COLLECTED WORKS
Vol I. Mathematical Reflections

by

Alexandre GROTHENDIECK

Edited by

M. CARMONA

Instituto Grothendieck

Centre for Grothendiecian Studies

CONTENTS

SUR LA COMPLÉTION DU DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL LOCALEMENT CONVEXE

Note de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Élie Cartan

Séance du 6 février 1950

C. R. Acad. Sc. Paris 230, 605-606 (1950)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/completion50scan.pdf

QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS À LA DUALITÉ DANS LES ESPACES (F)

Note de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud Denjoy

Séance du 30 octobre 1950

C. R. Acad. Sci. Paris 230, 1561-1563 (1950)[2]

---

[2] https://agrothendieck.github.io/divers/espLF50scan.pdf

CRITÈRES GÉNÉRAUX DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXES. PATHOLOGIES DES ESPACES (LF)

Note de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud Denjoy

Séance du 30 octobre 1950

C. R. Acad. Sci. Paris 231, 940-941 (1950)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/espF50scan.pdf

Lettre à J. Dixmier, 20.11.1950[1]

A. Grothendieck

33 rue du Maréchal Gérard
Nancy (M et M)

Nancy le 20.11.1950

Cher Monsieur Dixmier,

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/LGD201150scan.pdf

Lettre à J. Dixmier, 10.12.1950[2]

A. Grothendieck
33 rue du Maréchal Gérard
Nancy (M et M)

Nancy le 10.12.1950

Cher Monsieur Dixmier,

Merci pour votre lettre et votre tirage à part. – Malheureusement, la suggestion que vous me faites ne m'apporte rien de neuf, car les minimisations dont vous parlez sont à fortiori incluses dans le fait de prendre un flot compact convexe *minimal* (ce qui est possible grâce au théorème de Zorn).

Il est bien vrai que dans un espace complet quelconque, l'enveloppe convexe fermé d'une partie flot compacte est encore flot compacte. Godement nous a donné la démonstration dans le cas où l'espace est séparable ; dans le cas général, on remarque que d'après le théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que toute *suite* extraite de l'enveloppe convexe admet un point faiblement adhérent, ce qui ramène immédiatement au cas séparable. — Notez qu'il existe un assez grand nombre de théorèmes dont l'énoncé ne fait intervenir aucune condition de dénombrabilité, et qui ne peuvent se démontrer sans l'aide du théorème d'Eberlein (j'en connais cinq exemples au moins). Cela tient à ce que l'emploi des suites permet d'appliquer le théorème de Lebesgue sur l'intégrale d'une limite simple de fonctions bornées dans leur ensemble !

Vous me demandez avec raison comment, du théorème sur la moyenne des fonctions flot p.p., on pourrait déduire que tout groupe G borné d'opérateurs dans un Hilbert est semblable à un groupe d'opérateurs unitaries. Si on savait que les fonctions sur G de la forme $\varphi_{x,y}(s) = \langle T^s x, T^s y\rangle$ sont flot p.p., on n'aurait qu'à considérer la forme bilinéaire sur H : $B(x,y) = M_s(\langle T^s x, T^s y\rangle) = M(\varphi_{x,y})$, où M est la moyenne invariante sur l'espace des fonctions flot p.p., et l'affirmation apparaîtrait aisément. J'avais cru voir que ces $\varphi_{x,y}$ sont en effet flot p.p., mais n'en aperçois plus la raison maintenant que je vous écris, de sorte qu'il me semble

[2] https://agrothendieck.github.io/divers/LGD161250scan.pdf

bien possible que je me suis trompé – mais je n'en suis pas convaincu. Comme ces semaines-ci je suis partiellement pris par des soucis matériels de recherche de logement et de déménagement, et ai d'autre part une autre recherche en cours, je ne peux pas avant quelques semaines examiner la question de près, aussi j'ai préféré vous répondre tout de suite. – Il est à noter que la σ-translation à droite de φ_{xy} est $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$, or si σ parcourt le groupe G, $T^\sigma x$ et $T^\sigma y$ y parcourent des parties flot relativement compactes de H. D'autre part $(a, b) \longrightarrow \varphi_{ab}$ est application bilinéaire continue de $H \times H$ dans $C^\infty(G)$. Il n'en suit malheureusement pas pour autant que l'ensemble des $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$ est une partie flot relativement compacte de $C^\infty(G)$, car il est possible de trouver une application bilinéaire continue du produit de deux Hilberts dans un Banach, telle que l'image du produit des deux boules unité ne soit pas flot relativement compacte. – Peut-être m'étais-je trompé sur ce point ?

Je vous joins le tirage à part de ma dernière note.

Recevez mes cordiales salutations

A. Grothendieck

P. S. Les autres résultats de ma précédente lettre, et de celle-ci, ont été regardé par moi avec assez de soin pour être tout à fait certains !

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

C. R. Acad. Sci. Paris 233, 839-841 (1951)[3]

[3] https://agrothendieck.github.io/divers/quelques51scan.pdf

SUR UNE NOTION DE PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES, ET UNE CLASSE REMARQUABLE D'ESPACES VECTORIELS LIÉE À CETTE NOTION

C. R. Acad. Sci. Paris 233, 1556-1558 (1951)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/remarq51scan.pdf

Lettre à J. Dixmier, 7.6.1951

A. Grothendieck
3 chemin du Grand Moulin
Nancy

Nancy le 7.6.1951

Cher Dixmier,

Pouvez-vous m'envoyer votre article sur la trace dans les anneaux de type fini, et votre papier aux Annals sur les "fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs…"?

Je vous signale une réponse (quasi-triviale) à une question que vous posez dans ce dernier papier (vous en connaissez probablement la réponse aujourd'hui): vous demandez si dans T', convergence faible (i.e.: pour $\sigma(T', B)$) implique convergence forte, pour les suites. La réponse est non, car soit $a \in H, a \neq 0$, l'application $x \longrightarrow a \otimes x$ de H dans T' est évidemment un isomorphisme dans; mais si la propriété envisagé était vraie pour T', elle le serait pour ses sous-espaces, donc pour H, ce qui est faux.

Je vous envoie mes meilleures salutations

A. Grothendieck

CRITÈRES DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES FONCTIONNELS GÉNÉRAUX

Amer. J. Math. 74, 168-186 (1952)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/fonctgen52scan.pdf

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS ESSENTIELS DANS LA THÉORIE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET DES ESPACES NUCLÉAIRES

- This text was published in: *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires*. Annales de l'Institut Fourier, Volume 4 (1952), pp. 73-112.
- [scan]
- [translation] by T. Hosgood

Lettre à J. Dixmier, 2.5.1952

Nancy le 2.5.1952

Cher Dixmier,

Je n'ai jamais prouvé ni prétendu avoir prouvé le théorème dont tu parles, et qui d'ailleurs est faux. Il est en effet immédiat qu'il équivaudrait à l'énoncé suivant: Si K est un espace compact muni d'une mesure μ, M l'espace des fonctions sur K qui sont mesurables pour μ, muni de la topologie de la convergence *simple*, F un sous-espace de M contenant une suite partout dense, alors il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $K_1 \subset K$ avec $|\mu|(K \cap (??)K_1) < \varepsilon$, les $f \in F$ ayant toutes une restriction à K continue. Or, prends $K = (0,1)$ avec la mesure de Lebesgue, il est (je pense) connu, et facile à démontrer (excellent exercice Bourbaki) qu'il existe une suite de fonctions mesurables sur K à laquelle toute fonction numérique définie sur K soit adhérente, ce qui prouve en particulier que M lui-même est déjà séparable, or M est loin d'avoir la propriété voulu !

Néanmoins, ton théorème sous sa forme initiale est vrai si F est métrisable, comme tu t'en es sans doute convaincu tout seul, car on se ramène alors au cas où la fonction faiblement mesurable donnée prend ses valeurs dans une partie *équicontinue* de F', cas où l'énoncé est trivial et figure déjà dans une rédaction antérieure. Comme le théorème est vrai encore lorsque F est le dual faible d'un espace métrisable séparable F (puisque alors $t \longrightarrow \lambda_t$ est *fortement* mes.), ou le dual d'un espace de Banach F' (comme par exemple ℓ^∞) pour lequel la boule unité du dual faible F de F' admet une suite partout dense (même méthode que pour F du type (f)), il reste que dans les cas usuels, le théorème envisagé est valable. On pourrait même remarquer (re-exercice ?) que la catégorie d'espaces localement convexes séparables F pour lesquels l'énoncé envisagé est vrai, est stable pour le produit topologique ou la somme directe d'un ensemble dénombrable d'espaces facteurs, et par l'opération de prendre un quotient ou une topologie moins fine – donc aussi pour les limites inductives dénombrables etc – en fait, on attrape tous les espaces raisonnables de l'Analyse.

Bien à toi

A. Grothendieck

SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES FAIBLEMENT COMPACTES D'ESPACES DU TYPE $C(K)$

Canadian J. Math. 5, 129-173 (1953)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/linfaib53scan.pdf

SUR LES ESPACES DE SOLUTIONS D'UNE CLASSE GÉNÉRALE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

J. Analyse Math. 2, 243-280 (1953)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/derpart53scan.pdf

SUR CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HOLOMORPHES I

J. reine angew. Math. 192, 35-64 (1953)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/fonctholI53scan.pdf

SUR CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HOLOMORPHES II

J. reine angew. Math. 192, 77-95 (1953)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/foncthollI53scan.pdf

QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Julio 1954, 173-177. Centro de Cooperación Científica de la UNESCO para América Latina, Montevideo, Uruguay, 1954

SUR CERTAINS SOUS-ESPACES VECTORIELS DE L^p

Canadian J. Math. 6, 158-160 (1954)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/certvect54scan.pdf

RÉSULTATS NOUVEAUX DANS LA THÉORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES I

C. R. Acad. Sci. Paris 239, 577-579 (1954)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/oplinI54scan.pdf

RÉSULTATS NOUVEAUX DANS LA THÉORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES II

C. R. Acad. Sci. Paris 239, 607-609 (1954)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/oplinII54scan.pdf

SUR LES ESPACES (F) ET (DF)

- This text was published in: *Sur les espaces* (F) *et* (DF). Summa Brazil. Math. 3, 57-123 (1954)
- [scan]
- [translation] in Russian by D. A. Raikov. Matematika, 1958, Volume 2, Issue 3, Pages 81–128

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidad de Sao Paulo, (1954)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/gpablo54scan.pdf

TOPOLOGICAL VECTOR SPACES

Translated by O. Chaljub. Notes on Math. and its App. Gordon and Breach Science Publishers, New-York-London-Paris, 1973[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/gpablo54en.pdf

LA THÉORIE DE FREDHOLM

- This text was published in: *La théorie de Fredholm*. Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 91, p. 377-384
- [scan]

Lettre à J. Dixmier, 28.6.1954

A. Grothendieck
1052 rua Oscar Freire
Sao Paulo (Brésil)

Sao Paulo le 28.6.1954

Cher Dixmier,

Connais-tu la réponse à la question suivante. Soit $\underline{A}$ un anneau d'opérateurs dans un Hilbert H, existe-t-il une projection u de norme l de $R(H)$ sur $\underline{A}$, compatible avec l'involution, et telle que $u(ATB) = Au(T)B$ pour $A, B \in \underline{A}$? C'est vrai si H est de dimension finie (et évidemment c'est bien facile dans ce cas), ou si $\underline{A} \supset \underline{A}'$, et de ce dernier cas on déduit facilement que c'est vrai si $\underline{A}$ est commutative (commencer à appliquer le résultat précédent à un anneau commutatif maximal $\underline{B}$ contenant $\underline{A}$, d'autre part on sait qu'il existe une projection de $\underline{B}$ sur $\underline{A}$ qui a les propriétés voulues). Bien entendu, même si $\underline{A}$ est commutatif maximal, il n'y a pas unicité de la projection u. Voici la démonstration du deuxième cas $\underline{A} \subset \underline{A}'$: Soit K le spectre de $\underline{A}'$, Ω l'ensemble des partitions finies de K en ensembles ouverts et fermés, muni de sa relation d'ordre naturelle; pour $\omega = (\omega_i) \in \Omega$ on pose $u_\omega(T) \sum_i T_{\omega_i} T T_{\omega_i}$, on considère un ultrafiltre sur Ω plus fin que le filtre des sections croissantes, et on pose $u(T) = \lim u_\omega(T)$ (limite faible !) – Le problème m'intéresse pour pouvoir ramener les propriétés vectorielles-topologiques d'algèbres autoadjointes uniformément fermées quelconques d'opérateurs, aux propriétés de $R(H)$, d'où facilement aux propriétés de l'algèbre $R_0(H)$ des opérateurs compacts, ce qui ramènera souvent à des propriétés de nature métrique sur les $R(H)$ où H est de dimension finie. De même, les propriétés des espaces duals de C^*-algèbres (et aussi des espaces L^1 qui interviennent en intégration non commutative) se ramèneraient aux propriétés des espaces $H \widehat{\otimes} H$.

À propos, en vue de simplifier l'exposé de Godement sur la transformation de Fourier des groupes loc. comp. unimod., j'ai eu besoin du résultat suivant, qui se démontre assez facilement en se ramenant à $R(H)$: les formes linéaires positives sur une C^*-algèbre engendrent le dual. Cela est-il connu, ou te semble-t-il utile de publier une petite note là-dessus ?

J'espère que cette lettre t'arrivera, et que tu pourras me donner une réponse positive.

Bien à toi

A. Grothendieck

Lettre à J. Dixmier, 18.7.1954

Sao Paulo le 18.7.1954

Cher Dixmier,

Bien merci pour la copie de ton bouquin, que je n'ai reçu qu'il y a quelques jours, et dont j'ai commencé la lecture avec grand intérêt. Je ne suis pas sur de pouvoir faire des remarques très utiles pour la rédaction, mais bien entendu je lis le crayon à la main, et te communiquerai mes observations à l'occasion. Pour l'instant, je m'aperçois que systématiquement tu n'énonces que pour les seules algèbres de von Neumann des définitions et propositions valables souvent pour des C^*-algèbres arbitraires, c'est parfois dommage. Pour l'instant, je te signale des erreurs (?) de détail. Page 7, il me semble que la caractérisation de T dans le lemme 2, 2°, n'est pas correcte. Page 12, fin du No 2 à la ligne 5 de la fin, je pense que "et un seul" est faux, déjà si $A_i = B_i = \underline{C}$ (mais n'ai pas cherché le contre-exemple). Page 22 lignes 9-10 "il suffit" est manifestement faux, tu penses sans doute au cas $B = 0$. D'autres remarques plus tard. Quelques questions: une sous-algèbre autoadjointe uniformément fermée de $L(H)$, stable pour le sup des familles filtrantes croissantes majorées, est-elle faiblement fermée ? Une C^*-algèbre pour laquelle le sup d'une famille filtrante croissante majorée existe toujours, est-elle isomorphe à une algèbre de von Neumann ? Je ne le sais pas même dans le cas commutatif, ce qui prouve que je ferai bien de lire ton article dans "Summa Brasiliensis", as-tu encore des tirages à part ? Je suis aussi bien curieux de la suite du bouquin, et te suis reconnaissant pour tout papier que tu peux me passer là dessus. Feras-tu un Plancherel abstrait pour les C^*-algèbres, qui inclurait la théorie des caractères de Godement ?

La lecture du début de ton bouquin m'a permis aussi de répondre par l'affirmative à la question de ma lettre précédente (je viens de trouver la démonstration aujourd'hui, et ne l'ai pas encore mise par écrit canoniquement, mais je pense qu'il n'y a pas d'erreur). Soit M une sous-algèbre autoadjointe abélienne maximale dans le commutant de A' de l'algèbre de von Neumann A, on sait qu'il existe une projection de $L(H)$ sur M' ayant les propriétés voulues, il suffit donc de trouver une projection analogue de M' sur A. J'arrive à la prouver par un raisonnement direct (grâce au fait que M' est engendré au sens de v.N. par A et la sous-algèbre abélienne M du commutant de A), tout à fait différent du raisonnement du premier cas, calqué plutôt sur la preuve du théorème analogue, bien connu, pour une algèbre Stonienne plongée dans un $C(K)$. Le raisonnement prouve presque qu'il existe même une projection de M' sur A qui est un homomorphisme, et je pense que ça doit en effet pouvoir se prouver (c'est en tous cas vrai dans le cas de la dimension finie, donc il y a de l'espoir!). – En zornifiant sur l'ensemble des sous-C^*-algèbres B de M' contenant A, pour lesquelles une projection $B \longrightarrow A$ du type voulu existe, il faut pouvoir passer de B à son adhérence faible (ce qui est un des deux pas essentiels du raisonnement, inutile dans le cas commutatif rappelé plus haut). Pour ça, on doit introduire le bidual B'' de B, le munir canoniquement d'une structure d'algèbre de von Neumann telle que l'application naturelle $B'' \longrightarrow \overline{B}$ soit un homomorphisme *normal* de B'' sur $\overline{B}$ (*donc se relève*, d'où facilement une application cherchée $\overline{B} \longrightarrow A$ en composant $\overline{B} \longrightarrow B'' \longrightarrow A$). Pour ces histoires de bidual de C^*-algèbre, il faut seulement utiliser le résultat sur le dual que je t'avais signalé dans ma lettre précédente, et qui est presque trivial : *Soit A une C^*-algèbre, u une forme linéaire hermitienne continue sur A, alors on a $u = v - w$, où v et w sont positives, et $||v|| + ||w|| = ||u||$.* Démonstration : Soit K la partie de A' formée des formes positives de norme ≤ 1, c'est une partie convexe faiblement compacte contenant 0, et il est trivial que pour $x \in A$, x hermitien, on a $||x|| = \sup |\langle x, x'\rangle|, x' \in K$. Se bornant aux sous-espaces hermitiens de A et A', le théorème des bipolaires montre que la boule unité de A'_h est l'enveloppe convexe symétrique faiblement fermée de K, i.e. l'ensemble des x (??) $\lambda u - \mu w$, où λ, $\mu \leq 0$, $\lambda + \mu = 1$, v, $w \in K$ (cet ensemble est déjà faiblement compact, car K l'est), ce qui prouve le théorème. Si on ne suppose plus u hermitienne, on aura $u = v + iw$ avec v, w hermitiennes et $||v||, ||w|| \leq ||u||$, et on peut appliquer à v et w le résultat précédent. – De plus, le raisonnement prouve que réciproquement, si A est une algèbre normée complète qui satisfait au théorème précédent (mais où on suppose v et w "bornées" – ce qui est automatiquement vrai si A a une unité), alors (du moins sur sa partie hermitienne) sa norme est la norme polaire de K donc une norme satisfaisant aux identités algébriques qui caractérisent les C^*-algèbres. Si on suppose seulement que les formes positives engendrent algébriquement le dual de A, on peut encore dire (en utilisant Baire) que la norme de A est *équivalente* à la C^*-norme polaire de

K, donc que par un changement de norme A devient une C^*-algèbre. – Enfin, il est probable que dans l'énoncé du théorème plus haut, v et w soient uniques (peut-être en leur imposant d'autres conditions); il en résulterait que si u est centrale, v et w le sont etc. Mais je ne me suis pas amusé à regarder ça de près.

Merci aussi pour ta lettre où tu réponds à mes questions. Je te salue amicalement

A. Grothendieck

Lettre à J. Dixmier, 13.8.1954

1052 rua Oscar Freire
Sao Paulo (Brésil)
USA

Sao Paulo le 13.8.1954

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre détaillée du 28.7. C'est bien dommage que tu penses la théorie des C^*-algèbres trop vaste pour être englobée dans ton bouquin. Mais où serait le mal d'un livre de 400 pages ou plus sur ce sujet, ça serait au contraire bien agréable qu'il en existe un, car ce n'est certes pas amusant de s'orienter à tâtons dans la littérature courante. Je regrette surtout que tu ne fasses pas Plancherel ; car il ne coûte vraiment pas cher, puisqu'on a déjà la bonne technique des algèbres de v.N., et un Plancherel joliment présenté ferait certainement du bien. D'ailleurs, si j'ai bien compris, c'est surtout pour des Plancherels et Cie que sert toute la théorie des C^*-algèbres.

Je précise un point de ma lettre précédente, qui te semblait obscur. Soit A une $*$-algèbre, P l'ensemble des formes positives, unitaires, bornées (au sens algébrique) et normées (i.e. $f(1) = 1$ s'il y a unité) sur A. Soit pour tout $x \in A$: $N(x)^2 = \sup_{f \in P} f(x * x)$, alors on a aussi $N(x) = \sup ||U_x||$, où U parcourt toutes les représentations unitaires de A. Donc N est une norme sur A telle que l'algèbre complétée de A soit une C^*-algèbre, et les représentations unitaires de A correspondent biunivoquement à celles de cette C^*-algèbre (qui se substitue donc avantageusement à A dans diverses questions, p. ex. Plancherel)[1]. Supposons maintenant que A soit déjà muni d'une norme $||x||$ qui en fasse une algèbre normée complète, et pour simplifier supposons qu'il existe une unité. Alors les formes positives unitaires et bornées sont identiques aux formes positives *continues*, les formes normées sont celles telles que $f(1) = 1$, ou encore celles de norme 1. Elles forment une partie convexe faiblement compacte de la partie hermitienne du dual de A. La partie hermitienne de ce dual est le dual de la partie hermitienne de A, il revient

[1] Si $x \in A$ est hermitienne, $N(x) = \sup_{f \in P} |f(x)|$

donc au même de dire que sur A_h, la norme donnée est égale à $N(x) = \sup |f(x)|$, ou que la boule unité de A'_h est l'enveloppe disquée (disquée = convexe symétrique) faiblement fermée de P. Cette dernière par raison de faible compacité n'est autre que l'ensemble des formes $f - g$, f et g positives, $||f|| + ||g|| \leq 1$. S'il en est donc ainsi, la norme donnée est identique à la norme N sur A_h, et par suite *équivalente* à N sur A (car du point de vue réel, une algèbre normée involutive est somme directe topologique de sa partie hermitienne et de sa partie antihermitienne). Donc A est complète pour N, donc à condition de changer $||x||$ par une norme équivalente, A devient une C^*-algèbre. Si on ne veut plus que les deux normes coïncident sur la partie hermitienne, il suffisait même de suppose que toute forme hermitienne sur A est différence de deux formes positives, i.e. que SA'_h est *engendré* par l'enveloppe disquée Q de P. Car A'_h étant tonnelé, il en résulte que Q est un voisinage de O, donc par polarité que les normes $||x||$ et $N(x)$ sur A_h (donc aussi sur A) sont équivalentes.

Soit A une C^*-algèbre. Par bitransposition, toute représentation unitaire de A, soit $x \longrightarrow U(x)$, se prolonge en une application de même norme du bidual A'' dans $L(H)$, et de façon précise sur l'adhérence faible de $U(A)$. Si toute forme positive sur A est de la forme $(U(x)a, a)$ (pour ceci, on prend pour U la somme hilbertienne des représentations unitaires associées aux diverses formes positives normées sur A), la bitransposée U'' est biunivoque, et identifie donc A'' à une algèbre de von Neumann. On voit aussitôt que la topologie ultrafaible de A'' est $\sigma(A'', A')$, en particulier les formes positives normales sur A'' sont les formes positives quelconques sur A. De plus, on constate aussitôt que si V est une représentation unitaire de A, alors V'' est une représentation normale de U'' (ce qui établit une correspondance biunivoque entre les représentations unitaires quelconques de A, et les représentations normales de A''). Cela établit d'ailleurs le fait (facile directement aussi) que la structure d'algèbre de v.N. sur A'' est canonique. Ceci me semble commode dans bien des cas. Ainsi on appellera support d'une forme positive sur A le support de la forme normale sur A'' qu'elle définit (mais gaffe, si A est de v.N. et si la forme donnée est déjà normale, ça fait deux supports différents). Deux formes positives seront dites disjointes si leurs supports sont orthogonaux. Cette fois-ci, il n'y a pas d'ambiguïté quand A est déjà une algèbre de von Neumann et u et v normales, comme il résulte par exemple de la proposition (bien facile): deux formes positives u, v sur la C^*-algèbre A sont disjointes si et seulement si $||u-v|| = ||u|| + ||v||$.

J'en viens à la question d'unicité de la décomposition d'une forme linéaire hermitienne φ comme différence de deux formes positives disjointes u et v. On peut supposer A une algèbre de v.N. et u, v normales. Alors on a un résultat plus général : Soient u, v deux formes positives (finies ou non) normales définies sur A^+, et semi-finies (par quoi on entend qu'il existe un idéal bilatère faiblement dense, sur la partie positive duquel u resp. v est fini). La notion de support est définie de façon évidente; supposons les supports de u et v orthogonaux. Alors je dis que u et v sont uniquement déterminés par la connaissance de la forme $u-v$ (qui est une forme linéaire sur un idéal bilatère faiblement dense convenable de A ; noter que l'ensemble des idéaux bilatères faiblement denses est une base de filtre, ce qui précise le sens de l'énoncé précédent). La démonstration est absolument élémentaire (pas de décompositions spectrales !), on montre directement comment u et v peuvent s'exprimer en termes de $\varphi = u - v$. En fait, on peut encore affaiblir la notion de semi-fini dans cette démonstration. Corollaire: si φ est centrale, u et v sont des traces etc. Mais question: si on ne suppose pas u et v disjointes, peut-on écrire pourtant φ comme différence de deux formes positives normales semi-finies *disjointes* ? C'est bien plausible, mais je n'ai pas encore regardé. – Bien entendu, si on ne suppose plus que A est une algèbre de v.N., on a des mêmes énoncés sans condition de normalité, mais la condition de semi-finitude étant ici remplacée par l'existence d'un idéal bilatère dense (*pour la norme*) sur lequel la forme positive envisagée est finie (ce qui rejoint le point de vue de Godement dans son exposé de Plancherel). On devra passer comme toujours à A'' (mais j'avoue que je n'ai pas fait les vérifications).

Enfin, dans la décomposition canonique $\varphi = u - v$ avec u et v positives, $||\varphi|| = ||u|| + ||v||$, si A est de v.N. et φ ultrafaiblement continue, alors u et v le sont aussi (i.e. sont normales). Il suffit d'exhiber une telle décomposition, avec u et v normales. Mais la topologie ultrafaible de A étant induite par la top. ultrafaible d'un $L(H)$, on peut supposer $A = L(H)$. Mais alors on a une forme bien explicite des formes hermitiennes ultrafaiblement continues, données par des opérateurs à trace hermitiens, dont la décomposition spectrale donne la décomposition voulue.

Malheureusement, je n'ai pas vu de démonstration générale du théorème de commutation suivant (qu'il suffit maintenant d'énoncer pour les formes positives): Soit A alg. de v.N., u une forme positive normale sur A (en fait, il devrait être inutile de suppose u finie, semi- finie devrait suffire), soit B son "commutant" dans A. Alors, B contient son commutant B' dans A. Cela suggère une théorie de la commutation, qui serait la suivante: dis-moi si par hasard tu ne sais pas si elle est fausse. (Mais il me semble que le seul cas présentant des difficultés – i.e. qui ne se réduit pas par des techniques connues de décompositions spectrales – est celui d'une algèbre purement infinie). On prend les commutants dans A (laissant tomber $L(H)$!), notation B', B'' etc. Une sous-algèbre de v.N. de A est dite close, si elle est identique à son bicommutant (question : suffit-il qu'elle contienne le centre ?) Soit P l'ensemble des formes positives normales semi-finies sur A. (Il est cependant possible que la définition donnée plus haut de semi-finie soit trop stricte. Car alors sur un facteur purement infinie, donc simple, une forme semi-finie serait automatiquement finie ; alors ça semble trop beau que la théorie esquissée ci-dessous puisse marcher). On dit que $x \in A$ et $U \in P$ commutent, si $u(xy) = u(yx)$ pour tout y dans un idéal bilatère faiblement dense assez petit (définition sujette à variation, voir ci-dessus). D'où notion de commutant $\gamma(B)$ dans P d'une partie de A, et commutant $\gamma(M)$ dans A d'une partie M de P. Voici ce qui devrait être vrai (et est vrai dans le cas d'une algèbre semi-finie):

Th. 1. — *Les parties de A qui sont des commutants $\gamma(M)$ ($M \subset P$) sont exactement les sous-algèbres closes.*

(Ce théorème serait faux, déjà pour $A = L(H)$, si on restreignait P aux formes finies). Une partie M de P est dite close, si c'est le commutant $\gamma(B)$ d'une partie de A. Une intersection de partie closes est close, d'où partie close engendrée. Si $M \subset P$, soit $\sigma(M) = \gamma(M)'$, $M \longrightarrow \sigma(M)$ établit une correspondance biunivoque entre les parties closes de P et celles de A. On dit que M et N commutent, si $\sigma(M)$ et $\sigma(N)$ commutent. Pour ceci, il faut et il suffit que tout élément de M commute à tout élément de N. Partie commutative de P : qui commute à elle-même. Deuxième conjecture:

Th. 2. — *Tout $u \in P$ commute à lui-même, i.e. la partie close qu'il engendre est* *commutative (ou encore $\gamma(M)$ contient son commutant, ou encore $\sigma(u)$ est commutative). Alors (supposant pour simplifier que supp. $u = 1$), la partie close engendrée par u est identique à l'ensemble des bornes supérieures dans P des ensembles de formes ${}^x u = u^x$, où x parcourt la partie positive de $\sigma(u)$. Si u est finie, l'ensemble des formes finies qui sont dans la partie close engendrée par u, est aussi l'adhérence de l'ensemble des ${}^x u = u^x$ (pour la norme du dual de A).*

On pose bien entendu ${}^x u(y) = u(yx)$, $u^x(y) = u(xy)$; si x est positive et $x \in \sigma(u)$, alors ${}^x u = u^x$ est une forme positive (semi-finie). Enfin:

Th. 3. — *Pour qu'une partie close M de P (resp. de la partie P_0 de P formée des formes positives finies) soit commutative, il faut et il suffit que ce soit un lattice (existence du* sup *de deux éléments).*

En vertu du théorème de Kakutani, il s'ensuivra que l'espace vectoriel engendré par M (dans le cas où $M \subset P_0$) est isomorphe avec toutes ces structures à un espace L_1, dont le dual sera alors $\sigma(M)$[2]. – Bien entendu, on dira qu'une partie de P_0 est close si c'est l'intersection de P_0 avec sa clôture dans P.

Dans le cas où A est finie, la théorie se simplifie, car il suggit dans le th. 1 de ne considérer que des formes positives finies ; elle est d'ailleurs à peu près triviale dans ce cas. Dans le cas général, si on est embêté par la considération de formes positives non finies, on peut ignorer l'énoncé 1, et n'envisager que les deux autres énoncés, dans le cas de formes finies.

Dernière question, qui ne devrait pas être très vache : sait-on si toute forme linéaire ultrafaiblement continue u sur l'algèbre de v.N. A admet une décomposition polaire $u =^U v$, avec v forme positive normale, et U partiellement isométrique ? Bien entendu, il y a aussi des questions d'unicité, sous des conditions faciles à préciser.

Pour la démonstration du théorème sur la projection de $L(H)$ sur une sous-algèbre de v.N., je t'enverrai une copie dès que j'aurai rédigé ça. J'écrirai peut-être un petit article à l'occasion.

[2] Ou du moins un quotient de $\sigma(M)$ (car dans le cas du type purement infini, s'introduit une question de supports. Ainsi, $M = \{0\}$ est alors stable, c'est le commutant $\gamma(A)$ de A, donc $\sigma(M) = Z$, or $Z \neq 0$ n0est pas le dual de $\{0\}$!)

J'espère que mes questions ne finissent pas par t'embêter. Meilleures salutations.

A. Grothendieck

P.S. Écris-moi plutôt à mon adresse personnelle, c'est plus sur. – Je sais démontrer qu'en décomposant une distribution centrale de type positif sur un groupe de Lie, on peut se borner à des caractères qui sont des distributions (d'ordre un de plus). Ce n'est pas bien profond d'ailleurs. Est-ce que ça se savait déjà ?

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

Mem. Amer. Math. Soc. n° 16, 1955[3]

---

[3] https://agrothendieck.github.io/divers/ptten52scan.pdf

ERRATUM AU MÉMOIRE : PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

Ann. Inst. Fourier 6, 117-120 (1955-56)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/pttenscan.pdf

UNE CARACTÉRISATION VECTORIELLE-MÉTRIQUE DES ESPACES L_1

Canad. J. Math. *7*, 552-561 (1955)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/carvectscan.pdf

RÉARRANGEMENTS DE FONCTIONS ET INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ DANS LES ALGÈBRES DE VON NEUMANN MUNIES D'UN TRACE

Sém. N. Bourbaki, 1956, exp. no 113, p. 127-139[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/rearrangscan.pdf

Lettre à J. Dixmier, 24.1.1955

A. Grothendieck
1645 Kentucky Street
Lawrence (Kansas)
USA

Lawrence 24.1.1955

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre. Bien que je me doutais qu'une partie des notions introduites dans mon papier (sinon toutes) devaient être connue, je ne connaissais aucune bibliographie, et ne savais pas, en effet, que les $\Delta_A(t)$ avaient été considérés par [Richard] Kadison. A-t-il aussi la "formule fondamentale" $\Delta_{|AB|} \leq \Delta_{|A|}\Delta_{|B|}$?

Je ne t'ai jamais demandé si une forme linéaire hermitienne ultrafaiblement continue sur une C^*-algèbre se décompose sous la forme $\varphi_1 - \varphi_2$, avec $\varphi_1, \varphi_2 >> 0$ et φ_1 et φ_2 disjointes. Si je me rappelle bien, je t'ai au contraire donné la démonstration dans la dernière lettre de Sao Paulo (mais *l'as-tu reçue ?*) C'était une lettre fort longue, écrite à la machine, où je posais un tas de conjectures[1]. Je n'ai jamais eu de réponse. Mais peut-être n'as-tu pas pu déchiffrer mon écriture dans une lettre antérieure (?!). En effet, on prouve

a) Toute φ hermitienne continue sur une C^*-algèbre A s'écrit $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, avec $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$, $\varphi_1, \varphi_2 >> 0$ (Hahn-Banach) ;

b) Cette décomposition est unique. La condition $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$ équivaut aussi au fait que φ_1 et φ_2 sont disjointes ;

c) Si φ est ultrafaiblement continue (sur A supposé de von Neumann), φ_1 et φ_2 le sont.

[1]Je t'y donnais aussi la démonstration explicite que si A est une $*$-algèbre normée complète telle que toute forme linéaire hermitienne continue sur A est différence de deux formes positives, alors (par changement de norme) A est équivalente à une C^*-algèbre.

c) est immédiat, car il suffit de prouver l'existence d'au moins une décomposition $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, φ_1 et $\varphi_2 \in A_*$, $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$. Par Hahn-Banach, on est ramené au cas où $A = L(H)$. Mais alors $A_* = L'(H)$ (espace des opérateurs de Fredholm), et la décomposition d'un opérateur de Fredholm hermitien en sa partie positive et négative donne le résultat cherché.

Quant à la preuve de b), je n'ai pas les papiers sous la main (ils sont dans une grosse malle qui va arriver dans quelques semaines). Aussi il vaut mieux que je te la donne quand j'aurai les papiers. J'ai une rédaction complète de ce fourbi (il n'y a donc pas de canular imprévu à craindre, je pense !).

As-tu l'intention de regarder les questions que je pose dans mon papier sur les inégalités de convexité. Et si oui, penses-tu que le fourbi mérite une rédaction soigneuse dans un "joint paper" ? En ce cas, il serait sans doute préférable que tu assumes la rédaction, pour le bien du lecteur !

Je suis en train de passer en revue mes éléments de top. alg. et me délecte dans des diagrammes variés. J'ai beaucoup de temps à moi, et suis ici tout à fait bien.

Amitiés

A. Grothendieck

A GENERAL THEORY OF FIBRE SPACES WITH STRUCTURE SHEAF

University of Kansas, (1955)[2]

Introduction

When one tries to state in a general algebraic formalism the various notions of fibre space: general fibre spaces (without structure group, and maybe not even locally trivial); or fibre bundle with topological structure group G as expounded in the book of Steenrod (The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press); or the "differentiable" and "analytic" (real or complex) variants of theses notions; or the notions of algebraic fibre spaces (over an abstract field k) - one is led in a natural way to the notion of fibre space with a structure sheaf $\mathbf{G}$. This point of view is also suggested a priori by the possibility, now classical, to interpret the (for instance "topological") classes of fibre bundles on a space X, with *abelian* structure group G, as the elements of the first cohomology group of X with coefficients in the sheaf $\mathbf{G}$ of germs of continuous maps of X into G; the word "continuous" being replaced by "analytic" respectively "regular" if G is supposed an analytic re-

[2]National Science Foundation Research Project on Geometry of Function Space. Research Grant NSF - G 1126. Report No. 4. First Edition August, 1955. Second Edition May, 1958

spectively an algebraic group (the space X being of course accordingly an analytic or algebraic variety). The use of cohomological methods in this connection have proved quite useful, and it has become natural, at least as a matter of notation, even when G is not abelian, to denote by $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ the set of classes of fibre spaces on X with structure sheaf $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}$ being as above a sheaf of germs of maps (continuous, or differentiable, or analytic, or algebraic as the case may be) of X into G. Here we develop systematically the notion of fibre space with structure sheaf $\mathbf{G}$, where $\mathbf{G}$ is any sheaf of (not necessarily abelian) groups, and of the first cohomology set $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ of X with coefficients in $\mathbf{G}$. The first four chapters contain merely the first definitions concerning general fibre spaces, sheaves, fibre spaces with composition law (including sheaves of groups) and fibre spaces with structure sheaf. The functor aspect of the notions dealt with has been stressed throughout, and as it now appears should have been stressed even more. As the proofs of most of the facts stated reduce of course to straightforward verifications, they are only sketched or even omitted, the important point being merely a consistent order in the statement of the main facts. In the last chapter, we define the cohomology set $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ of X with coefficients in the sheaf of groups $\mathbf{G}$, so that the expected classification theorem for fibre spaces with structure sheaf $\mathbf{G}$ is valid. We then proceed to a careful study of the exact cohomology sequence associated with an exact sequence of sheaves $e \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{H} \longrightarrow e$. This is the main part, and in fact the origin, of this paper. Here $\mathbf{G}$ is any sheaf of groups, $\mathbf{F}$ a subsheaf of groups, $\mathbf{H} = \mathbf{G}/\mathbf{F}$, and according to various supplementary hypotheses of $\mathbf{F}$ (such as $\mathbf{F}$ normal, or $\mathbf{F}$ normal abelian, or $\mathbf{F}$ in the center) we get an exact cohomology sequence going from $\mathrm{H}^0(X, \mathbf{F})$ (the group of section of $\mathbf{F}$) to $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ respectively $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{H})$ respectively $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{G})$, with more or less additional algebraic structures involved. The formalism thus developed is quite suggestive, and as it seems useful, in particular in dealing with the problem of classification of fibre bundles with a structure group G in which we consider a sub-group F, or the problem of comparing say the topological and analytic classification for a given analytic structure group G. However, in order to keep this exposition in reasonable bounds, no examples have been given. Some complementary facts, examples, and applications for the notions developed will be given in the future. This report has been written mainly in order to serve the author for future reference; it is hoped that it may serve the same purpose, or as an introduction to the subject, to somebody else.

Of course, as this report consist in a fortunately straightforward adaptation of quite well known notions, no real difficulties had to be overcome and there is no claim for originality whatsoever. Besides, at the moment to give this report for mimeography, I hear that results analogous to those of chapter 5 were known for some years to Mr. Frenkel, who did non publish them till now. The author only hopes that this report is more pleasant to read than it was to write, and is convinced that anyhow an exposition of this sort had to be written.

Remark (added for the second edition). It has appeared that the formalism developed in this report, and specifically the results of Chapter V, are valid (and useful) also in other situations than just for sheaves on a given space X. A generalization for instance is obtained by supposing that a fixed group π is given acting on X as a group of homeomorphisms, and that we restrict our attention to the category of fibre spaces over X (and specially sheaves) on which π operates in a manner compatible with its operations on the base X. (See for instance A. Grothendieck, Sur le mémoire de Weil; Généralisations des fonctions abéliennes, Séminaire Bourbaki Décembre 1956). When X is reduced to a point, one gets (instead of sheaves) sets, groups, homogeneous spaces etc. admitting a fixed group π of operators, which leads to the (commutative and non-commutative) cohomology theory of the group π. One can also replace π by a fixed Lie group (operating on differentiable varieties, on Lie groups, and homogeneous Lie spaces). Or X, π are replaced by a fixed ground field k, and one considers algebraic spaces, algebraic groups, homogeneous spaces *defined over* k, which leads to a kind of cohomology theory of k. All this suggests that there should exist a comprehensive theory of non-commutative cohomology in suitable categories, an exposition of which is still lacking. (For the "commutative" theory of cohomology, see A. Grothendieck, Sur quelques points d'Algèbre Homologique, Tohoku Math. Journal, 1958).

I. General fibre spaces

Unless otherwise stated, none of the spaces to occur in this report have to be supposed separated.

1.1 Notion of fibre space

Definition **1.1.1.** — *A* fibre space *over a space X is a triple (X,E,p) of the space X, a space E and a continuous map p of E into X.*

We do not require p to be onto, still less to be open, and if p is onto, we do not require the topology of X to be the quotient topology of E by the map p. For abbreviation, the fibre space (X,E,p) will often be denoted by E only, it being understood that E is provided with the supplementary structure consisting of a continuous map p of E into the space X. X is called the *base space* of the fibre space, p the *projection*, and for any $x \in X$, the subspace $p^{-1}(x)$ of E (which is closed if $\{x\}$ is closed) is the *fibre* of x (in E).

Given two fibre spaces (X,E,p) and (X',E',p'), a *homomorphism* of the first into the second is a pair of continuous maps $f : X \longrightarrow X'$ and $g : E \longrightarrow E'$, such that $p'g = fp$, i.e. commutativity holds in the diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

Then g maps fibres into fibres (but not necessarily *onto*!); furthermore, if p is surjective, then f is uniquely determined by g. The continuous map f of X into X' being given, g will be called also a f-homomorphism of E into E'. If, moreover, E'' is a fibre space over X', f' a continuous map $X' \longrightarrow X''$ and $g' : E' \longrightarrow E''$ a f'-homomorphism, then $g'g$ is a $f'f$-homomorphism. If f is the identity map of X onto X, we say also X-homomorphism instead of f-homomorphism. If we speak of homomorphisms of fibre spaces over X, without further comment, we will always mean X-homomorphisms.

The notion of *isomorphism* of a fibre space (X,E,p) onto a fibre space (X',E',p') is clear: it is a homomorphism (f,g) of the first into the second, such that f and g are onto-homeomorphisms.

1.2 Inverse image of a fibre space, inverse homomorphisms

Let (X, E, p) be a fibre space over the space X, and let f be a continuous map of a space X' into X. Then the *inverse image* of the fibre space E by f is a fibre space E' over X'. E' is defined as the subspace of $X' \times E$ of points (x', y) such that $fx' = py$, the projection p' of E' into the base X' being given by $p'(x', y) = x'$. The map $g(x', y) = y$ of E' into E is then an f-homomorphism, inducing for each $x' \in X'$ a *homeomorphism* of the fibre of E' over x' *onto* the fibre of E over $f'x'$.

[]

1.3 Subspace, quotient, product

Let (X, E, p) be a fibre space, E' any subspace of E, then the restriction p' of p to E', defines E'

[]

1..4 Trivial and locally trivial fibre spaces

Let X and F be two spaces, E the product space, the projection of the product on X defines E as a fibre space over X, called the *trivial fibre space over X with fibre F*.

All fibres are canonically homeomorphic with F.

[]

1.5 Definition of fibre spaces by coordinate transformations

Let X be a space, (U_i) a covering of X, for each

[]

1.6 The case of locally trivial fibre spaces

The method of the preceding section for constructing fibre spaces over X will be used mainly in the case where we are given a fibre space over T over X, and where, given an open covering (U_i) of X, we consider the fibre spaces

[]

1.7 Sections of fibre spaces

Definition **1.7.1**. — *Let* (X,E,p) *b a fibre space; a* section *of this fibre space (or, by pleonasm, a section of* E *over* X*) is a map* x *of* X *into* E *such that* ps *is the the identity map of* X*. The set of* continuous *sections of* E *is noted* $\mathrm{H}^0(X,E)$.

It amounts to the same to say that s is a function the value of which at each $x \in X$ is in the fibre of x in E (which depends on x!).

The existence of a section implies of course that p is onto, and conversely if we do not require continuity. However, we are primarily interested in continuous sections. A *section of* E *over a subset* Y of X is by definition a section of $E|Y$. If Y is open, we write $\mathrm{H}^0(Y,E)$ for the set $\mathrm{H}^0(Y,E|Y)$ of all continuous sections of E over Y.

$\mathrm{H}^0(X,E)$ as a *functor*. Let E, E' be two fibre spaces over X, f an X-homomorphism of E into E'. For any section s of E, the composed map fs is a section of E', continuous if s is continuous. *We get thus a map, noted* f, *of* $\mathrm{H}^0(X,E)$ *into* $\mathrm{H}^0(X,E')$. The usual functor properties are satisfied:

a. If the two fibre spaces are identical and f is the identity, the so is f.

b. If f is an X-homomorphism of E into E' and f' an X-homomorphism of E' into E'' (E, E', E'' fibre spaces over X) then $(f'f) = f'f$.

Let (X,E,p) be a fibre space, f a continuous map of a space X' into X, and E' the inverse image of E under f.

II. Sheaves of sets

Throughout this exposition, we will now use the word *"section"* for *"continuous section"*.

2.1 Sheaves of sets

Definition **2.1.1**. — *Let* X *be a space. A* sheaf of sets *on* X *(or simply a* sheaf*) is a fibre space* (E,X,p) *with base* X*, satisfying the condition: each point* a *of* E *has an open neighbourhood* U *such that* p *induces a homeomorphism of* U *onto an open subset* $p(U)$ *of* X.

This can be expressed by saying that p is an interior map and a local homeomorphism. It should be kept in mind that, even if X is separated, E is not supposed separated (and will in most important instances not be separated).

[]

2.2

2.3 Definition of a sheaf by systems of sets

2.4 Permanence properties

2.5 Subsheaf, quotient sheaf. Homeomorphism of sheaves

2.6 Some examples

a.

b.

c.

d. **Sheaf of germs of subsets**. Let X be a space, for any open set $U \subset X$ let $P(U)$ be the set of subsets of U. If $V \subset U$, consider the map $A \longrightarrow A \cap V$ of $P(U)$ into $P(V)$. Clearly the conditions of transitivity, and of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, so that the sets $P(U)$ appear as the sets $\mathrm{H}^0(U, P(X))$ of sections of a well determined sheaf on X, the elements of which are called *germs of sets in X*. Any condition of a local character on subsets of X defines a subsheaf of $P(X)$, for instance the sheaf of *germs of closed sets* (corresponding to the relatively closed sets in U), or if X is an analytic manifold, the sheaf of germs of analytic sets, etc.

Other important examples of sheaves will be considered in the next chapter.

III. Group bundles and sheaves of groups

IV. Fibre spaces with structure sheaf

V. The classification of fibre spaces with structure sheaf

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8, 1-79 (1956)[3]

[3] https://agrothendieck.github.io/divers/thmet.pdf

THÉORÈMES DE FINITUDE POUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX

Bull.Soc. Math. France 84, 1-7 (1956)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/theorfinscan.pdf

SUR LE MÉMOIRE DE WEIL. GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS ABÉLIENNES

Sém. N. Bourbaki, 1958, exp. n 141, p. 57-71[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/memweilscan.pdf

SUR CERTAINES CLASSES DE SUITES DANS LES ESPACES DE BANACH, ET LE THÉORÈME DE DVORETZKY-ROGERS

Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8, 81-110, (1956)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/certclass.pdf

LA THÉORIE DE FREDHOLM

- This text was published in: *La théorie de Fredholm*. Bulletin de la Société Mathématique de France, Volume 84 (1956), pp. 319-384.
- [scan]
- [translation] in Russian by S. N. Krachkovskii. Matematika, 1958, Volume 2, Issue 5, 51–104

CLASSES DE FAISCEAUX ET THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

notes miméographiées, Princeton 1957. Reproduit dans SGA 6[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/RRRscan.pdf

SUR LA CLASSIFICATION DES FIBRÉS HOLOMORPHES SUR LA SPHÈRE DE RIEMANN

Amer. J. Math. 79, 121-138 (1957)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/fibholscan.pdf

UN RÉSULTAT SUR LE DUAL D'UNE C^*-ALGÈBRE

J.Math. Pures Appl., 36, 97-108 (1957)

SUR QUELQUES POINTS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

- The main ideas of the text were worked out mostly during a seminar of Homological algebra in Kansas in 1955, later improved under the influence of a correspondence with J. P. Serre and then considered for a Bourbaki redaction, the paper was written down when Grothendieck was already back to Paris for some time in the second half of 1956. It was proposed to Tannaka for the Tôhoku as an independent article at the end of 1956 and received for publication on March of 1957.
- This text was published in two parts in: Tôhoku Mathematical Journal. vol 9, n.2, 3, 1957.
- [scan]
- [translation] in English by M. L. Barr and M. Barr
- [translation] in Russian by Biblioteka Sbornika Matematika, Moskva 1961

SUR LES FAISCEAUX ALGÉBRIQUES ET LES FAISCEAUX ANALYTIQUES COHÉRENTS

- This text was published in: *Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents*. Séminaire Henri Cartan, tome 9 (1956-1957), exp. n° 2, p. 1-16
- [scan]
- [translation] by T. Hosgood

CLASSIFICATION DES GROUPES ALGÉBRIQUES SEMI-SIMPLES

C. Chevalley avec la collaboration de Pierre Cartier, Alexandre Grothendieck et Michel Lazard.

Texte révisé en 2003 par Pierre Cartier, Springer-Verlag, Berlin, 2004.[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/chev58.pdf

LA THÉORIE DE CLASSES DE CHERN

- This text was published in: *La théorie des classes de Chern*. Bulletin de la Société Mathématique de France 86 (1958), 137–154
- [scan]
- [translation] by T. Hosgood

TORSION HOMOLOGIQUE ET SECTIONS RATIONNELLES

Sém. Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. no 5, p. 1-29[2]

---

[2] https://agrothendieck.github.io/divers/torhomscan.pdf

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES EN THÉORIE DES INTERSECTIONS

Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. n° 4, p. 1-36[3]

[3]https://agrothendieck.github.io/divers/interscan.pdf

SUR UNE NOTE DE MATTUCK-TATE

- This text was published in: *Sur une note de Mattuck-Tate*. J. reine angew. Math. 200, 208-215 (1958)
- [scan]
- [translation] in Russian by Y. I. Manin. Matematika, 1960, Volume 4, Issue 2, 29–38

THE COHOMOLOGY THEORY OF ABSTRACT ALGEBRAIC VARIETIES

- The following is part of the proceedings of the international congress of mathematicians held in Edinburgh, Scotland, from 14 August to 21 August 1958, Grothendieck was already considered for the Fields medal. He says: *"Depuis l'année précédente [1957], avec mon travail sur le théorème de Riemann—Roch, j'étais promu grande vedette, et (sans que j'aie eu à me le dire en termes clairs alors) j'étais aussi une des vedettes du Congrès."* Récoltes et Semailles

- *"Le compte rendu de ce "démarrage en force" de la théorie des schémas fait l'objet de mon exposé au Congrès International des Mathématiciens à Edinburgh, en 1958. Le texte de cet exposé me semble une des meilleurs introductions au point de vue des schémas, de nature (peut-être) à motiver un lecteur géomètre à se familiariser tant bien que mal avec l'imposant traité (ultérieur) "Éléments de Géométrie Algébrique", exposant de façon circonstanciée (et sans faire grâce d'aucun détail technique) les nouveaux fondements et les nouvelles techniques de la géométrie algébrique."*
  Récoltes et Semailles

- This text was published in: *The cohomology theory of abstract algebraic varieties*. Proc. Int. Congress Math. (Edinburgh, 1958), 103-118. Cambridge Univ. Press, New York, 1960

- [scan]

EGA I

Le langage des schémas

- The IHÉS was founded in 1958 with Grothendieck and Dieudonné as its scientific members. The "Publications Mathématiques de l'IHÉS" was established in 1959 with Dieudonné as Editor. EGA I was published in Volume 4 of 1960. Grothendieck was the author and Dieudonné his collaborator.

- *"Pendant les années en question (1958–1964), le temps de Dieudonné se partageait pour l'essentiel entre la rédaction des Éléments de Géométrie Algébrique (où j'apparais malencontreusement comme auteur principal) et les rédactions Bourbaki — mis à part le piano et la cuisine (Dieudonné était à la fois fin musicien et fin cuisinier)."*
  Récoltes et Semailles

- EGA was planned to be a reference book on the foundations of algebraic geometry. As originally planned it would constitute thirteen chapters of which only four would appear (in eight volumes).

- This text was published in: *Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 4 (1960), pp. 5-228 [scan] (Éd. 1), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (in French). Vol 166. Springer-Verlag [scan] (Éd. 2).

- [review] of EGA by S. Lang. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (3): 239–246

(1961).

- Open-source [translation] in English.
- [translation] in Russian by F. V. Sirokov. *Elements of algebraic topology*, Uspekhi Mat. Nauk, 1972, Volume 27, Issue 2, 135–148

SGA 1
Revêtements Étales et Groupe Fondamental, 1960-1961[1]

[1] https://arxiv.org/abs/math/0206203

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Séminaire Henri Cartan, tome 13, Faisc. n° 1 et 2 (1960-1961)[2]

---

[2] https://agrothendieck.github.io/divers/tcgascan.pdf

Lettre à N. Bourbaki, 9.10.1960

Paris le 9.10.1960

Monsieur et cher Maître,

Je Vous remercie pour votre lettre, empreinte à la fois de sagesse et de mansuétude. Il semble vain en effet qu'un différend personnel puisse être l'occasion du départ d'une disciple. Je reconnais qu'il était vain que j'attende du Maître qu'il arbitre une querelle qui ne le concerne pas, et qu'un tel arbitrage ne pouvais résoudre rien.

Je me suis interrogé plusieurs fois pendant les années de ma collaboration avec le Maître si mes habitudes peu sociables, mon caractère passionné et ma répugnance à vaincre les répugnances d'autrui, ne me rendaient inapte à une collaboration fertile pendant les congrès. Sans plus vouloir chercher la cause ailleurs qu'en moi-même, je pense maintenant qu'il en est bien ainsi, et que j'ai atteint avant l'âge traditionnel le moment où je servirai mieux le Maître par mon départ, qu'en restant sur Ses amicales instances.

Je m'efforcerai de rester digne des enseignements que Vous m'avez prodigués pendant si longtemps et de ne pas trahir l'esprit du Maître, qui, je l'espère, restera visible dans mon travail comme par le passé.

Votre très dévoué élève et serviteur,

A. Grothendieck

Letter to N. Bourbaki, 9.10.1960[3]

Paris 9.10.1960

Dear Sir and my dear Master,

I thank You for your letter, marked by both wisdom and clemency. Indeed it seems pointless that a personal disagreement could be the occasion for the departure of a disciple. I recognize that it was pointless for me to wait for the Master to arbitrate a quarrel that did not concern him and that such arbitration would resolve nothing.

I have asked myself many times over the years of my collaboration with the Master whether my lack of social skill, my impassioned character, and my repugnance for overcoming the repugnance of others, did not render me unsuitable for a productive collaboration during the meetings. No longer wanting to search for the cause anywhere except in myself, I now think that it is better this way and that I reached earlier than the traditional age the moment when I would better serve the Master by my departure, rather than remaining as a result of His kind insistence.

I will endeavor to remain worthy of the teachings that You for so long lavished upon me and not to betray the spirit of the Master who, I hope, will remain visible in my work as it has been in the past.

Your very devoted pupil and servant,

A. Grothendieck

[3]Translated by W. Messing

EGA II

Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes

Publications Mathématiques de l'IHÉS[4]

[4] https://agrothendieck.github.io/divers/ega2.pdf

EGA III-1

Étude cohomologique des faisceaux cohérents

Publications Mathématiques de l'IHÉS[5]

[5] https://agrothendieck.github.io/divers/ega31.pdf

SGA 2
Cohomologie Locale et Théorèmes de Lefschetz Locaux et Globaux, 1961-1962[6]

[6]

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

(Extraits du Sém. Bourbaki 1957-62), Secrétariat Math. IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris, (1962)[7]

---

[7] https://agrothendieck.github.io/divers/FGAscan.pdf

THE TRACE OF CERTAIN OPERATORS

Studia Math. 20, 141-143 (1961)[8]

[8] https://agrothendieck.github.io/divers/tracopscan.pdf

SGA 3

Schémas en groupes, 1962-1964[9]

9

RÉSIDUS ET DUALITÉ,
PRÉNOTES POUR UN SÉMINAIRE HARTSHORNE 1963

R. Hartshorne, Residues and Duality, Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1966[10]

---

[10] https://agrothendieck.github.io/divers/resduascan.pdf

Letter to J. Murre, 18.7.1962[11]

July 18, 1962

My dear Murre,

I recently had some thought on finiteness conditions for Picard preschemes, and substantially improved on the results stated in the last section of my last Bourbaki talk. The main result stated there for a simple projective morphism with connected geometric fibers (namely that the pieces $\underline{\mathrm{Pic}}^P_{X/S}$ are of finite type over S) has been extended by Mumford to the case where instead of f simple we assume only f flat with integral geometric fibers, (at least if these are normal). Using his result (the proof of which is quite simple and beautiful), I could get rid of the normality assumption, and even (as in theorem 4.1. of my talk) restrict to the consideration of the two first non trivial coefficients of the Hilbert polynomials. The key results for the reduction are the following (the proofs being very technical, and rather different for (i) and (ii), except that (ii) uses (i) to reduce to the normal case; moreover (ii) uses Mumford's result and the equivalence criteria as developed in my last Seminar):

(i) Let X, Y be proper over S noetherian, let $f : X \longrightarrow Y$ be a *surjective* S-morphism, assume for simplicity of the statement that the Picard preschemes exist, then $f : \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ is of finite type (and in fact affine if S is the spectrum of a field), i.e. a subset M of $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ is quasi-compact iff its image in $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ is.

(ii) The same conclusion holds for a canonical immersion $X \longrightarrow Y$, is Y/S is projective with fibers all components of which are of dimension ≥ 3, and if X is the sub-scheme of zeros of a section over Y of an invertible sheaf $\underline{L}$ ample with respect to S.

A connected result is that for any X/S proper, and integer $n \neq 0$, the n-th power homomorphism in the Picard prescheme is of finite type.

[11] https://agrothendieck.github.io/divers/LGM1862scan.pdf

I tell you about this, namely (i), because of the method of proof, involving of course considerations of non flat descent. The fact that I do not have any good effectivity criterion does not hamper, by just recalling what the effectivity of a given descent datum means. Now it turns out that by a slightly more careful analysis of the situation, one can prove the following theorem, of a type very close to the one you have proved recently, and to some you still want to prove as I understand it.

Theorem. — *Let S be an integral noetherian scheme, X and X' proper over S and $f : X' \longrightarrow X$ a surjective S-morphism, look at the corresponding homomorphism for the Picard functors $f^\bullet : \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X'/S}$. Assume:*

a) the existence problems A and B defined below for X/S has always a solution (this is certainly true when X/S is projective).

b) the morphism $f_S : X'_S \longrightarrow X_S$ induced on the generic fiber is a morphism of descent, i.e. $\underline{O}_{X_s} \longrightarrow f(\underline{O}_{X'_s}) = h(\underline{O}_{X''_s})$ is exact. Then, provided we replace S by a suitable non empty open set, the homomorphism $f^\bullet$ is representable by a quasi-affine morphism, more specifically in the factorisation of $f^\bullet$ via the functor representing suitable descent data, $f^\bullet = vu$ with u affine and v a monomorphism (as you well know), v is in fact representable by finite direct sums of immersions.

Corollary **1**. — *Without assuming b), but instead in a) allowing X/S to be replaced by suitable other schemes X_i finite over X, the same conclusion holds, namely $f^\bullet$ is representable by quasi-affine morphisms.*

This follows from the theorem, using a suitable factorisation of f. For instance, using Chow's lemma and the Main existence theorem in my first talk on Picard schemes, one gets:

Corollary **2**. — *Assume X/S proper satisfies the condition*

a') for every X' finite over X, there exists a non empty open subset S_1 of S such that problem A for X' S_1 has always solution (this condition is satisfied if X/S is projective).

Then provided we replace S by a suitable S_1 non empty and open, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ exists, is separated, its connected components are of finite type over S.

N.B. The proof does not give any evidence towards the fact that in the theorem, one could replace "quasi-affine" by "affine". This is true however over a field, because a quasi-affine algebraic group is affine!

It would be interesting to have a counterexample, say, over a ring of dimension 1 such as $k[t]$, X and X' projective and simple over S and $X' \longrightarrow X$ birational, or alternatively, X and X' projective and normal over S, and $f : X' \longrightarrow X$ finite. A counterexample in the latter case would of course provide a counterexample to the effectivity problem for a finite morphism raised in my first talk on descent...

"Problem A" is the following: given X/S and Module F on X, to represent the functor on the category of S-preschemes taking any S'/S into a one-element or into the empty set, according as to whether F' on X'/S' is flat with respect to S' or not, where $X' = X \times_S S'$, $F' = F \times_S S'$.

Given X/S, we say that "Problem A for X/S has always a solution" if for every constant F' on some X'/S', the previous functor on Sch$/S'$ is representable by a S'-scheme of finite type. The main step in my proof of existence of Hilbert schemes shows that this condition is satisfied when X/S is projective. In the proof, essential use is made of the Hilbert polynomial, in fact we get a solution as a disjoint sum of subschemes of S corresponding to various Hilbert polynomials. Still I would expect that the functor is representable as soon as X/S is proper. In view of the application we have in mind here, it would be sufficient (for any integral S) to find in S a non empty open set S_1 such Problem A has always a solution for $X_1 = X \times_S S_1$ over S_1. To prove this weaker existence result, it is well possible that a reduction to the projective case is possible, using Chow's lemma and some induction on the relative dimension perhaps. I also would expect that a proof will be easier when working over a complete noetherian local ring, hence the case of a general noetherian local ring by flat descent. Ans it is well possible that, putting together two such partial results, a proof of the existence in general could be obtained. (I met with such difficulties already time ago in a very analogous non projective existence problem, which beside I did not solve so far!). This problem A has been met also by Hartshorne (A Harvard Student), but I doubt he will work seriously on it. Thus I now wrote you in the hope you may be interested to have a try on this problem. As a general fact, our knowledge of non projective existence theorems is exceedingly poor, and I hope this will change eventually.

Sincerely yours.

A. Grothendieck

Letter to J. Tate, 5.2.1962

Paris Feb 5, 1962

Dear John,

In connection with my Bourbaki talk, I pondered again on Picard schemes. For instance, as I told Mumford, I proved that if X/S is projective and simple, then $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ is of finite type over S. More generally, the decomposition of $\mathrm{Pic}_{X/S}$ according to the Hilbert polynomials (in fact, the first two non trivial coefficients of the polynomial suffice) consists of pieces which are of finite type, hence projective over S. Another way of stating this is to say that a family of divisors D_i on the geometric fibers of X/S is "limited" iff the projective degrees of the D_i and D_i^2 are bounded.

Another result, of interest in connection with your seminar, is a proof of the fact that, for an abelian scheme A/k, k a perfect field, the absolute formal scheme of moduli over $\mathbb{W}_\infty(k)$ is simple over k. This comes from the following general fact: Let X_0/S_0 be simple, X_0'/X_0 étale, S_0 subscheme of S defined by an ideal J of square 0. Let $\xi_0 \in \mathrm{H}^2(X_0, \mathfrak{G}_{X_0/S_0} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} J)$ and $\xi_0' \in \mathrm{H}^2(X_0', \mathfrak{G}_{X_0'/S_0} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} J)$ be the obstruction for lifting. Then ξ_0' is the inverse image of ξ_0 under the obvious map. As a consequence, if X_0/S_0 is abelian, taking $X_0' = X_0$, $X_0' \longrightarrow X_0$ multiplication by n prime to the residue characteristic, we get $\xi_0 = n^*(\xi_0)$. If $S = \mathrm{Spec}\,\Lambda$, Λ local artin, and $mJ = 0$, then we are reduced to an obstruction in the H^2 of the reduced $X_0 \otimes_{\Lambda_0} k = A$, satisfying $\xi = n^*(\xi)$ for n prime to p. Using the structure

$$\mathrm{H}^*(A, \mathfrak{G}_{A/k}) \simeq \bigwedge^{*} \mathrm{H}^1(A, \mathscr{O}_A) \otimes t_A,$$

we get $n^*(\xi) = n^3 \xi$, hence $(n^3 - 1)\xi = 0$. Taking $n = -1$ we get $2\xi = 0$, hence $\xi = 0$, and we win!

I just noticed the proof does not give any information for residue char. $= 2$! Here is a simple proof valid in any char.: Consider the obstruction η_0 for lifting $X_0 \times_{S_0} X_0$, then $\eta_0 = \xi_0 \otimes 1 + 1 \otimes \xi_0$, and η_0 is invariant under the *automorphism* $(x, y) \rightsquigarrow (x, y + x)$ of $X_0 \times_{S_0} X_0$. Thus we get an element $\xi = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i \wedge e_j$ in $\mathrm{H}^2(A, \mathscr{O}_A) = \bigwedge^2 t$, s.th. $\eta = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i' \wedge e_j' + \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i'' \wedge e_j''$ in $\bigwedge^2 (t \oplus t)$ is *invariant* under $(x,y) \rightsquigarrow (x,y+x)$, carrying $e_i' \rightsquigarrow e_i' + e_i''$ and $e_i'' \rightsquigarrow e_i''$, hence trivially $\xi = 0$!

As a consequence, we get that the scheme of moduli for the *polarized* abelian schemes, with polarizations degree d, is simply over $\mathbf{Z}$ at all those primes p which do not divide d. This comes from the fact that the obstruction to polarized lifting lies in a module $\mathrm{H}^2(A,E)$, where E is an extension (the "Atiyah extension") (*)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow E \longrightarrow \mathfrak{G}_{A/k} \longrightarrow 0$$

whose class c in $\mathrm{H}^1(A,\Omega^1_{A/k})$ is just the Chern class $\frac{dL}{L}$ of the invertible sheaf L on A defining the polarization. Now in the exact sequence of cohomology for (*), the map

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^i(\mathfrak{G}_{A/k}) & \xrightarrow{\partial^{(i)}} & \mathrm{H}^{i+1}(\mathcal{O}_A) \\ \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\ \bigwedge^i t' \otimes t & & \bigwedge^{i+1} t' \end{array} \qquad t = t_A, \quad t' = t_{\hat{A}}$$

is trivially described in terms of

$$c \in \mathrm{H}^1(A,\Omega^1_{A/k}) \simeq \mathrm{Hom}(t,t'),$$

where the homomorphism $c : t \longrightarrow t'$ is just the tangent map for $\varphi : A \longrightarrow \hat{A}$ defined by the polarization. This map being surjective by assumption, $\partial^{(i)}$ is surjective, hence $\mathrm{H}^i(E) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathfrak{G}_{A/k})$ is injective, in particular

$$\mathrm{H}^2(E) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathfrak{G}_{A/k})$$

is *injective*. As the obstructions obtained in $\mathrm{H}^2(\mathfrak{G}_{A/k})$ are zero, the same holds for the polarized obstructions in $\mathrm{H}^2(E)$, hence the assertion of the simplicity. (If however $p|d$, simplicity *does not hold at any* point of M over p!)

Using the simplicity for the formal scheme of moduli of abelian varieties, I can prove the following:

Let X/Λ be flat, proper, $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X_0,\mathcal{O}_0)$, where Λ is local artin with residue field k. Assume $\mathrm{Pic}_{X_0/k}$ exists, and is *simple* over k, i.e. $\dim \mathrm{Pic}_{X_0/k} = \dim \mathrm{H}^1(X_0,\mathcal{O}_{X_0})$ (always true in char 0). Then

a) $\mathrm{Pic}^0_{X/\Lambda}$ exists and is an *abelian* scheme over Λ.

b) The "base extension property" holds for $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{O}_X)$ in dimension 1, and more generally in any dimension i such that

$$\bigwedge^i \mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{O}_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_0, X_0)$$

is *surjective*, and $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X)$ is free over Λ.

Idea of proof:

a) $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$ is constructed stepwise. Having $\mathrm{Pic}^0_{X_{n-1}/k} = A_{n-1}$, to get A_n we first lift *arbitrarily* A_{n-1} to an abelian scheme A'_n. We then try to construct the can. invertible "Weil sheaf" on $X_n \times_{\Lambda_n} A'_n$, extending the given Weil sheaf on $X_n \times_{\Lambda_{n-1}} A_{n-1}$. The obstruction lies in

$$\mathrm{H}^2(X_0 \times A_0, \mathscr{O}_{X_0 \times A_0}) \simeq \mathrm{H}^2(\mathscr{O}_{X_0}) \times \mathrm{H}^2(\mathscr{O}_{A_0}) \times \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{X_0}) \otimes \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{A_0})$$

and in fact, as easily seen, in the last factor $\mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{O}_{X_0}) \otimes \mathrm{H}^1(A_0, \mathscr{O}_{A_0}) \simeq t_{A_0} \otimes \mathrm{H}^1(A_0, \mathscr{O}_{A_0}) \simeq \mathrm{H}^1(A_0, \mathfrak{G}_{A_0/k})$. This space is exactly the group operating in a simply transitive way on the set of all extensions of A_{n-1}. Thus we can *correct* A'_n in just one way to get an A_n with a "Weil sheaf" on it!

This does it.

b) Let ω be the conormal sheaf to the unit section of $A = \mathrm{Pic}^0_{X/S}$, thus ω is *free* because A/S is simple, and by definition of $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ we have

$$\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_A) \simeq \mathrm{Hom}(\omega, \mathscr{O}_S)$$

This description holds also after any base extension, hence the fact that $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_S)$ is free over Λ and its formation commutes with base extension. This implies also $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{O}_{\mathscr{X}_i})$ surjective, hence $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_0, \mathscr{O}_{\mathscr{X}_i})$ is surjective for the i's as in the theorem, ok.

Corollary. — *Let A/S be any abelian scheme, then the modules $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{O}_A)$ on S are locally free and in fact $\simeq \bigwedge^i \mathrm{R}^1 f_*(\mathscr{O}_A)$. If $\mathrm{Pic}_{A/S}$ exists, then $\mathrm{Pic}^0_{A/S}$ is open and is an abelian scheme over S.*

(Moreover, biduality holds, as follows easily from the statement over a field...)

Corollary. — *Let $f : X \longrightarrow S$ be flat, proper, $k(s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ for every s, let $s \in S$ be such that $dim\mathrm{H}^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = dim\mathrm{Pic}_{X_s/k(s)}$, (the latter defined, if $\mathrm{Pic}_{X_s/k(s)}$ is not known to exist, in terms of the formal Picard scheme). Then $\mathrm{R}^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ is free at s.*

This is always applicable if char $k = 0$.

I do not know if, in the case considered, the $\mathrm{R}^i f_*(\mathcal{O}_X)$ or even $\mathrm{R}^i f_*(\Omega^j_{X/S})$ are also free at s, even in char 0. It is true for $f_*(\Omega^1_{X/S})$ whenever we know that $\mathrm{dim}\mathrm{H}^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \mathrm{dim}\mathrm{H}^0(X_s, \Omega^1_{X_s})$, for instance if char $k(s) = 0$ and $f : X \longrightarrow S$ is projective and simple. (If *moreover* S is reduced, Hodge theory implies *all* $\mathrm{R}^i f_*(\Omega^j_{X/S})$ are free at s; but if S is artin, I have no idea!)

I now doubt very much that it be true in general that $\mathrm{Pic}^\tau_{X/S}$ is flat over S, or even only universally open over S, when X/S is simply. Here is an idea of an example, inspired by Igusa's surface. Let A/S be an abelian scheme, G a finite group of automorphisms of A. If G operates without fixed points on B/S projective and simple over S, with $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} g_*(\mathcal{O}_B)$, we construct $X = B \times_G \hat{A}$ which is an abelian scheme over $Y = B/G$, and one checks

$$\mathrm{Pic}_{X/S} \simeq \mathrm{Pic}_{Y/S} \times_S (\mathrm{Pic}_{\hat{A}/S})^G$$

(where upper G denotes the subscheme of invariants), hence

$$\boxed{\mathrm{Pic}^\tau_{X/S} \simeq \mathrm{Pic}^\tau_{Y/S} \times_S A^G}$$

Hence for getting examples of bad $\mathrm{Pic}^\tau_{X/S}$, we are led to study schemes of the type A^G, with S say spectrum of a discrete valuation ring V. Thus we are led to the questions:

a) Can it occur that there are components of $C = A^G$ which do not dominate S? For instance, A_1^G = unit subgroup (set theoretically, or even scheme-theoretically) and $A_0^G \neq$ unit subgroup set theoretically - where A_0, A_1 are the special and the general fibers.

b) If $C_1 = A_1^G$ is connected (for instance is the unit subgroup), and hence $C^\circ = C_0^\circ \cup C_1^\circ$ is open, can it occur that C° is non flat over S [for instance $C_1 = \{e\}$, $C_0^\circ \neq \{e\}$]?

such that multiplication $p : \mathrm{Pic}_{X/S} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}$ is *not* universally open, i.e. such that there exists an irreducible component C of $\mathrm{Pic}_{X/S}$ not dominating S, but such that pC is contained in a component dominating S. [N.B. if n prime to all residue char., multiplication by n in any $\mathrm{Pic}_{X/S}$ is étale.]

Best regards to Karin, kids etc.

Schurik

P.S. I just proved: If $X \longrightarrow S$ is *simple* and *projective*, then $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ is *projective* over S. Method:

a) From the fact that the fibers of $\mathrm{Pic}^{0}_{X/S}$ are proper, follows that $\mathrm{Pic}^{0}_{X/S}$ is proper over S, hence closed in $\mathrm{Pic}_{X/S}$, hence easily that $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ is *closed* in $\mathrm{Pic}_{X/S}$. It remains to prove it is of *finite type* over S – hence proper over S, and quasi-projective over S, hence projective.

b) For every $n > 0$, the kernel of $\mathrm{Pic}_{X/S} \xrightarrow{n} \mathrm{Pic}_{X/S}$ is of finite type over S [and even more: the multiplication μ by n is of finite type, hence finite]. If n is prime to the residue characteristics, this follows from the fact that μ is *étale* and has finite fibers. This reduces to the case S of char $p > 0$, $n = p$. Then I use a technique of descent involving the "relative p-power scheme" $(X/S)^{(p)}$, following a suggestion of Serre.

c) For variable $s \in S$ (S noetherian), the Néron-Severi torsion group of X_s remains of bounded order. This can be shown using the method of Matsusaka's proof for the finiteness of the "torsion group".

From a), b), c), the theorem follows.

Remark: Using the Picard-Igusa inequality for $\rho =$ rank of Néron-Severi, and Lefschetz type theorems I told you about, one gets also that $\rho(X_s)$ remains bounded for $s \in S$ (S noetherian).

Question: Is $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ always of finite type over S, under merely the usual assumptions for existence of $\mathrm{Pic}_{X/S}$? I have no proof even if $X \longrightarrow S$ is normal! Same question for ρ. This seems related to the question of uniform majorization of the Mordell-Weil-Néron-Lang finiteness theorem, for a *variable* abelian variety.

Letter to H. Hironaka, 6.7.1962[12]

Neuilly July 6 1962

Dear Hironaka,

I had a little thought over our conversation last Tuesday, it occurred to me that the type of argument I used yields in fact the following stronger result:

Theorem. — *Let* $f : X \longrightarrow Y$ *be a proper morphism of analytic spaces over* $\mathbf{C}$, *let* $y \in Y$, $Y_n = (\underline{O}_y / \underline{m}_y^{n+1})$, $X_n = X \times_Y Y_n$,

$$\mathrm{Pic}(X_y) = \mathrm{R}^1 f(\underline{O}_X^\bullet)_y = \varinjlim \mathrm{Pic}(f^{-1}(U)) \quad y \in U,$$

$$\mathrm{Pic}(\hat{X}_y) = \varprojlim \mathrm{Pic}(X_n),$$

and consider the canonical homomorphisms

$$\mathrm{Pic}(X_y) \xrightarrow{u} \mathrm{Pic}(\hat{X}_y) \xrightarrow{v_n} \mathrm{Pic}(X_n)$$

Then the following are true:

(i) The inverse system $(\mathrm{Pic}(X_n))_{n \in \mathbf{N}}$ *satisfies the condition of Mittag-Leffler (even with Artin-Riesz type of uniformity).*

(ii) $Imv_n = Imv_n u =$ *(in virtue of (i)) set of universal images of* $\mathrm{Pic}(X_n)$ *in the inverse system* $(\mathrm{Pic}(X_m))_{m \in \mathbf{N}}$.

(iii) In order for u *to be an isomorphism, it is nec and suff that* $\mathrm{R}^1 f_*(\underline{O}_X)_y$ *is a module of finite length.*

In fact (i) can be more precise:

(ibis) In the inverse system $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/\mathbf{C}})_{n \in \mathbf{N}}$ *of analytic groups, the system of the "Néron-Séveri groups" is constant for n large, whereas for* $m > n$ *and n large, the Kernel and Cokernel of*

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X_m/\mathbf{C}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/\mathbf{C}}$$

are just vector groups.

[12] https://agrothendieck.github.io/divers/LGH662scan.pdf

Parts (i) and (ii) yield the

Corollary **1**. — *The following conditions are equivalent*

(i) *There exists an open $U y$ such that $X U$ is projective over U*

(ii) *For every n, X_n is a projective analytic space.*

For instance, if $\dim X_0 \leq 1$, then (ii) and hence (i) holds.

The proof of the theorem only uses Grauerts analogues of the algebraic theorems of finiteness and comparison for direct images (of his blue paper) and the usual exact sequences $0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \underline{O} \longrightarrow \underline{O}^{\bullet} O$, together with some standard use of Mittag-Leffler story and five lemma. It is valid in fact for any $\mathrm{H}^i(\underline{O}^{\circ})$, not only $i = 1$ (which seems the only one however to have geometric significance).

In the case of a formal scheme proper over a complete noeth. local ring with residue field of *characteristic* 0, the analogon of the previous theorem (reducing to statements (i), (i bis)) hold true, and I wrote a purely algebraic proof of this, relying only on the fact that the kernel and Cokernel of $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_{n+1}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n}$ are without torsion, and Néron's finiteness theorem; in particular, the analogon of corollary 1 holds true in this case. These results break down of course in car. > 0.

However, using the (as yet unwritten !) Gaga of Serre-Grauert-Remmert-Grothendieck (of Grauert-Remmerts paper, complemented by the method of an old talk of mine in Cartan's Seminar, to recover the case of proper morphisms of schemes from the projective one, via Chow's lemma…), the analytic theorem above yields an interesting intrinsic property of analytic algebras over $\mathbf{C}$, with respect to algebraic geometry over such a local ring:

Theorem. — *Let A be an analytic algebra over* $\mathbf{C}$ *(we can suppose A to be the ring of convergent power series in n variables), $\hat{A}$ its completion, Y and $\hat{Y}$ the spectra, X a proper scheme over Y, $\hat{X} = X \times_Y \hat{Y}$. Then*

(i) *The inverse system* $(\mathrm{Pic}(X_n))$ *satisfies MLAR (as stated above, this depends only on the car. 0 assumption for the residue field).*

(ii) $\mathrm{Pic}(X)$ *and* $\mathrm{Pic}(\hat{X})$ *have same image in* $\mathrm{Pic}(X_n)$, *– namely the group of "universal images". (NB recall* $\mathrm{Pic}(\hat{X}) \simeq \varprojlim \mathrm{Pic}(X_n)$*).*

(iii) In order for $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\hat{X})$ *to be an isomorphism, it is necessary and sufficient that* $\mathrm{supp}\, \mathrm{R}^1 f_*(\underline{O}_X) \subset (y)$, *i.e.* $\mathrm{H}^1(X, \underline{O}_X)$ *of finite length over A. (NB It amounts also to the same to ask that the inverse system of the subgroups* $\mathrm{Pic}'(X_n)$ *of universal images is constant for large n).*

We get for example:

Corollary **1**. — *The following conditions are equivalent:*

(i) X/Y *projective*

(ii) $\hat{X}/\hat{Y}$ *projective*

(iii) For every n, X_n/Y_n *projective.*

This applies for instance if $\dim X_0 \leq 1$.

Now applying your theorem of *resolution of singularities*, and Mumford's method of relating the local Picard group of A to the global Picard group of a regular scheme dominating A birationally, one gets from the last statement (iii) of last theorem:

Corollary **2**. — *Let A be as above, assume* $Y' = Y - (y)$ *regular, and let* $\hat{Y}' = \hat{Y} - (\hat{y})$. *Then* $\mathrm{Pic}(Y') \longrightarrow \mathrm{Pic}(\hat{Y}')$ *is an isomorphism.*

This explains "à priori" (when A is normal) why Mumford was able to introduce on the group of divisor-classes of A a structure of an analytic group (which in fact is algebraic...), which from the algebraic point of view should be possible rather for the group of divisors classes of the completion $\hat{A}$; of course Mumford uses directly the same kind of argument I used.

I do no know if in the last statement, the hypothesis that Y' is regular ("y isolated singularity") is essential; we could dispense with it and replace it by "A reduced" if you can prove by your theory of resolution the following: if $f : X \longrightarrow Y$ is proper "birational", X regular, then $\mathrm{R}^1 f_*(\underline{O}_X) = 0$. I understand you prove this if Y also is regular (which is easily checked by your theory), but I wonder if this is really needed. I would not be surprised either if in this statement, Y' can be replaced by any open subset of Y (replacing of course $\hat{Y}'$ by the inverse image of the latter). Moreover, I would expect the analogous statements to hold for π_1, more generally for all "topological" invariants as Weil homology, homotopy groups etc, that can be defined for schemes. This should be related to the fact that all these invariants vanish for the geometric fibers of the morphism $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$. This is easy to check at least for π_0 (and is true in fact for any henselian ring which is a "good" ring); however I do not know if this is true also for π_1.

Besides, I would not be surprised if most of the previous results (namely parts (ii) and (iii) of the second theorem, and the two corollaries, as well as the conjectures of the previous sections) did hold true for any "good" ring which is henselian or at least for the "henselian closures" of the local rings arising from algebras of finite type over a field, or over the integers, - although I do not have any result along these lines (except those stemming from my remark on $\overline{k}_0$). This can be stated of course directly in terms of conjectures for the latter local rings without explicit reference to a henselian closure, for instance corollary 2 would yield the conjectural statement: Let A be a local ring of an algebra of finite type over a field, $\hat{A}$ its completion, Y and $\hat{Y}$ the spectra, Y' and $\hat{Y}'$ the complements of the closed points, then any invertible sheaf on $\hat{Y}'$ can be defined by an invertible sheaf on some Y_1', where Y_1 is local and $Y_1 \longrightarrow Y$ is étale with trivial residue field extension (i.e. inducing an isomorphism for the completions $A \longrightarrow A_1$). I wonder what information is given by Mumford's example in his blue paper, p.16, which I believe yields a case where the invertible sheaf considered does not come from an invertible sheaf on Y'? I was not able to understand his construction.

Anyhow, one should be able to determine whether or not the analytic algebras over $\mathbf{C}$ have any significant intrinsic property which is not shared by all "good" henselian rings with residue field of car. 0 (I recall that by good I mean "quotient of a regular local ring B such that the fibers of $\mathrm{Spec}\,\hat{B} \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ are universally regular).

Please give my regards to Waka, and also Mireille's; she just got the parcel from Waka, and was extremely pleased, in fact, she slipped into her new bed-shirt on the sopt, and is delighted by it in every respect.

Sincerely yours

EGA III-2
Étude cohomologique des faisceaux cohérents

Publications Mathématiques de l'IHÉS[13]

[13] https://agrothendieck.github.io/divers/ega32.pdf

SGA 4

Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, 1963-1964[14]

[14]

Letter to M. Atiyah, 14.10.1963
(On the Rham cohomology of algebraic varieties)
Extract from
Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 29 (1966), p. 95-103[15]

…In connection with Hartshorne's seminar on duality, I had a look recently at your joint paper with Hodge on "Integrals if the second kind"[16]. As Hironaka has proved the resolution of singularites[17], the "Conjecture C" of that paper (p. 81) holds true, and hence the results of that paper which depend on it. Now it occurred to me that in this paper, the whole strength of the "Conjecture C" has not been fully exploited, namely that the theory of "integrals of second kind" is essentially contained in the following very simple

Theorem **1**. — *Let X be an affine algebraic scheme over the field* $\mathbf{C}$ *of complex numbers; assume X regular (i.e. "non singular"). Then the complex cohomology* $\mathrm{H}^*(X, \mathbf{C})$ *can be calculated as the cohomology of the algebraic De Rham complex (i.e. the complex of differential forms on X which are "rational and everywhere defined").*

This theorem had been checked previously by Hochschild and Kostant when X is an affine homogeneous space under an algebraic linear group, and I think they also raised the question as for the general validity of the result stated in theorem 1.

[15] https://agrothendieck.github.io/divers/RCAVscan.pdf

[16] M. F. Atiyah and W. V. D. Hodge, Integrals of the second kind on an algebraic variety, *Annals of Mathematics*, vol. 62 (1955), p. 56-91. This paper is referred to by A-H in the sequel.

[17] H. Hironaka, Resolution of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Annals of Maths.*, vol. 79 (1964), p. 109-326.

EGA IV-1

Étude locale des schémas et des morphismes de schémas

Publications Mathématiques de l'IHÉS[18]

[18] https://agrothendieck.github.io/divers/ega41.pdf

FORMULE DE LEFSCHETZ ET RATIONALITÉ DES FONCTIONS L

Sém. N. Bourbaki, 1966, exp. no 279, p. 41-55[19]

---

[19] https://agrothendieck.github.io/divers/lefsLscan.pdf

Lettre à J.P. Serre, 12.8.1964[20]

Bures le 12.8.1964

Mon cher Serre,

Je commence à avoir de faibles lumières sur la façon de faire des VA avec les cycles algébriques équivalentes à zéro d'une variété projective non singulière X (sur un corps alg clos k). Si X est connexe de dimension n, je sais associer à chaque entier i compris entre 1 et n une VA $J^i(X)$, jouant le rôle d'une "jacobienne intermédiaire" au sens de Weil, correspondant à des classes de cycles de codimension i (pour une relation d'équivalence que je ne sais pas bien identifier pour l'instant, mais qui mérite certainement d'être appelée "équivalence d'Albanese"). Je suis moralement sûr que ce sont "les bonnes", bien que je n'ai pas prouvé grand-chose dessus pour l'instant ; par contre, j'ai des conjectures en pagaille. Je te signale seulement que $J^1 = \mathrm{Pic}^\circ$ et $J^n = \mathrm{Alb}^\circ$, que J^i et J^{n+1-i} sont canoniquement duales l'une de l'autre, que $\dim J^i \leq \frac{1}{2} b_{2i-1}$ (nombre de Betti) - de façon plus précise $T_\ell(J^i)$ est un quotient d'un sous-module de $\mathrm{H}^{2i-1}(X, \mathbf{Z}_\ell(i))$ (et quand on sera plus savant, on saura pruver que c'est même un sous-module dudit), en caractéristique 0 on peut également remplacer la cohomologie de Weil par la cohomologie de Hodge $\mathrm{H}^i(X, \underline{\Omega}_X^{i-1})\ldots$

Moyennant un certain nombre de choses non prouvées (qui risquent d'ailleurs d'être vaches) le théorème de positivité de Hodge se ramène à l'énonce suivant, que je ne sais pas prouver, et que j'ai envie de te communiquer car il est bien terre à terre. Moralement, il s'agit de prouver que dans le cas où $\dim X = 2m-1$, l'autodualité de J^m (qui s'exprime par une classe de correspondance divisorielle sur $J^m \times J^m$ *symétrique*, donc provenant - du moins modulo le facteur 2- d'un élément du groupe de Néron Severi de J^m) est *positive* i.e. l'élément en question de Néron-Severi est ample, i.e. une polarisation. Pratiquement, cela s'explicite ainsi : Soit T une variété de paramètres connexe non singulière munie d'un point marqué a, z une classe de cycles de codimension m sur $T \times X$ (à équivalence linéaire près, mettons), telle que $z(a) = 0$ dans X, soient p et q les deux projections de $T \times T \times X$

[20] https://agrothendieck.github.io/divers/LGS12864scan.pdf

sur $T \times X$, r sa projection sur $T \times T$, considérons

$$D = r_*(p^*(z)q^*(z))$$

qui est une classe de diviseurs sur $T \times T$, que nous considérons comme une classe de correspondance divisorielle sur $T \times T$. Si $A = \mathrm{Alb}^\circ(T)$ (NB si tu veux, tu peux supposer $T = A$ et a l'origine), elle provient donc d'une classe de correspondance sur $A \times A$, évidemment symétrique. Soit N le "noyau" de cette classe (i.e. le noyau de $A \longrightarrow$ (duale de A) qu'elle définit), on obtient alors une classe de correspondance symétrique sur $J \times J$, où $J = A/N$. A prouver que cette dernière est *positive* ! Je me demande si les spécialistes "abéliens" pourraient avoir une idée sur une telle question, peut-être Matsusaka ? Ou toi-même ? Notes d'ailleurs que cette question te dévoile pratiquement le méthode de construction des J^i généraux ; si tu veux, tu peux te borner aussi au cas où te disposes d'une sous-variété de codimension $m-1$ Y de X, non singulière si tu y tiens, où $T = \mathrm{Pic}^\circ(Y)$, considéré comme paramétrant les diviseurs alg équiv à zéro de Y, mais considérés comme classes de cycles de codimension m de X.

Merci pour la copie de la lettre à Ogg !

Bien à toi

EGA IV-2

Étude locale des schémas et des morphismes de schémas

Publications Mathématiques de l'IHÉS[21]

[21] https://agrothendieck.github.io/divers/ega42.pdf

SGA 5

Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, 1965-1966[22]

22

LE GROUPE DE BRAUER I : ALGÈBRES D'AZUMAYA ET INTERPRÉTATIONS DIVERSES

Sém. N. Bourbaki, 1966, exp. no 290, p. 199-219[23]

---

[23] https://agrothendieck.github.io/divers/bra1scan.pdf

LE GROUPE DE BRAUER II : THÉORIES COHOMOLOGIQUES

Sém. N. Bourbaki, 1966, exp. no 297, p. 287-307[24]

---

[24] https://agrothendieck.github.io/divers/bra2scan.pdf

Lettre à J. Dieudonné, 29.9.1965[25]

29.9.1965

Cher Dieudonné,

Merci de ta lettre du 24 et pour la table des matières des par. 16 à 19. Je serais content de recevoir à l'occasion la table des matières provisoire des par. 20 et 21 ; d'accord pour les joindre au fascicule 4 du Chap IV. Mais comment vaux-tu subdiviser mon ancien par.20, et quels seront les titres des deux morceaux ? Comme je commence à me perdre dans le plan, et qu'il est parfois commode de pouvoir référer sans trop déconner à un n° de paragraphe, je te donne ici ce qui me semble être le plan actuel, dis-moi si tu es d'accord :

20. ???
21. ???
22. Systèmes linéaires, compléments sur le groupe de Picard.
23. Grassmaniennes.
24. Formes lisses, singularités quadratiques ordinaires.
25. Sections hyperplanes et bordel.
26. Résultant et discriminant.
27. Extensions infinitésimales.

Le 25. risque d'ailleurs d'être fort long, et je te vois déjà vouloir le subdiviser en deux ! Pourtant, $27 = 3^3$ est un bien joli nombre !

Il n'est pas question que je publie l'ex-Appendice au par.18 sous mon nom ; ta rédaction n'a à peu près plus rien de commun avec les vagues notes manuscrites que je t'avais passées, si même je t'en ai jamais passé, et ne me suis borné à te dire : il n'y a qu'à faire pareil que pour les anneaux complets…Il serait d'autre part dommage que ton travail de mise au point soit perdu pour les éventuels utilisateurs

[25] https://agrothendieck.github.io/divers/LGD29965scan.pdf

(il finit toujours par s'en trouver…). C'est pourquoi je te demande de bien vouloir reconsidérer la question d'en faire un "joint paper".

Pour par. 20, 10.9.1, il faut bien entendu utiliser le fait que l'ensemble des points de Z_λ en lesquels F_λ restreint à la fibre est de prof > 0 donné, est *constructible* (on a même du prouver au par. 12 qu'il est ouvert, avec les hypothèses de platitude et de présentation finie qu'on a faites). Comme son image inverse dans Z est tout, c'est que c'est déjà tout un peu plus loin que λ. C'est vraiment toujours le même argument qui revient !

Bien à toi

A. Grothendieck

Letter to J. Dieudonné, 29.9.1965

29.9.1965

Dear Dieudonné,

Thank you for the letter of the 24th and for the table of contents of par. 16 to 19. I would be happy to receive one day the tentative table of contents for par 20 and 21. It's ok to adjoin them to volume 4 of Ch. IV. But how are you going to subdivide my old par. 20 and what will be the titles of the two parts? Since I am beginning to be lost in the plan and it is often convenient to be able to refer to (without saying too many stupid things) to a number in a paragraph, I give you here what seems to me to be the actual plan, tell me if you agree.

20. ???

21. ???

22. Linear systems complements about the Picard group

23. Grassmanians

24. Smooth forms ordinary quadratic singularities

25. Hyperplane sections et bordel

26. Resultant and discriminant

27. Infinitesimal extensions

The 25th is at risk in addition of being too long and you may wish to subdivide it into two. Still $27 = 3^3$ is a very pretty number!

It is out of the question that I should publish the appendix to para. 18 under my name. Your formulation (writeup) has almost nothing in common with the vague manuscript notes that I sent to you, and limiting myself to saying: Even if I had given you any you just have to do the same as for complete rings…It would be on the other hand a pity if your work about its formal setting should be lost for the possible users (il finit toujours par s'en trouver…) There can always be some to be found. That is why I ask you to reconsider the question of making a "joint paper".

As for par. 20, 10.9.1 it is of course necessary to use the fact that the set of points of Z_λ where F_λ restricted to the fiber is of the depth $> n$ given is *constructible* (we have to prove the same meme in par. 12 that it is open with the assumption of flatness and of finite presentation which we make). Since its inverse image in Z is everything that is already a little further than than λ. This is really always the same argument qui revient!

That repeats itself.

Bien à toi

A. Grothendieck

LETTRE À P. DELIGNE
10.12.1965

- Letter about duality and ℓ-adic cohomologies.
- Scan

10.12.1965

Cher Deligne,

[Je vous propose une simplification pour la démonstration du théorème de dualité, qui permet d'éviter tout recours au théorème de pureté relative. Vous vous rappelez qu'on était réduit au cas où $f : X \longrightarrow Y$ est de dimension relative 1, $F = A_X$ et $G = A_Y$. Le procédé de passage à la limite de Exp VI, par. 6, permet de supposer la base noethérienne, et même si on y tient de dimension finie (car de type fini sur $\mathbf{Z}$). On raisonne par récurrence sur $n = \dim X$. Si $n = 0$, on sait le vérifier. Supposons le théorème démontré en dimension $< n$. Se localisant sur Y, on peut supposer Y strictement local. Alors, si y est son point fermé, on a $\dim(Y - y) = n$, et comme on est réduit à prouver le théorème séparément pour $X \times_Y (Y - y)$ et $X \times_Y y$, on gagne. — Autre remarque : le théorème de dualité peut se démontrer, essentiellement de la même façon et avec le même énoncé, pour un morphisme lisse $f : X \longrightarrow Y$ compactificable, lorsque Y est muni d'un faisceau d'anneaux A quelconque tel que il existe un entier n premier aux caractéristiques résiduelles annulant A, et X d'un faisceau d'anneaux B, et f étant donné comme morphisme de (X, B) dans (Y, A), de sorte qu'on a un homomorphisme de faisceau d'anneaux $f^{-1}(A) \longrightarrow B$. On définit alors

$$f^!(K^\bullet) = \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{f^{-1}(A)}(B, f^{-1}(K) \otimes T_{X/T} 2d).$$

La définition de l'homomorphisme trace et la démonstration du théorème de dualité se décomposent alors en le cas où $f^{-1}(A) \longrightarrow B$ est un isomorphisme, qui se traite comme le cas $A = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_Y$, et le cas où $f = \mathrm{id}$, qui est trivial. Je pense qu'il vaut le coup d'inclure cette forme générale du théorème de dualité, soit de prime abord, soit à la fin dans un numéro-page. Je n'ai pas regardé si par hasard il pourrait se déduire du cas particulier $A = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_Y$ comme simple corollaire, mais ça m'étonnerait. La même remarque s'applique d'ailleurs également au théorème de dualité local, qui s'énonce pour des faisceaux d'anneaux plus généraux que le faisceau constant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.]

Il me semble que la relation de nature transcendante qui lie la cohomologie de De Rham ou de Hodge aux cohomologies ℓ-adiques, lorsque le corps de base est $\mathbf{C}$, via la cohomologie entière, devrait avoir analogue lorsque le corps de base est algébriquement clos value complet non archimédien, à corps résiduel de caractéristique p, et corps des fractions K de caractéristique zéro, savoir que $\mathrm{H}^*(Z, \mathbf{Z}_p)$ doit s'envoyer alors de façon $\mathbf{Z}_p$-linéaire dans la cohomologie de De Rham $\mathrm{H}^*(X)$, qui serait isomorphe alors à $\mathrm{H}(X, \mathbf{Z}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} K$. Pour définir un tel homomorphisme, on pourrait penser à utiliser l'espace rigide-analytique au sens de Tate défini par X (NB c'est un site qui ne peut être défini par une topologie au sens ordinaire, ce qui explique les difficultés conceptuelles initiales de Tate pour arriver à définir la notion d'espace rigide-analytique), soit X^{an}. On espère que les arguments habituels prouveront que pour des faisceaux de torsion, la cohomologie de $X_{\text{ét}}$ coïncide avec celle de X^{an}, et un excès d'optimisme nous ferait espérer que la cohomologie de X^{an} à coefficients constants $\mathbf{Z}_p$ est bien la limite projective des cohomologies à coefficients dans les $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, donc coïncide avec la cohomologie p-adique $\mathrm{H}(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}_p)$ (définie précisément comme une limite analogue). Si cela était vrai, l'immersion canonique de $\mathbf{Z}_p$ dans les fonctions constantes sur X^{an} semblerait permettre d'envoyer $\mathrm{H}(X^{\mathrm{an}}, \mathbf{Z}_p)$ dans la cohomologie de De Rham de X^{an}, qui par GAGA rigide-analytique n'est autre que celle de X. L'"excès" plus haut serait justifié essentiellement par un "lemme de Poincaré" rigide-analytique, disant que sur X^{an}, le complexe de De Rham est bien une résolution de faisceau des fonctions constantes à valeurs dans le corps de base. Notez bien que c'est certainement trivial pour l'analytique p-adique ordinaire, étant une simple question de séries convergentes dans ce cas, mais que la question pour la topologie rigide-analytique (qui est beaucoup plus grossière) est plus délicate. Je vous avoue d'ailleurs que j'ai de grands doutes que les choses marchent aussi simplement que ça, i.e. que la cohomologie rigide-analytique à coefficients constants tout bêtes donne les "bons" nombres de Betti. Je crois me rappeler que Tate m'avait dit que c'était déjà faux pour le H^1 des courbes elliptiques — il faudrait lui demander quel était son argument ; apparemment, on trouverait un peu plus que pour la cohomologie étale, mais quand même par toute la cohomologie. Il reste plausible néanmoins, quoi qu'il en soit, que la topologie rigide-analytique aura son rôle à jouer dans ces questions.

Noter qu'en caractéristique $p > 0$, on a un homomorphisme évident de $\mathrm{H}^*(X, \mathbf{F}_p)$ dans la cohomologie de De Rham, comme on voit en calculant cette dernière pour la cohomologie étale et non pour la cohomologie de Zariski (ce qui donne la même résultat, puisque les composantes du complexe de De Rham sont quasi-cohérents), et utilisant la suite spectrale en cohomologie étale

$$\mathrm{H}^*(X) \Leftarrow \mathrm{H}^p(X, \underline{\mathrm{H}}^q(\underline{\Omega})).$$

Cet homomorphisme se factorise d'ailleurs à travers $\mathrm{H}^*(X, \mathscr{F}_p) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X, \underline{\mathscr{O}}_X)$, ce dernier s'envoyant dans $\mathrm{H}^*(X)$ grâce à l'homomorphisme de puissance p-ème $f \rightsquigarrow f^p$, induisant un isomorphisme $\underline{\mathscr{O}}_X \simeq \underline{\mathrm{H}}^0(\underline{\Omega})$. Le composé des homomorphismes canoniques $\mathrm{H}^n(X, \underline{\mathscr{O}}_X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X, \underline{\mathscr{O}}_X)$ (ce dernier résultant de l'autre suite spectrale pour la cohomologie de De Rham) ne peut guère être autre chose que l'homomorphisme de Frobenius. Il faut dire que tout ą est bien éculé, et qu'on ne pourra dire des choses vraiment intéressantes et nouvelles qu'en faisant appel à la "vraie" cohomologie p-adique.

Bien cordialement

INTRODUCTION AU LANGAGE FONCTORIEL

- The Algerian war was a major armed conflict between France and Algerians that took place between 1954 to 1962 that leads to its independence. Grothendieck's trip to Algiers, the Algerian capital, probably persuaded by R. Godement, took place in November and December of 1965 with the intention to give a course at the Faculté des Sciences at the University of Algiers. It was motivated by a framework of cooperation of French intellectuals that traveled there for several weeks to give lessons and courses. These contributed to the development of a Department of Mathematics.
- The following notes (in French), taken by M. Karoubi, were the result of a series of talks on the functorial language that Grothendieck gave during the month of November 1965 as requested by mathematicians there.
- Scan

INTRODUCTION AU LANGAGE FONCTORIEL

par Alexandre Grothendieck

Ce fascicule contient une rédaction succincte d'une série d'exposés que Monsieur A. Grothendieck a bien voulu venir faire à Alger au cours du mois de Novembre 1965. Il a pour but de familiariser un débutant avec les éléments du langage fonctoriel, langage qui sera utilisé par la suite dans les divers séminaires : Algèbre Homologique dans las catégories abéliennes, Fondement de la K-théorie…

Les propositions non démontrées sont de deux types : des sorites dont la démonstration tiendra lieu d'exercices, des propositions moins évidentes (signalés par une astérisque) dont on trouvera les démonstrations dans les ouvrages de références.

0. Cadre logique

Lorsque l'on définit une catégorie, il y a des inconvénients à supposer que les forment une classe, au sens de la théorie des ensembles de Gödel-Bernays. En effet, si l'on sait définir les applications d'une classe dans une autre, ces applications ne forment cependant pas elles-mêmes une classe. En particulier on ne saurait parler de la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre. Aussi se placera-on dans le cadre de la théorie des ensembles de Bourbaki pour définir les *Univers*.

Univers :

On appelle *univers* un ensemble $\mathfrak{U}$ vérifiant les axiomes suivants :

(U_1) Si Y appartient à X et si X appartient à $\mathfrak{U}$, alors Y appartient à $\mathfrak{U}$.

(U_2) Si X et Y sont des éléments de $\mathfrak{U}$ alors $\{X, Y\}$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

(U_3) Si X est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des parties de X est un élément de $\mathfrak{U}$.

(U_4) Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles appartenant à $\mathfrak{U}$, et si I est un élément de $\mathfrak{U}$, alors $\bigcup_{i\in I} X_i$ appartient à $\mathfrak{U}$.

On déduit de ces axiomes les propositions suivantes :

(1) Si X est un élément de $\mathfrak{U}$, $\{X\}$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

(2) X et Y sont des éléments de $\mathfrak{U}$ si et seulement si le couple[1] (X, Y) est un élément de $\mathfrak{U}$.

(3) L'ensemble vide est un élément de $\mathfrak{U}$ (puisque c'est un élément de $\mathfrak{P}(X)$ pour tout ensemble X de l'univers $\mathfrak{U}$).

(4) Si Y est contenu dans X et si X appartient à $\mathfrak{U}$ alors Y appartient à $\mathfrak{U}$.

(5) Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles de $\mathfrak{U}$ et si I appartient à $\mathfrak{U}$, alors $\prod_{i\in I} X_i$ appartient à $\mathfrak{U}$.

(6) Si X est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathfrak{U})$.

(7) L'univers $\mathfrak{U}$ n'est pas un élément de $\mathfrak{U}$. En effet si $\mathfrak{U}$ appartient à $\mathfrak{U}$, alors $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$ appartient à $\mathfrak{U}$. Soit E appartenant à $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$ (donc E appartient à $\mathfrak{U}$) défini ainsi:

$E = \{X \in \mathfrak{U} | X \notin X\}$

On aurait alors : E appartient à E si et seulement si E n'appartient pas à E !

(8) L'intersection d'une famille quelconque d'univers est un univers. En particulier si E est un ensemble et s'il existe un univers contenant E, alors il existe un plus petit univers contenant E qu'on appelle l'univers engendré par E.

[1] On rappelle que le couple (X, Y) est l'ensemble $\{X, \{X, Y\}\}$

Si E_0 est un ensemble quelconque, on se propose de chercher s'il existe un plus petit univers $\mathfrak{U}$ contenant E_0. Il apparaît naturel de plonger E_0 dans un ensemble E_1 par le procédé suivant :

Soit G_0 l'ensemble ainsi défini : $X \in G_0 \iff (\exists Y)(Y \in E_0$ et $X \in Y)$ et $F_1 = E_0 \cup G_0$

Soit G_1 : $X \in G_1 \iff (\exists Y)(\exists Z)(Y \in F_1, Z \in F_1$ et $X = \{Y, Z\})$ et $F_2 = F_1 \cup G_1$

Soit $G_2 : X \in G_2 \iff (\exists Y)(Y \in F_2$ et $X = \mathfrak{P}(Y))$ et $F_3 = F_2 \cup G_2$

Soit $G_3 : X \in G \iff (\exists I)(\exists (X_i)_{i \in I})(I \in F_3, \forall i \in I, X_i \in F_3$ et $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i)$ et $F_4 = F_3 \cup G_3$.

On pose alors $E_1 = F_4 \cup \{E_0\}$

En itérant cette opération e¿on forme une suite transfinie d'ensembles :

$$E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_\alpha \subset E_{\alpha+1} \subset \ldots$$

Pour qu'il existe un plus petit univers contenant E_0, il faut et il suffit que cette suite devienne stationnaire 'partir d'un certain rang (c'est-à-dire qu'il existe α tel que $E_{\alpha+1} = E_\alpha$) E_α sera précisément l'univers $\mathfrak{U}$ recherché.

En particulier si l'on prend $E_0 = \varnothing$, on montre que $\mathfrak{U} = E_\omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} E_n$. Lorsqu'on part d'un ensemble E_0 infini, on ne peut prouver l'existence d'un univers $\mathfrak{U}$ contenant E_0. Il convient donc d'ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome suivant :

(a_1) **Axiome des univers** :

Pour tout ensemble X, il existe un univers $\mathfrak{U}$, tel que X soit élément de $\mathfrak{U}$.

De plus comme on ne souhaite pas sortir d'un univers $\mathfrak{U}$ par l'usage du symbole τ de Hilbert on introduit l'axiome supplémentaire :

(a_2) Si R est une relation, x une lettre figurant dans R, et s'il existe un élément X d'un univers $\mathfrak{U}$ tel que $(X|x)R$ soit vrai alors l'objet $\tau_x(R(x))$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

I. Généralités sur les catégories

1. Type de diagramme

1.1 Définition

Un *type de diagramme D* est la donnée d'un quadruple $D = (\mathrm{Fl}, \mathrm{Ob}, s, b)$ où :

Fl et Ob sont des ensembles respectivement appelés ensemble des *flèches* (ou des morphismes…), ensemble des *objets* (ou des sommets)

s et b sont des applications de Fl dans Ob respectivement appelés *source*, *but*.

- Un type de diagrammes sera souvent noté :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl} \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "b"] \\ \mathrm{Ob} \end{tikzcd}$$

- *Exemples* : On peut représenter certains types de diagramme :

$$\bullet \quad \text{1 seul objet;} \quad \bullet\bullet\bullet \quad \text{(pas des flèches)}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} ; \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \end{tikzcd} ; \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

1.2 Morphisme d'un type de diagrammes dans une autre :

Si $D = (\mathrm{Fl}_D, \mathrm{Ob}_D, s_D, b_D)$ et $D' = (\mathrm{Fl}_{D'}, \mathrm{Ob}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$ sont deux types de diagramme, un *morphisme F de D dans D'* est un couple d'applications $F = (F_0, F_1)$: $F_0 : \mathrm{Ob}_D \longrightarrow \mathrm{Ob}_{D'}$, $F_1 : \mathrm{Fl}_D \longrightarrow \mathrm{Fl}_D$, tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl}_D \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "s_D"'] & \mathrm{Fl}_{D'} \arrow[d, "s_{D'}"] \\ \mathrm{Ob}_D \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}_{D'} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Fl}_D \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "b_D"'] & \mathrm{Fl}_{D'} \arrow[d, "b_{D'}"] \\ \mathrm{Ob}_D \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}_{D'} \end{tikzcd}$$

si D'' est un troisième type de diagrammes et $F' = (F'_0, F'_1)$ un morphisme de D' dans D'', on définit le *composé* des morphismes F et F', c'est le morphisme

$F'' = (F''_0, F''_1)$ de D dans D'' ou $F''_0 = F'_0 F_0$, $F''_1 = F'_1 F_1$. Le morphisme noté $1_D = (1_{\mathrm{Fl}_D}, 1_{\mathrm{Ob}_D})$ de D sur D est le *morphisme identique de* D.

1.3 Sous-type de diagramme d'un type de diagrammes.

Soit $D = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, s_D, b_D)$ un type de diagrammes. On dit que $D' = (\mathrm{Ob}_{D'}, \mathrm{Fl}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$ est un *sous-type de diagrammes* de D si $\mathrm{Ob}_{D'}$ est inclus dans Ob_D, $\mathrm{Fl}_{D'}$ est inclus dans Fl_D et si $s_{D'}$ (respectivement $b_{D'}$) est la restriction à $\mathrm{Fl}_{D'}$ de s_D (respectivement b_D).

1.4. Si $D = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, s_D, b_D)$ est un type de diagrammes le type de diagramme noté $D^\circ = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, b_D, s_D)$ est appelé type de *diagrammes opposé de* D.

Un *morphisme contravariant de types de diagrammes* de D dans D' est un morphisme de type de diagramme de D° dans D'

2. Catégorie

Définition **(2.1)**. — Une catégorie C est la donnée :

(i) d'un *type de diagramme* $(\mathrm{Fl}, \mathrm{Ob}, s, b)$ appelé type de diagramme sous-jacent à C, noté $(\mathrm{Fl}_C, \mathrm{Ob}_C, s_C, b_C)$

(ii) d'une *application* du produit fibré $(\mathrm{Fl}_C, b_C) \times_{\mathrm{Ob}_C} (\mathrm{Fl}_C, s_C)$ dans Fl_C, appelé loi de composition des flèches, notée $\mu_C : (f, g) \longrightarrow g \circ f = gf$ et *vérifiant les propriétés* :

  (a) $(gf)h = g(fh)$ pour tous les éléments f, g, h de Fl_C tels que cette écriture ait un sens.

  (aa) pour tout objet X il existe une flèche 1_X telle que $s_C(1_X) = b_C(1_X) = X$, appelée *flèche identique* de X vérifiant $1_X f = f$, $f 1_X = f$ pour toute flèche f telle que cette écriture ait un sens.

On remarque que pour tout objet X, la flèche 1_X est unique.

Notations. Chaque fois que l'on écrit gf, il est entendu que la composition a un sens, c'est-à-dire que $b(f) = s(g)$.

Si X et Y sont deux objets d'un type de diagramme D (resp. d'une catégorie C), l'ensemble des flèches de source X, de but Y est noté $\mathrm{Hom}_D(X,Y)$ ou $\mathrm{Fl}_D(X,Y)$ (resp. $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$...)

Une flèche de source X et de but Y est aussi notée $f : X \longrightarrow Y$.

2.2 Foncteurs.

Soient C et C' deux catégories dont D et D' sont respectivement les types de diagrammes sous-jacents. Un *foncteur* de C dans C' est un *morphisme* $F = (F_0, F_1)$ du type de diagramme D dans le type de diagramme D', *compatible* avec la composition des flèches, c'est-à-dire tel que $F_1(fg) = F_1(f)F_1(g)$.

Pour tout X, $F_1(1_X)$ est alors la flèche identique de $F_0(X)$. Si C'' est une troisième catégorie de type de diagramme D'', F' un foncteur de C' dans C'', le *foncteur composé* des foncteurs F et F', $F'' = F'F$ est le composé des morphismes de type de diagramme sous-jacent **1.2**. On vérifie que F'' est compatible avec la composition des flèches. Pour tout catégorie C, de type de diagramme D, on définie un *foncteur identique* $1_C = 1_D$.

2.3. Soit C une catégorie de type de diagramme sous-jacent D. La *catégorie opposée* de C, notée C°, est la catégorie de type de diagramme D°, et dont la loi de composition des flèches μ_{C° est définie par $\mu_{C^\circ}(f,g) = \mu_C(g,f)$.

On remarque que $C^{\circ\circ} = C$.

Un *foncteur contravariant* de C dans C' on lui associe canoniquement un foncteur F° de C° dans C'°:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & C^\circ \arrow[d, "F^\circ"] \\ C' \arrow[r] & C'^\circ \end{tikzcd}$$

On remarque que $(FG)^\circ = F^\circ G^\circ$, $1_C^\circ = 1_{C^\circ}$, $F^{\circ\circ} = F$

2.4 Monomorphisme - Epimorphisme.

2.4.1. On dit qu'une flèche $f : X \longrightarrow Y$ d'une catégorie C est un *monomorphisme* si pour tout objet T de C l'application naturelle qui à $u : T \longrightarrow X$, fait correspondre fu de $\mathrm{Hom}(T,X)$ dans $\mathrm{Hom}(T,Y)$ est *injective*. Une flèche

$f : X \longrightarrow Y$ d'une catégorie C est un *épimorphisme* si f est un monomorphisme en tant que flèche de C° ou, ce qui est équivalent, si pour tout objet T de C l'application naturelle de $\mathrm{Hom}(Y, T)$ dans $\mathrm{Hom}(X, T)$ est *injective*.

Une flèche est un *bimorphisme* si c'est un monomorphisme et un épimorphisme.

2.4.2. Une flèche f de C est inversible à gauche (ou *rétractable*) s'il existe une flèche $g : b(f) \longrightarrow s(f)$ telle que $gf = 1_{s(f)}$; g est une *rétraction* de f.

Une flèche f de C est *inversible à droite* (ou *sectionnable*) s'il existe une flèche $g : b(f) \longrightarrow s(f)$ telle que $f g = 1_{b(f)}$; g est une *section* de f.

Une flèche rétractable et sectionnable est appelée un *isomorphisme*, il existe alors un $g : b(f) \longrightarrow s(f)$ unique tel que $f g = 1_{b(f)}$ et $gf = 1_{s(f)}$, g est *l'inverse* de f.

2.4.3. Une flèche rétractable est un monomorphisme. Une flèche sectionnable est un épimorphisme. Donc un isomorphisme est un bimorphisme. Les réciproques sont *fausses*.

2.5 Sous-objet, objet quotient.

Soit X un objet quelconque d'une catégorie C, on définit sur l'ensemble des monomorphismes de but X une *relation* de *préordre*: $i \leq i'$ si et seulement si $i i'$ se factorise par i c'est-à-dire si et seulement si il existe un morphisme u tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "i"] & & X \\
& B' \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "i'"'] &
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire tel que $i' = i u$.

On remarque que u est un monomorphisme, et est déterminé de façon unique. On considère la relation d'équivalence associée à cette relation de préordre. Dans chaque classe d'équivalence on choisit (par exemple grâce au symbole τ) un monomorphisme que l'on appelle *sous objet de X*. Par abus du langage on appellera aussi sous-objet de X la source d'un tel monomorphisme. On notera (B, i) un sous objet de X, ou simplement B. La relation de préordre ci-dessus induit donc une relation d'ordre sur l'ensemble des sous objets de X. Si B, B' sont deux sous objets de X, la borné inférieure (resp. la borne supérieure) lorsqu'elle existe, est notée $B \wedge B'$ (resp. $B \vee B'$). Par exemple, dans la catégorie des ensembles, notée Ens, $B \wedge B' = B \cap B'$, $B \vee B' = B \cup B'$.

Dualement on définit les *objets quotients* d'un objet X, et une relation d'ordre sur leur ensemble.

2.6 Sous catégorie d'une catégorie.

Soit C une catégorie de type de diagramme sous-jacent D, on dit que C', de type de diagramme D' est une *sous catégorie* si D' est un sous-type de diagramme de D et si de plus $\mu_{C'}$ (loi de composition des flèches dans C') est la restriction de μ_C au produit fibre $(\mathrm{Fl}_{C'}, b_{C'}) \times_{\mathrm{Ob}_{C'}} (\mathrm{Fl}_{C'}, s_{C'})$.

On remarque que pour tout couple X, Y d'objets de C' on a : $\mathrm{Fl}_{C'}(X,Y) \subset \mathrm{Fl}_C(X,Y)$. Si de plus on a l'égalité on dit que C' est une *sous-catégorie pleine* de C.

3. Exemples de catégories

3.1. Soit une catégorie dont l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, alors l'ensemble des flèches se trouve naturellement muni d'une structure de monoïde unitaire. Soit M une telle catégorie, C une catégorie quelconque, un foncteur $F = (F_0, F_1)$ de M dans C est essentiellement un homomorphisme de monoïde de Fl_M dans $\mathrm{Hom}(X,X)$, où X est l'image par F_0 de l'unique objet de M. On appelle *groupoïde* une catégorie dans laquelle toute flèche est inversible ; si de plus l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, l'ensemble des flèches est muni alors d'une structure de groupe.

3.2. Soit I un ensemble préordonné, on appelle *catégorie associée* à I, la catégorie notée $\mathrm{Cat}(I)$, dont l'ensemble des objets est I, et dont l'ensemble des flèches est le graphe de la relation de préordre ; si (i,j) est une flèche $s(i,j) = j$, $b(i,j) = i$, la composition des flèches se définit évidemment par $(i,j)(j,k) = (i,k)(i,i)$ est la flèche identité de i. Les propriétés (a) et (a a) se vérifient immédiatement.

Inversement, pour toute catégorie C on peut définir sur $\mathrm{Ob}\, C$ une relation de préordre, à savoir : $X \leq Y \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_C(X,Y) \neq \varnothing$. Une catégorie C est isomorphe à une catégorie $\mathrm{Cat}(I)$ si et seulement si toute flèche de $\mathrm{Fl}\, C$ est un monomorphisme. Il suffit de prendre $I = \mathrm{Ob}\, C$ muni de la relation de préordre précédente.

3.3 Catégories de types de diagramme, catégories de catégories

Dans cette section, on choisit une fois pour toute un univers $\mathfrak{U}$, et tous les ensembles utilisés sont des éléments de $\mathfrak{U}$.

Soit l'ensemble des "types de diagramme dans $\mathfrak{U}$", notée $\mathrm{Diag}_{\mathfrak{U}}$, (resp. l'ensemble des "catégories dans $\mathfrak{U}$", noté $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$) c'est-à-dire des types de diagramme D (resp. des catégories C) tels que les ensembles Ob_D, Fl_D (resp. Ob_C, Fl_C) soient des *éléments de* $\mathfrak{U}$. En considérant **1.2** (resp. **2.2**) on définit la *catégorie des types de diagramme* dans $\mathfrak{U}$ notée $\underline{\mathrm{Diag}}_{\mathfrak{U}}$ (resp. *la catégorie des catégories dans* $\mathfrak{U}$ *notée* $\underline{\mathrm{Cat}}_{\mathfrak{U}}$).

Explicitons par exemple $\underline{\mathrm{Cat}}_{\mathfrak{U}}$, le type de diagramme est le suivant : l'ensemble des objets est $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$, l'ensemble des flèches est l'ensemble des triples (F, C, C') où F est un foncteur de la catégorie C dans la catégorie C', $s(F, C, C') = C$, $b(F, C, C') = C'$. La loi de composition des flèches est la compositions des foncteurs définie en **2.2**. On vérifie les propriétés (a) et (aa).

3.4 Catégorie des morphismes de type de diagramme d'un type de diagramme dans une catégorie, catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre

Soient $D = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, s_D, b_D)$ un type de diagramme et C' une catégorie de type de diagramme sous-jacent $(\mathrm{Ob}_{C'}, \mathrm{Fl}_{C'}, s_{C'}, b_{C'})$. Un morphisme de type de diagramme D dans C' est aussi appelé *diagramme de type D dans* C'.

On considère l'ensemble des morphismes de type de diagramme de D dans C' noté $\mathrm{Diag}(D, C')$. Soient $F = (F_0, F_1)$, $G = (G_0, G_1)$ deux morphismes de type de diagramme de D dans C'. Une *flèche* de *source* F de *but* G est une application u de Ob_D dans $\mathrm{Fl}_{C'}$ ($u(x)$ sera souvent noté u_X) telle que pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de D, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F_0(X) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "u(X)"'] & F_0(Y) \arrow[d, "u(Y)"] \\
G_0(X) \arrow[r, "G_1(f)"'] & G_0(X)
\end{tikzcd}$$

Si u et v sont deux flèches, $u : F \longrightarrow G$, $v : G \longrightarrow H$, *la flèche composée* $vu : F \longrightarrow H$ est définie $vu(X) = v(X)u(X)$ pour tout X de Ob_D.

La flèche identique de F notée 1_F est définie par $1_F(X) = 1_{F_0}(X)$ pour tout X de Ob_D. On vérifie les propriétés (a) et (a a). On a alors défini la *catégorie des morphismes de type de diagramme de D dans C'*, encore appelée catégorie des *diagrammes de type D dans C'* et notée $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$.

Si C et C' sont deux catégories de types de diagrammes sous-jacents D et D', on défini également *la catégorie des foncteurs de C dans C'* notée $\underline{\mathrm{Hom}}(C, C')$.

C'est par définition une *sous-catégorie pleine* de $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$.

3.5 Exemples de catégories de diagramme de type donné dans une catégorie

3.5.1. Si D est tel que Ob_D se réduit à un seul élément et si l'ensemble des flèches est vide, alors $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$ est canoniquement isomorphe à la catégorie C'.

3.5.2. Si D est du type suivant : $\bullet \longrightarrow \bullet$, alors la catégorie $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$ est appelée catégorie des flèches de C', notée $\underline{\mathrm{Fl}}(C')$.

Les objets s'identifient aux éléments de $\mathrm{Fl}\, C'$ et un morphisme de la flèche $f : X \longrightarrow Y$, dans la flèche $f' : X' \longrightarrow Y'$ est défini par un couple de flèche (u, v) tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r] & Y'. \end{tikzcd}$$

3.5.3. Si D est du type suivant :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

les objets de $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$ sont essentiellement les "carrés" (non nécessairement commutatifs) de C' :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T, \end{tikzcd}$$

et un morphisme d'un tel carré dans un autre est défini par un quadruple de flèches (u, v, r, s) tel que tous les côtés latéraux de "cube" suivant, où interviennent ces flèches, soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr] \arrow[dl, "u"'] \arrow[dd] & & Y \arrow[dl, "v"] \arrow[dd] \\
X' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y' \arrow[dd] & \\
& Z \arrow[rr] \arrow[dl, "s"'] & & T \arrow[dl, "r"] \\
Z' \arrow[rr] & & T' &
\end{tikzcd}$$

3.6 Diagramme avec relations de commutation

3.6.1. Soit D un type de diagramme, on appelle *chemin* une suite finie $f_1, f_2, ... f_n$ de flèches de D formellement composable, c'est-à-dire telle que $s(f_{i+1}) = b(f_i)$ pour $i = 1, ..., n-1$. On considère le type de diagramme dont les objets sont ceux de D, dont les flèches sont les chemins $c = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $s(c) = s(f_1)$ et $b(c) = b(f_n)$. Sur ce type de diagramme en définit la composition des chemins, elle consiste à mettre "bout à bout" deux chemins s'ils sont formellement composables. On obtient ainsi une catégorie notée $\hat{D}$, appelée *catégorie libre engendré par le type de diagramme* D.

Soit C une catégorie, pour tout morphisme de type de diagramme $\varphi : D \longrightarrow C$, il existe un foncteur et un seul $\hat{\varphi} : \hat{D} \longrightarrow C$ tel que pour tout chemin $c = (f_i)_{1 \leq i < n}$, $\hat{\varphi}_1(c) = \varphi_1(f_1) ... \varphi_1(f_{n-1})$.

3.6.2. On appelle *donnée de commutation* sur D, la donnée d'un ensemble R de couples de flèches de $\hat{D}$, (c, c') tels que $s(c) = s(c')$ et $b(c) = b(c')$.

Soit C une catégorie, on dit qu'un diagramme φ de type D dans C vérifie les *relations de commutation* R si pour tout couple (c, c') de R, $\hat{\varphi}_1(c) = \hat{\varphi}_1(c')$. On note $\underline{\mathrm{Diag}}_R(D, C)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C)$ formée par les diagrammes de type D vérifiant R.

3.6.3. Dans $\mathrm{Fl}\,\hat{D}$ on définit la relation d'équivalence R suivante :

$R(c, c')$ si et seulement si $s(c) = s(c')$ et $b(c) = b(c')$, la classe de c sera notée $\overline{c}$.

Soit $\widetilde{D}$ la catégorie telle que $\mathrm{Ob}(\widetilde{D}) = \mathrm{Ob}(\hat{D}) = \mathrm{Ob}(D)$ et $\mathrm{Fl}(\widetilde{D}) = \mathrm{Fl}(D)/R$

avec $s(\overline{c})=s(c)$ et $b(\overline{c})=b(c)$. La catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\widetilde{D},C)$ est appelée catégorie des diagrammes de *type D commutatifs* dans C et notée (D,C).

Exemple

Soit D le type de diagramme représenté par

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_4"'] & \bullet \arrow[d, "f_2"] \\ \bullet \arrow[r, "f_3"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Alors $\mathrm{Ob}\,\hat{D}=\mathrm{Ob}(D)$, $\mathrm{Fl}\,\hat{D}=\{f_1,f_2,f_3,f_4,(f_2,f_1),(f_3,f_4)\}$ chemin vide, dans $\widetilde{D}$ on identifie (f_2,f_1) et (f_3,f_4) on peut donc représenter $\widetilde{D}$ par

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[loop right] \arrow[d] \\ \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

4. Produit de catégories, somme de catégories

4.1 Produit de catégories

Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de catégories, I un ensemble.

4.1.1. *La catégorie produit* des catégories C_i, notée $C=\prod_{i\in I} C_i$ est ainsi définie:

- $\mathrm{Ob}\,C=\prod_{i\in I}\mathrm{Ob}\,C_i$, $\mathrm{Fl}\,C=\prod_{i\in I}\mathrm{Fl}\,C_i$, $s=\prod_{i\in I} s_i$, $b=\prod_{i\in I} b_i$.
- Si $f=(f_i)_{i\in I}$ et $g=(g_i)_{i\in I})$ sont deux flèches, la flèche composé gf est la flèche $(g_if_i)_{i\in I}$; la flèche identique sur $\prod_{i\in I}$ est la flèche $\prod_{i\in I} 1X_i$.

On définit une famille de foncteurs notée $(\mathrm{pr}_i)_{i\in I}$, $\mathrm{pr}_i : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow C_i$ est tel que $\mathrm{pr}_i((X_i)_{i\in I})=X_i$, $\mathrm{pr}_i((f_i)_{i\in I})=f_i$.

Proposition **4.1.2.** — *Pour tout catégorie T, l'application de* $\mathrm{Hom}(T,\prod_{i\in I} C_i)$ *dans* $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(T,C_i)$ *qui à u fait correspondre* $(\mathrm{pr}_i\circ a)_{i\in I}$ *est bijective.*

4.2 Multifoncteurs

4.2.1. On considère une famille $(C_i)_{i\in I}$ de catégories, deux sous-ensembles J et K de I tels que $I = J \cup K$, $J \cap K \neq \varnothing$. Soit C la catégorie produit de $\prod_{i\in I} C_i$ et de $\prod_{i\in I} C_i^\circ$. Un *multifoncteur* de $\prod_{i\in I} C_i$ dans une catégorie C', *covariant* par rapport aux indices i de J et *contravariant* par rapport aux indices i de K est un foncteur de C dans C'.

4.2.2. Exemples. Si C, C', C'' sont trois catégories on considère le *produit* de catégories $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')\prod\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$ l'application de $\mathrm{Hom}(C,C')\prod\mathrm{Hom}(C',C'')$ dans $\mathrm{Hom}(C,C'')$ qui à (F,G) fait correspondre GF permet de définir un *bifoncteur*, deux fois covariant de $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')\prod\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$ dans $\mathrm{Hom}(C,C'')$. Soient F et F' deux foncteurs de C dans C', G et G' deux foncteurs de C' dans C'', $u : F \longrightarrow F'$ et $v : G \longrightarrow G'$, au couple (u,v) de flèche on fait correspondre la flèche notée $v^*u : GF \longrightarrow G'F'$ définie pour tout objet X de C par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G_\circ F_\circ(X) \arrow[r, "G_1(u(X))"] \arrow[d, "v(F_\circ(X))"'] \arrow[dr, "v^*u(X)"] & G_\circ F'_\circ(X) \arrow[d, "v(F'_\circ(X))"] \\ G'_\circ F_\circ(X) \arrow[r, "G'_1(u(X))"'] & G'_\circ F'_\circ(X) \end{tikzcd}$$

On vérifiera que v^*u est bien un morphisme *fonctoriel*, c'est-à-dire que pour toute $f : X \longrightarrow Y$ de C le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} G_\circ F_\circ(X) \arrow[r, "v^*u(X)"] \arrow[d, "G_1F_1(f)"'] & G'_\circ F'_\circ(X) \arrow[d, "G'_1F'_1(f)"] \\ G_\circ F_\circ(Y) \arrow[r, "v^*u(Y)"'] & G'_\circ F'_\circ(Y) \end{tikzcd}$$

et que l'application qui à (u,v) fait correspondre v^*u respecte la composition des flèches.

Si l'on fixe F appartenant à $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$) on obtient un foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C'')$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C'')$) noté F_* (resp. F^*).

4.2.3. Si C' et C'' sont deux catégories, définissons un bifoncteur φ de $C'\prod\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$ dans C''.

A l'objet (X,G) on fait correspondre $\varphi_\circ(X,G)=G_\circ(X)$.

A la flèche (f,v), où $f:X\longrightarrow Y$, $v:G\longrightarrow G'$ on ait correspondre $\varphi_1(f,v)$ définie par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
G_\circ(X) \arrow[r, "G_1(f)"] \arrow[d, "v(X)"'] \arrow[dr, "\varphi_1(f,v)" description] & G_\circ(Y) \arrow[d, "v(Y)"] \\
G'_\circ(X) \arrow[r, "G'_1(f)"'] & G'_\circ(Y)
\end{tikzcd}$$

Si A est une catégorie ponctuelle ($\mathrm{Ob}A=\{\varnothing\}$, $\mathrm{Fl}_A=1_{\{\varnothing\}}$), pour toute catégorie C, $\underline{\mathrm{Hom}}(A,C)$ est canoniquement isomorphe à C, et le bifoncteur ci-dessus peut s'interpréter comme un foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}(A,C')\prod\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(A,C'')$; ce n'est autre que celui définie en **4.2.2**.

4.3 Somme de catégories

Rappel. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, $S=\amalg_{i\in I}X_i$ sa somme. Pour tout x élément de S on sait qu'il existe un unique indice noté $i(x)$ et un élément $x_{i(x)}$ dans $X_{i(x)}$ tels que $x=(x_{i(x)},i(x))$.

4.3.1. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de catégories, I un ensemble. La catégorie *somme de la famille* $(C_i)_{i\in I}$ notée $S=\amalg C_i$ est définie par le *type de diagramme* suivant : $\mathrm{Ob}\,S=\amalg_{i\in I}C_i$, $\mathrm{Fl}\,S=\amalg_{i\in I}\mathrm{Fl}\,C_i$, $s=\amalg_{i\in I}s_i$, $b=\amalg_{i\in I}b_i$, et la *composition des flèches* suivante : deux flèches $f=(f_{i(f)},i(f))$ et $g=(g_{i(g)},i(g))$ sont composables si et seulement si $b(f)=s(g)$ si et seulement si $i(f)=i(g)=i$ et $b_i(f_i)=s_i(g_i)$, on a alors $gf=(g_if_i,i)$, l'identité pour un objet X est la flèche $1_X=(1_{X_{i(x)},i(x)})$.

On définit une *famille de foncteurs* notée $(\mathrm{inj}_i)_{i\in I}$, $\mathrm{inj}_i:C_i\longrightarrow S$, tel que $\mathrm{inj}_i(X_i)=(X_i,i)$, $\mathrm{inj}_i(f_i)=(f_i,i)$.

Proposition **4.3.2**. — *Pour toute catégorie T, l'application de* $\mathrm{Hom}(\amalg_{i\in I}C_i,T)$ *dans* $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(C_i,T)$, *qui à u fait correspondre* $(u\circ\mathrm{inj}_i)_{i\in I}$, *est* bijective.

4.3.3. Soit $\prod_{i\in I}C_i$ (resp. $\amalg_{i\in I}C_i$) la catégorie produit (resp. somme) d'une famille $(C_i)_{i\in I}$ de catégories, alors pour tout catégorie T, la *bijection* naturelle de $\mathrm{Hom}(T,\prod_{i\in I}C_i)$ dans $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(T,C_i)$ (resp. $\mathrm{Hom}(\amalg_{i\in I}C_i),T$ dans $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(C_i,T)$) est un *isomorphisme* de $\underline{\mathrm{Hom}}(T,\prod_{i\in I}C_i)$ dans $\prod_{i\in I}\underline{\mathrm{Hom}}(T,C_i)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(\amalg_{i\in I}C_i,T)$ dans $\prod_{i\in I}\underline{\mathrm{Hom}}(C_i,T)$).

5. Équivalence de catégories

5.1 Définition. Soit $F=(F_0,F_1)$ un foncteur d'une catégorie C dans une catégorie C'.

5.1.1. Le foncteur est dit *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si pour tout couple d'objets (X,Y), $F_1|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$, restriction de F_1 à $\mathrm{Hom}(X,Y)$, est *injectif* (resp. *bijectif*).

Si F_1 est injectif (resp. bijectif) alors F est fidèle (resp. pleinement fidèle). Les réciproques sont fausses.

5.1.2. Le foncteur F est dit *essentiellement surjectif* si pour tout objet X' de C', il existe un objet X de C tel que $F_0(X)$ soit isomorphe à X'.

5.1.3. Un foncteur F est appelé une *équivalence de catégories* s'il est *pleinement fidèle* et *essentiellement surjectif*.

5.1.4. Ces propriétés se conservent par la composition de foncteurs.

5.1.5. On dit que la catégorie C est *équivalente* à la catégorie C', s'il existe un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ qui soit une équivalence de catégories ; on définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$. En effet la relation est évidemment réflexive, elle est transitive **5.1.4**, elle est symétrique du fait de la proposition suivante :

Proposition **5.1.6**. — *Le foncteur F de C dans C' est une équivalence de catégories si et seulement si il existe un foncteur G de C' dans C, tel que GF soit* isomorphe *à 1_C et FG soit* isomorphe *à $1_{C'}$. Un tel foncteur G est appelé un* quasi-inverse *de F.*

Alors que l'inverse d'un morphisme lorsqu'il existe est unique, un foncteur peut avoir plusieurs quasi-inverses qui sont isomorphes entre eux.

Démonstration. Supposons que F soit une équivalence de catégories. Puisque F est *essentiellement surjectif*, pour tout objet X' de C', l'ensemble des objets de C tels que l'image par F_0 soit isomorphe à X' est non vide. On en choisit un (grâce au symbole τ !) X et l'on note u_x, un isomorphisme de $F_0(X)$ sur X'.

On pose alors $G_\circ(X')=X$.

Pour toute flèche $f' : X' \longrightarrow Y'$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F_0(X) \arrow[rr, "u_x"] & & X' \arrow[d, "f'"] \\ F_0(Y) \arrow[rr, "u_y"'] & & Y' \end{tikzcd}$$

Il existe une unique flèche de $F_0(X)$ dans $F_0(Y)$ rendant le diagramme commutatif $(u_y^{-1} f' u_x)$. Puisque F est *pleinement fidèle*, cette flèche est l'image par F_1 d'une unique flèche $f : X \longrightarrow Y$.

On pose $G_1(f') = f$.

Par construction de $G = (G_0, G_1)$ on a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & G_0F_0(X) \arrow[d, "G_1F_1(f)"] \\ Y \arrow[r, "\approx"'] & G_0F_0(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & F_0G_0(X') \arrow[d, "F_0G_0(f')"] \\ Y' \arrow[r, "\approx"'] & F_0G_0(Y') \end{tikzcd}$$

ce qui montre que GF est isomorphe à 1_C, et FG isomorphe à $1_{C'}$.

Réciproquement supposons que F possède un quasi-inverse G ; alors F est évidement *essentiellement surjectif*, d'autre part $F_1|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$ est une *bijection* de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ sur $\mathrm{Hom}(F_0(X), F_0(Y))$ pour tout couple d'objets (X,Y). En effet $F_1|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$ est une *surjection* sur $\mathrm{Hom}(F_0(X), F_0(Y))$. C'est aussi une *injection*, soient deux flèches, f et g de X dans Y telles que $F_1(f) = F_1(g)$, alors $G_1F_1(f) = G_1F_1(g)$, comme il y a une seule flèche de X dans Y rendant le diagramme ci-dessus commutatif, on a $f = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\approx"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & & G_0F_0(X) \arrow[d, "G_0F_0(f)=G_0F_0(g)"] \\ Y \arrow[rr, "\approx"'] & & G_0F_0(Y) \end{tikzcd}$$

5.2

Proposition **5.2.1**. — *Si F est un foncteur d'une catégorie C dans une catégorie C', les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) F est pleinement fidèle ;

(b) Il existe une sous-catégorie pleine C'_1 de C' telle que F se factorise par C'_1 au moyen d'un foncteur qui est une équivalence de catégories.

Si F est pleinement fidèle, il suffit de prendre C'_1 l'image par F de C, ou l'image essentielle de F par C (c'est-à-dire l'ensemble des objets de C' isomorphes à $F(X)$ X variant dans Ob_C).

Réciproquement si F se factorise par C'_1 sous-catégorie pleine de C', le foncteur $\mathrm{inj} : C'_1 \longrightarrow C$ est pleinement fidèle, et la composition avec une équivalence de catégorie donne un foncteur pleinement fidèle.

Proposition **5.2.2**. — *Soit F un foncteur de C dans C', T une catégorie, F_* le foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}(C', T)$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(C, T)$* **4.2.1** *on a les propriétés suivantes :*

(i) Si F est fidèle alors F_* est fidèle ;

(ii) Si F est pleinement fidèle alors F_* est pleinement fidèle ;

(iii) Si F est une équivalence de catégories alors F_* est une équivalence de catégories.

Si l'on considère F^* le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(T, C)$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(T, C')$, seule le propriété (iii) est vraie.

Proposition **5.2.3**. — *Soit F un foncteur de C dans C' pleinement fidèle ; alors une flèche f de C est inversible si et seulement si $F_1(f)$ est inversible.*

Proposition **5.2.4**. — *Soit dans* $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$ *une famille de foncteurs $(F_i)_{i\in I}$, I élément de $\mathfrak{U}$, $F_i : C_i \longrightarrow C'_i$, et soit $\prod_{i\in I} F_i : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow \prod C'_i$, on a les propriétés suivantes:*

(i) Si pour tout i élément de I, F_i est fidèle alors $\prod_{i\in I} F_i$ est fidèle.

(ii) Si pour tout i élément de I, F_i est pleinement fidèle alors $\prod_{i\in I} F_i$ est pleinement fidèle.

(iii) Si pour tout i élément de I, F_i est une équivalence de catégories alors $\prod_{i\in I} F_i$ est une équivalence de catégories.

On énoncera la proposition duale.

5.3 Exemple

Soient X un espace topologique, connexe par arc, localement simplement connexe par arc, x un élément de X. On note $\mathrm{Rev}(X)$, la catégorie des revêtements de X éléments d'un univers $\mathfrak{U}$ donné, $\Pi = \Pi_1(X, x)$, $\mathrm{Ens}(\Pi)$ la catégorie des ensembles de $\mathfrak{U}$ sur lesquels Π opère.

Proposition. — *Les catégories* $\mathrm{Rev}(X)$ *et* $\mathrm{Ens}(\Pi)$ *sont* équivalentes.

Au revêtement E, X, p on fait correspondre la fibre $F = p^{-1}(x)$, Π opère sur F ; si E', X, p' est un revêtement et $f : E \longrightarrow E'$ un morphisme de revêtement, à f on fait correspondre $f_{|p^{-1}(x)} : F \longrightarrow F'$ qui est compatible avec Π. On a ainsi défini un foncteur $\alpha : \mathrm{Rev}(X) \longrightarrow \mathrm{Ens}(\Pi)$.

Construisons un foncteur quasi-inverse. Soit F un ensemble sur lequel Π opère. La revêtement universel $\widetilde{X}$ de X est un fibré principal de groupe Π, on considère le fibré associé $\widetilde{X} *_\Pi F$ de fibre F, c'est un revêtement de X, on défini ainsi un foncteur $\beta : \mathrm{Ens}(\Pi) \longrightarrow \mathrm{Rev}(X)$. On vérifiera que $\beta\alpha \simeq 1_{\mathrm{Rev}(X)}$ et $\alpha\beta \simeq 1_{\mathrm{Ens}(\Pi)}$.

6. Limite projective, limite inductive

6.1. Soit I un type de diagramme, C une catégorie et φ un morphisme de type de diagramme de I dans C (c'est-à-dire un diagramme de type I dans C).

6.1.1. Une famille $(u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ de morphismes de C, de source X, $u_i : X \longrightarrow \varphi_0(i)$ est dite *admissible pour* φ, si pour toute flèche $f : i \longrightarrow j$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \varphi_0(i) \arrow[dd, "\varphi_1(f)"] \\ X \arrow[ur, "u_i"] \arrow[dr, "u_j"'] & \\ & \varphi_0(j) \end{tikzcd}$$

Une telle famille est notée $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$.

6.1.2. On appelle *limite projective* du diagramme φ, une famille admissible pour φ : $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$, qui est "universelle" dans le sens suivant : pour toute famille admissible pour $\varphi : (Y, (v_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$, il existe un unique morphisme $u : Y \longrightarrow X$ tel que pour tout élément i de $\mathrm{Ob}\, I$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \varphi_0(i) & \\ Y \arrow[ur, "v_i"] \arrow[rr, "u"'] & & X \arrow[ul, "u_i"'] \end{tikzcd}$$

Deux limites projectives du diagramme φ sont canoniquement isomorphes. Si l'ensemble des limites projectives d'un diagramme φ n'est pas vide, on en choisit une que l'on note $\varprojlim_I \varphi$ (ou si aucune confusion n'est possible $\varprojlim \varphi$).

Si $\varprojlim_I \varphi = (X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$, par abus de langage on dira que X est *la* limite projective de φ, il est alors sous entendu qu'on s'est donné avec X la famille $(u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ qu'on n'explicite pas sans doute parce qu'elle est évidente.

6.1.3. Si F est un foncteur de la catégorie C de type de diagramme sous-jacent D, dans la catégorie C', la limite projective du foncteur F est la limite projective du morphisme de type de diagramme sous-jacent à F (c'est-à-dire du morphisme $F : D \longrightarrow C'$).

6.1.4 Exemples.

Si C est la catégorie $\mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}}$ des ensembles d'un univers $\mathfrak{U}$, I un type de diagramme, $\varphi : I \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}_{\mathfrak{U}}$, $\varprojlim_I \varphi$ est un *sous ensemble du produit* $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \varphi_0(i)$ défini ainsi :

$$(X_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \in \varprojlim \varphi \Leftrightarrow (\forall f)(f \in \mathrm{Fl}\, I, f : i \longrightarrow j, X_j = \varphi_1(f) X_i)$$

En particulier :

a) Si I est un type de diagramme discret (c'est-à-dire tel que $\mathrm{Fl}_I = \varnothing$) on récupère pour $\varprojlim \varphi$ le produit $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \varphi_0(i)$

b) Si I est la catégorie associé à un ensemble préordonné, un diagramme φ est essentiellement un "système projectif d'ensembles" (Bourbaki, Théorie des Ensembles) et l'on retrouve la notion classique de limite projective.

6.2. Soit C une catégorie, I un type de diagramme et φ un morphisme de I dans C. A tout objet Y de C on associe le morphisme φ^Y de I dans $\underline{\mathrm{Ens}}_{\mathfrak{U}}$ ainsi défini :

Si i appartient à Ob_I, $\varphi_0^Y(i) = \mathrm{Hom}(Y, \varphi_0(i))$

Si α appartient à Fl_I, $\alpha : i \longrightarrow j$, $\varphi_1^Y(\alpha)$ est l'application de $\mathrm{Hom}(Y, \varphi_0(i))$ dans $\mathrm{Hom}(Y, \varphi_0(j))$ qui à f correspondre $\varphi_1(\alpha) f$.

Proposition. — *La famille admissible* $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$ *est limite projective de* φ *si et seulement si pour tout* Y *l'application naturelle* $*_Y$ *de* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *dans* $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \mathrm{Hom}(Y, \varphi_0(i))$ *induit une bijection de* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *sur* $\varprojlim \varphi^Y$.

La famille admissible $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$ *est limite projective de* φ *si et seulement si* $*_Y$ *est une bijection dont l'image est l'ensemble des familles admissibles pour* φ *de source* Y*. Or ce sous-ensemble de* $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} (Y, \varphi(i))$ *est par définition* $\varprojlim_I \varphi^Y$ **6.1.4**.

6.3. Exemples de limites projectives dans une catégorie quelconque.

6.3.1. Soit I un type de diagramme *discret*, et φ un morphisme de I dans C. Si la limite projective de φ existe, $\varprojlim \varphi = (P, (p_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$, on dit que la famille $(p_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ *représente* P *comme produit* des $X_i = \varphi(i)$, P est noté $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} X_i$.

Le produit vérifie donc la propriété suivante :

Pour tout objet Z l'application de $\mathrm{Hom}(Z, \prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} X_i)$ dans $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \mathrm{Hom}(Z, X_i)$ qui à f fait correspondre $(p_i f)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ est *une bijection*.

La famille de morphisme $(p_i f)_i$ est appelée quelque fois famille des *composantes* du morphisme f.

Considérons par exemple $X \prod X$, il existe un unique morphisme de X dans $X \prod X$ de composantes 1_X, 1_X noté diag_X.

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[rr, "\mathrm{diag}_X"'] \arrow[dr, "1_X"'] & & X \prod X \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Dans le cas particulier où I est le type de diagramme vide $((\varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing)!)$ la limite projective d'un morphisme de I dans C est appelée *objet final* de la catégorie. C'est un objet Ω de C tel que pour tout objet Y de C, il existe un morphisme et un seul de Y dans Ω.

6.3.2. Si I est le type de diagramme suivant: $\bullet \rightrightarrows \bullet$, la limite projective d'un diagramme de type I dans C : $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ s'appelle, lorsqu'elle existe, *noyau du couple* de morphismes (f, g). C'est la donnée d'un objet Z et d'un morphisme $u : Z \longrightarrow X$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $f u = g u$

(ii) pour tout objet Z' et tout morphisme $u' : Z' \longrightarrow X$ tel que $f u' = g u'$, il existe un morphisme unique v de Z' dans Z tel que u factorise u'.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "u"] & & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
& Z' \arrow[ul, "v"] \arrow[ur, "u'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme u (quelque fois aussi l'objet Z) sera noté $\mathrm{Ker}(f, g)$.

Remarque : u est un monomorphisme.

Un diagramme du type $Z \xrightarrow{u} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ est dit *exact* s'il fait de u le noyau du couple (f, g).

Proposition. — *Le diagramme*

$$Z \longrightarrow X \rightrightarrows Y$$

est exact si et seulement si pour tout objet M, *le diagramme* $\mathrm{Hom}(M, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, X) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(M, Y)$ *de* $\underline{\mathrm{Ens}}_{\mathfrak{U}}$ *est exact, c'est-à-dire la première flèche est injective et son image est le sous ensemble de* $\mathrm{Hom}(M, X)$ *des coïncidences de* α *et* β.

6.3.3. Soit le type de diagramme I:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr] & \\
& \bullet \\
\bullet \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

La limite projective d'un diagramme de type I dans C :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & \\ & Z, \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

si elle existe est appelée *produit fibré* de (X, f) et (Y, g) au dessus de Z ; il est noté $(X, f) \prod_Z (Y, g)$. C'est la donnée d'un *objet* P et de *deux*[2] *morphismes*, $u : P \longrightarrow X$, $v : P \longrightarrow Y$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $fu = gv$

(ii) pour tout objet P' et tout couple de morphismes $u' : P' \longrightarrow X$, $v' : P' \longrightarrow Y$, tels que $fu' = gv'$ il existe un morphisme et un seul w de P' dans P tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dr, "f"] & \\ P' \arrow[r, "w"] \arrow[urr, "u'"] \arrow[drr, "v'"'] & P \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & Z \\ & & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Remarque : Si f (resp. g) est un monomorphisme, v (resp. u) est un monomorphisme.

6.4. Soit C une catégorie, telle que pour tout couple d'objets (X, Y), $\mathrm{Hom}(X, Y)$ soit élément d'un univers $\mathfrak{U}$.

6.4.1. Soit $(I_\alpha)_\alpha$ une famille de type de diagrammes, I_α appartenant à $\mathfrak{U}$ pour tout α, on dit que dans C les limites *projectives de type* $(I_\alpha)_\alpha$ *existent* si, pour tout α, tout $\varphi : T_\alpha \longrightarrow C$ admet une limite projective.

Cette définition donne un sens aux locutions : *Dans C les limites projectives existent* (la famille $(I_\alpha)_\alpha$ est formée de tous les types de diagrammes appartenant à

[2]Il est inutile de se donner $r : P \longrightarrow Z$ tel que $r = fu = gv$.

$\mathfrak{U}$), les *limites projectives finies existent* (la famille $(I_\alpha)_\alpha$ est formée de tous les types de diagrammes finis, c'est-à-dire tels que l'ensemble $\mathrm{Ob}\, I_\alpha$ soit fini), *les produits existent* (la famille $(I_\alpha)_\alpha$ est formée de tous les types de diagrammes discrets...), les *noyaux existent* ($(I_\alpha)_\alpha$ se réduit au type de diagramme suivant : $\bullet \rightrightarrows \bullet$), etc...

6.4.2. On vérifiera les assertions suivantes :

Dans la catégorie C les *limites projectives finies* existent si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(a) Les produits finis existent

(b) Les produits fibrés existent.

La condition (a) est équivalente à la condition (a') les deux-produits existent et il existe un objet final.

De plus le couple de conditions (a) (b) est équivalente au couple (a) (b') avec (b') les noyaux existent.

Dans la catégories C, les *limites projectives* existent si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a_1) Les produits existent

(b) Les produits fibrés existent.

Le couple de conditions (a_1)(b) est équivalente au couple (a_1)(b').

Évoquons la démonstration de l'équivalence de (a)(b) et (a)(b').

Supposons (a) et (b') vérifiés et considérons deux morphismes $f : X \longrightarrow Z$, $g : Y \longrightarrow Z$. Soient $X \prod Y$ le produit de X et de Y, $p_X : X \prod Y \longrightarrow X$, p_Y : $X \prod Y \longrightarrow Y$, les morphismes canoniques, et $k : K \longrightarrow X \prod Y$ le noyau de couple de morphismes $(p_X f, p_Y g)$; $(K, u = p_X k, v = p_Y k)$ définissent le *produit fibré* de (X, f) et (Y, g) au dessus de Z. En effet :

(i) Par définition du noyau, $f u = g v$.

(ii) Soient un objet K' et deux morphismes, $u' : K' \longrightarrow X$, $v' : K' \longrightarrow Y$ tels que $f u' = g v'$. Par définition du produit il existe un morphisme unique $k' : K' \longleftrightarrow X \prod Y$ tel que $u' = P_X k', v' = p_Y k'$. Puisque $f p_X k' = g p_Y k'$

par définition du noyau il existe un unique morphisme $w : K' \longrightarrow K$ tel que $k' = kw$, donc tel que $u' = uv$ et $v' = vw$.

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[rrr, "u'"] \arrow[dr, "w"] \arrow[drr, "k'"] \arrow[ddr, "v'"'] & & & X \arrow[dd, "f"] \\
& K \arrow[r, "k"'] & X\prod Y \arrow[uur, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] & \\
& Y \arrow[rr, "g"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Réciproquement supposons (a) et (b) vérifiés, et considérons deux morphismes $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$. Soient le morphisme $\varphi : X \longrightarrow Y\prod Y$ de composantes (f, g), et le morphisme $\operatorname{diag} : Y \longrightarrow Y\prod Y$; on considère alors le produit fibré, (K, k, k'), de (X, φ) et (Y, diag) au dessus de $Y\prod Y$ et l'on vérifie que $k : K \longrightarrow X$ possède les propriétés de noyau du couple de morphismes (f, g).

6.4.3. Soient un type de diagramme I, un morphisme de type de diagramme $\varphi : I \longrightarrow C$ et un foncteur F de la catégorie C dans une catégorie C'. Si $(Y, (u_i)_{i\in \operatorname{Ob} I})$ est une famille admissible pour φ alors $(F_0(Y), (F_1(u_i)_{i\in \operatorname{Ob} I}))$ est une famille admissible pour $F\varphi : I \longrightarrow C'$.

Si la limite projective de φ existe, $\varprojlim_I \varphi = (X, (v_i)_i)$ et si la limite projective de $F\varphi$ existe, $\varprojlim_I F\varphi = (X', (v'_i)_i)$ il existe alors un unique morphisme $\hat{\varphi} : F_0(X) \longrightarrow X'$ tel que pour tout élément i de $\operatorname{Ob} I$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F_0(X) \arrow[rr, "F_1(v_i)"] \arrow[dr, "\hat{\varphi}"'] & & F\varphi_0(i) \\
& X' \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

On dit que le foncteur F *commute aux limites projectives de type* I, si pour toute $\varphi : I \longrightarrow C$ admettant une limite projective, et tel que $F\varphi : I \longrightarrow C'$ admettons une limite projective, le morphisme $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme. Ce qui traduit par la formule :

$$F(\varprojlim_I \varphi) \simeq \varprojlim_I F\varphi$$

Soit $(I_\alpha)_\alpha$ une famille de type de diagramme, I_α appartenant à $\mathfrak{U}$ pour tout α, on dit que le foncteur F *commute aux limites projectives de types* $(I_\alpha)_\alpha$ si pour tout α, F commute aux limites projectives de type I_α.

Ces définitions donnent un sens aux locutions : le foncteur F *commute aux limites projectives, commute aux limites projectives finies, commute aux produits, commute aux noyaux,* etc…

Exemple : Si C est une catégorie définie par des espèces de structures algébriques, ou topologiques, ou algébro-topologiques, on définit un foncteur *oubli le structure* noté Oub de C dans Ens, qui à un objet de C associe l'ensemble sous-jacent, et à un morphismes e C associe l'application d'ensembles sous-jacente. Pour ce catégories, le foncteur Oub commute généralement aux limites projectives. Par exemple considérons la catégorie notée $\underline{\mathrm{Top}}$, des espaces topologiques, un type de diagramme I et un morphisme de type de diagramme, φ, de I dans C. On sait que $\varprojlim_I \mathrm{Oub}\,\varphi$ existe, c'est un sous-ensemble de $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \mathrm{Oub}\, \varphi_0(i)$, lequel peut être muni canoniquement d'une structure topologique (topologie initiale). On vérifie alors que le sous-espace topologique $\varprojlim \mathrm{Oub}\,\varphi$ satisfait à la propriété universelle de la limite projective de φ dans $\underline{\mathrm{Top}}$. On en déduit que dans $\underline{\mathrm{Top}}$, les limites projectives existent et que de par leur construction même, le foncteur Oub commute aux limites projectives.

6.4.4. Soient C et C' deux catégories et F un foncteur de C dans C'. Le foncteur F est dit *exact à guache*, s'il *commute aux limites projectives finies*, où ce qui est équivalent lorsque dans C les limites projectives finies existent, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(a) F commute aux produits finis.

(b) F commute aux produits fibrés.

La condition (a) est équivalente à

(a') F commute aux deux-produit et transforme objet final en objet final.

Le couple de condition (a)(b) est équivalente au couple (a)(b') avec

(b') F commute aux noyaux.

De plus si dans C les limites projectives existent, F commute aux limites projectives si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(a_1) F commutes aux produits

(b) F commute aux produits fibrés (ou aux noyaux).

6.5. Limite inductive :

Soit un type de diagramme I, une catégorie C, et un morphisme de type de diagramme $\varphi : I \longrightarrow C$.

6.5.1. Une famille de morphisms de C est dite *coadmissible* pour φ si elle est admissible pour φ°.

6.5.2. On appelle *limite inductive* de φ, une limite projective de φ°. Une limite inductive de φ, $(X,(u_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, I})$, est donc “universelle” au sens suivant ; pour toute famille coadmissible pou φ, $(Y,(v_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, I})$ il existe un morphisme unique $u : X \longrightarrow Y$ tel que pour tout élément i de $\mathrm{Ob}\, I$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \varphi_\circ(i) \arrow[dl, "v_i"'] \arrow[dr, "u_i"] & \\ Y & & X \arrow[ll, "u"] \end{tikzcd}$$

Deux limites inductives de φ étant canoniquement isomorphes, si l’ensemble des limites inductives de φ, n’est pas vide on en choisit une que l’on note $\varinjlim_I \varphi$. On peut alors écrire : $\varinjlim_I \varphi \simeq \varprojlim_I \varphi^\circ$.

6.6. Exemples de limites inductives

6.6.1. Soit I un type de diagramme *discret*, et $\varphi : I \longrightarrow C$. Si la limite inductive de φ existe, $\varprojlim_I \varphi = (S,(e_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, I})$ on dit que la famille $(e_i)_i$ *représente S comme somme directe des $X_i = (i)$*. On note $S = \amalg_{i\in \mathrm{Ob}\, I} X_i$.

Le somme directe vérifie donc la propriété suivante :

Pour tout objet Z l’application de $\mathrm{Hom}(\amalg_{i\in \mathrm{Ob}\, I} X_i, Z)$ dans $\prod_{i\in \mathrm{Ob}\, I} \mathrm{Hom}(X_i, Z)$ qui à f fait correspondre $(f e_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, I}$ est une *bijection*.

Dans le cas particulier où le type de diagramme I est *vide*, la limite inductive est appelée *objet initial* de la catégorie C. Donc ε est un objet initial si et seulement si pour tout objet Y de C, $\mathrm{Card}\, \mathrm{Hom}(\varepsilon, Y) = 1$.

Un objet initial et final est appelé un *objet nul* il est souvent noté 0_C.

6.6.2. Si I est le type de diagramme : $\bullet \rightrightarrows \bullet$, la limite inductive d’un diagramme de type I dans C : $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ s’appelle, lorsqu’elle existe, le *conoyau* du couple de morphisme (f,g). C'est la donnée d'un objet Z et d'un morphisme $u : Y \longrightarrow Z$ tel que :

(i) $uf = ug$

(ii) pour tout objet Z' et tout morphisme $u' : Y \longrightarrow Z'$ tel que $u'f = u'g$, il existe un morphisme unique v de Z dans Z' tel que v factorise u' :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & Z \arrow[dl, "v"] \\ & & Z & \end{tikzcd}$$

Le morphisme u, (et quelque fois par abus de langage l'objet Z) sera noté $\mathrm{Coker}(f,g)$.

Remarque : u est un épimorphisme.

6.6.3. Soit le type de diagramme I :

$$\begin{tikzcd} \bullet & \\ & \bullet, \arrow[ul] \arrow[dl] \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

la limite inductive d'un diagramme de type I dans C:

$$\begin{tikzcd} X & \\ & Z \arrow[ul, "f"'] \arrow[dl, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

si elle existe est appelée somme *amalgamée* de (X,f) et (Y,g) au-dessus de Z, elle est notée $(X,f)\amalg_Z(U,g)$. C'est donc la donnée d'un objet S et de deux morphismes $u : X \longrightarrow S$, $v : Y \longrightarrow S$ vérifiant les propriétés... que le lecteur précisera.

Remarque : Si f (resp. g) est un épimorphise, v (resp. u) est un épimorphisme.

Exemple :

Dans la catégorie des *anneaux commutatifs avec élément unité*, on considère trois annaux X, Y, Z et les morphismes $f : Z \longrightarrow X$, $g : Z \longrightarrow Y$. Grâce à f on munit X d'une structure de Z-module, l'application de $Z \times X$ étant définie par $(xy) \rightsquigarrow f(x)y$.

On procède de même pour Y avec g, et Z avec l'application identique. On montera que le Z-module $X \otimes_Z Y$ muni de la multiplication $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'$ et les homomorphismes d'anneaux $u : X \longrightarrow X \otimes_Z Y$ tel que $u(x) = x \otimes e_Y$ (où e_Y est l'élément unité de y) et $v : Y \longrightarrow X \otimes_Z Y$ tel que $v(y)e_X \otimes y$, définissent la somme amalgamée $(X, f) \amalg_Z (Y, g)$.

6.6.4. Dans les catégories définies par des espèces de structures algébriques, *les limites inductives existent*, mais l'exemple qui précède montre que leur construction n'est pas aussi simple que dans le cas projectif. Cependant dans le cas particulier de la catégorie $\underline{\text{Top}}$, on constate que le foncteur Oub commute aux limites inductives. Soit $\varphi : I \longrightarrow \underline{\text{Top}}$ un morphisme de type de diagramme, on considère la limite inductive de $\overline{\text{Oub}}$. $\varphi : I \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$, $(E, (u_i)_{i \in \text{Ob}\, I})$. On munit E de la topologie la plus fine rendant les u_i continues ; il suffit de prendre pour ouverts de E, les éléments U de $\mathfrak{P}(E)$ tels que pour tout i $\varphi_i^{-1}(U)$ soit un ouvert de $\varphi(i)$. On vérifie que l'espace topologique E est bien la limite inductive cherchée. Mais cette construction n'est valable qu'exceptionnellement, on montrera par exemple qu'elle est en échec dans le cas , catégorie des espaces topologiques compacts.

6.7. On énoncera les définitions et propriétés duales de celles développées dans le paragraphe **6.4**. On établira des conditions nécessaires et suffisantes d'existence *des limites inductives* (resp. finies) dans une catégorie C. On définira un foncteur F de C dans C' commutant aux limites inductives de type I...On définira un foncteur exact à droite.

6.7.1. Un *foncteur exact* est un foncteur exact à gauche et exact à droite.

6.7.2. Bien qu'il n'y ait théoriquement rien à ajouter pour un *foncteur contravariant* F de C dans C', il faut cependant remarquer que F commute aux limites projectives (resp. inductives) de type I, si pour tout $\varphi : X \longrightarrow C$ admettant une limite inductive (resp. projective) et tel que $F\varphi$ admette une limite projective (resp. inductive) on a $\varprojlim_I (F\varphi) \simeq F(\varinjlim_I \varphi)$ (resp. $\varinjlim_I (F\varphi) \simeq F(\varprojlim_I \varphi)$).

6.8. Propriétés générales des limites inductives et projectives.

6.8.1. Soit C une catégorie, I un type de diagramme. Les diagrammes de type I dans C qui admettent une limite projective forment une sous catégorie strictement pleine de $\underline{\mathrm{Diag}}(I,C)$, notée $\underline{\mathrm{Diag}}p(I,C)$. L'application qui à φ fait correspondre $\varprojlim_I \varphi$, de $\underline{\mathrm{Diag}}\,p(I,C)$ dans $\mathrm{Ob}\,C$, *définit un foncteur* de $\underline{\mathrm{Diag}}p(I,C)$ dans C. En effet si φ et ψ sont deux objets de $\underline{\mathrm{Diag}}p(I,C)$, u une flèche de φ dans ψ, par définition de $\varprojlim \varphi$, $\varprojlim \psi$ et de u, pour tout couple (i,j) d'objets de I et toute flèche $f : i \longrightarrow j$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim \varphi \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "u_j"'] & \varphi_\circ(i) \arrow[r, "u(i)"] \arrow[d, "\varphi_1(f)"'] & \psi_\circ(i) \arrow[d, "\psi_1(f)"'] & \varprojlim \psi \arrow[l, "v_i"'] \arrow[dl, "v_j"] \\
& \varphi_\circ(j) \arrow[r, "v(j)"'] & \psi_\circ(j) &
\end{tikzcd}$$

La famille $(\varprojlim \varphi, (u(i)u_i)_{i\in \mathrm{Ob}\,I})$ est admissible pour ψ, il existe donc une flèche *unique* de $\varprojlim \varphi$ dans $\varprojlim \psi$, que l'on note $\varprojlim u$, et telle que $v_i \varprojlim u = u(i)u_i$ pour tout $i \in \mathrm{Ob}\,I$.

Le foncteur ainsi défini se note $\varprojlim(I,C)$ ou $\varprojlim : \underline{\mathrm{Diag}}p(I,C) \longrightarrow C$.

Proposition. — *Pour tout type de diagramme I, et toute catégorie C, le foncteur $\varprojlim(I,C)$ commute aux limites projectives.*

Dualement on définit un foncteur de $\underline{\mathrm{Diag}}i(I,C)$ dans C, noté $\varinjlim(I,C)$ qui commute aux limites inductives.

Il n'y a aucun énoncé, valable pour toute catégorie, sur la commutativité entre les limites projectives et injectives.

Proposition **6.8.2.** — *Soit I un type de diagramme, C' un catégorie où les limites projectives (resp. injectives) de type I existent. Alors pour tout type de diagramme D, (resp. toute catégorie C) les limites projectives (resp. injectives) de types I existent dans $\underline{\mathrm{Diag}}(D,C')$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')$).*

Soit φ un diagramme de type I dans $\underline{\mathrm{Diag}}(D,C')$. A tout objet d de D, l'application $i \rightsquigarrow \varphi(i)d$ associe un morphisme $\Phi_d : I \longrightarrow C'$ ($\Phi_d(i) = \varphi(i)(d)$).

Soit $X_d = \varprojlim \Phi_d$ l'application $d \rightsquigarrow X_d$ définit un morphisme Φ de D dans C

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & X_d \arrow[d, "\Phi_1"] \\ d' \arrow[r] & X_{d'} \end{tikzcd} \qquad \delta) = \varprojlim_I \varphi(i)(\delta)$$

Soit une famille admissible $(\Omega, (v_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$ pour le morphisme φ. Pour tout objet d de D, il existe alors un morphisme v_d unique de $\Omega(d)$ dans X_d tel que pour tout i de $\mathrm{Ob}\, I$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega(d) \arrow[rr, "v_i(d)"] \arrow[dr, "v_d"'] & & \varphi(i)(d) = \Phi_d(i) \\ & X_d \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Donc $\Phi = \varprojlim_I \varphi$.

6.8.3. Dans $\underline{\mathrm{Cat}}\mathfrak{U}$, pour tout type de diagramme I élément de $\mathfrak{U}$, les limites projectives (resp. inductives) de type I existent. Si I est discret on retrouve le produit (resp. la somme) de catégories.

7. Catégorie filtrante

7.1 Définitions :

7.1.1. Une catégorie I est *pseudo-filtrante* à gauche si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

a) Pour tout diagramme de I de type

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & Z \\ Y \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

il existe un objet M et deux morphismes, $f : M \longrightarrow X$, $g : M \longrightarrow Y$.

b) Pour tout diagramme de I du type $X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y$ il existe un morphisme $h : T \longrightarrow X$ tel que $uh = vh$.

Une catégorie I est pseudo filtrante à droite si I° est pseudo filtrante à gauche. On écrira les conditions a'), b') correspondantes.

7.1.2. Une catégorie I est connexe si la propriété suivante est vérifiée :

c) Pour tout couple (P, Q) d'objets, il existe une suite finie d'objets : $P_0 = P$, $P_1, \ldots, P_i, P, \ldots P_n = Q$, telle que $\mathrm{Hom}(P_i, P_{i+1}) \neq \varnothing$, où $\mathrm{Hom}(P_{i+1}, P_i) \neq \varnothing$ pour $i = 0, \ldots, n-1$.

7.1.3. Une catégorie I est *filtrante à guache* (resp. à droite) si les conditions a), b), c) (resp. a'), b'), c')) sont vérifiées.

Remarque :

On considère la condition suivante :

α) Pour tout couple d'objets (X, Y) de I, il existe un objet M et deux morphismes $f : M \longrightarrow X$, $g : M \longrightarrow Y$.

La condition α) est équivalente au couple de conditions (a), c)).

Donc une catégorie I est *filtrante à gauche* (resp. à droite) si les conditions α), b) (resp. α') b')) sont vérifiées.

Une catégorie I est *filtrante* si elle est filtrante à gauche et à droite.

7.2 Exemples

7.2.1. Si dans une catégorie C, pour tout couple d'objets le produit (resp. la somme) existe, et si pour tout couple de morphismes le noyau (resp. le conoyau) existe, alors C est filtrante à gauche (resp. filtrante à droite).

7.2.2. La catégorie associée à un ensemble préordonné I est filtrante si et seulement si I est filtrante.

7.2.3. Dans la catégorie des ensembles, des groupoïdes, des modules sur un anneau..., *les limites inductives filtrantes*, c'est-à-dire les limites inductives de foncteurs d'une catégorie filtrante dans la catégorie en question, sont des foncteurs exacts à gauche, donc *exacts*, puisqu'on sait qu'ils sont exacts à droite.

II. Catégorie abélienne

1. Catégorie additive

On peut donner deux versions de la définition d'une catégorie additive, l'une consiste à *se donner* sur les ensembles $\mathrm{Hom}(X, Y)$ une structure de groupe abélien, cette structure supplémentaire étant soumise à certaines conditions ; l'autre consiste à construire canoniquement une loi de groupe sur tout $\mathrm{Hom}(X, Y)$ en termes *d'axiomes* convenables sur la catégorie C.

1.1 Version 1

Une catégorie additive est une catégorie C où pour tout couple d'objets (X, Y) de C est donnée une structure de groupe abélien sur $\mathrm{Hom}(X, Y)$, les axiomes suivants étant vérifiés :

C A_1. pour tout triplet d'objets (X,Y,Z) de C, l'application $(u,v) \rightsquigarrow vu$ de $\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y,Z)$ dans $\mathrm{Hom}(X, Z)$ est *bilinéaire*.

C A_2. Les sommes directes finies existent, ou ce qui est équivalent il existe un objet initial *et* pour tout couple d'objets la somme existe.

L'axiome C A_2 est équivalent à l'axiome C A_2'. Les produits finis existent ou ce qui est équivalent il existe un objet final et pour tout couple d'objets le produit existe.

1.1.1. Tout objet initial est final. En effet si ε est un objet initial, $\mathrm{Hom}(\varepsilon, X)$ se réduit à un seul élément noté 0 (puisque c'est l'élément neutre pour le groupe $\mathrm{Hom}(\varepsilon,X)$ en particulier $\mathrm{Hom}(\varepsilon,\varepsilon) = 1_\varepsilon = 0$, donc pour tout élément f de $\mathrm{Hom}(Y,\varepsilon)$, $f = 1_\varepsilon f = 0$; $\mathrm{Hom}(Y,\varepsilon)$ se réduit, à l'élément 0).

Il y a donc équivalence entre les propositions suivantes :

ε est un objet initial

ε est un objet final

$1_\varepsilon = 0$

Dans une catégorie additive il existe donc un *objet nul*, deux objets nuls étant canoniquement isomorphes, parmi les objets nuls on en choisit un que l'on note aussi 0.

Remarque : Dans une catégorie C à objet nul 0, pour tout couple d'objet (X,Y) on définit un morphisme nul de X dans Y qui est le composé de $X \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow Y$. Dans le cas où C est additive ce morphisme nul est évidemment l'élément neutre du groupe $\mathrm{Hom}(X,Y)$.

1.1.2. Si pour tout couple d'objets (X,Y), la somme $X \amalg Y$ existe, alors le produit existe et $X \amalg Y \simeq X \prod Y$, on peut *choisir* $X \prod Y = X \amalg Y$, on note cet objet $X \oplus Y$. Si (e_X, e_Y) représentent $X \amalg Y$ comme somme de X et Y le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "1_X"] & \\
X \amalg Y \arrow[ur, "e_X"] & & X \\
 & Y \arrow[ul, "e_Y"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

montre qu'il existe un unique morphisme $p_X : X \amalg Y \longrightarrow X$ tel que $p_X e_X = 1_X$ et $p_X e_Y = 0$. De même il existe un unique morphisme $p_X : X \amalg Y \longrightarrow Y$ tel que $p_y e_Y = 1_Y$ et $p_Y e_X = 0$. On vérifie que les applications $e_X p_X + e_Y p_Y$ et $1_{X \amalg Y}$ ont les mêmes composantes donc $e_X p_X + e_Y p_Y = 1_{X \amalg Y}$. Alors p_X et p_Y représentent $X \amalg Y$ comme produit de X et de Y, en effet pour tout objet Z de C et tout couple de morphismes $u : Z \longrightarrow X$, $v : Z \longrightarrow Y$, l'application $e_X u + e_Y v : Z \longrightarrow X \amalg Y$ rend le diagramme suivant commutatif, et c'est la seule.

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
Z \arrow[ur, "u"] \arrow[rr] \arrow[dr, "v"'] & & X \amalg Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

1.2 Version 2

Soit C une catégorie satisfaisant aux axiomes suivants :

CA'_1 Il existe un objet nul

CA'_2 Pour tout couple (X,Y) d'objets de C, le produit et la somme existent.

La catégorie C admettant un objet nul, il existe un unique morphisme $C_{XY} : X \amalg Y \longrightarrow X \prod Y$ tel que les diagrammes suivants soient commutatifs.

$$
\begin{tikzcd}
& X & \\
X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[rr, "f_X"'] \arrow[dr, "0"'] & & X\prod Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
\quad ; \qquad
\begin{tikzcd}
& X & \\
Y \arrow[ur, "0"] \arrow[rr, "f_Y"'] \arrow[dr, "1_Y"'] & & X\prod Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
\quad ;
$$

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_X"'] \arrow[dr, "e_X"] & \\
X\prod Y & & X \amalg Y \\
& Y \arrow[ul, "f_Y"] \arrow[ur, "e_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

CA'_3 Pour tout couple d'objets (X,Y), C_{XY} est un *isomorphisme*.

A tout couple (u,v) de morphismes de X dans Y on fait correspondre alors un morphisme de X dans Y défini par le diagramme suivant :

$$X \xrightarrow{(u,v)} Y \prod X \xrightarrow{C_{XY}^{-1}} X \amalg Y \longrightarrow Y$$

On obtient ainsi sur $\mathrm{Hom}(X,Y)$ une structure de monoïde commutatif avec élément unité. L'application naturelle de $\mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(Y,Z)$ dans $\mathrm{Hom}(X,Z)$ est bilinéaire.

CA'_4 Pour tout couple d'objets (X,Y), le monoïde $\mathrm{Hom}(X,Y)$ construit ci-dessus est un *groupe*.

On montre le lemme suivant : Soit C une catégorie, il existe au plus une fonction qui à tout couple d'objets (X,Y) de C associe une structure de monoïde associatif sur $\mathrm{Hom}(X,Y)$ tel que la composition des morphismes soit bilinéaire[3]. On en déduit que les définitions **1.1** et **1.2** d'une catégorie additive sont équivalentes.

1.3 Noyau et conoyau d'un morphisme

Dans une *catégorie avec objet nul* on considère un morphisme $f : X \longrightarrow Y$.

1.3.1. Le *noyau* (resp. conoyau) de f est, lorsqu'il existe, le *noyau* (resp. conoyau) *du couple de morphismes* $(f, 0)$.

Le noyau de f est donc un morphisme $u : K \longrightarrow X$ tel que :

(i) $f u = 0$

(ii) pour tout morphisme $u' : K' \longrightarrow X$, tel que $f u' = 0$, il existe un morphisme unique $v : K' \longrightarrow K$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "u"] & & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & K' \arrow[ul, "v"] \arrow[ur, "u'"'] & & \end{tikzcd}$$

Le morphisme u (et quelque fois aussi l'objet K) est *noté* $\mathrm{Ker}\, f$. On rappelle que le noyau de f est un *monomorphisme*.

Dualement on écrira la définition du conoyau de f, noté $\mathrm{Coker}\, f$, qui est un *épimorphisme*.

Sous la seule hypothèse de l'existence d'un objet nul dans une catégorie C, tout monomorphisme (resp. épimorphisme) a un noyau (resp. un conoyau) nul.

1.3.2. Dans une *catégorie additive*, la réciproque est vraie, et l'on a la :

Proposition. — *Un morphisme est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si son noyau (resp. conoyau) est nul.*

1.4 Foncteur additif

1.4.1. Soient C et C' deux catégories additives, F un foncteur de C dans C', les conditions suivantes sont équivalentes

[3]Ce lemme est un cas particulier d'une proposition que l'on trouvera dans : Eckmann-Hilton. Group-like structures in general categories. Math. Ann. (62-63)

(a) Pour tout couple d'objets (X,Y) de C, l'application $F_\circ|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$: $\mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$ est un *morphisme de groupe abélien*.

(b) Le foncteur F commute aux sommes finies.

(c) Le foncteur F commute aux produits finis.

On appelle *foncteur additif* un foncteur vérifiant l'une de ces conditions.

1.4.2. Exemples :

Soit C une catégorie additive ; pour tout objet X de C, le *foncteur* $\mathrm{Hom}(X,.)$ de C dans la catégorie des groupes abéliens $\underline{\mathrm{Ab}}$, défini par $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X,Y)$ et le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}(.,X)$, sont additifs.

Soit $\underline{\mathrm{Mod}}_A^S$ la catégorie des modules à guache sur un anneau A, pour tout module à droite X sur A le foncteur $X \otimes_A .$ de $\underline{\mathrm{Mod}}_A^S$ dans $\underline{\mathrm{Ab}}$ défini par $Y \rightsquigarrow X \otimes_A Y$ et $f \rightsquigarrow 1_X \otimes f$ est additif.

Plus généralement un foncteur exact à droite ou à guache, d'une catégorie additive dans une autre est additif.

1.5 Image, coimage d'un morphisme

Dans une catégorie avec objet nul, soit f un morphisme admettant un noyau et un conoyau. Si le conoyau de $\mathrm{Ker} f$ (resp. le noyau de $\mathrm{Coker} f$) existe, on l'appelle *coimage de* f, on le note $\mathrm{Coim} f$ (resp. *image* de f, $\mathrm{Im} f$). Si $\mathrm{Im} f$, $\mathrm{Coim} f$ existent, soit $\hat{f}$ l'unique morphisme de X dans K' tel que $\mathrm{Im} f \hat{f} = f$, $\mathrm{Im} f$ est un mono, donc $\hat{f}\,\mathrm{Ker} f = 0$ et il existe un *unique morphisme* $\overline{f}$ *de* K' *dans* C' tel que $f = \mathrm{Im} f \overline{f}\,\mathrm{Coim} f$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\mathrm{Ker} f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Coim} f"'] \arrow[dr, "\hat{f}"] & Y \arrow[r, "\mathrm{Coker} f"] & C \\
& C' \arrow[r, "\overline{f}"'] & K' \arrow[u, "\mathrm{Im} f"'] &
\end{tikzcd}$$

2. Catégorie abélienne

2.1. Une *catégorie abélienne* est une catégorie additive qui vérifie les axiomes suivants

AB_1 Pour tout morphisme, le noyau et le conoyau existent.

AB_2 Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, $\overline{f} : C' \longrightarrow K'$ est un isomorphisme.

Une conséquence de ces axiomes est que tout morphisme f se décompose de façon canonique en un monomorphisme et un épimorphisme $f = \mathrm{Im} f \, \mathrm{Coim} f$.

On remarque également que pour tout couple (f, g) de morphismes de même but (resp. de même source) A le produit fibré (resp. la somme amalgamée) existe.

On vérifie par exemple que $(X, f) \prod_A (Y, g) = \mathrm{Ker}(f \, p_X \longrightarrow g \, p_Y)$ ou $X = s(f)$, $Y = s(g)$.

2.2 Axiomes supplémentaires dans une catégorie abélienne

Pour une catégorie C appartenant à un univers $\mathfrak{U}$ il est quelque fois utile d'ajouter certains des axiomes suivants :

2.2.1.

$AB_{3\mathfrak{U}}$. Pour tout objet I de $\underline{\mathrm{Diag}_{\mathfrak{U}}}$, les diagrammes de type I dans C possèdent une limite inductive.

Remarque. Pour qu'il en soit ainsi il suffit que les sommes indéxées par tout I appartenant à $\mathfrak{U}$ existent.

2.2.2.

$AB_{4\mathfrak{U}}$. $AB_{3\mathfrak{U}}$ est vérifié et pour tout objet I de $\underline{\mathrm{Diag}_{\mathfrak{U}}}$, la somme $\amalg_{i \in I} u_i$ d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de monomorphismes est un monomorphisme.

Remarque. Cela revient à dire que la somme directe commute aux noyaux, et se trouve donc être un foncteur exact.

2.2.3.

$AB_{5\mathfrak{U}}$ (est strictement plus fort que $AB_{4\mathfrak{U}}$) : $AB_{3\mathfrak{U}}$ est vérifié et pour tout catégorie filtrante I, élément de $\mathfrak{U}$, le foncteur $\varinjlim_I : \underline{\mathrm{Hom}}(I, C) \longrightarrow C$ est exact.

On énonce de façon duale des axiomes notés $AB^*_{3\mathfrak{U}}$, $AB^*_{4\mathfrak{U}}$, $AB^*_{5\mathfrak{U}}$. Il serait déraisonnable de prétendre imposer simultanément à une catégorie les axiomes $AB_{5\mathfrak{U}}$ et $AB^*_{5\mathfrak{U}}$, car alors tout objet de C est nul…

2.2.4. Famille génératrice. Soit C une catégorie. On dit qu'une famille $(Ai)_{i\in I}$ d'objet, de C, est une *famille génératrice* si pour tout objet X de C et tout monomorphisme $f : Y \longrightarrow X$ qui n'est pas un isomorphisme, il *existe i* appartenant à I et *un morphisme $u : Ai \longrightarrow X$*, tels que u ne se factorise pas par f.

Un objet de C est un *générateur* si la famille réduite à ce élément est une famille génératrice.

Proposition. — *Soit $(Ai)_{i\in I}$, une famille d'objets de C telle que la somme $A = \amalg_{i\in I} Ai$ existe. La famille $(Ai)_{i\in I}$ est une famille génératrice si et seulement si A est un générateur.*

En effet, soient un objet X et un monomorphisme $f : Y \longrightarrow X$; pour qu'un morphisme $u : A \longrightarrow X$ se factorise par f il faut et il suffit que pour tout i élément de I la composante u_i se factorise par f.

Une catégorie C admet toujours une famille génératrice, à savoir la famille de tous les objets. Mais pour une "grosse catégorie", par exemple la catégorie de tous les groupes appartenants à un univers donné $\mathfrak{U}$. Aussi s'imposent-on l'axiome :

$AB_{6\mathfrak{U}}$. Il existe *famille génératrice* $(Ai)_{i\in I'}$ de C avec I élément de $\mathfrak{U}$.

Exemple : Soit A un anneau appartenant à un univers $\mathfrak{U}$, la catégorie Mod_A^S de tous les modules à guache sur A admet A, considéré comme A module à gauche, comme générateur.

On définit dualement les notions de famille cogénératrice, de cogénérateur, on énonce un axiome $AB^*_{6\mathfrak{U}}$ dual de $AB^*_{6\mathfrak{U}}$.

2.2.5. Il sera bon de vérifier que la catégorie $\mathrm{Mod}^S A\mathfrak{U}$ est abélienne et satisfait aux axiomes précédemment énoncés, à ceci près que $AB^*_{5\mathfrak{U}}$ et que $AB^*_{6\mathfrak{U}}$ n'est pas évident…

3. Exactitude dans une catégorie abélienne

3.1 Suite exacte

Une suite de morphismes $(ui)_{i\in[a,b]}$, $[a,b] \subset Z$ telle que $s(ui) = b(u_{i-1})$ est *"nulle"* (resp. *exacte*) si pour tout i, $a < i \leq b$, $u_i u_{i-1} = 0$ (resp. $\mathrm{Ker}\, u_i$ est isomorphe à $\mathrm{Im} u_{i-1}$, ou ce qui est équivalent $\mathrm{Coker}\, u_{i-1}$ est isomorphe à $\mathrm{Coim}\, u_i$.)

On appelle suite *exacte courte* une suite exacte du type $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$. Une telle suite est aussi appelée une *extension* de A' par A''.

Par définition même d'une suite exacte, un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si la suite $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y$ (resp. $X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$) est *exacte*.

3.2 Suite scindée

On dit qu'une suite exacte courte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *se scinde* si elle possède l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(a) f est *rétractable*, c'est-à-dire il existe $r : A \longrightarrow A'$ te que $rf = 1_{A'}$

(b) g est *sectionnable*, c'est-à-dire il existe $s : A'' \longrightarrow A$, tel que $gs = 1_{A''}$

(c) il existe $s : A'' \longrightarrow A$ (resp. $r : A \longrightarrow A'$) tel que (f, s) (resp. (g, r)) représente A comme somme directe (resp. produit direct) de A' et A''.

(d) Il existe $r : A \longrightarrow A'$ et $s : A'' \longrightarrow A$ tels que $fr + sg = 1_A$ on dit aussi que A' ou A'' est *facteur direct* de A.

3.3 Foncteur exact

Proposition **3.3.1**. — *Soient C et C' deux catégories abéliennes T un foncteur de C dans C'. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) T est exact à droite *(resp. à gauche)*

(b) T est additif *et pour toute suite exacte $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$) la suite $T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'') \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'')$) est exacte.*

Remarque. Si l'on considère un foncteur contravariant T de C dans C', la proposition se traduit ainsi :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(a') T est *exact à droite* (resp. à gauche) (b') T est *additif* et pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$ (resp. $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$) la suite $T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A')$) est exacte.

On en déduit qu'un foncteur T (resp. un foncteur contravariant) est *exact* si et seulement si T est *additif* et pour *toute suite exacte* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$, *la suite* $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$ *est exacte*).

3.3.2 Exemples. Si C est une catégorie abélienne, pour tout objet X de C, les foncteurs $\mathrm{Hom}(X,.)$ et $\mathrm{Hom}(.,X)$ sont exacts à gauche.

Pour tout module à droite X sur A, le foncteur $X \otimes_A . : \mathrm{Mod}_A^S \longrightarrow \mathrm{Ab}$ est exact droite.

3.3.3. On dit qu'un foncteur T (resp. un foncteur contravariant) est *semi exact* s'il est additif et si pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ la suite $T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A')$ (resp. $T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A')$) est exacte.

4. Diagrammes dans une catégorie abélienne

4.1. Deux théorèmes vont nous permettre de transposer certains résultats connus sur les catégories des groupes abéliens, ou de modules, dans une catégorie abélienne quelconque.

Théorème de Freyd **4.1.2**. — *Pour tout catégorie abélienne appartenant à un univers* $\mathfrak{U}$, *il existe un anneau* A *appartenant à* $\mathfrak{U}$ *et un foncteur* exact et pleinement fidèle *de* C *dans* $\mathrm{Mod}_{A\mathfrak{U}}^S$.

Ce résultat implique le théorème précédent.

Lemme **4.1.3**. — *Soit* C *et* C' *des catégories abéliennes et* F *un foncteur exact de* C *dans* C'. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) F *est fidèle*

(b) Pour tout objet X *de* C, $F(X) = 0$ *implique* $X = 0$

(c) F *est* conservatif, *c'est-à-dire pour tout flèche* u *de* C, $F(u)$ *est inversible implique que* u *est inversible.*

(d) *Pour tout flèche u de C, $F(u)$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) implique que u est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).*

4.2 Applications

Lemme des 5 **4.2.1**. — *Dans une catégorie abélienne C, on considère le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes :*

$$\begin{tikzcd} A_{-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{-2}"] & A_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{-1}"] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ B_{-2} \arrow[r] & B_{-1} \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \end{tikzcd}$$

Si f_{-1} et f_1 sont des monomorphismes (resp. des épimorphismes) et si f_{-2} est un épimorphisme (resp. f_2 un monomorphisme), alors f_0 est un monomorphism (resp. un épimorphisme).

On en déduit que si f_{-1} et f_1 sont des isomorphismes, si f_{-2} est un épimorphisme, et f_2 un monomorphisme, alors f_0 est un isomorphisme.

Ce résultat est bien connu dans $\mathrm{Ab}_{\mathfrak{U}}$ et se transpose dans C à l'aide du théorème **4.1.1** et du lemme **4.1.3**.

4.2.2. On appelle *carré cartésien* le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \\ B' \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"'] & A' \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

dans lequel B' est le produit fibré de (A, u) et (A', v) au dessus de B.

Dans une catégorie abélienne si v est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) v' est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), on a la même propriété pour u.

On écrira la propriété duale dans le carré cocartésien.

4.2.3. Par les mêmes méthodes on montrera dans une catégorie abélienne la propriété connue dans $\underline{\mathrm{Mod}_A^S}$ sous le nom de “lemme de serpent”.

4.3. Le résultat suivant sera fort utilisé :

Proposition **4.2.3**. — *Soit C' une catégorie additive (resp. abélienne) pour tout type de diagramme D la catégorie* $\underline{\text{Diag}}(D, C')$ *est additive (resp. abélienne). De plus si C' vérifie l'un des axiomes $AB_{1\mathfrak{U}}$ à $AB_{6\mathfrak{U}}$ ou l'un des axiomes duaux $AB^*_{3\mathfrak{U}}$ à $AB^*_{6\mathfrak{U}}$ il en est de même de* $\underline{\text{Diag}}(D, C')$.

5. Objet injectif. Objet projectif

5.1 Soit C une catégorie abélienne.

Proposition **5.1.1**. — *Pour tout objet Q de C les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le foncteur $\text{Hom}(., Q)$ *(exact à guache) est* exact.

(b) Pour tout monomorphisme $f : X \longrightarrow Y$ et pour tout morphisme $u : X \longrightarrow Q$, il existe un monomorphisme $v : Y \longrightarrow Q$ tel que $vf = u$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[dl, "v"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

(c) Toute suite exacte $0 \longrightarrow Q \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *se* scinde.

La proposition **3.3.1** montre que les assertions (a) et (b) sont équivalentes.

5.2

Lemme **5.2.1**. — *Soit $(A_k)_{k \in K}$, K appartenant à un univers $\mathfrak{U}$, une famille génératrice d'une catégorie C dans laquelle les produits fibrés existent et telle que pour tout couple d'objets (X, Y),* $\text{Hom}(X, Y)$ *appartient à $\mathfrak{U}$. Alors pour tout objet Y de C les sous-objets de Y forment* un ensemble dont le cardinal est élément de $\mathfrak{U}$.

Si les produits fibrés existent, tout couple (X, i), (X', i') de sous-objets de Y admet une borne inférieure à savoir le sous-objet de Y, $(X, i) \prod_Y (X', i')$.

A tout sous-objet (X, i) de Y on fait correspondre la famille $(H_i^k)_{k \in K}$ où pour tout k, H_i^k est le sous-ensemble de $\text{Hom}(A_k, Y)$ formé par les morphismes qui se factorisent par i. Supposons qu'il existe un autre sous-objet (X', i') de Y tel que pour tout k $H_i^k = H_{i'}^k$. Alors pour tout k et tout morphisme $f_k : A_k \longrightarrow X$, il existe un morphisme g_k tel que $i f_k = i' g_k$, et par définition du produit fibré, il existe un morphisme unique $A_k \longrightarrow XAX'$ grâce auquel f_k (resp. g_k) se factorise par le monomorphisme canonique $XAX' \longrightarrow X$ (resp. $XAX' \longrightarrow X'$). On en déduit que $X = X'$. Il y a donc une correspondance biunivoque entre les sous-objets de Y et un sous-ensemble de $\prod_{k\in K} \mathfrak{P}(\mathrm{Hom}(A_k, Y))$. Or $\mathrm{Hom}(A_k, Y)$ appartient à $\mathfrak{U}$ par hypothèse $\mathfrak{P}(\mathrm{Hom}(A_k, Y))$ appartient à $\mathfrak{U}$ en vertu de l'axiome u_3 des univers, et $\prod_{k\in K} \mathfrak{P}(\mathrm{Hom}(A_k, Y))$ appartient à $\mathfrak{U}$ puisque K est un élément de $\mathfrak{U}$, donc les sous-objets de Y forment un ensemble dont le cardinal appartient à $\mathfrak{U}$.

Soit u, v deux morphismes de même but, on dit que *v prolonge u* si

(i) $s(u) < s(v)$, soit i le morphisme injection canonique de $s(u)$ dan $s(v)$

(ii) $u = vi$.

Théorème **5.2.2**. — *Soit C une catégorie abélienne telle que pour tout couple d'objets (X, Y), Card* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *appartient à* $\mathfrak{U}$ *et vérifiant $AB_{5\mathfrak{U}}$, $(A_k)_{k\in K}$, K élément de* $\mathfrak{U}$, *une famille génératrice. Un objet Q de C est* injectif *si et seulement si pour tout k appartient à K, pour tout sous-objet V de A_k, et pour tout morphisme $u : Y \longrightarrow Q$, il existe un* morphisme $v : A_k \longrightarrow Q$ qui prolonge u.

Soit un objet Y de C, un sous-objet X de Y et un morphisme $f : X \longrightarrow Q$. On considère l'ensemble E des morphismes de but Q, dont la source est un sous-objet de Y et qui prolonge f ; cet ensemble ordonné par la relation : $f' < f''$ si et seulement si f'' prolonge f' est *inductif*. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une partie totalement ordonnée de E, I étant un élément de $\mathfrak{U}$ **5.2.1**, $L = \varinjlim_I s(f_i)$ existe et c'est un sous-objet de Y en vertu de $AB_{5\mathfrak{U}}$, de plus il existe un morphisme $l : L \longrightarrow Q$ qui prolonge f_i pour tout i. L'ensemble E admet donc un *élément maximal* $f_0 : X_0 \longrightarrow Q$.

Montrons que $X_0 = Y$. Pour cela supposons que X_0 soit différent de Y et montrons qu'il existe un sous-objet X_1 de Y, $X_0 < X_1$ et un morphisme $l : X_1 \longrightarrow Q$ qui prolonge f.

Si le monomorphisme canonique $i_0 : X_0 \longrightarrow Y$ n'est pas un isomorphisme, il existe k appartenant à K et $\alpha : A_k \longrightarrow Y$ qui ne se factorise par i_0. Soit V

l'image inverse de X_0 par α, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, i_0\alpha)$, il existe un morphisme $\beta : V \longrightarrow X_0$ unique tel que $i_0\beta = \alpha j$ avec $j = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, i_0\alpha)$. On considère X_1, a, b la somme amalgamée de (X_0, β) et (A_k, j) au dessus de V, c'est un sous-objet de Y, en effet X_1 est isomorphe à $X_0 V \mathrm{Im}\alpha$. Comme j est un monomorphisme, a est un monomorphisme et X_0 est un sous-objet de X_1, de plus X_0 est différent de X_1, car α se factoriserait alors par i_0 au moyen de b. Par hypothèse le morphisme $f_0\beta : V \longrightarrow Q$ se prolonge en un morphisme $g : A_k \longrightarrow Q$. Comme $gj = f_0\beta$ il existe un morphisme $f_1 : X_1 \longrightarrow Q$ tel que $f_0 = f_1 a$.

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[rrr, "i_0"] \arrow[drr, "a"] \arrow[ddr, "f_0"'] & & & Y \\
& & X_1 \arrow[dl, "f_1"'] & \\
& Q & & \\
V \arrow[uuu, "\beta"] \arrow[rrr, "j"'] & & & A_k \arrow[uuu, "\alpha"'] \arrow[uul, "b"'] \arrow[ull, "g"]
\end{tikzcd}$$

On énoncera le théorème dual.

5.2.3. Dans *la catégorie* $\mathrm{Mod}^S_{A\mathfrak{U}}$ un objet Q est injectif si et seulement si pour tout idéal à gauche V de A et tout morphisme $u : V \longrightarrow Q$ il existe un élément x de Q tel que $u(\lambda) = \lambda x$ pour tout λ appartenant à V.

5.3. On dit qu'une catégorie abélienne C possède *assez d'objets injectifs* (resp. assez d'objets projectifs) si pour tout objet X de C il existe un *objet injectif* Q (resp. un objet projectif P) et un *monomorphisme* $X \longrightarrow Q$ (resp. un épimorphisme $P \longrightarrow X$).

Théorème **5.3.1**. — *Soit* C *une catégorie vérifiant* $AB_{5\mathfrak{U}}$ *et telle que pour tout couple d'objets* (X, Y) $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *appartient à* $\mathfrak{U}$. *S'il existe un générateur, la catégorie* C *possède assez d'objets injectifs.*

Soit X un objet quelconque de C, A le générateur, $(B_k)_{k\in K}$ l'ensemble de tous les sous-objets de A, K appartient à $\mathfrak{U}$ en vertu du lemme **5.2.1**, on pose $J(X) = \bigcup_{k\in K} \mathrm{Hom}(B_k, X)$.

Soient $B = \amalg_{k\in K} B_k^{(\mathrm{Hom}(B_i,X))_4}$, le morphisme de B dans X dont les composantes sont tous les morphismes de tous les sous-objets de A dans X, et i le monomorphisme de B dans $A^{J(X)}$ somme directe des monomorphismes canoniques de B_i dans A, i est bien un monomorphisme d'après $AB_{5\mathfrak{U}}$.

On considère $T_1(X) = (x,f)\amalg_B (i, A^{J(X)})$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A^{J(X)} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ X \arrow[r, "j_1"'] & T^1(X) \end{tikzcd}$$

Puisque i est un monomorphisme, j_1 est monomorphisme, mais $T^1(X)$ n'est pas en général injectif. On définit par *récurrence transfinie*, une *suite d'objets* $T^\lambda(X)$ et pour tout couple (λ',λ) tel que $\lambda' < \lambda$ un *monomorphisme* $T^{\lambda'}(X) \longrightarrow T^\lambda(X)$, de la façon suivante :

> Si λ n'est pas un ordinal limite on pose $T^\lambda(X) = T^1(T^{\lambda-1}(X))$
>
> si λ est un ordinal limite on pose $T^\lambda(X) = \varinjlim_{\lambda'<\lambda} T^{\lambda'}(X)$, on remarque qu'on ne sortira pas de l'univers si l'ensemble des $\lambda' < \lambda$ appartient à l'univers.

Pour tout couple (λ',λ), $\lambda' < \lambda$ on obtient par cette construction un monomorphisme canonique $T^{\lambda'}(X) \longrightarrow T^\lambda(X)$.

On pose $T^\circ(X) = X$.

Soit α le plus petit ordinal dont le cardinal est strictement plus grand que Card K. Montrons que $T^\alpha(X)$ est injectif.

Soit (V,i) un sous-objet de A et $u : V \longrightarrow T^\alpha(X)$. Pour tout $\lambda < \alpha$, on note S^λ l'image inverse par u de $T^\lambda(X)$, α est un ordinal limite, $T^\lambda(X) = \varinjlim_{\lambda<\alpha} T^\lambda(X)$ et en vertu de $AB_{5\mathfrak{U}}$ $V = \varinjlim_{\lambda<\alpha} S^\lambda$. Le cardinal de l'ensemble des sous-objets de V est inférieur à Card K et l'ensemble des ordinaux inférieurs à α a un cardinal supérieur à Card K, donc il existe $\lambda_0 < \alpha$ à partir du que la suite S^λ est *stationnaire*. Donc u se factorise par $u_0 : V \longrightarrow T^{\lambda_\circ}(X)$ et par définition de $T_1(T^{\lambda_\circ}(X))$ il existe

[4]Si Y est un objet de C, I un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, on note $Y^{(I)}$ la somme $\amalg_{i\in I} Y_i$ où pour tout i, $Y_i = Y$.

un morphisme $\overline{u} : A \longrightarrow T^{\lambda_0+1}(X)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif. Donc u se prolonge en un morphisme $v : A \longrightarrow T^{\alpha}(X)$

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "u_0"'] \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, "u"] & \\
 & A \arrow[d, "\overline{u}_0"] & \\
T^{\lambda_0}(X) \arrow[r] & T^{\lambda_0+1} \arrow[r] & T^{\alpha}(X)
\end{tikzcd}$$

On énoncera le théorème dual.

5.3.2. Dans $\mathrm{Mod}^{S}_{A\mathfrak{U}}$, A appartenant à $\mathfrak{U}$, qui vérifie $AB_{5\mathfrak{U}}$ et dont A est un générateur, il existe assez d'injectifs. On déduit de **5.1.1** qu'il existe assez de projectifs.

III. Foncteurs représentables

1. Définition et propriétés

1.1 Définition

Soit $\mathfrak{U}$ un univers, C une catégorie telle que pour tout couple (X, Y) d'objets de C, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ appartient à $\mathfrak{U}$. On rappelle que $\mathrm{Hom}(.,.)$ est un bifoncteur de $C \times C$ dans $\mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}}$ contravariant par rapport à la première variable, covariant par rapport à la seconde.

1.1.1. On appelle *catégorie des préfaisceaux* sur C, la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(C^o, \mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}})$, que l'on note $\hat{C}$.

On définit un foncteur ε de C dans $\hat{C}$. A tout objet Y de C, ε fait correspondre le foncteur contravariant de C dans $\mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}} : \mathrm{Hom}(., Y)$, que l'on note h_Y.

Tout morphisme $f : Y \longrightarrow Y'$, ε associe le morphisme fonctoriel naturel de $\mathrm{Hom}(., Y)$ dans $\mathrm{Hom}(., Y')$.

1.1.2. On dit que le foncteur h_Y est le *foncteur représenté* par Y.

On dit qu'un préfaisceau F est *représentable*, s'il existe un *objet* Y de C et un *isomorphisme* φ de h_Y sur F. On dit alors que F est représenté par le couple (Y, φ) ou encore que le couple (Y, φ) est une *donnée de représentation de F*.

1.2 Propriétés

Théorème **1.2.1**. — *Si* F est un préfaisceau *sur* C, Y un objet *de* C, *il* existe une bijection *de* $\mathrm{Hom}(h_Y, F)$ *sur* $F(Y)$, *fonctorielle en* Y, F.

a. *Soit* u *un morphisme de* h_Y *dans* F. *On rappelle (Chap. 1, 3.4) qu'à tout objet* X *de* C u *fait correspondre une application* $u(X)$ *de* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *dans* $F(X)$ *que l'on notera* u_X. *Soit* $\alpha : \mathrm{Hom}(h_Y, F) \longrightarrow F(Y)$ *telle que* $\alpha(u) = u_Y(1_Y)$

b. *Soit* $\beta : F(Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(h_Y, F)$, *qui à tout élément* v *de* $F(Y)$ *fait correspondre le morphisme* $\beta(v) : h_Y \longrightarrow F$, *tel que pour tout objet* X *et tout morphisme* $f : X \longrightarrow Y$ *on ait* $\underline{\beta(v)}_X(f) = F(f)(v)$. *On vérifie en effet que pour tout morphisme* $g : X \longrightarrow X'$ *le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X', Y) = h_Y(X') \arrow[r, "h_Y(g)"] \arrow[d, "\underline{\beta(v)}_{X'}"'] & \mathrm{Hom}(X, Y) = h_Y(X) \arrow[d, "\underline{\beta(v)}_X"] \\ F(X') \arrow[r, "F(g)"'] & F(X) \end{tikzcd}$$

c. *Pour tout morphisme fonctoriel* u *de* h_Y *dans* F *et tout morphisme* $f : X \longrightarrow Y$ *on a* $u_X h_Y(f) = F(f)u_Y$, *en particulier* $F(f)u_Y(1_Y) = u_X(f)$, *donc* $\beta\alpha(u) = u$. *Inversement pour tout élément* v *de* $F(Y)$, $\alpha\beta(v) = \underline{\beta(v)}_Y(1_Y) = F(1_Y)(v) = 1_F(Y)(v) = v$.

Corollaire **1.2.2**. — *Si* F *est un préfaisceau représentable, représenté par* (X, φ) Y *un objet de* C, *il existe une* bijection *de* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *sur* $\mathrm{Hom}(h_Y, h_X)$.

C'est dire que le foncteur canonique ε est *pleinement fidèle*, ce qui permet de "plonge" canoniquement toute catégorie C dans la catégorie $\hat{C}$ des préfaisceaux sur C.

Aussi nous arrivera-t-il d'*identifier* un objet Y de C à h_Y, un morphisme fonctoriel de h_Y dans F à l'élément de $f(Y)$ correspondant. Une donnée de représentation de F est définie à un isomorphisme unique près : en effet, si (X, φ), (X', φ') sont deux données de représentation de F, h_X et h'_X sont isomorphes, comme ε est pleinement fidèle X et X' sont isomorphes ainsi que φ et φ'.

Proposition **1.2.3**. — *Soit* F *un préfaisceau sur* C.

Le couple (X,α), où X est un objet de C, α un élément de $F(X)$ définit une donnée de représentation de F si et seulement si pour tout couple (Y,β) où Y est un objet de C, β un élément de $F(Y)$, il existe un unique morphisme $v : Y \longrightarrow X$ tel que $\beta = F(v)\alpha$.

Si (X,α) définit une donnée de représentation de F, α s'identifie à un isomorphisme *de h_X sur F, β s'identifie à un morphisme de h_Y dans F, et un morphisme v s'identifie à un morphisme de h_Y dans h_X. Pour tout objet Y, et tout morphisme $\beta : h_Y \longrightarrow F$, il existe bien un unique morphisme $h_Y \longrightarrow h_Y$ tel que $\beta = \alpha u$, à savoir $u = \alpha^{-1}\beta$*

$$\begin{tikzcd} h_X \arrow[rr, "\approx\alpha"] & & F \\ & h_Y \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Réciproquement si (X,α) jouit d'une telle propriété universelle, pour tout Y il existe une bijection de $\mathrm{Hom}(Y,X) = h_X(Y)$ *sur* $\mathrm{Hom}(h_Y,F) \simeq F(Y)$*, donc α est un isomorphisme fonctoriel, et (X,α) définit une donnée de représentation de F.*

2. Application

De nombreuses notions peuvent s'interpréter avantageusement en langage de foncteurs représentables.

2.1. Soit C une catégorie, D un type de diagramme et $\varphi : D \longrightarrow C$. Pour tout objet Y de C, on définit le diagramme constant C_Y : pour tout objet i de D $C_Y(i) = Y$, pour toute flèche f de D $C_Y(f) = 1_Y$. Pour tout objet Y de C, l'ensemble des systèmes admissibles $(Y, u_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, D}$ de φ *est* l'ensemble $\mathrm{Hom}(C_Y, \varphi)$.

Soit F le préfaisceau sur C défini par $F(Y) = \mathrm{Hom}(C_Y, \varphi)$. En appliquant **1.2.3** on obtient la

Proposition **2.1.1**. — *La limite projective de φ existe si et seulement si le foncteur F est représentable.*

Si φ ne possède pas de limite projective dans C, on utilise souvent le procédé suivant on plonge C dans $\hat{C}$ au moyen du foncteur ε et on appelle limite projective de φ la limite projective de $\varepsilon\varphi$, qui existe toujours puisque $\hat{C} = \mathrm{Hom}(C^o, \mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}})$.

2.2. On considère la catégorie des modules sur un anneau commutatif A, Mod_A. Soient M et N deux modules, le foncteur de Mod_A dans Ens qui à tout module P fait correspondre l'ensemble $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ des applications bilinéaires de $M \times N$ dans P est *représentable*, et le module qui le représente est le produit tensoriel $M \otimes_A N$.

2.3. On peut définir dualement un foncteur $\varepsilon' : C^o \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathrm{Ens})$. On définira alors un foncteur représentable et l'on vérifiera que cette notion recouvre celle de limite inductive.

3. Structures algébriques dans les catégories

On se propose de *définir* une structure algébrique par exemple une structure de groupe sur un objet X d'une catégorie C. On peut procéder de deux façons.

3.1. La plus naturelle consiste à généraliser dans la catégorie C, la notion habituelle de structure algébrique sur un ensemble.

Supposons que dans C le produit $X \prod X$ existe, une *loi de composition interne* sur X est la donnée d'un morphisme $m_X : X \prod X \longrightarrow X$.

Les axiomes définissant sur X une *structure de C-groupe* vont s'exprimer en terme de commutativité de diagrammes. Supposons que $X \prod X \prod X$ existe, on a les isomorphismes canoniques : $(X \prod X) \prod X \simeq X \prod X \prod X \simeq X \prod (X \prod X)$.

3.1.1. La loi est *associative* si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \prod X \prod X \arrow[r, "m_X \prod 1_X"] \arrow[d, "1_X \prod m_X"'] & X \prod X \arrow[d, "m_X"] \\ X \prod X \arrow[r, "m_X"'] & X \end{tikzcd}$$

Supposons de plus qu'il existe dans C un objet final E, il existe alors un unique morphisme $e : X \longrightarrow E$.

3.1.2. *Il existe un morphisme $w : E \longrightarrow X$* tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} E\prod X \arrow[rr, "\omega\prod 1_X"] & & X\prod X \arrow[dl, "m_X"] \\ & X \arrow[ul, "(e,1_X)", "\simeq"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X\prod E \arrow[rr, "1_X\prod\omega"] & & X\prod X \arrow[dl, "m_X"] \\ & X \arrow[ul, "(1_X,e)", "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

On montre que w est alors déterminé de façon unique.

3.1.3. Il existe un *morphisme* $s : X \longrightarrow X$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(s,1_X)"] \arrow[d, "e"'] & X\prod X \arrow[d] \\ E \arrow[r, "\omega"'] & X \end{tikzcd}$$

ainsi que celui obtenu en permettant s et 1_X. On montre que le morphisme s est déterminé de façon unique.

On pourrait de façon duale définir une structure de C-cogroupe.

3.2. *Sans* faire *d'hypothèses* sur la catégorie C, on peut définir une structure sur X en se ramenant au cas *ensembliste*. Les limites projectives existent dans $\hat{C}$, ainsi pour deux éléments F, F' de $\hat{C}$, pour tout objet X de C, $F\prod F'(X) = F(X)\prod F'(X)$.

Une *loi de composition interne* sur X est la donnée d'un *morphisme* M_X : $h_X\prod h_X \longrightarrow h_X$. Cela revient à se donner pour tout objet Y de C, une loi de composition interne sur l'ensemble $h_X(Y)$ qui soit fonctorielle, c'est-à-dire telle que pour tout $u : Y \longrightarrow Y'$, $h_X(u) : h_X(Y') \longrightarrow h_X(Y)$ soit un morphisme au sens de la structure considérée.

3.3. Dans le cas particulier où le produit $X\prod X$ existe dans C, $h_X\prod h_X$ est canoniquement isomorphe à $h_{X\prod X}$, une loi de composition interne sur X peut donc être considérée comme un morphisme $M_X : h_{X\prod X} \longrightarrow h_X$ il lui est donc canoniquement associé **(III, 1.2.2)** un morphisme $m_X : X\prod X \longrightarrow X$ tel que $\varepsilon(m_X) = h_{m_X} = M_X$.

3.3.1. Si l'on suppose que $X \prod X \prod X$ existe, $X \prod X \prod X$ étant canoniquement identifié à $(X \prod X) \prod X$ l'application $M_X(Y) \prod 1_{h_X(Y)}$ s'identifie pour tout objet Y de C à $h_{m_X \prod 1_X}(Y)$. Il est donc *équivalent* de dire que la loi M_X est associative, c'est-à-dire que pour tout Y le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} h_X(Y) \prod h_X(Y) \prod h_X(Y) \arrow[r, "M_X(Y) \prod 1"] \arrow[d, "1 \prod M_X(Y)"'] & h_X(Y) \prod h_X(Y) \arrow[d, "M_X(Y)"] \\ h_X(Y) \prod h_X(Y) \arrow[r, "M_X(Y)"'] & h_X(Y) \end{tikzcd}$$

ou que le diagramme **3.1.1** est commutatif.

3.3.2. S'il existe dans C un objet final…

E, h_E est objet final de $\hat{C}$, le morphisme $\Omega : h_E \longrightarrow h_X$ induit un morphisme $w : E \longrightarrow X$ qui vérifie la propriété **3.1.2**.

3.3.3. Pour tout Y de C il existe un morphisme $S(Y) : h_X(Y) \longrightarrow h_X(Y)$ fonctoriel par rapport à Y, soit $S : h_X \longrightarrow h_X$ est un morphisme auquel est canoniquement associé un morphisme $s : X \longrightarrow X$ tel que $\varepsilon(s) = h_s = S$, et tel que le diagramme **3.1.3** correspondant soit commutatif.

3.4. Il faut remarquer qu'il y a des structures que l'on ne peut définir de cette façon, par exemple si leur définition fait intervenir des limites inductives, car $\varepsilon : C \longrightarrow \hat{C}$ ne commute pas aux limites inductives.

Quelques ouvrages de références

[1] ECKMANN - HILTON — *Group-like structure in general categories*. I. Math. Ann. **145** (1962) 227-255 ; II. Math. Ann. **151** (1963), 150-186 ; III. Math. Ann. **150** (1963) 165-187.

[2] EHRESMANN — *Catégories et structures*. (Dunod 1965).

[3] FREYD — *Abelian categories*. Harter et Row Publishers N-Y 1964.

[4] GABRIEL — *Des catégories abéliennes*. Thèse. Bulletin Société Mathématique de France (1962) 323 - 448.

[5] GROTHENDIECK —
Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. Journal. Vol. 9 p. 119 - 221 (1977).
Éléments de géométrie algébrique. I.H.E.S Publications mathématiques (1961 - 62).

[6] HILTON — *Catégories non abéliennes*. Séminaire d'été de Montreal (1964).

[7] MITCHELL — *Theory of categories*. Academic Press (1965).

EGA IV-3

Étude locale des schémas et des morphismes de schémas

Publications Mathématiques de l'IHÉS[5]

[5] https://agrothendieck.github.io/divers/ega43.pdf

SGA 6

Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch,

1966-1967[6]

6

CRYSTALS AND THE DE RHAM COHOMOLOGY OF SCHEMES, NOTES BY J. COATES AND O. JUSSILA

Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 306-358. North Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968[7]

Introduction

These notes are a rough summary of five talks given at I.H.E.S in November and December 1966. The purpose of these talks was to outline a possible definition of a p-adic cohomology theory, via a generalization of the De Rham cohomology which was suggested by work of Monsky-Washnitzer [?] and Manin [?].

The contents of the notes are by no means intended to be a complete theory. Rather, they outline the start of a program of work which has still not been carried out[8].

1. De Rham cohomology

1.1. Differentiable Manifolds. Let X be a differentiable manifold, and $\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/\mathbf{C}}$

[7] https://agrothendieck.github.io/divers/CRCSscan.pdf

[8] For a more detailed exposition and progress in this direction, we refer to the work of P. Berthelot, to be developed presumably in SGA 8.

the complex of sheaves of differential forms on X, whose coefficients are complex valued differentiable functions on X.

Theorem **1.1**. (De Rham) — *There is a canonical isomorphism*

$$\mathrm{H}^*(X,\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(\Gamma(X,\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/\mathbf{C}})),$$

where $\mathrm{H}^*(X,\mathbf{C})$ *is the canonical cohomology of* X *with complex coefficients.*

To prove this, one observes that, by Poincaré's lemma, the complex $\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/\mathbf{C}}$ is a *resolution* of the constant sheaf $\underline{C}$ on X, and that the sheaves $\underline{\Omega}^{j}_{X/\mathbf{C}}$ are *fine* for $J \geq 0$, so that $\mathrm{H}^i(X,\underline{\Omega}^{j}_{X/\mathbf{C}}) = 0$ for $i > 0$ and $j \geq 0$, whence the assertion.

An analogous result holds for the complex of sheaves of differential forms on X, whose coefficients are real valued differentiable functions on X.

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6. Criticism of the ℓ-adic cohomology. If X is a scheme of finite type over an algebraically closed field k, and ℓ is any prime number *distinct*[9] from the characteristic of k, the ℓ-adic cohomology of X is defined to be

1.7.

1.8. Proposals for a p-adic Cohomology. We only mention two proposals, namely Monsky and Washnitzer's method via special affine liftings (which we discuss in n° 2), and the method using the fppf (faithfully flat and finite presentation) topology.

By analogy with the ℓ-adic cohomology, the essential idea of the fppf topology was to consider the cohomology of X/k, with respect to the fppf topology, with coefficient groups in the category C^{ν} of finite schemes of $\mathbf{Z}/p^{\nu}\mathbf{Z}$-modules. Examples of such schemes of modules are

[9]the ℓ-adic cohomology is still defined for ℓ equal to the characteristic of k, but it no longer has too many reasonable properties.

2. The cohomology of Monsky and Wishnitzer

2.1. Approach via liftings.

Suppose X_0 is a scheme on a perfect field k

3. Connections on the De Rham cohomology

For the definition of a *connection* and a *stratification* on a sheaf, see Appendix I of these notes.

4. The infinitesimal topos and stratifying topos

We now turn to the definition of a more general category of coefficients for the De Rham cohomology. To this end we introduce two ringed topos, the *infinitesimal topos* and the *stratifying topos*.

We shall see later that in fact these two topos work well only in characteristic 0

5. Cěch calculations

We now consider the cohomology of the infinitesimal topos and the stratifying topos[10]

6. Comparison of the Infinitesimal and De Rham Cohomologies

6.1. The basic idea. Let X be a scheme above S, and F a quasi-coherent Module on X fortified with a stratification relative to S.

7. The crystalline topos and connecting topos

7.1. Inadequacy of infinitesimal topos. Let X_0 be a scheme above a perfect field k of characteristic $p > 0$. Then, regarding X_0 as being above $S = \operatorname{Spec} W(k)$ instead of k, the infinitesimal cohomology

$$\mathrm{H}^*((X_0/S)_{\inf}, \underline{O}X_0)$$

[10]For a general discussion of the cohomology of a topos, see (SGA 4 V).

is a graded module

Appendix

Let X be a scheme above the base S, and F a Module on X. For each positive integer n,

UN THÉORÈME SUR LES HOMOMORPHISMES DE SCHÉMAS ABÉLIENS

Inventiones Math. 2, 59-78 (1966)[11]

[11] https://agrothendieck.github.io/divers/homschabscan.pdf

Letter to J. Coates, 6.1.1966[12]

6.1.1966

Dear Coates,

Here a few more comments to my talk on the conjectures. The following proposition shows that the conjecture $C_\ell(X)$ is independent of the chosen polarization, and has also some extra interest, in showing the part played by the fact that $\mathrm{H}^i(X)$ should be "motive-theoretically" isomorphic to its natural dual $\mathrm{H}^{2n-i}(X)$ (as usual, I drop the twist for simplicity).

Proposition. — *The condition $C_\ell(X)$ is equivalent also to each of the following conditions:*

a) *$D_\ell(X)$ holds, and for every $i < n$, there exists an isomorphism $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic (i.e. induced by an algebraic correspondence class; we do not make any assertion on what it induces in degrees different from $2n-i$).*

b) *For every endomorphism $\mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic, the coefficients of the characteristic polynomial are rational, and for every $i < n$, there exists an isomorphism $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic.*

Proof. — I sketched already how $D_\ell(X)$ implies the fact that for an algebraic endomorphism of $\mathrm{H}^i(X)$, the coefficients of the characteristic polynomial are rational numbers. Therefore we know that a) implies b), and of course $C_\ell(X)$ implies a). It remains to prove that b) implies $C_\ell(X)$. Let $u : \mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ be the given isomorphism which is algebraic, and $v : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X)$ the algebraic isomorphism in the opposite direction, induced by L_X^{n-i}. Then $uv = w$ is an automorphism of $\mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic, and the Hamilton-Cayley formula $u^h - \sigma_1(w)u^{h-1} + \ldots + (-1)^h \sigma_h(w) = 0$ (where the $\sigma_i(w)$ are the coefficients of the characteristic polynomial of w) whos that w^{-1} is a linear combination of the w^i, with coefficients of the type $+/-\sigma_i(w)/\sigma_h(w)$ (N.B. $h = \text{rank } \mathrm{H}^i$). The

[12] https://agrothendieck.github.io/divers/LGC6166scan.pdf

assumption implies that these coefficients are rational, which implies that w^{-1} is algebraic, and so is $w^{-1}u = v^{-1}$, which was to be proved.

N.B. In characteristic 0, the statement simplifies to: $C(X)$ equivalent to the existence of algebraic isomorphisms $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$, (as the preliminary in b) is then automatically satisfied). Maybe with some extra care this can be proved too in arbitrary characteristics.

Corollary. — *Assume X and X' satisfy condition C_ℓ, and let $u : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+2D}(X')$ ($D \in \mathbf{Z}$) be an isomorphism which is algebraic. Then u^{-1} is algebraic.*

Indeed, the two spaces can be identified "algebraically" (both directions!) to their dual, so that the transpose of u can be viewed as an isomorphism u' : $\mathrm{H}^{i+2D}(X') \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$. Thus $u'u$ is an algebraic automorphism w of $\mathrm{H}^i(X)$, and by the previous argument we see that w^{-1} is algebraic, hence so is $u^{-1} = w^{-1}u'$.

As a consequence , we see that if $x \in \mathrm{H}^i(X)$ is such that $u(x)$ is algebraic (i being now assumed to be even), than so is x. The same result should hold in fact if u is a monomorphism, the reason being that in this case there should exists a left-inverse which is algebraic; this exists indeed in a case like $\mathrm{H}^{n-1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(Y)$ (where we take the left inverse $\bigwedge_X \varphi_*$). But to get it in general, it seems w need moreover the Hodge index relation. (The complete yoga then being that we have the category of motives which is semi-simple!). Without speaking of motives, and staying down on earth, it would be nice to explain in the notes that $C(X)$ together with the index relation $I(X \times X)$ implies that the ring of correspondences classes for X is semi-simple, and how one deduces from this the existence of left and right inverses as looked for above.

This could be given in an extra paragraph (which I did not really touch upon in the talk), containing also the deduction of the Weil conjectures from the conjectures C and A.

A last and rather trivial remark is the following. Let's introduce variants $A'_\ell(X)$ and $A''_\ell(X)$ as follows:

$A'_\ell(X)$: if $2i \leq n-1$, any element x of $\mathrm{H}^i(X)$ whose image in $\mathrm{H}^i(Y)$ is algebraic, is algebraic.

$A''_\ell(X)$: if $2i \geq n-1$, any algebraic element of $\mathrm{H}^{i+2}(X)$ is the image of an algebraic element of $\mathrm{H}^i(Y)$.

Let us consider also the specifications $A'_\ell(X)^\circ$ and $A''_\ell(X)^\circ$, where we restrict to the critical dimensions $2i = n-1$ if n odd, $2i = n-2$ if n even. All these conditions are in the nature of "weak" Lefschetz relations, and they are trivially implied by $A_\ell(X)$ resp. $C_\ell(X)$ (in the first case, applying φ we see that $L_X X$ is algebraic; in the second, we take $y = \bigwedge_Y \varphi^+(x)$). The remark then is that these pretendently "weak" variants in fact imply the full Lefschetz relations for algebraic cycles, namely:

Proposition. — $C_\ell(X)$ *is equivalent to the conjunction* $C_\ell(Y) + A_\ell(X \times X)^\circ + A''_\ell(X \times X)^\circ$, *hence (by induction) also to the conjunction of the conditions* A'°_ℓ *and* A''°_ℓ *for all of the varieties* $X \times X$, $Y \times Y$, $Z \times Z$,... *Analogous statement with* $X \times Y$, $Y \times Z$ *etc instead of* $X \times X$, $Y \times Y$ *etc.*

This comes from the remark that $A_\ell(X)^\circ$ follows from the conjunction of $A'_\ell(X)^\circ$ and $A''_\ell(X)^\circ$, as one sees by decomposing $L_X^2 : \mathrm{H}^{2m-2}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ into $\mathrm{H}^{2m+2}(X) \xrightarrow{\varphi^k} \mathrm{H}^{2m+2}(Y) \xrightarrow{\varphi_\alpha} \mathrm{H}^{2m}(X) \xrightarrow{L_X} \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ if $\dim X = 2m$ is even, and $\mathrm{H}^{2m+1-1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m+1+1}$ into $\mathrm{H}^{2m}(X) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{H}^{2m}(Y) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ if dim $X = 2m+1$ is odd.

Sincerely yours

Lettre à J. Tate, 5.1966[13]

Pise 5.1966

Cher John,

J'ai réfléchi aux groupes formels et à la cohomologie de De Rham, et suis arrivé à un projet de théorie, ou plutôt de début de théorie, que j'ai envie de t'exposer, pour me clarifier les idées.

Chapitre 1. — La notion de cristal

Commentaire terminologique : Un cristal possède deux propriétés caractéristiques : la *rigidité*, et la faculté de *croître*, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de souffre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs etc.

1.0. — Soit S un préschéma, au dessus d'un autre R; dans le cas qui nous intéressera le plus, on aura $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Soit C la catégorie des R-préschémas T sous S, (i.e. munis d'un R-morphisme $S \longrightarrow T$,) tels que $S \longrightarrow T$ soit une immersion fermée définie par un idéal localement nilpotent. On a le foncteur "oubli" de C dans Sch, et la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur des préschémas variables induit donc une catégorie fibrée sur C, associant à tout T la catégorie des Modules quasi-cohérents sur T.

Définition (**1.1**). — *On appelle cristal de modules (sous-entendu: quasi-cohérents) sur S, relativement à R, une section cartésienne de la catégorie fibrée précédente au dessus de C. Plus généralement, pour toute catégorie fibrée $\mathscr{F}$ sur* $\mathrm{Sch}_{/R}$, *on définit la notion de "$\mathscr{F}$-cristal" sur S, ou "cristal en objets de $\mathscr{F}$", de la façon correspondante. Ceci donne un sens aux expressions: cristal en algèbres, en algèbres commutatives, en préschémas relatifs etc, sur S relativement à R. Quand $R =$* $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, *on parlera de "cristal absolu" sur S, de l'espèce considérée.*

1.2. — Les $\mathscr{F}$-cristaux sur S forment une catégorie, qui dépend fonctoriellement de $\mathscr{F}$. Ceci permet, en particulier, de définir sur la catégorie des cristaux

[13] `https://agrothendieck.github.io/divers/LGT66scan.pdf`

de modules sur S les opérations tensorielles habituelles: produit tensoriel de deux cristaux de modules etc, satisfaisant aux propriétés habituelles.

1.3. — Regardons de même ce qui se passe quand on fixe $\mathscr{F}$ et fait varier R, S. Tout d'abord, si $R \longrightarrow R' \longrightarrow R$, alors tout cristal sur S relativement à R en définit un relativement à R', par simple restriction. En particulier, un cristal absolu définit un cristal relatif, pour tout préschéma de base R de S.

Fixons maintenant R, S, et soit $S' \longrightarrow S$ un morphisme. On définit alors de façon naturelle un foncteur "image inverse" allant des cristaux de type $\mathscr{F}$ sur S vers les cristaux de type $\mathscr{F}$ sur S vers les cristaux de même type sur S' (tout relatif à R). Pour s'en assurer, il suffit de définit un foncteur $C' \longrightarrow C$ (ou C' est défini en termes de S' comme C en termes de S), compatible avec les foncteurs "oubli". Or si $S' \longrightarrow T'$ est un objet de C', il y a une construction évidente de somme amalgamée dans la catégorie des préschémas, qui donne un $T = S \amalg_{S'} T'$ et un morphisme $S \longrightarrow T$, qui fait de T un objet de C, ce qui définit le foncteur cherché.

On peut donc dire que pour un S variable sur R, les cristaux de type $\mathscr{F}$ sur S forment une *catégorie fibrée* sur $\mathrm{Sch}_{/R}$, grâce à la notion d'image inverse précédente.

Les deux variantes (en R, et en S) sont compatibles dans un sens évident, et peuvent être régardées comme provenant d'une variance en (R, S) directement.

1.4. — On a un foncteur naturel et évident qui va des cristaux de modules (disons) sur S (rel à R) dans des Modules quasi-cohérents sur S: c'est le foncteur "valeurs en S". On fera attention que ce foncteur n'est en général pas même fidèle (cf exemple **1.5.** plus bas). Il est donc un peu dangereux de vouloir considérer un cristal de modules sur S comme étant un Module quasi-coherent $\mathscr{M}$ sur S, *muni* d'une structure supplémentaire, sa "structure cristalline". Dans certains cas cependant (cf **1.8.**), le foncteur cristaux de modules $\rightsquigarrow$ Modules est fidèle et le point de vue précédent devient plus raisonnable.

1.5. Exemple 1: relations avec les vecteurs de Witt. — Supposons que S soit le spectre d'un corps *parfait* k, et $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Soit W l'anneau de Cohen de corps résiduel k: si $\mathrm{car} k > 0$, c'est l'anneau des vecteurs de Witt défini par k, si $\mathrm{car} k = 0$, c'est k lui-même; dans ce dernier cas, supposons k *algébrique* sur $\mathbf{Q}$. Alors il est bien connu que la catégorie C de **1.0.** est équivalente à celle des W-algèbres locales, annulées par une puissance de l'idéal maximal de W, à extension résiduelle triviale. Écrivant $W = \varprojlim W_n$ comme à l'accoutumé, dans le cas $p > 0$, on trouve que la donnée d'un cristal de modules (absolu) sur k équivaut à celle d'un système projectif (M_n) "p-adique" de modules M_n sur les W_n ; donc les cristaux de modules de présentation finie sur k forment une catégorie équivalent à celle des modules de type fini sur W. Si $p = 0$, alors la catégorie des cristaux de modules sur k est équivalente à celle des vectoriels sur $k = W$. Ces descriptions sont compatibles avec les notions de changement de base pour k variable. Elles se formulent évidemment pour toute autre espèce de cristaux, défini par une catégorie fibrée $\mathscr{F}$.

Dans le cas envisagé, le foncteur "valeur en S", sur la catégorie des cristaux de présentation finie sur k, s'identifie au foncteur $\otimes_W k$ sur la catégorie des modules de type fini sur W, foncteur qui (si $p > 0$) n'est pas fidèle.

1.6. Exemple 2. S **étale sur** R**.** — Si $S = R$, la catégorie C admet R lui-même comme objet final, donc le foncteur "valeur en R" est une équivalence de la catégorie des cristaux sur R, de type $\mathscr{F}$ donné, avec la catégorie $\mathscr{F}_R$. En particulier, un cristal de modules sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ est essentiellement la même chose qu'un $\mathbf{Z}$-module.

De façon un peu plus général, si S est étale sur R, alors S est un objet final de C, et les cristaux de modules (disons) sur S, relativement à R, s'identifient aux Modules quasi-cohérents sur S.

1.7. Exemple 3 : S **un sous-préschéma de** R**.** — Comme la notion de cristal relatif sur S ne change pas si on remplace R par un ouvert par lequel se factorise S, on peut supposer S fermé dans R, défini par un idéal quasi-cohérent J. Soit $S_n = V(J^{n+1})$ le n-ème voisinage infinitésimal de R dans S. Alors la famille des objets S_n de C est finale dans C, d'où on conclut facilement qu'un cristal de type $\mathscr{F}$ sur S s'identifie à une suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'objets des F_{S_n} qui se recollent. En particulier, si R est localement noethérien, un cristal de modules sur S relativement à R, de présentation finie, s'identifie à un Module cohérent sur le complété formel de R le long de S.

Cet exemple contient le cas de car $p > 0$ de l'exemple 1, si on note qu'à priori, grâce à Cohen, un cristal absolu sur k, c'est pareil qu'un cristal relativement à W.

On peut aussi donner un énoncé commun aux exemples 2 et 3, en partant du cas où on se donne un $S \longrightarrow R$ non *ramifié*, ce qui permet en effet de construire encore des “voisinages infinitésimaux” S_n.

1.8. Relation avec la notion de stratification. — Les données R, S, $\mathscr{F}$ étant comme d'habitude, considérons pour chaque entier $n \geq 0$ le voisinage infinitésimal Δ_n de la diagonale de $S \times_R S$, qui s'envoie dans S par les deux projections pr_1 et pr_2. Si E est un objet de $\mathscr{F}_S$, une *n-connexion* sur E (relativement à R) est la donnée d'un isomorphisme $pr_1^*(E) \simeq pr_2^*(E)$ qui induit l'identité sur la diagonale. Une ∞*-connexion* ou *pseudo-stratification* de E, est la donnée pour tout n d'une n-connexion, de telle façon que ces n-connexions se recollent. Enfin, une *stratification* sur E est la donnée d'une pseudo-stratification qui satisfait aux conditions formelles d'une donnée de descente, quand on fait intervenir les voisinages infinitésimaux de tous ordres de la diagonale de $S \times_R S \times_R S$. Ces notions donnent lieu à des sorties analogues à ceux de **1.2.** et **1.3**. Notons que lorsque S est “formellement non ramifié sur R” i.e. $\underline{\Omega}^1_{S/R} = 0$, alors toutes ces notions deviennent triviales: un objet E admet alors toujours exactement une connexion de tout ordre, donc une seule pseudo-stratification, et celle-ci est une stratification: donc la catégorie des objets de F_S *munis* d'une stratification relativement à R est alors équivalente, par le foncteur “valeur en S”, à la catégorie $\mathscr{F}_R$ elle même. (Dans tous les cas, le foncteur “valeur en S” est fidèle).

Ceci défini, on voit que pour tout cristal $\mathscr{M}$ sur S de type $\mathscr{F}$ (relativement à R), sa valeur $\mathscr{M}(S) = M$ est un objet de $\mathscr{F}_S$ muni d'une *stratification canonique* relativement à R, d'où un foncteur: cristaux relatifs de type $\mathscr{F} \rightsquigarrow$ objets de $\mathscr{F}$ munis d'une stratification. La remarque de **1.4.** montre d'ailleurs que ce foncteur n'est pas toujours fidèle. Il y a cependant des cas intéressants où ce foncteur est une *équivalence de catégories*: il en est en tous cas ainsi si $S \longrightarrow R$ est *“formellement lisse”*, par exemple si c'est un morphisme lisse, ou si S et R sont des spectres de corps k_0, k, avec k une extension *séparable* de k_0. (Quand d'ailleurs $S \longrightarrow R$ est même formellement étale, alors les deux catégories: celle des cristaux et celle des objets à stratification, deviennent équivalentes, par le foncteur “valeur en S”, à $\mathscr{F}_S$ lui-même, ce qui nous redonne l'exemple à la noix de **1.5** ou k est de car. nulle). Sauf erreur, on a encore une équivalence de catégories si $S \longrightarrow R$ est *plat et localement de présentation finie*, (du moins si R localement noétherien, et se bornant aux Modules cohérents) mais je n'ai pas écrit le démonstration.

1.9. Une digression sur la notion de stratification en caractéristique nulle. — Quand S est lisse sur R (en fait, il suffit que S soit différentiellement lisse sur R, i.e. le morphisme diagonal $S \longrightarrow S \times_R S$ une immersion régulière), et si R est de caractéristique nulle, alors une stratification d'un Module M sur S (relativement à R) est connue quand on connaît la 1-connexion qu'elle définit, et on peut se donner celle-ci arbitrairement, soumise à la seule condition que le "tenseur courbure", qui est une certaine section de $\underline{\Omega}^2_{S/R} \otimes \mathrm{End}(M)$, soit nul. (Cela peut aussi s'exprimer en disant qu'on fait opérer le faisceau $\underline{\mathrm{Der}}_{S/R}$ des dérivations relatives de S sur R, sur M, de façon à satisfaire aux relations habituelles, y compris celle de transformer crochet en crochet). J'ignore dans quelle mesure l'hypothèse de lissité est nécessaire pour cet énoncé, ou si (dans le cas lisse disons) on peut formuler un énoncé analogue pour toute catégorie fibrée $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{Sch}_{/R}$. Mais bien entendu, l'hypothèse de caractéristique nulle faite sur R est tout à fait essentielle. Si R est de caractéristique $p > 0$, l'énoncé qui remplace le précédent (et qui sauf erreur est dû à Cartier) est que dans ce cas, la donnée d'une "connexion sans torsion" sur M [14] équivaut à une "donnée de descente" sur M relativement à frobenius $S \longrightarrow S^{(p/R)}$. Il y a loin de là à une stratification !

1.10. La notion de p-cristal et ses variantes. — Nous supposons maintenant que S est de caractéristique $p > 0$, et $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ (ou $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)$, spectre des entiers p-adiques, cela reviendrait au même). Si $\mathscr{M}$ est un cristal de modules sur S, de présentation finie, alors en vertu de **1.5.**, pour tout $s \in S$, si s' est le spectre d'une clôture parfaite de $k(s)$, l'image inverse $\mathscr{M}(s')$ de $\mathscr{M}$ en s' peut être interprétée comme un module de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k(s'))$. Ainsi, la notion de cristal de modules sur S (au sens absolu) semble convenable pour formaliser la notion de *"famille algébrique" de modules sur les anneaux de vecteurs de Witt aux différents points parfaits au dessus de S*. Bien entendu, la notion de cristal est plus fine que ça encore, et doit donner, j'espère, la bonne notion de "famille" lorsque, disons, S est le spectre d'un corps de fonctions (donc pas nécessairement parfait). Je vais maintenant introduire une structure supplémentaire, qui devrait permettre de formuler, de même, la notion de "famille algébrique de modules de Dieudonné", paramétrée par S,

[14]"compatible avec puissances p-émes"

Considérons le morphisme "puissance p-ème"

$$S \xrightarrow{\mathrm{frob}_S} S,$$

il permet d'associer, à tout cristal (absolu) sur S, d'espèce quelconque, un cristal image inverse:

$$\mathscr{M}^{(p)} = \mathrm{frob}_S(\mathscr{M}).$$

On appelle *p-crsital* sur S un cristal $\mathscr{M}$ sur S, muni d'un morphisme de cristaux

$$\mathscr{M}^{(p)} \longrightarrow \mathscr{M}.$$

Évidemment, les p-cristaux sur S d'espèce $\mathscr{F}$ donnée forment encore une catégorie, dépendant fonctoriellement de $\mathscr{F}$ (pour les foncteurs *covariants* cartésiens de catégories fibrées), ce qui permet par exemple, pour les p-cristaux de modules sur S, d'introduire toutes les opérations tensorielles habituelles covariantes (produits tensoriels, puissances alternées et symétriques etc). Pour définir le *dual* d'un p-cristal de modules, il y a lieu d'introduire une notion duale de celle de p-cristal d'espèce $\mathscr{F}$, c'est celle de p^{-1}*-cristal* d'espèce $\mathscr{F}$: c'est un cristal d'espèce $\mathscr{F}$, avec un morphisme de cristaux en sens inverse:

$$V : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}^{(p)}.$$

Ainsi un contrafoncteur cartésien entre catégories fibrées sur Sch transforme p-cristaux en p^{-1}-cristaux, et inversement. Les p^{-1}-cristaux de modules se multiplient tensoriellement entre eux comme les p-cristaux de modules.

Pour obtenir une notion "autoduale", il y a lieu d'introduire la notion de *bicristal de poids 1* sur S, qu'on pourrait aussi appeler un *cristal de Dieudonné* sur S, lorsque $\mathscr{F}$ est fibré en catégories additives: c'est un cristal muni à la fois d'une p-structure et d'une p^{-1}-structure, satisfaisant aux relations

$$FV = p\,\mathrm{Id}_M, \quad VF = \mathrm{Id}_{M^{(p)}}.$$

Cette notion semble tout à fait adéquate à l'étude des groupes formels, ou ce qui revient moralement au même, à l'étude de la cohomologie de De Rham en dimension 1. En dimension supérieure i, il y a lieu d'introduire la notion de *bicristal de poids i*, qui est un cristal muni de F et V satisfaisant aux relations

$$FV = p^i \operatorname{Id}_M, \quad VF = p^i \operatorname{Id}_{M^{(p)}}.$$

Par exemple, on définit le *bicristal de Tate de poids* $2i$, qui est défini par le cristal de modules unité (associant à tout T sous S le module $\underline{O}_T$ lui-même), et les morphismes de cristaux

$$F = p^i \operatorname{Id}_{T^i}, \quad V = p^i \operatorname{Id}_{T^i}.$$

Ainsi le bicristal de Tate de poids $2i$ est la puissance tensorielle i-ème du bicristal de Tate de poids 1. (**N.B.** les bicristaux de poids quelconques se multiplient tensoriellement, de façon que les poids s'ajoutent).

1.11. — Si on veut "rendre inversible" le bicristal de Tate T^1, on est obligé, qu'on le veuille ou non, de passer à une catégorie de fractions de la catégorie des cristaux de modules sur S, (qui entre parenthèses est une catégorie $\mathbf{Z}_p$-linéaire, (i.e. les Hom sont des $\mathbf{Z}_p$-modules...), tout comme les catégories de p-cristaux etc qu'on en déduit). Il revient donc au même de passer à une catégorie de fractions, en déclarant qu'on veut rendre notre catégorie abélienne $\mathbf{Q}$-linéaire, ou en déclarant qu'on la veut rendre $\mathbf{Q}$-linéaire : il faut faire le quotient par la sous-catégorie abélienne épaisse formée des objets de torsion, qui sont aussi des objets de p-torsion [15]. On trouve la catégorie des *"cristaux de modules à isogénie près"*, ou *isocristaux*, sur S. Utilisant cette nouvelle notion, on définit comme ci-dessus la notion de p-isocristal, comme étant la donnée d'un isocristal $\mathscr{M}$ muni d'un homomorphisme $F : \mathscr{M}^{(p)} \longrightarrow \mathscr{M}$. La notion de bi-isocristal de poids i, qui serait calquée de celle de bicristal de poids i, n'est pas très raisonnable alors, car V doit être alors donné en termes de F comme $p^i F^{-1}$. Il y a lieu plutôt d'appeler *bi-isocristal* (sans précision de poids) un p-isocristal pour lequel F est un *isomorphisme*, et de ne pas choisir entre les différents $p^i F^{-1}$ possibles; il vaut mieux également ne pas parler ici de p^{-1}-isocristal, la notion intéressante étant celle de bi-isocristal, qui est manifestement *autoduale* quand on se restreint aux objets de type fini: le dual de $(\mathscr{M}, F)$ est $(\mathscr{M}, {}^t F^{-1})$, où $\mathscr{M}$ est le iso-cristal dual de M.

[15] et cela revient simplement à garder les mêmes objets, et à prendre comme nouveaux Hom les $Hom \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

On peut également, bien sûr, localiser par rapport à p en partant déjà de la catégorie des bi-isocristaux de poids i, on trouve les *bicristaux de poids i à isogénie près*, qui forment une catégorie abélienne $\mathrm{Isbicr}(S,i)$, et un foncteur exact "oubli de V"

$$\mathrm{Isbicr}(S,i) \longrightarrow \mathrm{Isbicr}(S),$$

à valeurs dans la catégorie $\mathrm{Isbicr}(S)$ des iso-bicristaux sur S. Ce foncteur est *pleinement fidèle*, de sorte que *les bi-isocristaux forment une généralisation commune des bicristaux de poids i à isogénie près.* Pour préciser ce point, désignant par $\mathrm{Bicr}(S,i)$ la catégorie des bicristaux de poids i sur S, il y a lieu d'introduire des foncteurs canoniques

$$\mathrm{Bicr}(S,i) \longrightarrow \mathrm{Bicr}(S,i+1) \longrightarrow ...,$$

donnés par $(\mathscr{M},F,V) \rightsquigarrow (\mathscr{M},F,pV)$. Quand on localise ces foncteurs par p, on trouve des foncteurs

$$\mathrm{Isbicr}(S,i) \longrightarrow \mathrm{Isbicr}(S,i+1) \longrightarrow ....$$

qui se trouvent être *pleinement fidèles* : on peut donc considérer que, pour i croissant, la notion de "bicristal de poids i, à isogéne près" constitue une généralisation de plus en plus large de celle de "cristal de Dieudonné". La notion de "bi-isocristal" est à ce titre une généralisation qui englobe toutes les précédentes, et qui de plus a la louable vertu d'être stable par produit tensoriel, *et* passage au dual. Cela semble donc une catégorie toute indiquée comme catégorie des valeurs pour un foncteur "cohomologie de De Rham" convenable, lorsqu'on se décide à travailler à isogénie près.

1.12. Exemple 1 : Cas où S est le spectre d'un corps parfait k. — Alors la donnée d'un cristal de modules de type fini sur k équivaut à la donnée d'un module de type fini M sur W, la formation du motif $\mathscr{M}^{(p)}$ correspond à la formation

$$M^{(p)} = M \otimes_W (W, f_W),$$

où f_W est l'endomorphisme de frobenius de W, et (W,f_W) est la W-algèbre définie par f_W. Par suite un structure de p-cristal sur M revient à la donnée d'un homomorphisme de W-modules $M^{(p)} \longrightarrow M$, ou si on préfère, à la donnée d'un homomorphisme f_W-semi-linéaire

$$F_M : M \longrightarrow M.$$

Comme l'application $x \longrightarrow x \otimes 1$ de M dans $M \otimes_W (W, f_W)$ est bijective, f_W étant un automorphisme de W, on peut considérer la bijection inverse, qui est f_W^{-1}-semi-linéaire. Par suite, la donnée d'une p^{-1}-structure sur M revient à la donnée d'un homomorphisme f_W^{-1}-linéaire:

$$V_M : M \longrightarrow M.$$

la donnée d'un couple (F, V) définit sur M une structure de bi-cristal de poids i si et seulement si on a

$$FV = VF = p^i Id_M.$$

En particulier, pour $i = 1$, on retrouve la notion de *module de Dieudonné*: la catégorie des cristaux de Dieudonné sur k est canoniquement équivalente à celle des modules de Dieudonné relativement à k.

La catégorie des isocristaux de type fini sur k est équivalente à la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps des fractions K de W. Donc un biisocristal (de type fini) sur k s'identifie à un tel vectoriel, muni d'un f_K-endomorphisme bijectif.

Toutes ces descriptions sont compatibles avec les opérations tesorielles, et la formation d'images inverses pour k variable.

On peut se demander, avec la description précédente des bi-isocristaux, quels sont ceux qui sont les couples (E, F), E un vectoriel sur K et F un automorphisme semi-linéaire, tels que, si on pose $V = p^i F^{-1}$, pout out $x \in E$, l'ensemble de ses transformés par les différents monômes non commutatifs en F, V soit une partie *bornée* de E: c'est une pure tautologie. Pour qu'il existe un i ayant cette propriété, il faut et il suffit que pour tout $x \in E$, l'ensemble des $F^n x$ soir borné.Bien entendu, c'est là une propriété qui est stable par changement de F en pF (correspondant à la tensorisation par le bi-isocristal de Tate de poids 2), mais non par le changement de F en $p^{-1}F$ (correspondant à la tensorisations par l'inverse T^{-1} du bi-isocristal précédent). Comme on tient beaucoup à inverser Tate, on voit qu'il n'est pas naturel, en ffet, de poser une condition de croissance sur l'ensemble des itérés de F. De façon précise, appelant *effectis* les bi-isocristaux qui proviennent d'un objet d'un Isbicr(S, i), on voit que tout bi-isocristal est de la forme $T^{-i} \otimes_{\underline{N}}$, avec $\underline{N}$ effectif: on n'a pas ajouté plus de nouveaux objets qu'il n'était absolument nécessaire !

1.13. Exemple 2 : S lisse sur un corps parfait k. — Déterminons d'abord dans ce cas les cristaux sur S, sans plus. Wout d'abord, sans condition de lissité, on voit à l'aide de la propriété caractéristique de W que la catégorie C introduite dans 1.0. ne change pas, essentiellement, quand on remplace $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ par $R = \mathrm{Spec}(W)$. D'autre part, il résulte aussitôt des définitions que la donnée d'un cristal sur S, relativement à W, revient à la donnée d'un système cohérent de cristaux sur S, relatifs aux $W_n = W/p^{n+1}W$. (**NB** On n'a pas formulé avec la généralité qui convenait l'exemple 3 de 1.7.!) Théoriquement, on est donc ramené à déterminer, pour chaque n, la catégorie des cristaux sur S relatifs à W_n, et les foncteurs restrictions entre ces catégories. D'ailleurs, il est inoffensif de se localiser sur S, par exemple de supposer au besoin S affine. Utilisant maintenant la lissité de S, on peut donc supposer que pour tout n, S se remonte en un S_n lisse sur W_n, de façon que ces choix se recollent (il suffit pour ceci S lisse et affine). Or, il résulte encore facilement des définitions, utilisant seulement que $S = S_0 \longrightarrow S_n$ est une immersion fermée définie par un Ideal nilpotent, que le foncteur restriction des cristaux sur S_n (relativement à une base quelconque - ici on prendra W_n) vers les cristaux sur S_0, est une équivalence de catégories, donc un cristal sur S relativement à W_n s'identifie à un cristal sur S_n relativement à W_n. Comme $S_n b$ est lisse sur W_n, il résulte de ce qui a été dit dans 1.8. que les cristaux en question s'identifient aux objets (de l'espace $\mathscr{F}$ considérée) sur S_n, *munis d'une stratification relativement à* $R_n = \mathrm{Spec}(W_n)$. Les foncteurs restrictions sur les cristaux s'expriment alors par les foncteurs restrictions correspondants pour objets stratifiés. En résumé: *un cristal $\mathscr{M}$ sur S s'identifie à un système cohérent $(\mathscr{M}_n)$ d'objets à stratification sur les différents S_n sur $R_n =$* $\mathrm{Spec}(W_n)$. Pour relier ceci à des objets qui soient plus dans la nature d'objets "définis en caractéristique nulle", supposons d'abord que l'on puisse même relever S en un schéma X *propre sur* $R = \mathrm{Spec}(W)$, hypothèse évidemment bien restrictive. On voit alors, utilisant les théorèmes de comparaison EGA III 4.5 que *dans le cas de cristaux de modules cohérents sur S, la catégorie des dits est canoniquement équivalente à la catégorie des Modules cohérents M sur X, munis d'une stratification relativement à* $R = \mathrm{Spec}(W)$. (**N.B.** Il se trouve donc, à posteriori, que cette dernière catégorie est essentiellement indépendante du relèvement choisi X de S). Considérant la fibre générique X_K de X sur R, qui est un schéma propre et lisse sur un corps de caractéristique nulle, on trouve donc un foncteur remarquable "restriction" ou "localisation", allant de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S, dans la catégorie des Modules cohérents sur X_K, stratifiés relativement à X_K. Or (oubli de **1.8.**) on voit facilement qu'un Module cohérent stratifié sur un préschéma localement de type fini sur un corps est nécessairement localement libre. De plus comme ici K est de caractéristique nulle, et X_K lisse dessus, on a signale dans **1.8.** que la notion de stratification s'explicite très simplement comme celle de "connexion intégrable". [Enfin, lorsque S donc X_K est géométriquement connexe, et que K peut se plonger dans le corps des complexes $\mathscr{C}$, alors la notion de module cohérent à action intégrable sur X_K s'interprète en termes de représentations linéaires (complexes) du groupe fondamental transcendant de $X_{\mathscr{C}}^{an}$, de façon bien connu. Si par exemple le groupe fondamental transcendant est le groupe unité, alors on conclût par descente que tout Module cohérent stratifié sur X_K est trivial, ce qui en termes de S s'énonce en disant que tout cristal de modules cohérents sur S est isogène à un cristal "croissant", i.e. à un cristal qui est l'image inverse d'un cristal sur k, (lui-même défini par un module de type fini sur W). De ceci et de la rigidité de la notion de cristal on déduit facilement, par exemple, que tout p-cristal cohérent sur S ou tout bi-cristal de poids i donné (par exemple tout cristal de Dieudonné) est isogène à un fournit de même espèce *trivial*. On voit donc là un principale d'approche transcendante pour l'étude des familles de groupes formels (par exemple) en caractéristique p...] Quand à la notion d'isocristal (de modules cohérents) sur S, on constate aussitôt que le foncteur précédent induit un foncteur *pleinement fidèle* de la catégorie de ces derniers, dans la catégorie des modules cohérents stratifiés sur X_K. Il s'impose évidemment d'en déterminer l'image essentielle, et pour commencer d'examiner si par hasard ce foncteur ne serait pas une équivalence de catégories. Cela me [16] semble un peu *trop optimiste*, mais je ne suis sûr de rien, faute d'avoir regardé. Tout ce qu'on peut dire à priori, c'est que la condition cherchée sur un Module stratifié doit être de nature locale en les points de X qui sont maximaux dans S.

Quand on ne suppose pas S propre et remonté globalement, mais qu'on suppose seulement qu'on a remonté S formellement, en un *schéma formel* X sur R,

[16]effectivement []

alors il est vrai (en fait, de façon essentiellement triviale) que *la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S est équivalente à la catégorie des Modules cohérents sur le schéma formel X, munis d'une stratification relativement à* $\mathrm{Spec}(W) = R$ (quand on transcrit de façon évidente toutes les définitions envisagées dans 1.8. dans le cadre formel). Si on veut encore, comme il est légitime, trouver un analogue la restriction à X_K envisagées plus haut, il faut définir X_K comme *l'espace rigide-analytique sur K défini par le schéma formel X*, et considérer sur X_K des Modules cohérents munis de *stratifications au sens rigide-analytique*, ou ce qui revient au même, de connexions intégrables en ce sens. De tels Modules sont encore nécessairement localement libres. On trouve ainsi un foncteur des cristaux de Modules cohérents sur S dans les Modules cohérents stratifiés sur X_K, induisant un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux cohérents sur S, dans la catégorie des Modules cohérents stratifiés sur X_K. Comme tout à l'heure (et même plus, si on peut dire, car c'est vraiment ici la situation "naturelle"), il s'impose de regarder quelle est l'image essentielle. On peut également se demander si les Modules cohérents stratifiés sur un espace rigide-analytique n'admettraient pas une description simple, en termes d'un groupe plus ou moins discret jouant le rôle du groupe fondamental dans la théorie transcendante sur le corps de complexes. La description donnée des cristaux sur S, toute triviale qu'elle soit, a déjà des conséquences intéressantes pour la structure de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S: cette catégorie est noethérienne (si S est noethérien i.e. de type fini sur k), tout objet contient donc un plus grand sous-objet de torsion, de plus objets sans torsion correspondent dans la description ci-dessus aux Modules stratifiés sans torsion sur X, lesquels sont alors automatiquement localement libres. Il est bien probable que des résultats analogues doivent être vrais sans hypothèse du genre lissité sur S.

1.14. — Il faut encore expliciter, dans la description générale précédente, le foncteur [], pour pouvoir décrire de façon générale, si en plus de la donnée de S sur k, on a un S' lisse sur k' parfait, et des automorphismes $S' \longrightarrow S$ et $\mathrm{Spec}(k') \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ donnant lieu à un carré commutatif, et si enfin on peut relever S' formellement en X', et $S' \longrightarrow S$ en $X' \longrightarrow X$, donnant un carré commutatif avec $\mathrm{Spec}(W') \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$, alors la notion d'image inverse de cristaux de modules cohérents, de S à S', s'explicite en termes d'image inverse de Modules cohérents stratifiés, de X à X'. Lorsque $k = k'$, $S = S'$, et que les morphismes envisagés sont les puissances p-èmes, on est donc conduit à chercher à relever ce morphisme à X de façon compatible avec le morphisme $\mathrm{Spec}(W) \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$ déduit de f_W, ou ce qui revient au même, de relever le morphisme canonique $S \longrightarrow S^{(p/k)}$ en un morphisme de R-schémas formels $X \longrightarrow X \times_R (R, f_R)$. C'est en tous cas toujours possible si S est affine, cas auquel on peut se ramener. Ayant donc ainsi un morphisme

$$f_X : X \longrightarrow X,$$

compatible avec f_R sur $R = \mathrm{Spec}(W)$, et induisant f_S sur S, le foncteur [] s'explicite comme l'image inverse ordinaire de Modules stratifiés sur X relativement à R, resp. (dans le cas de isocristaux) de Modules stratifiés sur l'espace rigide-analytique X_K, pour le "morphisme" $X_K \longrightarrow X_K$ d'espaces rigide-analytiques (relatif à f_K sur le corps de base !) induit par f_K. Bien que f_K et par suite f_{X_K} loin d'être unique, le foncteur envisagé qu'il définit ne dépend pas, essentiellement, des choix faits.

1.15. Bicristaux et biisocristaux sur une base quelconque. — Ne supposons plus nécessairement S de caractéristique déterminé p. Pour chaque nombre premier p, soit S_p la fibre $V(p l_{\underline{O}_S})$ de S sur le point $p\underline{Z}$ de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Un bicristal de poids i sur S est par définition la donnée d'un cristal de Modules $\mathscr{M}$ sur S, et pour chaque p d'une structure de bi-cristal de poids i sur la restriction $\mathscr{M}_p$ de $\mathscr{M}$ à S_p, définie par la donnée de F_p, V_p. On définit de même la notion de bi-isocristal sur S, étant entendu qu'un isocristal est un objet de la catégorie des isocristaux sur S (comme de juste), définie à partir de la catégorie des cristaux de modules en "localisant" par rapport à des entiers $n > 0$ arbitraires, i.e. en tensorisant les Hom sur $\mathscr{Z}$ par $\mathscr{Q}$. - Lorsque S est de cararactéristique nulle, le supplément de structure impliqué par "bi" est évidemment vide, tandis que si S est de type fini sur $\mathscr{Z}$ et domine $\mathrm{Spec}(\mathscr{Z})$, alors la notion envisagée est d'une essentiellement arithmétique, les différents F_p jouant le rôle d'homomorphismes de frobenius, comme de bien entendu; dans le cas du poids 1, en particulier, on peut considérer que le cristal avec sa bi-structure supplémentaire permet de relier entre eux les groupes formels en les diverses caractéristiques auxquels il donne naissance...

1.16. Un retour en arrière. — La définition 1.1. et le sortie 1.3. sont un petit peu canulés. Au lieu de prendre dans 1.0. pour C la catégorie des R-flèches

$S \longrightarrow T$ qui..., il faut prendre la catégorie des R-flèches $U \longrightarrow T$ qui..., où U est un ouvert induit non précisé de S. De plus, la définition n'est guère raisonnable alors que si la catégorie fibrée envisagée $\mathscr{F}$ est un "champ" pour la topologie de Zariski sur $\mathrm{Sch}_{/R}$, i.e. si on peut y recoller flèches et objets. Ceci est nécessaire en tous cas pour pouvoir dans 1.3. définir la notion d'image inverse, la définition que j'y ai donnée n'étant raisonnable que si S, S' sont affines. Dans le cas général, il faut se localiser sur S et S' pour se ramener à cette situation. Autrement on bute sur des canulars idiots de nature globale, comme le fait que sans restrictions sur $S' \longrightarrow S$, la construction envisagée de somme amalgamée fait sortir de la catégorie des préschémas... Il est probable qu'il y aura bien d'autres canulars de détail dans ces notes, mais, je pense, sans conséquence !

Il est évidemment tentant de vouloir interpréter les cristaux de modules comme faisceaux de modules sur un certain site. C'est possible, en prenant le *"site cristallogène de S sur R"*, qui est précisément le site dont la catégorie sous-jacent C est celle des R-morphismes $U \longrightarrow T$ (U ouvert de S, $U \longrightarrow T$ immersion fermée surjective définie par Ideal nilpotent sur T), la topologie est celle de Zariski: on prend comme familles couvrantes "de définition" de $(U \longrightarrow T)$ les familles définies pr des recouvrements ouverts (T_i) de T, chaque T_i muni de la structure induite, et définissant $(U_i \longrightarrow T_i)$ par $U_i = U \cap T_i$. Un faisceau d'ensembles sur ce site s'identifie à un système de faisceaux d'ensembles $F_{U \longrightarrow T}$ sur les objets buts des objets de C, avec, pour tout flèche $(U \longrightarrow T) \longrightarrow (U' \longrightarrow T')$ de C, un homomorphisme de l'image inverse de $F_{U' \longrightarrow T'}$ [] T, dans $F_{U \longrightarrow T}$ (homomorphisme qui n'est pas nécessairement un isomorphisme !) et qui sont un isomorphisme si $T \longrightarrow T'$ est une immersion ouverte. En particulier, associant à tout $(U \longrightarrow T)$ le faisceau $\mathscr{O}_T$ sur T, on trouve un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_C$ sur C. Ceci posé, les cristaux de modules (quasi-cohérents) sur S s'identifient aux Modules quasi-cohérents (i.e. localement conoyau d'un homomorphisme de Modules libres) sur $\mathscr{O}_C$; les cristaux "de près finie" i.e. les cristaux de Modules de présentation finie, correspondant exactement aux Modules de présentation finie sur $\mathscr{O}_C$.

Quand on a un R-morphisme $S' \longrightarrow S$, je ne vois pas de morphisme naturel correspondant entre les *sites* cristallogènes correspondants à S, S'. Ce n'est pas bien gênant, car introduisant les *topos cristallogènes* $\mathrm{Topcr}_{S/R}$ et $\mathrm{Topcr}_{S'/R}$ définis par les sites en question, on définit par la méthode esquissée dans 1.3. un morphisme

$$\mathrm{Topcr}_{S'/R} \longrightarrow \mathrm{Topcr}_{S/R},$$

correspondant à la notion naturelle de "image inverse de faisceaux" au sens inverse (qui, j'avoue devrait être définie avec le plus grand soin).

1.17. — On est donc dans une situation où on peut faire marcher la machine cohomologique. Étant loin de mes bases, je n'ai pas tenté sérieusement de tirer au clair si les images directes supérieures qu'on définit ainsi, et en particulier les groupes de cohomologie du site cristallogéne, donnent ce qu'on voudrait.

Le test-clef est le suivant: *si R est le spectre d'un corps, et si S est lisse sur R, et propre sur R dans le cas de la caractéristique $p > 0$, on voudrait trouver, comme cohomologie à coéfficients dans $\underline{O}_C$ lui-même, la cohomologie de De Rham de S relativement à R.* Plus généralement, sans condition sur R, si $f : S' \longrightarrow S$ est propre et lisse, on voudrait trouver comme "valeur en S'" $\mathrm{R}^1 f_{cris*}(\underline{O}_{C'})$ (cf 1.4.) le faisceau de cohomologie de De Rham $\mathrm{R}^i f_*(\Omega^*_{S'/S})$, et on voudrait [17] que la connexion canonique à la Gauss-Manin sur ce dernier soit celle associée à la stratification canonique provenant de la structure cristalline (cf 1.8.).

L'existence d'une connexion de Gauss-Manin en cohomologie de De Rham (que j'ai vérifié pour n'importe quel morphisme lisse), et le tapis de Washnitzer-Monsky, sont en tous cas des indications assez fortes pour conduire à penser qu'il doivent exister une théorie cohomologique, en termes de cristaux, donnant de telles valeurs pour l'argument $\underline{O}_C$. Au cas où la cohomologie du site cristallogène ne donnerait pas les résultats qu'il faut, on pourrait essayer (au lieu de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie de *tous* les Modules sur le site annelé cristallogène) de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie des seuls Modules quasi-cohérents sur le site cristallogène, i.e. dans la catégorie des cristaux de modules.

Chapitre 2. — La cohomologie de De Rham est un cristal

2.1. — L'affirmation du titre n'est pour l'instant qu'une hypothèse ou un voeux pieux mais je suis convaincu qu'elle est essentiellement correcte. Comme je l'ai dit dans 1.17., il y a pour le moment deux indications dans cette directions

[17]

a) Le travail de Washnitzer-Monsky. Deux grosses imperfections dans leur tapis: 1° ils n'obtiennent que des invariants cohomologiques *locaux* sur leur variété lisse en caractéristique $p > 0$, via leurs relèvements; pour avoir un invariante global, ils doivent se limiter à la dimension 1. On peut penser que cela tient à leur manque de familiarité avec les machines cohomologiques. 2° leurs invariants sont des (faisceaux de) vectoriels sur le corps des fractions de W, et non sur W, i.e. ils n'obtiennent que des invariants "modulo isogénie". Il semble bien, en effet, que leur démonstration d'invariance fait intervenir de façon essentielle des dénominateurs. Il n'est pas exclu, d'après cette indication, que dans le titre du Chapitre il faille remplacer "cristal" par "isocristal" (et "est" par "définit"). Ce serait bien dommage, mais n'exclurait pas pour autant l'existence d'une bonne théorie cohomologique pour les cristaux, qui pour un morphisme propre et lisse et le "cristal unité" coïnciderait *modulo isogénie* avec ce que donne De Rham. Le est décisif reste celui indiqué dans 1.17, savoir: donnent-il un résultat positif seulement en caractéristique zéro, ou en toute caractéristique ?

b) L'existence des connexions de Gauss-Manin. J'ai vérifié pour tout morphisme lisse $f : X \longrightarrow S$ l'existence d'une connexion canonique (absolue) sur les $\mathrm{R}^i f$ au sens de De Rham relatif, ou plus correctement, sur le complexe $\mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, considéré comme objet de la catégorie dérivée $D(\mathscr{O}_S)$. A vrai dire, je n'ai pas vérifié pour cette connexion une condition de "nullité de la [ ]"; c'est vérifié en tous cas (par voie transcendante !) si S est lisse, sur R r´duit de caractéristique nulle. [Il faut noter d'ailleurs qu'il n'y a pas d'espoir de montrer que la connexion en question provient toujours d'une stratification: c'est *faux* en caractéristique $p > 0$; la raison étant que la cohomologie de De Rham pour une variété algébrique non complète (par exemple affine) n'est plus du tout raisonnable, étant beaucoup trop grosse. Pour pouvoir espérer une stratification sur $\mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, sans restriction de caractéristique, il faut donc supposer f *propre*.]

c) La nécessité d'une interprétation cristallographique de la cohomologie de De Rham est également suggérée par le problème que j'avais signalé dans mon papier bleu sur De Rham: si R est le spectre du corps des complexes, S lisse sur R et X

lisse et propre sur S, alors la théorie transcendante de la cohomologie fournit une suite spectrale

2.2. — Je vais préciser l'affirmation du titre, en me plaçant dans l'éventualité optimiste bien sûr où on n'aurait pas besoin de s'isogéniser. Comme les cristaux de modules sur un préschéma S forment une catégorie abélienne, on peut prendre la catégorie dérivée; ces objets seront appelés simplement "complexes de cristaux". Un tel animal induit sur S, plus généralement sur tout objet-but T d'un objet $(U \longrightarrow T)$ du site cristallogène C de S, un complexe de Modules ordinaire (envisagé comme objet de la catégorie dérivée des faisceaux de Modules sur S, resp. T). Un complexe de cristaux est dit pseudo-cohérent (resp. parfait, resp. ...) si pour tout objet $(U \longrightarrow T)$ de C, le complexe induit sur T est pseudo-cohérent (resp. ...). Ceci posé, voilà la théorie qu'on voudrait: A tout morphisme lisse et propre $f : X \longrightarrow S$, serait associé un complexe de cristaux (absolu) $\mathrm{DR}(f)$ sur S, appelé cohomologie de De Rham cristalline de f. Ce complexe doit être parfait, sa formation doit être compatible avec tout changement de base sur S (l'image inverse des complexes des cristaux étant entendu, bien entendu, au sens de catégories dérivées...), et bien sûr $\mathrm{DR}(f)$ dépend fonctoriellement (de faoņ contravariant) de X sur S. Tôt ou tard, il faudra expliciter aussi une formule de Künneth $\mathrm{DR}(f \times_S g) \simeq \mathrm{DR}(f)[]\mathrm{DR}(g)$, et une formulé de dualité, qui pour f partout de dimension relative d s'exprime comme un accouplement, définissant une autodualité, $\mathrm{DR}(f) \times \mathrm{DR}(f) \longrightarrow T^d[2d]$, où T^d est le cristal de Tate de poids $2d$, et où $[2d]$ indique qu'on translate les degrés de $2d$ (attention au facteur 2 !). Enfin, on veut comme de juste un isomorphisme $\mathrm{DR}(f)(S) \simeq \mathrm{R} f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, fonctoriel en X, compatible avec les changements de base, avec Künneth et la dualité (déjà connus pour la cohomologie de De Rham ordinaire).

Par prudence, je me suis abstenu de dire quoi que ce soit sur le cas f non propre, dont il faudrait parler tout au moins si on voulait faire sérieusement le lien avec Washnitzer-Monsky.

2.3. La cohomologie de De Rham comme biisocristal — A supposer qu'on ait une théorie du type envisagé dans 2.2., on trouve pour chaque entier p un homomorphisme de frobenius

$$F_p : \mathrm{DR}(f)_p^{(p)} \longrightarrow \mathrm{DR}(f)_p,$$

où l'indice p au complexe de cristaux $\mathrm{DR}(f)$ désigne la restriction à $S_p = V(p.1)$ (au sens des catégories dérivées), qui d'après les conditions de 2.2. n'est autre que $\mathrm{DR}(f_p)$, $f_p : X_p \longrightarrow S_p$ étant induit par f. Utilisant toujours la même condition de compatibilité avec le changement de base, on constate que $\mathrm{DR}(f_p)^{((p))}$ n'est autre que $\mathrm{DR}(f_p^{(p)})$, où $f_p^{(p)} : X_p^{(p/S_p)} \longrightarrow S_p$ est le morphisme structural de frobenius relatif de X_p sur S_p. Or on a le morphisme de frobenius $X_p^{(p/S)} \longrightarrow X$, qu est un S-morphisme, qui par fonctorialité de DR nous donne $\mathrm{DR}(f_p)^{((p))} \longrightarrow \mathrm{DR}(f)_p$ comme on voulait. Il faut prouver que cet homomorphisme est en fait une isogénie, donc que l'isocristal défini par $\mathrm{DR}(f)$ devient, à l'aide des F_p, un bi-isocristal. Mais utilisant la relation de dualité écrite dans 2.2. (à vrai dire, l'écriture T^p pour le cristal unité ne prend son sens que lorsque on le regarde comme muni de sa structure de bi-cristal naturelle, qui n'intervient qu'ici), on peut transposer F en un V, tel que $FV = VF = p^{2d}$, ce qui prouve notre assertion.

D'ailleurs, lorsque l'on passe du cristal de De Rham $\mathrm{DR}(f)$ à l'isocristal correspondant, donc des objets de cohomologie $\mathrm{DR}^i(f)$ aux isocristaux correspondants, il sera vrai (tout comme pour les $\mathrm{R}^i f_*$ de De Rham en caractéristique nulle) que leur formation commute à tout changement debase, de sorte que chacun des isocristaux $\mathrm{DR}^i(f)$ devient à son propre titre un bi-isocristal. Au moment de rédiger 1.10. il m'avait semblé que, sans mettre du iso dans le coup, $\mathrm{DR}^i(f)$ devrait être un bi-cristal de poids i, mais je m'étais canulé, il faudrait pour cela une polarisation de X de S qui définisse un isomorphisme (pas seulement une isogénie) de $\mathrm{DR}^i(f)$ avec $\mathrm{DR}^{2d-i} \otimes T^{-(d-i)}$, ce qui n'existe évidemment que très exceptionnellement; une fois qu'on l'a, on définit V dans DR^i en transposant F dans DR^{2d-i}.

2.4. Cas d'un schéma abélien — Il semble que ce ne soit guère que dans ce cas-là où il soit bien raisonnable de parler de bi-cristaux et non seulement de bi-iso-cristaux. De façon précise, $\mathrm{DR}^1(f)$ a dans ce cas une structure de bicristal, défini par les F_p précédents, et des V_p qui se définissent encore, par fonctorialité de DR, à l'aide de l'homomorphisme "Verschiebung" $A_p^{(p/S_p)} \longrightarrow A_p$ (défini avec la généralité qui convient dans les notes de Gabriel dans SGAD). Comme $\mathrm{DR}^1(A/S)$ est un foncteur multiplicatif en A, grâce à Kunneth postulé dans 2.2., et que l'on a $FV = VF = pId$ sur les schémas abéliens en car p, on en conclut les mêmes relations dans DR^1. Cela montre donc que $\mathrm{DR}^1(A)$ est un bicristal de poids 1, i.e. un *cristal de Dieudonné*. Lorsque S est le spectre d'un corps parfait de caractéristique $p[]0$, un tel cristal s'identifie simplement, d'après 1.12, à un module de Dieudonné sur $W = W(k)$. Bien sûr, *on doit trouver que ce module n'est autre que le module de Dieudonné du groupe formel* (ou plutôt, du groupe p-divisible) *défini par la variété abélienne A*. Débarrasser de l'hyperstructure axiomatico-conjectural de 2.2., on peut exprimer ainsi la construction obtenue du module de Dieudonné:

1° Soit A un schéma abélien sur un schéma affine S. On sait que pour tout morphisme $S \longrightarrow T$ d'immersion fermée surjective, défini par Idéal nilpotent sur T, A se prolonge en un schéma abélien B sur T. On peut regarder la cohomologie de De Rham ordinaire $\mathrm{R}^1\, g_*(\Omega^\bullet_{B/T})$, où $g : B \longrightarrow T$ est le morphisme structural, et on sait que c'est un Module localement libre de rang $2g$

2° Supposons que S soit le spectre d'un corps parfait k de car $p > 0$, alors le cristal précédent s'identifie à un module libre de rang $2g$ sur $W = W(k)$. On y introduit les structures F et V, en utilisant comme ci-dessus les homomorphismes $F : A \longrightarrow A^{(p)}$ et $V : A^{(p)} \longrightarrow A$. On trouve ainsi un module de Dieudonné M, et:*Deuxième affirmation :* C'est bien celui défini par Dieudonné. En d'autres termes: si A est n'importe quel anneau local artinien de corps résiduel k, et B un prolongement de A en un schéma abélien sur Λ, alors la cohomologie de De Rham $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(B) = \mathrm{H}^1(B, \Omega^\bullet_{B/\Lambda})$ est canoniquement et fonctoriellement isomorphe à $M \otimes_W \Lambda$, où M est le module de Dieudonné classique de A, et où on tient compte du théorème de Cohen qui munit Λ d'une structure canonique de W-algèbre (N.B. la fonctorialité de l'isomorphisme garantira automatiquement qu'il est compatible avec F et V).

2.5. — Je n'ai pas vérifié, à vrai dire, les deux affirmations, mais n'ai pas le moindre doute qu'elles sont correctes telles quelles. Cette façon de voir le module de Dieudonné permet de plus d'expliciter de façon remarquable les variations infinitésimales de structure de la variété abélienne A donnée, en caractéristique $p > 0$, en termes du module de Dieudonné: les prolongement de A en un schéma abélien B sur Λ doivent correspondre exactement aux modules quotients libres de rang g de $M \otimes_W \Lambda$ qui redonnent, modulo p, le module quotient de rang g canonique de $M \otimes_W k = \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A)$, (correspondant à la filtration canonique de cette cohomologie). Plus généralement et plus précisément :

3° Considérons, pour tout schéma abélien A sur une base S, sur la cohomologie de De Rham $\mathrm{R}^1 f_*(\Omega^\bullet_{A/S}) = \mathrm{H}^1(f)$, la filtration canonique

$$0 \leftarrow \mathrm{R}^1 f_*(\mathcal{O}_A) \leftarrow \mathrm{H}^1(f) \leftarrow \mathrm{R}^0 f_*(\Omega^1_{A/S}) \leftarrow 0.$$

Donc pour tout B sur T comme dans 1°, on a sur $\mathcal{M}(T) = \mathrm{DR}^1(A/S)(T) = \mathrm{H}^1(g)$ une filtration naturelle, ne dépendant que de la classe à isomorphisme près connue de $\mathcal{M}(S) = \mathrm{H}^1(f)$ provenant de A. Ceci dit, *troisième affirmation : on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre classes de prolongements de A à T, et prolongements de la filtration donnée de $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_S$ en une filtration de $\mathcal{M}(T)$*. Plus précisément encore, le foncteur $B[\,](A, \varphi)$, de la catégorie des schémas abéliens B sur T, dans la catégorie des schémas abéliens A sur S, munis d'une filtration φ de $\mathrm{DR}^1(A/S)(T)$ prolongement celle de $\mathrm{DR}^1(A/A)(S)$ (N.B. il ne s'agit que de filtrations à quotients localement libres, bien sûr) est une équivalence de catégories.

Ce énoncé est évidemment fort suggestif aussi pour des généralisations en cohomologie de De Rham de dimension supérieure, pour un morphisme lisse et projectif quelconque, tenant compte de la filtration canonique de celle ci. On voit bien en tous cas que ce dernier élément de structure n'est *pas* de nature cristalline, i.e. donnée par une filtration du cristal de De Rham postulé dans 2.2., mais est au contraire dans la nature d'un élément de structure "continu", dont la variation doit refléter fidèlement les variations de structure de motif donnant naissance au cristal envisagé. Pour arriver à préciser ce dernier point, il faudrait des fondements un peu plus fermes de la théorie des motifs, comme de celle (certainement beaucoup plus élémentaire) des cristaux et de la cohomologie de De Rham. Yne autre généralisation, (suggérée par comparaison du 3° avec Serre-Tate, disant que si S est de caractéristique $p > 0$, alors étendre A à T, c'est pareil qu'étendre le groupe p-divisible correspondant), concerne la théorie des groupes formels, dont il sera question au Chapitre 3. Pour préparer le terrain, je vais présenter d'une façon un peu différente le cristal $\mathrm{DR}^1(A/S)$ associé à un schéma abélien, en utilisant explicitement la structure de groupe du dit.

2.6. — De façon générale, paraphrasant sur une base quelconque une vieille construction de Serre (c'est de lui que je l'ai apprise, du moins), on trouve que pour tout schéma abélien A sur une base S, il y a une extension naturelle de A par le fibré vectoriel $V(\mathrm{R}^1 f_*(\mathscr{O}_A)) = V(\sqcup_A)$, (où A est le schéma abélien dual de A). Attention à la notation, le fibré vectoriel $V(\mathscr{E})$ est contravariant en $\mathscr{E}$, ces sections sont les homomorphismes $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{O}_S$! L'extension en question est universelle parmi les extensions de A par des fibrés vectoriels, est fonctorielle en A, et compatible avec changement de base. Appelons la $G(A)$. Ainsi, le faisceau de Lie de $G(A)$ est une extension

[]

qui est duale e la suite exacte envisagée dans 2.5., dont nous avons donc ici une construction indépendante en termes d'extensions de A par des groupes vectoriels. On peut en profiter pour préciser en affirmant que, pour un prolongement B de A, de S à T, le schéma en groupes $G(B/S)$ est déterminé, à isomorphisme canonique (et même unique) près, par le seule donnée de A et de $S \longrightarrow T$, indépendamment du choix particulier du prolongement B. En d'autres termes, on trouve un *cristal en schémas de groupes lisses* $\mathscr{G}(A/S)$, et pour chaque prolongement infinitésimal B de A à un T, un isomorphisme canonique $\mathscr{G}(A/S)(T) \simeq G(B/T)$; tout ça bien sûr fonctoriel en A et compatible avec changements de base. D'autre part, on peut préciser alors 3° en indiquant quel est le foncteur quasi-inverse de celui envisagé dans cet énoncé: l'extension de la filtration de $\mathrm{DR}^1(A/S)(S)$ en une filtration du faisceau de Lie $\mathrm{DR}^1(A/S)(T)$[] de $\mathscr{G}(A/S)(T)$ revient à étendre le sous-groupe vectoriel canonique de $\mathscr{G}(A/S)(S)$ en un sous-groupe vectoriel de $\mathscr{G}(A/S)(T)$, et l'on trouve B en passant simplement au quotient.

N.B. Je suis tombé sur la connexion canonique de $G(A/S)$ en essayant de simplifier la construction de Manin de l'application $A(S) \longrightarrow \Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ associée à une équation de Picard-Fuchs sur S, relativement à A. Pour ceci, il suffit de noter que localement sur S toute section de A sur S se remonte en une section de $G = G(A/S)$ sur S ! La donnée de la connexion de G permet alors de prendre la dérivée de cette section, qui est un élément de $\Gamma(S, \sqcup_G \otimes \Omega^1_S)$, déterminé modulo une section de l'image du faisceau [], correspondant à l'indétermination du relèvement d'une section de A en une section de G. Les équations de Picard-Fuchs sont définies tout juste pour arriver, d'une telle section de [] (qui en fait est un *cocyle*, compte tenu de la connexion canonique de $\sqcup_G$ provenant de G), avec l'indétermination qu'on vient de préciser, à tirer une section de $\mathscr{O}_S$... (Du moins en caractéristique nulle, cas dans lequel se place Manin de toutes façons).

Voici les résultats positifs que j'ai vérifiés dans la direction des assertions précédentes :

a) Si S est de caractéristique nulle, les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par l'introduction du schéma en groupes $G(A)$) sont vraies.

b) Sans restriction sur S, il est vrai que $G(A)$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux[18], donc si pour deux relèvements infinitésimaux données B, B' de A, $G(B)$ et $G(B')$ sont isomorphes, l'isomorphisme entre eux est unique. Donc si l'hypothèse précédente est vérifiée quels que soient les relèvements infinitésimaux de A au dessus d'un ouvert U de la base S, alors les $G(B)$ définissent effectivement un cristal en groupes sur S, à fortiori les $H(B)$ définissent un cristal de modules, et $G(A)$ et $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A/S)$ sont munis de stratifications absolues canoniques, fonctorielle d'ailleurs en A satisfaisant aux conditions envisagées, et compatible avec tout changement de base qui invarie notre hypothèse sur A.

c) Les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par $G(A)$) sont vraies por les relèvements infinitésimaux *d'ordre* 1, ou tout au moins lorsque T est de la forme $D(\mathscr{J})$, schémas des nombres duaux d´fini par un $\mathscr{J}$ quasi-cohérent.[19]

2.7. — Arrivé à ce point de mes brillantes conjectures, je m'aperçois avec consternation qu'elles sont fausses telles quelles, malgré les indications concordantes militant en leur faveur. De façon précise, soit k un corps de caractéristique $p > 0$. Je dis qu'il *n'est pas possible, pour tout k-schéma S de type fini, de dimension $leq 1$* [20]*, avec S_{rg} régulier, et tout schéma elliptique A sur S, de mettre sur $\mathrm{H}^1_{DR}(A/S)$ une stratification relativement à k, qui soit fonctorielle en A et compatible avec les changements de base.* L'ennui, comme d'habitude, provient des courbes elliptiques de

[18] faux

[19] à vérifier, c'est peut-être faux

[20] ou même ≤ 0 !

Hasse nul. Appliquant en effet les deux fonctorialités postulées, on trouve que l'homomorphisme "frobenius" qui va de $M^{(p)}$ dans M ($M = \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A/S)$) serait compatible avec la stratification. Si alors $S \in S$ est un point correspondant à un A_S de Hasse nul, i.e. tel que frobenius sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A_S)$ soit de carré nul, on en conclurait aisément, grimpant sur les voisinages infinitésimaux de S, que la même propriété serait vraie aux points voisins de S, ce qui est évidement faux p.ex. pour la famille modulaire.

Ceci montre que décidément, il faut en rabattre, et que dans le titre du Chapitre et les considérations de **2.2.**, c'est à condition de prendre partout des isocristaux qu'il reste une chance d'un théorie du genre de celle envisagée précédemment. Il est fort possible d'ailleurs que la notion de isocristal que j'ai adoptée est encore trop restrictive, en ce sens que dans la description de **1.13**. il faudra peut-être prendre des stratifications en caractéristique nulle qui ne se prolongeraient pas nécessairement sur le schéma formel sur $W =$ vecteurs de Witt tout entier. C'est une analyse soigneuse du calcul-clef de Washnitzer-Monsky qui devrait permettre de tirer cette question au clair.

2.8. — Il se pose la question, d'autre part, pour quels schémas abéliens les énoncés 1° et 3° de 2.4, 2.5. et 2.6. sont valables, en dehors du cas déjà signalé: S de caractéristique nulle.

Il n'est pas exclu entièrement, cependant, que en restant en car. $p > 0$, l'énoncé sur la non-variation infinitésimal de $G(A)$ avec A, A partout ordinaire, soit vrai. Cela impliquerait que sur l'ouvert des valeurs "ordinaires" de l'invariant, le H^1_{DR} a une stratification canonique, mais celle-ci ne se prolongerait pas à la courbe modulaire toute entière. Mais je dois dire que ce drôle de comportement, où on aurait une stratification naturelle en car. p et une autre en car. 0, sans qu'elles veuillent se recoller, semble assez canularesque.

[Les considérations précédentes font bien ressortir la nature "infinite" de la notion de stratification, par contraste avec celle de connexion, malgré les trompeuses apparences de la caractéristique nulle. Ainsi, sur le $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}$ de la famille modulaire sur $\mathbf{F}$ de schémas elliptiques, il y a au dessus de la fibre générique $S_{\mathbf{Q}}$ de S une stratification naturelle, mais nous venons de voir (ou presque...) que cette stratification ne s'étend pas en une stratification sur S_U, U un ouvert non vide de Spec($\mathbf{Z}$). (Le “presque” provient du fait qu’il n’est pas absolument clair si la stratification qu’on obtiendrait ainsi en caractéristique p serait respectée par frobenius; il faut absolument tirer au clair cet exemple particulier !). C’est en un sens assez moral, puisque pour nous le module à stratification doit jouer dans une large mesure le rôle d’un faisceau ℓ-adique, dont il partage également les propriétés de rigidité.]

Pour en revenir à l’alinéa précédent, concernant un schéma abélien “ordinaire” en car $p > 0$, s’il n’est pas exclu que le H^1_{DR} admette une stratification canonique fonctorielle, il me semble cependant exclu, malheureusement, que celle-ci provienne d’un cristal de modules sur S, i.e. que ceci reste vrai en remplaçant S par toute extension infinitésimale, pas nécessaire de car p, (tout au moins en admettant que la connexion associée à la stratification en question soit la connexion de Gauss-Manin). En effet, appliquant une telle hypothèse au schéma modulaire S sur $\mathbf{Z}_p$ précédent, dont on enlèverait les points de Hasse nul d’abord d’où S', on conclurait sauf erreur que la stratification qu’on a en caractéristique nulle sur H^1_{DR} se prolongerait à S tout entier, car elle se “recollerait” en un sens évident avec la stratification qu’on aurait au dessus du complété p-adique de S' (ce qui doit impliquer le prolongement sur S de façon assez formelle). Mais alors on aurait en car p une stratification du H^1_{DR} au dessus du schéma modulaire tout entier, Hasse nul inclus, ce qui est absurde comme on l’a déjà remarqué. Il faut en conclure, hélas, que si les isocristaux, et le cas échéant les modules stratifiés même en caractéristique $p > 0$, ont des chances d’être des outils convenables pour l’étude de familles de variétés abéliennes, celle de cristal elle-même semble irrémédiablement trop fine, même en se restreignant à des familles de variétés abéliennes “ordinaires” en car $p > 0$. Elle peut tout au mieux de prêter au cas d’un schéma de base réduit à un point, spectre d’un corps pas nécessairement parfait, et on peut alors espérer les résultats les plus satisfaisants en se bornant aux variétés abéliennes ordinaires ? - Pour que la notion de cristal elle-même puisse être utilisée pour des schémas abéliens sur des bases plus générales, il semble donc qu’il faille imposer aux familles envisagées des restrictions très sérieuses, consistant à imposer la variation infinitésimale du $G(A)$. Cela semble assez proche du point de vue de Serre, qui étudie les variations de variétés abéliennes (éventuellement à multiplication complexe donnée) en imposant à priori l’espace tangent (et l’action de la multiplication complexe dessus)...

Chapitre 3. — Remarques sur les groupes p-divisibles

3.1. — Bien sûr, en même temps que pour les variétés abéliennes, je dois en rabattre sur les groupes formels. Je veux simplement signaler que la construction de $G(A)$ dans **2.6.** doit pouvoir se paraphraser sans difficulté pour un groupe p-divisible $\varnothing$ sur un préschéma S à caractéristiques résiduelles égales au même p. En effet les homomorphismes de ce groupe dans le groupe formel associé à G_a sont triviales (en particulier, $\varnothing$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux), d'autre part (sauf erreur) le faisceau en modules des H^2 de $\varnothing$ à valeurs dans le groupe formel associé à G_a (au sens du complexe du groupe $\varnothing$, variante formelle), est un Module localement libre de rang g^*, où g^* est la dimension du groupe dual de $\varnothing$, soit $\varnothing^*$; plus précisément, ce Module doit être canoniquement isomorphe à $\mathrm{Lie}(\varnothing^*) = t_{\varnothing^*}$. (Tout ceci est suggéré par les résultats de Tate et Lubin sur les modules de groupes formels; je dois avouer d'ailleurs que je n'ai pas essayé de tirer au clair ce qu'il faut entendre, dans ce contexte, par "le groupe formel associé à G_a", et s'il y a lieu de prendre le groupe formel purement infinitésimal). Il s'impose alors de paraphraser la construction de Serre, en regardant l'extension universelle de $\varnothing$ par un groupe formel vectoriel, qui sera ici le groupe formel (covariant) de $t_{\varnothing^*}$. Désignant par $G(\varnothing)$ cette extension, son algèbre de Lie $\mathrm{H}(\varnothing)$ sers une extension

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow t^{v}_{\varnothing^*} \longrightarrow \mathrm{H}(\varnothing) \longrightarrow t_{\varnothing} \longrightarrow 0.$$

Bien entendu, $G(\varnothing)$ et par suite $\mathrm{H}(\varnothing)$ seront fonctoriels en $\varnothing$, et compatibles avec changement de base. Alors qu'il est certainement vrai, dans un sens qu'il conviendrait de préciser, que $G(\varnothing)$ varie "moins que $\varnothing$", quand on fait varier $\varnothing$ infinitésimalement dans une famille, il n'est pas vrai pour autant que $G(\varnothing)$ soit indépendant de telles variations (à l'exception, probablement, de celles du premier ordre), i.e. puisse être considéré comme provenant d'un cristal en groupes plus ou moins formels. Cela sera le cas seulement, sans doute, quand $\varnothing$ sera extension d'un groupe ind-étale par un groupe p-divisible torique, et S réduit à un point (?). Dans le cas général, il semble intéressant d'étudier les variations infitésimales de $\varnothing$, quand on se fixe celles de $G(\varnothing)$ à l'aide d'un cristal en groupes $\underline{G}$.

3.2. — En tous cas, l'extension $(*)$ semble un invariant intéressant du groupe p-divisible envisagé. Il subsiste, par passage à la limite, en passant au cas où S est par exemple le spectre d'un anneau A noethérien j-adique séparé et complet, où J est un idéal tel que A/J soit à caractéristiques résiduelles égales à p. On trouve par exemple un bon invariant quand A est un anneau de valuation discrète complet, éventuellement d'inégales caractéristiques, à caractéristique résiduelle p. Dans le cas où le groupe formel réduit a la structure triviale mentionnée plus haut dans **3.1.**, que la donnée d'un relèvement du groupe p-divisible qu'on a sur k en un groupe p-divisible sur A, soit entièrement équivalente à la donnée d'un relèvement de la filtration de $M \otimes_W k$ donnée par $(*)$, en une filtration de type (g, g^*) de $M \otimes_W A$. Il serait bien intéressant d'essayer de déterminer, en termes d'une telle donnée, quel est le module de Tate correspondant à la fibre générique de $\varnothing$! On aimerait préciser également, pour des groupes p-divisibles plus généraux, quelle quantité d'information est liée à l'extension $(*)$, qui remplace ici le H^1 de De Rham.

Letter to J. Murre[21]

Dear Murre,

I am glad to hear that your are still willing to give the talk on unramified functors. Here what I can say to your questions.

1. The theorem about passage to quotient I alluded to is the following:

Theorem. — *Let* $f : X \longrightarrow Y$ *be a morphism of* S*-preschemes, assume either* X *and* Y *locally of finite presentation over* S*, or* Y *loc noeth and* X *locally of finite type over* Y*. Assume that the equivalence relation* $R = X \times_Y X$ *defined by* f *is flat over* X *i.e.* $\mathrm{pr}_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$ *is flat. Then the quotient* X/R *exists in the strongest reasonable sense, i.e. one can factor* f *into a compositum* $X \longrightarrow Z \longrightarrow Y$*, with* $X \longrightarrow Z$ *faithfully flat locally of finite presentation,* Z *locally of finite pres. over* X *(in fact of finite presentation over* S *if* X *is so) and* $Z \longrightarrow Y$ *a monomorphism.*

Of course the factorization is unique, and the theorem can be expressed by saying that the quotient sheaf (for the fpqc topology) X/R is representable. That is in fact how the theorem is proved.

Raynaud has recently made a very nice (and non trivial) application of this theorem, by proving the following: if S is the spectrum of a discrete valuation ring, G a group prescheme of finite type over S, H a closed and flat sub-group scheme, such that G_t/H_t is quasi-affine (where t is the generic point of S) then G/H is representable as a quasi-affine and flat S-scheme, which is even affine if H is invariant (i.e. if G is a flat group scheme of finite type with affine generic fibre, than G is affine). This extends immediately to a base which is regular of dim one. Raynaud is now trying to extend his construction to the case when he drops the quasi-affinness assumption, namely to construct still G/H as a quasi-projective scheme over S.

2. Theorem of the cube.

[21] https://agrothendieck.github.io/divers/LGM1scan.pdf

I believe we discussed about it time ago, but maybe the proof I told you was valid only if one assumes the Pic functor of one of the factors involved representable. To prove unramifiedness of the functor $\underline{\mathrm{Corr}}$ however you need only a weak infinitesimal form of the theorem of the square, for which you will find a proof in the manuscript notes I am joining on correspondence classes, containing also the proof of the statements you were recalling in your question 4. I hope you will be able to read them, I agree the handwriting is wretched and the notes moreover very sketchy. - On the other hand, I recall you that the theorem of the cube follows rather formally once one knows separatedness of $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X,Y)$ for two of the three factors involved, and using the usual formal properties of the Picard functor (among which commutation with inverse limits of Artin rings is the less trivial).

3. As for the separatedness of $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X,Y)$, this is about trivial whenever the Pic functor of one of the factors X, Y is separated? Now this is certainly the case if for X if its geometric fibers are integral, (a fortiori if X is an abelian scheme over S!).

To show this, one may assume S the spectrum of a discrete valuation ring, and one is reduced to show that if $\underline{L}$ is an invertible sheaf on X whose restriction to the general fiber X_t is trivial, then $\underline{L}$ is trivial. Now X_1 is an open subset of X, and the assumption on $\underline{L}$ can be expressed by saying that $\underline{L}$ is defined by a Cartier divisor whose support is contained in the special fiber X_0. Now X_0 itself is already a Cartier divisor (defined by a global equation $f=0$) and moreover is an integral subscheme of X, from this follows that the divisor D is a multiple of X_0 (assume for simplicity the fibers of X geometrically normal, and hence X normal!), hence D is linearly equivalent to 0, what we wanted to prove.

I am convinced however that $\underline{\mathrm{Corr}}$ is always separated (with the usual assumptions of properness, flatness, and direct image of the structure sheaf, for both functors, of course). This is easily seen to be true if the Pic functor of either factor is representable, by a simple use of dimension theory (namely, we have a morphism $X \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ whose image has a general fiber of dimension zero, hence the same holds for the special fiber…). But it is true also, by an immediate adaptation of the same argument, if we suppose only that $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ is pre-ét-représentable say, i.e. is a quotient of a representable functor Q by an étale equivalence relation (in fact, quasi-finite and flat would do as well), with Q locally of finite type over S. Now this assumption is certainly satisfied if Y is *projective* over S, as one sees by using the representation of $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ (or rather big open pieces of it) as the quotient of a suitable scheme of immersions of Y into some p^r, by the action of the projective group operating freely, and taking a quasi-section of the corresponding equivalence relation…On the other hand, if one does not assume X not Y projective over S, one my think of using Chow's lemma; as S is the spectrum of a discrete valuation ring, one does not loose flatness in using Chow's lemma, unfortunately one will loose however, I am afraid, the assumption $\mathrm{H}^0(X_0, \underline{O}_{X_0}) \simeq k(s)$, and I am afraid that this will make serious technical trouble. Another interesting approach, via topology, is to try to prove that under the usual assumptions on X, the "specialization morphism" from the fundamental group of the general geometric fiber to the one of the special fiber has an image of finite index - or at least that this is so after making the groups abelian. It seems to me that the latter statement can be proved via the Picard functor, when X is assumed projective over S.

I am sending you some notes, including a sketch of the proof of the theorem of representability of unramified functors, although I do not think they latter can be of any use to you, as I have a hard time myself to read them. I think the notes you took when we discussed the matter a few months ago should be much more detailed; anyhow, there are certainly no simplifications in my notes relative to yours, the inverse is more plausible.

Sincerely yours

Letter to J. Murre[22]

Dear Murre,

I am very sorry I did not succeed to convey the intuitive idea behind the general nonsense of my notes. It seems to me that the basic example in order to understand the idea is example 1, where you can take Z to be a standard Kummer covering for definiteness, $Z = Z_a^n$, and S normal. Intuitively, when look at (normal, say) S' coverings of S whose ramification type is not worse than the one of Z over S, you mean that the normalized inverse image Z' of S' over Z is étale. From the birational point of view, assuming S' connected and therefore corresponding to a field extension K' of the field of functions K of S, this means simply that K' of the field of functions K of S, this means simply that K' is isomorphic to a subextension of an extension of the function field L of Z, unramified with respect t the model Z; when S

[]

Your interpretation of the Kummer case in the final formulation of example 3 is indeed the one I had in mind. Also, when I wrote $n'n$, I meant of course the order relation of divisibility (it may be convenient to introduce this order relation explicitly, for simplicity of notations).

I realize that all the indications I have given you so far are extremely sketchy, and as a consequence that I am charging you with a considerable amount of work to put some sense and order into all that. Thus it is I, not you, who should apologize for causing a lot of trouble! I look forward with great pleasure meeting you in Bures. As I am having some russian and chinese on friday's, I will probably drop by on June 2.

With best regards

[22] https://agrothendieck.github.io/divers/LGM2scan.pdf

Letter to J. Murre[23]

Dear Murre,

Thank you very much for your notes on the tame fundamental group, which I at least finished reading. I see you wrote them with much care, and I am all the more sorry that my own fault, there is a number of misstatements which, I am afraid, will force you to do a serious recasting of the whole exposition. My notes definitely where too sketchy, and my oral explanations, I am afraid, partly wrong, which induced you into error a few times. Here the most serious drawbacks.

1.16 is false already when H is the unit group and when there is a single a, say $a = b^n$, $Y' = YT/(T^n - a)$. Then $Y = S$, and a morphism of Y into Y' compatible with $H = e\ H'$ is just a section of Y', which exists indeed; however $H \longrightarrow H'$ is not surjective. 3.6. is equally false, as you see by the previous example, using the given section to define an H'-morphism $H' \longrightarrow Y'$ which is not an isomorphism. As a consequence, the proof in your notes of 3.7. breaks down (as it uses 1.16) and so does the proof of 3.8. (I did not try to check 3.8. by some different proof).

I am afraid 6.4. is false as stated, and that the statement is correct only if the D_i are regular. Indeed, the end of the proof seemed to me very dubious; be careful that the inertia groups are determined only up to interior automorphism! There is however a (tautological) generalization of the theorem for regular D_i, corresponding to the data of a single divisor D with normal crossings, and a variant of the notion of tame ramification for such a divisor, by demanding that the coverings should be tamely ramified locally for the étale topology for the family of local irreducible components of D; it is this notion of tameness which should seem more adapted to the situation of par. 9.

The proof of 7.1. is not correct, when you contend on line -9: there remains to be proven the following…Already when $D = 0$, the proof here would have to introduce connected étale coverings which are *not Galois!* This very strongly suggests that a notion of tame ramification should be introduced also for non Galois coverings. The same remark applies t the proof of 10.1. Maybe you could get along some way in 7.1. using the normality assumptions, but I am convinced

[23] https://agrothendieck.github.io/divers/LGM3scan.pdf

that these assumptions are anyhow artificial, as well as the assumption that the D_i should be reduced somewhere. You do not seem to make any use of theses facts, really.

Also, one feels that 7.5. should be generalized to the case of a tamely ramified covering, and that it should come out trivially once the generalities have been dealt with properly.

I hope that the theory will come out more clearly and correctly by devoting some care to generalities on ramification date (not necessarily of Kummer type). I will try to write something up within the next days. Please excuse me for the trouble I caused you by not learning my lesson well enough before I put you to work!

It will be very nice indeed to have an appendix on Lefschetz theorem for the fundamental group, and it should not be hard to write it. However, if would be safer to wait till the general theory of tame ramification is written up!

Sincerely yours

EGA IV-4

Étude locale des schémas et des morphismes de schémas

Publications Mathématiques de l'IHÉS[24]

[24] https://agrothendieck.github.io/divers/ega44.pdf

SGA 7

Groupes de monodromie en géométrie algébrique, 1967-1969[25]

25

CRITÈRES DIFFÉRENTIELS DE RÉGULARITÉ POUR LES LOCALISÉS DES ALGÈBRES ANALYTIQUES

A. GROTHENDIECK ET J. DIEUDONNÉ

J. Algebra 5, 305-324 (1967)[26]

---

[26] https://agrothendieck.github.io/divers/critdiffscan.pdf

LE GROUPE DE BRAUER III : EXEMPLES ET COMPLÉMENTS

IHES, Mars 1966. Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 88-188. North Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968[27]

---

[27] https://agrothendieck.github.io/divers/GBIII.pdf

CATÉGORIES COFIBRÉES ADDITIVES ET COMPLEXE COTANGENT RELATIF

Lecture Notes in Math. 79, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968[28]

---

[28] https://agrothendieck.github.io/divers/CCACCRscan.pdf

CLASSES DE CHERN ET REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES DISCRETS

Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 215-305. North Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968[29]

---

[29] https://agrothendieck.github.io/divers/chernrepscan.pdf

HODGE'S GENERAL CONJECTURE IS FALSE FOR TRIVIAL REASONS

A. Grothendieck

(Received 27 October 1968)

Topology Vol. 8, pp. 299-303. Pergamon Press, 1969[30]

---

§1. — The startling title is somewhat misleading, as everybody will think about a part of the Hodge conjecture which is most generally remembered, namely the part concerned with a criterion for a cohomology class (on a projective smooth connected scheme X over $\mathbf{C}$) to be "algebraic", i.e. to come from an algebraic cycle with rational[31] coefficients. This conjecture is plausible enough, and (as long as it is not disproved) should certainly be regarded as the deepest conjecture in the "analytic" theory of algebraic varieties. However in [6, p. 184], Hodge gave a more general formulation of his conjecture in terms of filtrations of cohomology spaces, and the main aim of my note is to show that for a rather trivial reason, this formulation has to be slightly corrected.

Consider on the complex cohomology

$$\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C}) = \mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

[30] `https://agrothendieck.github.io/divers/hodgescan.pdf`

[31] In fact, Hodge states his conjecture for integral cohomology. That this is too optimistic was proved in [1]

(X^{an} denotes the analytic space associated to the scheme X) the "Hodge filtration"

[]

§2. — This makes clear how the Hodge conjecture should be corrected, to eliminate trivial counterexamples: namely the left hand side of $(*)$ should be the largest sub-space of the right hand side, generating a subspace of $\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C})$ which is a sub-Hodge structure, i.e. stable under decomposition into p, q types. In other words, an element of $\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C})$ should belong to Filt'^{p} if and only if all its bihomogeneous components belong to the $\mathbf{C}$-vector space generated by the right hand side of $(*)$.

This formulation may seem a little too cumbersome to inspire confidence. To make it look better, we may remark that it is equivalent to the conjunction of the usual Hodge conjecture

[]

§3. — It may be of interest to review here the few non trivial instances known to the author where the Hodge conjecture has been checked.

a) The case $p=1$, $i=2$, i.e. the characterization of cohomology classes coming from divisors, due to Lefschetz, which has become trivial now through sheaf cohomology and the exact sequence of the exponential.

b) The case $i = \dim X$, any p, provided we make the following two assumptions, where Y denotes a "general" hyperplane section of X: 1°) The Hodge conjecture is true for $\mathrm{H}^{i-2}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$ in filtration p^{-1} (this condition is satisfied if $i \leq 4$). 2°) The part of $\mathrm{H}^{i-1}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$ orthogonal to the image of $\mathrm{H}^{i-1}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$ (the so-called "vanishing cycles" part of $\mathrm{H}^{i-1}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$) is contained in Filt'^{p} (if $i=3$ and $p=1$, this amounts to saying that the component of type $(2,0)$ of the vanishing cycles subspace of $\mathrm{H}^2(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$ is zero). For $i=3$, this case is mentioned in Hodge's exposé [6]. It is not hard to establish, using Leray's spectral sequence for the "fibering" of X by a suitable pencil of hyperplane sections, and resolution of singularities.

c) The case of a product of elliptic curves, $i=2p$, any p. This case is due to Tate (unpublished), who proves it by observing that the "Hodge classes" in the cohomology of X are sums of products of Hodge classes of degree 2, so that a) applies.

d) The case of a general cubic threefold in P^4, $i=3$, $p=1$, due to Gherardelli [2][32]

e) The case of a cubic fourfold in P^5, $i=2p$, $p=2$, due to Griffiths, using e) and recent results of his [4].

§4. — In most concrete examples, it seems very hard to *check* the Hodge conjecture, due to the difficulty in explicitly determining the filtration Filt$'$ of the cohomology, and even in determining simply the part of the cohomology coming from algebraic classes. It may be easier, for the time being, to *test* the Hodge conjectures in various non trivial cases, through various consequences of the Hodge conjectures which should be more amenable to direct verification. I would like to mention here two such consequences, which can be seen in act to be consequences already of the *usual* Hodge conjecture.

First, if X is as before, the dimensions of the graded components of the vector space associated to the arithmetic filtration Filt$'$ (and indeed this very filtration itself, if we interpret complex cohomology as the de Rham cohomology, which makes a purely algebraic sense) is clearly invariant if we transform X by any automorphism of the field $\mathbf{C}$, or equivalently, if we change the topology of C by such an automorphism. In other words, if we have a smooth projective scheme X over a field K of char 0, then the invariants we get by different embeddings of K into the field $\mathbf{C}$ are the same. Granting the Hodge conjecture, the same should be true if we replace the Filt$'$ filtration by the filtration described in §2 in terms of the Hodge structure (which is a transcendental description). What if we take for instance for X a "general" abelian variety of given dimension of powers of it, or powers of a "general" curve C of given genus? The case of genus 1 checks by Tate's result recalled in example c) above.

[32] (Added April 1969). This can be viewed also as a particular case of Hodge's result quoted in example b), and Manin has observed that this example extends to any *univational threefold X*. Cf. Manin: Correspondances, motives and monoidal transforms (in Russian), *Mat. Sbornik 77* (1968), 475-507.

Secondly, and more coarsely, if we have a projective and smooth morphism $f : X \longrightarrow S$ of algebraic schemes over $\mathbf{C}$, we can for every $s \in S$ consider the complex cohomology of the fiber X, as a Hodge structure, and look at the filtration "rational over $\mathbf{Q}$" which it defines (and which conjecturally should be the arithmetic filtration). Hodge's conjecture would imply that the set of points $s \in S^{an}$ where the dimensions of the components of the associated graded space have fixed values has a very special structure: it should be the difference of two countable unions of Zariski-closed subsets of S, which in fact should even be definable over a fixed subfield of $\mathbf{C}$, of finite type over the field $\mathbf{Q}$. (A simple application of Baire's theorem, not using Hodge's conjecture, would give us only a considerably weaker structure theorem for the set in question, where Zariski-closed subsets would be reaplced by the images, under the projection of the universal covering $\widetilde{S}$ of S^{an}, of analytic subsets of $\widetilde{S}$[33].)

REFERENCES

1.

[33](Added April 1969) David Lieberman has informed me that he can prove the stronger result obtained by replacing $\widetilde{S}$ by S^{an} itself.

STANDARD CONJECTURES ON ALGEBRAIC CYCLES

Algebraic geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), 193-199. Oxford Univ. Press, London, 1969[34]

---

1. Introduction

We state two conjectures on algebraic cycles, which arose fro an attempt at understanding the conjectures of Weil on the ζ-functions of algebraic varieties. These are not really new, and they were worked out about three years ago independently by Bombieri and myself.

The first is an existence assertion for algebraic cycles (considerably weaker than the Tate conjectures), and is inspired by and formally analogous to Lefschetz's structure theorem on the cohomology of a smooth projective variety over the complex field.

The second is a statement of positivity, generalising Weil's well-known positivity theorem in the theory of abelian varieties. It is formally analogous to the famous Hodge inequalities, and is in fact a consequence of these in characteristic zero.

WHAT REMAINS TO BE PROVED OF WEIL'S CONJECTURES? Before stating our conjectures, let us recall what remains to be proved in respect of the Weil conjectures, when approached through ℓ-adic cohomology.

[34] https://agrothendieck.github.io/divers/stand.pdf

Let $X/\mathbf{F}_q$ be a smooth irreducible projective variety of dimension n over the finite field $\overline{\mathbf{F}}_q$ with q elements, and ℓ a prime different from the characteristic. It has then been proved by M. Artin and myself that the Z-function of X can be expressed as

$$
\begin{aligned}
Z(t) &= \frac{L'(t)}{L(t)}, \\
L(t) &= \frac{L_0(t)L_2(t)\ldots L_{2n}(t)}{L_1(t)L_3(t)\ldots L_{2n-1}(t)}, \\
L_i(t) &= \frac{1}{P_i(t)},
\end{aligned}
$$

where $P_i(t) = t^{\dim \mathrm{H}^i(\overline{X})} Q_i(t^{-1})$, Q_i being the characteristic polynomial of the action of the Frobenius endomorphism of X on $\mathrm{H}^i(\overline{X})$ (here H^i stands for the i^{th} ℓ-adic cohomology group and $\overline{X}$ is deduced from X by base extension to the algebraic closure of $\mathbf{F}_q$). But it has not been proved so far that

(a) the $P_i(t)$ have integral coefficients, independent of $\ell(\neq \operatorname{char} \mathbf{F})$;

(b) the eigenvalues of the Forbenius endomorhisms on $\mathrm{H}^i(\overline{X})$, i.e., the reciprocals of the roots of $P_i(t)$, are of absolute value $q^{i/2}$.

Our first conjecture meets question (a). The first and second together would, by an idea essentially due to Serre [**?**], imply (b).

2. A weak form of conjecture 1

From now on, we work with varieties over a ground field k which is algebraically closed and of arbitrary characteristic. Then (a) leads to the following question: If f is an endomorphism of a variety X/k and $\ell \neq \operatorname{char} k$, f induces

$$f^i : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(x),$$

and each of these f^i has a characteristic polynomial. *Are the coefficients of these polynomials rational integers, and are they independent of ℓ?* When X is smooth and proper of dimension n, the same question is meaningful when f is replaced by any cycle of dimension n in $X \times X$, considered as an algebraic correspondence.

In characteristic zero, one sees that this is so by using integral cohomology. If char $k > 0$, one feels certain that this is so, but this has not been proved so far.

Let us fix for simplicity an isomorphism

$$\ell^{\infty k^* \simeq \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell} \qquad \text{(a heresy!)}.$$

We than have a map

$$\mathrm{cl}: \mathscr{F}^i(X) \otimes_Z Q \longrightarrow \mathrm{H}^{2i}_\ell(X)$$

which associates to an algebraic cycle its cohomology class. We denote by $C^i_\ell(X)$, and refer to its elements as *algebraic cohomology classes*.

A known result, due to Dwork-Faton, shows that for the integrality question (not to speak of the independence of the characteristic polynomial of ℓ), it suffices to prove that

$$\mathrm{Tr}\, f_i^N \in \frac{1}{m}\mathbf{Z} \quad \text{for every } N \geq 0,$$

where m is a fixed positive integer[35]. Now, the graph Γ_{f^N} in $X \times X$ of f^N defines a cohomology class on $X \times X$, and if the cohomology class Δ of the diagonal in $X \times X$ is written as

$$\Delta = \sum_0^n \pi_i$$

where π_i are the projections of Δ onto $\mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^{n-i}(X)$ for the canonical decomposition $\mathrm{H}^n(X \times X) \simeq \sum_{i=0}^n \mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^{n-i}(X)$, a known calculation shows that

$$\mathrm{Tr}(f^N)_{\mathrm{H}^i} = (-1)^i\, \mathrm{cl}(\Gamma_{f^N})\pi_i \in \mathrm{H}^{4n}(X \times X) \approx \mathbf{Q}_\ell.$$

Assume that the π_i are algebraic. Then $\pi_i = \frac{1}{m}\,\mathrm{cl}(\prod_i)$, where $\prod_i$ is an algebraic cycle, hence

$$\mathrm{Tr}(f^N)_{\mathrm{H}^i} = (-1)^i (\prod_i \Gamma_{f^N}) \in \frac{1}{m}\mathbf{Z}$$

and we are through.

WEAK FORM OF CONJECTURE 1. ($C(X)$): The elements π_i^ℓ are algebraic, (and come from an element of $\mathscr{F}^i(X) \otimes_Z Q$, which is independent of ℓ).

N.B.

[35] This was pointed out to me by S. Kleimann.

1. The statement in parenthesis is needed to establish the independence of P_i on ℓ.

2. If $C(X)$ and $C(Y)$ hold, $C(X\times Y)$ holds, and more generally, the Künneth components of any algebraic cohomology class on $X\times Y$ are algebraic.

3. The conjecture 1 (of Lefschetz type)

Let X be smooth and projective, and $\xi\in \mathrm{H}^2(X)$ the class of a hyperplane section. Then we have a homomorphism

$$(*)\qquad \cup\xi^{n-i}:\mathrm{H}^i(X)\longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X)\quad (i\le n).$$

It is expected (and has been established by Lefschetz [?], [?] over the complex field by transcendental methods) that this is an isomorphism for all characteristics. For $i=2j$, we have the commutative square

[]

Our conjecture is then: $(A(X))$:

(a) (*) is always an isomorphism (the mild form);

(b) if $i=2j$. (*) induces an isomorphism (or equivalently, an epimorphism) $C^j(X)\longrightarrow C^{n-j}(X)$.

N.B. If $C^j(X)$ is assumed to be finite dimensional, (b) is equivalent to the assertion that $\dim C^{n-j}(X)\le \dim C^j(X)$ (which in particular implies the equality of these dimensions in view of (a)).

An equivalent formulation of the above conjecture (for all varieties X as above) is the following.

$(B(X))$: *The Λ-operation (c.f. [?]) of Hodge theory is algebraic.*

By this, we mean that there is an algebraic cohomology class λ in $\mathrm{H}^*(X\times X)$ such that the map $\Lambda:\mathrm{H}^*(X)\longrightarrow \mathrm{H}^*(X)$ is got by lifting a class from X to $X\times X$ by the first projection, cupping with λ and taking the image in $\mathrm{H}^*(X)$ by the Gysin homomorphism associated to the second projection

Note that $B(X)\Rightarrow A(X)$, since the algebricity of λ implies that of λ^{n-i}, and λ^{n-i} provides an inverse to $\cup\xi^{n-i}:\mathrm{H}^i(X)\longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X)$. On the other hand, it is easy to show that $A(X \times X) \Rightarrow B(X)$ and this proves the equivalence of conjectures A and B.

The conjecture seems to be most amenable in the form of B. Note that $B(X)$ is stable for products, hyperplane sections and specialisations. In particular, since it holds for projective spaces, it is also true or smooth varieties which are complete intersections in some projective space. (As a consequence, we deduce for such varieties the wished-for integrality theorem for the Z-function!). It is also verified for Grassmannians, and for abelian varieties (Liebermann [?]).

I have an idea of a possible approach to Conjecture B, which relies in turn on certain unsolved geometric questions, and which should be settled in any case.

Finally, we have the implication $B(X) \Rightarrow C(X)$ (first part), since the π_i can be expressed as polynomials with coefficients in $\mathbf{Q}$ of λ and $L = \cup\xi$. To get the whole of $C(X)$, one should naturally assume further that there is an element of $\mathscr{F}(X \times X) \otimes_Z Q$ which gives λ for every ℓ.

4. Conjecture 2 (of Hodge type)

For any $i \leq n$, let $P^i(X)$ be the "primitive part" of $\mathrm{H}^i(X)$, that is, the kernel of $\cup\xi^{n-i+1} : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i+2}(X)$, and put $C^j_{Pr}(X) = P^{2j} \cap C^j(X)$. On $C^j_{Pr}(X)$, we have a $\mathbf{Q}$-valued symmetric bilinear form given by

$$(x, y) \longrightarrow (-1)^j K(xy\xi^{n-2j})$$

where K stands for the isomorphism $\mathrm{H}^{2n}(X) \simeq \mathbf{Q}_\ell$. Our conjecture is then that

(Hdg(X)): *The above form is positive definite.*

One is easily reduced to the case when $\dim X = 2m$ is even, and $j = m$.

REMARKS.

(1) In characteristic zero, this follows readily from Hodge theory [?].

(2) $B(X)$ and Hdg($X \times X$) imply, by certain arguments of Weil and Serre, the following: if f is an endomorphism of X such that $f^*(\xi) = q\xi$ for some $q \in \mathbf{Q}$ (which is necessarily > 0), then the eigenvalues of $f_{\mathrm{H}^i(X)}$ are algebraic integers of absolute value $q^{i/2}$. Thus, this implies all of Weil's conjectures.

(3) The conjecture $Hdg(X)$ together with $A(X)(a)$ (the Lefschetz conjecture in cohomology) implies that numerical equivalence of cycles is the same as cohomological equivalence for any ℓ-adic cohomology if and only if $A(X)$ holds.

(4) In view of (3), $B(X)$ and $Hdg(X)$ imply that numerical equivalence of cycles coincides wit $\mathbf{Q}_\ell$-equivalence for any ℓ. Further the natural map

$$\mathrm{Z}^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^i_\ell(X)$$

is a monomorphism, and in particular, we have

$$\dim_{\mathbf{Q}} C^i(X) \leq \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i_\ell(X).$$

Note that for the deduction of this, we do not make use of the positivity of the form considered in Hdg(X),but only the fact that it is non-degenerate.

Another consequence of $Hdg(X)$ and $B(X)$ is that the stronger version of $B(X)$, viz. that λ comes from an algebraic cycle with rational coefficients *independent of* ℓ, holds.

Conclusions

The proof of the two standard conjectures would yield results going considerably further than Weil's conjectures. They would form the basis of the so-called "theory of motives" which is a systematic theory of "arithmetic properties" of algebraic varieties, as embodied in their groups of classes of cycles for numerical equivalence. We have at present only a very small part of this theory in dimension one, as contained in the theory of abelian varieties.

Alongside the problem of resolution of singularities, the proof of the standard conjectures seems to me to be the most urgent task in algebraic geometry.

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES ET COMPACTIFICATION PROFINIE DES GROUPES DISCRETS

Manuscripta Math. 2, 375-396 (1970)[36]

[36] https://agrothendieck.github.io/divers/gdisscan.pdf

GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX DE DIEUDONNÉ

- In 1970 Grothendieck has left the IHÉS, and he started his "mission" in social and ecological activism. In June he goes to Romania to give a public lecture about social responsibility. After his return from Romania, Grothendieck spent only a short time in Paris before traveling to a summer school in Montreal. The main event there was the spontaneous founding of the group "Survivre". At the end of July Grothendieck was back in Paris, and in his own way, he prepared himself for the International Congress of Mathematicians in Nice.
- The following notes, primarily due to the efforts of Monique Hakim and Jean-Pierre Delale, include certain material treated by Grothendieck in the Montreal summer course.
- This text was published in: *Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux de Dieudonné*. Sém. de Math. Sup. 45 (Été 1970). Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Que., 1974
- [scan]
- [translation] by Eric Peterson

LETTER TO I. BARSOTTI
5.11.1970

- Letter about Barsotti-Tate groups.
- This text was published in: *Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux de Dieudonné*. Sém. de Math. Sup. 45 (Été 1970). Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Que., 1974
- [scan]
- [transcription] by Eric Peterson

Bures May 11.1970

Dear Barsotti,

I would like to tell you about a result on specialization of Barsotti-Tate groups (the so-called p-divisible groups on Tate's terminology) in characteristic p, which perhaps you know for a long time, and a corresponding conjecture or rather question, whose answer may equally be known to you.

First some terminology. Let k a perfect field of characteristic $p > 0$, W the ring of Witt vectors over k, K its field of fractions. An *F-cristal* over k will mean here a free module of finite type M over W, together with a σ-linear endomorphism $F_M : M \longrightarrow M$ (where $\sigma : W \longrightarrow W$ is the Frobenius automorphism) such that F_M is injective i.e. $F(M)$ contains $p^n M$ for some $n \geq 0$. I am rather interesting in *F-iso*-cristals, namely F-cristals up to isogeny, which can be interpreted as finite dimensional vector spaces E over K, together with a σ-linear automorphism $F_E :$ $E \longrightarrow E$, such that there exists a "lattice" $M \subset E$ mapped into itself by F_E; I will rather call such objects *effective* F-isocristals (and drop the suffix "iso" (and even F) when the context allows it), and consider the larger category of (E, F_E), with no assumption of existence of stable lattice M made, as the category of F-isocristals. It is obtained from the category of effective F-isocristals and its natural internal tensor product, by "inverting" formally the "Tate cristal" $K(-1) = (K, F_{K(-1)} = p)$: the isocristals (E, F_E) such that $(E, p^n F_E)$ is effective (i.e. the set of iterates of $(p^n F_E)$ is bounded for the natural norm structure) can be viewed as those of the form $E_0(n) = E_0 \otimes K(-1)^{\otimes(-n)}$, with E_0 an effective F-(iso)-cristal.

Assume now k algebraic closed. Then by Dieudonné's classification theorem as reported on in Manin's report, the category of F-(iso)cristals over k is semi-simple, and the isomorphism classes of simple elements of this category can be indexed by $\mathbf{Q}$ (the group of rational numbers), or what amounts to the same, by pairs of relative prime integers

$$r, s \in \mathbf{Z}, \quad r \geq 1, \quad (s, r) = 1$$

to such a pair corresponding the simple object

$$\mathbf{E}_{s/r} = \mathbf{E}_{r,s}$$

whose rank is r, and which for $s \geq 0$ can be described by the cristal over the prime field $\mathbf{F}_p$ as

$$\mathbf{E}_{s/r} = \mathbf{Q}_p[T]/(T^r - p^s), \quad F_{s/r} = \text{ multiplication by T.}$$

For $s \leq 0$, we get $E_{s/r}$ by the formula

$$\mathbf{E}_{\lambda} = (\mathbf{E}_{\lambda})\check{},$$

where $\check{}$ denotes ordinary dual endowed with he contragredient F automorphism. In Manin's report, only effective F-cristals are considered, with the extra restriction that F_E is topologically nilpotent, but by Tate twist this implies the result as I state it now. Indexing by $\mathbf{Q}$ rather than by pairs (s, r) has the advantage that we have the simple formula

$$E_{\lambda} \otimes E_{\lambda'} \simeq \text{ sum of cristals } E_{\lambda+\lambda'}.$$

In other words, if we decompose each cristals in its isotypic component corresponding to the various "slopes" $\lambda \in \mathbf{Q}$, so that we get a natural graduation on it with group $\mathbf{Q}$, we see that this graduation is compatible with the tensor product structure:

$$E(\lambda) \otimes E'(\lambda') \subset (E \otimes E')(\lambda + \lambda').$$

The terminology of "slope" of isotypic cristal, and of the sequence of slopes occurring in any cristal (when decomposing it into its isotypic components) is due, I believe, to you, as discussed on formal groups in Pisa about three years ago; but I did not appreciate then the full appropriateness of the notion and of the terminology. Let's define the sequence of slopes of a cristal (E, F_E) by its isotypic decomposition, repeating each λ a number of times equal to rank $E(\lambda)$ (bearing in mind that if $\lambda = s/r$ with $(s, r) = 1$, then the multiplicity of λ in E i.e. rank $E(\lambda)$ is a multiple of r); moreover it is convenient to order this sequence in increasing order. This definition makes still a good sense if k is not algebraically closed, by passing over to the algebraic closure of k; in fact, the isotypic decomposition over $\overline{k}$ *descends* to k, so we get much better than just a pale sequence of slopes, but even a canonical "iso-slope" ("isopentique" in french) decomposition over k

$$E = \oplus_{\lambda \in Q} E(\lambda)$$

(NB This is true only because we assumed k perfect ; there is a reasonable notion of F-cristal also if k is not perfect, but then we should get only a *filtration* of a cristal by increasing slopes…). Now if k is a finite field with q elements, of rank a over the prime field, and if (E, F_E) is a cristal over k, then F_E^a is a linear endomorphism of E over K, and it turns out that the slopes of the cristal are just the valuations of the proper values of F_E^a, for a valuation $\overline{\mathbf{Q}}_p$ normalised in such a way that

$$v(q) = 1, \quad \text{i.e.} \quad v(p) = 1/a.$$

(This is essentially the "technical lemma" in Manin's report, the restrictive conditions in Manin being in fact not necessary.) Thus, the sequence of slopes of the cristal, as defined above, is just the sequence of slopes of the *Newton polygon* of the characteristic polynomial of the arithmetic Frobenius endomorphism F_E^a, and their knowledge is equivalent to the knowledge of the p-adic valuations of the proper values of this Frobenius!

Lets come back to a general perfect k. Then the cristals which are effective are those whose slopes are > 0; those which are Dieudonné modules, i.e. which correspond to Barsotti-Tate groups over k (not necessarily connected) are those whose slopes are in the closed interval $[0, 1]$: slope zero corresponds to ind-étale groups, slope one to multiplicative groups. Moreover, an arbitrary cristal decomposes canonically into a direct sum

$$E = \oplus_{i \in \mathbf{Z}} E_i(-i),$$

where $(-i)$ are Tate twists (corresponding to multiplying the F endomorphism by b^i), and the E_i have slopes $0 \leq \lambda < 1$ (or, if we prefer, $0 < \lambda \leq 1$), and hence correspond to Barsotti-Tate groups up to isogeny over k, without multiplicative component (resp. which are connected). The interest of this remark comes from the fact that if X is a proper and smooth scheme over k, then the cristallin cohomology groups $\mathrm{H}^i(X)$ can be viewed as F-cristals, H^i with slopes between 0 and i[1] and define in this way a whole avalanche of Barsotti-Tate groups over k (up to isogeny), which are quite remarkable invariants whose knowledge should be

[1]This is not proved now in complete generality, but is proved if X lifts formally to char. zero, and is certainly true in general.

thought as essentially equivalent with the knowledge of the characteristic polynomials of the "arithmetic" Frobenius acting on (any reasonable) cohomology of X (although the arithmetic Frobenius is not really defined, unless k is finite!).

Now the result about specialization of Barsotti-Tate groups. This is as follows: assume the BT groups G, G' are such that G' is a specialization of G. Let $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ ($h =$ "height") be the slopes of G, and $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_h$ the ones for G'. Then we have the equality

$$\sum \lambda'_i = \sum \lambda'_i \quad (= \dim G = \dim G') \tag{1}$$

and the inequalities

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1, \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda'_1 + \lambda'_2, \ldots, \sum_{i=1}^{j} \lambda_j \leq \sum_{i=1}^{j} \lambda'_j \ldots. \tag{2}$$

In other words, the "Newton polygon" of G (i.e. of the polynomial $\Pi_i(1+(p^{\lambda_i}T)))$ lies below the one of G', and they have the same end-points $(0,0)$ and (h,N).

I get this result through a generalized Dieudonné theory for BT groups over an arbitrary base S of char. p, which allows to associate to such an object an F-cristal over S, which heuristically may be thought of as a *family* of F-cristals in the sense outlined above, parametrized by S. Using this theory, the result just stated is but a particular case of the analogous statement about specialization of arbitrary cristals.

Now this latter statement is not hard to prove at all: passing to $\wedge^h E$ and $\wedge^h E'$, the equality (1) is reduced to the case of a family of rank one cristals, and to the statements that such a family is just a twist of some fixed power of the (constant) Tate cristal. And the general equality (2) is reduced, passing to $\wedge^j E$ and $\wedge^j E'$, to the first inequality $\lambda_1 \leq \lambda'_1$. Raising both E and E' to a tensor-power r.th such that $r\lambda_1$ is an integer, we may assume that $\lambda_1 = 0$, so the statement boils down to the following: if the general member of the family is an *effective* cristal, so are all others. This is really checked in terms of the explicit definition of "cristal over S".

The wishful conjecture I have in mind now is the following: the necessary conditions (1) (2) that G' be a specialization of G are also sufficient. In other words, starting with a BT group $G_0 = G'$, and taking its formal modular deformation in char. p (over a modular formal variety S of dimension dd^*, $d = \dim G_0$, $d^* =$

dim G_0^*), and the BT group G over S thus obtained, we want to know if for every sequence of rational numbers λ_i between 0 and 1, satisfying (1) and (2), theses numbers occur as the sequence of slopes of a fiber of G at some point of S. This does not seem too unreasonable, in view of the fact that the set of all (λ_i) (satisfying the conditions just stated) is indeed finite, as is of course the set of slope-types of all possible fibers of G over S.

I should mention that the inequalities (2) were suggested to me by a beautiful conjecture of Katz, which says the following: if X is smooth and proper over a finite field k, and has in dimension i Hodge numbers $h^0 = h^{0,i}, h^1 = h^{1,i-1}, \ldots, h^i = h^{i,0}$, and if we consider the characteristic polynomial of the arithmetic frobenius F^a operating on some reasonable cohomology group of X (say ℓ-adic for $\ell \neq p$, or cristallin), then the Newton polygon of this polynomial should be *above* the one of the polynomial $\Pi(1+p^i T)^h i$, in a very heuristic and also very suggestive way, this could now be interpreted by stating (without any longer assuming k finite) that the cristallin H^i of X is a specialisation of a cristal whose sequence of slopes is: 0 h^0 times, 1 h^1 times,..., $i\,h^i$ times. If X lifts formally to char zero, then we can introduce also the Hodge numbers of the lifted variety, which are numbers satisfying

$$h^{'0} \leq h^0, \ldots, h^{'i} \leq h^i,$$

and one should expect a strengthening of Katz's conjecture to hold, with the h'^j replaced by the h^j. Thus the transcendental analogon of a char. p F-cristl seems to be something like a Hodge structure or a Hodge filtration and the sequence of slopes of such a structure should be defined as the sequence in which j enters with multiplicity $h'^j = \operatorname{rank} Gr^j$. (NB. Katz made his conjecture only for global complete intersections, however I would not be as cautious as he!). I have some idea how Katz's conjecture with the h^i's (not the h'^i's for the time being) may be attacked by the machinery of cristalline cohomology, at least the first inequality among (2); on the other hand, the formal argument involving exterior powers, outlined after (2), gives the feeling that it is really the first inequality $\lambda_1 \leq \lambda_1'$ which is essential, the other should follow once we have a good general framework.

I would very much appreciate your comments to this general non-sense, most of which is certainly quite familiar to you under a different terminology.

Very sincerely yours,

A. Grothendieck

TRAVAUX DE HEISOUKÉ HIRONAKA SUR LA RÉSOLUTION DES SINGULARITÉS

Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 7 à 9.[2]

Le résultat principal de Hironaka est le suivant :

Théorème de Hironaka. — *Soit X une variété algébrique sur un corps k de caractéristique nulle, U un ouvert (de Zariski) de X tel que U soit non singulier et partout dense. Il existe alors une variété algébrique* non singulière X' *et un morphisme* propre $f : X' \longrightarrow X$, *tels que le morphisme $f^{-1}(U) \longrightarrow U$ soit un isomorphisme, et que $D = X' - f^{-1}(U)$ soi un diviseur « à croisements normaux » dans X' (i.e. localement donné par une équation de la forme $f_1 f_2 \ldots f_k = 0$, où les f_i font partie d'un système de « coordonnées locales »).*

En fait le théorème complet de Hironaka est plus précis : il donne une information très précise sur la façon d'obtenir une telle « résolution » du couple (X, U) à l'aide d'une suite « d'éclatements » de nature très particulière. Cette précision supplémentaire est inutile dans toutes les applications connues du rapporteur, sauf pour nous dire que si X est projective, on peut choisir X' également projective. Le théorème complet de Hironaka est aussi plus général : il s'applique à tous les « schémas excellents » de caractéristique nulle, et en particulier aux schémas de

[2] https://agrothendieck.github.io/divers/hirsingscan.pdf

type fini sur les anneaux de séries formelles ou de séries convergentes (au-dessus d'un corps de caractéristique nulle). Cela implique par exemple facilement que le théorème énoncé reste vrai au voisinage d'un point de X, lorsqu'on suppose maintenant que X est un espace analytique complexe (ou sur un corps valué complet algébriquement clos, plus généralement), et U est le complémentaire d'une partie fermée analytique de X. Il semble que Hironaka ait démontré également la version globale de ce résultat local.

Contrairement à ce qui était l'impression générale chez les géomètres algébristes avant qu'on ne dispose du théorème de Hironaka, celui-ci n'est pas un résultat tout platonique, qui donnerait seulement une sorte de justification après coup d'un point de vue en géométrie algébrique (celui où les variétés sont plongées à tout prix dans l'espace projectif) qui est désormais dépassé. C'est au contraire aujourd'hui un *outil* d'une très grande puissance, sans doute le plus puissant dont nous disposions, pour l'étude des variétés algébriques ou analytiques (en caractéristique zéro pour le moment). Cela est vrai pour l'étude des singularités d'une variété, mais également pour l'étude « globale » des variétés algébriques (ou analytiques) non singulières, notamment pour le cas des variétés non compactes. L'application du théorème de Hironaka pour ces dernières se présente généralement ainsi : X étant supposée quasi projective i.e. immergeable comme sous-variété (en général non fermée) dans l'espace projectif P, l'adhérence $\overline{X}$ de X dans P contient X comme ouvert partout dense non singulier, de sorte qu'on peut appliquer le théorème de Hironaka au couple $(\overline{X}, X)$. On en conclut que X est le complémentaire, dans une variété non singulière *compacte* X', d'un diviseur D à croisements normaux. Un tel théorème de structure pour X, et diverses variantes qu'on prouve de façon analogue, sont extrêmement utiles dans l'étude de X.

Les théorèmes démontrés à l'aide du théorème de Hironaka ne se comptent plus. Pour la plupart, on a l'impression que la résolution des singularités est vraiment au fond du problème, et me pourra être évitée par recours à des méthodes différents. Citons quelques-uns de ces résultats (sur un corps de car. nulle).

a) Si $f : X' \longrightarrow X$ est un morphisme birationnel et propre de variétés algébriques non singulières, alors les faisceaux $\mathrm{R}^i j_*(\mathscr{O}_X)$ sont nuls pour $i > 1$ (Hironaka).

b) Si X est une variété algébrique affine sur le corps des complexes, sa cohomologie complexe peut être calculée à l'aide du « complexe de De Rham algébrique », i.e. le complexe formé des formes différentielles algébriques sur X (Grothendieck ; divers raffinements, inspirés par une question soulevée par Atiyah et Hörmander, ont été développés par P. Deligne).

c) Si X est une variété algébrique sur le corps des complexes, alors ses « groupes de cohomologie étales » à coefficients dans des faisceaux de torsion sont isomorphes aux groupes de cohomologie de l'espace localement compact sous-jacent à X (M. Artin et A. Grothendieck).

d) La construction par P. Deligne d0une théorie de Hodge pour les variétés algébriques complexes quelconques (supposées ni compactes ni non singulières) utilise de façon essentielle la résolution des singularités.

e) Même remarque pour divers théorèmes de P. A. Griffiths et de ses élèves sur la « variation des structures de Hodge », ou pour divers théorèmes de E. Brieskorn sur l'étude locale de certains types de singularités (singularités de Klein des surfaces, points critiques isolés d'un germe de fonction holomorphe…).

Certains des résultats mentionnés dans d) et e) figureront sans doute dans des rapports des auteurs cités dans ce même Congrès.

Du point de vue technique, la démonstration du théorème de Hironaka constitue une prouesse peu commune. Le rapporteur avoue n'en avoir pas fait entièrement le tour. Aboutissement d'années d'efforts concentrés, elle est sans doute l'une des démonstrations les plus « dures » et les plus monumentales qu'on connaisse en mathématiques nouvelles, dont il est trop tôt d'évaluer le rôle dans le développement futur de la géométrie algébrique[3]. Notons d'autre part que Hironaka souligne que plusieurs de ces idées étaient déjà en germe chez son maître, O. Zariski, qui avait beaucoup fait depuis longtemps pour populariser le problème de

[3]Cela est d'autant plus vrai que le développement de la géométrie algébrique s'arrêtera court, comme tout le reste, si notre espèce devait disparaître dans les prochaines décades, — éventualité qui apparaît aujourd'hui de plus en plus probable.

la résolution des singularités parmi un public réticent, et qui avait dans un travail classique traité le cas de la dimension 3.

Pour terminer, il faut souligner que le problème de la résolution des singularités est loin d'être résolu. En effet, seul le cas de la caractéristique nulle est actuellement réglé. La solution de nombreux problèmes de géométrie algébrique, en caractéristique $p > 0$ comme en inégales caractéristiques, dépend de la démonstration d'un théorème analogue pour n'importe quel « schéma excellent », par exemple pour n'importe quelle variété algébrique sur un corps k de caractéristique arbitraire. Le cas de la dimension 2 a été traité par Abhyankar, et a déjà été un outil indispensable dans diverses questions, par exemple dans la théorie de Néon de la dégénérescence des variétés abéliennes ou des courbes algébriques (« théorème de réduction semi-stable »), et ses applications par Deligne-Mumford aux variétés de modules des courbes algébriques, en caractéristique quelconque. Depuis plusieurs années déjà, Hironaka travaille sur le cas de la dimension quelconque. Nul doute que le problème mérite qu'un mathématicien du format de H. Hironaka lui consacre dix ans d'efforts incessants. Nul doute aussi que tous les géomètres lui souhaitent, de tout coeur : Bon succès !

A. GROTHENDIECK
Collège de France
11, Place Marcelin - Berthelot,
Paris 5^e
(France)

H. HIRONAKA
Harvard University
Department of Mathematics,
2 Divinity Avenue
Cambridge, Massachusetts 02138
(U.S.A.)

GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX

Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 431 à 436.
Gauthier-Villars, Paris, 1971[4]

Dans la suite, p désigne un nombre premier fixé. Nous nous proposons d'exposer l'esquisse d'une généralisation de la théorie de Dieudonné [4] des groupes formels sur un corps parfait de car. p, au cas « des groupes de Barsotti-Tate » (« groupes p-divisibles » dans la terminologie de Tate [5]) sur un schéma de base S sur lequel p est nilpotent. Un exposé plus détaillé se trouvera dans des notes développant un cours que j'ai donné sur ce sujet en juillet 1970 au Séminaire de Mathématique Supérieure de l'Université de Montréal, cf. aussi [7].

1. Généralités

Si S est un schéma, on identifie les schémas X sur S aux faisceaux (fppf) [2] qu'ils représentent. Les (faisceaux en) groupes sur S sont supposés commutatifs. Un groupe G sur S est appelé un *groupe de Barsotti-Tate sur S* (ou p-groupe de BT sur S, si on veut spécifier p), s'il satisfait aux conditions suivantes :

a) $p.G = G$, i.e. G est p-divisible.

b) G est de p-torsion, i.e. $G = \varinjlim_n {}_{p^n}G$.

[4] https://agrothendieck.github.io/divers/AGICM70.pdf

c) Les groupes $G(n) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker}(p^n.\mathrm{id}_G)$ sont (représentables par des S-schémas) finis localement libres.

En fait, il suffit (moyennant a) et b)) de supposer que $G(1) = {}_pG$ soit fini localement libre, pour que les $G(n)$ le soient comme extensions multiples de groupes isomorphes à $G(1)$. Notons que $G(1)$ est de rang de la forme p^d, où d est une fonction sur S localement constante à valeurs dans les entiers naturels, et que pour tout n, $G(n)$ est alors de rang p^{dn}. L'entier d s'appelle le *rang* ou la *hauteur* de groupe de Barsotti-Tate G. Remarquons qu'une extension de deux groupes de BT est un groupe de BT, et que le rang se comporte additivement pour les extensions. Notons aussi que l'image inverse par un changement de base $S' \longrightarrow S$ d'un groupe de BT est un groupe de BT.

Lorsque p est premier aux caractéristique résiduelles de S, la catégorie des groupes de BT sur S est équivalente à la catégorie des faisceaux p-adiques libres constants tordus sur S [3], en associant à G le faisceau p-adique

$$T_p(G) = \text{« } \varprojlim \text{ »} G(n),$$

le morphisme de transition $G(n') \longrightarrow G(n)$ étant induit par la multiplication par $p^{n'-n}$ (pour $n' \geq n$). Si S est connexe et muni d'un point géométrique s, la catégorie en question est donc équivalente à celle des représentations linéaires continues du groupe fondamental $\pi = \pi_1(S, s)$ dans des $\mathbf{Z}_p$-modules libres de type fini.

Lorsque A est un schéma abélien sur S, son sous-groupe de p-torsion maximal

$$_{p^\infty}A = \varinjlim_n {}_{p^n}A$$

est un groupe de BT, de rang égal à $2d$, ou d est la dimension relative de A. Les propriétés de A ont tendance à se refléter de façon très fidèle dans celles du groupe de BT associé, ce qui est une des raisons principales de l'intérêt des groupes de BT. Signalons à ce propos le

Théorème de Serre-Tate [6][7]. — *Supposons que p soit localement nilpotent sur S (i.e. les car. résiduelles de S sont égales à p) et soit S' un voisinage infinitésimal de S. Alors, pour tout schéma abélien A sur S, les prolongements A' de A à S' « correspondent exactement » aux prolongements du groupe de BT G associe à A en un groupe de BT G' sur S'.*

En fait, on obtient une équivalence entre la catégorie des schémas abéliens A' sur S', et la catégorie des triples (G', A, φ) d'un groupe de BT G' sur S', d'un schéma abélien A sur S, et d'un isomorphisme $\varphi : G'|S \simeq {}_{p^\infty}A$.

2. Groupe formel associé à un groupe de BT

Si G est un faisceau sur S muni d'une section e, on définit de façon évidente le voisinage infinitésimal d'ordre n de cette section dans G, $\mathrm{Inf}^n(G, e)$, et le voisinage infinitésimal d'ordre infini

$$\overline{G} = \mathrm{Inf}^\infty(G, e) = \varinjlim \mathrm{Inf}^n(G, e)$$

Lorsque G est un groupe de BT sur S et que p est localement nilpotent sur S, on prouve que $\overline{G}$ est un *groupe de Lie formel*, qu'on appelle le *groupe formel associé au groupe de BT* G. Sa formation est fonctorielle en G et commute au changement de base. Lorsque S est réduit à un point, $\overline{G}$ lui-même est un groupe de BT, et G est une extension d'un groupe de BT $G/\overline{G}$ ind-étale par le groupe de BT ind-infinitésimal $\overline{G}$. La catégorie des groupes de BT ind-infinitésimaux n'est alors autre que celle des groupes de Lie formels qui sont p-divisibles, i.e. ou la multiplication par p est une isogénie [5].

3. Théorie de Dieudonné

Nous supposons maintenant p localement nilpotent sur S. Pour la notion de « cristal en modules localement libre » sur S, nous renvoyons à [1] ; nous considérons ici S comme un schéma sur $\mathbf{Z}_p$, l'idéal ${}_p\mathbf{Z}_p$ de $\mathbf{Z}_p$ étant muni de ses structures de puissances divisées. La théorie de Dieudonné généralisée consiste en la définition d'un « *foncteur de Dieudonné* ».

$$\mathbb{D} : \mathrm{BT}(S)^\circ \longrightarrow \mathrm{Crismodloclib}(S),$$

ou $\mathrm{BT}(S)$ désigne la catégorie des groupes de BT sur S. Ce foncteur est compatible avec les changements de base. On peut le construire par deux procédés assez distincts en apparence (méthode de l'exponentielle, et méthode des $\natural$-extensions), dont la description dépasse le cadre de cette note. La première méthode a l'avantage de se prêter directement à la théorie des extensions infinitésimales de groupes de BT du paragraphe suivant ; la deuxième, de permettre une comparaison assez directe de ce foncteur et le foncteur défini classiquement par Dieudonné, dans le cas où S est le spectre d'un corps parfait : dans ce cas, on trouve un isomorphisme canonique entre ce dernier, et le foncteur que nous construisons.

Lorsque S est de caractéristique p, on dispose des morphismes de Frobenius et de Verschiebung (décalage) :

$$G \underset{V_G}{\overset{F_G}{\rightleftarrows}} G^{(p/S)},$$

d'où, en transformant par le foncteur de Dieudonné $\mathbb{D}$, des morphismes

$$M \underset{V_M}{\overset{F_M}{\rightleftarrows}} M^{(p/S)}, \qquad M = D(G),$$

satisfaisant les conditions habituelles

$$F_M V_M = p.\mathrm{id}_M, \quad V_M F_M = p.\mathrm{id}_{M^{(p/S)}}.$$

Un cristal M muni de morphisme F_M, V_M satisfaisant aux conditions précédentes sera appelé un *cristal de Dieudonné*. Ainsi, la théorie de Dieudonné généralisée nous fournit un foncteur contravariant de la catégorie des groupes de Barsotti-Tate sur S dans celle des cristaux de Dieudonné, compatible aux changements de base. Lorsque S est le spectre d'un corps parfait, le théorie de Dieudonné classique nous apprend que c'est une équivalence de catégories. Dans le cas général, on peut espérer que ce foncteur soit pleinement fidèle.

On peut d'ailleurs donner une description conjecturale assez simple de l'image essentielle de ce foncteur, que nous n'expliciterons pas ici.

4. Filtration du cristal de Dieudonné et déformations de groupes de BT

Nous supposons toujours p localement nilpotent. Avec la construction du cristal de Dieudonné $\mathbb{D}(G)$ d'un groupe de BT G, on trouve en même temps une filtration canonique du module localement libre $\mathbb{D}(G)_S$ sur S par un sous-module localement facteur direct $\mathrm{Fil}(\mathbb{D}(G)_S)$. De façon précise, on trouve une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \underline{\omega}_G \longrightarrow \mathbb{D}(G)_S \longrightarrow \check{\underline{\omega}}_{G^*} \longrightarrow 0,$$

où $\underline{\omega}_G$ est le faisceau localement libre sur S des 1-formes différentielles le long de la section unité du groupe de Lie formel $\overline{G}$ associé à G (n° 2), et $G^* = \varinjlim G(n)^*$ désigne le groupe de BT *dual* de G (pour la dualité de Cartier), enfin $^\vee$ désigne le module dual. La suite exacte envisagée est fonctorielle en G, et commute aux changements de base.

Soit maintenant S' un épaississement à puissances divisées de S, et supposons que, ou bien les puissances divisées envisagées sont nilpotentes, ou bien que les fibres de G sont connexes, ou qu'il en soit ainsi de celles de G^* (i.e. $G(1)$ est unipotent). Considérons le module localement libre $\mathbb{D}(G)_{S'}$ sur S'. Pour tout prolongement G' de G en un groupe de BT sur S, $\mathbb{D}(G)_{S'}$ peut s'identifier à $\mathbb{D}(G')_S$, et à ce titre il est muni d'une filtration par un sous-module localement facteur direct $\mathrm{Fil}\,\mathbb{D}(G')$, qui prolonge la filtration $\mathrm{Fil}\,\mathbb{D}(G)$ dont on dispose déjà sur $\mathbb{D}(G)_S$. Ceci dit, on trouve que les prolongements de G en un groupe de BT G' sur S' « correspondent exactement » aux prolongements de la filtration qu'on a sur $\mathbb{D}(G)_S$ en une filtration de $\mathbb{D}(G)_{S'}$ par un sous-module localement facteur direct. Plus précisément, on trouve une équivalence entre la catégorie des groupes de BT G' sur S' (resp. ceux à fibres connexes, resp. ceux à fibres ind-unipotentes) avec la catégorie des couples (G, Fil), où G est un groupe de BT sur G (resp. un groupe de BT à fibres connexes, resp. à fibres und-unipotentes), et où Fil est une filtration de $\mathbb{D}(G)_{S'}$ par un sous-module localement facteur direct, prolongeant la filtration canonique de $\mathbb{D}(G)_S$.

Remarques.

1. Sans hypothèse sur les puissances divisées envisagées ou sur les fibres de G, on a en tous cas un foncteur

   $$G' \mapsto (G, \mathrm{Fil}),$$

   mais même si G est la somme du groupe constant $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et de son groupe de BT dual ${}_{p^\infty}G_m$, il n'est plus vrai (si les puiss. div. ne sont pas nilpotentes) qu'un prolongement de G soit connu quand on connaît le prolongement correspondant d'une filtration. Ceci est lié au fait que le logarithme sur $1+J$ (J l'idéal d'augmentation) n'est plus nécessairement injectif.

2. Soit toujours S un schéma où p soit localement nilpotent, et soit $S_0 \hookrightarrow S$ le sous-schéma (p) défini par l'annulation de p. Alors S est un épaississement à puissances divisées de S, et si $p \neq 2$, il est à puissances divisées (localement) nilpotentes. On peut donc appliquer la théorie de déformations précédentes, pour expliciter les groups de BT sur S en termes de groupes de BT sur le schéma S_0 de car. p, et du prolongement d'un filtration, à condition, si $p = 2$, de se borner aux groupes de BT à fibres connexes ou ind-unipotentes. Si la théorie de Dieudonné du n° 3 fournit une description complète de la catégorie des groupes de BT sur S_0 en termes cristallins (ce qui pour l'instant reste conjectural), on en déduit donc une description de la catégorie des groupes de BT sur S en termes purement « cristallins », avec toutefois le grain de sel habituel pour $p = 2$.

5. Groupes de BT à isogénie près

La catégorie des groupes de BT « à isogénie près » sur S est par définition la catégorie dont les objets sont les groupes de BT sur S, et ou $\mathrm{Hom}_{\mathrm{isog}}(G, G')$ est défini comme $\mathrm{Hom}(G, G') \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Si p est localement nilpotent sur S, on trouve donc un foncteur de la catégorie des groupes de BT sur S à isogénie près, dans celle des cristaux sur S à isogénie près. Lorsque S' est un voisinage infinitésimal de S, l'idéal d'épaississement étant annulé par une puissance de p, on trouve que le foncteur restriction induit une *équivalence* de la catégorie des groupes de BT à isogénie près sur S', avec la catégorie analogue pour S : ainsi, la théorie des déformations infinitésimales à isogénie près est triviale.

Par un passage à la limite facile, on déduite des résultats du paragraphe précédent le résultat qui suit.

Soit A un anneau séparé et complet pour la topologie p-adique, $A_n = A/p^{n+1}A$.

Pour tout groupe de BT G_0 sur $S_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$, on définit par passage à la limite sur les $D(G_0)_{A_n}$ un A-module de type fini localement libre $M = \mathbb{D}(G_0)$, et si G_0

est prolongé en G sur A, M est muni d'une filtration par un sous-module facteur direct $M' = \mathrm{Fil}\, M \subset M$. Localisant par rapport à p, on trouve un A_p-module localement libre M_p, muni d'un facteur direct $\mathrm{Fil}\, M_p$. On trouve ainsi un foncteur $G_0 \longrightarrow \mathbb{D}(G_0)_p$ de la catégorie des groupes de BT à isogénie près sur A_0, dans la catégorie des modules localement libres sur A_p, et un foncteur $G \mapsto (G_0, \mathrm{Fil})$ de la catégorie des groupes de BT à isogénie près G sur S, dans la catégorie des couples (G_0, Fil) d'un groupe de BT à isogénie près G_0 sur S_0, et d'un sous-module facteur direct $\mathrm{Fil}\, \mathbb{D}(G_0)_p$. Ce *dernier foncteur est pleinement fidèle*.

Considérons notamment le cas où A est un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel k parfait de car. p, et à corps des fractions K de caractéristique nulle. On trouve qu'un groupe de BT G sur A est connu à isogénie près, quand on connaît a) le groupe de BT $G_0 = G \otimes_A k$ sur k à isogénie près, ou ce qui revient au même, son espace de Dieudonné $E = D(G_0)_W \otimes_W L$ (ou L est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt sur k), muni de F_E et V_E, et b) la filtration correspondante de $D(G_0)_p = E \otimes_L K$.

Remarques. — Le résultat qui précède soulève de nombreuses questions auxquelles je ne sais répondre :

1. Quelles sont les filtrations sur $E \otimes_L K$ qu'on peut obtenir par un groupe de BT à isogénie près sur A ? Forment-elles un ouvert de Zariski d'un grassmanienne ?

2. Comment peut-on expliciter G, et plus particulièrement sa fibre générique G_K (qu'on peut interpréter comme un vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ opère), en termes du couple $(E, \mathrm{Fil} \subset E \otimes_L K)$, ou E est un L-vectoriel muni de F_E et V_E ?

3. Quels sont les modules galoisiens qu'on trouve à l'aide de groupes de BT à isogénie près G sur A ? Comment, à l'aide d'un tel module galoisien, peut-on reconstituer plus ou moins algébriquement le couple (E, Fil) ? (Cette question se pose à cause du théorème de Tate [5], qui nous dit que G est connu quand on connaît le module galoisien associé.)

Enfin, pour traiter la cohomologie cristalline et ses relations avec la cohomologie p-adique, il y a lieu de se poser des questions analogues, où les cristaux de

Dieudonné avec filtrations à 2 crans sont remplacés par des cristaux avec un morphisme de Frobenius et des filtrations finies de longueur quelconque (la cohomologie en dimension n donnant lieu à des filtrations à $n+1$ crans). De plus, il y a lieu de ne pas se restreindre au cas des bases de dimension 1, et de revenir au cas des anneaux A supposés simplement séparés et complets pour la topologie p-adique.

Bibliographie

[1] P. BERTHELOT. — Cohomologie cristalline des schémas, *Notes aux C. R.*, du 18-8, 1-9 et 8-9-1968

[2] M . DEMAZURE. — In S. G. A. 3 IV (Springer *Lecture Notes*, No. 151).

[3] P. JOUANOLOU. — In S. G. A. 5 VI (*Institut des Hautes Études Scientifiques*).

[4] U. I. MANIN. — Théorie des groupes commutatifs formels sur des corps de car. finie, *Uspechi Mat. Nauk* (en russe), 18 (1963), pp 3-90.

[5] J. TATE. — p-divisible groups in local fields, *Proceedings of a Conference held at Driebergen* (The Netherlands) in 1966, Springer (Berlin), 1967.

[6] Séminaire de J. TATE au Collège de France en 1968 (écrire à TATE, Dep. of Math., 2 Divinity Avenue, Cambridge, Mass., U. S. A.).

[7] W. MESSING. — The crystals associated to BARSOTTI-TATE groups, thèse, Princeton (1971).

(Collège de France,

11, Place Marcelin-Berthelot

Paris 5^e

France).

THE TAME FUNDAMENTAL GROUP OF A FORMAL NEIGHBOURHOOD OF A DIVISOR WITH NORMAL CROSSINGS ON A SCHEME

A. GROTHENDIECK AND J. MURRE

Lecture Notes in Math. 208, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971[5]

[5] https://agrothendieck.github.io/divers/tamefundscan.pdf

PLATITUDE D'UNE ADHÉRENCE SCHÉMATIQUE ET LEMME DE HIRONAKA GÉNÉRALISÉ

Manuscripta Math. 5, 323-339 (1971)[6]

[6] https://agrothendieck.github.io/divers/platadhscan.pdf

BRIEF AN G. FALTINGS
27.6.1983

- Letter about Anabelian geometry.
- Translation. In: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

27.6.1983

Lieber Herr Faltings,

Vielen Dank für ihre rasche Antwort und Übersendung der Separata! Ihr Kommentar zur sog. "Theorie der Motive" ist von der üblichen Art, die wohl grossenteils der in der Mathematik stark eingewurzelten Tradition entspringt, nur denjenigen mathematischen Situationen und Zusammenhängen eine (eventuell langatmige) Untersuchung und Aufmerksamkeit zuzuwenden, insofern sie die Hoffnung gewähren, nicht nur zu einem vorläufigen und möglicherweise z.T. mutmasslichen Verständnis eines bisher geheimnisvollen Gebietes zu kommen, wie es in den Naturwissenschaften ja gang und gäbe ist — sondern auch zugleich Aussicht auf die Möglichkeit einer laufenden Absicherung der gewonnenen Einsichten durch stichhaltige Beweise. Diese Einstellung scheint mir nun psychologisch ein ausserordentlich starkes Hindernis zur Entfaltung mathematischer Schauenkraft, und damit auch zum Fortschreiten mathematischer Einsicht im üblichen Sinn, nämlich *der* Einsicht, die durchdringend oder erschöpfend genug ist, um sich schliesslich "beweisen" zu können. Was meine Erfahrung in mathematischer Arbeit mich immer wieder lehrte, ist dass stets in erster Linie der Beweis aus der Einsicht entspringt, nicht im Gegenteil — und dass die Einsicht in erster Linie aus einem feinfühligen und hartnäckigen Aufspüren der relevanten Wesenheiten und Begriffen entsteht, und deren Wechselbeziehung. Der leitende Faden ist innere Kohärenz des allmählich sich aus dem Dunst lösenden Bildes, und Einklang auch mit der anderweilig Bekannten oder Erahntem — und er leitet um so sicherer, als die "exigence" der Kohärenz eine strengere und feinfühlendere ist.

Um auf Motive zurückzukommen, so existiert meines Wissens keinerlei "Theorie" der Motive, aus dem einfachen Grund, dass niemand sich die Mühe machte, eine solche Theorie auszuarbeiten. Das vorhandende Material an bekannten Tatsachen und an geahnten Zusammenhängen ist von beindruckender Reichhaltigkeit — unverhältnismässig viel mehr, will mir scheinen, als je zu Ausarbeitung einer physikalischen Theorie vorlag! Es existiert z.Z. eine Art "yoga des motifs", das einer Handvoll Eingeweihter geläufig ist, und in manchen Situationen einen sicheren Anhalt gewährt zur Erratung gewisser Zusammenhänge, die sich dann auch bisweilen tatsächlich so oder so beweisen lassen (wie etwa in Ihren letzten Arbeit der Satz über Galois Aktion auf Tateschen Moduln abelscher Mannigfaltigkeiten). Es hat den Status scheint mir einer Art Geheimwissenschaft — Deligne scheint mir der, dem sie am geläufigsten ist. Seine erste [veröffentlichte] Arbeit, über die Entartung der Leray'schen Spektralfolge für eine glatte eigentliche Abbildung algebraischer Mannigfaltigkeiten über **C**, entsprang einer einfachen Überlegung über "Gewichte" von Kohomologiegruppen, die zu jener Zeit reine Heuristik ware, heute aber (seit dem Beweis der Weil'schen Vermutungen) sich wohl über beliebigem Grundschema durchführen liesse. Es ist mir auch klar, dass die Deligne'sche Erweiterung der Hodge Theorie weitgehend aus dem ungeschriebenen "Yoga" der Motive schöpfte — nämlich dem Bestreben entsprang, gewisse "Tatsachen" aus jenem Yoga, und ganz besonders die Existenz der Filtration der Kohomologie durch "Gewichte", und zudem die Halbeinfachheit gewisser Aktionen von Fundamentalgruppen, im Rahmen der transzendenten Hodge-Strukturen sicherzustellen.

PURSUING STACKS
First episode: the modelizing story

- À la poursuite des Champs : histoire de modèles

ESQUISSE D'UN PROGRAMME

- The *"Esquisse d'un Programme"* gives an outline of the main themes of mathematical reflection that Grothendieck pursued over the decade of the 70s and the beginning of the 80s.

  It was written in January of 1984 as a report to support an application for a research position at the CNRS. It was reproduced after "Récoltes et Semailles" as part of a program of *"Réflexions Mathématiques"* where he intended to develop some of these themes in the subsequent years.

- This text was published in: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

- Scan of the original

- Translation. In: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

- The asterisks (*) refer to the footnotes on the same page, the superscripts numbered from ([1]) to ([7]) refer to the notes (added later) collected at the end of this report.

ESQUISSE D'UN PROGRAMME

par Alexandre Grothendieck

1. Envoi

Comme la conjoncture actuelle rend de plus en plus illusoire pour moi les perspectives d'un enseignement de recherche à l'Université, je me suis résolu à demander mon admission au CNRS, pour pouvoir consacrer mon énergie à développer es travaux et perspectives dont il devient clair qu'il ne se trouvera aucun élève (ni même, semble-t-il, aucun congénère mathématicien) pour les développer à ma place.

En guise de document "Titres et Travaux", on trouvera à la suite de ce texte la reproduction intégrale d'une esquisse, par thèmes, de ce que je considérais comme mes principales contributions mathématiques au moment d'écrire ce rapport, en 1972. Il contient également une liste d'articles publiés à cette date. J'ai cessé toute publication d'articles scientifiques depuis 1970. Dans les lignes qui suivent, je me propose de donner un aperçu au moins sur quelques thèmes principaux de mes réflexions mathématiques depuis lors. Ces réflexions se sont matérialisées au cours des années en deux volumineux cartons de notes manuscrites, difficilement déchiffrables sans doute à tout autre qu'à moi-même, et qui, après des stades de décantations successives, attendent leur heure peut-être pour une rédaction d'ensemble tout au moins provisoire, à l'intention de la communauté mathématique. Le terme “rédaction” ici est quelque peu impropre, alors qu’il s’agit bien plus de développer des idées et visions multiples amorcées au cours de ces douze dernières années, en les précisant et les approfondissant, avec tous les rebondissements imprévus qui constamment accompagnent ce genre de travail – un travail de découverte donc, et non de compilation de notes pieusement accumulées. Et je compte bien, dans l’écriture des “Réflexions Mathématiques” commencée depuis février 1983, laisser apparaître clairement au fil des pages la démarche de la pensée qui sonde et qui découvre, en tâtonnant dans la pénombre bien souvent, avec des trouées de lumière subites quand quelque tenace image fausse, ou simplement inadéquate, se trouve enfin débusquée et mise à jour, et que les choses qui semblaient de guingois se mettent en place, dans l’harmonie mutuelle qui leur est propre.

Quoi qu’il en soit, l’esquisse qui suit de quelques thèmes de réflexions des dernières dix ou douze années, tiendra lieu en même temps d’esquisse de programme de travail pour les années qui viennent, que je compte consacrer au développement de ces thèmes, ou au moins de certains d’entre eux. Elle est destinée, d’une part aux collègues du Comité National appelés à statuer sur ma demande, d’autre part à quelques autres collègues, anciens élèves, amis, dans l’éventualité où certaines des idées esquissées ici pourraient intéresser l’un d’entre eux.

2. Un jeu de “Lego-Teichmüller” et le groupe de Galois de $\overline{\mathrm{Q}}$ sur Q

Les exigences d’un enseignement universitaire, s’adressant donc à des étudiants (y compris les étudiants dits “avancés”) au bagage mathématique modeste (et souvent moins que modeste), m’ont amené à renouveler de façon draconienne les thèmes de réflexion à proposer à mes élèves, et de fil en aiguille et de plus en plus, à moi-même également. Il m’avait semblé important de partir d’un bagage intuitif commun, indépendant de tout langage technique censé l’exprimer, bien antérieur à tout tel langage – il s’est avéré que l’intuition géométrique et topologique des formes, et plus particulièrement des formes bidimensionnelles, était un tel terrain commun. Il s’agit donc de thèmes qu’on peut grouper sous l’appellation de “topologie des surfaces” ou “géométrie des surfaces”, étant entendu dans cette dernière appellation que l'accent principal se trouve sur les propriétés topologiques des surfaces, ou sur les aspects combinatoires qui en constituent l'expression technique la plus terre-à-terre, et non sur les aspects différentiels, voire conformes, riemaniens, holomorphes et (de là) l'aspect "courbes algébriques complexes". Une fois ce dernier pas franchi cependant, voici soudain la géométrie algébrique (mes anciennes amours!) qui fait irruption à nouveau, et ce par les objets qu'on peut considérer comme les pierres de construction ultimes de toutes les autres variétés algébriques. Alors que dans mes recherches d'avant 1970, mon attention systématiquement était dirigée vers les objets de généralité maximale, afin de dégager un langage d'ensemble adéquat pour le monde de la géométrie algébrique, et que je ne m'attardais sur les courbes algébriques que dans la stricte mesure où cela s'avérait indispensable (notamment en cohomologie étale) pour développer des techniques et énoncés "passe-partout" valables en toute dimension et en tous lieux (j'entends, sur tous schémas de base, voire tous topos annelés de base...), me voici donc ramené, par le truchement d'objets si simples qu'un enfant peut les connaître en jouant, aux débuts et origines de la géométrie algébrique, familiers à Riemann et à ses émules !

Depuis environ 1975, c'est donc la géométrie des surfaces (réelles), et à partir de 1977 les liens entre les questions de géométrie des surfaces et la géométrie algébrique des courbes algébriques définies sur des corps tels que **C**, **R** ou des extensions de type fini de **Q**, qui ont été ma principale source d'inspiration, ainsi que mon fil conducteur constant. C'est avec surprise et avec émerveillement qu'au fil des ans je découvrais (ou plutôt, sans doute, redécouvrais) la richesse prodigieuse, réellement inépuisable, la profondeur insoupçonnée de ce thème, d'apparence si anodine. Je crois y sentir un point névralgique entre tous, un point de convergence privilégié des principaux courants d'idées mathématiques, comme aussi des principales structures et des visions des choses qu'elles expriment, depuis les plus spécifiques, (tels les anneaux **Z**, **Q**, $\overline{\mathbf{Q}}$, **R**, **C** ou le groupe Sl(2) sur l'un de ces anneaux, ou les groupes algébriques réductifs généraux) aux plus "abstraits", telles les "multiplicités" algébriques, analytiques complexes ou analytiques réelles. (Celles-ci s'introduisent naturellement quand il s'agit d'étudier systématiquement des "variétés de modules" pour les objets géométriques envisagés, si on veut dépasser le point de vue notoirement insuffisant des "modules grossiers", qui revient à "tuer" bien malencontreusement les groupes d'automorphismes de ces objets.) Parmi ces multiplicités modulaires, ce sont celles de Mumford-Deligne pour les courbes algébriques "stables" de genre g, à ν points marqués, que je note $\widehat{M}_{g,\nu}$ (compactification de la multiplicité "ouverte" $M_{g,\nu}$ correspondant aux courbes lisses), qui depuis quelques deux ou trois années ont exercé sur moi une fascination particulière, plus forte peut-être qu'aucun autre objet mathématique 'a ce jour. À vrai dire, il s'agit plutôt du système de *toutes* les multiplicités $M_{g,\nu}$ pour g, ν variables, liées entre elles par un certain nombre d'opérations fondamentales (telles les opérations de "bouchage de trous" i.e. de "gommage" de points marqués, celle de "recollement", et les opérations inverses), qui sont le reflet en géométrie algébrique absolue de caractéristique zéro (pour le moment) d'opérations géométriques familières du point de vue de la "chirurgie" topologique ou conforme des surfaces. La principale raison sans doute de cette fascination, c'est que cette structure géométrique très riche sur le système des multiplicités modulaires "ouvertes" $M_{g,\nu}$ se réflète par une structure analogue sur les groupoïdes fondamentaux correspondants, les "groupoïdes de Teichmüller" $\widehat{T}_{g,\nu}$, et que ces opérations au niveau des $\widehat{T}_{g,\nu}$ ont un caractère suffisamment intrinsèque pour que le groupe de Galois Γ de $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$ opère sur toute cette "tour" de groupoïdes de Teichmüller, en respectant toutes ces structures. Chose plus extraordinaire encore, cette opération est *fidèle* – à vrai dire, elle est fidèle déjà sur le premier "étage" non trivial de cette tour, à savoir $\widehat{T}_{0,4}$ – ce qui signifie aussi, essentiellement, que l'action extérieure de Γ sur le groupe fondamental $\hat{\pi}_{0,3}$ de la droite projective standard $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbf{Q}$, privée des trois points 0, 1, ∞, est déjà fidèle. Ainsi *le groupe de Galois* Γ *se réalise comme un groupe d'automorphismes d'un groupe profini des plus concrets*, respectant d'ailleurs certaines structures essentielles de ce groupe. Il s'ensuit qu'un élément de Γ peut être "paramétré" (de diverses façons équivalentes d'ailleurs) par un élément convenable de ce groupe profini $\hat{\pi}_{0,3}$ (un groupe profini libre à deux générateurs), ou par un système de tels éléments, ce ou ces éléments étant d'ailleurs soumis à certaines conditions simples, nécessaires (et sans doute non suffisantes) pour que ce ou ces éléments corresponde(nt) bien à un élément de Γ. Une des tâches les plus fascinantes ici, est justement d'appréhender des conditions nécessaires *et* suffisantes sur un automorphisme extérieur de $\hat{\pi}_{0,3}$ i.e. sur le ou les paramètres correspondants, pour qu'il provienne d'un élément de

Γ – ce qui fournirait une description “purement algébrique”, en termes de groupes profinis et sans référence à la théorie de Galois des corps de nombres, du groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{Q})$!

Peut-être une caractérisation même conjecturale de Γ comme sous-groupe de $\mathrm{Autext}(\hat{\pi}_{0,3})$ est-elle pour le moment hors de portée ([1]) ; je n’ai pas de conjecture à proposer encore. Une autre tâche par contre est abordable immédiatement, c’est celle de décrire l’action de Γ sur toute la tour de Teichmüller, en termes de son action sur le “premier étage” $\hat{\pi}_{0,3}$, i.e. exprimer un automorphisme de cette tour, en termes du “paramètre” dans $\hat{\pi}_{0,3}$, qui repère l’élément courant γ de Γ. Ceci est lié à une représentation de la tour de Teichmüller (en tant que groupoïde muni d’une opération de “recollement”) par générateurs et relations, qui donnera en particulier une présentation par générateurs et relations, au sens ordinaire, de chacun des $\widehat{T}_{g,\nu}$ (en tant que groupoïde profini). Ici, même pour $g = 0$ (donc quand les groupes de Teichmüller correspondants sont des groupes de tresses “bien connus”), les générateurs et relations connus à ce jour dont j’ai eu connaissance, me semblent inutilisables tels quels, car ils ne présentent pas les caractères d’invariance et de symétrie indispensables pour que l’action de Γ soit directement lisible sur cette présentation. Ceci est lié notamment au fait que les gens s’obstinent encore, en calculant avec des groupes fondamentaux, à fixer un seul point base, plutôt que d’en choisir astucieusement tout un paquet qui soit invariant par les symétries de la situation, lesquelles sont donc perdues en route. Dans certaines situations (comme des théorèmes de descente à la Van Kampen pour groupes fondamentaux) il est bien plus élégant, voire indispensable pour y comprendre quelque chose, de travailler avec des groupoïdes fondamentaux par rapport à un paquet de points base convenable, et il en est certainement ainsi pour la tour de Teichmüller. Il semblerait (incroyable, mais vrai !) que la géométrie même du premier étage de la tour de Teichmüller (correspondant donc aux “modules” soit pour des droites projectives avec quatre points marqués, soit pour des courbes elliptiques (!)) n’ait jamais été bien explicitée, par exemple la relation entre le cas de genre 0 avec la géométrie de l’octaèdre, et celle du tétraèdre. A fortiori les multiplicités modulaires $M_{0,5}$ (pour les droites projectives avec cinq points marqués) et $M_{1,2}$ (pour les courbes de genre 1 avec deux points marqués), d’ailleurs quasiment isomorphes entre elles, semblent-elles terre vierge – les groupes de tresses ne vont pas nous éclairer à leur sujet ! J'ai commencé à regarder $M_{0,5}$ à des moments perdus, c'est un véritable joyau, d'une géométrie très riche étroitement liée à celle de l'icosaèdre.

L'intérêt a priori d'une connaissance complète des deux premiers étages de la tour (savoir, les cas où la dimension modulaire $N = 3g - 3 + \nu$ est ≤ 2) réside dans ce principe, que *la tour entière se reconstitue à partir des deux premiers étages*, en ce sens que via l'opération fondamentale de "recollement", l'étage 1 fournit un système complet de générateurs, et l'étage 2 un système complet de relations. Il y a une analogie frappante, et j'en suis persuadé, pas seulement formelle, entre ce principe, et le principe analogue de Demazure pour la structure des groupes algébriques réductifs, si on remplace le terme "étage" ou "dimension modulaire" par "rang semi-simple du groupe réductif". Le lien devient plus frappant encore, si on se rappelle que le groupe de Teichmüller $T_{1,1}$ (dans le contexte discret transcendant maintenant, et non dans le contexte algébrique profini, où on trouve les complétions profinies des premiers) n'est autre que $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$, i.e. le groupe des points entiers du schéma en groupes simple de rang 1 "absolu" $\mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$. Ainsi, *la pierre de construction fondamentale pour la tour de Teichmüller, est essentiellement la même que celle pour "la tour" des groupes réductifs de tous rangs* – un groupe d'ailleurs dont on peut dire sans doute qu'il est présent dans toutes les disciplines essentielles des mathématiques.

Ce principe de construction de la tour de Teichmüller n'est pas démontré à l'heure actuelle – mais je n'ai aucun doute qu'il ne soit valable. Il résulterait (via une théorie de dévissage des structures stratifiées – en l'occurrence les $\widehat{M}_{g,\nu}$ – qui resterait à écrire, cf. par. 5) d'une propriété extrêmement plausible des multiplicités modulaires ouvertes $M_{g,\nu}$ dans le contexte analytique complexe, à savoir que pour une dimension modulaire $N \geq 3$, le groupe fondamental de $M_{g,\nu}$ (i.e. le groupe de Teichmüller habituel $T_{g,\nu}$) est isomorphe au "groupe fondamental à l'infini" i.e. celui d'un "voisinage tubulaire de l'infini". C'est là une chose bien familière (due à Lefschetz essentiellement) pour une variété lisse *affine* de dimension $N \geq 3$. Il est vrai que les multiplicités modulaires ne sont pas affines (sauf pour des petites valeurs de g), mais il suffirait qu'une telle $M_{g,\nu}$ de dimension N (ou plutôt, un revêtement fini convenable) soit réunion de $N-2$ ouverts affines, donc que $M_{g,\nu}$ ne soit pas "trop proche d'une variété compacte".

N'ayant aucun doute sur ce principe de construction de la tour de Teichmüller, je préfère laisser aux experts de la théorie transcendante, mieux outillés que moi, le soin de prouver le nécessaire (s'il s'en trouve qui soit intéressé), pour expliciter plutôt, avec tout le soin qu'elle mérite, la structure qui en découle pour la tour de Teichmüller par générateurs et relations, dans le cadre discret cette fois et non profini – ce qui revient, essentiellement, à une compréhension complète des quatre multiplicités modulaires $M_{0,4}$, $M_{1,1}$, $M_{0,5}$, $M_{1,2}$, et de leurs groupoïdes fondamentaux par rapport à des "points base" convenablement choisis. Ceux-ci s'offrent tout naturellement, comme les courbes algébriques complexes du type (g,ν) envisagé, qui ont un groupe d'automorphismes (nécessairement fini) plus grand que dans le cas générique[1]. En y incluant la sphère holomorphe à trois points marqués (provenant de $M_{0,3}$ i.e. de l'étage 0), on trouve *douze "pièces de construction" fondamentales* (6 de genre 0, 6 de genre 1) dans un "jeu de Légo-Teichmüller" (grande boîte), où les points marqués sur les surfaces envisagées sont remplacés par des "trous" à bord, de façon à avoir des surfaces à bord, donc des pièces de construction qui peuvent s'assembler par frottement doux comme dans le jeu de Légo ordinaire cher à nos enfants (ou petits-enfants...). Par assemblage on trouve un moyen tout ce qu'il y a de visuel pour construire tout type de surface (ce sont ces assemblages essentiellement qui seront les "points base" pour notre fameuse tour), et aussi de visualiser les *"chemins" élémentaires* par des opérations tout aussi concrètes telles des "twists", ou des automorphismes des pièces du jeu, et d'écrire les *relations fondamentales* entre chemins composés. Suivant la taille (et le prix !) de la boîte de construction utilisée, on trouve d'ailleurs de nombreuses descriptions différentes de la tour de Teichmüller par générateurs et relations. La boîte la plus petite est réduite à des pièces toutes identiques, de type $(0,3)$ – ce sont les "pantalons" de Thurston, et le jeu de Légo-Teichmüller que j'essaie de décrire, issu

[1]Il faut y ajouter de plus les "points-base" provenant par opérations de recollement de "pièces" du même type en dimension modulaire inférieure. D'autre part, en dimension modulaire 2 (cas de $M_{0,5}$ et $M_{1,2}$), il convient d'exclure les points de certaines familles à un paramètre de courbes admettant un automorphisme exceptionnel d'ordre 2. Ces familles constituent d'ailleurs sur les multiplicités envisagées des courbes rationnelles remarquables, qui me paraissent un ingrédient important de la structure de ces multiplicités.

de motivations et de réflexions de géométrie algébrique absolue sur le corps $\mathbf{Q}$, est très proche du jeu de "chirurgie géodésique hyperbolique" de Thurston, dont j'ai appris l'existence l'an dernier par Yves Ladegaillerie. Dans un microséminaire avec Carlos Contou-Carrère et Yves Ladegaillerie, nous avons amorcé une réflexion dont un des objets est de confronter les deux points de vue, qui se complètent mutuellement.

J'ajoute que chacune des douze pièces de construction de la "grande boîte" se trouve munie d'une décomposition cellulaire canonique, stable par toutes les symétries, ayant comme seuls sommets les "points marqués" (ou centres des trous), et comme arêtes certains chemins géodésiques (pour la structure riemanienne canonique sur la sphère ou le tore envisagé) entre certaines paires de sommets (savoir ceux qui se trouvent sur un même "lieu réel", pour une structure réelle convenable de la courbe algébrique complexe envisagée). Par suite, dans ce jeu toutes les surfaces obtenues par assemblage sont munies de structures cellulaires canoniques, qui à leur tour (cf. §3 plus bas) permettent de considérer ces surfaces comme associée à des courbes algébriques complexes (et même sur $\overline{\mathbf{Q}}$) canoniquement déterminées. Il y a là un jeu de chassé-croisé typique entre le combinatoire, et l'algébrique complexe (ou mieux, l'algébrique sur $\overline{\mathbf{Q}}$).

La "petite boîte" aux pièces toutes identiques, qui a le charme de l'économie, donnera sans doute une description relativement compliquée pour les relations (compliquée, mais nullement inextricable !). La grande boîte donnera lieu à des relations plus nombreuses (du fait qu'il y a beaucoup plus de points-bases et de chemins remarquables entre eux), mais à structure plus transparente. Je prévois qu'en dimension modulaire 2, tout comme dans le cas plus ou moins familier de la dimension modulaire 1 (avec notamment la description de $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$ par $(\rho,\sigma|\rho^3=\sigma^2,\sigma^4=\rho^6=1)$), on trouvera un engendrement par les groupes d'automorphismes des trois types de pièces pertinentes, avec des relations simples que je n'ai pas dégagées à l'heure d'écrire ces lignes. Peut-être même trouvera-t-on un principe de ce genre pour tous les $T_{g,\nu}$, ainsi qu'une décomposition cellulaire de $\widehat{M}_{g,\nu}$ généralisant celles qui se présentent spontanément pour $\widehat{M}_{0,4}$ et $\widehat{M}_{1,1}$, et que j'entrevois dès à présent pour la dimension modulaire 2, en utilisant les hypersurfaces correspondant aux diverses *structures réelles* sur les structures complexes envisagées, pour effectuer le découpage cellulaire voulu.

3. Corps de nombres associés à un dessin d'enfant

Plutôt que de suivre (comme prévu) un ordre thématique rigoureux, je me suis laissé emporter par ma prédilection pour un thème particulièrement riche et brûlant, auquel je compte me consacrer d'ailleurs prioritairement pendant quelques temps, à partir de la rentrée 84/85. Je reprends donc l'exposé thématique là où je l'ai laissé, tout au début du paragraphe précédent.

Mon intérêt pour les surfaces topologiques commence à poindre en 1974, où je propose à Yves Ladegaillerie le thème de l'étude isotopique des plongements d'un 1-complexe topologique dans une surface compacte. Dans les deux années qui suivent, cette étude le conduit à un remarquable théorème d'isotopie, donnant une description algébrique complète des classes d'isotopie de plongements de tels 1-complexes, ou de surfaces compactes à bord, dans une surface compacte orientée, en termes de certains invariants combinatoires très simples, et des groupes fondamentaux des protagonistes. Ce théorème, qui doit pouvoir s'étendre sans mal aux plongements d'un espace compact quelconque (triangulable pour simplifier) dans une surface compacte orientée, redonne comme corollaires faciles plusieurs résultats classiques profonds de la théorie des surfaces, et notamment le théorème d'isotopie de Baer. Il va finalement être publié, séparément du reste (et dix ans après, vu la dureté des temps…), dans Topology. Dans le travail de Ladegaillerie figure également une description purement algébrique, en termes de groupoïdes fondamentaux, de la catégorie "isotopique" des surfaces compactes X, munies d'un 1-complexe topologique K plongé dans X. Cette description, qui a eu le malheur d'aller à l'encontre du "goût du jour" et de ce fait semble impubliable, a néanmoins servi (et sert encore) comme un guide précieux dans mes réflexions ultérieures, notamment dans le contexte de la géométrie algébrique absolue de caractéristique nulle.

Le cas où (X,K) est une "carte" 2-dimensionnelle, i.e. où les composantes connexes de X K sont des 2-cellules ouvertes (et où de plus K est muni d'un ensemble fini S de "sommets", tel que les composantes connexes de K§ soient des 1-cellules ouvertes) attire progressivement mon attention dans les années suivantes.

La catégorie isotopique de ces cartes admet une description algébrique particulièrement simple, via l'ensemble des "repères" (ou "drapeaux" ou "biarcs") associés à la carte, qui se trouve naturellement muni d'une structure d'ensemble à groupe d'opérateurs, sous le groupe

$$\underline{C}_2 = < \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 | \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0\sigma_2)^2 = 1 >,$$

que j'appelle le *groupe cartographique* (non orienté) de dimension 2. Il admet comme sous-groupe d'indice 2 le *groupe cartographique orienté* engendré par les produits en nombre pair des générateurs, qui peut aussi se décrire comme

$$\underline{C}_2^+ = < \rho_s, \rho_f, \sigma | \rho_s\rho_f = \sigma, \sigma^2 = 1 >,$$

(avec

$$\rho_s = \sigma_2\sigma_1, \quad \rho_f = \sigma_1\sigma_0, \quad \sigma = \sigma_0\sigma_2 = \sigma_2\sigma_0,$$

opérations de *rotation élémentaire* d'un repère autour d'un sommet, d'une face et d'une arête respectivement). Il y a un dictionnaire parfait entre la situation topologique des cartes compactes, resp. cartes compactes orientées, d'une part, et les ensembles finis à groupe d'opérateurs $\underline{C}_2$ resp. $\underline{C}_2^+$ de l'autre, dictionnaire dont l'existence était d'ailleurs plus ou moins connue, mais jamais énoncée avec la précision nécessaire, ni développée tant soit peu. Ce travail de fondements est fait avec le soin qu'il mérite dans un excellent travail de DEA, fait en commun par Jean Malgoire et Christine Voisin en 1976.

Cette réflexion prend soudain une dimension nouvelle, avec cette remarque simple que le groupe $\underline{C}_2^+$ peut s'interpréter comme un quotient du groupe fondamental d'une sphère orientée privée de trois points, numérotés 0, 1, 2, les opérations ρ_s, σ, ρ_f s'interprétant comme les lacets autour de ces points, satisfaisant la relation familière

$$l_0 l_1 l_2 = 1,$$

alors que la relation supplémentaire $\sigma^2 = 1$ i.e. $l_1^2 = 1$ signifie qu'on s'intéresse au quotient du groupe fondamental correspondant à un indice de ramification imposé 2 au point 1, qui classifie donc les revêtements de la sphère, ramifiés au plus en les points 0, 1, 2, avec une ramification égale à 1 ou 2 en les points au dessus de

1. Ainsi, les cartes orientées compactes forment une catégorie isotopique équivalente à celle de ces revêtements, soumis de plus à la condition supplémentaire d'être des revêtements finis. Prenant maintenant comme sphère de référence la sphère de Riemann, ou droite projective complexe, rigidifiée par les trois points 0, 1 et ∞ (ce dernier remplaçant donc 2), et se rappelant que tout revêtement ramifié fini d'une courbe algébrique complexe hérite lui-même d'une structure de courbe algébrique complexe, on aboutit à cette constatation, qui huit ans après me paraît encore toujours aussi extraordinaire : *toute carte orientée "finie" se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe !* Mieux encore, comme la droite projective complexe est définie sur le corps de base absolue $\mathbf{Q}$, ainsi que les points de ramification admis, les courbes algébriques obtenues sont définies non seulement sur $\mathbf{C}$, mais sur la clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$. Quant à la carte de départ, elle se retrouve sur la courbe algébrique, comme image inverse du segment réel $[0,1]$ (où 0 est considéré comme un sommet, et 1 comme milieu d'une "arête pliée" ayant 1 comme centre), lequel constitue dans la sphère de Riemann la "2-carte orientée universelle"[2]. Les points de la courbe algébrique X au dessus de 0, de 1 et de ∞ ne sont autres que les sommets, et les "centres" des arêtes et des faces respectivement de la carte (X,K), et les ordres des sommets et des faces ne sont autres que les multiplicités des zéros et des pôles de la fonction rationnelle (définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$) sur X, exprimant sa projection structurale vers $\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$.

Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est retrouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable ([2]). Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffonné sur un bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple

[2]Il y a une description analogue des cartes finies non orientées, éventuellement avec bord, en termes de courbes algébriques *réelles*, plus précisément de revêtement de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{R}}$ ramifié seulement en 0, 1, ∞, la surface à bord associée à un tel revêtement étant $X(\mathbf{C})/\tau$, où τ est la conjugaison complexe. La carte non orientée "universelle" est ici le disque, ou hémisphère supérieur de la sphère de Riemann, muni comme précédemment du 1-complexe plongé $K=[0,1]$.

parfaitement explicite. A un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus. S'agissant ici de cartes sphériques, donnant nécessairement naissance à des courbes de genre 0 (qui ne fournissent donc pas des "modules"), on peut dire que la courbe en question est "épinglée" dès qu'on fixe trois de ses points, par exemple trois sommets de la carte, ou plus généralement trois centres de facettes (sommets, arêtes ou faces) – dès lors l'application structurale $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$ peut s'interpréter comme une fonction rationnelle

$$f(z) = P(z)/Q(z) \in \mathbf{C}(z)$$

bien déterminée, quotient de deux polynômes bien déterminés premiers entre eux avec Q unitaire, satisfaisant à des conditions algébriques qui traduisent notamment le fait que f soit non ramifié en dehors des valeurs 0, 1, ∞, et qui impliquent que les coefficients de ces polynômes sont des *nombres algébriques* ; donc leurs zéros sont des nombres algébriques, qui représentent respectivement les sommets et les centres des faces de la carte envisagée.

Revenant au cas général, les cartes finies s'interprétant comme des revêtements sur $\overline{\mathbf{Q}}$ d'une courbe algébrique définie sur le corps premier $\mathbf{Q}$ lui-même, il en résulte que le groupe de Galois Γ de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$ opère sur la catégorie de ces cartes de façon naturelle. Par exemple, l'opération d'un automorphisme $\gamma \in \Gamma$ sur une carte sphérique donnée par la fonction rationnelle ci-dessus, est obtenue en appliquant aux coefficients des polynômes P, Q. Voici donc ce mystérieux groupe Γ intervenir comme agent transformateur sur des formes topologico-combinatoires de la nature la plus élémentaire qui soit, amenant à se poser des questions comme : telles cartes orientées données sont-elles "conjuguées", ou : quelles exactement sont les conjuguées de telle carte orientée donnée ? (il y en a, visiblement, un nombre fini seulement).

J'ai traité quelques cas concrets (pour des revêtements de bas degrés) par des expédients divers, J. Malgoire en a traité quelques autres – je doute qu'il y ait une méthode uniforme permettant d'y répondre à coups d'ordinateurs. Ma réflexion très vite s'est engagée dans une direction plus conceptuelle, pour arriver à appréhender la nature de cette action de Γ. On s'aperçoit d'emblée que grosso modo cette action est exprimée par une certaine action "extérieure" de Γ sur le compactifié profini du groupe cartographique orienté $\underline{C}_2^+$, et cette action à son tour est déduite par passage au quotient de l'action extérieure canonique de Γ sur le groupe fondamental profini $\hat{\pi}_{0,3}$ de $(U_{0,3\overline{\mathbf{Q}}})$, où $U_{0,3}$ désigne la courbe-type de genre 0 sur le corps premier $\mathbf{Q}$, privée de trois points. C'est ainsi que mon attention s'est portée vers ce que j'ai appelé depuis la *"géométrie algébrique anabélienne"*, dont le point de départ est justement une étude (pour le moment limitée à la caractéristique zéro) de l'action de groupes de Galois "absolus" (notamment les groupes $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, où K est une extension de type fini du corps premier) sur des groupes fondamentaux géométriques (profinis) de variétés algébriques (définies sur K), et plus particulièrement (rompant avec une tradition bien enracinée) des groupes fondamentaux qui sont très éloignés des groupes abéliens (et que pour cette raison je nomme *"anabéliens"*). Parmi ces groupes, et très proche du groupe $\hat{\pi}_{0,3}$, il y a le compactifié profini du groupe modulaire $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$, dont le quotient par le centre ± 1 contient le précédent comme sous-groupe de congruence mod 2, et peut s'interpréter d'ailleurs également comme groupe "cartographique" orienté, savoir celui qui classifie les cartes orientées *triangulées* (i.e. celles dont les faces sont des triangles ou des monogones).

Toute carte finie orientée donne lieu à une courbe algébrique projective et lisse définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, et il se pose alors immédiatement la question : quelles sont les courbes algébriques sur $\overline{\mathbf{Q}}$ obtenues ainsi – les obtiendrait-on toutes, qui sait ? En termes plus savants, serait-il vrai que toute courbe algébrique projective et lisse définie sur un corps de nombres interviendrait comme une "courbe modulaire" possible pour paramétriser les courbes elliptiques munies d'une rigidification convenable ? Une telle supposition avait l'air à tel point dingue que j'étais presque gêné de la soumettre aux compétences en la matière. Deligne consulté trouvait la supposition dingue en effet, mais sans avoir un contre-exemple dans ses manches. Moins d'un an après, au Congrès International de Helsinki, le mathématicien soviétique Bielyi annonce justement ce résultat, avec une démonstration d'une simplicité déconcertante tenant en deux petites pages d'une lettre de Deligne – jamais sans doute un résultat profond et déroutant ne fut démontré en si peu de lignes !

Sous la forme où l'énonce Bielyi, son résultat dit essentiellement que *toute courbe algébrique définie sur un corps de nombres peut s'obtenir comme revêtement* *de la droite projective ramifié seulement en les points 0, 1,* ∞. Ce résultat semble être passé plus ou moins inaperçu. Pourtant, il m'apparaît d'une portée considérable. Pour moi, son message essentiel a été qu'*il y a une identité profonde entre la combinatoire des cartes finies d'une part, et la géométrie des courbes algébriques définies sur des corps de nombres, de l'autre*. Ce résultat profond, joint à l'interprétation algébrico-géométrique des cartes finies, ouvre la porte sur un monde nouveau, inexploré – et à portée de main de tous, qui passent sans le voir.

C'est près de trois ans plus tard seulement, voyant que décidément les vastes horizons qui s'ouvrent là ne faisaient rien tressaillir en aucun de mes élèves, ni même chez aucun des trois ou quatre collègues de haut vol auxquels j'ai eu l'occasion d'en parler de façon circonstanciée, que je fais un premier voyage de prospection de ce "monde nouveau", de janvier à juin 1981. Ce premier jet se matérialise en un paquet de quelques 1300 pages manuscrites, baptisées "La Longue Marche 'a travers la théorie de Galois". Il s'agit avant tout d'un effort de compréhension des relations entre groupes de Galois "arithmétiques" et groupes fondamentaux profinis "géométriques". Assez vite, il s'oriente vers un travail de formulation calculatoire de l'opération de Gal($\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$) sur $\hat{p}i_{0,3}$, et dans un stade ultérieur, sur le groupe légèrement plus gros Sl($\hat{2}, \mathbf{Z}$), qui donne lieu à un formalisme plus élégant et plus efficace. C'est au cours de ce travail aussi (mais développé dans des notes distinctes) qu'apparaît le thème central de la géométrie algébrique anabélienne, qui est de reconstituer certaines variétés X dites "anabéliennes" sur un corps absolu K à partir de leur groupe fondamental mixte, extension de Gal($\overline{K}/K$) par $\pi_1(X_{\overline{K}})$; c'est alors que se dégage la "conjecture fondamentale de la géométrie algébrique anabélienne", proche des conjectures de Mordell et de Tate que vient de démontrer Faltings ([3]). C'est là aussi que s'amorcent une première réflexion sur les groupes de Teichmüller, et les premières intuitions sur la structure multiple de la "tour de Teichmüller" – les multiplicités modulaires ouvertes $M_{g,nu}$ apparaissant par ailleurs comme les premiers exemples importants, en dimension > 1, de variétés (ou plutôt, de multiplicités) qui semblent bien mériter l'appellation "anabélienne". Vers la fin de cette période de réflexion, celle-ci m'apparaît comme une réflexion fondamentale sur une théorie alors encore dans les limbes, pour laquelle l'appellation *"Théorie de Galois-Teichmüller"* me semble plus appropriée que "théorie de Galois" que j'avais d'abord donnée à mes notes.

Ce n'est pas le lieu ici de donner un aperçu plus circonstancié de cet ensemble de questions, intuitions, idées – y compris des résultats palpables, certes. Le plus important me semble celui signalé en passant au par. 2, savoir la fidélité de l'action extérieure de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (et de ses sous-groupes ouverts) sur $\hat{\pi}_{0,3}$, et plus généralement (si je me rappelle bien) sur le groupe fondamental de toute courbe algébrique "anabélienne" (i.e. dont le genre g et le "nombre de trous" ν satisfont l'inégalité $2g + \nu \geq 3$, i.e. telle que $\chi(X) < 0$) définie sur une extension finie de $\mathbf{Q}$. Ce résultat peut être considéré comme essentiellement équivalent au théorème de Bielyi – c'est la première manifestation concrète, par un énoncé mathématique précis, du "message" dont il a été question plus haut.

Je voudrais terminer cet aperçu rapide par quelques mots de commentaire sur la richesse vraiment inimaginable d'un groupe anabélien typique comme le groupe $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ – sans doute le groupe discret infini le plus remarquable qu'on ait rencontré, qui apparaît sous une multiplicité d'avatars (dont certains ont été effleurés dans le présent rapport), et qui du point de vue de la théorie de Galois-Teichmüller peut être considéré comme la "pierre de construction" fondamentale de la "tour de Teichmüller". L'élément de structure de $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ qui me fascine avant tout, est bien sûr l'action extérieure du groupe de Galois Γ sur le compactifié profini. Par le théorème de Bielyi, prenant les compactifiés profinis de sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$, et l'action extérieure induite (quitte à passer également à un sous-groupe ouvert de Γ), *on trouve essentiellement les groupes fondamentaux de toutes les courbes algébriques* (pas nécessairement compactes) *définis sur des corps de nombres K, et l'action extérieure de* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *dessus* – du moins est-il vrai que tout tel groupe fondamental apparaît comme quotient d'un des premiers groupes[3]. Tenant compte du "yoga anabélien" (qui reste conjectural), disant qu'une courbe algébrique anabélienne sur un corps de nombres K (extension finie de $\mathbf{Q}$) est connue à isomorphisme près quand on connaît son groupe fondamental mixte (ou ce qui revient au même, l'action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur son groupe fondamental profini géométrique), on peut donc dire que *toutes les courbes algébriques définies*

[3]En fait, il s'agit de quotients de nature particulièrement triviale, par des sous-groupes abéliens produits de "modules de Tate" $\hat{\mathbf{Z}}(1)$, correspondant à des "groupes-lacets" autour de points à l'infini.

sur des corps de nombres sont "contenues" dans le compactifié profini $\widehat{\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})}$, *et dans la connaissance d'un certain sous-groupe* Γ *du groupe des automorphismes extérieurs de ce dernier !* Passant aux abélianisés des groupes fondamentaux précédents, on voit notamment que toutes les représentations abéliennes ℓ-adiques chères à Tate et consorts, définies par des jacobiennes et jacobiennes généralisées de courbes algébriques définies sur des corps de nombres, sont contenues dans cette seule action de Γ sur le groupe profini anabélien $\widehat{\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})}$! ([4])

Il en est qui, face à cela, se contentent de hausser les épaules d'un air désabusé et de parier qu'il n'y a rien à tirer de tout cela, sauf des rêves. Ils oublient, ou ignorent, que notre science, et toute science, serait bien peu de chose, si depuis ses origines elle n'avait été nourrie des rêves et des visions de ceux qui s'y adonnent avec passion.

4. Polyèdres réguliers sur les corps finis

Dès le début de ma réflexion sur les cartes bidimensionnelles, je me suis intéressé plus particulièrement aux cartes dites *"régulières"*, c'est-à-dire celles dont le groupe des automorphismes opère transitivement (et de ce fait, de façon simplement transitive) sur l'ensemble des repères. Dans le cas orienté et en termes de l'interprétation algébrico-géométrique du paragraphe précédent, ce sont les cartes qui correspondent 'a un revêtement *galoisien* de la droite projective. Très vite aussi, et d'es avant même qu'apparaisse le lien avec la géométrie algébrique, il apparaît nécessaire aussi de ne pas exclure les cartes infinies, qui interviennent notamment de façon naturelle comme revêtements universels des cartes finies. Il apparaît (comme conséquence immédiate du "dictionnaire" des cartes, étendu au cas des cartes pas nécessairement finies) que pour tout couple d'entiers naturels $p,q \geq 1$, il existe à isomorphisme (non unique) près une carte 1-*connexe* et une seule qui soit de type (p,q) i.e. dont tous les sommets soient d'ordre p et toutes les faces d'ordre q, et cette carte est une carte régulière. Elle se trouve épinglée par le choix d'un repère, et son groupe des automorphismes est alors canoniquement isomorphe au quotient du groupe cartographique (resp. du groupe cartographique orienté, dans le cas orienté) par les relations supplémentaires

$$\rho_s^p = \rho_f^q = 1.$$

Le cas où ce groupe est fini est le cas "pythagoricien" des cartes régulières sphériques, le cas où il est infini donne les pavages réguliers du plan euclidien ou du plan hyperbolique[4]. Le lien de la théorie combinatoire avec la théorie "conforme" des pavages réguliers du plan hyperbolique était pressenti, avant qu'apparaisse celui des cartes finies avec les revêtements finis de la droite projective. Une fois ce lien compris, il devient évident qu'il doit s'étendre également aux cartes infinies (régulières ou non) : *toute carte finie ou non, se réalise canoniquement sur une surface conforme* (compacte si et seulement si la carte est finie), *en tant que revêtement ramifié de la droite projective complexe, ramifié seulement en les points 0, 1,* ∞. La seule difficulté ici était de mettre au point le dictionnaire entre cartes topologiques et ensembles à opérateurs, qui posait quelques problèmes conceptuels dans le cas infini, à commencer par la notion même de "carte topologique". Il apparaît nécessaire notamment, tant par raison de cohérence interne du dictionnaire, que pour ne pas laisser échapper certains cas intéressants de cartes infinies, de ne pas exclure des sommets et des faces d'ordre infini. Ce travail de fondements a été fait également par J. Malgoire et C. Voisin, sur la lancée de leur premier travail sur les cartes finies, et leur théorie fournit en effet tout ce qu'on était en droit d'attendre (et même plus...).

C'est en 1977 et 1978, parallèlement à deux cours de C4 sur la géométrie du cube et sur celle de l'icosaèdre, que j'ai commencé à m'intéresser aux polyèdres réguliers, qui m'apparaissent alors comme des "réalisations géométriques" particulièrement concrètes de cartes combinatoires, les sommets, arêtes et faces étant réalisés respectivement comme des points, des droites et des plans dans un espace affine tridimensionnel convenable, avec respect des relations d'incidence. Cette notion de réalisation géométrique d'une carte combinatoire garde un sens sur un corps de base, et même sur un anneau de base arbitraire. Elle garde également un sens pour les polyèdres réguliers de dimension quelconque, en remplaçant le

[4]Dans ces énoncés, il y a lieu de ne pas exclure le cas où p, q peuvent prendre la valeur $+\infty$, qu'on rencontre notamment de façon très naturelle comme pavages associés à certains polyèdres réguliers infinis, cf. plus bas.

groupe cartographique $\underline{C}_2$ par une variante n-dimensionnelle $\underline{C}_n$ convenable. Le cas $n = 1$, i.e. la théorie des polygones réguliers en caractéristique quelconque, fait l'objet d'un cours de DEA en 1977/78, et fait apparaître déjà quelques phénomènes nouveaux, comme aussi l'utilité de travailler non pas dans un espace ambiant affine (ici le plan affine), mais dans un espace *projectif*. Ceci est dû notamment au fait que dans certaines caractéristiques (et notamment en caractéristique 2) le centre d'un polyèdre régulier est rejeté à l'infini. D'autre part, le contexte projectif, contrairement au contexte affine, permet de développer avec aisance un formalisme de dualité pour les polyèdres réguliers, correspondant au formalisme de dualité des cartes combinatoires ou topologiques (où le rôle des sommets et des faces, dans le cas $n = 2$ disons, se trouve interchangé). Il se trouve que pour tout polyèdre régulier projectif, on peut définir un hyperplan canonique associé, qui joue le rôle d'un hyperplan à l'infini canonique, et permet de considérer le polyèdre donné comme un polyèdre régulier affine.

L'extension de la théorie des polyèdres réguliers (et plus généralement, de toutes sortes de configurations géométrico-combinatoires, y compris les systèmes de racines...) du corps de base **R** ou **C** vers un anneau de base général, me semble d'une portée comparable, dans cette partie de la géométrie, à l'extension analogue qui a eu lieu depuis le début du siècle en géométrie algébrique, ou depuis une vingtaine d'années en topologie[5], avec l'introduction du langage des schémas et celui des topos. Ma réflexion sporadique sur cette question, pendant quelques années, s'est bornée à dégager quelques principes de base simples, en attachant d'abord mon attention au cas des polyèdres réguliers épinglés, ce qui réduit à un minimum le bagage conceptuel nécessaire, et élimine pratiquement les questions de rationalité tant soit peu délicates. Pour un tel polyèdre, on trouve une base (ou repère) canonique de l'espace affine ou projectif ambiant, de telle façon que les opérations du groupe cartographique $\underline{C}_n$, engendré par les réflexions fondamentales σ_i ($0 \leq i \leq n$), s'y écrivent par des formules universelles, en termes de n paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, qui géométriquement s'interprètent comme les doubles des cosinus des "angles fondamentaux" du polyèdre. Le polyèdre se reconstitue 'a partir de cette

[5]En écrivant cela, je suis conscient que rares sont les topologues, encore aujourd'hui, qui se rendent compte de cet élargissement conceptuel et technique de la topologie, et des ressources qu'elle offre.

action, et du drapeau affine ou projectif associé à la base choisie, en transformant ce drapeau par tous les éléments du groupe engendré par les réflexions fondamentales. Ainsi le n-polyèdre épinglé "universel" est-il défini canoniquement sur l'anneau de polynômes à n indéterminées

$$\mathbf{Z}[\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_n],$$

ses spécialisations sur des corps de base arbitraires k (via des valeurs $\alpha_i \in k$ données aux indéterminées $\underline{\alpha}_i$) donnant des polyèdres réguliers correspondant à des types combinatoires divers. Dans ce jeu, il n'est pas question de se borner à des polyèdres réguliers finis, ni même à des polyèdres réguliers dont les facettes soient d'ordre fini, i.e. pour lesquels les param'etres α_i soient des racines d'équations "semicyclotomiques" convenables, exprimant que les "angles fondamentaux" (dans le cas où le corps de base est $\mathbf{R}$) sont commensurables à 2π. Déjà quand $n = 1$, le polygone régulier peut-être le plus intéressant de tous (moralement celui du polygone régulier à un seul côté !) est celui qui correspond à $\alpha = 2$, donnant lieu à une conique circonscrite parabolique, i.e. tangente à la droite à l'infini. Le cas fini est celui où le groupe engendré par les réflexions fondamentales, qui est aussi le groupe des automorphismes du polyèdre régulier envisagé, est fini. Dans le cas du corps de base $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$, ce qui revient au même), et pour $n = 2$, les cas finis sont bien connus depuis l'antiquité – ce qui n'exclut pas que le point de vue schématique y fasse apparaître des charmes nouveaux ; on peut dire cependant qu'en spécialisant l'icosaèdre (par exemple) sur des corps de base finis de caractéristique arbitraire, c'est toujours un icosaèdre, avec sa combinatoire propre et le même groupe d'automorphismes simple d'ordre 60 qu'on obtient. La même remarque s'applique aux polyèdres réguliers finis de dimension supérieure, étudiés de façon systématique dans deux beaux livres de Coxeter. La situation est toute autre si on part d'un polyèdre régulier *infini*, sur un corps tel que $\mathbf{Q}$ disons, et qu'on le "spécialise" sur le corps premier $\mathbf{F}_p$ (opération bien définie pour tout p sauf un nombre fini de nombres premiers). Il est clair que tout polyèdre régulier sur un corps fini est fini – *on trouve donc une infinité de polyèdres réguliers finis pour p variable, dont le type combinatoire*, ou ce qui revient au même, le groupe des automorphismes, *varie de façon "arithmétique"* avec p. Cette situation est particulièrement intrigante dans le cas où $n = 2$, où on dispose de la relation explicitée au paragraphe précédent entre 2-cartes combinatoires, et courbes algébriques définies sur des corps de nombres. Dans ce cas, un polyèdre régulier infini défini sur un corps infini quelconque (et de ce fait sur une sous-**Z**-algèbre à deux générateurs de celui-ci) donne donc naissance à une infinité de courbes algébriques définies sur des corps de nombres, qui sont des revêtements galoisiens ramifiés seulement en 0, 1, ∞ de la droite projective standard. Le cas optimum est bien sûr celui o'u on part du 2-polyèdre régulier universel, ou plutôt de celui qui s'en déduit par passage au corps des fractions $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ de son anneau de base. Ceci soulève une foule de questions nouvelles, aussi bien des vagues que des précises, dont je n'ai eu le loisir encore d'examiner de plus près aucune – je ne citerai que celle-ci : quelles sont exactement les 2-cartes régulières finies, ou ce qui revient au même, les groupes quotients finis du groupe 2-cartographique qui proviennent de 2-polyèdres réguliers sur des corps finis[6] ? Les obtiendrait-on toutes, et si oui : comment ?

Ces réflexions font apparaître en pleine lumière ce fait, qui pour moi était entièrement inattendu, que la théorie des polyèdres réguliers finis, déjà dans le cas de la dimension $n = 2$, est infiniment plus riche, et notamment donne infiniment plus de formes combinatoires différentes, dans le cas où on admet des corps de base de caractéristique non nulle, que dans le cas considéré jusqu'à présent où les corps de base étaient restreints à **R**, ou à la rigueur **C** (dans le cas de ce que Coxeter appelle des "polyèdres réguliers complexes", et que je préfère appeler "pseudo-polyèdres réguliers définis sur **C**")[7]. De plus, il semble que cet élargissement du point de vue doive aussi jeter un jour nouveau sur les cas déjà connus. Ainsi, examinant l'un après l'autre les polyèdres pythagoriciens, j'ai vu se répéter à chaque fois un même petit miracle, que j'ai appelé le *paradigme combinatoire* du polyèdre envisagé. Vaguement parlant, il peut se décrire en disant que lorsqu'on regarde la

[6]Ce sont les mêmes d'ailleurs que ceux provenant de polyèdres réguliers sur des corps quelconques, ou algébriquement clos, comme on voit par des arguments de spécialisation standard.

[7]Les pseudo-polyèdres épinglés se décrivent de la même façon que les polyèdres épinglés, avec cette seule différence que les réflexions fondamentales σ_i $(0 \le i \le n)$ sont remplacées ici par des *pseudo-réflexions* (que Coxeter suppose de plus d'ordre fini, comme il se borne aux structures combinatoires finies). Cela conduit simplement à introduire pour chacun des σ_i un invariant numérique supplémentaire β_i, de sorte que le n-pseudo-polyèdre universel peut se définir encore sur un anneau de polynômes à coefficients entiers, en les $n+(n+1)$ variables $\underline{\alpha}_i$ $(1 \le i \le n)$ et $\underline{\beta}_j$ $(1 \le j \le n)$

spécialisation du polyèdre dans la caractéristique, ou l'une des caractéristiques, la (ou les) plus singulière(s) (ce sont les caractéristiques 2 et 5 pour l'icosaèdre, la caractéristique 2 pour l'octaèdre), on lit, sur le polyèdre régulier géométrique sur le corps fini concerné ($\mathbf{F}_2$ et $\mathbf{F}_5$ pour l'icosaèdre, $\mathbf{F}_2$ pour l'octaèdre) une description particulièrement élégante (et inattendue) de la combinatoire du polyèdre. Il m'a semblé même entrevoir là un principe d'une grande généralité, que j'ai cru retrouver notamment dans une réflexion ultérieure sur la combinatoire du système des 27 droites d'une surface cubique, et ses relations avec le système de racines E_7. Qu'un tel principe existe bel et bien et qu'on réussisse même à le dégager de son manteau de brumes, ou qu'il recule au fur et à mesure où on le poursuit et qu'il finisse par s'évanouir comme une Fata Morgana, j'y trouve pour ma part une force de motivation, une fascination peu communes, comme celle du rêve peut-être. Nul doute que de suivre un tel appel de l'informulé, de l'informe qui cherche forme, d'un entrevu élusif qui semble prendre plaisir à la fois à se dérober et à se manifester – ne peut que mener loin, alors que nul ne pourrait prédire, où…

Pourtant, pris par d'autres intérêts et tâches, je n'ai pas jusqu'à présent suivi cet appel, ni rencontré personne d'autre qui ait voulu l'entendre, et encore moins le suivre. Mis à part quelques digressions vers d'autres types de structures géométrico-combinatoires, mon travail ici encore s'est borné à un premier travail de dégrossissage et d'intendance, sur lequel il est inutile de m'étendre plus ici ([5]). Le seul point qui peut-être mérite encore mention, est l'existence et l'unicité de l'hyperquadrique circonscrite à un n-polyèdre régulier donné, dont l'équation peut s'expliciter par des formules simples en termes des paramètres fondamentaux α_i[8]. Le cas qui m'intéresse le plus est celui où $n = 2$, et le temps me semble mûr pour réécrire une version nouvelle, en style moderne, du classique livre de Klein sur l'icosaèdre et les autres polyèdres pythagoriciens. Écrire un tel exposé sur les 2-polyèdres réguliers serait une magnifique occasion pour un jeune chercheur de se familiariser aussi bien avec la géométrie des polyèdres et leurs liens avec les géométries sphérique, euclidienne, hyperbolique, et avec les courbes algébriques,

[8]Un résultat analogue vaut pour les pseudo-polyèdres. Il semblerait que les "caractéristiques exceptionnelles" dont il a été question plus haut, pour les spécialisations d'un polyèdre donné, sont celles pour lesquelles l'hyperquadrique circonscrite est, soit dégénérée, soit tangente à l'hyperplan à l'infini.

qu'avec le langage et les techniques de base de la géométrie algébrique moderne. S'en trouvera-t-il un un jour pour saisir cette occasion ?

5. Haro sur la topologie dite "générale", et réflexions heuristiques vers une topologie dite "modérée"

Je voudrais maintenant dire quelques mots sur certaines réflexions qui m'ont fait comprendre le besoin de fondements nouveaux pour la topologie "géométrique", dans une direction toute différente de la notion de topos, et indépendante même des besoins de la géométrie algébrique dite "abstraite" (sur des corps et anneaux de base généraux). Le problème de départ, qui a commencé à m'intriguer il doit y avoir une quinzaine d'années déjà, était celui de définir une théorie de "dévissage" des structures stratifiées, pour les reconstituer, par un procédé canonique, à partir de "pièces de construction" canoniquement déduites de la structure donnée. Probablement l'exemple principal qui m'avait alors amené à cette question était celui de la stratification canonique d'une variété algébrique singulière (ou d'un espace analytique complexe ou réel singulier) par la suite décroissante de ses "lieux singuliers" successifs. Mais je devais sans doute pressentir déjà l'ubiquité des structures stratifiées dans pratiquement tous les domaines de la géométrie (que d'autres sûrement ont vu clairement bien avant moi). Depuis, j'ai vu apparaître de telles structures, notamment, dans toute situation de "modules" pour des objets géométriques susceptibles non seulement de variation continue, mais en même temps de phénomènes de "dégénérescence" (ou de "spécialisation") – les strates correspondant alors aux divers "niveaux de singularité" (ou aux types combinatoires associés) pour les objets considérés. Les multiplicités modulaires compactifiées $\widehat{M}_{g,\nu}$ de Mumford-Deligne pour les courbes algébriques stables de type (g,ν) en fournissent un exemple typique et particulièrement inspirant, qui a joué un rôle de motivation important dans la reprise de ma réflexion sur les structures stratifiées, de décembre 1981 à janvier 1982. La géométrie bidimensionnelle fournit de nombreux autres exemples de telles structures stratifiées modulaires, qui toutes d'ailleurs (sauf expédients de rigidification), apparaissent comme des "multiplicités" plutôt que comme des espaces ou variétés au sens ordinaire (les points de ces multiplicités pouvant avoir des groupes d'automorphismes non triviaux).

Parmi les objets de géométrie bidimensionnelle donnant lieu à de telles structures modulaires stratifiées de dimension arbitraire, voire de dimension infinie, je citerai les polygones (euclidiens, ou sphériques, ou hyperboliques), les systèmes de droites dans un plan (projectif disons), les systèmes de "pseudodroites" dans un plan projectif topologique, ou les courbes immergées à croisements normaux plus générales, dans une surface (compacte disons) donnée.

L'exemple non trivial le plus simple d'une structure stratifiée s'obtient en considérant une paire (X, Y) d'un espace X et d'un sous-espace fermé Y, en faisant une hypothèse d'équisingularité convenable de X le long de Y, et en supposant de plus (pour fixer les idées) que les deux strates Y et $X \backslash Y$ sont des *variétés* topologiques. L'idée naïve, dans une telle situation, est de prendre "le" voisinage tubulaire T de Y dans X, dont le bord ∂T devrait être une variété lisse également, fibrée à fibres lisses et compactes sur Y, T lui-même s'identifiant au fibré en cônes sur ∂T associé au fibré précédent. Posant

$$U = X \backslash \operatorname{Int}(T),$$

on trouve une variété à bord dont le bord est canoniquement isomorphe à celui de T. Ceci dit, les "pièces de construction" prévues sont la variété à bord U (compacte si X était compact, et qui remplace en la précisant la strate "ouverte" $X \backslash Y$) et la variété (sans bord) Y, avec comme structure supplémentaire les reliant l'application dite de "recollement"

$$f : \partial U \longrightarrow Y$$

qui est une fibration propre et lisse. La situation de départ (X, Y) se reconstitue à partir de $(U, Y, f : \partial U \longrightarrow Y)$ par la formule

$$X \cong U \amalg_{\partial U} Y$$

(somme amalgamée sous ∂U, s'envoyant dans U et Y via l'inclusion resp. l'application de recollement).

Cette vision naïve se heurte immédiatement à des difficultés diverses. La première est la nature un peu vague de la notion même de voisinage tubulaire, qui ne prend un sens tant soit peu précis qu'en présence de structures plus rigides que la seule structure topologique, telles la structure "linéaire par morceaux", ou riemanienne (plus généralement, d'espace avec fonction distance) ; l'ennui ici est que dans aucun des exemples auxquels on pense spontanément, on ne dispose naturellement d'une structure de ce type —- tout au mieux d'une classe d'équivalence de telles structures, permettant de rigidifier un tantinet la situation. Si par ailleurs on admet qu'on a pu trouver un expédient pour trouver un voisinage tubulaire ayant les propriétés voulues, qui de plus soit unique modulo un automorphisme (topologique, disons) de la situation, automorphisme qui de plus respecte la structure fibrée fournie par la fonction de recollement, il reste la difficulté de la non-canonicité des choix faits, l'automorphisme en question n'étant visiblement pas unique, quoi qu'on fasse pour le "normaliser". L'idée ici, pour rendre canonique ce qui ne l'est pas, est de travailler systématiquement dans des *"catégories isotopiques"* associées aux catégories de nature topologique s'introduisant dans ces questions (telle la catégorie des paires admissibles (X,Y) et des homéomorphismes de telles paires, etc.), en gardant les mêmes objets, mais en prenant comme "morphismes" les classes d'isotopie (dans un sens dicté sans ambiguïté par le contexte) d'isomorphismes (voire même, de morphismes plus généraux que des isomorphismes). Cette idée, qui est reprise avec succès dans la thèse de Yves Ladegaillerie notamment (cf. début du par. 3), m'a servi de façon systématique dans toutes mes réflexions ultérieures de topologie combinatoire, quand il s'est agi de formuler avec précision des théorèmes de traduction de situations topologiques, en termes de situations combinatoires. Dans la situation actuelle, mon espoir était d'arriver à formuler (et à prouver !) un théorème d'équivalence entre deux catégories isotopiques convenables, l'une étant la catégorie des "paires admissibles" (X,Y), l'autre celle des "triples admissibles" (U,Y,f) où Y est une variété, U une variété à bord, et $f : \partial U \longrightarrow Y$ une fibration propre et lisse. De plus, bien sûr, j'espérais qu'un tel énoncé, modulo un travail de nature essentiellement algébrique, s'étendrait de lui-même en un énoncé plus sophistiqué, s'appliquant aux structures stratifiées générales.

Très vite, il apparaissait qu'il ne pouvait être question d'obtenir un énoncé aussi ambitieux dans le contexte des espaces topologiques, à cause des sempiternels phénomènes de "sauvagerie". Déjà quand X lui-même est une variété et Y réduit à un point, on se bute à la difficulté que le cône sur un espace compact Z peut être une variété en son sommet, sans que Z soit homéomorphe à une sphère, ni même soit une variété. Il était clair également que les contextes de structures plus rigides qui existaient à l'époque, tel le contexte "linéaire par morceaux", étaient également inadéquats – une des raisons rédhibitoires communes étant qu'ils ne permettaient pas, pour une paire (U, S) d'un "espace" U et d'un sous-espace fermé S, et une application de recollement $f : S \longrightarrow T$, de construire la somme amalgamée correspondante. C'est quelques années plus tard que j'étais informé de la théorie de Hironaka des ensembles qu'il appelle, je crois, "semi-analytiques" (réels), qui satisfont à certaines des conditions de stabilité essentielles (sans doute même à toutes) nécessaires au développement d'un contexte utilisable de "topologie modérée". Du coup cela relance une réflexion sur les fondements d'une telle topologie, dont le besoin m'apparaît de plus en plus clairement.

Avec un recul d'une dizaine d'années, je dirais aujourd'hui, à ce sujet, que la *"topologie générale" a été développée* (dans les années trente et quarante) *par des analystes et pour les besoins de l'analyse*, non pour les besoins de la topologie proprement dite, c'est-à-dire l'étude des *propriétés topologiques de formes géométriques* diverses. Ce caractère inadéquat des fondements de la topologie se manifeste dès les débuts, par des "faux problèmes" (au point de vue au moins de l'intuition topologique des formes) comme celle de "l'invariance du domaine", alors même que la solution de ce dernier par Brouwer l'amène à introduire des idées géométriques nouvelles importantes. Aujourd'hui encore, comme aux temps héroïques où on voyait pour la première fois et avec inquiétude des courbes remplir allègrement des carrés et des cubes, quand on se propose de faire de la géométrie topologique dans le contexte technique des espaces topologiques, on se heurte à chaque pas à des difficultés parasites tenant aux phénomènes sauvages. Ainsi, en dehors de cas de (très) basse dimension, il ne peut guère être possible, pour un espace donné X (une variété compacte disons), d'étudier le type d'homotopie (disons) du groupe des automorphismes de X, ou de l'espace des plongements, ou immersions etc. de X dans quelque autre espace Y – alors qu'on sent que ces invariants devraient faire partie de l'arsenal des invariants essentiels associés à X, ou au couple (X, Y), etc., au même titre que l'espace fonctionnel $\mathrm{Hom}(X, Y)$ familier en topologie homotopique. Les topologues éludent la difficulté, sans l'affronter, en se rabattant sur des contextes voisins du contexte topologique et moins marqués de sauvagerie que lui, comme les variétés différentiables, les espaces PL (linéaires par morceaux), etc., dont visiblement aucun n'est "bon", i.e. n'est stable par les opérations topologiques les plus évidentes, telles les opérations de contraction-recollement (sans même passer à des opérations du type $X \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ qui font quitter le paradis des "espaces" de dimension finie). C'est là une façon de tourner autour du pot ! Cette situation, comme tant de fois déjà dans l'histoire de notre science, met simplement en évidence cette inertie quasi-insurmontable de l'esprit, alourdi par des conditionnements d'un poids considérable, pour porter un regard sur une question de fondements, donc sur le contexte même dans lequel on vit, respire, travaille – plutôt que de l'accepter comme un donné immuable. C'est à cause de cette inertie sûrement qu'il a fallu des millénaires pour qu'une idée ou une réalité aussi enfantine que le zéro, un groupe, ou une forme topologique, trouve droit de cité en mathématiques. C'est par elle aussi, sûrement, que le carcan de la topologie générale continue à être traîné patiemment par des générations de topologues, la "sauvagerie" étant portée comme une fatalité inéluctable qui serait enracinée dans la nature même des choses.

Mon approche vers des fondements possibles d'une topologie modérée a été une approche axiomatique. Plutôt que de déclarer (chose qui serait parfaitement raisonnable certes) que les "espaces modérés" cherchés ne sont autres (disons) que les espaces semianalytiques de Hironaka, et de développer dès lors dans ce contexte l'arsenal des constructions et notions familières en topologie, plus celles certes qui jusqu'à présent n'avaient pu être développées et pour cause, j'ai préféré m'attacher à dégager ce qui, parmi les propriétés géométriques de la notion d'ensemble semianalytique dans un espace $\mathbf{R}^n$, permet d'utiliser ceux-ci comme "modèles" locaux d'une notion *"d'espace modéré"* (en l'occurrence, semianalytique), et ce qui (on l'espère !) rend cette notion d'espace modéré suffisamment souple pour pouvoir bel et bien servir de notion de base pour *une* "topologie modérée" propre à exprimer avec aisance l'intuition topologique des formes. Ainsi, une fois le travail de fondements qui s'impose accompli, il apparaîtra non *une* "théorie modérée", mais une vaste infinité, allant de la plus stricte de toutes, celle des "espaces $\overline{\mathbf{Q}}_r$-algébriques par morceaux" (où $\overline{\mathbf{Q}}_r = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$), vers celle qui (à tort ou à raison) m'apparaît comme probablement la plus vaste, savoir celle des "espaces analytiques réels par morceaux" (ou semianalytiques dans la terminologie de Hironaka). Parmi les théorèmes de fondements envisagés dans mon programme, il y a un *théorème de comparaison* qui, vaguement parlant, dira qu'on *trouvera essentiellement les mêmes catégories isotopiques* (ou même ∞-isotopiques), quelle que soit la théorie modérée avec laquelle on travaille ([6]). De façon plus précise, il s'agit de mettre le doigt sur un système d'axiomes suffisamment riche, pour impliquer (entre bien autres choses !) que si on a deux théories modérées T , T' avec T plus fine que T' (dans un sens évident), et si X, Y sont deux espaces T'-modérés, qui définissent aussi des espaces T-modérés correspondants, l'application canonique

$$\underline{\mathrm{Isom}}_T(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_{T'}(X,Y)$$

induit une bijection sur l'ensemble des composantes connexes (ce qui impliquera que la catégorie isotopique des T-espaces est équivalente à celle des T'-espaces), et même, est une équivalence d'homotopie (ce qui signifie qu'on a même une équivalence pour les catégories "∞-isotopiques", plus fines que les catégories isotopiques où on ne retient que le π_0 des espaces d'isomorphismes). Ici les Isom peuvent être définis de façon évidente comme ensembles semisimpliciaux par exemple, pour pouvoir donner un sens précis à l'énoncé précédent. Des énoncés analogues devraient être vrais, en remplaçant les "espaces" Isom par d'autres espaces d'applications, soumises à des conditions géométriques standard, comme celle d'être des plongements, des immersions, lisses, étales, des fibrations etc. Également, on s'attend à avoir des énoncés analogues, où X, Y sont remplacés par des systèmes d'espaces modérés, tels ceux qui interviennent dans une théorie de dévissage des structures stratifiées – de telle sorte que dans un sens technique précis, cette théorie de dévissage sera, elle aussi, essentiellement indépendante de la théorie modérée choisie pour l'exprimer.

Le premier test décisif pour un bon système d'axiomes sur une notion de "partie modérée de $\mathbf{R}^n$" me semble la possibilité de prouver de tels théorèmes de comparaison. Je me suis contenté jusqu'à présent de dégager un système d'axiomes plausible provisoire, sans avoir aucune assurance qu'il ne faudra y rajouter d'autres axiomes, que seul un "travail sur pièces" sans doute permettra de faire apparaître. Le plus fort des axiomes que j'ai introduits, et celui sans doute dont la vérification dans les cas d'espèce est (ou sera) la plus délicate, est un *axiome de triangulabilité* (modérée, il va sans dire) d'une partie modérée de $\mathbf{R}^n$. Je ne me suis pas essayé à prouver en termes de ces seuls axiomes le théorème de comparaison, j'ai eu l'impression néanmoins (à tort ou à raison encore !) que cette démonstration, qu'elle nécessite ou non l'introduction de quelque axiome supplémentaire, ne présentera pas de grosse difficulté technique. Il est bien possible que les difficultés au niveau technique, pour le développement de fondements satisfaisants de la topologie modérée, y inclus une théorie de dévissage des structures modérées stratifiées, soient déjà pour l'essentiel concentrées dans les axiomes, et par suite essentiellement surmontées dès à présent par des théorèmes de triangulabilité à la Lojasiewicz et Hironaka. Ce qui fait défaut, encore une fois, n'est nullement la virtuosité technique des mathématiciens, parfois impressionnante, mais l'audace (ou simplement l'innocence…) pour s'affranchir d'un contexte familier accepté par un consensus sans failles…

Les avantages d'une approche axiomatique vers des fondements de la topologie modérée me semblent assez évidents. Ainsi, pour considérer une variété algébrique complexe, ou l'ensemble des points réels d'une variété algébrique définie sur $\mathbf{R}$, comme un espace modéré, il semble préférable de travailler dans la théorie "$\mathbf{R}$-algébrique par morceaux", voire même la théorie $\overline{\mathbf{Q}}_r$-algébrique par morceaux (où $\overline{\mathbf{Q}}_r = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$) quand il s'agit de variétés définies sur des corps de nombres, etc. L'introduction d'un sous corps $K \subset \mathbf{R}$ associé à la théorie T (formé des points de R qui sont T*-modérés*, i.e. tels que l'ensemble uniponctuel correspondant le soit) permet d'introduire pour tout point x d'un espace modéré X un corps résiduel $k(x)$, qui est une sous-extension de $\mathbf{R}/K$ algébriquement fermée dans $\mathbf{R}$, et de degré de transcendance fini sur K (majoré par la dimension topologique de X). Quand le degré de transcendance de $\mathbf{R}$ sur K est infini, on trouve une notion de degré de transcendance (ou "dimension") d'un point d'un espace modéré, voisin de la notion familière en géométrie algébrique. De telles notions sont absentes dans la topologie modérée "semianalytique", qui par contre apparaît comme le contexte topologique tout indiqué pour inclure les espaces analytiques réels et complexes.

Parmi les premiers théorèmes auxquels on s'attend dans une topologie modérée comme je l'entrevois, mis à part les théorèmes de comparaison, sont les énoncés qui établissent, dans un sens convenable, l'existence et l'unicité "du" voisinage tubulaire d'un sous-espace modéré fermé dans un espace modéré (compact pour simplifier), les façons concrètes de l'obtenir (par exemple à partir de toute application modérée $X \longrightarrow \mathbf{R}^+$ admettant Y comme ensemble de ses zéros), la description de son "bord" (alors qu'en général ce n'est nullement une variété à bord !) ∂T, qui admet dans T un voisinage isomorphe au produit de T par un segment, etc. Moyennant des hypothèses d'equisingularité convenables, on s'attend à ce que T soit muni, de façon essentiellement unique, d'une structure de fibré localement trivial sur Y, admettant ∂T comme sous-fibré. C'est là un des points les moins clairs dans l'intuition provisoire que j'ai de la situation, alors que la classe d'homotopie de l'application structurale prévue $T \longrightarrow Y$ a un sens évident, indépendamment de toute hypothèse d'équisingularité, comme inverse homotopique de l'application d'inclusion $Y \longrightarrow T$, qui doit être un homotopisme. Une façon d'obtenir a posteriori une telle structure serait via l'hypothétique équivalence de catégories isotopiques envisagée au début, en tenant compte du fait que le foncteur $(U, Y, f) \mapsto (X, Y)$ est défini de façon évidente, indépendamment de toute théorie de voisinages tubulaires.

On dira sans doute, non sans quelque raison, que tout cela n'est peut-être que rêves, qui s'évanouiront en fumée dès qu'on s'essayera à un travail circonstancié, voire même dès avant en face de certains faits connus ou bien évidents qui m'auraient échappé. Certes, seul un travail sur pièces permettra de décanter le juste du faux et de connaître la substance véritable. La seule chose dans tout cela qui ne fait pour moi l'objet d'aucun doute, c'est la nécessité d'un tel travail de fondements, en d'autres termes, la nature artificielle des fondements actuels de la topologie, et des difficultés que ceux-ci soulèvent à chaque pas. Il est bien possible par contre que la formulation que je donne à une théorie de dévissage des structures stratifiées, comme un théorème d'équivalence de catégories isotopiques (voire même ∞-isotopiques) convenables, soit trop optimiste. Je devrais ajouter pourtant que je n'ai guère de doutes non plus que la théorie de ces dévissages que j'ai développée il y a deux ans, alors qu'elle reste partiellement heuristique, exprime bel et bien une réalité tout ce qu'il y a de palpable. Dans une partie de mon travail, faute de pouvoir disposer d'un contexte "modéré" tout fait, et pour avoir néanmoins des énoncés précis et démontrables, j'ai été amené à postuler sur la structure stratifiée de départ des structures supplémentaires tout ce qu'il y a de plausibles, dans la nature de la donnée de rétractions locales notamment, qui d'es lors permettent bel et bien la construction d'un système canonique d'espaces, paramétré par l'ensemble ordonné des "drapeaux" $\mathrm{Drap}(I)$ de l'ensemble ordonné I indexant les strates, ces espaces jouant le rôle des espaces (U, Y) de tantôt, reliés entre eux par des applications de plongements et de fibrations propres, qui permettent de reconstituer de façon tout aussi canonique la structure stratifiée de départ, y compris ces "structures supplémentaires" ([7]). Le seul ennui, c'est que ces dernières semblent un élément de structure superfétatoire, qui n'est nullement une donnée dans les situations géométriques courantes, par exemple pour l'espace modulaire compact $\widehat{M}_{g,\nu}$ avec sa "stratification à l'infini" canonique, donnée par le diviseur à croisements normaux de Mumford-Deligne. Une autre difficulté, moins sérieuse sans doute, c'est que le soi-disant "espace" modulaire est en fait une *multiplicité* – techniquement, cela s'exprime surtout par la nécessité de remplacer l'ensemble d'indices I pour les strates par une *catégorie* (essentiellement finie) d'indices, en l'occurrence celle des "graphes MD", qui "paramètrent" les "structures combinatoires" possibles d'une courbe stable de type (g, ν). Ceci dit, je puis affirmer que la théorie de dévissage générale, spécialement développée sous la pression du besoin de *cette* cause, s'est révélée en effet un guide précieux, conduisant à une compréhension progressive, d'une cohérence sans failles, de certains aspects essentiels de la tour de Teichmüller (c'est à dire, essentiellement de la "structure à l'infini" des groupes de Teichmüller ordinaires). C'est cette approche qui m'a conduit finalement, dans les mois suivants, vers le principe d'une construction purement combinatoire de la tour des groupoïdes de Teichmüller, dans l'esprit esquissé plus haut (cf. par. 2).

Un autre test de cohérence satisfaisant provient du point de vue "topossique". En effet, mon intérêt pour les multiplicités modulaires provenant avant tout de leur sens algébrico-géométrique et arithmétique, c'est aux multiplicités modulaires *algébriques*, sur le corps de base absolu $\mathbf{Q}$, que je me suis intéressé prioritairement, et à un "dévissage" à l'infini de leurs groupes fondamentaux géométriques (i.e. des groupes de Teichmüller *profinis*) qui soit compatible avec les opérations naturelles de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Cela semblait exclure d'emblée la possibilité de me référer à une hypothétique théorie de dévissage de structures stratifiées dans un contexte de "topologie modérée" (ou même de topologie ordinaire, cahin-caha), si ce n'est comme fil conducteur entièrement heuristique. Dès lors se posait la question de traduire, dans le contexte des topos (en l'occurrence les topos étales) intervenant dans la situation, la théorie de dévissage à laquelle j'étais parvenu dans un contexte tout différent – avec la tâche supplémentaire, par la suite, de dégager un théorème de comparaison général, sur le modèle des théorèmes bien connus, pour comparer les invariants obtenus (notamment les types d'homotopie de voisinages tubulaires divers) dans le cadre transcendant, et dans le cadre schématique. J'ai pu me convaincre qu'un tel formalisme de dévissage avait bel et bien un sens dans le contexte (dit "abstrait" !) des topos généraux, ou tout au moins des topos noethériens (comme ceux qui s'introduisent ici), via une notion convenable de *voisinage tubulaire canonique d'un sous-topos* dans un topos ambiant. Une fois cette notion acquise, avec certaines propriétés formelles simples, la description du "dévissage" d'un topos stratifié est considérablement plus simple même dans ce cadre, que dans le cadre topologique (modéré). Il est vrai que là aussi il y a un travail de fondements à faire, notamment pour la notion même de voisinage tubulaire d'un sous-topos – et il est étonnant d'ailleurs que ce travail (pour autant que je sache) n'ait toujours pas été fait, c'est-à-dire que personne (depuis plus de vingt ans qu'il existe un contexte de topologie étale) ne semble en avoir eu besoin ; un signe sûrement que la compréhension de la structure topologique des schémas n'a pas tellement progressé depuis le travail d'Artin-Mazur…

Une fois accompli le double travail de dégrossissage (plus ou moins heuristique) autour de la notion de dévissage d'un espace ou d'un topos stratifié, qui a été une étape cruciale dans ma compréhension des multiplicités modulaires, il est d'ailleurs apparu que pour les besoins de ces dernières, on peut sans doute court-circuiter au moins une bonne partie de cette théorie par des arguments géométriques directs. Il n'en reste pas moins que pour moi, le formalisme de dévissage auquel je suis parvenu a fait ses preuves d'utilité et de cohérence, indépendamment de toute question sur les fondements les plus adéquats qui permettent de lui donner tout son sens.

6. "Théories différentielles" (à la Nash) et "théories modérées"

Un des théorèmes de fondements de topologie (modérée) les plus intéressants qu'il faudrait développer, serait un théorème de "dévissage" (encore !) d'une application modérée propre d'espaces modérés,

$$f : X \longrightarrow Y,$$

via une filtration décroissante de Y par des sous-espaces modérés fermés Y^i, tels que au-dessus des "strates ouvertes" Y^i/Y^{i-1} de cette filtration, f induise une fibration localement triviale (du point de vue modéré, il va sans dire). Un tel énoncé devrait encore se généraliser et se préciser de diverses façons, notamment en demandant l'existence d'un dévissage analogue *simultané*, pour X et une famille finie donnée de sous-espaces (modérés) fermés de X. Également la notion même de fibration localement triviale au sens modéré peut se renforcer considérablement, en tenant compte du fait que les strates ouvertes U_i sont *mieux* que des espaces à structure modérée purement locale, du fait qu'elles sont obtenues comme différence de deux espaces modérés, compacts si Y était compact. Entre la notion d'espace modéré compact (qui se réalise comme un des "modèles" de départ dans un $\mathbf{R}^n$) et celle d'espace "localement modéré" (localement compact) qui s'en déduit de façon assez évidente, il y a une notion un peu plus délicate d'*espace "globalement modéré"* X, obtenu comme différence $\hat{X} \backslash Y$ de deux espaces modérés compacts, étant entendu qu'on ne distingue pas entre l'espace défini par une paire $(\hat{X}, Y)$, et celui défini par une paire $(\hat{X}', Y')$ qui s'en déduit par une application modérée (nécessairement propre)

$$g : \hat{X}' \longrightarrow \hat{X}$$

induisant une bijection $g^{-1}(X) \xrightarrow{\sim} X$, en prenant $Y' = g^{-1}(Y)$. L'exemple naturel le plus intéressant peut-être est celui où on part d'un schéma séparé de type fini sur $\mathbf{C}$ ou sur $\mathbf{R}$, en prenant pour X l'ensemble de ses points complexes ou réels, qui hérite d'une structure modérée globale à l'aide des compactifications schématiques (qui existent d'après Nagata) du schéma de départ. Cette notion d'espace globalement modéré est associée à une notion d'*application globalement modérée*, qui permet à son tour de renforcer en conséquence la notion de fibration localement triviale, dans l'énoncé d'un théorème de dévissage pour une application $f : X \longrightarrow Y$ (pas nécessairement propre maintenant) dans le contexte des espaces globalement modérés.

J'ai été informé l'été dernier par Zoghman Mebkhout qu'un théorème de dévissage dans cet esprit avait été obtenu récemment dans le contexte des espaces analytiques réels et/ou complexes, avec des Y^i qui, cette fois, sont des sous-espaces analytiques de Y. Ce résultat rend plausible qu'on dispose dès à présent de moyens techniques suffisamment puissants pour démontrer également un théorème de dévissage dans le contexte modéré, plus général en apparence, mais probablement moins ardu.

C'est le contexte d'une topologie modérée également qui devrait permettre, il me semble, de formuler avec précision un principe général très sûr que j'utilise depuis longtemps dans un grand nombre de situations géométriques, que j'appelle le *"principe des choix anodins"* – aussi utile que vague d'apparence ! Il dit, lorsque pour les besoins d'une construction quelconque d'un objet géométrique en termes d'autres, on est amené à faire un certain nombre de choix arbitraires en cours de route, de façon donc que l'objet obtenu dépend en apparence de ces choix et est donc entâché d'un défaut de canonicité, que ce défaut est sérieux en effet (et pour être levé demande une analyse plus soigneuse de la situation, des notions utilisées, des données introduites etc.) chaque fois que l'un au moins de ces choix s'effectue dans un "espace" qui n'est pas "contractile" i.e. dont le π_0 *ou* un des invariants supérieurs π_i est non trivial ; que ce défaut est par contre apparent seulement, que la construction est "essentiellement canonique" et n'entraînera pas vraiment d'ennuis, chaque fois que les choix faits sont tous "anodins", i.e. s'effectuent dans des espaces *contractiles*. Quand on essaye dans les cas d'espèce de cerner de plus près ce principe, il semble qu'on tombe à chaque fois sur la notion de "catégories ∞-isotopiques" exprimant une situation donnée, plus fines que les catégories isotopiques (= 0-isotopiques) plus naïves, obtenues en ne retenant que les π_0 des espaces d'isomorphismes qui s'introduisent dans la situation, alors que le point de vue ∞-isotopique retient tout leur type d'homotopie. Par exemple, le point de vue isotopique naïf pour les surfaces compactes à bord orientées de type (g,ν) est "bon" (sans boomerang caché !) exactement dans les cas que j'appelle "anabéliens" (et que Thurston appelle "hyperboliques") i.e. distincts de (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0) – qui sont aussi les cas justement ou le groupe des automorphismes de la surface a une composante neutre *contractile*. Dans les autres cas, sauf le cas (0, 0) de la sphère sans trou, il suffit de travailler avec les catégories 1-isotopiques pour exprimer de façon satisfaisante par voie algébrique les faits géométrico-topologiques essentiels, vu que ladite composante connexe est alors un $K(\pi,1)$. Travailler dans une catégorie 1-isotopique revient d'ailleurs à travailler dans une bicatégorie, i.e. avec des $\mathrm{Hom}(X,Y)$ qui sont (non plus des ensembles discrets comme dans le point de vue 0-isotopique, mais) des groupoïdes (dont les π_0 ne sont autres que les Hom 0-isotopiques). C'est la description en termes purement algébriques de cette bicatégorie qui est faite dans la dernière partie de la thèse de Yves Ladegaillerie (cf. par. 3).

Si je me suis étendu ici plus longuement sur le thème des fondements de la topologie modérée, qui n'est nullement un de ceux auxquels je compte me consacrer prioritairement dans les années qui viennent, c'est sans doute justement que je sens qu'il y a là d'autant plus une cause qui a besoin d'être plaidée, ou plutôt : un travail d'une grande actualité qui a besoin de bras ! Comme naguère pour de nouveaux fondements de la géométrie algébrique, ce ne sont pas des plaidoyers qui surmontent l'inertie des habitudes acquises, mais un travail tenace, méticuleux, sans doute de longue haleine, et porteur au jour le jour de moissons éloquentes.

Je voudrais encore dire quelques mots sur une réflexion plus ancienne (fin des années 60 ?), très proche de celle dont il vient d'être question, inspirée par les idées de Nash, qui m'avaient beaucoup frappé. Au lieu ici de définir axiomatiquement une notion de "théorie modérée" via la donnée de "partie modérée de $\mathbf{R}^n$" satisfaisant à certaines conditions (de stabilité surtout), c'est à une axiomatisation de la notion de "variété lisse" et du formalisme différentiable sur de telles variétés que j'en avais, via la donnée, pour chaque entier naturel n, d'un sous-anneau A_n de l'anneau des germes de fonctions réelles à l'origine dans $\mathbf{R}^n$. Ce sont les fonctions qui seront admises pour exprimer les "changements de carte" pour la notion de A-variété correspondante, et il s'est agi de dégager tout d'abord un système d'axiomes sur le système $A=(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui assure à cette notion de variété une souplesse comparable à celle de variété C^∞, ou analytique réelle (ou de Nash). Suivant le type de constructions familières qu'on tient à pouvoir effectuer dans le contexte des A-variétés, le système d'axiomes pertinent est plus ou moins réduit, ou riche. Très peu suffit s'il s'agit seulement de développer le formalisme différentiel, avec la construction de fibrés de jets, les complexes de De Rham etc. Si on veut un énoncé du type "quasi-fini implique fini" (pour une application au voisinage d'un point), qui est apparu comme un énoncé-clef dans la théorie locale des espaces analytiques, il faut un axiome de stabilité de nature plus délicate, dans le "Vorbereitungssatz" de Weierstrass[9]. Dans d'autres questions, un axiome de stabilité par prolongement analytique (dans $\mathbf{C}^n$) apparaît nécessaire. L'axiome le plus draconien que j'ai été amené à introduire, lui aussi un axiome de stabilité, concerne l'intégration des systèmes de Pfaff, assurant que certains groupes de Lie, voire tous, sont des A-variétés. Dans tout ceci, *j'ai pris soin de ne pas supposer que les A_n soient des $\mathbf{R}$-algèbres*, donc une fonction constante sur une A-variété n'est "admissible" que si sa valeur appartient à un certain sous-corps K de $\mathbf{R}$ (c'est, si on veut, A_0). Ce sous-corps peut fort bien être $\mathbf{Q}$, ou sa fermeture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_r$ dans $\mathbf{R}$, ou toute autre sous-extension de $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$, de préférence même de degré de transcendance fini, ou du moins dénombrable, sur $\mathbf{Q}$. Cela permet par exemple, comme tantôt pour les espaces modérés, de faire correspondre à tout point x d'une variété (de type A) un corps résiduel $k(x)$, qui est une sous-extension de $\mathbf{R}/K$. Un fait qui me semble important ici, c'est que même sous sa forme la plus forte, le système d'axiomes n'implique *pas* qu'on doive avoir $K=\mathbf{R}$. Plus précisément, du fait que *tous* les axiomes sont des axiomes de stabilité, il résulte que pour un ensemble S donné de germes de fonctions analytiques réelles à l'origine (dans divers espaces $\mathbf{R}^n$), il existe une plus petite théorie A pour laquelle ces germes sont admissibles, et que celle-ci est "dénombrable" i.e. les A_n sont dénombrables, dès que S l'est. A fortiori, K est alors dénombrable, i.e. de degré de transcendance dénombrable sur $\mathbf{Q}$.

L'idée est ici d'introduire, par le biais de cette axiomatique, une notion de fonction (analytique réelle) *"élémentaire"*, ou plutôt, toute une hiérarchie de telles notions. Pour une fonction de 0 variables, i.e. une constante, cette notion donne celle de "constante élémentaire", incluant notamment (dans le cas de l'axiomatique la plus forte) des constantes telles que π, e et une multitude d'autres, en prenant des valeurs de fonctions admissibles (telles l'exponentielle, le logarithme etc.) pour des systèmes de valeurs "admissibles" de l'argument. On sent que la relation en-

[9]Il peut paraître plus simple de dire que les anneaux (locaux) A_n sont *henséliens*, ce qui est équivalent. Mais il n'est nullement clair a priori sous cette dernière forme que la condition en question est dans la nature d'une condition de stabilité, circonstance importante comme il apparaîtra dans les réflexions qui suivent.

tre le système $A = (A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et le corps de rationalité K correspondant doit être très étroite, du moins pour des A qui peuvent être engendrés par un "système de générateurs" S fini – mais il est 'a craindre que la moindre question intéressante qu'on pourrait se poser sur cette situation soit actuellement hors de portée ([1]).

Ces réflexions anciennes ont repris quelque actualité pour moi avec ma réflexion ultérieure sur les théories modérées. Il me semble en effet qu'il est possible d'associer de façon naturelle à une "théorie différentiable" A une théorie modérée T (ayant sans doute même corps de constantes), de telle façon que toute A-variété soit automatiquement munie d'une structure T -modérée, et inversement que pour tout espace T-modéré compact X, on puisse trouver une partie fermée modérée rare Y dans X, telle que $X\backslash Y$ provienne d'une A-variété, et que de plus cette structure de A-variété soit unique tout au moins dans le sens suivant : deux telles structures coïncident dans le complémentaire d'une partie modérée rare $Y' \supset Y$ de X. La théorie de dévissage des structures modérées stratifiées (dont il a été question au par. précédent), dans le cas des strates lisses, devrait d'ailleurs soulever des questions beaucoup plus précises encore de comparaison des structures modérées avec des structures de type différentiable (ou plutôt, **R**-analytique). Je soupçonne que le type d'axiomatisation proposé ici pour la notion de "théorie différentiable" fournirait un cadre naturel pour formuler de telles questions avec toute la précision et la généralité souhaitables.

7. À la Poursuite des Champs

Depuis le mois de mars de l'an dernier, donc depuis près d'un an, la plus grande partie de mon énergie a été consacrée à un travail de réflexion sur les *fondements de l'algèbre (co)homologique non commutative*, ou ce qui revient au même, finalement, de *l'algèbre homotopique*. Ces réflexions se sont concrétisées par un volumineux paquet de notes dactylographiées, destinées à former le premier volume (actuellement en cours d'achèvement) d'un ouvrage en deux volumes à paraître chez Hermann, sous le titre commun *"À la Poursuite des Champs"*. Je prévois actuellement (après des élargissements successifs du propos initial) que le manuscrit de l'ensemble des deux volumes, que j'espère achever en cours d'année pour ne plus avoir à y revenir, fera dans les 1500 pages dactylographiées. Ces deux volumes d'ailleurs sont pour moi les premiers d'une série plus vaste, sous le titre commun *"Réflexions Mathématiques"*, où je compte développer tant soit peu certains des thèmes esquissés dans le présent rapport.

Vu qu'il s'agit d'un travail en cours de rédaction, et même d'achèvement, dont le premier volume sans doute paraîtra cette année et contiendra une introduction circonstanciée, il est sans doute moins intéressant que je m'étende ici sur ce thème de réflexion, et je me contenterai donc d'en parler très brièvement. Ce travail me semble quelque peu marginal par rapport aux thèmes que je viens d'esquisser, et ne représente pas (il me semble) un véritable renouvellement d'optique ou d'approche par rapport à mes intérêts et ma vision mathématiques d'avant 1970. Si je m'y suis résolu soudain, c'est presque en désespoir de cause, alors que près de vingt ans se sont écoulés depuis que se sont posées en termes bien clairs un certain nombre de questions visiblement fondamentales, et mûres pour être menées à leur terme, sans que personne ne les voie, ou prenne la peine de les sonder. Aujourd'hui encore, les structures de base qui interviennent dans le point de vue homotopique en topologie, y compris même en algèbre homologique commutative, ne sont pas comprises, et à ma connaissance, après les travaux de Verdier, de Giraud et d'Illusie, sur ce thème (qui constituent autant de "coups d'envoi" attendant toujours une suite...) il n'y a pas eu d'effort dans ce sens. Je devrais faire exception sans doute pour le travail d'axiomatisation fait par Quillen sur la notion de catégorie de modèles, à la fin des années 60, et repris sous des variantes diverses par divers auteurs. Ce travail à l'époque, et maintenant encore, m'a beaucoup séduit et appris, tout en allant dans une direction assez différente de celle qui me tenait et tient à coeur. Il introduit certes des catégories dérivées dans divers contextes non commutatifs, mais sans entrer dans la question des structures internes essentielles d'une telle catégorie, laissée ouverte également dans le cas commutatif par Verdier, et après lui par Illusie. De même, la question de mettre le doigt sur les "coefficients" naturels pour un formalisme cohomologique non commutatif, au-delà des champs (qu'on devrait appeler 1-champs) étudiés dans le livre de Giraud, restait ouverte – ou plutôt, les intuitions riches et précises qui y répondent, puisées dans des exemples nombreux provenant de la géométrie algébrique notamment, attendent toujours un langage précis et souple pour leur donner forme.

Je reviens sur certains aspects de ces questions de fondements en 1975, à l'occasion (je crois me souvenir) d'une correspondance avec Larry Breen (trois lettres de cette correspondance seront reproduites en appendice au Chap. I du volume 1, "Histoires de Modèles", de la Poursuite des Champs). A ce moment apparaît l'intuition que les ∞-groupoïdes doivent constituer des modèles, particulièrement adéquats, pour les types d'homotopie, les n-groupoïdes correspondant aux types d'homotopie *tronqués* (avec $\pi_i = 0$ pour $i > n$). Cette même intuition, par des voies très différentes, a été retrouvée par Ronnie Brown à Bangor et certains de ses élèves, mais en utilisant une notion de ∞-groupoïde assez restrictive (qui, parmi les types d'homotopie 1-connexes, ne modélise que les produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane). C'est stimulé par une correspondance à bâtons rompus avec Ronnie Brown, que j'ai finalement repris une réflexion, commençant par un essai de définition d'une notion de ∞-groupoïde plus large (rebaptisé par la suite "champ en ∞-groupoïdes" ou simplement "champ", sous-entendu : sur le topos ponctuel), et qui de fil en aiguille m'a amené à la Poursuite des Champs. Le volume "Histoire de Modèles" y constitue d'ailleurs une digression entièrement imprévue par rapport au propos initial (les fameux champs étant provisoirement oubliés, et n'étant prévus réapparaître que vers les pages 1000 environ...).

Ce travail n'est pas entièrement isolé par rapport à mes intérêts plus récents. Par exemple, ma réflexion sur les multiplicités modulaires $\widehat{M}g,\nu$ et leur structure stratifiée a relancé une réflexion sur un théorème de Van Kampen de dimension > 1 (un des thèmes de prédilection également du groupe de Bangor), et a peut-être contribué à préparer le terrain pour le travail de plus grande envergure l'année d'après. Celui-ci rejoint également par moments une réflexion datant de la même année 1975 (ou l'année d'après) sur un "complexe de De Rham à puissances divisées", qui a fait l'objet de ma dernière conférence publique, à l'IHES en 1976, et dont le manuscrit, confié je ne me rappelle plus à qui après l'exposé, est d'ailleurs perdu. C'est au moment de cette réflexion que germe aussi l'intuition d'une "schématisation" des types d'homotopie, que sept ans après j'essaye de préciser dans un chapitre (particulièrement hypothétique) de l'Histoire de Modèles.

Le travail de réflexion entrepris dans la Poursuite des Champs est un peu comme une dette dont je m'acquitterais, vis-à-vis d'un passé scientifique où, pendant une quinzaine d'années (entre 1955 et 1970), le développement d'outils cohomologiques a été le Leitmotiv constant, dans mon travail de fondements de la géométrie algébrique. Si la reprise actuelle de ce thème-là a pris des dimensions inattendues, ce n'est pas cependant par piété pour un passé, mais à cause des nombreux imprévus faisant irruption sans cesse, en bousculant sans ménagement les plans et propos prévus – un peu comme dans un conte des mille et une nuits, où l'attention se trouve maintenue en haleine à travers vingt autres contes avant de connaître le fin mot du premier.

8. Digressions de géométrie bidimensionnelle

J'ai très peu parlé encore des réflexions plus terre-à-terre de géométrie topologique bidimensionelle, associées notamment à mes activités d'enseignant et celles dites de "direction de recherches". A plusieurs reprises, j'ai vu s'ouvrir devant moi de vastes et riches champs mûrs pour la moisson, sans que jamais je réussisse à communiquer cette vision, et l'étincelle qui l'accompagne, à un (ou une) de mes élèves, et à la faire déboucher sur une exploration commune, de plus ou moins longue haleine. A chaque fois jusqu'à aujourd'hui même, après une prospection de quelques jours ou quelques semaines, où je découvrais en éclaireur des richesses insoupçonnées au départ, le voyage tournait court, quand il devenait clair que je serais seul à le poursuivre. Des intérêts plus forts prenaient le pas alors sur un voyage qui, dès lors, apparaissait comme une digression, voire une dispersion, plutôt qu'une aventure poursuivie en commun.

Un de ces thèmes a été celui des polygones plans, centré autour des variétés modulaires qu'on peut leur associer. Une des surprises ici a été l'irruption de la géométrie algébrique dans un contexte qui m'en avait semblé bien éloigné. Ce genre de surprise, lié à l'ubiquité de la géométrie algébrique dans la géométrie tout court, s'est d'ailleurs répété à plusieurs reprises.

Un autre thème a été celui des courbes (notamment des cercles) immergés dans une surface, avec une attention particulière pour le cas "stable" où les points singuliers sont des points doubles ordinaires (et aussi celui, plus général, où les différentes branches en un point se croisent mutuellement), avec souvent l'hypothèse supplémentaire que l'immersion soit "cellulaire", i.e. donne naissance à une carte.

Une variante de situations de ce type est celle des immersions d'une surface à bord non vide, et en tout premier lieu d'un disque (qui m'avait été signalé par A'Campo il y a une dizaine d'années). Au delà de la question de diverses formulations combinatoires de telles situations, qui ne représente plus guère qu'un exercice de syntaxe, je me suis intéressé surtout à une vision dynamique des configurations possibles, avec le passage de l'une à l'autre par déformations continues, qui peuvent se décomposer en composées de deux types d'*opérations élémentaires* et leurs inverses, à savoir le *"balayage"* d'une branche de courbe par dessus un point double, et l'*effacement* ou *la création d'un bigône*. (La première de ces opérations joue également un rôle-clef dans une théorie "dynamique" des systèmes de pseudo-droites dans un plan projectif réel.) Une des premières questions qui se posent ici est celle de déterminer les différentes *classes d'immersions* d'un cercle ou d'un disque (disons) modulo ces opérations élémentaires; une autre, celle de voir quelles sont les immersions du bord du disque qui proviennent d'une immersion du disque, et dans quelle mesure les premières déterminent les secondes. Ici encore, il m'a semblé que c'est une étude systématique des variétés modulaires pertinentes (de dimension infinie en l'occurrence, à moins d'arriver à en donner une version purement combinatoire) qui devrait fournir le "focus" le plus efficace, nous forçant en quelque sorte à nous poser les questions les plus pertinentes. Malheureusement, la réflexion sur les questions même les plus évidentes et les plus terre-à-terre est restée à l'état embryonnaire. Comme seul résultat tangible, je peux signaler une théorie de "dévissage" canonique d'une immersion cellulaire stable du cercle dans une surface, en immersions "indécomposables", par "télescopage" de telles immersions. Je n'ai pas réussi malheureusement à voir se transformer mes lumières sur la question en un travail de stage de DEA, ni d'autres lumières (sur une description théorique complète, en termes de groupes fondamentaux de 1-complexes topologiques, des immersions d'une surface à bord qui prolongent une immersion donnée de son bord) en le démarrage d'une thèse de doctorat d'état…

Un troisième thème, poursuivi simultanément depuis trois ans à divers niveaux d'enseignement (depuis l'option pour étudiants de première année, jusqu'à trois thèses de troisième cycle actuellement poursuivies sur ce thème) porte sur la classification topologique-combinatoire des systèmes de droites ou pseudo-droites. Dans l'ensemble, la participation de mes élèves ici a été moins décevante qu'ailleurs, et j'ai eu le plaisir parfois d'apprendre par eux des choses intéressantes auxquelles je n'aurais pas songé. La réflexion commune, par la force des choses, s'est limitée cependant à un niveau très élémentaire. Dernièrement, j'ai finalement consacré un mois de réflexion intensive au développement d'une construction purement combinatoire d'une sorte de "surface modulaire" associée à un système de n pseudo-droites, qui classifie les différentes "positions relatives" possibles (stables ou non) d'une $(n+1)$-ième pseudo-droite par rapport au système donné, ou encore : les différentes "affinisations" possibles de ce système, par les différents choix possibles d'une "pseudo-droite à l'infini". J'ai l'impression d'avoir mis le doigt sur un objet remarquable, faisant apparaître un ordre imprévu dans des questions de classification qui jusqu'à présent apparaissaient assez chaotiques! Mais ce n'est pas le lieu dans le présent rapport de m'étendre plus à ce sujet.

Depuis 1977, dans toutes les questions (comme dans ces deux derniers thèmes que je viens d'évoquer) où interviennent des cartes bidimensionelles, la possibilité de les réaliser canoniquement sur une surface conforme, donc sur une courbe algébrique complexe dans le cas orienté compact, reste en filigrane constant dans ma réflexion. Dans pratiquement tous les cas (en fait, tous les cas sauf celui de certaines cartes sphériques avec "peu d'automorphismes") une telle réalisation conforme implique en fait une *métrique riemanienne canonique*, ou du moins, canonique à une constante multiplicative près. Ces nouveaux éléments de structure (sans même prendre en compte l'élément arithmétique, dont il a été question au par. 3) sont de nature à transformer profondément l'aspect initial des questions abordées, et les méthodes d'approche. Un début de familiarisation avec les belles idées de Thurston sur la construction de l'espace de Teichmüller, en termes d'un jeu très simple de chirurgie riemanienne hyperbolique, me confirme dans ce pressentiment. Malheureusement, le niveau de culture très modeste de presque tous les élèves qui ont travaillé avec moi pendant ces dix dernières années ne me permet pas d'aborder avec eux, ne serait-ce que par allusion, de telles possibilités, alors que l'assimilation d'un langage combinatoire minimum se heurte déjà, bien souvent, à des obstacles psychiques considérables. C'est pourquoi, à certains égards et de plus en plus ces dernières années, mes activités d'enseignant ont souvent agi comme un poids, plutôt que comme un stimulant pour le déploiement d'une réflexion géométrique tant soit peu avancée, ou seulement délicate.

9. Bilan d'une activité enseignante

L'occasion me semble propice ici de faire un bref bilan de mon activité enseignante depuis 1970, c'est-à-dire depuis que celle-ci s'effectue dans un cadre universitaire. Ce contact avec une réalité très différente a été pour moi riche en enseignements, d'une portée d'un tout autre ordre d'ailleurs que simplement pédagogique ou scientifique. Ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur ce sujet. J'ai dit aussi au début de ce rapport le rôle qu'a joué ce changement de milieu professionnel dans le renouvellement de mon approche des mathématiques, et celui de mes centres d'intérêt en mathématique. Si par contre je fais le bilan de mon activité enseignante au niveau de la recherche proprement dite, j'aboutis à un constat d'échec clair et net. Depuis plus de dix ans que cette activité se poursuit an par an au sein d'une même institution universitaire, je n'ai pas su, à aucun moment, y susciter un lieu où "il se passe quelque chose" – où quelque chose "passe", parmi un groupe si réduit soit-il de personnes, reliées par une aventure commune. A deux reprises, il est vrai, vers les années 74 à 76, j'ai eu le plaisir et le privilège de susciter chez un élève un travail d'envergure, poursuivi avec élan: chez Yves Ladegaillerie le travail signalé précédemment (par. 3) sur les questions d'isotopie en dimension 2, et chez Carlos Contou-Carrère (dont la passion mathématique n'avait pas attendu la rencontre avec moi pour éclore) un travail non publié sur les jacobiennes locales et globales sur des schémas de bases généraux (dont une partie a été annoncée dans une note aux CR). Ces deux cas mis à part, mon rôle s'est borné, au cours de ces dix ans, à transmettre tant bien que mal des rudiments du métier de mathématicien 49 à quelques vingt élèves au niveau de la recherche, ou tout au moins à ceux parmi eux qui ont persévéré suffisamment avec moi, réputé plus exigeant que d'autres, pour aboutir à un premier travail noir sur blanc acceptable (certaines fois aussi à un travail mieux qu'acceptable et plus qu'un seul travail, fait avec goût et jusqu'au bout). Vu la conjoncture, même parmi les rares qui ont persévéré, plus rares encore seront ceux qui auront l'occasion d'exercer ce métier, et par là, tout en gagnant leur pain, de l'approfondir.

10. Épilogue

Depuis l'an dernier, je sens qu'au cours de mon activité d'enseignant universitaire, j'ai appris tout ce que j'avais à en apprendre et enseigné tout ce que je peux y enseigner, et qu'elle a cessé d'être vraiment utile, à moi-même comme aux autres. M'obstiner sous ces conditions à la poursuivre encore me paraîtrait un gaspillage, tant de ressources humaines que de deniers publics. C'est pourquoi j'ai demandé mon détachement au CNRS (que j'avais quitté en 1959 comme directeur de recherches frais émoulu, pour entrer à l'IHES). Je sais d'ailleurs que la situation de l'emploi est serrée au CNRS comme ailleurs, que l'issue de ma demande est douteuse, et que si un poste m'y était attribué, ce serait au dépens d'un chercheur plus jeune qui resterait sans poste. Mais il est vrai aussi que cela libérerait mon poste à l'USTL au bénéfice d'un autre. C'est pourquoi je n'ai pas de scrupule à faire cette demande, et s'il le faut à revenir à la charge si elle n'est pas acceptée cette année.

En tout état de cause, cette demande aura été pour moi l'occasion d'écrire cette esquisse de programme, qui autrement sans doute n'aurait jamais vu le jour. J'ai essayée d'être bref sans être sybillin et aussi, après coup, d'en faciliter la lecture et de la rendre plus attrayante, en y adjoignant un sommaire. Si malgré cela elle peut paraître longue pour la circonstance, je m'en excuse. Elle me paraît courte pour son contenu, sachant que dix ans de travail ne seraient pas de trop pour aller jusqu'au bout du moindre des thèmes esquissés (à supposer qu'il y ait un "bout"...), et cent ans seraient peu pour le plus riche d'entre eux !

Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Celle-ci se manifeste notamment par une source d'inspiration commune, la géométrie des surfaces, présente dans tous ces thèmes, au premier plan le plus souvent. Cette source, par rapport à mon "passé" mathématique, représente un renouvellement, mais nullement une rupture. Plutôt, elle montre le chemin d'une approche nouvelle vers cette réalité encore mystérieuse, celle des *"motifs"*, qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé[10]. Cette fascination ne s'est nullement évanouie, elle

[10]Voir à ce sujet mes commentaires dans l'"Esquisse Thématique" de 1972 jointe au présent rapport, dans la rubrique terminale "divagations motiviques" (loc. cit. pages 17-18).

fait partie plutôt de celle du plus brûlant pour moi de tous les thèmes évoqués précédemment. Mais aujourd'hui je ne suis plus, comme naguère, le prisonnier volontaire de tâches interminables, qui si souvent m'avaient interdit de m'élancer dans l'inconnu, mathématique ou non. Le temps des *tâches* pour moi est révolu. Si l'âge m'a apporté quelque chose, c'est d'être plus léger.

Janvier 1984

Notes

1. L'expression "hors de porté" ici (et encore plus loin pour une question toute différente), que j'ai laissée passer en allant à l'encontre d'une réticence, me paraît décidément hâtive et sans fondement. J'ai pu constater déjà en d'autres occasions que lorsque des augures (ici moi-même !) déclarent d'un air entendu (ou dubitatif) que tel problème est "hors de portée", c'est là au fond une affirmation entièrement subjective. Elle signifie simplement, à part le fait que le problème est censé ne pas être résolu encore, que celui qui parle est à court d'idées sur la question, ou de façon plus précise sans doute, qu'il est devant elle sans sentiment ni entrain, qu'elle "ne lui fait rien" et qu'il n'a aucune envie de faire quelque chose avec elle – ce qui souvent est une raison suffisante pour vouloir en décourager autrui. Cela n'a pas empêché qu'à l'instar de M. de la Palisse, et au moment même de succomber, les belles et regrettées conjectures de Mordell, de Tate, de Chafarévitch étaient toujours réputées "hors de portée", les pauvres ! – D'ailleurs, dans les jours déjà qui ont suivi la rédaction du présent rapport, qui m'a remis en contact avec des questions dont je m'étais quelque peu éloigné au cours de l'année écoulée, je me suis aperçu d'une nouvelle propriété remarquable de l'action extérieure d'un groupe de Galois absolu sur le groupe fondamental d'une courbe algébrique, qui m'avait échappé jusqu'à présent et qui sans doute constitue pour le moins un nouveau pas en avant vers la formulation d'une caractérisation algébrique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Celle-ci, avec la "conjecture fondamentale" (mentionnée au par. 3 ci-dessous) apparaît à présent comme la principale question ouverte pour les fondements d'une "géométrie algébrique anabéli-

enne", laquelle depuis quelques années, représente (et de loin) mon plus fort centre d'intérêt en mathématiques.

2. Je puis faire exception pourtant d'un autre "fait", du temps où, vers l'âge de douze ans, j'étais interné au camp de concentration de Rieucros (près de Mende). C'est là que j'ai appris, par une détenue, Maria, qui me donnait des leçons particulières bénévoles, la définition du cercle. Celle-ci m'avait impressionné par sa simplicité et son évidence, alors que la propriété de "rotondité parfaite" du cercle m'apparaissait auparavant comme une réalité mystérieuse au-delà des mots. C'est à ce moment, je crois, que j'ai entrevu pour la première fois (sans bien sûr me le formuler en ces termes) la puissance créatrice d'une "bonne" définition mathématique, d'une *formulation* qui décrit l'essence. Aujourd'hui encore, il semble que la fascination qu'a exercé sur moi cette puissance-là n'a rien perdu de sa force.

3. Plus généralement, au-delà des variétés dites "anabéliennes" sur des corps de type fini, la géométrie algébrique anabélienne (telle qu'elle s'est dégagée il y a quelques années) amène à une description, en termes de groupes profinis uniquement, de la catégorie des schémas de type fini sur la base absolue $\mathbf{Q}$ (voire même $\mathbf{Q}$), et par là même, en principe, de la catégorie des schémas quelconques (par des passages à la limite convenables). Il s'agit donc d'une construction "qui fait semblant" d'ignorer les anneaux (tels que $\mathbf{Q}$, les algèbres de type fini sur $\mathbf{Q}$ etc.) et les équations algébriques qui servent traditionnellement à décrire les schémas, en travaillant directement avec leurs topos étales, exprimables en termes de systèmes de groupes profinis. Un grain de sel cependant : pour pouvoir espérer reconstituer un schéma (de type fini sur $\mathbf{Q}$ disons) à partir de son topos étale, qui est un invariant purement topologique, il convient de se placer, non dans la catégorie des schémas (de type fini sur $\mathbf{Q}$ en l'occurrence), mais dans celle qui s'en déduit par "localisation", en rendant inversibles les morphismes qui sont des "homéomorphismes universels", i.e. qui sont finis, radiciels et surjectifs. Le développement d'une telle traduction d'un "monde géométrique" (savoir celui des schémas, multiplicités schématiques etc.) en termes de "monde algébrique" (celui des groupes profinis, et systèmes de groupes profinis décrivant des

topos (dits "étales") convenables) peut être considéré comme un aboutissement ultime de la théorie de Galois, sans doute dans l'esprit même de Galois. La sempiternelle question "et pourquoi tout ça ?" me paraît avoir ni plus, ni moins de sens dans le cas de la géométrie algébrique anabélienne en train de naître, que pour la théorie de Galois au temps de Galois (ou même aujourd'hui, quand la question est posée par un étudiant accablé…) et de même pour le commentaire qui va généralement avec : "c'est bien général tout ça !".

4. On conçoit donc aisément qu'un groupe comme $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$, avec sa structure "arithmétique", soit une véritable machine à construire des représentations "motiviques" de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et de ses sous-groupes ouverts, et qu'on obtient ainsi, au moins en principe, toutes les représentations motiviques qui sont de poids 1, ou contenues dans un produit tensoriel de telles représentations (ce qui en fait déjà un bon paquet !). J'avais commencé en 1981 à expérimenter avec cette machine dans quelques cas d'espèce, obtenant diverses représentations remarquables de Γ dans des groupes $G(\hat{\mathbf{Z}})$, où G est un schéma en groupes (pas nécessairement réductif) sur $\mathbf{Z}$, en partant d'homomorphismes convenables
$$\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z}) \longrightarrow G_0(\mathbf{Z}),$$
où G_0 est un schéma en groupes sur $\mathbf{Z}$, et G étant construit à partir de là comme extension de G_0 par un schéma en groupes convenable. Dans le cas "tautologique" $G_0 = \mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$, on trouve pour G une extension remarquable de $\mathrm{Gl}(2)_{\mathbf{Z}}$ par un tore de dimension 2, avec une représentation motivique qui "coiffe" celles associées aux corps de classes des extensions $\mathbf{Q}(i)$ et $\mathbf{Q}(j)$ (comme par hasard, les "corps de multiplication complexe" des deux courbes elliptiques "anharmoniques"). Il y a là un principe de construction qui m'a semblé très général et très efficace, mais je n'ai pas eu (ou pris) le loisir de le dévisser et le suivre jusqu'au bout – c'est là un des nombreux "points chauds" dans le programme de fondements de géométrie algébrique anabélienne (ou de "théorie de Galois", version élargie) que je me propose de développer. A l'heure actuelle, et dans un ordre de priorité sans doute très provisoire, ces points sont:

a) Construction combinatoire de la Tour de Teichmüller.

b) Description du groupe des automorphismes de la compactification profinie de cette tour, et réflexion sur une caractérisation de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ comme sous-groupe de ce dernier.

c) La “machine à motifs” $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ et ses variantes.

d) Le dictionnaire anabélien, et la conjecture fondamentale (qui n’est peut-être pas si “hors de portée” que ça !). Parmi les points cruciaux de ce dictionnaire, je prévois le “paradigme profini” pour les corps **Q** (cf. b)), **R** et **C**, dont une formulation plausible reste à dégager, ainsi qu’une description des sous-groupes d’inertie de Γ, par où s’amorce le passage de la caractéristique zéro à la caractéristique $p > 0$, et à l’anneau absolu **Z**.

e) Problème de Fermat.

5. Je signalerai cependant un travail plus délicat (mis à part le travail signalé en passant sur les complexes cubiques), sur l’interprétation combinatoire des cartes régulières associées aux sous-groupes de congruence de $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$. Ce travail a été développé surtout en vue d’exprimer l’opération “arithmétique” de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur ces *“cartes de congruences”*, laquelle se fait, essentiellement, par l’intermédiaire du caractère cyclotomique de Γ. Un point de départ a été la théorie combinatoire du “bi-icosaèdre” développée dans un cours C4 à partir de motivations purement géométriques, et qui (il s’est avéré par la suite) permet d’exprimer commodément l’opération de Γ sur la catégorie des cartes icosaédrales (i.e. des cartes de congruence d’indice 5).

6. Signalons à ce propos que les classes d’isomorphie d’espaces modérés compacts sont les mêmes que dans la théorie “linéaire par morceaux” (qui n’est *pas*, je le rappelle, une théorie modérée). C’est là, en un sens, une réhabilitation de la “Hauptvermutung”, qui n’est “fausse” que parce que, pour des raisons historiques qu’il serait sans doute intéressant de cerner de plus près, les fondements de topologie utilisés pour la formuler n’excluaient pas les phénomènes de sauvagerie. Il va (je l’espère) sans dire que la nécessité de développer de nouveaux fondements pour la topologie “géométrique”

n’exclut nullement que les phénomènes en question, comme toute chose sous le ciel, ont leur raison d’être et leur propre beauté. Des fondements plus adéquats ne supprimeront pas ces phénomènes, mais nous permettront de les situer à leur juste place, comme des “cas limites” de phénomènes de “vraie” topologie.

7. En fait, pour reconstituer ce système d’espaces

$$(i_0, \dots i_n) \mapsto X_{i_0,\dots,i_n}$$

contravariant sur $\mathrm{Drap}(I)$ (pour l’inclusion des drapeaux), il suffit de connaître les X_i (ou *“strates déployées”*) et les X_{ij} (ou *“tubes de raccord”*) pour $i, j \in I$, $i < j$, et les morphismes $X_{ij} \longrightarrow X_i$ (qui sont des inclusions “bordantes”) et $X_{ij} \longrightarrow X_j$ (qui sont des fibrations propres, dont les fibres F_{ij} sont appelées *“fibres de raccord”* pour les strates d’indices i et j). Dans le cas d’une multiplicité modérée cependant, il faut connaître de plus les *“espaces de jonction”* X_{ijk} $(i < j < k)$ et ses morphismes dans X_{ij}, X_{jk}, et surtout X_{ik}, s’insérant dans le diagramme commutatif hexagonal suivant, où les deux carrés de droites sont cartésiens, les flèches $\hookrightarrow$ sont des immersions (pas nécessairement des plongements ici), et les autres flèches sont des fibrations propres :

$$\begin{tikzcd}
 & X_{ik} \arrow[r, hook] \arrow[dl] & X_k & \\
X_i & & X_{ijk} \arrow[ul, hook] \arrow[r, hook] \arrow[dl] & X_{jk} \arrow[ul, hook] \arrow[dl] \\
 & X_{ij} \arrow[ul] \arrow[r, hook] & X_j &
\end{tikzcd}$$

(NB. Ce diagramme définit X_{ijk} en termes de X_{ij} et X_{jk} sur X_j, mais non la flèche $X_{ijk} \longrightarrow X_{ik}$, car $X_{ik} \longrightarrow X_k$ n’est pas nécessairement un plongement.)

Dans le cas des espaces modérés stratifiés proprement dits (qui ne sont pas des multiplicités à proprement parler) on peut exprimer de façon commode le “déploiement” de cette structure, i.e. le système des espaces $X_{i_0 \dots i_n}$, en termes de l'espace modéré X_* somme des X_i, qui est muni d'une *structure d'objet ordonné* (dans la catégorie des espaces modérés) ayant comme graphe X_{**} de la relation d'ordre la somme des X_{ij} et des X_i (ces derniers constituant la diagonale). Parmi les propriétés essentielles de cette structure ordonnée, relevons seulement ici que $\mathrm{pr}_1 : X_{**} \longrightarrow X_*$ est une fibration (localement triviale) propre, et $\mathrm{pr}_2 : X_{**} \longrightarrow X_*$ est un plongement "bordant". On a une interprétation analogue du déploiement d'une multiplicité modérée stratifiée, en termes d'une *structure de catégorie* (remplaçant une simple structure ordonnée) "au sens multiplicités modérées", dont l'application de composition est donnée par les morphismes $X_{ijk} \longrightarrow X_{ik}$ ci-dessus.

RÉCOLTES ET SEMAILLES

Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien

- Edition by Mateo Carmona
- This text was published in: *Récoltes et Semailles: I, II. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*. Paris: Éditions Gallimard, 2022, 439.

Les conjectures de Weil

Les fameuses "conjectures de Weil", pour une variété algébrique X définie sur un corps fini k, concernent la "fonction L" (dite "de Artin-Weil") associée à X. Celle-ci est définie comme une certaine série formelle a coefficients rationnels, dont la connaissance équivaut a celle du nombre de points de X rationnels sur le corps k et sur toutes ses extensions finies. La première assertion parmi ces conjectures, c'est que cette série formelle (à terme constant 1) est le développement en série d'une *fonction rationnelle* sur $\mathbf{Q}$. Toutes les autres affirmations concernent la forme particulière et les propriétés de cette fonction rationnelle, dans le cas particulier où X est connexe projective et non singulière — Au cœur de ces conjectures est une certaine formule, présumée canonique, présentant cette fonction rationnelle sous la forme

$$(L) \qquad L(t) = \frac{P_0(t)P_2(t)...P_{2n}(t)}{P_1(t)...P_{2n-1}(t)},$$

où les P_i ($0 \leq i \leq 2n$, avec $n = \dim X$) sont des polynômes à coefficients entiers à terme constant 1. Le degré b_i de P_i est censé jouer le rôle d'un "i.ème nombre de Betti" pour X (ou plus précisément, pour la variété correspondante $\overline{X}$ sur la clôture algébrique $\overline{k}$ du corps k). Ainsi, quand X provient par "réduction en car. $p > 0$" d'une variété projective non singulière X_K définie sur un corps K de caractéristique nulle, alors b_i doit être égal au i.ème nombre de Betti (défini par voie transcendante) de la variété algébrique *complexe*, obtenue à partir de X_K par un plongement quelconque de K dans $\mathbf{C}$[1]. La fonction rationnelle doit satisfaire une *équation fonctionnelle*, qui équivaut à dire que les racines de P_{2n-1} sont exactement les q^n/ξ_α, où $q = p^f$ est le cardinal du corps de base k, et où ξ_α parcourt les racines de P_i. (Moralement, cela devait "provenir" de l'existence d'une "dualité de Poincaré" pour la "cohomologie", non nommée et non définie, de la variété $\overline{X}$.) Je crois que Weil devait conjecturer également que pour $i \neq n$, les zéros de P_{2n-i} étaient exactement les $q^{n-i}\xi_\alpha$, où ξ_α parcourt encore les zéros de P_i

[1]Au moment où Weil faisait ses conjectures, il n'était pas même connu que les b_i définis ainsi étaient *indépendants* du plongement choisi de K dans $\mathbf{Q}$. Quelques années plus tard, cela allait résulter de la théorie de Serre de la cohomologie des faisceaux cohérents, qui donnait un sens "purement algébrique" aux invariants plus fins $h^{i,j}$ de la théorie de Hodge.

(ou, ce qui revient au même au vu de la condition de dualité, que les zéros de P_i se groupent par paires, de produit égal à q^i pour chacune). La "raison" heuristique ici est une autre propriété importante de la cohomologie des variétés projectives non singulières complexes, exprimée cette fois par le "théorème de Lefschetz" (version dite "vache"). Enfin, la dernière des conjectures de Weil, analogue "géométrique" de la conjecture de Riemann, est que les valeurs absolues des inverses des zéros de P_i sont toutes égales a $q^{i/2}$ (assertion qui conduit à des estimations d'une grande précision sur des nombres de points de X[2]).

La rationalité de la fonction L d'une variété X générale avait été établie par Dwork en 1960, par des méthodes "p-adiques" non cohomologiques. Cette méthode avait donc l'inconvénient de ne pas fournir d'interprétation cohomologique de la fonction L, et par suite ne se prête pas à une approche des autres conjectures, pour X projective non singulière. Dans ce dernier cas, l'existence d'un formalisme de cohomologie (sur un "corps de coefficients" $\mathbf{R}$ de caractéristique nulle), incluant la dualité de Poincaré pour les variétés projectives non singulières, et un formalisme des classes de cohomologie associées aux cycles (transformant intersections en cup-produits), permet de façon essentiellement "formelle" de transcrire la classique "formule des points fixes de Lefschetz". En appliquant cette formule à l'endomorphisme de Frobenius de $\overline{X}$ et à ses itérés, on allait obtenir une expression (1) comme exigée par Weil, ou les P_i, sont des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. cela devait être clair pour Weil dès le moment où il avait énoncé ces conjectures (1949), et ça l'était en tous cas pour Serre comme pour moi dans les années cinquante — d'où justement la motivation initiale pour développer un tel formalisme. C'était là chose faite dès le mois de mars 1963, avec $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\ell$, $\ell \neq p$. Il y avait simplement deux grains de sel :

a) Il n'était pas clair a priori (bien qu'on était persuadé que ce devait être vrai) que les polynômes $P_i(t)$, qui a priori étaient à coefficients dans l'anneau $\mathbf{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques, étaient en fait des *entiers ordinaires*, et de plus, indépendants du nombre premier envisagé ℓ ($\ell \neq p = \text{car. } k$).

b) De la rationalité de la fonction L pour une X projective non singulière, on ne

[2]De cette dernière des conjectures de Weil, résulte en même temps que l'écriture (L) de la fonction L est *unique*.

pouvait déduire celle pour un X général, que si on disposait de la résolution des singularités.

Les problèmes soulevés par a) ont joué un rôle crucial, bien sur, pour l'éclosion et le développement du yoga *des motifs*, et dans la formulation ultérieure des *conjectures standard*, étroitement liées à ce yoga. Ils ont aussi stimulé la réflexion pour trouver également une théorie *cohomologique p-adique* (réalisée par la suite par la théorie *"cristalline"*), comme une approche possible pour prouver l'intégralité des coefficients des P_i, une fois qu'on saurait (p. ex. via une solution affirmative aux conjectures standard) qu'ils sont rationnels et indépendants de ℓ (*y compris* pour $\ell = p$).

Quoi qu'il en soit, on avait donc dès 1963 l'expression (L) de la fonction L (mais qui a priori dépendait du choix de ℓ), l'équation fonctionnelle, et le bon comportement des nombres de Betti par spécialisation. Il restait donc à résoudre la question a), à prouver l'assertion pour les valeurs absolues des racines de P_i, et enfin (pour faire bon poids) la relation "à la Lefschetz" sur les zéros de P_i. C'est ce qui a été fait dix ans plus tard dans l'article de Deligne "La conjecture de Weil I", Pub. Math, de l'IHES n° 43 (1973) p. 273–308.

Comme ingrédients de cette démonstration de Deligne, on n'avait donc aucunement besoin d'une formule des points fixes plus sophistiquée que la formule "ordinaire", qui était disponible (sans rien de "conjectural") dès les débuts de 1963. Le seul autre ingrédient cohomologique dans l'article de Deligne, si je ne me trompe, est la théorie cohomologique des pinceaux de Lefschetz (version étale) que j'avais développée vers l'année 1967 ou 68, complété par la formule de Picard-Lefschetz (prouvée dans le cadre étale par Deligne), l'un et l'autre exposés dans le volume SGA 7 II dont il a été question (et dont mon nom, comme par hasard, a quasiment disparu...).

La formule "plus sophistiquée" de points fixes, dite *"de Lefschetz-Verdier"*, a par contre joué un *rôle psychologique* important, pour m'encourager à dégager l'interprétation cohomologique (L) des fonctions L, valable pour toute variété X (pas nécessairement projective non singulière). Cette formule de Verdier me rappelait qu'il doit y avoir des formules de points fixes sans conditions de non-singularité sur X (comme il était bien connu déjà dans le cas de la formule de

Lefschetz ordinaire), mais surtout, elle attirait mon attention sur le fait qu'il y a des formules de points fixes concernant la cohomologie à *coefficients dans un faisceau* ("constructible") *quelconque*, interprétant une somme alternée de traces (dans des espaces de cohomologie à coefficients dans un tel faisceau) comme une somme de "termes locaux" correspondant aux points fixes d'un endomorphisme $f : X \longrightarrow X$ (quand ceux-ci sont isolés). Dans cette motivation heuristique, le fait que cette formule de Lefschetz-Verdier "restait conjecturale", en car. $p > 0$ (faute de disposer de la résolution des singularités, et par là, du "théorème de bidualité"), *était entièrement irrelevant*[3].

Comme si souvent, le pas essentiel ici a été de trouver *"la" bonne formulation* (en l'occurrence pour une "formule cohomologique des fonctions L"). La formule de Verdier me suggérait de faire intervenir un faisceau ℓ-adique (constructible) arbitraire, en lieu et place du faisceau de coefficients habituel (qui jusque là était resté implicite), savoir le faisceau constant $\mathbf{Q}_\ell$. Il fallait donc, en calquant la définition de Weil de la fonction L "ordinaire", en définir une "à coefficients dans F". Une fois qu'on songe à le faire, la définition s'impose d'elle-même : c'est celle donnée dans mon exposé Bourbaki de décembre 1964 (Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Sém. Bourbaki 279), qu'il est inutile de répéter ici. De plus, les "termes locaux" plausibles de la formule de Lefschetz-Verdier (en termes du faisceau de coefficients donné, et de la correspondance de Frobenius) s'imposaient également. Enfin (on est culotté ou on ne l'est pas !), pourquoi ne pas écrire la formule, ici, en abandonnant mime l'hypothèse de propreté de la formule de Lefschetz-Verdier "orthodoxe", mais en travaillant avec la cohomologie à *support propre* ? !

Ainsi, le pas essentiel, cette fois encore, avait été de dégager le "bon énoncé" (en l'occurrence, *1a* "bonne formule"), *suffisamment générale* et par là-même, suffisamment *souple* pour se prêter à une démonstration, en "passant" sans problèmes à travers récurrences et "dévissages". Je n'aurais su (et personne à ce jour ne saurait) démontrer directement "la" formule des fonctions L "ordinaires", pour une X

[3](20 mars) Ça l'était à tel point que l'an dernier, j'avais entièrement et depuis longtemps oublié ce fait, et suis tombé des nues en lisant (sous la plume de Deligne) que la formule de Lefschetz-Verdier "n'était établie que conjecturalement dans la version originale de SGA 5". Je reviens sur ce point dans la réflexion du lendemain et du surlendemain (les 18 et 19 mars). (Dans les sousnotes n° 169_6 et 169_7.)

quelconque (ou même lisse, mais pas propre, ou inversement), en termes de cohomologie ℓ-adique (à supports propres) à coefficients dans le faisceau ℓ-adique *constant* $\mathbf{Q}_\ell$, sans passer par la généralisation faisceautique. (Pas plus que je n'aurais su, en car. $p > 0$, démontrer la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch *ordinaire*, si je ne l'avais d'abord généralisée comme une formule faisceautique pour une *application* propre de variétés algébriques lisses — et personne, à ma connaissance, ne saurait le faire aujourd'hui encore…)

Dans l'exposé Bourbaki en question, je me borne à donner l'énoncé général de la formule des fonctions L "à coefficients" dans un faisceau ℓ-adique ordinaire, et je montre comment, par des dévissages très simples, on se ramène au cas où X est une courbe projective lisse et projective. Je savais bien qu'une fois arrivé là, c'*était gagné* — car on "tient en mains" suffisamment la dimension un, pour que la démonstration de la formule en question devienne une question de routine[4]. Je ne me suis pas occupé à ce moment de dégager une bonne formule de points fixes en dimension un et de la prouver, il me semblait que ce serait plutôt à Verdier de jouer. Il a donné une formule de points fixes, dite "de Woodshole", l'année d'après, qui suffisait pour coiffer Frobenius et l'application aux fonctions L. J'ai pris connaissance de son énoncé, qui ne m'a pas vraiment satisfait, car il me semblait que les conditions qu'il imposait à sa correspondance cohomologique (pour les besoins d'une démonstration dont je n'ai pas pris connaissance) étaient un peu artificielles — j'aurais aimé une formule qui s'applique à tout endomorphisme d'une courbe algébrique. Le séminaire SGA 5 a été la première bonne occasion, pour développer une telle formule qui soit à mon goût. (C'est, sauf erreur, celle qui figure bel et bien dans l'exposé XII de l'édition-Illusie, ayant miraculeusement survécu aux vicissitudes qui ont frappé ce malheureux séminaire.) Les conjectures de Weil avaient été une motivation initiale, et un fil conducteur précieux, pour me

[4]Si je parle ici de "travail de routine", ce n'est nullement dans un sens péjoratif. Les neuf dixièmes, si ce n'est même beaucoup plus, du travail mathématique est de ce type, aussi bien chez moi que chez tout autre mathématicien à qui il arrive de passer par des moments qui, justement, sont *autre chose*, des moments créateurs. Après Verdier, j'ai moi-même passé du temps à tourner la manivelle des techniques disponibles, délicates et bien huilées, pour trouver et prouver une formule de points fixes en dimension un qui me satisfasse (provisoirement du moins). C'était là du travail "de routine" tout comme l'avait été celui de Verdier.

"lancer" sur le développement d'un formalisme complet de cohomologie étale (et d'autres). Mais je sentais bien que le thème cohomologique, qui était au centre de mes efforts depuis huit ou neuf ans déjà et qui devait le rester encore pendant les années à venir jusqu'à mon départ en 1970, avait une portée plus vaste encore que les conjectures de Weil qui m'y avaient amené. Pour moi, l'endomorphisme de Frobenius n'était pas un "alpha et oméga" pour le formalisme cohomologique, mais un endomorphisme parmi bien d'autres…

$\mathscr{D}$-modules et cristaux

Le Bi-icosaèdre

[…] Il me faut d'abord donner quelques explications préliminaires purement géométriques, sur la combinatoire de l'icosaèdre gauche et sur la notion de bi-icosaèdre gauche. Comme il semblerait que je sois le seul qui ait jamais pris la peine (et le plaisir) de regarder l'icosaèdre (ordinaire ou "gauche", au choix) du point de vue combinatoire, et qu'il n'y a donc aucune référence dans la littérature sur ces choses (qui devraient être "bien connues" depuis plus de deux mille ans), je me fais un plaisir de développer ici "en forme" le peu dont nous aurons besoin, pour nous y reconnaître[5].

Dans la suite, on se donne un ensemble S à six éléments (S, comme "sommets"). Les éléments de S s'appelleront *"sommets"*, et les parties à deux éléments de S (ou "paires") dans S s'appelleront *"arêtes"*. Enfin, pour abréger, on appellera *"triangles"*

[5]Mes réflexions sur l'icosaèdre, avec un fort accent sur l'aspect combinatoire, datent de 1977, où j'ai fait un cours de DEA d'une année sur ce thème magnifique. Cela a été en même temps ma première grosse frustration dans mon expérience enseignante. Malgré le niveau délibérément très élémentaire et très "visuel" où j'ai placé le cours, avec l'espoir de voir s'y impliquer les auditeurs (étudiants de troisième cycle ou enseignants à mon Université), je n'ai pas réussi à vraiment déclencher une étincelle de vrai intérêt et de participation en aucun. La seule exception a été la mise au point, par un ou deux parmi les auditeurs, de tracés de la projection stéréographique sur le plan de l'icosaèdre (vu comme inscrit sur la sphère unité, avec les arêtes figurées par des arcs de grand cercle), en faisant apparaître en même temps le dodécaèdre dual. Il es vrai que ces tracés stéréographiques (en prenant comme centre de projection soit un sommet, soit le milieu d'une arête, soit le centre d'un face) sont de toute beauté, surtout quand on tient compte du coloriage canonique des arêtes (voire, des faces également) en cinq couleurs…

(de S) les parties de S à trois éléments. Si on désigne par $A(S)$ ou A, et par $T(S)$ ou T l'ensemble des arêtes et l'ensemble des triangles de S, on vérifie aussitôt que l'on a

$$\operatorname{card}(S)=6, \quad \operatorname{card} A=15, \quad \operatorname{card} T=20$$

(où la première relation est mise pour mémoire). (NB si E est un ensemble fini, car(E) désigne le nombre de ses éléments.)

Définition **1**. — *Une partie F de l'ensemble T des triangles de S est appelée une* structure icosaédrale *(sous-entendu : gauche) sur S, si toute arête de S est contenue dans exactement deux triangles appartenant à F.*

En d'autres termes, si on appelle *"faces"* les triangles éléments de F, la condition envisagée dit que *chaque arête est contenue dans exactement deux faces*. Un ensemble S à six éléments muni d'une structure icosaédrale F est appelé un *icosaèdre combinatoire* (sous entendu : "gauche", pour ne pas confondre avec l'icosaèdre "ordinaire", qui a douze sommets au lieu de six), ou simplement un icosaèdre (gauche). Si $I=(S,F)$ et $I'=(S',F')$ sont deux tels icosaèdres, on appelle *isomorphisme* de l'un avec l'autre toute bijection

$$u : S \xrightarrow{\sim} S'$$

telle que $u(F)=F'$, i.e. telle que les faces de I' soient exactement les images par u des faces de I.

On peut "regarder" un icosaèdre en "centrant" son attention soit sur un sommet, soit sur une arête, soit sur une face, de façon à obtenir trois types de "perspectives" différentes, pour l'étudier. Ce sera la perspective centrée sur une face, qui sera la plus commode pour notre propos actuel. Voici l'énoncé récapitulatif, contenant tout ce qui nous sera nécessaire (et au delà) :

Théorème **1**. —

a) Deux icosaèdres (combinatoires gauches) sont toujours isomorphes, et plus précisément, il y a exactement 60 *isomorphismes de l'un avec l'autre.*

b) Un icosaèdre a exactement dix faces. Si f est une face d'un icosaèdre $I=(S,F)$, f'' une face d'un icosaèdre $I'=(S',F')$, alors pour toute bijection u_0 de f avec

f', il existe un isomorphisme et un seul u de I avec I', tel que u transforme f en f'' et induise entre f et f' la bijection u_0.

c) *Soit $I = (S,F)$ un icosaèdre, et F' le complémentaire de F dans T, i.e. l'ensemble des triangles de S qui ne sont* pas *des faces. Alors pour toute face $f \in F$ de I, son complémentaire f' dans S (i.e. l'ensemble des sommets qui n'appartiennent* pas *à la face f) est dans F' (i.e. est un triangle qui n'est* pas *une face de I). L'application*

$$f \mapsto f' : F \longrightarrow F'$$

est une bijection de F avec F'. Enfin, F' est également une structure icosaèdrale sur S (appelée structure icosaèdrale complémentaire *de la structure F).*

d) *Soient S un ensemble de sommets à six éléments,*

$$\mathrm{Ic}(S) \subset \mathfrak{P}(T(S)) \quad (= \textit{ens. des parties de } T(S))$$

l'ensemble des structures icosaèdrales sur S. Alors $\mathrm{Ic}(S)$ a douze éléments, et l'application

$$F \mapsto F', \quad \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \mathrm{Ic}(S)$$

et une involution sans points fixes de cet ensemble (i.e. on a, pour tout F dans $\mathrm{Ic}(S)$, $(F')' = F$ et $F' \neq F$.)

e) *Soient F une structure icosaèdrale sur S, F' la structure complémentaire, $f \in F$ une face de F, $f' \in F'$ la face de F' complémentaire de f. Pour tout sommet $s \in f$, soit s' le "troisième sommet" de l'unique face $f(s)$ de F, distincte de f, contenant l'arête $a_s = f - \{s\}$. On a alors $s' \in f'$, et l'application*

$$s \mapsto s' : f \longrightarrow f'$$

est une bijection de f avec f', notée

$$u_f : f \xrightarrow{\sim} f'.$$

On définit de même (en interchangeant les rôles de F et de F') une bijection

$$u_{f'} : f' \xrightarrow{\sim} f.$$

Ses bijections sont inverses l'une de l'autre :

$$u_{f'}u_f = \mathrm{id}_f, \quad u_f u_{f'} = \mathrm{id}_{f'}.$$

f) Soit S un ensemble à six éléments, f un triangle de S, f' le triangle complémentaire, P_f l'ensemble des bijections de f avec f' (c'est un ensemble à six éléments), et $\varepsilon_f = \{f, f'\}$ la partie à deux éléments de $T(S)$ (ensemble des triangles), formée de f et de f'. Pour toute structure icosaèdrale F sur S, soit

$$c(F) = (\alpha(F), u(F)) \in \varepsilon_f \times P_f$$

défini ainsi : $\alpha(F)$ est égal à f ou à f', suivant que $f \in F$ ou $f' \in F$ (i.e. $\alpha(F)$ est l'unique élément de ε_f tel que $\alpha(F) \in (F)$, et $u(F)$ est égal à u_f (notations de d))). On a donc défini une application

$$c : \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cette application est bijective. *En d'autres termes, "il revient au même" de se donner une structure icosaèdrale F sur S, ou de se donner un couple d'éléments (φ, u), où φ est l'un des deux éléments f, f' (celui qui doit être face de F), et où u est une bijection $f \xrightarrow{\sim} f'$.*

Démonstration du théorème. La partie a) est conséquence de b), compte tenu qu'il y a exactement 6 bijections de f avec f' et 10 faces de I', et que $60 = 10\ 6$. D'autres part, dans d) le fait que $F \mapsto F'$ soit une involution sans points fixes, est évident sur la définition donnée dans c). Quant au fait que $\mathrm{Ic}(S)$ a douze éléments, cela résulte aussitôt de a) par un argument de "comptage" standard (vu que le groupe de toutes les bijections de S avec lui même a $6! = 654321 = 720$ éléments, et que le sous-groupe stabilisateur de F en a soixante, d'où le nombre

$$12 = 720/60 \quad .)$$

Une autre façon de retrouver 12 (via la "perspective autour d'une face" expliquée dans f)) est par[6]

$$12 = 2 \times 6.$$

[6]Il s'agit ici de la description, utilisant la "perspective" centrée sur une face. Il y a deux autres

Il y a donc à prouver seulement les parties b), c), e), f). Dans b), c), f) on part d'une structure icosaédrale donnée (S,F). Comme chaque arête est contenue dans deux faces, il existe au moins une face, soit f. Sot f' son complémentaire dans S, et considérons l'application

$$u_f : f \longrightarrow f', \quad a \mapsto a'$$

définie dans e). Montrons qu'elle est injective, donc bijective (puisque f et f' ont même nombre d'éléments, savoir trois). Si on avait deux sommets distincts $a \neq b$ dans f, tels que $a' = b'$, alors posant

$$c = a' = b'$$

et désignant par s le troisième sommet de f, on aurait une configuration

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, dash] & & b \arrow[dl, dash] \\ & s \arrow[d, dash] & \\ & c & , \end{tikzcd}$$

avec trois faces $\{s,b,c\}$, $\{s,c,a\}$, $\{s,a,b\}$ se rajustant cycliquement autour de s, le long d'arêtes communes $\{s,a\}$, $\{s,b\}$, $\{s,c\}$. Je dis que ce n'est pas possible.

---

descriptions toutes aussi instructives de l'ensemble $\mathrm{Ic}(S)$, obtenues par la perspective centrée soit sur une arête, soit sur un sommet. Enfin, je signale aussi la bijection canonique suivante

$$\mathrm{Ic}(S)\,\mathrm{Bic}(S) \times \omega(S),$$

où $\mathrm{Bic}(S)$ désigne l'ensemble des structures biicosaédrales sur S, et $\omega(S)$ l'ensemble à deux éléments formé des "orientations" de S (i.e. l'ensemble quotient de l'ensemble des "repères" de S i.e. des numérations de ses éléments de 1 à 6, par l'action du sous-groupe alterné du groupe symétrique $\mathfrak{S}_6$). L'application est obtenue en associant à toute structure icosaédrale F, d'une part la structure biicosaédrale associée $\{F,F'\}$, et d'autre part une certaine orientation $\mathrm{or}(F)$ de S canoniquement associée à F, que je me dispense de décrire ici. Il se trouve que l'on a

$$\mathrm{or}(F) \neq \mathrm{or}(F'),$$

de sorte que les deux structures icosaédrales correspondant à une même structure biicosaédrale $\{F,F'\}$ sont "repérées" par les deux orientations possibles de S.

Soient en effet u et v les deux points de S distincts des points précédents s, a, b, c, considérons l'arête $\{s, u\}$, et soit h une face qui la contienne. Alors le troisième sommet de h (distinct de s et u par définition) ne peut pas être égale à un des trois points a, b, c, disons a, car l'arête $\{s, a\}$ serait contenue dans trois faces de l'icosaèdre. Donc le troisième sommet est v, et l'arête $\{s, u\}$ ne serait contenue que dans le seul triangle $\{s, u, v\}$, absurde.

Nous avons maintenant qui si a, b, c sont les trois sommets de la face f, alors les sommets a', b', c' dans f' sont distincts, donc les six sommets de l'icosaèdre sont a, b, c, a', b', c'. Nous pouvons maintenant écrire la liste de l'ensemble de toutes les faces de l'icosaèdre, via la "perspective par rapport à f". Pour bien visualiser cette liste, il est pratique de faire un dessin, où les sommets sont figurés par des points du plan, les arêtes par des segments joignant ces points, et les faces par des aires triangulaires délimitées par les trois arêtes contenues dan la face. De plus, pour une bonne visibilité du graphisme, on va faire figurer chacun des points a', b', c' (mais non a, b, c) en *deux* exemplaires, dont le deuxième sera désigné (en tant que point du plan) par a'', b'', c'' respectivement. Ainsi, a' et a'' sont des points différents du plan, mais qui désignent le même élément de l'ensemble "abstrait" S.

On trouve la figure suivante, qui peut aussi être interprétée comme une vue "en perspective" de l'icosaèdre régulier ordinaire dans l'espace, vue "centrée" sur une face (nommée $\{a, b, c\}$)

Sur cette figure apparaissent dix figures (triangulaires), parmi lesquelles les quatre faces de départ

$$(1) \qquad f = \{a, b, c\}, \quad f_a = \{b, c, a'\}, \quad f_b = \{c, a, b'\}, \quad f_c = \{a, b, c'\}$$

plus les six faces "externes", se raccordant par paires le long des trois arêtes $\{a, a''\} = \{a, a'\}$, $\{b, b''\} = \{b, b'\}$, $\{c, c''\} = \{c, c'\}$. Donc, en toutes lettres

$$(2) \qquad f_{a,b} = \{a, a'', b'\} = \{a, a', b'\},$$

et les cinq triangles similaires $f_{a,c}$, $f_{b,c}$, $f_{b,a}$, $f_{c,a}$, $f_{c,b}$. Pour montrer que $f_{a,b}$ (par exemple) est bien une face, on note que l'arête $\{a, a''\} = \{a, a'\}$ doit appartenir à deux faces, dont le troisième sommet ne peut être ni b ni c (car chacune des arêtes a, b et a, c sont déjà contenues dans deux parmi les quatre faces (1)), donc il ne reste comme possibilité que b' et c', d'où les faces $f_{a,b}$ et $f_{a,c}$.

Je dis que l'ensemble de ces dix faces épuise l'ensemble F de toutes les faces. Pour ceci, comptons le nombre d'arêtes figurant dans notre graphisme représentatif. Trois pour f, deux supplémentaires pour chacun des trois triangles f_a, f_b, f_c (ça fait neuf), trois arêtes de la forme $\{a, a''\} = \{a, a'\}$ (fait douze), et six qui forment le contour de la figure (arêtes de la forme $\{a', b''\}$ etc), ça fait dix-huit, alors qu'il n'y en a que quinze arêtes en tout ! Mais on note que les arêtes telles que $\{a', b''\}$ et $\{a'', b'\} = \{b', a''\}$, symétriques par rapport au centre de la figure, représentant une seule et même arête de S (savoir $\{a', b'\}$ en l'occurrence), ce qui fait que le compte est bon : toutes les arêtes de S figurent sur notre tracé, et une seule fois sauf celles de triangle $\{a', b', c'\}$, lesquelles y figurent deux fois.

Ceci dit, un rapide coup d'oeil sur la figure nous convainc que chacune des arêtes qui y figurent, appartient bien à exactement deux parmi les dix faces précédentes et une seule. Si donc il existait une face h qui ne faisant pas partie de ce paquet de dix, alors une arête contenue dans h appartiendrait à au moins trois faces, absurde.

Ainsi, on est arrivé expliciter le "tracé" d'un icosaèdre quelconque, à partir d'une de ses faces, comme une "figure standard". La partie b) du théorème 1 est une conséquence immédiat de cette détermination.

Ainsi, b) donc aussi a) sont prouvés, prouvons c). Le fait que pour une face f (que nous pouvons prendre comme notre face centrale), le triangle complémentaire ne soit pas une face, est immédiat sur notre tracé, puisque $f' = (a', b', c')$ ne figure pas parmi nos dix faces. Comme l'ensemble T des triangles à 20 éléments et que F en a dix, F' en a dix, et comme l'application $f \mapsto f'$ de F dans F' est évidement injective, elle est bijective. En d'autres termes, pour qu'un triangle f de S soit une face, il faut *et il suffit* que le triangle complémentaire ne le soit pas.

Pour terminer de prouver c), il reste à prouver que F' est une structure icosaédrale, donc que pour toute arête L de S, il y a exactement deux triangles éléments de F' qui la contiennent. Passant aux complémentaires dans S, cela revient à dire que toute partie "carrée" de S (i.e. une partie ayant quatre éléments), contient exactement deux faces (pour la structure icosaédrale F). Or les faces non contenues dans cette partie $S - L$ sont exactement celles qui rencontrent son complémentaire $L = \{a, b\}$, i.e. celles qui contiennent soit a, soit b. Or l'ensemble F_a des faces contenant le sommet a a exactement cinq éléments (voir le tracé, où on peut bien sûr supposer que a est bien un sommet de la face de départ f utilisée pour faire le tracé), et de même pour F_b, d'autre part l'intersection $F_a \cap F_b$ est formée des faces qui contiennent l'arête $\{a, b\}$, donc a exactement deux éléments. Il s'ensuit que $F_a \cup F_b$ a $5+5-2=8$ éléments. Comme F en a dix, il reste bien deux éléments de F pour être contenus dans $S-L$.

Il reste à prouver e) et f). Dans e), il ne reste plus qu'à prouver la relation

$$u_{f'} u_f = \mathrm{id}_f,$$

et la relation symétrique (qui s'en déduira en échangeant les rôles de F et de F'). Utilisant encore f pour faire le tracé plus haut, cette relation se lit sur la figure : l'appliquant à a par exemple (ce sera pareil pour b et c) cette relation $(a')' = a$ équivaut simplement à dire que le triangle $\{b', c', a\}$ est une face pour F', c'est à dire, n'est *pas* une face pour la structure de départ, ce qui est bien le cas.

Reste à prouver f), i.e. la bijectivité de l'application

$$c : F \mapsto (\alpha(F), u(F)) : \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cela signifie que pour tout couple (φ, u), où φ est un des triangles f, f' et où u est une bijection $u : f \xrightarrow{\sim} f'$, il existe une unique structure icosaédrale F dont il provienne. Si $\varphi = f$, cela revient à dire qu'il existe une unique structure icosaédrale admettant f comme face, et donnant lieu à la bijection u - et c'est bien ce que nous avons vu dans la construction explicite de tantôt. Si $\varphi = f''$, cela signifie qu'il existe une unique structure F tel que $f' \in F$, et que $u_f = u$. Désignant par F' la structure icosaédrale complémentaire, cela signifie aussi qu'il existe une unique structure icosaédrale F' telle que $f \in F'$ et $u_f = u$, ce qui (au changement de notation près) est ce qu'on vient de voir.

Cela achève la démonstration du théorème 1.

Définition **2**. — *Soit S un ensemble à six éléments. On appelle* structure biicosaédrale *(combinatoire gauche) sur S, une paire formée de deux structures icosaédrales complémentaires l'une de l'autre.*

En vertu de la partie d) du théorème, il y a donc sur S exactement $12/2 = 6$ structures biicosaédrales. D'après la partie f), si f est un triangle de S et f' le triangle complémentaire, l'ensemble S^* de ces six structures icosaédrales est en correspondance biunivoque canonique avec $P_f =$ ensemble des bijections de f avec f'. De façon plus précise, si on identifie l'ensemble $\mathrm{Ic}(S)$ des structures icosaédrales sur S avec l'ensemble produit $\varepsilon_f \times P_f$ comme dans f), alors l'opération $F \mapsto F'$ de passage à la structure icosaédrale complémentaire s'interprète comme l'opération

$$(\varphi, u) \mapsto (\varphi', u),$$

où pour tout φ dans l'ensemble à deux éléments $\varepsilon_f = \{f, f''\}$, φ' désigne l'autre élément de ε_f.

On appelle *biicosaèdre combinatoire gauche*" (ou simplement *biicosaèdre*) un couple $(S, \{F, F'\})$ formé d'un ensemble S à six éléments, et 'une structure biicosaédrale $\{F, F'\}$ sur S, formée de deux structures icosaédrales F, F' complémentaires l'une de l'autre.

On définit les *isomorphismes* de tels objets de la façon habituelle. On notera que deux biicosaèdres sont isomorphes, et l'ensemble des isomorphismes de l'un sur l'autre a exactement 120 éléments. Par exemple, si on regarde les automorphismes d'un biicosaèdre $(S, \{F, F'\})$, ceux-ci forment un "groupe" (au sens technique mathématique du terme : stabilité par composition et par passage à l'inverse), lequel se décompose en deux sous-ensembles disjoints, ayant chacun 60 éléments (faisant donc bine un total de 120) : le premier est formé des bijection de S avec lui-même (ou "permutations" de S) qui transforment F en lui-même, ou ce qui revient au même, F' en lui-même - en d'autres termes, ce sont les automorphismes de l'icosaèdre (S, F) (ou (S, F')). Le deuxième est formé des permutations qui transforment F en F', ou ce qui revient au même, F' en F, c'est à dire encore les isomorphismes de l'icosaèdre (S, F) avec (S, F'). Par la partie a du théorème 1, il y en a bien 60 également.

Là je me suis laissé entraîner à en dire nettement plus que ce qu'il faut pour mon propos "philosophique"[7]. La chose essentielle, c'est de bien voir la structure de l'icosaèdre (gauche), mise en évidence sur le tracé de la page PU 119, la

[7](14 avril) Par contre, c'est peu pour mon ardeur de mathématicien, laquelle s'est à nouveau réveillée ces jours derniers - et voilà repartie ma réflexion sur l'icosaèdre, cet amour mathématique de mon âge mûr ! Je vais donc peut-être rajouter à ces notes (en appendice ?) quelques compléments sur la combinatoire de l'icosaèdre et sur la géométrie des ensembles à six éléments…

notion d'icosaèdre complémentaire (donnant lieu à la notion de biicosaèdre), et enfin la description de structures icosaédrales ou biicosaédrales sur S, en termes de l'ensemble P_f des six bijection d'une triangle préalablement donné f de S, avec son complémentaire f'. Enfin, du point de vue de l'intuition géométrique spatiale de la structure combinatoire, il est fort utile, pour s'y reconnaître, d'avoir chez soi un modèle en carton de l'icosaèdre régulier ordinaire[8], lequel a douze sommets, trente arêtes et vingt faces, et de "visualiser" un icosaèdre combinatoire gauche, comme décrit (de façon essentiellement canonique, en un sens qu'il serait facile à expliciter[9]), en termes d'un icosaèdre "ordinaire" ou "pythagoricien" (vu comme un solide dans l'espace), en prenant comme sommets, arêtes et faces de l'icosaèdre gauche, les *paires* de sommets, arêtes ou faces diamétralement opposées du solide pythagoricien. C'est bien dans cet esprit qu'a été fait le tracé de la page PU 119, où les paires $\{a', a''\}$, $\{b', b''\}$ et $\{c', c''\}$ désignent justement des paires de sommets opposés de l'icosaèdre-solide, et de même pour les paires d'arêtes ($\{a', b''\}, \{a'', b'\}$) etc, qu'il nous avait fallu justement identifier à une seule arête.

[8]J'en ai un chez moi, et de toute beauté, qui représente la "copie" d'un élément de première année de Fac, pour un examen de fin d'année d'un "cours d'option" (en collaboration avec Christine Voisin) sur l'icosaèdre (en 1976, je crois). Contrairement à mon cours de DEA l'année suivante sur le même thème, ce cours adressé à des étudiants frais émoulus du lycée avait rencontré une participation chaleureuse. Les résultats à l'examen étaient si brillants que mes collègues professeurs ont cru à un canular que j'aurais monté pour discréditer le fonction enseignante, et ils ont diminué d'office toutes les notes d'un tiers (les 18 sur 20 devenant 12 sur 20). C'est à cette occasion que j'ai appris avec stupéfaction que la plupart de mes collègues considéraient comme choquante l'idée qu'un étudiant puisse prendre du plaisir à étudier et à préparer un examen. Eux-mêmes s'étaient bien assez emmerdés pour faire les études et arriver à leur belle situation de prof. de Fac, il n'y avait vraiment aucune raison que les autres à présent ne s'emmerdent à leur tour…

[9]Si on a deux telles "réalisations" par des icosaèdres-solides (ou "pythagoriciens"), alors il existe une *unique* similitude directe de l'un avec l'autre, compatible avec ces réalisations i.e. avec les "marquages" des paires de sommets opposés par les points de S. Si les deux icosaèdres ont même "taille" i.e. même longueurs d'arêtes, alors la similitude en question sera même un "déplacement".

GROTHENDIECK-MUMFORD CORRESPONDANCE

D. Mumford. Selected Papers, Volume II[10]

---

[10] https://agrothendieck.github.io/divers/GMCorr.pdf

GROTHENDIECK-SERRE CORRESPONDANCE

Pierre Colmez - Jean-Pierre Serre (Eds.), Société Mathématique de France, 2001.[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/GSCorr.pdf

CATÉGORIES TANNAKIENNES
à partir de 1958[1]

Catégories tannakiennes définies par des cristaux

1. — Soit k un corps de car. $p > 0$, qu'on regarde comme algèbre sur $\mathbf{Z}_p$, dont l'idéal maximal est muni de puissances divisées. Cela donne un sens au site cristallin de k (sur $\mathbf{Z}_p$, qualifié aussi de "absolu"), et aux Modules loc. libres de type fini (resp. de présentation finie), sur ledit, qu'on appellera aussi cristaux en modules (localement libres resp. de présentation finie) sur k Ces cristaux forment une $\otimes$-catégorie $\mathbf{Z}_p$-linéaire. On peut expliciter cette catégorie à l'aide d'un p-anneau W de corps résiduel k, comme la catégorie des modules libres de type fini

2. —

3. —

4.

La catégorie tannakienne Fcriso(k) est un invariant arithmétique intéressant attaché à k (fonctoriellement) ; sa connaissance équivaut à celle de la gerbe associée (sur $\mathbf{Q}_p$), soit $\mathbf{G}(k)$?

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/tannascan.pdf

5. F-cristaux de pente nulle

On définira plus loin la *pente* d'un F-cristal "homogène". Ici, nous allons introduire directement les F-cristaux de pente nulle

6.

Considérons maintenant un homomorphisme de corps

$$k \longrightarrow k',$$

d'où un homomorphisme de catégories tannakiennes sur $\mathbf{Q}_p$

7.

8.

9.

Pour k quelconque, on trouve un $\otimes$-homomorphisme canonique défini à isomorphisme unique près (on utilise un choix d'une clôture algébrique $\overline{k}$ de k, mais ce choix est inessentiel...)

10. Cas k fini

FILTRATIONS SUR FONCTEURS FIBRES POUR CATÉGORIES TENSORIELLES

à partir de 1958[2]

[2] https://agrothendieck.github.io/divers/tensfibscan.pdf

QUELQUES EXEMPLES DE CATÉGORIES TENSORIELLES[3]
à partir de 1958[4]

---

1) Soit M un groupe. Soit $\mathscr{C}_M$ la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps k, munis d'une graduation de type M. C'est une catégorie tensorielle sur k, munie d'un foncteur fibre sur k, le foncteur "oubli de la graduation". Le groupe algébrique associé est le groupe de type multiplicatif $D_k(M)$ (SGA 3 I 4.7.3). Par exemple si $M = \mathbf{Z}^r$, on trouve $G = \mathbf{G}_m^r$.

Application : Soit $\mathscr{C}$ une catégorie tensorielle sur k munie d'un foncteur fibre F sur k, donc associée à un schéma en groupes affine G sur k. On cherche toutes les façons de mettre, pour chaque $M \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, une graduation de type M sur $F(V)$, de façon fonctorielle en M, et compatible (dans une sens évident) avec les produits tensoriels. Elles correspondent aux $\otimes$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}_M$ compatibles avec les foncteurs fibres, donc aux homomorphismes de $D_k(M)$ dans G. Par exemple, si $M = \mathbf{Z}^r$, il faut prendre les homomorphismes de $\mathbf{G}_m^r$ dans G.

Dans la situation précédente, on peut se demander quand une $\otimes$-graduation de type M du foncteur F correspond à une graduation de type M du foncteur identique de $\mathscr{C}$, i.e. pour tout V, la graduation de $F(V)$ provient d'une graduation de V. On trouve qu'il faut et il suffit pour cela que l'homomorphisme correspondant $D_k(M) \longrightarrow G$ soit central. Par exemple, si $\mathscr{C}$ est la catégorie des motifs sur k, et si on dispose d'un foncteur fibre F de $\mathscr{C}$ sur k, alors on trouve un homomorphisme central canonique $i : \mathbf{G}_m \longrightarrow G$. D'ailleurs, la donnée du motif de Tate (qui est de

[4] https://agrothendieck.github.io/divers/notsaascan.pdf

rang 2, et de “poids” 2 pour la graduation naturelle) correspond à la donnée d’un homomorphisme $j : G \longrightarrow \mathbf{G}_m = \mathrm{Gl}(l)$. Le fait que T soit de poids 2 s’exprime par la relation

$$j\,i(\lambda) = \lambda^2.$$

Lorsque k est de caractéristique nulle, on a toujours un foncteur fibre naturel : le *foncteur de Hodge*, qui à la cohomologie motivique d’une variété (projective lisse) X associe le vectoriel bigradué $\amalg \mathrm{H}^q(X, \underline{\Omega}^p_{X/k})$. Donc pour le groupe de Galois motivique correspondant G, on trouve un homomorphisme naturel

$$\mathbf{G}_m^2 \longrightarrow G,$$

i.e. deux homomorphismes commutant l’un à l’autre

$$i_1, i_2 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G.$$

Le fait que la graduation totale dans la cohomologie de Hodge corresponde au poids des motifs s’exprime par la relation

$$i(\lambda) = i_1(\lambda) i_2(\lambda);$$

on fera attention que i_1 et i_2 ne sont pas centraux (car la bigraduation en cohomologie de Hodge ne correspond pas à une bigraduation d’un motif !))

2) Prenant toujours pour $\mathscr{C}$ la catégorie des motifs sur k, avec k de car. nulle, on a un autre foncteur fibre canonique, le *foncteur de De Rham* qui associe à la cohomologie motivique d’une variété X le vectoriel $\mathrm{H}^*(X, \Omega^*_{X/k})$ (espace d’hypercohomologie). Ce vectoriel n’est plus bigradué mais seulement gradué et filtré, la filtration étant celle associée à la suite spectrale d’hypercohomologie, commençant avec la cohomologie de Hodge. On sait d’ailleurs que cette suite spectrale dégénère (théorie de Hodge), donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}(V)) \simeq \mathrm{H}_{\mathrm{Hdg}}(V)$ (isomorphisme fonctoriel en le motif V). On peut se proposer d’analyser à quelle structure supplémentaire, sur le groupe de Galois motivique associé au foncteur fibré H_{DR}, correspond la filtration canonique de ce foncteur.

De façon générale, étant donné une catégorie tensorielle $\mathscr{C}$ sur k munie d'un foncteur fibre F, on peut se proposer de déterminer les filtrations sur F (décroissantes, discrètes, indexées par $\mathbf{Z}$) compatibles avec les produits tensoriels (en utilisant la notion évidente de produit tensoriel de deux espaces vectoriels filtrés). On notera qu'une telle donnée ne pourra plus s'exprimer par un homomorphisme d'un certain groupe algébrique dans G (le groupe de Galois de $\mathscr{C}$ en F), car la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur k, munis d'une filtration décroissante discrète indexée par $\mathbf{Z}$, n'est pas une catégorie abélienne (les bimorphismes ne sont pas des isomorphismes). Mais à une telle donnée est associée un deuxième foncteur fibre $F(V) = \operatorname{Gr} F(V)$, à valeurs cette fois-ci dans les vectoriels gradués (NB F joue le rôle de la cohomologie de De Rham, F' celle de la cohomologie de Hodge, muni de la graduation par). La donné de F' correspond à un homomorphisme $i_1 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G'$. Considérons alors sur F' la filtration décroissante associée à sa graduation, et soit $\mathrm{H}'_{i_1} = \underline{\mathrm{AutFilt}}^!(F') \subset \underline{\mathrm{Aut}}(F') = G'$ le sous-schéma en groupes de G qui correspond aux $\otimes$-automorphismes de F' (ou plutôt des $F'_{k'}$, k' une k-algèbre quelconque) qui respectent sa filtration et induisant l'identité sur le graduée associée ; il est canoniquement déterminé par i. On peut aussi regarder le sous-schéma

$$Q = \underline{\mathrm{IsomFilt}}^!(F, F') \subset P = \underline{\mathrm{Isom}}(F, F')$$

du schéma P des $\otimes$-isomorphismes de F avec F', qui correspond aux automorphismes respectant les filtrations de F et F' et induisant l'identité sur les graduées associées. C'est à priori un pseudo-foncteur à gauche sous H', i.e. il est vide ou un torseur à droite sous H'. **Il faudrait prouver** que c'est bien un torseur (i.e. que sur une extension convenable k' de k, on peut trouver un isomorphisme de $F_{k'}$ avec $F'_{k'}$ *respectant les filtrations*). Donc on trouve une restriction du groupe d'opérateurs (à gauche) G' de P au sous-groupe H', par un H'-torseur à gauche Q.

Moyennant la vérification laissé en suspens à l'instant, on trouve alors que la donné d'un "foncteur fibre *filtré*" F de $\mathscr{C}$ sur k revient à la donnée

(i) D'un foncteur fibre F' (d'où un groupe de Galois $G' = \underline{\mathrm{Aut}}(F')$) ;

(ii) D'une graduation de type $\mathbf{Z}$ de F', i.e. un homomorphisme

$$i_1 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G',$$

(iii) D'un torseur à gauche Q' sous H'_{i_1}.

A ces données, on associe simplement le foncteur fibre tordu

$$F = F' \bigwedge^{\mathrm{H}'_{i_1}} Q',$$

F étant filtré par la filtration déduite de celle de F' (associée à la graduation de F') en tordant par Q'.

On constate aisément que le groupe H' est nécessairement une limite projective de groupes algébriques *unipotents*. On en conclut aussitôt que si $\mathscr{C}$ est à engendrement fini (ou, plus généralement, à engendrement dénombrable, de façon que G' donc aussi H' soit limite projective d'une *suite* de groupes algébriques) alors tout torseur sous H' est trivial ; cela signifie ici que tout foncteur fibre filtré est en fait associé à un foncteur fibre gradué (en prenant la filtration correspondant à la graduation) i.e. que la filtration dudit foncteur admet un splittage compatible avec les produits tensoriels. Mais le choix d'un tel splittage équivaut à celui d'un point sur un certain torseur à droite $Q = Q'$ sous le schéma en groupes H des automorpismes de F respectant la filtration et induisant l'identité sur le gradué associé ; il n'est pas du tout canonique !

3) Appelons *pré-structure de Hodge* sur un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, la donnée d'une bigraduation sur $V \otimes_{\mathbf{Q}} C = V_C$, $V_{\mathscr{C}} = \amalg_{p,q} V^{p,q}$, telle que a) la graduation totale correspondante soit "définie sur $\mathbf{Q}$" i.e. $\amalg_{p+q=n} V^{p,q}$ provienne d'un sous espace $V^n_{\mathbf{Q}}$ de V, et b) on a $\overline{V}^{p,q} = V^{q,p}$, où $x \mapsto \overline{x}$ désigne la conjugaison complexe. (NB Généralisation à des corps plus généraux laissée à Saavedra). Les vectoriels V munis d'une pré-structure de Hodge forment une catégorie tensorielle sur $\mathbf{Q}$ dans un sens évident, muni d'un foncteur fibre canonique, le foncteur 'oubli" F. On trouve donc un groupe de Galois G, et plus généralement toute $\otimes$-sous-catégorie $\mathscr{C}$ d la catégorie précédente nous définit un groupe de Galois G. La bigraduation sur le foncteur $F_{\mathscr{C}}(V) = V \otimes_{Q} \mathscr{C}$ correspond, en vertu de 1) (où il convient cependant de se permettre une extension du corps de base sur le foncteur fibre envisagé...) d'un homomorphisme $\mathscr{G}^2_{mC} \longrightarrow G_{\mathscr{C}}$, i.e. de deux homo-

morphismes qui commutent

$$i_1, i_2 : \mathcal{G}_{mC} \longrightarrow G_{\mathscr{C}}.$$

Les deux conditions a) et b) imposées aux structures envisagées s'interprètent respectivement par les faits que l'homomorphisme

$$i_{\mathscr{C}} = i_1 i_2 : \lambda \mapsto i_1(\lambda) i_2(\lambda)$$

est "défini sur $\mathbf{Q}$" i.e. provient d'un homomorphisme

$$i : \mathbf{G}_m \longrightarrow G,$$

(nécessairement central, car las composantes homogènes $V^n_{\mathbf{Q}}$ d'une pré-structure de Hodge sont évidement munis d'une pré-structure de Hodge de façon que V soit la somme directe de $V^n_{\mathbf{Q}}$ en tant que pré-structure de Hodge), et par la condition que l'on a

$$i_2 = \overline{i_1} \quad \text{i.e.} \quad i_2(\lambda) = \overline{i_1(\overline{\lambda})} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathscr{C}.$$

Si a toute variété projective lisse X sur $\mathbf{C}$ on associe sa cohomologie rationnelle $\mathrm{H}^*(X, \mathbf{Q}) = V$, de sorte que $V_{\mathbf{C}} = \mathrm{H}^*(X, \mathbf{C})$ est isomorphe canoniquement (par la théorie de Hodge) à $\mathrm{H}_{\mathrm{Hdg}}(X) = \amalg \mathrm{H}^q(X, \underline{\Omega}^p_{X/\mathbf{C}})$, on voit qu'on trouve ainsi une pré-structure de Hodge sur $\mathrm{H}(X, \mathbf{Q})$, d'où un $\otimes$-foncteur naturel de la catégorie des motifs sur $\mathbf{C}$ dans la catégorie des pré-structures de Hodge. La conjecture de Hodge standard équivaut à dire que ce foncteur est *pleinement fidèle*, i.e. que l'homomorphisme naturel qui va du groupe de Galois de Hodge précédent G dans le groupe de Galois motivique (associé au $\otimes$-foncteur de Betti $\mathrm{H}_{\mathrm{Bet}}$) est un épimorphisme. Ou encore que pour toute catégorie $\mathscr{C}_0$ de motifs de type fini sur $\mathbf{C}$, désignant par $\mathscr{C}$ la $\otimes$-catégorie de pré-structures de Hodge engendrée par les $\mathrm{H}_{\mathrm{Bet}}(M)$ pour $M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_0)$, l'homomorphisme de groupes algébriques $G \longrightarrow G_0$ associé au foncteur de Betti-Hodge $\mathscr{C}_0 \longrightarrow \mathscr{C}$ est un épimorphisme (i.e. surjectif sur les points à valeurs complexes, disons).

On appelle *polarisation* d'une pré-structure de Hodge de poids n la donnée d'un accouplement de pré-structures de Hodge

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbf{Q}(n),$$

où $\mathbf{Q}(n)$ est l'espace vectoriel trivial de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$, avec $\mathbf{Q}C = C$ muni du bidegré (n,n), ayant la propriété que la forme hermitienne correspondant sur $V_{\mathscr{C}}$,

$$\varphi(x,y) = \varphi(x,\overline{y})(-i)^{p-q} \quad \text{pour } x \text{ de bidegré } (p,q-p)$$

soit définie positive. Une *structure de Hodge* est une pré-structure de Hodge admettant une polarisation. Les structures de Hodge forment une sous-$\otimes$-catégorie de la catégorie des pré-structures de Hodge. La théorie de Hodge nous assure que le foncteur de Betti-Hodge sur la catégorie des motifs sur $\mathbf{C}$ prend ses valeurs en fait dans la catégorie des structures de Hodge (une polarisation d'un variété projective lisse V définit canoniquement une polarisation de la structure de Hodge associée sur la cohomologie de Betti-Hodge). NB. On n'a aucune idée sur ce que pourrait être l'image essentielle du foncteur précédent, par exemple s'il y a lieu d'espérer qu'on trouve toutes les structures de Hodge (donc une équivalence de catégories : motifs sur $\mathbf{C} \longrightarrow$ structures de Hodge) ; cela semble peu probable, mais on n'a aucune indication sérieuse dans un sens ou l'autre.

La catégorie des structures de Hodge est semi-simple. Si G est le groupe de Galois d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ de pré-structures de Hodge, à engendrement fini si on veut (pour simplifier), alors on peut expliciter en termes du groupe de Galois associé et de sa structure i_1 ci-dessus la condition pour que les objets de $\mathscr{C}$ soient en fait des structures de Hodge. Ceci est un exercice plaisant et délectable, qui devrait figurer dans un travail systématique sur les $\otimes$-catégories, dans le chapitre des exemples. On trouve des restrictions très sérieuses sur le groupe G muni de i_1 (en plus du fait que G soit réductif).

4) Je laisse le soin à Saavedra de déterminer quelle structure supplémentaire on obtient sur la structure de Hodge "complexe" associée à une variété projective lisse complexe X, lorsqu'on se donne cette dernière comme déduite d'une variété projective réelle $X_{\mathbf{R}} = X_0$. On trouve une notion de "structure de Hodge réelle", donnant naissance à une $\otimes$-catégorie correspondante. Dans le groupe de Galois motivique de celui-ci, en plus de la structure i_1, on trouve un élément f_∞ de $G(\mathbf{Q})$, d'ordre 2 (jouant le rôle d'un "élément de Frobenius à l'infini"), qui correspond à l'automorphisme du foncteur de Betti $X_0 \mapsto \mathrm{H}(X_0(\mathscr{C}), Q)$ déduit de l'homéomorphisme $x \mapsto \overline{x}$ de $X_0(\mathscr{C})$. Il faut expliciter les relatons entre cet élément et i_1, i_2 !

5) Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie tensorielle, munie d'un foncteur fibre sur k de caractéristique nulle. A prouver que, pour que le groupe de Galois G correspondant soit profini, il faut et il suffit que pour tout objet M de $\mathscr{C}$, la $\otimes$-catégorie engendrée soit semi-simple et n'ait qu'un nombre fini d'objets simples non isomorphes. Si $\mathscr{C}$ est quelconque, la sous-catégorie pleine $\mathscr{C}_0$ de $\mathscr{C}$ qui correspond au pro-groupe quotient de G formé des G_i/G_i° (où $G = \varprojlim G_i$, et G_i° est la composante neutre de G_i) est formée exactement des objets M ayant la propriété précédente.

Il serait intéressant de trouver des énoncés correspondants en caractéristique quelconque.

6) La notion de polarisation d'un motif sur un corps (elle-même déduite de celle de polarisation d'une variété algébrique) donne une structure supplémentaire remarquable dans la catégorie des motifs : si M est un motif de poids n, on sait parmi les formes symétriques (n pair) resp. alternées (n impair) $M \otimes M \longrightarrow T(n)$ (où T est le motif de Tate) distinguer celles qui sont "définies positives" ou encore des "polarisations". Cette notion se reflète par exemple par des structures supplémentaires sur les groupes de Galois motiviques. Il y a lieu de faire une étude axiomatique abstraite d'une telle notion de polarisation sur une $\otimes$-catégorie générale au dessus d'un sous-corps du corps des réels. On pourra en rediscuter à l'occasion.

MOTIFS À COEFFICIENTS SUR UN CORPS DE []

à partir de 1958[5]

[5] https://agrothendieck.github.io/divers/motcoescan.pdf

MOTIFS

1965 1970[6]

1. La catégorie $\mathscr{M}^+(X)$

À tout préschéma noethérien (éventuellement de type fini sur un anneau noethérien) X est associé une *catégorie abélienne* $\mathscr{M}^+(X)$, dite catégorie des *motifs effectifs* sur X. C'est une $\mathbf{Q}$-catégorie abélienne, i.e., pour tout $M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^+(X))$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $n1_M$ est un isomorphisme de M. De plus $\mathscr{M}^+(X)$ est muni d'un produit tensoriel commutatif et unitaire[7], exact à droite, l'unité est notée $\mathbb{1}_X$ ou $\mathbf{Q}_X(0)$. On considère aussi la catégorie dérivée bornée $\mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(X))$ de $\mathscr{M}^+(X)$. Le produit tensoriel est étendu en un bifoncteur $M\underline{\otimes}N$ en $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(X)))$.

2. Variances avec X

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préschémas noethériens, il lui est associé un *foncteur exact* $f^* : \mathscr{M}^+(Y) \longrightarrow \mathscr{M}^+(X)$ compatible avec $\otimes$, d'où $\mathrm{Ł}f^* : \mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(Y)) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(X))$. On a transitivité.

Si f est de type fini, et propre *ou* Y excellent, on a même un foncteur $\mathrm{R}f_* : \mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(X)) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(Y))$ satisfaisant aux formules de transitivité, et la for-

[6]Transcription par Elbaz-Vincent et J. Malgoire https://agrothendieck.github.io/divers/motiscan.pdf

[7]On peut en termes des données construire des $\bigwedge^i M$ etc…

mule de projection[8]

$$\mathrm{R}f_*(M \otimes \mathrm{Ł}f^*(N)) \simeq \mathrm{R}f_*(M) \otimes N.$$

3. Cas $X = \varprojlim X_i$

Supposons $X = \varprojlim X_i$, système projectif filtrant essentiellement affine. Alors pour les foncteurs images inverses, on a

$$\mathscr{M}^+(X) \simeq \varinjlim \mathscr{M}^+(X_i).$$

En particulier, si X est de type fini sur $S = \mathrm{Spec}(A)$, alors X est limite de préschémas X_i de type fini sur $\mathbf{Z}$, et la détermination de $\mathscr{M}^+(X_i)$ avec ses structures déjà envisagées est ramenée au cas des préschémas de type fini.

De même si (S_i) est un système projectif filtrant essentiellement affine, $S = \varprojlim S_i$, et si X, Y de type fini sur S sont définis par (X_i), (Y_i) de la façon habituelle, si on prend des $M_{i_0} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(X_{i_0})))$, d'où M_i, M, on aura pour $f_{i_0} : X_{i_0} \longrightarrow Y_{i_0}$ la relation

$$\mathrm{R}f_*(M) = \varinjlim v_i^*(\mathrm{R}f_{i_*}(M_i))$$

où $v_i : Y \longrightarrow Y_i$ est le morphisme canonique.

4. Foncteurs T_ℓ

Soit ℓ un nombre premier[9] tel que $\ell 1_X \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ soit inversible. Alors on a un foncteur

$$T_\ell = T_\ell^{(X)} : \mathscr{M}^+(X) \longrightarrow \mathscr{M}_\ell^+(X),$$

où $\mathscr{M}_\ell(X)$ est la catégorie formée des "$\mathbf{Q}_\ell$-modules constructubles sur X", i.e., la catégorie déduite de la catégorie des "systèmes ℓ-adiques de faisceaux de ℓ-torsion constructibles" en négligeant précisément les faisceaux de torsion. Le foncteur T_ℓ,

[8]Considérer aussi la formule de dualité entre $\mathrm{R}f_*$, f^*, et les foncteur $f^!$, $\mathrm{R}f_!$ et leurs relations [[…]], enfin le formulaire standard reliant tous ces foncteurs…

[9]N. d. T (note du transcripteur) : Grothendieck note l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$, que nous avons préféré éviter pour ne pas induire de confusions

est **compatible avec** $\otimes$ et **unité, exact** et **fidèle** (mais non pleinement fidèle), **compatible avec le changement de base** f^***, et compatible également avec** $\mathrm{R}f_*$[10]. [**N. B.** T_ℓ s'étend évidemment en un foncteur $\mathrm{D}^b(\mathscr{M}(X)) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathscr{M}_\ell(X))$]. La détermination des T_ℓ est encore ramenée au cas où X est de type fini sur $\mathbf{Z}$. **N. B.** Ceci exclu le choix limite $\mathscr{M}^+(X) = 0$ pour tout X, car il faudrait qu'on ait $\mathrm{R}^* f_*(\mathbf{Z}_\ell) = 0$ pour f, ℓ, ce qui n'est vrai en général…

Signalons aussi la compatibilité de T_ℓ avec l'isomorphisme de Künneth.

5. Les $\mathbf{Q}_\ell(-n)$

Pour tout X, on a un élément canonique $\mathbf{Q}_X(-1)$[11] ou $\mathbb{1}_X(-1) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^+(X))$, dont la formation est compatible avec les changements de base (il suffit donc de le considérer sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$), avec des isomorphismes,

$$T_\ell(\mathbf{Q}(-1)) \simeq \mathbf{Q}_\ell(-1) = T_\ell(\mathbb{G}_m)^{-1}$$

et le cas échéant (X sur $\mathbf{Q}$).

On peut définir $\mathbf{Q}(-1)$ comme $\mathrm{R}^2 f_*(1_{\mathbb{P}^1_X})$, où $f : \mathbb{P}^1_X \longrightarrow X$ est la projection canonique. Posant

$$\mathbf{Q}(-n) = \mathbf{Q}(-1)^{\otimes n}, \quad \text{pour} \quad n \geq 0,$$

on peut prouver, à l'aide des axiomes déjà posés, que si $f : X \longrightarrow S$ est lisse projectif à fibres géométriques connexes non vides, partout de dimension relative d, alors

$$\mathrm{R}^{2d} f_*(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbf{Z}_S(-d),$$

et si on enlève l'hypothèse "f projectif" mais seulement f quasiprojectif, on trouve encore

$$\mathrm{R}^{2d} f_!(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbf{Z}_S(-d).$$

On veut de plus, si X/S est lisse et $Y \underset{i}{\hookrightarrow} X$ est lisse sur S, de codimension d dans X, l'isomorphisme

$$\mathrm{R}\, i^!(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbf{Q}_Y(-d),$$

[10] compatibilité avec $f^!$, $\mathrm{R} f_!$, avec hom résidu, etc…

[11] **N.d.T** : Il semble que dans sa première mouture toute la théorie était sur $\mathbf{Z}$, puis après relecture(s), Grothendieck a changé plusieurs $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Q}$. Nous avons donc garder ce qui semble être l'ultime révision.

compatible avec les isomorphismes déjà connus du point de vue ℓ-adique…

6. La catégorie $\mathscr{M}(X)$

Le foncteur

$$M \rightsquigarrow M(-1) = M \otimes \mathbf{Q}(-1),$$

de $\mathscr{M}^+(X)$ dans lui-même est *pleinement fidèle* mais pas une équivalence en général. Il y a donc une façon canonique d'élargir $\mathscr{M}^+(X)$ en $\mathscr{M}(X)$ de telle façon que $-\mathbf{Q}(-1)$ devienne une équivalence, en prenant la pseudo-limite inductive des

$$\mathbf{M}^+(X) \xhookrightarrow{-\otimes\mathbf{Q}(-1)} M^+(X) \xhookrightarrow{-\otimes\mathbf{Q}(-1)} M^+(X).$$

On[12] prolonge à $\mathscr{M}(X)$ la structure $\otimes$, alors $\mathbf{Q}(-1)$ devient inversible, soit $\mathbf{Q}(1)$ son inverse, et tout élément de $\mathscr{M}(X)$ peut s'écrire, pour n assez grand, sous la forme $M_n(n)$, avec $M_n \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^+(X))$. [Pour n fixé, M_n est bien déterminé par M à isomorphisme unique près, et

$$(M_n(n) \simeq M_{n+1}(n+1)) \Leftrightarrow (M_{n+1} \simeq M_n(-1)),$$

on retrouve la description de $\mathscr{M}(X)$ en termes de pseudo-limites inductives].

Les foncteurs T_ℓ s'étendent à $\mathscr{M}(X)$, de façon unique, de façon à rester compatibles avec $\otimes$.

7. Les foncteurs Hom et R Hom

Dans $\mathscr{M}(X)$, on a aussi des foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}$, liés à $\otimes$ par la formule habituelle

$$\mathrm{Hom}(P \otimes Q, R) \simeq \mathrm{Hom}(P, \underline{\mathrm{Hom}}(Q, R)),$$

$$\simeq \mathrm{Hom}(Q, \underline{\mathrm{Hom}}(P, R)),$$

et qui s'étendent en $\mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(P, Q)$, $P, Q \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}^b(\mathscr{M}(X)))$, satisfaisant à la relation analogue relativement à $\underline{\otimes}$. **La formation des $\underline{\mathrm{Hom}}$ et $\mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}$ est compatible avec les T_ℓ. [N. B. On retrouve la formation des $f^!$…]**

[12] $\mathscr{M}^+(X)$ est une *sous-catégorie abélienne épaisse* de $\mathscr{M}(X)$; l'appartenance à $\mathscr{M}^+(X)$ se vérifie fibre par fibre …

8. Motifs constants, tordus et polynômes caractéristiques

Soient ℓ, ℓ' des nombres premiers, premiers aux caractéristiques résiduelles de X. Soit $M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^+(X))$. On veut que

$$\begin{array}{c} T_\ell(M) \quad \text{faisceau constant tordu} \\ \Updownarrow \\ T_{\ell'}(M) \quad \text{faisceau constant tordu} \end{array}$$

et que sous ces conditions, $T_\ell(M)$ et $T_{\ell'}(M)$ doivent avoir même rang en chaque point.

Pour vérifier l'égalité des rangs, on est ramené au cas où X est le spectre d'un corps (fini si on veut, on clôture algébrique d'un tel). Plus généralement, si u est un endomorphisme de M (avec $X = \mathrm{Spec}(k)$, k un corps), on en déduit

$$T_\ell(u) \in \mathrm{End}(T_\ell(M)), \quad T_{\ell'}(u) \in \mathrm{End}(T_{\ell'}(M)),$$

et je dis que l'on a

$$\boxed{\mathrm{Tr}(T_\ell(u)) = \mathrm{Tr}(T_{\ell'}(u)) \in \mathbf{Q},}$$

d'où, remplçant u par $\Lambda^i(u)$, le fait

$$\boxed{P(T_\ell(u), t) = P(T_{\ell'}(u), t) \in \mathbf{Q}[t].}$$

[Ici il s'agit des polynômes caractéristiques].

Pour ceci, notons que

$$u \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_X, \mathrm{Hom}(M, M^2)) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_X, \check{M} \otimes M),$$

et on a un *morphisme contraction*[13]

$$\check{M} \otimes M \longrightarrow \mathbb{1}_X,$$

d'où un $c(u) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_{\mathbb{X}})$, et

$$\mathrm{Tr}(T_\ell(u)) = T_\ell(c(u)) \in \mathbf{Q}_\ell,$$

et il suffit de savoir :

$$\boxed{X \text{ connexe} \Rightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}X) = \mathbf{Q}\, \mathrm{id}_{\mathbb{1}_X}.}$$

[13] *à inclure dans le formalisme tensoriel*

9. Filtration de $\mathscr{M}^+(X)$ et $\mathscr{M}(X)$

9.1 Filtration par le poids.

$$\mathscr{M}^{+0}(X) \subset \mathscr{M}^{+1}(X) \subset \cdots \subset \mathscr{M}^{+i}(X) \subset \ldots$$

filtration exhaustive de $\mathscr{M}(X)$, [L'appartenance à $\mathscr{M}^{+i}(X)$ se vérifie fibre par fibre (géométrique si on veut), et dans le cas X de type fini sur $\mathbf{Z}$, il suffit de vérifier en les points fermés (pour ceux-ci, il y a un critère par Frobenius, cf. plus bas)[14]], compatible avec f^*, et $M|_x \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^{+i}(k(x))) \Rightarrow \exists x \in U$ voisinage de $\overline{x}$, tel que $M|_U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{M}^{+i}(U)$). Soit $f : X \longrightarrow Y$, alors

$$\mathrm{R}^j f_! : \mathscr{M}^{+i}(X) \longrightarrow \mathscr{M}^{+j}(X);$$

de plus, $\mathscr{M}^{+i}(k)$ (k un corps algébriquement clos) est “engendré” par les sous-espaces $\mathrm{R}^j f_!(\mathbb{1}_X)$ pour X si on veut projectif lisse de dim $\leq j$ sur k.

[au[15] sens que tout $M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^i(k))$ a une filtration dont les facteurs sont isomorphes à de tels sous-espaces].

$$\begin{cases} \mathscr{M}^{+i}(X) \otimes \mathscr{M}^{+j}(X) \subset \mathscr{M}^{+i+j}(X), \\ \mathbf{Z}(-1) \in \mathrm{Ob}(M^{+2}(X)) \end{cases}$$

d'où

$$\mathscr{M}^{+i}(X) \otimes \mathrm{Z}(-j) \subset \mathscr{M}^{+i+2j}(X), \quad \text{pour} \quad j \geq 0.$$

On a mieux :

$$M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^{+i}(X)) \Leftrightarrow M(-j) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^{+i+2j}(X)).$$

De cette façon, la filtration de $\mathscr{M}^+(X)$ par les $\mathscr{M}^{+i}(X)$ ($i \geq 0$) peut se prolonger en une filtration de $\mathscr{M}(X)$ par des $\mathscr{M}^i(X)$ ($i \in \mathbf{Z}$) de telle façon que pour $i \geq 0$, ce soit la filtration déjà envisagée, et pour i quelconque, on définit

$$M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^i(X)) \Leftrightarrow M(-j) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^{i+2j}(X)),$$

[14] généraliser compatibilités avec $\varprojlim$ de préschémas

[15] indice en bas

où on prend j assez grand pour que $M(-j) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^+(X))$. On notera que[16]

$$\mathscr{M}^{+i}(X) = \mathscr{M}^i(X) \cap \mathscr{M}^+(X),$$

si $i \geq 0$, et pour tout i si on définit $\mathscr{M}^{+i}(X) = \{0\}$ si $i < 0$. On aura

$$\otimes \mathscr{Q}(-1) : M^i(X) \cong \mathscr{M}^{i+2}(X),$$

$$\otimes \mathscr{Q}(j) : M^i(X) \cong \mathscr{M}^{i+2j}(X),$$

mais on fait attention que l'inclusion

$$\mathbf{Q}(-1) \otimes M^{+i}(X) \hookrightarrow M^{+i+2}(X),$$

plus généralement

$$\mathbf{Q}(-j) \otimes M^{+i} \hookrightarrow M^{+i+2j}(X),$$

est *stricte* en général, i.e n'est pas une équivalence de catégories.

Noter[17] que $\mathscr{M}^{+i}(X)$ est *épaisse* dans $\mathscr{M}^{+j}(X)$, et de même $\mathscr{M}^i(X)$ épaisse dans $\mathscr{M}^j(X)$ $(i \leq j)$.

Les quotients $G_i^+(X) = \mathrm{Gr}_i(\mathscr{M}^+(X)) \simeq \mathscr{M}_i^+(X)/\mathscr{M}_{i-1}^+(X)$ et $G_i(X) = \mathrm{Gr}_i(\mathscr{M}(X)) \simeq \mathscr{M}_i(X)/\mathscr{M}_{i-1}(X)$ sont fort intéressants. Notons que les $G_i(X)$ sont tous équivalents par twisting $G_i(X) \simeq G_{i+2j}(X)$, en particulier tous équivalents canoniquement à $G_0(X)$. D'ailleurs

$$G_i^+(X) \hookrightarrow G_i(X) \simeq G_0(X),$$

équivalent à une sous-catégorie pleine et *épaisse* de $G_i(X) \simeq G_0(X)$.

9.2 Filtration par le "type dimmensionnel".

On pose pour $i \geq 0$,

$$D_i(\mathscr{M}^+(X)) = \begin{cases} \text{sous-catégorie pleine de } \mathscr{M}^+(X) \\ \text{formée des objets qui se dévissent loc. étale (du moins fibre par fibre)} \\ \text{en objets de la forme} \\ M(-j), \quad \text{avec} \quad M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^{+i}(X)), j \in \mathscr{Z}, i \geq 0 \end{cases}$$

[16] indices en bas

[17] indices en bas

i.e., on prend (du moins pour $X = \mathrm{Spec}(K)$ d'un corps) la filtration minimum qui majore celle par le poids, qui soit stable par $\otimes \mathbf{Q}(-1)$, et *épaisse*.

Les $D_i(\mathscr{M}^+(X))$ sont stables par image inverse, et pour l'image directe on a

$$\mathrm{R}^j f_!(D_i(\mathscr{M}^+(X))) \subset D_{i+j}(\mathscr{M}^+(Y)),$$

$$\mathrm{R}^j f_*(D_i(\mathscr{M}^+(X))) \subset D_{i+j}(\mathscr{M}^+(Y)).$$

[On a seulement $\mathrm{R}^j f_*(\mathscr{M}^{+i}(X)) \subset \mathscr{M}^{+i+2j}(Y)$!?[18]]

Ici on a

$$M \in \mathrm{Ob}(D_i(\mathscr{M}^+(X))) \Leftrightarrow M(-j) \in \mathrm{Ob}(D_i(\mathscr{M}^+(X))),$$

et la filtration[19] de $\mathscr{M}^+(X)$ par ls $D_i(\mathscr{M}^+(X))$ s'étend en une filtration des $\mathscr{M}(X)$ par des $D_i(\mathscr{M}(X))$ induisant la filtration donnée,

$$M \in \mathrm{Ob}(D_i(\mathscr{M}(X))) \Leftrightarrow M(-j) \in \mathrm{Ob}(D_i(\mathscr{M}(X))) \quad \text{pour } j \text{ grand.}$$

On a

$$D_i(\mathscr{M}(X)) \otimes D_j(\mathscr{M}(X)) \subset D_{i+j}(\mathscr{M}(X)),$$

mais $\mathbf{Z}(j) \in D_0(M(X))$ pour tout j, et de même en mettant des $+$.

Enfin, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i(D_j(\mathscr{M}(X)), D_k(\mathscr{M}(X))) \subset D_{j+k}(\mathscr{M}(X))).$$

(pas de formule aussi simple en termes des $\mathscr{M}_\alpha(X)$!).

10. Motifs constants tordus. Anneaux $\mathscr{M}^+(X)$ et $\mathscr{M}(X)$

11. Interprétation topologique des types dimensionnels (cas "géométrique")

Soit X non singulière sur k alg. clos. Considérons la filtration X par la codimension[20], et la suite spectrale

$$\mathrm{H}^*(X, \mathbf{Q}_\ell) \Leftarrow E_1^{p,q} = \amalg_{x \in X[p]} \mathrm{H}^{q-p}(X, \mathbf{Q}_\ell)(-p)$$

[18]Cela distingue formellement les filtrations $D_i(M)$ et $\mathscr{M}_i$!

[19]toutes formulées en termes de la dim de X

[20]attention terme initial E_1 et non E_2 !!

où on pose

$$\begin{cases} X[p] = \{x \in X \mid \dim(\mathscr{O}_{X,x}) = p\}, \\ \mathrm{H}^*(X, \mathbf{Z}_\ell(-p)) = \varinjlim_{U \text{ ouvert } \neq \varnothing \text{ de } \overline{X}} \mathrm{H}^*(U, \mathbf{Q}_\ell(-p)) \end{cases}$$

On veut que cette suite spectrale d'une suite spectrale de motifs. [du moins à partir de $E_r^{p,q}$ avec $r \geq 2$, sinon il faudrait parler de ind-motifs, ou bien prendre une filtration *finie* convenable de X par des sous-schémas fermés]. Le morceau en dim n[21] de filtration $\geq p$ est visiblement de type dimensionnel $\leq n-2p$. On veut que ce soit *exactement* le morceaux de type dimensionnel $n-p$.

12. L'homomorphisme fondamental $L(K) \longrightarrow M^+(K)$ et invariants birationnels fondamentaux

13. Caractérisation galoisienne des filtrations

14. Invariants de Galois et théorèmes de commutation

15. Cohomologie absolue

16. Relations avec les points rationnels et la cohomologie des variétés abéliennes sur des schémas de type fini…

17. Formes positives

18. Dictionnaire : Fonctions L — Cohomologie à action galoisienne

19. Relation avec la théorie de Hodge[22]

[21] Si X est **projectif** (hypothèse essentielle même si X de dim 1)

[22] N.d.T : semble avoir été reconsidérer et traiter dans le document…