiale de la structure combinatoire, il est fort utile, pour s'y reconnaître, d'avoir chez soi un modèle en carton de l'icosaèdre régulier ordinaire<sup>156</sup>, lequel a douze sommets,

---

<sup>155</sup>(14 avril) Par contre, c'est peu pour mon ardeur de mathématicien, laquelle s'est à nouveau réveillée ces jours derniers - et voilà repartie ma réflexion sur l'icosaèdre, cet amour mathématique de mon âge mûr ! Je vais donc peut-être rajouter à ces notes (en appendice ?) quelques compléments sur la combinatoire de l'icosaèdre et sur la géométrie des ensembles à six éléments. . .

<sup>156</sup>J'en ai un chez moi, et de toute beauté, qui représente la "copie" d'un élément de première année de Fac, pour un examen de fin d'année d'un "cours d'option" (en collaboration avec Christine Voisin) sur l'icosaèdre (en 1976, je crois). Contrairement à mon cours de DEA l'année suivante sur le même thème, ce cours adressé à des étudiants frais émoulus du lycée avait rencontré une participation chaleureuse. Les résultats à l'examen étaient si brillants que mes collègues professeurs ont cru à un canular que j'aurais monté pour discréditer le fonction enseignant, et ils ont diminué d'office toutes les notes d'un tiers (les 18 sur 20 devenant 12 sur 20). C'est à cette occasion que j'ai appris avec stupéfaction que la plupart de mes collègues considéraient comme choquante l'idée

trente arêtes et vingt faces, et de “visualiser” un icosaèdre combinatoire gauche, comme décrit (de façon essentiellement canonique, en un sens qu’il serait facile à expliciter<sup>157</sup>), en termes d’un icosaèdre “ordinaire” ou “pythagoricien” (vu comme un solide dans l’espace), en prenant comme sommets, arêtes et faces de l’icosaèdre gauche, les *paires* de sommets, arêtes ou faces diamétralement opposées du solide pythagoricien. C’est bien dans cet esprit qu’a été fait le tracé de la page PU 119, où les paires  $\{a', a''\}$ ,  $\{b', b''\}$  et  $\{c', c''\}$  désignent justement des paires de sommets opposés de l’icosaèdre-solide, et de même pour les paires d’arêtes ( $\{a', b''\}$ ,  $\{a'', b'\}$ ) etc, qu’il nous avait fallu justement identifier à une seule arête.

---

qu’un étudiant puisse prendre du plaisir à étudier et à préparer un examen. Eux-mêmes s’étaient bien assez emmerdés pour faire les études et arriver à leur belle situation de prof. de Fac, il n’y avait vraiment aucune raison que les autres à présent ne s’emmerdent à leur tour...

<sup>157</sup>Si on a deux telles “réalisations” par des icosaèdres-solides (ou “pythagoriciens”), alors il existe une *unique* similitude directe de l’un avec l’autre, compatible avec ces réalisations i.e. avec les “marquages” des paires de sommets opposés par les points de  $S$ . Si les deux icosaèdres ont même “taille” i.e. même longueurs d’arêtes, alors la similitude en question sera même un “déplacement”.

## ESQUISSE D'UN PROGRAMME<sup>158</sup>

---

N:B. Les astérisques (\*) renvoient aux notes figurant au bas de la même page, les renvois numérotés de (¹) à (⁷) aux notes (rajoutées ultérieurement) réunies à la fin du rapport.

### 1. Envoi

Comme la conjoncture actuelle rend de plus en plus illusoire pour moi les perspectives d'un enseignement de recherche à l'Université, je me suis résolu à demander mon admission au CNRS, pour pouvoir consacrer mon énergie à développer mes travaux et perspectives dont il devient clair qu'il ne se trouvera aucun élève (ni même, semble-t-il, aucun congénère mathématicien) pour les développer à ma place.

En guise de document "Titres et Travaux", on trouvera à la suite de ce texte la reproduction intégrale d'une esquisse, par thèmes, de ce que je considérais comme mes principales contributions mathématiques au moment d'écrire ce rapport, en 1972. Il contient également une liste d'articles publiés à cette date. J'ai cessé toute publication d'articles scientifiques depuis 1970. Dans les lignes qui suivent, je me propose de donner un aperçu au moins sur quelques thèmes principaux de mes réflexions mathématiques depuis lors. Ces réflexions se sont matérialisées au cours des années en deux volumineux cartons de notes manuscrites, difficilement déchiffrables sans doute à tout autre qu'à moi-même, et qui, après des

---

<sup>158</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/esqproscan.pdf>

stades de décantations successives, attendent leur heure peut-être pour une rédaction d'ensemble tout au moins provisoire, à l'intention de la communauté mathématique. Le terme “rédaction” ici est quelque peu impropre, alors qu'il s'agit bien plus de développer des idées et visions multiples amorcées au cours de ces douze dernières années, en les précisant et les approfondissant, avec tous les rebondissements imprévus qui constamment accompagnent ce genre de travail – un travail de découverte donc, et non de compilation de notes pieusement accumulées. Et je compte bien, dans l'écriture des “Réflexions Mathématiques” commencée depuis février 1983, laisser apparaître clairement au fil des pages la démarche de la pensée qui sonde et qui découvre, en tâtonnant dans la pénombre bien souvent, avec des trouées de lumière subites quand quelque tenace image fausse, ou simplement inadéquate, se trouve enfin débusquée et mise à jour, et que les choses qui semblaient de guingois se mettent en place, dans l'harmonie mutuelle qui leur est propre.

Quoi qu'il en soit, l'esquisse qui suit de quelques thèmes de réflexions des dernières dix ou douze années, tiendra lieu en même temps d'esquisse de programme de travail pour les années qui viennent, que je compte consacrer au développement de ces thèmes, ou au moins de certains d'entre eux. Elle est destinée, d'une part aux collègues du Comité National appelés à statuer sur ma demande, d'autre part à quelques autres collègues, anciens élèves, amis, dans l'éventualité où certaines des idées esquissées ici pourraient intéresser l'un d'entre eux.

## 2. Un jeu de “Lego-Teichmüller” et le groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$

Les exigences d'un enseignement universitaire, s'adressant donc à des étudiants (y compris les étudiants dits “avancés”) au bagage mathématique modeste (et souvent moins que modeste), m'ont amené à renouveler de façon draconienne les thèmes de réflexion à proposer à mes élèves, et de fil en aiguille et de plus en plus, à moi-même également. Il m'avait semblé important de partir d'un bagage intuitif commun, indépendant de tout langage technique censé l'exprimer, bien antérieur à tout tel langage – il s'est avéré que l'intuition géométrique et topologique des formes, et plus particulièrement des formes bidimensionnelles, était un tel terrain commun. Il

s'agit donc de thèmes qu'on peut grouper sous l'appellation de "topologie des surfaces" ou "géométrie des surfaces", étant entendu dans cette dernière appellation que l'accent principal se trouve sur les propriétés topologiques des surfaces, ou sur les aspects combinatoires qui en constituent l'expression technique la plus terre-à-terre, et non sur les aspects différentiels, voire conformes, riemaniens, holomorphes et (de là) l'aspect "courbes algébriques complexes". Une fois ce dernier pas franchi cependant, voici soudain la géométrie algébrique (mes anciennes amours!) qui fait irruption à nouveau, et ce par les objets qu'on peut considérer comme les pierres de construction ultimes de toutes les autres variétés algébriques. Alors que dans mes recherches d'avant 1970, mon attention systématiquement était dirigée vers les objets de généralité maximale, afin de dégager un langage d'ensemble adéquat pour le monde de la géométrie algébrique, et que je ne m'attardais sur les courbes algébriques que dans la stricte mesure où cela s'avérait indispensable (notamment en cohomologie étale) pour développer des techniques et énoncés "passe-partout" valables en toute dimension et en tous lieux (j'entends, sur tous schémas de base, voire tous topos annelés de base...), me voici donc ramené, par le truchement d'objets si simples qu'un enfant peut les connaître en jouant, aux débuts et origines de la géométrie algébrique, familiers à Riemann et à ses émules !

Depuis environ 1975, c'est donc la géométrie des surfaces (réelles), et à partir de 1977 les liens entre les questions de géométrie des surfaces et la géométrie algébrique des courbes algébriques définies sur des corps tels que  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$  ou des extensions de type fini de  $\mathbf{Q}$ , qui ont été ma principale source d'inspiration, ainsi que mon fil conducteur constant. C'est avec surprise et avec émerveillement qu'au fil des ans je découvrais (ou plutôt, sans doute, redécouvrais) la richesse prodigieuse, réellement inépuisable, la profondeur insoupçonnée de ce thème, d'apparence si anodine. Je crois y sentir un point névralgique entre tous, un point de convergence privilégié des principaux courants d'idées mathématiques, comme aussi des principales structures et des visions des choses qu'elles expriment, depuis les plus spécifiques, (tels les anneaux  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\overline{\mathbf{Q}}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  ou le groupe  $\mathrm{Sl}(2)$  sur l'un de ces anneaux, ou les groupes algébriques réductifs généraux) aux plus "abstraits", telles les "multiplicités" algébriques, analytiques complexes ou analytiques réelles. (Celles-ci s'introduisent naturellement quand il s'agit d'étudier systématiquement des



“variétés de modules” pour les objets géométriques envisagés, si on veut dépasser le point de vue notoirement insuffisant des “modules grossiers”, qui revient à “tuer” bien malencontreusement les groupes d’automorphismes de ces objets.) Parmi ces multiplicités modulaires, ce sont celles de Mumford-Deligne pour les courbes algébriques “stables” de genre  $g$ , à  $\nu$  points marqués, que je note  $\widehat{M}_{g,\nu}$  (compactification de la multiplicité “ouverte”  $M_{g,\nu}$  correspondant aux courbes lisses), qui depuis quelques deux ou trois années ont exercé sur moi une fascination particulière, plus forte peut-être qu’aucun autre objet mathématique ‘a ce jour. À vrai dire, il s’agit plutôt du système de *toutes* les multiplicités  $M_{g,\nu}$  pour  $g, \nu$  variables, liées entre elles par un certain nombre d’opérations fondamentales (telles les opérations de “bouchage de trous” i.e. de “gommage” de points marqués, celle de “recollement”, et les opérations inverses), qui sont le reflet en géométrie algébrique absolue de caractéristique zéro (pour le moment) d’opérations géométriques familières du point de vue de la “chirurgie” topologique ou conforme des surfaces. La principale raison sans doute de cette fascination, c’est que cette structure géométrique très riche sur le système des multiplicités modulaires “ouvertes”  $M_{g,\nu}$  se reflète par une structure analogue sur les groupoïdes fondamentaux correspondants, les “groupoïdes de Teichmüller”  $\widehat{T}_{g,\nu}$ , et que ces opérations au niveau des  $\widehat{T}_{g,\nu}$  ont un caractère suffisamment intrinsèque pour que le groupe de Galois  $\Gamma$  de  $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$  opère sur toute cette “tour” de groupoïdes de Teichmüller, en respectant toutes ces structures. Chose plus extraordinaire encore, cette opération est *fidèle* – à vrai dire, elle est fidèle déjà sur le premier “étage” non trivial de cette tour, à savoir  $\widehat{T}_{0,4}$  – ce qui signifie aussi, essentiellement, que l’action extérieure de  $\Gamma$  sur le groupe fondamental  $\hat{\pi}_{0,3}$  de la droite projective standard  $\mathbb{P}^1$  sur  $\mathbf{Q}$ , privée des trois points  $0, 1, \infty$ , est déjà fidèle. Ainsi le groupe de Galois  $\Gamma$  se réalise comme un groupe d’automorphismes d’un groupe profini des plus concrets, respectant d’ailleurs certaines structures essentielles de ce groupe. Il s’ensuit qu’un élément de  $\Gamma$  peut être “paramétré” (de diverses façons équivalentes d’ailleurs) par un élément convenable de ce groupe profini  $\hat{\pi}_{0,3}$  (un groupe profini libre à deux générateurs), ou par un système de tels éléments, ce ou ces éléments étant d’ailleurs soumis à certaines conditions simples, nécessaires (et sans doute non suffisantes) pour que ce ou ces éléments corresponde(nt) bien à un élément de  $\Gamma$ . Une des tâches les plus fascinantes ici, est justement d’appréhender

des conditions nécessaires *et* suffisantes sur un automorphisme extérieur de  $\hat{\pi}_{0,3}$  i.e. sur le ou les paramètres correspondants, pour qu'il provienne d'un élément de  $\Gamma$  – ce qui fournirait une description “purement algébrique”, en termes de groupes profinis et sans référence à la théorie de Galois des corps de nombres, du groupe de Galois  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  !

Peut-être une caractérisation même conjecturale de  $\Gamma$  comme sous-groupe de  $\text{Autext}(\hat{\pi}_{0,3})$  est-elle pour le moment hors de portée <sup>(1)</sup> ; je n'ai pas de conjecture à proposer encore. Une autre tâche par contre est abordable immédiatement, c'est celle de décrire l'action de  $\Gamma$  sur toute la tour de Teichmüller, en termes de son action sur le “premier étage”  $\hat{\pi}_{0,3}$ , i.e. exprimer un automorphisme de cette tour, en termes du “paramètre” dans  $\hat{\pi}_{0,3}$ , qui repère l'élément courant  $\gamma$  de  $\Gamma$ . Ceci est lié à une représentation de la tour de Teichmüller (en tant que groupoïde muni d'une opération de “recollement”) par générateurs et relations, qui donnera en particulier une présentation par générateurs et relations, au sens ordinaire, de chacun des  $\widehat{T}_{g,v}$  (en tant que groupoïde profini). Ici, même pour  $g = 0$  (donc quand les groupes de Teichmüller correspondants sont des groupes de tresses “bien connus”), les générateurs et relations connus à ce jour dont j'ai eu connaissance, me semblent inutilisables tels quels, car ils ne présentent pas les caractères d'invariance et de symétrie indispensables pour que l'action de  $\Gamma$  soit directement lisible sur cette présentation. Ceci est lié notamment au fait que les gens s'obstinent encore, en calculant avec des groupes fondamentaux, à fixer un seul point base, plutôt que d'en choisir astucieusement tout un paquet qui soit invariant par les symétries de la situation, lesquelles sont donc perdues en route. Dans certaines situations (comme des théorèmes de descente à la Van Kampen pour groupes fondamentaux) il est bien plus élégant, voire indispensable pour y comprendre quelque chose, de travailler avec des groupoïdes fondamentaux par rapport à un paquet de points base convenable, et il en est certainement ainsi pour la tour de Teichmüller. Il semblerait (incroyable, mais vrai !) que la géométrie même du premier étage de la tour de Teichmüller (correspondant donc aux “modules” soit pour des droites projectives avec quatre points marqués, soit pour des courbes elliptiques (!)) n'ait jamais été bien explicitée, par exemple la relation entre le cas de genre 0 avec la géométrie de l'octaèdre, et celle du tétraèdre. A fortiori les multiplicités modulaires  $M_{0,5}$  (pour

les droites projectives avec cinq points marqués) et  $M_{1,2}$  (pour les courbes de genre 1 avec deux points marqués), d'ailleurs quasiment isomorphes entre elles, semblent-elles terre vierge – les groupes de tresses ne vont pas nous éclairer à leur sujet ! J'ai commencé à regarder  $M_{0,5}$  à des moments perdus, c'est un véritable joyau, d'une géométrie très riche étroitement liée à celle de l'icosaèdre.

L'intérêt a priori d'une connaissance complète des deux premiers étages de la tour (savoir, les cas où la dimension modulaire  $N = 3g - 3 + \nu$  est  $\leq 2$ ) réside dans ce principe, que *la tour entière se reconstitue à partir des deux premiers étages*, en ce sens que via l'opération fondamentale de "recollement", l'étage 1 fournit un système complet de générateurs, et l'étage 2 un système complet de relations. Il y a une analogie frappante, et j'en suis persuadé, pas seulement formelle, entre ce principe, et le principe analogue de Demazure pour la structure des groupes algébriques réductifs, si on remplace le terme "étage" ou "dimension modulaire" par "rang semi-simple du groupe réductif". Le lien devient plus frappant encore, si on se rappelle que le groupe de Teichmüller  $T_{1,1}$  (dans le contexte discret transcendant maintenant, et non dans le contexte algébrique profini, où on trouve les complétions profinies des premiers) n'est autre que  $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ , i.e. le groupe des points entiers du schéma en groupes simple de rang 1 "absolu"  $\mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$ . Ainsi, *la pierre de construction fondamentale pour la tour de Teichmüller, est essentiellement la même que celle pour "la tour" des groupes réductifs de tous rangs* – un groupe d'ailleurs dont on peut dire sans doute qu'il est présent dans toutes les disciplines essentielles des mathématiques.

Ce principe de construction de la tour de Teichmüller n'est pas démontré à l'heure actuelle – mais je n'ai aucun doute qu'il ne soit valable. Il résulterait (via une théorie de dévissage des structures stratifiées – en l'occurrence les  $\widehat{M}_{g,\nu}$  – qui resterait à écrire, cf. par. 5) d'une propriété extrêmement plausible des multiplicités modulaires ouvertes  $M_{g,\nu}$  dans le contexte analytique complexe, à savoir que pour une dimension modulaire  $N \geq 3$ , le groupe fondamental de  $M_{g,\nu}$  (i.e. le groupe de Teichmüller habituel  $T_{g,\nu}$ ) est isomorphe au "groupe fondamental à l'infini" i.e. celui d'un "voisinage tubulaire de l'infini". C'est là une chose bien familière (due à Lefschetz essentiellement) pour une variété lisse *affine* de dimension  $N \geq 3$ . Il est vrai que les multiplicités modulaires ne sont pas affines (sauf

pour des petites valeurs de  $g$ ), mais il suffirait qu’une telle  $M_{g,\nu}$  de dimension  $N$  (ou plutôt, un revêtement fini convenable) soit réunion de  $N - 2$  ouverts affines, donc que  $M_{g,\nu}$  ne soit pas “trop proche d’une variété compacte”.

N’ayant aucun doute sur ce principe de construction de la tour de Teichmüller, je préfère laisser aux experts de la théorie transcendante, mieux outillés que moi, le soin de prouver le nécessaire (s’il s’en trouve qui soit intéressé), pour expliciter plutôt, avec tout le soin qu’elle mérite, la structure qui en découle pour la tour de Teichmüller par générateurs et relations, dans le cadre discret cette fois et non profini – ce qui revient, essentiellement, à une compréhension complète des quatre multiplicités modulaires  $M_{0,4}$ ,  $M_{1,1}$ ,  $M_{0,5}$ ,  $M_{1,2}$ , et de leurs groupoïdes fondamentaux par rapport à des “points base” convenablement choisis. Ceux-ci s’offrent tout naturellement, comme les courbes algébriques complexes du type  $(g, \nu)$  envisagé, qui ont un groupe d’automorphismes (nécessairement fini) plus grand que dans le cas générique<sup>1</sup>. En y incluant la sphère holomorphe à trois points marqués (provenant de  $M_{0,3}$  i.e. de l’étage 0), on trouve *douze “pièces de construction” fondamentales* (6 de genre 0, 6 de genre 1) dans un “jeu de Léo-Teichmüller” (grande boîte), où les points marqués sur les surfaces envisagées sont remplacés par des “trous” à bord, de façon à avoir des surfaces à bord, donc des pièces de construction qui peuvent s’assembler par frottement doux comme dans le jeu de Léo ordinaire cher à nos enfants (ou petits-enfants...). Par assemblage on trouve un moyen tout ce qu’il y a de visuel pour construire tout type de surface (ce sont ces assemblages essentiellement qui seront les “points base” pour notre fameuse tour), et aussi de visualiser les “chemins” *élémentaires* par des opérations tout aussi concrètes telles des “twists”, ou des automorphismes des pièces du jeu, et d’écrire les *relations fondamentales* entre chemins composés. Suivant la taille (et le prix !) de la boîte de construction utilisée, on trouve d’ailleurs de nombreuses descriptions différentes de la tour de Teichmüller par générateurs et relations. La boîte

---

<sup>1</sup>Il faut y ajouter de plus les “points-base” provenant par opérations de recollement de “pièces” du même type en dimension modulaire inférieure. D’autre part, en dimension modulaire 2 (cas de  $M_{0,5}$  et  $M_{1,2}$ ), il convient d’exclure les points de certaines familles à un paramètre de courbes admettant un automorphisme exceptionnel d’ordre 2. Ces familles constituent d’ailleurs sur les multiplicités envisagées des courbes rationnelles remarquables, qui me paraissent un ingrédient important de la structure de ces multiplicités.

la plus petite est réduite à des pièces toutes identiques, de type  $(0, 3)$  – ce sont les “pantalons” de Thurston, et le jeu de Léo-Teichmüller que j’essaie de décrire, issu de motivations et de réflexions de géométrie algébrique absolue sur le corps  $\mathbf{Q}$ , est très proche du jeu de “chirurgie géodésique hyperbolique” de Thurston, dont j’ai appris l’existence l’an dernier par Yves Ladegaillerie. Dans un microséminaire avec Carlos Contou-Carrère et Yves Ladegaillerie, nous avons amorcé une réflexion dont un des objets est de confronter les deux points de vue, qui se complètent mutuellement.

J’ajoute que chacune des douze pièces de construction de la “grande boîte” se trouve munie d’une décomposition cellulaire canonique, stable par toutes les symétries, ayant comme seuls sommets les “points marqués” (ou centres des trous), et comme arêtes certains chemins géodésiques (pour la structure riemannienne canonique sur la sphère ou le tore envisagé) entre certaines paires de sommets (savoir ceux qui se trouvent sur un même “lieu réel”, pour une structure réelle convenable de la courbe algébrique complexe envisagée). Par suite, dans ce jeu toutes les surfaces obtenues par assemblage sont munies de structures cellulaires canoniques, qui à leur tour (cf. §3 plus bas) permettent de considérer ces surfaces comme associée à des courbes algébriques complexes (et même sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ ) canoniquement déterminées. Il y a là un jeu de chassé-croisé typique entre le combinatoire, et l’algébrique complexe (ou mieux, l’algébrique sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ ).

La “petite boîte” aux pièces toutes identiques, qui a le charme de l’économie, donnera sans doute une description relativement compliquée pour les relations (compliquée, mais nullement inextricable !). La grande boîte donnera lieu à des relations plus nombreuses (du fait qu’il y a beaucoup plus de points-bases et de chemins remarquables entre eux), mais à structure plus transparente. Je prévois qu’en dimension modulaire 2, tout comme dans le cas plus ou moins familier de la dimension modulaire 1 (avec notamment la description de  $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$  par  $(\rho, \sigma | \rho^3 = \sigma^2, \sigma^4 = \rho^6 = 1)$ ), on trouvera un engendrement par les groupes d’automorphismes des trois types de pièces pertinentes, avec des relations simples que je n’ai pas dégagées à l’heure d’écrire ces lignes. Peut-être même trouvera-t-on un principe de ce genre pour tous les  $T_{g,v}$ , ainsi qu’une décomposition cellulaire de  $\widehat{M}_{g,v}$  généralisant celles qui se présentent spontanément pour  $\widehat{M}_{0,4}$  et  $\widehat{M}_{1,1}$ , et

que j’entrevois dès à présent pour la dimension modulaire 2, en utilisant les hypersurfaces correspondant aux diverses *structures réelles* sur les structures complexes envisagées, pour effectuer le découpage cellulaire voulu.

### 3. Corps de nombres associés à un dessin d’enfant

Plutôt que de suivre (comme prévu) un ordre thématique rigoureux, je me suis laissé emporter par ma prédilection pour un thème particulièrement riche et brûlant, auquel je compte me consacrer d’ailleurs prioritairement pendant quelques temps, à partir de la rentrée 84/85. Je reprends donc l’exposé thématique là où je l’ai laissé, tout au début du paragraphe précédent.

Mon intérêt pour les surfaces topologiques commence à poindre en 1974, où je propose à Yves Ladegaillerie le thème de l’étude isotopique des plongements d’un 1-complexe topologique dans une surface compacte. Dans les deux années qui suivent, cette étude le conduit à un remarquable théorème d’isotopie, donnant une description algébrique complète des classes d’isotopie de plongements de tels 1-complexes, ou de surfaces compactes à bord, dans une surface compacte orientée, en termes de certains invariants combinatoires très simples, et des groupes fondamentaux des protagonistes. Ce théorème, qui doit pouvoir s’étendre sans mal aux plongements d’un espace compact quelconque (triangulable pour simplifier) dans une surface compacte orientée, redonne comme corollaires faciles plusieurs résultats classiques profonds de la théorie des surfaces, et notamment le théorème d’isotopie de Baer. Il va finalement être publié, séparément du reste (et dix ans après, vu la dureté des temps...), dans *Topology*. Dans le travail de Ladegaillerie figure également une description purement algébrique, en termes de groupoïdes fondamentaux, de la catégorie “isotopique” des surfaces compactes  $X$ , munies d’un 1-complexe topologique  $K$  plongé dans  $X$ . Cette description, qui a eu le malheur d’aller à l’encontre du “goût du jour” et de ce fait semble impubliable, a néanmoins servi (et sert encore) comme un guide précieux dans mes réflexions ultérieures, notamment dans le contexte de la géométrie algébrique absolue de caractéristique nulle.

Le cas où  $(X, K)$  est une “carte” 2-dimensionnelle, i.e. où les composantes connexes de  $X \setminus K$  sont des 2-cellules ouvertes (et où de plus  $K$  est muni d’un ensem-

ble fini  $S$  de “sommets”, tel que les composantes connexes de  $K\mathbb{S}$  soient des 1-cellules ouvertes) attire progressivement mon attention dans les années suivantes. La catégorie isotopique de ces cartes admet une description algébrique particulièrement simple, via l’ensemble des “repères” (ou “drapeaux” ou “biarcs”) associés à la carte, qui se trouve naturellement muni d’une structure d’ensemble à groupe d’opérateurs, sous le groupe

$$\underline{C}_2 = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0 \sigma_2)^2 = 1 \rangle,$$

que j’appelle le *groupe cartographique* (non orienté) de dimension 2. Il admet comme sous-groupe d’indice 2 le *groupe cartographique orienté* engendré par les produits en nombre pair des générateurs, qui peut aussi se décrire comme

$$\underline{C}_2^+ = \langle \rho_s, \rho_f, \sigma \mid \rho_s \rho_f = \sigma, \sigma^2 = 1 \rangle,$$

(avec

$$\rho_s = \sigma_2 \sigma_1, \quad \rho_f = \sigma_1 \sigma_0, \quad \sigma = \sigma_0 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_0,$$

opérations de *rotation élémentaire* d’un repère autour d’un sommet, d’une face et d’une arête respectivement). Il y a un dictionnaire parfait entre la situation topologique des cartes compactes, resp. cartes compactes orientées, d’une part, et les ensembles finis à groupe d’opérateurs  $\underline{C}_2$  resp.  $\underline{C}_2^+$  de l’autre, dictionnaire dont l’existence était d’ailleurs plus ou moins connue, mais jamais énoncée avec la précision nécessaire, ni développée tant soit peu. Ce travail de fondements est fait avec le soin qu’il mérite dans un excellent travail de DEA, fait en commun par Jean Malgoire et Christine Voisin en 1976.

Cette réflexion prend soudain une dimension nouvelle, avec cette remarque simple que le groupe  $\underline{C}_2^+$  peut s’interpréter comme un quotient du groupe fondamental d’une sphère orientée privée de trois points, numérotés 0, 1, 2, les opérations  $\rho_s, \sigma, \rho_f$  s’interprétant comme les lacets autour de ces points, satisfaisant la relation familière

$$l_0 l_1 l_2 = 1,$$

alors que la relation supplémentaire  $\sigma^2 = 1$  i.e.  $l_1^2 = 1$  signifie qu’on s’intéresse au quotient du groupe fondamental correspondant à un indice de ramification imposé 2 au point 1, qui classe donc les revêtements de la sphère, ramifiés au plus

en les points 0, 1, 2, avec une ramification égale à 1 ou 2 en les points au dessus de 1. Ainsi, les cartes orientées compactes forment une catégorie isotopique équivalente à celle de ces revêtements, soumis de plus à la condition supplémentaire d'être des revêtements finis. Prenant maintenant comme sphère de référence la sphère de Riemann, ou droite projective complexe, rigidifiée par les trois points 0, 1 et  $\infty$  (ce dernier remplaçant donc 2), et se rappelant que tout revêtement ramifié fini d'une courbe algébrique complexe hérite lui-même d'une structure de courbe algébrique complexe, on aboutit à cette constatation, qui huit ans après me paraît encore toujours aussi extraordinaire : *toute carte orientée "finie" se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe !* Mieux encore, comme la droite projective complexe est définie sur le corps de base absolue  $\mathbf{Q}$ , ainsi que les points de ramification admis, les courbes algébriques obtenues sont définies non seulement sur  $\mathbf{C}$ , mais sur la clôture algébrique  $\overline{\mathbf{Q}}$  de  $\mathbf{Q}$  dans  $\mathbf{C}$ . Quant à la carte de départ, elle se retrouve sur la courbe algébrique, comme image inverse du segment réel  $[0, 1]$  (où 0 est considéré comme un sommet, et 1 comme milieu d'une "arête pliée" ayant 1 comme centre), lequel constitue dans la sphère de Riemann la "2-carte orientée universelle"<sup>2</sup>. Les points de la courbe algébrique  $X$  au dessus de 0, de 1 et de  $\infty$  ne sont autres que les sommets, et les "centres" des arêtes et des faces respectivement de la carte  $(X, K)$ , et les ordres des sommets et des faces ne sont autres que les multiplicités des zéros et des pôles de la fonction rationnelle (définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ ) sur  $X$ , exprimant sa projection structurale vers  $\mathbb{P}_{\mathbf{C}}^1$ .

Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est retrouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable (<sup>2</sup>). Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffonné sur un

---

<sup>2</sup>Il y a une description analogue des cartes finies non orientées, éventuellement avec bord, en termes de courbes algébriques *réelles*, plus précisément de revêtement de  $\mathbb{P}_{\mathbf{R}}^1$  ramifié seulement en 0, 1,  $\infty$ , la surface à bord associée à un tel revêtement étant  $X(\mathbf{C})/\tau$ , où  $\tau$  est la conjugaison complexe. La carte non orientée "universelle" est ici le disque, ou hémisphère supérieur de la sphère de Riemann, muni comme précédemment du 1-complexe plongé  $K = [0, 1]$ .



bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple parfaitement explicite. A un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus. S'agissant ici de cartes sphériques, donnant nécessairement naissance à des courbes de genre 0 (qui ne fournissent donc pas des "modules"), on peut dire que la courbe en question est "épinglée" dès qu'on fixe trois de ses points, par exemple trois sommets de la carte, ou plus généralement trois centres de facettes (sommets, arêtes ou faces) – dès lors l'application structurale  $f : X \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  peut s'interpréter comme une fonction rationnelle

$$f(z) = P(z)/Q(z) \in \mathbb{C}(z)$$

bien déterminée, quotient de deux polynômes bien déterminés premiers entre eux avec  $Q$  unitaire, satisfaisant à des conditions algébriques qui traduisent notamment le fait que  $f$  soit non ramifié en dehors des valeurs 0, 1,  $\infty$ , et qui impliquent que les coefficients de ces polynômes sont des *nombre algébriques* ; donc leurs zéros sont des nombres algébriques, qui représentent respectivement les sommets et les centres des faces de la carte envisagée.

Revenant au cas général, les cartes finies s'interprétant comme des revêtements sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  d'une courbe algébrique définie sur le corps premier  $\mathbb{Q}$  lui-même, il en résulte que le groupe de Galois  $\Gamma$  de  $\overline{\mathbb{Q}}$  sur  $\mathbb{Q}$  opère sur la catégorie de ces cartes de façon naturelle. Par exemple, l'opération d'un automorphisme  $\gamma \in \Gamma$  sur une carte sphérique donnée par la fonction rationnelle ci-dessus, est obtenue en appliquant aux coefficients des polynômes  $P, Q$ . Voici donc ce mystérieux groupe  $\Gamma$  intervenir comme agent transformateur sur des formes topologico-combinatoires de la nature la plus élémentaire qui soit, amenant à se poser des questions comme : telles cartes orientées données sont-elles "conjuguées", ou : quelles exactement sont les conjuguées de telle carte orientée donnée ? (il y en a, visiblement, un nombre fini seulement).

J'ai traité quelques cas concrets (pour des revêtements de bas degrés) par des expédients divers, J. Malgoire en a traité quelques autres – je doute qu'il y ait une méthode uniforme permettant d'y répondre à coups d'ordinateurs. Ma réflexion très vite s'est engagée dans une direction plus conceptuelle, pour arriver à appréhender la nature de cette action de  $\Gamma$ . On s'aperçoit d'emblée que grosso

modo cette action est exprimée par une certaine action “extérieure” de  $\Gamma$  sur le compactifié profini du groupe cartographique orienté  $\underline{C}_2^+$ , et cette action à son tour est déduite par passage au quotient de l’action extérieure canonique de  $\Gamma$  sur le groupe fondamental profini  $\hat{\pi}_{0,3}$  de  $(U_{0,3}\overline{\mathbf{Q}})$ , où  $U_{0,3}$  désigne la courbe-type de genre 0 sur le corps premier  $\mathbf{Q}$ , privée de trois points. C’est ainsi que mon attention s’est portée vers ce que j’ai appelé depuis la “géométrie algébrique anabélienne”, dont le point de départ est justement une étude (pour le moment limitée à la caractéristique zéro) de l’action de groupes de Galois “absolus” (notamment les groupes  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ , où  $K$  est une extension de type fini du corps premier) sur des groupes fondamentaux géométriques (profinis) de variétés algébriques (définies sur  $K$ ), et plus particulièrement (rompant avec une tradition bien enracinée) des groupes fondamentaux qui sont très éloignés des groupes abéliens (et que pour cette raison je nomme “anabéliens”). Parmi ces groupes, et très proche du groupe  $\hat{\pi}_{0,3}$ , il y a le compactifié profini du groupe modulaire  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$ , dont le quotient par le centre  $\pm 1$  contient le précédent comme sous-groupe de congruence mod 2, et peut s’interpréter d’ailleurs également comme groupe “cartographique” orienté, savoir celui qui classe les cartes orientées *triangulées* (i.e. celles dont les faces sont des triangles ou des monogones).

Toute carte finie orientée donne lieu à une courbe algébrique projective et lisse définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ , et il se pose alors immédiatement la question : quelles sont les courbes algébriques sur  $\overline{\mathbf{Q}}$  obtenues ainsi – les obtiendrait-on toutes, qui sait ? En termes plus savants, serait-il vrai que toute courbe algébrique projective et lisse définie sur un corps de nombres interviendrait comme une “courbe modulaire” possible pour paramétriser les courbes elliptiques munies d’une rigidification convenable ? Une telle supposition avait l’air à tel point dingue que j’étais presque gêné de la soumettre aux compétences en la matière. Deligne consulté trouvait la supposition dingue en effet, mais sans avoir un contre-exemple dans ses manches. Moins d’un an après, au Congrès International de Helsinki, le mathématicien soviétique Bielyi annonce justement ce résultat, avec une démonstration d’une simplicité déconcertante tenant en deux petites pages d’une lettre de Deligne – jamais sans doute un résultat profond et déroutant ne fut démontré en si peu de lignes !

Sous la forme où l’énonce Bielyi, son résultat dit essentiellement que *toute*

*courbe algébrique définie sur un corps de nombres peut s'obtenir comme revêtement de la droite projective ramifié seulement en les points 0, 1,  $\infty$ . Ce résultat semble être passé plus ou moins inaperçu. Pourtant, il m'apparaît d'une portée considérable. Pour moi, son message essentiel a été qu'il y a une identité profonde entre la combinatoire des cartes finies d'une part, et la géométrie des courbes algébriques définies sur des corps de nombres, de l'autre. Ce résultat profond, joint à l'interprétation algébrique-géométrique des cartes finies, ouvre la porte sur un monde nouveau, inexploré – et à portée de main de tous, qui passent sans le voir.*

C'est près de trois ans plus tard seulement, voyant que décidément les vastes horizons qui s'ouvrent là ne faisaient rien tressaillir en aucun de mes élèves, ni même chez aucun des trois ou quatre collègues de haut vol auxquels j'ai eu l'occasion d'en parler de façon circonstanciée, que je fais un premier voyage de prospection de ce "monde nouveau", de janvier à juin 1981. Ce premier jet se matérialise en un paquet de quelques 1300 pages manuscrites, baptisées "La Longue Marche 'a travers la théorie de Galois". Il s'agit avant tout d'un effort de compréhension des relations entre groupes de Galois "arithmétiques" et groupes fondamentaux profinis "géométriques". Assez vite, il s'oriente vers un travail de formulation calculatoire de l'opération de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  sur  $\hat{p}i_{0,3}$ , et dans un stade ultérieur, sur le groupe légèrement plus gros  $\text{Sl}(2, \hat{\mathbf{Z}})$ , qui donne lieu à un formalisme plus élégant et plus efficace. C'est au cours de ce travail aussi (mais développé dans des notes distinctes) qu'apparaît le thème central de la géométrie algébrique anabélienne, qui est de reconstituer certaines variétés  $X$  dites "anabéliennes" sur un corps absolu  $K$  à partir de leur groupe fondamental mixte, extension de  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  par  $\pi_1(X_{\overline{K}})$  ; c'est alors que se dégage la "conjecture fondamentale de la géométrie algébrique anabélienne", proche des conjectures de Mordell et de Tate que vient de démontrer Faltings <sup>(3)</sup>. C'est là aussi que s'amorcent une première réflexion sur les groupes de Teichmüller, et les premières intuitions sur la structure multiple de la "tour de Teichmüller" – les multiplicités modulaires ouvertes  $M_{g,nu}$  apparaissant par ailleurs comme les premiers exemples importants, en dimension  $> 1$ , de variétés (ou plutôt, de multiplicités) qui semblent bien mériter l'appellation "anabélienne". Vers la fin de cette période de réflexion, celle-ci m'apparaît comme une réflexion fondamentale sur une théorie alors encore dans les limbes, pour laque-

lle l'appellation “*Théorie de Galois-Teichmüller*” me semble plus appropriée que “théorie de Galois” que j’avais d’abord donnée à mes notes.

Ce n’est pas le lieu ici de donner un aperçu plus circonstancié de cet ensemble de questions, intuitions, idées – y compris des résultats palpables, certes. Le plus important me semble celui signalé en passant au par. 2, savoir la fidélité de l’action extérieure de  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  (et de ses sous-groupes ouverts) sur  $\hat{\pi}_{0,3}$ , et plus généralement (si je me rappelle bien) sur le groupe fondamental de toute courbe algébrique “anabélienne” (i.e. dont le genre  $g$  et le “nombre de trous”  $\nu$  satisfont l’inégalité  $2g + \nu \geq 3$ , i.e. telle que  $\chi(X) < 0$ ) définie sur une extension finie de  $\mathbf{Q}$ . Ce résultat peut être considéré comme essentiellement équivalent au théorème de Bielyi – c’est la première manifestation concrète, par un énoncé mathématique précis, du “message” dont il a été question plus haut.

Je voudrais terminer cet aperçu rapide par quelques mots de commentaire sur la richesse vraiment inimaginable d’un groupe anabélien typique comme le groupe  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$  – sans doute le groupe discret infini le plus remarquable qu’on ait rencontré, qui apparaît sous une multiplicité d’avatars (dont certains ont été effleurés dans le présent rapport), et qui du point de vue de la théorie de Galois-Teichmüller peut être considéré comme la “pierre de construction” fondamentale de la “tour de Teichmüller”. L’élément de structure de  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$  qui me fascine avant tout, est bien sûr l’action extérieure du groupe de Galois  $\Gamma$  sur le compactifié profini. Par le théorème de Bielyi, prenant les compactifiés profinis de sous-groupes d’indice fini de  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$ , et l’action extérieure induite (quitte à passer également à un sous-groupe ouvert de  $\Gamma$ ), *on trouve essentiellement les groupes fondamentaux de toutes les courbes algébriques* (pas nécessairement compactes) *définis sur des corps de nombres  $K$ , et l’action extérieure de  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  dessus* – du moins est-il vrai que tout tel groupe fondamental apparaît comme quotient d’un des premiers groupes<sup>3</sup>. Tenant compte du “yoga anabélien” (qui reste conjectural), disant qu’une courbe algébrique anabélienne sur un corps de nombres  $K$  (extension finie de  $\mathbf{Q}$ ) est connue à isomorphisme près quand on connaît son groupe fondamental mixte (ou ce qui revient au même, l’action extérieure de  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  sur son groupe fondamental

---

<sup>3</sup>En fait, il s’agit de quotients de nature particulièrement triviale, par des sous-groupes abéliens produits de “modules de Tate”  $\hat{\mathbf{Z}}(1)$ , correspondant à des “groupes-lacets” autour de points à l’infini.

profini géométrique), on peut donc dire que *toutes les courbes algébriques définies sur des corps de nombres sont “contenues” dans le compactifié profini  $\widehat{\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})}$ , et dans la connaissance d’un certain sous-groupe  $\Gamma$  du groupe des automorphismes extérieurs de ce dernier !* Passant aux abélianisés des groupes fondamentaux précédents, on voit notamment que toutes les représentations abéliennes  $\ell$ -adiques chères à Tate et consorts, définies par des jacobiniennes et jacobiniennes généralisées de courbes algébriques définies sur des corps de nombres, sont contenues dans cette seule action de  $\Gamma$  sur le groupe profini anabélien  $\widehat{\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})}$  ! <sup>(4)</sup>

Il en est qui, face à cela, se contentent de hausser les épaules d’un air désabusé et de parier qu’il n’y a rien à tirer de tout cela, sauf des rêves. Ils oublient, ou ignorent, que notre science, et toute science, serait bien peu de chose, si depuis ses origines elle n’avait été nourrie des rêves et des visions de ceux qui s’y adonnent avec passion.

#### 4. Polyèdres réguliers sur les corps finis

Dès le début de ma réflexion sur les cartes bidimensionnelles, je me suis intéressé plus particulièrement aux cartes dites “régulières”, c’est-à-dire celles dont le groupe des automorphismes opère transitivement (et de ce fait, de façon simplement transitive) sur l’ensemble des repères. Dans le cas orienté et en termes de l’interprétation algébrique-géométrique du paragraphe précédent, ce sont les cartes qui correspondent ‘a un revêtement *galoisien* de la droite projective. Très vite aussi, et d’es avant même qu’apparaisse le lien avec la géométrie algébrique, il apparaît nécessaire aussi de ne pas exclure les cartes infinies, qui interviennent notamment de façon naturelle comme revêtements universels des cartes finies. Il apparaît (comme conséquence immédiate du “dictionnaire” des cartes, étendu au cas des cartes pas nécessairement finies) que pour tout couple d’entiers naturels  $p, q \geq 1$ , il existe à isomorphisme (non unique) près une carte 1-connexe et une seule qui soit de type  $(p, q)$  i.e. dont tous les sommets soient d’ordre  $p$  et toutes les faces d’ordre  $q$ , et cette carte est une carte régulière. Elle se trouve épinglée par le choix d’un repère, et son groupe des automorphismes est alors canoniquement isomorphe au quotient du groupe cartographique (resp. du groupe cartographique

orienté, dans le cas orienté) par les relations supplémentaires

$$\rho_s^p = \rho_f^q = 1.$$

Le cas où ce groupe est fini est le cas “pythagoricien” des cartes régulières sphériques, le cas où il est infini donne les pavages réguliers du plan euclidien ou du plan hyperbolique<sup>4</sup>. Le lien de la théorie combinatoire avec la théorie “conforme” des pavages réguliers du plan hyperbolique était pressenti, avant qu’apparaisse celui des cartes finies avec les revêtements finis de la droite projective. Une fois ce lien compris, il devient évident qu’il doit s’étendre également aux cartes infinies (régulières ou non) : *toute carte finie ou non, se réalise canoniquement sur une surface conforme* (compacte si et seulement si la carte est finie), *en tant que revêtement ramifié de la droite projective complexe, ramifié seulement en les points 0, 1, ∞*. La seule difficulté ici était de mettre au point le dictionnaire entre cartes topologiques et ensembles à opérateurs, qui posait quelques problèmes conceptuels dans le cas infini, à commencer par la notion même de “carte topologique”. Il apparaît nécessaire notamment, tant par raison de cohérence interne du dictionnaire, que pour ne pas laisser échapper certains cas intéressants de cartes infinies, de ne pas exclure des sommets et des faces d’ordre infini. Ce travail de fondements a été fait également par J. Malgoire et C. Voisin, sur la lancée de leur premier travail sur les cartes finies, et leur théorie fournit en effet tout ce qu’on était en droit d’attendre (et même plus...).

C’est en 1977 et 1978, parallèlement à deux cours de C4 sur la géométrie du cube et sur celle de l’icosaèdre, que j’ai commencé à m’intéresser aux polyèdres réguliers, qui m’apparaissent alors comme des “réalisations géométriques” particulièrement concrètes de cartes combinatoires, les sommets, arêtes et faces étant réalisés respectivement comme des points, des droites et des plans dans un espace affine tridimensionnel convenable, avec respect des relations d’incidence. Cette notion de réalisation géométrique d’une carte combinatoire garde un sens sur un corps de base, et même sur un anneau de base arbitraire. Elle garde également un sens pour les polyèdres réguliers de dimension quelconque, en remplaçant le

---

<sup>4</sup>Dans ces énoncés, il y a lieu de ne pas exclure le cas où  $p, q$  peuvent prendre la valeur  $+\infty$ , qu’on rencontre notamment de façon très naturelle comme pavages associés à certains polyèdres réguliers infinis, cf. plus bas.

groupe cartographique  $\underline{C}_2$  par une variante  $n$ -dimensionnelle  $\underline{C}_n$  convenable. Le cas  $n = 1$ , i.e. la théorie des polygones réguliers en caractéristique quelconque, fait l'objet d'un cours de DEA en 1977/78, et fait apparaître déjà quelques phénomènes nouveaux, comme aussi l'utilité de travailler non pas dans un espace ambiant affine (ici le plan affine), mais dans un espace *projectif*. Ceci est dû notamment au fait que dans certaines caractéristiques (et notamment en caractéristique 2) le centre d'un polyèdre régulier est rejeté à l'infini. D'autre part, le contexte projectif, contrairement au contexte affine, permet de développer avec aisance un formalisme de dualité pour les polyèdres réguliers, correspondant au formalisme de dualité des cartes combinatoires ou topologiques (où le rôle des sommets et des faces, dans le cas  $n = 2$  disons, se trouve interchangé). Il se trouve que pour tout polyèdre régulier projectif, on peut définir un hyperplan canonique associé, qui joue le rôle d'un hyperplan à l'infini canonique, et permet de considérer le polyèdre donné comme un polyèdre régulier affine.

L'extension de la théorie des polyèdres réguliers (et plus généralement, de toutes sortes de configurations géométrico-combinatoires, y compris les systèmes de racines...) du corps de base  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  vers un anneau de base général, me semble d'une portée comparable, dans cette partie de la géométrie, à l'extension analogue qui a eu lieu depuis le début du siècle en géométrie algébrique, ou depuis une vingtaine d'années en topologie<sup>5</sup>, avec l'introduction du langage des schémas et celui des topos. Ma réflexion sporadique sur cette question, pendant quelques années, s'est bornée à dégager quelques principes de base simples, en attachant d'abord mon attention au cas des polyèdres réguliers épinglés, ce qui réduit à un minimum le bagage conceptuel nécessaire, et élimine pratiquement les questions de rationalité tant soit peu délicates. Pour un tel polyèdre, on trouve une base (ou repère) canonique de l'espace affine ou projectif ambiant, de telle façon que les opérations du groupe cartographique  $\underline{C}_n$ , engendré par les réflexions fondamentales  $\sigma_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ), s'y écrivent par des formules universelles, en termes de  $n$  paramètres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , qui géométriquement s'interprètent comme les doubles des cosinus des "angles fondamentaux" du polyèdre. Le polyèdre se reconstitue 'a partir de cette

---

<sup>5</sup>En écrivant cela, je suis conscient que rares sont les topologues, encore aujourd'hui, qui se rendent compte de cet élargissement conceptuel et technique de la topologie, et des ressources qu'elle offre.

action, et du drapeau affine ou projectif associé à la base choisie, en transformant ce drapeau par tous les éléments du groupe engendré par les réflexions fondamentales. Ainsi le  $n$ -polyèdre épinglé “universel” est-il défini canoniquement sur l’anneau de polynômes à  $n$  indéterminées

$$\mathbf{Z}[\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_n],$$

ses spécialisations sur des corps de base arbitraires  $k$  (via des valeurs  $\alpha_i \in k$  données aux indéterminées  $\underline{\alpha}_i$ ) donnant des polyèdres réguliers correspondant à des types combinatoires divers. Dans ce jeu, il n’est pas question de se borner à des polyèdres réguliers finis, ni même à des polyèdres réguliers dont les facettes soient d’ordre fini, i.e. pour lesquels les paramètres  $\alpha_i$  soient des racines d’équations “semicyclotomiques” convenables, exprimant que les “angles fondamentaux” (dans le cas où le corps de base est  $\mathbf{R}$ ) sont commensurables à  $2\pi$ . Déjà quand  $n = 1$ , le polygone régulier peut-être le plus intéressant de tous (moralement celui du polygone régulier à un seul côté !) est celui qui correspond à  $\alpha = 2$ , donnant lieu à une conique circonscrite parabolique, i.e. tangente à la droite à l’infini. Le cas fini est celui où le groupe engendré par les réflexions fondamentales, qui est aussi le groupe des automorphismes du polyèdre régulier envisagé, est fini. Dans le cas du corps de base  $\mathbf{R}$  (ou  $\mathbf{C}$ , ce qui revient au même), et pour  $n = 2$ , les cas finis sont bien connus depuis l’antiquité – ce qui n’exclut pas que le point de vue schématique y fasse apparaître des charmes nouveaux ; on peut dire cependant qu’en spécialisant l’icosaèdre (par exemple) sur des corps de base finis de caractéristique arbitraire, c’est toujours un icosaèdre, avec sa combinatoire propre et le même groupe d’automorphismes simple d’ordre 60 qu’on obtient. La même remarque s’applique aux polyèdres réguliers finis de dimension supérieure, étudiés de façon systématique dans deux beaux livres de Coxeter. La situation est toute autre si on part d’un polyèdre régulier *infini*, sur un corps tel que  $\mathbf{Q}$  disons, et qu’on le “spécialise” sur le corps premier  $\mathbf{F}_p$  (opération bien définie pour tout  $p$  sauf un nombre fini de nombres premiers). Il est clair que tout polyèdre régulier sur un corps fini est fini – *on trouve donc une infinité de polyèdres réguliers finis pour  $p$  variable, dont le type combinatoire*, ou ce qui revient au même, le groupe des automorphismes, *varie de façon “arithmétique”* avec  $p$ . Cette situation est particulièrement intrigante dans le cas où  $n = 2$ , où on dispose de la relation explicitée au



paragraphe précédent entre 2-cartes combinatoires, et courbes algébriques définies sur des corps de nombres. Dans ce cas, un polyèdre régulier infini défini sur un corps infini quelconque (et de ce fait sur une sous- $\mathbf{Z}$ -algèbre à deux générateurs de celui-ci) donne donc naissance à une infinité de courbes algébriques définies sur des corps de nombres, qui sont des revêtements galoisiens ramifiés seulement en  $0, 1, \infty$  de la droite projective standard. Le cas optimum est bien sûr celui où on part du 2-polyèdre régulier universel, ou plutôt de celui qui s'en déduit par passage au corps des fractions  $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$  de son anneau de base. Ceci soulève une foule de questions nouvelles, aussi bien des vagues que des précises, dont je n'ai eu le loisir encore d'examiner de plus près aucune – je ne citerai que celle-ci : quelles sont exactement les 2-cartes régulières finies, ou ce qui revient au même, les groupes quotients finis du groupe 2-cartographique qui proviennent de 2-polyèdres réguliers sur des corps finis<sup>6</sup> ? Les obtiendrait-on toutes, et si oui : comment ?

Ces réflexions font apparaître en pleine lumière ce fait, qui pour moi était entièrement inattendu, que la théorie des polyèdres réguliers finis, déjà dans le cas de la dimension  $n = 2$ , est infiniment plus riche, et notamment donne infiniment plus de formes combinatoires différentes, dans le cas où on admet des corps de base de caractéristique non nulle, que dans le cas considéré jusqu'à présent où les corps de base étaient restreints à  $\mathbf{R}$ , ou à la rigueur  $\mathbf{C}$  (dans le cas de ce que Coxeter appelle des “polyèdres réguliers complexes”, et que je préfère appeler “pseudo-polyèdres réguliers définis sur  $\mathbf{C}$ ”)<sup>7</sup>. De plus, il semble que cet élargissement du point de vue doive aussi jeter un jour nouveau sur les cas déjà connus. Ainsi, examinant l'un après l'autre les polyèdres pythagoriciens, j'ai vu se répéter à chaque fois un même petit miracle, que j'ai appelé le *paradigme combinatoire* du polyèdre envisagé. Vaguement parlant, il peut se décrire en disant que lorsqu'on regarde la

---

<sup>6</sup>Ce sont les mêmes d'ailleurs que ceux provenant de polyèdres réguliers sur des corps quelconques, ou algébriquement clos, comme on voit par des arguments de spécialisation standard.

<sup>7</sup>Les pseudo-polyèdres épinglés se décrivent de la même façon que les polyèdres épinglés, avec cette seule différence que les réflexions fondamentales  $\sigma_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) sont remplacées ici par des *pseudo-réflexions* (que Coxeter suppose de plus d'ordre fini, comme il se borne aux structures combinatoires finies). Cela conduit simplement à introduire pour chacun des  $\sigma_i$  un invariant numérique supplémentaire  $\beta_i$ , de sorte que le  $n$ -pseudo-polyèdre universel peut se définir encore sur un anneau de polynômes à coefficients entiers, en les  $n + (n + 1)$  variables  $\underline{\alpha}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $\underline{\beta}_j$  ( $1 \leq j \leq n$ )

spécialisation du polyèdre dans la caractéristique, ou l'une des caractéristiques, la (ou les) plus singulière(s) (ce sont les caractéristiques 2 et 5 pour l'icosaèdre, la caractéristique 2 pour l'octaèdre), on lit, sur le polyèdre régulier géométrique sur le corps fini concerné ( $F_2$  et  $F_5$  pour l'icosaèdre,  $F_2$  pour l'octaèdre) une description particulièrement élégante (et inattendue) de la combinatoire du polyèdre. Il m'a semblé même entrevoir là un principe d'une grande généralité, que j'ai cru retrouver notamment dans une réflexion ultérieure sur la combinatoire du système des 27 droites d'une surface cubique, et ses relations avec le système de racines  $E_7$ . Qu'un tel principe existe bel et bien et qu'on réussisse même à le dégager de son manteau de brumes, ou qu'il recule au fur et à mesure où on le poursuit et qu'il finisse par s'évanouir comme une Fata Morgana, j'y trouve pour ma part une force de motivation, une fascination peu communes, comme celle du rêve peut-être. Nul doute que de suivre un tel appel de l'informulé, de l'informe qui cherche forme, d'un entrevu éluif qui semble prendre plaisir à la fois à se dérober et à se manifester – ne peut que mener loin, alors que nul ne pourrait prédire, où...

Pourtant, pris par d'autres intérêts et tâches, je n'ai pas jusqu'à présent suivi cet appel, ni rencontré personne d'autre qui ait voulu l'entendre, et encore moins le suivre. Mis à part quelques digressions vers d'autres types de structures géométrico-combinatoires, mon travail ici encore s'est borné à un premier travail de dégrossissage et d'intendance, sur lequel il est inutile de m'étendre plus ici <sup>(5)</sup>. Le seul point qui peut-être mérite encore mention, est l'existence et l'unicité de l'hyperquadrique circonscrite à un  $n$ -polyèdre régulier donné, dont l'équation peut s'explicitier par des formules simples en termes des paramètres fondamentaux  $\alpha_i$  <sup>8</sup>. Le cas qui m'intéresse le plus est celui où  $n = 2$ , et le temps me semble mûr pour réécrire une version nouvelle, en style moderne, du classique livre de Klein sur l'icosaèdre et les autres polyèdres pythagoriciens. Écrire un tel exposé sur les 2-polyèdres réguliers serait une magnifique occasion pour un jeune chercheur de se familiariser aussi bien avec la géométrie des polyèdres et leurs liens avec les géométries sphérique, euclidienne, hyperbolique, et avec les courbes algébriques,

---

<sup>8</sup>Un résultat analogue vaut pour les pseudo-polyèdres. Il semblerait que les "caractéristiques exceptionnelles" dont il a été question plus haut, pour les spécialisations d'un polyèdre donné, sont celles pour lesquelles l'hyperquadrique circonscrite est, soit dégénérée, soit tangente à l'hyperplan à l'infini.

qu’avec le langage et les techniques de base de la géométrie algébrique moderne. S’en trouvera-t-il un un jour pour saisir cette occasion ?

## 5. Haro sur la topologie dite “générale”, et réflexions heuristiques vers une topologie dite “modérée”

Je voudrais maintenant dire quelques mots sur certaines réflexions qui m’ont fait comprendre le besoin de fondements nouveaux pour la topologie “géométrique”, dans une direction toute différente de la notion de topos, et indépendante même des besoins de la géométrie algébrique dite “abstraite” (sur des corps et anneaux de base généraux). Le problème de départ, qui a commencé à m’intriguer il doit y avoir une quinzaine d’années déjà, était celui de définir une théorie de “dévisage” des structures stratifiées, pour les reconstituer, par un procédé canonique, à partir de “pièces de construction” canoniquement déduites de la structure donnée. Probablement l’exemple principal qui m’avait alors amené à cette question était celui de la stratification canonique d’une variété algébrique singulière (ou d’un espace analytique complexe ou réel singulier) par la suite décroissante de ses “lieux singuliers” successifs. Mais je devais sans doute pressentir déjà l’ubiquité des structures stratifiées dans pratiquement tous les domaines de la géométrie (que d’autres sûrement ont vu clairement bien avant moi). Depuis, j’ai vu apparaître de telles structures, notamment, dans toute situation de “modules” pour des objets géométriques susceptibles non seulement de variation continue, mais en même temps de phénomènes de “dégénérescence” (ou de “spécialisation”) – les strates correspondant alors aux divers “niveaux de singularité” (ou aux types combinatoires associés) pour les objets considérés. Les multiplicités modulaires compactifiées  $\widehat{M}_{g,v}$  de Mumford-Deligne pour les courbes algébriques stables de type  $(g, v)$  en fournissent un exemple typique et particulièrement inspirant, qui a joué un rôle de motivation important dans la reprise de ma réflexion sur les structures stratifiées, de décembre 1981 à janvier 1982. La géométrie bidimensionnelle fournit de nombreux autres exemples de telles structures stratifiées modulaires, qui toutes d’ailleurs (sauf expédients de rigidification), apparaissent comme des “multiplicités” plutôt que comme des espaces ou variétés au sens ordinaire (les points de ces multiplicités pouvant avoir des groupes d’automorphismes non triviaux).

Parmi les objets de géométrie bidimensionnelle donnant lieu à de telles structures modulaires stratifiées de dimension arbitraire, voire de dimension infinie, je citerai les polygones (euclidiens, ou sphériques, ou hyperboliques), les systèmes de droites dans un plan (projectif disons), les systèmes de “pseudodroites” dans un plan projectif topologique, ou les courbes immergées à croisements normaux plus générales, dans une surface (compacte disons) donnée.

L'exemple non trivial le plus simple d'une structure stratifiée s'obtient en considérant une paire  $(X, Y)$  d'un espace  $X$  et d'un sous-espace fermé  $Y$ , en faisant une hypothèse d'équisingularité convenable de  $X$  le long de  $Y$ , et en supposant de plus (pour fixer les idées) que les deux strates  $Y$  et  $X \setminus Y$  sont des *variétés* topologiques. L'idée naïve, dans une telle situation, est de prendre “le” voisinage tubulaire  $T$  de  $Y$  dans  $X$ , dont le bord  $\partial T$  devrait être une variété lisse également, fibrée à fibres lisses et compactes sur  $Y$ ,  $T$  lui-même s'identifiant au fibré en cônes sur  $\partial T$  associé au fibré précédent. Posant

$$U = X \setminus \text{Int}(T),$$

on trouve une variété à bord dont le bord est canoniquement isomorphe à celui de  $T$ . Ceci dit, les “pièces de construction” prévues sont la variété à bord  $U$  (compacte si  $X$  était compact, et qui remplace en la précisant la strate “ouverte”  $X \setminus Y$ ) et la variété (sans bord)  $Y$ , avec comme structure supplémentaire les reliant l'application dite de “recollement”

$$f : \partial U \longrightarrow Y$$

qui est une fibration propre et lisse. La situation de départ  $(X, Y)$  se reconstitue à partir de  $(U, Y, f : \partial U \longrightarrow Y)$  par la formule

$$X \cong U \amalg_{\partial U} Y$$

(somme amalgamée sous  $\partial U$ , s'envoyant dans  $U$  et  $Y$  via l'inclusion resp. l'application de recollement).

Cette vision naïve se heurte immédiatement à des difficultés diverses. La première est la nature un peu vague de la notion même de voisinage tubulaire, qui ne prend un sens tant soit peu précis qu'en présence de structures plus rigides que la seule structure topologique, telles la structure “linéaire par morceaux”, ou riemannienne (plus généralement, d'espace avec fonction distance) ; l'ennui ici est que

dans aucun des exemples auxquels on pense spontanément, on ne dispose naturellement d'une structure de ce type — tout au mieux d'une classe d'équivalence de telles structures, permettant de rigidifier un tantinet la situation. Si par ailleurs on admet qu'on a pu trouver un expédient pour trouver un voisinage tubulaire ayant les propriétés voulues, qui de plus soit unique modulo un automorphisme (topologique, disons) de la situation, automorphisme qui de plus respecte la structure fibrée fournie par la fonction de recollement, il reste la difficulté de la non-canonlicité des choix faits, l'automorphisme en question n'étant visiblement pas unique, quoi qu'on fasse pour le “normaliser”. L'idée ici, pour rendre canonique ce qui ne l'est pas, est de travailler systématiquement dans des “catégories isotopiques” associées aux catégories de nature topologique s'introduisant dans ces questions (telle la catégorie des paires admissibles  $(X, Y)$  et des homéomorphismes de telles paires, etc.), en gardant les mêmes objets, mais en prenant comme “morphisme” les classes d'isotopie (dans un sens dicté sans ambiguïté par le contexte) d'isomorphismes (voire même, de morphismes plus généraux que des isomorphismes). Cette idée, qui est reprise avec succès dans la thèse de Yves Ladegaillerie notamment (cf. début du par. 3), m'a servi de façon systématique dans toutes mes réflexions ultérieures de topologie combinatoire, quand il s'est agi de formuler avec précision des théorèmes de traduction de situations topologiques, en termes de situations combinatoires. Dans la situation actuelle, mon espoir était d'arriver à formuler (et à prouver !) un théorème d'équivalence entre deux catégories isotopiques convenables, l'une étant la catégorie des “paires admissibles”  $(X, Y)$ , l'autre celle des “triples admissibles”  $(U, Y, f)$  où  $Y$  est une variété,  $U$  une variété à bord, et  $f : \partial U \longrightarrow Y$  une fibration propre et lisse. De plus, bien sûr, j'espérais qu'un tel énoncé, modulo un travail de nature essentiellement algébrique, s'étendrait de lui-même en un énoncé plus sophistiqué, s'appliquant aux structures stratifiées générales.

Très vite, il apparaissait qu'il ne pouvait être question d'obtenir un énoncé aussi ambitieux dans le contexte des espaces topologiques, à cause des sempiternels phénomènes de “sauvagerie”. Déjà quand  $X$  lui-même est une variété et  $Y$  réduit à un point, on se bute à la difficulté que le cône sur un espace compact  $Z$  peut être une variété en son sommet, sans que  $Z$  soit homéomorphe à une sphère, ni même

soit une variété. Il était clair également que les contextes de structures plus rigides qui existaient à l'époque, tel le contexte "linéaire par morceaux", étaient également inadéquats – une des raisons rédhibitoires communes étant qu'ils ne permettaient pas, pour une paire  $(U, S)$  d'un "espace"  $U$  et d'un sous-espace fermé  $S$ , et une application de recollement  $f : S \longrightarrow T$ , de construire la somme amalgamée correspondante. C'est quelques années plus tard que j'étais informé de la théorie de Hironaka des ensembles qu'il appelle, je crois, "semi-analytiques" (réels), qui satisfont à certaines des conditions de stabilité essentielles (sans doute même à toutes) nécessaires au développement d'un contexte utilisable de "topologie modérée". Du coup cela relance une réflexion sur les fondements d'une telle topologie, dont le besoin m'apparaît de plus en plus clairement.

Avec un recul d'une dizaine d'années, je dirais aujourd'hui, à ce sujet, que la *"topologie générale" a été développée* (dans les années trente et quarante) *par des analystes et pour les besoins de l'analyse*, non pour les besoins de la topologie proprement dite, c'est-à-dire l'étude des *propriétés topologiques de formes géométriques* diverses. Ce caractère inadéquat des fondements de la topologie se manifeste dès les débuts, par des "faux problèmes" (au point de vue au moins de l'intuition topologique des formes) comme celle de "l'invariance du domaine", alors même que la solution de ce dernier par Brouwer l'amène à introduire des idées géométriques nouvelles importantes. Aujourd'hui encore, comme aux temps héroïques où on voyait pour la première fois et avec inquiétude des courbes remplir allègrement des carrés et des cubes, quand on se propose de faire de la géométrie topologique dans le contexte technique des espaces topologiques, on se heurte à chaque pas à des difficultés parasites tenant aux phénomènes sauvages. Ainsi, en dehors de cas de (très) basse dimension, il ne peut guère être possible, pour un espace donné  $X$  (une variété compacte disons), d'étudier le type d'homotopie (disons) du groupe des automorphismes de  $X$ , ou de l'espace des plongements, ou immersions etc. de  $X$  dans quelque autre espace  $Y$  – alors qu'on sent que ces invariants devraient faire partie de l'arsenal des invariants essentiels associés à  $X$ , ou au couple  $(X, Y)$ , etc., au même titre que l'espace fonctionnel  $\text{Hom}(X, Y)$  familier en topologie homotopique. Les topologues éludent la difficulté, sans l'affronter, en se rabattant sur des contextes voisins du contexte topologique et moins marqués de sauvagerie que lui, comme

les variétés différentiables, les espaces PL (linéaires par morceaux), etc., dont visiblement aucun n'est "bon", i.e. n'est stable par les opérations topologiques les plus évidentes, telles les opérations de contraction-recollement (sans même passer à des opérations du type  $X \longrightarrow \text{Aut}(X)$  qui font quitter le paradis des "espaces" de dimension finie). C'est là une façon de tourner autour du pot ! Cette situation, comme tant de fois déjà dans l'histoire de notre science, met simplement en évidence cette inertie quasi-insurmontable de l'esprit, alourdi par des conditionnements d'un poids considérable, pour porter un regard sur une question de fondements, donc sur le contexte même dans lequel on vit, respire, travaille – plutôt que de l'accepter comme un donné immuable. C'est à cause de cette inertie sûrement qu'il a fallu des millénaires pour qu'une idée ou une réalité aussi enfantine que le zéro, un groupe, ou une forme topologique, trouve droit de cité en mathématiques. C'est par elle aussi, sûrement, que le carcan de la topologie générale continue à être traîné patiemment par des générations de topologues, la "sauvagerie" étant portée comme une fatalité inéluctable qui serait enracinée dans la nature même des choses.

Mon approche vers des fondements possibles d'une topologie modérée a été une approche axiomatique. Plutôt que de déclarer (chose qui serait parfaitement raisonnable certes) que les "espaces modérés" cherchés ne sont autres (disons) que les espaces semianalytiques de Hironaka, et de développer dès lors dans ce contexte l'arsenal des constructions et notions familières en topologie, plus celles certes qui jusqu'à présent n'avaient pu être développées et pour cause, j'ai préféré m'attacher à dégager ce qui, parmi les propriétés géométriques de la notion d'ensemble semi-analytique dans un espace  $\mathbf{R}^n$ , permet d'utiliser ceux-ci comme "modèles" locaux d'une notion "*d'espace modéré*" (en l'occurrence, semianalytique), et ce qui (on l'espère !) rend cette notion d'espace modéré suffisamment souple pour pouvoir bel et bien servir de notion de base pour *une* "topologie modérée" propre à exprimer avec aisance l'intuition topologique des formes. Ainsi, une fois le travail de fondements qui s'impose accompli, il apparaîtra non *une* "théorie modérée", mais une vaste infinité, allant de la plus stricte de toutes, celle des "espaces  $\overline{\mathbf{Q}}_r$ -algébriques par morceaux" (où  $\overline{\mathbf{Q}}_r = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ ), vers celle qui (à tort ou à raison) m'apparaît comme probablement la plus vaste, savoir celle des "espaces analytiques réels par morceaux" (ou semianalytiques dans la terminologie de Hironaka). Parmi

les théorèmes de fondements envisagés dans mon programme, il y a un *théorème de comparaison* qui, vaguement parlant, dira qu'on *trouvera essentiellement les mêmes catégories isotopiques* (ou même  $\infty$ -isotopiques), quelle que soit la théorie modérée avec laquelle on travaille <sup>(6)</sup>. De façon plus précise, il s'agit de mettre le doigt sur un système d'axiomes suffisamment riche, pour impliquer (entre bien autres choses !) que si on a deux théories modérées  $T$ ,  $T'$  avec  $T$  plus fine que  $T'$  (dans un sens évident), et si  $X, Y$  sont deux espaces  $T'$ -modérés, qui définissent aussi des espaces  $T$ -modérés correspondants, l'application canonique

$$\underline{\text{Isom}}_T(X, Y) \longrightarrow \underline{\text{Isom}}_{T'}(X, Y)$$

induit une bijection sur l'ensemble des composantes connexes (ce qui impliquera que la catégorie isotopique des  $T$ -espaces est équivalente à celle des  $T'$ -espaces), et même, est une équivalence d'homotopie (ce qui signifie qu'on a même une équivalence pour les catégories " $\infty$ -isotopiques", plus fines que les catégories isotopiques où on ne retient que le  $\pi_0$  des espaces d'isomorphismes). Ici les  $\text{Isom}$  peuvent être définis de façon évidente comme ensembles semisimpliciaux par exemple, pour pouvoir donner un sens précis à l'énoncé précédent. Des énoncés analogues devraient être vrais, en remplaçant les "espaces"  $\text{Isom}$  par d'autres espaces d'applications, soumises à des conditions géométriques standard, comme celle d'être des plongements, des immersions, lisses, étales, des fibrations etc. Également, on s'attend à avoir des énoncés analogues, où  $X, Y$  sont remplacés par des systèmes d'espaces modérés, tels ceux qui interviennent dans une théorie de dévissage des structures stratifiées – de telle sorte que dans un sens technique précis, cette théorie de dévissage sera, elle aussi, essentiellement indépendante de la théorie modérée choisie pour l'exprimer.

Le premier test décisif pour un bon système d'axiomes sur une notion de "partie modérée de  $\mathbf{R}^n$ " me semble la possibilité de prouver de tels théorèmes de comparaison. Je me suis contenté jusqu'à présent de dégager un système d'axiomes plausible provisoire, sans avoir aucune assurance qu'il ne faudra y rajouter d'autres axiomes, que seul un "travail sur pièces" sans doute permettra de faire apparaître. Le plus fort des axiomes que j'ai introduits, et celui sans doute dont la vérification dans les cas d'espèce est (ou sera) la plus délicate, est un *axiome de triangulabilité* (modérée, il va sans dire) d'une partie modérée de  $\mathbf{R}^n$ . Je ne me suis



pas essayé à prouver en termes de ces seuls axiomes le théorème de comparaison, j’ai eu l’impression néanmoins (à tort ou à raison encore !) que cette démonstration, qu’elle nécessite ou non l’introduction de quelque axiome supplémentaire, ne présentera pas de grosse difficulté technique. Il est bien possible que les difficultés au niveau technique, pour le développement de fondements satisfaisants de la topologie modérée, y inclus une théorie de dévissage des structures modérées stratifiées, soient déjà pour l’essentiel concentrées dans les axiomes, et par suite essentiellement surmontées dès à présent par des théorèmes de triangulabilité à la Lojasiewicz et Hironaka. Ce qui fait défaut, encore une fois, n’est nullement la virtuosité technique des mathématiciens, parfois impressionnante, mais l’audace (ou simplement l’innocence...) pour s’affranchir d’un contexte familier accepté par un consensus sans failles...

Les avantages d’une approche axiomatique vers des fondements de la topologie modérée me semblent assez évidents. Ainsi, pour considérer une variété algébrique complexe, ou l’ensemble des points réels d’une variété algébrique définie sur  $\mathbf{R}$ , comme un espace modéré, il semble préférable de travailler dans la théorie “ $\mathbf{R}$ -algébrique par morceaux”, voire même la théorie  $\overline{\mathbf{Q}}_r$ -algébrique par morceaux (où  $\overline{\mathbf{Q}}_r = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ ) quand il s’agit de variétés définies sur des corps de nombres, etc. L’introduction d’un sous corps  $K \subset \mathbf{R}$  associé à la théorie  $T$  (formé des points de  $R$  qui sont  $T$ -modérés, i.e. tels que l’ensemble uniponctuel correspondant le soit) permet d’introduire pour tout point  $x$  d’un espace modéré  $X$  un corps résiduel  $k(x)$ , qui est une sous-extension de  $\mathbf{R}/K$  algébriquement fermée dans  $\mathbf{R}$ , et de degré de transcendance fini sur  $K$  (majoré par la dimension topologique de  $X$ ). Quand le degré de transcendance de  $\mathbf{R}$  sur  $K$  est infini, on trouve une notion de degré de transcendance (ou “dimension”) d’un point d’un espace modéré, voisin de la notion familière en géométrie algébrique. De telles notions sont absentes dans la topologie modérée “semianalytique”, qui par contre apparaît comme le contexte topologique tout indiqué pour inclure les espaces analytiques réels et complexes.

Parmi les premiers théorèmes auxquels on s’attend dans une topologie modérée comme je l’entrevois, mis à part les théorèmes de comparaison, sont les énoncés qui établissent, dans un sens convenable, l’existence et l’unicité “du” voisinage tubulaire d’un sous-espace modéré fermé dans un espace modéré (compact pour

simplifier), les façons concrètes de l’obtenir (par exemple à partir de toute application modérée  $X \longrightarrow \mathbf{R}^+$  admettant  $Y$  comme ensemble de ses zéros), la description de son “bord” (alors qu’en général ce n’est nullement une variété à bord !)  $\partial T$ , qui admet dans  $T$  un voisinage isomorphe au produit de  $T$  par un segment, etc. Moyennant des hypothèses d’équisingularité convenables, on s’attend à ce que  $T$  soit muni, de façon essentiellement unique, d’une structure de fibré localement trivial sur  $Y$ , admettant  $\partial T$  comme sous-fibré. C’est là un des points les moins clairs dans l’intuition provisoire que j’ai de la situation, alors que la classe d’homotopie de l’application structurale prévue  $T \longrightarrow Y$  a un sens évident, indépendamment de toute hypothèse d’équisingularité, comme inverse homotopique de l’application d’inclusion  $Y \longrightarrow T$ , qui doit être un homotopisme. Une façon d’obtenir a posteriori une telle structure serait via l’hypothétique équivalence de catégories isotopiques envisagée au début, en tenant compte du fait que le foncteur  $(U, Y, f) \mapsto (X, Y)$  est défini de façon évidente, indépendamment de toute théorie de voisinages tubulaires.

On dira sans doute, non sans quelque raison, que tout cela n’est peut-être que rêves, qui s’évanouiront en fumée dès qu’on s’essayera à un travail circonstancié, voire même dès avant en face de certains faits connus ou bien évidents qui m’auraient échappé. Certes, seul un travail sur pièces permettra de décanter le juste du faux et de connaître la substance véritable. La seule chose dans tout cela qui ne fait pour moi l’objet d’aucun doute, c’est la nécessité d’un tel travail de fondements, en d’autres termes, la nature artificielle des fondements actuels de la topologie, et des difficultés que ceux-ci soulèvent à chaque pas. Il est bien possible par contre que la formulation que je donne à une théorie de dévissage des structures stratifiées, comme un théorème d’équivalence de catégories isotopiques (voire même  $\infty$ -isotopiques) convenables, soit trop optimiste. Je devrais ajouter pourtant que je n’ai guère de doutes non plus que la théorie de ces dévissages que j’ai développée il y a deux ans, alors qu’elle reste partiellement heuristique, exprime bel et bien une réalité tout ce qu’il y a de palpable. Dans une partie de mon travail, faute de pouvoir disposer d’un contexte “modéré” tout fait, et pour avoir néanmoins des énoncés précis et démontrables, j’ai été amené à postuler sur la structure stratifiée de départ des structures supplémentaires tout ce qu’il y a de plausibles,

dans la nature de la donnée de rétractions locales notamment, qui d'es lors permettent bel et bien la construction d'un système canonique d'espaces, paramétré par l'ensemble ordonné des "drapeaux"  $\text{Drap}(I)$  de l'ensemble ordonné  $I$  indexant les strates, ces espaces jouant le rôle des espaces  $(U, Y)$  de tantôt, reliés entre eux par des applications de plongements et de fibrations propres, qui permettent de reconstituer de fa con tout aussi canonique la structure stratifiée de départ, y compris ces "structures supplémentaires" ( $\bar{\cdot}$ ). Le seul ennui, c'est que ces dernières semblent un élément de structure superfétatoire, qui n'est nullement une donnée dans les situations géométriques courantes, par exemple pour l'espace modulaire compact  $\widehat{M}_{g,v}$  avec sa "stratification à l'infini" canonique, donnée par le diviseur à croisements normaux de Mumford-Deligne. Une autre difficulté, moins sérieuse sans doute, c'est que le soi-disant "espace" modulaire est en fait une *multiplicité* – techniquement, cela s'exprime surtout par la nécessité de remplacer l'ensemble d'indices  $I$  pour les strates par une *catégorie* (essentiellement finie) d'indices, en l'occurrence celle des "graphes MD", qui "paramètrent" les "structures combinatoires" possibles d'une courbe stable de type  $(g, v)$ . Ceci dit, je puis affirmer que la théorie de dévissage générale, spécialement développée sous la pression du besoin de *cette* cause, s'est révélée en effet un guide précieux, conduisant à une compréhension progressive, d'une cohérence sans failles, de certains aspects essentiels de la tour de Teichmüller (c'est à dire, essentiellement de la "structure à l'infini" des groupes de Teichmüller ordinaires). C'est cette approche qui m'a conduit finalement, dans les mois suivants, vers le principe d'une construction purement combinatoire de la tour des groupoïdes de Teichmüller, dans l'esprit esquissé plus haut (cf. par. 2).

Un autre test de cohérence satisfaisant provient du point de vue "topossique". En effet, mon intérêt pour les multiplicités modulaires provenant avant tout de leur sens algébrique-géométrique et arithmétique, c'est aux multiplicités modulaires *algébriques*, sur le corps de base absolu  $\mathbf{Q}$ , que je me suis intéressé prioritairement, et à un "dévissage" à l'infini de leurs groupes fondamentaux géométriques (i.e. des groupes de Teichmüller *profinis*) qui soit compatible avec les opérations naturelles de  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ . Cela semblait exclure d'emblée la possibilité de me référer à une hypothétique théorie de dévissage de structures stratifiées dans un contexte de "topologie modérée" (ou même de topologie ordinaire, cahin-caha), si ce n'est

comme fil conducteur entièrement heuristique. Dès lors se posait la question de traduire, dans le contexte des topos (en l'occurrence les topos étales) intervenant dans la situation, la théorie de dévissage à laquelle j'étais parvenu dans un contexte tout différent – avec la tâche supplémentaire, par la suite, de dégager un théorème de comparaison général, sur le modèle des théorèmes bien connus, pour comparer les invariants obtenus (notamment les types d'homotopie de voisinages tubulaires divers) dans le cadre transcendant, et dans le cadre schématique. J'ai pu me convaincre qu'un tel formalisme de dévissage avait bel et bien un sens dans le contexte (dit “abstrait” !) des topos généraux, ou tout au moins des topos noethériens (comme ceux qui s'introduisent ici), via une notion convenable de *voisinage tubulaire canonique d'un sous-topos* dans un topos ambiant. Une fois cette notion acquise, avec certaines propriétés formelles simples, la description du “dévissage” d'un topos stratifié est considérablement plus simple même dans ce cadre, que dans le cadre topologique (modéré). Il est vrai que là aussi il y a un travail de fondements à faire, notamment pour la notion même de voisinage tubulaire d'un sous-topos – et il est étonnant d'ailleurs que ce travail (pour autant que je sache) n'ait toujours pas été fait, c'est-à-dire que personne (depuis plus de vingt ans qu'il existe un contexte de topologie étale) ne semble en avoir eu besoin ; un signe sûrement que la compréhension de la structure topologique des schémas n'a pas tellement progressé depuis le travail d'Artin-Mazur...

Une fois accompli le double travail de dégrossissage (plus ou moins heuristique) autour de la notion de dévissage d'un espace ou d'un topos stratifié, qui a été une étape cruciale dans ma compréhension des multiplicités modulaires, il est d'ailleurs apparu que pour les besoins de ces dernières, on peut sans doute court-circuiter au moins une bonne partie de cette théorie par des arguments géométriques directs. Il n'en reste pas moins que pour moi, le formalisme de dévissage auquel je suis parvenu a fait ses preuves d'utilité et de cohérence, indépendamment de toute question sur les fondements les plus adéquats qui permettent de lui donner tout son sens.

## 6. “Théories différentielles” (à la Nash) et “théories modérées”

Un des théorèmes de fondements de topologie (modérée) les plus intéressants qu'il faudrait développer, serait un théorème de “dévissage” (encore !) d'une application

modérée propre d'espaces modérés,

$$f : X \longrightarrow Y,$$

via une filtration décroissante de  $Y$  par des sous-espaces modérés fermés  $Y^i$ , tels que au-dessus des “strates ouvertes”  $Y^i/Y^{i-1}$  de cette filtration,  $f$  induise une fibration localement triviale (du point de vue modéré, il va sans dire). Un tel énoncé devrait encore se généraliser et se préciser de diverses façons, notamment en demandant l'existence d'un dévissage analogue *simultané*, pour  $X$  et une famille finie donnée de sous-espaces (modérés) fermés de  $X$ . Également la notion même de fibration localement triviale au sens modéré peut se renforcer considérablement, en tenant compte du fait que les strates ouvertes  $U_i$  sont *mieux* que des espaces à structure modérée purement locale, du fait qu'elles sont obtenues comme différence de deux espaces modérés, compacts si  $Y$  était compact. Entre la notion d'espace modéré compact (qui se réalise comme un des “modèles” de départ dans un  $\mathbf{R}^n$ ) et celle d'espace “localement modéré” (localement compact) qui s'en déduit de façon assez évidente, il y a une notion un peu plus délicate d'espace “globalement modéré”  $X$ , obtenu comme différence  $\hat{X} \setminus Y$  de deux espaces modérés compacts, étant entendu qu'on ne distingue pas entre l'espace défini par une paire  $(\hat{X}, Y)$ , et celui défini par une paire  $(\hat{X}', Y')$  qui s'en déduit par une application modérée (nécessairement propre)

$$g : \hat{X}' \longrightarrow \hat{X}$$

induisant une bijection  $g^{-1}(X) \xrightarrow{\sim} X$ , en prenant  $Y' = g^{-1}(Y)$ . L'exemple naturel le plus intéressant peut-être est celui où on part d'un schéma séparé de type fini sur  $\mathbf{C}$  ou sur  $\mathbf{R}$ , en prenant pour  $X$  l'ensemble de ses points complexes ou réels, qui hérite d'une structure modérée globale à l'aide des compactifications schématiques (qui existent d'après Nagata) du schéma de départ. Cette notion d'espace globalement modéré est associée à une notion d'*application globalement modérée*, qui permet à son tour de renforcer en conséquence la notion de fibration localement triviale, dans l'énoncé d'un théorème de dévissage pour une application  $f : X \longrightarrow Y$  (pas nécessairement propre maintenant) dans le contexte des espaces globalement modérés.

J'ai été informé l'été dernier par Zoghman Mebkhout qu'un théorème de dévissage dans cet esprit avait été obtenu récemment dans le contexte des espaces analy-

tiques réels et/ou complexes, avec des  $Y^i$  qui, cette fois, sont des sous-espaces analytiques de  $Y$ . Ce résultat rend plausible qu'on dispose dès à présent de moyens techniques suffisamment puissants pour démontrer également un théorème de dévisage dans le contexte modéré, plus général en apparence, mais probablement moins ardu.

C'est le contexte d'une topologie modérée également qui devrait permettre, il me semble, de formuler avec précision un principe général très sûr que j'utilise depuis longtemps dans un grand nombre de situations géométriques, que j'appelle le "*principe des choix anodins*" – aussi utile que vague d'apparence ! Il dit, lorsque pour les besoins d'une construction quelconque d'un objet géométrique en termes d'autres, on est amené à faire un certain nombre de choix arbitraires en cours de route, de façon donc que l'objet obtenu dépend en apparence de ces choix et est donc entâché d'un défaut de canonicité, que ce défaut est sérieux en effet (et pour être levé demande une analyse plus soigneuse de la situation, des notions utilisées, des données introduites etc.) chaque fois que l'un au moins de ces choix s'effectue dans un "espace" qui n'est pas "contractile" i.e. dont le  $\pi_0$  ou un des invariants supérieurs  $\pi_i$  est non trivial ; que ce défaut est par contre apparent seulement, que la construction est "essentiellement canonique" et n'entraînera pas vraiment d'ennuis, chaque fois que les choix faits sont tous "anodins", i.e. s'effectuent dans des espaces *contractiles*. Quand on essaye dans les cas d'espèce de cerner de plus près ce principe, il semble qu'on tombe à chaque fois sur la notion de "catégories  $\infty$ -isotopiques" exprimant une situation donnée, plus fines que les catégories isotopiques (= 0-isotopiques) plus naïves, obtenues en ne retenant que les  $\pi_0$  des espaces d'isomorphismes qui s'introduisent dans la situation, alors que le point de vue  $\infty$ -isotopique retient tout leur type d'homotopie. Par exemple, le point de vue isotopique naïf pour les surfaces compactes à bord orientées de type  $(g, \nu)$  est "bon" (sans boomerang caché !) exactement dans les cas que j'appelle "anabéliens" (et que Thurston appelle "hyperboliques") i.e. distincts de  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 0)$  – qui sont aussi les cas justement où le groupe des automorphismes de la surface a une composante neutre *contractile*. Dans les autres cas, sauf le cas  $(0, 0)$  de la sphère sans trou, il suffit de travailler avec les catégories 1-isotopiques pour exprimer de façon satisfaisante par voie algébrique les faits géométrico-topologiques essentiels,

vu que ladite composante connexe est alors un  $K(\pi, 1)$ . Travailler dans une catégorie 1-isotopique revient d'ailleurs à travailler dans une bicatégorie, i.e. avec des  $\text{Hom}(X, Y)$  qui sont (non plus des ensembles discrets comme dans le point de vue 0-isotopique, mais) des groupoïdes (dont les  $\pi_0$  ne sont autres que les  $\text{Hom}$  0-isotopiques). C'est la description en termes purement algébriques de cette bicatégorie qui est faite dans la dernière partie de la thèse de Yves Ladegaillerie (cf. par. 3).

Si je me suis étendu ici plus longuement sur le thème des fondements de la topologie modérée, qui n'est nullement un de ceux auxquels je compte me consacrer prioritairement dans les années qui viennent, c'est sans doute justement que je sens qu'il y a là d'autant plus une cause qui a besoin d'être plaidée, ou plutôt : un travail d'une grande actualité qui a besoin de bras ! Comme naguère pour de nouveaux fondements de la géométrie algébrique, ce ne sont pas des plaidoyers qui surmontent l'inertie des habitudes acquises, mais un travail tenace, méticuleux, sans doute de longue haleine, et porteur au jour le jour de moissons éloquentes.

Je voudrais encore dire quelques mots sur une réflexion plus ancienne (fin des années 60 ?), très proche de celle dont il vient d'être question, inspirée par les idées de Nash, qui m'avaient beaucoup frappé. Au lieu ici de définir axiomatiquement une notion de "théorie modérée" via la donnée de "partie modérée de  $\mathbf{R}^n$ " satisfaisant à certaines conditions (de stabilité surtout), c'est à une axiomatisation de la notion de "variété lisse" et du formalisme différentiable sur de telles variétés que j'en avais, via la donnée, pour chaque entier naturel  $n$ , d'un sous-anneau  $A_n$  de l'anneau des germes de fonctions réelles à l'origine dans  $\mathbf{R}^n$ . Ce sont les fonctions qui seront admises pour exprimer les "changements de carte" pour la notion de  $A$ -variété correspondante, et il s'est agi de dégager tout d'abord un système d'axiomes sur le système  $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  qui assure à cette notion de variété une souplesse comparable à celle de variété  $C^\infty$ , ou analytique réelle (ou de Nash). Suivant le type de constructions familières qu'on tient à pouvoir effectuer dans le contexte des  $A$ -variétés, le système d'axiomes pertinent est plus ou moins réduit, ou riche. Très peu suffit s'il s'agit seulement de développer le formalisme différentiel, avec la construction de fibrés de jets, les complexes de De Rham etc. Si on veut un énoncé du

type “quasi-fini implique fini” (pour une application au voisinage d’un point), qui est apparu comme un énoncé-clef dans la théorie locale des espaces analytiques, il faut un axiome de stabilité de nature plus délicate, dans le “Vorbereitungssatz” de Weierstrass<sup>9</sup>. Dans d’autres questions, un axiome de stabilité par prolongement analytique (dans  $\mathbf{C}^n$ ) apparaît nécessaire. L’axiome le plus draconien que j’ai été amené à introduire, lui aussi un axiome de stabilité, concerne l’intégration des systèmes de Pfaff, assurant que certains groupes de Lie, voire tous, sont des  $A$ -variétés. Dans tout ceci, *j’ai pris soin de ne pas supposer que les  $A_n$  soient des  $\mathbf{R}$ -algèbres*, donc une fonction constante sur une  $A$ -variété n’est “admissible” que si sa valeur appartient à un certain sous-corps  $K$  de  $\mathbf{R}$  (c’est, si on veut,  $A_0$ ). Ce sous-corps peut fort bien être  $\mathbf{Q}$ , ou sa fermeture algébrique  $\overline{\mathbf{Q}}$ , dans  $\mathbf{R}$ , ou toute autre sous-extension de  $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ , de préférence même de degré de transcendance fini, ou du moins dénombrable, sur  $\mathbf{Q}$ . Cela permet par exemple, comme tantôt pour les espaces modérés, de faire correspondre à tout point  $x$  d’une variété (de type  $A$ ) un corps résiduel  $k(x)$ , qui est une sous-extension de  $\mathbf{R}/K$ . Un fait qui me semble important ici, c’est que même sous sa forme la plus forte, le système d’axiomes n’implique *pas* qu’on doive avoir  $K = \mathbf{R}$ . Plus précisément, du fait que *tous* les axiomes sont des axiomes de stabilité, il résulte que pour un ensemble  $S$  donné de germes de fonctions analytiques réelles à l’origine (dans divers espaces  $\mathbf{R}^n$ ), il existe une plus petite théorie  $A$  pour laquelle ces germes sont admissibles, et que celle-ci est “dénombrable” i.e. les  $A_n$  sont dénombrables, dès que  $S$  l’est. A fortiori,  $K$  est alors dénombrable, i.e. de degré de transcendance dénombrable sur  $\mathbf{Q}$ .

L’idée est ici d’introduire, par le biais de cette axiomatique, une notion de fonction (analytique réelle) “élémentaire”, ou plutôt, toute une hiérarchie de telles notions. Pour une fonction de 0 variables, i.e. une constante, cette notion donne celle de “constante élémentaire”, incluant notamment (dans le cas de l’axiomatique la plus forte) des constantes telles que  $\pi$ ,  $e$  et une multitude d’autres, en prenant des valeurs de fonctions admissibles (telles l’exponentielle, le logarithme etc.) pour des systèmes de valeurs “admissibles” de l’argument. On sent que la relation en-

---

<sup>9</sup>Il peut paraître plus simple de dire que les anneaux (locaux)  $A_n$  sont *henséliens*, ce qui est équivalent. Mais il n’est nullement clair a priori sous cette dernière forme que la condition en question est dans la nature d’une condition de stabilité, circonstance importante comme il apparaîtra dans les réflexions qui suivent.



tre le système  $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et le corps de rationalité  $K$  correspondant doit être très étroite, du moins pour des  $A$  qui peuvent être engendrés par un “système de générateurs”  $S$  fini – mais il est ‘à craindre que la moindre question intéressante qu’on pourrait se poser sur cette situation soit actuellement hors de portée <sup>(1)</sup>.

Ces réflexions anciennes ont repris quelque actualité pour moi avec ma réflexion ultérieure sur les théories modérées. Il me semble en effet qu’il est possible d’associer de façon naturelle à une “théorie différentiable”  $A$  une théorie modérée  $T$  (ayant sans doute même corps de constantes), de telle façon que toute  $A$ -variété soit automatiquement munie d’une structure  $T$ -modérée, et inversement que pour tout espace  $T$ -modéré compact  $X$ , on puisse trouver une partie fermée modérée rare  $Y$  dans  $X$ , telle que  $X \setminus Y$  provienne d’une  $A$ -variété, et que de plus cette structure de  $A$ -variété soit unique tout au moins dans le sens suivant : deux telles structures coïncident dans le complémentaire d’une partie modérée rare  $Y' \supset Y$  de  $X$ . La théorie de dévissage des structures modérées stratifiées (dont il a été question au par. précédent), dans le cas des strates lisses, devrait d’ailleurs soulever des questions beaucoup plus précises encore de comparaison des structures modérées avec des structures de type différentiable (ou plutôt,  $\mathbf{R}$ -analytique). Je soupçonne que le type d’axiomatisation proposé ici pour la notion de “théorie différentiable” fournirait un cadre naturel pour formuler de telles questions avec toute la précision et la généralité souhaitables.

## 7. À la Poursuite des Champs

Depuis le mois de mars de l’an dernier, donc depuis près d’un an, la plus grande partie de mon énergie a été consacrée à un travail de réflexion sur les *fondements de l’algèbre (co)homologique non commutative*, ou ce qui revient au même, finalement, de *l’algèbre homotopique*. Ces réflexions se sont concrétisées par un volumineux paquet de notes dactylographiées, destinées à former le premier volume (actuellement en cours d’achèvement) d’un ouvrage en deux volumes à paraître chez Hermann, sous le titre commun “À la Poursuite des Champs”. Je prévois actuellement (après des élargissements successifs du propos initial) que le manuscrit de l’ensemble des deux volumes, que j’espère achever en cours d’année pour ne plus avoir à y revenir, fera dans les 1500 pages dactylographiées. Ces deux volumes

d'ailleurs sont pour moi les premiers d'une série plus vaste, sous le titre commun "*Réflexions Mathématiques*", où je compte développer tant soit peu certains des thèmes esquissés dans le présent rapport.

Vu qu'il s'agit d'un travail en cours de rédaction, et même d'achèvement, dont le premier volume sans doute paraîtra cette année et contiendra une introduction circonstanciée, il est sans doute moins intéressant que je m'étende ici sur ce thème de réflexion, et je me contenterai donc d'en parler très brièvement. Ce travail me semble quelque peu marginal par rapport aux thèmes que je viens d'esquisser, et ne représente pas (il me semble) un véritable renouvellement d'optique ou d'approche par rapport à mes intérêts et ma vision mathématiques d'avant 1970. Si je m'y suis résolu soudain, c'est presque en désespoir de cause, alors que près de vingt ans se sont écoulés depuis que se sont posées en termes bien clairs un certain nombre de questions visiblement fondamentales, et mûres pour être menées à leur terme, sans que personne ne les voie, ou prenne la peine de les sonder. Aujourd'hui encore, les structures de base qui interviennent dans le point de vue homotopique en topologie, y compris même en algèbre homologique commutative, ne sont pas comprises, et à ma connaissance, après les travaux de Verdier, de Giraud et d'Illusie, sur ce thème (qui constituent autant de "coups d'envoi" attendant toujours une suite...) il n'y a pas eu d'effort dans ce sens. Je devrais faire exception sans doute pour le travail d'axiomatisation fait par Quillen sur la notion de catégorie de modèles, à la fin des années 60, et repris sous des variantes diverses par divers auteurs. Ce travail à l'époque, et maintenant encore, m'a beaucoup séduit et appris, tout en allant dans une direction assez différente de celle qui me tenait et tient à coeur. Il introduit certes des catégories dérivées dans divers contextes non commutatifs, mais sans entrer dans la question des structures internes essentielles d'une telle catégorie, laissée ouverte également dans le cas commutatif par Verdier, et après lui par Illusie. De même, la question de mettre le doigt sur les "coefficients" naturels pour un formalisme cohomologique non commutatif, au-delà des champs (qu'on devrait appeler 1-champs) étudiés dans le livre de Giraud, restait ouverte – ou plutôt, les intuitions riches et précises qui y répondent, puisées dans des exemples nombreux provenant de la géométrie algébrique notamment, attendent toujours un langage précis et souple pour leur donner forme.

Je reviens sur certains aspects de ces questions de fondements en 1975, à l'occasion (je crois me souvenir) d'une correspondance avec Larry Breen (trois lettres de cette correspondance seront reproduites en appendice au Chap. I du volume 1, "Histoires de Modèles", de la Poursuite des Champs). A ce moment apparaît l'intuition que les  $\infty$ -groupoïdes doivent constituer des modèles, particulièrement adéquats, pour les types d'homotopie, les  $n$ -groupoïdes correspondant aux types d'homotopie *tronqués* (avec  $\pi_i = 0$  pour  $i > n$ ). Cette même intuition, par des voies très différentes, a été retrouvée par Ronnie Brown à Bangor et certains de ses élèves, mais en utilisant une notion de  $\infty$ -groupoïde assez restrictive (qui, parmi les types d'homotopie 1-connexes, ne modélise que les produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane). C'est stimulé par une correspondance à bâtons rompus avec Ronnie Brown, que j'ai finalement repris une réflexion, commençant par un essai de définition d'une notion de  $\infty$ -groupoïde plus large (rebaptisé par la suite "champ en  $\infty$ -groupoïdes" ou simplement "champ", sous-entendu : sur le topos ponctuel), et qui de fil en aiguille m'a amené à la Poursuite des Champs. Le volume "Histoire de Modèles" y constitue d'ailleurs une digression entièrement imprévue par rapport au propos initial (les fameux champs étant provisoirement oubliés, et n'étant prévus réapparaître que vers les pages 1000 environ...).

Ce travail n'est pas entièrement isolé par rapport à mes intérêts plus récents. Par exemple, ma réflexion sur les multiplicités modulaires  $\widehat{M}g, \nu$  et leur structure stratifiée a relancé une réflexion sur un théorème de Van Kampen de dimension  $> 1$  (un des thèmes de prédilection également du groupe de Bangor), et a peut-être contribué à préparer le terrain pour le travail de plus grande envergure l'année d'après. Celui-ci rejoint également par moments une réflexion datant de la même année 1975 (ou l'année d'après) sur un "complexe de De Rham à puissances divisées", qui a fait l'objet de ma dernière conférence publique, à l'IHES en 1976, et dont le manuscrit, confié je ne me rappelle plus à qui après l'exposé, est d'ailleurs perdu. C'est au moment de cette réflexion que germe aussi l'intuition d'une "schématisation" des types d'homotopie, que sept ans après j'essaye de préciser dans un chapitre (particulièrement hypothétique) de l'Histoire de Modèles.

Le travail de réflexion entrepris dans la Poursuite des Champs est un peu comme une dette dont je m'acquitterais, vis-à-vis d'un passé scientifique où, pen-

dant une quinzaine d'années (entre 1955 et 1970), le développement d'outils cohomologiques a été le Leitmotiv constant, dans mon travail de fondements de la géométrie algébrique. Si la reprise actuelle de ce thème-là a pris des dimensions inattendues, ce n'est pas cependant par pitié pour un passé, mais à cause des nombreux imprévus faisant irruption sans cesse, en bousculant sans ménagement les plans et propos prévus – un peu comme dans un conte des mille et une nuits, où l'attention se trouve maintenue en haleine à travers vingt autres contes avant de connaître le fin mot du premier.

## 8. Digressions de géométrie bidimensionnelle

J'ai très peu parlé encore des réflexions plus terre-à-terre de géométrie topologique bidimensionnelle, associées notamment à mes activités d'enseignant et celles dites de "direction de recherches". A plusieurs reprises, j'ai vu s'ouvrir devant moi de vastes et riches champs mûrs pour la moisson, sans que jamais je réussisse à communiquer cette vision, et l'étincelle qui l'accompagne, à un (ou une) de mes élèves, et à la faire déboucher sur une exploration commune, de plus ou moins longue haleine. A chaque fois jusqu'à aujourd'hui même, après une prospection de quelques jours ou quelques semaines, où je découvrais en éclaireur des richesses insoupçonnées au départ, le voyage tournait court, quand il devenait clair que je serais seul à le poursuivre. Des intérêts plus forts prenaient le pas alors sur un voyage qui, dès lors, apparaissait comme une digression, voire une dispersion, plutôt qu'une aventure poursuivie en commun.

Un de ces thèmes a été celui des polygones plans, centré autour des variétés modulaires qu'on peut leur associer. Une des surprises ici a été l'irruption de la géométrie algébrique dans un contexte qui m'en avait semblé bien éloigné. Ce genre de surprise, lié à l'ubiquité de la géométrie algébrique dans la géométrie tout court, s'est d'ailleurs répété à plusieurs reprises.

Un autre thème a été celui des courbes (notamment des cercles) immergés dans une surface, avec une attention particulière pour le cas "stable" où les points singuliers sont des points doubles ordinaires (et aussi celui, plus général, où les différentes branches en un point se croisent mutuellement), avec souvent l'hypothèse supplémentaire que l'immersion soit "cellulaire", i.e. donne naissance à une carte.

Une variante de situations de ce type est celle des immersions d'une surface à bord non vide, et en tout premier lieu d'un disque (qui m'avait été signalé par A'Campo il y a une dizaine d'années). Au delà de la question de diverses formulations combinatoires de telles situations, qui ne représente plus guère qu'un exercice de syntaxe, je me suis intéressé surtout à une vision dynamique des configurations possibles, avec le passage de l'une à l'autre par déformations continues, qui peuvent se décomposer en composées de deux types d'*opérations élémentaires* et leurs inverses, à savoir le "*balayage*" d'une branche de courbe par dessus un point double, et l'*effacement* ou la *création d'un bigône*. (La première de ces opérations joue également un rôle-clef dans une théorie "dynamique" des systèmes de pseudo-droites dans un plan projectif réel.) Une des premières questions qui se posent ici est celle de déterminer les différentes *classes d'immersions* d'un cercle ou d'un disque (disons) modulo ces opérations élémentaires; une autre, celle de voir quelles sont les immersions du bord du disque qui proviennent d'une immersion du disque, et dans quelle mesure les premières déterminent les secondes. Ici encore, il m'a semblé que c'est une étude systématique des variétés modulaires pertinentes (de dimension infinie en l'occurrence, à moins d'arriver à en donner une version purement combinatoire) qui devrait fournir le "focus" le plus efficace, nous forçant en quelque sorte à nous poser les questions les plus pertinentes. Malheureusement, la réflexion sur les questions même les plus évidentes et les plus terre-à-terre est restée à l'état embryonnaire. Comme seul résultat tangible, je peux signaler une théorie de "dévissage" canonique d'une immersion cellulaire stable du cercle dans une surface, en immersions "indécomposables", par "télescopage" de telles immersions. Je n'ai pas réussi malheureusement à voir se transformer mes lumières sur la question en un travail de stage de DEA, ni d'autres lumières (sur une description théorique complète, en termes de groupes fondamentaux de 1-complexes topologiques, des immersions d'une surface à bord qui prolongent une immersion donnée de son bord) en le démarrage d'une thèse de doctorat d'état...

Un troisième thème, poursuivi simultanément depuis trois ans à divers niveaux d'enseignement (depuis l'option pour étudiants de première année, jusqu'à trois thèses de troisième cycle actuellement poursuivies sur ce thème) porte sur la classification topologique-combinatoire des systèmes de droites ou pseudo-

droites. Dans l'ensemble, la participation de mes élèves ici a été moins décevante qu'ailleurs, et j'ai eu le plaisir parfois d'apprendre par eux des choses intéressantes auxquelles je n'aurais pas songé. La réflexion commune, par la force des choses, s'est limitée cependant à un niveau très élémentaire. Dernièrement, j'ai finalement consacré un mois de réflexion intensive au développement d'une construction purement combinatoire d'une sorte de "surface modulaire" associée à un système de  $n$  pseudo-droites, qui classe les différentes "positions relatives" possibles (stables ou non) d'une  $(n + 1)$ -ième pseudo-droite par rapport au système donné, ou encore : les différentes "affinisations" possibles de ce système, par les différents choix possibles d'une "pseudo-droite à l'infini". J'ai l'impression d'avoir mis le doigt sur un objet remarquable, faisant apparaître un ordre imprévu dans des questions de classification qui jusqu'à présent apparaissaient assez chaotiques! Mais ce n'est pas le lieu dans le présent rapport de m'étendre plus à ce sujet.

Depuis 1977, dans toutes les questions (comme dans ces deux derniers thèmes que je viens d'évoquer) où interviennent des cartes bidimensionnelles, la possibilité de les réaliser canoniquement sur une surface conforme, donc sur une courbe algébrique complexe dans le cas orienté compact, reste en filigrane constant dans ma réflexion. Dans pratiquement tous les cas (en fait, tous les cas sauf celui de certaines cartes sphériques avec "peu d'automorphismes") une telle réalisation conforme implique en fait une *métrique riemannienne canonique*, ou du moins, canonique à une constante multiplicative près. Ces nouveaux éléments de structure (sans même prendre en compte l'élément arithmétique, dont il a été question au par. 3) sont de nature à transformer profondément l'aspect initial des questions abordées, et les méthodes d'approche. Un début de familiarisation avec les belles idées de Thurston sur la construction de l'espace de Teichmüller, en termes d'un jeu très simple de chirurgie riemannienne hyperbolique, me confirme dans ce pressentiment. Malheureusement, le niveau de culture très modeste de presque tous les élèves qui ont travaillé avec moi pendant ces dix dernières années ne me permet pas d'aborder avec eux, ne serait-ce que par allusion, de telles possibilités, alors que l'assimilation d'un langage combinatoire minimum se heurte déjà, bien souvent, à des obstacles psychiques considérables. C'est pourquoi, à certains égards et de plus en plus ces dernières années, mes activités d'enseignant ont souvent agi comme

un poids, plutôt que comme un stimulant pour le déploiement d'une réflexion géométrique tant soit peu avancée, ou seulement délicate.

## 9. Bilan d'une activité enseignante

L'occasion me semble propice ici de faire un bref bilan de mon activité enseignante depuis 1970, c'est-à-dire depuis que celle-ci s'effectue dans un cadre universitaire. Ce contact avec une réalité très différente a été pour moi riche en enseignements, d'une portée d'un tout autre ordre d'ailleurs que simplement pédagogique ou scientifique. Ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur ce sujet. J'ai dit aussi au début de ce rapport le rôle qu'a joué ce changement de milieu professionnel dans le renouvellement de mon approche des mathématiques, et celui de mes centres d'intérêt en mathématique. Si par contre je fais le bilan de mon activité enseignante au niveau de la recherche proprement dite, j'aboutis à un constat d'échec clair et net. Depuis plus de dix ans que cette activité se poursuit an par an au sein d'une même institution universitaire, je n'ai pas su, à aucun moment, y susciter un lieu où "il se passe quelque chose" – où quelque chose "passe", parmi un groupe si réduit soit-il de personnes, reliées par une aventure commune. A deux reprises, il est vrai, vers les années 74 à 76, j'ai eu le plaisir et le privilège de susciter chez un élève un travail d'envergure, poursuivi avec élan: chez Yves Ladegaillerie le travail signalé précédemment (par. 3) sur les questions d'isotopie en dimension 2, et chez Carlos Contou-Carrère (dont la passion mathématique n'avait pas attendu la rencontre avec moi pour éclore) un travail non publié sur les jacobiniennes locales et globales sur des schémas de bases généraux (dont une partie a été annoncée dans une note aux CR). Ces deux cas mis à part, mon rôle s'est borné, au cours de ces dix ans, à transmettre tant bien que mal des rudiments du métier de mathématicien 49 à quelques vingt élèves au niveau de la recherche, ou tout au moins à ceux parmi eux qui ont persévéré suffisamment avec moi, réputé plus exigeant que d'autres, pour aboutir à un premier travail noir sur blanc acceptable (certaines fois aussi à un travail mieux qu'acceptable et plus qu'un seul travail, fait avec goût et jusqu'au bout). Vu la conjoncture, même parmi les rares qui ont persévéré, plus rares encore seront ceux qui auront l'occasion d'exercer ce métier, et par là, tout en gagnant leur pain, de l'approfondir.

## 10. Épilogue

Depuis l'an dernier, je sens qu'au cours de mon activité d'enseignant universitaire, j'ai appris tout ce que j'avais à en apprendre et enseigné tout ce que je peux y enseigner, et qu'elle a cessé d'être vraiment utile, à moi-même comme aux autres. M'obstiner sous ces conditions à la poursuivre encore me paraîtrait un gaspillage, tant de ressources humaines que de deniers publics. C'est pourquoi j'ai demandé mon détachement au CNRS (que j'avais quitté en 1959 comme directeur de recherches frais émoulu, pour entrer à l'IHES). Je sais d'ailleurs que la situation de l'emploi est serrée au CNRS comme ailleurs, que l'issue de ma demande est douteuse, et que si un poste m'y était attribué, ce serait au dépens d'un chercheur plus jeune qui resterait sans poste. Mais il est vrai aussi que cela libérerait mon poste à l'USTL au bénéfice d'un autre. C'est pourquoi je n'ai pas de scrupule à faire cette demande, et s'il le faut à revenir à la charge si elle n'est pas acceptée cette année.

En tout état de cause, cette demande aura été pour moi l'occasion d'écrire cette esquisse de programme, qui autrement sans doute n'aurait jamais vu le jour. J'ai essayée d'être bref sans être sybillin et aussi, après coup, d'en faciliter la lecture et de la rendre plus attrayante, en y adjoignant un sommaire. Si malgré cela elle peut paraître longue pour la circonstance, je m'en excuse. Elle me paraît courte pour son contenu, sachant que dix ans de travail ne seraient pas de trop pour aller jusqu'au bout du moindre des thèmes esquissés (à supposer qu'il y ait un "bout"...), et cent ans seraient peu pour le plus riche d'entre eux !

Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Celle-ci se manifeste notamment par une source d'inspiration commune, la géométrie des surfaces, présente dans tous ces thèmes, au premier plan le plus souvent. Cette source, par rapport à mon "passé" mathématique, représente un renouvellement, mais nullement une rupture. Plutôt, elle montre le chemin d'une approche nouvelle vers cette réalité encore mystérieuse, celle des "*motifs*", qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé<sup>10</sup>. Cette fascination ne s'est nullement évanouie, elle

---

<sup>10</sup>Voir à ce sujet mes commentaires dans l'"Esquisse Thématique" de 1972 jointe au présent rapport, dans la rubrique terminale "divagations motiviques" (loc. cit. pages 17-18).



fait partie plutôt de celle du plus brûlant pour moi de tous les thèmes évoqués précédemment. Mais aujourd'hui je ne suis plus, comme naguère, le prisonnier volontaire de tâches interminables, qui si souvent m'avaient interdit de m'élancer dans l'inconnu, mathématique ou non. Le temps des *tâches* pour moi est révolu. Si l'âge m'a apporté quelque chose, c'est d'être plus léger.

Janvier 1984

## Notes

1. L'expression "hors de portée" ici (et encore plus loin pour une question toute différente), que j'ai laissée passer en allant à l'encontre d'une réticence, me paraît décidément hâtive et sans fondement. J'ai pu constater déjà en d'autres occasions que lorsque des augures (ici moi-même !) déclarent d'un air entendu (ou dubitatif) que tel problème est "hors de portée", c'est là au fond une affirmation entièrement subjective. Elle signifie simplement, à part le fait que le problème est censé ne pas être résolu encore, que celui qui parle est à court d'idées sur la question, ou de façon plus précise sans doute, qu'il est devant elle sans sentiment ni entrain, qu'elle "ne lui fait rien" et qu'il n'a aucune envie de faire quelque chose avec elle – ce qui souvent est une raison suffisante pour vouloir en décourager autrui. Cela n'a pas empêché qu'à l'instar de M. de la Palisse, et au moment même de succomber, les belles et regrettées conjectures de Mordell, de Tate, de Chafarévitch étaient toujours réputées "hors de portée", les pauvres ! – D'ailleurs, dans les jours déjà qui ont suivi la rédaction du présent rapport, qui m'a remis en contact avec des questions dont je m'étais quelque peu éloigné au cours de l'année écoulée, je me suis aperçu d'une nouvelle propriété remarquable de l'action extérieure d'un groupe de Galois absolu sur le groupe fondamental d'une courbe algébrique, qui m'avait échappé jusqu'à présent et qui sans doute constitue pour le moins un nouveau pas en avant vers la formulation d'une caractérisation algébrique de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Celle-ci, avec la "conjecture fondamentale" (mentionnée au par. 3 ci-dessous) apparaît à présent comme la principale question ouverte pour les fondements d'une "géométrie algébrique anabéli-

enne”, laquelle depuis quelques années, représente (et de loin) mon plus fort centre d’intérêt en mathématiques.

2. Je puis faire exception pourtant d’un autre “fait”, du temps où, vers l’âge de douze ans, j’étais interné au camp de concentration de Rieucros (près de Mende). C’est là que j’ai appris, par une détenue, Maria, qui me donnait des leçons particulières bénévoles, la définition du cercle. Celle-ci m’avait impressionné par sa simplicité et son évidence, alors que la propriété de “rotondité parfaite” du cercle m’apparaissait auparavant comme une réalité mystérieuse au-delà des mots. C’est à ce moment, je crois, que j’ai entrevu pour la première fois (sans bien sûr me le formuler en ces termes) la puissance créatrice d’une “bonne” définition mathématique, d’une *formulation* qui décrit l’essence. Aujourd’hui encore, il semble que la fascination qu’a exercé sur moi cette puissance-là n’a rien perdu de sa force.
3. Plus généralement, au-delà des variétés dites “anabéliennes” sur des corps de type fini, la géométrie algébrique anabélienne (telle qu’elle s’est dégagée il y a quelques années) amène à une description, en termes de groupes profinis uniquement, de la catégorie des schémas de type fini sur la base absolue  $\mathbf{Q}$  (voire même  $\mathbf{Q}$ ), et par là même, en principe, de la catégorie des schémas quelconques (par des passages à la limite convenables). Il s’agit donc d’une construction “qui fait semblant” d’ignorer les anneaux (tels que  $\mathbf{Q}$ , les algèbres de type fini sur  $\mathbf{Q}$  etc.) et les équations algébriques qui servent traditionnellement à décrire les schémas, en travaillant directement avec leurs topos étales, exprimables en termes de systèmes de groupes profinis. Un grain de sel cependant : pour pouvoir espérer reconstituer un schéma (de type fini sur  $\mathbf{Q}$  disons) à partir de son topos étale, qui est un invariant purement topologique, il convient de se placer, non dans la catégorie des schémas (de type fini sur  $\mathbf{Q}$  en l’occurrence), mais dans celle qui s’en déduit par “localisation”, en rendant inversibles les morphismes qui sont des “homéomorphismes universels”, i.e. qui sont finis, radiciels et surjectifs. Le développement d’une telle traduction d’un “monde géométrique” (savoir celui des schémas, multiplicités schématiques etc.) en termes de “monde algébrique” (celui des groupes profinis, et systèmes de groupes profinis décrivant des

topos (dits “étales”) convenables) peut être considéré comme un aboutissement ultime de la théorie de Galois, sans doute dans l’esprit même de Galois. La sempiternelle question “et pourquoi tout ça ?” me paraît avoir ni plus, ni moins de sens dans le cas de la géométrie algébrique anabélienne en train de naître, que pour la théorie de Galois au temps de Galois (ou même aujourd’hui, quand la question est posée par un étudiant accablé...) et de même pour le commentaire qui va généralement avec : “c’est bien général tout ça !”.

4. On conçoit donc aisément qu’un groupe comme  $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$ , avec sa structure “arithmétique”, soit une véritable machine à construire des représentations “motiviques” de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  et de ses sous-groupes ouverts, et qu’on obtient ainsi, au moins en principe, toutes les représentations motiviques qui sont de poids 1, ou contenues dans un produit tensoriel de telles représentations (ce qui en fait déjà un bon paquet !). J’avais commencé en 1981 à expérimenter avec cette machine dans quelques cas d’espèce, obtenant diverses représentations remarquables de  $\Gamma$  dans des groupes  $G(\hat{\mathbb{Z}})$ , où  $G$  est un schéma en groupes (pas nécessairement réductif) sur  $\mathbb{Z}$ , en partant d’homomorphismes convenables

$$\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow G_0(\mathbb{Z}),$$

où  $G_0$  est un schéma en groupes sur  $\mathbb{Z}$ , et  $G$  étant construit à partir de là comme extension de  $G_0$  par un schéma en groupes convenable. Dans le cas “tautologique”  $G_0 = \mathrm{Sl}(2)_{\mathbb{Z}}$ , on trouve pour  $G$  une extension remarquable de  $\mathrm{Gl}(2)_{\mathbb{Z}}$  par un tore de dimension 2, avec une représentation motivique qui “coiffe” celles associées aux corps de classes des extensions  $\mathbb{Q}(i)$  et  $\mathbb{Q}(j)$  (comme par hasard, les “corps de multiplication complexe” des deux courbes elliptiques “anharmoniques”). Il y a là un principe de construction qui m’a semblé très général et très efficace, mais je n’ai pas eu (ou pris) le loisir de le dévisser et le suivre jusqu’au bout – c’est là un des nombreux “points chauds” dans le programme de fondements de géométrie algébrique anabélienne (ou de “théorie de Galois”, version élargie) que je me propose de développer. A l’heure actuelle, et dans un ordre de priorité sans doute très provisoire, ces points sont:

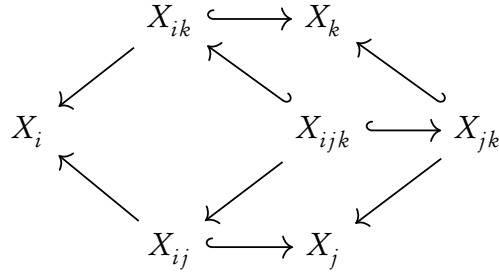
- a) Construction combinatoire de la Tour de Teichmüller.
  - b) Description du groupe des automorphismes de la compactification profinie de cette tour, et réflexion sur une caractérisation de  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  comme sous-groupe de ce dernier.
  - c) La “machine à motifs”  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$  et ses variantes.
  - d) Le dictionnaire anabélien, et la conjecture fondamentale (qui n’est peut-être pas si “hors de portée” que ça !). Parmi les points cruciaux de ce dictionnaire, je prévois le “paradigme profini” pour les corps  $\mathbf{Q}$  (cf. b)),  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{C}$ , dont une formulation plausible reste à dégager, ainsi qu’une description des sous-groupes d’inertie de  $\Gamma$ , par où s’amorce le passage de la caractéristique zéro à la caractéristique  $p > 0$ , et à l’anneau absolu  $\mathbf{Z}$ .
  - e) Problème de Fermat.
5. Je signalerai cependant un travail plus délicat (mis à part le travail signalé en passant sur les complexes cubiques), sur l’interprétation combinatoire des cartes régulières associées aux sous-groupes de congruence de  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$ . Ce travail a été développé surtout en vue d’exprimer l’opération “arithmétique” de  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  sur ces “*cartes de congruences*”, laquelle se fait, essentiellement, par l’intermédiaire du caractère cyclotomique de  $\Gamma$ . Un point de départ a été la théorie combinatoire du “bi-icosaèdre” développée dans un cours C4 à partir de motivations purement géométriques, et qui (il s’est avéré par la suite) permet d’exprimer commodément l’opération de  $\Gamma$  sur la catégorie des cartes icosaédrales (i.e. des cartes de congruence d’indice 5).
6. Signalons à ce propos que les classes d’isomorphie d’espaces modérés compacts sont les mêmes que dans la théorie “linéaire par morceaux” (qui n’est *pas*, je le rappelle, une théorie modérée). C’est là, en un sens, une réhabilitation de la “Hauptvermutung”, qui n’est “fausse” que parce que, pour des raisons historiques qu’il serait sans doute intéressant de cerner de plus près, les fondements de topologie utilisés pour la formuler n’excluaient pas les phénomènes de sauvagerie. Il va (je l’espère) sans dire que la nécessité de développer de nouveaux fondements pour la topologie “géométrique”

n'exclut nullement que les phénomènes en question, comme toute chose sous le ciel, ont leur raison d'être et leur propre beauté. Des fondements plus adéquats ne supprimeront pas ces phénomènes, mais nous permettront de les situer à leur juste place, comme des "cas limites" de phénomènes de "vraie" topologie.

7. En fait, pour reconstituer ce système d'espaces

$$(i_0, \dots, i_n) \mapsto X_{i_0, \dots, i_n}$$

contravariant sur  $\text{Drap}(I)$  (pour l'inclusion des drapeaux), il suffit de connaître les  $X_i$  (ou "*strates déployées*") et les  $X_{ij}$  (ou "*tubes de raccord*") pour  $i, j \in I$ ,  $i < j$ , et les morphismes  $X_{ij} \longrightarrow X_i$  (qui sont des inclusions "bordantes") et  $X_{ij} \longrightarrow X_j$  (qui sont des fibrations propres, dont les fibres  $F_{ij}$  sont appelées "*fibres de raccord*" pour les strates d'indices  $i$  et  $j$ ). Dans le cas d'une multiplicité modérée cependant, il faut connaître de plus les "*espaces de jonction*"  $X_{ijk}$  ( $i < j < k$ ) et ses morphismes dans  $X_{ij}$ ,  $X_{jk}$ , et surtout  $X_{ik}$ , s'insérant dans le diagramme commutatif hexagonal suivant, où les deux carrés de droites sont cartésiens, les flèches  $\hookrightarrow$  sont des immersions (pas nécessairement des plongements ici), et les autres flèches sont des fibrations propres :



(NB. Ce diagramme définit  $X_{ijk}$  en termes de  $X_{ij}$  et  $X_{jk}$  sur  $X_j$ , mais non la flèche  $X_{ijk} \longrightarrow X_{ik}$ , car  $X_{ik} \longrightarrow X_k$  n'est pas nécessairement un plongement.)

Dans le cas des espaces modérés stratifiés proprement dits (qui ne sont pas des multiplicités à proprement parler) on peut exprimer de façon commode le "déploiement" de cette structure, i.e. le système des espaces  $X_{i_0 \dots i_n}$ , en

termes de l'espace modéré  $X_*$  somme des  $X_i$ , qui est muni d'une *structure d'objet ordonné* (dans la catégorie des espaces modérés) ayant comme graphe  $X_{**}$  de la relation d'ordre la somme des  $X_{ij}$  et des  $X_i$  (ces derniers constituant la diagonale). Parmi les propriétés essentielles de cette structure ordonnée, relevons seulement ici que  $\text{pr}_1 : X_{**} \longrightarrow X_*$  est une fibration (localement triviale) propre, et  $\text{pr}_2 : X_{**} \longrightarrow X_*$  est un plongement “bordant”. On a une interprétation analogue du déploiement d'une multiplicité modérée stratifiée, en termes d'une *structure de catégorie* (remplaçant une simple structure ordonnée) “au sens multiplicités modérées”, dont l'application de composition est donnée par les morphismes  $X_{ijk} \longrightarrow X_{ik}$  ci-dessus.

## SKETCH OF A PROGRAMME

Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's *Esquisse d'un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242,  
Cambridge University Press

---

### 1. Preface

As the present situation makes the prospect of teaching at the research level at the University seem more and more illusory, I have resolved to apply for admission to the CNRS, in order to devote my energy to the development of projects and perspectives for which it is becoming clear that no student (nor even, it seems, any mathematical colleague) will be found to develop them in my stead.

In the role of the document "Titles and Articles", one can find after this text the complete reproduction of a sketch, by themes, of what I considered to be my principal mathematical contributions at the time of writing that report, in 1972. It also contains a list of articles published at that date. I ceased all publication of scientific articles in 1970. In the following lines, I propose to give a view of at least some of the principal themes of my mathematical reflections since then. These reflections materialised over the years in the form of two voluminous boxes of handwritten notes, doubtless difficult to decipher for anyone but myself, and which, after several successive stages of settling, are perhaps waiting for their mo-

ment to be written up together at least in a temporary fashion, for the benefit of the mathematical community. The term “written up” is somewhat incorrect here, since in fact it is much more a question of developing the ideas and the multiple visions begun during these last twelve years, to make them more precise and deeper, with all the unexpected rebounds which constantly accompany this kind of work – a work of discovery, thus, and not of compilation of piously accumulated notes. And in writing the “Mathematical Reflections”, begun since February 1983, I do intend throughout its pages to clearly reveal the process of thought, which feels and discovers, often blindly in the shadows, with sudden flashes of light when some tenacious false or simply inadequate image is finally shown for what it is, and things which seemed all crooked fall into place, with that mutual harmony which is their own.

In any case, the following sketch of some themes of reflection from the last ten or twelve years will also serve as a sketch of my programme of work for the coming years, which I intend to devote to the development of these themes, or at least some of them. It is intended on the one hand for my colleagues of the National Committee whose job it is to decide the fate of my application, and on the other hand for some other colleagues, former students, friends, in the possibility that some of the ideas sketched here might interest one of them.

## 2. A game of “Lego-Teichmüller” and the Galois group $\overline{\mathbf{Q}}$ over $\mathbf{Q}$

The demands of university teaching, addressed to students (including those said to be “advanced”) with a modest (and frequently less than modest) mathematical baggage, led me to a Draconian renewal of the themes of reflection I proposed to my students, and gradually to myself as well. It seemed important to me to start from an intuitive baggage common to everyone, independent of any technical language used to express it, and anterior to any such language – it turned out that the geometric and topological intuition of shapes, particularly two-dimensional shapes, formed such a common ground. This consists of themes which can be grouped under the general name of “topology of surfaces” or “geometry of surfaces”, it being understood in this last expression that the main emphasis is on the



topological properties of the surfaces, or the combinatorial aspects which form the most down-to-earth technical expression of them, and not on the differential, conformal, Riemannian, holomorphic aspects, and (from there) on to “complex algebraic curves”. Once this last step is taken, however, algebraic geometry (my former love!) suddenly bursts forth once again, and this via the objects which we can consider as the basic building blocks for all other algebraic varieties. Whereas in my research before 1970, my attention was systematically directed towards objects of maximal generality, in order to uncover a general language adequate for the world of algebraic geometry, and I never restricted myself to algebraic curves except when strictly necessary (notably in étale cohomology), preferring to develop “pass-key” techniques and statements valid in all dimensions and in every place (I mean, over all base schemes, or even base ringed topoi...), here I was brought back, via objects so simple that a child learns them while playing, to the beginnings and origins of algebraic geometry, familiar to Riemann and his followers!

Since around 1975, it is thus the geometry of (real) surfaces, and starting in 1977 the links between questions of geometry of surfaces and the algebraic geometry of algebraic curves defined over fields such as  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$  or extensions of  $\mathbf{Q}$  of finite type, which were my principal source of inspiration and my constant guiding thread. It is with surprise and wonderment that over the years I discovered (or rather, doubtless, rediscovered) the prodigious, truly inexhaustible richness, the unsuspected depth of this theme, apparently so anodine. I believe I feel a central sensitive point there, a privileged point of convergence of the principal currents of mathematical ideas, and also of the principal structures and visions of things which they express, from the most specific (such as the rings  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\overline{\mathbf{Q}}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  or the group  $\mathrm{Sl}(2)$  over one of these rings, or general reductive algebraic groups) to the most “abstract”, such as the algebraic “multiplicities”, complex analytic or real analytic. (These are naturally introduced when systematically studying “moduli varieties” for the geometric objects considered, and if we want to go farther than the notoriously insufficient point of view of “coarse moduli” which comes down to most unfortunately killing the automorphism groups of these objects.) Among these modular multiplicities, it is those of Mumford-Deligne for “stable” algebraic curves of genus  $g$  with  $\nu$  marked points, which I denote by  $\widehat{M}_{g,\nu}$  (compactification

of the “open” multiplicity  $M_{g,\nu}$  corresponding to non-singular curves), which for the last two or three years have exercised a particular fascination over me, perhaps even stronger than any other mathematical object to this day. Indeed, it is more the system of all the multiplicities  $M_{g,\nu}$  for variable  $g, \nu$ , linked together by a certain number of fundamental operations (such as the operations of “plugging holes”, i.e. “erasing” marked points, and of “glueing”, and the inverse operations), which are the reflection in absolute algebraic geometry in characteristic zero (for the moment) of geometric operations familiar from the point of view of topological or conformal “surgery” of surfaces. Doubtless the principal reason of this fascination is that this very rich geometric structure on the system of “open” modular multiplicities  $M_{g,\nu}$  is reflected in an analogous structure on the corresponding fundamental groupoids, the “Teichmüller groupoids”  $\widehat{T}_{g,\nu}$ , and that these operations on the level of the  $\widehat{T}_{g,\nu}$  are sufficiently intrinsic for the Galois group  $\Gamma$  of  $\mathbf{Q}/\mathbf{Q}$  to act on this whole “tower” of Teichmüller groupoids, respecting all these structures. Even more extraordinary, this action is *faithful* – indeed, it is already faithful on the first non-trivial “level” of this tower, namely  $\widehat{T}_{0,4}$  – which also means, essentially, that the outer action of  $\Gamma$  on the fundamental group  $\hat{\pi}_{0,3}$  of the standard projective line  $\mathbb{P}^1$  over  $\mathbf{Q}$  with the three points 0, 1 and  $\infty$  removed, is already faithful. Thus *the Galois group  $\Gamma$  can be realised as an automorphism group of a very concrete profinite group*, and moreover respects certain essential structures of this group. It follows that an element of  $\Gamma$  can be “parametrised” (in various equivalent ways) by a suitable element of this profinite group  $\hat{\pi}_{0,3}$  (a free profinite group on two generators), or by a system of such elements, these elements being subject to certain simple necessary (but doubtless not sufficient) conditions for this or these elements to really correspond to an element of  $\Gamma$ . One of the most fascinating tasks here is precisely to discover necessary *and* sufficient conditions on an exterior automorphism of  $\hat{\pi}_{0,3}$ , i.e. on the corresponding parameter(s), for it to come from an element of  $\Gamma$  – which would give a “purely algebraic” description, in terms of profinite groups and with no reference to the Galois theory of number fields, to the Galois group  $\Gamma = \text{Gal}(\mathbf{Q}/\mathbf{Q})$ .

Perhaps even a conjectural characterisation of  $\Gamma$  as a subgroup of  $\text{Aut}_{\text{ext}} \hat{\pi}_{0,3}$  is for the moment out of reach <sup>(1)</sup>; I do not yet have any conjecture to propose.

On the other hand another task is immediately accessible, which is to describe the action of  $\Gamma$  on all of the Teichmüller tower, in terms of its action on the “first level”  $\hat{\pi}_{0,3}$ , i.e. to express an automorphism of this tower, in terms of the “parameter” in  $\hat{\pi}_{0,3}$  which picks out the element  $\gamma$  running through  $\Gamma$ . This is linked to a representation of the Teichmüller tower (considered as a groupoid equipped with an operation of “glueing”) by generators and relations, which will in particular give a presentation by generators and relations in the usual sense of each of the  $\hat{T}_{g,v}$  (as a profinite groupoid). Here, even for  $g = 0$  (so when the corresponding Teichmüller groups are “well-known” braid groups), the generators and relations known to date which I have heard of appear to me to be unusable as they stand, because they do not present the characteristics of invariance and of symmetry indispensable for the action of  $\Gamma$  to be directly legible on the presentation. This is particularly linked to the fact that people still obstinately persist, when calculating with fundamental groups, in fixing a single base point, instead of cleverly choosing a whole packet of points which is invariant under the symmetries of the situation, which thus get lost on the way. In certain situations (such as descent theorems for fundamental groups à la van Kampen) it is much more elegant, even indispensable for understanding something, to work with fundamental groupoids with respect to a suitable packet of base points, and it is certainly so for the Teichmüller tower. It would seem (incredible, but true!) that even the geometry of the first level of the Teichmüller tower (corresponding thus to “moduli” either for projective lines with four marked points, or to elliptic curves(!)) has never been explicitly described, for example the relation between the genus 0 case and the geometry of the octahedron, and that of the tetrahedron. A fortiori the modular multiplicities  $M_{0,5}$  (for projective lines with five marked points) and  $M_{1,2}$  (for curves of genus 1 with two marked points), which actually are practically isomorphic, appear to be virgin territory – braid groups will not enlighten us on their score! I have begun to look at  $M_{0,5}$  at stray moments; it is a real jewel, with a very rich geometry closely related to the geometry of the icosahedron.

The a priori interest of a complete knowledge of the two first levels of the tower (i.e., the cases where the modular dimension  $N = 3g - 3 + v$  is  $\leq 2$ ) is to be found in the principle that *the entire tower can be reconstituted from these two first*

*levels*, in the sense that via the fundamental operation of “glueing”, level 1 gives a complete system of generators, and level 2 a complete system of relations. There is a striking analogy, and I am certain it is not merely formal, between this principle and the analogous principle of Demazure for the structure of reductive algebraic groups, if we replace the term “level” or “modular dimension” with “semi-simple rank of the reductive group”. The link becomes even more striking, if we recall that the Teichmüller group  $T_{1,1}$  (in the discrete, transcendental context now, and not in the profinite algebraic context, where we find the profinite completions of the former) is no other than  $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ , i.e. the group of integral points of the simple group scheme of “absolute” rank 1  $\mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$ . Thus, *the fundamental building block for the Teichmüller tower is essentially the same as for the “tower” of reductive groups of all ranks* - a group of which, moreover, we may say that it is doubtless present in all the essential disciplines of mathematics.

This principle of construction of the Teichmüller tower is not proved at this time – but I have no doubt that it is valid. It would be a consequence (via a theory of dévissage of stratified structures - here the  $\widehat{M}_{g,\nu}$  – which remains to be written, cf. par. 5) of an extremely plausible property of the open modular multiplicities  $M_{g,\nu}$  in the complex analytic context, namely that for modular dimension  $N \geq 3$ , the fundamental group of  $M_{g,\nu}$  (i.e. the usual Teichmüller group  $T_{g,\nu}$ ) is isomorphic to the “fundamental group at infinity”, i.e. that of a “tubular neighbourhood of infinity”. This is a very familiar thing (essentially due to Lefschetz) for a non-singular *affine* variety of dimension  $N \geq 3$ . True, the modular multiplicities are not affine (except for small values of  $g$ ), but it would suffice if such an  $M_{g,\nu}$  of dimension  $N$  (or rather, a suitable finite covering) were a union of  $N - 2$  affine open sets, making  $M_{g,\nu}$  “not too near a compact variety”.

Having no doubt about this principle of construction of the Teichmüller tower, I prefer to leave to the experts, better equipped than I am, the task of proving the necessary (if it so happens that any are interested), to rather study, with all the care it deserves, the structure which ensues for the Teichmüller tower by generators and relations, this time in the discrete, not the profinite framework – which essentially comes down to a complete understanding of the four modular multiplicities  $M_{0,4}$ ,  $M_{1,1}$ ,  $M_{0,5}$ ,  $M_{1,2}$  and their fundamental groupoids based at suitably

chosen “base points”. These offer themselves quite naturally, as the complex algebraic curves of the type  $(g, n)$  under consideration, having automorphism group (necessarily finite) larger than in the generic case<sup>11</sup>. Including the holomorphic sphere with three marked points (coming from  $M_{0,3}$ , i.e. from level 0), we find *twelve fundamental “building blocks”* (6 of genus 0, 6 of genus 1) in a “game of Lego-Teichmüller” (large box), where the points marked on the surfaces considered are replaced by “holes” with boundary, so as to have surfaces with boundary, functioning as building blocks which can be assembled by gentle rubbing as in the ordinary game of Lego dear to our children (or grandchildren...). By assembling them we find an entirely visual way to construct every type of surface (it is essentially these constructions which will be the “base points” for our famous tower), and also to visualise the *elementary “paths”* by operations as concrete as “twists”, or automorphisms of blocks in the game, and to write the *fundamental relations* between composed paths. According to the size (and the price!) of the construction box used, we can even find numerous different descriptions of the Teichmüller tower by generators and relations. The smallest box is reduced to identical blocks, of type  $(0, 3)$  – these are the Thurston “pants”, and the game of Lego-Teichmüller which I am trying to describe, springing from motivations and reflections of absolute algebraic geometry over the field  $\mathbf{Q}$ , is very close to the game of “hyperbolic geodesic surgery” of Thurston, whose existence I learned of last year from Yves Ladegaillierie. In a microseminar with Carlos Contou-Carrère and Yves Ladegaillierie, we began a reflection one of whose objects is to confront the two points of view, which are mutually complementary.

I add that each of the twelve building blocks of the “large box” is equipped with a canonical cellular decomposition, stable under all symmetries, having as its only vertices the “marked points” (or centres of the holes), and as edges certain geodesic paths (for the canonical Riemannian structure on the sphere or the torus consid-

---

<sup>11</sup>It is also necessary to add the “base points” coming from operations of glueing of “blocks” of the same type in smaller modular dimension. On the other hand, in modular dimension 2 (the cases of  $M_{0,5}$  and  $M_{1,2}$ ), it is advisable to exclude the points of certain one-parameter families of curves admitting an exceptional automorphism of order 2. These families actually constitute remarkable rational curves on the multiplicities considered, which appear to me to be an important ingredient in the structure of these multiplicities.

ered) between certain pairs of vertices (namely those which lie on the same “real locus”, for a suitable real structure of the complex algebraic curve considered). Consequently, all the surfaces obtained in this game by assembling are equipped with canonical cellular structures, which in their turn (cf. §3 below) enable us to consider these surfaces as associated to complex algebraic curves (and even over  $\mathbf{Q}$ ) which are canonically determined. There is here a typical game of intertwining of the combinatorial and the complex algebraic (or rather, the algebraic over  $\mathbf{Q}$ ).

The “small box” with identical blocks, which has the charm of economy, will doubtless give rise to a relatively complex description for the relations (complex, but not at all inextricable!). The large box will give rise to more numerous relations (because there are many more base points and remarkable paths between them), but with a more transparent structure. I foresee that in modular dimension 2, just as in the more or less familiar case of modular dimension 1 (in particular with the description of  $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$  by  $(\rho, \sigma | \rho^3 = \sigma^2, \rho^4 = \sigma^6 = 1)$ ), we will find a generation by the automorphism groups of the three types of relevant blocks, with simple relations which I have not clarified as I write these lines. Perhaps we will even find a principle of this type for all the  $T_{g,v}$ , as well as a cellular decomposition of  $\widehat{M}_{g,v}$  generalising those which present themselves spontaneously for  $\widehat{M}_{0,4}$  and  $\widehat{M}_{1,1}$ , and which I already perceive for modular dimension 2, using the hypersurfaces corresponding to the various *real structures* on the complex structures considered, to effect the desired cellular decomposition.

### 3. Number fields associated to a child’s drawing

Instead of following (as I meant to) a rigorous thematic order, I let myself be carried away by my predilection for a particularly rich and burning theme, to which I intend to devote myself prioritarilly for some time, starting at the beginning of the academic year 84/85. Thus I will take the thematic description up again where I left it, at the very beginning of the preceding paragraph.

My interest in topological surfaces began to appear in 1974, when I proposed to Yves Ladegaillerie the theme of the isotopic study of embeddings of a topological 1-complex into a compact surface. Over the two following years, this study led him to a remarkable isotopy theorem, giving a complete algebraic description of

the isotopy classes of embeddings of such 1-complexes, or compact surfaces with boundary, in a compact oriented surface, in terms of certain very simple combinatorial invariants, and the fundamental groups of the protagonists. This theorem, which should be easily generalisable to embeddings of any compact space (triangulable to simplify) in a compact oriented surface, gives as easy corollaries several deep classical results in the theory of surfaces, and in particular Baer's isotopy theorem. It will finally be published, separately from the rest (and ten years later, seeing the difficulty of the times...), in *Topology*. In the work of Ladegaillerie there is also a purely algebraic description, in terms of fundamental groups, of the "isotopic" category of compact surfaces  $X$ , equipped with a topological 1-complex  $K$  embedded in  $X$ . This description, which had the misfortune to run counter to "today's taste" and because of this appears to be unpublishable, nevertheless served (and still serves) as a precious guide in my later reflections, particularly in the context of absolute algebraic geometry in characteristic zero.

The case where  $(X, Y)$  is a 2-dimensional "map", i.e. where the connected components of  $X \setminus K$  are open 2-cells (and where moreover  $K$  is equipped with a finite set  $S$  of "vertices", such that the connected components of  $K \setminus S$  are open 1-cells) progressively attracted my attention over the following years. The isotopic category of these maps admits a particularly simple algebraic description, via the set of "markers" (or "flags", or "biarcs") associated to the map, which is naturally equipped with the structure of a set with a group of operators, under the group

$$\underline{C}_2 = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0 \sigma_2)^2 = 1 \rangle,$$

which I call the (non-oriented) *cartographic group* of dimension 2. It admits as a subgroup of index 2 the *oriented cartographic group*, generated by the products of an even number of generators, which can also be described by

$$\underline{C}_2^+ = \langle \rho_s, \rho_f, \sigma \mid \rho_s \rho_f = \sigma, \sigma^2 = 1 \rangle,$$

(with

$$\rho_s = \sigma_2 \sigma_1, \quad \rho_f = \sigma_1 \sigma_0, \quad \sigma = \sigma_0 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_0,$$

operations of *elementary rotation* of a flag around a vertex, a face and an edge respectively). There is a perfect dictionary between the topological situation of

compact maps, resp. oriented compact maps, on the one hand, and finite sets with group of operators  $\underline{C}_2$  resp.  $\underline{C}_2^+$  on the other, a dictionary whose existence was actually more or less known, but never stated with the necessary precision, nor developed at all. This foundational work was done with the care it deserved in an excellent DEA thesis, written jointly by Jean Malgoire and Christine Voisin in 1976.

This reflection suddenly takes on a new dimension, with the simple remark that the group  $\underline{C}_2^+$  can be interpreted as a quotient of the fundamental group of an oriented sphere with three points, numbered 0, 1 and 2, removed; the operations  $\rho_s, \sigma, \rho_f$  are interpreted as loops around these points, satisfying the familiar relation

$$\ell_0 \ell_1 \ell_2 = 1,$$

while the additional relation  $\sigma^2 = 1$ , i.e.  $\ell_1^2 = 1$  means that we are interested in the quotient of the fundamental group corresponding to an imposed ramification index of 2 over the point 1, which thus classifies the coverings of the sphere ramified at most over the points 0, 1 and 2 with ramification equal to 1 or 2 at the points over 1. Thus, the compact oriented maps form an isotopic category equivalent to that of these coverings, subject to the additional condition of being finite coverings. Now taking the Riemann sphere, or the projective complex line, as reference sphere, rigidified by the three points 0, 1 and  $\infty$  (this last thus replacing 2), and recalling that every finite ramified covering of a complex algebraic curve itself inherits the structure of a complex algebraic curve, we arrive at this fact, which eight years later still appears to me as extraordinary: *every “finite” oriented map is canonically realised on a complex algebraic curve!* Even better, as the complex projective line is defined over the absolute base field  $\mathbf{Q}$ , as are the admitted points of ramification, the algebraic curves we obtain are defined not only over  $\mathbf{C}$ , but over the algebraic closure  $\overline{\mathbf{Q}}$  of  $\mathbf{Q}$  in  $\mathbf{C}$ . As for the map we started with, it can be found on the algebraic curve, as the inverse image of the real segment  $[0, 1]$  (where 0 is considered as a vertex, and 1 as the middle of a “folded edge” of centre 1), which itself is the “universal oriented 2-map” on the Riemann sphere<sup>12</sup>. The

---

<sup>12</sup>There is an analogous description of finite non-oriented maps, possibly with boundary, in terms of *real* algebraic curves, more precisely of coverings of  $\mathbb{P}_{\mathbf{R}}^1$  ramified only over 0, 1,  $\infty$ , the



points of the algebraic curve  $X$  over  $0, 1$  and  $\infty$  are neither more nor less than the vertices, the “centres” of the edges and those of the faces of the map  $(X, K)$ , and the orders of the vertices and the faces are exactly the multiplicities of the zeros and the poles of the rational function (defined over  $\mathbf{Q}$ ) on  $X$ , which expresses its structural projection to  $\mathbb{P}_{\mathbf{C}}^1$ .

This discovery, which is technically so simple, made a very strong impression on me, and it represents a decisive turning point in the course of my reflections, a shift in particular of my centre of interest in mathematics, which suddenly found itself strongly focused. I do not believe that a mathematical fact has ever struck me quite so strongly as this one, nor had a comparable psychological impact <sup>(2)</sup>. This is surely because of the very familiar, non-technical nature of the objects considered, of which any child’s drawing scrawled on a bit of paper (at least if the drawing is made without lifting the pencil) gives a perfectly explicit example. To such a dessin, we find associated subtle arithmetic invariants, which are completely turned topsy-turvy as soon as we add one more stroke. Since these are spherical maps, giving rise to curves of genus 0 (which thus do not lead to “moduli”), we can say that the curve in question is “pinned down” if we fix three of its points, for instance three vertices of the map, or more generally three centres of facets (vertices, edges or faces) – and then the structural map  $f : X \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{C}}^1$  can be interpreted as a well-determined rational function

$$f(z) = P(z)/Q(z) \in \mathbf{C}(z)$$

quotient of two well-determined relatively prime polynomials, with  $Q$  unitary, satisfying algebraic conditions which in particular reflect the fact that  $f$  is unramified outside of  $0, 1$  and  $\infty$ , and which imply that the coefficients of these polynomials are *algebraic numbers*; thus their zeros are algebraic numbers, which represent respectively the vertices and the centres of the faces of the map under consideration.

Returning to the general case, since finite maps can be interpreted as coverings over  $\overline{\mathbf{Q}}$  of an algebraic curve defined over the prime field  $\mathbf{Q}$  itself, it follows that

---

surface with boundary associated to such a covering being  $X(\mathbf{C})/\tau$ , where  $\tau$  is complex conjugation. The “universal” non-oriented map is here the disk, or upper hemisphere of the Riemann sphere, equipped as before with the embedded 1-complex  $K = [0, 1]$ .

the Galois group  $\Gamma$  of  $\overline{\mathbf{Q}}$  over  $\mathbf{Q}$  acts on the category of these maps in a natural way. For instance, the operation of an automorphism  $\gamma \in \Gamma$  on a spherical map given by the rational function above is obtained by applying  $\gamma$  to the coefficients of the polynomials  $P, Q$ . Here, then, is that mysterious group  $\Gamma$  intervening as a transforming agent on topologico-combinatorial forms of the most elementary possible nature, leading us to ask questions like: are such and such oriented maps “conjugate” or: exactly which are the conjugates of a given oriented map? (Visibly, there is only a finite number of these).

I considered some concrete cases (for coverings of low degree) by various methods, J. Malgoire considered some others – I doubt that there is a uniform method for solving the problem by computer. My reflection quickly took a more conceptual path, attempting to apprehend the nature of this action of  $\Gamma$ . One sees immediately that roughly speaking, this action is expressed by a certain “outer” action of  $\Gamma$  on the profinite compactification of the oriented cartographic group  $\underline{C}_2^+$ , and this action in its turn is deduced by passage to the quotient of the canonical outer action of  $\Gamma$  on the profinite fundamental group  $\hat{\pi}_{0,3}$  of  $(U_{0,3})_{\overline{\mathbf{Q}}}$ , where  $U_{0,3}$  denotes the typical curve of genus 0 over the prime field  $\mathbf{Q}$ , with three points removed. This is how my attention was drawn to what I have since termed “*anabelian algebraic geometry*”, whose starting point was exactly a study (limited for the moment to characteristic zero) of the action of “absolute” Galois groups (particularly the groups  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ , where  $K$  is an extension of finite type of the prime field) on (profinite) geometric fundamental groups of algebraic varieties (defined over  $K$ ), and more particularly (breaking with a well-established tradition) fundamental groups which are very far from abelian groups (and which for this reason I call “*anabelian*”). Among these groups, and very close to the group  $\hat{\pi}_{0,3}$ , there is the profinite compactification of the modular group  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$ , whose quotient by its centre  $\pm 1$  contains the former as congruence subgroup mod 2, and can also be interpreted as an oriented “cartographic” group, namely the one classifying *triangulated* oriented maps (i.e. those whose faces are all triangles or monogons).

Every finite oriented map gives rise to a projective non-singular algebraic curve defined over  $\overline{\mathbf{Q}}$ , and one immediately asks the question: which are the algebraic curves over  $\overline{\mathbf{Q}}$  obtained in this way – do we obtain them all, who knows? In more

erudite terms, could it be true that every projective non-singular algebraic curve defined over a number field occurs as a possible “modular curve” parametrising elliptic curves equipped with a suitable rigidification? Such a supposition seemed so crazy that I was almost embarrassed to submit it to the competent people in the domain. Deligne when I consulted him found it crazy indeed, but didn’t have any counterexample up his sleeve. Less than a year later, at the International Congress in Helsinki, the Soviet mathematician Bielyi announced exactly that result, with a proof of disconcerting simplicity which fit into two little pages of a letter of Deligne – never, without a doubt, was such a deep and disconcerting result proved in so few lines!

In the form in which Bielyi states it, his result essentially says that *every algebraic curve defined over a number field can be obtained as a covering of the projective line ramified only over the points 0, 1 and  $\infty$* . This result seems to have remained more or less unobserved. Yet it appears to me to have considerable importance. To me, its essential message is that *there is a profound identity between the combinatorics of finite maps on the one hand, and the geometry of algebraic curves defined over number fields on the other*. This deep result, together with the algebraic geometric interpretation of maps, opens the door onto a new, unexplored world – within reach of all, who pass by without seeing it.

It was only close to three years later, seeing that decidedly the vast horizons opening here caused nothing to quiver in any of my students, nor even in any of the three or four high-flying colleagues to whom I had occasion to talk about it in a detailed way, that I made a first scouting voyage into this “new world”, from January to June 1981. This first foray materialised into a packet of some 1300 handwritten pages, baptised “The Long March through Galois theory”. It is first and foremost an attempt at understanding the relations between “arithmetic” Galois groups and profinite “geometric” fundamental groups. Quite quickly it became oriented towards a work of computational formulation of the action of  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  on  $\hat{\pi}_{0,3}$ , and at a later stage, on the somewhat larger group  $\widehat{\text{Sl}(2, \mathbf{Z})}$ , which gives rise to a more elegant and efficient formalism. Also during the course of this work (but developed in a different set of notes) appeared the central theme of anabelian algebraic geometry, which is to reconstitute certain so-called “anabelian” varieties

$X$  over an absolute field  $K$  from their mixed fundamental group, the extension of  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  by  $\pi_1(X_{\overline{K}})$ ; this is when I discovered the “fundamental conjecture of anabelian algebraic geometry”, close to the conjectures of Mordell and Tate recently proved by Faltings (<sup>3</sup>). This period also saw the appearance of the first reflection on the Teichmüller groups, and the first intuitions on the many-faceted structure of the “Teichmüller tower” – the open modular multiplicities  $M_{g,\nu}$  also appearing as the first important examples in dimension  $> 1$ , of varieties (or rather, multiplicities) seeming to deserve the appellation of “anabelian”. Towards the end of this period of reflection, it appeared to me as a fundamental reflection on a theory still completely up in the air, for which the name “Galois-Teichmüller theory” seems to me more appropriate than the name “Galois Theory” which I had at first given to my notes. Here is not the place to give a more detailed description of this set of questions, intuitions, ideas – which even includes some tangible results. The most important thing seems to me to be the one pointed out in par. 2, namely the faithfulness of the outer action of  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  (and of its open subgroups) on  $\hat{\pi}_{0,3}$ , and more generally (if I remember rightly) on the fundamental group of any “anabelian” algebraic curve (i.e. whose genus  $g$  and “number of holes”  $\nu$  satisfy the equality  $2g + \nu \geq 3$ , i.e. such that  $\chi(X) < 0$ ) defined over a finite extension of  $\mathbf{Q}$ . This result can be considered to be essentially equivalent to Bielyi’s theorem – it is the first concrete manifestation, via a precise mathematical statement, of the “message” which was discussed above.

I would like to conclude this rapid outline with a few words of commentary on the truly unimaginable richness of a typical anabelian group such as  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$  – doubtless the most remarkable discrete infinite group ever encountered, which appears in a multiplicity of avatars (of which certain have been briefly touched on in the present report), and which from the point of view of Galois-Teichmüller theory can be considered as the fundamental “building block” of the “Teichmüller tower”. The element of the structure of  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$  which fascinates me above all is of course the outer action of  $\Gamma$  on its profinite compactification. By Bielyi’s theorem, taking the profinite compactifications of subgroups of finite index of  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$ , and the induced outer action (up to also passing to an open subgroup of  $\Gamma$ ), *we essentially find the fundamental groups of all algebraic curves* (not necessarily compact)

*defined over number fields  $K$ , and the outer action of  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  on them* – at least it is true that every such fundamental group appears as a quotient of one of the first groups<sup>13</sup>. Taking the “anabelian yoga” (which remains conjectural) into account, which says that an anabelian algebraic curve over a number field  $K$  (finite extension of  $\mathbf{Q}$ ) is known up to isomorphism when we know its mixed fundamental group (or what comes to the same thing, the outer action of  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  on its profinite geometric fundamental group), we can thus say that *all algebraic curves defined over number fields are “contained” in the profinite compactification  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$ , and in the knowledge of a certain subgroup  $\Gamma$  of its group of outer automorphisms!* Passing to the abelianisations of the preceding fundamental groups, we see in particular that all the abelian  $\ell$ -adic representations due to Tate and his circle, defined by Jacobians and generalised Jacobians of algebraic curves defined over number fields, are contained in this single action of  $\Gamma$  on the anabelian profinite group  $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$ ! <sup>(4)</sup>

There are people who, faced with this, are content to shrug their shoulders with a disillusioned air and to bet that all this will give rise to nothing, except dreams. They forget, or ignore, that our science, and every science, would amount to little if since its very origins it were not nourished with the dreams and visions of those who devoted themselves to it.

#### 4. Regular polyhedra over finite fields

From the very start of my reflection on 2-dimensional maps, I was most particularly interested by the “regular” maps, those whose automorphism group acts transitively (and consequently, simply transitively) on the set of flags. In the oriented case and in terms of the algebraic-geometric interpretation given in the preceding paragraph, it is these maps which correspond to *Galois* coverings of the projective line. Very quickly also, and even before the appearance of the link with algebraic geometry, it appears necessary not to exclude the infinite maps, which in particular occur in a natural way as universal coverings of finite maps. It appears (as an immediate consequence of the “dictionary” of maps, extended to the case of maps

---

<sup>13</sup>In fact, we are considering quotients of a particularly trivial nature, by abelian subgroups which are products of “Tate modules”  $\hat{\mathbf{Z}}(1)$ , corresponding to “loop-groups” around points at infinity.

which are not necessarily finite) that for every pair of natural integers  $p, q \geq 1$ , there exists up to non-unique isomorphism one and only one 1-*connected* map of type  $(p, q)$ , i.e. all of whose vertices are of order  $p$  and whose faces are of order  $q$ , and this map is a regular map. It is pinned down by the choice of a flag, and its automorphism group is then canonically isomorphic to the quotient of the cartographic group (resp. of the oriented cartographic group, in the oriented case) by the additional relations

$$\rho_s^p = \rho_f^q = 1.$$

The case where this group is finite is the “Pythagorean” case of regular spherical maps, the case where it is infinite gives the regular tilings of the Euclidean plane or of the hyperbolic plane<sup>14</sup>. The link between combinatorial theory and the “conformal” theory of regular tilings of the hyperbolic plane was foreshadowed, before the appearance of the link between finite maps and finite coverings of the projective line. Once this link is understood, it becomes obvious that it should also extend to infinite maps (regular or not): *every map, finite or not, can be canonically realised on a conformal surface* (compact if and only if the map is finite), *as a ramified covering of the complex projective line, ramified only over the points 0, 1 and  $\infty$* . The only difficulty here was to develop the dictionary between topological maps and sets with operators, which gave rise to some conceptual problems in the infinite case, starting with the very notion of a “topological map”. It appears necessary in particular, both for reasons of internal coherence of the dictionary and not to let certain interesting cases of infinite maps escape, to avoid excluding vertices and faces of infinite order. This foundational work was also done by J. Malgoire and C. Voisin, in the wake of their first work on finite maps, and their theory indeed gives everything that we could rightly expect (and even more...)

In 1977 and 1978, in parallel with two C4 courses on the geometry of the cube and that of the icosahedron, I began to become interested in regular polyhedra, which then appeared to me as particularly concrete “geometric realizations” of combinatorial maps, the vertices, edges and faces being realised as points, lines

---

<sup>14</sup>In these statements, we must not exclude the case where  $p, q$  can take the value  $+\infty$ , which is encountered in particular in a very natural way as tilings associated to certain regular infinite polyhedra, cf. below.

and planes respectively in a suitable 3-dimensional affine space, and respecting incidence relations. This notion of a geometric realisation of a combinatorial map keeps its meaning over an arbitrary base field, and even over an arbitrary base ring. It also keeps its meaning for regular polyhedra in any dimension, if the cartographic group  $\underline{C}_2$  is replaced by a suitable  $n$ -dimensional analogue  $\underline{C}_n$ . The case  $n = 1$ , i.e. the theory of regular polygons in any characteristic, was the subject of a DEA course in 1977/78, and already sparks the appearance of some new phenomena, as well as demonstrating the usefulness of working not in an ambient affine space (here the affine plane), but in a *projective* space. This is in particular due to the fact that in certain characteristics (in particular in characteristic 2) the centre of a regular polyhedron is sent off to infinity. Moreover, the projective context, contrarily to the affine context, enables us to easily develop a duality formalism for regular polyhedra, corresponding to the duality formalism of combinatorial or topological maps (where the roles of the vertices and the faces, in the case  $n = 2$  say, are exchanged). We find that for every projective regular polyhedron, we can define a canonical associated hyperplane, which plays the role of a canonical hyperplane at infinity, and allows us to consider the given polyhedron as an affine regular polyhedron.

The extension of the theory of regular polyhedra (and more generally, of all sorts of geometrico-combinatorial configurations, including root systems...) of the base field  $\mathbf{R}$  or  $\mathbf{C}$  to a general base ring, seems to me to have an importance comparable, in this part of geometry, to the analogous extension which has taken place since the beginning of the century in algebraic geometry, or over the last twenty years in topology<sup>15</sup>, with the introduction of the language of schemes and of topoi. My sporadic reflection on this question, over some years, was limited to discovering some simple basic principles, concentrating my attention first and foremost on the case of *pinned* regular polyhedra, which reduces to a minimum the necessary conceptual baggage, and practically eliminates the rather delicate questions of rationality. For such a polyhedron, we find a canonical basis (or flag) of the ambient affine or projective space, such that the operations of the cartographic

---

<sup>15</sup>In writing this, I am aware that rare are the topologists, even today, who realise the existence of this conceptual and technical generalisation of topology, and the resources it offers.

group  $\underline{C}_n$ , generated by the fundamental reflections  $\sigma_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ), are written in that basis by universal formulae, in terms of the  $n$  parameters  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , which can be geometrically interpreted as the doubles of the cosines of the “fundamental angles” of the polyhedron. The polyhedron can be reconstituted from this action, and from the affine or projective flag associated to the chosen basis, by transforming this flag by all the elements of the group generated by the fundamental reflections. Thus the “universal” pinned  $n$ -polyhedron is canonically defined over the ring of polynomials with  $n$  indeterminates

$$\mathbf{Z}[\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_n],$$

its specialisations to arbitrary base fields  $k$  (via values  $\sigma_i \in k$  given to the indeterminates  $\sigma_i$ ) giving regular polyhedra corresponding to various combinatorial types. In this game, there is no question of limiting oneself to finite regular polyhedra, nor even to regular polyhedra whose facets are of finite order, i.e. for which the parameters  $\alpha_i$  are roots of suitable “semicyclotomic” equations, expressing the fact that the “fundamental angles” (in the case where the base field is  $\mathbf{R}$ ) are commensurable with  $2\pi$ . Already when  $n = 1$ , perhaps the most interesting regular polygon (morally the regular polygon with only one side!) is the one corresponding to  $\alpha = 2$ , giving rise to a parabolic circumscribed conic, i.e. tangent to the line at infinity. The finite case is the one where the group generated by the fundamental reflections, which is also the automorphism group of the regular polyhedron considered, is finite. In the case where the base field is  $\mathbf{R}$  (or  $\mathbf{C}$ , which comes to the same thing), and for  $n = 2$ , the finite cases have been well-known since antiquity – which does not exclude that the schematic point of view unveils new charms; we can however say that when specialising the icosahedron (for example) to finite base fields of arbitrary characteristic, it remains an icosahedron, with its own personal combinatorics and the same simple group of automorphisms of order 60. The same remark applies to finite regular polyhedra in higher dimension, which were systematically studied in two beautiful books by Coxeter. The situation is entirely different if we start from an *infinite* regular polyhedron, over a field such as  $\mathbf{Q}$ , for instance, and “specialise” it to the prime fields  $\mathbf{F}_p$  (a well-defined operation for all  $p$  except a finite number of primes). It is clear that every regular polyhedron over a finite field is finite – *we thus find an infinity of finite regular polyhedra*



as  $p$  varies, whose combinatorial type, or equivalently, whose automorphism group varies “arithmetically” with  $p$ . This situation is particularly intriguing in the case where  $n = 2$ , where we can use the relation made explicit in the preceding paragraph between combinatorial 2-maps and algebraic curves defined over number fields. In this case, an infinite regular polyhedron defined over any infinite field (and therefore, over a sub- $\mathbf{Z}$ -algebra of it with two generators) thus gives rise to an infinity of algebraic curves defined over number fields, which are Galois coverings ramified only over  $0$ ,  $1$  and  $\infty$  of the standard projective line. The optimal case is of course the one deduced by passage to the field of fractions  $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$  of its base ring. This raises a host of new questions, both vague and precise, none of which I have up till now had leisure to examine closely – I will cite only this one: exactly which are the finite regular 2-maps, or equivalently, the finite quotients of the 2-cartographic group, which come from regular 2-polyhedra over finite fields<sup>16</sup>? Do we obtain them all, and if yes: how?

These reflections shed a special light on the fact, which to me was completely unexpected, that the theory of finite regular polyhedra, already in the case of dimension  $n = 2$ , is infinitely richer, and in particular gives infinitely many more different combinatorial forms, in the case where we admit base fields of non-zero characteristic, than in the case considered up to now, where the base fields were always restricted to  $\mathbf{R}$ , or at best  $\mathbf{C}$  (in the case of what Coxeter calls “complex regular polyhedra”, and which I prefer to call “regular pseudo-polyhedra defined over  $\mathbf{C}$ ”)<sup>17</sup>. Moreover, it seems that this extension of the point of view should also shed new light on the already known cases. Thus, examining the Pythagorean polyhedra one after the other, I saw that the same small miracle was repeated each time, which I called the *combinatorial paradigm* of the polyhedra under consideration. Roughly speaking, it can be described by saying that when we consider the

---

<sup>16</sup>These are actually the same as those coming from regular polyhedra defined over arbitrary fields, or algebraically closed fields, as can be seen using standard specialisation arguments.

<sup>17</sup>The pinned pseudo-polyhedra are described in the same way as the pinned polyhedra, with the only difference that the fundamental reflections  $\sigma_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) are here replaced by *pseudo-reflections* (which Coxeter assumes of finite order, since he restricts himself to finite combinatorial structures). This simply leads to the introduction for each of the  $\sigma_i$  of an additional numerical invariant  $\beta_i$ , such that the universal  $n$ -pseudo-polyhedron can also be defined over a ring of polynomials with integral coefficients, in the  $n + (n + 1)$  variables  $\sigma_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) and  $\beta_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ).

specialisation of the polyhedra in the or one of the most singular characteristic(s) (namely characteristics 2 and 5 for the icosahedron, characteristic 2 for the octahedron), we read off from the geometric regular polyhedron over the finite field ( $F_4$  and  $F_5$  for the icosahedron,  $F_2$  for the octahedron) a particularly elegant (and unexpected) description of the combinatorics of the polyhedron. It seems to me that I perceived there a principle of great generality, which I believed I found again for example in a later reflection on the combinatorics of the system of 27 lines on a cubic surface, and its relations with the root system  $E_7$ . Whether it happens that such a principle really exists, and even that we succeed in uncovering it from its cloak of fog, or that it recedes as we pursue it and ends up vanishing like a *Fata Morgana*, I find in it for my part a force of motivation, a rare fascination, perhaps similar to that of dreams. No doubt that following such an unformulated call, the unformulated seeking form, from an elusive glimpse which seems to take pleasure in simultaneously hiding and revealing itself – can only lead far, although no one could predict where...

However, occupied by other interests and tasks, I have not up to now followed this call, nor met any other person willing to hear it, much less to follow it. Apart from some digressions towards other types of geometrico-combinatorial structures, my work on the question has been limited to a first effort of refining and housekeeping, which it is useless for me to describe further here <sup>(5)</sup>. The only point which perhaps still deserves to be mentioned is the existence and uniqueness of a hyperquadric circumscribing a given regular  $n$ -polyhedron, whose equation can be given explicitly by simple formulae in terms of the fundamental parameters  $\alpha_i$ <sup>18</sup>. The case which interests me most is when  $n = 2$ , and the moment seems ripe to rewrite a new version, in modern style, of Klein's classic book on the icosahedron and the other Pythagorean polyhedra. Writing such an exposé on regular 2-polyhedra would be a magnificent opportunity for a young researcher to familiarise himself with the geometry of polyhedra as well as their connections with spherical, Euclidean and hyperbolic geometry and with algebraic curves, and with the language and the basic techniques of modern algebraic geometry. Will there

---

<sup>18</sup>An analogous result is valid for pseudo-polyhedra. It would seem that the "exceptional characteristics" we discussed above, for specialisations of a given polyhedron, are those for which the circumscribed hyperquadric is either degenerate or tangent to the hyperplane at infinity.

be found one, some day, who will seize this opportunity?

## 5. Denunciation of so-called “general” topology, and heuristic reflections towards a so-called “tame” topology

I would like to say a few words now about some topological considerations which have made me understand the necessity of new foundations for “geometric” topology, in a direction quite different from the notion of topos, and actually independent of the needs of so-called “abstract” algebraic geometry (over general base fields and rings). The problem I started from, which already began to intrigue me some fifteen years ago, was that of defining a theory of “dévissage” for stratified structures, in order to rebuild them, via a canonical process, out of “building blocks” canonically deduced from the original structure. Probably the main example which had led me to that question was that of the canonical stratification of a singular algebraic variety (or a complex or real singular space) through the decreasing sequence of its successive singular loci. But I probably had the premonition of the ubiquity of stratified structures in practically all domains of geometry (which surely others had seen clearly a long time before). Since then, I have seen such structures appear, in particular, in any situation where “moduli” are involved for geometric objects which may undergo not only continuous variations, but also “degeneration” (or “specialisation”) phenomena – the strata corresponding then to the various “levels of singularity” (or to the associated combinatorial types) for the objects in question. The compactified modular multiplicities  $\widehat{M}_{g,v}$  of Mumford-Deligne for the stable algebraic curves of type  $(g, v)$  provide a typical and particularly inspiring example, which played an important motivating role when I returned to my reflection about stratified structures, from December 1981 to January 1982. Two-dimensional geometry provides many other examples of such modular stratified structures, which all (if not using rigidification) appear as “multiplicities” rather than as spaces or manifolds in the usual sense (as the points of these multiplicities may have non-trivial automorphism groups). Among the objects of two-dimensional geometry which give rise to such modular stratified structures in arbitrary dimensions, or even infinite dimension, I would list polygons (Euclidean, spherical or hyperbolic), systems of straight lines in a plane (say

projective), systems of “pseudo straight lines” in a projective topological plane, or more general immersed curves with normal crossings, in a given (say compact) surface.

The simplest non-trivial example of a stratified structure is obtained by considering a pair  $(X, Y)$  of a space  $X$  and a closed subspace  $Y$ , with a suitable assumption of equisingularity of  $X$  along  $Y$ , and assuming moreover (to fix ideas) that both strata  $Y$  and  $X \setminus Y$  are topological manifolds. The naive idea, in such a situation, is to consider “the” tubular neighbourhood  $T$  of  $Y$  in  $X$ , whose boundary  $\partial T$  should also be a smooth manifold, fibred with compact smooth fibres over  $Y$ , whereas  $T$  itself can be identified with the conical fibration associated to the above one. Setting

$$U = X \setminus \text{Int}(T),$$

one finds a manifold with boundary, whose boundary is canonically isomorphic to the boundary of  $T$ . This being said, the “building blocks” are the manifold with boundary  $U$  (compact if  $X$  is compact, and which replaces and refines the “open” stratum  $X \setminus Y$ ) and the manifold (without boundary)  $Y$ , together with, as an additional structure which connects them, the “glueing” map

$$f : \partial U \longrightarrow Y$$

which is a proper and smooth fibration. The original situation  $(X, Y)$  can be recovered from  $(U, Y, f : \partial U \longrightarrow Y)$  via the formula

$$X \cong U \amalg_{\partial U} Y$$

(amalgamated sum over  $\partial U$ , mapping into  $U$  and  $Y$  by inclusion resp. the glueing map).

This naive vision immediately encounters various difficulties. The first is the somewhat vague nature of the very notion of tubular neighbourhood, which acquires a tolerably precise meaning only in the presence of structures which are much more rigid than the mere topological structure, such as “piecewise linear” or Riemannian (or more generally, space with a distance function) structure; the trouble here is that in the examples which naturally come to mind, one does not have such structures at one’s disposal – at best an equivalence class of such structures, which makes it possible to rigidify the situation somewhat. If on the other

hand one assumes that one might find an expedient in order to produce a tubular neighbourhood having the desired properties, which moreover would be unique modulo an automorphism (say a topological one) of the situation – an automorphism which moreover respects the fibred structure provided by the glueing map, there still remains the difficulty arising from the lack of canonicity of the choices involved, as the said automorphism is obviously not unique, whatever may be done in order to “normalise” it. The idea here, in order to make canonical something which is not, is to work systematically in the framework of the “*isotopic categories*” associated to the categories of a topological nature which are naturally present in such questions (such as the category of admissible pairs  $(X, Y)$  and homeomorphisms of such pairs etc.), retaining the same objects, but defining as “morphisms” the isotopy classes (in a sense which is dictated unambiguously by the context) of isomorphisms (or even morphisms more general than isomorphisms). I used this idea, which is taken up successfully in the thesis of Yves Lade-gaillerie (see beginning of par. 3), in a systematic way in all my later reflections on combinatorial topology, when it came to a precise formulation of translation theorems of topological situations in terms of combinatorial situations. In the present situation, my hope was to be able to formulate (and prove!) a theorem of equivalence between two suitable isotopic categories, one being the category of “admissible pairs”  $(X, Y)$ , and the other the category of “admissible triples”  $(U, Y, f)$ , where  $Y$  is a manifold,  $U$  a manifold with boundary, and  $f : \partial U \longrightarrow Y$  a smooth and proper fibration. Moreover, I hoped that such a statement could be naturally extended, modulo some essentially algebraic work, to a more general statement, which would apply to general stratified structures.

It soon appeared that there could be no question of getting such an ambitious statement in the framework of topological spaces, because of the sempiternal “wild” phenomena. Already when  $X$  itself is a manifold and  $Y$  is reduced to a point, one is confronted with the difficulty that the cone over a compact space  $Z$  can be a manifold at its vertex, even if  $Z$  is not homeomorphic to a sphere, nor even a manifold. It was also clear that the contexts of the most rigid structures which existed then, such as the “piece-wise linear” context were equally inadequate – one common disadvantage consisting in the fact that they do not make it

possible, given a pair  $(U, S)$  of a “space”  $U$  and a closed subspace  $S$ , and a glueing map  $f : S \longrightarrow T$ , to build the corresponding amalgamated sum. Some years later, I was told of Hironaka’s theory of what he calls, I believe, (real) “semi-analytic” sets which satisfy certain essential stability conditions (actually probably all of them), which are necessary to develop a usable framework of “tame topology”. This triggered a renewal of the reflection on the foundations of such a topology, whose necessity appears more and more clearly to me.

After some ten years, I would now say, with hindsight, that “*general topology*” *was developed* (during the thirties and forties) *by analysts and in order to meet the needs of analysis*, not for topology per se, i.e. the study of the *topological properties of the various geometrical shapes*. That the foundations of topology are inadequate is manifest from the very beginning, in the form of “false problems” (at least from the point of view of the topological intuition of shapes) such as the “invariance of domains”, even if the solution to this problem by Brouwer led him to introduce new geometrical ideas. Even now, just as in the heroic times when one anxiously witnessed for the first time curves cheerfully filling squares and cubes, when one tries to do topological geometry in the technical context of topological spaces, one is confronted at each step with spurious difficulties related to wild phenomena. For instance, it is not really possible, except in very low dimensions, to study for a given space  $X$  (say a compact manifold), the homotopy type of (say) the automorphism group of  $X$ , or of the space of embeddings, or immersions etc. of  $X$  into some other space  $Y$  – whereas one feels that these invariants should be part of the toolbox of the essential invariants attached to  $X$ , or to the pair  $(X, Y)$ , etc. just as the function space  $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$  which is familiar in homotopical algebra. Topologists elude the difficulty, without tackling it, moving to contexts which are close to the topological one and less subject to wildness, such as differentiable manifolds, PL spaces (piece-wise linear) etc., of which it is clear that none is “good”, i.e. stable under the most obvious topological operations, such as contraction-glueing operations (not to mention operations like  $X \longrightarrow \text{Aut}(X)$  which oblige one to leave the paradise of finite dimensional “spaces”). This is a way of beating about the bush! This situation, like so often already in the history of our science, simply reveals the almost insurmountable inertia of the mind, burdened by a heavy weight of condi-

tioning, which makes it difficult to take a real look at a foundational question, thus at the context in which we live, breathe, work – accepting it, rather, as immutable data. It is certainly this inertia which explains why it tooks millenia before such childish ideas as that of zero, of a group, of a topological shape found their place in mathematics. It is this again which explains why the rigid framework of general topology is patiently dragged along by generation after generation of topologists for whom “wildness” is a fatal necessity, rooted in the nature of things.

My approach toward possible foundations for a tame topology has been an axiomatic one. Rather than declaring (which would indeed be a perfectly sensible thing to do) that the desired “tame spaces” are no other than (say) Hironaka’s semianalytic spaces, and then developing in this context the toolbox of constructions and notions which are familiar from topology, supplemented with those which had not been developed up to now, for that very reason, I preferred to work on extracting which exactly, among the geometrical properties of the semianalytic sets in a space  $\mathbf{R}^n$ , make it possible to use these as local “models” for a notion of “tame space” (here semianalytic), and what (hopefully!) makes this notion flexible enough to use it effectively as the fundamental notion for a “tame topology” which would express with ease the topological intuition of shapes. Thus, once this necessary foundational work has been completed, there will appear not *one* “tame theory”, but a vast infinity, ranging from the strictest of all, the one which deals with “piecewise  $\overline{\mathbf{Q}}_r$ -algebraic spaces” (with  $\overline{\mathbf{Q}}_r = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ ), to the one which appears (whether rightly or not) to be likely to be the vastest of all, namely using “piecewise real analytic spaces” (or semianalytic using Hironaka’s terminology). Among the foundational theorems which I envision in my programme, there is a *comparison theorem* which, to put it vaguely, would say that *one will essentially find the same isotopic categories* (or even  $\infty$ -isotopic) whatever the tame theory one is working with. In a more precise way, the question is to put one’s finger on a system of axioms which is rich enough to imply (among many other things) that if one has two tame theories  $T$ ,  $T'$  with  $T$  finer than  $T'$  (in the obvious sense), and if  $X, Y$  are two  $T$ -tame spaces, which thus also define corresponding  $T'$ -tame spaces, the canonical map

$$\underline{\text{Isom}}_T(X, Y) \longrightarrow \underline{\text{Isom}}_{T'}(X, Y)$$

induces a bijection on the set of connected components (which will imply that the isotopic category of the  $T$ -spaces is equivalent to the  $T'$ -spaces), and is even a homotopy equivalence (which means that one even has an equivalence for the “ $\infty$ -isotopic” categories, which are finer than the isotopic categories in which one retains only the  $\pi_0$  of the spaces of isomorphisms). Here the Isom may be defined in an obvious way, for instance as semisimplicial sets, in order to give a precise meaning to the above statement. Analogous statements should be true, if one replaces the “spaces” Isom with other spaces of maps, subject to standard geometric conditions, such as those of being embeddings, immersions, smooth, étale, fibrations etc. One also expects analogous statements where  $X, Y$  are replaced by systems of tame spaces, such as those which occur in a theory of dévissage of stratified structures – so that in a precise technical sense, this dévissage theory will also be essentially independent of the tame theory chosen to express it.

The first decisive test for a good system of axioms defining the notion of a “tame subset of  $\mathbf{R}^n$ ” seems to me to consist in the possibility of proving such comparison theorems. I have settled for the time being for extracting a temporary system of plausible axioms, without any assurance that other axioms will not have to be added, which only working on specific examples will cause to appear. The strongest among the axioms I have introduced, whose validity is (or will be) most likely the most delicate to check in specific situations, is a *triangulability axiom* (in a tame sense, it goes without saying) of a tame part of  $\mathbf{R}^n$ . I did not try to prove the comparison theorem in terms of these axioms only, however I had the impression (right or wrong again!) that this proof, whether or not it necessitates the introduction of some additional axiom, will not present serious technical difficulties. It may well be that the technical difficulties in the development of satisfactory foundations for tame topology, including a theory of dévissage for tame stratified structures are actually already essentially concentrated in the axioms, and consequently already essentially overcome by triangulability theorems à la Łojasiewicz and Hironaka. What is again lacking is not the technical virtuosity of the mathematicians, which is sometimes impressive, but the audacity (or simply innocence...) to free oneself from a familiar context accepted by a flawless consensus...



The advantages of an axiomatic approach towards the foundations of tame topology seem to me to be obvious enough. Thus, in order to consider a complex algebraic variety, or the set of real points of an algebraic variety defined over  $\mathbf{R}$ , as a tame space, it seems preferable to work with the “piecewise  $\mathbf{R}$ -algebraic” theory, maybe even the  $\overline{\mathbf{Q}_r}$ -algebraic theory (with  $\overline{\mathbf{Q}_r} = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ ) when dealing with varieties defined over number fields, etc. The introduction of a subfield  $K \subset \mathbf{R}$  associated to the theory  $T$  (consisting in the points of  $\mathbf{R}$  which are  $T$ -tame, i.e. such that the corresponding one-point set is  $T$ -tame) make it possible to introduce for any point  $x$  of a tame space  $X$ , a residue field  $k(x)$ , which is an algebraically closed subextension of  $\mathbf{R}/K$ , of finite transcendence degree over  $K$  (bounded by the topological dimension of  $X$ ). When the transcendence degree of  $\mathbf{R}$  over  $K$  is infinite, we find a notion of transcendence degree (or “dimension”) of a point of a tame space, close to the familiar notion in algebraic geometry. Such notions are absent from the “semianalytic” tame topology, which however appears as the natural topological context for the inclusion of real and complex analytic spaces.

Among the first theorems one expects in a framework of tame topology as I perceive it, aside from the comparison theorems, are the statements which establish, in a suitable sense, the existence and uniqueness of “the” tubular neighbourhood of closed tame subspace in a tame space (say compact to make things simpler), together with concrete ways of building it (starting for instance from any tame map  $X \longrightarrow \mathbf{R}^+$  having  $Y$  as its zero set), the description of its “boundary” (although generally it is in no way a manifold with boundary!)  $\partial T$ , which has in  $T$  a neighbourhood which is isomorphic to the product of  $T$  with a segment, etc. Granted some suitable equisingularity hypotheses, one expects that  $T$  will be endowed, in an essentially unique way, with the structure of a locally trivial fibration over  $Y$ , with  $\partial Y$  as a subfibration. This is one of the least clear points in my temporary intuition of the situation, whereas the homotopy class of the predicted structure map  $T \longrightarrow Y$  has an obvious meaning, independent of any equisingularity hypothesis, as the homotopic inverse of the inclusion map  $Y \longrightarrow T$ , which must be a homotopism. One way to a posteriori obtain such a structure would be via the hypothetical equivalence of isotopic categories which was considered at the beginning, taking into account the fact that the functor  $(U, Y, f) \mapsto (X, Y)$

is well-defined in an obvious way, independently of any theory of tubular neighbourhoods.

It will perhaps be said, not without reason, that all this may be only dreams, which will vanish in smoke as soon as one sets to work on specific examples, or even before, taking into account some known or obvious facts which have escaped me. Indeed, only working out specific examples will make it possible to sift the right from the wrong and to reach the true substance. The only thing in all this which I have no doubt about, is the very necessity of such a foundational work, in other words, the artificiality of the present foundations of topology, and the difficulties which they cause at each step. It may be however that the formulation I give of a theory of dévissage of stratified structures in terms of an equivalence theorem of suitable isotopic (or even  $\infty$ -isotopic) categories is actually too optimistic. But I should add that I have no real doubts about the fact that the theory of these dévissages which I developed two years ago, although it remains in part heuristic, does indeed express some very tangible reality. In some part of my work, for want of a ready-to-use “tame” context, and in order to have precise and provable statements, I was led to postulate some very plausible additional structures on the stratified structure I started with, especially concerning the local retraction data, which do make it possible to construct a canonical system of spaces, parametrised by the ordered set of flags  $\text{Drap}(I)$  of the ordered set  $I$  indexing the strata; these spaces play the role of the spaces  $(U, Y)$  above, and they are connected by embedding and proper fibration maps, which make it possible to reconstitute in an equally canonical way the original stratified structure, including these “additional structures” (7). The only trouble here, is that these appear as an additional artificial element of structure, which is no way part of the data in the usual geometric situations, as for example the compact moduli space  $\widehat{M}_{g,\nu}$  with its canonical “stratification at infinity”, defined by the Mumford-Deligne divisor with normal crossings. Another, probably less serious difficulty, is that this so-called moduli “space” is in fact a *multiplicity* – which can be technically expressed by the necessity of replacing the index set  $I$  for the strata with an (essentially finite) *category* of indices, here the “MD graphs” which “parametrise” the possible “combinatorial structures” of a stable curve of type  $(g, \nu)$ . This said, I can assert that the general theory of déviss-

sage, which has been developed especially to meet the needs of *this* example, has indeed proved to be a precious guide, leading to a progressive understanding, with flawless coherence, of some essential aspects of the Teichmüller tower (that is, essentially the “structure at infinity” of the ordinary Teichmüller groups). It is this approach which finally led me, within some months, to the principle of a purely combinatorial construction of the tower of Teichmüller groupoids, in the spirit sketched above (cf. par. 2).

Another satisfying test of coherence comes from the “topossic” viewpoint. Indeed, as my interest for the multiplicities of moduli was first prompted by their algebrico-geometric and arithmetic meaning, I was first and foremost interested by the modular algebraic multiplicities, over the absolute basefield  $\mathbf{Q}$ , and by a “dévissage” at infinity of their geometric fundamental groups (i.e. of the *profinite* Teichmüller groups) which would be compatible with the natural operations of  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ . This requirement seemed to exclude from the start the possibility of a reference to a hypothetical theory of dévissage of stratified structures in a context of “tame topology” (or even, at worst, of ordinary topology), beyond a purely heuristic guiding thread. Thus the question arose of translating, in the context of the topoi (here étale topoi) which were present in the situation, the theory of dévissage I had arrived at in a completely different context – with the additional task, in the sequel, of extracting a general comparison theorem, patterned after well-known theorems, in order to compare the invariants (in particular the homotopy types of various tubular neighbourhoods) obtained in the transcendent and schematic frameworks. I have been able to convince myself that such a formalism of dévissage indeed had some meaning in the (so-called “abstract”!) context of general topoi, or at least noetherian topoi (like those occurring in this situation), via a suitable notion of *canonical tubular neighbourhood of a subtopos* in an ambient topos. Once this notion is acquired, together with some simple formal properties, the description of the “dévissage” of a stratified topos is even considerably simpler in that framework than in the (tame) topological one. True, there is foundational work to be done here too, especially around the very notion of the tubular neighbourhood of a subtopos – and it is actually surprising that this work (as far as I know) has still never been done, i.e. that no one (since the context of étale topol-

ogy appeared, more than twenty years ago) apparently ever felt the need for it; surely a sign that the understanding of the topological structure of schemes has not made much progress since the work of Artin-Mazur...

Once I had accomplished this (more or less heuristic) double work of refining the notion of dévissage of a stratified space or topos, which was a crucial step in my understanding of the modular multiplicities, it actually appeared that, as far as these are concerned, one can actually take a short cut for at least a large part of the theory, via direct geometric arguments. Nonetheless, the formalism of dévissage which I reached has proved its usefulness and its coherence to me, independently of any question about the most adequate foundations which make it completely meaningful.

## 6. “Differentiable theories” (à la Nash) and “tame theories”

One of the most interesting foundational theorems of (tame) topology which should be developed would be a theorem of “dévissage” (again!) of a proper tame map of tame spaces

$$f : X \longrightarrow Y,$$

via a decreasing filtration of  $Y$  by closed tame subspaces  $Y^i$ , such that above the “open strata”  $Y^i \setminus Y^{i-1}$  of this filtration,  $f$  induces a locally trivial fibration (from the tame point of view, it goes without saying). It should be possible to generalise such a statement even further and to make it precise in various ways, in particular by requiring the existence of an analogous *simultaneous* dévissage for  $X$  and for a given finite family of (tame) closed subspaces of  $X$ . Also the very notion of locally trivial fibration in the tame sense can be made considerably stronger, taking into account the fact that the open strata  $U_i$  are *better* than spaces whose tame structure is purely local, because they are obtained as differences of two tame spaces, compact if  $Y$  is compact. Between the notion of a compact tame space (which is realised as one of the starting “models” in an  $\mathbf{R}^n$ ) and that of a “locally tame” (locally compact) space which can be deduced from it in a relatively obvious way, there is a somewhat more delicate notion of a “*globally tame*” space  $X$ , obtained as the difference  $\hat{X} \setminus Y$  of two compact tame spaces, it being understood that we do not distinguish between the space defined by a pair  $(\hat{X}, Y)$  and that defined by a

pair  $(\hat{X}', Y')$  deduced from it by a (necessarily proper) tame map

$$g : \hat{X}' \longrightarrow \hat{X}$$

inducing a bijection  $g^{-1}(X) \longrightarrow X$ , taking  $Y' = g^{-1}(Y)$ . Perhaps the most interesting natural example is the one where we start from a separated scheme of finite type over  $\mathbf{C}$  or  $\mathbf{R}$ , taking for  $X$  the set of its real or complex points, which inherits a global tame structure with the help of schematic compactifications (which exist according to Nagata) of the scheme we started with. This notion of a globally tame space is associated to a notion of a *globally tame map*, which in turn allows us to strengthen the notion of a locally trivial fibration, in stating a theorem of dévissage for a map  $f : X \longrightarrow Y$  (now not necessarily proper) in the context of globally tame spaces.

I was informed last summer by Zoghman Mebkhout that a theorem of dévissage in this spirit has been recently obtained in the context of real and/or complex analytic spaces, with  $Y^i$  which here are analytic subspaces of  $Y$ . This result makes it plausible that we already have at our disposal techniques which are powerful enough to also prove a dévissage theorem in the tame context, apparently more general, but probably less arduous.

The context of tame topology should also, it seems to me, make it possible to formulate with precision a certain very general principle which I frequently use in a great variety of geometric situations, which I call the “*principle of anodine choices*” – as useful as vague in appearance! It says that when for the needs of some construction of a geometric object in terms of others, we are led to make a certain number of arbitrary choices along the way, so that the final object appears to depend on these choices, and is thus stained with a defect of canonicity, that this defect is indeed serious (and to be removed requires a more careful analysis of the situation, the notions used, the data introduced etc.) whenever at least one of these choices is made in a space which is not “contractible”, i.e. whose  $\pi_0$  or one of whose higher invariants  $\pi_i$  is non-trivial, and that this defect is on the contrary merely apparent, and the construction itself is “essentially” canonical and will not bring along any troubles, whenever the choices made are all “anodine”, i.e. made in *contractible* spaces. When we try in actual examples to really understand this principle, it seems that each time we stumble onto the same notion of “ $\infty$ -isotopic

categories” expressing a given situation, and finer than the more naive isotopic (= 0-isotopic) categories obtained by considering only the  $\pi_0$  of the spaces of isomorphisms introduced in the situation, while the  $\infty$ -isotopic point of view considers all of their homotopy type. For example, the naive isotopic point of view for compact surfaces with boundary of type  $(g, \nu)$  is “good” (without any hidden boomerangs!) exactly in the cases which I call “anabelian” (and which Thurston calls “hyperbolic”), i.e. distinct from  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 0)$  – which are also exactly the cases where the connected component of the identity of the automorphism group of the surface is *contractible*. In the other cases, except for the case  $(0, 0)$  of the sphere without holes, it suffices to work with 1-isotopic categories to express in a satisfying way via algebra the essential geometrico-topological facts, since the said connected component is then a  $K(\pi, 1)$ . Working in a 1-isotopic category actually comes down to working in a bicategory, i.e. with  $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$  which are (no longer discrete sets as in the 0-isotopic point of view, but) groupoids (whose  $\pi_0$  are exactly the 0-isotopic  $\text{Hom}$ ). This is the description in purely algebraic terms of this bicategory which is given in the last part of the thesis of Yves Ladegaillerie (cf. par. 3).

If I allowed myself to dwell here at some length on the theme of the foundations of tame topology, which is not one of those to which I intend to devote myself primarily in the coming years, it is doubtless because I feel that it is yet another cause which needs to be pleaded, or rather: a work of great current importance which needs hands! Just as years ago for the new foundations of algebraic geometry, it is not pleadings which will surmount the inertia of acquired habits, but tenacious, meticulous long-term work, which will from day to day bring eloquent harvests.

I would like to say some last words on an older reflection (end of the sixties?), very close to the one I just discussed, inspired by ideas of Nash which I found very striking. Instead of axiomatically defining a notion of “tame theory” via a notion of a “tame part of  $\mathbf{R}^n$ ” satisfying certain conditions (mainly of stability), I was interested by an axiomatisation of the notion of “non-singular variety” via, for each natural integer  $n$ , a subring  $A_n$  of the ring of germs of real functions at the origin in  $\mathbf{R}^n$ . These are the functions which will be admitted to express the “change of chart” for the corresponding notion of  $A_n$ -variety, and I was first concerned with

uncovering a system of axioms on the system  $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  which ensures for this notion of variety a suppleness comparable to that of a  $C^\infty$  variety, or a real analytic one (or a Nash one). According to the familiar type of construction which one wants to be able to do in the context of  $A$ -varieties, the relevant system of axioms is more or less reduced or rich. One doesn't need much if one only wants to develop the differential formalism, with the construction of jet bundles, De Rham complexes etc. If we want a statement of the type "quasi-finite implies finite" (for a map in the neighbourhood of a point), which appeared as a key statement in the local theory of analytic spaces, we need a more delicate stability axiom, in Weierstrass' "Vorbereitungssatz"<sup>19</sup>. In other questions, a stability axiom by analytic continuation (in  $\mathbf{C}^n$ ) appears necessary. The most Draconian axiom which I was led to introduce, also a stability axiom, concerns the integration of Pfaff systems, ensuring that certain (even all) Lie groups are  $A$ -varieties. In all this, *I took care not to suppose that the  $A_n$  are  $\mathbf{R}$ -algebras*, so a constant function on a  $A$ -variety is "admissible" only if its value belongs to a certain subfield  $K$  of  $\mathbf{R}$  (which is, if one likes,  $A_0$ ). This subfield can very well be  $\mathbf{Q}$ , or its algebraic closure  $\overline{\mathbf{Q}}$ , in  $\mathbf{R}$ , or any other subextension of  $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ , preferably even of finite or at least countable transcendence degree over  $\mathbf{Q}$ . This makes it possible, for example, as before for tame spaces, to have every point  $x$  of a variety (of type  $A$ ) correspond to a residue field  $k(x)$ , which is a subextension of  $\mathbf{R}/K$ . A fact which appears important to me here, is that even in its strongest form, the system of axioms does not imply that we must have  $K = \mathbf{R}$ . More precisely, because *all* the axioms are stability axioms, it follows that for a given set  $S$  of germs of real analytic functions at the origin (in various spaces  $\mathbf{R}^n$ ), there exists a smaller theory  $A$  for which these germs are admissible, and that it is "countable", i.e. the  $A_n$  are countable, whenever  $S$  is. A fortiori,  $K$  is then countable, i.e. of countable transcendence degree over  $\mathbf{Q}$ .

The idea here is to introduce, via this axiomatic system, a notion of an "*elementary*" (real analytic) function, or rather, a whole hierarchy of such notions. For a function of 0 variables i.e. a constant, this notion gives that of an "elementary constant", including in particular (in the case of the strongest axiomatic system) con-

---

<sup>19</sup>It could seem simpler to say that the (local) rings  $A_n$  are *Henselian*, which is equivalent. But it is not at all clear a priori in this latter form that the condition in question is in the nature of a stability condition, and this is an important circumstance as will appear in the following reflections.

stants such as  $\pi$ ,  $e$  and many others, taking values of admissible functions (such as exponentials, logarithms etc.) for systems of “admissible” values of the argument. One feels that the relation between the system  $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and the corresponding rationality field  $K$  must be very tight, at least for  $A$  which can be generated by a finite “system of generators”  $S$  – but one must fear that even the least of the interesting questions one could ask about this situation still remains out of reach <sup>(1)</sup>.

These old reflections have taken on some current interest for me due to my more recent reflection on tame theories. Indeed, it seems to me that it is possible to associate in a natural way to a “differentiable theory”  $A$  a tame theory  $T$  (doubtless having the same field of constants), in such a way that every  $A$ -variety is automatically equipped with a  $T$ -tame structure and conversely for every  $T$ -tame compact space  $X$ , we can find a rare tame closed subset  $Y$  in  $X$ , such that  $X \setminus Y$  comes from an  $A$ -variety, and moreover such that this  $A$ -variety structure is unique at least in the following sense: two such structures coincide in the complement of a rare tame subset  $Y' \supset Y$  of  $X$ . The theory of dévissage of stratified tame structures (which was discussed in the preceding par.), in the case of smooth strata, should moreover raise much more precise questions of comparison of tame structures with structures of differentiable (or rather,  $\mathbf{R}$ -analytic) type. I suspect that the type of axiomatisation proposed here for the notion of “differentiable theory” would give a natural framework for the formulation of such questions with all desirable precision and generality.

## 7. Pursuing Stacks

Since the month of March last year, so nearly a year ago, the greater part of my energy has been devoted to a work of reflection on the *foundations of non-commutative (co)homological algebra*, or what is the same, after all, of *homotopical algebra*. These reflections have taken the concrete form of a voluminous stack of typed notes, destined to form the first volume (now being finished) of a work in two volumes to be published by Hermann, under the overall title “*Pursuing Stacks*”. I now foresee (after successive extensions of the initial project) that the manuscript of the whole of the two volumes, which I hope to finish definitively



in the course of this year, will be about 1500 typed pages in length. These two volumes are moreover for me the first in a vaster series, under the overall title “*Mathematical Reflections*”, in which I intend to develop some of the themes sketched in the present report.

Since I am speaking here of work which is actually now being written up and is even almost finished, the first volume of which will doubtless appear this year and will contain a detailed introduction, it is undoubtedly less interesting for me to develop this theme of reflection here, and I will content myself with speaking of it only very briefly. This work seems to me to be somewhat marginal with respect to the themes I sketched before, and does not (it seems to me) represent a real renewal of viewpoint or approach with respect to my interests and my mathematical vision of before 1970. If I suddenly resolved to do it, it is almost out of desperation, for nearly twenty years have gone by since certain visibly fundamental questions, which were ripe to be thoroughly investigated, without anyone seeing them or taking the trouble to fathom them. Still today, the basic structures which occur in the homotopical point of view in topology are not understood, and to my knowledge, after the work of Verdier, Giraud and Illusie on this theme (which are so many beginnings still waiting for continuations...) there has been no effort in this direction. I should probably make an exception for the axiomatisation work done by Quillen on the notion of a category of models, at the end of the sixties, and taken up in various forms by various authors. At that time, and still now, this work seduced me and taught me a great deal, even while going in quite a different direction from the one which was and still is close to my heart. Certainly, it introduces derived categories in various non-commutative contexts, but without entering into the question of the essential internal structures of such a category, also left open in the commutative case by Verdier, and after him by Illusie. Similarly, the question of putting one’s finger on the natural “coefficients” for a non-commutative cohomological formalism, beyond the stacks (which should be called 1-stacks) studied in the book by Giraud, remained open – or rather, the rich and precise intuitions concerning it, taken from the numerous examples coming in particular from algebraic geometry, are still waiting for a precise and supple language to give them form.

I returned to certain aspects of these foundational questions in 1975, on the occasion (I seem to remember) of a correspondence with Larry Breen (two letters from this correspondence will be reproduced as an appendix to Chap. I of volume 1, “History of Models”, of Pursuing Stacks). At that moment the intuition appeared that  $\infty$ -groupoids should constitute particularly adequate models for homotopy types, the  $n$ -groupoids corresponding to *truncated* homotopy types (with  $\pi_i = 0$  pour  $i > n$ ). This same intuition, via very different routes, was discovered by Ronnie Brown and some of his students in Bangor, but using a rather restrictive notion of  $\infty$ -groupoid (which, among the 1-connected homotopy types, model only products of Eilenberg-Mac Lane spaces). Stimulated by a rather haphazard correspondence with Ronnie Brown, I finally began this reflection, starting with an attempt to define a wider notion of  $\infty$ -groupoid (later rebaptised stack in  $\infty$ -groupoids or simply “stack”, the implication being: over the 1-point topos), and which, from one thing to another, led me to Pursuing Stacks. The volume “History of Models” is actually a completely unintended digression with respect to the initial project (the famous stacks being temporarily forgotten, and supposed to reappear only around page 1000...).

This work is not completely isolated with respect to my more recent interests. For example, my reflection on the modular multiplicities  $\widehat{M}_{g,v}$  and their stratified structure renewed the reflection on a theorem of van Kampen in dimension  $> 1$  (also one of the preferred themes of the group in Bangor), and perhaps also contributed to preparing the ground for the more important work of the following year. This also links up from time to time with a reflection dating from the same year 1975 (or the following year) on a “De Rham complex with divided powers”, which was the subject of my last public lecture, at the IHES in 1976; I lent the manuscript of it to I don’t remember whom after the talk, and it is now lost. It was at the moment of this reflection that the intuition of a “schematisation” of homotopy types germinated, and seven years later I am trying to make it precise in a (particularly hypothetical) chapter of the History of Models.

The work of reflection undertaken in Pursuing Stacks is a little like a debt which I am paying towards a scientific past where, for about fifteen years (from 1955 to 1970), the development of cohomological tools was the constant Leitmotiv

in my foundational work on algebraic geometry. If in this renewal of my interest in this theme, it has taken on unexpected dimensions, it is however not out of pity for a past, but because of the numerous unexpected phenomena which ceaselessly appear and unceremoniously shatter the previously laid plans and projects – rather like in the thousand and one nights, where one awaits with bated breath through twenty other tales the final end of the first.

## 8. Digressions on 2-dimensional geometry

Up to now I have spoken very little of the more down-to-earth reflections on two-dimensional topological geometry, directly associated to my activities of teaching and “directing research”. Several times, I saw opening before me vast and rich fields ripe for the harvest, without ever succeeding in communicating this vision, and the spark which accompanies it, to one of my students, and having it open out into a more or less long-term common exploration. Each time up through today, after a few days or weeks of investigating where I, as scout, discovered riches at first unsuspected, the voyage suddenly stopped, upon its becoming clear that I would be pursuing it alone. Stronger interests then took precedence over a voyage which at that point appeared more as a digression or even a dispersion, than a common adventure.

One of these themes was that of planar polygons, centred around the modular varieties which can be associated to them. One of the surprises here was the irruption of algebraic geometry in a context which had seemed to me quite distant. This kind of surprise, linked to the omnipresence of algebraic geometry in plain geometry, occurred several times.

Another theme was that of curves (in particular circles) immersed in a surface, with particular attention devoted to the “stable” case where the singular points are ordinary double points (and also the more general theme where the different branches at a point mutually cross), often with the additional hypothesis that the immersion is “cellular”, i.e. gives rise to a map. A variation on the situations of this type is that of immersions of a surface with non-empty boundary, and first of all a disk (which was pointed out to me by A’Campo around ten years ago). Beyond the question of the various combinatorial formulations of such situations, which

really represent no more than an exercise of syntax, I was mainly interested in a dynamical vision of the possible configurations, with the passage from one to another via continuous deformations, which can be decomposed into compositions of two types of *elementary operations* and their inverses, namely the “*sweeping*” of a branch of a curve over a double point, and the *erasing* or the *creation* of a bigon. (The first of these operations also plays a key role in the “dynamical” theory of systems of pseudo-lines in a real projective plane.) One of the first questions to be asked here is that of determining the different *classes of immersions* of a circle or a disk (say) modulo these elementary operations; another, that of seeing which are the immersions of the boundary of the disk which come from an immersion of the disk, and to what extent the first determine the second. Here also, it seems to me that it is a systematic study of the relevant modular varieties (of infinite dimension here, unless a purely combinatorial description of them can be given) which should give the most efficient “focus”, forcing us in some sense to ask ourselves the most relevant questions. Unfortunately, the reflection on even the most obvious and down-to-earth questions has remained in an embryonic state. As the only tangible result, I can cite a theory of canonical “*dévissage*” of a stable cellular immersion of a circle in a surface into “undecomposable” immersions, by “telescoping” such immersions. Unfortunately I did not succeed in transforming my lights on the question into a DEA thesis, nor other lights (on a complete theoretical description, in terms of fundamental groups of topological 1-complexes, of the immersions of a surface with boundary which extend a given immersion of its boundary) into the beginnings of a doctoral thesis...

A third theme, pursued simultaneously over the last three years at different levels of teaching (from the option for first year students to the three third-cycle theses now being written on this theme) deals with the topologico-combinatorial classification of systems of lines or pseudo-lines. Altogether, the participation of my students here has been less disappointing than elsewhere, and I have had the pleasure of occasionally learning interesting things from them which I would not have thought of. Things being what they are, however, our common reflection was limited to a very elementary level. Lately, I finally devoted a month of intensive reflection to the development of a purely combinatorial construction of a sort

of “modular surface” associated to a system of  $n$  pseudo-lines, which classifies the different possible “relative positions” (stable or not) of an  $(n + 1)$ -st pseudo-line with respect to the given system, in other words: the different possible “affinisations” of this system, by the different possible choices of a “pseudo-line at infinity”. I have the impression of having put my finger on a remarkable object, causing an unexpected order to appear in questions of classification which up to now appeared fairly chaotic! But the present report is not the place to dwell further on this subject.

Since 1977, in all the questions (such as the two last themes evoked above) where two-dimensional maps occur, the possibility of realising them canonically on a conformal surface, so on a complex algebraic curve in the compact oriented case, remains constantly in filigree throughout my reflection. In practically every case (in fact, in all cases except that of certain spherical maps with “few automorphisms”) such a conformal realisation implies in fact a *canonical Riemannian metric*, or at least, canonical up to a multiplicative constant. These new elements of structure (without even taking into account the arithmetic element which was considered in par. 3) are of a nature to deeply transform the initial aspect of the questions considered, and the methods of approaching them. A beginning of familiarisation with the beautiful ideas of Thurston on the construction of Teichmüller space, in terms of a very simple game of hyperbolic Riemannian surgery, confirms me in this presentiment. Unfortunately, the very modest level of culture of almost all the students who have worked with me over these last ten years does not allow me to investigate these possibilities with them even by allusion, since the assimilation of even a minimal combinatorial language already frequently encounters considerable psychical obstacles. This is why, in some respect and more and more in these last years, my teaching activity has often acted like a weight, rather than a stimulus for the unfolding of a somewhat advanced or even merely delicate geometric reflection.

## 9. Assessment of a teaching activity

The occasion appears to be auspicious for a brief assessment of my teaching activity since 1970, that is, since it has taken place in a university. This contact with a

very different reality taught me many things, of a completely different order than simply pedagogic or scientific. Here is not the place to dwell on this subject. I also mentioned at the beginning of this report the role which this change of professional milieu played in the renewal of my approach to mathematics, and that of my centres of interest in mathematics. If I pursue this assessment of my teaching activity on the research level, I come to the conclusion of a clear and solid failure. In the more than ten years that this activity has taken place, year after year in the same university, I was never at any moment able to suscitate a place where “something happened” – where something “passed”, even among the smallest group of people, linked together by a common adventure. Twice, it is true, around the years 1974 to 1976, I had the pleasure and the privilege of awakening a student to a work of some consequence, pursued with enthusiasm: Yves Ladegailerie in the work mentioned earlier (par. 3) on questions of isotopy in dimension 2, and Carlos Contou-Carrère (whose mathematical passion did not await a meeting with myself to blossom) an unpublished work on the local and global Jacobians over general base schemes (of which one part was announced in a note in the CR). Apart from these two cases, my role has been limited throughout these ten years to somehow or other conveying the rudiments of the mathematician’s trade to about twenty students on the research level, or at least to those among them who persevered with me, reputed to be more demanding than others, long enough to arrive at a first acceptable work written black on white (and even, sometimes, at something better than acceptable and more than just one, done with pleasure and worked out through to the end). Given the circumstances, among the rare people who persevered, even rarer are those who will have the chance of carrying on the trade, and thus, while earning their bread, learning it ever more deeply.

## 10. Epilogue

Since last year, I feel that as regards my teaching activity at the university, I have learned everything I have to learn and taught everything I can teach there, and that it has ceased to be really useful, to myself and to others. To insist on continuing it under these circumstances would appear to me to be a waste both of human resources and of public funds. This is why I have applied for a position in the

CNRS (which I left in 1959 as freshly named director of research, to enter the IHES). I know moreover that the employment situation is tight in the CNRS as everywhere else, that the result of my request is doubtful, and that if a position were to be attributed to me, it would be at the expense of a younger researcher who would remain without a position. But it is also true that it would free my position at the USTL to the benefit of someone else. This is why I do not scruple to make this request, and to renew it if it is not accepted this year.

In any case, this application will have been the occasion for me to write this sketch of a programme, which otherwise would probably never have seen the light of day. I have tried to be brief without being sibylline and also, afterwards, to make it easier reading by the addition of a summary. If in spite of this it still appears rather long for the circumstances, I beg to be excused. It seems short to me for its content, knowing that ten years of work would not be too much to explore even the least of the themes sketched here through to the end (assuming that there is an “end”...), and one hundred years would be little for the richest among them!

Behind the apparent disparity of the themes evoked here, an attentive reader will perceive as I do a profound unity. This manifests itself particularly by a common source of inspiration, namely the geometry of surfaces, present in all of these themes, and most often front and centre. This source, with respect to my mathematical “past”, represents a renewal, but certainly not a rupture. Rather, it indicates the path to a new approach to the still mysterious reality of “*motives*”, which fascinated me more than any other in the last years of this past<sup>20</sup>. This fascination has certainly not vanished, rather it is a part of the fascination with the most burning of all the themes evoked above. But today I am no longer, as I used to be, the voluntary prisoner of interminable tasks, which so often prevented me from springing into the unknown, mathematical or not. The time of *tasks* is over for me. If age has brought me something, it is lightness.

---

<sup>20</sup>On this subject, see my commentaries in the “Thematic Sketch” of 1972 attached to the present report, in the last section “*motivic digressions*”, (loc. cit. pages 17-18)

## Notes

1. The expression “out of reach” here (and also later for a completely different question), appears to me to be decidedly hasty and unfounded. I have noted myself on other occasions that when oracles (here myself!) declare with an air of deep understanding (or doubt) that such and such a problem is “out of reach”, it is actually an entirely subjective affirmation. It simply means, apart from the fact that the problem is supposed to be not yet solved, that the person speaking has no ideas on the question, or probably more precisely, that he has no feelings and no motivation with regard to it, that it “does nothing to him” and that he has no desire to do anything with it – which is frequently a sufficient reason to want to discourage others. As in the remark of M. de la Palisse, this did not stop the beautiful and regretted conjectures of Mordell, Tate, and Shafarevitch from succumbing although they were all reputed to be “out of reach”, poor things! – Besides, in the very days which followed the writing up of the present report, which put me into contact with questions from which I had distanced myself during the last year, I noticed a new and remarkable property of the outer action of an absolute Galois group on the fundamental group of an algebraic curve, which had escaped me until now and which undoubtedly constitutes at least a new step towards the formulation of an algebraic characterisation of  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . This, with the “fundamental conjecture” (mentioned in par. 3 below) appears at present as the principal open question for the foundation of an “anabelian algebraic geometry”, which starting a few years ago, has represented (by far) my strongest centre of interest in mathematics.
2. With the exception of another “fact”, at the time when, around the age of twelve, I was interned in the concentration camp of Rieucros (near Mende). It is there that I learnt, from another prisoner, Maria, who gave me free private lessons, the definition of the circle. It impressed me by its simplicity and its evidence, whereas the property of “perfect rotundity” of the circle previously had appeared to me as a reality mysterious beyond words. It is at that moment, I believe, that I glimpsed for the first time (without of



course formulating it to myself in these terms) the creative power of a “good” mathematical definition, of a *formulation* which describes the essence. Still today, it seems that the fascination which this power exercised on me has lost nothing of its force.

3. More generally, beyond the so-called “anabelian” varieties, over fields of finite type, anabelian algebraic geometry (as it revealed itself some years ago) leads to a description, uniquely in terms of profinite groups, of the category of schemes of finite type over the absolute base  $\mathbf{Q}$  (or even  $\mathbf{Z}$ ), and from there, in principle, of the category of all schemes (by suitable passages to limits). It is thus a construction which “pretends” to ignore the rings (such as  $\mathbf{Q}$ , algebras of finite type over  $\mathbf{Q}$ , etc.) and the algebraic equations which traditionally serve to describe schemes, while working directly with their étale topoi, which can be expressed in terms of systems of profinite groups. A grain of salt nevertheless: to be able to hope to reconstitute a scheme (of finite type over  $\mathbf{Q}$  say) from its étale topos, which is a purely topological invariant, we must place ourselves not in the category of schemes (here of finite type over  $\mathbf{Q}$ ), but in the one which is deduced from it by “localisation”, by making the morphisms which are “universal homeomorphisms”, i.e. finite, radicial and surjective, be invertible. The development of such a translation of a “geometric world” (namely that of schemes, schematic multiplicities etc.) in terms of an “algebraic world” (that of profinite groups and systems of profinite groups describing suitable topoi (called “étale”) can be considered as the ultimate goal of Galois theory, doubtless even in the very spirit of Galois. The sempiternal question “and why all this?” seems to me to have neither more nor less meaning in the case of the anabelian geometry now in the process of birth, than in the case of Galois theory in the time of Galois (or even today, when the question is asked by an overwhelmed student...); the same goes for the commentary which usually accompanies it, namely “all this is very general indeed!”.
4. We thus easily conceive that a group like  $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ , with its “arithmetic” structure, is positively a machine for constructing “motivic” representations of  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  and its open subgroups, and that we thus obtain, at least in prin-

ciple, all the motivic representations which are of weight 1, or contained in a tensor product of such representations (which already makes quite a packet!) In 1981 I began to experiment with this machine in a few specific cases, obtaining various remarkable representations of  $\Gamma$  in groups  $G(\hat{\mathbf{Z}})$ , where  $G$  is a (not necessarily reductive) group scheme over  $\mathbf{Z}$ , starting from suitable homomorphisms

$$\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z}) \longrightarrow G_0(\mathbf{Z}),$$

where  $G_0$  is a group scheme over  $\mathbf{Z}$ , and  $G$  is constructed as an extension of  $G_0$  by a suitable group scheme. In the “tautological” case  $G_0 = \mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$ , we find for  $G$  a remarkable extension of  $\mathrm{Gl}(2)_{\mathbf{Z}}$  by a torus of dimension 2, with a motivic representation which “covers” those associated to the class fields of the extensions  $\mathbf{Q}(i)$  and  $\mathbf{Q}(j)$  (as if by chance, the “fields of complex multiplication” of the two “anharmonic” elliptic curves). There is here a principle of construction which seemed to me very general and very efficient, but I didn’t have (or take) the leisure to unravel it and follow it through to the end – this is one of the numerous “hot points” in the foundational programme of anabelian algebraic geometry (or “Galois theory”, extended version) which I propose to develop. At this time, and in an order of priority which is probably very temporary, these points are:

- a) Combinatorial construction of the Teichmüller tower.
- b) Description of the automorphism group of the profinite compactification of this tower, and reflection on a characterisation of  $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  as a subgroup of the latter.
- c) The “motive machine”  $\mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$  and its variations.
- d) The anabelian dictionary, and the fundamental conjecture (which is perhaps not so “out of reach” as all that!). Among the crucial points of this dictionary, I foresee the “profinite paradigm” for the fields  $\mathbf{Q}$  (cf. b)),  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{C}$ , for which a plausible formalism remains to be uncovered, as well as a description of the inertia subgroups of  $\Gamma$ , via which the passage from characteristic zero to characteristic  $p > 0$  begins, and to the absolute ring  $\mathbf{Z}$ .

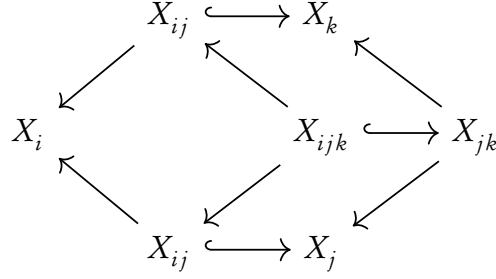
e) Fermat's problem.

5. I would like to point out, however, a more delicate task (apart from the task pointed out in passing on cubic complexes), on the combinatorial interpretation of regular maps associated to congruence subgroups of  $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ . This work was developed with a view to expressing the “arithmetic” operation of  $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  on these “*congruence maps*”, which is essentially done via the intermediary of the cyclotomic character of  $\Gamma$ . A point of departure was the combinatorial theory of the “bi-icosahedron” developed in a C4 course starting from purely geometric motivations, and which (it afterwards proved) gives rise to a very convenient expression for the action of  $\Gamma$  on the category of icosahedral maps (i.e. congruence maps of index 5).
6. Let us note in relation to this that the isomorphism classes of compact tame spaces are the same as in the “piecewise linear” theory (which is *not*, I recall, a tame theory). This is in some sense a rehabilitation of the “Hauptvermutung”, which is “false” only because for historical reasons which it would undoubtedly be interesting to determine more precisely, the foundations of topology used to formulate it did not exclude wild phenomena. It need (I hope) not be said that the necessity of developing new foundations for “geometric” topology does not at all exclude the fact that the phenomena in question, like everything else under the sun, have their own reason for being and their own beauty. More adequate foundations would not suppress these phenomena, but would allow us to situate them in a suitable place, like “limiting cases” of phenomena of “true” topology.
7. In fact, to reconstruct the system of spaces

$$(i_0, \dots, i_n) \mapsto X_{i_0, \dots, i_n}$$

contravariant on  $\mathrm{Drap}(I)$  (for the inclusion of flags), it suffices to know the  $X_i$  (or “*unfolded strata*”) and the  $X_{ij}$  (or “*joining tubes*”) for  $i, j \in I$ ,  $i < j$ , and the morphisms  $X_{ij} \longrightarrow X_j$  (which are “bounding” inclusions) and  $X_{ij} \longrightarrow X_i$  (which are proper fibrations, whose fibres  $F_{ij}$  are called “*joining fibres*” for the strata of index  $i$  and  $j$ ). In the case of a tame multiplicity,

however, we must also know the “*junction spaces*”  $X_{ijk}$  ( $i < j < k$ ) and their morphisms in  $X_{ij}$ ,  $X_{jk}$  and above all  $X_{i,k}$ , included in the following hexagonal commutative diagram, where the two squares on the right are Cartesian, the arrows  $\hookrightarrow$  are immersions (not necessarily embeddings here), and the other arrows are proper fibrations:



(N.B. This diagram defines  $X_{ijk}$  in terms of  $X_{ij}$  and  $X_{jk}$  over  $X_j$ , but not the arrow  $X_{ijk} \rightarrow X_{ik}$ , since  $X_{ik} \rightarrow X_k$  is *not* necessarily an embedding.)

In the case of actual stratified tame spaces (which are not, strictly speaking, multiplicities) we can conveniently express the unfolding of this structure, i.e. the system of spaces  $X_{i_0, \dots, i_n}$  in terms of the tame space  $X_*$  sum of the  $X_i$ , which is equipped with a *structure of an ordered object* (in the category of tame spaces) having as graph  $X_{**}$  of the order relation the sum of the  $X_{ij}$  and the  $X_i$  (the latter being on the diagonal). Among the essential properties of this ordered structure, let us only note here that  $\text{pr}_1 : X_{**} \rightarrow X_*$  is a (locally trivial) proper fibration, and  $\text{pr}_2 : X_{**} \rightarrow X_*$  is a “bounding” embedding. We have an analogous interpretation of the unfolding of a stratified tame multiplicity, in terms of a *category structure* (replacing a simple ordered structure) “in the sense of tame multiplicities”, such that the composition map is given by the morphisms  $X_{ijk} \rightarrow X_{ik}$  above.

## RAPPORT D'ACTIVITÉ

(1.10.1984 — 15.12.1984)

par Alexandre Grothendieck, attaché de recherches au CNRS

---

Les mois écoulés ont été consacrés avant tout à la préparation des volumes 1 et 2 des Réflexions Mathématiques, qui paraîtront sans doute courant 1985, sous les titres *“Récoltes et Semailles”* et *“Pursuing stacks”*, part 1: *“The Modelizing Story”*. Je prévois que cette préparation m’absorbera jusque vers la fin février, après quoi je compte reprendre la réflexion sur les fondements d’une “algèbre topologique” (commencé avec la première partie de “À la Poursuite des Champs”), en reprenant le fil de la réflexion de l’*“Histoire de Modèles”* là où je l’avais laissé. Je donne quelques précisions au sujet de ce programme de travail dans “Esquisse d’un Programme”, par. 7.

Il s’agit ici de refondre, dans une discipline autonome (que je propose d’appeler *“algèbre topologique”*) qui jouerait le rôle un peu du pendant “algébrique” de la topologie générale, un certain nombre de visions parcellaires provenant de l’algèbre (co)homologique (commutative ou non-commutative), l’algèbre homotopique, le formalisme algébrico-géométrique des topos (qui est une sorte de paraphrase dûment généralisée de la topologie générale), y compris le formalisme des champs, gerbes etc développé dans la thèse de Giraud, enfin la théorie des  $n$ -catégories et celle des  $n$ -champs de telles  $n$ -catégories (encore dans les limbes). Le besoin d’une telle discipline nouvelle, et certaines des principales idées-force que je compte développer dans le maître d’oeuvre “À la Poursuite des Champs”, me

sont apparus progressivement entre 1955 et la fin des années soixante, en contrepoint ininterrompu avec le développement d’une “géométrie arithmétique”, synthèse (entièrement imprévue encore jusqu’aux débuts des années soixante) de la géométrie algébrique, de la topologie et de l’arithmétique. Je développe réflexions rétrospectives au sujet de la naissance, l’essor et la fortune (et parfois, infortune) ultérieure de ces disciplines nouvelles, ici et là au cours de la réflexion plus vaste poursuivi dans “Récoltes et Semailles”. Qu’il me suffise ici de dire que dans mes propres motivations, aujourd’hui comme il y a vingt ans, l’algèbre topologique (laissée pour compte après mon “départ” en 1970) est avant tout un des principaux *outils d’appoint* pour le développement de cette “géométrie arithmétique”, dont le développement jusqu’au stade d’une pleine maturité m’apparaît comme une des principales tâches qui se posent à la mathématique de notre temps.

Un des signes principaux d’une telle maturité serait une maîtrise complète des notions et idées autour de la notion de *motif*, que j’ai introduites et développées tout au long des années soixante (tombées dans un oubli soudain dès mon “départ” en 1970 et — à une exhumation partielle près en 1982 — jusqu’à aujourd’hui même...), ainsi qu’une maîtrise des principales notions et idées de *géométrie algébrique anabélienne* que j’ai dégagées depuis 1978. En termes imagés, on peut dire que ces deux courants d’idées, le courant “abélien” incarné par la notion de motif, et le courant “anabélien” exemplifié par la structure géométrique-arithmétique de la “tour de Teichmüller”, sont à la “géométrie arithmétique” dans son enfance, ce que courants “complexes de cochaînes — catégories dérivées commutatives” sont à l’algèbre topologique (encore in utero).

La différence essentielle entre ces deux disciplines ne se situe cependant nullement dans leur état d’avancement relatif, circonstance des plus contingentes, apte à changer radicalement en l’espace de quelques années, ne serait-ce que par la vertu de l’écriture de “Pursuing Stacks”. Elle se situe plutôt dans une différence de profondeur. Comme c’était le cas naguère pour le développement d’une “topologie générale” (faite sur mesure pour l’analyste, bien plus que pour le géomètre), le travail essentiel à accomplir pour la mise sur pied de l’“algèbre topologique” est, avant toute autre chose, le *développement d’un langage*, dont le manque se fait sentir (à moi tout au moins) à tous les pas. La dimension de cette tâche me semble être

du même ordre que celle à laquelle se sont vus confrontés Hausdorff et d'autres, dans l'entre-deux-guerres. Elle n'a pas de commune mesure avec la tâche posée par le développement de la géométrie arithmétique, jusqu'au point d'un sentiment de "maîtrise" des principaux courants d'idées qui y confluent. On mesurera cette différence de "dimensions", en se rappelant que la "maîtrise" du "courant anabélien" impliquerait, notamment, une description "purement algébrique" du groupe de Galois de  $\overline{\mathbf{Q}}$  sur  $\mathbf{Q}$ , et de la famille de ses sous-groupes de décomposition et d'inertie associées aux différents nombres premiers. La structure de ces derniers (correspondants aux cas "locaux" des corps  $p$ -adiques) ont été déterminés récemment par Uwe Jannsen, Kay Wingberg et (dans le cas  $p = 2$ ) Volker Diekert, avec une relation principale rappelant étrangement celle qui décrit le groupe fondamental principal d'une courbe algébrique sur le corps des complexes. Mais on est loin sans doute d'une description analogue dans le cas "global".

Pour terminer ce rapport préliminaire, je me sens en mesure d'apporter quelques précisions pratiques au programme "tous azimuts" exposé dans l'Esquisse d'un Programme (qui sera jointe à "Récoltes et Semailles", ainsi que le présent rapport, l'Esquisse Thématique et quelques autres textes de nature mathématique, pour constituer le volume 1 des Réflexions Mathématiques). Je tiens d'abord, avant toute autre chose, à m'acquitter (comme je le dis dans l'Esquisse d'un Programme, par. 7) "d'une dette vis-à-vis de mon passé scientifique", en esquissant tout au moins dans les grandes lignes des principales visions d'ensemble auxquelles j'étais parvenu entre 1955 et 1970 et qui, sans avoir trouvé alors la forme d'exposés systématiques et publiés, ont été laissés pour compte par mes ex-élèves après mon "départ" en 1970. Il s'agit d'une part de l'ensemble d'intuitions et d'idées en direction de l'"algèbre topologique", à laquelle j'ai fait allusion tantôt, et d'autre part d'un "vaste tableau des motifs" qu'il s'agit de "brosser à grands traits", apte à servir à la fois de maître d'oeuvre pour l'édification d'une théorie qui reste conjecturale, et de fil conducteur très sûr et de fécond instrument de découverte, pour pouvoir prédire "à quoi on est en droit de s'attendre" dans une foule de situations impliquant les propriétés géométrico-arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. (Une version très parcellaire de certaines de mes idées à ce sujet est présentée, sans que mon nom y soit prononcé, dans le volume "Hodge Cy-

cles, Motives, and Shimura Varieties” des Lecture Notes (n° 900), 1982, par Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, Kuang-yen Shih.) Je compte poursuivre cette partie de mon programme, au cours des deux ou trois années qui suivent, dans les deux ou trois volumes des Réflexions Mathématiques faisant suite aux deux volumes dont je suis en train de terminer la préparation. Ceci fait, je prévois de me consacrer prioritairement au programme de géométrie algébrique anabélienne — d’une part, tracer à grands traits les principales idées, conjectures et résultats déjà obtenus, et d’autre part, entreprendre une étude géométrie-arithmétique minutieuse de la “tour de Teichmüller”, et plus particulièrement, de ses deux premiers étages.

Le 10.12.1984

Alexandre Grothendieck



## Brief an V. Diekert, 3.4.1984<sup>21</sup>

Les Aumettes 3.4.1984

Lieber Volker Diekert,

Ich

---

<sup>21</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/BGD3484scan.pdf>

## Letter to L. Bers, 15.4.1984<sup>22</sup>

Les Aumettes 15.4.1984

Dear Lipman Bers,

Together with Yves Ladegaillie (a former student of mine) we are running a microseminar on the Teichmüller spaces and groups, my own motivations coming mainly from algebraic geometry, and Ladegaillie's from his interest in the topology of surfaces. Lately we have met with a problem which I would like to submit to you, as I understand you are the main expert on Thurston's hyperbolic geometry approach to Teichmüller space. Before stating the specific problem on hyperbolic "pants" (which things boil down to), let me tell you what we are really after.

Assuming given a compact oriented surface with boundary  $X_0$  as a reference-surface for constructing the Teichmüller-type spaces, of genus  $g$  and with "holes" (satisfying  $2g - 2 + \nu > 0$ ), my primary interest is in the more "algebraic" version of Teichmüller space, corresponding to the question of classifying algebraic non singular curves over  $\underline{\mathbb{C}}$ , of genus  $g$ , with a system of points (all distinct) given on  $X$ , together with a "Teichmüller rigidification" of  $(X, S)$  namely a homotopy equivalence between  $X_0$  and  $X \setminus S$ . I'll denote this space, homeomorphic to  $\underline{\mathbb{C}}^d$  (where  $d = 3g - 3 + \nu$ ), by  $\tilde{M}_{g,\nu}$  (the tilde suggesting that it is the universal covering of a finer object I am still more interested in, namely the algebraic variety (or rather "multiplicity", or "stack" in the terminology of Mumford-Deligne) of moduli for algebraic curves of type  $(g, \nu)$ . Thurston however considers a different modular space, where algebraic curves with a given system of points are replaced by compact conformal oriented surfaces *with boundary*, giving rise to a modular space  $\widetilde{MB}_{g,\nu}$  (where the letter  $B$  recalls that we are classifying structures with boundary) homeomorphic to  $\underline{\mathbb{C}}^d \times (\underline{\mathbb{R}}^{*+})^\nu$ , where the extra factor corresponds to the extra parameters introducing through the existence of the boundary, namely the length's of the components of the boundary with respect to the canonical hyperbolic structure on the given surface. Our interest is in pinpointing the precise relationships between the two modular spaces. The obvious idea here is to consider the case

---

<sup>22</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/LGL15484scan.pdf>

of an algebraic curve with  $\nu$  points given as a limit-case of a compact conformal surface with boundary, when all the lengths  $l_i$  of the components of the boundary tend to zero. Therefore, it looks suitable to consider both modular spaces above as embedded in a larger third one, which corresponds to the same modular problem as in Thurston's theory, except that we allow the "boundary" to have some components reduced to just one point, in the neighbourhood of which  $X$  is just a conformal surface without boundary, but with a given point (viewed as a component of such a "generalized boundary"). We now should get a modular space for "compact conformal oriented surfaces with generalized boundary" (of type  $g$ ,  $\nu$  and rigidified via  $X_0$ ), call it  $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ , homeomorphic to  $\underline{C}^d \times (\underline{R})^\nu$ , where now the second factor corresponds to the "parameters"  $l_i$ , which are allowed to take also value 0 (which means that the corresponding component of the generalized boundary is just one point). Thus  $\widetilde{MB}_{g,\nu}$  appears as a variety with boundary (in the topological sense - in the real analytic sense, the "boundary" admits "corner-like" points obviously), and  $\widetilde{M}_{g,\nu}$  appears as a part of the boundary.

My interest is in a better geometric understanding of the situation, which should be "intrinsic" namely not depend on any particular choice of a surgical decomposition of the reference surface  $X_0$  into "pants", used in order to describe in a handy way standard "coordinate functions" on the modular space  $\widetilde{M}_{g,\nu}$ . There appears to be a geometrically meaningful retraction of  $\widetilde{MB}_{g,\nu}$  upon  $\widetilde{M}_{g,\nu}$  (commuting to the operations of the Teichmüller modular group), the fibers being homeomorphic to  $(\mathbf{R}^+)^{\nu}$  - more specifically, I expect the semi-group  $(\mathbf{R}^+)^I$  (where  $I$  is the set of indices for the "holes" of  $X_0$ ) to act on  $MB$  in a natural way, with free action of the subgroup  $(\mathbf{R}^+)^{\nu}$  upon  $\widetilde{MB}^{\circ}$ , in such a way that  $\widetilde{M}$  is just the quotient of  $\widetilde{MB}$  by this action (or of  $\widetilde{MB}^{\circ}$  by the action of the corresponding subgroup), and that the fiber  $F$  is isomorphic to  $(\mathbf{R}^+)^I$  by the choice of any "origin" in  $F \cap \widetilde{MB}^{\circ}$ .

Of course, "computationally", in terms of a decomposition of  $X_0$  into pants, the idea of such an operation is pretty obvious - namely letting the components  $\lambda_i$  of  $\lambda \in (\mathbb{R}^+)^I$  act as a "multiplier" on the corresponding coordinate  $\lambda_i$ . However, it is not clear that this operation is intrinsic - and if it were intrinsic, an intrinsic geometric description would still be desired.

Of course, in the description of the situation proposed above, the retraction of

$\widetilde{MB}$  upon  $\widetilde{M}$  is obtained by multiplying with the 0 multiplier (all  $\lambda$  are 0). Now there is a direct geometrical description of a retraction, by hyperbolic surgery. Namely, for any compact conformal surface of type  $g, \nu$  with generalized boundary, let's "fill in" the holes which correspond to ordinary components of the boundary, which are Riemannian oriented circles, by "gluing in" the cones on these circles (which are canonically endowed with a conformal structure, using the Riemannian structure on the given circles). Thus we get a "functor" from compact conformal surfaces with generalized boundary (of type  $g, \nu$ ) to compact conformal surfaces *without boundary*, endowed with a system of  $\nu$  points (making up a "wholly degenerate" generalized boundary). When we throw in the rigidifications and go over to isomorphism classes, this should give the desired retraction. However, the geometric situation is a lot richer still, as the compact surface without boundary obtained through surgery is endowed, not only with a system of  $\nu$  points, but moreover with a system of mutually disjoint *discs* around these points. The shape of these discs is by o means arbitrary - we'll say that a system of discs around  $\nu$  points on a compact conformal surface  $\hat{X}$  without boundary is "admissible", if the situation can be obtained as above (up to isomorphism) from surgery, starting with a compact conformal surface  $X$  with boundary. (NB Among the given "discs", we should allow that some should be reduced to their center - we'll call them "degenerate".) The condition of admissibility can be expressed intrinsically, by stating that for every non-degenerate component  $\Gamma_i$  of the system of boundaries of those discs, the two operations we got of the standard circle group (of complex numbers of module 1) upon  $\Gamma_i$ , by using the fact that it is (on the one hand) the boundary of the disc  $D_i$ , an (on the other hand) that it is a component of the boundary of the hyperbolic surface  $\hat{X} \setminus (\bigcup_j D_j^\circ)$ , should be the same. When  $\hat{X}$  and the points  $s_i$  on  $\hat{X}$  are given, the possible admissible systems of discs around the points  $s_i$  depend on  $\nu$  parameters - and the first idea which flips to mind to give a more precise meaning to these "parameters", is to view them as being the "radii" of those discs. But then we'll have to define what we mean by these!

The idea here is that, when we have a conformal disc  $D$  and an interior point  $s$  of  $D$ , then  $D$  may be viewed as canonically embedded in the tangent space  $T_s$  to  $D$  at  $s$ , as the "unit disc" at  $s$ . Thus, in the situation above of admissible system of

discs  $(D_i)_{i \in I}$  around  $(s_i)_{i \in I}$ , for every  $s_i$  corresponding to a non-degenerate  $D_i$ , we get a canonical disc

$$\Delta_i \subset T_{s_i}$$

in the tangent space - and of course, for degenerate  $D_i$ , we'll take  $\Delta_i$  to be degenerate too. The discs we get in a given  $T_{s_i}$  (for a fixed system  $(s_i)$ , and a variable admissible system of discs around these  $s_i$ ) are ll discs in the strict euclidean sense, given by an inequality

$$|z| \leq r_i,$$

where  $z \mapsto |z|$  denotes some hermitian metric on  $T_{s_i}$  compatible with the conformal structure - this metric being unique  $s_i$  up to a scalar factor. The set  $R_i$  of all those possible discs (the non-degenerate ones say) may be viewed in a natural way as a “torsor” (= principal homogeneous space) under  $\mathbf{R}^+$ , which plays here the role of the parameter space of all possible (non degenerate) “radii” at  $s_i$ . If we admit also radius zero, we accordingly get a parameter space  $\hat{R}_i$ , which may be viewed as a torsor of sorts  $\mathbf{R}^+$ . Thus the set of radii for a given admissible system of discs  $D_i$  around the points  $s_i$  may be viewed as a point of the product-space

$$r = (r_i)_{i \in I} \in \hat{R} = \prod_{i \in I} \hat{R}_i.$$

My expectation is that an admissible set of discs  $(D_i)$  is well determined by the knowledge of the corresponding set  $r$  of radii, and moreover that a given set  $r$  of radii corresponds to an admissible system of discs iff it satisfies a set of inequalities

$$r_i < \rho_i,$$

where

$$\rho = (\rho_i)_{i \in I} \in R = \prod_{i \in I} R_i$$

is some fixed system of radii, corresponding to a fixed system of choices of hermitian metrics in the tangent spaces  $T_{s_i}$ .

I now see that this “expectation” doesn't quite match with the previous one, about a “natural operation” of  $(\underline{P}^+)^I$  upon  $\widetilde{MB}$ , having certain properties - it would match only if all  $\rho_i$  were equal to  $+\infty$  (hence not in  $R_i$  itself strictly speaking). I must confess I didn't look too thoroughly yet at the situation, and moreover I've

been busy with rather different kind of things for the last two or three months, and lost contact a little...

What is clear however is that the main key to an understanding of the general situation, is in an understanding of the basic particular case of Thurston's pants. If we number  $0, 1, \infty$  the three "holes" of such a part, the surface  $\hat{X}$  can be identified canonically to the Riemann sphere, and the basic question then is to understand how the pant is embedded in this sphere  $\Sigma$ , as a complement of the union of (open) discs around the points  $0, 1, \infty$ , these discs forming an "admissible system". So the main question is about understanding the structure of all possible admissible systems of three discs on  $\Sigma$ .

Puzzling a little about this problem, the following model came to my mind (corresponding to "limiting radii"  $\rho_i$  which are *finite*, not infinite). I view  $\Sigma$  as endowed with its usual euclidean metric, for which the real projective line is a great circle, with  $0, 1, \infty$  at equal distance from each other on this equator. These points may be viewed as the centers of three "orange slices", making up a cellular subdivision of  $\Sigma$ , where the common boundary of two among the "slices"  $Q_i$  ( $i \in \{0, 1, \infty\}$ ) is a half-great circle passing in between  $s_i$  and  $s_j$  at equal distance from both, these three half-circles joining at the two poles  $P^+$  and  $P^-$ . The "disc"  $Q_i$  around  $s_i$  has a conical structure around  $s_i$  (as has any conformal pointed disc), and we may take the concentric discs  $\lambda_i Q_i$  with

$$0 < \lambda_i < 1.$$

The model I had in mind was that the (non degenerate) admissible systems of discs around the points  $s_i$  ( $i \in \{0, 1, \infty\}$ ) are exactly the systems of discs  $\lambda_i Q_i$ , with  $\lambda_i$  as above. (If we allow some discs to be degenerate, this means that instead of the inequality above we merely demand  $0 \leq \lambda_i < 1$ ,  $0$  not excluded.)

This model, if correct, would give a rather precise description of the inclusion relationships between pants, when these are considered as embedded in the sphere. The intersection of all would be this system of these half circles  $C_i$ , and the two poles  $P^+, P^-$  would play a significant role in the geometry of the pants, from this point of view. But it doesn't seem that neither those half circles (which need not be geodesical I guess), nor the two poles have ever been described as intrinsically associated to a pant. Of course, this model would give alternative "parameters"  $\lambda_i$

for describing a pant, which are best suited for grasping the pants in terms of spherical geometry. The next question would be an understanding of the relationship between these parameters, and Thurston's  $\ell_i$ . Maybe it is unreasonable to expect that for given index  $i \in \{0, 1, \infty\}$ , the length  $\ell_i$  depends only on  $\lambda_i$  and not on the other parameters  $\lambda_j$  - and for this reason, the intuition at the beginning of this letter, using Thurston's coordinate functions and notably the  $\ell_i$ 's to get a fibration structure on  $\widetilde{MB}$  over  $\widetilde{M}$ , in terms of a given decomposition of  $X_0$  into pants, is probably not really relevant, namely it is non intrinsic. Assuming the model I am suggesting is correct, the accurate description of  $\widetilde{MB}$  in terms of  $\widetilde{M}$  would be

$$\widetilde{MB} \simeq \widetilde{M} \times [0, 1]^I,$$

where the second factor on the right hand side refers to the system of multipliers  $\lambda_i$  ( $i \in I$ ), tied to the  $r_i$  above by  $r_i = \lambda_i \rho_i$ .

My question of course is whether you have any information or idea to propose, especially on the basic problem of relating pants to spherical geometry, and more specifically, whether the model above is likely to hold, or is definitely false. Also, one difficulty we found with hyperbolic geometry of conformal surfaces, is that apart from existence and unicity of the hyperbolic structure (compatible with the given conformal cone and for which the boundary is geodesic), there seems to be little hold on more specific properties. As an example, starting with a compact conformal surface with boundary  $X$  (a pant, say), of hyperbolic type, and removing an (open) "collar" around the boundary, we get another surface with boundary  $X'$  - what about the relation between the two corresponding metrics? Assuming the model for pants above is correct, it would be nice to have an explicit expression of the metric of a pant in terms of the parameters  $\lambda_i$ .

With my thanks for your attention, and for whatever comment you will care to make, very sincerely yours

## VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES

---

### I. Vers une géométrie des formes (topologiques)

[Apprendre] vers une construction recouvrante (sur l'action naturelles) d'une "géométrie des formes de dimension  $\leq n$ ".

Une "forme de dim 0" soit pour définition  $[]$  dont les éléments sont appelés les "lieux" de la forme.

**Modèle de dimension 1.** — Une tel modèle

$[]$

- 1) Deux ensembles de  $[]$   $L_\alpha$  (ensemble des *lieux* de modèles) et  $S$  (ensemble des *segments* des modèle)
- 2) Une application  $S \longrightarrow \mathfrak{P}(L), I \longrightarrow \tilde{I}$  (lieux sur un segment) - i.e. une relation entre  $S$  et  $L$ .
- 3) Une application  $S \longrightarrow \mathfrak{P}_2(L) []$

**N.B.** J'ignore s'il faut supposer que  $I$  est connu, quand on connaît

**Modèle d'une forme 1-dimensionnelle**

$L$  ensemble de "lieux"

$S$  ensemble de "segments"



## II. Réalisations topologiques des réseaux

### 1. — $[\ ]$ topologique

Soit  $X$  un espace topologique,  $A \subset X$  partie fermée non vide de  $X$ .  $X_{/A}$  l'espace déduit de  $X$  en  $[\ ] A$  en un point, a le point déduit de  $A$  par  $[\ ]$ . Si  $X'$  est une partie de  $X$  contenant  $A$ , alors  $X'_{/A} \hookrightarrow X_{/A}$  identifié  $X'_{/A}$  à un sous-espace topologique de  $X$ .

Les fermées de  $X'_{/A}$  s'identifient aux fermées de  $X'$  qui on bien contient  $A$

## III. Réseaux via découpages

Je voudrais définir une  $[\ ]$  axiomatique a structure  $[\ ]$  réseaux sur un  $[\ ] L$  ( $[\ ]$  de “lieux”).

$[\ ]$

**Exemple 2** Soit  $L$  un ensemble ordonné, on suppose  $L$  filtrant croissante, filtrant décroissant, sans plus grand  $[\ ]$  plus petit élément, localement filtrant croissante et filtrant décroissante divisible.

On appellera un tel ensemble une  $[\ ]$  ordonnée.

## IV. Analysis situs (première mouture)

## V. Algèbre des figures

## VI. Analysis situs (deuxième mouture)

Avant de décrire ce qu'est une  $[\ ]$ , je vais décrire ce qui sera  $[\ ]$  avec notion de multistrates” - la famille des multistrates choisies jouant un peu le rôle des une famille d'ouverts  $[\ ]$  donc une topologie, ou une famille génératrice d'éléments d'un topos. Je vais donc commencer pas

### I. “Algèbre des figures” ou “Ateliers”.

1. — Une *algèbre des figures* implique avant tout trois types d'objets, les *lieux*, les *multistrates*, les *figures*, formant trois ensembles

$$(1.1) \quad L, M, F$$

liées entre eux par diverses applications, et  $[\ ]$  muni de diverses structures. Ainsi, on a des applications canoniques injectives

$$(1.2) \quad L \xhookrightarrow{b)} M \xhookrightarrow{a)} F$$

que nous utiliserons souvent pour identifier un lieu à une multistrate particulière, et une multistrate à une figure particulière ou  $L$  à une sous-ensemble de  $M$ ,  $M$  à un sous-ensemble de  $F$ .

Il y a d'autre part deux entre paires d'applications, que voici :

$$(1.3) \quad [\ ]$$

où  $\text{Fig}(M)$  désigne la partie de  $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$  formée des figures ensemblistes dans  $M$ . On peut considérer que la première application correspond à une relation entre  $M$  et  $F$ , appelée relation d'incidence. Pour une figure  $F$ ,  $\widehat{T}$  s'appelle l'ensemble des *multistrates incidentes*, ou le *déploiement* de la figure  $F$ . Si  $X \in M$ ,  $F \in \widetilde{F}$ , on dire que le multistrate  $X$  est *incidente* à la figure  $F$  ou encore que c'est une *strate de la figure*  $F$ , si  $X \in \widetilde{F}$ . D'autre part, tout élément  $X$  de  $M$  (i.e. toute multistrate),  $[\ ]$  comme une figure par (1.2), admet un déploiement  $\widetilde{X}$ , et on pose

$$(1.4) \quad [\ ]$$

et il résultera des axiomes que c'est une figure ensembliste des  $M$ ,  $[\ ]$  fidèlement par l'un  $\widetilde{F}$  des strates de  $F$ .

En fait,  $M$  sera muni d'une relation d'ordre  $\leq$ ,  $[\ ]$  plus bas, et  $\widetilde{F} \subset M$  sera une partie fermée de  $M$ , et pour tout  $X \in \widetilde{F}$ , on aura

$$(1.5) \quad \widetilde{X} = \{Y \in M \mid Y \leq X\}$$

À cause de cette interpolation, la passage de  $\widetilde{F} \subset M$  à  $\text{Fig}_M(F)$  est à tout  $[\ ]$ , que cette figure ensembliste des  $M$  un semble revenant important - mais à voir...

## VII. Analysis situs (troisième mouture)

## VIII. Analysis situs (quatrième mouture)

## Letter to P. Blass, 8.7.1987

Les Aumettes July 8, 1987

Dear Piotr Blass,

Thanks for your letter and MS. I am not going even to glance through the manuscript, as I have completely given up mathematics and mathematical involvements. If you complete your book, you may mention on the cover that it is based on my EGA IV (sic) notes, but you are to be the author and find your own title.

I have a foreboding that we'll contact again before very long, but in relation to more inspiring tasks and vistas than mathematical ones.

With my very best wishes

Alexander Grothendieck

## LES DÉRIVATEURS

Écrit entre octobre 1990 et la première moitié de 1991

Édité par M. Künzer, J. Malgoire, G. Maltsiniotis<sup>23</sup>

---

---

<sup>23</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/der.pdf>

## Lettre à R. Thomason, 2.4.1991<sup>24</sup>

Les Aumettes le 2.4.1991

Cher Thomason,

Merci pour ta lettre, et excuse-moi d'avoir tant tardé à t'écrire. Une raison en est que depuis peut-être deux mois j'étais occupé par une réflexion venue un peu en diversion, que je pensais régler en quelques jours (refrain familial...), et j'ai repoussé ma lettre de semaine en semaine. Cette réflexion ne concerne pas l'algèbre homotopique proprement dite, mais plutôt les fondements de la théorie des catégories, et j'en ai fait nettement plus que ce dont j'ai un besoin immédiat. Mais dès à présent j'ai la conviction qu'une algèbre homotopique (ou, dans une vision plus vaste, une "algèbre topologique") telle que je l'envisage, ne pourra être développée avec toute l'ampleur qui lui appartient, sans les dits fondements catégoriques. Il s'agit d'une théorie des (grosses) catégories que j'appelle à présent "accessibles", et des parties accessibles de celles-ci, en reprenant complètement la théorie provisoire que je présente dans SGA 4 I 9. J'ai tissé un tapis de près de deux cents pages sur ce thème d'apparence anodine, et cela me fera plaisir de t'en présenter les grandes lignes, si cela t'intéresse. Il y a aussi quelques problèmes intrigants qui restent, que je pressens difficiles, peut-être même profonds, et qui peut-être (qui sait) t'inspireront, ou quelqu'un d'autre branché sur les fondements de l'outil catégorique. Mais tout cela m'apparaît comme du domaine de l'outil, et je préfère dans cette première lettre te parler de choses plus névralgiques. Les idées-force sont nées pour la plupart depuis vingt-cinq ans et plus, et j'en vois le germe vivace dans mes réflexions solitaires des années 56, 57, quand s'est dégagé pour moi le besoin de catégories de "coefficients" moins prohibitivement gros que les sempiternels complexes de chaînes ou de cochaînes, et l'idée (après de longues perplexités) de construire de telles catégories par passage à une catégorie de fractions (notion qu'il a fallu inventer sur pièces) en "inversant" les quasi-isomorphismes. Le travail conceptuel principal qui restait à faire, et qui m'apparaît maintenant tout aussi fascinant (tant par sa beauté, que par sa portée évidente pour les fondements d'une algèbre cohomologique dans l'esprit d'une théorie des coefficients cohomologiques)

---

<sup>24</sup>Édition par M. Künzer

qu'en ces temps de mes premières amours avec la cohomologie – c'était de dégager la structure intrinsèque de ces catégories. Le fait que ce travail, que j'avais confié à Verdier vers 1960 et qui était censé faire l'objet de sa thèse, n'ait toujours pas été fait à l'heure actuelle, même dans le cas des catégories dérivées ordinaires, abéliennes, lesquelles pourtant (par la force des choses) ont bien fini par devenir d'un usage quotidien tant en géométrie qu'en analyse, en dit long sur l'état des mentalités à l'égard des fondements, dans la communauté mathématique.

Ce vent de mépris à l'égard des indispensables travaux de fondements (et plus généralement, pour tout ce qui ne se conforme pas à la mode du jour), je l'ai évoqué dans ma dernière lettre, et j'y reviens bien des fois aussi dans les pages de Récoltes et Semailles, tant c'est là une chose (parmi bien d'autres) qui tout simplement me dépasse. Ta réponse à ma lettre montre d'ailleurs que tu ne l'as absolument pas comprise. Ce n'était pas une lettre pour "me plaindre" de ceci ou de cela qui me déplaisait. Mais c'était une impossible tentative de partager une douleur. Je savais bien au fond que c'était sans espoir ; car tout le monde fuit la douleur, c'est-à-dire fuit la connaissance (car il n'y a pas de connaissance de l'âme qui soit exempte de douleur). Une très rare tentative, peut-être la seule dans ma vie (je ne m'en rappelle pas d'autre en tous cas), et sans doute la dernière...

Il y a deux directions d'idées, intimement solidaires, dont j'ai envie de te parler, que je me suis surtout attaché à développer depuis fin octobre (quand j'ai repris une réflexion mathématique, pour une durée indéterminée). Elles sont d'ailleurs déjà esquissées ici et là (ainsi qu'un bon nombre d'autres idées maîtresses de l'algèbre topologique) dans Pursuing Stacks. Dans cette réflexion de 1983, qui m'a beaucoup aidé maintenant, je finis par me disperser quelque peu à suivre des avenues latérales, plutôt que de revenir aux idées essentielles de mon propos initial. Comme autre source utile pour quelqu'un intéressé par ces questions de fondements, je te signale deux ou trois lettres à Larry Breen, que je pensais d'ailleurs inclure dans le texte publié de Pursuing Stacks (qui sans doute ne verra jamais le jour). D'une part je voudrais te parler de catégories de modèles et de la notion de "dérivateur" (remplaçant les défunctes "catégories dérivées" de Verdier, décidément inadéquates aux besoins). D'autre part j'ai beaucoup de choses à dire sur Cat en tant que catégorie de modèles pour des "types d'homotopie" en tous genres. Mais ce sera sûrement

pour une autre fois (à supposer que ton intérêt survive à la lecture de cette lettre-ci).  
Donc aujourd'hui ce sera les catégories de modèles et la notion de dérivateur.

**1. La seule structure essentielle d'une catégorie de modèles est la donnée du "localiseur"  $W \subset \text{Fl}(M)$ .**

Aussi j'appelle "catégorie de modèles" une catégorie  $M$  munie d'un tel "localiseur" (contenant les isomorphismes, et avec deux parmi trois flèches  $u$ ,  $v$  et  $uv$ , aussi la troisième). Les constructions homotopiques essentielles sont indépendantes de toutes structures supplémentaires, tel un ensemble  $C$  de "cofibrations" ou un ensemble  $F$  de "fibrations" ou les deux à la fois. De telles structures supplémentaires sont utiles, dans la mesure où elles permettent d'explicitier les constructions essentielles, et d'en établir l'existence. Mais elles ne sont pas plus essentielles pour le sens intrinsèque des opérations (qu'elles auraient tendance plutôt à obscurcir, jusqu'à présent) que le choix d'une base plus ou moins arbitraire d'un module, en algèbre linéaire. Comme terminologie, je parlerai de "catégories à cofibrations" (ou à fibrations), ou de "catégories (ou triples) de Quillen", etc., quand de telles structures supplémentaires apparaissent.

Par sa richesse en structures délicatement accordées les unes aux autres, ce sont les *triples de Quillen clos*  $(W, C, F)$  qui m'apparaissent comme la plus belle structure de catégorie de modèles "enrichie" découverte jusqu'à ce jour. J'avais cru pouvoir m'en passer, mais finalement n'y suis pas parvenu, et crois qu'ils resteront utiles (sinon absolument indispensables). En sens opposé, par l'économie des moyens mis en œuvre pour arriver pourtant à avoir l'essentiel, c'est la notion de *catégorie à cofibrations* ou à *fibrations* de K. S. Brown (avec la généralisation assez évidente apportée par Anderson) qui m'apparaît la plus belle. Par contre, je ne suis pas arrivé à comprendre la raison d'être du système d'axiomes que tu me proposes dans ta première lettre, te plaçant plus ou moins à mi-chemin entre Quillen et Brown. Tes axiomes (s'ils veulent élargir ceux de Quillen) me paraissent prohibitivement exigeants, en comparaison avec ceux de Brown-Anderson – à cela près, seulement, que tu ne sembles pas exiger que les ensembles  $C$  et  $F$  soient stables par composition. Mais je ne connais guère d'exemple où cet axiome-là ferait problème. Éclaire-moi s'il te plaît s'il y a quelque chose qui m'échappe.

Un exemple : si une structure à fibrations (de Brown-Anderson) satisfait à la condition familière de “propreté” (ce qui est le cas pour les structures considérées d’abord par Brown, où tous les objets sont fibrants sur l’objet final), on peut remplacer cette structure  $(W, F)$  par une autre  $(W, F_W)$  canoniquement associée au localiseur  $W$ , i.e. à la catégorie de modèles envisagée, en prenant pour  $F_W$  l’ensemble des flèches dans  $M$  qui sont ce que j’appelle des *W-fibrations*  $f : X \longrightarrow Y$ , i.e. qui sont quarrables et telles que le foncteur changement de base  $Y' \mapsto X' = X \times Y'$  de  $M/Y$  dans  $M/X$  transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes. Pour tout localiseur, c’est là un ensemble de flèches qui contient les isomorphismes, est stable par composition, par changement de base, par facteurs directs. Dire que  $(W, F_W)$  est une structure de Brown, revient à dire qu’il existe “assez de  $W$ -fibrations”, par quoi j’entends que toute flèche  $u$  se factorise en  $u = fi$ , avec  $i \in W$  et  $f \in F_W$ . Et dualement pour les catégories à cofibrations  $(W, C)$ , se remplaçant (dans le cas propre) par des structures  $(W, C_W)$  canoniquement associées au localiseur, en introduisant l’ensemble des *W-cofibrations*. Ainsi, j’aurais tendance plutôt à regarder une structure à fibrations  $(W, F)$  propre (et non “canonique”) comme une recette ou un critère pour caractériser certaines  $W$ -fibrations, avec lesquelles on pourra se contenter souvent de travailler, parce qu’il y en a “assez”. Pourtant, j’ai trouvé dans le cas de Cat que le travail avec les  $W$ -fibrations (beaucoup moins restrictives que les “fibrations” à la Quillen que tu avais introduites) était indispensable. Et je suis persuadé qu’il doit être très utile aussi dans une catégorie de modèles telle que  $\Delta^{\wedge}$  (ensembles semi-simpliciaux), car tout en étant substantiellement moins exigeante que la notion de fibration de Kan, celle de  $W$ -fibration implique déjà tout ce que je considère (à tort ou à raison) comme les propriétés cohomologiques et homotopiques essentielles de ces dernières (lesquelles, selon moi, ne sont pas dans la nature de propriétés de prolongement-relèvement de morphismes). Ainsi, cela doit permettre (par considération de “chemins” infinis) de construire dans  $\Delta^{\wedge}$  l’analogue des espaces de chemins de Cartan-Serre, sans avoir au préalable à remplacer le complexe  $K$  par une enveloppe de Kan. C’est en tous cas ce que j’ai vérifié dans le cas très voisin de Cat (sans jamais avoir à faire de détour par  $\Delta^{\wedge}$ ). Cela fait partie des choses dont je voudrais te parler par la suite.



## 2. Prédérivateurs, dérivateurs

Quand j’ai dit que les structures homotopiques essentielles sont déjà contenues dans le localiseur  $W$ , je pensais notamment aux suites exactes des fibrations et des cofibrations, qui sont un test décisif. Je reste ébahi que Quillen ne souffle mot à ce sujet dans son brillant (et beau) travail, et je présume qu’il a réussi (comme bien d’autres après lui) à ne pas le voir. (Pour le voir, il aurait fallu sans doute qu’il ne soit pas aveuglé par le mépris *a priori* qu’il exprime pour toute recherche de fondements qui irait au-delà de celle qu’il venait de faire, avec un tel succès...) Mais la chose devient évidente dans l’optique des dérivateurs.

L’idée de base des dérivateurs m’est apparue à l’occasion de SGA 5, quand il s’est avéré (découvert par Ferrand, chargé de rédiger un de mes exposés sur les traces en cohomologie) que la notion de catégorie dérivée de Verdier ne se prêtait pas au formalisme des traces : la trace n’est pas additive pour les “triangles exacts”, car cette notion de triangle (vu comme un diagramme dans la catégorie initiale) n’est pas assez fine. Pour bien faire, il faudrait prendre la catégorie des morphismes de complexes (pour lesquels on a une construction fonctorielle d’un *mapping cone*), et passer à la catégorie dérivée de celle-ci. Cette catégorie s’envoie dans celle des triangles de Verdier par un foncteur essentiellement surjectif, mais qui n’a rien de fidèle, et encore moins pleinement fidèle. C’est là le “péché originel” dans la première approche des catégories dérivées, tentée par Verdier — approche dont en tout état de cause, faute d’expérience, on n’aurait pas pu faire l’économie. C’est alors que j’ai été frappé par ce fait, d’apparence anodine, que chaque fois qu’on construit une catégorie dérivée à l’aide d’une catégorie de complexes d’une catégorie abélienne, cette catégorie dérivée, en un sens, “ne vient jamais seule”. En effet, pour toute catégorie d’indices  $I$  (et je pensais alors surtout au cas où  $I$  est finie), on a la catégorie abélienne  $A(I)$  des diagrammes de type  $I$  dans  $A$ , laquelle donne, elle aussi, naissance à une catégorie dérivée, qu’on pourrait noter  $D(I, A)$ . La catégorie des “vrais” triangles s’obtient en prenant  $I = \Delta^1$ , et les catégories dérivées de complexes filtrés, introduites par Illusie pour sauver la mise à bon compte, correspondent aux cas  $I = \Delta^n$  (simplexe-type de dimension  $n$ ). Les variances d’Illusie proviennent simplement du fait que  $D(I, A)$ , pour  $A$  fixé, est contravariant en  $I$ , de façon tautologique. L’idée tentante alors, et que j’ai proposée ici et là sans qu’elle

ne rencontre d'écho, c'est que cette structure de foncteur ou, plus exactement, de *2-foncteur*

$$I \mapsto D(I, A)$$

allant de la catégorie *Cat* ou de quelque sous-catégorie assez fournie comme celle des catégories finies ou celle des ensembles ordonnés finis, devrait suffire à incarner toutes les structures essentielles d'une "catégorie dérivée" (encore dans les limbes) ; quitte bien sûr à imposer les axiomes qu'il faut (et que j'ai fini par dégager enfin l'an dernier). On récupère la catégorie dérivée initiale, "nue", en faisant  $I = e$  (catégorie ponctuelle). Mais il serait impropre, en toute rigueur, de considérer la structure plus complète (que j'appelle maintenant un "*dérivateur*") comme une structure supplémentaire sur cette catégorie – laquelle continue cependant, dans le formalisme des dérivateurs, à jouer un rôle important, sous le nom de "*catégorie de base*" du dérivateur. La même idée avait l'air de devoir marcher pour les variantes non commutatives de la notion de catégorie dérivée, et le travail de Quillen m'apparaissait comme une incitation puissante à développer ce point de vue. Mais ce n'est qu'il y a quelques mois que je me suis donné le loisir enfin de vérifier que mon intuition était bel et bien justifiée. (Travail d'intendance, quasiment, comme j'en ai fait des centaines et des milliers de fois !)

Ce point acquis, il est bien clair à présent que la notion de dérivateur (plus encore que celle de catégorie de modèles, qui est à mes yeux un simple intermédiaire, "non intrinsèque", pour construire des dérivateurs) est une parmi les quatre ou cinq notions les plus fondamentales, dans l'algèbre topologique, qui depuis une trentaine d'années déjà attend d'être développée. Comme notions d'une portée comparable, je ne vois guère que celle de *topos*, et celles de *n-catégories* et de *n-champs* sur un topos (notions qui n'ont pas encore été définies à ce jour, sauf pour  $n \leq 2$ ). D'autre part, pour moi le "paradis originel" pour l'algèbre topologique n'est nullement la sempiternelle catégorie  $\Delta$  semi-simpliciale, si utile soit-elle, et encore moins celle des espaces topologiques (qui l'une et l'autre s'envoient dans la 2-catégorie des topos, qui en est comme une enveloppe commune), mais bien la catégorie *Cat* des petites catégories, vue avec un œil de géomètre par l'ensemble d'intuitions, étonnamment riche, provenant des topos. En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d'ensembles les  $C^\wedge$ , avec  $C$  dans *Cat*, sont de loin

les plus simples des topos connus, et c'est pour l'avoir senti que j'insiste tant sur l'exemple de ces topos ("catégoriques") dans SGA 4 I.

J'en viens maintenant à la définition en forme de ce que j'entends par un "prédérivateur"  $D$  – étant entendu déjà que la notion plus délicate de "dérivateur" s'en déduit en imposant quelques axiomes bien naturels, dont je te donnerai la liste si tu me la demandes. Pour développer une algèbre des dérivateurs (et tout d'abord, des prédérivateurs), il faut d'abord se fixer un "domaine" commun pour ceux qu'on va envisager, c'est-à-dire, une sous-catégorie pleine  $\text{Diag}$  de  $\text{Cat}$ . Le cas qui a ma préférence maintenant est celui où  $\text{Diag}$  est  $\text{Cat}$  tout entier, auquel cas j'interprète un dérivateur comme étant une sorte de "théorie de coefficients" (homologiques ou cohomologiques ou homotopiques, tout cela est pareil) sur  $\text{Cat}$ , catégorie visualisée comme une catégorie d'objets de nature géométrique et spatiale, comme des "espaces" à proprement parler, bien plus que comme de nature algébrique ; tout comme les anneaux commutatifs (via leurs spectres) et les schémas qu'on construit avec eux, sont pour moi des objets géométrico-topologiques par essence, et nullement algébriques. (L'algèbre étant seulement un intermédiaire pour atteindre à la vision géométrique, qui elle est l'essentiel.) Un cas plus ou moins extrême opposé est celui où  $\text{Diag}$  est la catégorie des ensembles ordonnés finis, voire même (à la rigueur) une catégorie plus restreinte encore. Mais pour être vraiment à l'aise, il faudra supposer tôt ou tard que la catégorie  $\text{Diag}$  (des "catégories d'indices" ou des "types de diagrammes", pour les dérivateurs considérés) soit stable par les constructions courantes sur les catégories : produits finis, sous-catégories, sommes amalgamées, voire même catégories  $\text{Hom}$  ; et aussi bien sûr par passage à la catégorie opposée, particulièrement fréquent pour passer d'un énoncé à un énoncé dual, notamment. Quand il ne s'agit que d'avoir un prédérivateur, dans tous les cas à ma connaissance on peut prendre comme domaine  $\text{Cat}$  tout entier. C'est quand il s'agit de vérifier les axiomes assez draconiens des dérivateurs, seulement, qu'on peut être forcé à restreindre considérablement le domaine comme j'ai évoqué, ou sinon, tout au moins, les flèches  $u : X \longrightarrow Y$  qu'on envisage dans  $\text{Cat}$ , lorsqu'il s'agit de travailler non seulement avec le foncteur correspondant d'image inverse  $u^*$ , mais aussi avec les images directes  $u_!$  et  $u_*$ . Mais là j'anticipe...

Au sujet du domaine, je voudrais encore ajouter qu'à mes yeux le domaine

Cat ne représente nullement la portée ultime d'un dérivateur donnée. Celui-ci, et plus généralement un prédérivateur  $D$ , étant défini comme un 2-foncteur entre 2-catégories

$$D : \text{Diag}^\circ \longrightarrow$$

(où désigne la catégorie des  $\mathcal{U}$ -catégories contenues ( $\subset$ ) dans l'univers de référence  $\mathcal{U}$ , toujours sous-entendu, alors que Cat désigne la catégorie des “petites” catégories, i.e. de celles qui son éléments de  $\mathcal{U}$ ), il résulte (d'ailleurs de façon nullement tautologique) des axiomes des dérivateurs (que je n'explicite pas ici) que la catégorie  $D(X)$  (des “coefficients de type  $D$  sur  $X$ ”) associée à une petite catégorie  $X$ , *ne dépend à équivalence près que du topos défini par  $X$* , donc que de la catégorie  $X^\wedge = \text{Hom}(X^\circ, \text{Ens})$  des préfaisceaux d'ensembles sur  $X$ . Plus précisément, si  $f : X \longrightarrow Y$  est une flèche dans Cat, alors le foncteurs “image inverse” pour les coefficients de type  $D$

$$f^* : D(Y) \longrightarrow D(X)$$

est une équivalence de catégories, pourvu que le foncteur similaire  $Y^\wedge \longrightarrow X^\wedge$  (qui correspond à un dérivateur particulièrement important sur Cat...) soit une équivalence de catégories; c'est-à-dire encore pourvu que  $f$  soit pleinement fidèle et que tout objet de  $Y$  soit facteur direct d'un objet de la forme  $f(x)$  (ou encore, que  $f$  induise une équivalence entre les “enveloppes de Karoubi” de  $X$  et de  $Y$ ). Cela implique aussi, quand est égal à Cat tout entier, que l'on peut regarder  $D$  comme provenant d'un 2-foncteur

$$^\circ \longrightarrow$$

allant de la 2-catégorie des topos “catégoriques” (i.e. équivalentes à un topos provenant d'un  $X$  dans Cat) dans la catégorie . Ceci vu, on peut espérer étendre le dérivateur, c'est-à-dire la théorie de coefficients envisagée, à la catégorie Top des topos tout entière, i.e. en un foncteur (qu'on notera encore  $D$ )

$$D : \text{Top}^\circ \longrightarrow .$$

J'ai idée que ça doit être toujours possible, et de façon essentiellement unique. Ça l'est en tous cas dans tous les cas concrets que j'ai regardés. Si par exemple  $D$  est le dérivateur (abélien) défini par une catégorie abélienne via la catégorie des

complexes et la notion de quasi-isomorphisme, on trouve pour tout topos  $X$  (supposant que la catégorie soit celle des  $k$ -modules, où  $k$  est un anneau quelconque) la catégorie  $D(X, k)$  dérivée de celle des  $k$ -modules sur  $X$ , et celle  $D(X, k)$  dépend bien de façon contravariante de  $X$ . Il est vrai que quand il s'agit de définir les lois *covariantes*  $f_!$  et  $f_*$ , plus exactement d'en établir l'existence, on bute sur le cas de  $f_!$ , cet  $f_!$  n'existe que moyennant des hypothèses draconiennes sur  $f$ . (De toutes façons, j'escroque un peu ici, faute d'avoir explicité des restrictions sur les degrés des complexes, genre  $D^+(X, k)$  ou  $D^-(X, k)$ , Mais ce n'est par le lieu ici d'entrer dans des technicalités.)

Pour ce qui est des axiomes pour les dérivateurs, le plus essentiel de tous est l'existence, pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$  dans  $\text{Diag}$ , des foncteurs  $f_!$  et  $f_{!D(X) \longrightarrow D(Y)}$ , adjoints à gauche et à droite de  $f^*$ . Ainsi, pour développer (dans la catégorie de base, disons) la théorie de la *suite exacte de suspension*, c'est de l'existence de  $f_!$  qu'on a besoin, et il suffit pour cela que  $\text{Diag}$  contienne les ensembles ordonnés finis (et même nettement moins, si on y tient). Mais je signale que les suites canoniques qu'on construit ainsi à l'aide du seul foncteur  $f_!$  et sous l'hypothèse que le dérivateur soit "ponctué" (i.e. les  $D(X)$  ponctué et les foncteurs  $f$  compatibles avec les objets neutres), ne sont exactes que moyennant un "axiome d'exactitude" (à gauche) convenable, faisant partie de la poignée des axiomes d'un dérivateur ; et dualement pour la suite exacte de cosuspension. Ces constructions sont valables d'ailleurs non seulement dans toute catégorie  $D(e)$ , mais aussi comme de juste dans les  $D(X)$ , pour  $X$  dans  $\text{Diag}$ . (En fait,  $D(X)$  peut être considéré comme la catégorie de base d'un "dérivateur induit"  $D_X : Y \mapsto D(X \times Y)$ , auquel on peut appliquer les résultats généraux. Les axiomes des dérivateurs sont tels qu'ils sont stables par passage d'un dérivateur à un dérivateur induit.) Ceci suggère de dissocier les notions de "dérivateur à gauche" (postulant l'existence des images directes homologiques  $f_!$ , à l'exclusion des images directes cohomologiques  $f$ ), de "dérivateur à droite" incluant l'aspect dual du formalisme homotopique. Mais je signale tout de suite que certaines propriétés des dérivateurs qui me paraissent importantes, et même quand leur énoncé ne fait appel qu'à une des deux structures gauche ou droite, sont établies en utilisant l'existence des deux covariances à la fois.

Pour terminer ces généralités sur la notion de dérivateur, je voudrais souligner

qu'il est essentiel, dans la notion de prédérivateur (qui est la donnée de base unique), que  $D : \text{Diag} \longrightarrow$  est bien un 2-foncteur, et non seulement un foncteur ; en d'autres termes, il faut se donner non seulement les  $D(X)$  pour  $X$  dans  $\text{Diag}$ , et les  $f^* = f_D^* = D(f)$  pour les flèches  $f : X \longrightarrow Y$ , mais pour une flèche  $u : f \longrightarrow f'$  entre deux flèches  $f, f' : X \longrightarrow Y$ , il faut se donner un homomorphisme fonctoriel

$$u^* : f'^* \longrightarrow f^*$$

(avec des indices  $D$  s'il y a risque de confusion). Il faut bien voir que, conceptuellement très simple et évidente (et pour cette raison sans doute, méprisée par le “mathématicien sérieux” comme du “*general nonsense*”), la donnée d'un 2-foncteur entre 2-catégories est une espèce de structure très délicate, d'un genre apparemment nouveau en maths ; et qu'on le veuille ou non, c'est bien cette espèce de structure, et elle seule, qui cerne finement les aspects essentiels, c'est-à-dire intrinsèques (indépendants de la catégorie de modèles particulière choisie, ‘à des fins calculatoires, pour décrire le dérivateur) du formalisme homologico-homotopique ; lequel est dans son essence dernière (si je ne me trompe beaucoup) un formalisme de variance de “coefficients”. Tout comme la dualité de Poincaré classique m'a mené vers le formalisme des six opérations (ou “variances”) valable tant dans le contexte des espaces topologiques, que celui des schémas ou des espaces analytiques (et dans bien d'autres encore, comme  $\text{Cat}$ , j'en suis à présent persuadé), formalisme qui à mon sens (et si je ne fais erreur) en capte l'essence ultime et en quelque sorte universelle, indépendante de toute hypothèse de non-singularité, *etc.*

Pour stimuler l'intuition habituée à des contextes d'homologie ou de cohomologie familiers, j'ai trouvé utiles des notations du type suivant, pour un dérivateur donné  $D$ . Si  $X$  est dans  $\text{Diag}$ , et si  $\xi$  est un  $D$ -coefficient sur  $X$ , i.e. un objet de  $D(X)$ , je dénote par

$$H_\bullet^D(\xi) \quad \text{et} \quad H_D^\bullet(\xi)$$

(“objets d'homologie et de cohomologie de  $X$ , à coefficients dans  $\xi$ ”) les objets  $p_!(\xi)$  et  $p_*(\xi)$  respectivement, objets dans la catégorie de base  $D(e) = A_D$  de  $D$ , où  $p : X \longrightarrow e$  est la flèche structurale canonique. Plus généralement, si  $f : X \longrightarrow Y$  est une flèche dans  $\text{Diag}$ , les images de  $\xi$  par les deux images directes peuvent être

notées

$$H_{\bullet}^D(f, \xi) \quad \text{ou} \quad H_{\bullet}^D(X/Y, \xi), \quad \text{et} \quad H_D^{\bullet}(f, \xi) \quad \text{ou} \quad H_D^{\bullet}(X/Y, \xi),$$

c'est l'*homologie* resp. la *cohomologie relative de  $X$  au-dessus de  $Y$* , à coefficients dans  $\xi$ . On peut laisser tomber l'indice ou l'exposant  $D$ , quand aucune confusion n'est à craindre. Par ailleurs, je me suis laissé guider par les intuitions et les réflexes acquis tout au long du développement des SGA, pour développer dans le contexte de  $\text{Cat}$  (pour commencer) la panoplie des propriétés "cohomologiques" essentielles d'un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  dans  $\text{Cat}$ , relativement à un dérivateur, c'est-à-dire à une "théorie de coefficients", donné. Mais c'est là quelque chose dont je te parlerai à propos de  $\text{Cat}$  une autre fois, si tu es intéressé.

### 3. Prédérivateur défini par une catégorie de modèles, et problème d'existence de $f_!$ , $f_*$ .

La plupart des dérivateurs que je connais sont définis à l'aide de catégories de modèles  $(M, W)$ . Une telle catégorie définit en tous cas un prédérivateur sur  $\text{Cat}$  tout entier, en posant

$$D_{(M, W)}(X) = M(X)(W(X))^{-1},$$

où je désigne maintenant par

$$M(X) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\text{Hom}}(X^{\circ}, M)$$

la catégorie des préfaisceaux sur  $X$  à valeurs dans  $M$  (donc celle des "diagrammes de type  $X^{\circ}$ ", et non de type  $X$ , dans  $M$ ), et  $W(X)$  l'ensemble des flèches dans cette catégorie, qui "sont dans  $W$  argument par argument". La loi de 2-foncteur contravariant de  $D(X)$  en  $X$  est claire. Quand  $W$  est l'ensemble des isomorphismes dans  $M$ , j'écris aussi  $D_M$  au lieu du double indice. C'est un cas qu'on peut considérer comme "trivial", mais qui pour autant ne manque pas d'intérêt. Ainsi,  $D_M$  est un dérivateur (satisfaisant à tous les axiomes), pourvu seulement que  $M$  soit stable par petites limites inductives et projectives (les unes assurant l'existence des  $f_!$ , les autres celle des  $f_*$ ). Dans le cas où  $M = \text{Ens}$ , on trouve  $D(X) = X^{\wedge}$ , c'est là un dérivateur important à mes yeux (si trivial soit-il), et les propriétés "cohomologiques" des flèches de  $\text{Cat}$ , relativement à ce dérivateur, ne sont nullement choses triviales.

Dans le cas où  $W$  est quelconque, je note aussi  $D_W$  au lieu du double indice, il est rare qu'une confusion soit à craindre. La question principale qui se pose alors, c'est bien sûr celle de l'existence des foncteurs  $f_!$  et  $f^*$ . Contrairement à toi, je n'ai aucun scrupule ici à supposer la catégorie  $M$  stable par tous les types de limites dont on a besoin, donc (si on veut travailler sur  $\text{Cat}$  tout entier) stable par petites limites inductives et projectives. Je ne serais pas étonné qu'il y ait un théorème qui assure que tout dérivateur sur  $\text{Cat}$  peut se décrire à l'aide d'une telle catégorie de modèles (à équivalence de dérivateurs près), ou du moins comme limite inductive filtrante de tels dérivateurs. J'entrevois dans ces grandes lignes, une "algèbre des dérivateurs" (consistant en un certain nombre d'opérations fondamentales au sein de la 2-catégorie de tous les dérivateurs, sur  $\text{Cat}$  disons comme domaine), laquelle serait le reflet d'opérations algébriques de nature similaire, qui s'effectuent au niveau des catégories de modèles. J'ai comme une impression, par une allusion dans ta lettre du mois de janvier, que tu as quelque idée ou intuition de ce genre de structures, et on pourra en reparler. Mais je souligne tout de suite que pour moi, le véritable objet d'opérations au niveau des catégories de modèles, c'est d'obtenir des opérations sur les dérivateurs (ou les prédérivateurs, pour commencer) associés.

À ce sujet, une remarque au sujet de la fonctorialité du prédérivateur associé à une catégorie de modèles  $(M, W)$ . Il est clair qu'on obtient un 2-foncteur

$$(*) \quad \longrightarrow$$

allant de la 2-catégorie des catégories de modèles (ce n'est d'ailleurs pas une  $\mathcal{U}$ -catégorie, si on ne fait des restrictions sur les catégories envisagées et sur les foncteurs admis, en plus d'être compatibles aux localiseurs). Mais si on a deux catégories de modèles, il y a lieu d'introduire dans la catégorie

$$\underline{\text{Hom}}((M, W), (M', W')) \quad \text{ou} \quad \underline{\text{Hom}}(M, M')$$

(cette dernière notation, si les localiseurs  $W, W'$  sont sous-entendus dans les notations  $M, M'$ ) un localiseur bien naturel  $W_{M, M'}$ , formé des morphismes  $u : F \longrightarrow G$  entre morphismes de catégories de modèles  $F, G$ , tels que  $u(x) : F(x) \longrightarrow G(x)$  soit dans  $W'$ , pour tout  $x$  dans  $M$ . Appelons-les les "*quasi-isomorphismes*" (*relatifs aux localiseurs*  $W, W'$ ). Il est clair que les quasi-isomorphismes sont transformés



en isomorphismes par le 2-foncteur précédent, donc en passant à la catégorie des fractions, on trouve un foncteur (dédit de  $(*)$ )

$$(**) \quad H(M, M') \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(D_M, D_{M'})$$

où dans la notation il est sous-entendu que  $M$  et  $M'$  sont munis de leurs localiseurs  $W$ ,  $W'$ . Ainsi, les catégories de modèles peuvent être regardées à présent comme les 0-objets d'une 2-catégorie, dont les catégories de flèches sont les catégories localisées  $H(M, M')$  précédentes, et on trouve un 2-foncteur canonique de cette 2-catégorie, que j'ai envie d'appeler catégorie dérivée (?) de la catégorie des catégories de modèles, et de noter, dans celle des prédérivateurs, au moyen des foncteurs  $(**)$  :

$$(***) \quad \longrightarrow .$$

Le point auquel je veux en venir est le suivant : si  $M$  et  $M'$  sont deux catégories de modèles qui sont équivalentes en tant que 0-objets de cette 2-catégorie, alors les prédérivateurs associés sont équivalents, donc à toutes fins pratiques, peuvent être identifiés (du moins, quand l'équivalence initiale est donnée). Ceci (et bien sûr d'innombrables exemples) illustre à quel point une catégorie de modèles est un objet "encombrant" (si j'ose dire), encombré d'aspects inessentiels, en comparaison avec le dérivateur associé, qui à mes yeux représente sa quintessence du point de vue "homotopique" ou "cohomologique". Un peu comme la donnée d'une base pour un espace vectoriel, ou d'un système de générateurs et de relations pour un groupe, ou un système d'équations pour une variété<sup>25</sup>. Il n'y a aucun inconvénient à travailler avec ces "superstructures", et bien souvent on ne peut même s'en passer. Il est cependant important, pour une compréhension en profondeur, de ne pas pour autant laisser brouiller et perdre de vue les objets géométriques essentiels (espace vectoriel, groupe, variété, dérivateur) et leur caractère intrinsèque.

---

<sup>25</sup>Une première comparaison qui m'était venue (elle s'est perdue en route) me paraît plus frappante : la relation entre catégorie de modèles et dérivateur associé, s'apparente pour moi à celle entre un complexe dans une catégorie abélienne, et l'objet correspondant dans la catégorie dérivée. Et l'effort conceptuel qu'il m'avait fallu faire pour parvenir à la notion de catégorie dérivée, s'apparente un peu à celui (plus modeste à mon sens) que les gens devront fournir un jour pour accéder à la notion de dérivateur et au "yoga des dérivateurs" – lequel ne s'acquiert qu'en travaillant avec !

J'ignore s'il est raisonnable de s'attendre, pour le 2-foncteur précédent  $()$ , à des propriétés de fidélité, ou de surjectivité essentielle, en limitant au besoin les catégories de modèles envisagées, de façon par exemple à assurer qu'elles donnent naissance à des dérivateurs, et non seulement des prédérivateurs. Cela fait partie en tous cas des questions qu'on devra bien examiner un jour (dans ce monde-ci, s'il en est temps, ou sinon dans l'autre...). J'avoue que jusqu'à présent, mon intuition des dérivateurs s'est beaucoup appuyée sur le formalisme des catégories de modèles.

Mais il me faut revenir sur le cas où on se donne une catégorie de modèles fixe  $(M, W)$ , et sur la grande perplexité de l'existence des foncteurs  $f_!$  et  $f_*$ . Techniquement parlant, c'est là, visiblement, une des questions les plus cruciales qui se posent pour le développement de l'algèbre topologique, telle que je l'envisage. Or pour cette question fondamentale, je n'ai que des éléments de réponse bien fragmentaires, et manifestement insatisfaisants (et sans doute aussi insuffisants à la longue). Prenant le cas où  $\text{Diag}$  est égal à  $\text{Cat}$  : j'avoue (à ma honte !) que je n'ai pas même construit d'exemple d'une catégorie de modèles, stable par petites limites (inductives et projectives), et telle que les foncteurs  $f_!$  et  $f_*$  n'existent pas pour toute flèche  $f$  dans  $\text{Cat}$ , pour le prédérivateur associé. Je ne m'attends nullement d'ailleurs à ce qu'ils existent toujours, même si on fait des hypothèses du type :  $W$  stable par limites inductives filtrantes, et la catégorie  $M$  accessible et  $W$  une partie accessible de  $\text{Fl}(M)$  (hypothèses qui me paraissent relativement anodines). D'autre part, je n'ai pu prouver l'existence de ces foncteurs que dans des cas extrêmement particuliers, que je renonce à expliciter dans cette lettre (devenue prohibitivement longue). Je ne connais pas un cas où je sache l'établir, sans supposer tout au moins que la catégorie de modèles est associée à un triple de Quillen clos (et plus encore) ! La situation est quand même meilleure si on est moins exigeant et prend comme domaine  $\text{Diag}$  (disons) la catégorie des ensembles ordonnés finis. À ce moment-là, il suffit que  $W$  soit associé à une catégorie à cofibrations (pour avoir  $f_!$ ) ou à fibrations (pour avoir  $f_*$ ), sans qu'il soit nécessaire d'ailleurs (pour avoir bel et bien un dérivateur) que ces deux structures duales soient reliées entre elles autrement que par le localiseur commun  $W$ .

C'est le moment de dire que le travail de Anderson (dont tu m'as envoyé une photocopie), où il prétend donner une esquisse d'un théorème très général en ce

sens (qui aurait en effet comblé mes vœux !), est totalement canulé – même déjà dans le cas d’un ensemble ordonné fini  $I$ , et du morphisme structural  $I \longrightarrow e$ , i.e. pour l’existence des ordinaires sur  $I$ . Sa soi-disant idée de démonstration déconne en deux endroits qui me paraissent essentiels, et je doute fort qu’elle soit récupérable, bien que je n’aie pas de contre-exemple au théorème qu’il énonce, et dont il ne daigne pas même donner une démonstration. Ayant regardé ce travail (si on peut l’appeler ainsi) avec attention, je suis heureux qu’il ne soit pas de toi – il me fait grincer des dents du début à la fin, et plus que ça. Je ne le regrette pas, car si je n’ai guère appris de maths en le lisant, j’y ai appris autre chose de moins facile et de moins réjouissant que les maths, et plus important.

Je suis d’ailleurs ébahi que dix ans se soient passés depuis cet article, sans que personne apparemment ne s’aperçoive qu’il ne tient pas debout. Visiblement, ce théorème, c’était comme une pièce de musée, une prouesse pour rien – personne n’en avait rien à foutre. Même chez des plus “cotés” que lui, les théorèmes souvent, ce n’est plus une porte ouverte sur quelque chose, qu’on n’avait pas vue avant et qu’on voit, ni même un outil pour forcer les portes qu’on n’arrive à ouvrir en douceur – mais un trophée. Peu importe alors qu’il soit vrai ou faux – ça ne fait strictement plus aucune différence...

Sauf si tu as besoin de précisions, je crois inutile que j’entre dans des détails – tu es bien capable de trouver tout seul où ça foire (sur l’air du “il est évident que”...). Et de plus, il est temps que je m’arrête, bien que je ne sois pas parvenu encore à ce qui, techniquement, était prévu comme substance principale de ma lettre : le “théorème de factorisation”, et son application à des théorèmes de stabilité pour des structures de Quillen. Ce sera donc sans doute pour ma prochaine lettre, si tu es intéressé à continuer cette correspondance. Auquel cas je serai très heureux de t’avoir comme interlocuteur de mes cogitations !

En attendant, reçois mes amitiés

## Letter to R. Thomason, 2.4.1991<sup>26</sup>

Les Aumettes le 2.4.1991

Dear Thomason,

Thank you for your letter, and forgive me for having taken so much time to reply. One reason for this is that, since for the past maybe two months I have been busy thinking about something that started as a small diversion, which I thought I would be able to sort out in a few days (a familiar sentence...), and I delayed this letter week after week. This thought is not really about homotopical algebra per se, but more about the foundations of category theory, and I have done a lot more than what I need right now [9, Chapter XVIII]. But up until now, I have been convinced that a homotopical algebra (or, in a wider vision, a “topological algebra”) such as I envisage cannot be developed with all the breadth that it has without the aforementioned categorical foundations. It concerns a theory of (large) categories that I have been calling “accessible,” and accessible subsets of these, completely rewriting the provisional theory that I present in SGA 4, §I.9 [2]. I have woven a tapestry of nearly two hundred pages on this seemingly trivial theme, and it would please me to present to you the outlines, if that would be of interest to you. There are also some intriguing problems that remain, that I feel are difficult, maybe even deep, and that could maybe (who knows) inspire you, or somebody else interested in the foundations of the tool that is category theory. But all this seems to me part of the domain of the tool, and I would prefer, in this letter, to speak about more central things. The main ideas were, for the most part, born over 25 years ago, and I see the enduring seedlings of them in my solitary reflections from the years '56 and '57, when I first had the need of categories of “coefficients” that were less prohibitively large than the interminable complexes of chains or of cochains, and the idea (after long periods of perplexity) of constructing such categories via passing to a category of fractions (a notion that had to be invented by considering concrete elements) by “inverting” the quasi-isomorphisms. The principal conceptual work that remained to be done — and that now seems to me as equally fascinating (as

---

<sup>26</sup>Translation by T. Hosgood

much as for its beauty as for its evident impact on the foundations of a cohomological algebra in the spirit of a theory of cohomological coefficients) as in the times of my first loves with cohomology — was to clarify the intrinsic structure of these categories. The fact that this work, that I had confided to Verdier around 1960, and that was meant to be the subject of his thesis [13], had still not yet been done, even in the case of ordinary and abelian derived categories, which nevertheless have ended up (by necessity) being used daily in both geometry and analysis, says a lot about the state of mentality in the mathematical community with regards to foundations.

This mood of contempt for essential foundational work (and, more generally, for anything that does not follow the fashion of the moment), I mentioned in my last letter, and I also come back to it many times in the pages of *Récoltes et Semailles* [8], and it is one thing (amongst many others) that quite is simply beyond me. Your response to my letter shows that you absolutely did not understand. It wasn't a letter to "complain" about this, or to say that it bothered me. But it was an impossible attempt to share a pain. I knew deep down that it was hopeless; for everybody shuns pain, that is, shuns knowledge (for there is no knowledge from the soul that is free from pain). A very rare attempt, possibly the only one in my life (at least, I can't remember another), and probably the last...

There are two directions of ideas, intimately linked, that I want to talk to you about, and that I have been especially keen to develop since the end of October (when I resumed mathematical reflection [9] for an indefinite period). They are already sketched out here and there (along with a number of other key ideas of topological algebra) in *Pursuing Stacks* [6, Section 69]. In this 1983 reflection, which has helped me a lot these days, I end up spreading myself rather thin by following lateral paths, rather than returning to the essential ideas of my initial point. As another useful source for anybody interested in these basic questions, I point to two or three letters to Larry Breen, which I thought that I would include in the published text of *Pursuing Stacks* [7]. On the one hand, I would like to talk to you about categories of models and the notion of "derivators" (replacing the defunct "derived categories" of Verdier, which are decidedly inadequate for our needs). On the other hand, I have a lot to say about *Cat* as a category of models

for all kinds of “homotopy types.” But this will probably be for another time (assuming that your interest survives reading this letter). So today it will be the category of models and the notion of a derivator.

**1. The only essential structure of a category of models is the data of the “localiser”  $W \subset \mathrm{Fl}(M)$ .**

**2. Prederivators, derivators**

## Lettre à A Y, 24.6.1991

Les Aumettes, le 24.6.1991

Cher Monsieur,

Excusez-moi d'avoir mis si longtemps à réagir à votre longue et sympathique lettre (du 25 mai), ayant été très accaparé par des tâches et préoccupations extra-scientifiques. Cela n'a pas empêché que j'ai été sensible au souffle d'un enthousiasme et à la faculté d'émerveillement qui transparaissait derrière les explications  $\pm$  techniques. Je dois vous avouer que vu ma très grande ignorance en physique, ces explications m'ont passé totalement par dessus la tête. Aussi j'ai bien peur que ma réponse vous laissera sur votre faim. Visiblement, il faut des yeux totalement neufs, et un flair consommé pour l'"invention" (en fait, la découverte) de structures mathématiques (au service d'intuitions à la fois physiques et philosophiques) pour dégager les notions de base et forger les outils conceptuels d'une physique nouvelle. Avez-vous ces grands dons, et la foi en votre "voix intérieure", pour démarrer à neuf, à contre-courant de toutes les idées reçues, pour une œuvre de rénovation plus radicale encore, peut-être, que celles qui furent accomplies par Einstein et par Schrödinger?

Avez-vous le courage pour faire un tel pari – voilà la question! Sans autre guide que votre bon sens d'enfant, et votre flair, pour un long voyage sans perspective de compagnons de route... Pour que je puisse être d'un réel secours pour un tel voyage dans l'inconnu, il y faudrait d'une part un investissement que je ne suis plus disposé à fournir – ne serait-ce que pour me mettre au courant dans les grandes lignes au moins des bases conceptuelles de la physique théorique actuelle, de ses cohérences et de ses incohérences. Malheureusement, je ne connais non plus aucun mathématicien que me paraîtrait apte au rôle de coéquipier dans un tandem physico-mathématique pour le genre de travail qu'il y aurait à faire (et auquel j'ai rêvé plus d'une fois!)

Il est vrai qu'au cours des dix dernières années, j'ai réfléchi ici et là à diverses extensions de la notion d'espace, en gardant à l'esprit la remarque pénétrante de Riemann. J'en parle dans quelques lettres à des amis physiciens ou "relativistes". Il ne doit pas être très difficile p. ex. de développer une sorte de calcul différentiel

sur des “variétés” qui seraient des ensembles finis (mais à cardinal “très grand”), ou plus généralement discrets, visualisés comme formant une sorte de “réseau” très serré de points dans une variété  $C^\infty$  (p. ex. une variété riemannienne) – une sorte de géométrie différentielle “floue”, où toutes les notions numériques sont définies seulement “à  $\varepsilon$  près”, pour un ordre d’approximation  $\varepsilon$  donné. Comme prédit par Riemann, une telle géométrie différentielle floue, par la force des choses, serait nettement plus délicate et compliquée que la géométrie différentielle ordinaire. Mais peut-être pas *tellement* plus compliquée ! Dans cette approche, le point faible à présent, c’est qu’il ne semble pas que la physique nous fournisse quelque idée de “quanta” d’espace-temps, qui seraient les “points” d’une telle variété discrète. (Il est vrai que lorsque fut formulée et progressivement admise au siècle dernier, “l’hypothèse atomiste”, on n’en savait guère plus sur ces fameux atomes que qu’ils pourraient peut-être exister...) Je suspecte que les nouvelles structures à dégager seront beaucoup plus subtiles qu’un simple paraphrase de modèles continus connus en termes discrets<sup>27</sup>. *Et surtout, qu’avant toute tentative de dégager des nouveaux modèles, présumés meilleurs que les anciens, il s’impose de poursuivre une réflexion philosophico-mathématique très servie sur la notion même de “modèle mathématique” de quelque aspect de la réalité – sur son rôle, son utilité, et ses limites.*

Je crains que je ne puisse guère vous en dire plus que ces commentaires généraux. S’ils pouvaient pourtant vous être utiles de quelque façon – ne serait-ce que pour vous encourager dans votre aventure solitaire – j’en serais très heureux. Avec mes meilleurs souhaits

Alexandre Grothendieck

---

<sup>27</sup>Il n’est pas exclu pourtant que ce qui pouvait sembler initialement un simple exercice de “paraphrase” de notions bien connues dans un contexte conceptuel nouveau, amène, par la logique intérieure de la recherche, à des concepts totalement nouveaux et inattendus. (C’est là une chose qui n’est pas rare dans le travail de découverte des structures mathématiques.) Il faut des années de tâtonnement, sans doute, avant que des intuitions éparses finissent par s’assembler en une vision d’ensemble



## GROTHENDIECK-MUMFORD CORRESPONDANCE

D. Mumford. Selected Papers, Volume II<sup>28</sup>

---

---

<sup>28</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/GMCorr.pdf>

## GROTHENDIECK-SERRE CORRESPONDANCE

Pierre Colmez - Jean-Pierre Serre (Eds.), Société Mathématique de  
France, 2001.<sup>1</sup>

---

---

<sup>1</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/GSCorr.pdf>

## GROTHENDIECK-BROWN CORRESPONDANCE

Éditée par M. Kunzer (avec la collaboration de R. Brown et G.  
Maltsiniotis)<sup>1</sup>

---

---

<sup>1</sup><https://agrothendieck.github.io/divers/GBCorr.pdf>