# COLLECTED WORKS
# Vol I. Mathematical Reflections

**by**

**Alexandre GROTHENDIECK**

*Edited by*

M. CARMONA

# PREFACE

# CONTENTS

# LETTER TO J. LIPMAN
3.3.1970

- [scan]

Massy March 3, 1970

Dear Dr. Lipman,

Thanks a lot for your interesting letter. Your method seems the most natural indeed, moreover it seems rather natural to restrict to perfect rings on arguments.

You should not take too seriously my suggestion to prove actual representability, and I would not be surprised if this were actually false. Of course, it would be nice to know the answer, still. I will appreciate hearing about your progress.

I have put you on my permanent mailing list, and given instructions for mailing whatever is still available. Unfortunately a lot has become unavailable, but I hope most of it will come out in Springer's lecture notes during 1970.

Sincerely yours

A. Grothendieck

# GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX DE DIEUDONNÉ

- In 1970 Grothendieck has left the IHÉS, and he started his "mission" in social and ecological activism. In June he goes to Romania to give a public lecture about social responsibility. After his return from Romania, Grothendieck spent only a short time in Paris before traveling to a summer school in Montreal. The main event there was the spontaneous founding of the group "Survivre". At the end of July Grothendieck was back in Paris, and in his own way, he prepared himself for the International Congress of Mathematicians in Nice.
- The following notes, primarily due to the efforts of Monique Hakim and Jean-Pierre Delale, include certain material treated by Grothendieck in the Montreal summer course.
- This text was published in: *Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux de Dieudonné*. Sém. de Math. Sup. 45 (Été 1970). Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Que., 1974
- [scan]
- [translation] by Eric Peterson

# LETTER TO I. BARSOTTI
## 11.5.1970

- Letter about Barsotti-Tate groups.
- This text was published in: *Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux de Dieudonné*. Sém. de Math. Sup. 45 (Été 1970). Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Que., 1974
- [scan]
- [transcription] by Eric Peterson

Bures May 11.1970

Dear Barsotti,

I would like to tell you about a result on specialization of Barsotti-Tate groups (the so-called $p$-divisible groups on Tate's terminology) in characteristic $p$, which perhaps you know for a long time, and a corresponding conjecture or rather question, whose answer may equally be known to you.

First some terminology. Let $k$ a perfect field of characteristic $p > 0$, $W$ the ring of Witt vectors over $k$, $K$ its field of fractions. An *$F$-cristal* over $k$ will mean here a free module of finite type $M$ over $W$, together with a $\sigma$-linear endomorphism $F_M : M \longrightarrow M$ (where $\sigma : W \longrightarrow W$ is the Frobenius automorphism) such that $F_M$ is injective i.e. $F(M)$ contains $p^n M$ for some $n \geq 0$. I am rather interesting in *$F$-iso*-cristals, namely $F$-cristals up to isogeny, which can be interpreted as finite dimensional vector spaces $E$ over $K$, together with a $\sigma$-linear automorphism $F_E : E \longrightarrow E$, such that there exists a "lattice" $M \subset E$ mapped into itself by $F_E$; I will rather call such objects *effective* $F$-isocristals (and drop the suffix "iso" (and even $F$) when the context allows it), and consider the larger category of $(E, F_E)$, with no assumption of existence of stable lattice $M$ made, as the category of $F$-isocristals. It is obtained from the category of effective $F$-isocristals and its natural internal tensor product, by "inverting" formally the "Tate cristal" $K(-1) = (K, F_{K(-1)} = p)$: the isocristals $(E, F_E)$ such that $(E, p^n F_E)$ is effective (i.e. the set of iterates of $(p^n F_E)$ is bounded for the natural norm structure) can be viewed as those of the form $E_0(n) = E_0 \otimes K(-1)^{\otimes(-n)}$, with $E_0$ an effective $F$-(iso)-cristal.

Assume now $k$ algebraic closed. Then by Dieudonné's classification theorem as reported on in Manin's report, the category of $F$-(iso)cristals over $k$ is semisimple, and the isomorphism classes of simple elements of this category can be indexed by $\mathbf{Q}$ (the group of rational numbers), or what amounts to the same, by pairs of relative prime integers

$$r, s \in \mathbf{Z}, \quad r \geq 1, \quad (s, r) = 1$$

to such a pair corresponding the simple object

$$\mathbf{E}_{s/r} = \mathbf{E}_{r,s}$$

whose rank is $r$, and which for $s \geq 0$ can be described by the cristal over the prime field $\mathbf{F}_p$ as

$$\mathbf{E}_{s/r} = \mathbf{Q}_p[T]/(T^r - p^s), \quad F_{s/r} = \text{ multiplication by T.}$$

For $s \leq 0$, we get $E_{s/r}$ by the formula

$$\mathbf{E}_{\lambda} = (\mathbf{E}_{\lambda})^{\check{}},$$

where $\check{}$ denotes ordinary dual endowed with he contragredient $F$ automorphism. In Manin's report, only effective $F$-cristals are considered, with the extra restriction that $F_E$ is topologically nilpotent, but by Tate twist this implies the result as I state it now. Indexing by $\mathbf{Q}$ rather than by pairs $(s, r)$ has the advantage that we have the simple formula

$$E_{\lambda} \otimes E_{\lambda'} \simeq \text{ sum of cristals } E_{\lambda+\lambda'}.$$

In other words, if we decompose each cristals in its isotypic component corresponding to the various "slopes" $\lambda \in \mathbf{Q}$, so that we get a natural graduation on it with group $\mathbf{Q}$, we see that this graduation is compatible with the tensor product structure:

$$E(\lambda) \otimes E'(\lambda') \subset (E \otimes E')(\lambda + \lambda').$$

The terminology of "slope" of isotypic cristal, and of the sequence of slopes occurring in any cristal (when decomposing it into its isotypic components) is due, I believe, to you, as discussed on formal groups in Pisa about three years ago; but I did not appreciate then the full appropriateness of the notion and of the terminology. Let's define the sequence of slopes of a cristal $(E, F_E)$ by its isotypic decomposition, repeating each $\lambda$ a number of times equal to rank $E(\lambda)$ (bearing in mind that if $\lambda = s/r$ with $(s, r) = 1$, then the multiplicity of $\lambda$ in $E$ i.e. rank $E(\lambda)$ is a multiple of $r$); moreover it is convenient to order this sequence in increasing order. This definition makes still a good sense if $k$ is not algebraically closed, by passing over to the algebraic closure of $k$; in fact, the isotypic decomposition over $\overline{k}$ *descends* to $k$, so we get much better than just a pale sequence of slopes, but even a canonical "iso-slope" ("isopentique" in french) decomposition over $k$

$$E = \oplus_{\lambda \in Q} E(\lambda)$$

(NB This is true only because we assumed $k$ perfect ; there is a reasonable notion of $F$-cristal also if $k$ is not perfect, but then we should get only a *filtration* of a cristal by increasing slopes...). Now if $k$ is a finite field with $q$ elements, of rank $a$ over the prime field, and if $(E, F_E)$ is a cristal over $k$, then $F_E^a$ is a linear endomorphism of $E$ over $K$, and it turns out that the slopes of the cristal are just the valuations of the proper values of $F_E^a$, for a valuation $\overline{\mathbf{Q}}_p$ normalised in such a way that

$$v(q) = 1, \quad \text{i.e.} \quad v(p) = 1/a.$$

(This is essentially the "technical lemma" in Manin's report, the restrictive conditions in Manin being in fact not necessary.) Thus, the sequence of slopes of the cristal, as defined above, is just the sequence of slopes of the *Newton polygon* of the characteristic polynomial of the arithmetic Frobenius endomorphism $F_E^a$, and their knowledge is equivalent to the knowledge of the $p$-adic valuations of the proper values of this Frobenius!

Lets come back to a general perfect $k$. Then the cristals which are effective are those whose slopes are $> 0$; those which are Dieudonné modules, i.e. which correspond to Barsotti-Tate groups over $k$ (not necessarily connected) are those whose slopes are in the closed interval $[0, 1]$ : slope zero corresponds to ind-étale groups, slope one to multiplicative groups. Moreover, an arbitrary cristal decomposes canonically into a direct sum

$$E = \oplus_{i \in \mathbf{Z}} E_i(-i),$$

where $(-i)$ are Tate twists (corresponding to multiplying the $F$ endomorphism by $b^i$), and the $E_i$ have slopes $0 \leq \lambda < 1$ (or, if we prefer, $0 < \lambda \leq 1$), and hence correspond to Barsotti-Tate groups up to isogeny over $k$, without multiplicative component (resp. which are connected). The interest of this remark comes from the fact that if $X$ is a proper and smooth scheme over $k$, then the cristallin cohomology groups $\mathrm{H}^i(X)$ can be viewed as $F$-cristals, $\mathrm{H}^i$ with slopes between $0$ and $i$[1] and define in this way a whole avalanche of Barsotti-Tate groups over $k$ (up to isogeny), which are quite remarkable invariants whose knowledge should be

[1] This is not proved now in complete generality, but is proved if $X$ lifts formally to char. zero, and is certainly true in general.

thought as essentially equivalent with the knowledge of the characteristic polynomials of the "arithmetic" Frobenius acting on (any reasonable) cohomology of $X$ (although the arithmetic Frobenius is not really defined, unless $k$ is finite!).

Now the result about specialization of Barsotti-Tate groups. This is as follows: assume the BT groups $G$, $G'$ are such that $G'$ is a specialization of $G$. Let $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ ($h =$ "height") be the slopes of $G$, and $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_h$ the ones for $G'$. Then we have the equality

$$\sum \lambda'_i = \sum \lambda'_i \quad (= \dim G = \dim G') \tag{1}$$

and the inequalities

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1, \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda'_1 + \lambda'_2, \ldots, \sum_{i=1}^{j} \lambda_j \leq \sum_{i=1}^{j} \lambda'_j \ldots. \tag{2}$$

In other words, the "Newton polygon" of $G$ (i.e. of the polynomial $\Pi_i(1+(p^{\lambda_i} T))$) lies below the one of $G'$, and they have the same end-points $(0,0)$ and $(h,N)$.

I get this result through a generalized Dieudonné theory for BT groups over an arbitrary base $S$ of char. $p$, which allows to associate to such an object an $F$-cristal over $S$, which heuristically may be thought of as a *family* of $F$-cristals in the sense outlined above, parametrized by $S$. Using this theory, the result just stated is but a particular case of the analogous statement about specialization of arbitrary cristals.

Now this latter statement is not hard to prove at all: passing to $\wedge^h E$ and $\wedge^h E'$, the equality (1) is reduced to the case of a family of rank one cristals, and to the statements that such a family is just a twist of some fixed power of the (constant) Tate cristal. And the general equality (2) is reduced, passing to $\wedge^j E$ and $\wedge^j E'$, to the first inequality $\lambda_1 \leq \lambda'_1$. Raising both $E$ and $E'$ to a tensor-power r.th such that $r\lambda_1$ is an integer, we may assume that $\lambda_1 = 0$, so the statement boils down to the following: if the general member of the family is an *effective* cristal, so are all others. This is really checked in terms of the explicit definition of "cristal over $S$".

The wishful conjecture I have in mind now is the following: the necessary conditions (1) (2) that $G'$ be a specialization of $G$ are also sufficient. In other words, starting with a BT group $G_0 = G'$, and taking its formal modular deformation in char. $p$ (over a modular formal variety $S$ of dimension $dd^*$, $d = \dim G_0$, $d^* =$

dim $G_0^*$), and the BT group $G$ over $S$ thus obtained, we want to know if for every sequence of rational numbers $\lambda_i$ between 0 and 1, satisfying (1) and (2), theses numbers occur as the sequence of slopes of a fiber of $G$ at some point of $S$. This does not seem too unreasonable, in view of the fact that the set of all $(\lambda_i)$ (satisfying the conditions just stated) is indeed finite, as is of course the set of slope-types of all possible fibers of $G$ over $S$.

I should mention that the inequalities (2) were suggested to me by a beautiful conjecture of Katz, which says the following: if $X$ is smooth and proper over a finite field $k$, and has in dimension $i$ Hodge numbers $h^0 = h^{0,i}, h^1 = h^{1,i-1}, \ldots, h^i = h^{i,0}$, and if we consider the characteristic polynomial of the arithmetic frobenius $F^a$ operating on some reasonable cohomology group of $X$ (say $\ell$-adic for $\ell \neq p$, or cristallin), then the Newton polygon of this polynomial should be *above* the one of the polynomial $\Pi(1+p^i T)^h i$, in a very heuristic and also very suggestive way, this could now be interpreted by stating (without any longer assuming $k$ finite) that the cristallin $\mathrm{H}^i$ of $X$ is a specialisation of a cristal whose sequence of slopes is: 0 $h^0$ times, 1 $h^1$ times,..., $i\, h^i$ times. If $X$ lifts formally to char zero, then we can introduce also the Hodge numbers of the lifted variety, which are numbers satisfying

$$h^{'0} \leq h^0, \ldots, h^{'i} \leq h^i,$$

and one should expect a strengthening of Katz's conjecture to hold, with the $h'^j$ replaced by the $h^j$. Thus the transcendental analogon of a char. $p$ $F$-cristl seems to be something like a Hodge structure or a Hodge filtration and the sequence of slopes of such a structure should be defined as the sequence in which $j$ enters with multiplicity $h'^j = \operatorname{rank} Gr^j$. (NB. Katz made his conjecture only for global complete intersections, however I would not be as cautious as he!). I have some idea how Katz's conjecture with the $h^i$'s (not the $h'^i$'s for the time being) may be attacked by the machinery of cristalline cohomology, at least the first inequality among (2); on the other hand, the formal argument involving exterior powers, outlined after (2), gives the feeling that it is really the first inequality $\lambda_1 \leq \lambda_1'$ which is essential, the other should follow once we have a good general framework.

I would very much appreciate your comments to this general non-sense, most of which is certainly quite familiar to you under a different terminology.

Very sincerely yours,

A. Grothendieck

# NOTES SUR LA THÉORIE DE DIEUDONNÉ

- Scan

# NOTES SUR LA THÉORIE DE DIEUDONNÉ

## 1. Programme de la théorie de Dieudonné sur une base $S$ où $p$ est localement nilpotent

## 2. Théorie de déformations pour les schémas abéliens

## 3. Relations entre les deux théories (pour schémas abéliens et pour groupes de BT)

Supposons que $p$ soit localement nilpotent sur $S$. Travaillons à nouveau avec le site cristallin de Berthelot (pas le nilpotent).

### Sur un théorème de Tate.

(Devrait venir avec foncteur mystérieux !)

C'est le théorème suivant (Driebergen…) :

Théorème. (Tate). — *Soit $S$ un schéma noethérien normal intègre dont le cos des fonctions $k(y)$ est de caractéristique zero. Alors le foncteur*

$$\mathrm{BT}(S) \longrightarrow \mathrm{BT}(y)$$

*est pleinement fidèle.*

Ainsi, un groupe de BT sur $S$ est connu à isomorphisme unique près quand on connait la représentation $p$-adique qu'elle définit de $\pi_1(y) = \mathrm{Gal}(\overline{k(y)}/k(y))$.

Prenant d'abord le cas où $S$ est le spectre

# TRAVAUX DE HEISOUKÉ HIRONAKA SUR LA RÉSOLUTION DES SINGULARITÉS

---


- This text was published in: *Travaux de Heisouké Hironaka sur la résolution des singularités*. Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 7 à 9.


- Scan

# GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX

- This text was published in: *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*. Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 431 à 436. Gauthier-Villars, Paris, 1971
- Scan

# REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES ET COMPACTIFICATION PROFINIE DES GROUPES DISCRETS

---


- This text was published in: *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets*. Manuscripta Math. 2, 375-396 (1970)
- [scan]

# LETTRE À MICHON
## 3.11.1970

- Letter about SGA
- [scan]

Massy le 3.11.1970

Chère Madame Michon,

Je m'aperçois que dans les exemplaires SGA d'archives que j'ai emportés de chez vous, il manque les suivants:

SGA 4 $XVII$, SGA 4 $VI$ première partie

D'autre part j'ai besoin de ces exemplaires pour faire l'édition photooffset en préparation. Pourriez vous me les retrouver ?

Bien cordialement

A. Grothendieck

# LETTRE À D. FERRAND
## 3.11.1970

- Letter about SGA
- [scan]

Massy le 3.11.1970

Cher Ferrand,

J'aimerais savoir si je peux compter sur ton exposé SGA 6 XI dans un avenir assez rapproché (disons d'ici fin décembre). Dans le cas contraire, je pense qu'il serait préférable que je publie SGA 6 sans l'exposé XI. Il serait quand même raisonnable, après le travail que tu t'es tapé, que tu en fasses au moins un article d'exposition, et j'aimerais savoir alors où tu penses le publier, pour que je puisse y référer dans l'introduction à SGA 6.

Bien cordialement

# LETTRE À J.L. VERDIER
3.11.1970

---

- Letter about SGA
- [scan]

Massy le 3.11.1970

Cher Verdier,

Ne m'étant guère occupé de Math depuis trois mois, je suis un peu perdu pour SGA 4. Si je me rappelle bien, tu as rédigé ou es en train de rédiger les parties suivantes, qui sont exactement ce qui manque pour que SGA 4 soit complet :

V

VI par. 5 et suivants

Si je me rappelle bien, VI était en fait terminé d'être rédigé, il fallait seulement y apporter quelques modifications dont on avait discuté avant ton départ. De plus, je pense que tu as avec toi l'exposé

VI B

de Saint Donat, et je t'envoie également l'Appendice à XVII du même, dont j'avais apparemment lu les premières pages. Pourrais tu me le renvoyer (ou le renvoyer à St Donat) avec tes annotations et commentaires ?

Tu dois avoir un exemplaire du tirage de XVII ; le XVIII n'a pas été tapé sur Stencils, mais directement sur papier pour offset ; la frappe est terminée, et Deligne est censé la corriger.

Écris-moi stp où tu en es avec ta part de rédaction, et avec la lecture de VI B. Pour des raisons techniques, ce serait bien agréable mois qui viennent. Dis-moi en tous cas si tu as l'intention de terminer, et si oui, quand tu penses avoir terminé.

Bien cordialement

# LETTRE À P. DELIGNE
## 3.11.1970

- Letter about SGA
- [scan]

Massy le 3.11.1970

Cher Deligne,

Pourrais-tu me dire si tu as terminé de regarder l'exposé de Rim SGA 7 VI, et si oui, me l'envoyer avec tes commentaires (sinon, me dire si tu as l'intention de le regarder et quand) ?

J'ai demandé à Mlle Altazin, qui a tapé ton exposé SGA 4 XVIII, de te l'envoyer avec le manuscrit, pour que tu le corriges. Pourrais-tu me dire si tu l'as reų et si tu as l'intention de faire les corrections ? Quand elles seront faites, ou si tu ne veux pas les faire, envoyés moi le texte au net stp.

As-tu eu des nouvelles de Ferrand pour SGA 6 XI ?

Bien cordialement

# THE TAME FUNDAMENTAL GROUP OF A FORMAL NEIGHBOURHOOD OF A DIVISOR WITH NORMAL CROSSINGS ON A SCHEME

A. Grothendieck and J. Murre

- *Grothendieck was always very generous in sharing his ideas. The paper to which you are referring started like this. Grothendieck and I took a walk together, I am not so sure of when, most likely in 1968 or 69. He told me that he wanted to study the tame fundamental group of a normal point on a two-dimensional scheme, in a way similar to Mumford's classical study. He already had an idea of how to do this and had in effect solved the major part of the problem, however, there remained some technical parts he had not yet resolved. He suggested that I look into it, as he had more pressing things to attend to. On my return back to Leiden I struggled with them, and after some time I was able to sort out the remaining parts, and of course I wrote him. He suggested I should publish those results on my own. I protested in my next letter, pointing out that the idea, as well as a large part of the solution was due to him. The only honorable thing would be to write a joint paper, and he agreed.*
  Remembering Grothendieck, Interview with J. Murre. NAW 5/17 nr. 1 maart 2016

- This text was published in: *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme*. Lecture Notes in

Math. 208, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971

- [scan]

# PLATITUDE D'UNE ADHÉRENCE SCHÉMATIQUE ET LEMME DE HIRONAKA GÉNÉRALISÉ

A. Grothendieck et H. Seydi

---

- This text was published in: *Platitude d'une adhérence schématique et lemme de Hironaka généralisé*. Manuscripta Math. 5, 323-339 (1971)
- [scan]

# LETTRE À J.L. VERDIER[1]
# 23.6.1971

- Letter about SGA
- [scan]

[1]Transcribed with the collaboration of M. Künzer

Massy le 23.6.1971

Cher Verdier,

Merci pour ta lettre du 23 Mai. C'est dommage que tu ne m'aies pas envoyé ce malheureux exercise 4.10.6, cela aurait permis d'envoyer enfin à l'imprimeur le fascicule 1 de SGA 4. La personne qui a frappé le texte termine maintenant, elle partira en vacances et Springer rend la machine qu'elle avait en location, faute d'autres manuscripts. Cela remet donc la publication même de ce fascicule sine die.

Bien cordialement

# CURRICULUM VITAE
# DE ALEXANDRE GROTHENDIECK

- Scan

# CURRICULUM VITAE
# DE ALEXANDRE GROTHENDIECK

## Vous trouverez ci-joint l'exposé des titres et travaux des candidats à une direction de recherche

---

Né le 28 mars 1928 à Berlin, de mère allemande et de père apatride, émigré de Russie en 1921, mes parents émigrent d'Allemagne en 1933, participent à la révolution espagnole ; je les rejoins en mai 1939. Mes parents sont internés, d'abord mon père en 1939, puis ma mère en 1940 avec moi. Mon père est déporté du camp de Vernet en août 1942 pour Auschwitz et est resté disparu; ma mère meurt en 1957 des suites d'une tuberculose contractée au camp de concentration. Je reste près de deux ans dans des camps de concentration français, puis suis recueilli par une maison d'enfants du "Secours suisse" au Chambon-sur-Lignon, où je termine mes études de lycée en 1945. Études de licence (mathématiques) à Montpellier 1945-48, auditeur libre à l'École Normale Supérieure à Paris en 1948-49, où je suis le premier séminaire Cartan sur la théorie des faisceaux, et un cours de Leray du Collage de France sur la théorie de Schauder du degré topologique dans les espaces localement convexes. De 1949 à 1953 je poursuis des recherches à Nancy sur les espaces vectoriels topologiques, comme élève de J. Dieudonné et de L. Schwartz, aboutissement à ma thèse de doctorat en 1953, sur la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, publiée dans les "Memoirs of the American Mathematical Society". Je passe alors deux ans à l'Université de Sao Paulo (Brésil), où je continue et mène à leur aboutissement naturel certaines recherches liées aux produits tensoriels topologiques [6, 7], mais en même temps, sous l'influence de J. P. Serre, commence à me familiariser avec des questions de topologie algébrique et d'algèbre homologique. Ces dernières continueront à m'occuper jusqu'à aujourd'hui, et son encore très loin d'être menées à leur terme. Ce sont elles qui m'occuperont surtout pendant l'année 1955 passée à l'Université du Kansas (USA) ; j'y développe une théorie commune pour la théorie de Cartan-Eilenberg des foncteurs dérivés des foncteurs de modules et la théorie de Leray-Cartan de la cohomologie des faisceaux [8], et développe des notions de "cohomologie non commutative" dans le contexte des faisceaux et des espaces fibrés à faisceau structural, qui trouveront leur cadre naturel quelques années plus tard avec la théorie des topos (aboutissement naturel du point de vue faisceautique en topologie générale) [16, SGA 4].

À partir de 1956 je suis resté en France, à l'exception de séjours de quelques semaines ou mois dans des universités étrangères. De 1950 à 1958 j'ai été chercheur au CNRS, avec le grade de directeur de recherches en 1958. De 1959 à 1970 j'ai été professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Ayant découvert à la fin de 1959 que l'IHES était subventionné depuis trois ans par le Ministère des Armées, et après des essais infructueux pour inciter mes collègues à une action commune sans équivoque contre la présence de telles subventions, je quitte l'IHES en septembre 1970.

Depuis 1959 je suis marié à une française, et je suis père de quatre enfants. Je suis apatride depuis 1940, et ai déposé une demande de naturalisation française au printemps 1970.

Depuis 1956 jusqu'à une date récente, mon intérêt principal s'est porté sur la géométrie algébrique. Mon intérêt pour la topologie, la géométrie analytique, l'algèbre homologique ou le langage catégorique a été constamment subordonné aux multiples besoins d'un vaste programme de construction de la géométrie algébrique, dont une première vision d'ensemble remonte à 1958. Ce programme est poursuivi systématiquement dans [16, 17], d'abord dans un isolement relatif, mais progressivement avec l'assistance d'un nombre croissante de chercheurs de valeur. Il est loin d'être achevé à l'heure actuelle. L'extraordinaire crise écologique

que nous aurons à affronter dans les décades qui viennent, rend peu probable qu'il le sera jamais. Elle nous imposera d'ailleurs une perspective et des critères de valeur entièrement nouveaux, qui réduiront à l'insignifiance ("irrelevance") beaucoup des plus brillants progrès scientifiques de notre siècle, dans la mesure où ceux-ci restent étrangers au grand impératif évolutionniste de notre temps : celui de la survie. Cette optique s'est imposée à moi avec une force croissante au cours de discussions avec de nombreux collègues sur la responsabilité sociale des scientifiques, occasionnées par ma situation à l'IHES depuis la fin de 1969. Elle m'a conduit en juillet 1970 à m'associer à la fondation d'un mouvement international et interprofessionnel "Survivre", et à consacrer aux questions liées à la survie une part importante de mon énergie. Dans cette optique, la seule valeur de mon apport comme mathématicien est de me permettre aujourd'hui, grâce à l'estime professionnelle et personnelle acquise parmi mes collègues, de donner plus de force à mon témoignage et à mon action en faveur d'une stricte subordination de toutes nos activités, y compris nos activités de scientifiques, aux impératifs de la survie, et à la promotion d'un ordre stable et humain sur notre planète, sans lequel la survie de notre espèce ne serait ni possible, ni désirable.

A Grothendieck

## Principales publication

### Espaces Vectoriels Topologiques

1. *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. 74 (1952), p. 168-186.

2. *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, J. Crelle 192 (1953), p. 35-64 et 77-95.

3. *Espaces Vectoriels Topologiques*, Notes polyc., Sao Paulo (1954), 240 p.

4. *Sur les espaces* $(F)$ *et* $(DF)$, Summa Bras. 3 (1954), p. 57-123.

5. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. AMS, n° 16 (1955), 329 p.

6. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologique*, Bull. Sao Paulo 8 (1953), p. 1-79.

7. *La théorie de Fredholm*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 319-384.

**Topologie et algèbre homologique**

8. *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku M.j., 9 (1957), p. 119-221.

9. *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 1-7.

**Géométrie analytique**

10. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J., 79 (1957), p. 121-138.

11. *Techniques de construction en géométrie analytique*, Sem. H. Cartan, 13 (1960/61), exposés 7 à 17.

**Géométrie algébrique**

12. *La théorie des classes de Chern*, Bull. SMF 86 (1958), p. 137-154.

13. *Sur une note de Mattuck-Tate*, J. Crelle 200 (1958), p. 137-154.

14. *The cohomologie theory of abstract algebraic varieties*, Proc. Int Congress, Edinburgh (1958), p. 103-118.

15. *Éléments de Géométrie Algébrique* (rédigés avec la coll. de Jean DIEUDONNÉ), Chap. I-IV, publ. Math. IHES (1960/67), env. 1800 pages.

16. *Séminaires de Géométrie Algébrique* (SGA 1, ...,7), IHES, 1960/69, env. 4000 pages (en cours de réedition chez Springer, Lecture Notes) :

SGA 1 Théorie du Groupe Fondamental

SGA 2 Cohomologie locale et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux

SGA 3 (en coll. avec M. Demazure) Schémas en Groupes des Topos et Cohomologie étale des Schémas

SGA 5 Cohomologie $\ell$-adique et fonctions $L$

SGA 6 (en coll. avec J. Berthelot et J.L. Illusie) Théorie des Intersections et Théorèmes de Riemann-Roch

SGA 7 Groupe de Monodromie en Géométrie Algébrique

17. *Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens*, Invent. Math. 2 (1966), p. 59-78.

18. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (en coll. avec J. Giraud, S. Kleiman, M. Raynaud, J. Tate), North Holland, 1968.

19. *Catégorie cofibrées additives et complexe cotangent relatif*, LectureNotes in Maths., Springer n° 79 (1968), 167 pages.

# ESQUISSE THÉMATIQUE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE A. GROTHENDIECK

- *L'*"Esquisse thématique" *a été écrite en 1972 à l'occasion d'une autre candidature (à un poste de professeur au Collège de France). Elle contient une esquisse, par thèmes, de ce que je considérais alors comme mes principales contributions mathématiques. Ce texte se ressent des dispositions dans lesquelles il a été écrit, à un moment où mon intérêt pour la mathématique était tout ce qu'il y a de marginal, à dire le moins. Aussi cette esquisse n'est-elle guère mieux qu'une énumération sèche et méthodique (mais qui fort heureusement ne vise pas à être exhaustive…). Elle ne paraît pas portée par une vision ou par le souffle d'un désir — comme si ces choses que j'y passe en revue comme par acquit de conscience (et c'étaient bien là en effet mes dispositions) n'avaient jamais été effleurées par une vision vivante, ni par une passion de les tirer au jour alors qu'elles n'étaient encore que pressenties derrière leurs voiles de brume et d'ombre…*
  Récoltes et Semailles
- [scan]

# ESQUISSE THÉMATIQUE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE A. GROTHENDIECK

Les numéros entre crochets renvoient, soit à la bibliographie sommaire jointe à mon Curriculum Vitae (numéros de [1] à [19]), soit au complément à cette bibliographie placée à la fin du présent rapport (numéros entre [1 bis] et [20 bis]). Enfin, nous avons joint en dernière page une liste par ordre alphabétique des auteurs de certains des travaux cités dans les présent rapport qui ont été directement suscités ou influencés par les travaux de A. Grothendieck ; le renvoi à cette dernière bibliographie se fait par le sigle [*] derrière le nom de l'auteur cité, comme pour I. M. Gelfand [*].

## 1. Analyse Fonctionnelle ([1] à [7], [6 bis])

Mes travaux d'Analyse Fonctionnelle (de 1949 à 1953) ont porté surtout sur la théorie des espaces vectoriels topologiques. Parmi les nombreuses notions introduites et étudiées (produits tensoriels topologiques [5,6], applications nucléaires et applications de Fredholm [5,6,7], applications intégrales et ses variantes diverses [5,6], applications de puissance $p$-ième sommable [5], espaces nucléaires [5], espaces $(DF)$ [4], etc.), c'est la notion d'*espace nucléaire* qui a connu la meilleure fortune : elle a fait jusqu'à aujourd'hui l'objet de nombreux séminaires et publications. En particulier, un volume du traité de I. Gelfand [*] sur les "Fonctions Généralisées" lui est consacré. Une des raisons de cette fortune provient sans doute de la théorie des probabilités, car il s'avère que parmi tous les EVT, c'est dans les espaces nucléaires que la théorie de la mesure prend la forme la plus simple (théorème de Minlos). Les résultats de [6], plus profonds, semblent avoir été moins bien assimilés par les développements ultérieurs, mais ils apparaissent comme source d'inspiration dans un certain nombre de travaux délicats assez récents sur des inégalités diverses liées à la théorie des espaces de Banach, notamment ceux de Pelczynski. Signalons également les résultats assez fins de [6] et de [8 bis] sur les propriétés de décroissance de la suite des valeurs propres de certains opérateurs dans les espaces de Hilbert et dans les espaces de Banach généraux.

*Références* : L. Schwartz, J. Dieudonné, I. Gelfand, P. Cartier, J. L. Lions.

## 2. Algèbre Homologique ([8], [9], [19], [9 bis])

Depuis 1955, me plaçant au point de vue de "l'usager" et non celui de spécialiste, j'ai été amené continuellement à élargir et à assouplir le langage de l'algèbre homologique, notamment sous la poussée des besoins de la géométrie algébrique (théories de dualité, théories du type Riemann-Roch, cohomologies $\ell$-adiques, cohomologies du type de De Rham, cohomologies cristallines…). Deux directions principales à ces réflexions : développement d'une algèbre homologique non commutative (amorcée dans [10 bis] et systématisée dans la thèse de J. Giraud [*]); théorie des catégories dérivées (dévelopée systématiquement par J. L. Verdier, exposée dans Hartshorne [*], Illusie [*] et [16 SGA 4 Exp. XVIII]). Ces deux courants de réflexion sont d'ailleurs loin d'être épuisés, et sont sans doute appelés à se rejoindre, soit au sein d'une "algèbre homotopique" dont une esquisse préliminaire a été faite par Quillen [*], soit dans l'esprit de la théorie des $n$-catégories, particulièrement bien adaptée à l'interprétation géométrique des invariants cohomologiques (cf. le livre cité de J. Giraud et le travail de Mme. M. Raynaud [*]).

*Références* : J.L. Verdier, P. Deligne, D. Quillen, P. Gabriel.

## 3. Topologie ([16, SGA 4], [9])

Jusqu'à présent, c'est surtout le $K$-invariant des espaces topologiques que j'avais introduit à l'occasion de mes recherches sur le théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique, qui a connu la fortune la plus brillante, étant le point de départ de très nombreuses recherches en topologie homotopique et topologie différentielle. De nombreuses constructions que j'avais introduits pour les besoins de la démonstration algébrique du théorème de Riemann-Roch (telles les opérations $\lambda_i$ et leurs liens avec les opérations du groupe symétrique) sont devenues pratique courante non seulement en géométrie algébrique et en algèbre, mais également en topologie et en théorie des nombres, notamment dans les travaux de mathématiciens comme Atiyah, Hirzebruch, Adams, Quillen, Bass, Tate, Milnor, Karoubi, Shih, etc…

Plus fondamental me semble néanmoins l'élargissement de la topologie générale, dans l'esprit de la théorie des faisceaux (développée initialement par J. Leray), contenu dans le point de vue des topos ([16, SGA 4]). J'ai introduit ces topos à partir de 1958 en partant du besoin de définir une cohomologie $\ell$-adique des variétés algébriques (plus généralement, des schémas), qui convienne à l'interprétation cohomologique des célèbres conjectures de Weil. En effet, la notion traditionnelle d'espace topologique ne suffit pas à traiter le cas des variétés algébriques sur un corps autre que le corps des complexes, la topologie proposée précédemment par Zariski ne donnant pas lieu à des invariants cohomologiques "discrets" raisonnables. A l'heure actuelle, le point de vue des topos, et la notion de "localisation" correspondante, font partie de la pratique quotidienne du géomètre algébriste, et il commence à se répandre également en *théorie des catégories* et en *logique mathématique* (avec la démonstration par B. Lawvere [*] du théorème de Cohen d'indépendance de l'axiome du continu, utilisant une adaptation convenable de la notion de topos). Il n'en est pas encore de même en topologie et en géométrie différentielle et analytique, malgré certains premiers essais dans ce sens (comme la tentative de démonstration par Sullivan d'une conjecture d'Adams en $K$-théorie, par réduction à une propriété de l'opération de Frobenius sur les variétés algébriques en car. $p > 0$).

*Références* : M. Atiyah, F. Hirzebruch, H. Bass, J. Leray, M. Artin, D. Quillen, M. Karoubi…

## 4. Algèbre ([15], [16], [18])

Comme l'algèbre homologique, l'algèbre a été pour moi un outil à développer, et non un but en soi. J'ai parlé au par. 2 de mes contributions à l'algèbre homologique, et au par. 3 de mes contributions à la $K$-théorie; celle-ci comprend une partie purement algébrique (qui, une fois étendue en une théorie des $K^i$ supérieurs, finira par devenir une partie de l'algèbre homologique ou homotopique). Ainsi, un certain nombre de mes résultats en géométrie algébrique se spécialisent en des résultats en algèbre pure, comme la relation $K(A[t]) \simeq K(A)$, où $A$ est un anneau. Mises à part ces retombées, on peut signaler les contributions ci-dessous.

a) *Algèbre catégorique* : En fait, de façon continuelle depuis 1953, je me suis senti dans l'obligation, au fur et à mesure des besoins, de développer une panoplie catégorique toujours insuffisante. La plupart des résultats et des notions ainsi introduites se trouvent développés un peu partout dans [15, 16], notamment dans le premier exposé de SGA 4. Il ne peut être question de passer en revue ici même sommairement les notions qui sont ainsi entrées dans l'usage courant. Signalons seulement ici le langage des *univers* (pour éliminer des difficultés logiques dans la manipulation intensive des catégories), et celui de la *descente* (développé de façon systématique par Giraud [*]).

   *Références* : J. Giraud, P. Gabriel.

b) *Algèbre commutative* : Dans le langage géométrique des "schémas", l'algèbre commutative peut être considérée comme étant, essentiellement, l'étude locale des schémas. C'est ainsi que [15], et notamment le Chap. IV de cet ouvrage, contient de très nombreux résultats nouveaux d'algèbre commutative, dont il ne peut être question ici d'énumérer même les plus couramment utilisés. Notons seulement ici, en algèbre locale, la notion d'anneau *excellent* et ses propriétés de permanence (dont l'absence constituait sans doute la lacune la plus marquante de l'ouvrage de M. Nagata sur les anneaux locaux).

   *Références* : M. Nagata, P. Samuel, M. Raynaud, O. Zariski.

c) *Théorie du groupe de Brauer* : Mes contributions découlent pour l'essentiel de l'application de la cohomologie étale (développée dans [16, SGA 3]) à la théorie du groupe de Brauer. J'ai fait un exposé d'ensemble sur les résultats connus sur ce groupe dans [18].

*Références* : M. Artin, J. Tate, J.P. Serre

d) *Théorie des algèbres de Lie* : Comme sous-produit de recherches sur les groupes algébriques en car. $p > 0$, je trouve certains résultats délicats sur les sous-algèbres de Borel ou de Cartan de certaines algèbres de Lie, notamment sur les corps de base imparfaits (cf. [16, SGA 6, Exp. XIII et XIV]).

*Références* : M. Demazure, J. Tits, J.P. Serre

## 5. Géométrie Analytique ([10], [11], [16 bis])

Mon influence sur la géométrie analytique est due moins aux résultats nouveaux que j'ai pu y démontrer (la plupart contenus dans les réf. cit.), que par les points de vue directement inspirés par la géométrie algébrique que j'ai pu y introduire, et les nombreuses suggestions d'énoncés que j'ai pu y faire.

Un des plus anciens est le théorème de finitude de Grauert pour les morphismes propres d'espaces analytiques, aboutissant à sa généralisation récente en un théorème qui s'énonce en termes de catégories dérivées (formulation sur laquelle j'avais insisté de longue date, et qui a été prouvée indépendamment par R. Kiehl [*] et O. Forster et K. Knorr [*]). D'autres théorèmes de finitude (de Frisch et Siu) pour les images directes supérieures d'un faisceau cohérent par une immersion ouverte, utilisant la profondeur du faisceau en les points du complémentaire, sont inspirés de théorèmes analogues en géométrie algébrique [16, SGA 2]; remarques analogues pour des théorèmes sur la cohomologie à supports compacts des faisceaux algébriques cohérents, complétés par une théorème d'existence., et leur interprétation en termes de théorèmes du type de Lefschetz pour la cohomologie cohérente (la version algébrique faire partie de la thèse de Mme. Michèle Raynaud (en cours de publication), et la version analytique est due à Trautmann [*]). Parlant en termes de grands thèmes de recherche plutôt qu'en termes de résultats techniques particuliers, je pense qu'outre les thèmes déjà nommés, les thèmes suivants ont été directement suscités ou tout au moins influencés par des idées que j'avais développées en géométrie algébrique:

a) *Techniques de construction d'espaces analytiques*, aboutissant aussi bien à des espaces "modulaires" "globaux" comme les espaces modulaires de Picard, pour certains espaces analytiques compacts comme dans [11] (le cas général ne semble pas encore traité), qu'à des espaces modulaires "locaux" de déformation d'une structure analytique complexe donnée, ou au modèle de la Géométrie Formelle ("th. d'existence des modules formels", cf. [15 bis, Exp. no 195]). Dans certains cas, les énoncés obtenus en géométrie algébrique sont directement applicables (cf. M. Hakim [*]), dans d'autres de nouvelles difficultés surgissent, pas toujours surmontées à l'heure actuelle. Parmi les travaux définitifs dans ce sens, on peut citer la thèse de A. Douady [*].

b) *Théorèmes de dualité locaux et globaux pour les faisceaux cohérents*, développés notamment par J.L. Verdier [*] et J.P. Ramis et G. Ruget [*], inspirés par la théorie que j'avais développée dans le cas des schémas, exposée dans R. Hartshorne [*].

c) *Formulations de théorèmes du type de Riemann-Roch* pour des variétés analytiques compactes ou des morphismes propres de telles variétés, cf. [16, SGA 6, Exp. 0]. Les problèmes essentiels restent toujours ouverts.

d) *Théorèmes de De Rham analytiques complexes [16 bis], cohomologie cristalline complexe*. Certains des résultats et des idées que j'avais développés à ce sujet ont été utilisés dans des développements théoriques divers, comme la théorie de Hodge généralisée de P. Deligne [*].

e) *Espaces rigide-analytiques.* M'inspirant de l'exemple de la "courbe elliptique Tate", et des besoins de la "géométrie formelle" sur un anneau de valuation discrète complet, j'étais parvenu à une formulation partielle de la notion de variété rigide-analytique sur un corps valué complet, qui a joué son rôle dans la première étude systématique de cette notion par J. Tate [*]. Par ailleurs, les "cristaux" que j'introduis sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique $> 0$ peuvent s'interpréter parfois en termes de fibrés vectoriels à connexion intégrable sur certains types d'espaces rigide-analytiques sur des corps de caractéristique nulle; ceci fait pressentir l'existence de relations profondes entre cohomologie cristalline en car. $> 0$, et cohomologie de systèmes locaux sur des variétés rigide-analytiques en car. nulle.

*Références* : J. P Serre, H. Grauert, H. Cartan, P. Deligne, A. Douady, B. Malgrance, K. Knorr, R. Kiehl, J. Tate.

## 6. Groupes Algébriques ([16 SGA 3 - en trois volumes] [12 bis])

Ce sujet relève à la fois de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes. Le travail cité SGA 3 se place surtout sur des schémas de base généraux, et la part de la géométrie algébrique y est certes considérablement plus large que celle de la théorie des groupes. Néanmoins, grâce à la technique des schémas, nous y obtenons des résultats nouveaux même dans le cas de groupes définis sur un corps de base, les plus intéressants (relatifs surtout au cas d'un corps de base imparfait) étant contenus dans SGA 3, Exp XIV. Ma contribution principale, continuant dans la voie ouverte par A. Borel et C. Chevalley dans le contexte de la géométrie algébrique habituelle, a été de montrer le parti qu'on pouvait tirer d'une application systématique de la théorie des schémas aux groupes algébriques et aux schémas en groupes.

*Références* : J. Tits, F. Bruhat, M. Demazure, P. Gabriel, A. Borel, D. Mumford.

## 7. Groupes discrets ([18, Exp VIII], [13 bis])

Dans [18, Exp. VIII] je développe une théorie purement algébrique des classes de Chern des représentations d'un groupe discret sur un corps de base (ou même un anneau de base) quelconque, avec des applications de nature arithmétique sur l'ordre des classes de Chern des représentations complexes. Cette théorie peut être considérée comme cas particulier d'une théorie des classes de Chern des représentations linéaires de schémas en groupes quelconques, elle-même contenue dans la théorie des classes de Chern $\ell$-adiques des fibrés vectoriels sur des topos annelés quelconques. Dans [13 bis], j'établis, à peu de choses près, que pour un groupe discret $G$, la théorie des représentations linéaires de $G$ (sur un anneau de base quelconque) ne dépend que du complété profini $\hat{G}$ de $G$.

## 8. Groupes formels ([17] [16 SGA 7] [14 bis])

C'est un sujet qui relève à la fois de la théorie des groupes, de celle des groupes de Lie, de la géométrie algébrique, de l'arithmétique, et (sous la forme voisine des groupes de Barsotti-Tate) de la théorie des systèmes locaux. Ici encore, la théorie des schémas permet une grande aisance, et c'est dans ce contexte par exemple que se place d'emblée I. Manin [*a], dans son exposé classique de la théorie de Dieudonné. Ma principale contribution, en dehors de cette simplification conceptuelle, a été le développement d'une "théorie de Dieudonné" pour les groupes de Barsotti-Tate sur des schémas de base généraux à caractéristiques résiduelles $> 0$, en termes du "cristal de Dieudonné" associé à un tel groupe. Une esquisse de cette théorie a été exposée dans divers cours et séminaires, y compris dans mon cours au Collège de France en 1970/71 et 71/72; certains énoncés principaux sont esquissés dans les C.R. du Congrès International de Nice en 1970 [14 bis]. Une partie de ces idées est développée dans la thèse de W. Messing [*], et les besoins techniques de la théorie ont été la motivation pour le développement par L. Illusie [*] de sa théorie des déformations des schémas en groupes commutatifs, vérifiant des conjectures suggérées par cette "théorie de Dieudonné cristalline". Par ailleurs, les relations entre schémas abéliens et groupes de Barsotti-Tate associés sont explorées et exploitées également dans [17] et dans [16, SGA 7, Exp. IX].

*Références* : J. Tate, B. Mazur, A. Néron, L. Illusie, J.N. Katz, W. Messing, I. Manin.

## 9. Arithmétique ([16 SGA 5, Exp XVI] [18, Exp III])

Ma contribution principale a consisté (en collaboration avec M. Artin) en la démonstration de la rationalité des fonctions $L$ associées à des faisceaux $\ell$-adiques généraux sur des variétés algébriques sur des corps finis, comprenant comme cas particulier les fonctions $L$ associées à des caractères de groupes finis opérant sur de telles variétés. S'inspirant des conjectures de Weil, on arrive en effet à exprimer ces fonctions $L$ en termes de produits alternés de polynômes caractéristiques de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la "cohomologie à support propre" de la variété envisagée. Bien au delà d'une simple question de rationalité, ces résultats ouvrent la voie à une approche cohomologique systématique d'invariants arithmétiques subtils comme les fonctions $\zeta$ et $L$ des variétés, et l'interprétation en termes arithmétiques de théorèmes tels que les théorèmes de dualité (démontrés à l'heure actuelle) et de Lefschetz pour les sections hyperplanes (non démontrés encore en car. $> 0$). Il y a là un champ d'étude immense, qui par la nature des choses devrait se trouver, tôt ou tard, centré sur la notion de "motif" (dénominateur commun des divers types de cohomologie qu'on sait attacher à une variété algébrique) – mais qui probablement ne sera jamais exploré jusqu'au bout, l'heure de ce genre d'investigations étant déjà passée (même si rares sont ceux qui en ont pris conscience).

*Références* : J.P. Serre, A. Weil, B. Dwork, J. Tate, M. Artin, P. Deligne...

## 10. Géométrie Algébrique ([12] à [19], [15 bis] à [20 bis])

C'est dans cette direction que mon influence a été la plus directe et la plus profonde, puisque c'est dans cette optique que se placent pour l'essentiel mes travaux depuis 1959. Voici les thèmes principaux sous lesquels on peut placer mes contributions:

a) *Travail de fondement* : Il s'agissait de dégager un cadre suffisamment vaste pour servir de fondement commun à la géométrie algébrique habituelle (y compris celle développée par des auteurs comme A. Weil, O. Zariski, C. Chevalley, J.P. Serre sur des corps de base quelconques) et à l'arithmétique. C'est fait pour l'essentiel dans [15, Chap. I,II et des parties des Ch. III et IV], avec l'introduction et l'étude de la *notion de schéma*. Des généralisations ont été développées par la suite, dans le même esprit, avec les schémas formels [15, Chap. I, par. 10], la théorie des "algebraic spaces" de M. Artin (cf. Knutson [*]), les "algebraic stacks" ou "multiplicités algébriques" de P. Deligne et D. Mumford (*), des "schémas relatifs" de la thèse de M. Hakim [*] (en attendant les "multiplicités formelles" et les "multiplicités algébriques relatives" sur des topos annelés généraux, etc). Ces généralisations montrent la part conceptuelle importante qui revient, dans le langage des schémas, à la notion générale de la localisation, c'est à dire à celle de *topos* (dont il a été question au par. 3). Les fondements développés dans [15] et [16] sont aujourd'hui le "pain quotidien" de la grande majorité des géomètres algébristes, et leur importance a été soulignée à de nombreuses occasions par des mathématiciens aussi divers que O. Zariski, J.P. Serre, H. Hironaka, D. Mumford, I. Manin, F. Chafarévitch.

b) *Théorie locale des schémas et des morphismes de schémas* : Dans ce contexte se placent les développements d'algèbre commutative mentionnés au par. 4, et l'étude détaillée de notions comme celles de morphisme lisse, étale, net, plat, etc. Les quatre volumes de [15, Chap. IV] sont consacrés à ces développements, qui ont d'ailleurs inspiré des développements analogues en théorie des espaces analytiques et rigide-analytiques

c) *Techniques de construction de schémas* : Parmi les techniques développées, exposées surtout dans [15 bis] et des séminaires non publiés (par moi-même et d'autres), il y a la *théorie de la descente* (cf. aussi [16, SGA I, Exp. V, VI]), celle des *schémas quotients*, des *schémas de Hilbert*, des *schémas de Picard*, des *"modules" formels*, le *théorème d'existence* des faisceaux de modules algébriques associés à des modules formels ([15, Chap. III, par. 5]). Le point de vue adopté est surtout celui de la construction d'un schéma à partir du foncteur qu'il représente. Dans cette optique, je n'étais pas parvenu à une véritable caractérisation maniable des foncteurs représentables par une schéma relatif (localement de type fini sur un schéma noethérien) – c'est M. Artin qui y est parvenu ultérieurement [*], en remplaçant la notion de schéma par celle, plus générale et plus stable, d'espace algébrique. Parmi d'autres recherches dans la même direction, suscitées par mes travaux, il y a celles de J. Murre sur les schémas de Picard sur un corps [*], celles de D. Mumford et de M. Raynaud [*] sur ces mêmes schémas sur des bases générales, et dans une certaine mesure ceux de D. Mumford [*] et de S. Seshadri sur le passage au quotient, pour n'en citer que quelques-uns.

d) *Théories cohomologiques* :

   1°) *Cohomologie "cohérente"* : résultats de finitude, de comparaison avec la cohomologie formelle, cf. [15, Chap. III]. Théorèmes de dualité et des résidus : un exposé systématique de mes idées et résultats est développé dans le séminaire de R. Hartshorne [*], cf. aussi [18 bis].

2°) *Cohomologie $\ell$-adique* : définition de la cohomologie étale, théorèmes de comparaison, de finitude, de dimension cohomologique, de Lefschetz faible, [16 SGA 4]; théorèmes de dualité, formules de Lefschetz et d'Euler-Poincaré, application aux fonctions $L$, [16, SGA 15].

3°) *Cohomologie de De Rham* : [16 bis], [17 bis].

4°) *Cohomologie cristalline* : quelques idées de départ sont esquissées dans [18, Exp. IX], puis reprises et systématisées dans la thèse de P. Berthelot [*], et dans le travail de P. Berthelot et L. Illusie sur les classes de Chern cristalline [*].

e) *Théorie du groupe fondamental* ([16, SGA 1], SGA 2, SGA 7, Exp. I et II], [15 bis, no 182], [19 bis]) :

D'un point de vue algébrico-géométrique, tout était à faire, depuis la définition du groupe fondamental d'une variété quelconque, en passant par des propriétés "de descente" incluant des résultats assez formels du type de van Kampen, jusqu'au calcul du groupe fondamental dans les premiers cas non triviaux, comme celui d'une courbe algébrique privée de certains points; on peut y adjoindre les théorèmes de génération et de présentation finie du groupe fondamental d'une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Ce programme est accompli pour l'essentiel dans SGA 1, en utilisant à la fois les résultats classiques sur le corps des complexes (établis par voie transcendante) et une panoplie d'outils faits sur mesure (théorie de la descente, étude des morphismes étales, théorème d'existence de faisceaux cohérents…). Les autres références contiennent des résultats plus spéciaux: théorèmes du type de Lefschetz dans SGA 2, action des groupes de monodromie locale sur le groupe fondamental d'une fibre dans SGA 7, Exp. I, calculs de certains groupes fondamentaux locaux dans [19 bis], via les groupes fondamentaux de certains schémas formels. Tous ces résultats ont été utilisés couramment dans de nombreux travaux, et en ont inspiré d'autres comme la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*].

f) *Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* pour les groupes de Picard, le groupe fondamental, la cohomologie étale, la cohomologie cohérente. Il s'agit ici de la comparaison entre les invariants (cohomologiques ou homotopiques) d'une variété algébrique et d'une section hyperplane. Les idées de départ sont développées dans [16, SGA 2]. Cependant, pour des énoncés "définitifs", en termes de conditions nécessaires et suffisantes, se reporter plutôt à la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*] déjà citée.

g) *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* :

La principale idée nouvelle, c'est qu'il y a presque identité entre le groupe "de Chow" des classes de cycles sur une variété $X$, et un certain groupe de "classes de faisceaux cohérents" (tout au moins modulo torsion), à savoir le groupe $K(X)$ (mentionné dans le par. 3). Dans un contexte modeste c'est exposé dans [12] et le travail de A. Borel et J.P. Serre [*], dans un contexte plus ambitieux cela donne l'imposant séminaire [16, SGA 7]. Dans le même esprit, cf. [12 bis].

Par ailleurs, l'idée (que je semble avoir été le premier à introduire avec ma formulation du théorème de Riemann-Roch) de reformuler un théorème sur une variété (dû en l'occurrence à F. Hirzebruch) en un théorème plus général sur un morphisme de variétés, a connu par la suite une grande fortune, non seulement en géométrie algébrique, mais aussi en topologie algébrique et topologie différentielle (à commencer par la "formule de Riemann-Roch différentiable", développée par M.F. Atiyah et F. Hirzebruch sous l'inspiration de ma formulation "relative" du théorème de Riemann-Roch).

h) *Schémas abéliens* :

En termes plus classiques, ce sont les familles de variétés abéliennes, paramétrées par un schéma quelconque. Les résultats les plus importants que j'y ai établis sont le *"théorème de réduction semi-stable"* et ses conséquences et variantes [16, SGA 7, Exp. IX], le théorème d'*existence de morphismes de schémas abéliens* contenu dans [17] et ses variantes (généralisé par P. Deligne [*] en un théorème sur la cohomologie de Hodge-De Rham relative d'une famille de variétés projectives complexes non singulières), enfin une théorie des *déformations infinitésimales des schémas abéliens* (non publiée sur une base quelconque), en termes de la déformation d'une filtration de Hodge sur un $H^1$ relatif de De Rham (interprété comme une cohomologie cristalline).

i) *Groupes de monodromie* :

Mes principales contributions sont exposées (en partie par P. Deligne) dans le premier volume de [16, SGA 7], donnant des propriétés fondamentales de l'action du groupe de monodromie locale sur la cohomologie comme sur le groupe fondamental d'une fibre. Parmi les principales applications, il y a le théorème de "réduction semi-stable" des schémas abéliens signalé au paragraphe précédent.

j) *Divagations motiviques* :

Nous entrons ici dans le domaine du rêve éveillé mathématique, où on s'essaie à deviner "ce qui pourrait être", en étant aussi insensément optimiste que nous le permettent les connaissances parcellaires que nous avons sur les propriétés arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. La notion de motif peut se définir en toute rigueur avec les moyens du bord (c'est fait par I. Manin [*] et M. Demazure [*]), mais dès qu'on veut aller plus loin et formuler des propriétés fondamentales "naturelles", on bute sur des conjectures actuellement indémontrables, comme celles de Weil ou de Tate, et d'autres analogues que la notion même de motif suggère irrésistiblement. Ces propriétés ont fait l'objet de nombreuses conversations privées et de plusieurs exposés publics, mais n'ont jamais fait l'objet d'une publication, puisqu'il n'est pas d'usage en mathématique (contrairement à la physique) de publier un rêve, si cohérent soit-il, et de suivre jusqu'au bout où ses divers éléments nous peuvent entraîner. Il est évident pourtant, pour quiconque se plonge suffisamment dans la cohomologie des variétés algébriques, "qu'il y a quelque chose" – que "les motifs existent". Il y a quelques années encore, j'ai joué avec l'idée d'écrire contrairement à l'usage, un livre entièrement conjectural sur les motifs – une sorte de science-fiction mathématique. J'en ai été empêché par des tâches plus urgentes que des tâches de mathématicien, et je doute fort actuellement qu'un tel livre soit jamais écrit, ni qu'on arrive jamais (même conjecturalement) à se faire une idée d'ensemble à la fois précise et suffisamment vaste sur le formalisme des motifs. Avant qu'on n'y parvienne, il sera sans doute devenu évident pour tous, sous la poussée des événements, la science spéculative et parcellarisée ne faisant plus vivre son homme, qu'il est des tâches plus urgentes que de mettre sur pied même la plus belle théorie du monde, conjectural ou non.

## Complément à la bibliographie sommaire jointe au Curriculum Vitae de A. Grothendieck (travaux non inclus dans la dite bibliographie)

### Analyse fonctionnelle


1 bis. *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles*, Journal d'Analyse Math. vol II, pp. 243-280 (1952/53).

2 bis. *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*, Boletim da Soc. Mat. de Sao Paulo, vol. 8°, pp. 85-110 (1953).

3 bis. *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$*, Canadian Journal of Math., Vol. 5, pp. 125-173 (1953).

4 bis. *Sur certains sous-espaces vectoriels de $L^p$*, Can. J. Math. vol. 6, pp. 158-160 (1953).

5 bis. *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces $L^1$*, Can. Journ. Math. vol. 7, pp. 552-561 (1955).

6 bis. *Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de Von Neumann munies d'une trace*, Séminaire Bourbaki n° 115 (Mars 1955).

7 bis. *Un résultat sur le dual d'une $C^*$-algèbre*, Journ. de Math. vol. 36, pp. 97-108 (1957).

8 bis. *The trace of certain operators*, Studia Mathematica t. 20 (1961) pp. 141-143.

### Algèbre Homologique

9 bis. *A general theory of fiber spaces with structure sheaf*, University of Kansas, 1955.

10 bis. *Standard conjectures on algebraic cycles*, Proc. Bombay, Coll. on Alg. Geom. 1968, pp. 193-199.

### Algèbre

11 bis. (en collaboration avec J. Dieudonné) *Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques*, Journal of Algebra, vol. 5, pp. 305-324 (1967).

### Groupes algébriques

12 bis. Exposés 4 (Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections) et 5 (torsion homologique et sections rationnelles), in Anneaux de Chow et applications, Sém. Chevalley à l'ENS, 1958, (36 p + 29 p.).

### Groupes discrets

13 bis. *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets*, Manuscripta Math. vol 2, pp. 375-396 (1970).

### Groupes Formels

14 bis *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes Congr. Int. math. 1970, t. 1., pp. 431-436.

### Géométrie Algébrique

15 bis. *Techniques de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique* (recueil des exposés Bourbaki n° 182, 190, 195, 212, 221, 232, 236), Secrétariat de l'IHP, rue Pierre Curie, Paris (1958-1962).

16 bis. *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES, vol. 29, pp. 95-103 (1966).

17 bis. *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons*, Topology, vol. 8, pp. 299-303 (1969).

18 bis. *Local cohomology* (notes by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math. n° 41 (1967), Springer.

19 bis. (en coll. avec J.P. Murre) *The tame fundamental group of a formal neighbourhood…* Lecture Notes in Math. n° 208 (1971), Springer.

20 bis. (avec H. Seydi), *Platitude d'une adhénrece a schématique et lemme de Hironaka généralisé*, Manuscripta Math. 5, pp. 323-339 (1971).

## Liste de travaux cités, suscites ou influences par les travaux de A. Grothendieck


M. ARTIN, Algebraization of Formal Moduli, I (in Global Analysis, pp. 21-71, University of Tokyo Press, Princeton University Press, 1968), II Existence of modifications, Annals of Mathematics, Vol. 91, pp. 88-135 (1970).

M.F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 65, pp 276-281 (1959).

P. BERTHELOT, Cohomologie cristalline des schémas propres et lisses de caractéristique $p > 0$, Thèse, Université Paris VII, 1971 (paraîtra dans Lecture Notes of Math. chez Springer).

P. BERTHELOT et L. ILLUSIE, Classes de Chern en cohomologie cristalline, C.R. Acad. Sci. Paris t. 270, pp. 1695-1697 (22 juin 1970) et p. 1750-1752 (29 juin 1970).

A. BOREL et J.P. SERRE, Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck), Bull. Soc. Math. France, t. 86, pp. 97-136 (1958).

P. DELIGNE, Théorie de Hodge I (Actes du Congrès International des mathématiciens, Nice 1970) et II, Publications Math. n° 40, pp. 5-57 (1971).

P. DELIGNE et D. MUMFORD, The irreducibility of the space of curves of a given genus, Pub. Math. n° 36, pp. 75-110 (1969).

M. DEMAZURE, Motifs des variétés algébriques, Sém. Bourbaki n° 365, 1969/70.

A. DOUADY, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts…, Ann. Inst. Fourier, vol. 16, pp. 1-98 (1966).

O. FORSTER et K. KNORR, Relativ-analytische Raume und die Koharenz von Bildgarden, Inventions Math. Vol. 16, pp. 113-160 (1972).

I.M. GELFAND et N. Ja. VILENKIN, Les distributions, tome 4, Applications de l'analyse harmonique, Dunod, Paris, 1968 (traduction).

J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne, Grundlehren des Maths. Wiss. Bd. 179, 1971, Springer.

M. HAKIM, Topos annelés et schémas relatifs, Ergebnisse des Math. Bd. 64, 1972, Springer.

R. HARTSHORNE, Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics n° 20 (1966).

L. ILLUSIE, Complexe Cotangent et Déformations I, Lecture Notes in Math. n° 239 (1971), Springer et II, idem, n° 283 (1972).

R. KIEHL, Relativ analytische Raume, Inventiones Math. vol. 16, pp. 40-112 (1972).

D. KNUTSON, Algebraic spaces, Lecture Notes in Math. n° 203 (1971), Springer.

F.N. LAWVERE, Toposes, algebraic geometry and logic, LEcture notes in MAth., n° 274 (1972), Springer.

I. MANIN,

a) Théorie des groupes formels commutatifs sur des corps de caractéristique finie, (en russe) Uspekhi mat. Nauk, 1963, t. 18, pp. 3-90. (Il existe une traduction anglaise de l'Amer. Math. Soc).

b) Correspondances, motifs et transformations monoïdales (en russe), Mat. Sbornik t. 77, pp. 475-507.

W. MESSING, The crystals associated to a Barsotti-Tate group, Lecture Notes in Math. n° 264 (1971) Springer.

D. MUMFORD, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Math. Bd 34, 1965, Springer.

J.P. MURRE, On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups, Pub. Math. n° 23, pp. 5-43 (1964).

D. QUILLEN, Homotopical algebra, Lecture Notes in Math. n° 43 (1967), Springer.

M. RAYNAUD, Spécialisation du Foncteur de Picard, Publications Math. n° 38, pp. 27-76 (1970).

Mme. M. RAYNAUD, Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et cohomologie étale, Thèse Paris 1972 (paraîtra dans Lecture Notes of Math.)

J.P. RAMIS et G. RUGET, Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe, Pub. Math. n° 38, pp. 77 à 91 (1970).

J. TATE, Rigid-analytic spaces, Inventiones Mathematicae, vol. 12, pp. 257-289 (1971).

G. TRAUTMANN, Abgeschlossenheit von Corandmoduln une Fortsetzbarkeit koharenter analytischer Garben, Inventiones Math. vol. 5, pp. 216-230 (1968).

J.L.VERDIER, J.P. RAMIS et G. RUGET, Dualité relative en géométrie analytique complexe, Inventiones MAth., vol. 13, pp. 261-283 (1971).

# INTRODUCTION TO FUNCTORIAL ALGEBRAIC GEOMETRY

- At the beginning of 1973, Grothendieck was already preparing for his departure from social and ecological activities. He intended to move to the countryside (at Villecun). But before this, he went for several weeks on a lecture tour in the USA, it was on this occasion that he delivered the following course at SUNY, Buffalo in the summer of 1973. Then he went to Paris in order to take care of the formalities concerning his appointment to the University of Montpellier, where he began his activity at the start of the term.
- The following notes of the course were written by Federico Gaeta, and printed by the university in 1984 in the form of mimeographed notes. These are not based on prenotes by Grothendieck and to some extent represent Gaeta's personal understanding of what was taught. For more on this, see the foreword in the introduction.
- [audio]. The lectures were audio-recorded.
- [scan]

# INTRODUCTION
# TO
# FUNCTORIAL ALGEBRAIC GEOMETRY

After a Summer Course by

A. GROTHENDIECK

Vol. I

AFFINE ALGEBRAIC GEOMETRY

SUNY at Buffalo

# 0. Introductory material

**Bibliography.**

**Foreword.** These notes were primarily written from tape recordings of *Grothendieck*'s lectures during his visit at SUNY in the summer of 1973. However, there recordings were supplemented by exercises, references to classical algebraic geometry, historical comments and concrete quotations of such "Bibles" as SGA, EGA, etc.[1]

*Grothendieck* himself does not assume any responsibility for the publication of these notes; I believe however that since no adequate "textbooks" exist today and the original publications present considerable difficulties to the beginner, a publication of this kind will help a much wider audience. This is intended as an introduction to the sources SGA, EGA,...: with concrete references to Ch., §and page number, I have completed the bibliography by referring to other introductory publications such as the *Dieudonné* articles, *Mumford*'s lecture notes, etc. Most of them contain sketchy or no proofs at all, or they are addressed to a different type of reader, cf. Macdonald-*Schemes*, addressed to classical algebraic geometers. I hope that these lecture notes, directed primarily to beginning graduate students, will bring the gap, between the previously mentioned lecture notes and the sources. To aid the newcomer, the reader will find many more details than is customary in informal publications of this type. I took advantage of some of the oral repetitions to insert *"summaries"* at the beginning of most paragraphs (mostly using the tape-recorded lectures, or my own initiative if I could not find any better source). There are many complete proofs, and others are almost complete with very few, really trivial details left to the reader.

No knowledge of "old-time" or 'classical" algebraic geometry was assumed although *Grothendieck* himself gave examples involving plane algebraic curves or surfaces, etc. In many points, especially in the introduction for future applied mathematicians and in the Summary of the course, I tried to build some bridges with "old-time" algebraic geometry based on the study of algebraic varieties instead of *schemes*. If this might seem contrary to *Grothendieck*'s mathematical spirit, it is definitively not unfaithful to his current philosophical or sociological worries. In his prior visit to Buffalo, and in many other places as well, *Grothendieck* campaigned against *expert knowledge* and technology. How can we ignore that many

[1]The names or authors and/or titles of books, papers, etc. between " " refer to the Bibliography.

people feel disappointed if they do not see the words algebraic curve or surfaces on page one in an Algebraic Geometry text? Or they complain "a priori", just by "hearsay" that there is a lot of algebra and categorical language but — where is the geometry? I try to overcome these psychological difficulties or prejudices in order to emphasize the major simplifications introduced by *Grothendieck*. The introduction for applied mathematicians is addressed to any person with a bachelor degree in Mathematics but it should be understood also by theoretical physicist and engineers…

I hope that very soon after a final revision of the whole course the second part dealing with the category of schemes will appear.

I am grateful to many colleagues and students in the audience who helped me in preparing these notes, mainly: J. Duskin, B. Fell, L. Gupta, R. Hamsher, N. Kazarinoff, M. Klun, I. Ozaki, F. C. Schanuel, G. Sicherman, J. Winthrop by correcting all kinds of mistakes, typographical, linguistic, mathematical…, and I am especially grateful first of all to *Grothendieck* who was so kind with everybody and so generous with his time. He lectured several times for periods of almost seven hours, with only a few short breaks. Who can believe that he is not interested in Mathematics anymore?

Last but not least, I am very grateful too to the typist, Mrs. Gail Berti, for her excellent job and her angelic patience, correcting and retyping the manuscript dozens of times and never once protesting.

Buffalo, June 1974<br>Federico Gaeta

**0. Propaganda for applied mathematicians**. Not more than one century ago the distinction between pure and applied mathematics was to a large extend artificial and unimportant.

**1. Prerequisites**. We shall assume familiarity with the

# I. Functorial description of the sets of solutions of systems of polynomial equations

## 1. The isomorphism $\mathrm{Aff}_k \simeq G_k^\circ$

## 0. Summary

## 2. Restriction to particular $k$-algebras ($k' = k$, $k'$ reduced, $k'$ a field)

# II. Limits in the category $\mathrm{Aff}_k$ of affine algebraic spaces

## 1. Categorical preparation

## 2. Limits in the category $\mathrm{Aff}_k$

# III. Affine schemes

## 1. The functor $\mathrm{Spec} : G \longrightarrow I$

### 1.

### 2.

### 3.

### 4.

### 5.

## 2. Sheaves on affine schemes

### 6.

### 7.

### 8.

### 9.

### 10.

### 11.

### 12.

### 13.



### 14. Appendix on sheaves of sets[2]

The following notes on sheaves of sets were delivered by *Grothendieck* at the beginning lectures of

[2] These notes were written with the collaboration of J. Winthrop.

his course on topoi. To include this in §7 would be too digressive; thus I prefer to include it in the Appendix, which should be particularly useful for readers with a prior knowledge of FAC; at the same time it would be helpful as an introduction to the abstract approach of *Godement*'s Bible.

I am going to talk about the *theory of topoi*. I like to see it as a king of *generalization of classical general topology*. As a background we shall assume some familiarity with topological spaces, continuous maps, homeomorphisms, etc. etc. and on the other hand familiarity with the language of categories. Later we shall give some motivation for introducing something more general than topological spaces and give examples. But to understand the theory of topoi we shall also require some familiarity with the language of sheaves on a topological space. Now, I guess that this notion is not that familiar to everybody, so I will not assume anything known about it. I will review the standard theory of sheaves of sets[3] over topological spaces.

**14.1 Presheaves of sets**. Let $X$ be a topological space. We consider the set $\mathscr{O} = \mathrm{Op}(X)$ of open subsets on $X$, i.e. the subset $\mathrm{Op}(X)$ of the power set $\mathfrak{P}(X)$[4] defining the topology on $X$. We recall that the axioms of a topology require that $\mathrm{Op}(X)$ contain $\varnothing$ and $X$ itself and be stable under arbitrary unions and finite intersections.

**14.2 Sheaves of sets**. Thus, we need to introduce some axioms on presheaves *characteristic of sheaves*.

We shall express theses axioms in terms of two properties:

**14.3 The category** $\mathrm{Et}(X)$ **of étale coverings of** $X$. We can wonder now whether or not we can define some full subcategory $\mathrm{Et}(X)$ of the category $\mathrm{Fib}(X)$ of fibre spaces over $X$, such that the restriction to $\mathrm{Et}(X)$ of the functor (1.3), becomes fully faithful. For instance in the case of a one-point space $\{e\}$, which are the topological spaces whose topology is known if we know the corresponding

[3] *Grothendieck* will consider mainly *sheaves of sets*, thus we shall omit this remark in the future. However later he will introduce various algebraic structures. The reader, knowing FAC, can take advantage of these lecture notes to strengthen his knowledge of sheaf theory by separating the topological properties from the algebraic ones.

[4] From the French part = subset : $\mathfrak{P}(X) = 2^X$.

underlying set ? There are several choices. One of them would be to introduce the discrete topology: for a given set $S$ there is just one discrete topology over $S$. Therefore if we take the restriction of the functor (1.3) to the category of discrete topological spaces over $\{e\}$ we obtain an equivalence of categories. Now we want to generalize this categorical equivalence to the general case of a general basis $X$. Thus we want to define a full subcategory of $\mathrm{Fib}(X)$ which in the $\{e\}$ case reduces to the category of discrete topological spaces over $\{e\}$. The property which looks "nice" is thus of a topological space $E$ which is *étale over* $X$. We shall define it!

A continuous map $\pi : E \longrightarrow X$ between topological spaces is called *étale* if it is a local isomorphism, in the following sense:

For every point $x \in E$ there exists an open neighbourhood $V \subset E$ of $x$ such that $\pi(V)$ is open in $X$ such that $\pi$ induces a map from $V$ into $\pi(V)$ which is a homeomorphism, which means that $\pi$ looks like a collection of local homeomorphisms between some open sets of the space $E$ upstairs and their projections $\pi(V)$ downstairs.

When this property holds we say also that $\pi$ is an *étale morphism* between the topological spaces $E, X$. This is in fact a pretty old one in the theory of functions of one complex variable, where certain maps appear which are étale over an open subset of the complex plane.

Let us give some examples of *"étaleness"*.

The most evident case is the inclusion map $U \longrightarrow X$ of an open set $U$ into $X$. This is the standard model!

Another example: Let us take a discrete topological space $I$, i.e. an abstract set endowed $I$ endowed with its discrete topology and let us consider the product space $E = I \times X$. This means that we take the disjoint some of the copies $a \times X$ ($a \in I$), which are open in $E$. Then the projection map $I \times X \longrightarrow X$ reduces to the "identity map" $(a, x) \mapsto x$ on these open copies of $X$.

Now we shall construct the category $\mathrm{Et}(X)$ of étale covering spaces of $X$, which is a subcategory of $\mathrm{Fib}(X)$. Let us look at the restriction functor (1.3) (going from $\mathrm{Fib}(X)$ to the category $\mathrm{Top}(X)$ of sheaves over $X$) to the subcategory $\mathrm{Et}(X)$. Then we get the generalisation of the case of discrete spaces over a one point space

$\{e\}$ that we were looking for! We obtain an *equivalence of categories*:

$$\mathrm{Et}(X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Top}(X) \tag{3.1}$$

on their own (étale coverings of $X \Leftrightarrow$ objects of $\mathrm{Et}(X)$) and we can jiggle back and forth between both languages. It turns out that for certain operations that we can perform on sheaves, the language of sections is by far the most convenient and in other the language of étale spaces is better.

**Examples**. Now maybe I should give some examples. Is there a suggestion?

*Question*: Is there no translation in English for the French adjective *étale*?

Answer: No, this is a question that was raised about fifteen years ago. In French we say: *un espace étalé dans un autre…*, which mans a space "spread out over another", but in terms o a morphism, to say that it is "spread out" doesn't look good, so why not introduce another word into English…? Duskin asks why not say just a local homeomorphism? Grothendieck's answer is that when we deal in analogous contexts with differentiable, analytic or algebraic spaces we would like to use the same word, since the formal properties are the same (instead of introducing local diffeomorphisms, local biholomorphic maps, etc). It is better to have a word which applies to all these particular cases…[5].

*Question*: Is it true that the oldest examples of étale maps come from the construction of Riemann surfaces with several copies of the **C**-plane?

Answer: Yes, provided you drop the branch points! All right, I will give this example:

1) Let us take the map $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ of the affine complex line, in itself given by $x \longrightarrow x^n$ $(n \geq 2)$. Then $f(0) = 0$. The *the restriction* $f|\mathbf{C}^*$ *onto itself* $(f(0) = 0)$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ *is étale*. In fact the fibre over an $x \neq 0$ on the second plane is the set $x_1, x_2, \ldots, x_n$ of the $n$ $n^{\text{th}}$-roots of $x$ in such a way that in choosing one of them, the others are obtained by multiplication with the $n^{\text{th}}$-roots of unity $\exp(2\pi i k n^{-1})$ $(h = 0, 1, \ldots, n-1)$. Then for any open neighbourhood $U$ of $x$ not containing $0$ obtain $n$ copies of $U$ covering $U$ homeomorphically.

[5] Later on in private conversation *Grothendieck* told me that also in his native German the word *étale* is used,…instead of looking for a translation.

Thus we see a difference in behavior of the map according to whether or not $x = 0$. The restriction to a neighbourhood of zero is not étale (0 is a ramification point).

2) The previous example can be extended to any dominant morphism $X \xrightarrow{f} Y$ ($\Leftrightarrow f(X)$ is dense in $Y$) between two complex irreducible non singular curves. Throwing out finitely many points of $Y$ (ramification points) the restriction of the map $f$ to $X -_R f^{-1}(R)$ ($R$-ramification points) is étale.

3) A third example of covering *étale everywhere* is the covering map $\hat{X} \longrightarrow X$ of a topological connected manifold by its universal covering space.

# FONCTIONS HOLOMORPHES
## (Théorie de Cauchy)

- Année Universitaire 1973-1974
- [scan]

FONCTIONS HOLOMORPHES
(Théorie de Cauchy)

## 0. Introduction

La théorie présentée dans les fascicules précédent

## 1. Prélude

## 2. Intégrales curvilignes

## 3. Primitives d'une forme différentiable

## 4. Fonctions holomorphes

## 5. Développement en série entière d'une fonction holomorphe

## 6. Homotopie de chemins

# FONCTIONS HOLOMORPHES
(Suite et fin)

- Année Universitaire 1973-1974
- [scan]

# FONCTIONS HOLOMORPHES
(Suite et fin)

**7. Principe du maximum**

**8. Développement de Laurent**

**9. Calcul des résidus**

# LETTER TO F. KNUDSEN
19.5.1973

---

- This text was published in: *Letter to F. Knudsen*. Determinant functors on exact categories and their extensions to categories of bounded complexes. Michigan Math. J., 50 (2):407-444, 2002
- Scan

Buffalo May 19, 1973

Dear Finn Knudsen,

Mumford sent me your notes on the determinant of perfect complexes, asking me to write you some comments, if I have any. Indeed I do have several - except for the obvious one that it is nice to have written up with details at least *one* full construction of that damn functor! I did not enter into the technicalities of your construction, which perhaps will allow to get a better comprehension of the main result itself. The main trouble with your presentation seems to me that the bare statement of the main result looks rather mysterious and not "natural" at all, despite your claim on page 3b! The mysterious character is of course included in the alambicated sign of definition 1.1. Here two types of criticism come to mind:

1) The sign looks complicated - are there not simpler sign conventions for getting a nice theory of $\det^*$ and its variance? It seems to me that Deligne wrote down a system that really did look natural at every stage - however he never wrote down the explicit construction, as far as I know, and the chap who had undertaken to do so, gave up in disgust after a year or two of letting the question lie around and rot!

2) Even granted that your conventions are as simple or simpler than other ones, the very fact that they are so alambicated and technical calls for an elucidation, somewhat of the type you give on page 3b with those $\varepsilon_i$'s. That is one would like to *define* first what any theory of $\det^*$ should be (with conventions of sign as yet unspecified), stating say something like a *uniqueness theorem* for every given system of signs chosen for canonical isomorphisms, and moreover *characterizing* those systems of sign conventions which allow for an existence theorem - which will include the existence of at least one such system of signs. If one has good insight into all of them, it will be a matter of taste and convenience for the individual mathematician (or the situation he has to deal with in any instance) to make his own choice!

A second point is the introduction of such evidently superfluous assumptions like working on Noetherian (!) schemes, whereas the construction is clearly so general as to work, say, over any ringed space and even ringed topos - and of course it will be needed in this generality, for instance on analytic spaces, or on schemes with groups of automorphisms acting, etc. Its just a question of some slight extra care in the writing up. It is clear in any case that the question reduces to defining $\det^*$ for strictly perfect complexes (i.e. which are free of finite type in every degree), and for homotopy classes of homotopy equivalences between such complexes, as well as for short exact sequences of such complexes. (NB! One may wish to deal, more generally, in the Illusie spirit, with strictly perfect complexes filtered - by a filtration which is finite but possibly not of level two - by sub-complexes with strictly perfect quotients.) Now this allows to restate the whole thing in a more general setting, which could make the theory more transparent, namely:

An additive category $C$ (say free (or projective) modules of finite type over a commutative ring $A$) is given, as well as a category $P$ which is a groupoid, endowed with an operation $\otimes$ together with associativity, unity and commutativity data, satisfying the usual compatibilities (see for instance Saavedra's thesis in Springer's lecture notes) and with all objects "invertible". In the example for $C$, we take for $P$ invertible $\mathbf{Z}$-graded modules over $A$, with tensor product, the commutative law $L \otimes L' \simeq L' \otimes L$ involving the Koszul sign $(1)^{dd'}$ where $d$ and $d'$ are the degrees of $L$ and $L'$ respectively. We are interested in functors (or a given functor) $f : (C, \mathrm{isom}) \longrightarrow P$, together with a functorial isomorphism $f(M+N) \simeq f(M) \otimes f(N)$, compatible with the associativity and commutativity data (cf. Saavedra for this notion of a $\otimes$); for instance, in the example chosen, we take $f(M) = \det^*(M)$, the determinant module where $*$ stands for the degree which we put on the determinant module (our convention will be to put the degree equal to the rank of $M$, which will imply that our functor is indeed compatible with the commutativity data). It can be shown (this was done by a North Vietnamese mathematician, Sinh Hoang Xuan) that given $C$ (indeed any associative and commutative $\otimes$-category would do), there exists a universal way of sending $C$ to $P$ as above - in the case considered, this category can be called the category of "stable" projective modules over $A$, and its main invariants (isomorphism classes of objects, and automorphisms of the unit object) are just the invariants $K^0(A)$ and $K^1(A)$ of myself and Dieudonné-Bass; but this existence of a universal situation is irrelevant for the technical problem to come. Now consider the category $K = K^b(C)$, of bounded complexes of $C$, up to homotopy. It is a triangulated category[1], and as such we can define the notion of a $\otimes$-functor from $K$ into $P$; it's first of all a $\otimes$-functor for the additive structure of $K$ (the internal composition of $K$ being $\otimes$), but with moreover an extra structure consisting giving isomorphisms $g(M) \simeq g(M') \otimes g(M'')$ whenever we have an exact triangle $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow M'$. This should of course satisfy various conditions, such as functoriality with respect to the triangle, case of split exact triangle $M = M' \oplus''$, case of the triangle obtained by completing a quasi-isomorphism $M' \longrightarrow M$, and possibly also a condition of compatibility in the case of an exact triangle of triangles. (I guess Deligne wrote down the reasonable axioms some day; it may be more convenient to work with the filtered $K$-categories of Illusie, using of course finite filtrations that split in the present context). Of course if we have such a $g : K \longrightarrow P$, taking its "restriction" to $C$ we get an $f : C \longrightarrow P$. The beautiful statement to prove would then be that conversely, every given $f$ extends, uniquely up to isomorphism, to a $g$, in other terms, that the restriction functor from the category o $g$'s to the category of $f$'s is an equivalence. The whole care, for such a statement, will of course be to give the right set of "sign conventions" for defining admissible $g$'s (that is compatibilities between the two or three structures on the set of $g(M)$'s - which in fact all can be reduced to giving the isomorphisms attached to exact triangles). In this general context, the group of signs $\pm 1$ is replaced by the subgroup of elements of order 2 of the group $K^1(P) = \mathrm{Aut}(1_P)$ (which is always a commutative group). The "sign map" $n \longrightarrow (1)^n$ from the group of degrees to the group of signs is replaced here by a canonical map $K^0(P)$(= group of isomorphism classes of $P$) $\longrightarrow K^1(P)$, associating to every $L$ in $P$ the symmetry automorphism

[1]Be careful that one has to take the term "triangulated category" in a slightly more precise sense than in Verdier's notes, the "category of triangles" being something more precise than a mere category of distinguished diagrams in $K$. We have a functor from the former to the latter, but it is not even a faithful one. (Illusie's treatment in terms of filtered complexes, in his Springer lecture notes, is a good reference) It is with respect to the category of "true" triangles only that the isomorphism $g(M) \simeq g(M') \otimes g(M'')$ will be functorial. For instance, if we have an *automorphism* of a triangle, inducing $u, u', u''$ upon $M, M'$ and $M''$, then functoriality is expressed by the relation $\det u = \det u' \det u''$ (which implies, replacing $u$ by $id + tu$, $t$ an indeterminate, that $\mathrm{Tr}\, u = \mathrm{Tr}\, u' + \mathrm{Tr}\, u''$) but this relation may become *false* if we are not careful to take automorphisms of true triangles, instead of taking mere automorphisms of diagrams.

of $L \otimes L$ (viewed as coming from an automorphism of the unit object by tensoring with $L \otimes L$). What puzzles me a little is that apparently, you have not been able to define $g$ in terms intrinsic to the triangulated category $K = K^b(C)$ - the signs you introduce in 1.1 do depend on the actual complexes, not only on their homotopy classes. I guess the whole trouble comes from the order in which we write any given tensor product in $P$, in describing $\det^*(M^\bullet)$ we had to choose such an order rather arbitrarily, and it is passing from one such to another that involves "signs".

If $C$ is an *abelian* category, there should be a variant of the previous theory, putting in relations on the $\otimes$-functors $f : C \longrightarrow P$ together with the extra structure of isomorphisms $f(M) \simeq f(M') \otimes f(M'')$ for all short exact sequences $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ satisfying a few axioms, and $\otimes$-functors $g : D^b(C) \longrightarrow P$. There should also be higher dimensional analogous, involving $P$'s that are $n$-categories instead of mere 1-categories, and hence involving (implicitly at least) the higher $K$-invariants $K^i(C)$ $(i \geq 0)$. But of course, first of all the case of the relation between $C$ and $K^b(C)$ in the simplest case should be elucidated!

I am finishing this letter at the forum where I have no typewriter. I hope you can read the handwriting!

Best wishes

A. Grothendieck

# LETTRE À H. SEYDI
## 13.2.1973

- Letter on the “ombres”.
- Scan

Châtenay le 13.2.1973

Cher Seydi,

Je viens de regarder votre travail sur les ombres, après une lecture plus approfondie par Illusie, dont je vous envoie ci-joint les commentaires détaillés. Comme lui, je pense que la théorie n'est par tout à fait au propre à décourager le lecteur. Une rédaction plus satisfaisante risque de vous demander pas mal de travail et de retarder votre soutenance inutilement. Comme vos résultats d'algèbre commutative sont parfaitement suffisants pour ayant sur ceux-ci. Si vous en avez l'envie, vous rédigerez par la suite sans vous presser un article sur les ombres - peut-être en collaboration avec autre mathématicien, au cas où cela vous inspirerait plus.

Pour qu'un travail sur les ombres soit commodément utilisable, il faudrait d'abord qu'il y ait un résumé des principaux résultats de la théorie, à quoi le lecteur peut se reporter, pour voir clairement de quoi il s'agit sans être troublé par les bizarreries de plan pouvant résulter de certaines nécessités de démonstration. De plus, il en est possible que de poser dès le début quelle théorie on veut obtenir, vous permette de voir plus clair vous-même et de court-circuiter notablement la construction effective de la théorie. En somme, il s'agit de poser d'emblée la question de trouver un foncteur

$$X \mapsto \mathrm{Omb}(X)$$

des schémas formels noethériens vers les espaces localement annelés, et un homomorphisme fonctoriel

$$i_X : X \longrightarrow \mathrm{Omb}(X),$$

satisfaisant à un certain nombre de propriétés naturelles, dont on ferait la liste, et qu'on pourrait espérer caractéristiques (i.e. de nature à définir la théorie à isomorphisme unique près sur le foncteur Omb cherché). Ou encore, on peut dégager d'abord un ensemble de propriétés caractéristiques (caractérisation de la théorie) et énoncer ensuite des propriétés supplémentaires importantes. Pour contribuer à donner de l'ouverture à l'exposé, il faudrait également faire une lise de problèmes naturels qui devraient être résolus, et une liste de situations où la théorie développée s'introduit de façon naturelle (cf les exemples indiqués par Illusie ; il y en a d'autres dans le travail d'Artin sur l'existence d'éclatements et de contractions, et dans un travail de Hironaka que j'ai oublié, mais que vous pourriez lui demander).

**Propriétés caractéristiques**. On peut, pour les formuler, introduire la notion d'espace *annelé géométrique* : c'est un espace annelé qui est noethérien, sobre (toute partie fermée irréductible a exactement un point générique), avec $\underline{O}_S$ cohérent, ses fibres locaux et noethériens, tel que pour tout $F$ constant et tout idéal cohérent $J$ tels que $\operatorname{supp} F \subset \operatorname{supp} \underline{O}_S/J$, il existe un $n \geq 0$ tel que $J^n F = 0$, tel que pour toute partie fermée $T$ de $S$ il existe un idéal cohérent $J$ tel que $T = V(J) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{supp} \underline{O}_S/J$, et tel que pour tout ouvert $U$ de $S$, toute section $f$ de $\underline{O}_U$ et tout faisceau cohérent $F$ sur $S$, et toute section $h$ de $F$ sur $U_f = U - V(f)$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $f^n h$ se prolonge en une section de $F$ sur $U$. Il faudra demander de plus, soit que tout faisceau cohérent sur un ouvert de $S$ se prolonge en un faisceau cohérent sur $S$ (ou serait-ce conséquence du reste), ou du moins que les conditions b) et c) restent valables quand on remplace $S$ par un ouvert quelconque, car on veut que tout ouvert d'un espace géométrique soit géométrique. Le propriété b) implique que $V(J) \subset V(J')$ implique (donc équivaut) à l'existence d'un $n$ tel que $J'^n \subset J$, donc $V(J) = V(J')$ à l'existence d'un $n$ tel que $J'^n \subset J$ et $J^n \subset J'$. Donc l'ensemble des parties fermées de $S$, avec sa relation d'ordre réticulée, s'identifie grâce à

[]

**Propriétés supplémentaires**. Il y a d'abord les propriétés qui relient de façon plus géométrique $X$ et $\operatorname{Omb}(X)$, qui n'ont guère été dégagés, sauf le fait que $i_X$ est un homéomorphisme de $X$ sur une partie fermée de $\operatorname{Omb}(X)$, provenant du fait plus précis que pour tout $n$, $i_X$ induit sur $X_n$ une immersion fermée. D'ailleurs, la connaissance de l'espace annelé $S$ et de sa partie fermée $S_0$ permet de retrouver $X$ à isomorphisme unique près comme le "complété formel" de $S$ le long de $S_0$. On peut se demander de trouver les propriétés sur un couple $(S, S_0)$ qui assurent qu'il provient bien d'un schéma formel comme ci-dessus. Il faut évidemment que $S$ soit géométrique, et que si $S$ est défini par l'idéal $J$, alors $(S_0, \underline{O}_S/J|S_0)$ soit un schéma - mais ce n'est évidemment pas suffisant. Mais définissant alors $S$ de façon évidente, ainsi que $S \xrightarrow{j} S$, une condition néc et suff est évidemment que $j^* : \operatorname{Coh}(S) \longrightarrow \operatorname{Coh}(S)$ soit une équivalence de catégories.

Il devrait être vrai que pour tout espace géométrique

[]

**Autres questions à traiter ou à signaler**.

1) La catégorie des Algèbres de présentation finie sur $X$ et sur $\mathrm{Omb}(X)$ est “la même”: devrait être facile, en termes d’une caractérisation de la catégorie des Alg. de prés. finie sur un $Y$ en termes de $\mathrm{Coh}(Y)$, comme les objets de $\mathrm{Ind}(\mathrm{Coh}(Y))$ munis d’une multiplication $A \otimes A$ ayant certaines propriétés…caractérisation qui devrait être valable pour des $Y$ tels que $X$ (schéma formel noethérien) et $S$ (ombre d’un tel)…(Il faudrait donner bien sûr des conditions générales sympa sur $Y$ qui soient manifestement vérifiées pour $X, S$).

2) Le foncteur image inverse par $i_X$ allant des schémas relatifs propre sur $S = \mathrm{Omb}(X)$ vers les schémas relatifs propres sur $X$, est une équivalence de catégories. (NB dans le cas relatif projectif cela devrait se ramener à 1) dans le cas d’Algèbres graduées…) NB si on prend des schémas de présentation finie sans plus, le foncteur n’est même pas fidèle, comme on voit en prenant des schémas relatifs sur $S - X_0$.

3) Un schéma relatif de présentation finie sur $X$ en définit-il un sur $S = \mathrm{Omb}(X)$ ? D’après 1) et 2) cela devrait être vrai tout au moins dans le cas affine relatif ou propre relatif. Le cas $X$ affine est déjà intéressant à regarder !

4) Pour tout faisceau cohérent $F$ sur $S = \mathrm{Omb}(X)$, l’homomorphisme canonique induit par $i_X$

$$\mathrm{H}^i(S,F) \quad \mathrm{H}^i(S, i_X(F))$$

est-il un isomorphisme ? (Si oui, cela impliquerait l’énoncé analogue pour les $\mathrm{Ext}^1$ globaux de Modules cohérents) Cela résulterait d’un théorème d’effacement de classes de cohomologie de faisceaux cohérents par immersion dans un cohérent (ou dans un -cohérent), sur des espaces tels que $X$ (schéma formel) et $S$ (ombre d’un tel).

5) Bien entendu, des questions analogues se posent en cohomologie étale - mais ce n’est sans doute pas le lieu dans un premier exposé de fondements !

6) Application de la théorie pour associer fonctoriellement un espace annelé géométrique à tout espace rigide-analytique quasi-cohérent sur le corps des quotients d'un anneau de valuation discrète complet, en utilisant la théorie de Raynaud, de tel façon qu'à la fibre générique d'un schéma formel de type fini sur $V$ soit associé $\mathrm{Omb}(X) - X_0$. C'est évident modulo la théorie de Raynaud - mais il resterait à étudier les propriétés de fidélité du foncteur obtenu. Serait-il pleinement fidèle. (C'est lié à la question suivante : soient $X$, $X'$ schémas formels de type fini sur $X$, $S = \mathrm{Omb}(X)$, $S' = \mathrm{Omb}(X')$, $u : S \longrightarrow S'$ un $K$-morphisme d'espaces localement annelés ($K$ étant le corps des fractions de $V$), existe-il un éclatement $\overline{X}$ de $X$ le long d'un sous-schéma concentré sur la fibre spéciale, et un morphisme $f : \overline{X} \longrightarrow X'$ qui induise $u$ ?) Relations entre propriétés locales sur l'espace rigide-analytique et sur son ombre...

# LETTRE À L. ILLUSIE
## 3.5.1973

- Letter on motives.
- [transcription]

Buffalo le 3.5.1973

Cher Illusie,

Je t'envoie quelques afterthoughts de notre conversation mathématique sur les motifs. J'avais dit à tort que les isomotifs n'ont pas de "modules infinitésimaux", c'est-à-dire que si $i : S_0 \longrightarrow S$ est une immersion nilpotente, le foncteur image inverse de motifs est une équivalence de catégories. Cela doit être vrai en car. $p > 0$ (plus généralement si $\mathcal{O}_S$ est annulé par une puissance de $p$), pour la raison heuristique (qu'on peut expliciter entièrement lorsqu'on travaille dans le contexte bien assis des schémas abéliens, ou des groupes de Barsotti-Tate) que lorsqu'on se ramène par dévissage au cas d'une nilimmersion d'ordre 1 ($J^2 = 0$), on peut définir une obstruction à la déformation sur $S$ d'un homomorphisme (ou isomorphisme) de (pas iso) motif sur $S_0$, qui sera tué par $p^i$ si $p^i$ tue $J$, donc qui sera tué lorsqu'on passe aux *iso*motifs. Par contre, en caractéristique nulle, les schémas abéliens à isogénie près ont la même théorie des modules infinitésimaux que les schémas abéliens tout court, et il faut s'attendre à la même chose pour les motifs et isomotifs. En termes des théories de systèmes de coefficients de de Rham ou de Hodge, l'élément de structure "filtration de DR" introduit bel et bien un élément de continuité, qui a pour effet de rendre faux le fait que pour ces coefficients, le foncteur image inverse par nilimmersion soit une équivalence. Il semble que donc qu'il faille bannir cette propriété (hors du cas des schémas de torsion) du yoga des "coefficients discrets". À moins qu'il se trouve que les besoins du formalisme (construction de foncteurs adjoints du type  etc.) nous impose de modifier la notion de faisceau de Hodge ou de DR sur un schéma $X$, en partant du genre de notion que nous avions regardée ensemble, et en passant ensuite au catégories  des catégories correspondantes associées à $X'$, où $X'$ est réduit et $X' \longrightarrow X$ est fini radiciel surjectif. Mais j'espère qu'il ne sera pas nécessaire de canuler ces notions ainsi. Une question liée est celle-ci : si $X$ est de car. $0$, un motif serein sur $X$ qui est "effectif de poids 1" définit-il bien un schéma abélien à isogénie près, ou seulement un schéma abélien à isogénie près au-dessus d'un $X'$ comme ci-dessus ? Ce dernier devrait être le cas en tout cas en car. $p > 0$, si on veut qu'un morphisme fini surjectif soit un morphisme de descente effective pour les isomotifs (et cela à son tour doit être vrai, étant vrai pour les $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux, si on veut que le foncteur isomotifs $\longrightarrow \mathbf{Q}_\ell$-faisceaux commute aux opérations habituelles et est fidèle – et on le veut à tout prix). Ainsi, en car. $p > 0$, si $k$ est un corps, un isomotif effectif de poids 1 sur $k$ devrait être, non un schéma abélien à isogénie près sur $k$, mais sur la clôture parfaite de $k$ !

Je n'ai pas le cœur net non plus sur la nécessité de mettre du "iso" partout dans la théorie des motifs. Je ne serais pas tellement étonné qu'il y a en caractéristique nulle une théorie des motifs (et *pas* iso), qui s'envoie dans les théories $\ell$-adiques (sur $\mathbf{Z}_\ell$, pas $\mathbf{Q}_\ell$) pour tout $\ell$. Pour ce qui est des coefficients de Hodge, il devrait être assez trivial de les définir "pas iso", de telle façon que les $\mathbf{Z}$-faisceau de torsion algébriquement constructibles (sur $X$ de type fini sur $\mathbf{C}$) en forment une sous-catégorie pleine, et avec un foncteur vers les $\mathbf{Z}$-faisceau algébriquement constructibles ("foncteur de Betti"). En caractéristique $p > 0$, j'ai des doutes très sérieux pour l'existence d'une théorie des motifs pas iso du tout, à cause des phénomènes de $p$-torsion (surtout pour les schémas qui ne sont pas projectifs et lisses). Ainsi, si on admet la description de Deligne des "motifs mixtes" de niveau 1 comme le genre de choses permettant de définir un $\mathrm{H}^1$ motivique d'un schéma pas pas projectif ou pas lisse, on voit que déjà pour une courbe algébrique sur un corps imparfait $k$, la construction ne peut fournir en général qu'un objet du type voulu sur la clôture parfaite de $k$. par contre, il pourrait être vrai que seul la $p$-torsion canule, et qu'il suffise de localiser par tuage de $p$-torsion, c'est-à-dire moralement de travailler avec des catégories $\mathbf{Z}[1/p]$-linéaires. On aurait alors encore des foncteurs allant des "motifs" (pas iso) vers les $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux (quel que soit $\ell \neq p$) mais pas vers les $F$-cristaux, mais seulement vers les $F$-isocristaux. Dans cette théorie, on renoncerait donc simplement à regarder en car. $p$ des phénomènes de $p$-torsion. Pourtant il est "clair" que ceux-ci existent et sont fort intéressants, tout au moins pour les morphismes propres et lisses, et on a bien l'impression que la cohomologie crystalline (plus fine que DR) pas iso en donne la clef. (Au fait, Berthelot est-il parvenu à des conjectures plausibles à ce sujet ?) On peut donc espérer que pour les motifs sereins et semi-simples fibre par fibre, on a des catégories sur Z, pas seulement sur $\mathbf{Z}[1/p]$, les Hom étant des $\mathbf{Z}$-modules de type fini. Cette impression peut être fondée par exemple sur le joli comportement des schémas abéliens sur les corps des fractions d'un anneau de val. discrète : dans la théorie de spécialisation, il se trouve qu'à aucun moment la $p$-torsion ne canule.

Bien sûr, alors même qu'on arriverait à travailler avec des catégories de motifs pas iso, dans "l'état actuel de la science", pour en déduire une théorie de groupes de Galois motiviques, étant obligé de s'appuyer sur ce que Saavedra a rédigé, on est obligé à tensoriser tout par $\mathbf{Q}$, et on ne trouve que des groupes algébriques sur $\mathbf{Q}$ ou des extensions de $\mathbf{Q}$. Néanmoins, on a certainement dans l'idée que les "vrais" groupes de Galois motiviques (associés à des foncteurs-fibres comme la cohomologie $\ell$-adique, ou la cohomologie de Betti) sont des schémas en groupes sur $\mathbf{Z}_\ell$ et sur $\mathbf{Z}$ plutôt que sur $\mathbf{Q}_\ell$ et sur $\mathbf{Q}$, et par là on devrait rejoindre le point de vue des groupes de type arithmétique de gens comme Borel, Griffiths, etc.

Encore une remarque : alors même qu'on travaille avec des isomotifs, on peut associer à un tel $M$ quelque chose de mieux qu'une suite infinie de $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux (lorsqu'il y a une infinité de $\ell$ premiers aux car. résiduelles). En fait, on a ce qu'on pourrait appeler un faisceau "adélique", i.e. un faisceau de modules (moralement) sur l'anneau des adèles finis de $\mathbf{Q}$. De façon précise, on peut considérer tous les $T_\ell(M)$ sauf un nombre fini comme étant des $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux (pas seulement des $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux). Éliminant toute métaphysique motivique, on peut dire que la théorie de Jouanolou écrite en fixant un $\ell$, pourrait être développée avec des modifications techniques mineures pour avoir une théorie des "$A$-faisceaux", où $A$ est l'anneau des adèles, ou un facteur direct $A'$ de celui-ci obtenu en ne prenant qu'un paquet de nombres premiers (pas nécessairement tous). On obtient ainsi une théorie de coefficients (au sens technique dont nous avions discuté) ayant comme anneau de coefficients la $\mathbf{Q}$-algèbre $A$ resp. $A'$. Comme $A$ et $A'$ sont "absolument plats", il n'y a pas introduction de $\underline{\mathrm{Tor}}_i$ gênants et de canulars de degrés infinis dans cette théorie.

Pour en revenir au yoga des coefficients "discrets", où j'avais énoncé une propriété de trop apparemment, par contre il y en a une autre que nous n'avions pas explicitée. Il s'agit de la définition de l'objet de Tate sur $S$ comme l'inverse de l'objet (inversible pour $\otimes$)

$$T(-1) = \mathrm{R}^2 f_*(1_P) = \mathrm{R}^2 g_!(1_E)$$

où $f : P \longrightarrow S$ resp. $g : E \longrightarrow S$ sont les projections de la droite projective resp. la droite affine sur $S$. D'autre part, les objets (définis en fait sur le schéma de base $S_0$ de la théorie de coefficients) interviennent également dans la formulation des théorèmes de pureté relative ou absolue et la définition des classes fondamentales locales (qui, j'espère, doit être possible en termes des données initiales de la théorie de coefficients envisagée, sans constituer une donnée supplémentaire), et dans le calcul de $f^!$ pour $f$ lisse (donc pour $f$ lissifiable), pour ne parler que du démarrage du formalisme cohomologique. En fait, on les retrouve ensuite à chaque pas.

Une dernière remarque. Je crois qu'il vaudrait la peine de formaliser, dans le cadre d'une théorie de coefficients plus ou moins arbitraires, les arguments de dévissage qui ont conduit, dans le cas des coefficients étales, aux théorèmes de finitude pour  pour $f$ propre, puis pour $f$ séparé de type fini seulement (moyennant résolution des singularités). Ces dévissages apparaîtraient maintenant comme des pas destinés à prouver *l'existence* de  (en même temps, s'il y a lieu, que sa commutation aux changements de base). À vrai dire, il n'est pas clair pour moi que l'on arrivera à des formulations qui s'appliqueraient directement aux $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux, disons; en fait, ce n'est pas ainsi que procède Jouanolou dans ce cas, qui au contraire se ramène aux énoncés déjà connus dans le cas des coefficients de torsion (procédé qui n'a guère de chance de s'axiomatiser dans le cas qui nous intéresse). Par contre, pensant directement au cas des motifs, on peut songer à utiliser un dévissage qui s'appuie entre autres sur les propriétés suivantes (quitte à se tirer par les lacets de souliers pour les établir chemin faisant) : (a) un (iso)motif se dévisse en motifs sereins sur des schémas irréd. normaux (NB on suppose qu'on travaille sur des schémas excellents); (b) un motif serein sur un schéma normal irréductible se dévisse en motifs sereins "simples" – en fait, il suffit de faire le dévissage en le point générique; (c) un motif simple (pourvu qu'on remplace la base $S$ par un voisinage ouvert assez petit du point générique) est un facteur direct d'un $\mathrm{R}^i f_{(1_X)}$, où $f : X \longrightarrow S$ est propre et lisse, tout du moins moyennant tensorisation par un objet de Tate $T(j)$ convenable. Ainsi, moyennant au moins deux gros grains de sel qu'il faudrait essayer d'expliciter un jour, les motifs généraux (toujours iso, bien sûr) se ramènent aux motifs plus ou moins naïfs tels qu'ils sont décrits notamment dans Manin et Demazure. Cela s'applique tout aux moins aux objets–quant aux morphismes, c'est une autre paire de manches – et encore pire pour les $\mathrm{Ext}^i$…

À ce propos, on peut se convaincre que l'application qui va des classes d'extension de deux motifs (dans la catégorie abélienne des motifs) vers le $\mathrm{Ext}^1$

défini comme Hom$(M,N[1])$ (Hom dans la catégorie triangulée) ne devrait pas être bijective (mais sans doute injective). Plaçons-nous en effet sur une base $S$ spectre d'un corps fini, prenons pour $M$ et $N$ le motif unité $1_S = T_S(0) = T(0)$, de sorte que le $\mathrm{Ext}^1$ n'est autre que $\mathrm{H}^1(S, T(0))$. Les calculs $\ell$-adiques du $\mathrm{H}^1$ nous suggèrent fortement que le $\mathrm{H}^1$ absolu motivique est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Q}$. Mais d'autre part les classes d'extension de $T(0)$ par $T(0)$ doivent être nulles (sur tout corps $K$) si $M$ et $N$ sont des motifs de poids $r$ et $s$ avec $r \neq s$, si on admet le yoga de la filtration d'un motif par poids croissants, avec gradué associé semi-simple. (NB En fait, sur un corps fini, la catégorie des motifs devrait être tout entière semi-simple, i.e. toute extension devrait être triviale, i.e. la filtration croissante précédente devrait splitter canoniquement : cela résulte du fait que l'endomorphisme de Frobenius du motif opère avec des "poids" différents sur les composantes des différents poids–plus un petit exercice de catégories tannakiennes.)

Bien cordialement

Alexandre

# LETTRE À P. DELIGNE, J. GIRAUD ET J.-L. VERDIER
23.6.71974

---

- [scan]

Villecun le 23.6.71974

Chers Deligne, Giraud, Verdier,

Vous savez peut-être qu'une mathématicienne vietnamienne, Hoang Xuan Sinh

Pour ce qui est des formalités administratives, c'est la frère de Hoan Xuan Man, qui habite à Antony, qui s'en occupera pour elle. À toutes fin utile, je vous passe son adresse :

Hoang Xuan Sinh, 49 rue de Châtenay, Estérel, 92 Antony, Tél BER 63 79.

Dans l'attente d'une réponse prochaine, bien cordialement

Schurik

PS. N'ayant pas l'adresse de Giraud, je demande à Verdier s'il peut bien lui transmettre la lettre et le rapport. Je pense que celui-ci doit pouvoir servir comme rapport de thèse aussi vis à vis de l'administration universitaire en France.

# LETTRE À P. DELIGNE[1]

## 7.8.1974

---

- [scan]

[1] Transcribed with the collaboration of M. Künzer

7.8.1974

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par mon jambe d'assurer un cours de 1^er^ cycle au 1^er^ trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les fourbis de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". à ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si $M$, $N$ sont deux faisceaux abéliens sur un topos $X$, et $\tau_{\leq 2}\,\mathrm{R\,Hom}(M,N) = E(M,N)$ est le complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} \mathbf{H}^i &= \ {}^i(M,N) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ \mathbf{H}^i &= \ 0 \qquad\qquad \text{si } i \notin [0,2], \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

(T)
$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(M, 2N)[-2] \arrow[dl] & \\ E(M,N) \arrow[rr] & & E'(M,N), \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

donc $E'(M,N)$ est un complexe dont les invariants $\mathbf{H}^i$ sont ceux de $E(M,N)$ en degré $i \neq 2$, et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

(∗)
$$0 \longrightarrow {}^2(M,N) \longrightarrow \overbrace{\mathbf{H}^2(E'(M,N))}^{P(M,N)} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Hom}(M, 2N) \longrightarrow 0\,.$$

Heuristiquement, $E'(M,N)$ est le complexe qui exprime le " 2-champ de Picard strict" formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) " épinglés" par $M$, $N$ sur des objets variables de $X$, en admettant que ta théorie pour les 1-champs de Picard stricts s'étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute) ; de même $E(M,N)$ correspond aux champs de Picard *stricts* épinglés par $M$, $N$. La suite exacte (∗) se construit en tous cas canoniquement " à la main", où le terme médian est le faisceau des classes à " équivalence" près des champs de Picard épinglés par $M$, $N$, or étant l'invariant qui s'obtient en associant à toute section $L$ d'un champ de Picard la symétrie de $L \otimes L$, interprété comme section de $2N$. Je sais prouver (sauf erreur) que tout homomorphisme

$M \longrightarrow 2N$ provient d'un champ de Picard convenable (épinglé par $M$, $N$) (a priori l'obstruction est dans $\mathrm{Ext}^3(X; M, N)$, mais un argument 'ùniversel" prouve qu'elle est nulle). Cela prouve que l'extension $(*)$ est bien proche d'être splittée : toute section du troisième faisceaux, sur un objet quelconque de $X$, se remonte – en d'autres termes, l'extension a une section "ensembliste". Bien sûr, il y a mieux en fait : toute section sur un $U \in \mathrm{Ob}\, X$ "provient" d'un élément de $H^2(U, E'(M, N))$ (hypercohomolo - $H^2$).

*Exemple.* Soit $A$ un anneau sur $X$, soient $M$, $N$ respectivement les faisceaux $K^0$, $K^1$ associés au champ additif des $A$-Modules projectifs de type fini (p. ex.). Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par $M$, $N$, d'où une section canonique du terme médian $P(M, N)$ de $(*)$.

*NB.* Tout ce qui précède a les fonctorialités évidentes en $M$, $N$, $X$, ....

*Question.* Le triangle exact (T) et la suite exacte $(*)$ sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie ...) ? Connaissent-ils des variantes "supérieures" ? (Un principe "géométrique" pour les obtenir pourrait être via des $n$-champs de Picard non nécessairement stricts ... )

Je profite de l'occasion pour soulever une question sur la "cohomologie relative". Soit $q : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos. Si $F$ est un faisceau abélien (ou un complexe d'iceux) sur $Y$, peut-on définir *fonctoriellement* en $F$ la cohomologie relative $\mathrm{R}\Gamma(YX, F)$ (de la catégorie dérivée de $\mathrm{Ab}(Y)$ dans celle de Ab) ? L'interprétation "géométrique" en termes d'opérations sur des $n$-champs de Picard ($n$ "grand") suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente " à la main" que dans les deux cas extrêmes :

(a) $q$ est "$(-1)$-acyclique", i.e. pour tout $F$ sur $Y$, $F \longrightarrow q_* q^* F$ est injectif (*NB* C'est le cas de $Y/P \longrightarrow Y$ si $P \longrightarrow e_Y$ est un épimorphisme – c'est donc le cas de ${}_e \longrightarrow_G$ plus haut.)

On prend

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Coker}(F \longrightarrow q_*(\underbrace{C(q^*(F))}_{\text{résolution injective}}))[-1]) .$$

(b) $\forall\, F$ injectif sur $Y$, $q^*(F)$ est injectif et $F \longrightarrow q_* q^* F$ est un épimorphisme (exemple : $q$ inclusion d'un ouvert $U e_Y$). On prend

$$\mathrm{R}\Gamma_Y(\mathrm{Ker}(\underbrace{C(F)}_{\text{résolution injective}} \longrightarrow q_* q^*(C(F)))) \,.$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d'un morphisme de complexes (tel que

$$F \longrightarrow q_*(q^*(F)) \qquad\qquad )$$

n'est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) par rapport à la flèche dont on veut prendre le cône. Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

*Question pour Illusie :* Dans sa théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des $\mathrm{H}^3({}_G/X, -)$ resp. des $\mathrm{Ext}^2(X; -, =)$. Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (supposée écrite) des Gr-champs – resp. via ta théorie des champs de Picard ? J'ai `[phrase incomplète]`

Je te signale que j'ai réfléchi aux Gr-champs sur $X$. Si $G$ est un Groupe sur $X$, $N$ un $G$-Module, les Gr-champs sur $X$ « épinglés par $G$, $N$ » forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l'opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à 1 échelon à qui lui correspond est le tronqué

$$\tau_{\leq 2}(\mathrm{R}\Gamma({}_G X, N)[1]) \,.$$

(*NB* la cohomologie de $\mathrm{R}\Gamma({}_G X, N)$ commence en degré 1.) Plus géométriquement, un Gr-champ sur $X$ épinglé par $(G, N)$ est essentiellement “la même chose” qu'une 2-gerbe sur ${}_G$, liée par $N$, et munie d'une trivialisation au dessus de $X \approx_e = ({}_G)/P$ (où $P$ est l'objet de ${}_G$ “torseur universel sous $G$ ”). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se trouve que dans celle-ci, les 3-flèches sont triviales (i.e. si source $=$ but, ce sont des identités) – cela ne fait qu'exprimer $\mathrm{H}^0({}_G/X, N) = 0$ (i.e. $\mathrm{H}^0({}_G, N) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, N)$ injectif…). Donc la 3-catégorie peut être regardée comme une 2-catégorie – et “c'est” celle des Gr-champs sur $X$ épinglés par $G$, $N$. Si on veut localiser sur $X$, et décrire le 2-*champs* de Picard sur $X$ des champs de Picard (sur des objets variables de $X$) épinglés par $G$, $N$, on trouve qu'il est exprimé par le complexe

$$\tau_{\leq 2}(\mathrm{R}\, p_{G*}\, \mathrm{Coker}(N \longrightarrow \mathrm{R}\, q_{G*} \overbrace{C(q_G^* N)}^{\text{résolution injective}})) \,,$$

où $p_G : {}_G \longrightarrow X$ et $q_G : {}_e \approx X \simeq ({}_G)_P \longrightarrow {}_G$. Toutes ces descriptions étant compatibles avec des variations de $G, N, X$, cela donne en principe une description de la 2-catégorie des Gr-champs, avec $X$, $G$, $N$ variables…

# LETTRE À L. BREEN
## 5.2.1975

- This letter was included as an appendix to Pursuing stacks.
- [scan]

# LETTRE À L. BREEN
## 5.2.1975

---

- This letter was included as an appendix to Pursuing stacks.
- [scan]

# LETTRE À L. BREEN
17/19.7.1975

- This letter was included as an appendix to Pursuing stacks.
- [scan]
- [scan] of translation by R. Brown and [scan] of notes

# COMPLEXE DE DE RHAM À PUISSANCES DIVISÉES ET OMBRES DES MODULES

- IHÉS. 12 Décembre 1975
- A [transcription]

# COMPLEXE DE DE RHAM À PUISSANCES DIVISÉES ET OMBRES DES MODULES

| | |
|---|---|
| géométrie | différentielle |
| — | analytique |
| — | algébrique |
| — | arithmétique |
| topologie algébrique | $\begin{cases}\text{PL}\\ \text{semi-simplicial}\end{cases}$ |

1) Historique

a) Notion de forme diférentielle (*Poincaré*) et formule de *Stokes*

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \quad (\text{d'où } \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X, \mathbf{C}).)$$

b) Th. de *De Rham* (conjecturé par *E. Cartan*). Mais [-] Maintenant bien compris à th. des faisceaux, lemme de Poincaré

c) Théorie de *Hodge* des intégrales harmoniques (structure supplémentaire bigraduée sur $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(X)$ si $X$ kählérienne compacte.)

d) Théorème de *Cartan-Serre* sur variétés de Stein (car Lemme de Poincaré valable dans l'analytique).

e) Cas des variétés algébriques ou schémas sur corps de base (ou schéma de base général) : *Dwork*, *Washnitzer-Monsky*, plus tard le yoga "cristallin" développé par *Berthelot*, *Illusie*, *Messing*, *Mazur* (cf avec Hartshorne, Herrera, Ogus, Bloch (?)). Ici on trouve des théories cohomologiques qui ne sont plus à "anneau de coefficients" de caractéristique nulle, i.e. contenant $\mathbf{Q}$ — i.e. on perd [?] les phénomènes de torsion [?]. Du point de vue Weil, c'était un défaut irréparable.

f) Th. de *Grothendieck* pour variétés algébriques sur $\mathbf{C}$ (généralise par *Deligne*, *Hartshorne* pour des coefficients plus généraux). Ceci donne confiance (du moins en car. 0) en la signification topologique de la cohomologie de De Rham "algébrique" des schémas algébriques.

g) Complexe de De Rham-Sullivan pour espaces topologiques généraux : *formes différentielles singulières* $C^\infty$ (resp. $\mathbf{C}$-algébriques, resp. $\mathbf{R}$-algébriques, resp. $\mathbf{Q}$-algébriques). Donne la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$, resp. $\mathbf{Q}$) (facile)

$$\begin{array}{ccccc} C^\bullet_{\mathrm{DRS}\,\mathbf{R}-\mathrm{alg.}} & \subset & C^\bullet_{\mathrm{DRS}\,C^\infty} & \subset & C^\bullet_{\mathrm{DRS}} \\ & & \cup & & \\ & & C^\bullet_{\mathrm{DR}} & & \end{array}$$

Sullivan montre mieux que le $\mathbf{Q}$-type d'homotopie de $X$ est récupéré si $X$ est simplement connexe - de façon plus précise, il y a (sauf erreur) une équivalence de catégories donné par $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}$ entre la catégorie homotopique faible des espaces connexes et simplement connexes (du point de vue singulier), et une certaine catégorie dérivée formée avec les $\mathbf{Q}$-algèbres graduées associatives anticommutatives à degrés $\geq 0$ telles que $\mathrm{H}^0(A) \xleftarrow{\sim} \mathbf{Q}$ , $\mathrm{H}^1(A) \simeq 0$. Il y a une théorie des modèles minimaux pour de telles algèbres, une façon très simple de récupérer les $\pi_i \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ en termes d'un tel modèle… (On renvoie au papier de Sullivan.)

Mais à nouveau, on prend la torsion !

Donc du théorème d'isomorphisme de Sullivan

$$\mathrm{H}^\bullet(C^\bullet_{\mathrm{DRS}/\mathbf{Q}}(X,\mathbf{Q})) \simeq \mathrm{H}^\bullet(X,\mathbf{Q})$$

$\forall n \geq 0$,

$$[n] \quad \text{simplexe type de dimension } n,$$

$$\Delta^{[n]} \quad \text{sa réalisation géométrique}^{1},$$

$$E^{[n]} \quad \text{l'espace affine qu'il soustend [plutôt engendré] (avec une } \mathbf{Q}-\text{structure})^{2},$$

$$\mathrm{DRS}^{\bullet}_{[n]} = C^{\bullet}_{\mathrm{DR}}(E^{([n]}) \quad \text{son complexe de De Rham } \mathbf{Q}-\text{algébrique.}$$

C'est contravariant en $[n]$, d'où

$$\mathrm{DRS}^{\bullet}_{*} = (\mathrm{DRS}^{\bullet}_{[n]})_{n \geq 0}.$$

Algèbre différentielle graduée semi-simpliciale (et même simpliciale) - à degrés $\geq 0$, anticommutative.

Pour tout espace topologique $X$, $S_*(X)$ son complexe singulier semi-simplicial. On a

$$C^{\bullet}_{\mathrm{DRS}}(X, \mathbf{Q}) \simeq \mathrm{Hom}(S_*(X), \mathrm{DRS}^{\bullet}_{*}),$$

i.e.

a) $C^{\bullet}_{\mathrm{DRS}}(X, \mathbf{Q})$ dépend de $X$ si $S_*(X)$ [plutôt 'ne dépend que']

b) Sur $(\mathrm{Ss}) = (\mathrm{Ens}_*)$, le foncteur $C^{\bullet}_{\mathrm{DRS}}(-, \mathbf{Q})$ est représentable par $\mathrm{DRS}^{\bullet}_{*}$.

Or

a) $\mathrm{DRS}^{\bullet}_{*}$ est une résolution de $\mathbf{Q}_*$ (dans la catégorie des groupes semi-simpliciaux). (Lemme de Poincaré algébrique sur l'espace $\mathbf{Q}$-affine $E^{[n]}$).

b) Les composantes $\mathrm{DRS}^{i}_{*}$ ($i \geq 0$) de $\mathrm{DRS}^{\bullet}_{*}$ sont des objets abéliens acycliques du topos (Ss) (ce qui revient à dire que leurs $\pi_j(\mathrm{DRS}^{i}_{*})$ sont nuls, ce qu'on vérifie facilement).

(Il [?] serait [Hom] des formes $C^{\infty}$ à coefficients dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, ou analytiques réels, ou analytiques complexes…)

On aimerait avoir une $\mathbf{Z}$-algèbre différentielle [graduée] $C^{\bullet}_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{Z})$ différentielle [?] [?dont tout sur] $X$ [?(ou $S_*(X)$)] dont [?] $\mathbf{Z}$ [?] qu'il y a [?]

Si on prend $C^{\bullet}_{\mathbf{Z}-\mathrm{DR}}(E^{[n]})$ (où $E_{[n]}$ a même une $\mathbf{Z}$-structure affine), c'est a) qui devient déjà faux : pour intégrer $\int x^n dx$, il faut un dénominateur avec $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ! Mais en géométrie, on est déjà familiarisé avec une façon de sauter à pieds-joints par dessus le conneau, en introduisant des puissances divisées et de polynômes (ou séries formelles) à puissances divisées. Si $E^{[n]}$ avait son origine sur $\mathbf{Z}$ (i.e. provenant canoniquement d'un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini), on aurait un complexe de De Rham à puissances divisées. Mais pas pour un espace affine ! Notons

$$\begin{aligned}\mathrm{DRS}^{\bullet}_{[n]} \qquad & \simeq C^{\bullet}_{\mathrm{DR}/\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[(X_i)_{0\leq i\leq n}]/\Sigma X_i - 1) \\ & \simeq \mathbf{Q}[X_i, dX_i]_{0\leq i\leq n}/\Sigma X_i - 1, \Sigma dX_i \\ & \simeq \mathbf{Q}[X_0, \dots, X_{n-1}][dX_0, \dots, dX_{n-1}]\end{aligned}$$

Donc on aurait envie de prendre

$$\mathbf{Z}\{X_i\}[dX_i]_{0\leq i\leq n}/(\Sigma X_i - 1, \Sigma dX_i),$$

où $\{\}$ désigne les polynômes à puissances divisées, mais on n'est plus isomorphe à $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n+1}\}[dX_0, \dots, dX_{n-1}]$ ([?] bien une résolution de $\mathbf{Z}$), car si on [?] de la relation [?] $\Sigma_0^n X_i - 1 = 0$, $X_n = 1 - \Sigma_0^{n-1} X_i$ (et $dX_n = -\Sigma_0^{n-1} dX_i$ de $\Sigma_0^n dX_i = 0$), on a le "bec" [?] que $1 - \Sigma_0^{n-1} X_i$ n'appartient pas à l'idéal à puissances divisées donné dans $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ [?] (donc on ne voit pas comment envoyer $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ dans $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ avec l'élément [?] $\Sigma_0^n X_i - 1$ dans le noyau…).

On s'en tire en prenant un anneau de coefficients différent de $\mathbf{Z}$, soit $S$, avec un "paramètre" $t \in S$ fixé dont on sache *prendre des puissances divisées* (i.e. $t \in J$, $J$ idéal à puissances divisées [?]), et en remplaçant [?] les équations $\Sigma X_i = 1$ de $E^{[n]}$ par l'équation

$$\Sigma X_i = t \quad \text{dans} \quad S^{n+1}$$

et définissant

$$C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}[n]}(S, J, t) \simeq (S\{X_i\}_{o\leq i\leq n})/(\Sigma X_i - t, \Sigma dX_i).$$

On divise par l'idéal *à puissances divisées* engendré [?] car dans $S\{X_i\}[dX_i]$ [?] l'idéal formé des formes [?] à puissances divisées d'augmentation dans $J$ est à puissances divisées,

$$[C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}[n]}(S,J,t)\simeq] \quad (S\{X_i\}_{0\le i\le n}/(\Sigma X_i - t)_{\mathrm{pd}})\otimes_S \Lambda^*(S^{[n]}/\operatorname{diag} S^{[n]}).$$

C'est une $S$-algèbre différentielle graduée anticommutative à degrés [?] augmentée vers $S/J$ et à puissances divisées sur l'idéal noyau de l'augmentation

$$C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}[n]}(S,J,t)\longrightarrow S/J^3;$$

et comme telle isomorphisme à $S\{X_0,\dots,X_{n-1}\}\ [dX]$, qui *est une résolution de* $S$. Pour $[n]$ variable, on trouve

$$C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}*}(S,J,t) = (C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}[n]}(S,J,t))_{n\ge 0},$$

qui est une résolution semi-simpliciale (et même simpliciale) de $S$, avec augmentation vers $S/J = k$, et puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, [?]. Elle dépend fonctoriellement de $(S,J,t)$, et elle peut de [? un] pour $X_* \in \mathrm{Ss}$

$$C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*;S,J,t) = \operatorname{Hom}(X_*, C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}}(S,J,t)),$$

foncteur contravariant en $X_*$[4] (et si $X$ espace topologique [?]

$$\begin{aligned} C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}}(X;) &= C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}}(S_*(X);) \\ &= \operatorname{Hom}(S_*(X), C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}*}() \quad ). \end{aligned}$$

[À ne pas confondre : $S$ (anneau de base) et $S^*$ (ensemble simplicial singulier)].

Mais on ne peut dire en général quelle est sa cohomologie (on a seulement $\mathrm{H}^{\mathrm{DR\,pd}(X;S,J,t)\longrightarrow \mathrm{H}^\bullet(X,S)}$), et en tous cas [?]

Alors soit $k$ anneau commutative (associatif unitaire), et $T$ une indéterminée, on prendra dorénavant

$$S = k\{T\}, \quad J = k\{T\}^+ = \operatorname{Ker}(k\{T\}\ddot{k}), \quad t = T.$$

Donc

$$\begin{cases} C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd},[n]}(S,J,t) \simeq \underbrace{k\{T,X_0,\dots,X_n\}/(\Sigma X_i - T)_{\mathrm{pd}}}_{\simeq k\{X_0,\dots,X_n\}} \otimes_k \Lambda^\bullet k^{[n]}/k \\ S/J \simeq k \end{cases}$$

[3] [?] i.e. $d(X^{[n]}) = X^{[n-1]}dx$[?].

[4] à valeurs dans les $S$-algèbres graduées différentielles $S/J$-augmentées à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la différentielle.

Soit

$$\Phi_{k*} = ([n] \mapsto k^{[n]}) \longleftarrow k_* = ([n] \mapsto k[?])$$

immersion diagonale

$$\Psi_{k*} = \Phi_{k*}/k_* = ([n] \mapsto k^{[n]}/\underbrace{k}_{\text{diag}}).$$

On a alors

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}*}(k) \overset{\text{def}}{=} C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}*}(k\{T\}, k\{T\}^+, k) \simeq \Gamma^{\bullet}_k \Phi_{k*} \otimes_k \Lambda^{\bullet}\Psi_{k*}[?],$$

$$\boxed{C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}*}(k) \simeq \Gamma^{\bullet}_k \Phi_{k*} \otimes_k \Lambda^{\bullet}\Psi_{k*}}.$$

**Structure**. $k\{T\}$-Algèbre différentielle *bigraduée* (degré complexe [?] *et* degré extérieur, d'où degré total)[5] unitaire associative alternée (anticommutative et carrés des éléments de degré impair nuls), augmentation vers [?] à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, avec [?].

Ces structures sont héritées [?] par les

$$\boxed{\begin{aligned} C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*, k) &\overset{\text{def}}{=} C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*, k\{T\}, k\{T\}^+, T) \\ &= \mathrm{Hom}(X_*, C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}*}(k)) \end{aligned}}$$

et dépendent de façon contravariant de $X_*$ (covariant de $k$).

$\Phi_{k*}$ est un $k$-Module semi-simpliciale homotope à 0, donc $\Gamma^p_k(\Phi_{k*}) \otimes \Lambda^q \Psi_{k*}$ est homotope à $\Gamma^p_k(0) \otimes \Lambda^q\Psi_{k*}$, donc homotope à 0 si $p \neq 0$. Donc $C^{p,q}_{\mathrm{DR\,pd}*}(k)$ est homotope à 0 (donc acyclique) si $p = 0$ [plutôt si $p \neq 0$]. En degré total donné $n$, on a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^{n,0}_{\mathrm{DR\,pd}*} \arrow[r] & C^{n-1,1}_{\mathrm{DR\,pd}*} \arrow[r] & C^{n-2,2}_{\mathrm{DR\,pd}*} \arrow[r] & \cdots & C^{1,n-1}_{\mathrm{DR\,pd}*} \arrow[r] & C^{0,n}_{\mathrm{DR\,pd}*} \\
& k_* \arrow[u] & & & & &
\end{tikzcd}$$

i.e. on trouve une résolution de longueur $n$ de $k_*$ par des $k$-modules semi-simpliciaux qui sont acycliques sauf le dernier - donc on peut la considérer comme

[5] Bigraduation venant de la *graduation* de $S$, en tant que [?] est hom. (ici de degré 2) [?].

un tronqué de degré $n$ d'une résolution flasque de $k_*$ - la cohomologie de ses sections sur un $X_*$ est donc la cohomologie de $X_*$ tronquée en degré $n$ :

$$\mathrm{H}^{p,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k) = \begin{cases} \mathrm{H}^q(X_*,k) & \text{si } q \leq p+q, \quad \text{i.e. } p \geq 0 \\ [?]. \end{cases}$$

[?] structure [?] de $k\{T\}$-module de $\mathrm{H}^{\bullet,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ ? On voit que pour le *degré total* (égal au degré extérieur *p plus q* [pluôt degré extérieur *q plus p* ?]), on trouve $\mathrm{H}^0(X_*,k) \otimes_k k\{T\}$ tronqué en degré $\geq q$, donc

$$\mathrm{H}^{\bullet,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k) \simeq \tau_q(\mathrm{H}^0(X_*,k) \otimes_k k\{T\}) \qquad \underbrace{[q]}_{\text{translation [?] de degrés pas } -q} .$$

Si on réindexe le bidegré par le couple (degré total, degré extérieure)

$$\mathrm{H}'^{p,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k) = \mathrm{H}^{\overbrace{n-q}^{p},q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$$

(donc la condition de degré $p,q \geq 0$ devient $n \geq q \geq 0$, l'opérateur différentielle est de bidegré $(0,1)$, donc c'est un homomorphisme *(homogène)* de $S$-modules gradués), or trouve

$$\mathrm{H}'^{\bullet,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k) \simeq \tau_q(\mathrm{H}^q(X_*,k) \otimes_k k\{T\}).$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les structures multiplicatives (et bien entendu fonctoriels an $X_*$, $k$, ...). Donc *a priori* on en récupère (via $\mathrm{H}'^{\bullet,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ les $k$-modules $\mathrm{H}^q(X_*,k)$ et leurs cup-accouplements [?] les $k$-modules gradués $\tau_q(\mathrm{H}^q(X_*,k) \otimes_k k\{T\})$). Ce qui donne un espoir que le complexe de De Rham à p.d de $X_*$ à coefficients dans $k = S/J$ disons [?] (comme dans le cas $k = \mathbf{Q}$ qu'il contient) donne une information homotopique précise sur $X_*$, c'est l'observation qu'en fait, pour un $k$-module $M$ quelconque, on récupère $M$ à isomorphisme canonique près par la connaissance d'un quelconque des tronqués $\tau_q(M \otimes_k S)$ (quelque grand que soit $p$...), qu'on appelle le $q$-ième ombre de $M$, et de même tout accouplement $M \otimes N \longrightarrow P$ est connu quand on connaît, pour $q$ assez grand, l'accouplement correspondant $\tau_q(M_S) \otimes \tau_q(N_S) \longrightarrow \tau_q(P_S)$. Donc une $k$-algèbre gradué $\mathrm{H}^\bullet$ à degrés $\geq 0$ est connu à isomorphisme canonique près quand on connaît la $k$-algèbre bigraduée dont les composantes de degré "extérieure" $q$ sont les

$\tau_q(\mathrm{H}^q \otimes_k S)\ldots$ Cette “théorie des ombres” étant supposée acquise, on veut que la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ (en tant que $S$-algèbre différentielle bigraduée) implique celle de l'algèbre graduée $\mathrm{H}^0()X_*,k$ - et en raffinant un peu, on veut qu'on trouve même $\mathrm{R}\Gamma(X_*,k)$ comme étant [?]

$$\mathrm{R}\Gamma(X_*,k)\otimes^L \mathrm{R}\Gamma(X_*,k) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma(X_*,k).$$

**Remarques et Problèmes**

a) Si $k$ est une $\mathbf{Q}$-algèbre, de sorte que $C^{\bullet}_{\mathrm{DRS}}(X_*,k)$ est défini, on le reconstruit à partir de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ par la formule

$$C^{\bullet}_{\mathrm{DRS}}(X_*,k)C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)/(T-1).$$

Plus généralement, *quelque soit* $k$, on a

$$C^{\bullet}_{\mathrm{DRS}}(X_*,\underbrace{k\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}}_{k_{\mathbf{Q}}}) \simeq C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)/(T-1).$$

(et plus généralement encore, si $(S,J,t)$ comme au début

$$C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*;S,J,t)/(t-1) \simeq C^{\bullet}_{\mathrm{DRS}}(X_*,S_{\mathbf{Q}})/(t-1) \quad )$$

[plutôt $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,S,J,t)/(t-1)$].

b) Je suis convaincu que la structre à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation de

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X_*,k) = \mathrm{Hom}(X_*,k_*)$$

est importante[6]. Il n'est peut-être pas ici [?] de se poser la question pour $X_*$ simplement connexe, si la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ [?] *avec toutes ses structures* (y compris celle des puissances divisés) n'implique pas la connaissance du type d'homotopie de $X_*$ [?] plus précisément appelé *complexe de De Rham à puissances divisées virtuel sur* $k$, une $k$-bialgèbre différentielle $k$-augmentée, associative, unitaire, alternée à différentielles

[6] Avec [?] condition de finitude sur $X_*$, savoir les $\mathrm{H}_i(X_*)$ [?] de type fini.

de bigebré $(-1,+1)$ à bidegrés $\geq 0$, avec puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la differentielle ($d(x^{[n]}) = x^{[n-1]}dx$), et telle que les $\mathrm{H}^{\bullet,q}(C^{\bullet\bullet})[-q]$ sont des $q$-ombres (auquel cas on récupère à partir de $C^{\bullet\bullet}$ un élément de $D(k)$ avec structure multiplicative associative unitaire commutative…), passe à une "catégorie dérivée" de ces complexes en inversant les flèches qui sont des quasi-isomorphismes, d'où par $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ un foncteur

$$\underbrace{(\mathrm{Hot})}_{\text{types d'homotopie}} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{DR\,pd})}_{\text{catégorie dérivée des complexes DR pd}},$$

et on peut se demander si sa restriction aux espaces connexes et simplement connexes avec des $\mathrm{H}^i(X,\mathbf{Z})$ de type fini (cas $k=\mathbf{Z}$) induit une équivalence avec les complexes de De Rham à puissances divisées sur $\mathbf{Z}$ tels que $\mathrm{H}^0(C^{\bullet\bullet}) \xleftarrow{\sim} k$ , $\mathrm{H}^1(C^{\bullet\bullet})$ [?] les $\mathrm{H}^i(C^{\bullet\bullet})$ [?]

c) Je n'ai pas réfléchi si on peut reconstruire les opérations cohomologiques (type Steenrod ou Whitney) dans la catégorie des $X_*$ par la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,-)$, et n'ai que des résultats partiels negatifs qui montrent qu'en dehors [?] des automorphismes multiplicatifs de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(k)$, on ne trouve rien d'intéressant.

d) Il faudrait sans doute chercher [?] des modèles minimaux à la Sullivan, pour essayer entre autres d'exprimer les groupes d'homotopie de $X_*$ en termes de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,\mathbf{Z})$ (cas où $X_*$ simplement connexe avec condition de finitude…). Je n'ai rien fait dans cette direction. Je n'ai même pas développé une formule de Künneth pour $C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}$ d'un produit $X_*\times Y_*$ - il y a des difficultés techniques dues au fait qu'on ne peut sans doute supposer $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*$ ou $Y_*,k)$ [?]

e) Le complexe de chaînes $C_\bullet(X_*,k)$ permet de reconstruire tous les complexes de cochaînes $C^\bullet(X_*,k')$ pour $k'$ [une] $k$-algèbre variable, par

$$C^\bullet(X_*,k) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbf{Z}}(C_\bullet(X_*,k),k)$$

[plutôt $C^\bullet(X_*,k') \simeq \mathrm{Hom}^\bullet_k(C_\bullet(X_*,k),k')$]. (L'objet le plus fin est donc $C_\bullet(X_*,\mathbf{Z})$, on a alors $C_\bullet(X_*,k) \simeq C_\bullet(X_*,\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} k$ [?]).

Il est possible de même de définir une cobigèbre différentielle $C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ $k$-coaugmenté à copuissances divisées telle que l'on ait, pour tout $k$-algèbre $k'$

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k') \simeq \mathrm{Hom}_k(C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k),k')$$

(compatible avec toutes les structures).

On aura d'ailleurs

$$C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k') \simeq C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k) \otimes_k k'.$$

L'objet le plus fin est $C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,\mathbf{Z})$. C'est lui qu'il conviendrait de considérer (au lieu de son "dual" $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,\mathbf{Z})$) si on veut aborder b) c) d) sans condition de finitude. Notons que (tout comme $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,\mathbf{Z})$, pour $X_*$ variable, transforme $\varinjlim$ quelconques en $\varprojlim$) $C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,\mathbf{Z})$ coaugmenté [?] $\varinjlim$ quelconques ([?])

f) [7] **Faisceautisation**. Il y a une définition évidente de complexes de De Rham à puissances divisées sur $k$ si $k$ est un Anneau commutatif dans un topos. On aimerait, p.ex. en comparant un tel complexe à un autre quasi-isomorphisme dont les composantes soient flasques (mais y en a-t-il toujours ?), définir des opérations [?] $\mathrm{R}f_*$ dans des catégories dérivées convenables pour de tels complexes, quand $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de topos (supposé au besoin de dimension cohomologique finie...). Si $k$ est une $\mathbf{Q}$-algèbre, le même problème se rencontre d'ailleurs déjà pour les complexes de type De Rham-Sullivan (et le problème est ouvert - et posé par *Deligne* - quand $X =$ (Ens)$^* =$ topos des ensembles cosimpliciaux, $Y =$ topos ponctuel). Mais sauf erreur (si [mes souvenirs sont exacts]) il y a un topos qui marche pour les espaces topologiques paracompacts...

f) On peut associer à un espace topologique $X$ ou un ensemble semi-simplicial $X_*$ des invariants algébriques "linéaires" *plus fins* a priori que le $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}$ (et même que $C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DR\,pd}}$, en dualisant...).

[7] Voir f) ci-dessus.

P.ex. on peut observer que $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}^*}(k) \xrightarrow{\sim} \Gamma^\bullet\Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet\Psi_{\bullet k}$ se déduit de $D^{\bullet\bullet}_*(k) = \Gamma^\bullet\Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet\Phi_{\bullet k}$ (qui est une algèbre $k$-augmentée à puissances divisées qui est une *résolution de k*) et de $T \in \Gamma(D^{1,0}_{*k})$ comme conoyau de la multiplication par $dT$ (i.e. on divise par l'idéal engendré par $dT$), ou encore en bidegré donné $(p,q)$,

$$C^{p,q}_{*k} \simeq \mathrm{Ker}(D^{p,q+1}_* \underbrace{\longrightarrow}_{\text{produit par } dT} D^{p,q+2}_*),$$

d'où

$$C^{p,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k) \simeq \mathrm{Ker}(D^{p,q+1}(X_*,k) \longrightarrow D^{p,q+2}(X_*,k)),$$

et on peut considérer les structures disons sur $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ comme déduites de certaines structures (à expliciter…) sur $D^{\bullet\bullet}(X_*,k)$. On peut aussi définir "La structure multiplicative à puissance divisées cohomologique du type d'homotopie $X'_*$ en sens convenable, qui permet de reconstituer aussi bien $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ que $D^{\bullet\bullet}_k(X_*,k)$ (ou les complexes de De De Rham-Sullivan…[?]) complexe de De Rham à puissances divisées (ou sinon $D^{\bullet\bullet}(X_*,\mathbf{Z})$) suffit déjà pour récupérer toute la structure multiplicative à puissances divisées cohomologique de $X_*$ (sous réserve de conditions de finitude bien sûr). Dans le cas contraire, ce serait cette dernière qui serait le candidat algébrique "linéaire" naturel pour exprimer le type d'homotopie $X_*$ (du moins si $X_*$ [est] connexe et simplement connexe, et en passant à une catégorie dérivée convenable bien sûr).

# NOTATIONS SEMI-SIMPLICIAUX.
# CONSTRUCTIONS UNIVERSELLES
1975 ou 1976

---

- A [transcription]

# NOTATIONS SEMI-SIMPLICIAUX. CONSTRUCTIONS UNIVERSELLES

$\mathbf{\Delta}$ = catégorie des simplexes $\Delta^n$ ($n \geq 0$), $\Delta^n = [0, n] \subseteq \mathbf{N}$ avec relation d'ordre total.

$\mathbf{\Delta}\hat{} = \mathrm{Ss} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathrm{Ens}) = \mathrm{Ens}_*$.

Plus généralement, si $A$ est une catégorie, on pose

$$A_* = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, A)$$

$$A^* = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, A),$$

donc

$$(A^\circ)^* \simeq (A_*)^\circ, \quad A^* \simeq ((A^\circ)_*)^\circ,$$

où l'exposant $^\circ$ désigne le passage à la catégorie opposée.

Les objets de $A_*$ (resp. $A^*$) sont considérés comme des structures algébriques de type simple (sur une infinité d'objets de base) dans $A$, les 'objets semi-simpliciaux' resp. 'semi-cosimpliciaux'. On écrira $\mathrm{Ens}_*$ quand on a en vue cet aspect, et $\mathbf{\Delta}\hat{}$ ou Ss quand on a plutôt le point de vue 'objet d'un topos' ou 'faisceau sur un topos'[1]. Tous les développements qui suivent ont pour objet d'étudier ces objets (l'équivalent combinatoire des espaces topologiques) et leurs 'types d'homotopie', via des invariants qu'on peut leur associer, qui en dépendent de façon covariante ou contravariante. Nous avons ici en vue une étude systématique, dans l'esprit de

[1]On veut garder [?] à l'aspect [?] la nature algébrique très particulier de ce topos, la notation Ss quand on veut l'oublier, on profite de sa signification topologique.

l'algèbre universelle, de ces invariants (qui sont donc des foncteurs $\mathbf{\Delta}^{\wedge} = \mathrm{Ens}_*$), de leurs structures et des opérations qui peuvent être définies sur elles, permettant d'en déduire certaines complexes à partir d'autres plus simples.

Un objet de $A_*$ sera généralement noté par un symbole de la forme $K_*$, où $K_*$ désigne la famille des

$$K_*(\Delta^n) = K_{[n]}, \quad K_* \quad = (K_{[n]})_{n\geq 0}, (= \text{ abus de notation})$$

avec les opérations semi-simpliciales entre elles. On fera attention qu'on écrit $K_{[n]}$ et non $K_n$, pour des raisons qui vont apparaître (impérieuses lorsque $A$ est additive…).

De même, un objet de $A^*$ sera noté

$$K^* = ([n] \mapsto K^{[n]}) \quad = (K^{[n]})_n . (= \text{ abus de notation})$$

Nous aurons à travailler avec la situation où on a deux catégories $A$ et $B$, et une équivalence (notée $M \mapsto M^\vee$)

$$\vee : A^\circ \xrightarrow{\sim} B, \quad \text{d'où} \quad B^\circ \xrightarrow{\sim} A$$

(le plus souvent $A = B$ et $(M^\vee)^\vee \underbrace{\simeq}_{\text{isomorphisme fonctoriel}} M$, avec compatibilité habituelle d'une autodualité…), on notera alors souvent par la même lettre un objet de $A_*$ (ou $A^*$) et l'objet de $A^*$ (resp. $A_*$) qui lui correspond par application de $\vee$, mais en indiquant la variance par la position du signe $*$,

$$K^* = (K_*)^\vee \quad K^{[n]} = (K_{[n]})^\vee$$
$$K_* = (K^*)^\vee \quad K_{[n]} = (K^{[n]})^\vee .$$

On s'intéressera surtout au cas où ($k$ étant un anneau fixé) on a

$$A = k - \text{modules à guache projectifs de type fini}$$

$$B = k - \text{modules à droite projectifs de type fini}$$

(si $k$ est commutatif, on a $A = B$ et [?] autodialité sur [?] $A$).

On a le foncteur canonique pleinement fidèle

$$(*) \qquad \mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}^\wedge = \mathrm{Ss},$$

l'image par ce foncteur de $\Delta^n$ est noté $\Delta^n_*$, ou mieux

[]

**Yoga** : nous nous intéressons surtout (en première étape) aux invariants covariants attachés à $X_*$, à valeurs dans une catégorie $A$, qui commutent aux $\varinjlim$ par rapport à $X_*$ — ils sont donc exprimés (si $A$ est "grande" pour contenir les quelconques) par des éléments de $A^*$, i.e. des objets *cosimpliciaux* de $A$. Pour les invariants contravariants en $X_*$, à valeurs dans une catégorie $B$, nous nous attendons en premier lieu à ceux qui commutent aux $\varprojlim$ en $X_*$, pour $B$ stable par $\varprojlim$, ils correspondent donc aux objets de $B_*$, i.e. les objets semi-simpliciaux de $B$. Si $B = (\mathrm{Ens})$, ils correspondent donc des ensembles semi-simpliciaux [?]

Ce n'est autre que le foncteur représenté par $K_*$, et on le notera aussi

$$X_* \mapsto K_*(X_*) = \mathrm{Hom}(X_*, K_*).$$

Si $B = \mathrm{Ab}$, $K_*$ sera de même un objet de $\mathrm{Ss}_{\mathrm{ab}}$, et en effet le foncteur qu'il représente est automatiquement muni d'une structure additive. Même remarque pour toute structure algébrique (sur un ou plusieurs objets de base) qui "peuvent s'exprimer en termes de $\varinjlim$ exclusivement" (groupes, anneaux, modules sur tels, etc.).

**Remarque**. Les invariants ainsi obtenus à coups de foncteurs représentables — plus généralement, d'objets simpliciaux ou cosimpliciaux de catégories $B$ ou $A$ — sont de nature trop "grosses" et "fruste" pour être intéressants directement — en particulier, ce ne sont pas des invariants du type d'homotopie de $X_*$. On devra en extraire des invariants plus subtils qui soient des invariants du type d'homotopie de $X_*$ — ceux-ci ne seront pas de nature si simples — i.e. "représentés" par des objets simpliciaux ou cosimpliciaux. Notre propos ici de [?] vient [?] de décrire, un maximum de structure supplémentaire remarquable, et dans les catégories de structures de ce type (complexes de chaînes ou de cochaînes, algèbres cosimpliciales etc.) d'inverser les flèches qu'on obtient à partir d'équivalence d'homotopie dans Ss, et de passer à des "catégories de fractions" en inversant ces flèches. L'invariant ainsi obtenu (plus "grossier" bien sûr, mais plus subtil dans sa définition, et moins "redondant") exprimera alors de façon plus ou moins complète le type d'homotopie, on en saisira de façon adéquate tes ou tels aspects.

[]

**Remarques**.

a) On trouve assentiellement les mêmes objets ($L_*$ ou $L_\bullet$) pour exprimer des *opérations* sur [des] invariants additifs contravariants, ou sur [des] invariants "additifs" covariants (du type envisagé) — c'était clair a priori, à cause du passage de $A$ à $B$ par passage à la catégorie opposée — mais l'opération définie par $L_*$ dépend de $L_*$ de façon contravariante dans le premier cas, covariante dans le deuxième.

b) On a en principe résolu, et de façon quasi-tautologique, la question initiale de déterminer les constructions possibles sur [des] invariants contravariants ou covariants "additifs" du type envisagé : On trouve même [des] *grosses* catégories, $\mathrm{Ab}_*$ ou $\mathrm{Ab}_\bullet$ (par passage [?] de celle-ci à l'opposée). Cela tient au fait que l'on a admis des catégories $A$ de valeurs $A^\circ$ ou $B$ assez spéciales, [?] où on peut effectuer *toutes* les $\varinjlim$, ou toutes les $\varprojlim$ — ce qui a pour effet que ces mêmes opérations peuvent s'effectuer sur les invariants, et opèrent sur les invariants.

[]

(c'est ce qu'on va vérifier directement dans certains cas remarquables, p.ex. celui où $L = \varnothing$ et où on trouve la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ab}_\bullet$ engendré par les $G_0[n]$ [i.e. $G_0(\Delta^{[n]})$]) grâce aux seules sommes finies.

c) On a oublié de noter que dans le cas particulier $B = \mathrm{Ab}$, on trouve les mêmes types d'objets (savoir ceux de $\mathrm{Ab}_*$ ou de $\mathrm{Ab}_\bullet$ au choix) pour exprimer les différents *invariants* contravariants $F$ possibles à valeurs dans Ab (commutant aux $\varinjlim$) et les *opérations* $\Omega$ qu'on peut faire sur des invariants contravariants opérer [?] (à valeurs dans une catégorie additive à $\varinjlim$).

[]

qui permet se déduire du foncteur universel

$$\boldsymbol{\Delta}^{\wedge\circ} \xrightarrow{F_0} (\mathrm{Ab}_*)^\circ$$

(défini par $(F_0)^\circ(X_*) = \mathbf{C}_*(X_*)$ en lui appliquant l'opération $\Omega^*$ pour $\Omega^* \in U^L$), ou encore qui se déduit du foncteur covariant [?] universel

$$\boldsymbol{\Delta}^{\wedge} \xrightarrow{F_0^\circ = (X_* \mapsto \mathbf{C}_*(X_*))} (\mathrm{Ab}_*)$$

qui se dénote par $\mathbf{C}_*$, en lui appliquant de tels $\Omega_*$. [?] formulations équivalentes en termes de $\Omega^\bullet$, $\Omega_\bullet$ opérant sur $(\mathrm{Ab}_\bullet)^\bullet$ ($\Omega^\bullet : \mathrm{Ab}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Ab}, \quad \Omega_\bullet : \mathrm{Ab}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Ab}$), en remplaçant $\mathbf{C}_*(X_*)$ par $\mathbf{C}_\bullet(X_*)$[2].

e) Quel est le rôle dans tout ceci de Dold-Puppe ? On voit en travaillant que l'avantage de $A_\bullet$ sur $A_*$, c'est que la description d'un objet y est nettement plus simple – on se perd facilement dans la description des opérations semi-simpliciales ! — et si on a deux avatars $L_\bullet$, $L_*$, $L_\bullet$ est aussi nettement "moins gros" que $L_*$ (NB on a toujours $L_n \subset L_{[n]}$ comme facteur direct), $L_*$ apparaît comme une sorte de version pléthorique de $L_\bullet$ !

Néanmoins, alors que (dans le cas de $A = \mathrm{Ab}_*$ disons) $\mathrm{Ab}_{k*}$ et $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ est leur structure multiplicative - qui ne se correspond *pas* par DP et ND — celle de $\mathrm{Ab}_{k*}$ est plus simple à beaucoup d'égards, et s'introduit d'ailleurs de bien des façons par la suite de façon absolument impérieuse, alors que celle de $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ ne s'introduit pratiquement pas. De plus, pour les opérations tensorielles de type $\bigwedge^i$, $\Gamma^i$, $\mathrm{Sym}^i$, elles manquent purement et simplement dans $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ (sauf de les [définit] par transport de structure via DP !) alors qu'elles sont évidentes sur $\mathrm{Ab}_{k*}$ ! Or ces structures également joueront un rôle essentiel par la suite.

[2]Sous réserve que $L$ soit assez gros pour permettre au moins des noyaux de projecteurs !

# FAISCEAUTISATION DU TOPOS DE DE RHAM

•

# FAISCEAUTISATION DU TOPOS DE DE RHAM

## 1.

Soit $X$ un topos, et

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{u} \Phi$$

une immersion de $\mathbf{Z}$ dans un faisceau $\Phi$, tel que

# LA "LONGUE MARCHE" À TRAVERS LA THÉORIE DE GALOIS

- The "Longue Marche" was written between January and June 1981. It consists of about 1600 manuscript pages, and nearly as much again in various addenda and developments.

- *Je fais un premier voyage de prospection de ce "monde nouveau", de janvier à juin 1981. Ce premier jet se matérialise en un paquet de quelques 1300 pages manuscrites, baptisées "La Longue Marche 'a travers la théorie de Galois". Il s'agit avant tout d'un effort de compréhension des relations entre groupes de Galois "arithmétiques" et groupes fondamentaux profinis "géométriques". Assez vite, il s'oriente vers un travail de formulation calculatoire de l'opération de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ *sur* $\hat{pi}_{0,3}$*, et dans un stade ultérieur, sur le groupe légèrement plus gros* $\widehat{\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})}$*, qui donne lieu à un formalisme plus élégant et plus efficace. C'est au cours de ce travail aussi (mais développé dans des notes distinctes) qu'apparaît le thème central de la géométrie algébrique anabélienne, qui est de reconstituer certaines variétés* $X$ *dites "anabéliennes" sur un corps absolu* $K$ *à partir de leur groupe fondamental mixte, extension de* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *par* $\pi_1(X_{\overline{K}})$ *; c'est alors que se dégage la "conjecture fondamentale de la géométrie algébrique anabélienne", proche des conjectures de Mordell et de Tate que vient de démontrer Faltings. C'est là aussi que s'amorcent une première réflexion sur les groupes de Teichmüller, et les premières intuitions sur la structure multiple de la "tour de Teichmüller" – les multiplicités modulaires ouvertes* $M_{g,nu}$ *apparaissant par ailleurs*

*comme les premiers exemples importants, en dimension* $> 1$, *de variétés (ou plutôt, de multiplicités) qui semblent bien mériter l'appellation "anabélienne". Vers la fin de cette période de réflexion, celle-ci m'apparaît comme une réflexion fondamentale sur une théorie alors encore dans les limbes, pour laquelle l'appellation* "Théorie de Galois-Teichmüller" *me semble plus appropriée que "théorie de Galois" que j'avais d'abord donnée à mes notes.*
Esquisse d'un programme

- *"La "période de frénésie" dont il s'agit s'étend de février à juin 1981. C'est celle aussi de la "longue marche à travers la théorie de Galois". Elle débouche sur une longue période de méditation sur ma relation à la mathématique. Celle-ci va du 19 juillet jusqu'en décembre 1981."* Récoltes et Semailles

- This text was partly available in: *La Longue Marche à Travers la Théorie de Galois*. Transcription d'un manuscrit inédit. Tome 1, Paragraphes 1 à 37. Par Jean Malgoire. Montpellier, France, 1995

- [edition] of the first part by M. Carmona

# STRUCTURES STRATIFIÉES

- [scan]

# STRUCTURES STRATIFIÉES

## 1. La situation la plus élémentaire

En un ses qui apparaître, sera la suivante.

[]

de groupoïdes fondamentaux [] est cocartésien - ou encore, si $Y$, $X$, $X^*$ sont connexes, et [] (i.e. par définition, un revêtement universel de []) [] un isomorphisme canonique de groupes fondamentaux [] où [] est isomorphe extérieurement à $\pi_1(Y)$.

Pour expliciter $\pi_1(X)$ en termes de données "élémentaires", dont $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(X^*)$ [] encore à expliciter la structure de [], qui s'envoie dans l'un et dans l'autre, donnant [] [] qui exprime (8). C'est ici que l'hypothèse de *locale []* a un [] (celle de lissité [] comme devant techniquement initiale, [] de notre heuristique...).

On doit se [], dans ce cas, pour démontrer que les [] homotopique de [] sont celles d'une *fibration localement triviale des fibres* []: [] - et c'est []] qui devrait [] le contexte topossique (p. ex. celui des schémas avec le topos étale) de *définition* de la "locale trivialité" [] homotopique [] $Y \hookrightarrow X$. (Bien sûr, dans le contexte schématique, il faudrai de plus travailler avec des types d'homotopie profini, et même sans doute "localiser" ces types d'homotopie en l'un des [] premières qui sont distinctes des caractéristique résiduelle qui interviennent, ou que en n'est que alors ce contexte [] des théorèmes qu'il faut, cf Artin-Mazur...)

On ont en particulière une suite exacte d'homotopie []

Si on suppose par exemple que []

allusion, en devrait [] exprimer alors le *type d'homotopie de* $X$ (et non seulement son $\pi_1$) en termes de diagrammes de groupoïdes (8), ou ce qui revient au même, des diagrammes de groupes (10).

En tous cas, il est clair (indépendemment de toutes hypothèses de nullité de [] $\pi_i$, ou de []) comment reconstruire en termes du diagramme (8), [] faisceaux sur $X$, [] tels que l'on ait

$$F|X^* \quad \text{et} \quad F|Y \quad \text{localisation triviaux} \tag{16}$$

Cette catégorie $F$ est équivalent en effet à celle des systèmes

$$(E_{X^*}, E_{Y,X}, \varphi) \tag{17}$$

$E_{X^*}$ est un système locale sur $\pi$, $X^*$ (un recouvrement étale de $X^*$), $E_{Y,X}$ un système locale sur [] un homomorphisme de systèmes locaux sur []

$$\varphi : p^*(E_{Y,X}) \longrightarrow i^*(E_{X^*}). \tag{18}$$

En termes de diagrammes de groupes (10)

## 2. Stratification globale : [] (sans tubes)

Pour simplifier, je vais en placer sur un espace topologique $X$ - par le suite $X$ [] un topos quelconque. Les constructions qui suivent, relatifs à une "stratification globale", [] de la façon habituelle - ce qui [] alors à imposer des conditions supplémentaires de connexité et de locale connexité, qui pour []. De même [].

Soit $I$ un ensemble ordonné,

$$(X_i)_{i \in I} \quad X_i \subset X$$

une famille de sous-espaces de $X$. On suppose [] Posant [] on a un morphisme canonique

$$X_{\Delta_0} \longrightarrow X \tag{3}$$

et l'hypothèse a) signifie que ce morphisme est fini - i.e. propre sépare et à fibres finies. C'est aussi une *immersion locale*. On introduit une partie fermé [] On voit alors que les deux projections [] ont respectivement les propriétés suivantes : [] Par ailleurs

## 3. Stratification globale : introduction au tubes

On [] les notations précédentes.

Pour toute couple $(i \leq j) \in I \times I$, considérons

## 4. Topos canoniques associées à une stratification globale

On va montrer comment, à une situation stratifiée donnée, on peut en associer d'autres.

A) Image inverse générale.

Rappelons les axiomes utilisés jusqu'à puisant : []

Notons que pour tout $X'$ au dessus de $X$, le famille des [] satisfait alors aux mêmes conditions.

D'ailleurs le système [] des $X_{\Delta_r}$ - comme image inverse le lui des $X'_{\Delta_r}$, défini par les $X'_i$, [] des isomorphismes []

**NB**. Nous appliquons ces [] sauf en cas où $X'$ est un ouvert de $X$. C'est pour [] prendre de telles images inverses [], qu'il [] été commode de supposer les $X_i$ ou les $X_i^*$ non-vides, ou encore par $I \mapsto X_i$ est un *plongement* d'une ordonnée $I \hookrightarrow \mathfrak{P}(X)$.

Lorsque $X' \longrightarrow X$ est une immersion locale propre (mais pas si c'est une immersion ouverte !) alors [] les images inverses de parties [] de $X$ comment à [] des voisinages tubulaires de une telles parties []. Notons d'ailleurs que pour $i < j$, [] (sans hypothèse d'ailleurs que $X' \longrightarrow X$ sont une immersion locale) [] d'où, dans le cas d'une immersion locale propre, des isomorphismes [] et plus généralement [] tout qui à faire.

Ceci montre en particulière que la démonstration du théorème de recollement, [] théorème énoncé p.22, est une [] *locale* sur $X$[1] - ce qui prenant par exemple de nos [] au cas où $I$ *est fini*.

B) Cas d'un $X_{I'}$.

Soit $I'$ une partie de $I$ telle que

$$i \leq j \in I' \Rightarrow i \in I' \tag{7}$$

[1] *non*, ce n'est pas absolument clair []

et tout

$$X_{I'} = \bigcup_{i \in I'} X_i \quad \text{(partie fermée de } X\text{)} \tag{8}$$

On a bien sûr [] (et aussi []) [] à (11 d). Dans ces formules, $I'$, $I''$, les $I'_\alpha$ sont des parties de $I$ satisfaisant (7) ([] *cribles* de $I$).

Si dans A) on prend $X' = X$, il est plus commode de travailler avec le stratification de $X'$ définie par les $X_i$ avec $i \in I'$ - il est clair que les conditions (II) relatives à $X' = X_{I'}$ sont satisfaites. Les “parties cribles” de $X'$ pour cette stratification, ou pour celle induit au sens général des espaces au dessus de $X$, sont les mêmes - [] sur $X' = X_{I'}$ des parties-cribles de l'espace stratifié $X$.

Ici, les espaces élémentaires pour la stratification de type $I'$ de $X' = X_{J'}$, sont les espaces []

[] pour une instant à $X$, et considérons l'un $I_0$ des $i \in I$ tel que $X_i = \varnothing$. C'est une crible, et on a $X_i^* = \varnothing$, [] si $i \in I_0$. [] on voit que les diagrammes de type $\widetilde{I}$ défini par l'espace stratifié $X$ [] en remplaçant $I$ par $I \backslash I_0$, ou plus guère par $I \backslash I'_0$, où $I'_0 \subset I'$ est une crible, ce qui donne lieu à un diagramme [] qu'est *contenu* dans $\widetilde{I}$ (cela est vrai pour *toute* crible de $I$).

Si par exemple on a deux cribles

$$I'' \subset I' \subset I \tag{14}$$

d'où

(15)

[] regarder plutôt la stratification de type $I' \backslash I''$, définie par les

(16)

dont les topos élémentaires sont dans les $X_{i'}^*$ ($i' \in I' \backslash I''$) et des [] couples $(i', j')$ avec $i' \in I' \backslash I''$ [] on a

(17)

*mais il n'est pas clair en générale que ces soient mêmes semblant équivalences d'homotopie...*

Donc il [] il s'agit de [] les constructions sur une $X_{I'}$, et sur un [].

Je vais en [] par $C$ sauf de regarder plus particulièrement ce qui se [] en l'induisant ainsi sur un ouvert $U_{I',I''}$.

C) Les [].

On suppose donnée des cribles

(18)

d'où

(19)

# BRIEF AN G. FALTINGS
## 27.6.1983

- Letter about Anabelian geometry.
- [translation]. In: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

27.6.1983

Lieber Herr Faltings,

Vielen Dank für ihre rasche Antwort und Übersendung der Separata! Ihr Kommentar zur sog. "Theorie der Motive" ist von der üblichen Art, die wohl grossenteils der in der Mathematik stark eingewurzelten Tradition entspringt, nur denjenigen mathematischen Situationen und Zusammenhängen eine (eventuell langatmige) Untersuchung und Aufmerksamkeit zuzuwenden, insofern sie die Hoffnung gewähren, nicht nur zu einem vorläufigen und möglicherweise z.T. mutmasslichen Verständnis eines bisher geheimnisvollen Gebietes zu kommen, wie es in den Naturwissenschaften ja gang und gäbe ist — sondern auch zugleich Aussicht auf die Möglichkeit einer laufenden Absicherung der gewonnenen Einsichten durch stichhaltige Beweise. Diese Einstellung scheint mir nun psychologisch ein ausserordentlich starkes Hindernis zur Entfaltung mathematischer Schauenkraft, und damit auch zum Fortschreiten mathematischer Einsicht im üblichen Sinn, nämlich *der* Einsicht, die durchdringend oder erschöpfend genug ist, um sich schliesslich "beweisen" zu können. Was meine Erfahrung in mathematischer Arbeit mich immer wieder lehrte, ist dass stets in erster Linie der Beweis aus der Einsicht entspringt, nicht im Gegenteil — und dass die Einsicht in erster Linie aus einem feinfühligen und hartnäckigen Aufspüren der relevanten Wesenheiten und Begriffen entsteht, und deren Wechselbeziehung. Der leitende Faden ist innere Kohärenz des allmählich sich aus dem Dunst lösenden Bildes, und Einklang auch mit der anderweilig Bekannten oder Erahntem — und er leitet um so sicherer, als die "exigence" der Kohärenz eine strengere und feinfühlendere ist.

Um auf Motive zurückzukommen, so existiert meines Wissens keinerlei "Theorie" der Motive, aus dem einfachen Grund, dass niemand sich die Mühe machte, eine solche Theorie auszuarbeiten. Das vorhandende Material an bekannten Tatsachen und an geahnten Zusammenhängen ist von beindruckender Reichhaltigkeit — unverhältnismässig viel mehr, will mir scheinen, als je zu Ausarbeitung einer physikalischen Theorie vorlag! Es existiert z.Z. eine Art "yoga des motifs", das einer Handvoll Eingeweihter geläufig ist, und in manchen Situationen einen sicheren Anhalt gewährt zur Erratung gewisser Zusammenhänge, die sich dann auch bisweilen tatsächlich so oder so beweisen lassen (wie etwa in Ihren letzten Arbeit der Satz über Galois Aktion auf Tateschen Moduln abelscher Mannigfaltigkeiten). Es hat den Status scheint mir einer Art Geheimwissenschaft — Deligne scheint mir der, dem sie am geläufigsten ist. Seine erste [veröffentlichte] Arbeit, über die Entartung der Leray'schen Spektralfolge für eine glatte eigentliche Abbildung algebraischer Mannigfaltigkeiten über **C**, entsprang einer einfachen Überlegung über "Gewichte" von Kohomologiegruppen, die zu jener Zeit reine Heuristik ware, heute aber (seit dem Beweis der Weil'schen Vermutungen) sich wohl über beliebigem Grundschema durchführen liesse. Es ist mir auch klar, dass die Deligne'sche Erweiterung der Hodge Theorie weitgehend aus dem ungeschriebenen "Yoga" der Motive schöpfte — nämlich dem Bestreben entsprang, gewisse "Tatsachen" aus jenem Yoga, und ganz besonders die Existenz der Filtration der Kohomologie durch "Gewichte", und zudem die Halbeinfachheit gewisser Aktionen von Fundamentalgruppen, im Rahmen der transzendenten Hodge-Strukturen sicherzustellen.

# NOTES ANABÉLIENNES

- Notes for “La Longue Marche à Travers la Théorie de Galois”

# NOTES ANABÉLIENNES

## I. Résultats de fidélité

À tout corps $K$, associons son topos étale $\mathrm{B}_K$, qui est un topos (profini) galoisien. Le groupoïde des points de $\mathrm{B}_K$ est noté $\Pi_K$, il est anti-équivalent canoniquement à la catégorie des clôtures algébriques séparables de $K$. Si $\overline{K}$ est un telle clôture, son groupe des $K$-automorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ ou $E_{\overline{K}/K}$ s'identifie au groupe des automorphismes des points de $\mathrm{B}_K$ associé à $\overline{K}/K$ (il vaut peut-être mieux de dire à l'opposé de ce groupe - la variance des clôtures algébriques de $K$ est comme celle des foncteurs fibres, à l'opposée de celles des points ...) Bien entendue, $\mathrm{B}_K$ se reconstitue à partir de $\Pi_K$, comme le topos des systèmes locaux (continues) sur $\Pi_K$ - et en termes de $E_{\overline{K}/K}$, comme le topos des ensembles discrets à actions continues de $E_{\overline{K}/K}$.

Pour un homomorphisme de corps $K \longrightarrow K'$, i.e. un homomorphisme de schémas $\operatorname{Spec} K' \longrightarrow \operatorname{Spec} K$, on a un morphisme de topos correspondant

$$\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K \tag{1}$$

associé à un homomorphisme de groupoïdes fondamentaux

$$\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K. \tag{2}$$

Ceci [s'explicait] en disant qu'un objet [] $\Pi_{K'}$ (i.e. point de $\mathrm{B}_{K'}$, ou revêtement universel de $\mathrm{B}_{K'}$, ou clôture séparable $\overline{K'}$ de $K'$) en définit un des $\Pi_K$ (ainsi, on prend $\overline{K}$ = clôture algébrique séparable de $K'$ dans $\overline{K'}$) et pour deux points correspondants, on a un homomorphisme de groupes fondamentaux correspondants, qui s'interprète par exemple comme

$$(3) \qquad E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$$

et qui peuvent de reconstitue l'homomorphisme de topos comme une "restriction des scalaires".

L'image de (3) est le sous-groupe fermé de $E_{\overline{K}/K}$ qui correspond à la sous-extension $K_1$ de $\overline{K}/K$, clôture algébrique séparable de $K$ dans $K'$, i.e. $K_1 = \overline{K} \cap K'$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[d] \\ \overline{K} \arrow[r] & \overline{K'} \end{tikzcd}$$

Quand $K'$ est une extension de type fini de $K$, $K_1$ est une extension finie de $K$, et on en conclut que l'image de (3) est alors un sous-groupe d'indice fini, égale à $E_{\overline{K},K}$ si et seule si $K_1 = K$ i.e. $K$ est séparablement algébrique clos dans $K'$. D'ailleurs, on montre sans mal que (si $K$ est extension de type fini) l'homomorphisme (3) est injectif si et seule si $K'$ est une extension algébrique de $K$. Donc il est bijectif si et seule si $K'$ est une extension [radicielle] de $K$. Dans le suite nous nous bornons (précisément) aux corps de caractéristique 0, et la condition précédente signifie alors que $K \longrightarrow K'$ est un *isomorphisme*.

Ainsi, le foncteur $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K,\overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$, est *conservatif* quand on se limite comme morphismes de corps $K \longrightarrow K'$ (de caractéristique 0) à ceux que fait de $K'$ une extension de type fini de $K$.

Par exemple il suffit de se limiter aux extensions de type fini des corps fermées $\mathbf{Q}$ - on trouve un foncteur conservatif de la catégorie de ces corps dans celle de groupoïdes (ou de topos), au sens à un morphisme de corps qui donne une équivalence de groupoïdes (ou de topos) est un *isomorphisme*[1].

Quand on prend des corps quelconques, le 2-foncteur $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou $K \longrightarrow \Pi_K$ ou $(K,\overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$ est cependant loin d'être fidèle. Ainsi, si $K$ est séparablement clos, $\mathrm{B}_K$ est le "topos ponctuel", $\Pi_K$ le groupoïde ponctuel, $E_{\overline{K}/K} \simeq 1$ - il est donc

[1]au cas []

que les morphismes entre corps séparablement clos ne sont pas décrits par les morphismes entre leurs topos étales, ou groupoïdes fondamentaux! Pour cette raison, il y a lieu d'associer à un corps $K$ un objet plus fin que $\mathrm{B}_K$ ou $\Pi_K$, à savoir le système projectif des $\mathrm{B}_{K_i}$, ou des $\Pi_{K_i}$, pour $K_i$ sous-corps de $K$ de type fini sur le corps [], et à un système $(K,\overline{K})$ le système projectif des $E_{\overline{K}_i/K_i}$, où $\overline{K}_i$ est le clôture algébrique séparable de $K_i$ dans $\overline{K}$. On []

$$\begin{cases} \Pi_K \simeq \varprojlim \Pi_{K_i} \\ \mathrm{B}_K \simeq \varprojlim \mathrm{B}_{K_i} \\ E_{\overline{K}/K} \simeq \varprojlim E_{\overline{K}_i/K} \end{cases} \tag{4}$$

i.e. on reconstitue les objets $\mathrm{B}_K$, $\Pi_K$, $E_{\overline{K},K}$ à partir des systèmes projectifs correspondant - mais l'inverse n'est pas vrai. En fait, comme le foncteur

$$\text{Ind(Corps type fini)} \longrightarrow \text{corps}$$

de la catégorie des systèmes inductifs de corps de type fini, vers celle des corps, est une équivalence de catégories (pour des raisons triviales), il s'ensuit que les foncteurs $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$, ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K,\overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K},K}$, étant des corps vers les propriétés idoines, avoir [] les propriétés de fidélité des foncteurs $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$, ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K,\overline{K} \longrightarrow \Gamma_{\overline{K},K})$ [] aux corps absolument de type fini, auxquels nous allons pour la suite nous borner, la plupart des temps. Mais il sera nécessaire au cours de travail, de donner une description purement algébrique, par exemple, de pro-groupes finis associé par exemple à  (plus précisément, à $(C,C)$ !).

Le rôle dominant sous joué par le corps premier de caractéristique 0, $\mathbf{Q}$ donc pour $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$ et $\Pi_{\mathbf{Q}}$, qui a un objet canonique, noté $\overline{\mathbf{Q}}_0$ - la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans . On posera[2]

$$\mathbf{G}_{\mathbf{Q}} = E_{\overline{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}} \tag{5}$$

Pour tout corps $K$ de caractéristique 0 - en particulière pour les corps $K$ de type fini sur , lequel nous allons nous borner par le suite - on a donc des homomorphismes canoniques

$$\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathbf{Q}}\, \mathbf{Q}uad \Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbf{Q}} \tag{6}$$

[2] et on écrit souvent $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$ au limite des $E_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$, pour une clôture algébrique [] $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$

qui l'explicitait, quand on a choisi un objet de $\Pi_K$ i.e. un $\overline{K}/K$, d'où un $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, pour un homomorphisme de groupes profinis

$$E_{\overline{K}/K} \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}. \tag{7}$$

Par le suit, on regardes toujours $\mathrm{B}_K$, $\Pi_K$ ou $E_{\overline{K},K}$ comme muni de cette structure supplémentaire - ce sont les morphismes (de topos, de groupoïdes, ou de groupes profinis) "arithmétiques", dominant la situation.

Un intérêt particulier s'attende au noyau de (7), que je note $\pi_{\overline{K},K}$ - on[3] l'appelle "partie géométrique" de groupe de Galois $E_{\overline{K},K}$ par opposition au quotient $E_{\overline{K},K}/\pi_{\overline{K},K} = \Gamma_{\overline{K},K} \hookrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}}$, que j'appelle se partie "arithmétique"- celle-ci est un sous-groupe ouvert de $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}}$, qui son [], correspond au sous-corps $\underline{K}$ de $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, extension finie $/\mathbf{Q}$ de $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $K$, de sorte qu'on a une suite exacte

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_{\overline{K}/K} \arrow[r] & E_{\overline{K}/K} \arrow[r] & \Gamma_{\overline{K}/K} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ & & & \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}} & \end{tikzcd} \tag{8}$$

On[4] va donner une interprétation de ce noyau, et de la suite exacte (8), en écrivant

$$K = \varinjlim_i A_i \tag{9}$$

où les $A_i$ sont les sous-$\mathbf{Q}$-algèbres de type fini de $K$, correspondant au système projectif des "modèles affines" $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ de $K/$. Parmi les $A_i$, il y a d'ailleurs un système [] fermé des $A_i$ réguliers, i.e. des $U_i$ lisses/, [] comme morphismes de transition des morphismes de localisation []. On peut même, d'après Mike Artin, prendre comme $U_i$ des schémas "élémentaires" sur $K_0$, se dévissant en fibrations successives de courbes. Notons que $\mathrm{Spec}\, K = \eta$ est le point générique [] des $U_i$, qui sont [] sur $k$ (clôture algébrique de dans $K$).

Le choix de $\overline{K}$ définit un point géométrique $\overline{\eta}$ sur les $U_i$, d'où des groupes $\pi_1(U_i, \overline{\eta}) = \Gamma_i$, et [] bien connus

$$\mathrm{Spec}\, K = \varprojlim U_i$$

[3] on va noter $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ cette "partie arithmetique"

[4] **NB** $\pi_{\overline{K}/K} = (1)$ si et seule si $K$ algébrique sur $\mathbf{Q}$, i.e. fini sur $\mathbf{Q}$.

$$(10) \qquad E_{\overline{K}/K} = \pi_1(\eta,\overline{\eta}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i [] \quad (\Gamma_i = \pi_1(U_i,\overline{\eta}))$$

D'autre parte, si on pose

$$(11) \qquad \overline{U_i} = U_i \otimes_K$$

on a pour tout $i$ une suite exacte d'homotopie

$$(12) \qquad 1 \longrightarrow$$

qui forment un système projectif de suite exactes, ou d'extensions ayant toutes même quotient $\Gamma'$, et dont les noyaux

$$\pi_i = \pi_1(\overline{U_i},\overline{\eta})$$

sont des groupes fondamentaux "géométriques" - que []] d'ailleurs [], en utilisant un plongement de [] dans $\mathbb{C}$ (d'où un isomorphisme $\simeq _{\overline{0}}$), comme les [] profinis de $\pi_1(U_i(\mathbb{C}),\overline{\eta})$, ou maintenant $\overline{\eta}$ est interprète comme un point [] aux variétés complexes $U_i(\mathbb{C})$.

La suite exacte (8) est donc le limite projectif des suites exactes d'homotopie (12) ([5]), ce qui donne en particulière

$$(13) \qquad \pi_{\overline{K}/K} \simeq \varprojlim_i$$

Utilisant les fibrations des $U_i$ (dans le cas où on s'astreint prendre de variétés élémentaires d'Artin), on trouve que tout $\pi_i$ est un groupe extension successive des groupes profinis *fibres* (où []). Ceci redonnes p. ex. que le dimension cohomologique de $\pi_i$ est [], celle de $E_i$ est $\leq n+2$ (pour des coefficients de $m$-torsion, []) - et par passage à la limite, des [] correspondantes pour les dimension cohomologiques de $\pi_{\overline{K}/K}$ et $E_{\overline{K}/K}$

$$(14) \qquad \text{dim coh} + \pi_{\overline{K}/K} \leq n, \quad \text{dim coh}\, \Gamma_{\overline{K}/K} \leq n+2$$

qui sont en fait même des *égalités* (sauf erreur), et donnant donc une description cohomologique simple de degré $d$ [] absolu de $K$.

[5]cette interprétation

Théorème **(1).** — *Soit $K$ un corps extension de type fini de , $\overline{K}$ une clôture algébrique de $K$. Alors pour tout sous-groupe ouvert $E$ de $E_{\overline{K}/K}$, son centralisateur dans $E_{\overline{K}/K}$ est réduit au groupe unité. Itou pour $\pi_{\overline{K}/K}$.*

Démonstration. — Soit $\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma_{/}$ l'image de $E$ dans $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ qui est donc un sous-groupe ouvert. L'image dans $\Gamma$ des centralisateurs de $E'$ dans $E$ [] centralisateur de $\Gamma'$ dans $\Gamma$. Je dis qu'il est égale à 1, ce qui équivaut donc au

Corollaire. — *Dans* $\mathbf{G} = \Gamma_{\bar{0}/}$, *le centralisateur de tout sous-groupe ouvert est réduit a (1).*

OPS Ce sous-groupe ouvert $\Gamma'$ invariant, il est bien connue ([6]) qui son centre est réduit à 1 donc si Z est son centralisateur dans $\Gamma$, l'homomorphisme $Z \longrightarrow \Gamma/\Gamma'$ est injectif donc Z est fini. Mais on sait que les seules éléments $\neq 1$ de $\Gamma$ d'ordre fini sont les conjugués de $\tau$ , conjugaison complexe. Mais le centralisateur de $\tau$ dans $\Gamma$ est réduit à [] donc on peut contenir $\Gamma'$, donc $\tau \notin z$, donc $z = (1)$.

[] à $E \subset E_{\overline{K}/K}$, on voit donc que son centralisateur Z dans $E_{\overline{K}/K}$ est une image dans $\Gamma$ réduite à $\{1\}$ donc $z \subset \pi_{\overline{K}/K}$. Soit $\pi' \subset \pi = \pi_{\overline{K}/K}$ le [] de $z'$ sur $\pi$, c'est un sous-groupe ouvert de $\pi$, et on est ramené à voir que $\mathrm{Centr}_{\pi}(\pi') = \{1\}$, i.e. le

Corollaire. — *Soit $\pi$ un groupe profini, extension successives de groupes profinis libres. Alors le centralisateur z dans $\pi$ de tout sous-groupe ouvert $\pi'$ de $\pi$ est réduit à {1}.*

Par dévissage on est ramené au cas d'un groupe profini *libre*. On sait que $\pi'$ est donc libre. OPS $\pi'$ invariant, ([7]) et on admet que le centre d'un groupe profini libre est réduit à 1.

Donc $Z \longrightarrow \pi/\pi'$ est injectif, donc Z est fini, et on admet que dans un groupe profini libre, il n'y a pas d'élément ([8]) d'ordre fini $\neq 1$ - ce qui [] la démonstration.

Scholie. — *Le fait que $E_{\overline{K}/K}$ soit à centre trivial peut s'exploiter en disant que le groupoïde $\Pi_K$ (ou le topos $B_K$) [] à équivalence près, définie a isomorphisme unique près, quand on connaît le groupe* extérieure *associé à $E_{\overline{K}/K}$.*

[6] à vérifier
[7] à vérifier
[8] à vérifier

Les homomorphismes $E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$ associés à des homomorphismes $K \longrightarrow K'$ d'extensions de type fini de , ayant une image ouvert dans un centralisateur réduit à 1, on voit de même que l'homomorphisme de topos $\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou de groupoïdes $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$, sont détermines à équivalence près (définie a isomorphisme unique près) par l'homomorphisme correspondant de groupes extérieures. Il [] en particulière ainsi de morphisme structurel $\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}$ ou $\Pi_K \longrightarrow \Pi$ qu'on peut interpréter intrinsèquement comme un homomorphisme de groupes profinis extérieures $E_K \longrightarrow E$. Mais nous [] suivre [], en exploitant le fait que $\pi_{\overline{K}/K}$ est lui associé à centre trivial. Cela signifie que l'extension de $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ par $\pi_{\overline{K}/K}$ est entièrement connue, à isomorphisme près, pour $\pi_{\overline{K}/K}$ et $\Gamma$ fixés, en termes de *l'action extérieure* correspondant de $\Gamma$ sur $\pi$, comme l'image inverse de l'extension universelle

$$1 \longrightarrow Aut(\pi) \longrightarrow Autext(\pi) \longrightarrow 1$$

Pour $K$ fixé, donc $k$ fixé, [] qu'on fixe un $\Gamma = \Gamma_{/k}$ revient à dire qu'on fixe une clôture algébrique de $k$, [] qu'on fixe un $\pi_{\overline{K}/K} = \pi_1(K \otimes_K \overline{k})$ signifie [] qu'on fixe une revêtement universel de $\mathrm{Spec}(K \otimes_k \overline{k}) = \eta \otimes_k \overline{k}$, les deux ensembles reviennent à se donner le revêtement universel $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{K})$ de $K$. Par le suite, nous décrivons (avec une fidélité qui reste à []) les couples $(K, \overline{K})$ d'une extension $K$ de  de type fini, et d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de $K$, par les triples $(\pi, \Gamma, \varphi)$, où $\pi = \pi_{\overline{K},K}$ et $\Gamma = \Gamma_{\overline{K},K}$ sont des groupes profini, et $\varphi : \Gamma \longrightarrow [](\pi)$ une action extérieur de $\Gamma$ sur $\pi$ - ce qui peuvent de reconstituer l'extension $_{\overline{K},K}$ de $\Gamma_{\overline{K},K}$ par $\pi_{\overline{K},K}$. J'ai oublie [] qu'il faut *de plus* se donner $\Gamma$ comme sous-groupe d'un $\Gamma_{/}$ bien déterminé, i.e. qu'il faut se donner un objet de $\Pi$ et une [] fidèle de $\Gamma$ dessus - pour reconstruire [] cas données un homomorphisme de groupoïdes profinis $\Pi_K \longrightarrow \Pi$, plus un objet de $\Pi_K$ - ou encore, un morphisme de topos progaloisiens $\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}$, plus un point de $\mathrm{B}_K$. On peut ainsi fixer un objet de $\Pi$, i.e. un point de $\mathrm{B}$, i.e. un $\overline{\mathrm{Q}}$, et étudier les $K$, avec un plongement de $k$ (clôture algébrique de  dans $K$) dans  - mais [] donner une clôture algébrique $\overline{K}$ de $K$ qui induise /. Ils sont décrits [?]

On a ainsi plusieurs [] essentiellement équivalentes, pour décrire par voie profinie une extension $K$ de type fini de  :

1) Pour le topos étale $\mathrm{B}_K$, en tant que topos progaloisien sur $\mathrm{B}$ ;

2) Pour le groupoïde fondamental $\Pi_K$ de ce topos (groupoïde de ces points, ou de ses revêtement universel) - en tant que groupoïde au dessus de $\Pi$ ;

3) Pour le groupe extérieur $E_K$, au dessus de groupe extérieur $E$ ou $\Gamma$ ([]) ;

4) En termes d'une clôture algébrique $\overline{K}/K$ (i.e. en décrivant le couple $(K, \overline{K})$ plutôt que $K$), par un objet $\in (\Pi)$ et un homomorphisme de groupes profinis $E \longrightarrow \Gamma_{,}$ ;

5) En termes d'une clôture algébrique fixe de , et où $\Gamma = \Gamma_{,}$ [] les couples $(K, i)$ où $i : k \longrightarrow$ est un plongement de la clôture algébrique $k$ de dans des : pour le groupes extérieur $\pi_K = \pi_1(K)$, sur lequel un sous-groupe ouvert $\Gamma_K \subset \Gamma$ opère extérieurement par des groupes profinis *extérieures* $\pi_1(K) = \Gamma_K$, sur lesquels un sous-groupe ouvert $\Gamma$ (non précisé []) de $\Gamma_{,}$ opère *extérieurement* ;

6) En termes d'une / : pour le groupoïde $\Pi_{K\otimes}$ [] .

Un homomorphisme de corps $K \longrightarrow K'$ donne ([9]) [] à un homomorphisme de groupes extérieures, $\pi' \longrightarrow \pi$, où l'image de $\pi'$ dans $\pi$ est ouvert [] de centralisateur réduit à (1), ce qui implique [] que le morphisme de topos $\mathrm{B}_{K'\otimes_K} \longrightarrow \mathrm{B}_{K\otimes_K}$ es déterminé (a isomorphisme unique près) par [] homomorphisme extérieur. De plus on a des actions extérieures de $\Gamma = \Gamma_K \subset \Gamma_{K'}$ sur $\pi'$ et $\pi$, de façon que $\pi' \longrightarrow \pi$ [] et ceci suffit pour reconstitue, d'une part les groupes extérieures $E, E'$ extensions ("extérieures") de $\Gamma$ [] $\pi$, $\pi'$ (et , a équivalence rigide près, les $\mathrm{B}_K$, $\mathrm{B}_{K'}$ et $\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}$, $\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}$) et de plus l'homomorphisme d'extensions extérieures $E \longrightarrow E'$ de $\Gamma$.

*Remarque*. — Quand $\pi \neq (1)$, i.e. $K$ pas fini sur , le théorème 1 peut se renforcer, sauf erreur, en écrivant que pour tout sous-groupe $\pi' \subset \pi$ ouvert *dans* $\pi$, $\mathrm{Centr}_E(\pi') = \{1\}$.

Si $z$ est se centralisateur, on a $z \cap \pi = (1)$ d'après le théorème 1, prouvons que l'image de $z$ dans $\Gamma_{\overline{K},K} \subset \Gamma_{,}$ est finie (ce qui [] alors, que $z$ est d'ordre 1 ou 2, et dans le [] cas que son image des $\Gamma_{,}$ est [] pour un $\tau$ de conjugaison complexe).

[] $E$ pour un sous-groupe ouvert assez petit (ce qui revient a poser à une extension finie de $K$) [] $\pi' = \pi$, alors l'image $z'$ de $z$ dans $\Gamma$ est contenue dans le noyau

[9] on suppose pour simplifier qui c'est

de l'homomorphisme $\varphi : \Gamma \longrightarrow [](\pi)$. [] je sais prouver que cet homomorphisme est injectif (ou est ramené aussitôt ou cas où $K$ est de degré de [] 1, et on est ramené ou cas des $\pi_1$ d'une courbe algébrique ...)

Théorème (**2**). ([10]) — *Le foncteur $K \longrightarrow \Pi_K/\Pi$ des extensions de type fini de vers les groupoïdes profinis sur $\Pi$ est* fidèle *i.e. si deux homomorphismes $f, g : K \longrightarrow K'$ définissent des homomorphismes de groupoïdes sur $\Pi$ isomorphes*

$$\begin{tikzcd}
\Pi_{K'} \arrow[rr, "f^*{,}g^*"] \arrow[dr, "p'"'] & & \Pi_K \arrow[dl, "p"] \\
& \Pi &
\end{tikzcd}$$

*(i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs $\alpha : f^* \longrightarrow g^*$ tel que pour tout objet $\overline{\eta'}$ de $\Pi_{K'}$, le carré*

$$\begin{tikzcd}
pf^*(\overline{\eta'}) \arrow[r, "\sim", "p(\alpha)"'] \arrow[d] & pg^*(\overline{\eta'}) \arrow[d] \\
p(\overline{\eta'}) \arrow[r, "\sim"] & p'(\overline{\eta'})
\end{tikzcd}$$

*est commutatif) alors $f = g$.*

L'hypothèse sur $f, g$ signifie aussi, en termes d'une clôture algébrique choisie $\overline{K'}$ de $K'$, donnent via $f$ [] $g$ deux clôtures algébriques de [] l'on peut trouver un isomorphisme [] celui-ci ([11]) ([] d'identifier $E_{\overline{K}/K}$ et $E_{\widetilde{K}/K}$) de telle façon que les deux homomorphismes

$$f^*, g^* : E_{\overline{K'},K'} \longrightarrow E_{\overline{K},K}$$

sont égaux. C'est sans doute plus claire en termes d'une clôture algébrique fixée de , en disant que les deux homomorphismes $f^*, g^* : E_{K'} \longrightarrow E_K$ de groupes profinis extérieures (avec opérateurs $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$) sont égaux.

Écrivons comme [] $K = \varinjlim A_i$, donc $\eta = \mathrm{Spec}(K) = \varprojlim U_i$, on a (en termes d'un point géométrique quelconque $\overline{\eta}$ de $\mathrm{Spec} K$ i.e. en termes d'un $\overline{K}$)

$$\pi_K = \varprojlim_i \pi_1(\overline{U}_i, \overline{\eta}), \quad \text{où} \quad \overline{U}_i = U_i \otimes_K$$

[10]En fait, ce théorème n'est pas spécial à - il [] avait sur un corps de [] quelconque est en fait
[11]induisant "l'identité" sur [] clôtures algébriques []

et il suffit de voir que pour tout $i$, $f|A_i = g|A_i$ [] le fait que $\pi_1(f_i^*) = \pi_1(g_i^*)$ : $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(U_i)$ (comme homomorphisme de groupes extérieures. On [] fixé, on a $K' = \varinjlim A_j$, où les $A_j$ contient $f_i(A_i)$ et $g_i(A_i)$, donc

$$\pi_{K'} = \varprojlim_j \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'}), \quad \text{avec} \quad \overline{V}_j = \mathrm{Spec}(A_j) \otimes_K .$$

Notons (prenant les $V_j$ réguliers) que les homomorphismes de transition des le système projectif de $\pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'})$ sont surjectifs - donc $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'})$ est surjectif, ce qui implique que l'égalité de $f^* \mathrm{et} g^*$ : $\pi_{K'}[]\pi_1(\overline{U}_i)$ (comme homomorphismes extérieures) implique celle de $\pi_1(\overline{V}_j) \longrightarrow \pi_1(\overline{U}_j)$.

Donc l'égalité $f_i = g_i$ (d'où $f = g$) est conséquence de résultat plus général). "[] géométrique"

Corollaire **(1).** — *Soient $X$, $Y$ des schémas de type fini réduits 0-connexes sur un corps algébriquement close $k$, et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux morphismes, on suppose que $\pi_1(f), \pi_1(g) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ sont égaux (en fait [] extérieurs) Alors*

*a) Si $Y$ se plongue par un $i : Y \longrightarrow G$ un groupe algébrique commutatif extension d'une V.A par un tore, il existe un $u \in Y$ (unique) tel que $g(x) = f(x) + u$ et pour tout $x \in X(h)$, i.e. $(i \circ g) = \tau_u \circ (i \circ f)$ ($\tau_u$ [])*

*b) Si $Y$ est une variété élémentaire d'Artin, avec fibres successives des courbes anbéliennes, et $X$ [] et $f$ ou $g$ est dominant, alors $f = g$.*

Démonstration. — a) L'unicité de [] est [] - i.e. il suffit ([12]) d'examiner les actions de $\pi(f)$, $\pi(g)$ sur les groupes abelianisés dans $\pi_1$, et même sur leurs composantes $l$-adiques. Prenant le Jacobienne généralisée de type "extension d'une V.A par une tore" de $X$, on sait que

1°) Les morphismes $f : X \longrightarrow G$ tel que $f(\alpha) = 0$ se factorisent de façon unique par $X \xrightarrow{can} J \xrightarrow{\varphi} G$ avec $\varphi$ un homomorphisme de groupes algébriques ;

2°) Un tel homomorphisme $\varphi$ est connu quand on connaît ses actions sur les $H_1( \ ,\mathbb{Z})$ ce qui [] à la connaissance sur les points d'ordre [] que soit $v$ - on ceux-ci sont denses ...

[12] En fait, dans a) il suffit de supposer que

3°) $H_1(X, \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H_1(J, \mathbb{Z}_l)$.

De ceci, on conclut (par 3°)) que $H_1(f) = H_1(g)$ implique (si $f = \varphi \circ can$, $g = \psi \circ can$) $H_1(\varphi) = H_1(\psi)$, donc par 2°) que $\varphi = \psi$, donc $f = g$ []

Notons que l'on

b) on va pourtant prouvons l'égalité sans l'hypothèse anabéliennes

[] L'hypothèse que $\pi_1(f) = \pi_1(g)$ signifie donc qu'il existe $\alpha \in \pi_1(Y)$, tel que

$$\pi(f')(\gamma) = []\pi(j)(\gamma)$$

pour tout $\gamma \in Im(\pi_1(X) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(U))$. [] cette image est un sous-groupe *ouvert* de $\pi_1(U)$ ([] dominant !). Donc on est ramené à ceci: Soit $U$ ouvert $\neq \varphi$ de $Y$, $u \in G$, tels que $\tau_u U \subset Y$ [et tels que (désignant par $f, f'$ les morphismes $y \longrightarrow y$ et $y \mapsto y$ en de $U$ dans $Y$) $\pi_1(f)$ et $\pi_1(f')$ [] extérieurement en un sous-groupe ouvert de $\pi_1(U)$] *alors* $f = f'$ voie $u =$

Finalement, je [] que [] pas à la prouve par voie géométrique [] *arithmétique*.

Corollaire **(2).** — *Le condition $f = g$ de corollaire précédent, est valable si on suppose que $K$ est de caractéristique 0, $X$ [] est dans l'une des hypothèses suivantes*

*c) l'image de $\pi_1(F)$ est un sous-groupe ouvert de $\pi_1(Y)$, $Y$ est une variété élémentaire d'Artin anabélienne ;*

*d) l'image de $\pi_1(X)$ par $\pi_1(f)$ a un centralisateur dans $\pi_1(Y)$ réduit à (1), et $Y$ se plonge dans un groupe algébrique extension d'une VA par un tore.*

Comme le centralisateur [] de un sous-groupe ouvert de $\pi_1(Y)$ ($\pi_1(Y)$ étant extension successive de groupes profinis *fibres* anabéliennes) est réduit à (1), comme un a un[13] plus haut, le cas c) est un cas particulier de d), [] dans le cas d), [] $X$ pour un ouvert d'Artin []

La situation $X, Y, f, g$ provient, par extension de corps de [] d'une situation analogue sur un corps $K$ extension de type fini de . Soit $\overline{K}$ la clôture algébrique de $K$ dans $k$ [] de $K$ à $\overline{K}$. On a donc [] satisfaisant la condition d) avec [] trivial.

[13]il faut

Mais ces hypothèses impliquent que les extensions $E(X/K) = \pi_1(X)$, $E(Y/K) = \pi_1(Y)$ de $E_{\overline{K},K}$ [], ainsi que les homomorphismes [] induits, sont reconstruite à partir de [] et de l'action extérieure de $E_{\overline{K},K}$ sur ces groupes. On va montrer maintenant le

Corollaire **(3).** — *Soient $X$, $Y$ deux schémas de type fini sur un corps $K$ extension de type fini de , On suppose que $Y$ se plongue dans une extension d'une V.A. par un tore, $X$ réduit, $X$, $Y$ [] 0-connexe. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de $K$, d'où des extensions "extérieures" $E_{X,K}$, $E_{Y,K}$ de $E_{\overline{K},K} = \mathrm{Gal}(\overline{K},K)$ [] $\pi_1(\overline{X})$, $\pi_1(\overline{Y})$, et pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, un morphisme [] de $E_{X,K}$ [] $E_{Y,K}$.*

Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ tels que [] - i.e. [] soient conjugués pour un élément de $\pi_1(Y)$ [] alors $f = g$.

En fait, il suffit même que ls homomorphismes d'*extensions* [] soient égaux, [] $f = g$. (C'est à dire, [] des hypothèses *anabéliennes*, des hypothèses [] géométriques sue les actions de [], [] on peut laisser tomber les aspects anabéliens [] sur les aspects abéliens []) [].

Il suffit de voir que [] à noyau abélien associée - l'hypothèse implique que $f(x)$ et $g(x)$ définissent le même donne de conjugaison de scindages. Donc il suffit maintenant de prouver le

Théorème **(3).** — *Soit $X$ un schéma de type fini sur un corps $K$, extension de type fini de , on suppose que $X$ est géométriquement 0-connexe et se plongue dans une extension d'une V. A. par un tore (p. ex. $X$ est une variété élémentaire d'Artin, à fibres []).*

Considérons une clôture algébrique $\overline{K}/K$ et l'extension extérieure correspondant $E_{X/K}$ dans $E_{\overline{K}/K} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ par $\pi_1(\overline{X})$ ($\overline{X} = X \otimes_K \overline{K}$) et l'extension déduite de $\widetilde{E}_{X/K}$ de $E_{\overline{K}/K}$ par $\pi_1(\overline{X})_{ab}$. Considérons les applications

$$(*) \quad X(K) \longrightarrow \text{Classes de } \pi(\overline{X}) - \text{conjugaison de scindages de } E_{X/K} \text{ sur } E_{\overline{K}/K}$$

$$(**) \qquad X(K) \longrightarrow \text{Classes de conjugaison de scindages}$$

Ces applications sont *injectives.*

Démonstration. — Il suffit de le [] pour le seconde application, et on est ramené au cas où $X$ est lui-même un groupe algébrique $G$, extension d'une V. A. par une tore. Alors l'application est un homomorphisme de groupes

$$(16) \qquad G(K)$$

obtenue ainsi. On considère pour tout [] la suite exacte []

$$0 \longrightarrow [\,] \longrightarrow G[\,] \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

[] suite exacte de cohomologie

[]

et passant à la limite, on trouve

$$0 \longrightarrow$$

le composé de (16) avec l'homomorphisme canonique

[]

compte tenu de

[]

[] que l'homomorphisme induite par

[]

dont le noyau [] est fermé des éléments de $G(K)$ *infiniment divisibles* dans . [] ici $K$ étant un corps [] de type fini le théorème de Mordell-Weil [] que $G(K)$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini - donc $G(K) \longrightarrow \varprojlim G(K)_n$ est injectif. Donc []

Remarque. —

[] $x$ dans le "revêtement universel abélien" $\widetilde{G}$ de $G$ construit comme $\varprojlim$ des revêtements $G(n) \simeq G$ de $G$, donnée, []. L'énonce dit que si [] est trivial - i.e. si [] mais dans ce cas [] soit [] étales.

est cependant possible que [] ...

[] aux conditions de de Corollaire 1, b), [] avec les groupes fondamentaux [], on trouve que

[]

*Complément.* — Retour sur une démonstration *géométrique* du Théorème 2, Corollaire 1 b). On peut supposer que ce est le Jacobienne généralisée de $Y$, et il suffit de montrer le

Lemme. — *Soit $Y$ une variété élémentaire d'Artin anabélienne (sur $K$ algébriquement clos), $Y \hookrightarrow J^1_Y$ son plongement dans sa Jacobienne généralisée, $u \in J^0_Y(k)$ et $U$ un ouvert non [] de $Y$, tels que $U + u \subset Y$. Alors $u = 1$, ou encore: l'application $x \mapsto x$ [] de $U$ dans $Y$ est l'identité.*

Par dévissage, on es ramené au cas où $Y$ est une courbe. Supposons le d'abord complète, de suite que $U + u \subset Y$ implique $Y + u \subset Y$ - alors la [] est bien connu (et résulte par exemple de la formation des points fixes, qui implique que [] ce qui [] $J^0_Y(k)$ est nulle. Pour que $x + u$ soit de la forme $y$ ($y \in Y$) il faut [] que $u \in \alpha$ et y aient même image dans $J^1_{\hat{y}}$, ce qui [] Je veut mieux, dans le cas général, présenter les choses sous forme homologique. Considérons les deux morphismes $U \hookrightarrow iY$ induisant et $J : U \longrightarrow Y$ induit par lui, je dis que $H_1(i) = H_1(j)$, ou ce qui revient au même, puisque $Y \xrightarrow{\alpha} J'_Y$ induit un isomorphisme $H_1(\alpha) : H_1(Y) \longrightarrow H_1(J'_Y)$, que

Si le genre est 0, on en concluait (puisque []. Dans le cas de genre 1, on en concluait maintenant que l'image de un des $J^0_{\hat{y}}$ est égale à 1, et on [] comme précédemment. []

## II. La question de pleine fidélité

Soient $K$, $K'$ deux extensions de type fini de $\mathbf{Q}$ - est-il vrai que tout $\Pi_{\mathbf{Q}}$-homomorphisme $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$ provient d'un homomorphisme de corps $K' \longrightarrow K$ ? On est ramené aussitôt au cas où – une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ étant choisie, d'où un $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$ – $K$ et $K'$ ont des sous-corps $k$, $k'$ (clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $K$ resp. $K'$) isomorphes, avec des plongements $k, k' \longrightarrow \mathbf{Q}$ de même image, que $E_K$ et $E_{K'}$ peuvent être considérés comme des extensions d'un même groupe $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$ par $\pi_K$ resp. $\pi_{K'}$. La question est alors si *tout* homomorphisme de $\pi_{K'}$ dans $\pi_K$ qui commute à l'action de $\Gamma$, est induit par un homomorphisme $K \hookrightarrow K'$. Pour construire ce dernier, il faudrait donc avoir une idée comment reconstruire $K, K'$ à partir des extensions $E_K, E_{K'}$, ou encore à partir des groupes profinis extérieurs avec opération de $\Gamma$ dessus. Et on pressent que le Théorème 3 du paragraphe précédent (appliqué notamment à $\mathbb{P}^1_K$ convenablement troué ...) pourrait donner la clef d'une telle construction.

Bien sûr, des homomorphismes extérieurs quelconques $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ n'auront pas de sens géométrique - l'idée est que les opérations du groupe $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$ dessus soit si draconienne, qu'il n'est possible de trouver un homomorphisme extérieure qui y commute que par voie géométrique – par des plongements de corps. Donc il est essentiel ici que le corps de base ne soit pas quelconque, mais un corps tel que $\mathbf{Q}$ (ou, ce qui revient manifestement au même, une extension de type fini de $\mathbf{Q}$). Encore faut-il se borner aux homomorphismes $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ dont on décrète d'avance que l'image soit ouverte – sinon, prenant pour $\pi_{K'}$ le groupe unité (i.e. $K' = k$), on trouverait un homomorphisme $K \longrightarrow k$ correspondant! Il faut pour le moins, pour travailler à l'aise à partir d'homomorphismes $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ (au lieu de $E_{K'} \longrightarrow E_K$) supposer que le centralisateur dans $\pi_K$ de l'image de tout sous-groupe ouvert de $\pi_{K'}$ soit réduit à $\{1\}$ – on dira que l'homomorphisme en question est *anabélien* alors – de telle façon qu'à partir de cet homomorphisme (commutant à $\Gamma$) on reconstitue l'homomorphisme d'extensions $E_K$ et $E_{K'}$, qui est l'objet vraiment essentiel. Par exemple, si justement $K' = k$, donc $E_{K'} = \Gamma$, ce qui nous intéressera, ce ne seront pas le $\Gamma$-homomorphismes de $\pi_{K'} = \{1\}$ (!) dans $\pi_K$, mais bien les *sections* de $E_K$ sur $\Gamma$.

Question-conjecture. — *Soient $K$, $K'$ deux corps, extensions de type fini de $\mathbf{Q}$, et un morphisme $\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K$ de topos sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$.*

*Les conditions suivantes sont-elles bien équivalentes* [?]

*(a) L'homomorphisme provient d'un plongement de corps $K \hookrightarrow K'$.*

*(b) L'image de l'homomorphisme extérieur $E_{K'} \longrightarrow E_K$ a une image ouverte.*

*(c) L'homomorphisme extérieure $E_{K'} \longrightarrow E_K$ est anabélien*[14].

**NB**. On sait que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) et que (b) équivaut à $\pi_K \longrightarrow \pi_{K'}$ a une image ouverte.

Une réponse affirmative impliquerait que si $\operatorname{degtr} K'/\mathbf{Q} < \operatorname{degtr} K/\mathbf{Q}$, alors il n'y a pas de tel homomorphisme $E_{K'} \longrightarrow E_K$, compatible avec les projections dans

[14] (c) n'est pas assez fort, cf. plus bas…

$E_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, en particulier, il en résulterait que toute section de $E_K$ sur $\Gamma = \mathrm{Im}(E_K \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{Q}})$, ou sur un sous-groupe ouvert $\Gamma'$ de $\Gamma$, a un centralisateur non-trivial dans $E_K$ – et comme son centralisateur dans $\Gamma$ est réduit à $\{1\}$, cela impliquerait que pour toute telle section, on aurait (si $\pi_K \neq 1$) $\pi_K^{\Gamma'} \neq \{1\}$. Or je m'aperçois que ceci est sans doute faux (cf. plus bas, numéro 3) - il faudrait renforcer (c) ci-dessus en [:]

(c′) L'homomorphisme $E^{\circ}_{K'} \longrightarrow E_K$ induit par $E_{K'} \longrightarrow E_K$ est anabélien (où $E^{\circ}_{K'}$ est le noyau de l'homomorphisme composé

$$E_{K'} \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}} \xrightarrow{\chi \text{ caractère cyclotomique}} \hat{}$$

Z$^*$ ).

Mais pour voir que cette condition est *nécessaire* pour que l'homomorphisme soit géométrique, il faudrait vérifier que pour tout sous-groupe ouvert $E'$ d'un $E_K$, le centralisateur dans $E_K$ (non seulement de $E'$ lui-même, mais même de $E'^{\circ}$) est réduit à 1 – ce qui résulte de la démonstration du Théorème 1, et du fait[15] que pour tout sous-groupe ouvert $\Gamma'$ de $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, le centralisateur (non seulement de $\Gamma'$, mais même) de $\Gamma'^{\circ}$ dans $\Gamma$ est réduit à $\{1\}$.

Donc, la conjecture initiale revue et corrigée donné la

Conséquence (conjecturale). — *Pour tout section de $E_K$ sur un sous-groupe ouvert $\Gamma'$ de $\Gamma_{\mathbf{Q}}$, de sorte que $\Gamma'$ opère (effectivement) sur $\pi_K$, on a (si $K$ pas algébrique sur $\mathbf{Q}$, i.e. $\pi_K \neq \{1\}$) $\pi_K^{\Gamma'^{\circ}} \neq \{1\}$.*

À vrai dire, à certains égards les $\Gamma_K$ sont des groupes trop gros pour pouvoir travailler directement avec, il y a lieu de regarder $\Gamma_K$ comme un $\varprojlim$ de groupes $\Gamma_{U/\mathbf{Q}}$ associés à des modèles affines de $K$ – et on s'intéressera plus particulièrement à des modèles affines qui sont des variétés élémentaires – plus généralement, qui sont des K$(\pi, 1)$ (au sens profini…). Il est possible qu'il faille d'ailleurs, dans l'énonce de la conjecture de départ, prendre un homomorphisme extérieur $E_{K'} \longrightarrow E_K$ dont on suppose d'avance (en plus de l'hypothèse anabélienne et de la compatibilité avec les homomorphismes dans $\Gamma_{\mathbf{Q}}$) qu'elle est compatible avec les *filtrations* de ces groupes,associés à ces modèles ("filtration modélique" (grossière)).

[15] à vérifier !

Nous allons alors, au même temps que des extension de type fini de $\mathbf{Q}$, les homomorphismes entre tels, et homomorphismes de groupes profinis associés, étudier la situation analogue pour des “modèles” élémentaires anabéliens, voire des modèles $\mathrm{K}(\pi, 1)$ généraux (On peut aussi regarder de tels modèles sur un corps $K$, extension de type fini de $\mathbf{Q}$ – mais passons pour le moment sur cette situation mixte, un peu bâtarde…) Si $U$, $V$ sont des tels modèles, tout morphisme $V \longrightarrow U$ définit un morphismes de topos galoisiens sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$, $\mathrm{B}_U \longrightarrow \mathrm{B}_V$, et si $U$ est élémentaire anabélien, ce morphisme et connu quand on connaît seulement $\mathrm{H}_1(\mathrm{B}_{\overline{U}}, \mathbf{Z}_\ell) \longrightarrow \mathrm{H}_1(\mathrm{B}_{\overline{V}}, \mathbf{Z}_\ell)$ – ce qui est beaucoup moins que la classe d'isomorphie d'homomorphismes de $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$-topos. (Œn fait, sans hypothèse anabélienne sur $V$, dès que $V$ se plonge dans une variété anabélienne, $f$ est connu quand on connaît son action sur les topos étales…). Mais quels sont les homomorphismes $\mathrm{B}_U \longrightarrow \mathrm{B}_V$, ou $E_U \longrightarrow E_V$, qui correspondent à des morphismes de modèles ? Avec un peu de culot, on dirait [:]

Conjecture fondamentale. — *Soient $U$, $V$ deux schémas de type fini sur $\mathbf{Q}$, $V$ séparé régulier, $U$ une variété élémentaire anabélienne sur une extension finie de $\mathbf{Q}$. Considérons un morphisme $\mathrm{B}_V \longrightarrow \mathrm{B}_U$ des topos étales sur $\mathbf{Q}$ – ou, ce qui revient au même, un homomorphisme de groupes extérieurs*

$$f : E_V = \pi_1(V) \longrightarrow E_U = \pi_1(U),$$

*compatible avec les homomorphismes extérieurs dans $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \pi_1(\mathbf{Q})$*[16].

*Conditions équivalentes* [:]

*(a) Cet homomorphisme provient (à isomorphisme près) d'un morphisme $V \longrightarrow U$ sur les modèles (qui est donc uniquement déterminé)*

*(b) $f|E_V^\circ$ est anabélien, i.e. l'image par $f$ de tout sous-groupe ouvert de $E_V^\circ$ a un centralisateur réduit à 1.*

Pour la nécessité de (b), on est ramené aussitôt au cas où $V$ est réduit à un point, où cela se réduit à la

[16]**NB** Pour l'unicité, on est ramené aussitôt au cas où $V$ lui-même est un modèle élémentaire anabélien, si ça nous chante.

Conséquence conjecturale. — *Soit* $\Gamma' \subset \mathrm{Im}(E_U \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{Q}})$ *un sous-groupe ouvert, correspondant à un corps k fini sur* $\mathbf{Q}$*, considérons un k-point de* $U$*, d'où un relèvement* $\Gamma' \longrightarrow E_U$*, de sorte que* $\Gamma'$ *opère sur* $\pi_U$*. Ceci posé, on a* $\pi_U^{\Gamma'^{\circ}} = \{1\}$.

On étudiera par la suite les relations entre cette "conséquence conjecturale", et la précédente (d'apparence opposée !) concernant les $E$.

La conjecture fondamentale sur les modèles implique la conjecture fondamentale sur les corps, à condition de prendre soin, dans cette dernière, de se limiter aux homomorphismes compatibles aux filtrations modéliques.[17]

Plus généralement, prenant maintenant pour $U$ des schémas qui sont des $\varprojlim$ des modèles élémentaires anabéliens, avec morphismes de transition des immersions ouvertes affines (pour pouvoir passer à la $\varprojlim$ dans la catégorie des schémas), pour $V$ un schéma $\varprojlim$ de schémas séparés réguliers de type fini sur $\mathbf{Q}$ (morphismes de transition immersions ouvertes affines sans plus). Alors les morphismes *dominants* de schémas $V \longrightarrow U$ doivent correspondre aux homomorphismes extérieurs $E_V \longrightarrow E_U$ compatibles avec les projections dans $E_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, et telle que l'image soit ouverte. Par exemple, on pourrait prendre pour $U$, $V$ les spectres d'anneaux locaux réguliers essentiellementde type fini sur $\mathbf{Q}$.

—

Cette conjecture fondamentale (éventuellement revue et corrigée en cours de route !) étant admise, la question qui se pose ensuite est de déterminer les topos (pro)galoisiens sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$ qui proviennent de modèles élémentaires anabéliens – ou encore, les $\pi_U = \pi_1(\overline{U})$ de tels modèles étant connus, de déterminer quelles sont [les] actions extérieures possibles de sous-groupes ouverts $\Gamma$ de $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ sur de tels groupes fondamentaux – et éventuellement question analogue pour d'autres types de groupes profinis, correspondant à des $\mathrm{K}(\pi, 1)$ qui se réaliseraient par des variétés algébriques (sur $\mathbf{C}$, disons), mais pas par des variétés élémentaires. (J'ai en vue autant des variétés modulaires, tels que, notamment, des variétés modulaires pour les courbes algébriques...) à partir de là, on reconstruirait par recollement, en termes profinis, tous les schémas lisses sur un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$ (ou plutôt la

[17] Et il vaut mieux se borner à l'équivalence de (a) et (b) – la condition (c) avec les centralisateurs risque de passer mal à la $\varprojlim$.

catégorie de ceux-là), ou plus généralement, sur un corps quelconque – puis, sans doute, par "recollement", la catégorie des schémas localement de type fini sur un $K$ – tant [?] des [varier?] la catégorie des fractions qui s'en déduit en rendant inversibles les homéomorphismes universels…

Les réflexions précédentes suggèrent aussi des énoncés comme le suivant : Pour un schéma de base $S$ localement noethérien donné[18], les foncteurs $X \longrightarrow X_{\text{ét}}$, allant de la catégorie des schémas réduits localement de présentation finis sur $S$, vers la 2-catégorie des topos au-dessus de $X_{\text{ét}}$, est 1-fidèle (deux homomorphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$ tels que les morphismes de topos $f_{\text{ét}}, g_{\text{ét}} : X_{\text{ét}} \rightrightarrows Y_{\text{ét}}$ au-dessus de Set soient isomorphes, sont égaux) et même peut-être *pleinement fidèle*, quand on passe à la catégorie des fractions de $(\mathrm{Sch}_{\text{l.t.f.}})/S$ obtenue en rendant inversibles les homéomorphismes universels… Exprimant ceci par exemple pour les automorphismes d'une courbe algébrique propre sur une extension fini de $\mathbf{Q}$, on retrouverait le "fait" que tout automorphisme extérieur de $E_K$ ($K$ le corps des fonctions de $X$) qui respecte la structure à lacets [?] et qui commute à l'action de $\Gamma$, provient d'un automorphisme de $X$.

## III. Étude des sections de $E_U$ sur $\Gamma$

Soit $U$ un schéma connexe lisse de type fini géométriquement $0$-connexe sur le corps $K$, d'où $E_U \longrightarrow E_K$, et ([19]) on se propose d'étudier les sections mod $\pi_{U,K}$-conjugaison - plus généralement, on [] un même topos [] les sections $E'_K \longrightarrow E_U$, où $E'_K$ est un sous-groupe ouvert de $E_K$ (ce qui signifie que [] fait une extension de base finie sur $K$). Si $K$ de type fini sur le corps $\mathbf{Q}$ et si $U$ se plonge dans une schéma sur un groupe commutatif rigide l'application

$U(K) \longrightarrow$ [] d'isomorphisme section de $\mathrm{B}_U$ sur $\mathrm{B}_K[]\pi_{U_K}$—conjugaison de sections de$E_U$sur$E_K$

est injectif. On va examiner d'entre façons "géométriques" de trouver des sections.

Supposons d'abord que $U$ soit une courbe algébrique, que ne soit pas de type $(0,0)$ ou $(0,1)$, i.e. $\pi_1(\overline{U}) = \pi_{U,K} \neq \{0\}$. On a que pour tout $i \in \widehat{\overline{U}} \backslash \overline{U}$ (point à

[18] $S$ de caractéristique $0$ ?

[19] On a choisie un revêtement universel $\widetilde{U}$ de $U$ pour définir $X$, et $E_U$, $E_K$, et $E_U \longrightarrow E_K$.

l'infini) le groupe de lacets $L_i$ fournit un scindage (des [] i.e. []) en prenant son centralisateur $Z(L_i)$ dans $E$, d'où

$$1 \longrightarrow L_i \longrightarrow Z(L_i) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1 \tag{2}$$

et en prenant les scindages de cette extension. Il ne existe, p. ex. définis par une [] de $\overline{O}_{\widehat{U},i}$. L'un des donnes de conjugaison des scindages de (2) est un []

(3)

et [] injectivement de l'un des donnes de $\pi$-conjugaison de scindages.

*Proposition. — ([20]) On suppose* $(g,v) \neq (0,0),(0,1)$ *i.e.* $\pi_{\overline{U}} = \pi_{U,K} \neq (1)$. *Alors les classes de $\pi$-conjugaison scindage de* (1) *définis pour les scindages de* (2) *sont distinctes de celles associés aux points de* $U(K)$. *Si de plus* $(g,v) \neq (0,2)$, *i.e. si [] est dans le cas anabélien, alors les classes de $\pi$-conjugaison de scindages de (1), associés à des scindages de (2) pour deux indices $i = i_1$ et $i = i_2$ distincts, soient distincts.*

La première assertion s'obtient en "bordant" le trous $i$, alors la section envisagé devient la section de $U \cup \{i\} = U'$ associée au point $i$, et celle est donc distincte de celle associée aux [] points de $U'$, i.e. aux points de $U$ - a fortiori [] pour le sous-groupe [] par $L_i$. On [] de même pour [] que les [] de scindages associées a un $L_{i_1}$ et un $L_{i_2}$, $i_1 \neq i_2$, sont distinctes, [] sauf le cas de type $(0,3)$ [] on tombe sur le type $(0,1)$, où [] de résultat d'injectivité. Mais on peut [], à condition d'admettre que pour un scindage de (2), faisant opérer $\Gamma$ sur $\pi$, on a

$$\pi^{\Gamma^\circ} = L_i \tag{3}$$

(donc $\pi^\Gamma = (1)$, d'ailleurs) - résultat que on [] plausible. [] que le [] de conjugaison de sections détermine le [] de conjugaison de $L_i$, donc $i$.

Conjecture **(A)**. — *Soit $U$ courbe algébrique anabélienne géométrique* 0*-connexe sur corps $K$ de type fini sur* **Q**. *Alors toute section de (1) est d'une des deux types précédents, i.e. soit définie par un point de* $U(K)$ [21], *Sont pas une section d'une extension (2), avec* $i \in I(\pi)^\Gamma$ *i.e. [] un point de* $\widehat{U} \backslash U$, *rationnel sur $K$.*

[20]C'est démontré sauf pour le type $(0,3)$ []

[21]Il y a [] plus []

Si on obtient cette conjecture, alors on va conclurait, pour passage à la limite, en considérait le corps de fonctions $L$ de $U$ et $E_L \longrightarrow E_K$ ($E_L$ peut être considéré comme un groupe à lacets "infini" (avec une infinité des classes de sous-groupes lacets $L_i$...) que tout scindage de cette extension provient d'une scindage d'une extension de type (2), avec $i \in I$ $\Gamma = X(K)$ $(X = \hat{U})$. Les classes conjugués de tels scindages se grouperaient donc pour paquets (en regardent les centralisateurs des sous-groupes image de $\Gamma^\circ$ par ses sections,) et un [] ensemble des scindages qui est donc []$(\Gamma^0)$ conjugués (même s'il ne sont eux-mêmes conjugués). Donc on retrouve [] une description de $X(K)$ (donc ainsi de $X(K')$ pour toute extension finie $K'$ de $K$) en termes de l'extension $E_L$ de $E_K$ par $\pi_{L,K}$, au même temps qu'une [] de reconstitue les $U = X \backslash I$ []

Donc en fait c'est la structure $E_L \longrightarrow E_K$ qui est le plus riche a priori, et de loin plus commode pour le genre 0 et 1, où le considération des $U$ de type $(g, v)$ $(2g + v \geq 3)$ [] le groupe "continue" d'automorphismes... La forme "modélique" de la conjecture précédente revient à la forme "birationalle", quand on y précise cette [] en disant que tout scindage de $E_U \longrightarrow E_K$ se revient au un scindage de $E_L \longrightarrow E_K$ (on ainsi, [] un scindage de $E_V \longrightarrow E_K$, si $V$ est un modèle [] $U$).

On ne [] les conjectures précédentes (sous forme modèlique, disons) sous une forme plus géométrique, en introduisant, un même topos qu'un revêtement universel $\widetilde{U}$ de $U$, [] $X'$ de $X$ [] $\widetilde{U}$ (où $X = \hat{U}$). (NB je m'abstient de le noter $\widetilde{X}$, [] il n'est pas [] sur $X$). Notons que pour $i \in I = \overline{X} - \overline{U}$, l'un des $L_i$ des $\overline{\pi} = \pi(\overline{U})$ [] en correspondance 1-1 avec [] fibre $X'_i$ de $X'$ au dessus de $i$.

$$X \longrightarrow \overline{X} \longrightarrow X'$$

Donc $X'$ peut être considéré comme le [] de $\widetilde{U}$, et de $X' \backslash I$ = ensemble des sous-groupes lacets de $\overline{\pi}$, qui apparaissent ainsi comme des "points à l'infini" des revêtements universel $\widetilde{U}$. D'ailleurs $E_U$ s'interprète comme le groupe de [] schéma $\widetilde{U}$ [], et $E_U \longrightarrow E_K$ comme l'homomorphisme de passage au quotient [] (NB. $\overline{K}$ s'identifie a la clôture algébrique de $K$ dans [], donc $E_U$ opère sur Spec$\overline{K}$ de façon []) Une section de $E_U$ sur $E_K$ est donc une action de $E_K$ sur $\widetilde{U}$, compatible avec son action sur $\widetilde{U}$ [] convenable (sans doute [] $\overline{U}_i$ finis sur $\overline{U}$ entre $\overline{U}$ et $\overline{U}$...). Considérons alors la

Conjecture **(B)**. ([22]) — *Toute telle action de* $\Gamma$ *sur* $\widetilde{U}$ *admet* dans $X' = \widehat{\widetilde{U}}$ *un point fixe et un seul.*

Ceci signifie alors

a) S'il y a un point fixe à distance finie i.e. $\widetilde{X} \in \widetilde{U}^T$, alors

1°) L'image de $\widetilde{X}$ dans $U$ est uniquement déterminée - c'est essentiellement le Théorème 3 dans §1 (des $\alpha$ points distincts de $U(K)$ définissent des classes de conjugaison des scindages distinctes) et

2°) [23] $\pi^\Gamma = (1)$ (i.e. il n'y a pas d'autre point fixe dans $\widetilde{U}$ sur ce même $x \in U(K)$), et [ ]

3°) il n'y a pas au même temps ce point fixe à l'infini - i.e. il n'existe pas de $L_i$ normalisé par $\Gamma$, i.e. une scindage des [ ] type n'est pas au même temps des deuxièmes (fait que nous avons et oubli directement, précédemment).

D'autre part, dans le cas de points fixes à l'infini, l'unicité de l'image dans $X$ signifie qu'une même action effective [ ] à la fois un $L_i$ et [ ] $(v \neq J)$ - Fait [ ] établi sauf dans le cas $(g, v) = (0, 3)$ - et l'unicité au dessus d'une $i \in I$ fixé signifie que le $L_i$ ($i$ fixé) normalisé par $\Gamma$ est unique, ce qui est un affaiblissement de la relation

$$L_i = \mathrm{Cen}\,\pi^{\Gamma^\circ}$$

pour ces opérations, conjecture plus haut.

En fait, je conjecture que dans la conjecture B, il est même vrai que $\Gamma^\circ$ agissant sur $X' = \widehat{\widetilde{U}}$ a un point fixe et un seul (ce qui est plus haut, [ ] point fixe [ ] nécessairement fixe pour $\Gamma$). Ceci implique dans le cas des points fixes à distance finie, qu'est alors $\pi^{\Gamma^\circ} = (1)$, comme il se devrait en général [ ] et dans le cas de points fixes à l'infini, que

$$\pi^{\Gamma^\circ} \subset \mathrm{Norm}_\pi(L_i) = L_i$$

donc le [ ] $\pi^{\Gamma^\circ} = L_i$ [ ] !

[22] et même l'action induit de $\Gamma^\circ$ doit avoir un point fixe [ ] plus bas

[23] C'est un cas particulier [ ]

[ ] tous nos beaux énoncés devraient être valables, [ ] un corps de base $K$ de type fini de $\mathbf{Q}$, mais [ ] que $K$ est extension de type fini d'un corps cyclotomique (pas [ ] fini sur $\mathbf{Q}$).

Nous pourrons définir les *courbes de Poincaré* sur un corps algébriquement clos de $\overline{K}$ de caractéristique 0, comme étant les courbes isomorphes à des revêtements universels de courbes algébriques anabéliennes sur $K$ (donc courbes anabéliennes $\overline{U}$, $\overline{V}$ sur $\overline{K}$ définissent des revêtements de Poincaré isomorphes, si et seule si existe un revêtement fini étale de l'un, isomorphes à un revêtement fini étale de l'autre). Étant donné une courbe de Poincaré $\widetilde{\widetilde{U}}$ sur $\overline{K}$, on définit canoniquement sa complétion $\widehat{U}$ [ ] $\widehat{U}$. Ceci posé :

Conjecture **(B')**. — *Soient $K$ un corps de type fini sur* $\mathbf{Q}$ *(ou sur un corps cyclotomique suffise peut-être), $\overline{K}$ une clôture algébrique de $K$, $U$ une courbe de Poincaré sur $\overline{K}$, de complétion $\widehat{U} = X$. Considérons une action de* $\Gamma = \Gamma_{\overline{K},K}$ *sur $U$, compatible avec sous-action sur $\overline{K}$, d'où une action de* $\Gamma$ *sur $X$. Ceci posé : Il existe un point fixé et un seul de* $\Gamma^\circ$ *agissent sur $X$ (*$\Gamma^\circ$*, noyau de caractère cyclotomique* $\Gamma \xrightarrow{\chi} \widehat{\mathbf{Z}}^*$*).*

La différence avec la conjecture B, pour celle-ci [ ], [ ] d'un groupe profini $\pi$, [ ] librement sur $U$ de façon que $U_{/\pi}$ soit une courbe algébrique anabélienne sur $\overline{K}$.

Que donneraient les conjecture précédentes, quand on les applique à une situation ou $K$ est [ ] pour un modèle $S$ de $K$ (disons, élémentaire anabélienne), quand $U_K$ provient d'une courbe relative $U_S$ sur $S$ - de sorte qu'on a un homomorphisme de groupes

$$E_{U_S} \longrightarrow E_S \tag{4}$$

de noyau $\pi_{\overline{U}}$, dont $E_{U_K} \longrightarrow E_K$ est déduit pour changement de base i.e. par produit fibre

$$E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}[\,] \tag{5}$$

Ainsi, les sections de $E_{U_K}$ sur $E_K$ correspondant aux relèvement continus $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ de l'homomorphisme surjectif $E_K \longrightarrow E_S$ et parmi ce relèvement, ceux qui sont triviaux sur le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ correspondants existent aux sections de $E_{U_S}$ sur $U_S$. Nos conjectures impliquent donc qu'il y a existent deux sortes telles sections : 1°) celles qui correspondent à des points de $U_K/K$ i.e à des sections rationnelles des $U_S$ sur $S$ - mais on va vérifier sans mal, sans doute, qu'une telle section rationnelle ne correspond effectivement à une section de l'extension (4), que si c'est une section régulière (à vérifier tantôt). 2°) Celles correspondant à des $i \in I(U_{\overline{K}})$ rationnels sur $K$, i.e. à une section de $\widehat{U_S} \backslash U_S = S'$ (étale fini sur $S$) sur $S$. Et il faudrait étudier encore à quelle conditions une telle section définit un paquet non vide de scindages de (4) - et comment déterminer exactement tous ces scindages.

Avant d'élucider ces deux points, un peu technique, je voudrais voir dans quelle manière la conjecture **A** (ou **B**) faite des ces §, permet de reconstruire la catégorie des modèles élémentaires anabéliennes sur $\mathbf{Q}$, et celle des extensions de type fini de $\mathbf{Q}$ et des modèles élémentaires anabéliennes sur ceux-ci, en termes des groupes extérieurs (ou topos galoisiens) associés à partir bien sûr de la donnée fondamentale de $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}, \overline{\mathbf{Q}}_\circ}$, opérant extérieurement sur $\widehat{\pi_{0,3}}$, d'où déjà l'extension $E_{0,3} = E_{U_{0,3}/\mathbf{Q}}$, où $U_{0,3} = \mathbb{P}^1_{\mathbf{Q}} - \{0, 1, \infty\}$.

Prenons les donne de $\widehat{\pi_{0,3}}$ -conjugaison de [] sections de $E_{0,3}$ sur $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma$ i.e. les "points" telles que le centralisateur de $\Gamma^0$ soit trivial (sections "admissibles") [] des topos $\mathrm{B}_{\widehat{\pi_{0,3}}, \Gamma_{\mathbf{Q}}}$ [] sur $\mathrm{B}_{\Gamma_{\mathbf{Q}}}$ [] - on trouve un ensemble sur lequel $\Gamma$ opère (qui n'est autre que $U_{0,3}(\overline{\mathbf{Q}_0})$, à isomorphisme canonique près). Pour tout ensemble fini $I$ des sections, stable par [] la formation "forage de trous" doit nous fournir un groupe extérieur $\pi_{0,3}(I)$, de type [] sur lequel $\Gamma$ opère (il voit mieux peut-être utiliser le yoga introduit par ailleurs des groupoïdes rigides - donc on peut [] ainsi [] de trous $0, 1, \infty$ - on trouve donc l'équivalent groupoidel de la droit projective $\mathbb{P}^1_{\mathbf{Q}}$, on l'appelle [] - qui correspond à un groupe extérieure à lacets infini sur lequel $\Gamma$ opère - en fait, ce n'est autre que $E_{K_1}$, où

$$K_1 = \mathbf{Q}(T_1) \tag{6}$$

est l'extension transcendantal pour type de degré 1 de $\mathbf{Q}$.

Partant de (6), on construit de même l'équivalent groupoïdal de $U_{0,3}$ et on reconstruit comme précédent, pour avoir, sont des courbes de type $(0, \nu_2)$ sur $K_1$ (ou sur une extension finie de $K_1$) sont des courbes relatives de tipe $(0, \nu_2)$ sur une courbe sur $\mathbf{Q}$ (ou une extension finie de $\mathbf{Q}$, ou une revêtement étale fini d'une telle $U_{0\nu_1}$).

On procède [] pour construire finalement tous les $E_K$ sur $E_{\mathbf{Q}}$ ([] tout corps extension de typew fini de $\mathbf{Q}$, est extension finie d'une extension transcendantal []) et tous les modèles élémentaires, où [] chaque avec la fibration [] sont une courbe de genre 0, suite un revêtement étale fini d'une telle fibration particulière. Sauf erreur, ça fait assez pour avoir un système fondamental de voisinages de tout point d'une $X$ lisse sur un $K$ et de reconstituer en principe les schémas lisses sur des $K$, pour recollements de tels morceaux avec des "immersions ouvertes". Mais [] que pour faire un telle description, il en faudrait développer un langage géométrique qui celle mieux à l'intuition géométrique, que les sempiternelles extensions de groupes profinis ... ou actions extérieures, et où les points rigides (à [] alors des clôtures algébriques de corps) jouent un rôle prépondérant. Je me faudra y revenir dessus - et en même temps, expliciter les topos étales (pas seulement le "morceau $K(\pi, 1)$") [] entiers des schémas décrits ici par des extensions.

Reprenons le cas de $U = U_S$ schéma relatif sur $S$, "élémentaire" sur $S$ - à fibres successives anabéliennes (s'il le faut) ou de moins à $\pi_1$ non nul, $S$ étant lui-même (pour fixer les idées) lisse sur $\mathbf{Q}$, irréductible, corps de fonctions $K$, et reprenons la digression 5. Considérons une section rationnelle $f$ de $U$ sur $S$, définissant une section de $E_{U_K}$ sur $E_K$ - ou, ce qui revient au même, un relèvement de l'homomorphisme surjectif, $E_K \longrightarrow E_S$ en $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ (composé de la section $E_U \longrightarrow E_{U_K}$ [] $E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}$). Je veux montrer que $f$ est pourtant définie i.e. une section de $U_S$ sur $S$, si et seule si le section de $E_{U_K}$ sur $E_K$ provient d'une section de $E_{U_S}$ sur $E_S$, i.e. si et seule si le relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ [] sur le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$.

Notons que cette dernière condition est une condition "de codimension 1 sur $S$" - de façon plus précis, si $Z$ est un sous-schéma fermé de $S$ de codimension $\geq 2$, alors, posant $S' = S \backslash Z$, on a $\pi_1(S') \xrightarrow{\sim} \pi_1(S) = E_S$ pour le "théorème de pureté" - donc le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ est le même que celui de $E_K \longrightarrow E_{S'}$, ou, si [] (comme $S'$ n'est pas un "modèle") que le sous-groupe fermé engendré pour les noyaux des $E_K \longrightarrow E_{S'_i}$, où les $S'_i$ sont des ouvert "modèles" qui recouvrent $S'$. Si donc le conditions envisagés sont [] relativement aux $S'_i$ (qui pourtant un recouvrement par $S$, [] $S'$) - ce qui est [] signifie que ce section rationnelle envisagé est [] sur les $S'_i$, i.e. sur $S'$ - alors celle est vérifié relativement à $S$ - ce qui est [] signifie que le section est [] sur $S$. Donc, [], il faudrait [] a priori qu'une section de $U_{S'}$ sur $S'$ []

une section de $U_S$ sur $S$. [] d'une courbe relative $U_S = X_S - T$, $X$ lisse sur $S$ de dimension relative 1, $T$ fini [] sur $S$, [] $T$ décomposé sur $S$. Si $X$ [] relatif $\geq 1$, on sait ([] Weil) que le section [] une section de $X$, soit $D$ l'image inverse de $T$, c'est un diviseur sur $S$, dont le [] sur $S' = S \backslash Z$ est nul, donc (comme codim $(Z,S) \geq 1$) il est nul, OK.

(9)

(10)

avec des carrés cartésiens, et des flèches horizontales surjectives. L'homomorphisme $E_{U_S} \longrightarrow E_K$ est composé d'un relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$ de $E_K \longrightarrow E_{D_n}$ avec l'homomorphisme canonique $E_{U_{D_n}} \longrightarrow E_{U_S}$. (relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$ correspondant biunivoquement aux sections de $E_{U_n}$ sur $E_K$, ou aux relèvements de $E_K \longrightarrow E_S$ ou $E_K \longrightarrow E_{U_S}$...).

Ceci dit [24], j'ai envie de prouver que $\varphi_n : E_K \longrightarrow E_{D_n}$ [] i.e. provient d'une section de $E_{O_n}$ sur $O_n$ si et seule si la section rationnelle correspondant de $U_S/S$ est définie en $n$. Ceci impliquera l'assertion précédent (que la section $phi$ de $E_{U_K}$ sur $E_K$ provient d'une section de $E_{U_S}$ sur $E_S$, si t seule si la section rationnelle correspondant isomorphique).

Mais il s'agit ici d'un énoncé en fait [] géométrique, que j'ai envie de reformuler sous forme plus générale :

Théorème. — *Soit $T$ un trait ([]), $U$ un schéma relatif "élémentaire" sur $T$, anabélienne* [25]*, $K$ le corps des fonctions de $T$, On [] un revêtement universel $\widetilde{U}$ de $U$, d'où une clôture algébriquement $\overline{K}$ de $K$, et on considère l'extension $E_U = \pi_1(U;\widetilde{U})$ de $E_K = \pi_1(K,\overline{K}) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ par $\pi = \pi_1(U_{\overline{K}},\widetilde{U})$. On a donc un carre cartésien des groupes profinis*

[]

[24]**N.B.**

[25]anabélienne [] - il suffit que les fibres de ordre 1 de la fibration élémentaire de $U$ ne soient que de type $(0,0)$ ou $(0,1)$ - i.e. à $\pi_1$ nul

*où $E_S$ s'identifie au quotient de $E_K$ par le sous-groupe [] engendré par un groupe d'inertie $I_{K'} \simeq T_\infty(\overline{K})$, cf plus haut. Soit $f_K$, $K$ un point de $U_K$ rel$/K$, d'où une section $\Psi = \Psi_{f_K}$ de $E_K$ sur $E_{U_K}$. Ceci posé les conditionnes suivantes sont équivalentes*

*(a) $f_K$ se prolonge en une section de $U$ sur $S$ ;*

*(b) $\Psi$ provient d'une section de $E_U$ sur $E_S$ ;*

*(b') le compose $E_K \xrightarrow{\Psi} E_{U_K} \longrightarrow E_U$ s'annule sur $I_{K'}$.*

L'équivalence de (b) et (b'), et qu'elles soient impliques par (a), est clair. C'est l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) qui demande une démonstration. On est [] au cas où $T$ est strictement local (donc $E_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est réduit à son sous-groupes d'inertie, et $E_S = (1)$). On est ramené de prendre un [] au cas où $U_{/S}$ est une courbe relative élémentaire, $U = X\backslash T$, $X$ lisse et propre. Alors $f$ se prolonge en une section $f$ au $X$ sur $S$, et la conclusion [] que $f(S) \subset U$. Donc on est ramené [] au

Lemme. — *Soit $X$ schéma projectif lisse de donne relation 1 connexe sur $S$ trait strictement local, soit $T \subset X$ sous-schéma, fini étale sur $S$, donc $T \simeq I_S$, $I$ ensemble fini, et soit $U = X\backslash T$ (donc $T$ est défini par une [] $(g_i)_{i\in I}$ des sections disjointes de $X$ sur $S$) si $g$ est de genre relatif, $\nu = []I$, on suppose $(g,\nu) \neq (0,1)$. Soit $i_0 \in I$, $f$ une section de $X/S$ distinctes des disjoints $g_i$, et telle que $f$ et $g_{i_0}$ coïncident en $s$ (point fermé de $S$). Si $\eta = S\backslash s$, on a donc un morphisme $\eta \longrightarrow U$, d'où $\pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$. Je dis que cet homomorphisme n'est pas trivial, et même, si $\nu \geq 2$, que pour la donné [] n'est pas trivial (pour [] distinct de la caractéristique résiduelle).*

Comme la section rationnelle de $J^1_{X/S}$ défini par $f$ est régulière, on voit que le composé de l'homomorphisme envisagé avec $\mathrm{H}_n(J^1_{X/S}, \mathbf{Z}_\ell)$ est nul - i.e. le $\mathrm{H}_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)$ s'envoie dans la partie torique de $\mathrm{H}_1(U, \mathbf{Z}_\ell)$ [], qu'est canoniquement isomorphe à $T_\ell^I/T_\ell$. (**N. B** cette partie est nulle si card $I = i$, et dans ce cas le critère homologique [] insuffisant...) Il faudrait donc calculer cet homomorphisme

$$T_\ell(\simeq \mathrm{H}_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)) \longrightarrow T_\ell^I/T_\ell$$

pour constater qu'il n'est pas nul dans le cas envisage, $\nu \geq 2$ (et traiter [] le cas $\nu = 1$). Je vais dériver le résultat : soit $x = g_{i_0}(s)$, $A = \underline{O}_{X,n}$, $V$ l'anneau de $S$, $J_{i_0}$

l'idéal de l'homomorphisme $A \xrightarrow{g_{i_0}^*} V$ associé à [], c'est donc une idéal inversible de $A$ -soit de même $J_f$ l'idéal associé à $f^* = A \longrightarrow V$, et considérons $g_{i_0}^*(J_f)$, c'est une idéal de $V$ engendré par un générateur, et comme $g_{i_0} \neq f$, on voit que cet idéal n'est pas nul. Soit $H = []\nu/g_{i_0}^*(J_f)$, cet entier [] de $g_{i_0}$ et $f$, ces [] comme une multiplicité d'intersection. Ceci posé, je [] que l'homomorphisme

$$T_\ell \longrightarrow T_\ell^I/T_\ell$$

est le produit [] des l'injections canoniques $T_\ell \longrightarrow T_\ell^I$, correspondant à l'indice $i_0$. Il faudrait que [].

Reste le cas $\nu = 1$, qui semble demander un traitement séparé [26]. [] à vérifier (pour les groupes fondamentaux premiers à $p$) c'est que l'homomorphisme extérieur $\pi_1(U_s) \simeq \pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$ est égal à $K_{i_0} \circ (\mu Id_T)$, où $K_{i_0}$ est l'homomorphisme "local"

$$[]$$

associé à l'indice $i_0$. Je vais admettre à priori, qui une ne peut guère être difficile.

Pour terminer ce numéro, je veux encore étudier, dans la situation d'une $U$ courbe relation sur une $S$ avec $U = X\setminus T$, $X$ lisse et propre sur $S$, $T$ fini étale, avec sections $g_i$ donnée de $T$ sur $S$, les "sections de $2^{eme}$ espèce" de l'extension

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow E_U \longrightarrow E_S \longrightarrow 1$$

associées [27] à $i = i_0$ - que définit une classe de $\pi$-conjugaison de sous-groupes ouverts lacets $L_i$ dans $\pi$. (On suppose qu'on a bien une telle suite exact i.e. que $\pi_2(S) \longrightarrow \pi_1(\text{fibre})$ est nul, ce qui [] le cas si $\pi_2(S) = 0$, p. ex []) si on est dans le cas d'une modèle élémentaire au dessus d'un corps de caractéristique 0 ( la reconstruction de ces [] étant sans doute [], si on [] aux groupes fondamentaux premiers aux cas résiduelles...) [] $L_i$ dans $E_U$ s'envoie *sur* $E_S$, on trouve donc des scindages pour cette extension, qu'on peut regarder comme une extension

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow N(L_i) \longrightarrow E_S \longrightarrow 1 \tag{13}$$

[26] Ceci doit être indépendant de la [] de $\nu$ !

[27] en tous cas, même sous []

La classe d'isomorphisme est un élément

(14)

que je ne propos d'étudier. On [] si $S$ est un $K(\pi, 1)$

(15)

d'ailleurs on a une suite exacte de Kummer (ou $\mathrm{Pic}(S) = []$)

(16) $$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)[]$$

d'où par passage à la limite

(17)

Dans le cas où $S$ est un schéma élémentaire sur un corps de type fini sur **Q**, $\mathrm{Pic}(S)$ est un Z-modèle de type fini (par Mordell-Weil-Néron), donc l'homomorphisme

(18) $$\mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)\hat{} \longrightarrow \mathrm{H}^2(S, T)$$

est *injectif*.

Sous nous [] de cette condition, considérons le cas général - je dis que la classe $c$ (14) est donc l'image de (18), de façon précise que c'est l'image de l'élément

$$g_i \in \mathrm{Pic}(S)$$

classe des faisceaux [] (on []) de $X$ le [] de $g_i$. Principe d'une vérification : [] la complété formel de $X$ [] de $g_\nu(S)$, [] ou interpréter la suite exacte (13) comme la suite exacte d'homotopie de ce topos [], au dessus de $S$. On a donc à prouver une historie d'ombres...

Dans le cas "arithmétique", on voit donc que l'extension (13) est scindée si et seule si $g_i = 0$ i.e. [], globalement sur $S$, []

Quand $g_i = 0$, parmi les scindages, il y a [] provenant [] d'une base de $J_i/J_i^2$ qui soit [].

L'indétermination des choix d'une telle base [] celle des choix d'une section de (13) est donc

(20)

On a ici des suites exactes de Kummer

[]

d'où par passage à la limite

(21)

Dans le "cas arithmetique" [] on trouve donc

[]

Si le genre est zéro, prenant une de ces sections de $T$ sur $S$ comme section à l'infini, OPS ([] à se localiser) $U_S = \mathbb{E}'_S \backslash T'$, donc $f$ s'identifie à une section de $\mathbb{E}^1_S$ sur $S'$, i.e. de $\underline{O}_S$ sur $S$, donc (comme codim $(2,S) \geq 2$ []) elle se prolonge en une section de $\mathbb{E}'_S$. Et on [] comme précédemment, OK. Considérons donc les diviseurs irréductibles $D_i$sur $S$, ou ce qui revient au même, les points $x_v$ de $X$ de codim 1, i.e tels que $\underline{O}_{x_v}$ soit un [] () anneau de valuations discrète). Considérons son [] $\overline{\underline{O}_{x_v}}$ dans $\overline{K}$, [] un idéal maximal [] (ces idéaux correspondent aux points [] $\widetilde{S}$ de $S$ dans $\overline{K}$ au dessus de $x$) et considérons son stabilisateur $N_n$ dans $E_K$, qui opère donc dans $k(\widetilde{x}) = \overline{k(x)}$, et s'envoie en fait, on le sait, *sur* $\mathrm{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$.

Soit $I_{\overline{x}}$ le noyau de l'homomorphisme obtenue ([] "géométriques" de []), donc on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow [\,]\,\mathrm{Gal}(\overline{k(x)}/k(x)) \longrightarrow 1 \tag{7}$$

et par Kummer une isomorphisme canonique[28]

(8)

On notera que si $x$ est le [] du diviseurs $D$, alors $k(x)$ est le corps des fonctions de $D$. C'est un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$.

Il est immédiat (sans supposer que le corps de base pour $S$ soit $\mathbf{Q}$) que le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ est le sous-groupe [] engendré par les $I_{\widetilde{n}}$. Donc l'hypothèse que $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ [] sur le dit noyau, signifie aussi qu'il [] sur [] des $I_{\widetilde{n}}$. Soit alors $U_{\underline{O}_x}$

[28] à corps de [] de car 0 !

induit par $U$ sur Spec $\mathbf{Q}_x$, on a donc des factorisations d'ailleurs $\mathbb{G}_n(S)$ n'a pas [ ], donc

22)

est injectif[29]. Ainsi, quand $g_i = 0$ i.e. quand (13) admet des scindages "géométriques" (et il suffit [ ]) ceux-ci forment un torseur sous $\mathbb{G}_m(S)$, qui s'identifie à une sous-torseur des [ ] de tous les scindages de (13). Pour que la "description profinie de la géométrie algébrique absolu sur $\mathbf{Q}$ soit complète, il y faudrait également caractériser (en termes de cette description profinie) le sous-ensemble remarquable.

Je voudrais enfin comprendre encore comment une section d'extensions des type (1) peut se "spécialiser" en une section de type (2), donc le cas des courbes relatives. Pour ceci, je reprends la [ ] situation

Dans la cas [ ] où $f$ n'est pas définie sur $S$, on trouve une action de $2^{nde}$ espèce, [ ] $L_i$ dans $\pi$.

À vrai dire

[ ]

(31)

J'ai l'action extérieure de $T$ sur $\pi$ n'est souvent pas triviale (je conjecture qu'elle l'est si et seule si il y a "bonne réduction") - donc le groupe $E_K$ n'opère pas lui même extérieurement sur $\pi$. Mais tout scindage de (30) définit une extension de $E_K$ par $\pi$, donc une action extérieure [ ] "admissible", définie par une courbe algébrique ? - Sans doute pas [ ], si ce n'est la courbe "réduit" de type $(g, v)$ ([ ]) ? [ ] ce pourrait être celle ci :

*Conjecture-à-[ ].* — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(a)* $U_\eta$ *a bonne réduction sur S ;*

*(b) L'action extérieure de T sur* $\pi$ *est triviale (ce qui signifie ainsi que tout [ ] scindage de (31) - p. ex défini par un point de* $U_\eta$ *[ ] induit un homomorphisme* $T \longrightarrow \pi$*);*

[29] (cas "[ ]")

(c) *L'action de $T$ sur $\pi_{ab} = H_1(U_{\overline{\eta}})$ est triviale ;*

(d) *Itou pour*

(e) *En termes de une section de (30)*

(f) *En termes de une section de (30)*

On a [ ]
[ ]
J'ai donc [ ] un [ ] général (qui je pourrais à la occasion [ ] avec la généralité qui lui revient) pour construire des actions extérieures [ ] de groupes $E_k$ ($K$ extension de type fini de **Q**) sur des $\pi$ à lacets, qui (sans doute) ] géométriques, par la considération de courbes de type $(g, v)$ "se réduisent [ ]". Mais je [ ] pas pour cette vrai à faire des actions effectives, associées à actions extérieures [ ] géométriques [ ] - i.e. d'une des deux types 1°, 1° [ ] de ce n°.

## IV. Sections d'extensions et anneaux de valuations généraux

D'abord une révision de notations. Si $X$ est une schéma connexe, je note

(1) $$E_X = \Pi_1(X)$$

son groupe fondamental profini en tant que groupe extérieur, et si $\widetilde{X}$ est un revêtement universel profini de $E_X$, par

(2) $$E_X^{(\widetilde{X})} = \pi_1(X; \widetilde{X}) = Aut_X(\widetilde{X})$$

son groupe fondamental précisé - qu'est un groupe profini. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, où $A$ est un anneau (le plus souvent une corps) je note $E_A$, et $E_A^{\widetilde{A}=E_X^{(\widetilde{X})}}$. Si $A$ est une $A$-algèbre telle que $\mathrm{Spec}(\widetilde{A}) = \widetilde{Y}$ soit une revêtement universel de $X$ (ce qui le détermine à isomorphisme non unique près). Bien entendu, si $\xi$ est une "point géométrique" de $X$, on note

(3) $$E_X^{\xi} = \Pi_1(X_1 \xi) = E_X^{\widetilde{X}(\xi)},$$

où $\widetilde{X}(\xi)$ est le revêtement universel de $X$ [ ] en $\xi$. Le choix de $\xi$ correspond d'une [ ] [ ] et d'une extension séparablement close $\Omega$ de $k(x)$ ([ ] clôture algébrique de $k(x)$) et on note alors ainsi $E_X^{\Omega}$ au lieu de $E_X^{\xi}$ ($\Omega$ sous entendu [] extension de $k(x)$ donc avec sa structure de $k(x)$ algèbre) []

$$E_X^{\Omega} = E_X^{\overline{k(x)}}, \tag{4}$$

où $\overline{k(\alpha)}$ est la clôture algébrique de $k(\alpha)$ dans $\Omega$. Bien sur, si $X = \mathrm{Spec}(A)$, on note aussi $E_A^{\Omega}$ – notation [] utilisée [] $E_K^{\overline{K}}$, $K$ un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique [] séparable de $K$.

Si $X$ est un $Y$-schéma, 1-connexe, on []

$$E(f) : E_X \longrightarrow E_Y, \quad \text{où} \quad f : X \longrightarrow Y \tag{5}$$

$E_X$ est un foncteur en $X$

$$(\text{Sch conn}) \quad \longrightarrow \quad \text{Group ext}$$

qui se précise pour l'homomorphisme injectif des groupes profinis

$$E_X^{\widetilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\widetilde{Y}} \tag{6}$$

où $\widetilde{Y}$ est le revêtement universel de $Y$ défini par $\widetilde{X} \longrightarrow Y$ ($\widetilde{X}$ [] pouvoir écrire en fait $E_Y^{\widetilde{X}}$, plus géométriquement $E_Y^Z$ chaque fois qu'on a un $Y$-schéma $Z$ 1-connexe, jouent le rôle de "foncteur fibre" pour le topos $\mathrm{B}_{\pi(X)}$ des revêtements étales de $Y$.)

On peut désir que

$$(X, \widetilde{X}) \mapsto E_X^{\widetilde{X}} \tag{7}$$

est un foncteur, de la catégorie des schémas 0-connexes $X$ *munis* une revêtement universel (on [] d'un $Z$ 1-connexe s'envoyant dans $X$) vers celle des groupes profinis. Ceci s'applique en particulier en regardons la sous-catégorie des $(X, \xi)$ munis d'un point géométrique - on a donc

$$E_X^{\xi} \longrightarrow E_Y^{\eta} \tag{8}$$

si on a un homomorphisme de schémas "géométriques profinis" $(X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$. On note que tout [] géométrique de $X$ en un $x \in X$ - i.e. une extension [] $\Omega$ de $k(\alpha)$ [] - et l'homomorphisme (8) s'identifie ainsi a

$$E_X^{\overline{k(\alpha)}} \longrightarrow E_Y^{\overline{k(\eta)}} \tag{9}$$

où $\overline{k(\alpha)}$, $\overline{k(\eta)}$ sont les clôtures séparables *dans* $\Omega$.

On poserons

$$E^{\widetilde{X}}_{X/Y} = \operatorname{Ker}(E^{\widetilde{X}}_X \longrightarrow E^{\widetilde{X}}_Y = E^{\widetilde{Y}}_Y) \tag{10}$$

C'est un foncteur par un triple $\widetilde{X} \longrightarrow X \longrightarrow Y$ avec $X$, $Y$ 0-connexe, $\widetilde{X}$ un revêtement universel, plus généralement, si $T \longrightarrow X$ avec 1-connexe, on pose

$$E^T_{X/Y} = \operatorname{Ker}(E^T_X \longrightarrow E^T_Y) \tag{11}$$

([30]) on a un foncteur []. Cas particuliere $E^{\xi}_{X/Y}$, $\xi$ un point géométrique de $X$, $E^{\Omega}_{X/Y}$, $E^{\widetilde{X}}_{X/A}$ (si $Y = \operatorname{Spec} A$), $E^{\widetilde{B}}_{B/A}$...

[] on dispose d'une "suite exacte d'homotopie universel" (en dim 2) ([31]) pour $X \longrightarrow Y$, alors le donnée (pour $X \longrightarrow Y$ donné) de $T \longrightarrow X$, (avec $T$ 1-connexe) peut s'interpréter par la donnée d'un composé

$$T \longrightarrow Y$$

*et* d'un relèvement en $T \longrightarrow X$, ou ce qui revient au même, d'une section de $X_T = X \times_Y T$ sur $T$. Ceci posé,

$$X$$

on avoir un isomorphisme [] (avec l'hypothèse de "suite exacte d'homotopie" faut)

$$E^T_{X/Y} \simeq \pi_1(X_T; T) \simeq E^T_{X_T} \tag{12}$$

et on []

$$1 \longrightarrow E^T_{X/Y} \longrightarrow E^T_X \longrightarrow E^T_Y \longrightarrow 1 \tag{13}$$

(Cette hypothèse [] satisfait si $Y = \operatorname{Spec} K$, $K$ un corps, Si $X$ est géométriquement 0-connexe sur $K$).

Plus généralement, si on a une suite exacte d'homotopie universel, mais pour [] avec $E^T_X \longrightarrow E^T_Y$ surjectif,

---

[30] **NB.** $E^T_{X/T}$ []

[31] Cas où $E^T_X \longrightarrow E^T_Y$ est [un] épimorphisme

On (32) [] une factorisation de $X \longrightarrow Y$ en

$$X \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \tag{14}$$

avec $Y'$ étale fini ou pro-étalefini sur $Y$ et $E'_X \longrightarrow E_Y$, était maintenant [un] épimorphisme, [] suite exacte universel d'homotopie bien sûr. On avoir donc isomorphismes []

$$E^T_{X/Y} \xrightarrow{\sim} E^T_{X/Y'} \tag{15}$$

qui peut donc se [] comme

$$E^T_{X\times_{Y'}T} \simeq E^T_{X/Y} \tag{16}$$

qu'on peut noter $E^T_{X_T}$, mais en faisant attention que [] $X_T$ [] non plus $X \times_Y T$ (qui va être disconnexe si $Y' \longrightarrow Y$ pas isomorphisme) mais $X \times_Y T$.

Bien sur, à isomorphisme []

s'identifie bel et bien au groupe de Galois Gal($\overline{K}$,$K$) de $\overline{K}/K$, $\overline{K}$ est la clôture séparable de $K$ telle que Spec$\overline{K} \simeq \widetilde{Y}$. Souvent, on notons $\Gamma$, ou $\Gamma_K$, $\Gamma^{\overline{K}}_K$, au lieu de $E_Y$ - surtout si $K$ est algébrique sur le corps premier, et [] donc plus de "partie géométrique" à distingue d'une "partie arithmétique"...

Soit $K$ un corps (qui pourrait être algébriquement clos), $L$ une extension de type fini de $K$, $X$ un "modèle" propre régulière de $L$. Alors $E^{\overline{L}}_X$ s'identifie a un quotient de $E^{\overline{L}}_L$, *qui ne dépend pas de modèle $X$ défini*, comme il est [] c'est la partie "universelle géométrique" [] qui classifie les schémas (finis) étales sur $L$ qui sont "non isomorphes" sur *tout* modèle régulière (propre ou non) de $L/K$.

Si $U$ est un modèle quelconque, il se plonge dans un $X$, et on a des homomorphismes surjectifs [] $Z$ partie ferme de $X$

$$E^{\overline{L}}_X = E^{\overline{L}}_L \simeq E^{\overline{L}}_U / \text{ sous-groupe fermé []}$$

Notons que $E^{\overline{L}}_L$ es e imite projective de $E^{\overline{L}}_U$, pour des modèles réguliers ([]) variables

$$E^{\overline{L}}_L \simeq [] E^{\overline{L}}_U$$

32 Sous l'hypothèse "suite exacte d'homotopie" mais avec fibres []

et de même, bien sûr

$$\pi^{\overline{L}}_{L/K} \simeq [\,]\pi^{\overline{L}}_{U/K}.$$

[]

dont le choix "effectif" dépend de celui d'un revêtement universel ou encore d'une point géométrique [] de $\widetilde{K}_n$ - i.e. d'une clôture algébrique de $\widetilde{K}_n$ []

[]

est que $a \in U$.

Ceci posé, $E^{\overline{L}}_U$ se récupère à partir de $E^{\overline{L}}_L$, comme quotient de ce dernier, en prenant *tous* les $V$ de $L$ [] un centre sur $U$ (il suffit même de prendre les $V = \underline{O}_{U,n}$, où se est [] de codim 1 des $U$), et [] correspondants.

On peut regarder

[]

Mais il en est [] ainsi comme on voit en considérant $V_1 = V \cap L_1$, qu'est un anneau de valuations de $L_1$, ([33]) dont le corps [] fini sur $K$ si celui de $V$ l'est (donc $V_1 \neq L1$) - donc $V_1$ correspond à une "place" des corps de fonctions d'une variable $L_1$ sur $K$. [] $E^{\circ}_K$ centralise $T_{V_1}$

*Conjecture. — Soient $K$, $L$ des extensions de type fini de , $K \subset L$. Alors*

a) *Toute section de $E_L$ sur $E_K$ (au guère de tel, se revient au même...) normalise sur $T_V$ associée à un anneau de valuations $V$ de $L$ contenant $K$, à corps résiduel algébrique sur $K$ et $V$ est uniquement ([34]) [] cette condition [] au dessus de $E_K$.*

b) *Soit $U$ un modèle "élémentaire" de $L$ sur $K$, anabélien. Alors tout section de $E^{\overline{L}}_U$ sur $E^{\overline{K}}_K$ se relient [] une section de $E^{\overline{L}}_L$ sur $E^{\overline{K}}_K$.*

À noter que ce question 2° est[] locale [] elle doit être essentiellement "triviale", que [] vraie un [] - par contre 1°, est une question de [] globale sur $U$, et sans doute [] façons triviale.

La validité des ces énonces, impliquant donc, pour les sections de $E^{\overline{L}}_U$ sur $E^{\overline{L}}_K$ associes a un anneau de valuations de $L/K$ de corps résiduel $K$, que l'image de $E^{\overline{L}}_K$ doit normaliser un sous-groupe [] de $\pi^{\overline{L}}_{L/K}$, qui est non trivial si le valuation []

[33] Il faut []

[34] []

centre sur $U$, i.e. si le section n'est pas associé à un point $K$-rationnel de $U$, ce qui est justifiant [] des conjectures (qui prouvent d'abord [] !) de §2.

Avant de [] vers l'étude des questions 1°) et 2°) et ainsi des questions de normalisation et de centralisations [] précédemment a propos de $N_V$, $I_V$, ...),

# STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

- Notes for "La Longue Marche à Travers la Théorie de Galois"

## STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

## 1. Courbes standard

Soit $k$ un corps algébriquement clos. Une "courbe standard" sur $k$ es une schéma $X$ sur $k$ satisfaisant les conditions suivantes :

a) $X$ quasi-projectif, toute composante irréductible est de dim 1

b) Tout point de $X$ est soit lisse, soit un "point quadratique" (ordinaire) - i.e. isom (loc. ét) à la courbe Spec($k[X,Y]/XY$) au point 0.

Il est connu qu'on peut trouver une unique [] $\widehat{X}$ de $X$, telle que $X$ soit un schéma propre, qui $X$ s'identifie à un ouvert dense de $\widehat{X}$, et que $\widehat{X}$ soit lisse sur les points de $\widehat{X} \backslash X = I$. Alors $\widehat{X}$ est une courbe projective, $I$ est une partie finie de $\widehat{X}(k)$ contenant [] ouvert des points des lissité de $\widehat{X}$. [] $A$ des points singuliers de $X$ s'identifie à []

La donnée de $X$ équivaut à celle des $(\widehat{X}, I)$, où $\widehat{X}$ est un schéma projectif, dont toute composante irréductible est de dim 1, et dont l'ensemble singulier est formé des points [] ordinaires - et $I$ est un sous-schéma fini étale de $\widehat{X}^{\text{lisse}}$, ou ce qui revient au même, une partie fini de $\widehat{X}^{lisse}(k)$.

Soit

Ainsi, à la courbe standard $X$ nous avons associé les systèmes de données suivantes :

[]

Inversement, [] on construit une courbe standard $X$ en passant au quotient dans $\widetilde{A}_k Y \backslash I_k$ par l'involution $\sigma$ - i.e. $X$ est universel [] pour la donnée $p$:

[]

soumise à $(pi)\sigma = pi$.

Ainsi la catégorie des courbes standard sur $k$ [] apparaît comme équivalente à celle des systèmes a) b) c) ci-dessus. (pour les iso)...

**N.B.** On récupère $\widehat{X}$ comme quotient de $Y$ par $\sigma$.

**Généralisation sur une base quelconque**.

Une *courbe standard* sur $S$ (multiplicité schématique, disons) [] défini constructivement en termes d'un système a), b), c) comme ci-dessus, i.e.

[]

On construit alors $\widehat{X} = Y/\sigma$, contenant $A = \widetilde{A}/\sigma$ et $I$ comme sous-schémas fermés finis étales sur $S$, et [] $X = \widehat{X} \backslash I$. On peut montrer que le foncteur

$$(Y, \widetilde{A}, \widehat{I}, \sigma_{\widetilde{A}}) \mapsto X$$

des systèmes (5) (pour les iso) vers les schémas relatifs [], est *pleinement fidèle* ([1]).

**N.B.** []

[]

(par abus de langage, puisque c'est non seulement le schéma relatif $Y$, mais $Y$ avec la structure supplémentaire $\widetilde{A}, I, \sigma_{\widetilde{A}}$...).

## 2. Graphe associé à une courbe standard

Revenons au cas d'un corps de base $k$ algébriquement clos, pour commencer. Soit $X$ une courbe standard, d'où $Y, I, \widetilde{A}, \sigma_{\widetilde{A}}$.

Posons

(7) $\qquad S = \pi_\circ(Y) \simeq$ [] des corps irréductibles de $X$

On a alors le diagramme d'application canoniquement entre ensembles finis

(8) $\qquad$ []

[1] faux tel quel

où $q$ est de degré 2 et définit l'involution $\sigma_{\widetilde{A}}$. Les applications $\sigma$ et $p$ sont induites par les [] en passant aux $\pi_\circ$.

Le système $(\widetilde{A} \xrightarrow{\sigma} S, \sigma_{\widetilde{A}})$ où [], peut être considéré comme définissant un *graphe*, dans $S$ est l'un des sommets, et $\widetilde{A}$ l'un des [] l'application $\sigma$ étant l'application "origine d'un []". Ce graphe ne dépend que de $\widehat{X}$, pas de $X$ i.e. des choix de $I \subset \widehat{X}(k)$. C'est [] compte de ce choix que l'on considère, [] plus de la structure de graphe, le donnée supplémentaire

$$I \longrightarrow S \tag{9}$$

Le graphe indique comment les composantes irréductibles de $X$ (figurés par les sommets) se récupèrent deux à deux - les points d'intersections, i.e. les points singuliers ("doubles" []) de $X$, correspondant aux arêtes. Si une composante irréductible $X_\alpha$ correspond au sommet $\alpha$ des graphes, alors les [] fermés en $\alpha$ correspondent bieunivoquement aux points doubles de $X_\alpha$ - donc [] $X_\alpha$ sont lisses [] l'extrémité.

Il est clair que tout graphe fini peut être obtenue (à iso près) par une $\widehat{X}$ convenable - et même avec des composantes $X_\alpha$ de genre $g_\alpha$ donné (i.e. des $\widetilde{X}_\alpha$ de genre $g_\alpha$...). De plus, [] $I \longrightarrow S$ ($I$ [] fini), cela peut être réalisé par un $I \subset \widehat{X}^{lisse}$, i.e. par une courbe standard $S$.

La *maquette* d'une courbe standard $X$ consiste, pour définition, en les donnes suivantes

[]

Une structure formée d'une graphe fini $G = (S, \widetilde{A}, \sigma)$, d'une ensemble fini $I$ au dessus de l'une des sommets de $G$, et d'une application "genre": $S \xrightarrow{g} \mathbf{N}$, [] appelé ici une "maquette".

Proposition. — *Considérons la maquette d'une courbe standard $X$*

*a) Soient $\alpha, \beta \in S$, alors $\alpha, \beta$ appartiennent à la même composante connexe de graphe $G$, si et seule si $X_\alpha$ et $X_\beta$ appartiennent à la même composante connexe de $X$. Donc on a une bijection canonique*

$$\pi_0(G_X) \simeq \pi_0(X), \tag{11}$$

*en particulier $X$ est connexe si et seule si $G_X$ est connexe.*

*b) Supposons $X$ connexe i.e. $\widehat{X}$ connexe, i.e.[] on a alors [] i.e. [] où []*

.

## 3. Courbes "stables" et $MD$-graphes

Une courbe standard (sur $k$ algébriquement clos) est "stable", si elle satisfait à l'un des conditions équivalentes suivantes

a) $\operatorname{Aut} X$ est fini

b) Pour tout $\alpha$, $(Y_\alpha, I_\alpha \cup \widetilde{A}_\alpha)$ est anabélien i.e. $2g_\alpha + \widehat{\nu}_\alpha \geq 3$ i.e. $2g_\alpha - 2 + \widehat{\nu}_\alpha \geq 1$, i.e.

   1) Si $g_\alpha = 1$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 1$

   2) Si $g_\alpha = 0$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 3$

c) Tout champ de vecteurs sur $Y$ nul sur $I \cup \widetilde{A}$ est nul.

d) $\underline{\operatorname{Aut}}_{(Y, \widetilde{A}_k, I)}$ est un schéma en groupes fini étale sur $k$. On voit que cette condition (sous la forme b)) ne dépend que de la *maquette* de la courbe. On dit que $X$ est une *MD-courbe* (MD, initiale de "Mumford-Deligne" ou de "modulaire") si elle est stable, et 0-connexe (i.e. connexe non vide).

Les maquettes de telles courbes sont les maquettes 0-connexes et stables (i.e. dont les sommets de guère 1 sont de poids total $\geq 1$, et les sommets de guère 0 sont de poids total $\geq 3$), on les appellera les MD-graphes.

**NB**. Une maquette est une MD-graphe si et seule si

a) elle est 0-connexe (i.e. le graphe $G$ est connexe $\neq \varnothing$)

b) elle n'est pas réduit à un seul sommet de guère 1, de poids total 0 []

c) les sommets []

Proposition. — *Si* $(G = (S, \widetilde{A}, \sigma), I, \underline{g} : S \longrightarrow \mathbf{N})$ *est une MD-graphe, son type* $(g, \nu)$ *est anabélien, i.e.* $2g + \nu \geq 3$.

Si on avait $g=1$, $\nu=0$, alors la relation

$$g=1=\sum g_\alpha+h_1$$

montre que ou bien tous les $g_\alpha$ sont nuls et $h_1$ [], ou bien tous les $g_\alpha$ sauf une $g_{\alpha_0}$ sont nuls, []

[]

Soit $G$ une maquette. On dit qu'une courbe standard sur un corps algébriquement clos est *de type* $G$, si sa maquette est isomorphe à $G$, on dit qu'elle est $G$-*épinglée* si on se donne un isomorphisme entre se maquette et $G$ (c'est donc une structure []).

Soit $(\widehat{X},\underline{I})$ une courbe standard sur une base $S$ quelconque, on dit qu'elle est de type $G$ si ses fibres géométriques sont de type $G$. Alors les maquettes des fibres géométriques de $(\widehat{X},\underline{I})$ forment les fibres d'une schéma en maquettes (ou un MD-graphe) sur $S$ ($\underline{S},\underline{\widetilde{A}},\sigma_{\underline{\widetilde{A}}},\underline{I},\underline{\widetilde{A}}\longrightarrow\underline{S},\underline{I}\longrightarrow\underline{S},\underline{S}\xrightarrow{g}\mathbf{N}_S$) (système de revêtements finis étales de $S$ et de morphismes entre ceux-ci), localement isomorphe à la maquette $G$ donnée. On appelle $G$-épinglage entre $(\widehat{X},\underline{I})$ tout isomorphisme entre $G_S$ et $\underline{G}(\widehat{X},\underline{I})$. Si

$$\Gamma=\operatorname{Aut}G \tag{18}$$

(groupe fini), les $G$-épinglages de $(\widehat{X},\underline{I})$ s'identifient aux sections d'une certain $\Gamma_S$-torseur, appelé *torseur de $G$-épinglages* de $(\widehat{X},\underline{I})$.

Considérons, sur une base $S$ fixée, le catégorie ([]) des courbes standard $G$-épinglées. Pour tout $\alpha\in S$

**N.B.** Si $\operatorname{card}J=\nu$, alors

[] Il en est donc de même dans $M_{g,J}$, donc ainsi de $M_G$ (pour $G$ semi-stable) et de $M_{[G]}=(M_G,\Gamma)$.

## 4. La théorie de Mumford-Deligne

Soient $S$ une multiplicité schématique, $X$ une schéma relatif sur $S$, propre sur $S$, $\underline{I}$ une sous-schéma fermé de $X$. On dit que $(X,\underline{I})$ est une MD-courbe relative sur $S$, si $X$, $\underline{I}$ sont plats de présentation finie sur $S$, et si pour tout point géométrique de

$S$, la fibre $(X_{\bar{s}}, \underline{I}_{\bar{s}})$ est une MD-courbe géométrique sur $k(s)$ i.e. $X_{\bar{s}}$ est 0-connexe, de dimension 1, [] c'est une fonction localement constant sur $S$.

Fixons nous une type numérique $(g, \nu)$ *anabélien* $(2g + \nu \geq 1)$, et considérons, pour $S$ variable, le groupoïde fibré

$$(24)\quad S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}(S) = \text{ MD-courbes relatives sur } S, \text{ de type numérique égal à } (g, \nu)$$

On a alors le vraiment [] théorème suivant :

Théorème de Mumford-Deligne ([2]). — *Le groupoïde fibré $S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}/S$ sur* Sch *(plus généralement, sur les multiplicités schématiques...) est représentable pour une multiplicité schématique $\widehat{M_{g,\nu}}$, qui est* lisse *et* propre *sur* Spec $\mathbf{Z}$*, D'autre part $M_{g,\nu}$ est un ouvert de Zariski de $\widehat{M_{g,\nu}}$, schématiquement dense fibre par fibre.*

On en déduit aisément p. ex. la connexité des fibres géométriques

[]. Nous allons revenus là dessus maintenant.

## 5. Spécialisation des $MD$-graphes

Soit

[2]On suppose $2g + \nu \geq 3$ (cas anabélien)

**6. Morphismes de [ ] de graphes et de maquettes**

**7. Étude des [ ] de dim $\leq 2$ [ ] détermination des graphes correspondantes**

**8. Structure [ ]**

**9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ([ ] MDT-structure) : cas [ ],**

**10. Structures MDT analytiques : [ ]**

**11. Digression : [ ] Structure à l'infini des groupoïdes fondamentaux**

**12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une [ ] et leur dévissages en "topos élémentaires"**

**13. Digression sur stratification "locales" [ ]**

Une *stratification globale*

# PURSUING STACKS
## First episode: the modelizing story

- À la poursuite des Champs : histoire de modèles
- This text was published in: *Pursuing stacks*. Documents mathématiques, 20. SMF édité par G. Maltsiniotis
- [edition] by M. Carmona with the collaboration of U. Buchholtz.

# ESQUISSE D'UN PROGRAMME

- The *"Esquisse d'un Programme"* gives an outline of the main themes of mathematical reflection that Grothendieck pursued over the decade of the 70s and the beginning of the 80s.

  It was written in January of 1984 as a report to support an application for a research position at the CNRS. It was reproduced after "Récoltes et Semailles" as part of a program of *"Réflexions Mathématiques"* where he intended to develop some of these themes in the subsequent years.

- This text was published in: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press. [transcription]

- [scan]

- [translation] In: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

# RÉCOLTES ET SEMAILLES
## Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien

---

- **Title**: *Récoltes et Semailles*
- **English title**: *Harvests and Sowings*
- **Language**: French
- **Written Date**: February 1984 — May 1986
- **Published** in: Éditions Gallimard, 2022, 439 Paris. With the consent of Grothendieck's family.
- **Edition**: [edition] (1506 pp) by M. Carmona
- **Errata and Addedum**: [errata and addendum]
- **Translations**:

  Japanese: [translation] by Yuichi Tsuji with Grothendieck's consent. It was published in three volumes by the publishing house Gendai-Sugaku-sya (Modern Mathematics Co.), in 1989, 1990, and 1993. A fourth volume was translated but not published. Jun-Ichi Yamashita was responsible for contacting the publishing house.

  Spanish: [translation] (1454 pp) by J. A. Navarro and M. Carmona

Russian: Ongoing [translation] by Yulia Fridman and Misha Finkelberg. A published version is a translation from the French by Yu. Fridman. Ed. by G. Nuzhin, V. Prasolov and M. Finkel'berg [Zbl]

English: Ongoing translations by [Sayantan Roy and Amit Kuber], [Tong Zhou], [Roy Lisker], and [Saad Slaoui (with Jackson Van Dyke)]

- **Notes**:

  *Récoltes es Semailles* started as an introduction to the new style inaugurated by *Pursuing stacks*. "As a matter of fact, I haven't worked on the mathematical notes for well over three months now, but am about to resume work on them, and hope to get a final typescript ready for the printer, of volume 1, within the next two months. For the last two weeks I have been involved in writing the "personal part" of the Introduction, in French. This for me is by far the most important thing of Pursuing Stacks. Maybe this reflection, whether published or not, is one main meaning of my resuming "public" mathematical work (for how many years I am wholly unable to foretell...). It just occurred to me that when I am through with this reflection and testimonial of my life as a mathematician among mathematicians, I'll have it retyped separately and a hundred or so copies made, to send to those former or present friends and colleagues of mine, with whom I had or have closest contact. I'll then send you a copy in due course, which you are welcome to communicate to whom you like. However, unlike the bulk of the notes, which you were so kind to duplicate and circulate among a number of mathematicians whom you thought were interested (and a few were indeed!), please consider this introduction as somewhat confidential for the time being. According to the echoes I'll get, I may still drop from the typescript, before giving it to the printer, some too strongly personal references where other people are involved and named."
  **Letter to R. Brown, Feb 18, 1984**

  "C'est ainsi qu'est né Récoltes et Semailles. J'ai écrit les premières pages de l'introduction prévue au mois de juin 1983, à un moment creux dans l'écriture du volume premier de La Poursuite des Champs. Puis j'ai remis ça en février l'an dernier, alors que mon volume était pratiquement terminé depuis plusieurs mois[1]. Je comptais bien que cette introduction serait une occasion pour m'éclairer sur deux ou trois choses qui restaient un tantinet floues dans mon esprit. Mais je n'avais aucun soupçon que ça allait être, tout comme le volume que je venais d'écrire, un *voyage de découverte*; un voyage dans un monde autrement plus riche encore et de plus vastes dimensions que celui que je m'apprêtais à prospecter, dans le volume écrit et dans ceux qui devaient suivre. C'est au fil des jours, des semaines et des mois, sans trop me rendre compte de ce qui arrivait, que s'est poursuivi ce nouveau voyage, à la découverte d'un certain passé (obstinément éludé pendant plus de trois décennies…), et de moi-même et des liens qui me relient à ce passé; à la découverte aussi de certains de ceux qui furent mes proches dans le monde mathématique, et que j'ai si mal connus; et enfin même, dans la foulée et par surcroît, un voyage de découverte mathématique, alors que pour la première fois depuis quinze ou vingt ans[2], je prenais loisir de revenir sur certaines des questions que j'avais laissées, brûlantes, au moment de mon départ. Je peux dire, en somme, que ce sont *trois* voyages de découverte, intimement entrelacés, que je poursuis dans les pages de Récoltes et Semailles. Et aucun des trois n'est achevé avec le point final, à la page douze cents et quelques. Les échos, déjà, que va recueillir mon témoignage (et jusques y compris l'écho par le silence…) feront partie de la "suite" du voyage. Quant à son "terme", ce voyage sûrement est de ceux qui ne sont jamais menés à terme — pas même, si ça se trouve, au jour de notre mort…"

**Récoltes et Semailles**

[1]Entretemps j'avais passé un bon mois à réfléchir à la "surface structurale" pour un système de pseudo-droites, obtenue en termes de l'ensemble de toutes les "positions relatives" possibles d'une pseudo-droite par rapport à un tel système. J'ai également écrit "L'Esquisse d'un Programme", qui sera inclus dans le volume 3 des Réflexions.

[2]Dans les années cinquante et soixante, j'avais souvent réprimé mon envie de me lancer à la poursuite de telles questions juteuses et brûlantes, accaparé que j'étais par d'interminables tâches de fondements, que personne n'aurait su ou voulu poursuivre à ma place, et que personne après mon départ n'a eu non plus à cœur de continuer…

# RAPPORT D'ACTIVITÉ
(1.10.1984 — 15.12.1984)

- [scan]

# RAPPORT D'ACTIVITÉ
## (1.10.1984 — 15.12.1984)
## par Alexandre Grothendieck, attaché de recherches au CNRS

---

Les mois écoulés ont été consacrés avant tout à la préparation des volumes 1 et 2 des Réflexions Mathématiques, qui paraîtront sans doute courant 1985, sous les titres *"Récoltes et Semailles"* et *"Pursuing stacks"*, part 1: *"The Modelizing Story"*. Je prévois que cette préparation m'absorbera jusque vers la fin février, après quoi je compte reprendre la réflexion sur les fondements d'une "algèbre topologique" (commencé avec la première partie de "À la Poursuite des Champs"), en reprenant le fil de la réflexion de l'"Histoire de Modèles" là où je l'avais laissé. Je donne quelques précisions au sujet de ce programme de travail dans "Esquisse d'un Programme", par. 7.

Il s'agit ici de refondre, dans une discipline autonome (que je propose d'appeler *"algèbre topologique"*) qui jouerait le rôle un peu du pendant "algébrique" de la topologie générale, un certaine nombre de visions parcellaires provenant de l'algèbre (co)homologique (commutative ou non-commutative), l'algèbre homotopique, le formalisme algébrico-géométrique des topos (qui est une sorte de paraphrase dûment généralisée de la topologie générale), y compris le formalisme des champs, gerbes etc développé dans la thèse de Giraud, enfin la théorie des $n$-catégories et celle des $n$-champs de telles $n$-catégories (encore dans les limbes). Le besoin d'une telle discipline nouvelle, et certaines des principales idées-force que je compte développer dans le maître d'oeuvre "À la Poursuite des Champs", me sont apparus progressivement entre 1955 et la fin des années soixante, en contrepoint ininterrompu avec le développement d'une *"géométrie arithmétique"*, synthèse (entièrement imprévue encore jusqu'aux débuts des années soixante) de la géométrie algébrique, de la topologie et de l'arithmétique. Je développe réflexions rétrospectives au sujet de la naissance, l'essor et la fortune (et parfois, infortune) ultérieure de ces disciplines nouvelles, ici et là au cours de la réflexion plus vaste poursuivi dans "Récoltes et Semailles". Qu'il me suffise ici de dire que dans mes propres motivations, aujourd'hui comme il y a vingt ans, l'algèbre topologique (laissée pour compte après mon "départ" en 1970) est avant tout un des principaux *outils d'appoint* pour le développement de cette "géométrie arithmétique", dont le développement jusqu'au stade d'une pleine maturité m'apparaît comme une des principales tâches qui se posent à la mathématique de notre temps.

Un des signes principaux d'une telle maturité serait une maîtrise complète des notions et idées autour de la notion de *motif*, que j'ai introduites et développées tout au long des années soixante (tombées dans un oubli soudain dès mon "départ" en 1970 et —- à une exhumation partielle près en 1982 — jusqu'à aujourd'hui même...), ainsi qu'une maîtrise des principales notions et idées de*géométrie algébrique anabélienne* que j'ai dégagées depuis 1978. En termes imagés, on peut dire que ces deux courants d'idées, le courant "abélien" incarné par la notion de motif, et le courant "anabélien" exemplifié par la structure géométrique-arithmétique de la "tour de Teichmüller", sont à la "géométrie arithmétique" dans son enfance, ce que courants "complexes de cochaînes — catégories dérivées commutatives" sont à l'algèbre topologique (encore in utero).

La différence essentielle entre ces deux disciplines ne se situe cependant nullement dans leur état d'avancement relatif, circonstance des plus contingentes, apte à changer radicalement en l'espace de quelques années, ne serait-ce que par la vertu de l'écriture de "Pursuing Stacks". Elle se situe plutôt dans une différence de profondeur. Comme c'était le cas naguère pour le développement d'une "topologie générale" (faite sur mesure pour l'analyste, bien plus que pour le géomètre), le travail essentiel à accomplir pour la mise sur pied de l'"algèbre topologique" est, avant toute autre chose, le *développement d'un langage*, dont le manque se fait sentir (à moi tout au moins) à tous les pas. La dimension de cette tâche me semble être du même ordre que celle à laquelle se sont vus confrontés Hausdorf et d'autres, dans l'entre-deux-guerres. Elle n'a pas de commune mesure avec la tâche posée par le développement de la géométrie arithmétique, jusqu'au point d'un sentiment de "maîtrise" des principaux courants d'idées qui y confluent. On mesurera cette différence de "dimensions", en se rappelant que la "maîtrise" du "courant anabélien" impliquerait, notamment, une description "purement algébrique" du groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$, et de la famille de ses sous-groupes de décomposition et d'inertie associées aux différents nombres premiers. La structure de ces derniers (correspondants aux cas "locaux" des corps $p$-adiques) ont été déterminés récemment par Uwe Jannsen, Kay Wingberg et (dans le cas $p = 2$) Volkier Diekert, avec une relation principale rappelant étrangement celle qui décrit le groupe fondamental principale d'une courbe algébrique sur le corps des complexes. Mais on est loin sans doute d'une description analogue dans le cas "global".

Pour terminer ce rapport préliminaire, je me sens en mesure d'apporter quelques précisions pratiques au programme "tous azimuths" exposé dans l'Esquisse d'un Programme (qui sera jointe à "Récoltes et Semailles", ainsi que le présent rapport, l'Esquisse Thématique et quelques autres textes de nature mathématique, pour constituer le volume 1 des Réflexions Mathématiques). Je tiens d'abord, avant toute autre chose, à m'acquitter (comme je le dis dans l'Esquisse d'un Programme, par. 7) "d'une dette vis-à-vis de mon passé scientifique", en esquissant tout au moins dans les grandes lignes des principales visions d'ensemble auxquelles j'étais parvenu entre 1955 et 1970 et qui, sans avoir trouvé alors la forme d'exposés systématiques et publiés, ont été laissés pour compte par mes ex-élèves après mon "départ" en 1970. Il s'agit d'une part de l'ensemble d'intuitions et d'idées en direction de l'"algèbre topologique", à laquelle j'ai fait allusion tantôt, et d'autre part d'un "vaste tableau des motifs" qu'il s'agit de "brosser à grands traits", apte à servir à la fois de maître d'oeuvre pour l'édification d'une théorie qui reste conjecturale, t de fil conducteur très sûr et de fécond instrument de découverte, pour pouvoir prédire "à quoi on est en droit de s'attendre" dans une foule de situations impliquant les propriétés géométrico-arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. (Une version très parcellaire de certaines de mes idées à de sujet est présentée, sans que mon nom y soit prononcé, dans le volume "Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties" des Lecture Notes (n° 900), 1982, par Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, Kuang-yen Shih.) Je compte poursuivi cette partie de mon programme, au cours des deux ou trois années qui suivent, dans les deux ou trois volumes des Réflexions Mathématiques faisant suite aux deux volumes dont je suis en train de terminer la préparation. Ceci fait, je prévois de me consacrer prioritairement au programme de géométrie algébrique anabélienne — d'une part, tracer à grands traits les principales idées, conjectures et résultats déjà obtenus, et d'autre part, entreprendre une étude géométrie-arithmétique minutieuse de la "tour de Teichmüller", et plus particulièrement, de ses deux premiers étages.

Le 10.12.1984

Alexandre Grothendieck

# RAPPORT D'ACTIVITÉ

- [scan]

# RAPPORT D'ACTIVITÉ

Mon enseignement depuis 1978 a consisté

# BRIEF AN V. DIEKERT

3.4.1984

- [scan]

Les Aumettes 3.4.1984

Lieber Volker Diekert,

Ich

# BRIEF AN V. DIEKERT
15.4.1984

- [scan]

Les Aumettes 15.4.1984

Dear Lipman Bers,

Together with Yves Ladegaillerie (a former student of mine) we are running a microseminar on the Teichmüller spaces and groups, my own motivations coming mainly from algebraic geometry, and Ladegaillerie's from his interest in the topology of surfaces. Lately we have met with a problem which I would like to submit to you, as I understand you are the main expert on Thurston's hyperbolic geometry approach to Teichmüller space. Before stating the specific problem on hyperbolic "pants" (which things boil down to), let me tell you what we are really after.

Assuming given a compact oriented surface with boundary $X_0$ as a reference-surface for constructing the Teichmüller-type spaces, of genus $g$ and with "holes" (satisfying $2g-2+\nu>0$), my primary interest is in the more "algebraic" version of Teichmüller space, corresponding to the question of classifying algebraic non singular curves over $\underline{C}$, of genus $g$, with a system of points (all distinct) given on $X$, together with a "Teichmüller rigidification" of $(X,S)$ namely a homotopy equivalence between $X_0$ and $X\backslash S$. I'll denote this space, homeomorphic to $\underline{C}^d$ (where $d=3g-3+\nu$), by $\widetilde{M}_{g,\nu}$ (the tilde suggesting that it is the universal covering of a finer object I am still more interested in, namely the algebraic variety (or rather "multiplicity", or "stack" in the terminology of Mumford-Deligne) of moduli for algebraic curves of type $(g,\nu)$. Thurston however considers a different modular space, where algebraic curves with a given system of points are replaced by compact conformal oriented surfaces *with boundary*, giving rise to a modular space $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ (where the letter $B$ recalls that we are classifying structures with boundary) homeomorphic to $\underline{C}^d\times(\underline{R}^{*+})^\nu$, where the extra factor corresponds to the extra parameters introducing through the existence of the boundary, namely the length's of the components of the boundary with respect to the canonical hyperbolic structure on the given surface. Our interest is in pinpointing the precise relationships between the two modular spaces. The obvious idea here is to consider the case of an algebraic curve with $\nu$ points given as a limit-case of a compact conformal surface with boundary, when all the lengths $l_i$ of the components of the boundary tend to zero. Therefore, it looks suitable to consider both modular spaces above as embedded in a larger third one, which corresponds to the same modular problem as in Thurston's theory, except that we allow the "boundary" to have some components reduced to just one point, in the neighbourhood of which $X$ is just a conformal surface without boundary, but with a given point (viewed as a component of such a "generalized boundary"). We now should get a modular space for "compact conformal oriented surfaces with generalized boundary" (of type $g$, $\nu$ and rigidified via $X_0$), call it $\widetilde{MB}_{g,\nu}$, homeomorphic to $\underline{C}^d \times (\underline{R})^\nu$, where now the second factor corresponds to the "parameters" $l_i$, which are allowed to take also value 0 (which means that the corresponding component of the generalized boundary is just one point). Thus $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ appears as a variety with boundary (in the topological sense - in the real analytic sense, the "boundary" admits "corner-like" points obviously), and $\widetilde{M}_{g,\nu}$ appears as a part of the boundary.

My interest is in a better geometric understanding of the situation, which should be "intrinsic" namely not depend on any particular choice of a surgical decomposition of the reference surface $X_0$ into "pants", used in order to describe in a handy way standard "coordinate functions" on the modular space $\widetilde{M}_{g,\nu}$. There appears to be a geometrically meaningful retraction of $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ upon $\widetilde{M}_{g,\nu}$ (commuting to the operations of the Teichmüller modular group), the fibers being homeomorphic to $(\mathbf{R}^+)^\nu$ - more specifically, I expect the semi-group $(\mathbf{R}^+)^I$ (where $I$ is the set of indices for the "holes" of $X_0$) to act on $MB$ in a natural way, with free action of the subgroup $(\mathbf{R}^+)^\nu$ upon $\widetilde{MB}^\circ$, in such a way that $\widetilde{M}$ is just the quotient of $\widetilde{MB}$ by this action (or of $\widetilde{MB}^\circ$ by the action of the corresponding subgroup), and that the fiber $F$ is isomorphic to $(\mathbf{R}^+)^I$ by the choice of any "origin" in $F \cap \widetilde{MB}^\circ$.

Of course, "computationally", in terms of a decomposition of $X_0$ into pants, the idea of such an operation is pretty obvious - namely letting the components $\lambda_i$ of $\lambda \in (\mathbb{R}^+)^I$ act as a "multiplier" on the corresponding coordinate $\lambda_i$. However, it is not clear that this operation is intrinsic - and if it were intrinsic, an intrinsic geometric description would still be desired.

Of course, in the description of the situation proposed above, the retraction of $\widetilde{MB}$ upon $\widetilde{M}$ is obtained by multiplying with the 0 multiplier (all $\lambda$ are 0). Now there is a direct geometrical description of a retraction, by hyperbolic surgery. Namely, for any compact conformal surface of type $g, \nu$ with generalized boundary, let's "fill in" the holes which correspond to ordinary components of the boundary, which are Riemanian oriented circles, by "gluing in" the cones on these circles (which are canonically endowed with a conformal structure, using the Riemanian structure on the given circles). Thus we get a "functor" from compact conformal surfaces with generalized boundary (of type $g, \nu$) to compact conformal surfaces *without boundary*, endowed with a system of $\nu$ points (making up a "wholly degenerate" generalized boundary). When we throw in the rigidifications and go over to isomorphism classes, this should give the desired retraction. However, the geometric situation is a lot richer still, as the compact surface without boundary obtained through surgery is endowed, not only with a system of $\nu$ points, but moreover with a system of mutually disjoint *discs* around these points. The shape of these discs is by o means arbitrary - we'll say that a system of discs around $\nu$ points on a compact conformal surface $\hat{X}$ without boundary is "admissible", if the situation can be obtained as above (up to isomorphism) from surgery, starting with a compact conformal surface $X$ with boundary. (NB Among the given "discs", we should allow that some should be reduced to their center - we'll call them "degenerate".) The condition of admissibility can be expressed intrinsically, by stating that for every non-degenerate component $\Gamma_i$ of the system of boundaries of those discs, the two operations we got of the standard circle group (of complex numbers of module 1) upon $\Gamma_i$, by using the fact that it is (on the one hand) the boundary of the disc $D_i$, an (on the other hand) that it is a component of the boundary of the hyperbolic surface $\hat{X} \backslash (\bigcup_j D_j^\circ)$, should be the same. When $\hat{X}$ and the points $s_i$ on $\hat{X}$ are given, the possible admissible systems of discs around the points $s_i$ depend on $\nu$ parameters - and the first idea which flips to mind to give a more precise meaning to these "parameters", is to view them as being the "radii" of those discs. But then we'll have to define what we mean by these!

The idea here is that, when we have a conformal disc $D$ and an interior point $s$ of $D$, then $D$ may be viewed as canonically embedded in the tangent space $T_s$ to $D$ at $s$, as the "unit disc" at $s$. Thus, in the situation above of admissible system of discs $(D_i)_{i \in I}$ around $(s_i)_{i \in I}$, for every $s_i$ corresponding to a non-degenerate $D_i$, we get a canonical disc

$$\Delta_i \subset T_{s_i}$$

in the tangent space - and of course, for degenerate $D_i$, we'll take $\Delta_i$ to be degenerate too. The discs we get in a given $T_{s_i}$ (for a fixed system $(s_i)$, and a variable admissible system of discs around these $s_i$) are ll discs in the strict euclidean sense, given by an unequality

$$|z| \leq r_i,$$

where $z \mapsto |z|$ denotes some hermitian metric on $T_{s_i}$ compatible with the conformal structure - this metric being unique $s_i$ up to a scalar factor. The set $R_i$ of all those possible discs (the non-degenerate ones say) may be viewed in a natural way as a "torsor" (= principal homogeneous space) under $\mathbf{R}^+$, which plays here the role of the parameter space of all possible (non degenerate) "raddi" at $s_i$. If we admit also radius zero, we accordingly get a parameter space $\hat{R}_i$, which may be viewed as a torsor of sorts $\mathbf{R}^+$. Thus the set of radii for a given admissible system of discs $D_i$ around the points $s_i$ may be viewed as a point of the product-space

$$r = (r_i)_{i \in I} \in \hat{R} = \prod_{i \in I} \hat{R}_i.$$

My expectation is that an admissible set of discs $(D_i)$ is well determined by the knowledge of the corresponding set $r$ of radii, and moreover that a given set $r$ of radii corresponds to an admissible system of discs iff it satisfies a set of unequalities

$$r_i < \rho_i,$$

where

$$\rho = (\rho_i)_{i \in I} \in R = \prod_{i \in I} R_i$$

is come fixed system of radii, corresponding to a fixed system of choices of hermitian metrics in the tangent spaces $T_{s_i}$.

I now see that this "expectation" doesn't quite match with the previous one, about a "natural operation" of $(\underline{P^+})^I$ upon $\widetilde{MB}$, having certain properties - it would match only if all $\rho_i$ where equal to $+\infty$ (hence not in $R_i$ itself strictly speaking). I must confess I didn't look too thoroughly yet at the situation, and moreover I've been busy with rather different kind of things for the last two or three months, and lost contact a little…

What is clear however is that the main key to an understanding of the general situation, is in an understanding of the basic particular case of Thurston's pants. If we number $0$, $1$ $\infty$ the three "holes" of such a part, the surface $\hat{X}$ can be identified canonically to the Riemann sphere, and the basic question then is to understand how the pant is embedded in this sphere $\Sigma$, as a complement of the union of (open) discs around the points $0$, $1$, $\infty$, these discs forming an "admissible system". So the main question is about understanding the structure of all possible admissible systems of three discs on $\Sigma$.

Puzzling a little about this problem, the following model came to my mind (corresponding to "limiting radii" $\rho_i$ which are *finite*, not infinite). I view $\Sigma$ as endowed with its usual euclidean metric, for which the real projective line is a great circle, with $0$, $1$, $\infty$ at equal distance from each other on this equator. These points may be viewed as the centers of three "orange slices", making up a cellular subdivision of $\Sigma$, where the common boundary of two among the "slices" $Q_i$ ($i \in \{0, 1, \infty\}$) is a half-great circle passing in between $s_i$ and $s_j$ at equal distance from both, these three half-circles joining at the two poles $P^+$ and $P^-$. The "disc" $Q_i$ around $s_i$ has a conical structure around $s_i$ (as has any conformal pointed disc), and we may take the concentric discs $\lambda_i Q_i$ with

$$0 < \lambda_i < 1.$$

The model I had in mind was that the (non degenerate) admissible systems of discs around the points $s_i$ ($i \in \{0, 1, \infty\}$) are exactly the systems of discs $\lambda_i Q_i$, with $\lambda_i$ as above. (If we allow some discs to be degenerate, this means that instead of the unequality above we merely demand $0 \leq \lambda_i < 1$, $0$ not excluded.)

This model, if correct, would give a rather precise description of the inclusion relationships between pants, when these are considered as embedded in the sphere. The intersection of all would be this system of these half circles $C_i$, and the two poles $P^+$, $P^-$ would play a significant role in the geometry of the pants, from this point of view. But it doesn't seem that neither those half circles (which need not be geodesical I guess), nor the two poles have ever been described as intrinsically associated to a pant. Of course, this model would give alternative "parameters" $\lambda_i$ for describing a pant, which are best suited for grasping the pants in terms of spherical geometry. The next question would be an understanding of the relationship between these parameters, and Thurston's $\ell_i$. Maybe it is unreasonable to expect that for given index $i \in \{0, 1, \infty\}$, the length $\ell_i$ depends only on $\lambda_i$ an not on the other parameters $\lambda_j$ - and for this reason, the intuition at the beginning of this letter, using Thurston's coordinate functions and notably the $\ell_i$'s to get a fibration structure on $\widetilde{MB}$ over $\widetilde{M}$, in terms of a given decomposition of $X_0$ into pants, is probably not really relevant, namely it is non intrinsic. Assuming the model I am suggesting is correct, the accurate description of $\widetilde{MB}$ in terms of $\widetilde{M}$ would be

$$\widetilde{MB} \simeq \widetilde{M} \times [0,1[^I,$$

where the second factor on the right hand sight refers to the system of multipliers $\lambda_i$ ($i \in I$), tied to the $r_i$ above by $r_i = \lambda_i \rho_i$.

My question of course is whether you have any information or idea to propose, especially on the basic problem of relying pants to spherical geometry, and more specifically, whether the model above is likely to hold, or is definitely false. Also, one difficulty we found with hyperbolic geometry of conformal surfaces, is that apart from existence and unicity of the hyperbolic structure (compatible with the given conformal cone and for which the boundary is geodesic), there seems to be little hold on more specific properties. As an example, starting with a compact conformal surface with boundary $X$ (a pant, say), of hyperbolic type, and removing an (open) "collar" around the boundary, we get another surface with boundary $X'$ - what about the relation between the two corresponding metrics? Assuming the model for pants above is correct, it would be nice to have an explicit expression of the metric of a pant in terms of the parameters $\lambda_i$.

With my thanks for your attention, and for whatever comment you will care to make, very sincerely yours

# VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES
## 1986

- Foundations on topology

# VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES

## I. Vers une géométrie des formes (topologiques)

[Apprendre] vers une construction récouvrante (sur l'action naturelles) d'une "géométrie des formes de dimension $\leq n$".

Une "forme de dim 0" soit pour définition [] dont les éléments sont appelés les "lieux" de la forme.

**Modèle de dimension 1**. — Une tel modèle

[]

1) Deux ensembles de [] $L_\alpha$ (ensemble des *lieux* de modèles) et $S$ (ensemble des *segments* des modèle)

2) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}(L)$, $I \longrightarrow \widetilde{I}$ (lieux sur un segment) - i.e. une relation entre $S$ et $L$.

3) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}_2(L)$ []

**N.B**. J'ignore s'il faut supposer que $I$ est connu, quand on connaît

**Modèle d'une forme 1-dimensionnelle**

$L$ ensemble de "lieux"
$S$ ensemble de "segments"

## II. Réalisations topologiques des réseaux

### 1. — [] topologique

Soit $X$ un espace topologique, $A \subset X$ partie fermée non vide de $X$. $X_{/A}$ l'espace déduit de $X$ en [] $A$ en un point, a le point déduit de $A$ par []. Si $X'$ est une partie de $X$ contenant $A$, alors $X'_{/A} \hookrightarrow X_{/A}$ identifié $X'_{/A}$ à un sous-espace topologique de $X$.

Les fermées de $X'_{/A}$ s'identifient aux fermées de $X'$ qui on bien contient $A$

## III. Réseaux via découpages

Je voudrais définir une [] axiomatique a structure [] réseaux sur un [] $L$ ([] de "lieux").

[]

**Exemple 2** Soit $L$ un ensemble ordonnée, on suppose $L$ filtrant croissante, filtrant décroissant, sans plus grand [] plus petit élément, localement filtrant croissante et filtrant décroissante divisible.

On appellera un tel ensemble une *[] ordonnée*.

## IV. Analysis situs (première mouture)

## V. Algèbre des figures

## VI. Analysis situs (deuxième mouture)

Avant de décrire ce qu'est une [], je vais décrire ce qui sera [] avec notion de multistrates" - la famille des multistrates choisies jouant un peu le rôle des une famille d'ouverts [] donc une topologie, ou une famille génératrice d'éléments d'un topos. Je vais donc commencer pas

### I. "Algèbre des figures" ou "Ateliers".

**1.** — Une *algèbre des figures* implique avant tout trois types d'objets, les *lieux*, les *multistrates*, les *figures*, formant trois ensembles

$$L, M, F \tag{1.1}$$

liées entre eux par diverses applications, et [] muni de diverses structures. Ainsi, on a des applications canoniques invectives

$$L \overset{b)}{\hookrightarrow} M \overset{a)}{\hookrightarrow} F \tag{1.2}$$

que nous utiliserons souvent pour identifier un lieu à une multistrate particulière, et une multistrate à une figure particulière ou $L$ à une sous-ensemble de $M$, $M$ à un sous-ensemble de $F$.

Il y a d'autre part deux entre paires d'applications, que voici :

(1.3) []

où $\mathrm{Fig}(M)$ désigne la partie de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ formée des figures ensemblistes dans $M$. On peut considérer que le première application correspond à une relation entre $M$ et $F$, appelée relation d'incidence. Pour une figure $F$, $\widehat{T}$ s'appelle l'ensemble des *multistrates incidentes*, ou le *déployement* de la figure $F$. Si $X \in M$, $F \in \widetilde{F}$, on dire que le multistrate $X$ est *incidente* à la figure $F$ ou encore que c'est une *strate de la figure* $F$, si $X \in \widetilde{F}$. D'autre part, tout élément $X$ de $M$ (i.e. toute multistrate), [] comme une figure par (1.2), admet un déployement $\widetilde{X}$, et on pose

(1.4) []

et il résultera des axiomes que c'est une figure ensembliste des $M$, [] fidèlement par l'un $\widetilde{F}$ des strates de $F$.

En fait, $M$ sera muni d'une relation d'ordre $\leq$, [] plus bas, et $\widetilde{F} \subset M$ sera une partie fermée de $M$, et pour tout $X \in \widetilde{F}$, on aura

$$\widetilde{X} = \{Y \in M \mid Y \leq X\} \tag{1.5}$$

À cause de cette interpolation, la passage de $\widetilde{F} \subset M$ à $\mathrm{Fig}_M(F)$ est à tout [], que cette figure ensembliste des $M$ un semble revenant important - mais à voir…

## VII. Analysis situs (troisième mouture)

## VIII. Analysis situs (quatrième mouture)

# LETTER TO P. BLASS
8.7.1987

---

- [scan]

Les Aumettes July 8, 1987

Dear Piotr Blass,

Thanks for your letter and MS. I am not going even to glance through the manuscript, as I have completely given up mathematics and mathematical involvements. If you complete your book, you may mention on the cover that it is based on my EGA IV (sic) notes, but you are to be the author and find your own title.

I have a foreboding that we'll contact again before very long, but in relation to more inspiring tasks and vistas than mathematical ones.

With my very best wishes

Alexander Grothendieck

# LES DÉRIVATEURS

- Écrit entre octobre 1990 et la première moitié de 1991
- [edition] par M. Künzer, J. Malgoire, G. Maltsiniotis

# LETTRE À R. THOMASON
2.4.1991

- Letter about Derivators.
- [edition] by M. Künzer
- [translation] by Tim Hosgood

Les Aumettes le 2.4.1991

Cher Thomason,

Merci pour ta lettre, et excuse-moi d'avoir tant tardé à t'écrire. Une raison en est que depuis peut-être deux mois j'étais occupé par une réflexion venue un peu en diversion, que je pensais régler en quelques jours (refrain familier…), et j'ai repoussé ma lettre de semaine en semaine. Cette réflexion ne concerne pas l'algèbre homotopique proprement dite, mais plutôt les fondements de la théorie des catégories, et j'en ai fait nettement plus que ce dont j'ai un besoin immédiat. Mais dès à présent j'ai la conviction qu'une algèbre homotopique (ou, dans une vision plus vaste, une "algèbre topologique") telle que je l'envisage, ne pourra être développée avec toute l'ampleur qui lui appartient, sans les dits fondements catégoriques. Il s'agit d'une théorie des (grosses) catégories que j'appelle à présent *"accessibles"*, et des parties accessibles de celles-ci, en reprenant complètement la théorie provisoire que je présente dans SGA 4 I 9. J'ai tissé un tapis de près de deux cents pages sur ce thème d'apparence anodine, et cela me fera plaisir de t'en présenter les grandes lignes, si cela t'intéresse. Il y a aussi quelques problèmes intrigants qui restent, que je pressens difficiles, peut-être même profonds, et qui peut-être (qui sait) t'inspireront, ou quelqu'un d'autre branché sur les fondements de l'outil catégorique. Mais tout cela m'apparaît comme du domaine de l'outil, et je préfère dans cette première lettre te parler de choses plus névralgiques. Les idées-force sont nées pour la plupart depuis vingt-cinq ans et plus, et j'en vois le germe vivace dans mes réflexions solitaires des années 56, 57, quand s'est dégagé pour moi le besoin de catégories de "coefficients" moins prohibitivement gros que les sempiternels complexes de chaînes ou de cochaînes, et l'idée (après de longues perplexités) de construire de telles catégories par passage à une catégorie de fractions (notion qu'il a fallu inventer sur pièces) en "inversant" les quasi-isomorphismes. Le travail conceptuel principal qui restait à faire, et qui m'apparaît maintenant tout aussi fascinant (tant par sa beauté, que par sa portée évidente pour les fondements d'une algèbre cohomologique dans l'esprit d'une théorie des coefficients cohomologiques) qu'en ces temps de mes premières amours avec la cohomologie – c'était de dégager la structure intrinsèque de ces catégories. Le fait que ce travail, que j'avais confié à Verdier vers 1960 et qui était censé faire l'objet de sa thèse, n'ait toujours pas été fait à l'heure actuelle, même dans le cas des catégories dérivées ordinaires, abéliennes, lesquelles pourtant (par la force des choses) ont bien fini par devenir d'un usage quotidien tant en géométrie qu'en analyse, en dit long sur l'état des mentalités à l'égard des fondements, dans la communauté mathématique.

Ce vent de mépris à l'égard des indispensables travaux de fondements (et plus généralement, pour tout ce qui ne se conforme pas à la mode du jour), je l'ai évoqué dans ma dernière lettre, et j'y reviens bien des fois aussi dans les pages de Récoltes et Semailles, tant c'est là une chose (parmi bien d'autres) qui tout simplement me dépasse. Ta réponse à ma lettre montre d'ailleurs que tu ne l'as absolument pas comprise. Ce n'était pas une lettre pour "me plaindre" de ceci ou de cela qui me déplaisait. Mais c'était une impossible tentative de partager une douleur. Je savais bien au fond que c'était sans espoir ; car tout le monde fuit la douleur, c'est-à-dire fuit la connaissance (car il n'y a pas de connaissance de l'âme qui soit exempte de douleur). Une très rare tentative, peut-être la seule dans ma vie (je ne m'en rappelle pas d'autre en tous cas), et sans doute la dernière…

Il y a deux directions d'idées, intimement solidaires, dont j'ai envie de te parler, que je me suis surtout attaché à développer depuis fin octobre (quand j'ai repris une réflexion mathématique, pour une durée indéterminée). Elles sont d'ailleurs déjà esquissées ici et là (ainsi qu'un bon nombre d'autres idées maîtresses de l'algèbre topologique) dans Pursuing Stacks. Dans cette réflexion de 1983, qui m'a beaucoup aidé maintenant, je finis par me disperser quelque peu à suivre des avenues latérales, plutôt que de revenir aux idées essentielles de mon propos initial. Comme autre source utile pour quelqu'un intéressé par ces questions de fondements, je te signale deux ou trois lettres à Larry Breen, que je pensais d'ailleurs inclure dans le texte publié de Pursuing Stacks (qui sans doute ne verra jamais le jour). D'une part je voudrais te parler de catégories de modèles et de la notion de "dérivateur" (remplaçant les défuntes "catégories dérivées" de Verdier, décidément inadéquates aux besoins). D'autre part j'ai beaucoup de choses à dire sur Cat en tant que catégorie de modèles pour des "types d'homotopie" en tous genres. Mais ce sera sûrement pour une autre fois (à supposer que ton intérêt survive à la lecture de cette lettre-ci). Donc aujourd'hui ce sera les catégories de modèles et la notion de dérivateur.

**1. La seule structure essentielle d'une catégorie de modèles est la donnée du "localiseur" $W \subset \mathrm{Fl}(M)$.**

Aussi j'appelle "catégorie de modèles" une catégorie $M$ munie d'un tel "localiseur" (contenant les isomorphismes, et avec deux parmi trois flèches $u$, $v$ et $uv$, aussi la troisième). Les constructions homotopiques essentielles sont indépendantes de toutes structures supplémentaires, tel un ensemble $C$ de "cofibrations" ou un ensemble $F$ de "fibrations" ou les deux à la fois. De telles structures supplémentaires sont utiles, dans la mesure où elles permettent d'expliciter les constructions essentielles, et d'en établir l'existence. Mais elles ne sont pas plus essentielles pour le sens intrinsèque des opérations (qu'elles auraient tendance plutôt à obscurcir, jusqu'à présent) que le choix d'une base plus ou moins arbitraire d'un module, en algèbre linéaire. Comme terminologie, je parlerai de "catégories à cofibrations" (ou à fibrations), ou de "catégories (ou triples) de Quillen", etc., quand de telles structures supplémentaires apparaissent.

Par sa richesse en structures délicatement accordées les unes aux autres, ce sont les *triples de Quillen clos* $(W, C, F)$ qui m'apparaissent comme la plus belle structure de catégorie de modèles "enrichie" découverte jusqu'à ce jour. J'avais cru pouvoir m'en passer, mais finalement n'y suis pas parvenu, et crois qu'ils resteront utiles (sinon absolument indispensables). En sens opposé, par l'économie des moyens mis en œuvre pour arriver pourtant à avoir l'essentiel, c'est la notion de *catégorie à cofibrations* ou à *fibrations* de K. S. Brown (avec la généralisation assez évidente apportée par Anderson) qui m'apparaît la plus belle. Par contre, je ne suis pas arrivé à comprendre la raison d'être du système d'axiomes que tu me proposes dans ta première lettre, te plaçant plus ou moins à mi-chemin entre Quillen et Brown. Tes axiomes (s'ils veulent élargir ceux de Quillen) me paraissent prohibitivement exigeants, en comparaison avec ceux de Brown-Anderson – à cela près, seulement, que tu ne sembles pas exiger que les ensembles $C$ et $F$ soient stables par composition. Mais je ne connais guère d'exemple où cet axiome-là ferait problème. Éclaire-moi s'il te plaît s'il y a quelque chose qui m'échappe.

Un exemple : si une structure à fibrations (de Brown-Anderson) satisfait à la condition familière de "propreté" (ce qui est le cas pour les structures considérées d'abord par Brown, où tous les objets sont fibrants sur l'objet final), on peut remplacer cette structure $(W,F)$ par une autre $(W,F_W)$ canoniquement associée au localiseur $W$, i.e. à la catégorie de modèles envisagée, en prenant pour $F_W$ l'ensemble des flèches dans $M$ qui sont ce que j'appelle des *$W$-fibrations* $f : X \longrightarrow Y$, *i.e.* qui sont quarrables et telles que le foncteur changement de base $Y' \mapsto X' = X \times Y'$ de $M/Y$ dans $M/X$ transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes. Pour tout localiseur, c'est là un ensemble de flèches qui contient les isomorphismes, est stable par composition, par changement de base, par facteurs directs. Dire que $(W,F_W)$ est une structure de Brown, revient à dire qu'il existe "assez de W -fibrations", par quoi j'entends que toute flèche u se factorise en $u = f\,i$, avec $i \in W$ et $f \in F_W$. Et dualement pour les catégories à cofibrations $(W,C)$, se remplaçant (dans le cas propre) par des structures $(W,C_W)$ canoniquement associées au localiseur, en introduisant l'ensemble des *$W$-cofibrations*. Ainsi, j'aurais tendance plutôt à regarder une structure à fibrations $(W,F)$ propre (et non "canonique") comme une recette ou un critère pour caractériser certaines $W$ -fibrations, avec lesquelles on pourra se contenter souvent de travailler, parce qu'il y en a "assez". Pourtant, j'ai trouvé dans le cas de Cat que le travail avec les $W$-fibrations (beaucoup moins restrictives que les "fibrations" à la Quillen que tu avais introduites) était indispensable. Et je suis persuadé qu'il doit être très utile aussi dans une catégorie de modèles telle que $\Delta\hat{}$ (ensembles semi-simpliciaux), car tout en étant substantiellement moins exigeante que la notion de fibration de Kan, celle de $W$-fibration implique déjà tout ce que je considère (à tort ou à raison) comme les propriétés cohomologiques et homotopiques essentielles de ces dernières (lesquelles, selon moi, ne sont pas dans la nature de propriétés de prolongement-relèvement de morphismes). Ainsi, cela doit permettre (par considération de "chemins" infinis) de construire dans $\Delta\hat{}$ l'analogue des espaces de chemins de Cartan-Serre, sans avoir au préalable à remplacer le complexe $K$ par une enveloppe de Kan. C'est en tous cas ce que j'ai vérifié dans le cas très voisin de Cat (sans jamais avoir à faire de détour par $\Delta$). Cela fait partie des choses dont je voudrais te parler par la suite.

## 2. Prédérivateurs, dérivateurs

Quand j'ai dit que les structures homotopiques essentielles sont déjà contenues dans le localiseur $W$, je pensais notamment aux suites exactes des fibrations et des cofibrations, qui sont un test décisif. Je reste ébahi que Quillen ne souffle mot à ce sujet dans son brillant (et beau) travail, et je présume qu'il a réussi (comme bien d'autres après lui) à ne pas le voir. (Pour le voir, il aurait fallu sans doute qu'il ne soit pas aveuglé par le mépris *a priori* qu'il exprime pour toute recherche de fondements qui irait au-delà de celle qu'il venait de faire, avec un tel succès…) Mais la chose devient évidente dans l'optique des dérivateurs.

L'idée de base des dérivateurs m'est apparue à l'occasion de SGA 5, quand il s'est avéré (découvert par Ferrand, chargé de rédiger un de mes exposés sur les traces en cohomologie) que la notion de catégorie dérivée de Verdier ne se prêtait pas au formalisme des traces : la trace n'est pas additive pour les "triangles exacts", car cette notion de triangle (vu comme un diagramme dans la catégorie initiale) n'est pas assez fine. Pour bien faire, il faudrait prendre la catégorie des morphismes de complexes (pour lesquels on a une construction fonctorielle d'un *mapping cone*), et passer à la catégorie dérivée de celle-ci. Cette catégorie s'envoie dans celle des triangles de Verdier par un foncteur essentiellement surjectif, mais qui n'a rien de fidèle, et encore moins pleinement fidèle. C'est là le "péché originel" dans la première approche des catégories dérivées, tentée par Verdier — approche dont en tout état de cause, faute d'expérience, on n'aurait pas pu faire l'économie. C'est alors que j'ai été frappé par ce fait, d'apparence anodine, que chaque fois qu'on construit une catégorie dérivée à l'aide d'une catégorie de complexes d'une catégorie abélienne, cette catégorie dérivée, en un sens, "ne vient jamais seule". En effet, pour toute catégorie d'indices $I$ (et je pensais alors surtout au cas où $I$ est finie), on a la catégorie abélienne $A(I)$ des diagrammes de type $I$ dans $A$, laquelle donne, elle aussi, naissance à une catégorie dérivée, qu'on pourrait noter $D(I,A)$. La catégorie des "vrais" triangles s'obtient en prenant $I = \Delta^1$, et les catégories dérivées de complexes filtrés, introduites par Illusie pour sauver la mise à bon compte, correspondent aux cas $I = \Delta^n$ (simplexe-type de dimension $n$). Les variances d'Illusie proviennent simplement du fait que $D(I,A)$, pour $A$ fixé, est contravariant en $I$, de façon tautologique. L'idée tentante alors, et que j'ai proposée ici et là sans qu'elle ne rencontre d'écho, c'est que cette structure de foncteur ou, plus exactement, de *2-foncteur*

$$I \mapsto \mathrm{D}(I,A)$$

allant de la catégorie Cat ou de quelque sous-catégorie assez fournie comme celle des catégories finies ou celle des ensembles ordonnés finis, devrait suffire à incarner toutes les structures essentielles d'une "catégorie dérivée" (encore dans les limbes) ; quitte bien sûr à imposer les axiomes qu'il faut (et que j'ai fini par dégager enfin l'an dernier). On récupère la catégorie dérivée initiale, "nue", en faisant $I = e$ (catégorie ponctuelle). Mais il serait impropre, en toute rigueur, de considérer la structure plus complète (que j'appelle maintenant un "*dérivateur*") comme une structure supplémentaire sur cette catégorie – laquelle continue cependant, dans le formalisme des dérivateurs, à jouer un rôle important, sous le nom de "*catégorie de base*" du dérivateur. La même idée avait l'air de devoir marcher pour les variantes non commutatives de la notion de catégorie dérivée, et le travail de Quillen m'apparaissait comme une incitation puissante à développer ce point de vue. Mais ce n'est qu'il y a quelques mois que je me suis donné le loisir enfin de vérifier que mon intuition était bel et bien justifiée. (Travail d'intendance, quasiment, comme j'en ai fait des centaines et des milliers de fois !)

Ce point acquis, il est bien clair à présent que la notion de dérivateur (plus encore que celle de catégorie de modèles, qui est à mes yeux un simple intermédiaire, "non intrinsèque", pour construire des dérivateurs) est une parmi les quatre ou cinq notions les plus fondamentales, dans l'algèbre topologique, qui depuis une trentaine d'années déjà attend d'être développée. Comme notions d'une portée comparable, je ne vois guère que celle de *topos*, et celles de *$n$-catégories* et de *$n$-champs* sur un topos (notions qui n'ont pas encore été définies à ce jour, sauf pour $n \leq 2$). D'autre part, pour moi le "paradis originel" pour l'algèbre topologique n'est nullement la sempiternelle catégorie $\Delta\hat{}$ semi-simpliciale, si utile soit-elle, et encore moins celle des espaces topologiques (qui l'une et l'autre s'envoient dans la 2-catégorie des topos, qui en est comme une enveloppe commune), mais bien la catégorie Cat des petites catégories, vue avec un œil de géomètre par l'ensemble d'intuitions, étonnamment riche, provenant des topos. En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d'ensembles les $C\hat{}$, avec $C$ dans Cat, sont de loin les plus simples des topos connus, et c'est pour l'avoir senti que j'insiste tant sur l'exemple de ces topos ("catégoriques") dans SGA 4 I.

J'en viens maintenant à la définition en forme de ce que j'entends par un “*prédérivateur*” $D$ – étant entendu déjà que la notion plus délicate de “dérivateur” s’en déduit en imposant quelques axiomes bien naturels, dont je te donnerai la liste si tu me la demandes. Pour développer une algèbre des dérivateurs (et tout d’abord, des prédérivateurs), il faut d’abord se fixer un “*domaine*” commun pour ceux qu’on va envisager, c’est-à-dire, une sous-catégorie pleine Diag de Cat. Le cas qui a ma préférence maintenant est celui ou Diag est Cat tout entier, auquel cas j’interprète un dérivateur comme étant une sorte de “théorie de coefficients” (homologiques ou cohomologiques ou homotopiques, tout cela est pareil) sur Cat, catégorie visualisée comme une catégorie d’objets de nature géométrique et spatiale, comme des “espaces” à proprement parler, bien plus que comme de nature algébrique ; tout comme les anneaux commutatifs (via leurs spectres) et les schémas qu’on construit avec eux, sont pour moi des objets géométrico-topologiques par essence, et nullement algébriques. (L’algèbre étant seulement un intermédiaire pour atteindre à la vision géométrique, qui elle est l’essentiel.) Un cas plus ou moins extrême opposé est celui où Diag est la catégorie des ensembles ordonnés finis, voire même (à la rigueur) une catégorie plus restreinte encore. Mais pour être vraiment à l’aise, il faudra supposer tôt ou tard que la catégorie Diag (des “catégories d’indices” ou des “types de diagrammes”, pour les dérivateurs considérés) soit stable par les constructions courantes sur les catégories : produits finis, sous-catégories, sommes amalgamées, voire même catégories Hom ; et aussi bien sûr par passage à la catégorie opposée, particulièrement fréquent pour passer d’un énoncé à un énoncé dual, notamment. Quand il ne s’agit que d’avoir un prédérivateur, dans tous les cas à ma connaissance on peut prendre comme domaine Cat tout entier. C’est quand il s’agit de vérifier les axiomes assez draconiens des dérivateurs, seulement, qu’on peut être forcé à restreindre considérablement le domaine comme j’ai évoqué, ou sinon, tout au moins, les flèches $u : X \longrightarrow Y$ qu’on envisage dans Cat, lorsqu’il s’agit de travailler non seulement avec le foncteur correspondant d’image inverse $u^*$, mais aussi avec les images directes $u_!$ et $u_*$. Mais là j’anticipe…

Au sujet du domaine, je voudrais encore ajouter qu’à mes yeux le domaine Cat ne représente nullement la portée ultime d’un dérivateurs donnée. Celui-ci, et plus généralement un prédérivateur $D$, étant défini comme un 2-foncteur entre

2-catégories

$$D : \mathrm{Diag}^{\circ} \longrightarrow$$

(où  désigne la catégorie des $\mathfrak{U}$-catégories contenues ($\subset$) dans l'univers de référence $\mathfrak{U}$, toujours sous-entendu, alors que Cat désigne la catégorie des "petites" catégories, i.e. de celles qui son éléments de $\mathfrak{U}$), il résulte (d'ailleurs de façon nullement tautologique) des axiomes des dérivateurs (que je n'explicite pas ici) que la catégorie $D(X)$ (des "coefficients de type $D$ sur $X$") associée à une petite catégorie $X$, *ne dépend à équivalence près que du topos défini par* $X$, donc que de la catégorie $X^{\wedge} = \mathrm{Hom}(X^{\circ}, \mathrm{Ens})$ des préfaisceaux d'ensembles sur $X$. Plus précisément, si $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche dans Cat, alors le foncteurs "image inverse" pour les coefficients de type $D$

$$f^{*} : D(Y) \longrightarrow D(X)$$

est une équivalence de catégories, pourvu que le foncteur similaire $Y^{\wedge} \longrightarrow X^{\wedge}$ (qui correspond à un dérivateurs particulièrement important sur Cat...) soit une équivalence de catégories; c'est-à-dire encore pourvu que $f$ soit pleinement fidèle et que tout objet de $Y$ soit facteur direct d'un objet de la forme $f(x)$ (ou encore, que $f$ induise une équivalence entre les "enveloppes de Karoubi" de $X$ et de $Y$). Cela implique aussi, quand  est égal à Cat tout entier, que l'on peut regarder $D$ comme provenant d'un 2-foncteur

$$^{\circ} \longrightarrow$$

allant de la 2-catégorie des topos "catégoriques" (i.e. équivalentes à un topos provenant d'un $X$ dans Cat) dans la catégorie . Ceci vu, on peut espérer étendre le dérivateur, c'est-à-dire la théorie de coefficients envisagée, à la catégorie Top des topos tout entière, i.e. en un foncteur (qu'on notera encore $D$)

$$D : \mathrm{Top}^{\circ} \longrightarrow .$$

J'ai idée que ça doit être toujours possible, et de façon essentiellement unique. Ça l'est en tous cas dans tous les cas concrets que j'ai regardés. Si par exemple $D$ est le dérivateur (abélien) défini par une catégorie abélienne via la catégorie des complexes et la notion de quasi-isomorphisme, on trouve pour tout topos $X$ (supposant que la catégorie soit celle des $k$-modules, où $k$ est un anneau quelconque) la catégorie $\mathrm{D}(X,k)$ dérivée de celle des $k$-modules sur $X$, et celle $\mathrm{D}(X,k)$ dépend bien de façon contravariante de $X$. Il est vrai que quand il s'agit de définir les lois *covariantes* $f!$ et $f_*$, plus exactement d'en établir l'existence, on bute sur le cas de $f_!$, cet $f_!$ n'existe que moyennant des hypothèses draconiennes sur $f$. (De toutes façons, j'escroque un peu ici, faute d'avoir explicité des restrictions sur les degrés des complexes, genre $\mathrm{D}^+(X,k)$ ou $\mathrm{D}^-(X,k)$, Mais ce n'est par le lieu ici d'entrer dans des technicalités.)

Pour ce qui est des axiomes pour les dérivateurs, le plus essentiel de tous est l'existence, pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans Diag, des foncteurs $f_!$ et $f_{:D(X)\longrightarrow D(Y)}$, adjoints à gauche et à droite de $f^*$. Ainsi, pour développer (dans la catégorie de base, disons) la théorie de la *suite exacte de suspension*, c'est de l'existence de $f_!$ qu'on a besoin, et il suffit pour cela que Diag contienne les ensembles ordonnés finis (et même nettement moins, si on y tient). Mais je signale que les suites canoniques qu'on construit ainsi à l'aide du seul foncteur $f_!$ et sous l'hypothèse que le dérivateur soit "ponctué" (*i.e.* les $D(X)$ ponctués et les foncteurs $f$ compatibles avec les objets neutres), ne sont exactes que moyennant un "axiome d'exactitude" (à gauche) convenable, faisant partie de la poignée des axiomes d'un dérivateur ; et dualement pour la suite exacte de cosuspension. Ces constructions sont valables d'ailleurs non seulement dans toute catégorie $D(e)$, mais aussi comme de juste dans les $D(X)$, pour $X$ dans Diag. (En fait, $D(X)$ peut être considéré comme la catégorie de base d'un "dérivateur induit" $D_X : Y \mapsto D(X \times Y)$, auquel on peut appliquer les résultats généraux. Les axiomes des dérivateurs sont tels qu'ils sont stables par passage d'un dérivateur à un dérivateur induit.) Ceci suggère de dissocier les notions de "dérivateur à gauche" (postulant l'existence des images directes homologiques $f_!$, à l'exclusion des images directes cohomologiques $f$), de "dérivateur à droite" incluant l'aspect dual du formalisme homotopique. Mais je signale tout de suite que certaines propriétés des dérivateurs qui me paraissent importantes, et même quand leur énoncé ne fait appel qu'à une des deux structures gauche ou droite, sont établies en utilisant l'existence des deux covariances à la fois.

Pour terminer ces généralités sur la notion de dérivateur, je voudrais souligner qu'il est essentiel, dans la notion de prédérivateur (qui est la donnée de base unique), que $D : \mathrm{Diag} \longrightarrow$ est bien un 2-foncteur, et non seulement un foncteur ;

en d'autres termes, il faut se donner non seulement les $D(X)$ pour $X$ dans Diag, et les $f^* = f_D^* = D(f)$ pour les flèches $f : X \longrightarrow Y$, mais pour une flèche $u : f \longrightarrow f'$ entre deux flèches $f, f' : X \longrightarrow Y$ , il faut se donner un homomorphisme foncto-riel

$$u^* : f'^* \longrightarrow f^*$$

(avec des indices $D$ s'il y a risque de confusion). Il faut bien voir que, conceptuellement très simple et évidente (et pour cette raison sans doute, méprisée par le "mathématicien sérieux" comme du "*general nonsense*"), la donnée d'un 2-foncteur entre 2-catégories est une espèce de structure très délicate, d'un genre apparemment nouveau en maths ; et qu'on le veuille ou non, c'est bien cette espèce de structure, et elle seule, qui cerne finement les aspects essentiels, c'est-à-dire intrinsèques (indépendants de la catégorie de modèles particulière choisie, 'à des fins calculatoires, pour décrire le dérivateur) du formalisme homologico-homotopique ; lequel est dans son essence dernière (si je ne me trompe beaucoup) un formalisme de variance de "coefficients". Tout comme la dualité de Poincaré classique m'a mené vers le formalisme des six opérations (ou "variances") valable tant dans le contexte des espaces topologiques, que celui des schémas ou des espaces analytiques (et dans bien d'autres encore, comme Cat, j'en suis à présent persuadé), formalisme qui à mon sens (et si je ne fais erreur) en capte l'essence ultime et en quelque sorte universelle, indépendante de toute hypothèse de non-singularité, *etc*.

Pour stimuler l'intuition habituée à des contextes d'homologie ou de cohomologie familiers, j'ai trouvé utiles des notations du type suivant, pour un dérivateur donné $D$. Si $X$ est dans Diag, et si $\xi$ est un $D$-coefficient sur $X$, i.e. un objet de $D(X)$, je dénote par

$$\mathrm{H}_\bullet^D(\xi) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_D^\bullet(\xi)$$

("*objets d'homologie et de cohomologie de $X$, à coefficients dans $\xi$*") les objets $p_!(\xi)$ et $p_*(\xi)$ respectivement, objets dans la catégorie de base $D(e) = A_D$ de $D$, où $p : X \longrightarrow e$ est la flèche structurale canonique. Plus généralement, si $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche dans Diag, les images de $\xi$ par les deux images directes peuvent être notées

$$\mathrm{H}_\bullet^D(f,\xi) \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}_\bullet^D(X/Y,\xi), \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_D^\bullet(f,\xi) \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}_D^\bullet(X/Y,\xi),$$

c'est l'*homologie* resp. la *cohomologie relative de $X$ au-dessus de $Y$*, à coefficients dans $\xi$. On peut laisser tomber l'indice ou l'exposant $D$, quand aucune confusion n'est à craindre. Par ailleurs, je me suis laissé guider par les intuitions et les réflexes acquis tout au long du développement des SGA, pour développer dans le contexte de Cat (pour commencer) la panoplie des propriétés "cohomologiques" essentielles d'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat, relativement à un dérivateur, c'est-à-dire à une "théorie de coefficients", donné. Mais c'est là quelque chose dont je te parlerai à propos de Cat une autre fois, si tu es intéressé.

## 3. Prédérivateur défini par une catégorie de modèles, et problème d'existence de $f_!$, $f_*$.

La plupart des dérivateurs que je connais sont définis à l'aide de catégories de modèles $(M, W)$. Une telle catégorie définit en tous cas un prédérivateur sur Cat tout entier, en posant

$$D_{(M,W)}(X) = M(X)(W(X))^{-1},$$

où je désigne maintenant par

$$M(X) \overset{\text{def}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(X^\circ, M)$$

la catégorie des préfaisceaux sur $X$ à valeurs dans $M$ (donc celle des "diagrammes de type $X^\circ$", et non de type $X$, dans $M$), et $W(X)$ l'ensemble des flèches dans cette catégorie, qui "sont dans $W$ argument par argument". La loi de 2-foncteur contravariant de $D(X)$ en $X$ est claire. Quand $W$ est l'ensemble des isomorphismes dans $M$, j'écris aussi $D_M$ au lieu du double indice. C'est un cas qu'on peut considérer comme "trivial", mais qui pour autant ne manque pas d'intérêt. Ainsi, $D_M$ est un dérivateur (satisfaisant à tous les axiomes), pourvu seulement que $M$ soit stable par petites limites inductives et projectives (les unes assurant l'existence des $f_!$, les autres celle des $f_*$). Dans le cas où $M = \text{Ens}$, on trouve $D(X) = X^\wedge$, c'est là un dérivateur important à mes yeux (si trivial soit-il), et les propriétés "cohomologiques" des flèches de Cat, relativement à ce dérivateur, ne sont nullement choses triviales. Dans le cas où $W$ est quelconque, je note aussi $D_W$ au lieu du double indice, il est rare qu'une confusion soit à craindre. La question principale qui se pose alors, c'est bien sûr celle de l'existence des foncteurs $f_!$ et $f$. Contrairement à toi, je n'ai aucun scrupule ici à supposer la catégorie $M$ stable par tous les types de limites dont on a besoin, donc (si on veut travailler sur Cat tout entier) stable par petites limites inductives et projectives. Je ne serais pas étonné qu'il y ait un théorème qui assure que tout dérivateur sur Cat peut se décrire à l'aide d'une telle catégorie de modèles (à équivalence de dérivateurs près), ou du moins comme limite inductive filtrante de tels dérivateurs. J'entrevois dans ces grandes lignes, une "algèbre des dérivateurs" (consistant en un certain nombre d'opérations fondamentales au sein de la 2-catégorie de tous les dérivateurs, sur Cat disons comme domaine), laquelle serait le reflet d'opérations algébriques de nature similaire, qui s'effectuent au niveau des catégories de modèles. J'ai comme une impression, par une allusion dans ta lettre du mois de janvier, que tu as quelque idée ou intuition de ce genre de structures, et on pourra en reparler. Mais je souligne tout de suite que pour moi, le véritable objet d'opérations au niveau des catégories de modèles, c'est d'obtenir des opérations sur les dérivateurs (ou les prédérivateurs, pour commencer) associés.

À ce sujet, une remarque au sujet de la fonctorialité du prédérivateur associé à une catégorie de modèles $(M, W)$. Il est clair qu'on obtient un 2-foncteur

$$(*) \qquad \longrightarrow$$

allant de la 2-catégorie des catégories de modèles (ce n'est d'ailleurs pas une $\mathfrak{U}$-catégorie, si on ne fait des restrictions sur les catégories envisagées et sur les foncteurs admis, en plus d'être compatibles aux localiseurs). Mais si on a deux catégories de modèles, il y a lieu d'introduire dans la catégorie

$$\underline{\mathrm{Hom}}((M, W), (M', W')) \quad \text{ou} \quad \underline{\mathrm{Hom}}(M, M')$$

(cette dernière notation, si les localiseurs $W$, $W'$ sont sous-entendus dans les notations $M, M'$) un localiseur bien naturel $W_{M,M'}$, formé des morphismes $u : F \longrightarrow G$ entre morphismes de catégories de modèles $F$, $G$, tels que $u(x) : F(x) \longrightarrow G(x)$ soit dans $W'$, pour tout $x$ dans $M$. Appelons-les les "*quasi-isomorphismes*" (*relatifs aux localiseurs* $W$, $W'$). Il est clair que les quasi-isomorphismes sont transformés en isomorphismes par le 2-foncteur précédent, donc en passant à la catégorie des fractions, on trouve un foncteur (déduit de $(*)$)

$$(**) \qquad H(M, M') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(D_M, D_{M'})$$

où dans la notation il est sous-entendu que $M$ et $M'$ sont munis de leurs localiseurs $W$, $W'$. Ainsi, les catégories de modèles peuvent être regardées à présent comme les 0-objets d'une 2-catégorie, dont les catégories de flèches sont les catégories localisées $H(M,M')$ précédentes, et on trouve un 2-foncteur canonique de cette 2-catégorie, que j'ai envie d'appeler catégorie dérivée (?) de la catégorie des catégories de modèles, et de noter , dans celle des prédérivateurs, au moyen des foncteurs $(**)$ :

$$(***) \qquad \longrightarrow .$$

Le point auquel je veux en venir est le suivant : si $M$ et $M'$ sont deux catégories de modèles qui sont équivalentes en tant que 0-objets de cette 2-catégorie, alors les prédérivateurs associés sont équivalents, donc à toutes fins pratiques, peuvent être identifiés (du moins, quand l'équivalence initiale est donnée). Ceci (et bien sûr d'innombrables exemples) illustre à quel point une catégorie de modèles est un objet "encombrant" (si j'ose dire), encombré d'aspects inessentiels, en comparaison avec le dérivateur associé, qui à mes yeux représente sa quintessence du point de vue "homotopique" ou "cohomologique". Un peu comme la donnée d'une base pour un espace vectoriel, ou d'un système de générateurs et de relations pour un groupe, ou un système d'équations pour une variété[1]. Il n'y a aucun inconvénient à travailler avec ces "superstructures", et bien souvent on ne peut même s'en passer. Il est cependant important, pour une compréhension en profondeur, de ne pas pour autant laisser brouiller et perdre de vue les objets géométriques essentiels (espace vectoriel, groupe, variété, dérivateur) et leur caractère intrinsèque.

J'ignore s'il est raisonnable de s'attendre, pour le 2-foncteur précédent (), à des propriétés de fidélité, ou de surjectivité essentielle, en limitant au besoin les catégories de modèles envisagées, de façon par exemple à assurer qu'elles donnent

[1]Une première comparaison qui m'était venue (elle s'est perdue en route) me paraît plus frappante : la relation entre catégorie de modèles et dérivateur associé, s'apparente pour moi à celle entre un complexe dans une catégorie abélienne, et l'objet correspondant dans la catégorie dérivée. Et l'effort conceptuel qu'il m'avait fallu faire pour parvenir à la notion de catégorie dérivée, s'apparente un peu à celui (plus modeste à mon sens) que les gens devront fournir un jour pour accéder à la notion de dérivateur et au "yoga des dérivateurs" – lequel ne s'acquiert qu'en travaillant avec !

naissance à des dérivateurs, et non seulement des prédérivateurs. Cela fait partie en tous cas des questions qu'on devra bien examiner un jour (dans ce monde-ci, s'il en est temps, ou sinon dans l'autre…). J'avoue que jusqu'à présent, mon intuition des dérivateurs s'est beaucoup appuyée sur le formalisme des catégories de modèles.

Mais il me faut revenir sur le cas où on se donne une catégorie de modèles fixe $(M, W)$, et sur la grande perplexité de l'existence des foncteurs $f_!$ et $f_*$. Techniquement parlant, c'est là, visiblement, une des questions les plus cruciales qui se posent pour le développement de l'algèbre topologique, telle que je l'envisage. Or pour cette question fondamentale, je n'ai que des éléments de réponse bien fragmentaires, et manifestement insatisfaisants (et sans doute aussi insuffisants à la longue). Prenant le cas où Diag est égal à Cat : j'avoue (à ma honte !) que je n'ai pas même construit d'exemple d'une catégorie de modèles, stable par petites limites (inductives et projectives), et telle que les foncteurs $f_!$ et $f$ n'existent pas pour toute flèche $f$ dans Cat, pour le prédérivateur associé. Je ne m'attends nullement d'ailleurs à ce qu'ils existent toujours, même si on fait des hypothèses du type : $W$ stable par limites inductives filtrantes, et la catégorie $M$ accessible et $W$ une partie accessible de $\mathrm{Fl}(M)$ (hypothèses qui me paraissent relativement anodines). D'autre part, je n'ai pu prouver l'existence de ces foncteurs que dans des cas extrêmement particuliers, que je renonce à expliciter dans cette lettre (devenue prohibitivement longue). Je ne connais pas un cas où je sache l'établir, sans supposer tout au moins que la catégorie de modèles est associée à un triple de Quillen clos (et plus encore) ! La situation est quand même meilleure si on est moins exigeant et prend comme domaine Diag (disons) la catégorie des ensembles ordonnés finis. À ce moment-là, il suffit que $W$ soit associé à une catégorie à cofibrations (pour avoir $f_!$) ou à fibrations (pour avoir $f$), sans qu'il soit nécessaire d'ailleurs (pour avoir bel et bien un dérivateur) que ces deux structures duales soient reliées entre elles autrement que par le localiseur commun $W$.

C'est le moment de dire que le travail de Anderson (dont tu m'as envoyé une photocopie), où il prétend donner une esquisse d'un théorème très général en ce sens (qui aurait en effet comblé mes vœux !), est totalement canulé – même déjà dans le cas d'un ensemble ordonné fini $I$, et du morphisme structural $I \longrightarrow e$, i.e. pour l'existence des  ordinaires sur $I$. Sa soi-disant idée de démonstration déconne en deux endroits qui me paraissent essentiels, et je doute fort qu'elle soit récupérable, bien que je n'aie pas de contre-exemple au théorème qu'il énonce, et dont il ne daigne pas même donner une démonstration. Ayant regardé ce travail (si on peut l'appeler ainsi) avec attention, je suis heureux qu'il ne soit pas de toi – il me fait grincer des dents du début à la fin, et plus que ça. Je ne le regrette pas, car si je n'ai guère appris de maths en le lisant, j'y ai appris autre chose de moins facile et de moins réjouissant que les maths, et plus important.

Je suis d'ailleurs ébahi que dix ans se soient passés depuis cet article, sans que personne apparemment ne s'aperçoive qu'il ne tient pas debout. Visiblement, ce théorème, c'était comme une pièce de musée, une prouesse pour rien – personne n'en avait rien à foutre. Même chez des plus "cotés" que lui, les théorèmes souvent, ce n'est plus une porte ouverte sur quelque chose, qu'on n'avait pas vue avant et qu'on voit, ni même un outil pour forcer les portes qu'on n'arrive à ouvrir en douceur – mais un trophée. Peu importe alors qu'il soit vrai ou faux – ça ne fait strictement plus aucune différence…

Sauf si tu as besoin de précisions, je crois inutile que j'entre dans des détails – tu es bien capable de trouver tout seul où ça foire (sur l'air du "il est évident que"…). Et de plus, il est temps que je m'arrête, bien que je ne sois pas parvenu encore à ce qui, techniquement, était prévu comme substance principale de ma lettre : le "théorème de factorisation", et son application à des théorèmes de stabilité pour des structures de Quillen. Ce sera donc sans doute pour ma prochaine lettre, si tu es intéressé à continuer cette correspondance. Auquel cas je serai très heureux de t'avoir comme interlocuteur de mes cogitations !

En attendant, reçois mes amitiés

# LETTRE À A. Y.
24.6.1991

---

- [scan]

Les Aumettes, le 24.6.1991

Cher Monsieur,

Excusez-moi d'avoir mis si longtemps à réagir à votre longue et sympathique lettre (du 25 mai), ayant été très accaparé par des tâches et préoccupations extra-scientifiques. Cela n'a pas empêché que j'ai été sensible au souffle d'un enthousiasme et à la faculté d'émerveillement qui transparaissait derrière les explications $\pm$ techniques. Je dois vous avouer que vu ma très grande ignorance en physique, ces explications m'ont passé totalement par dessus la tête. Aussi j'ai bien peur que ma réponse vous laissera sur votre faim. Visiblement, il faut des yeux totalement neufs, et un flair consommé pour l'"invention" (en fait, la découverte) de structures mathématiques (au service d'intuitions à la fois physiques et philosophiques) pour dégager les notions de base et forger les outils conceptuels d'une physique nouvelle. Avez-vous ces grands dons, et la foi en votre "voix intérieure", pour démarrer à neuf, à contre-courant de toutes les idées reçues, pour une œuvre de rénovation plus radicale encore, peut-être, que celles qui furent accomplies par Einstein et par Schrödinger?

Avez-vous le courage pour faire un tel pari – voilà la question! Sans autre guide que votre bon sens d'enfant, et votre flair, pour un long voyage sans perspective de compagnons de route… Pour que je puisse être d'un réel secours pour un tel voyage dans l'inconnu, il y faudrait d'une part un investissement que je ne suis plus disposé à fournir – ne serait-ce que pour me mettre au courant dans les grandes lignes au moins des bases conceptuelles de la physique théorique actuelle, de ses cohérences et de ses incohérences. Malheureusement, je ne connais non plus aucun mathématicien que me paraîtrait apte au rôle de coéquipier dans un tandem physico-mathématique pour le genre de travail qu'il y aurait à faire (et auquel j'ai rêvé plus d'une fois!)

Il est vrai qu'au cours des dix dernières années, j'ai réfléchi ici et là à diverses extensions de la notion d'espace, en gardant à l'esprit la remarque pénétrante de Riemann. J'en parle dans quelques lettres à des amis physiciens ou "relativistes". Il ne doit pas être très difficile p. ex. de développer une sorte de calcul différentiel sur des "variétés" qui seraient des ensembles finis (mais à cardinal "très grand"), ou plus généralement discrets, visualisés comme formant une sorte de "réseau" très serré de points dans une variété $C^\infty$ (p. ex. une variété riemannienne) – une sorte de géométrie différentielle "floue", où toutes les notions numériques sont définies seulement "'a $\varepsilon$ près", pour un ordre d'approximation $\varepsilon$ donné. Comme prédit par Riemann, une telle géométrie différentielle floue, par la force des choses, serait nettement plus délicate et compliquée que la géométrie différentielle ordinaire. Mais peut-être pas *tellement* plus compliquée ! Dans cette approche, le point faible à présent, c'est qu'il ne semble pas que la physique nous fournisse quelque idée de "quanta" d'espace-temps, qui seraient les "points" d'une telle variété discrète. (Il est vrai que lorsque fut formulée et progressivement admise au siècle dernier, "l'hypothèse atomiste", on n'en savait guère plus sur ces fameux atomes que qu'ils pourraient peut-être exister...) Je suspecte que les nouvelles structures à dégager seront beaucoup plus subtiles qu'un simple paraphrase de modèles continus connus en termes discrets[1]. *Et surtout, qu'avant toute tentative de dégager des nouveaux modèles, présmés meilleurs que les anciens, il s'impose de poursuivre une réflexion philosophico-mathématique très servie sur la notion même de "modèle mathématique" de quelque aspect de la réalité – sur son rôle, son utilité, et ses limites.*

Je crains que je ne puisse guère vous en dire plus que ces commentaires généraux. S'ils pouvaient pourtant vous être utiles de quelque façon – ne serait-ce que pour vous encourager dans votre aventure solitaire – j'en serais très heureux. Avec mes meilleurs souhaits

Alexandre Grothendieck

[1]l n'est pas exclu pourtant que ce qui pouvait sembler initialement un simple exercice de "paraphrase" de notions bien connues dans un contexte conceptuel nouveau, amène, par la logique intérieure de la recherche, à des concepts totalement nouveaux et inattendus. (C'est là une chose qui n'est pas rare dans le travail de découverte des structures mathématiques.) Il faut des années de tâtonnement, sans doute, avant que des intuitions éparses finissent par s'assembler en une vision d'ensemble

# Undated

# CATÉGORIES TANNAKIENNES

- [scan]

# CATÉGORIES TANNAKIENNES
à partir de 1958

## Catégories tannakiennes définies par des cristaux

**1.** — Soit $k$ un corps de car. $p > 0$, qu'on regarde comme algèbre sur $\mathbf{Z}_p$, dont l'idéal maximal est muni de puissances divisées. Cela donne un sens au site cristallin de $k$ (sur $\mathbf{Z}_p$, qualifié aussi de "absolu"), et aux Modules loc. libres de type fini (resp. de présentation finie), sur ledit, qu'on appellera aussi cristaux en modules (localement libres resp. de présentation finie) sur $k$ Ces cristaux forment une $\otimes$-catégorie $\mathbf{Z}_p$-linéaire. On peut expliciter cette catégorie à l'aide d'un $p$-anneau $W$ de corps résiduel $k$, comme la catégorie des modules libres de type fini

**2.** —

**3.** —

## 4.

La catégorie tannakienne Fcriso($k$) est un invariant arithmétique intéressant attaché à $k$ (fonctoriellement) ; sa connaissance équivaut à celle de la gerbe associée (sur $\mathbf{Q}_p$), soit $\mathbf{G}(k)$ ?

## 5. $F$-cristaux de pente nulle

On définira plus loin la *pente* d'un $F$-cristal "homogène". Ici, nous allons introduire directement les $F$-cristaux de pente nulle

## 6.

Considérons maintenant un homomorphisme de corps

$$k \longrightarrow k',$$

d'où un homomorphisme de catégories tannakiennes sur $\mathbf{Q}_p$

## 7.

## 8.

## 9.

Pour $k$ quelconque, on trouve un $\otimes$-homomorphisme canonique défini à isomorphisme unique près (on utilise un choix d'une clôture algébrique $\overline{k}$ de $k$, mais ce choix est inessentiel…)

## 10. Cas $k$ fini

# FILTRATIONS SUR FONCTEURS FIBRES POUR CATÉGORIES TENSORIELLES

- [scan]

# FILTRATIONS SUR FONCTEURS FIBRES POUR CATÉGORIES TENSORIELLES

à partir de 1958

# QUELQUES EXEMPLES DE CATÉGORIES TENSORIELLES

- [scan]

# QUELQUES EXEMPLES DE CATÉGORIES TENSORIELLES
Notes Saavedra
à partir de 1958

1) Soit $M$ un groupe. Soit $\mathscr{C}_M$ la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps $k$, munis d'une graduation de type $M$. C'est une catégorie tensorielle sur $k$, munie d'un foncteur fibre sur $k$, le foncteur "oubli de la graduation". Le groupe algébrique associé est le groupe de type multiplicatif $D_k(M)$ (SGA 3 I 4.7.3). Par exemple si $M = \mathbf{Z}^r$, on trouve $G = \mathbf{G}_m^r$.

Application : Soit $\mathscr{C}$ une catégorie tensorielle sur $k$ munie d'un foncteur fibre $F$ sur $k$, donc associée à un schéma en groupes affine $G$ sur $k$. On cherche toutes les façons de mettre, pour chaque $M \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, une graduation de type $M$ sur $F(V)$, de façon fonctorielle en $M$, et compatible (dans une sens évident) avec les produits tensoriels. Elles correspondent aux $\otimes$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}_M$ compatibles avec les foncteurs fibres, donc aux homomorphismes de $D_k(M)$ dans $G$. Par exemple, si $M = \mathbf{Z}^r$, il faut prendre les homomorphismes de $\mathbf{G}_m^r$ dans $G$.

Dans la situation précédente, on peut se demander quand une $\otimes$-graduation de type $M$ du foncteur $F$ correspond à une graduation de type $M$ du foncteur identique de $\mathscr{C}$, i.e. pour tout $V$, la graduation de $F(V)$ provient d'une graduation de $V$. On trouve qu'il faut et il suffit pour cela que l'homomorphisme correspondant $D_k(M) \longrightarrow G$ soit central. Par exemple, si $\mathscr{C}$ est la catégorie des motifs sur $k$, et si on dispose d'un foncteur fibre $F$ de $\mathscr{C}$ sur $k$, alors on trouve un homomorphisme central canonique $i : \mathbf{G}_m \longrightarrow G$. D'ailleurs, la donnée du motif de Tate (qui est de rang 2, et de “poids” 2 pour la graduation naturelle) correspond à la donnée d’un homomorphisme $j : G \longrightarrow \mathbf{G}_m = \mathrm{Gl}(l)$. Le fait que $T$ soit de poids 2 s’exprime par la relation

$$j\,i(\lambda) = \lambda^2.$$

Lorsque $k$ est de caractéristique nulle, on a toujours un foncteur fibre naturel : le *foncteur de Hodge*, qui à la cohomologie motivique d’une variété (projective lisse) $X$ associe le vectoriel bigradué $\amalg \mathrm{H}^q(X, \underline{\Omega}^p_{X/k})$. Donc pour le groupe de Galois motivique correspondant $G$, on trouve un homomorphisme naturel

$$\mathbf{G}_m^2 \longrightarrow G,$$

i.e. deux homomorphismes commutant l’un à l’autre

$$i_1, i_2 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G.$$

Le fait que la graduation totale dans la cohomologie de Hodge corresponde au poids des motifs s’exprime par la relation

$$i(\lambda) = i_1(\lambda) i_2(\lambda);$$

on fera attention que $i_1$ et $i_2$ ne sont pas centraux (car la bigraduation en cohomologie de Hodge ne correspond pas à une bigraduation d’un motif !))

2) Prenant toujours pour $\mathscr{C}$ la catégorie des motifs sur $k$, avec $k$ de car. nulle, on a un autre foncteur fibre canonique, le *foncteur de De Rham* qui associe à la cohomologie motivique d’une variété $X$ le vectoriel $\mathrm{H}^*(X, \Omega^*_{X/k})$ (espace d’hypercohomologie). Ce vectoriel n’est plus bigradué mais seulement gradué et filtré, la filtration étant celle associée à la suite spectrale d’hypercohomologie, commençant avec la cohomologie de Hodge. On sait d’ailleurs que cette suite spectrale dégénère (théorie de Hodge), donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}(V)) \simeq \mathrm{H}_{\mathrm{Hdg}}(V)$ (isomorphisme fonctoriel en le motif $V$). On peut se proposer d’analyser à quelle structure supplémentaire, sur le groupe de Galois motivique associé au foncteur fibré $\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}$, correspond la filtration canonique de ce foncteur.

De façon générale, étant donné une catégorie tensorielle $\mathscr{C}$ sur $k$ munie d'un foncteur fibre $F$, on peut se proposer de déterminer les filtrations sur $F$ (décroissantes, discrètes, indexées par $\mathbf{Z}$) compatibles avec les produits tensoriels (en utilisant la notion évidente de produit tensoriel de deux espaces vectoriels filtrés). On notera qu'une telle donnée ne pourra plus s'exprimer par un homomorphisme d'un certain groupe algébrique dans $G$ (le groupe de Galois de $\mathscr{C}$ en $F$), car la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur $k$, munis d'une filtration décroissante discrète indexée par $\mathbf{Z}$, n'est pas une catégorie abélienne (les bimorphismes ne sont pas des isomorphismes). Mais à une telle donnée est associée un deuxième foncteur fibre $F(V) = \mathrm{Gr}\, F(V)$, à valeurs cette fois-ci dans les vectoriels gradués (NB $F$ joue le rôle de la cohomologie de De Rham, $F'$ celle de la cohomologie de Hodge, muni de la graduation par). La donné de $F'$ correspond à un homomorphisme $i_1 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G'$. Considérons alors sur $F'$ la filtration décroissante associée à sa graduation, et soit $\mathrm{H}'_{i_1} = \underline{\mathrm{AutFilt}}^!(F') \subset \underline{\mathrm{Aut}}(F') = G'$ le sous-schéma en groupes de $G$ qui correspond aux $\otimes$-automorphismes de $F'$ (ou plutôt des $F'_{k'}$, $k'$ une $k$-algèbre quelconque) qui respectent sa filtration et induisant l'identité sur le graduée associée ; il est canoniquement déterminé par $i$. On peut aussi regarder le sous-schéma

$$Q = \underline{\mathrm{IsomFilt}}^!(F, F') \subset P = \underline{\mathrm{Isom}}(F, F')$$

du schéma $P$ des $\otimes$-isomorphismes de $F$ avec $F'$, qui correspond aux automorphismes respectant les filtrations de $F$ et $F'$ et induisant l'identité sur les graduées associées. C'est à priori un pseudo-foncteur à gauche sous $H'$, i.e. il est vide ou un torseur à droite sous $H'$. **Il faudrait prouver** que c'est bien un torseur (i.e. que sur une extension convenable $k'$ de $k$, on peut trouver un isomorphisme de $F_{k'}$ avec $F'_{k'}$ *respectant les filtrations*). Donc on trouve une restriction du groupe d'opérateurs (à gauche) $G'$ de $P$ au sous-groupe $H'$, par un $H'$-torseur à gauche $Q$.

Moyennant la vérification laissé en suspens à l'instant, on trouve alors que la donné d'un "foncteur fibre *filtré*" $F$ de $\mathscr{C}$ sur $k$ revient à la donnée

(i) D'un foncteur fibre $F'$ (d'où un groupe de Galois $G' = \underline{\mathrm{Aut}}(F')$) ;

(ii) D'une graduation de type $\mathbf{Z}$ de $F'$, i.e. un homomorphisme

$$i_1 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G',$$

(iii) D'un torseur à gauche $Q'$ sous $\mathrm{H}'_{i_1}$.

A ces données, on associe simplement le foncteur fibre tordu

$$F = F' \bigwedge^{\mathrm{H}'_{i_1}} Q',$$

$F$ étant filtré par la filtration déduite de celle de $F'$ (associée à la graduation de $F'$) en tordant par $Q'$.

On constate aisément que le groupe $\mathrm{H}'$ est nécessairement une limite projective de groupes algébriques *unipotents*. On en conclut aussitôt que si $\mathscr{C}$ est à engendrement fini (ou, plus généralement, à engendrement dénombrable, de façon que $G'$ donc aussi $\mathrm{H}'$ soit limite projective d'une *suite* de groupes algébriques) alors tout torseur sous $\mathrm{H}'$ est trivial ; cela signifie ici que tout foncteur fibre filtré est en fait associé à un foncteur fibre gradué (en prenant la filtration correspondant à la graduation) i.e. que la filtration dudit foncteur admet un splittage compatible avec les produits tensoriels. Mais le choix d'un tel splittage équivaut à celui d'un point sur un certain torseur à droite $Q = Q'$ sous le schéma en groupes $H$ des automorpismes de $F$ respectant la filtration et induisant l'identité sur le gradué associé ; il n'est pas du tout canonique !

3) Appelons *pré-structure de Hodge* sur un espace vectoriel $V$ de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, la donnée d'une bigraduation sur $V \otimes_{\mathbf{Q}} C = V_C$, $V_{\mathscr{C}} = \amalg_{p,q} V^{p,q}$, telle que a) la graduation totale correspondante soit "définie sur $\mathbf{Q}$" i.e. $\amalg_{p+q=n} V^{p,q}$ provienne d'un sous espace $V^n_{\mathbf{Q}}$ de $V$, et b) on a $\overline{V}^{p,q} = V^{q,p}$, où $x \mapsto \overline{x}$ désigne la conjugaison complexe. (NB Généralisation à des corps plus généraux laissée à Saavedra). Les vectoriels $V$ munis d'une pré-structure de Hodge forment une catégorie tensorielle sur $\mathbf{Q}$ dans un sens évident, muni d'un foncteur fibre canonique, le foncteur 'oubli" $F$. On trouve donc un groupe de Galois $G$, et plus généralement toute $\otimes$-sous-catégorie $\mathscr{C}$ d la catégorie précédente nous définit un groupe de Galois $G$. La bigraduation sur le foncteur $F_{\mathscr{C}}(V) = V \otimes_Q \mathscr{C}$ correspond, en vertu de 1) (où il convient cependant de se permettre une extension du corps de base sur le foncteur fibre envisagé…) d'un homomorphisme $\mathscr{G}^2_{mC} \longrightarrow G_{\mathscr{C}}$, i.e. de deux homo-

morphismes qui commutent

$$i_1, i_2 : \mathscr{G}_{mC} \longrightarrow G_{\mathscr{C}}.$$

Les deux conditions a) et b) imposées aux structures envisagées s'interprètent respectivement par les faits que l'homomorphisme

$$i_{\mathscr{C}} = i_1 i_2 : \lambda \mapsto i_1(\lambda) i_2(\lambda)$$

est "défini sur **Q**" i.e. provient d'un homomorphisme

$$i : \mathbf{G}_m \longrightarrow G,$$

(nécessairement central, car las composantes homogènes $V_{\mathbf{Q}}^n$ d'une pré-structure de Hodge sont évidement munis d'une pré-structure de Hodge de façon que $V$ soit la somme directe de $V_{\mathbf{Q}}^n$ en tant que pré-structure de Hodge), et par la condition que l'on a

$$i_2 = \overline{i_1} \quad \text{i.e.} \quad i_2(\lambda) = \overline{i_1(\overline{\lambda})} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathscr{C}.$$

Si a toute variété projective lisse $X$ sur **C** on associe sa cohomologie rationnelle $\mathrm{H}^*(X, \mathbf{Q}) = V$, de sorte que $V_{\mathbf{C}} = \mathrm{H}^*(X, \mathbf{C})$ est isomorphe canoniquement (par la théorie de Hodge) à $\mathrm{H}_{\mathrm{Hdg}}(X) = \amalg \mathrm{H}^q(X, \underline{\Omega}^p_{X/\mathbf{C}})$, on voit qu'on trouve ainsi une pré-structure de Hodge sur $\mathrm{H}(X, \mathbf{Q})$, d'où un $\otimes$-foncteur naturel de la catégorie des motifs sur **C** dans la catégorie des pré-structures de Hodge. La conjecture de Hodge standard équivaut à dire que ce foncteur est *pleinement fidèle*, i.e. que l'homomorphisme naturel qui va du groupe de Galois de Hodge précédent $G$ dans le groupe de Galois motivique (associé au $\otimes$-foncteur de Betti $\mathrm{H}_{\mathrm{Bet}}$) est un épimorphisme. Ou encore que pour toute catégorie $\mathscr{C}_0$ de motifs de type fini sur **C**, désignant par $\mathscr{C}$ la $\otimes$-catégorie de pré-structures de Hodge engendrée par les $\mathrm{H}_{\mathrm{Bet}}(M)$ pour $M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_0)$, l'homomorphisme de groupes algébriques $G \longrightarrow G_0$ associé au foncteur de Betti-Hodge $\mathscr{C}_0 \longrightarrow \mathscr{C}$ est un épimorphisme (i.e. surjectif sur les points à valeurs complexes, disons).

On appelle *polarisation* d'une pré-structure de Hodge de poids $n$ la donnée d'un accouplement de pré-structures de Hodge

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbf{Q}(n),$$

où $\mathbf{Q}(n)$ est l'espace vectoriel trivial de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$, avec $\mathbf{Q}C = C$ muni du bidegré $(n,n)$, ayant la propriété que la forme hermitienne correspondant sur $V_{\mathscr{C}}$,

$$\varphi(x,y) = \varphi(x,\overline{y})(-i)^{p-q} \quad \text{pour } x \text{ de bidegré } (p, q-p)$$

soit définie positive. Une *structure de Hodge* est une pré-structure de Hodge admettant une polarisation. Les structures de Hodge forment une sous-$\otimes$-catégorie de la catégorie des pré-structures de Hodge. La théorie de Hodge nous assure que le foncteur de Betti-Hodge sur la catégorie des motifs sur $\mathbf{C}$ prend ses valeurs en fait dans la catégorie des structures de Hodge (une polarisation d'un variété projective lisse $V$ définit canoniquement une polarisation de la structure de Hodge associée sur la cohomologie de Betti-Hodge). NB. On n'a aucune idée sur ce que pourrait être l'image essentielle du foncteur précédent, par exemple s'il y a lieu d'espérer qu'on trouve toutes les structures de Hodge (donc une équivalence de catégories : motifs sur $\mathbf{C} \longrightarrow$ structures de Hodge) ; cela semble peu probable, mais on n'a aucune indication sérieuse dans un sens ou l'autre.

La catégorie des structures de Hodge est semi-simple. Si $G$ est le groupe de Galois d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ de pré-structures de Hodge, à engendrement fini si on veut (pour simplifier), alors on peut expliciter en termes du groupe de Galois associé et de sa structure $i_1$ ci-dessus la condition pour que les objets de $\mathscr{C}$ soient en fait des structures de Hodge. Ceci est un exercice plaisant et délectable, qui devrait figurer dans un travail systématique sur les $\otimes$-catégories, dans le chapitre des exemples. On trouve des restrictions très sérieuses sur le groupe $G$ muni de $i_1$ (en plus du fait que $G$ soit réductif).

4) Je laisse le soin à Saavedra de déterminer quelle structure supplémentaire on obtient sur la structure de Hodge “complexe” associée à une variété projective lisse complexe $X$, lorsqu'on se donne cette dernière comme déduite d'une variété projective réelle $X_{\mathbf{R}} = X_0$. On trouve une notion de “structure de Hodge réelle”, donnant naissance à une $\otimes$-catégorie correspondante. Dans le groupe de Galois motivique de celui-ci, en plus de la structure $i_1$, on trouve un élément $f_\infty$ de $G(\mathbf{Q})$, d'ordre 2 (jouant le rôle d'un “élément de Frobenius à l'infini”), qui correspond à l'automorphisme du foncteur de Betti $X_0 \mapsto \mathrm{H}(X_0(\mathscr{C}), Q)$ déduit de l'homéomorphisme $x \mapsto \overline{x}$ de $X_0(\mathscr{C})$. Il faut expliciter les relatons entre cet élément et $i_1$, $i_2$ !

5) Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie tensorielle, munie d'un foncteur fibre sur $k$ de caractéristique nulle. A prouver que, pour que le groupe de Galois $G$ correspondant soit profini, il faut et il suffit que pour tout objet $M$ de $\mathscr{C}$, la $\otimes$-catégorie engendrée soit semi-simple et n'ait qu'un nombre fini d'objets simples non isomorphes. Si $\mathscr{C}$ est quelconque, la sous-catégorie pleine $\mathscr{C}_0$ de $\mathscr{C}$ qui correspond au pro-groupe quotient de $G$ formé des $G_i/G_i^\circ$ (où $G = \varprojlim G_i$, et $G_i^\circ$ est la composante neutre de $G_i$) est formée exactement des objets $M$ ayant la propriété précédente.

Il serait intéressant de trouver des énoncés correspondants en caractéristique quelconque.

6) La notion de polarisation d'un motif sur un corps (elle-même déduite de celle de polarisation d'une variété algébrique) donne une structure supplémentaire remarquable dans la catégorie des motifs : si $M$ est un motif de poids $n$, on sait parmi les formes symétriques ($n$ pair) resp. alternées ($n$ impair) $M \otimes M \longrightarrow T(n)$ (où $T$ est le motif de Tate) distinguer celles qui sont "définies positives" ou encore des "polarisations". Cette notion se reflète par exemple par des structures supplémentaires sur les groupes de Galois motiviques. Il y a lieu de faire une étude axiomatique abstraite d'une telle notion de polarisation sur une $\otimes$-catégorie générale au dessus d'un sous-corps du corps des réels. On pourra en rediscuter à l'occasion.

# MOTIFS À COEFFICIENTS SUR UN CORPS DE []

- [scan]

MOTIFS À COEFFICIENTS SUR UN CORPS DE []
à partir de 1958

# MOTIFS
## 1965 1970

---

- [transcription] par Elbaz-Vincent et J. Malgoire

# LETTER TO J. MURRE

- [scan]

Dear Murre,

I am glad to hear that your are still willing to give the talk on unramified functors. Here what I can say to your questions.

1. The theorem about passage to quotient I alluded to is the following:

Theorem. — *Let $f : X \longrightarrow Y$ be a morphism of $S$-preschemes, assume either $X$ and $Y$ locally of finite presentation over $S$, or $Y$ loc noeth and $X$ locally of finite type over $Y$. Assume that the equivalence relation $R = X \times_Y X$ defined by $f$ is flat over $X$ i.e.* $\mathrm{pr}_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$ *is flat. Then the quotient $X/R$ exists in the strongest reasonable sense, i.e. one can factor $f$ into a compositum $X \longrightarrow Z \longrightarrow Y$, with $X \longrightarrow Z$ faithfully flat locally of finite presentation, $Z$ locally of finite pres. over $X$ (in fact of finite presentation over $S$ if $X$ is so) and $Z \longrightarrow Y$ a monomorphism.*

Of course the factorization is unique, and the theorem can be expressed by saying that the quotient sheaf (for the fpqc topology) $X/R$ is representable. That is in fact how the theorem is proved.

Raynaud has recently made a very nice (and non trivial) application of this theorem, by proving the following: if $S$ is the spectrum of a discrete valuation ring, $G$ a group prescheme of finite type over $S$, $H$ a closed and flat sub-group scheme, such that $G_t/H_t$ is quasi-affine (where $t$ is the generic point of $S$) then $G/H$ is representable as a quasi-affine and flat $S$-scheme, which is even affine if $H$ is invariant (i.e. if $G$ is a flat group scheme of finite type with affine generic fibre, than $G$ is affine). This extends immediately to a base which is regular of dim one. Raynaud is now trying to extend his construction to the case when he drops the quasi-affinness assumption, namely to construct still $G/H$ as a quasi-projective scheme over $S$.

2. Theorem of the cube.

I believe we discussed about it time ago, but maybe the proof I told you was valid only if one assumes the Pic functor of one of the factors involved representable. To prove unramifiedness of the functor <u>Corr</u> however you need only a weak infinitesimal form of the theorem of the square, for which you will find a proof in the manuscript notes I am joining on correspondence classes, containing also the proof of the statements you were recalling in your question 4. I hope you will be able to read them, I agree the handwriting is wretched and the notes moreover very sketchy. - On the other hand, I recall you that the theorem of the cube follows rather formally once one knows separatedness of $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X, Y)$ for two of the three factors involved, and using the usual formal properties of the Picard functor (among which commutation with inverse limits of Artin rings is the less trivial).

3. As for the separatedness of $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X, Y)$, this is about trivial whenever the Pic functor of one of the factors $X$, $Y$ is separated? Now this is certainly the case if for $X$ if its geometric fibers are integral, (a fortiori if $X$ is an abelian scheme over $S$!).

To show this, one may assume $S$ the spectrum of a discrete valuation ring, and one is reduced to show that if $\underline{L}$ is an invertible sheaf on $X$ whose restriction to the general fiber $X_t$ is trivial, then $\underline{L}$ is trivial. Now $X_1$ is an open subset of $X$, and the assumption on $\underline{L}$ can be expressed by saying that $\underline{L}$ is defined by a Cartier divisor whose support is contained in the special fiber $X_0$. Now $X_0$ itself is already a Cartier divisor (defined by a global equation $f = 0$) and moreover is an integral subscheme of $X$, from this follows that the divisor $D$ is a multiple of $X_0$ (assume for simplicity the fibers of $X$ geometrically normal, and hence $X$ normal!), hence $D$ is linearly equivalent to 0, what we wanted to prove.

I am convinced however that $\underline{\mathrm{Corr}}$ is always separated (with the usual assumptions of properness, flatness, and direct image of the structure sheaf, for both functors, of course). This is easily seen to be true if the Pic functor of either factor is representable, by a simple use of dimension theory (namely, we have a morphism $X \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ whose image has a general fiber of dimension zero, hence the same holds for the special fiber...). But it is true also, by an immediate adaptation of the same argument, if we suppose only that $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ is pre-ét-représentable say, i.e. is a quotient of a representable functor $Q$ by an étale equivalence relation (in fact, quasi-finite and flat would do as well), with $Q$ locally of finite type over $S$. Now this assumption is certainly satisfied if $Y$ is *projective* over $S$, as one sees by using the representation of $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ (or rather big open pieces of it) as the quotient of a suitable scheme of immersions of $Y$ into some $p^r$, by the action of the projective group operating freely, and taking a quasi-section of the corresponding equivalence relation... On the other hand, if one does not assume $X$ not $Y$ projective over $S$, one my think of using Chow's lemma; as $S$ is the spectrum of a discrete valuation ring, one does not loose flatness in using Chow's lemma, unfortunately one will loose however, I am afraid, the assumption $\mathrm{H}^0(X_0, \underline{O}_{X_0}) \simeq k(s)$, and I am afraid that this will make serious technical trouble. Another interesting approach, via topology, is to try to prove that under the usual assumptions on $X$, the "specialization morphism" from the fundamental group of the general geometric fiber to the one of the special fiber has an image of finite index - or at least that this is so after making the groups abelian. It seems to me that the latter statement can be proved via the Picard functor, when $X$ is assumed projective over $S$.

I am sending you some notes, including a sketch of the proof of the theorem of representability of unramified functors, although I do not think they latter can be of any use to you, as I have a hard time myself to read them. I think the notes you took when we discussed the matter a few months ago should be much more detailed; anyhow, there are certainly no simplifications in my notes relative to yours, the inverse is more plausible.

Sincerely yours

# LETTER TO J. MURRE

- [scan]

Dear Murre,

I am very sorry I did not succeed to convey the intuitive idea behind the general nonsense of my notes. It seems to me that the basic example in order to understand the idea is example 1, where you can take $Z$ to be a standard Kummer covering for definiteness, $Z = Z_a^n$, and $S$ normal. Intuitively, when look at (normal, say) $S'$ coverings of $S$ whose ramification type is not worse than the one of $Z$ over $S$, you mean that the normalized inverse image $Z'$ of $S'$ over $Z$ is étale. From the birational point of view, assuming $S'$ connected and therefore corresponding to a field extension $K'$ of the field of functions $K$ of $S$, this means simply that $K'$ of the field of functions $K$ of $S$, this means simply that $K'$ is isomorphic to a subextension of an extension of the function field $L$ of $Z$, unramified with respect t the model $Z$; when $S$

[]

Your interpretation of the Kummer case in the final formulation of example 3 is indeed the one I had in mind. Also, when I wrote $n'n$, I meant of course the order relation of divisibility (it may be convenient to introduce this order relation explicitly, for simplicity of notations).

I realize that all the indications I have given you so far are extremely sketchy, and as a consequence that I am charging you with a considerable amount of work to put some sense and order into all that. Thus it is I, not you, who should apologize for causing a lot of trouble! I look forward with great pleasure meeting you in Bures. As I am having some russian and chinese on friday's, I will probably drop by on June 2.

With best regards

# LETTER TO J. MURRE

- [scan]

Dear Murre,

Thank you very much for your notes on the tame fundamental group, which I at least finished reading. I see you wrote them with much care, and I am all the more sorry that my own fault, there is a number of misstatements which, I am afraid, will force you to do a serious recasting of the whole exposition. My notes definitely where too sketchy, and my oral explanations, I am afraid, partly wrong, which induced you into error a few times. Here the most serious drawbacks.

1.16 is false already when $H$ is the unit group and when there is a single $a$, say $a = b^n$, $Y' = YT/(T^n — a)$. Then $Y = S$, and a morphism of $Y$ into $Y'$ compatible with $H = e\ H'$ is just a section of $Y'$, which exists indeed; however $H \longrightarrow H'$ is not surjective. 3.6. is equally false, as you see by the previous example, using the given section to define an $H'$-morphism $H' \longrightarrow Y'$ which is not an isomorphism. As a consequence, the proof in your notes of 3.7. breaks down (as it uses 1.16) and so does the proof of 3.8. (I did not try to check 3.8. by some different proof).

I am afraid 6.4. is false as stated, and that the statement is correct only if the $D_i$ are regular. Indeed, the end of the proof seemed to me very dubious; be careful that the inertia groups are determined only up to interior automorphism! There is however a (tautological) generalization of the theorem for regular $D_i$, corresponding to the data of a single divisor $D$ with normal crossings, and a variant of the notion of tame ramification for such a divisor, by demanding that the coverings should be tamely ramified locally for the étale topology for the family of local irreducible components of $D$; it is this notion of tameness which should seem more adapted to the situation of par. 9.

The proof of 7.1. is not correct, when you contend on line -9: there remains to be proven the following... Already when $D = 0$, the proof here would have to introduce connected étale coverings which are *not Galois!* This very strongly suggests that a notion of tame ramification should be introduced also for non Galois coverings. The same remark applies t the proof of 10.1. Maybe you could get along some way in 7.1. using the normality assumptions, but I am convinced that these assumptions are anyhow artificial, as well as the assumption that the $D_i$ should be reduced somewhere. You do not seem to make any use of theses facts, really.

Also, one feels that 7.5. should be generalized to the case of a tamely ramified covering, and that it should come out trivially once the generalities have been dealt with properly.

I hope that the theory will come out more clearly and correctly by devoting some care to generalities on ramification date (not necessarily of Kummer type). I will try to write something up within the next days. Please excuse me for the trouble I caused you by not learning my lesson well enough before I put you to work!

It will be very nice indeed to have an appendix on Lefschetz theorem for the fundamental group, and it should not be hard to write it. However, if would be safer to wait till the general theory of tame ramification is written up!

Sincerely yours