Notes Saavedra

99

Quelques exemples de catégories tensorielles.

1) Soit M un groupe. Soit $\underline{C}_M$ la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps k, munis d'une graduation de type M. C'est une catégorie tensorielle sur k, munie d'un foncteur fibre sur k, le foncteur "oubli de la graduation". Le groupe algébrique associé est le groupe de type multiplicatif $D_k(M)$ (SGA 3 I 4.7.3). Par exemple si $M=\underline{Z}^r$, on trouve $G = \underline{G}_m{}^r$.

Application: soit $\underline{C}$ une catégorie tensorielle sur k munie d'un foncteur fibre F sur k, donc associée à un schéma en groupes affine G sur k. On cherche toutes les façons de mettre, pour chaque $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$, une graduation de type M sur F(V), de façon fonctorielle en M, et compatible (dans un sens évident) avec les produits tensoriels. Elles correspondent aux $\otimes$-foncteurs de $\underline{C}$ dans $\underline{C}_M$ compatibles avec les foncteurs fibres, donc aux homomorphismes de $D_k(M)$ dans G. Par exemple, si $M=\underline{Z}^r$, il faut prendre les homomorphismes de $\underline{G}_m{}^r$ dans G.

Dans la situation précédente, on peut se demander quand une $\otimes$-graduation de type M du foncteur F correspond à une graduation de type M du foncteur identique de $\underline{C}$, i.e. pour tout V, la graduation de F(V) provient d'une graduation de V. On trouve qu'il faut et il suffit pour cela que l'homomorphisme correspondant $D_k(M) \longrightarrow G$ soit central. Par exemple, si $\underline{C}$ est la catégorie des motifs sur k, et si on dispose d'un foncteur fibre F de $\underline{C}$ sur k, alors on trouve un homomorphisme central canonique $i: \underline{G}_m \longrightarrow G$. D'ailleurs, la donnée du motif de Tate (qui est de rang 1, et de "poids" 2 pour la graduation naturelle) correspond à la donnée d'un homomorphisme $j:G \longrightarrow \underline{G}_m = Gl(1)$. Le fait que T soit de poids 2 s'exprime par la relation

$$ji(\lambda) = \lambda^2 .$$

101

Lorsque k est de caractéristique nulle, on a toujours un foncteur fibre naturel: le <u>foncteur de Hodge,</u> qui à la cohomologie motivique d'une variété (projective lisse) X associe le vectoriel bigradué $\coprod H^q(X, \Omega^p_{X/k})$ Donc pour le groupe de Galois motivique correspondant G, on trouve un homomorphisme naturel

$$\underline{G}_m{}^2 \longrightarrow G ,$$

i.e. deux homomorphismes commutant l'un à l'autre

$$i_1, i_2 : \underline{G}_m \longrightarrow G .$$

Le fait que la graddation totale dans la cohomologie de Hodge corresponde au poids des motifs s'exprime par la relation

$$i(\lambda) = i_1(\lambda)\, i_2(\lambda) \quad ;$$

on fera attention que i_1 et i_2 ne sont pas centraux (car la bigraduation en cohomologie de Hodge ne correspond pas à une bigraduation d'un motif !)

2) Prenant toujours pour $\underline{C}$ la catégorie des motifs sur k, avec k de car. nulle, on a un autre foncteur fibre canonique, le <u>foncteur de De Rham</u> qui associe à la cohomologie motivique d'une variété X le vectoriel $H^*(X, \Omega^*_{X/k})$ (espace d'hypercohomologie). Ce vectoriel n'est plus bigradué, mais seulement gradué et filtré, la filtration étant celle associée à la suite spectrale d'hypercohomologie, commençant avec la cohomologie de Hodge. On sait d'ailleurs que cette suite spectrale dégénère (théorie de Hodge), donc $Gr(H_{DR}(V)) \simeq H_{Hdg}(V)$ (isomorphisme fonctoriel en le motif V, où on gradue le 2ème membre par p). On peut se proposer d'analyser à quelle structure supplémentaire, sur le groupe de Galois motivique associé au foncteur fibre H_{DR}, correspond la filtration canonique de ce foncteur.

De façon générale, étant donné une catégorie tensorielle C sur k munie d'un foncteur fibre F, on peut se proposer de déterminer les filtra-

102

tions sur F (décroissantes, discrètes, indexées par $\underline{Z}$) compatibles avec lesproduits tensoriels (en utilisant la notion évidente de produit tensoriel de deux espaces vectoriels filtrés). On notera qu'une telle donnée ne pourra plus s'exprimer par un homomorphisme d'un certain groupe algébrique dans G (le groupe de Galois de $\underline{C}$ en F), car la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur k, munis d'une filtration décroissante discrète indexée par $\underline{Z}$, n'est pas une catégorie abélienne (les bimorphismes ne sont pas des isomorphismes!). Mais à une telle donnée est associé

F' un deuxième foncteur fibre F'(V) = Gr F(V), à valeurs cette fois-ci dans les vectoriels gradués (NB F joue le rôle de la cohomologie de ~~Hodge~~ De Rham, F' celui de la cohomologie de Hodge, muni de la graduation par le ~~totale~~). La donnée de F' correspond alors à un torseur (à droite) P sous G, le groupe de Galois correspondant G' étant déduit de G en tordant par P. La graduation de F' correspond à un homomorphisme $i_1 : G_m \longrightarrow G'$. Considérons alors sur F' la filtration décroissante associée à sa graduation, et soit $H'_{i_1} = \underline{\mathrm{Aut}}\ \underline{\mathrm{filt}}^!(F') \subset \underline{\mathrm{Aut}}\,(F') = G'$ le sous-schéma en groupes de G qui correspond aux Ω-automorphismes de F' (ou plutôt des $F'_{k'}$, k' une k-algèbre quelconque) qui respectent sa filtration (et induisant l'identité sur le gradué associé); il est canoniquement déterminé par i_1. On peut aussi regarder le sous-schéma

$$Q = \underline{\mathrm{Isom}}\ \underline{\mathrm{filt}}^!(F,F') \subset P = \underline{\mathrm{Isom}}\,(F,F')$$

du schéma P des Ω-isomorphismes de F avec F', ~~formés~~ qui correspond aux automorphismes respectant les filtrations de F et F' (et induisant l'identité sur les gradués associés). C'est à priori un pseudo-torseur à ~~droite~~ gauche sous H', i.e. il est vide ou un torseur à droite sous H'. Il faudrait prouver que c'est bien un torseur (i.e. que sur une extension convenable k' de k, on peut trouver un isomorphisme de $F_{k'}$ avec $F'_{k'}$ respectant les filtrations). Donc on trouve une restriction du groupe d'opérateurs (à ~~droite~~ gauche) G' de P au sous-groupe H',

103

par un H'-torseur à ~~gauche~~ Q.

Moyennant la vérification laissée en suspens à l'instant, on trouve alors que la donnée d'un "foncteur fibre <u>filtré</u>" F de <u>C</u> sur k revient à la donnée

(i) d'un foncteur fibre F' (d'où un groupe de Galois $G' = \underline{\mathrm{Aut}}(F')$);

(ii) D'une graduation de type <u>Z</u> de F', i.e. un homomorphisme

$$i_1 : \underline{G}_m \longrightarrow G' ,$$

ce qui permet de définir comme ci-dessus un sous-groupe H'_{i_1} de G' ;

(iii) D'un torseur à ~~gauche~~ Q' sous H'_{i_1} .

A ces données, on associe simplement le foncteur fibre tordu

$$F = F' \overset{H'_{i_1}}{\wedge} Q' ,$$

F étant filtré par la filtration déduite de celle de F' (associée à la graduation de F') en tordant par Q'.

~~NB Dans le cas où F est le foncteur de De Rham sur la catégorie des motifs sur k, on prouve (moyennant le yoga général des motifs - il est possible qu'on utilise pour ceci les conjectures de Hodge ...) que le groupe H' est une limite projective de groupes algébriques unipotents Si on se borne à une catégorie de motifs à engendrement fini, et si G est connexe, on trouve aussi que H' est connexe, donc étant résoluble, on~~

On constate aisément que le groupe H' est nécessairement une limite projective de groupes algébriques <u>unipotents</u> . On en conclut aussitôt que si <u>C</u> est à engendrement fini (ou, plus généralement, (à engendrement) dénombrable, de façon que G' donc aussi H' soit limite projective d'une <u>suite</u> de groupes algébriques) alors tout torseur sous H' est trivial; cela signifie ici que tout foncteur fibre filtré est en fait associé à un foncteur fibre gradué (en prenant la filtration correspondant à la graduation)

104

i.e. que la filtration dudit foncteur admet un splittage compatible avec les produits tensoriels. Mais le choix d'un tel splittage équivaut à celui d'un point ~~xxxx~~ sur un certain torseur à droite Q=Q' sous le schéma en groupe (pro-unipotent) H des automorphismes de F respectant la filtration et induisant l'identité sur le gradué associé; il n'est pas du tout canonique !

3) Appelons pré-structure de Hodge sur un espace vectoriel V de dimension finie sur $\underline{Q}$, la donnée d'une bigraduation sur $V\otimes_{\underline{Q}}\underline{C} = V_{\underline{C}}$, $V_{\underline{C}} = \coprod_{p,q} V^{p,q}$, telle que a) la graduation totale correspondante soit "définie sur $\underline{Q}$" i.e. $\coprod_{p+q=n} V^{p,q}$ provienne d'un sous espace $V_{\underline{Q}}^{n}$ de V , et b) on a $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$, où $x \mapsto \overline{x}$ désigne la conjuguaison complexe. (NB Généralisation à des corps plus généraux laissée à Saavedra). Les vectoriels V munis d'une pré-structure de Hodge forment une catégorie tensorielle sur $\underline{Q}$ dans un sens évident, muni d'un foncteur fibre canonique, le foncteur "oubli" F. On trouve donc un groupe de Galois G, et ~~xxxx~~ plus généralement toute ⊗-sous-catégorie $\underline{C}$ de la catégorie précédente nous définit un groupe de Galois G. La bigraduation sur le foncteur ~~xxxxx~~ $F_{\underline{C}}(V) = V\otimes_{\underline{Q}}\underline{C}$ correspond, en vertu de 1) (où il convient cependant de se permettre une extension du corps de base sur le foncteur fibre envisagé ....) d'un homomorphisme $\underline{G}_{m}{}^{2}_{\underline{C}} \to G_{\underline{C}}$, i.e. de deux homomorphismes qui commutent

$$i_1, i_2 : \underline{G}_{m\,\underline{C}} \longrightarrow G_{\underline{C}} \quad .$$

Les deux conditions a) et b) imposées aux structures envisagées s'interprètent respectivement par les faits que l'homomorphisme

$$i_{\underline{C}} = i_1 i_2 = \lambda \mapsto i_1(\lambda) i_2(\lambda)$$

est "défini sur $\underline{Q}$ " i.e. provient d'un homomorphisme

$$i : \underline{G}_m \longrightarrow G ,$$

(nécessairement central, car les composantes homogènes $V_{\underline{Q}}^{n}$ d'une pré-structure de Hodge sont ~~xxxxxxxxxxxx~~ évidemment munis d'une pré-structure de Hodge de façon que V soit la somme directe de $V_{\underline{Q}}^{n}$ en tant que pré-structure

105

de Hodge), et par la condition que l'on a

$$i_2 = \overline{i_1} \quad \text{i.e.} \quad i_2(\lambda) = \overline{i_1(\overline{\lambda})} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \underline{C}.$$

Si à toute variété projective lisse X sur $\underline{C}$ on associe sa cohomologie rationelle $H^*(X,\underline{Q}) = V$, de sorte que $V_{\underline{C}} = H^*(X,\underline{C})$ est isomorphe canoniquement (par la théorie de Hodge) à $H_{Hdg}(X) = \coprod H^q(X, \Omega^p_{X/\underline{C}})$, on voit qu'on trouve ainsi une pré-structure de Hodge sur $H^*(X,\underline{Q})$, d'où un $\otimes$-foncteur naturel de la catégorie des motifs sur $\underline{C}$ dans la catégorie des pré-structures de Hodge. La conjecture de Hodge standart équivaut à dire que ce foncteur est pleinement fidèle, i.e. que l'homomorphisme naturel qui va du groupe de Galois de Hodge précédent G dans le groupe de Galois motivique (associé au $\otimes$-foncteur de Betti H_{Bet}) est un épimorphisme. Ou encore que pour toute catégorie $\underline{C}_o$ de motifs de type fini sur $\underline{C}$, désignant par $\underline{C}$ la $\otimes$-catégorie de pré-structures de Hodge engendrée par ~~xxlxxxxx~~ les $H_{Bet}(M)$ pour $M \in Ob(\underline{C}_o)$, l'homomorphisme de groupes algébriques $G \to G_o$ associé au foncteur de Betti-Hodge $\underline{C}_o \longrightarrow \underline{C}$ est un épimorphisme (i.e. surjectif sur les points à valeurs complexes, disons).

On appelle ~~xxxxxxxx~~ polarisation d'une pré-structure de Hodge de poids n la donnée d'un accouplement de préstructures de Hodge

$$\phi : V \times V \longrightarrow \underline{Q}(n) ,$$

où $\underline{Q}(n)$ est l'espace vectoriel trivial $\underline{Q}$ sur $\underline{Q}$, avec $\underline{Q}_{\underline{C}} = \underline{C}$ muni du ~~xxx~~ bidegré (n,n)), ayant la propriété que la forme hermitienne correspondante sur $V_{\underline{C}}$,

$$\psi(x,y) = \phi(x,\overline{y}) \; (i)^{p-q} \quad \text{pour } x \text{ de bidegré } (p,q)$$

soit définie positive. Une structure de Hodge est une préstructure de Hodge admettant une polarisation. Les structures de Hodge forment une sous-$\otimes$-catégorie de la catégorie des pré-structures de Hodge. La théorie de Hodge nous assure que le foncteur de Betti-Hodge sur la catégorie des

106

motifs sur $\underline{C}$ prend ses valeurs en fait dans la catégorie des structures de Hodge (une polarisation d'une varéiét projective lisse V définit canoniquement une polarisation de la structure de Hodge associée sur la cohomologie de Betti-Hodge). NB On n'a aucune idée sur ce que pourrait être l'image essentielle du foncteur précédent, par exemple s'il y a lieu d'espèrer qu'on trouve toutes les structures de Hodge (donc une équivalence de catégories : motifs sur $\underline{C} \longrightarrow$ structures de Hodge); cela semble peu probable, mais on n'a aucune indication sérieuse dans un sens ou l'autre.

La catégorie des ~~pré~~ structures de Hodge est semi-simple. ~~Exxfaitx~~ Si G est le groupe de Galois d'une Ω-catégorie $\underline{C}$ de pré-structures de Hodge, à engendrement fini si on veut (pour simplifier), alors on peut expliciter en termes du groupe de Galois associé et de ~~sax~~ structures i_1 ~~xxx~~ ci-dessus la condition ~~qxx~~ pour que les objets de $\underline{C}$ soient en fait des structures de Hodge. Ceci est un exercice plaisant et délectable, qui devrait figurer dans un travail systématique sur les Ω-catégories, dans le chapitre des exemples. On trouve des restrictions très sérieuses sur le groupe G ~~(plus~~ muni de i_1 (en plus du fait que G soit réductif).

4) Je laisse le soin à Saavedra de déterminer quelle structure supplémentaire on obtient sur la structure de Hodge "complexe" associée à une variété projective lisse complexe X, lorsqu'on se donne cette dernière comme déduite d'une variété projective réelle $X_{\underline{R}}=X_o$. On trouve une notion de "structure de Hodge réelle", donnant naissance à une Ω-catégorie correspondante. Dans le groupe de Galois motivique de celui-ci, en plus de la structure i_1, on trouve un élément f_∞ de $G(\underline{Q})$, ~~dexdegré~~ d'ordre 2 (jouant le rôle d'un "élément de Frobenius à l'infini"), qui correspond à l'automorphisme du foncteur de Betti $X_o \longmapsto H^*(X_o(\underline{C}),\underline{Q})$ déduit de l'homéomorphisme $x \mapsto \bar{x}$ de $X_o(\underline{C})$. Il faut expliciter les relations entre cet élément et i_1, i_2 !

107

5): Soit $\underline{C}$ une $\otimes$-catégorie tensorielle, de caractéristique nulle, munie d'un foncteur fibre sur k. A prouver que, pour que le groupe de Galois G correspondant soit profini, il faut et il suffit que pour tout objet M de $\underline{C}$, la $\otimes$-catégorie engendrée soit semi-simple et n'ait qu'un nombre fini d'objects simples non isomorphes. Si $\underline{C}$ est quelconque, la sous-catégorie pleine $\underline{C}_o$ de $\underline{C}$ qui correspond au pro-groupe quotient de G formé des (G_i/G_i°) (où $G = \varprojlim G_i$, et G_i° est la composante neutre de G_i) est, formée exactement des objets M ayant la propriété précédente.

Il serait intéressant de trouver des énoncés correspondants en caractéristique quelconque.

6) La notion de polarisation d'un motif sur un corps (elle-même déduite de celle de polarisation d'une variété algébrique) donne une structure supplémentaire remarquable dans la catégorie des motifs: si M est un motif de poids n, on sait parmi les formes symétriques (n pair) resp. alternées (n impair) $M \otimes M \rightarrow T(n)$ (où T est le motif de Tate) distinguer celles qui sont "définies positives" ou encore des "polarisations". Cette notion se reflête par exemple par des structures supplémentaires sur les groupes de Galois motiviques. Il y a lieu de faire une étude axiomatique abstraite d'une telle notion de polarisation sur une $\otimes$-catégorie générale au dessus d'un sous-corps du corps des réels. On pourra en rediscuter à l'occasion.

108

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France