

MATHEMATICAL WORKS

Collection

par

Alexandre GROTHENDIECK

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

<https://agrothendieck.github.io/>

CONTENTS

1950	13
Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe	13
Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces (F)	15
Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes	16
1951	16
Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques	17
Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe r	
1952	18
Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux	19
Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces r	
Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires	21
1953	21
Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$	22

Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles	23
Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I	24
Sur certains espaces de fonctions holomorphes. II	25
1954	25
La théorie de Fredholm	26
Quelques points de la théorie des produits tensoriels topologiques	27
Espaces vectoriels topologiques	28
Topological vector spaces	29
Sur certains sous-espaces vectoriels de L^p	30
Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires. I	31
Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires. II	32
Sur les espaces (F) et (DF)	33
1955	33
Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires	34
Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L_1	35
Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de von Neumann munies d'une topologie σ -faible	36
A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf	37
Introduction	37
I. General fibre spaces	38
II. Sheaves of sets	41

III. Group bundles and sheaves of groups	42
IV. Fibre spaces with structure sheaf	42
V. The classification of fibre spaces with structure sheaf	42
1956	42
Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques	43
Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux	44
La théorie de Fredholm	45
Sur un mémoire de A. Weil : Généralisation des fonctions abéliennes	46
Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers	47
Généralités sur les groupes algébriques affines. Groupes algébriques affines commutatifs	48
Compléments de géométrie algébrique. Espaces de transformations	49
Les théorèmes de structure fondamentaux pour les groupes algébriques affines	50
1957	50
Sous-groupes de Cartan, éléments réguliers. Groupes algébriques affines de dimension 1	51
Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann	52
Un résultat sur le dual d'une C^* -algèbre	53
Sur Quelques Points d'Algèbre Homologique	54
Some Aspects of Homological Algebra	55
Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents	56

1958	56
La théorie des classes de Chern	57
Torsion homologique et sections rationnelles	58
Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections	59
Sur une note de Mattuck-Tate	60
The cohomology theory of abstract algebraic varieties	62
1959	65
Géométrie formelle et géométrie algébrique	66
Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique I. Généralités. Descente	
1960	67
Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique II. Le théorème d'existence	
Techniques de construction en géométrie analytique I :Description axiomatique de l'espace de Te	
1961	69
Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique III. Préschémas quotient	
Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV. Les schémas de Hilbe	
Techniques de construction en géométrie analytique II :Généralités sur les espaces annelés et les e	
Techniques de construction en géométrie analytique III :Produits fibrés d'espaces analytiques	73
Techniques de construction en géométrie analytique IV :Formalisme général des foncteurs repré	

Techniques de construction en géométrie analytique V :Fibrés vectoriels, fibrés projectifs, fibrés e	
Techniques de construction en géométrie analytique VI :Etude locale des morphismes ; germes d'	
Techniques de construction en géométrie analytique VII :Etude locale des morphismes ; éléments	
Techniques de construction en géométrie analytique VIII :Rapport sur les théorèmes de finitude	
Techniques de construction en géométrie analytique IX :Quelques problèmes de modules	79
Techniques de construction en géométrie analytique X :Construction de l'espace de Teichmüller	
The trace of certain operators	81
1962	81
Fondements de la Géométrie Algébrique. Commentaires	82
Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique V. Les schémas de Picard	
Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique VI. Les schémas de Picard	
Résidus et dualité	85
1964	85
Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L	86
1965	86
Le groupe de Brauer, I : Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses	87
Le groupe de Brauer, II : Théories cohomologiques	88

1966	88
Crystals and the de Rham cohomology of schemes	89
Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens	92
1967	92
Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques	93
1968	93
Le groupe de Brauer III, Exemples et compléments	94
Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif	95
Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets	96
Tapis de Quillen	97
1. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux	97
2. n -catégories, catégories n -uples, et Gr-catégories	99
3. Point de vue “motivique” en théorie du cobordisme	99
Hodge’s general conjecture is false for trivial reasons	100
1969	102
Résumé de quelques résultats de Kostant	103
Standard Conjectures on Algebraic Cycles	104
1. Introduction	104
2. A weak form of conjecture 1	105
3. The conjecture 1 (of Lefschetz type)	107
4. Conjecture 2 (of Hodge type)	108

Conclusions	109
1970	109
Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets	110
Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux de Dieudonné	111
Travaux de Heisouké Hironaka sur la résolution des singularités	112
Groupes de Barsotti-Tate et cristaux	113
Programme de la théorie de Dieudonné sur une base S où p est localement nilpotent	114
1971	114
The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a	
Platitude d'une adhérence schématique et lemme de Hironaka généralisé	116
1972	116
Curriculum vitae	117
Principales publications	119
Esquisse thématique des principaux travaux mathématiques de A. Grothendieck	120
1. Analyse Fonctionnelle	120
2. Algèbre Homologique	121
3. Topologie	121
4. Algèbre	123
5. Géométrie Analytique	124
6. Groupes Algébriques	126
7. Groupes discrets	126
8. Groupes formels	127

9. Arithmétique	127
10. Géométrie Algébrique	128
Bibliographie	133
1975	133
[·] de De Rham à puissances divisées [·et moyen] des modules	134
1981	134
Structures Stratifiées	135
1. La situation la plus élémentaire	135
2. Stratification globale	136
3. Stratification globale	137
4. Topos canoniques associées à une stratification globale	137
1983	139
Notes Anabéliennes	140
I. Résultats de fidélité	140
II. La question de pleine fidélité	153
III. Étude des sections de E_U sur Γ	158
IV. Sections d'extensions et anneaux de valuations généraux	171
Structure à l'infini des $M_{g,v}$	176
1. Courbes standard	176
2. Graphe associé à une courbe standard	177
3. Courbes "stables" et MD -graphes	179
4. La théorie de Mumford-Deligne	180
5. Spécialisation des MD -graphes	181
6. Morphismes de [·] de graphes et de maquettes	182
7. Étude des [·] de $\dim \leq 2$ [·] détermination des graphes correspondantes	182

8. Structure $[\]$	182
9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ($[\]$ MDT-structure) :	
10. Structures MDT analytiques : $[\]$	182
11. Digression : $[\]$ Structure à l’infini des groupoïdes fondamentaux . .	182
12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une $[\]$ et leur dévissages en “topos élémentaires”	
13. Digression sur stratification “locales” $[\]$	182
1984	182
Esquisse d’un Programme	183
1. Envoi	183
2. Un jeu de “Lego-Teichmüller” et le groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur \mathbf{Q} . . .	185
1. Envoi	185
4. Polyèdres réguliers sur les corps finis	185
5. Haro sur la topologie dite “générale”, et réflexions heuristiques vers une topologie dite “modérée”	
6. “Théories différentielles” (à la Nash) et “théories modérées”	185
7. À la Poursuite des Champs	185
8. Digressions de géométrie bidimensionnelle	185
9. Bilan d’une activité enseignante	185
10. Épilogue	186
Sketch of a Programme	188
1. Envoi	188
2. A game of “Lego-Teichmüller” and the Galois group $\overline{\mathbf{Q}}$ over \mathbf{Q}	189
3. Number fields associated to a child’s drawing	195
4. Regular polyhedra over finite fields	202
5. Denunciation of so-called “general” topology, and heuristic reflections towards a so-called “tame”	
6. “Differentiable theories” (à la Nash) and “tame theories”	203
7. Pursuing Stacks	204
8. Digressions on 2-dimensional geometry	206
9. Assessment of a teaching activity	209
10. Epilogue	210

Rapport d'activité	212
1986	212
Le Bi-icosaèdre	213
Vers une Géométrie des Formes	223
I. Vers une géométrie des formes (topologiques)	223
II. Réalisations topologiques des réseaux	224
III. Réseaux via découpages	224
IV. Analysis situs (première mouture)	224
V. Algèbre des figures	224
VI. Analysis situs (deuxième mouture)	224
VII. Analysis situs (troisième mouture)	225
VIII. Analysis situs (quatrième mouture)	225

SUR LA COMPLÉTION DU DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL LOCALEMENT CONVEXE¹

Note² de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Élie
Cartan.

Soient E un espace vectoriel localement convexe, S un ensemble de parties bornées, convexes, symétriques et fermées de E , E'_S (resp. \widehat{E}'_S), l'espace des formes linéaires sur E continues (resp. dont les restrictions aux éléments de S sont continues), munis de la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de S . Soit E_0 le sous-espace engendré par $\cup S$

[]

Proposition 1. — Si les éléments de S sont précompacts, pour que E'_S soit complet, il faut (et il suffit) que la restriction à E_0 de tout $u \in \widehat{E}'_S$ soit continue.

On se ramène en effet facilement à la

Proposition 2. — Si les éléments de S sont précompacts, E'_S est dense dans \widehat{E}'_S .

[] Comme le dual de E est le même pour la topologie donnée et sa topologie faible, et que les ensembles bornés sont faiblement précompacts, ces propositions seront d'application assez générale. Signalons la

²Séance du 6 février 1950.

C. R., 1950, i^{er} Semestre. (T. 230 N° 7.).

Corollaires. —

1° Si $E_0 = E$ et si les éléments de S sont précompacts, le complété de E'_S s'identifie à \widehat{E}'_S .

2° Si E'_S est complet, il en est de même de E'_T pour $T \supset S$ (S, T ensembles de parties bornées de E , sans plus).

En utilisant le fait que E s'identifie à un dual topologique de son dual faible, on obtient de plus :

3° *Le complété de E s'identifie à l'espace des formes linéaires sur son dual dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, muni de la topologie de la convergence uniforme sur ces parties. (On retrouve en particulier le complété pour la topologie faible.)*

4° *Si E est complet, toute topologie localement convexe plus fine qui a même dual, et plus généralement qui puisse se définir par une famille de seminormes semi-continues (soit : par un système fondamental de voisinages convexes fermés) est encore complète. [En particulier la topologie forte de Mackey associée³ et la topologie induite par le bidual fort⁴ sont encore complètes.]*

5° *Si E est complet, toute forme linéaire sur son dual dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues est faiblement continue. On retrouve ainsi un fait connu pour les espaces de Fréchet et leurs limites inductives⁴.*

³Cf. G. W. MACKEY, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 57, 1945, p. 155-207 et 59, 1946, p. 530-537

⁴Cf. J. DIEUDONNÉ, et L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces (F) et (LF)* (à paraître aux Annales de Grenoble, 1950).

QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS À LA DUALITÉ DANS LES ESPACES (F) ⁵

Note⁶ de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud
Denjoy.

Soient E un espace (F) , E' son dual fort, E'' son bidual fort [?]¹. Les résultats suivants répondent partiellement à certaines questions posées dans [?].

Proposition 1. — *Toute partie bornée dénombrable de E'' est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de E .*

⁶Séance du 30 octobre 1950

¹J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ, La dualité dans les espaces (F) et (LF) (à paraître aux *Annales de Grenoble*, 1950). La terminologie est celle de cet article.

CRITÈRES GÉNÉRAUX DE COMPACITÉ DANS LES
ESPACES VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXES.

PATHOLOGIES DES ESPACES $(LF)^2$

Note³ de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud
Denjoy.

La première partie de cette Note

1. —

³Séance du 30 octobre 1950

Soit C un espace de Banach

A GENERAL THEORY OF FIBRE SPACES WITH STRUCTURE SHEAF

Introduction

When one tries to state in a general algebraic formalism the various notions of fibre space: general fibre spaces (without structure group, and maybe not even locally trivial); or fibre bundle with topological structure group G as expounded in the book of Steenrod ([1]); or the “differentiable” and “analytic” (real or complex) variants of these notions; or the notions of algebraic fibre spaces (over an abstract field k) - one is led in a natural way to the notion of fibre space with a structure sheaf \mathbf{G} . This point of view is also suggested a priori by the possibility, now classical, to interpret the (for instance “topological”) classes of fibre bundles on a space X , with *abelian* structure group G , as the elements of the first cohomology group of X with coefficients in the sheaf \mathbf{G} of germs of continuous maps of X into G ; the word “continuous” being replaced by “analytic” respectively “regular” if G is supposed an analytic respectively an algebraic group (the space X being of course accordingly an analytic or algebraic variety). The use of cohomological methods in this connection have proved quite useful, and it has become natural, at least as a matter of notation, even when G is not abelian, to denote by $H^1(X, \mathbf{G})$ the set of classes of fibre spaces on X with structure sheaf \mathbf{G} , \mathbf{G} being as above a sheaf of germs of maps (continuous, or differentiable, or analytic, or algebraic as the case

may be) of X into G . Here we develop systematically the notion of fibre space with structure sheaf \mathbf{G} , where \mathbf{G} is any sheaf of (not necessarily abelian) groups, and of the first cohomology set $H^1(X, \mathbf{G})$ of X with coefficients in \mathbf{G} . The first four chapters contain merely the first definitions concerning general fibre spaces, sheaves, fibre spaces with composition law (including sheaves of groups) and fibre spaces with structure sheaf. The functor aspect of the notions dealt with has been stressed throughout, and as it now appears should have been stressed even more. As the proofs of most of the facts stated reduce of course to straightforward verifications, they are only sketched or even omitted, the important point being merely a consistent order in the statement of the main facts. In the last chapter, we define the cohomology set $H^1(X, \mathbf{G})$ of X with coefficients in the sheaf of groups \mathbf{G} ,

[]

I. General fibre spaces

Unless otherwise stated, none of the spaces to occur in this report have to be supposed separated.

1.1 Notion of fibre space

Definition 1.1.1. — A fibre space over a space X is a triple (X, E, p) of the space X , a space E and a continuous map p of E into X .

We do not require p to be onto, still less to be open, and if p is onto, we do not require the topology of X to be the quotient topology of E by the map p . For abbreviation, the fibre space (X, E, p) will often be denoted by E only, it being understood that E is provided with the supplementary structure consisting of a continuous map p of E into the space X . X is called the *base space* of the fibre space, p the *projection*, and for any $x \in X$, the subspace $p^{-1}(x)$ of E (which is closed if $\{x\}$ is closed) is the *fibre* of x (in E).

Given two fibre spaces (X, E, p) and (X', E', p') , a *homomorphism* of the first into the second is a pair of continuous maps $f : X \longrightarrow X'$ and $g : E \longrightarrow E'$, such

that $p'g = fp$, i.e. commutativity holds in the diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

Then g maps fibres into fibres (but not necessarily *onto*!); furthermore, if p is surjective, then f is uniquely determined by g . The continuous map f of X into X' being given, g will be called also a f -homomorphism of E into E' . If, moreover, E'' is a fibre space over X' , f' a continuous map $X' \rightarrow X''$ and $g' : E' \rightarrow E''$ a f' -homomorphism, then $g'g$ is a $f'f$ -homomorphism. If f is the identity map of X onto X , we say also X -homomorphism instead of f -homomorphism. If we speak of homomorphisms of fibre spaces over X , without further comment, we will always mean X -homomorphisms.

The notion of *isomorphism* of a fibre space (X, E, p) onto a fibre space (X', E', p') is clear: it is a homomorphism (f, g) of the first into the second, such that f and g are onto-homeomorphisms.

1.2 Inverse image of a fibre space, inverse homomorphisms

Let (X, E, p) be a fibre space over the space X , and let f be a continuous map of a space X' into X . Then the *inverse image* of the fibre space E by f is a fibre space E' over X' . E' is defined as the subspace of $X' \times E$ of points (x', y) such that $fx' = py$, the projection p' of E' into the base X' being given by $p'(x', y) = x'$. The map $g(x', y) = y$ of E' into E is then an f -homomorphism, inducing for each $x' \in X'$ a *homeomorphism* of the fibre of E' over x' onto the fibre of E over fx' .

[]

1.3 Subspace, quotient, product

Let (X, E, p) be a fibre space, E' any subspace of E , then the restriction p' of p to E' , defines E'

[]

1.4 Trivial and locally trivial fibre spaces

Let X and F be two spaces, E the product space, the projection of the product on X defines E as a fibre space over X , called the *trivial fibre space over X with fibre F* .

All fibres are canonically homeomorphic with F .

[]

1.5 Definition of fibre spaces by coordinate transformations

Let X be a space, (U_i) a covering of X , for each

[]

1.6 The case of locally trivial fibre spaces

The method of the preceding section for constructing fibre spaces over X will be used mainly in the case where we are given a fibre space over T over X , and where, given an open covering (U_i) of X , we consider the fibre spaces

[]

1.7 Sections of fibre spaces

Definition 1.7.1. — *Let (X, E, p) be a fibre space; a section of this fibre space (or, by pleonasm, a section of E over X) is a map x of X into E such that ps is the identity map of X . The set of continuous sections of E is noted $H^0(X, E)$.*

It amounts to the same to say that s is a function the value of which at each $x \in X$ is in the fibre of x in E (which depends on x !).

The existence of a section implies of course that p is onto, and conversely if we do not require continuity. However, we are primarily interested in continuous sections. A *section of E over a subset Y of X* is by definition a section of $E|Y$. If Y is open, we write $H^0(Y, E)$ for the set $H^0(Y, E|Y)$ of all continuous sections of E over Y .

$H^0(X, E)$ as a *functor*. Let E, E' be two fibre spaces over X , f an X -homomorphism of E into E' . For any section s of E , the composed map fs

is a section of E' , continuous if s is continuous. We get thus a map, noted f , of $H^0(X, E)$ into $H^0(X, E')$. The usual functor properties are satisfied:

- a. If the two fibre spaces are identical and f is the identity, the so is f .
- b. If f is an X -homomorphism of E into E' and f' an X -homomorphism of E' into E'' (E, E', E'' fibre spaces over X) then $(f'f) = f'f$.

Let (X, E, p) be a fibre space, f a continuous map of a space X' into X , and E' the inverse image of E under f .

II. Sheaves of sets

Throughout this exposition, we will now use the word “section” for “continuous section”.

2.1 Sheaves of sets

Definition 2.1.1. — *Let X be a space. A sheaf of sets on X (or simply a sheaf) is a fibre space (E, X, p) with base X , satisfying the condition: each point a of E has an open neighbourhood U such that p induces a homeomorphism of U onto an open subset $p(U)$ of X .*

This can be expressed by saying that p is an interior map and a local homeomorphism. It should be kept in mind that, even if X is separated, E is not supposed separated (and will in most important instances not be separated).

[]

2.2

2.3 Definition of a sheaf by systems of sets

2.4 Permanence properties

2.5 Subsheaf, quotient sheaf. Homeomorphism of sheaves

2.6 Some examples

- a.

- b.
- c.
- d. **Sheaf of germs of subsets.** Let X be a space, for any open set $U \subset X$ let $P(U)$ be the set of subsets of U . If $V \subset U$, consider the map $A \longrightarrow A \cap V$ of $P(U)$ into $P(V)$. Clearly the conditions of transitivity, and of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, so that the sets $P(U)$ appear as the sets $H^0(U, P(X))$ of sections of a well determined sheaf on X , the elements of which are called *germs of sets in X* . Any condition of a local character on subsets of X defines a subsheaf of $P(X)$, for instance the sheaf of *germs of closed sets* (corresponding to the relatively closed sets in U), or if X is an analytic manifold, the sheaf of germs of analytic sets, etc.

Other important examples of sheaves will be considered in the next chapter.

III. Group bundles and sheaves of groups

IV. Fibre spaces with structure sheaf

V. The classification of fibre spaces with structure sheaf

SOME ASPECTS OF HOMOLOGICAL ALGEBRA¹

¹Translation by M. L. Barr and M. Barr

1. Dans un travail récent [?], Mattuck et Tate déduisent l'inégalité fondamentale de A. Weil qui établit l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions [?] comme conséquence facile du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces. En essayant de comprendre la portée exacte de leur méthode, je suis tombé sur l'énoncé suivant, connu en fait depuis 1937 [?] [?] [?] (comme me l'a signalé J. P. Serre), mais apparemment peu connu et utilisé:

[]

2. Nous allons déduire sur X , nous désignerons par $l(D)$ la dimension de l'espace vectoriel des fonctions f sur X telles que $(f) \geq -D$ donc $l(D)$ ne dépend que de la classe de D . Rappelons *l'inégalité de Riemann-Roch*

[]

3. Ce qui précède n'utilisait pas à proprement parler la méthode de Mattuck-Tate (si ce n'est en utilisant l'inégalité de Riemann-Roch sur les surfaces). Nous allons indiquer maintenant comment la méthode de ces auteurs, convenablement généralisée, donne d'autres inégalités que celle de A. Weil. Nous nous appuierons sur le

[]

Remarques. Le corollaire 1 devient faux si on ne fait pas l'hypothèse que $K/2$ est encore une classe de diviseurs. En effet, toutes les hypothèses sauf cette dernière sont vérifiées si X est une surface non singulière *rationnelle*. Or, à partir d'une telle surface, on construit facilement une surface birationnellement équivalente par éclatements successifs, dont l'index τ soit < 0 (contrairement à (3.7 ter)).

En effet, on vérifie aisément que lorsqu'on fait éclater un point dans une surface non singulière projective, l'index diminue d'une unité. (Cette remarque, ainsi que l'interprétation de l'inégalité (3.7) à l'aide de l'index, m'a été signalée par J. P Serre).

La disparité des énoncés qu'on déduit du théorème (3.2) est due au fait qu'il n'est pas relatif à un élément arbitraire de l'espace vectoriel E de Néron-Séveri introduit plus haut, mais à un élément du "lattice" provenant des diviseurs sur X . On notera d'ailleurs que dans le cas particulier où X est le produit des deux courbes C et C' , le théorème 3.2 ne contient rien de plus que l'inégalité de A. Weil.

THE COHOMOLOGY THEORY OF ABSTRACT ALGEBRAIC VARIETIES

It is less than four years since cohomological methods (i.e. methods of Homological Algebra) were introduced into Algebraic geometry in Serre's fundamental paper [?], and it seems already certain that they are to overflow this part of mathematics in the coming years, from the foundations up to the most advanced parts. All we can do here is to sketch briefly some of the ideas and results. None of these have been published in their final form, but most of them originated in or were suggested by Serre's paper.

Let us first give an outline of the main topics of cohomological investigation in Algebraic geometry, as they appear at present. The need of a theory of cohomology for 'abstract' algebraic varieties was first emphasized by Weil, in order to be able to give a precise meaning to his celebrated conjectures in Diophantine geometry [?]. Therefore the initial aim was to find the '*Weil cohomology*' of an algebraic variety, which should have as coefficients something 'at least as good' as a field of characteristic 0, and have such formal properties (e.g. duality, Künneth formula) as to yield the analogue of Lefschetz's 'fixed-point formula'. Serre's general idea has been that the usual 'Zariski topology' of a variety (in which the closed sets are the algebraic subset) is a suitable one for applying methods of Algebraic Topology. His first approach was hoped to yield at least the right Betti numbers of a variety, it being evident from the start that it could not be considered as the Weil cohomology itself, as the coefficient field for cohomology was the ground field of a variety,

and therefore not in general of characteristic 0. In fact, even the hope of getting the ‘true’ *Betti numbers* has failed, and so have other attempts of Serre’s [?] to get Weil’s cohomology by taking the cohomology of the variety with values, not in the sheaf of local rings themselves, but in the sheaves of Witt-vectors constructed on the latter. He gets in this way modules over the ring $W(k)$ of infinite Witt vectors on the ground field k , and $W(k)$ is a ring of characteristic 0 even if k is of characteristic $p \neq 0$. Unfortunately, modules thus obtained over $W(k)$ may be infinitely generated, even when the variety V is an abelian variety [?]. Although interesting relations must certainly exist between these cohomology groups and the ‘true ones’, it seems certain now that the Weil cohomology has to be defined by a completely different approach. Such an approach was recently suggested to me by the *connections between sheaf-theoretic cohomology and cohomology of Galois groups on the one hand, and the classification of unramified coverings of a variety on the other* (as explained quite unsystematically in Serre’s tentative Mexico paper [?]), and by Serre’s idea that a ‘reasonable’ algebraic principal fiber space with structure group G , defined on a variety V , if it is not locally trivial, should become locally trivial on some covering of V *unramified* over a given point of V . This has been the starting point of a definition of the Weil cohomology (involving both ‘spatial’ and Galois cohomology), which seems to be the right one, and which gives clear suggestions how Weil’s conjectures may be attacked by the machinery of Homological algebra. As I have not begun these investigations seriously as yet, and as moreover this theory has a quite distinct flavor from the one of the theory of algebraic coherent sheaves which we shall now be concerned with, we shall not dwell any longer on Weil’s cohomology. Let us merely remark that the definition alluded to has already been the starting-point of a theory of cohomological dimension of fields, developed recently by Tate [?].

The second main topic for cohomological methods is the *cohomology theory of algebraic coherent sheaves*, as initiated by Serre. Although inadequate for Weil’s purposes, it is at present yielding a wealth of new methods and new notions, and gives the key even for results which were not commonly thought to be concerned with sheaves, still less with cohomology, such as Zariski’s theorem on ‘holomorphic functions’ and his ‘main theorem’ - which can be stated now in a more satisfac-

tory way, as we shall see, and proved by the same uniform elementary methods. The main parts of the theory, at present, can be listed as follows:

- (a) General finiteness and asymptotic behaviour theorems.
- (b) Duality theorems, including (respectively identical with) a cohomological theory of residues.
- (c) Riemann-Roch theorem, including the theory of Chern classes for algebraic coherent sheaves.
- (d) Some special results, concerning mainly abelian varieties.

The third main topic consists in the *application of the cohomological methods to local algebra*. Initiated by Koszul and Cartan-Eilenberg in connection with Hilbert's 'theorem of syzygies', the systematic use of these methods is mainly due again to Serre. The results are the *characterization* of regular local rings as those whose global cohomological dimension is finite, the clarification of *Cohen-Macaulay's equidimensionality theorem* by means of the notion of *cohomological codimension* [?], and specially the possibility of giving (for the first time as it seems) a *theory of intersections*, really satisfactory by its algebraic simplicity and its generality. Serre's result just quoted, that regular local rings are the only ones of finite global cohomological dimension, accounts for the fact that only for such local rings does a satisfactory theory of intersections exist. I cannot give any details here on these subjects, nor on various results I have obtained by means of a *local duality theory*, which seems to be the tool which is to replace differential forms in the case of unequal characteristics, and gives, in the general context of commutative algebra, a clarification of the notion of residue, which as yet was not at all well understood. The motivation of this latter work has been the attempt to get a global theory of duality in cohomology for algebraic varieties admitting arbitrary singularities, in order to be able to develop intersection formulae for cycles with arbitrary singularities, in a non-singular algebraic variety, formulas which contain also a 'Lefschetz formula mod p ' [?]. In fact, once a proper local formalism is obtained, the global statements become almost trivial. As a general fact, it appears

that, to a great extent, the ‘local’ results already contain a global one; more precisely, global results on varieties of dimension n can frequently be deduced from corresponding local ones for rings of Krull dimension $n + 1$.

We will therefore

[]

Introduction

These notes are a rough summary of five talks given at I.H.E.S in November and December 1966. The purpose of these talks was to outline a possible definition of a p -adic cohomology theory, via a generalization of the De Rham cohomology which was suggested by work of Monsky-Washnitzer [?] and Manin [?].

The contents of the notes are by no means intended to be a complete theory. Rather, they outline the start of a program of work which has still not been carried out¹.

1. De Rham cohomology

1.1. Differentiable Manifolds. Let X be a differentiable manifold, and $\underline{\Omega}_{X/\mathbb{C}}^\bullet$ the complex of sheaves of differential forms on X , whose coefficients are complex valued differentiable functions on X .

Theorem 1.1. (De Rham) — *There is a canonical isomorphism*

$$H^*(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(\Gamma(X, \underline{\Omega}_{X/\mathbb{C}}^\bullet)),$$

where $H^*(X, \mathbb{C})$ is the canonical cohomology of X with complex coefficients.

¹For a more detailed exposition and progress in this direction, we refer to the work of P. Berthelot, to be developed presumably in SGA 8.

To prove this, one observes that, by Poincaré's lemma, the complex $\underline{\Omega}_{X/C}^\bullet$ is a *resolution* of the constant sheaf $\underline{\mathbb{C}}$ on X , and that the sheaves $\underline{\Omega}_{X/C}^j$ are *fine* for $j \geq 0$, so that $H^i(X, \underline{\Omega}_{X/C}^j) = 0$ for $i > 0$ and $j \geq 0$, whence the assertion.

An analogous result holds for the complex of sheaves of differential forms on X , whose coefficients are real valued differentiable functions on X .

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6. Criticism of the ℓ -adic cohomology. If X is a scheme of finite type over an algebraically closed field k , and ℓ is any prime number *distinct*² from the characteristic of k , the ℓ -adic cohomology of X is defined to be

1.7.

1.8. Proposals for a p -adic Cohomology. We only mention two proposals, namely Monsky and Washnitzer's method via special affine liftings (which we discuss in n° 2), and the method using the fppf (faithfully flat and finite presentation) topology.

By analogy with the ℓ -adic cohomology, the essential idea of the fppf topology was to consider the cohomology of X/k , with respect to the fppf topology, with coefficient groups in the category C^v of finite schemes of $\mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z}$ -modules. Examples of such schemes of modules are

2. The cohomology of Monsky and Washnitzer

2.1. Approach via liftings.

Suppose X_0 is a scheme on a perfect field k

3. Connections on the De Rham cohomology

For the definition of a *connection* and a *stratification* on a sheaf, see Appendix I of these notes.

²the ℓ -adic cohomology is still defined for ℓ equal to the characteristic of k , but it no longer has too many reasonable properties.

4. The infinitesimal topos and stratifying topos

We now turn to the definition of a more general category of coefficients for the De Rham cohomology. To this end we introduce two ringed topos, the *infinitesimal topos* and the *stratifying topos*.

We shall see later that in fact these two topos work well only in characteristic 0

5. Čech calculations

We now consider the cohomology of the infinitesimal topos and the stratifying topos³

6. Comparison of the Infinitesimal and De Rham Cohomologies

6.1. The basic idea. Let X be a scheme above S , and F a quasi-coherent Module on X fortified with a stratification relative to S .

7. The crystalline topos and connecting topos

7.1. Inadequacy of infinitesimal topos. Let X_0 be a scheme above a perfect field k of characteristic $p > 0$. Then, regarding X_0 as being above $S = \text{Spec } W(k)$ instead of k , the infinitesimal cohomology

$$H^*((X_0/S)_{\text{inf}}, \underline{O}X_0)$$

is a graded module

Appendix

Let X be a scheme above the base S , and F a Module on X . For each positive integer n ,

³For a general discussion of the cohomology of a topos, see (SGA 4 V).

TAPIS DE QUILLEN

1. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux

A toute catégorie C , on associe un ensemble semi-simplicial $S(C)$, trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$S : \longrightarrow .$$

Les systèmes locaux d'ensemble sur SC correspondent aux foncteurs sur C qui transforment toute flèche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à C). Les H^i sur SC d'un tel système local (H^0 pour ensembles, H^1 pour groupes, H^i quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs $\varprojlim^{(i)}$ dérivés de \varprojlim , ou si on préfère, des H^i (du *topos* C). On voit ainsi à quelle condition un foncteur $C \longrightarrow C'$ induit un homotopisme $SC \longrightarrow SC'$: en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il f et s que pour tout système de coefficients F' sur C' , l'homomorphisme naturel $\varprojlim_{C'}^{(i)} F' \longrightarrow \varprojlim_C^{(i)} F$ soit un isomorphisme (pour les i pour lesquels cela a un sens).

A C on peut associer le topos \tilde{C} , qui varie de façon *covariante* avec C . (NB le foncteur $C \mapsto \tilde{C}$ n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??).

Les systèmes de coefficients ensemblistes sur C (les foncteurs $C^\circ \longrightarrow \text{Ens}$ transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux localement constants i.e. les objets localement constants de \tilde{C} , définis intrinsèquement en termes de \tilde{C} . Ainsi, le fait pour un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ d'induire une homotopisme $S(C) \longrightarrow S(C')$ ne dépend que du morphisme de topos $\tilde{F} : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}'$ induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant F' sur C' i.e. sur

\widetilde{C}' , les applications induites $H^i(\widetilde{C}', F') \longrightarrow H^i(\widetilde{C}, \widetilde{F}^*(F'))$ sont des isomorphismes (pour les i pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T : \longrightarrow,$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial X la catégorie $T(X) = \Delta_{/X}$ des simplexes sur X , dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des $X_n \dots$ (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie Δ des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les X_n). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout X , $ST(X)$ est isomorphe canoniquement à X dans la catégorie homotopique construite avec \mathcal{S} , et que pour toute C , la catégorie $TS(C)$ est canoniquement "homotopiquement équivalente à C " i.e. canoniquement isomorphe à C dans la catégorie quotient de \mathcal{S} obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. Ces isomorphismes sont fonctoriels en X . Il en résulte formellement qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans \mathcal{S} est un homotopisme si et seulement si en est ainsi de $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$, d'où des foncteurs $S' : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}$ et $T' : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}$ entre les catégories "homotopiques", construites avec \mathcal{S} resp \mathcal{S}' , qui sont quasi-inverses l'un de l'autre.

De plus, Quillen construit un isomorphisme canonique et fonctoriel dans \mathcal{S}' entre C et la catégorie opposée C° , ou ce qui revient au même, un isomorphisme canonique et fonctoriel dans \mathcal{S}' entre $S(C)$ et $S(C^\circ)$. La définition est telle que le foncteur induit sur les systèmes locaux sur C transforme le foncteur contravariant F sur C , transformant toute flèche en flèche inversible, en le foncteur covariant (i.e. contravariant sur C°) ayant mêmes valeurs sur les objets, et obtenu sur les flèches en remplaçant $F(u)$ par $F(u)^{-1}$; en d'autres termes, l'effet de l'homotopisme de Quillen sur les groupoïdes fondamentaux est l'isomorphisme évident entre les groupoïdes fondamentaux de C et de C° , compte tenu que le deuxième est l'opposé du premier. Comme application, Quillen obtient une interprétation faisceutique de la cohomologie d'un ensemble semi-simplicial à coefficients dans un système local covariant F (défini classiquement par le complexe cosimplicial des $C^n(F) = \prod_{x \in X_n} F(x)$): on considère le système local contravariant défini par F , on l'interprète comme un faisceau sur $T(X)$ i.e. objet de $\Delta_{/X}$, et on prend sa cohomologie. - Cependant, quand F est un système de coefficients covariant pas nécessairement local, on n'a toujours pas d'interprétation de ses groupes de coho-

mologie classiques en termes faisceautiques; ni, lorsque F est contravariant, de son homologie, ou inversement de sa cohomologie faisceautique en termes classiques.

A propos de la notion de foncteur qui est un homotopisme. Quillen montre qu'un tel foncteur $F : C \longrightarrow C'$ induit une équivalence entre la sous-catégorie triangulée $\mathbb{D}_{lc}^b(C')$ de la catégorie dérivée bornée de celle des faisceaux abéliens sur C' , dont les faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux, et la catégorie analogue pour C ; et réciproquement. On peut dans cet énoncé introduire aussi n'importe quel anneau de base (à condition de le supposer $\neq 0$ dans le cas de la réciproque); la partie dire vaut aussi avec un anneau de coefficients par nécessairement constant, mains constant tordu. Je pense que ce résultat (facile) doit pouvoir se généraliser ainsi.

Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de topos qui soit tel que pour tout faisceau localement constant sur X' , f induise un isomorphisme sur les cohomologies (avec cas non commutatif inclus). Supposons que X et X' soit *localement homotopiquement trivial*, i.e. que pour tout entier $n \geq 1$, tout objet U ait un recouvrement par des $U_i \longrightarrow U$, tels que a) tout système local sur U devient constant sur U_i , et toute section sur U devient constant sur U_i et b) pour tout groupe abélien G , les $H^j(U, G) \longrightarrow H^j(U_i, G)$ sont nuls pour $1 \leq j \leq n$ ⁴. Alors le foncteur $\mathbb{D}_{lc}^b(X') \longrightarrow \mathbb{D}_{lc}^b(X)$ induit par f est une équivalence. Même énoncé si on met dans le coup un système local d'anneaux sur X' . Enfin, f induit une équivalence entre la catégorie des coefficients locaux sur C et celle des coefficients locaux sur C' .

2. n -catégories, catégories n -uples, et Gr-catégories

3. Point de vue “motivique” en théorie du cobordisme

⁴Attention, cette condition n'est typiquement pas satisfaite par les schémas sur $[\]$

HODGE'S GENERAL CONJECTURE IS FALSE FOR TRIVIAL REASONS

A. Grothendieck

(Received 27 October 1968)⁵

§1. — The startling title is somewhat misleading, as everybody will think about a part of the Hodge conjecture which is most generally remembered, namely the part concerned with a criterion for a cohomology class (on a projective smooth connected scheme X over \mathbf{C}) to be “algebraic”, i.e. to come from an algebraic cycle with rational⁶ coefficients. This conjecture is plausible enough, and (as long as it is not disproved) should certainly be regarded as the deepest conjecture in the “analytic” theory of algebraic varieties. However in [6, p. 184], Hodge gave a more general formulation of his conjecture in terms of filtrations of cohomology spaces, and the main aim of my note is to show that for a rather trivial reason, this formulation has to be slightly corrected.

Consider on the complex cohomology

$$H^i(X^{an}, \mathbf{C}) = H^i(X^{an}, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

(X^{an} denotes the analytic space associated to the scheme X) the “Hodge filtration”

[]

⁵*Topology* Vol. 8, pp. 299-303. Pergamon Press, 1969. Printed in Great Britain

⁶In fact, Hodge states his conjecture for integral cohomology. That this is too optimistic was proved in [1]

§2. — This makes clear how the Hodge conjecture should be corrected, to eliminate trivial counterexamples: namely the left hand side of (*) should be the largest sub-space of the right hand side, generating a subspace of $H^i(X^{an}, \mathbb{C})$ which is a sub-Hodge structure, i.e. stable under decomposition into p, q types. In other words, an element of $H^i(X^{an}, \mathbb{C})$ should belong to Filt'^p if and only if all its bihomogeneous components belong to the \mathbb{C} -vector space generated by the right hand side of (*).

This formulation may seem a little too cumbersome to inspire confidence. To make it look better, we may remark that it is equivalent to the conjunction of the usual Hodge conjecture

[]

§3. — It may be of interest to review here the few non trivial instances known to the author where the Hodge conjecture has been checked.

[]

§4. — In most concrete examples, it seems very hard to *check* the Hodge conjecture, due to the difficulty in explicitly determining the filtration Filt' of the cohomology, and even in determining simply the part of the cohomology coming from algebraic classes. It may be easier, for the time being, to *test* the Hodge conjectures in various non trivial cases, through various consequences of the Hodge conjectures which should be more amenable to direct verification. I would like to mention here two such consequences, which can be seen in act to be consequences already of the *usual* Hodge conjecture.

First, if X is as before, the dimensions of the graded components of the vector space associated to the arithmetic filtration Filt' (and indeed this very filtration itself, if we interpret complex cohomology as the de Rham cohomology, which makes a purely algebraic sense) is clearly invariant if we transform X by any automorphism of the field \mathbb{C} , or equivalently, if we change the topology of C by such an automorphism. In other words, if we have a smooth projective scheme X over a field K of char 0, then the invariants we get by different embeddings of K into the field \mathbb{C} are the same. Granting the Hodge conjecture, the same should be true if we replace the Filt' filtration by the filtration described in §2 in terms

of the Hodge structure (which is a transcendental description). What if we take for instance for X a “general” abelian variety of given dimension or powers of it, or powers of a “general” curve C of given genus? The case of genus 1 checks by Tate’s result recalled in example c) above.

Secondly, and more coarsely, if we have a projective and smooth morphism $f : X \longrightarrow S$ of algebraic schemes over \mathbf{C} , we can for every $s \in S$ consider the complex cohomology of the fiber X_s , as a Hodge structure, and look at the filtration “rational over \mathbf{Q} ” which it defines (and which conjecturally should be the arithmetic filtration). Hodge’s conjecture would imply that the set of points $s \in S^{an}$ where the dimensions of the components of the associated graded space have fixed values has a very special structure: it should be the difference of two countable unions of Zariski-closed subsets of S , which in fact should even be definable over a fixed subfield of \mathbf{C} , of finite type over the field \mathbf{Q} . (A simple application of Baire’s theorem, not using Hodge’s conjecture, would give us only a considerably weaker structure theorem for the set in question, where Zariski-closed subsets would be replaced by the images, under the projection of the universal covering \tilde{S} of S^{an} , of analytic subsets of \tilde{S} .)

REFERENCES

- 1.

⁷(Added April 1969) David Lieberman has informed me that he can prove the stronger result obtained by replacing \tilde{S} by S^{an} itself.

STANDARD CONJECTURES ON ALGEBRAIC CYCLES

1. Introduction

We state two conjectures on algebraic cycles, which arose from an attempt at understanding the conjectures of Weil on the ζ -functions of algebraic varieties. These are not really new, and they were worked out about three years ago independently by Bombieri and myself.

The first is an existence assertion for algebraic cycles (considerably weaker than the Tate conjectures), and is inspired by and formally analogous to Lefschetz's structure theorem on the cohomology of a smooth projective variety over the complex field.

The second is a statement of positivity, generalising Weil's well-known positivity theorem in the theory of abelian varieties. It is formally analogous to the famous Hodge inequalities, and is in fact a consequence of these in characteristic zero.

WHAT REMAINS TO BE PROVED OF WEIL'S CONJECTURES? Before stating our conjectures, let us recall what remains to be proved in respect of the Weil conjectures, when approached through ℓ -adic cohomology.

Let X/\mathbf{F}_q be a smooth irreducible projective variety of dimension n over the finite field \mathbf{F}_q with q elements, and ℓ a prime different from the characteristic. It has then been proved by M. Artin and myself that the Z-function of X can be

expressed as

$$\begin{aligned} Z(t) &= \frac{L'(t)}{L(t)}, \\ L(t) &= \frac{L_0(t)L_2(t)\dots L_{2n}(t)}{L_1(t)L_3(t)\dots L_{2n-1}(t)}, \\ L_i(t) &= \frac{1}{P_i(t)}, \end{aligned}$$

where $P_i(t) = t^{\dim H^i(\bar{X})} Q_i(t^{-1})$, Q_i being the characteristic polynomial of the action of the Frobenius endomorphism of X on $H^i(\bar{X})$ (here H^i stands for the i^{th} ℓ -adic cohomology group and \bar{X} is deduced from X by base extension to the algebraic closure of \mathbf{F}_q). But it has not been proved so far that

- (a) the $P_i(t)$ have integral coefficients, independent of $\ell (\neq \text{char } \mathbf{F})$;
- (b) the eigenvalues of the Frobenius endomorphisms on $H^i(\bar{X})$, i.e., the reciprocals of the roots of $P_i(t)$, are of absolute value $q^{i/2}$.

Our first conjecture meets question (a). The first and second together would, by an idea essentially due to Serre [?], imply (b).

2. A weak form of conjecture 1

From now on, we work with varieties over a ground field k which is algebraically closed and of arbitrary characteristic. Then (a) leads to the following question: If f is an endomorphism of a variety X/k and $\ell \neq \text{char } k$, f induces

$$f^i : H^i(X) \longrightarrow H^i(x),$$

and each of these f^i has a characteristic polynomial. *Are the coefficients of these polynomials rational integers, and are they independent of ℓ ?* When X is smooth and proper of dimension n , the same question is meaningful when f is replaced by any cycle of dimension n in $X \times X$, considered as an algebraic correspondence.

In characteristic zero, one sees that this is so by using integral cohomology. If $\text{char } k > 0$, one feels certain that this is so, but this has not been proved so far.

Let us fix for simplicity an isomorphism

$$\ell^{\infty k^* \simeq \mathbf{Q}_\ell / \mathbf{Z}_\ell} \quad (\text{a heresy!}).$$

We then have a map

$$: F^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \longrightarrow H_\ell^{2i}(X)$$

which associates to an algebraic cycle its cohomology class. We denote by $C_\ell^i(X)$, and refer to its elements as *algebraic cohomology classes*.

A known result, due to Dwork-Faton, shows that for the integrality question (not to speak of the independence of the characteristic polynomial of ℓ), it suffices to prove that

$$f_i^N \in \frac{1}{m} \mathbf{Z} \quad \text{for every } N \geq 0,$$

where m is a fixed positive integer⁸. Now, the graph Γ_{f^N} in $X \times X$ of f^N defines a cohomology class on $X \times X$, and if the cohomology class Δ of the diagonal in $X \times X$ is written as

$$\Delta = \sum_0^n \pi_i$$

where π_i are the projections of Δ onto $H^i(X) \otimes H^{n-i}(X)$ for the canonical decomposition $H^n(X \times X) \simeq \sum_{i=0}^n H^i(X) \otimes H^{n-i}(X)$, a known calculation shows that

$$(f^N)_{H^i} = (-1)^i (\Gamma_{f^N}) \pi_i \in H^{4n}(X \times X) \approx \mathbf{Q}_\ell.$$

Assume that the π_i are algebraic. Then $\pi_i = \frac{1}{m} (\prod_i)$, where \prod_i is an algebraic cycle, hence

$$(f^N)_{H^i} = (-1)^i (\prod_i \Gamma_{f^N}) \in \frac{1}{m} \mathbf{Z}$$

and we are through.

WEAK FORM OF CONJECTURE 1. ($C(X)$): The elements π_i^ℓ are algebraic, (and come from an element of $F^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, which is independent of ℓ).

N.B.

1. The statement in parenthesis is needed to establish the independence of P_i on ℓ .

⁸This was pointed out to me by S. Kleimann.

2. If $C(X)$ and $C(Y)$ hold, $C(X \times Y)$ holds, and more generally, the Künneth components of any algebraic cohomology class on $X \times Y$ are algebraic.

3. The conjecture 1 (of Lefschetz type)

Let X be smooth and projective, and $\xi \in H^2(X)$ the class of a hyperplane section. Then we have a homomorphism

$$(*) \quad \cup \xi^{n-i} : H^i(X) \longrightarrow H^{2n-i}(X) \quad (i \leq n).$$

It is expected (and has been established by Lefschetz [?], [?] over the complex field by transcendental methods) that this is an isomorphism for all characteristics. For $i = 2j$, we have the commutative square

[]

Our conjecture is then: $(A(X))$:

- (a) *(*) is always an isomorphism (the mild form);*
- (b) *if $i = 2j$. (*) induces an isomorphism (or equivalently, an epimorphism) $C^j(X) \longrightarrow C^{n-j}(X)$.*

N.B. If $C^j(X)$ is assumed to be finite dimensional, (b) is equivalent to the assertion that $\dim C^{n-j}(X) \leq \dim C^j(X)$ (which in particular implies the equality of these dimensions in view of (a)).

An equivalent formulation of the above conjecture (for all varieties X as above) is the following.

$(B(X))$: *The Λ -operation (c.f. [?]) of Hodge theory is algebraic.*

By this, we mean that there is an algebraic cohomology class λ in $H^*(X \times X)$ such that the map $\Lambda : H^*(X) \longrightarrow H^*(X)$ is got by lifting a class from X to $X \times X$ by the first projection, cupping with λ and taking the image in $H^*(X)$ by the Gysin homomorphism associated to the second projection

Note that $B(X) \Rightarrow A(X)$, since the algebraicity of λ implies that of λ^{n-i} , and λ^{n-i} provides an inverse to $\cup \xi^{n-i} : H^i(X) \longrightarrow H^{2n-i}(X)$. On the other hand, it is easy to show that $A(X \times X) \Rightarrow B(X)$ and this proves the equivalence of conjectures A and B .

The conjecture seems to be most amenable in the form of B . Note that $B(X)$ is stable for products, hyperplane sections and specialisations. In particular, since it holds for projective spaces, it is also true for smooth varieties which are complete intersections in some projective space. (As a consequence, we deduce for such varieties the wished-for integrality theorem for the Z -function!). It is also verified for Grassmannians, and for abelian varieties (Liebermann [?]).

I have an idea of a possible approach to Conjecture B , which relies in turn on certain unsolved geometric questions, and which should be settled in any case.

Finally, we have the implication $B(X) \Rightarrow C(X)$ (first part), since the π_i can be expressed as polynomials with coefficients in \mathbf{Q} of λ and $L = \cup \xi$. To get the whole of $C(X)$, one should naturally assume further that there is an element of $F(X \times X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ which gives λ for every ℓ .

4. Conjecture 2 (of Hodge type)

For any $i \leq n$, let $P^i(X)$ be the ‘primitive part’ of $H^i(X)$, that is, the kernel of $\cup \xi^{n-i+1} : H^i(X) \longrightarrow H^{2n-i+2}(X)$, and put $C_{p_r}^j(X) = P^{2j} \cap C^j(X)$. On $C \hat{\otimes}_{p_r}(X)$, we have a \mathbf{Q} -valued symmetric bilinear form given by

$$(x, y) \longrightarrow (-1)^j K(xy \xi^{n-2j})$$

where K stands for the isomorphism $H^{2n}(X) \simeq \mathbf{Q}_\ell$. Our conjecture is then that $(\text{Hdg}(X))$: *The above form is positive definite.*

One is easily reduced to the case when $\dim X = 2m$ is even, and $j = m$.

REMARKS.

- (1) In characteristic zero, this follows readily from Hodge theory [?].
- (2) $B(X)$ and $\text{Hdg}(X \times X)$ imply, by certain arguments of Weil and Serre, the following: if f is an endomorphism of X such that $f^*(\xi) = q\xi$ for some $q \in \mathbf{Q}$ (which is necessarily > 0), then the eigenvalues of $f_{H^i(X)}$ are algebraic integers of absolute value $q^{i/2}$. Thus, this implies all of Weil’s conjectures.
- (3) The conjecture $\text{Hdg}(X)$ together with $A(X)(a)$ (the Lefschetz conjecture in cohomology) implies that numerical equivalence of cycles is the same as

cohomological equivalence for any ℓ -adic cohomology if and only if $A(X)$ holds.

- (4) In view of (3), $B(X)$ and $Hdg(X)$ imply that numerical equivalence of cycles coincides with \mathbf{Q}_ℓ -equivalence for any ℓ . Further the natural map

$$Z^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \longrightarrow H_\ell^i(X)$$

is a monomorphism, and in particular, we have

$$\dim_{\mathbf{Q}} C^i(X) \leq \dim_{\mathbf{Q}_\ell} H_\ell^i(X).$$

Note that for the deduction of this, we do not make use of the positivity of the form considered in $Hdg(X)$, but only the fact that it is non-degenerate.

Another consequence of $Hdg(X)$ and $B(X)$ is that the stronger version of $B(X)$, viz. that λ comes from an algebraic cycle with rational coefficients *independent of ℓ* , holds.

Conclusions

The proof of the two standard conjectures would yield results going considerably further than Weil's conjectures. They would form the basis of the so-called "theory of motives" which is a systematic theory of "arithmetic properties" of algebraic varieties, as embodied in their groups of classes of cycles for numerical equivalence. We have at present only a very small part of this theory in dimension one, as contained in the theory of abelian varieties.

Alongside the problem of resolution of singularities, the proof of the standard conjectures seems to me to be the most urgent task in algebraic geometry.

CURRICULUM VITAE DE ALEXANDRE GROTHENDIECK

Né le 28 mars 1928 à Berlin, de mère allemande et de père apatride, émigré de Russie en 1921, mes parents émigrent d'Allemagne en 1933, participent à la révolution espagnole; je les rejoins en mai 1939. Mes parents sont internés, d'abord mon père en 1939, puis ma mère en 1940 avec moi. Mon père est déporté du camp de Vernet en août 1942 pour Auschwitz et est resté disparu; ma mère meurt en 1957 des suites d'une tuberculose contractée au camp de concentration. Je reste près de deux ans dans des camps de concentration français, puis suis recueilli par une maison d'enfants du "Secours suisse" au Chambon-sur-Lignon, où je termine mes études de lycée en 1945. Études de licence (mathématiques) à Montpellier 1945-48, auditeur libre à l'École Normale Supérieure à Paris en 1948-49, où je suis le premier séminaire Cartan sur la théorie des faisceaux, et un cours de Leray du Collège de France sur la théorie de Schauder du degré topologique dans les espaces localement convexes. De 1949 à 1953 je poursuis des recherches à Nancy sur les espaces vectoriels topologiques, comme élève de J. Dieudonné et de L. Schwartz, aboutissement à ma thèse de doctorat en 1953, sur la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, publiée dans les "Memoirs of the American Mathematical Society". Je passe alors deux ans à l'Université de Sao Paulo (Brésil), où je continue et mène à leur aboutissement naturel certaines recherches liées aux produits tensoriels topologiques [?], [?], mais en même temps, sous l'influence de J. P. Serre, commence à me familiariser avec des questions de topologie algébrique et d'algèbre homologique. Ces dernières continueront à m'occuper jusqu'à aujourd'hui, et son encore très loin d'être menés à leur terme. Ce sont elles qui m'occuperont surtout

pendant l'année 1955 passée à l'Université du Kansas (USA) ; j'y développe une théorie commune pour la théorie de Cartan-Eilenberg des foncteurs dérivés des foncteurs de modules et la théorie de Leray-Cartan de la cohomologie des faisceaux [?], et développe des notions de "cohomologie non commutative" dans le contexte des faisceaux et des espaces fibrés à faisceau structural, qui trouveront leur cadre naturel quelques années plus tard avec la théorie des topos (aboutissement naturel du point de vue faisceautique en topologie générale) [?], [?].

A partir de 1956 je suis resté en France, à l'exception de séjours de quelques semaines ou mois dans des universités étrangères. De 1950 à 1958 j'ai été chercheur au CNRS, avec le grade de directeur de recherches en 1958. De 1959 à 1970 j'ai été professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Ayant découvert à la fin de 1959 que l'IHES était subventionné depuis trois ans par le Ministère des Armées, et après des essais infructueux pour inciter mes collègues à une action commune sans équivoque contre la présence de telles subventions, je quitte l'IHES en septembre 1970.

Depuis 1959 je suis marié à une française, et je suis père de quatre enfants. Je suis apatride depuis 1940, et ai déposé une demande de naturalisation française au printemps 1970.

Depuis 1956 jusqu'à une date récente, mon intérêt principal s'est porté sur la géométrie algébrique. Mon intérêt pour la topologie, la géométrie analytique, l'algèbre homologique ou le langage catégorique a été constamment subordonné aux multiples besoins d'un vaste programme de construction de la géométrie algébrique, dont une première vision d'ensemble remonte à 1958. Ce programme est poursuivi systématiquement dans [?], [?], d'abord dans un isolement relatif, mais progressivement avec l'assistance d'un nombre croissant de chercheurs de valeur. Il est loin d'être achevé à l'heure actuelle. L'extraordinaire crise écologique que nous aurons à affronter dans les décades qui viennent, rend peu probable qu'il le sera jamais. Elle nous imposera d'ailleurs une perspective et des critères de valeur entièrement nouveaux, qui réduiront à l'insignifiance ("irrelevance") beaucoup des plus brillants progrès scientifiques de notre siècle, dans la mesure où ceux-ci restent étrangers au grand impératif évolutionniste de notre temps : celui de la survie. Cette optique s'est imposée à moi avec une force croissante au cours de discus-

sions avec de nombreux collègues sur la responsabilité sociale des scientifiques, occasionnées par ma situation à l'IHES depuis la fin de 1969. Elle m'a conduit en juillet 1970 à m'associer à la fondation d'un mouvement international et interprofessionnel "Survivre", et à consacrer aux questions liées à la survie une part importante de mon énergie. Dans cette optique, la seule valeur de mon apport comme mathématicien est de me permettre aujourd'hui, grâce à l'estime professionnelle et personnelle acquise parmi mes collègues, de donner plus de force à mon témoignage et à mon action en faveur d'une stricte subordination de toutes nos activités, y compris nos activités de scientifiques, aux impératifs de la survie, et à la promotion d'un ordre stable et humain sur notre planète, sans lequel la survie de notre espèce ne serait ni possible, ni désirable.

A Grothendieck

Principales publication

Espaces Vectoriels Topologiques

[?] Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, Amer. J. 74 (1952), p. 168-186

Topologie et algèbre homologique

Géométrie analytique

Géométrie algébrique

ESQUISSE THÉMATIQUE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES

Les numéros entre crochets renvoient, soit à la bibliographie sommaire jointe à mon Curriculum Vitae (numéros de [1] à [9]), soit au complément à cette bibliographie placée à la fin du présent rapport (numéros entre [1 bis] et [20 bis]). Enfin, nous avons joint en dernière page une liste par ordre alphabétique des auteurs de certains des travaux cités dans le présent rapport qui ont été directement suscités ou influencés par les travaux de A. Grothendieck; le renvoi à cette dernière bibliographie se fait par le sigle [*] derrière le nom de l'auteur cité, comme pour I. M. Gelfand [*].

1. Analyse Fonctionnelle ([1] à [7], [6 bis])

Mes travaux d'Analyse Fonctionnelle (de 1949 à 1953) ont porté surtout sur la théorie des espaces vectoriels topologiques. Parmi les nombreuses notions introduites et étudiées (produits tensoriels topologiques [5,6], applications nucléaires et applications de Fredholm [5,6,7], applications intégrales et ses variantes diverses [5,6], applications de puissance p -ième sommable [5], espaces nucléaires [5], espaces (DF) [4], etc.), c'est la notion d'*espace nucléaire* qui a connu la meilleure fortune : elle a fait jusqu'à aujourd'hui l'objet de nombreux séminaires et publications. En particulier, un volume du traité de I. Gelfand [*] sur les "Fonctions Généralisées" lui est consacré. Une des raisons de cette fortune provient sans doute de la théorie des probabilités, car il s'avère que parmi tous les EVT, c'est dans les es-

paces nucléaires que la théorie de la mesure prend la forme la plus simple (théorème de Minlos). Les résultats de [6], plus profonds, semblent avoir été moins bien assimilés par les développements ultérieurs, mais ils apparaissent comme source d'inspiration dans un certain nombre de travaux délicats assez récents sur des inégalités diverses liées à la théorie des espaces de Banach, notamment ceux de Pelczynski. Signalons également les résultats assez fins de [6] et de [8 bis] sur les propriétés de décroissance de la suite des valeurs propres de certains opérateurs dans les espaces de Hilbert et dans les espaces de Banach généraux.

Références : L. Schwartz, J. Dieudonné, I. Gelfand, P. Cartier, J. L. Lions.

2. Algèbre Homologique ([8], [9], [19], [9 bis])

Depuis 1955, me plaçant au point de vue de “l'utilisateur” et non celui de spécialiste, j'ai été amené continuellement à élargir et à assouplir le langage de l'algèbre homologique, notamment sous la poussée des besoins de la géométrie algébrique (théories de dualité, théories du type Riemann-Roch, cohomologies ℓ -adiques, cohomologies du type de De Rham, cohomologies cristallines...). Deux directions principales à ces réflexions : développement d'une algèbre homologique non commutative (amorcée dans [10 bis] et systématisée dans la thèse de J. Giraud [*]); théorie des catégories dérivées (développée systématiquement par J. L. Verdier, exposée dans Hartshorne [*,], Illusie [*,] et [[?] SGA 4 Exp. XVIII]). Ces deux courants de réflexion sont d'ailleurs loin d'être épuisés, et sont sans doute appelés à se rejoindre, soit au sein d'une “algèbre homotopique” dont une esquisse préliminaire a été faite par Quillen [*,], soit dans l'esprit de la théorie des n -catégories, particulièrement bien adaptée à l'interprétation géométrique des invariants cohomologiques (cf. le livre cité de J. Giraud et le travail de Mme. M. Raynaud [*,]).

Références : J.L. Verdier, P. Deligne, D. Quillen, P. Gabriel.

3. Topologie ([16, SGA 4], [9])

Jusqu'à présent, c'est surtout le K -invariant des espaces topologiques que j'avais introduit à l'occasion de mes recherches sur le théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique, qui a connu la fortune la plus brillante, étant le point de

départ de très nombreuses recherches en topologie homotopique et topologie différentielle. De nombreuses constructions que j'avais introduits pour les besoins de la démonstration algébrique du théorème de Riemann-Roch (telles les opérations λ_i et leurs liens avec les opérations du groupe symétrique) sont devenues pratique courante non seulement en géométrie algébrique et en algèbre, mais également en topologie et en théorie des nombres, notamment dans les travaux de mathématiciens comme Atiyah, Hirzebruch, Adams, Quillen, Bass, Tate, Milnor, Karoubi, Shih, etc...

Plus fondamental me semble néanmoins l'élargissement de la topologie générale, dans l'esprit de la théorie des faisceaux (développée initialement par J. Leray), contenu dans le point de vue des topos ([?], SGA 4). J'ai introduit ces topos à partir de 1958 en partant du besoin de définir une cohomologie ℓ -adique des variétés algébriques (plus généralement, des schémas), qui convienne à l'interprétation cohomologique des célèbres conjectures de Weil. En effet, la notion traditionnelle d'espace topologique ne suffit pas à traiter le cas des variétés algébriques sur un corps autre que le corps des complexes, la topologie proposée précédemment par Zariski ne donnant pas lieu à des invariants cohomologiques "discrets" raisonnables. A l'heure actuelle, le point de vue des topos, et la notion de "localisation" correspondante, font partie de la pratique quotidienne du géomètre algébriste, et il commence à se répandre également en théorie des catégories et en *logique mathématique* (avec la démonstration par B. Lawvere [*] du théorème de Cohen d'indépendance de l'axiome du continu, utilisant une adaptation convenable de la notion de topos). Il n'en est pas encore de même en topologie et en géométrie différentielle et analytique, malgré certains premiers essais dans ce sens (comme la tentative de démonstration par Sullivan d'une conjecture d'Adams en K -théorie, par réduction à une propriété de l'opération de Frobenius sur les variétés algébriques en car. $p > 0$).

Références : M. Atiyah, F. Hirzebruch, H. Bass, J. Leray, M. Artin, D. Quillen, M. Karoubi...

4. Algèbre ([15], [16], [18])

Comme l'algèbre homologique, l'algèbre a été pour moi un outil à développer, et non un but en soi. J'ai parlé au par. 2 de mes contributions à l'algèbre homologique, et au par. 3 de mes contributions à la K -théorie; celle-ci comprend une partie purement algébrique (qui, une fois étendue en une théorie des K^i supérieurs, finira par devenir une partie de l'algèbre homologique ou homotopique). Ainsi, un certain nombre de mes résultats en géométrie algébrique se spécialisent en des résultats en algèbre pure, comme la relation $K(A[t]) \simeq K(A)$, où A est un anneau. Mises à part ces retombées, on peut signaler les contributions ci-dessous.

- a) *Algèbre catégorique* : En fait, de façon continue depuis 1953, je me suis senti dans l'obligation, au fur et à mesure des besoins, de développer une panoplie catégorique toujours insuffisante. La plupart des résultats et des notions ainsi introduites se trouvent développés un peu partout dans [?], [?], notamment dans le premier exposé de SGA 4. Il ne peut être question de passer en revue ici même sommairement les notions qui sont ainsi entrées dans l'usage courant. Signalons seulement ici le langage des *univers* (pour éliminer des difficultés logiques dans la manipulation intensive des catégories), et celui de la *descente* (développé de façon systématique par Giraud [*]).

Références : J. Giraud, P. Gabriel.

- b) *Algèbre commutative* : Dans le langage géométrique des "schémas", l'algèbre commutative peut être considérée comme étant, essentiellement, l'étude locale des schémas. C'est ainsi que [?], et notamment le Chap. IV de cet ouvrage, contient de très nombreux résultats nouveaux d'algèbre commutative, dont il ne peut être question ici d'énumérer même les plus couramment utilisés. Notons seulement ici, en algèbre locale, la notion d'anneau excellent et ses propriétés de permanence (dont l'absence constituait sans doute la lacune la plus marquante de l'ouvrage de M. Nagata sur les anneaux locaux).

Références : M. Nagata, P. Samuel, M. Raynaud, O. Zariski.

- c) *Théorie du groupe de Brauer* : Mes contributions découlent pour l'essentiel de l'application de la cohomologie étale (développée dans [[?], SGA 3]) à la

théorie du groupe de Brauer. J'ai fait un exposé d'ensemble sur les résultats connus sur ce groupe dans [?].

Références : M. Artin, J. Tate, J.P. Serre

- d) *Théorie des algèbres de Lie* : Comme sous-produit de recherches sur les groupes algébriques en car. $p > 0$, je trouve certains résultats délicats sur les sous-algèbres de Borel ou de Cartan de certaines algèbres de Lie, notamment sur les corps de base imparfaits (cf. [?], SGA 6, Exp. XIII et XIV).

Références : M. Demazure, J. Tits, J.P. Serre

5. Géométrie Analytique ([10], [11], [16 bis])

Mon influence sur la géométrie analytique est due moins aux résultats nouveaux que j'ai pu y démontrer (la plupart contenus dans les réf. cit.), que par les points de vue directement inspirés par la géométrie algébrique que j'ai pu y introduire, et les nombreuses suggestions d'énoncés que j'ai pu y faire.

Un des plus anciens est le théorème de finitude de Grauert pour les morphismes propres d'espaces analytiques, aboutissant à sa généralisation récente en un théorème qui s'énonce en termes de catégories dérivées (formulation sur laquelle j'avais insisté de longue date, et qui a été prouvée indépendamment par R. Kiehl [*] et O. Forster et K. Knorr [*]). D'autres théorèmes de finitude (de Frisch et Siu) pour les images directes supérieures d'un faisceau cohérent par une immersion ouverte, utilisant la profondeur du faisceau en les points du complémentaire, sont inspirés de théorèmes analogues en géométrie algébrique [16, SGA 2]; remarques analogues pour des théorèmes sur la cohomologie à supports compacts des faisceaux algébriques cohérents, complétés par un théorème d'existence, et leur interprétation en termes de théorèmes du type de Lefschetz pour la cohomologie cohérente (la version algébrique faire partie de la thèse de Mme. Michèle Raynaud (en cours de publication), et la version analytique est due à Trautmann [*]). Parlant en termes de grands thèmes de recherche plutôt qu'en termes de résultats techniques particuliers, je pense qu'outre les thèmes déjà nommés, les thèmes suivants ont été directement suscités ou tout au moins influencés par des idées que j'avais développées en géométrie algébrique:

- a) *Techniques de construction d'espaces analytiques*, aboutissant aussi bien à des espaces “modulaires” “globaux” comme les espaces modulaires de Picard, pour certains espaces analytiques compacts comme dans [11] (le cas général ne semble pas encore traité), qu'à des espaces modulaires “locaux” de déformation d'une structure analytique complexe donnée, ou au modèle de la Géométrie Formelle (“th. d'existence des modules formels”, cf. [15 bis, Exp. no 195]). Dans certains cas, les énoncés obtenus en géométrie algébrique sont directement applicables (cf. M. Hakim [*]), dans d'autres de nouvelles difficultés surgissent, pas toujours surmontées à l'heure actuelle. Parmi les travaux définitifs dans ce sens, on peut citer la thèse de A. Douady [*].
- b) *Théorèmes de dualité locaux et globaux pour les faisceaux cohérents*, développés notamment par J.L. Verdier [*] et J.P. Ramis et G. Ruget [*], inspirés par la théorie que j'avais développée dans le cas des schémas, exposée dans R. Hartshorne [*].
- c) *Formulations de théorèmes du type de Riemann-Roch* pour des variétés analytiques compactes ou des morphismes propres de telles variétés, cf. [16, SGA 6, Exp. 0]. Les problèmes essentiels restent toujours ouverts.
- d) *Théorèmes de De Rham analytiques complexes [16 bis], cohomologie cristalline complexe*. Certains des résultats et des idées que j'avais développés à ce sujet ont été utilisés dans des développements théoriques divers, comme la théorie de Hodge généralisée de P. Deligne [*].
- e) *Espaces rigide-analytiques*. M'inspirant de l'exemple de la “courbe elliptique Tate”, et des besoins de la “géométrie formelle” sur un anneau de valuation discrète complet, j'étais parvenu à une formulation partielle de la notion de variété rigide-analytique sur un corps valué complet, qui a joué son rôle dans la première étude systématique de cette notion par J. Tate [*]. Par ailleurs, les “cristaux” que j'introduis sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique > 0 peuvent s'interpréter parfois en termes de fibrés vectoriels à connexion intégrable sur certains types d'espaces rigide-analytiques sur des corps de caractéristique nulle; ceci fait pressentir l'existence de relations pro-

fondes entre cohomologie cristalline en $\text{car.} > 0$, et cohomologie de systèmes locaux sur des variétés rigide-analytiques en car. nulle.

Références : J. P Serre, H. Grauert, H. Cartan, P. Deligne, A. Douady, B. Malgrance, K. Knorr, R. Kiehl, J. Tate.

6. Groupes Algébriques ([16 SGA 3 - en trois volumes] [12 bis])

Ce sujet relève à la fois de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes. Le travail cité SGA 3 se place surtout sur des schémas de base généraux, et la part de la géométrie algébrique y est certes considérablement plus large que celle de la théorie des groupes. Néanmoins, grâce à la technique des schémas, nous y obtenons des résultats nouveaux même dans le cas de groupes définis sur un corps de base, les plus intéressants (relatifs surtout au cas d'un corps de base imparfait) étant contenus dans SGA 3, Exp XIV. Ma contribution principale, continuant dans la voie ouverte par A. Borel et C. Chevalley dans le contexte de la géométrie algébrique habituelle, a été de montrer le parti qu'on pouvait tirer d'une application systématique de la théorie des schémas aux groupes algébriques et aux schémas en groupes.

Références : J. Tits, F. Bruhat, M. Demazure, P. Gabriel, A. Borel, D. Mumford.

7. Groupes discrets ([18, Exp VIII], [13 bis])

Dans [18, Exp. VIII] je développe une théorie purement algébrique des classes de Chern des représentations d'un groupe discret sur un corps de base (ou même un anneau de base) quelconque, avec des applications de nature arithmétique sur l'ordre des classes de Chern des représentations complexes. Cette théorie peut être considérée comme cas particulier d'une théorie des classes de Chern des représentations linéaires de schémas en groupes quelconques, elle-même contenue dans la théorie des classes de Chern ℓ -adiques des fibrés vectoriels sur des topos annelés quelconques. Dans [13 bis], j'établis, à peu de choses près, que pour un groupe discret G , la théorie des représentations linéaires de G (sur un anneau de base quelconque) ne dépend que du complété profini \hat{G} de G .

8. Groupes formels ([17] [16 SGA 7] [14 bis])

C'est un sujet qui relève à la fois de la théorie des groupes, de celle des groupes de Lie, de la géométrie algébrique, de l'arithmétique, et (sous la forme voisine des groupes de Barsotti-Tate) de la théorie des systèmes locaux. Ici encore, la théorie des schémas permet une grande aisance, et c'est dans ce contexte par exemple que se place d'emblée I. Manin [*a], dans son exposé classique de la théorie de Dieudonné. Ma principale contribution, en dehors de cette simplification conceptuelle, a été le développement d'une "théorie de Dieudonné" pour les groupes de Barsotti-Tate sur des schémas de base généraux à caractéristiques résiduelles > 0 , en termes du "cristal de Dieudonné" associé à un tel groupe. Une esquisse de cette théorie a été exposée dans divers cours et séminaires, y compris dans mon cours au Collège de France en 1970/71 et 71/72; certains énoncés principaux sont esquissés dans les C.R. du Congrès International de Nice en 1970 [14 bis]. Une partie de ces idées est développée dans la thèse de W. Messing [*], et les besoins techniques de la théorie ont été la motivation pour le développement par L. Illusie [*] de sa théorie des déformations des schémas en groupes commutatifs, vérifiant des conjectures suggérées par cette "théorie de Dieudonné cristalline". Par ailleurs, les relations entre schémas abéliens et groupes de Barsotti-Tate associés sont explorées et exploitées également dans [17] et dans [16, SGA 7, Exp. IX].

Références : J. Tate, B. Mazur, A. Néron, L. Illusie, J.N. Katz, W. Messing, I. Manin.

9. Arithmétique ([16 SGA 5, Exp XVI] [18, Exp III])

Ma contribution principale a consisté (en collaboration avec M. Artin) en la démonstration de la rationalité des fonctions L associées à des faisceaux ℓ -adiques généraux sur des variétés algébriques sur des corps finis, comprenant comme cas particulier les fonctions L associées à des caractères de groupes finis opérant sur de telles variétés. S'inspirant des conjectures de Weil, on arrive en effet à exprimer ces fonctions L en termes de produits alternés de polynômes caractéristiques de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la "cohomologie à support propre" de la variété envisagée. Bien au delà d'une simple question de rationalité, ces ré-

sultats ouvrent la voie à une approche cohomologique systématique d’invariants arithmétiques subtils comme les fonctions ζ et L des variétés, et l’interprétation en termes arithmétiques de théorèmes tels que les théorèmes de dualité (démontrés à l’heure actuelle) et de Lefschetz pour les sections hyperplanes (non démontrés encore en car. > 0). Il y a là un champ d’étude immense, qui par la nature des choses devrait se trouver, tôt ou tard, centré sur la notion de “motif” (dénominateur commun des divers types de cohomologie qu’on sait attacher à une variété algébrique) – mais qui probablement ne sera jamais exploré jusqu’au bout, l’heure de ce genre d’investigations étant déjà passée (même si rares sont ceux qui en ont pris conscience).

Références : J.P. Serre, A. Weil, B. Dwork, J. Tate, M. Artin, P. Deligne...

10. Géométrie Algébrique ([12] à [19], [15 bis] à [20 bis])

C’est dans cette direction que mon influence a été la plus directe et la plus profonde, puisque c’est dans cette optique que se placent pour l’essentiel mes travaux depuis 1959. Voici les thèmes principaux sous lesquels on peut placer mes contributions:

- a) *Travail de fondement* : Il s’agissait de dégager un cadre suffisamment vaste pour servir de fondement commun à la géométrie algébrique habituelle (y compris celle développée par des auteurs comme A. Weil, O. Zariski, C. Chevalley, J.P. Serre sur des corps de base quelconques) et à l’arithmétique. C’est fait pour l’essentiel dans [15, Chap. I,II et des parties des Ch. III et IV], avec l’introduction et l’étude de la *notion de schéma*. Des généralisations ont été développées par la suite, dans le même esprit, avec les schémas formels [15, Chap. I, par. 10], la théorie des “algebraic spaces” de M. Artin (cf. Knutson [*]), les “algebraic stacks” ou “multiplicités algébriques” de P. Deligne et D. Mumford (*), des “schémas relatifs” de la thèse de M. Hakim [*] (en attendant les “multiplicités formelles” et les “multiplicités algébriques relatives” sur des topos annelés généraux, etc). Ces généralisations montrent la part conceptuelle importante qui revient, dans le langage des schémas, à la notion générale de la localisation, c’est à dire à celle de *topos* (dont il a été question au par. 3). Les fondements développés dans [15] et [16] sont aujourd’hui le “pain quotidien” de la grande majorité des géomètres algébristes,

et leur importance a été soulignée à de nombreuses occasions par des mathématiciens aussi divers que O. Zariski, J.P. Serre, H. Hironaka, D. Mumford, I. Manin, F. Chafarévitch.

- b) *Théorie locale des schémas et des morphismes de schémas* : Dans ce contexte se placent les développements d'algèbre commutative mentionnés au par. 4, et l'étude détaillée de notions comme celles de morphisme lisse, étale, net, plat, etc. Les quatre volumes de [15, Chap. IV] sont consacrés à ces développements, qui ont d'ailleurs inspiré des développements analogues en théorie des espaces analytiques et rigide-analytiques
- c) *Techniques de construction de schémas* : Parmi les techniques développées, exposées surtout dans [15 bis] et des séminaires non publiés (par moi-même et d'autres), il y a la *théorie de la descente* (cf. aussi [16, SGA I, Exp. V, VI]), celle des *schémas quotients*, des *schémas de Hilbert*, des *schémas de Picard*, des "*modules*" formels, le *théorème d'existence* des faisceaux de modules algébriques associés à des modules formels ([15, Chap. III, par. 5]). Le point de vue adopté est surtout celui de la construction d'un schéma à partir du foncteur qu'il représente. Dans cette optique, je n'étais pas parvenu à une véritable caractérisation maniable des foncteurs représentables par un schéma relatif (localement de type fini sur un schéma noethérien) – c'est M. Artin qui y est parvenu ultérieurement [*], en remplaçant la notion de schéma par celle, plus générale et plus stable, d'espace algébrique. Parmi d'autres recherches dans la même direction, suscitées par mes travaux, il y a celles de J. Murre sur les schémas de Picard sur un corps [*], celles de D. Mumford et de M. Raynaud [*] sur ces mêmes schémas sur des bases générales, et dans une certaine mesure ceux de D. Mumford [*] et de S. Seshadri sur le passage au quotient, pour n'en citer que quelques-uns.
- d) *Théories cohomologiques* :
 - 1°) *Cohomologie "cohérente"* : résultats de finitude, de comparaison avec la cohomologie formelle, cf. [15, Chap. III]. Théorèmes de dualité et des résidus : un exposé systématique de mes idées et résultats est développé dans le séminaire de R. Hartshorne [*], cf. aussi [18 bis].

- 2°) *Cohomologie ℓ -adique* : définition de la cohomologie étale, théorèmes de comparaison, de finitude, de dimension cohomologique, de Lefschetz faible, [16 SGA 4]; théorèmes de dualité, formules de Lefschetz et d'Euler-Poincaré, application aux fonctions L , [16, SGA 15].
- 3°) *Cohomologie de De Rham* : [16 bis], [17 bis].
- 4°) *Cohomologie cristalline* : quelques idées de départ sont esquissées dans [18, Exp. IX], puis reprises et systématisées dans la thèse de P. Berthelot [*], et dans le travail de P. Berthelot et L. Illusie sur les classes de Chern cristalline [*].
- e) *Théorie du groupe fondamental* ([16, SGA 1], SGA 2, SGA 7, Exp. I et II], [15 bis, no 182], [19 bis]) :
- D'un point de vue algébrico-géométrique, tout était à faire, depuis la définition du groupe fondamental d'une variété quelconque, en passant par des propriétés "de descente" incluant des résultats assez formels du type de van Kampen, jusqu'au calcul du groupe fondamental dans les premiers cas non triviaux, comme celui d'une courbe algébrique privée de certains points; on peut y adjoindre les théorèmes de génération et de présentation finie du groupe fondamental d'une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Ce programme est accompli pour l'essentiel dans SGA 1, en utilisant à la fois les résultats classiques sur le corps des complexes (établis par voie transcendante) et une panoplie d'outils faits sur mesure (théorie de la descente, étude des morphismes étales, théorème d'existence de faisceaux cohérents...). Les autres références contiennent des résultats plus spéciaux: théorèmes du type de Lefschetz dans SGA 2, action des groupes de monodromie locale sur le groupe fondamental d'une fibre dans SGA 7, Exp. I, calculs de certains groupes fondamentaux locaux dans [19 bis], via les groupes fondamentaux de certains schémas formels. Tous ces résultats ont été utilisés couramment dans de nombreux travaux, et en ont inspiré d'autres comme la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*].
- f) *Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* pour les groupes de Picard, le groupe fondamental, la cohomologie étale, la cohomologie cohérente. Il s'agit ici

de la comparaison entre les invariants (cohomologiques ou homotopiques) d'une variété algébrique et d'une section hyperplane. Les idées de départ sont développées dans [16, SGA 2]. Cependant, pour des énoncés “définitifs”, en termes de conditions nécessaires et suffisantes, se reporter plutôt à la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*] déjà citée.

g) *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch :*

La principale idée nouvelle, c'est qu'il y a presque identité entre le groupe “de Chow” des classes de cycles sur une variété X , et un certain groupe de “classes de faisceaux cohérents” (tout au moins modulo torsion), à savoir le groupe $K(X)$ (mentionné dans le par. 3). Dans un contexte modeste c'est exposé dans [12] et le travail de A. Borel et J.P. Serre [*], dans un contexte plus ambitieux cela donne l'imposant séminaire [16, SGA 7]. Dans le même esprit, cf. [12 bis].

Par ailleurs, l'idée (que je semble avoir été le premier à introduire avec ma formulation du théorème de Riemann-Roch) de reformuler un théorème sur une variété (dû en l'occurrence à F. Hirzebruch) en un théorème plus général sur un morphisme de variétés, a connu par la suite une grande fortune, non seulement en géométrie algébrique, mais aussi en topologie algébrique et topologie différentielle (à commencer par la “formule de Riemann-Roch différentiable”, développée par M.F. Atiyah et F. Hirzebruch sous l'inspiration de ma formulation “relative” du théorème de Riemann-Roch).

h) *Schémas abéliens :*

En termes plus classiques, ce sont les familles de variétés abéliennes, paramétrées par un schéma quelconque. Les résultats les plus importants que j'y ai établis sont le “*théorème de réduction semi-stable*” et ses conséquences et variantes [16, SGA 7, Exp. IX], le théorème d'*existence de morphismes de schémas abéliens* contenu dans [17] et ses variantes (généralisé par P. Deligne [*] en un théorème sur la cohomologie de Hodge-De Rham relative d'une famille de variétés projectives complexes non singulières), enfin une théorie des *déformations infinitésimales des schémas abéliens* (non publiée sur une base

quelconque), en termes de la déformation d'une filtration de Hodge sur un H^1 relatif de De Rham (interprété comme une cohomologie cristalline).

i) *Groupes de monodromie :*

Mes principales contributions sont exposées (en partie par P. Deligne) dans le premier volume de [16, SGA 7], donnant des propriétés fondamentales de l'action du groupe de monodromie locale sur la cohomologie comme sur le groupe fondamental d'une fibre. Parmi les principales applications, il y a le théorème de "réduction semi-stable" des schémas abéliens signalé au paragraphe précédent.

j) *Divagations motiviques :*

Nous entrons ici dans le domaine du rêve éveillé mathématique, où on s'essaie à deviner "ce qui pourrait être", en étant aussi insensément optimiste que nous le permettent les connaissances parcellaires que nous avons sur les propriétés arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. La notion de motif peut se définir en toute rigueur avec les moyens du bord (c'est fait par I. Manin [*] et M. Demazure [*]), mais dès qu'on veut aller plus loin et formuler des propriétés fondamentales "naturelles", on bute sur des conjectures actuellement indémontrables, comme celles de Weil ou de Tate, et d'autres analogues que la notion même de motif suggère irrésistiblement. Ces propriétés ont fait l'objet de nombreuses conversations privées et de plusieurs exposés publics, mais n'ont jamais fait l'objet d'une publication, puisqu'il n'est pas d'usage en mathématique (contrairement à la physique) de publier un rêve, si cohérent soit-il, et de suivre jusqu'au bout où ses divers éléments nous peuvent entraîner. Il est évident pourtant, pour quiconque se plonge suffisamment dans la cohomologie des variétés algébriques, "qu'il y a quelque chose" – que "les motifs existent". Il y a quelques années encore, j'ai joué avec l'idée d'écrire contrairement à l'usage, un livre entièrement conjectural sur les motifs – une sorte de science-fiction mathématique. J'en ai été empêché par des tâches plus urgentes que des tâches de mathématicien, et je doute fort actuellement qu'un tel livre soit jamais écrit, ni qu'on arrive jamais (même conjecturalement) à se faire une idée d'ensemble à la fois pré-

cise et suffisamment vaste sur le formalisme des motifs. Avant qu'on n'y parvienne, il sera sans doute devenu évident pour tous, sous la poussée des événements, la science spéculative et parcellarisée ne faisant plus vivre son homme, qu'il est des tâches plus urgentes que de mettre sur pied même la plus belle théorie du monde, conjectural ou non.

Complément à la bibliographie sommaire jointe au Curriculum Vitae de A. Grothendieck (travaux non inclus dans la dite bibliographie)

Analyse fonctionnelle

Algèbre Homologique

Algèbre

Groupes algébriques

Groupes discrets

Groupes Formels

Géométrie Algébrique

Liste de travaux cités, suscités ou influences par les travaux de A. Grothendieck

[-] DE DE RHAM À PUISSANCES DIVISÉES [? ET MOYEN] DES MODULES

§1. —

1) Historique

- a)
- b)
- c) Théorie de HODGE des integrales harmoniques (structure supplémentaire bigraduée sur $H_{\text{DR}}^*(X)$ si X kählérienne compacte.)
- d) Théorème de CARTAN-SERRE sur variétés de Stein (car Lemme de Poincaré valable dans l'analytique).
- e)
- f)
- g)

Le type d'homotopie [?] de X est récupéré si X est simplement connexe - de façon plus précise, il y a (sauf erreur) une équivalence de catégories donné par

§2. —

Δ = catégorie des simplexes Δ^n

STRUCTURES STRATIFIÉES

1. La situation la plus élémentaire

En un sens qui apparaîtra, sera la suivante.

[]

de groupoïdes fondamentaux [] est cocartésien - ou encore, si Y, X, X^* sont connexes, et [] (i.e. par définition, un revêtement universel de []) [] un isomorphisme canonique de groupes fondamentaux [] où [] est isomorphe extérieurement à $\pi_1(Y)$.

Pour expliciter $\pi_1(X)$ en termes de données “élémentaires”, dont $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(X^*)$ [] encore à expliciter la structure de [], qui s’envoie dans l’un et dans l’autre, donnant [] [] qui exprime (8). C’est ici que l’hypothèse de *locale* [] a un [] (celle de lissité [] comme devant techniquement initiale, [] de notre heuristique...).

On doit se [], dans ce cas, pour démontrer que les [] homotopique de [] sont celles d’une *fibration localement triviale des fibres* []: [] - et c’est [] qui devrait [] le contexte topologique (p. ex. celui des schémas avec le topos étale) de *définition* de la “locale trivialité” [] homotopique [] $Y \hookrightarrow X$. (Bien sûr, dans le contexte schématique, il faudra de plus travailler avec des types d’homotopie profini, et même sans doute “localiser” ces types d’homotopie en l’un des [] premières qui sont distinctes des caractéristique résiduelle qui interviennent, ou que en n’est que alors ce contexte [] des théorèmes qu’il faut, cf Artin-Mazur...)

On ont en particulière une suite exacte d’homotopie []

Si on suppose par exemple que []

allusion, en devrait $[\]$ exprimer alors le *type d'homotopie de X* (et non seulement son π_1) en termes de diagrammes de groupoïdes (8), ou ce qui revient au même, des diagrammes de groupes (10).

En tous cas, il est clair (indépendamment de toutes hypothèses de nullité de $[\]$ π_i , ou de $[\]$) comment reconstruire en termes du diagramme (8), $[\]$ faisceaux sur X , $[\]$ tels que l'on ait

$$(16) \quad F|_{X^*} \quad \text{et} \quad F|_Y \quad \text{localisation triviaux}$$

Cette catégorie F est équivalent en effet à celle des systèmes

$$(17) \quad (E_{X^*}, E_{Y,X}, \varphi)$$

E_{X^*} est un système locale sur π, X^* (un recouvrement étale de X^*), $E_{Y,X}$ un système locale sur $[\]$ un homomorphisme de systèmes locaux sur $[\]$

$$(18) \quad \varphi : p^*(E_{Y,X}) \longrightarrow i^*(E_{X^*}).$$

En termes de diagrammes de groupes (10)

2. Stratification globale : $[\]$ (sans tubes)

Pour simplifier, je vais en placer sur un espace topologique X - par le suite X $[\]$ un topos quelconque. Les constructions qui suivent, relatifs à une "stratification globale", $[\]$ de la façon habituelle - ce qui $[\]$ alors à imposer des conditions supplémentaires de connexité et de locale connexité, qui pour $[\]$. De même $[\]$.

Soit I un ensemble ordonné,

$$(X_i)_{i \in I} \quad X_i \subset X$$

une famille de sous-espaces de X . On suppose $[\]$ Posant $[\]$ on a un morphisme canonique

$$(3) \quad X_{\Delta_0} \longrightarrow X$$

et l'hypothèse a) signifie que ce morphisme est fini - i.e. propre sépare et à fibres finies. C'est aussi une *immersion locale*. On introduit une partie fermé $[\]$ On voit alors que les deux projections $[\]$ ont respectivement les propriétés suivantes : $[\]$ Par ailleurs

3. Stratification globale : introduction au tubes

On [] les notations précédentes.

Pour toute couple $(i \leq j) \in I \times I$, considérons

4. Topos canoniques associées à une stratification globale

On va montrer comment, à une situation stratifiée donnée, on peut en associer d'autres.

A) Image inverse générale.

Rappelons les axiomes utilisés jusqu'à présent : []

Notons que pour tout X' au dessus de X , la famille des [] satisfait alors aux mêmes conditions.

D'ailleurs le système [] des X_{Δ_r} - comme image inverse le lui des X'_{Δ_r} , défini par les X'_i , [] des isomorphismes []

NB. Nous appliquons ces [] sauf en cas où X' est un ouvert de X . C'est pour [] prendre de telles images inverses [], qu'il [] été commode de supposer les X_i ou les X_i^* non-vides, ou encore par $I \mapsto X_i$ est un *plongement* d'une ordonnée $I \hookrightarrow \mathfrak{P}(X)$.

Lorsque $X' \longrightarrow X$ est une immersion locale propre (mais pas si c'est une immersion ouverte !) alors [] les images inverses de parties [] de X comment à [] des voisinages tubulaires de une telles parties []. Notons d'ailleurs que pour $i < j$, [] (sans hypothèse d'ailleurs que $X' \longrightarrow X$ sont une immersion locale) [] d'où, dans le cas d'une immersion locale propre, des isomorphismes [] et plus généralement [] tout qui à faire.

Ceci montre en particulière que la démonstration du théorème de recollement, [] théorème énoncé p.22, est une [] *locale* sur X^9 - ce qui prenant par exemple de nos [] au cas où I est *fini*.

B) Cas d'un $X_{I'}$.

Soit I' une partie de I telle que

$$(7) \quad i \leq j \in I' \Rightarrow i \in I'$$

⁹*non*, ce n'est pas absolument clair []

et tout

$$(8) \quad X_{I'} = \bigcup_{i \in I'} X_i \quad (\text{partie fermée de } X)$$

On a bien sûr $[]$ (et aussi $[]$) $[]$ à (11 d). Dans ces formules, I' , I'' , les I'_α sont des parties de I satisfaisant (7) ($[]$ cribles de I).

Si dans A) on prend $X' = X$, il est plus commode de travailler avec la stratification de X' définie par les X_i avec $i \in I'$ - il est clair que les conditions (II) relatives à $X' = X_{I'}$ sont satisfaites. Les “parties cribles” de X' pour cette stratification, ou pour celle induit au sens général des espaces au dessus de X , sont les mêmes - $[]$ sur $X' = X_{I'}$, des parties-cribles de l'espace stratifié X .

Ici, les espaces élémentaires pour la stratification de type I' de $X' = X_{I'}$, sont les espaces $[]$

$[]$ pour une instant à X , et considérons l'un I_0 des $i \in I$ tel que $X_i = \emptyset$. C'est une crible, et on a $X_i^* = \emptyset$, $[]$ si $i \in I_0$. $[]$ on voit que les diagrammes de type \tilde{I} défini par l'espace stratifié X $[]$ en remplaçant I par $I \setminus I_0$, ou plus guère par $I \setminus I'_0$, où $I'_0 \subset I'$ est une crible, ce qui donne lieu à un diagramme $[]$ qu'est *contenu* dans \tilde{I} (cela est vrai pour *toute* crible de I).

Si par exemple on a deux cribles

$$(14) \quad I'' \subset I' \subset I$$

d'où

$$(15)$$

$[]$ regarder plutôt la stratification de type $I' \setminus I''$, définie par les

$$(16)$$

dont les topos élémentaires sont dans les $X_{i'}^*$ ($i' \in I' \setminus I''$) et des $[]$ couples (i', j') avec $i' \in I' \setminus I''$ $[]$ on a

$$(17)$$

mais il n'est pas clair en générale que ces soient mêmes semblant équivalences d'homotopie...

Donc il [] il s'agit de [] les constructions sur une $X_{I'}$, et sur un [].

Je vais en [] par C sauf de regarder plus particulièrement ce qui se [] en l'induisant ainsi sur un ouvert $U_{I', I''}$.

C) Les [].

On suppose donnée des cribles

(18)

d'où

(19)

NOTES ANABÉLIENNES

I. Résultats de fidélité

À tout corps K , associons son topos étale B_K , qui est un topos (profini) galoisien. Le groupoïde des points de B_K est noté Π_K , il est antiéquivalent canoniquement à la catégorie des clôtures algébriques séparables de K . Si \bar{K} est une telle clôture, son groupe des K -automorphismes $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ ou $E_{\bar{K}/K}$ s'identifie au groupe des automorphismes des points de B_K associé à \bar{K}/K (il vaut peut-être mieux de dire à l'opposé de ce groupe - la variance des clôtures algébriques de K est comme celle des foncteurs fibres, à l'opposée de celles des points ...) Bien entendue, B_K se reconstitue à partir de Π_K , comme le topos des systèmes locaux (continues) sur Π_K - et en termes de $E_{\bar{K}/K}$, comme le topos des ensembles discrets à actions continues de $E_{\bar{K}/K}$.

Pour un homomorphisme de corps $K \longrightarrow K'$, i.e. un homomorphisme de schémas $\text{Spec } K' \longrightarrow \text{Spec } K$, on a un morphisme de topos correspondant

$$(1) \quad B_{K'} \longrightarrow B_K$$

associé à un homomorphisme de groupoïdes fondamentaux

$$(2) \quad \Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K.$$

Ceci [s'explique] en disant qu'un objet $[] \Pi_{K'}$ (i.e. point de $B_{K'}$, ou revêtement universel de $B_{K'}$, ou clôture séparable \bar{K}' de K') en définit un des Π_K (ainsi, on

prend \bar{K} = clôture algébrique séparable de K' dans \bar{K}') et pour deux points correspondants, on a un homomorphisme de groupes fondamentaux correspondants, qui s'interprète par exemple comme

$$(3) \quad E_{\bar{K}'/K'} \longrightarrow E_{\bar{K}/K}$$

et qui peuvent de reconstitue l'homomorphisme de topos comme une "restriction des scalaires".

L'image de (3) est le sous-groupe fermé de $E_{\bar{K}/K}$ qui correspond à la sous-extension K_1 de \bar{K}/K , clôture algébrique séparable de K dans K' , i.e. $K_1 = \bar{K} \cap K'$.

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{K} & \longrightarrow & \bar{K}' \end{array}$$

Quand K' est une extension de type fini de K , K_1 est une extension finie de K , et on en conclut que l'image de (3) est alors un sous-groupe d'indice fini, égale à $E_{\bar{K},K}$ si et seule si $K_1 = K$ i.e. K est séparablement algébrique clos dans K' . D'ailleurs, on montre sans mal que (si K est extension de type fini) l'homomorphisme (3) est injectif si et seule si K' est une extension algébrique de K . Donc il est bijectif si et seule si K' est une extension [radicielle] de K . Dans le suite nous nous bornons (précisément) aux corps de caractéristique 0, et la condition précédente signifie alors que $K \longrightarrow K'$ est un *isomorphisme*.

Ainsi, le foncteur $K \longrightarrow B_K$ ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K}/K}$, est *conservatif* quand on se limite comme morphismes de corps $K \longrightarrow K'$ (de caractéristique 0) à ceux que fait de K' une extension de type fini de K .

Par exemple il suffit de se limiter aux extensions de type fini des corps fermées \mathbf{Q} - on trouve un foncteur conservatif de la catégorie de ces corps dans celle de groupoïdes (ou de topos), au sens à un morphisme de corps qui donne une équivalence de groupoïdes (ou de topos) est un *isomorphisme*¹⁰.

Quand on prend des corps quelconques, le 2-foncteur $K \longrightarrow B_K$ ou $K \longrightarrow \Pi_K$ ou $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K}/K}$ est cependant loin d'être fidèle. Ainsi, si K est séparablement clos, B_K est le "topos ponctuel", Π_K le groupoïde ponctuel, $E_{\bar{K}/K} \simeq 1$ - il est donc

¹⁰au cas []

que les morphismes entre corps séparablement clos ne sont pas décrits par les morphismes entre leurs topes étales, ou groupoïdes fondamentaux! Pour cette raison, il y a lieu d'associer à un corps K un objet plus fin que B_K ou Π_K , à savoir le système projectif des B_{K_i} , ou des Π_{K_i} , pour K_i sous-corps de K de type fini sur le corps $[\]$, et à un système (K, \bar{K}) le système projectif des $E_{\bar{K}_i/K_i}$, où \bar{K}_i est le clôture algébrique séparable de K_i dans \bar{K} . On []

$$(4) \quad \begin{cases} \Pi_K \simeq \varprojlim \Pi_{K_i} \\ B_K \simeq \varprojlim B_{K_i} \\ E_{\bar{K}/K} \simeq \varprojlim E_{\bar{K}_i/K_i} \end{cases}$$

i.e. on reconstitue les objets B_K , Π_K , $E_{\bar{K},K}$ à partir des systèmes projectifs correspondant - mais l'inverse n'est pas vrai. En fait, comme le foncteur

$$\text{Ind}(\text{Corps type fini}) \longrightarrow \text{corps}$$

de la catégorie des systèmes inductifs de corps de type fini, vers celle des corps, est une équivalence de catégories (pour des raisons triviales), il s'ensuit que les foncteurs $K \longrightarrow B_K$, ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K},K}$, étant des corps vers les propriétés idoines, avoir [] les propriétés de fidélité des foncteurs $K \longrightarrow B_K$, ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K},K}$ [] aux corps absolument de type fini, auxquels nous allons pour la suite nous borner, la plupart des temps. Mais il sera nécessaire au cours de travail, de donner une description purement algébrique, par exemple, de pro-groupes finis associé par exemple à (plus précisément, à $(,)$!).

Le rôle dominant sous joué par le corps premier de caractéristique 0, \mathbb{Q} donc pour $B_{\mathbb{Q}}$ et $\Pi_{\mathbb{Q}}$, qui a un objet canonique, noté $\bar{\mathbb{Q}}_0$ - la clôture algébrique de \mathbb{Q} dans $\bar{\mathbb{Q}}$. On posera¹¹

$$(5) \quad \Pi_{\mathbb{Q}} = E_{\bar{\mathbb{Q}}_0/\mathbb{Q}}$$

Pour tout corps K de caractéristique 0 - en particulière pour les corps K de type fini sur \mathbb{Q} , lequel nous allons nous borner par la suite - on a donc des homomorphismes canoniques

$$(6) \quad B_K \longrightarrow B_{\mathbb{Q}} \quad \text{Quad} \quad \Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$$

¹¹et on écrit souvent $\Gamma_{\bar{\mathbb{Q}}_0/\mathbb{Q}}$ au limite des $E_{\bar{\mathbb{Q}}_0/\mathbb{Q}}$, pour une clôture algébrique $[\] \bar{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q}

qui l'explicitait, quand on a choisi un objet de Π_K i.e. un \bar{K}/K , d'où un \bar{Q}/Q , pour un homomorphisme de groupes profinis

$$(7) \quad E_{\bar{K}/K} \longrightarrow \Gamma_{\bar{Q}/Q}.$$

Par le suit, on regarde toujours B_K , Π_K ou $E_{\bar{K},K}$ comme muni de cette structure supplémentaire - ce sont les morphismes (de topos, de groupoïdes, ou de groupes profinis) "arithmétiques", dominant la situation.

Un intérêt particulier s'attende au noyau de (7), que je note $\pi_{\bar{K},K}$ - on¹² l'appelle "partie géométrique" de groupe de Galois $E_{\bar{K},K}$ par opposition au quotient $E_{\bar{K},K}/\pi_{\bar{K},K} = \Gamma_{\bar{K},K} \hookrightarrow \Gamma_{\bar{Q},Q}$, que j'appelle se partie "arithmétique" - celle-ci est un sous-groupe ouvert de $\Gamma_{\bar{Q},Q}$, qui son [], correspond au sous-corps \underline{K} de \bar{Q}/Q , extension finie \bar{Q}/Q de \bar{Q}/Q , clôture algébrique de Q dans K , de sorte qu'on a une suite exacte

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_{\bar{K}/K} & \longrightarrow & E_{\bar{K}/K} & \longrightarrow & \Gamma_{\bar{K}/K} \longrightarrow 1 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \Gamma_{\bar{Q}/Q} \end{array}$$

On¹³ va donner une interprétation de ce noyau, et de la suite exacte (8), en écrivant

$$(9) \quad K = \varinjlim_i A_i$$

où les A_i sont les sous- Q -algèbres de type fini de K , correspondant au système projectif des "modèles affines" $U_i = \text{Spec}(A_i)$ de K/Q . Parmi les A_i , il y a d'ailleurs un système [] fermé des A_i réguliers, i.e. des U_i lisses/ Q , [] comme morphismes de transition des morphismes de localisation []. On peut même, d'après Mike Artin, prendre comme U_i des schémas "élémentaires" sur K_0 , se dévissant en fibrations successives de courbes. Notons que $\text{Spec} K = \eta$ est le point générique [] des U_i , qui sont [] sur k (clôture algébrique de Q dans K).

Le choix de \bar{K} définit un point géométrique $\bar{\eta}$ sur les U_i , d'où des groupes $\pi_1(U_i, \bar{\eta}) = \Gamma_i$, et [] bien connus

$$\text{Spec} K = \varprojlim U_i$$

¹²on va noter $\Gamma = \Gamma_{\bar{K}/K}$ cette "partie arithmetique"

¹³**NB** $\pi_{\bar{K}/K} = (1)$ si et seule si K algébrique sur Q , i.e. fini sur Q .

$$(10) \quad E_{\bar{K}/K} = \pi_1(\eta, \bar{\eta}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i [\Gamma_i = \pi_1(U_i, \bar{\eta})]$$

D'autre part, si on pose

$$(11) \quad \bar{U}_i = U_i \otimes_K \bar{\mathbb{Q}}$$

on a pour tout i une suite exacte d'homotopie

$$(12) \quad 1 \longrightarrow$$

qui forment un système projectif de suites exactes, ou d'extensions ayant toutes même quotient Γ' , et dont les noyaux

$$\pi_i = \pi_1(\bar{U}_i, \bar{\eta})$$

sont des groupes fondamentaux “géométriques” - que $[\Gamma]$ d'ailleurs $[\Gamma]$, en utilisant un plongement de $[\Gamma]$ dans \mathbb{C} (d'où un isomorphisme $\bar{\mathbb{Q}} \simeq \bar{\mathbb{Q}}_0$), comme les $[\Gamma]$ profinis de $\pi_1(U_i(\mathbb{C}), \bar{\eta})$, ou maintenant $\bar{\eta}$ est interprète comme un point $[\Gamma]$ aux variétés complexes $U_i(\mathbb{C})$.

La suite exacte (8) est donc le limite projectif des suites exactes d'homotopie (12) ⁽¹⁴⁾, ce qui donne en particulière

$$(13) \quad \pi_{\bar{K}/K} \simeq \varprojlim_i$$

Utilisant les fibrations des U_i (dans le cas où on s'astreint prendre de variétés élémentaires d'Artin), on trouve que tout π_i est un groupe extension successive des groupes profinis *fibres* (où $[\Gamma]$). Ceci redonne p. ex. que le dimension cohomologique de π_i est $[\Gamma]$, celle de E_i est $\leq n+2$ (pour des coefficients de m -torsion, $[\Gamma]$) - et par passage à la limite, des $[\Gamma]$ correspondantes pour les dimension cohomologiques de $\pi_{\bar{K}/K}$ et $E_{\bar{K}/K}$

$$(14) \quad \dim \text{coh} + \pi_{\bar{K}/K} \leq n, \quad \dim \text{coh} \Gamma_{\bar{K}/K} \leq n+2$$

qui sont en fait même des *égalités* (sauf erreur), et donnant donc une description cohomologique simple de degré d $[\Gamma]$ absolu de K .

¹⁴cette interprétation

Théorème (1). — Soit K un corps extension de type fini de \mathbb{Q} , \bar{K} une clôture algébrique de K . Alors pour tout sous-groupe ouvert E de $E_{\bar{K}/K}$, son centralisateur dans $E_{\bar{K}/K}$ est réduit au groupe unité. Itou pour $\pi_{\bar{K}/K}$.

Démonstration. — Soit $\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma_{\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ l'image de E dans $\Gamma = \Gamma_{\bar{K}/K}$ qui est donc un sous-groupe ouvert. L'image dans Γ des centralisateurs de E' dans E [] centralisateur de Γ' dans Γ . Je dis qu'il est égale à 1, ce qui équivaut donc au

Corollaire. — Dans $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \Gamma_{\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$, le centralisateur de tout sous-groupe ouvert est réduit à (1).

OPS Ce sous-groupe ouvert Γ' invariant, il est bien connue ⁽¹⁵⁾ qui son centre est réduit à 1 donc si Z est son centralisateur dans $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, l'homomorphisme $Z \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{Q}}/\Gamma'$ est injectif donc Z est fini. Mais on sait que les seules éléments $\neq 1$ de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ d'ordre fini sont les conjugués de τ , conjugaison complexe. Mais le centralisateur de τ dans $\Gamma_{\bar{\mathbb{Q}}}$ est réduit à [] donc on peut contenir Γ' , donc $\tau \notin z$, donc $z = (1)$.

[] à $E \subset E_{\bar{K}/K}$, on voit donc que son centralisateur Z dans $E_{\bar{K}/K}$ est une image dans Γ réduite à $\{1\}$ donc $z \subset \pi_{\bar{K}/K}$. Soit $\pi' \subset \pi = \pi_{\bar{K}/K}$ le [] de z' sur π , c'est un sous-groupe ouvert de π , et on est ramené à voir que $\text{Centr}_{\pi}(\pi') = \{1\}$, i.e. le

Corollaire. — Soit π un groupe profini, extension successives de groupes profinis libres. Alors le centralisateur z dans π de tout sous-groupe ouvert π' de π est réduit à $\{1\}$.

Par dévissage on est ramené au cas d'un groupe profini libre. On sait que π' est donc libre. OPS π' invariant, ⁽¹⁶⁾ et on admet que le centre d'un groupe profini libre est réduit à 1.

Donc $Z \longrightarrow \pi/\pi'$ est injectif, donc Z est fini, et on admet que dans un groupe profini libre, il n'y a pas d'élément ⁽¹⁷⁾ d'ordre fini $\neq 1$ - ce qui [] la démonstration.

Scholie. — Le fait que $E_{\bar{K}/K}$ soit à centre trivial peut s'exploiter en disant que le groupoïde Π_K (ou le topos B_K) [] à équivalence près, définie à isomorphisme unique près, quand on connaît le groupe extérieure associé à $E_{\bar{K}/K}$.

¹⁵à vérifier

¹⁶à vérifier

¹⁷à vérifier

Les homomorphismes $E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$ associés à des homomorphismes $K \longrightarrow K'$ d'extensions de type fini de \mathbb{Q} , ayant une image ouvert dans un centralisateur réduit à 1, on voit de même que l'homomorphisme de topos $B_{K'} \longrightarrow B_K$ ou de groupoïdes $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$, sont déterminés à équivalence près (définie à isomorphisme unique près) par l'homomorphisme correspondant de groupes extérieures. Il [] en particulière ainsi de morphisme structurel $B_K \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}$ ou $\Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$ qu'on peut interpréter intrinsèquement comme un homomorphisme de groupes profinis extérieures $E_K \longrightarrow E_{\mathbb{Q}}$. Mais nous [] suivre [], en exploitant le fait que $\pi_{\overline{K}/K}$ est lui associé à centre trivial. Cela signifie que l'extension de $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ par $\pi_{\overline{K}/K}$ est entièrement connue, à isomorphisme près, pour $\pi_{\overline{K}/K}$ et Γ fixés, en termes de l'action extérieure correspondant de Γ sur π , comme l'image inverse de l'extension universelle

$$1 \longrightarrow \text{Aut}(\pi) \longrightarrow \text{Autex}(\pi) \longrightarrow 1$$

Pour K fixé, donc k fixé, [] qu'on fixe un $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{Q}/k}$ revient à dire qu'on fixe une clôture algébrique de k , [] qu'on fixe un $\pi_{\overline{K}/K} = \pi_1(K \otimes_k \overline{k})$ signifie [] qu'on fixe une revêtement universel de $\text{Spec}(K \otimes_k \overline{k}) = \eta \otimes_k \overline{k}$, les deux ensembles reviennent à se donner le revêtement universel $\overline{\eta} = \text{Spec}(\overline{K})$ de K . Par la suite, nous décrivons (avec une fidélité qui reste à []) les couples (K, \overline{K}) d'une extension K de \mathbb{Q} de type fini, et d'une clôture algébrique \overline{K} de K , par les triples (π, Γ, φ) , où $\pi = \pi_{\overline{K}, K}$ et $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}, K}$ sont des groupes profinis, et $\varphi : \Gamma \longrightarrow [](\pi)$ une action extérieur de Γ sur π - ce qui peuvent de reconstituer l'extension $\mathbb{E}_{\overline{K}, K}$ de $\Gamma_{\overline{K}, K}$ par $\pi_{\overline{K}, K}$. J'ai oublié [] qu'il faut *de plus* se donner Γ comme sous-groupe d'un $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ bien déterminé, i.e. qu'il faut se donner un objet de $\Pi_{\mathbb{Q}}$ et une [] fidèle de Γ dessus - pour reconstruire [] cas données un homomorphisme de groupoïdes profinis $\Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbb{Q}}$, plus un objet de Π_K - ou encore, un morphisme de topos progaloisien $B_K \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}$, plus un point de B_K . On peut ainsi fixer un objet de $\Pi_{\mathbb{Q}}$, i.e. un point de $B_{\mathbb{Q}}$, i.e. un $\overline{\mathbb{Q}}$, et étudier les K , avec un plongement de k (clôture algébrique de \mathbb{Q} dans K) dans $\overline{\mathbb{Q}}$ - mais [] donner une clôture algébrique \overline{K} de K qui induise $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. Ils sont décrits [?]

On a ainsi plusieurs [] essentiellement équivalentes, pour décrire par voie profinie une extension K de type fini de \mathbb{Q} :

- 1) Pour le topos étale B_K , en tant que topos progaloisien sur $B_{\mathbb{Q}}$;

- 2) Pour le groupoïde fondamental Π_K de ce topos (groupoïde de ces points, ou de ses revêtement universel) - en tant que groupoïde au dessus de $\Pi_{\mathbb{Q}}$;
- 3) Pour le groupe extérieur E_K , au dessus de groupe extérieur $E_{\mathbb{Q}}$ ou $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ ([]) ;
- 4) En termes d'une clôture algébrique \bar{K}/K (i.e. en décrivant le couple (K, \bar{K}) plutôt que K), par un objet $\bar{\mathbb{Q}} \in (\Pi_{\mathbb{Q}})$ et un homomorphisme de groupes profinis $E \longrightarrow \Gamma_{\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}}$;
- 5) En termes d'une clôture algébrique fixe $\bar{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} , et où $\Gamma = \Gamma_{\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}}$ [] les couples (K, i) où $i : k \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$ est un plongement de la clôture algébrique k de \mathbb{Q} dans $\bar{\mathbb{Q}}$: pour le groupes extérieur $\pi_K = \pi_1(K)$, sur lequel un sous-groupe ouvert $\Gamma_K \subset \Gamma$ opère extérieurement par des groupes profinis extérieures $\pi_1(K) = \Gamma_K$, sur lesquels un sous-groupe ouvert Γ (non précisé []) de $\Gamma_{\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}}$ opère extérieurement ;
- 6) En termes d'une $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$: pour le groupoïde $\Pi_{K \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}}$ [] .

Un homomorphisme de corps $K \longrightarrow K'$ donne ⁽¹⁸⁾ [] à un homomorphisme de groupes extérieures, $\pi' \longrightarrow \pi$, où l'image de π' dans π est ouvert [] de centralisateur réduit à (1), ce qui implique [] que le morphisme de topos $B_{K' \otimes_K \bar{\mathbb{Q}}} \longrightarrow B_{K \otimes_K \bar{\mathbb{Q}}}$ est déterminé (à isomorphisme unique près) par [] homomorphisme extérieur. De plus on a des actions extérieures de $\Gamma = \Gamma_K \subset \Gamma_{K'}$ sur π' et π , de façon que $\pi' \longrightarrow \pi$ [] et ceci suffit pour reconstituer, d'une part les groupes extérieures E, E' extensions ("extérieures") de Γ [] π, π' (et, à équivalence rigide près, les $B_K, B_{K'}$ et $B_K \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}, B_{K'} \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}$) et de plus l'homomorphisme d'extensions extérieures $E \longrightarrow E'$ de Γ .

Remarque. — Quand $\pi \neq (1)$, i.e. K pas fini sur \mathbb{Q} , le théorème 1 peut se renforcer, sauf erreur, en écrivant que pour tout sous-groupe $\pi' \subset \pi$ ouvert dans π , $\text{Centr}_E(\pi') = \{1\}$.

Si z est se centralisateur, on a $z \cap \pi = (1)$ d'après le théorème 1, prouvons que l'image de z dans $\Gamma_{\bar{K}, K} \subset \Gamma_{\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}}$ est finie (ce qui [] alors, que z est d'ordre 1 ou 2, et dans le [] cas que son image des $\Gamma_{\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}}$ est [] pour un τ de conjugaison complexe).

[] E pour un sous-groupe ouvert assez petit (ce qui revient à poser à une extension finie de K) [] $\pi' = \pi$, alors l'image z' de z dans Γ est contenue dans le noyau

¹⁸on suppose pour simplifier que c'est

de l'homomorphisme $\varphi : \Gamma \longrightarrow [](\pi)$. [] je sais prouver que cet homomorphisme est injectif (ou est ramené aussitôt au cas où K est de degré de [] 1, et on est ramené au cas des π_1 d'une courbe algébrique ...)

Théorème (2). ⁽¹⁹⁾ — *Le foncteur $K \longrightarrow \Pi_K/\Pi_{\mathbb{Q}}$ des extensions de type fini de \mathbb{Q} vers les groupoïdes profinis sur $\Pi_{\mathbb{Q}}$ est fidèle i.e. si deux homomorphismes $f, g : K \longrightarrow K'$ définissent des homomorphismes de groupoïdes sur $\Pi_{\mathbb{Q}}$ isomorphes*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{K'} & \xrightarrow{f^*, g^*} & \Pi_K \\ & \searrow p' & \swarrow p \\ & \Pi_{\mathbb{Q}} & \end{array}$$

(i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs $\alpha : f^* \longrightarrow g^*$ tel que pour tout objet $\overline{\eta'}$ de $\Pi_{K'}$, le carré

$$\begin{array}{ccc} p f^*(\overline{\eta'}) & \xrightarrow[p(\alpha)]{\sim} & p g^*(\overline{\eta'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p(\overline{\eta'}) & \xrightarrow{\sim} & p'(\overline{\eta'}) \end{array}$$

est commutatif) alors $f = g$.

L'hypothèse sur f, g signifie aussi, en termes d'une clôture algébrique choisie $\overline{K'}$ de K' , donnent via f [] g deux clôtures algébriques de [] l'on peut trouver un isomorphisme [] celui-ci ⁽²⁰⁾ ([] d'identifier $E_{\overline{K}/K}$ et $E_{\tilde{K}/K}$) de telle façon que les deux homomorphismes

$$f^*, g^* : E_{\overline{K'}, K'} \longrightarrow E_{\overline{K}, K}$$

sont égaux. C'est sans doute plus claire en termes d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ fixée de \mathbb{Q} , en disant que les deux homomorphismes $f^*, g^* : E_{K'} \longrightarrow E_K$ de groupes profinis extérieures (avec opérateurs $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}}$) sont égaux.

Écrivons comme [] $K = \varinjlim A_i$, donc $\eta = \text{Spec}(K) = \varprojlim U_i$, on a (en termes d'un point géométrique quelconque $\overline{\eta}$ de $\text{Spec} K$ i.e. en termes d'un \overline{K})

$$\pi_K = \varprojlim_i \pi_1(\overline{U}_i, \overline{\eta}), \quad \text{où} \quad \overline{U}_i = U_i \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$$

¹⁹En fait, ce théorème n'est pas spécial à \mathbb{Q} - il [] avait sur un corps de [] quelconque est en fait

²⁰induisant "l'identité" sur [] clôtures algébriques []

et il suffit de voir que pour tout i , $f|_{A_i} = g|_{A_i}$ [] le fait que $\pi_1(f_i^*) = \pi_1(g_i^*) : \pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(U_i)$ (comme homomorphisme de groupes extérieures. On [] fixé, on a $K' = \varinjlim A_j$, où les A_j contiennent $f_i(A_i)$ et $g_i(A_i)$, donc

$$\pi_{K'} = \varprojlim_j \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta}'), \quad \text{avec} \quad \overline{V}_j = \text{Spec}(A_j) \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}.$$

Notons (prenant les V_j réguliers) que les homomorphismes de transition des le système projectif de $\pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta}')$ sont surjectifs - donc $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta}')$ est surjectif, ce qui implique que l'égalité de f^* et $g^* : \pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(\overline{U}_i)$ (comme homomorphismes extérieures) implique celle de $\pi_1(\overline{V}_j) \longrightarrow \pi_1(\overline{U}_j)$.

Donc l'égalité $f_i = g_i$ (d'où $f = g$) est conséquence de résultat plus général). “[] géométrique”

Corollaire (1). — Soient X, Y des schémas de type fini réduits 0-connexes sur un corps algébriquement close k , et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux morphismes, on suppose que $\pi_1(f), \pi_1(g) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ sont égaux (en fait [] extérieurs) Alors

- a) Si Y se plonge par un $i : Y \longrightarrow G$ un groupe algébrique commutatif extension d'une V.A par un tore, il existe un $u \in Y$ (unique) tel que $g(x) = f(x) + u$ et pour tout $x \in X(h)$, i.e. $(i \circ g) = \tau_u \circ (i \circ f)$ (τ_u [])
- b) Si Y est une variété élémentaire d'Artin, avec fibres successives des courbes abéliennes, et X [] et f ou g est dominant, alors $f = g$.

Démonstration. — a) L'unicité de [] est [] - i.e. il suffit (²¹) d'examiner les actions de $\pi(f), \pi(g)$ sur les groupes abelianisés dans π_1 , et même sur leurs composantes l -adiques. Prenant le Jacobienne généralisée de type “extension d'une V.A par une tore” de X , on sait que

- 1°) Les morphismes $f : X \longrightarrow G$ tel que $f(\alpha) = 0$ se factorisent de façon unique par $X \xrightarrow{\text{can}} J \xrightarrow{\varphi} G$ avec φ un homomorphisme de groupes algébriques ;
- 2°) Un tel homomorphisme φ est connu quand on connaît ses actions sur les $H_1(, \mathbb{Z})$ ce qui [] à la connaissance sur les points d'ordre [] que soit v - on ceux-ci sont denses ...

²¹En fait, dans a) il suffit de supposer que

$$3^\circ) H_1(X, \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H_1(J, \mathbb{Z}_l).$$

De ceci, on conclut (par 3°)) que $H_1(f) = H_1(g)$ implique (si $f = \varphi \circ can$, $g = \psi \circ can$) $H_1(\varphi) = H_1(\psi)$, donc par 2°) que $\varphi = \psi$, donc $f = g$ []

Notons que l'on

b) on va pourtant prouver l'égalité sans l'hypothèse anabéliennes

[] L'hypothèse que $\pi_1(f) = \pi_1(g)$ signifie donc qu'il existe $\alpha \in \pi_1(Y)$, tel que

$$\pi(f')(\gamma) = [] \pi(j)(\gamma)$$

pour tout $\gamma \in Im(\pi_1(X) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(U))$. [] cette image est un sous-groupe ouvert de $\pi_1(U)$ ([] dominant !). Donc on est ramené à ceci: Soit U ouvert $\neq \emptyset$ de Y , $u \in G$, tels que $\tau_u U \subset Y$ [et tels que (désignant par f, f' les morphismes $y \rightarrow y$ et $y \mapsto y$ en de U dans Y) $\pi_1(f)$ et $\pi_1(f')$ [] extérieurement en un sous-groupe ouvert de $\pi_1(U)$] alors $f = f'$ via $u =$

Finalement, je [] que [] pas à la prouve par voie géométrique [] arithmétique.

Corollaire (2). — *La condition $f = g$ de corollaire précédent, est valable si on suppose que K est de caractéristique 0, X [] est dans l'une des hypothèses suivantes*

- c) *l'image de $\pi_1(F)$ est un sous-groupe ouvert de $\pi_1(Y)$, Y est une variété élémentaire d'Artin anabélienne ;*
- d) *l'image de $\pi_1(X)$ par $\pi_1(f)$ a un centralisateur dans $\pi_1(Y)$ réduit à (1), et Y se plonge dans un groupe algébrique extension d'une VA par un tore.*

Comme le centralisateur [] de un sous-groupe ouvert de $\pi_1(Y)$ ($\pi_1(Y)$ étant extension successive de groupes profinis fibres anabéliennes) est réduit à (1), comme un a un²² plus haut, le cas c) est un cas particulier de d), [] dans le cas d), [] X pour un ouvert d'Artin []

La situation X, Y, f, g provient, par extension de corps de [] d'une situation analogue sur un corps K extension de type fini de \mathbb{Q} . Soit \bar{K} la clôture algébrique de K dans k [] de K à \bar{K} . On a donc [] satisfaisant la condition d) avec [] trivial.

²²il faut

Mais ces hypothèses impliquent que les extensions $E(X/K) = \pi_1(X)$, $E(Y/K) = \pi_1(Y)$ de $E_{\bar{K},K}$ [], ainsi que les homomorphismes [] induits, sont reconstruite à partir de [] et de l'action extérieure de $E_{\bar{K},K}$ sur ces groupes. On va montrer maintenant le

Corollaire (3). — Soient X, Y deux schémas de type fini sur un corps K extension de type fini de \mathbb{Q} . On suppose que Y se plonge dans une extension d'une V.A. par un tore, X réduit, X, Y [] 0-connexe. Soit \bar{K} une clôture algébrique de K , d'où des extensions "extérieures" $E_{X,K}, E_{Y,K}$ de $E_{\bar{K},K} = \text{Gal}(\bar{K}, K)$ [] $\pi_1(\bar{X}), \pi_1(\bar{Y})$, et pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, un morphisme [] de $E_{X,K}$ [] $E_{Y,K}$.

Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ tels que [] - i.e. [] soient conjugués pour un élément de $\pi_1(Y)$ [] alors $f = g$.

En fait, il suffit même que les homomorphismes d'extensions [] soient égaux, [] $f = g$. (C'est à dire, [] des hypothèses *anabéliennes*, des hypothèses [] géométriques sur les actions de [], [] on peut laisser tomber les aspects anabéliens [] sur les aspects abéliens []) [].

Il suffit de voir que [] à noyau abélien associée - l'hypothèse implique que $f(x)$ et $g(x)$ définissent le même donne de conjugaison de scindages. Donc il suffit maintenant de prouver le

Théorème (3). — Soit X un schéma de type fini sur un corps K , extension de type fini de \mathbb{Q} , on suppose que X est géométriquement 0-connexe et se plonge dans une extension d'une V. A. par un tore (p. ex. X est une variété élémentaire d'Artin, à fibres []).

Considérons une clôture algébrique \bar{K}/K et l'extension extérieure correspondant $E_{X/K}$ dans $E_{\bar{K}/K} = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ par $\pi_1(\bar{X})$ ($\bar{X} = X \otimes_K \bar{K}$) et l'extension déduite de $\tilde{E}_{X/K}$ de $E_{\bar{K}/K}$ par $\pi_1(\bar{X})_{ab}$. Considérons les applications

$$(*) \quad X(K) \longrightarrow \text{Classes de } \pi_1(\bar{X})\text{-conjugaison de scindages de } E_{X/K} \text{ sur } E_{\bar{K}/K}$$

$$(**) \quad X(K) \longrightarrow \text{Classes de conjugaison de scindages}$$

Ces applications sont *injectives*.

Démonstration. — Il suffit de le [] pour le seconde application, et on est ramené au cas où X est lui-même un groupe algébrique G , extension d'une V. A. par une tore. Alors l'application est un homomorphisme de groupes

$$(16) \quad G(K)$$

obtenue ainsi. On considère pour tout [] la suite exacte []

$$0 \longrightarrow [] \longrightarrow G[] \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

[] suite exacte de cohomologie

[]

et passant à la limite, on trouve

$$0 \longrightarrow$$

le composé de (16) avec l'homomorphisme canonique

[]

compte tenu de

[]

[] que l'homomorphisme induite par

[]

dont le noyau [] est fermé des éléments de $G(K)$ *infiniment divisibles* dans \mathbb{Q} .

[] ici K étant un corps [] de type fini le théorème de Mordell-Weil [] que $G(K)$ est un \mathbb{Z} -module de type fini - donc $G(K) \longrightarrow \varprojlim G(K)_n$ est injectif. Donc []

Remarque. —

[] x dans le “revêtement universel abélien” \tilde{G} de G construit comme \varprojlim des revêtements $G(n) \simeq G$ de G , donnée, []. L'énoncé dit que si [] est trivial - i.e. si [] mais dans ce cas [] soit [] étales.

est cependant possible que [] ...

[] aux conditions de de Corollaire 1, b), [], [] avec les groupes fondamentaux [], on trouve que

[]

Complément. — Retour sur une démonstration *géométrique* du Théorème 2, Corollaire 1 b). On peut supposer que ce est la Jacobienne généralisée de Y , et il suffit de montrer le

Lemme. — Soit Y une variété élémentaire d'Artin anabélienne (sur K algébriquement clos), $Y \hookrightarrow J_Y^1$ son plongement dans sa Jacobienne généralisée, $u \in J_Y^0(k)$ et U un ouvert non $[]$ de Y , tels que $U + u \subset Y$. Alors $u = 1$, ou encore: l'application $x \mapsto x []$ de U dans Y est l'identité.

Par dévissage, on es ramené au cas où Y est une courbe. Supposons le d'abord complète, de suite que $U + u \subset Y$ implique $Y + u \subset Y$ - alors la $[]$ est bien connu (et résulte par exemple de la formation des points fixes, qui implique que $[]$ ce qui $[] J_Y^0(k)$ est nulle. Pour que $x + u$ soit de la forme y ($y \in Y$) il faut $[]$ que $u \in \alpha$ et y aient même image dans J_Y^1 , ce qui $[]$ Je veut mieux, dans le cas général, présenter les choses sous forme homologique. Considérons les deux morphismes $U \hookrightarrow iY$ induisant et $J : U \longrightarrow Y$ induit par lui, je dis que $H_1(i) = H_1(j)$, ou ce qui revient au même, puisque $Y \xrightarrow{\alpha} J'_Y$ induit un isomorphisme $H_1(\alpha) : H_1(Y) \longrightarrow H_1(J'_Y)$, que

Si le genre est 0, on en concluait (puisque $[]$). Dans le cas de genre 1, on en concluait maintenant que l'image de un des J_Y^0 est égale à 1, et on $[]$ comme précédemment. $[]$

II. La question de pleine fidélité

Soient K, K' deux extensions de type fini de \mathbf{Q} - est-il vrai que tout $\Pi_{\mathbf{Q}}$ -homomorphisme $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$ provient d'un homomorphisme de corps $K' \longrightarrow K$? On est ramené aussitôt au cas où - une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de \mathbf{Q} étant choisie, d'où un $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$ - K et K' ont des sous-corps k, k' (clôture algébrique de \mathbf{Q} dans K resp. K') isomorphes, avec des plongements $k, k' \longrightarrow \mathbf{Q}$ de même image, que E_K et $E_{K'}$ peuvent être considérés comme des extensions d'un même groupe $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$ par π_K resp. $\pi_{K'}$. La question est alors si *tout* homomorphisme de $\pi_{K'}$ dans π_K qui commute à l'action de Γ , est induit par un homomorphisme $K \hookrightarrow K'$. Pour construire ce dernier, il faudrait donc avoir une idée comment reconstruire K, K' à partir des extensions $E_K, E_{K'}$, ou encore à partir des groupes profinis extérieurs avec opération de Γ dessus. Et on pressent que le Théorème 3 du paragraphe précédent (appliqué notamment à \mathbb{P}_K^1 convenablement troué...) pourrait donner la clef d'une telle construction.

Bien sûr, des homomorphismes extérieurs quelconques $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ n'auront pas de sens géométrique - l'idée est que les opérations du groupe $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$ dessus soit si draconienne, qu'il n'est possible de trouver un homomorphisme extérieur qui y commute que par voie géométrique - par des plongements de corps. Donc il est essentiel ici que le corps de base ne soit pas quelconque, mais un corps tel que \mathbf{Q} (ou, ce qui revient manifestement au même, une extension de type fini de \mathbf{Q}). Encore faut-il se borner aux homomorphismes $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ dont on décrète d'avance que l'image soit ouverte - sinon, prenant pour $\pi_{K'}$ le groupe unité (i.e. $K' = k$), on trouverait un homomorphisme $K \longrightarrow k$ correspondant! Il faut pour le moins, pour travailler à l'aise à partir d'homomorphismes $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ (au lieu de $E_{K'} \longrightarrow E_K$) supposer que le centralisateur dans π_K de l'image de tout sous-groupe ouvert de $\pi_{K'}$ soit réduit à $\{1\}$ - on dira que l'homomorphisme en question est *anabélien* alors - de telle façon qu'à partir de cet homomorphisme (commutant à Γ) on reconstitue l'homomorphisme d'extensions E_K et $E_{K'}$, qui est l'objet vraiment essentiel. Par exemple, si justement $K' = k$, donc $E_{K'} = \Gamma$, ce qui nous intéressera, ce ne seront pas le Γ -homomorphismes de $\pi_{K'} = \{1\}$ (!) dans π_K , mais bien les *sections* de E_K sur Γ .

Question-conjecture. — Soient K, K' deux corps, extensions de type fini de \mathbf{Q} , et un morphisme $B_{K'} \longrightarrow B_K$ de topos sur $B_{\mathbf{Q}}$.

Les conditions suivantes sont-elles bien équivalentes [?]

- (a) L'homomorphisme provient d'un plongement de corps $K \hookrightarrow K'$.
- (b) L'image de l'homomorphisme extérieur $E_{K'} \longrightarrow E_K$ a une image ouverte.
- (c) L'homomorphisme extérieure $E_{K'} \longrightarrow E_K$ est anabélien²³.

NB. On sait que (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) et que (b) équivaut à $\pi_K \longrightarrow \pi_{K'}$ a une image ouverte.

Une réponse affirmative impliquerait que si $\deg_{\text{tr}} K'/\mathbf{Q} < \deg_{\text{tr}} K/\mathbf{Q}$, alors il n'y a pas de tel homomorphisme $E_{K'} \longrightarrow E_K$, compatible avec les projections dans

²³(c) n'est pas assez fort, cf. plus bas ...

$E_Q = \Gamma_Q$, en particulier, il en résulterait que toute section de E_K sur $\Gamma = \text{Im}(E_K \longrightarrow \Gamma_Q)$, ou sur un sous-groupe ouvert Γ' de Γ , a un centralisateur non-trivial dans E_K – et comme son centralisateur dans Γ est réduit à $\{1\}$, cela impliquerait que pour toute telle section, on aurait (si $\pi_K \neq 1$) $\pi_K^{\Gamma'} \neq \{1\}$. Or je m'aperçois que ceci est sans doute faux (cf. plus bas, numéro 3) – il faudrait renforcer (c) ci-dessus en [:]

(c') L'homomorphisme $E_{K'}^\circ \longrightarrow E_K$ induit par $E_{K'} \longrightarrow E_K$ est anabélien (où $E_{K'}^\circ$ est le noyau de l'homomorphisme composé

$$E_{K'} \longrightarrow \Gamma_{\overline{Q}/Q} \xrightarrow{\chi \text{ caractère cyclotomique}} \wedge$$

$Z^* \rangle$).

Mais pour voir que cette condition est *nécessaire* pour que l'homomorphisme soit géométrique, il faudrait vérifier que pour tout sous-groupe ouvert E' d'un E_K , le centralisateur dans E_K (non seulement de E' lui-même, mais même de E'°) est réduit à 1 – ce qui résulte de la démonstration du Théorème 1, et du fait²⁴ que pour tout sous-groupe ouvert Γ' de $\Gamma = \Gamma_Q$, le centralisateur (non seulement de Γ' , mais même) de Γ'° dans Γ est réduit à $\{1\}$.

Donc, la conjecture initiale revue et corrigée donné la

Conséquence (conjecturale). — *Pour tout section de E_K sur un sous-groupe ouvert Γ' de Γ_Q , de sorte que Γ' opère (effectivement) sur π_K , on a (si K pas algébrique sur Q , i.e. $\pi_K \neq \{1\}$) $\pi_K^{\Gamma'^\circ} \neq \{1\}$.*

À vrai dire, à certains égards les Γ_K sont des groupes trop gros pour pouvoir travailler directement avec, il y a lieu de regarder Γ_K comme un \varprojlim de groupes $\Gamma_{U/Q}$ associés à des modèles affines de K – et on s'intéressera plus particulièrement à des modèles affines qui sont des variétés élémentaires – plus généralement, qui sont des $K(\pi, 1)$ (au sens profini...). Il est possible qu'il faille d'ailleurs, dans l'énoncé de la conjecture de départ, prendre un homomorphisme extérieur $E_{K'} \longrightarrow E_K$ dont on suppose d'avance (en plus de l'hypothèse anabélienne et de la compatibilité avec les homomorphismes dans Γ_Q) qu'elle est compatible avec les *filtrations* de ces groupes, associés à ces modèles ("filtration modélique" (grossière)).

²⁴à vérifier !

Nous allons alors, au même temps que des extension de type fini de \mathbf{Q} , les homomorphismes entre tels, et homomorphismes de groupes profinis associés, étudier la situation analogue pour des “modèles” élémentaires anabéliens, voire des modèles $K(\pi, 1)$ généraux (On peut aussi regarder de tels modèles sur un corps K , extension de type fini de \mathbf{Q} – mais passons pour le moment sur cette situation mixte, un peu bâtarde...). Si U, V sont des tels modèles, tout morphisme $V \longrightarrow U$ définit un morphisme de topos galoisiens sur $B_{\mathbf{Q}}$, $B_U \longrightarrow B_V$, et si U est élémentaire anabélien, ce morphisme est connu quand on connaît seulement $H_1(B_{\overline{U}}, \mathbf{Z}_{\ell}) \longrightarrow H_1(B_{\overline{V}}, \mathbf{Z}_{\ell})$ – ce qui est beaucoup moins que la classe d’isomorphie d’homomorphismes de $B_{\mathbf{Q}}$ -topos. (En fait, sans hypothèse anabélienne sur V , dès que V se plonge dans une variété anabélienne, f est connu quand on connaît son action sur les topos étales...). Mais quels sont les homomorphismes $B_U \longrightarrow B_V$, ou $E_U \longrightarrow E_V$, qui correspondent à des morphismes de modèles ? Avec un peu de culot, on dirait [:]

Conjecture fondamentale. — Soient U, V deux schémas de type fini sur \mathbf{Q} , V séparé régulier, U une variété élémentaire anabélienne sur une extension finie de \mathbf{Q} . Considérons un morphisme $B_V \longrightarrow B_U$ des topos étales sur \mathbf{Q} – ou, ce qui revient au même, un homomorphisme de groupes extérieurs

$$f : E_V = \pi_1(V) \longrightarrow E_U = \pi_1(U),$$

compatible avec les homomorphismes extérieurs dans $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \pi_1(\mathbf{Q})$ ²⁵.

Conditions équivalentes [:]

- (a) *Cet homomorphisme provient (à isomorphisme près) d’un morphisme $V \longrightarrow U$ sur les modèles (qui est donc uniquement déterminé)*
- (b) *$f|E_V^{\circ}$ est anabélien, i.e. l’image par f de tout sous-groupe ouvert de E_V° a un centralisateur réduit à 1.*

Pour la nécessité de (b), on est ramené aussitôt au cas où V est réduit à un point, où cela se réduit à la

²⁵**NB** Pour l’unicité, on est ramené aussitôt au cas où V lui-même est un modèle élémentaire anabélien, si ça nous chante.

Conséquence conjecturale. — Soit $\Gamma' \subset \text{Im}(E_U \longrightarrow \Gamma_Q)$ un sous-groupe ouvert, correspondant à un corps k fini sur \mathbf{Q} , considérons un k -point de U , d'où un relèvement $\Gamma' \longrightarrow E_U$, de sorte que Γ' opère sur π_U . Ceci posé, on a $\pi_U^{\Gamma'} = \{1\}$.

On étudiera par la suite les relations entre cette “conséquence conjecturale”, et la précédente (d'apparence opposée !) concernant les E .

La conjecture fondamentale sur les modèles implique la conjecture fondamentale sur les corps, à condition de prendre soin, dans cette dernière, de se limiter aux homomorphismes compatibles aux filtrations modéliques.²⁶

Plus généralement, prenant maintenant pour U des schémas qui sont des \varprojlim des modèles élémentaires anabéliens, avec morphismes de transition des immersions ouvertes affines (pour pouvoir passer à la \varprojlim dans la catégorie des schémas), pour V un schéma \varprojlim de schémas séparés réguliers de type fini sur \mathbf{Q} (morphismes de transition immersions ouvertes affines sans plus). Alors les morphismes *dominants* de schémas $V \longrightarrow U$ doivent correspondre aux homomorphismes extérieurs $E_V \longrightarrow E_U$ compatibles avec les projections dans $E_Q = \Gamma_Q$, et telle que l'image soit ouverte. Par exemple, on pourrait prendre pour U, V les spectres d'anneaux locaux réguliers essentiellement de type fini sur \mathbf{Q} .

—

Cette conjecture fondamentale (éventuellement revue et corrigée en cours de route !) étant admise, la question qui se pose ensuite est de déterminer les topologies (pro)galoisiennes sur B_Q qui proviennent de modèles élémentaires anabéliens – ou encore, les $\pi_U = \pi_1(\overline{U})$ de tels modèles étant connus, de déterminer quelles sont [les] actions extérieures possibles de sous-groupes ouverts Γ de Γ_Q sur de tels groupes fondamentaux – et éventuellement question analogue pour d'autres types de groupes profinis, correspondant à des $K(\pi, 1)$ qui se réaliseraient par des variétés algébriques (sur \mathbf{C} , disons), mais pas par des variétés élémentaires. (J'ai en vue autant des variétés modulaires, tels que, notamment, des variétés modulaires pour les courbes algébriques...) à partir de là, on reconstruirait par recollement, en termes profinis, tous les schémas lisses sur un corps de type fini sur \mathbf{Q} (ou plutôt la

²⁶Et il vaut mieux se borner à l'équivalence de (a) et (b) – la condition (c) avec les centralisateurs risque de passer mal à la \varprojlim .

catégorie de ceux-là), ou plus généralement, sur un corps quelconque – puis, sans doute, par “recollement”, la catégorie des schémas localement de type fini sur un K – tant [?] des [varier?] la catégorie des fractions qui s’en déduit en rendant inversibles les homéomorphismes universels...

Les réflexions précédentes suggèrent aussi des énoncés comme le suivant : Pour un schéma de base S localement noethérien donné²⁷, les foncteurs $X \longrightarrow X_{\text{ét}}$, allant de la catégorie des schémas réduits localement de présentation finis sur S , vers la 2-catégorie des topos au-dessus de $X_{\text{ét}}$, est 1-fidèle (deux homomorphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$ tels que les morphismes de topos $f_{\text{ét}}, g_{\text{ét}} : X_{\text{ét}} \rightrightarrows Y_{\text{ét}}$ au-dessus de Set soient isomorphes, sont égaux) et même peut-être *pleinement fidèle*, quand on passe à la catégorie des fractions de $(\text{Sch}_{\text{l.t.f.}})/S$ obtenue en rendant inversibles les homéomorphismes universels... Expriment ceci par exemple pour les automorphismes d’une courbe algébrique propre sur une extension finie de \mathbf{Q} , on retrouverait le “fait” que tout automorphisme extérieur de E_K (K le corps des fonctions de X) qui respecte la structure à lacets [?] et qui commute à l’action de Γ , provient d’un automorphisme de X .

III. Étude des sections de E_U sur Γ

Soit U un schéma connexe lisse de type fini géométriquement 0-connexe sur le corps K , d’où $E_U \longrightarrow E_K$, et ⁽²⁸⁾ on se propose d’étudier les sections mod $\pi_{U,K}$ -conjugaison - plus généralement, on [] un même topos [] les sections $E'_K \longrightarrow E_U$, où E'_K est un sous-groupe ouvert de E_K (ce qui signifie que [] fait une extension de base finie sur K). Si K de type fini sur le corps \mathbf{Q} et si U se plonge dans un schéma sur un groupe commutatif rigide l’application

$$U(K) \longrightarrow [] \text{ d'isomorphisme section de } B_U \text{ sur } B_K [] \pi_{U,K} \text{—conjugaison de sections de } E_U \text{ sur } E_K$$

est injectif. On va examiner d’entre façons “géométriques” de trouver des sections.

Supposons d’abord que U soit une courbe algébrique, que ne soit pas de type $(0,0)$ ou $(0,1)$, i.e. $\pi_1(\overline{U}) = \pi_{U,K} \neq \{0\}$. On a que pour tout $i \in \widehat{\overline{U}} \setminus \overline{U}$ (point à

²⁷ S de caractéristique 0 ?

²⁸ On a choisie un revêtement universel \tilde{U} de U pour définir X , et E_U, E_K , et $E_U \longrightarrow E_K$.

l'infini) le groupe de lacets L_i fournit un scindage (des $[]$ i.e. $[]$) en prenant son centralisateur $Z(L_i)$ dans E , d'où

$$(2) \quad 1 \longrightarrow L_i \longrightarrow Z(L_i) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

et en prenant les scindages de cette extension. Il ne existe, p. ex. définis par une $[]$ de $\overline{O}_{\widehat{U},i}$. L'un des données de conjugaison des scindages de (2) est un $[]$

$$(3)$$

et $[]$ injectivement de l'un des données de π -conjugaison de scindages.

Proposition. — ⁽²⁹⁾ On suppose $(g, v) \neq (0, 0), (0, 1)$ i.e. $\pi_{\overline{U}} = \pi_{U,K} \neq (1)$. Alors les classes de π -conjugaison scindage de (1) définis pour les scindages de (2) sont distinctes de celles associés aux points de $U(K)$. Si de plus $(g, v) \neq (0, 2)$, i.e. si $[]$ est dans le cas anabélien, alors les classes de π -conjugaison de scindages de (1), associés à des scindages de (2) pour deux indices $i = i_1$ et $i = i_2$ distincts, soient distincts.

La première assertion s'obtient en "bordant" le trou i , alors la section envisagé devient la section de $U \cup \{i\} = U'$ associée au point i , et celle est donc distincte de celle associée aux $[]$ points de U' , i.e. aux points de U - a fortiori $[]$ pour le sous-groupe $[]$ par L_i . On $[]$ de même pour $[]$ que les $[]$ de scindages associées a un L_{i_1} et un L_{i_2} , $i_1 \neq i_2$, sont distinctes, $[]$ sauf le cas de type $(0, 3)$ $[]$ on tombe sur le type $(0, 1)$, où $[]$ de résultat d'injectivité. Mais on peut $[]$, à condition d'admettre que pour un scindage de (2), faisant opérer Γ sur π , on a

$$(3) \quad \pi^{\Gamma^\circ} = L_i$$

(donc $\pi^\Gamma = (1)$, d'ailleurs) - résultat que on $[]$ plausible. $[]$ que le $[]$ de conjugaison de sections détermine le $[]$ de conjugaison de L_i , donc i .

Conjecture (A). — Soit U courbe algébrique anabélienne géométrique 0-connexe sur corps K de type fini sur \mathbf{Q} . Alors toute section de (1) est d'une des deux types précédents, i.e. soit définie par un point de $U(K)$ ³⁰, Sont pas une section d'une extension (2), avec $i \in I(\pi)^\Gamma$ i.e. $[]$ un point de $\widehat{U} \setminus U$, rationnel sur K .

²⁹ C'est démontré sauf pour le type $(0, 3)$ $[]$

³⁰ Il y a $[]$ plus $[]$

Si on obtient cette conjecture, alors on va conclurait, pour passage à la limite, en considérant le corps de fonctions L de U et $E_L \longrightarrow E_K$ (E_L peut être considéré comme un groupe à lacets “infini” (avec une infinité des classes de sous-groupes lacets $L_i...$) que tout scindage de cette extension provient d’une scindage d’une extension de type (2), avec $i \in I$ $\Gamma = X(K)$ ($X = \hat{U}$). Les classes conjugués de tels scindages se grouperaient donc pour paquets (en regardent les centralisateurs des sous-groupes image de Γ° par ses sections,) et un $[]$ ensemble des scindages qui est donc $[](\Gamma^\circ)$ conjugués (même s’il ne sont eux-mêmes conjugués). Donc on retrouve $[]$ une description de $X(K)$ (donc ainsi de $X(K')$) pour toute extension finie K' de K) en termes de l’extension E_L de E_K par $\pi_{L,K}$, au même temps qu’une $[]$ de reconstitue les $U = X \setminus I$ $[]$

Donc en fait c’est la structure $E_L \longrightarrow E_K$ qui est le plus riche a priori, et de loin plus commode pour le genre 0 et 1, où le considération des U de type (g, v) ($2g + v \geq 3$) $[]$ le groupe “continue” d’automorphismes... La forme “modélisque” de la conjecture précédente revient à la forme “birationnelle”, quand on y précise cette $[]$ en disant que tout scindage de $E_U \longrightarrow E_K$ se revient au un scindage de $E_L \longrightarrow E_K$ (on ainsi, $[]$ un scindage de $E_V \longrightarrow E_K$, si V est un modèle $[] U$).

On ne $[]$ les conjectures précédentes (sous forme modélisque, disons) sous une forme plus géométrique, en introduisant, un même topos qu’un revêtement universel \tilde{U} de U , $[] X'$ de X $[] \tilde{U}$ (où $X = \hat{U}$). (NB je m’abstient de le noter \tilde{X} , $[]$ il n’est pas $[]$ sur X). Notons que pour $i \in I = \overline{X} - \overline{U}$, l’un des L_i des $\overline{\pi} = \pi(\overline{U})$ $[]$ en correspondance 1-1 avec $[]$ fibre X'_i de X' au dessus de i .

$$X \longrightarrow \overline{X} \longrightarrow X'$$

Donc X' peut être considéré comme le $[]$ de \tilde{U} , et de $X' \setminus I =$ ensemble des sous-groupes lacets de $\overline{\pi}$, qui apparaissent ainsi comme des “points à l’infini” des revêtements universel \tilde{U} . D’ailleurs E_U s’interprète comme le groupe de $[]$ schéma \tilde{U} $[]$, et $E_U \longrightarrow E_K$ comme l’homomorphisme de passage au quotient $[]$ (NB. \overline{K} s’identifie a la clôture algébrique de K dans $[]$, donc E_U opère sur $\text{Spec } \overline{K}$ de façon $[]$) Une section de E_U sur E_K est donc une action de E_K sur \tilde{U} , compatible avec son action sur \tilde{U} $[]$ convenable (sans doute $[] \overline{U}_i$ finis sur \overline{U} entre \overline{U} et $\overline{U}...$). Considérons alors la

Conjecture (B). ⁽³¹⁾ — Toute telle action de Γ sur \tilde{U} admet dans $X' = \widehat{\tilde{U}}$ un point fixe et un seul.

Ceci signifie alors

a) S'il y a un point fixe à distance finie i.e. $\tilde{X} \in \tilde{U}^T$, alors

1°) L'image de \tilde{X} dans U est uniquement déterminée - c'est essentiellement le Théorème 3 dans §1 (des α points distincts de $U(K)$ définissent des classes de conjugaison des scindages distinctes) et

2°) ³² $\pi^\Gamma = (1)$ (i.e. il n'y a pas d'autre point fixe dans \tilde{U} sur ce même $x \in U(K)$), et []

3°) il n'y a pas au même temps ce point fixe à l'infini - i.e. il n'existe pas de L_i normalisé par Γ , i.e. une scindage des [] type n'est pas au même temps des deuxièmes (fait que nous avons et oublié directement, précédemment).

D'autre part, dans le cas de points fixes à l'infini, l'unicité de l'image dans X signifie qu'une même action effective [] à la fois un L_i et [] ($v \neq J$) - Fait [] établi sauf dans le cas $(g, v) = (0, 3)$ - et l'unicité au dessus d'une $i \in I$ fixé signifie que le L_i (i fixé) normalisé par Γ est unique, ce qui est un affaiblissement de la relation

$$L_i = \text{Cen} \pi^{\Gamma^\circ}$$

pour ces opérations, conjecture plus haut.

En fait, je conjecture que dans la conjecture B, il est même vrai que Γ° agissant sur $X' = \widehat{\tilde{U}}$ a un point fixe et un seul (ce qui est plus haut, [] point fixe [] nécessairement fixe pour Γ). Ceci implique dans le cas des points fixes à distance finie, qu'est alors $\pi^{\Gamma^\circ} = (1)$, comme il se devrait en général [] et dans le cas de points fixes à l'infini, que

$$\pi^{\Gamma^\circ} \subset \text{Norm}_\pi(L_i) = L_i$$

donc le [] $\pi^{\Gamma^\circ} = L_i$ [] !

³¹et même l'action induit de Γ° doit avoir un point fixe [] plus bas

³²C'est un cas particulier []

[] tous nos beaux énoncés devraient être valables, [] un corps de base K de type fini de \mathbf{Q} , mais [] que K est extension de type fini d'un corps cyclotomique (pas [] fini sur \mathbf{Q}).

Nous pourrions définir les *courbes de Poincaré* sur un corps algébriquement clos de \bar{K} de caractéristique 0, comme étant les courbes isomorphes à des revêtements universels de courbes algébriques anabéliennes sur K (donc courbes anabéliennes \bar{U}, \bar{V} sur \bar{K} définissent des revêtements de Poincaré isomorphes, si et seule si existe un revêtement fini étale de l'un, isomorphes à un revêtement fini étale de l'autre). Étant donné une courbe de Poincaré \widehat{U} sur \bar{K} , on définit canoniquement sa complétion $\widehat{U} [] \widehat{U}$. Ceci posé :

Conjecture (B'). — Soient K un corps de type fini sur \mathbf{Q} (ou sur un corps cyclotomique suffise peut-être), \bar{K} une clôture algébrique de K , U une courbe de Poincaré sur \bar{K} , de complétion $\widehat{U} = X$. Considérons une action de $\Gamma = \Gamma_{\bar{K}, K}$ sur U , compatible avec sous-action sur \bar{K} , d'où une action de Γ sur X . Ceci posé : Il existe un point fixé et un seul de Γ° agissent sur X (Γ° , noyau de caractère cyclotomique $\Gamma \xrightarrow{\chi} \widehat{\mathbf{Z}}^*$).

La différence avec la conjecture B, pour celle-ci [], [] d'un groupe profini π , [] librement sur U de façon que $U_{/\pi}$ soit une courbe algébrique anabélienne sur \bar{K} .

Que donneraient les conjecture précédentes, quand on les applique à une situation où K est [] pour un modèle S de K (disons, élémentaire anabélienne), quand U_K provient d'une courbe relative U_S sur S - de sorte qu'on a un homomorphisme de groupes

$$(4) \quad E_{U_S} \longrightarrow E_S$$

de noyau $\pi_{\bar{U}}$, dont $E_{U_K} \longrightarrow E_K$ est déduit pour changement de base i.e. par produit fibre

$$(5) \quad E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S} []$$

Ainsi, les sections de E_{U_K} sur E_K correspondant aux relèvement continus $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ de l'homomorphisme surjectif $E_K \longrightarrow E_S$ et parmi ce relèvement, ceux qui sont triviaux sur le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ correspondants existent aux sections de E_{U_S} sur U_S . Nos conjectures impliquent donc qu'il y a existent deux sortes

telles sections : 1°) celles qui correspondent à des points de U_K/K i.e à des sections rationnelles des U_S sur S - mais on va vérifier sans mal, sans doute, qu'une telle section rationnelle ne correspond effectivement à une section de l'extension (4), que si c'est une section régulière (à vérifier tantôt). 2°) Celles correspondant à des $i \in I(U_{\overline{K}})$ rationnels sur K , i.e. à une section de $\widehat{U}_S \setminus U_S = S'$ (étales fini sur S) sur S . Et il faudrait étudier encore à quelle conditions une telle section définit un paquet non vide de scindages de (4) - et comment déterminer exactement tous ces scindages.

Avant d'élucider ces deux points, un peu technique, je voudrais voir dans quelle manière la conjecture **A** (ou **B**) faite des ces §, permet de reconstruire la catégorie des modèles élémentaires anabéliennes sur \mathbf{Q} , et celle des extensions de type fini de \mathbf{Q} et des modèles élémentaires anabéliennes sur ceux-ci, en termes des groupes extérieurs (ou topos galoisiens) associés à partir bien sûr de la donnée fondamentale de $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}, \overline{\mathbf{Q}}_0}$, opérant extérieurement sur $\widehat{\pi_{0,3}}$, d'où déjà l'extension $E_{0,3} = E_{U_{0,3}/\mathbf{Q}}$, où $U_{0,3} = \mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}$.

Prenons les donne de $\widehat{\pi_{0,3}}$ -conjugaison de $[]$ sections de $E_{0,3}$ sur $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma$ i.e. les "points" telles que le centralisateur de Γ^0 soit trivial (sections "admissibles") $[]$ des topos $B_{\widehat{\pi_{0,3}}, \Gamma_{\mathbf{Q}}}$ $[]$ sur $B_{\Gamma_{\mathbf{Q}}}$ $[]$ - on trouve un ensemble sur lequel Γ opère (qui n'est autre que $U_{0,3}(\overline{\mathbf{Q}}_0)$, à isomorphisme canonique près). Pour tout ensemble fini I des sections, stable par $[]$ la formation "forage de trous" doit nous fournir un groupe extérieur $\pi_{0,3}(I)$, de type $[]$ sur lequel Γ opère (il voit mieux peut-être utiliser le yoga introduit par ailleurs des groupoïdes rigides - donc on peut $[]$ ainsi $[]$ de trous $0, 1, \infty$ - on trouve donc l'équivalent groupoidal de la droite projective $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^1$, on l'appelle $[]$ - qui correspond à un groupe extérieure à lacets infini sur lequel Γ opère - en fait, ce n'est autre que E_{K_1} , où

$$(6) \quad K_1 = \mathbf{Q}(T_1)$$

est l'extension transcendantal pour type de degré 1 de \mathbf{Q} .

Partant de (6), on construit de même l'équivalent groupoidal de $U_{0,3}$ et on reconstruit comme précédent, pour avoir, sont des courbes de type $(0, \nu_2)$ sur K_1 (ou sur une extension finie de K_1) sont des courbes relatives de tipe $(0, \nu_2)$ sur une courbe sur \mathbf{Q} (ou une extension finie de \mathbf{Q} , ou une revêtement étale fini d'une telle U_{0,ν_1}).

On procède [] pour construire finalement tous les E_K sur E_Q ([] tout corps extension de type fini de \mathbf{Q} , est extension finie d'une extension transcendantale []) et tous les modèles élémentaires, où [] chaque avec la fibration [] sont une courbe de genre 0, suite un revêtement étale fini d'une telle fibration particulière. Sauf erreur, ça fait assez pour avoir un système fondamental de voisinages de tout point d'une X lisse sur un K et de reconstituer en principe les schémas lisses sur des K , pour recollages de tels morceaux avec des "immersions ouvertes". Mais [] que pour faire une telle description, il en faudrait développer un langage géométrique qui celle mieux à l'intuition géométrique, que les sempiternelles extensions de groupes profinis ... ou actions extérieures, et où les points rigides (à [] alors des clôtures algébriques de corps) jouent un rôle prépondérant. Je me faudra y revenir dessus - et en même temps, expliciter les topos étales (pas seulement le "morceau $K(\pi, 1)$ ") [] entiers des schémas décrits ici par des extensions.

Reprenons le cas de $U = U_S$ schéma relatif sur S , "élémentaire" sur S - à fibres successives anabéliennes (s'il le faut) ou de moins à π_1 non nul, S étant lui-même (pour fixer les idées) lisse sur \mathbf{Q} , irréductible, corps de fonctions K , et reprenons la digression 5. Considérons une section rationnelle f de U sur S , définissant une section de E_{U_K} sur E_K - ou, ce qui revient au même, un relèvement de l'homomorphisme surjectif, $E_K \longrightarrow E_S$ en $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ (composé de la section $E_U \longrightarrow E_{U_K}$ [] $E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}$). Je veux montrer que f est pourtant définie i.e. une section de U_S sur S , si et seule si le section de E_{U_K} sur E_K provient d'une section de E_{U_S} sur E_S , i.e. si et seule si le relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ [] sur le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$.

Notons que cette dernière condition est une condition "de codimension 1 sur S " - de façon plus précise, si Z est un sous-schéma fermé de S de codimension ≥ 2 , alors, posant $S' = S \setminus Z$, on a $\pi_1(S') \xrightarrow{\sim} \pi_1(S) = E_S$ pour le "théorème de pureté" - donc le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ est le même que celui de $E_K \longrightarrow E_{S'}$, ou, si [] (comme S' n'est pas un "modèle") que le sous-groupe fermé engendré pour les noyaux des $E_K \longrightarrow E_{S'_i}$, où les S'_i sont des ouvert "modèles" qui recouvrent S' . Si donc les conditions envisagés sont [] relativement aux S'_i (qui pourtant un recouvrement par S , [] S') - ce qui est [] signifie que ce section rationnelle envisagé est [] sur les S'_i , i.e. sur S' - alors celle est vérifié relativement à S - ce qui est [] signifie que le section est [] sur S . Donc, [], il faudrait [] a priori qu'une section de $U_{S'}$ sur S' []

une section de U_S sur S . $[\]$ d'une courbe relative $U_S = X_S - T$, X lisse sur S de dimension relative 1, T fini $[\]$ sur S , $[\]$ T décomposé sur S . Si X $[\]$ relatif ≥ 1 , on sait ([] Weil) que le section $[\]$ une section de X , soit D l'image inverse de T , c'est un diviseur sur S , dont le $[\]$ sur $S' = S \setminus Z$ est nul, donc (comme $\text{codim}(Z, S) \geq 1$) il est nul, OK.

(9)

(10)

avec des carrés cartésiens, et des flèches horizontales surjectives. L'homomorphisme $E_{U_S} \longrightarrow E_K$ est composé d'un relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$ de $E_K \longrightarrow E_{D_n}$ avec l'homomorphisme canonique $E_{U_{D_n}} \longrightarrow E_{U_S}$. (relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$ correspondant biunivoquement aux sections de E_{U_n} sur E_K , ou aux relèvements de $E_K \longrightarrow E_S$ ou $E_K \longrightarrow E_{U_S} \dots$).

Ceci dit ³³, j'ai envie de prouver que $\varphi_n : E_K \longrightarrow E_{D_n}$ $[\]$ i.e. provient d'une section de E_{O_n} sur O_n si et seule si la section rationnelle correspondant de U_S/S est définie en n . Ceci impliquera l'assertion précédent (que la section *phi* de E_{U_K} sur E_K provient d'une section de E_{U_S} sur E_S , si t seule si la section rationnelle correspondant isomorphique).

Mais il s'agit ici d'un énoncé en fait $[\]$ géométrique, que j'ai envie de reformuler sous forme plus générale :

Théorème. — Soit T un trait ([]), U un schéma relatif "élémentaire" sur T , anabélienne ³⁴, K le corps des fonctions de T , On $[\]$ un revêtement universel \tilde{U} de U , d'où une clôture algébriquement \bar{K} de K , et on considère l'extension $E_U = \pi_1(U; \tilde{U})$ de $E_K = \pi_1(K, \bar{K}) \simeq \text{Gal}(\bar{K}/K)$ par $\pi = \pi_1(U_K, \tilde{U})$. On a donc un carre cartésien des groupes profinis

$[\]$

où E_S s'identifie au quotient de E_K par le sous-groupe $[\]$ engendré par un groupe d'inertie $I_{K'} \simeq T_\infty(\bar{K})$, cf plus haut. Soit f_K , K un point de U_K rel/ K , d'où une section $\Psi = \Psi_{f_K}$ de E_K sur E_{U_K} . Ceci posé les conditionnes suivantes sont équivalentes

³³**N.B.**

³⁴anabélienne $[\]$ - il suffit que les fibres de ordre 1 de la fibration élémentaire de U ne soient que de type (0,0) ou (0,1) - i.e. à π_1 nul

(a) f_K se prolonge en une section de U sur S ;

(b) Ψ provient d'une section de E_U sur E_S ;

(b') le compose $E_K \xrightarrow{\Psi} E_{U_K} \longrightarrow E_U$ s'annule sur $I_{K'}$.

L'équivalence de (b) et (b'), et qu'elles soient impliquées par (a), est clair. C'est l'implication (b) \Rightarrow (a) qui demande une démonstration. On est [] au cas où T est strictement local (donc $E_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ est réduit à son sous-groupes d'inertie, et $E_S = (1)$). On est ramené de prendre un [] au cas où U/S est une courbe relative élémentaire, $U = X \setminus T$, X lisse et propre. Alors f se prolonge en une section f au X sur S , et la conclusion [] que $f(S) \subset U$. Donc on est ramené [] au

Lemme. — Soit X schéma projectif lisse de donnée relation 1 connexe sur S trait strictement local, soit $T \subset X$ sous-schéma, fini étale sur S , donc $T \simeq I_S$, I ensemble fini, et soit $U = X \setminus T$ (donc T est défini par une [] $(g_i)_{i \in I}$ des sections disjointes de X sur S) si g est de genre relatif, $v = []I$, on suppose $(g, v) \neq (0, 1)$. Soit $i_0 \in I$, f une section de X/S distinctes des disjointes g_i , et telle que f et g_{i_0} coïncident en s (point fermé de S). Si $\eta = S \setminus s$, on a donc un morphisme $\eta \longrightarrow U$, d'où $\pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$. Je dis que cet homomorphisme n'est pas trivial, et même, si $v \geq 2$, que pour la donnée [] n'est pas trivial (pour [] distinct de la caractéristique résiduelle).

Comme la section rationnelle de $J_{X/S}^1$ défini par f est régulière, on voit que le composé de l'homomorphisme envisagé avec $H_n(J_{X/S}^1, \mathbf{Z}_\ell)$ est nul - i.e. le $H_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)$ s'envoie dans la partie torique de $H_1(U, \mathbf{Z}_\ell)$ [], qu'est canoniquement isomorphe à T_ℓ^I/T_ℓ . (**N. B** cette partie est nulle si $\text{card } I = i$, et dans ce cas le critère homologique [] insuffisant...) Il faudrait donc calculer cet homomorphisme

$$T_\ell(\simeq H_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)) \longrightarrow T_\ell^I/T_\ell$$

pour constater qu'il n'est pas nul dans le cas envisagé, $v \geq 2$ (et traiter [] le cas $v = 1$). Je vais dériver le résultat : soit $x = g_{i_0}(s)$, $A = \underline{O}_{X,n}$, V l'anneau de S , J_{i_0} l'idéal de l'homomorphisme $A \xrightarrow{g_{i_0}^*} V$ associé à [], c'est donc une idéal inversible de A - soit de même J_f l'idéal associé à $f^* = A \longrightarrow V$, et considérons $g_{i_0}^*(J_f)$, c'est une idéal de V engendré par un générateur, et comme $g_{i_0} \neq f$, on voit que cet

idéal n'est pas nul. Soit $H = [\nu/g_{i_0}^*(J_f)]$, cet entier $[\]$ de g_{i_0} et f , ces $[\]$ comme une multiplicité d'intersection. Ceci posé, je $[\]$ que l'homomorphisme

$$T_\ell \longrightarrow T_\ell^I / T_\ell$$

est le produit $[\]$ des l'injections canoniques $T_\ell \longrightarrow T_\ell^I$, correspondant à l'indice i_0 . Il faudrait que $[\]$.

Reste le cas $\nu = 1$, qui semble demander un traitement séparé ³⁵. $[\]$ à vérifier (pour les groupes fondamentaux premiers à p) c'est que l'homomorphisme extérieur $\pi_1(U_s) \simeq \pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$ est égal à $K_{i_0} \circ (\mu Id_T)$, où K_{i_0} est l'homomorphisme "local"

$$[\]$$

associé à l'indice i_0 . Je vais admettre à priori, qui une ne peut guère être difficile.

Pour terminer ce numéro, je veux encore étudier, dans la situation d'une U courbe relation sur une S avec $U = X \setminus T$, X lisse et propre sur S , T fini étale, avec sections g_i donnée de T sur S , les "sections de 2^{eme} espèce" de l'extension

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow E_U \longrightarrow E_S \longrightarrow 1$$

associées ³⁶ à $i = i_0$ - que définit une classe de π -conjugaison de sous-groupes ouverts lacets L_i dans π . (On suppose qu'on a bien une telle suite exact i.e. que $\pi_2(S) \longrightarrow \pi_1(\text{fibre})$ est nul, ce qui $[\]$ le cas si $\pi_2(S) = 0$, p. ex $[\]$) si on est dans le cas d'une modèle élémentaire au dessus d'un corps de caractéristique 0 (la reconstruction de ces $[\]$ étant sans doute $[\]$, si on $[\]$ aux groupes fondamentaux premiers aux cas résiduelles...) $[\]$ L_i dans E_U s'envoie *sur* E_S , on trouve donc des scindages pour cette extension, qu'on peut regarder comme une extension

$$(13) \quad 1 \longrightarrow T \longrightarrow N(L_i) \longrightarrow E_S \longrightarrow 1$$

La classe d'isomorphisme est un élément

$$(14)$$

³⁵Ceci doit être indépendant de la $[\]$ de ν !

³⁶en tous cas, même sous $[\]$

que je ne propos d'étudier. On [] si S est un $K(\pi, 1)$

(15)

d'ailleurs on a une suite exacte de Kummer (ou $\text{Pic}(S) = []$)

$$(16) \quad 0 \longrightarrow \text{Pic}(S) \longrightarrow$$

d'où par passage à la limite

(17)

Dans le cas où S est un schéma élémentaire sur un corps de type fini sur \mathbf{Q} , $\text{Pic}(S)$ est un \mathbf{Z} -modèle de type fini (par Mordell-Weil-Néron), donc l'homomorphisme

$$(18) \quad \text{Pic}(S) \longrightarrow \text{Pic}(S)^\wedge \longrightarrow H^2(S, T)$$

est *injectif*.

Sous nous [] de cette condition, considérons le cas général - je dis que la classe c (14) est donc l'image de (18), de façon précise que c'est l'image de l'élément

$$g_i \in \text{Pic}(S)$$

classe des faisceaux [] (on []) de X le [] de g_i . Principe d'une vérification : [] la complété formel de X [] de $g_v(S)$, [] ou interpréter la suite exacte (13) comme la suite exacte d'homotopie de ce topos [], au dessus de S . On a donc à prouver une histoire d'ombres...

Dans le cas "arithmétique", on voit donc que l'extension (13) est scindée si et seule si $g_i = 0$ i.e. [], globalement sur S , []

Quand $g_i = 0$, parmi les scindages, il y a [] provenant [] d'une base de J_i/J_i^2 qui soit [].

L'indétermination des choix d'une telle base [] celle des choix d'une section de (13) est donc

(20)

On a ici des suites exactes de Kummer

$$[]$$

d'où par passage à la limite

(21)

Dans le “cas arithmétique” $[\mathbb{Q}]$ on trouve donc

$$[\mathbb{Q}]$$

Si le genre est zéro, prenant une de ces sections de T sur S comme section à l'infini, OPS ($[\mathbb{Q}]$ à se localiser) $U_S = \mathbb{E}'_S \setminus T'$, donc f s'identifie à une section de \mathbb{E}'_S sur S' , i.e. de \underline{O}_S sur S , donc (comme $\text{codim}(2, S) \geq 2$ $[\mathbb{Q}]$) elle se prolonge en une section de \mathbb{E}'_S . Et on $[\mathbb{Q}]$ comme précédemment, OK. Considérons donc les diviseurs irréductibles D_i sur S , ou ce qui revient au même, les points x_v de X de codim 1, i.e tels que \underline{O}_{x_v} soit un $[\mathbb{Q}]$ () anneau de valuations discrète). Considérons son $[\mathbb{Q}] \overline{O}_{x_v}$ dans \overline{K} , $[\mathbb{Q}]$ un idéal maximal $[\mathbb{Q}]$ (ces idéaux correspondent aux points $[\mathbb{Q}] \tilde{S}$ de S dans \overline{K} au dessus de x) et considérons son stabilisateur N_n dans E_K , qui opère donc dans $k(\tilde{x}) = \overline{k(x)}$, et s'envoie en fait, on le sait, *sur* $\text{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$.

Soit $I_{\tilde{x}}$ le noyau de l'homomorphisme obtenue ($[\mathbb{Q}]$ “géométriques” de $[\mathbb{Q}]$), donc on a une suite exacte

$$(7) \quad 1 \longrightarrow [\mathbb{Q}] \text{Gal}(\overline{k(x)}/k(x)) \longrightarrow 1$$

et par Kummer une isomorphisme canonique³⁷

(8)

On notera que si x est le $[\mathbb{Q}]$ du diviseurs D , alors $k(x)$ est le corps des fonctions de D . C'est un corps de type fini sur \mathbb{Q} .

Il est immédiat (sans supposer que le corps de base pour S soit \mathbb{Q}) que le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ est le sous-groupe $[\mathbb{Q}]$ engendré par les $I_{\tilde{n}}$. Donc l'hypothèse que $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ $[\mathbb{Q}]$ sur le dit noyau, signifie aussi qu'il $[\mathbb{Q}]$ sur $[\mathbb{Q}]$ des $I_{\tilde{n}}$. Soit alors $U_{\underline{O}_x}$ induit par U sur $\text{Spec } \mathbb{Q}_x$, on a donc des factorisations d'ailleurs $\mathbb{G}_n(S)$ n'a pas $[\mathbb{Q}]$, donc

22)

³⁷à corps de $[\mathbb{Q}]$ de car 0 !

est injectif³⁸. Ainsi, quand $g_i = 0$ i.e. quand (13) admet des scindages “géométriques” (et il suffit []) ceux-ci forment un tore sous $\mathbb{G}_m(S)$, qui s’identifie à une sous-torseur des [] de tous les scindages de (13). Pour que la “description profinie de la géométrie algébrique absolu sur \mathbf{Q} soit complète, il y faudrait également caractériser (en termes de cette description profinie) le sous-ensemble remarquable.

Je voudrais enfin comprendre encore comment une section d’extensions des type (1) peut se “spécialiser” en une section de type (2), donc le cas des courbes relatives. Pour ceci, je reprends la [] situation

Dans la cas [] où f n’est pas définie sur S , on trouve une action de 2^{nd} espèce, [] L_i dans π .

À vrai dire

[]

(31)

J’ai l’action extérieure de T sur π n’est souvent pas triviale (je conjecture qu’elle l’est si et seule si il y a “bonne réduction”) - donc le groupe E_K n’opère pas lui même extérieurement sur π . Mais tout scindage de (30) définit une extension de E_K par π , donc une action extérieure [] “admissible”, définie par une courbe algébrique ? - Sans doute pas [], si ce n’est la courbe “réduit” de type (g, v) ([]) ? [] ce pourrait être celle ci :

Conjecture-à-[] — Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) U_η a bonne réduction sur S ;

(b) L’action extérieure de T sur π est triviale (ce qui signifie ainsi que tout [] scindage de (31) - p. ex défini par un point de U_η [] induit un homomorphisme $T \longrightarrow \pi$);

(c) L’action de T sur $\pi_{ab} = H_1(U_{\bar{\eta}})$ est triviale ;

(d) Itou pour

³⁸(cas “[]”)

(e) En termes de une section de (30)

(f) En termes de une section de (30)

On a []

[]

J'ai donc [] un [] général (qui je pourrais à la occasion [] avec la généralité qui lui revient) pour construire des actions extérieures [] de groupes E_k (K extension de type fini de \mathbf{Q}) sur des π à lacets, qui (sans doute) [] géométriques, par la considération de courbes de type (g, v) "se réduisent []". Mais je [] pas pour cette vrai à faire des actions effectives, associées à actions extérieures [] géométriques [] - i.e. d'une des deux types 1°, 1° [] de ce n°.

IV. Sections d'extensions et anneaux de valuations généraux

D'abord une révision de notations. Si X est une schéma connexe, je note

$$(1) \quad E_X = \Pi_1(X)$$

son groupe fondamental profini en tant que groupe extérieur, et si \tilde{X} est un revêtement universel profini de E_X , par

$$(2) \quad E_X^{(\tilde{X})} = \pi_1(X; \tilde{X}) = \text{Aut}_X(\tilde{X})$$

son groupe fondamental précisé - qu'est un groupe profini. Si $X = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau (le plus souvent une corps) je note E_A , et $E_A^{\tilde{A}=E_X^{(\tilde{X})}}$. Si A est une A -algèbre telle que $\text{Spec}(\tilde{A}) = \tilde{Y}$ soit une revêtement universel de X (ce qui le détermine à isomorphisme non unique près). Bien entendu, si ξ est une "point géométrique" de X , on note

$$(3) \quad E_X^\xi = \Pi_1(X_1\xi) = E_X^{\tilde{X}(\xi)},$$

où $\tilde{X}(\xi)$ est le revêtement universel de X [] en ξ . Le choix de ξ correspond d'une [] [] et d'une extension séparablement close Ω de $k(x)$ ([[] clôturé algébrique de $k(x)$) et on note alors ainsi E_X^Ω au lieu de E_X^ξ (Ω sous entendu [] extension de $k(x)$ donc avec sa structure de $k(x)$ algèbre) []

$$(4) \quad E_X^\Omega = E_X^{\overline{k(x)}},$$

où $\overline{k(\alpha)}$ est la clôture algébrique de $k(\alpha)$ dans Ω . Bien sur, si $X = \text{Spec}(A)$, on note aussi E_A^Ω – notation [] utilisée [] $E_K^{\overline{K}}$, K un corps, \overline{K} une clôture algébrique [] séparable de K .

Si X est un Y -schéma, 1-connexe, on []

$$(5) \quad E(f) : E_X \longrightarrow E_Y, \quad \text{où } f : X \longrightarrow Y$$

E_X est un foncteur en X

$$(\text{Sch conn}) \longrightarrow \text{Group ext}$$

qui se précise pour l’homomorphisme injectif des groupes profinis

$$(6) \quad E_X^{\tilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\tilde{Y}}$$

où \tilde{Y} est le revêtement universel de Y défini par $\tilde{X} \longrightarrow Y$ (\tilde{X} [] pouvoir écrire en fait $E_Y^{\tilde{X}}$, plus géométriquement E_Y^Z chaque fois qu’on a un Y -schéma Z 1-connexe, jouent le rôle de “foncteur fibre” pour le topos $B_{\pi(X)}$ des revêtements étales de Y .)

On peut désir que

$$(7) \quad (X, \tilde{X}) \mapsto E_X^{\tilde{X}}$$

est un foncteur, de la catégorie des schémas 0-connexes X munis d’un revêtement universel (on [] d’un Z 1-connexe s’envoyant dans X) vers celle des groupes profinis. Ceci s’applique en particulier en regardons la sous-catégorie des (X, ξ) munis d’un point géométrique - on a donc

$$(8) \quad E_X^\xi \longrightarrow E_Y^\eta$$

si on a un homomorphisme de schémas “géométriques profinis” $(X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$. On note que tout [] géométrique de X en un $x \in X$ - i.e. une extension [] Ω de $k(\alpha)$ [] - et l’homomorphisme (8) s’identifie ainsi à

$$(9) \quad E_X^{\overline{k(\alpha)}} \longrightarrow E_Y^{\overline{k(\eta)}}$$

où $\overline{k(\alpha)}$, $\overline{k(\eta)}$ sont les clôtures séparables dans Ω .

On posons

$$(10) \quad E_{X/Y}^{\tilde{X}} = \text{Ker}(E_X^{\tilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\tilde{X}} = E_Y^{\tilde{Y}})$$

C'est un foncteur par un triple $\tilde{X} \longrightarrow X \longrightarrow Y$ avec X, Y 0-connexe, \tilde{X} un revêtement universel, plus généralement, si $T \longrightarrow X$ avec 1-connexe, on pose

$$(11) \quad E_{X/Y}^T = \text{Ker}(E_X^T \longrightarrow E_Y^T)$$

(³⁹) on a un foncteur $[]$. Cas particulière $E_{X/Y}^\xi$, ξ un point géométrique de X , $E_{X/Y}^\Omega, E_{X/A}^{\tilde{X}}$ (si $Y = \text{Spec } A$), $E_{B/A}^{\tilde{B}} \dots$

$[]$ on dispose d'une "suite exacte d'homotopie universel" (en dim 2) (⁴⁰) pour $X \longrightarrow Y$, alors le donnée (pour $X \longrightarrow Y$ donné) de $T \longrightarrow X$, (avec T 1-connexe) peut s'interpréter par la donnée d'un composé

$$T \longrightarrow Y$$

et d'un relèvement en $T \longrightarrow X$, ou ce qui revient au même, d'une section de $X_T = X \times_Y T$ sur T . Ceci posé,

$$X$$

on avoir un isomorphisme $[]$ (avec l'hypothèse de "suite exacte d'homotopie" faut)

$$(12) \quad E_{X/Y}^T \simeq \pi_1(X_T; T) \simeq E_{X_T}^T$$

et on $[]$

$$(13) \quad 1 \longrightarrow E_{X/Y}^T \longrightarrow E_X^T \longrightarrow E_Y^T \longrightarrow 1$$

(Cette hypothèse $[]$ satisfait si $Y = \text{Spec } K$, K un corps, Si X est géométriquement 0-connexe sur K).

Plus généralement, si on a une suite exacte d'homotopie universel, mais pour $[]$ avec $E_X^T \longrightarrow E_Y^T$ surjectif,

On (⁴¹) $[]$ une factorisation de $X \longrightarrow Y$ en

$$(14) \quad X \longrightarrow Y' \longrightarrow Y$$

³⁹NB. $E_{X/T}^T []$

⁴⁰Cas où $E_X^T \longrightarrow E_Y^T$ est $[]$ épimorphisme

⁴¹Sous l'hypothèse "suite exacte d'homotopie" mais avec fibres $[]$

avec Y' étale fini ou pro-étales fini sur Y et $E'_X \longrightarrow E_Y$, était maintenant [un] épimorphisme, [] suite exacte universel d'homotopie bien sûr. On avoir donc isomorphismes []

$$(15) \quad E_{X/Y}^T \xrightarrow{\sim} E_{X/Y'}^T$$

qui peut donc se [] comme

$$(16) \quad E_{X \times_{Y'} T}^T \simeq E_{X/Y}^T$$

qu'on peut noter $E_{X_T}^T$, mais en faisant attention que [] X_T [] non plus $X \times_Y T$ (qui va être disconnexe si $Y' \longrightarrow Y$ pas isomorphisme) mais $X \times_Y T$.

Bien sur, à isomorphisme []

s'identifie bel et bien au groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ de \bar{K}/K , \bar{K} est la clôture séparable de K telle que $\text{Spec } \bar{K} \simeq \tilde{Y}$. Souvent, on notons Γ , ou Γ_K , $\Gamma_K^{\bar{K}}$, au lieu de E_Y - surtout si K est algébrique sur le corps premier, et [] donc plus de “partie géométrique” à distingue d’une “partie arithmétique”...

Soit K un corps (qui pourrait être algébriquement clos), L une extension de type fini de K , X un “modèle” propre régulière de L . Alors $E_X^{\bar{L}}$ s'identifie a un quotient de $E_L^{\bar{L}}$, *qui ne dépend pas de modèle X défini*, comme il est [] c'est la partie “universelle géométrique” [] qui classifie les schémas (finis) étales sur L qui sont “non isomorphes” sur *tout* modèle régulière (propre ou non) de L/K .

Si U est un modèle quelconque, il se plonge dans un X , et on a des homomorphismes surjectifs [] Z partie ferme de X

$$E_X^{\bar{L}} = E_L^{\bar{L}} \simeq E_U^{\bar{L}} / \text{sous-groupe fermé []}$$

Notons que $E_L^{\bar{L}}$ es e imite projective de $E_U^{\bar{L}}$, pour des modèles réguliers ([]) variables

$$E_L^{\bar{L}} \simeq [] E_U^{\bar{L}}$$

et de même, bien sûr

$$\pi_{L/K}^{\bar{L}} \simeq [] \pi_{U/K}^{\bar{L}}.$$

[]

dont le choix “effectif” dépend de celui d'un revêtement universel ou encore d'une point géométrique [] de \tilde{K}_n - i.e. d'une clôture algébrique de \tilde{K}_n []

[]

est que $a \in U$.

Ceci posé, $E_U^{\bar{L}}$ se récupère à partir de $E_L^{\bar{L}}$, comme quotient de ce dernier, en prenant *tous* les V de L [] un centre sur U (il suffit même de prendre les $V = \underline{O}_{U,n}$, où se est [] de codim 1 des U), et [] correspondants.

On peut regarder

[]

Mais il en est [] ainsi comme on voit en considérant $V_1 = V \cap L_1$, qu'est un anneau de valuations de L_1 , ⁽⁴²⁾ dont le corps [] fini sur K si celui de V l'est (donc $V_1 \neq L_1$) - donc V_1 correspond à une "place" des corps de fonctions d'une variable L_1 sur K . [] E_K° centralise T_{V_1}

Conjecture. — Soient K, L des extensions de type fini de \mathbb{Q} , $K \subset L$. Alors

- a) Toute section de E_L sur E_K (au guère de tel, se revient au même...) normalise sur T_V associée à un anneau de valuations V de L contenant K , à corps résiduel algébrique sur K et V est uniquement ⁽⁴³⁾ [] cette condition [] au dessus de E_K .
- b) Soit U un modèle "élémentaire" de L sur K , anabélien. Alors tout section de $E_U^{\bar{L}}$ sur $E_K^{\bar{K}}$ se relie [] une section de $E_L^{\bar{L}}$ sur $E_K^{\bar{K}}$.

À noter que ce question 2° est [] locale [] elle doit être essentiellement "triviale", que [] vraie un [] - par contre 1°, est une question de [] globale sur U , et sans doute [] façons triviale.

La validité des ces énonces, impliquant donc, pour les sections de $E_U^{\bar{L}}$ sur $E_K^{\bar{L}}$ associées à un anneau de valuations de L/K de corps résiduel K , que l'image de $E_K^{\bar{L}}$ doit normaliser un sous-groupe [] de $\pi_{L/K}^{\bar{L}}$, qui est non trivial si le valuation [] centre sur U , i.e. si le section n'est pas associé à un point K -rationnel de U , ce qui est justifiant [] des conjectures (qui prouvent d'abord [] !) de §2.

Avant de [] vers l'étude des questions 1°) et 2°) et ainsi des questions de normalisation et de centralisations [] précédemment à propos de N_V, I_V, \dots),

⁴²Il faut []

⁴³[]

STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

1. Courbes standard

Soit k un corps algébriquement clos. Une “courbe standard” sur k es une schéma X sur k satisfaisant les conditions suivantes :

- a) X quasi-projectif, toute composante irréductible est de dim 1
- b) Tout point de X est soit lisse, soit un “point quadratique” (ordinaire) - i.e. isom (loc. ét) à la courbe $\text{Spec}(k[X, Y]/XY)$ au point 0.

Il est connu qu'on peut trouver une unique $[\] \widehat{X}$ de X , telle que X soit un schéma propre, qui X s'identifie à un ouvert dense de \widehat{X} , et que \widehat{X} soit lisse sur les points de $\widehat{X} \setminus X = I$. Alors \widehat{X} est une courbe projective, I est une partie finie de $\widehat{X}(k)$ contenant $[\]$ ouvert des points des lissité de \widehat{X} . $[\] A$ des points singuliers de X s'identifie à $[\]$

La donnée de X équivaut à celle des (\widehat{X}, I) , où \widehat{X} est un schéma projectif, dont toute composante irréductible est de dim 1, et dont l'ensemble singulier est formé des points $[\]$ ordinaires - et I est un sous-schéma fini étale de $\widehat{X}^{\text{lisse}}$, ou ce qui revient au même, une partie fini de $\widehat{X}^{\text{lisse}}(k)$.

Soit

Ainsi, à la courbe standard X nous avons associé les systèmes de données suivantes :

$[\]$

Inversement, [] on construit une courbe standard X en passant au quotient dans $\tilde{A}_k Y \setminus I_k$ par l'involution σ - i.e. X est universel [] pour la donnée p :

[]

soumise à $(pi)\sigma = pi$.

Ainsi la catégorie des courbes standard sur k [] apparaît comme équivalente à celle des systèmes a) b) c) ci-dessus. (pour les iso)...

N.B. On récupère \widehat{X} comme quotient de Y par σ .

Généralisation sur une base quelconque.

Une *courbe standard* sur S (multiplicité schématique, disons) [] défini constructivement en termes d'un système a), b), c) comme ci-dessus, i.e.

[]

On construit alors $\widehat{X} = Y/\sigma$, contenant $A = \tilde{A}/\sigma$ et I comme sous-schémas fermés finis étales sur S , et [] $X = \widehat{X} \setminus I$. On peut montrer que le foncteur

$$(Y, \tilde{A}, \widehat{I}, \sigma_{\tilde{A}}) \mapsto X$$

des systèmes (5) (pour les iso) vers les schémas relatifs [], est *pleinement fidèle* ⁽⁴⁴⁾.

N.B. []

[]

(par abus de langage, puisque c'est non seulement le schéma relatif Y , mais Y avec la structure supplémentaire $\tilde{A}, I, \sigma_{\tilde{A}} \dots$).

2. Graphe associé à une courbe standard

Revenons au cas d'un corps de base k algébriquement clos, pour commencer. Soit X une courbe standard, d'où $Y, I, \tilde{A}, \sigma_{\tilde{A}}$.

Posons

$$(7) \quad S = \pi_0(Y) \simeq [] \text{ des corps irréductibles de } X$$

On a alors le diagramme d'application canoniquement entre ensembles finis

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} & & [] \\ \hline & & \end{array}$$

⁴⁴faux tel quel

où q est de degré 2 et définit l'involution $\sigma_{\tilde{A}}$. Les applications σ et p sont induites par les $[\]$ en passant aux π_{\circ} .

Le système $(\tilde{A} \xrightarrow{\sigma} S, \sigma_{\tilde{A}})$ où $[\]$, peut être considéré comme définissant un *graphe*, dans S est l'un des sommets, et \tilde{A} l'un des $[\]$ l'application σ étant l'application "origine d'un $[\]$ ". Ce graphe ne dépend que de \widehat{X} , pas de X i.e. des choix de $I \subset \widehat{X}(k)$. C'est $[\]$ compte de ce choix que l'on considère, $[\]$ plus de la structure de graphe, le donnée supplémentaire

$$(9) \quad I \longrightarrow S$$

Le graphe indique comment les composantes irréductibles de X (figurés par les sommets) se récupèrent deux à deux - les points d'intersections, i.e. les points singuliers ("doubles" $[\]$) de X , correspondant aux arêtes. Si une composante irréductible X_{α} correspond au sommet α des graphes, alors les $[\]$ fermés en α correspondent biunivoquement aux points doubles de X_{α} - donc $[\]$ X_{α} sont lisses $[\]$ l'extrémité.

Il est clair que tout graphe fini peut être obtenue (à iso près) par une \widehat{X} convenable - et même avec des composantes X_{α} de genre g_{α} donné (i.e. des \tilde{X}_{α} de genre g_{α} ...). De plus, $[\]$ $I \longrightarrow S$ (I $[\]$ fini), cela peut être réalisé par un $I \subset \widehat{X}^{lisse}$, i.e. par une courbe standard S .

La *maquette* d'une courbe standard X consiste, pour définition, en les données suivantes

$[\]$

Une structure formée d'un graphe fini $G = (S, \tilde{A}, \sigma)$, d'un ensemble fini I au dessus de l'une des sommets de G , et d'une application "genre": $S \xrightarrow{g} \mathbf{N}$, $[\]$ appelé ici une "maquette".

Proposition. — Considérons la maquette d'une courbe standard X

a) Soient $\alpha, \beta \in S$, alors α, β appartiennent à la même composante connexe de graphe G , si et seule si X_{α} et X_{β} appartiennent à la même composante connexe de X . Donc on a une bijection canonique

$$(11) \quad \pi_0(G_X) \simeq \pi_0(X),$$

en particulier X est connexe si et seule si G_X est connexe.

b) Supposons X connexe i.e. \widehat{X} connexe, i.e. $[\]$ on a alors $[\]$ i.e. $[\]$ où $[\]$

.

3. Courbes “stables” et MD -graphes

Une courbe standard (sur k algébriquement clos) est “stable”, si elle satisfait à l’un des conditions équivalentes suivantes

- a) $\text{Aut } X$ est fini
- b) Pour tout α , $(Y_\alpha, I_\alpha \cup \tilde{A}_\alpha)$ est anabélien i.e. $2g_\alpha + \widehat{v}_\alpha \geq 3$ i.e. $2g_\alpha - 2 + \widehat{v}_\alpha \geq 1$, i.e.
 - 1) Si $g_\alpha = 1$, on a $\widehat{v}_\alpha \geq 1$
 - 2) Si $g_\alpha = 0$, on a $\widehat{v}_\alpha \geq 3$
- c) Tout champ de vecteurs sur Y nul sur $I \cup \tilde{A}$ est nul.
- d) $\underline{\text{Aut}}_{(Y, \tilde{A}_k, I)}$ est un schéma en groupes fini étale sur k . On voit que cette condition (sous la forme b)) ne dépend que de la *maquette* de la courbe. On dit que X est une *MD-courbe* (MD, initiale de “Mumford-Deligne” ou de “modulaire”) si elle est stable, et 0-connexe (i.e. connexe non vide).

Les maquettes de telles courbes sont les maquettes 0-connexes et stables (i.e. dont les sommets de guère 1 sont de poids total ≥ 1 , et les sommets de guère 0 sont de poids total ≥ 3), on les appellera les MD -graphes.

NB. Une maquette est une MD -graphe si et seule si

- a) elle est 0-connexe (i.e. le graphe G est connexe $\neq \emptyset$)
- b) elle n’est pas réduit à un seul sommet de guère 1, de poids total 0 $[\]$
- c) les sommets $[\]$

Proposition. — Si $(G = (S, \tilde{A}, \sigma), I, \underline{g} : S \longrightarrow \mathbf{N})$ est une MD -graphe, son type (g, v) est anabélien, i.e. $2g + v \geq 3$.

Si on avait $g = 1$, $\nu = 0$, alors la relation

$$g = 1 = \sum g_\alpha + h_1$$

montre que ou bien tous les g_α sont nuls et $h_1 = 0$, ou bien tous les g_α sauf une g_{α_0} sont nuls, []

[]

Soit G une maquette. On dit qu'une courbe standard sur un corps algébriquement clos est *de type* G , si sa maquette est isomorphe à G , on dit qu'elle est *G -épinglée* si on se donne un isomorphisme entre sa maquette et G (c'est donc une structure []).

Soit $(\widehat{X}, \underline{I})$ une courbe standard sur une base S quelconque, on dit qu'elle est de type G si ses fibres géométriques sont de type G . Alors les maquettes des fibres géométriques de $(\widehat{X}, \underline{I})$ forment les fibres d'un schéma en maquettes (ou un MD-graphe) sur S ($\underline{S}, \underline{\tilde{A}}, \sigma_{\tilde{A}}, \underline{I}, \underline{\tilde{A}} \longrightarrow \underline{S}, \underline{I} \longrightarrow \underline{S}, \underline{S} \xrightarrow{g} \mathbf{N}_S$) (système de revêtements finis étales de S et de morphismes entre ceux-ci), localement isomorphe à la maquette G donnée. On appelle *G -épinglage* entre $(\widehat{X}, \underline{I})$ tout isomorphisme entre G_S et $\underline{G}(\widehat{X}, \underline{I})$. Si

$$(18) \quad \Gamma = \text{Aut } G$$

(groupe fini), les G -épinglages de $(\widehat{X}, \underline{I})$ s'identifient aux sections d'un certain Γ_S -torseur, appelé *torseur de G -épinglages* de $(\widehat{X}, \underline{I})$.

Considérons, sur une base S fixée, la catégorie ([]) des courbes standard G -épinglées. Pour tout $\alpha \in S$

N.B. Si $\text{card } J = \nu$, alors

[] Il en est donc de même dans $M_{g,J}$, donc ainsi de M_G (pour G semi-stable) et de $M_{[G]} = (M_G, \Gamma)$.

4. La théorie de Mumford-Deligne

Soient S une multiplicité schématique, X un schéma relatif sur S , propre sur S , \underline{I} un sous-schéma fermé de X . On dit que (X, \underline{I}) est une MD-courbe relative sur S , si X, \underline{I} sont plats de présentation finie sur S , et si pour tout point géométrique de

S , la fibre $(X_{\bar{s}}, I_{\bar{s}})$ est une MD-courbe géométrique sur $k(s)$ i.e. $X_{\bar{s}}$ est 0-connexe, de dimension 1, [] c'est une fonction localement constant sur S .

Fixons nous une type numérique (g, ν) *anabélien* ($2g + \nu \geq 1$), et considérons, pour S variable, le groupoïde fibré

$$(24) \quad S \mapsto \widehat{M}_{g,\nu}(S) = \text{MD-courbes relatives sur } S, \text{ de type numérique égal à } (g, \nu)$$

On a alors le vraiment [] théorème suivant :

Théorème de Mumford-Deligne ⁽⁴⁵⁾. — *Le groupoïde fibré $S \mapsto \widehat{M}_{g,\nu}/S$ sur Sch (plus généralement, sur les multiplicités schématiques...) est représentable pour une multiplicité schématique $\widehat{M}_{g,\nu}$, qui est lisse et propre sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$, D'autre part $M_{g,\nu}$ est un ouvert de Zariski de $\widehat{M}_{g,\nu}$, schématiquement dense fibre par fibre.*

On en déduit aisément p. ex. la connexité des fibres géométriques

[], Nous allons revenir là dessus maintenant.

5. Spécialisation des MD-graphes

Soit

⁴⁵On suppose $2g + \nu \geq 3$ (cas anabélien)

6. Morphismes de $[\mathcal{M}]$ de graphes et de maquettes
7. Étude des $[\mathcal{M}]$ de $\dim \leq 2$ $[\mathcal{M}]$ détermination des graphes correspondantes
8. Structure $[\mathcal{M}]$
9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ($[\mathcal{M}]$ MDT-structure) : cas $[\mathcal{M}]$,
10. Structures MDT analytiques : $[\mathcal{M}]$
11. Digression : $[\mathcal{M}]$ Structure à l'infini des groupoïdes fondamentaux
12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une $[\mathcal{M}]$ et leur dévissages en “topos élémentaires”
13. Digression sur stratification “locales” $[\mathcal{M}]$

Une *stratification globale*

ESQUISSE D'UN PROGRAMME

1. Envoi

Comme la conjoncture actuelle rend de plus en plus illusoire pour moi les perspectives d'un enseignement de recherche à l'Université, je me suis résolu à demander mon admission au CNRS, pour pouvoir consacrer mon énergie à développer des travaux et perspectives dont il devient clair qu'il ne se trouvera aucun élève (ni même, semble-t-il, aucun congénère mathématicien) pour les développer à ma place.

En guise de document "Titres et Travaux", on trouvera à la suite de ce texte la reproduction intégrale d'une esquisse, par thèmes, de ce que je considérais comme mes principales contributions mathématiques au moment d'écrire ce rapport, en 1972. Il contient également une liste d'articles publiés à cette date. J'ai cessé toute publication d'articles scientifiques depuis 1970. Dans les lignes qui suivent, je me propose de donner un aperçu au moins sur quelques thèmes principaux de mes réflexions mathématiques depuis lors. Ces réflexions se sont matérialisées au cours des années en deux volumineux cartons de notes manuscrites, difficilement déchiffrables sans doute à tout autre qu'à moi-même, et qui, après des stades de décantations successives, attendent leur heure peut-être pour une rédaction d'ensemble tout au moins provisoire, à l'intention de la communauté mathématique. Le terme "rédaction" ici est quelque peu impropre, alors qu'il s'agit bien plus de développer des idées et visions multiples amorcées au cours de ces douze dernières années, en les précisant et les approfondissant, avec tous les rebondisse-

ments imprévus qui constamment accompagnent ce genre de travail – un travail de découverte donc, et non de compilation de notes pieusement accumulées. Et je compte bien, dans l’écriture des “Réflexions Mathématiques” commencée depuis février 1983, laisser apparaître clairement au fil des pages la démarche de la pensée qui sonde et qui découvre, en tâtonnant dans la pénombre bien souvent, avec des trouées de lumière subites quand quelque tenace image fausse, ou simplement inadéquate, se trouve enfin débusquée et mise à jour, et que les choses qui semblaient de guingois se mettent en place, dans l’harmonie mutuelle qui leur est propre.

Quoi qu’il en soit, l’esquisse qui suit de quelques thèmes de réflexions des dernières dix ou douze années, tiendra lieu en même temps d’esquisse de programme de travail pour les années qui viennent, que je compte consacrer au développement de ces thèmes, ou au moins de certains d’entre eux. Elle est destinée, d’une part aux collègues du Comité National appelés à statuer sur ma demande, d’autre part à quelques autres collègues, anciens élèves, amis, dans l’éventualité où certaines des idées esquissées ici pourraient intéresser l’un d’entre eux.

2. Un jeu de “Lego-Teichmüller” et le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur \mathbb{Q}
3. Corps de nombres associés à un dessin d’enfant
4. Polyèdres réguliers sur les corps finis
5. Haro sur la topologie dite “générale”, et réflexions heuristiques vers une topologie dite “modérée”
6. “Théories différentielles” (à la Nash) et “théories modérées”
7. À la Poursuite des Champs
8. Digressions de géométrie bidimensionnelle
9. Bilan d’une activité enseignante

L’occasion me semble propice ici de faire un bref bilan de mon activité enseignante depuis 1970, c’est-à-dire depuis que celle-ci s’effectue dans un cadre universitaire. Ce contact avec une réalité très différente a été pour moi riche en enseignements, d’une portée d’un tout autre ordre d’ailleurs que simplement pédagogique ou scientifique. Ce n’est pas ici le lieu de m’étendre sur ce sujet. J’ai dit aussi au début de ce rapport le rôle qu’a joué ce changement de milieu professionnel dans le renouvellement de mon approche des mathématiques, et celui de mes centres d’intérêt en mathématique. Si par contre je fais le bilan de mon activité enseignante au niveau de la recherche proprement dite, j’aboutis à un constat d’échec clair et net. Depuis plus de dix ans que cette activité se poursuit an par an au sein d’une même institution universitaire, je n’ai pas su, à aucun moment, y susciter un lieu où “il se passe quelque chose” – où quelque chose “passe”, parmi un groupe si réduit soit-il de personnes, reliées par une aventure commune. A deux reprises, il est vrai, vers les années 74 à 76, j’ai eu le plaisir et le privilège de susciter chez un élève un travail d’envergure, poursuivi avec élan: chez Yves Ladegaillerie le travail signalé précédemment (par. 3) sur les questions d’isotopie en dimension 2, et chez Carlos Contou-Carrère (dont la passion mathématique n’avait pas attendu la rencontre

avec moi pour éclore) un travail non publié sur les jacobiniennes locales et globales sur des schémas de bases généraux (dont une partie a été annoncée dans une note aux CR). Ces deux cas mis à part, mon rôle s'est borné, au cours de ces dix ans, à transmettre tant bien que mal des rudiments du métier de mathématicien 49 à quelques vingt élèves au niveau de la recherche, ou tout au moins à ceux parmi eux qui ont persévéré suffisamment avec moi, réputé plus exigeant que d'autres, pour aboutir à un premier travail noir sur blanc acceptable (certaines fois aussi à un travail mieux qu'acceptable et plus qu'un seul travail, fait avec goût et jusqu'au bout). Vu la conjoncture, même parmi les rares qui ont persévéré, plus rares encore seront ceux qui auront l'occasion d'exercer ce métier, et par là, tout en gagnant leur pain, de l'approfondir.

10. Épilogue

Depuis l'an dernier, je sens qu'au cours de mon activité d'enseignant universitaire, j'ai appris tout ce que j'avais à en apprendre et enseigné tout ce que je peux y enseigner, et qu'elle a cessé d'être vraiment utile, à moi-même comme aux autres. M'obstiner sous ces conditions à la poursuivre encore me paraîtrait un gaspillage, tant de ressources humaines que de deniers publics. C'est pourquoi j'ai demandé mon détachement au CNRS (que j'avais quitté en 1959 comme directeur de recherches frais émoulu, pour entrer à l'IHES). Je sais d'ailleurs que la situation de l'emploi est serrée au CNRS comme ailleurs, que l'issue de ma demande est douteuse, et que si un poste m'y était attribué, ce serait au dépens d'un chercheur plus jeune qui resterait sans poste. Mais il est vrai aussi que cela libérerait mon poste à l'USTL au bénéfice d'un autre. C'est pourquoi je n'ai pas de scrupule à faire cette demande, et s'il le faut à revenir à la charge si elle n'est pas acceptée cette année.

En tout état de cause, cette demande aura été pour moi l'occasion d'écrire cette esquisse de programme, qui autrement sans doute n'aurait jamais vu le jour. J'ai essayé d'être bref sans être sybillin et aussi, après coup, d'en faciliter la lecture et de la rendre plus attrayante, en y adjoignant un sommaire. Si malgré cela elle peut paraître longue pour la circonstance, je m'en excuse. Elle me paraît courte pour son contenu, sachant que dix ans de travail ne seraient pas de trop pour aller

jusqu'au bout du moindre des thèmes esquissés (à supposer qu'il y ait un "bout"...), et cent ans seraient peu pour le plus riche d'entre eux !

Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Celle-ci se manifeste notamment par une source d'inspiration commune, la géométrie des surfaces, présente dans tous ces thèmes, au premier plan le plus souvent. Cette source, par rapport à mon "passé" mathématique, représente un renouvellement, mais nullement une rupture. Plutôt, elle montre le chemin d'une approche nouvelle vers cette réalité encore mystérieuse, celle des "motifs", qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé⁴⁶. Cette fascination ne s'est nullement évanouie, elle fait partie plutôt de celle du plus brûlant pour moi de tous les thèmes évoqués précédemment. Mais aujourd'hui je ne suis plus, comme naguère, le prisonnier volontaire de tâches interminables, qui si souvent m'avaient interdit de m'élancer dans l'inconnu, mathématique ou non. Le temps des tâches pour moi est révolu. Si l'âge m'a apporté quelque chose, c'est d'être plus léger.

Janvier 1984

⁴⁶Voir à ce sujet mes commentaires dans l'"Esquisse Thématique" de 1972 jointe au présent rapport, dans la rubrique terminale "divagations motiviques" (loc. cit. pages 17-18).

SKETCH OF A PROGRAMME

1. Preface

As the present situation makes the prospect of teaching at the research level at the University seem more and more illusory, I have resolved to apply for admission to the CNRS, in order to devote my energy to the development of projects and perspectives for which it is becoming clear that no student (nor even, it seems, any mathematical colleague) will be found to develop them in my stead.

In the role of the document “Titles and Articles”, one can find after this text the complete reproduction of a sketch, by themes, of what I considered to be my principal mathematical contributions at the time of writing that report, in 1972. It also contains a list of articles published at that date. I ceased all publication of scientific articles in 1970. In the following lines, I propose to give a view of at least some of the principal themes of my mathematical reflections since then. These reflections materialised over the years in the form of two voluminous boxes of handwritten notes, doubtless difficult to decipher for anyone but myself, and which, after several successive stages of settling, are perhaps waiting for their moment to be written up together at least in a temporary fashion, for the benefit of the mathematical community. The term “written up” is somewhat incorrect here, since in fact it is much more a question of developing the ideas and the multiple visions begun during these last twelve years, to make them more precise and deeper, with all the unexpected rebounds which constantly accompany this kind of work – a work of discovery, thus, and not of compilation of piously accumulated notes.

And in writing the “Mathematical Reflections”, begun since February 1983, I do intend throughout its pages to clearly reveal the process of thought, which feels and discovers, often blindly in the shadows, with sudden flashes of light when some tenacious false or simply inadequate image is finally shown for what it is, and things which seemed all crooked fall into place, with that mutual harmony which is their own.

In any case, the following sketch of some themes of reflection from the last ten or twelve years will also serve as a sketch of my programme of work for the coming years, which I intend to devote to the development of these themes, or at least some of them. It is intended on the one hand for my colleagues of the National Committee whose job it is to decide the fate of my application, and on the other hand for some other colleagues, former students, friends, in the possibility that some of the ideas sketched here might interest one of them.

2. A game of “Lego-Teichmüller” and the Galois group $\overline{\mathbf{Q}}$ over \mathbf{Q}

The demands of university teaching, addressed to students (including those said to be “advanced”) with a modest (and frequently less than modest) mathematical baggage, led me to a Draconian renewal of the themes of reflection I proposed to my students, and gradually to myself as well. It seemed important to me to start from an intuitive baggage common to everyone, independent of any technical language used to express it, and anterior to any such language – it turned out that the geometric and topological intuition of shapes, particularly two-dimensional shapes, formed such a common ground. This consists of themes which can be grouped under the general name of “topology of surfaces” or “geometry of surfaces”, it being understood in this last expression that the main emphasis is on the topological properties of the surfaces, or the combinatorial aspects which form the most down-to-earth technical expression of them, and not on the differential, conformal, Riemannian, holomorphic aspects, and (from there) on to “complex algebraic curves”. Once this last step is taken, however, algebraic geometry (my former love!) suddenly bursts forth once again, and this via the objects which we can consider as the basic building blocks for all other algebraic varieties. Whereas

in my research before 1970, my attention was systematically directed towards objects of maximal generality, in order to uncover a general language adequate for the world of algebraic geometry, and I never restricted myself to algebraic curves except when strictly necessary (notably in étale cohomology), preferring to develop “pass-key” techniques and statements valid in all dimensions and in every place (I mean, over all base schemes, or even base ringed topoi...), here I was brought back, via objects so simple that a child learns them while playing, to the beginnings and origins of algebraic geometry, familiar to Riemann and his followers!

Since around 1975, it is thus the geometry of (real) surfaces, and starting in 1977 the links between questions of geometry of surfaces and the algebraic geometry of algebraic curves defined over fields such as \mathbf{C} , \mathbf{R} or extensions of \mathbf{Q} of finite type, which were my principal source of inspiration and my constant guiding thread. It is with surprise and wonderment that over the years I discovered (or rather, doubtless, rediscovered) the prodigious, truly inexhaustible richness, the unsuspected depth of this theme, apparently so anodine. I believe I feel a central sensitive point there, a privileged point of convergence of the principal currents of mathematical ideas, and also of the principal structures and visions of things which they express, from the most specific (such as the rings \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , $\overline{\mathbf{Q}}$, \mathbf{R} , \mathbf{C} or the group $\mathrm{Sl}(2)$ over one of these rings, or general reductive algebraic groups) to the most “abstract”, such as the algebraic “multiplicities”, complex analytic or real analytic. (These are naturally introduced when systematically studying “moduli varieties” for the geometric objects considered, and if we want to go farther than the notoriously insufficient point of view of “coarse moduli” which comes down to most unfortunately killing the automorphism groups of these objects.) Among these modular multiplicities, it is those of Mumford-Deligne for “stable” algebraic curves of genus g with ν marked points, which I denote by $\widehat{M}_{g,\nu}$ (compactification of the “open” multiplicity $M_{g,\nu}$ corresponding to non-singular curves), which for the last two or three years have exercised a particular fascination over me, perhaps even stronger than any other mathematical object to this day. Indeed, it is more the system of all the multiplicities $M_{g,\nu}$ for variable g, ν , linked together by a certain number of fundamental operations (such as the operations of “plugging holes”, i.e. “erasing” marked points, and of “glueing”, and the inverse operations), which

are the reflection in absolute algebraic geometry in characteristic zero (for the moment) of geometric operations familiar from the point of view of topological or conformal “surgery” of surfaces. Doubtless the principal reason of this fascination is that this very rich geometric structure on the system of “open” modular multiplicities $M_{g,\nu}$ is reflected in an analogous structure on the corresponding fundamental groupoids, the “Teichmüller groupoids” $\widehat{T}_{g,\nu}$, and that these operations on the level of the $\widehat{T}_{g,\nu}$ are sufficiently intrinsic for the Galois group Π of \mathbf{Q}/\mathbf{Q} to act on this whole “tower” of Teichmüller groupoids, respecting all these structures. Even more extraordinary, this action is *faithful* – indeed, it is already faithful on the first non-trivial “level” of this tower, namely $\widehat{T}_{0,4}$ – which also means, essentially, that the outer action of Π on the fundamental group $\hat{\pi}_{0,3}$ of the standard projective line \mathbb{P}^1 over \mathbf{Q} with the three points 0, 1 and ∞ removed, is already faithful. Thus *the Galois group Π can be realised as an automorphism group of a very concrete profinite group*, and moreover respects certain essential structures of this group. It follows that an element of Π can be “parametrised” (in various equivalent ways) by a suitable element of this profinite group $\hat{\pi}_{0,3}$ (a free profinite group on two generators), or by a system of such elements, these elements being subject to certain simple necessary (but doubtless not sufficient) conditions for this or these elements to really correspond to an element of Π . One of the most fascinating tasks here is precisely to discover necessary *and* sufficient conditions on an exterior automorphism of $\hat{\pi}_{0,3}$, i.e. on the corresponding parameter(s), for it to come from an element of Π – which would give a “purely algebraic” description, in terms of profinite groups and with no reference to the Galois theory of number fields, to the Galois group $\Pi = \text{Gal}(\mathbf{Q}/\mathbf{Q})$.

Perhaps even a conjectural characterisation of Π as a subgroup of $\text{Aut}_{\text{ext}} \hat{\pi}_{0,3}$ is for the moment out of reach ⁽¹⁾; I do not yet have any conjecture to propose. On the other hand another task is immediately accessible, which is to describe the action of Π on all of the Teichmüller tower, in terms of its action on the “first level” $\hat{\pi}_{0,3}$, i.e. to express an automorphism of this tower, in terms of the “parameter” in $\hat{\pi}_{0,3}$ which picks out the element γ running through Π . This is linked to a representation of the Teichmüller tower (considered as a groupoid equipped with an operation of “glueing”) by generators and relations, which will in particular

give a presentation by generators and relations in the usual sense of each of the $\widehat{T}_{g,\nu}$ (as a profinite groupoid). Here, even for $g = 0$ (so when the corresponding Teichmüller groups are “well-known” braid groups), the generators and relations known to date which I have heard of appear to me to be unusable as they stand, because they do not present the characteristics of invariance and of symmetry indispensable for the action of Π to be directly legible on the presentation. This is particularly linked to the fact that people still obstinately persist, when calculating with fundamental groups, in fixing a single base point, instead of cleverly choosing a whole packet of points which is invariant under the symmetries of the situation, which thus get lost on the way. In certain situations (such as descent theorems for fundamental groups à la van Kampen) it is much more elegant, even indispensable for understanding something, to work with fundamental groupoids with respect to a suitable packet of base points, and it is certainly so for the Teichmüller tower. It would seem (incredible, but true!) that even the geometry of the first level of the Teichmüller tower (corresponding thus to “moduli” either for projective lines with four marked points, or to elliptic curves(!)) has never been explicitly described, for example the relation between the genus 0 case and the geometry of the octahedron, and that of the tetrahedron. A fortiori the modular multiplicities $M_{0,5}$ (for projective lines with five marked points) and $M_{1,2}$ (for curves of genus 1 with two marked points), which actually are practically isomorphic, appear to be virgin territory – braid groups will not enlighten us on their score! I have begun to look at $M_{0,5}$ at stray moments; it is a real jewel, with a very rich geometry closely related to the geometry of the icosahedron.

The a priori interest of a complete knowledge of the two first levels of the tower (i.e., the cases where the modular dimension $N = 3g + \nu$ is ≤ 2) is to be found in the principle that *the entire tower can be reconstituted from these two first levels*, in the sense that via the fundamental operation of “glueing”, level 1 gives a complete system of generators, and level 2 a complete system of relations. There is a striking analogy, and I am certain it is not merely formal, between this principle and the analogous principle of Demazure for the structure of reductive algebraic groups, if we replace the term “level” or “modular dimension” with “semi-simple rank of the reductive group”. The link becomes even more striking, if we recall

that the Teichmüller group $T_{1,1}$ (in the discrete, transcendental context now, and not in the profinite algebraic context, where we find the profinite completions of the former) is no other than $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$, i.e. the group of integral points of the simple group scheme of “absolute” rank 1 $\mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$. Thus, *the fundamental building block for the Teichmüller tower is essentially the same as for the “tower” of reductive groups of all ranks* – a group of which, moreover, we may say that it is doubtless present in all the essential disciplines of mathematics.

This principle of construction of the Teichmüller tower is not proved at this time – but I have no doubt that it is valid. It would be a consequence (via a theory of dévissage of stratified structures – here the $\widehat{M}_{g,v}$ – which remains to be written, cf. par. 5) of an extremely plausible property of the open modular multiplicities $M_{g,v}$ in the complex analytic context, namely that for modular dimension $N \geq 3$, the fundamental group of $M_{g,v}$ (i.e. the usual Teichmüller group $T_{g,v}$) is isomorphic to the “fundamental group at infinity”, i.e. that of a “tubular neighbourhood of infinity”. This is a very familiar thing (essentially due to Lefschetz) for a non-singular *affine* variety of dimension $N \geq 3$. True, the modular multiplicities are not affine (except for small values of g), but it would suffice if such an $M_{g,v}$ of dimension N (or rather, a suitable finite covering) were a union of $N2$ affine open sets, making $M_{g,v}$ “not too near a compact variety”.

Having no doubt about this principle of construction of the Teichmüller tower, I prefer to leave to the experts, better equipped than I am, the task of proving the necessary (if it so happens that any are interested), to rather study, with all the care it deserves, the structure which ensues for the Teichmüller tower by generators and relations, this time in the discrete, not the profinite framework – which essentially comes down to a complete understanding of the four modular multiplicities $M_{0,4}$, $M_{1,1}$, $M_{0,5}$, $M_{1,2}$ and their fundamental groupoids based at suitably chosen “base points”. These offer themselves quite naturally, as the complex algebraic curves of the type (g, n) under consideration, having automorphism group (necessarily finite) larger than in the generic case⁴⁷. Including the holomorphic

⁴⁷It is also necessary to add the “base points” coming from operations of glueing of “blocks” of the same type in smaller modular dimension. On the other hand, in modular dimension 2 (the cases of $M_{0,5}$ and $M_{1,2}$), it is advisable to exclude the points of certain one-parameter families of curves admitting an exceptional automorphism of order 2. These families actually constitute remarkable

sphere with three marked points (coming from $M_{0,3}$, i.e. from level 0), we find *twelve fundamental “building blocks”* (6 of genus 0, 6 of genus 1) in a “game of Lego-Teichmüller” (large box), where the points marked on the surfaces considered are replaced by “holes” with boundary, so as to have surfaces with boundary, functioning as building blocks which can be assembled by gentle rubbing as in the ordinary game of Lego dear to our children (or grandchildren...). By assembling them we find an entirely visual way to construct every type of surface (it is essentially these constructions which will be the “base points” for our famous tower), and also to visualise the *elementary “paths”* by operations as concrete as “twists”, or automorphisms of blocks in the game, and to write the *fundamental relations* between composed paths. According to the size (and the price!) of the construction box used, we can even find numerous different descriptions of the Teichmüller tower by generators and relations. The smallest box is reduced to identical blocks, of type $(0, 3)$ – these are the Thurston “pants”, and the game of Lego-Teichmüller which I am trying to describe, springing from motivations and reflections of absolute algebraic geometry over the field \mathbf{Q} , is very close to the game of “hyperbolic geodesic surgery” of Thurston, whose existence I learned of last year from Yves Ladegaillierie. In a microseminar with Carlos Contou-Carrère and Yves Ladegaillierie, we began a reflection one of whose objects is to confront the two points of view, which are mutually complementary.

I add that each of the twelve building blocks of the “large box” is equipped with a canonical cellular decomposition, stable under all symmetries, having as its only vertices the “marked points” (or centres of the holes), and as edges certain geodesic paths (for the canonical Riemannian structure on the sphere or the torus considered) between certain pairs of vertices (namely those which lie on the same “real locus”, for a suitable real structure of the complex algebraic curve considered). Consequently, all the surfaces obtained in this game by assembling are equipped with canonical cellular structures, which in their turn (cf. §3 below) enable us to consider these surfaces as associated to complex algebraic curves (and even over \mathbf{Q}) which are canonically determined. There is here a typical game of intertwining of

rational curves on the multiplicities considered, which appear to me to be an important ingredient in the structure of these multiplicities.

the combinatorial and the complex algebraic (or rather, the algebraic over \mathbf{Q}).

The “small box” with identical blocks, which has the charm of economy, will doubtless give rise to a relatively complex description for the relations (complex, but not at all inextricable!). The large box will give rise to more numerous relations (because there are many more base points and remarkable paths between them), but with a more transparent structure. I foresee that in modular dimension 2, just as in the more or less familiar case of modular dimension 1 (in particular with the description of $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ by $(\rho, \sigma | \rho^3 = \sigma^2, \rho^4 = \sigma^6 = 1)$), we will find a generation by the automorphism groups of the three types of relevant blocks, with simple relations which I have not clarified as I write these lines. Perhaps we will even find a principle of this type for all the $T_{g,v}$, as well as a cellular decomposition of $\widehat{M}_{g,v}$ generalising those which present themselves spontaneously for $\widehat{M}_{0,4}$ and $\widehat{M}_{1,1}$, and which I already perceive for modular dimension 2, using the hypersurfaces corresponding to the various *real structures* on the complex structures considered, to effect the desired cellular decomposition.

3. Number fields associated to a child’s drawing

Instead of following (as I meant to) a rigorous thematic order, I let myself be carried away by my predilection for a particularly rich and burning theme, to which I intend to devote myself prioritarilly for some time, starting at the beginning of the academic year 84/85. Thus I will take the thematic description up again where I left it, at the very beginning of the preceding paragraph.

My interest in topological surfaces began to appear in 1974, when I proposed to Yves Ladegaillerie the theme of the isotopic study of embeddings of a topological 1-complex into a compact surface. Over the two following years, this study led him to a remarkable isotopy theorem, giving a complete algebraic description of the isotopy classes of embeddings of such 1-complexes, or compact surfaces with boundary, in a compact oriented surface, in terms of certain very simple combinatorial invariants, and the fundamental groups of the protagonists. This theorem, which should be easily generalisable to embeddings of any compact space (triangular to simplify) in a compact oriented surface, gives as easy corollaries several deep classical results in the theory of surfaces, and in particular Baer’s isotopy the-

orem. It will finally be published, separately from the rest (and ten years later, seeing the difficulty of the times...), in Topology. In the work of Ladegaillerie there is also a purely algebraic description, in terms of fundamental groups, of the “isotopic” category of compact surfaces X , equipped with a topological 1-complex K embedded in X . This description, which had the misfortune to run counter to “today’s taste” and because of this appears to be unpublishable, nevertheless served (and still serves) as a precious guide in my later reflections, particularly in the context of absolute algebraic geometry in characteristic zero.

The case where (X, Y) is a 2-dimensional “map”, i.e. where the connected components of $X \setminus K$ are open 2-cells (and where moreover K is equipped with a finite set S of “vertices”, such that the connected components of $K \setminus S$ are open 1-cells) progressively attracted my attention over the following years. The isotopic category of these maps admits a particularly simple algebraic description, via the set of “markers” (or “flags”, or “biarcs”) associated to the map, which is naturally equipped with the structure of a set with a group of operators, under the group

$$\underline{C}_2 = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0 \sigma_2)^2 = 1 \rangle,$$

which I call the (non-oriented) *cartographic group* of dimension 2. It admits as a subgroup of index 2 the *oriented cartographic group*, generated by the products of an even number of generators, which can also be described by

$$\underline{C}_2^+ = \langle \rho_s, \rho_f, \sigma \mid \rho_s \rho_f = \sigma, \sigma^2 = 1 \rangle,$$

(with

$$\rho_s = \sigma_2 \sigma_1, \quad \rho_f = \sigma_1 \sigma_0, \quad \sigma = \sigma_0 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_0,$$

operations of *elementary rotation* of a flag around a vertex, a face and an edge respectively). There is a perfect dictionary between the topological situation of compact maps, resp. oriented compact maps, on the one hand, and finite sets with group of operators \underline{C}_2 resp. \underline{C}_2^+ on the other, a dictionary whose existence was actually more or less known, but never stated with the necessary precision, nor developed at all. This foundational work was done with the care it deserved in an excellent DEA thesis, written jointly by Jean Malgoire and Christine Voisin in 1976.

This reflection suddenly takes on a new dimension, with the simple remark that the group \underline{C}_2^+ can be interpreted as a quotient of the fundamental group of an oriented sphere with three points, numbered 0, 1 and 2, removed; the operations ρ_s, σ, ρ_f are interpreted as loops around these points, satisfying the familiar relation

$$\ell_0 \ell_1 \ell_2 = 1,$$

while the additional relation $\sigma^2 = 1$, i.e. $\ell_1^2 = 1$ means that we are interested in the quotient of the fundamental group corresponding to an imposed ramification index of 2 over the point 1, which thus classifies the coverings of the sphere ramified at most over the points 0, 1 and 2 with ramification equal to 1 or 2 at the points over 1. Thus, the compact oriented maps form an isotopic category equivalent to that of these coverings, subject to the additional condition of being finite coverings. Now taking the Riemann sphere, or the projective complex line, as reference sphere, rigidified by the three points 0, 1 and ∞ (this last thus replacing 2), and recalling that every finite ramified covering of a complex algebraic curve itself inherits the structure of a complex algebraic curve, we arrive at this fact, which eight years later still appears to me as extraordinary: *every “finite” oriented map is canonically realised on a complex algebraic curve!* Even better, as the complex projective line is defined over the absolute base field \mathbf{Q} , as are the admitted points of ramification, the algebraic curves we obtain are defined not only over \mathbf{C} , but over the algebraic closure $\overline{\mathbf{Q}}$ of \mathbf{Q} in \mathbf{C} . As for the map we started with, it can be found on the algebraic curve, as the inverse image of the real segment $[0, 1]$ (where 0 is considered as a vertex, and 1 as the middle of a “folded edge” of centre 1), which itself is the “universal oriented 2-map” on the Riemann sphere⁴⁸. The points of the algebraic curve X over 0, 1 and ∞ are neither more nor less than the vertices, the “centres” of the edges and those of the faces of the map (X, K) , and the orders of the vertices and the faces are exactly the multiplicities of the zeros and the poles of the rational function (defined over \mathbf{Q}) on X , which expresses its

⁴⁸There is an analogous description of finite non-oriented maps, possibly with boundary, in terms of *real* algebraic curves, more precisely of coverings of $\mathbb{P}_{\mathbf{R}}^1$ ramified only over 0, 1, ∞ , the surface with boundary associated to such a covering being $X(\mathbf{C})/\tau$, where τ is complex conjugation. The “universal” non-oriented map is here the disk, or upper hemisphere of the Riemann sphere, equipped as before with the embedded 1-complex $K = [0, 1]$.

structural projection to $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

This discovery, which is technically so simple, made a very strong impression on me, and it represents a decisive turning point in the course of my reflections, a shift in particular of my centre of interest in mathematics, which suddenly found itself strongly focused. I do not believe that a mathematical fact has ever struck me quite so strongly as this one, nor had a comparable psychological impact ⁽²⁾. This is surely because of the very familiar, non-technical nature of the objects considered, of which any child's drawing scrawled on a bit of paper (at least if the drawing is made without lifting the pencil) gives a perfectly explicit example. To such a dessin, we find associated subtle arithmetic invariants, which are completely turned topsy-turvy as soon as we add one more stroke. Since these are spherical maps, giving rise to curves of genus 0 (which thus do not lead to “moduli”), we can say that the curve in question is “pinned down” if we fix three of its points, for instance three vertices of the map, or more generally three centres of facets (vertices, edges or faces) – and then the structural map $f : X \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ can be interpreted as a well-determined rational function

$$f(z) = P(z)/Q(z) \in \mathbb{C}(z)$$

quotient of two well-determined relatively prime polynomials, with Q unitary, satisfying algebraic conditions which in particular reflect the fact that f is unramified outside of 0, 1 and ∞ , and which imply that the coefficients of these polynomials are *algebraic numbers*; thus their zeros are algebraic numbers, which represent respectively the vertices and the centres of the faces of the map under consideration.

Returning to the general case, since finite maps can be interpreted as coverings over $\overline{\mathbb{Q}}$ of an algebraic curve defined over the prime field \mathbb{Q} itself, it follows that the Galois group Γ of $\overline{\mathbb{Q}}$ over \mathbb{Q} acts on the category of these maps in a natural way. For instance, the operation of an automorphism $\gamma \in \Gamma$ on a spherical map given by the rational function above is obtained by applying γ to the coefficients of the polynomials P , Q . Here, then, is that mysterious group Γ intervening as a transforming agent on topologico-combinatorial forms of the most elementary possible nature, leading us to ask questions like: are such and such oriented maps “conjugate” or: exactly which are the conjugates of a given oriented map? (Visibly,

there is only a finite number of these).

I considered some concrete cases (for coverings of low degree) by various methods, J. Malgoire considered some others – I doubt that there is a uniform method for solving the problem by computer. My reflection quickly took a more conceptual path, attempting to apprehend the nature of this action of Π . One sees immediately that roughly speaking, this action is expressed by a certain “outer” action of Π on the profinite compactification of the oriented cartographic group \underline{C}_2^+ , and this action in its turn is deduced by passage to the quotient of the canonical outer action of Π on the profinite fundamental group $\hat{\pi}_{0,3}$ of $(U_{0,3})_{\overline{\mathbf{Q}}}$, where $U_{0,3}$ denotes the typical curve of genus 0 over the prime field \mathbf{Q} , with three points removed. This is how my attention was drawn to what I have since termed “*anabelian algebraic geometry*”, whose starting point was exactly a study (limited for the moment to characteristic zero) of the action of “absolute” Galois groups (particularly the groups $\text{Gal}(\overline{K}/K)$, where K is an extension of finite type of the prime field) on (profinite) geometric fundamental groups of algebraic varieties (defined over K), and more particularly (breaking with a well-established tradition) fundamental groups which are very far from abelian groups (and which for this reason I call “*anabelian*”). Among these groups, and very close to the group $\hat{\pi}_{0,3}$, there is the profinite compactification of the modular group $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$, whose quotient by its centre ± 1 contains the former as congruence subgroup mod 2, and can also be interpreted as an oriented “cartographic” group, namely the one classifying *triangulated* oriented maps (i.e. those whose faces are all triangles or monogons).

Every finite oriented map gives rise to a projective non-singular algebraic curve defined over $\overline{\mathbf{Q}}$, and one immediately asks the question: which are the algebraic curves over $\overline{\mathbf{Q}}$ obtained in this way – do we obtain them all, who knows? In more erudite terms, could it be true that every projective non-singular algebraic curve defined over a number field occurs as a possible “modular curve” parametrisng elliptic curves equipped with a suitable rigidification? Such a supposition seemed so crazy that I was almost embarrassed to submit it to the competent people in the domain. Deligne when I consulted him found it crazy indeed, but didn’t have any counterexample up his sleeve. Less than a year later, at the International Congress in Helsinki, the Soviet mathematician Bielyi announced exactly that result, with

a proof of disconcerting simplicity which fit into two little pages of a letter of Deligne – never, without a doubt, was such a deep and disconcerting result proved in so few lines!

In the form in which Bielyi states it, his result essentially says that *every algebraic curve defined over a number field can be obtained as a covering of the projective line ramified only over the points 0, 1 and ∞* . This result seems to have remained more or less unobserved. Yet it appears to me to have considerable importance. To me, its essential message is that *there is a profound identity between the combinatorics of finite maps on the one hand, and the geometry of algebraic curves defined over number fields on the other*. This deep result, together with the algebraic geometric interpretation of maps, opens the door onto a new, unexplored world – within reach of all, who pass by without seeing it.

It was only close to three years later, seeing that decidedly the vast horizons opening here caused nothing to quiver in any of my students, nor even in any of the three or four high-flying colleagues to whom I had occasion to talk about it in a detailed way, that I made a first scouting voyage into this “new world”, from January to June 1981. This first foray materialised into a packet of some 1300 handwritten pages, baptised “The Long March through Galois theory”. It is first and foremost an attempt at understanding the relations between “arithmetic” Galois groups and profinite “geometric” fundamental groups. Quite quickly it became oriented towards a work of computational formulation of the action of $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ on $\hat{\pi}_{0,3}$, and at a later stage, on the somewhat larger group $\widehat{\text{Sl}(2, \mathbf{Z})}$, which gives rise to a more elegant and efficient formalism. Also during the course of this work (but developed in a different set of notes) appeared the central theme of anabelian algebraic geometry, which is to reconstitute certain so-called “anabelian” varieties X over an absolute field K from their mixed fundamental group, the extension of $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ by $\pi_1(X_{\overline{K}})$; this is when I discovered the “fundamental conjecture of anabelian algebraic geometry”, close to the conjectures of Mordell and Tate recently proved by Faltings⁽³⁾. This period also saw the appearance of the first reflection on the Teichmüller groups, and the first intuitions on the many-faceted structure of the “Teichmüller tower” – the open modular multiplicities $M_{g,v}$ also appearing as the first important examples in dimension > 1 , of varieties (or rather, multiplic-

ities) seeming to deserve the appellation of “anabelian”. Towards the end of this period of reflection, it appeared to me as a fundamental reflection on a theory still completely up in the air, for which the name “Galois-Teichmüller theory” seems to me more appropriate than the name “Galois Theory” which I had at first given to my notes. Here is not the place to give a more detailed description of this set of questions, intuitions, ideas – which even includes some tangible results. The most important thing seems to me to be the one pointed out in par. 2, namely the faithfulness of the outer action of $\Pi = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (and of its open subgroups) on $\hat{\pi}_{0,3}$, and more generally (if I remember rightly) on the fundamental group of any “anabelian” algebraic curve (i.e. whose genus g and “number of holes” ν satisfy the equality $2g + \nu \geq 3$, i.e. such that $\chi(X) < 0$) defined over a finite extension of \mathbf{Q} . This result can be considered to be essentially equivalent to Bielyi’s theorem – it is the first concrete manifestation, via a precise mathematical statement, of the “message” which was discussed above.

I would like to conclude this rapid outline with a few words of commentary on the truly unimaginable richness of a typical anabelian group such as $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$ – doubtless the most remarkable discrete infinite group ever encountered, which appears in a multiplicity of avatars (of which certain have been briefly touched on in the present report), and which from the point of view of Galois-Teichmüller theory can be considered as the fundamental “building block” of the “Teichmüller tower”. The element of the structure of $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$ which fascinates me above all is of course the outer action of Π on its profinite compactification. By Bielyi’s theorem, taking the profinite compactifications of subgroups of finite index of $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$, and the induced outer action (up to also passing to an open subgroup of Π), *we essentially find the fundamental groups of all algebraic curves (not necessarily compact) defined over number fields K , and the outer action of $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ on them* – at least it is true that every such fundamental group appears as a quotient of one of the first groups⁴⁹. Taking the “anabelian yoga” (which remains conjectural) into account, which says that an anabelian algebraic curve over a number field K (finite extension of \mathbf{Q}) is known up to isomorphism when we know its mixed fundamen-

⁴⁹In fact, we are considering quotients of a particularly trivial nature, by abelian subgroups which are products of “Tate modules” $\hat{Z}(1)$, corresponding to “loop-groups” around points at infinity.

tal group (or what comes to the same thing, the outer action of $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ on its profinite geometric fundamental group), we can thus say that *all algebraic curves defined over number fields are “contained” in the profinite compactification $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})$, and in the knowledge of a certain subgroup Π of its group of outer automorphisms!* Passing to the abelianisations of the preceding fundamental groups, we see in particular that all the abelian ℓ -adic representations due to Tate and his circle, defined by Jacobians and generalised Jacobians of algebraic curves defined over number fields, are contained in this single action of Π on the anabelian profinite group $\text{Sl}(2, \mathbf{Z})!$ ⁽⁴⁾

There are people who, faced with this, are content to shrug their shoulders with a disillusioned air and to bet that all this will give rise to nothing, except dreams. They forget, or ignore, that our science, and every science, would amount to little if since its very origins it were not nourished with the dreams and visions of those who devoted themselves to it.

4. Regular polyhedra over finite fields

From the very start of my reflection on 2-dimensional maps, I was most particularly interested by the “regular” maps, those whose automorphism group acts transitively (and consequently, simply transitively) on the set of flags. In the oriented case and in terms of the algebraic-geometric interpretation given in the preceding paragraph, it is these maps which correspond to Galois coverings of the projective line.

[]

5. Denunciation of so-called “general” topology, and heuristic reflections towards a so-called “tame” topology

I would like to say a few words now about some topological considerations which have made me understand the necessity of new foundations for “geometric” topology, in a direction quite different from the notion of topos, and actually independent of the needs of so-called “abstract” algebraic geometry (over general base fields and rings). The problem I started from, which already began to intrigue

me some fifteen years ago, was that of defining a theory of “dévissage” for stratified structures, in order to rebuild them, via a canonical process, out of “building blocks” canonically deduced from the original structure. Probably the main example which had led me to that question was that of the canonical stratification of a singular algebraic variety (or a complex or real singular space) through the decreasing sequence of its successive singular loci. But I probably had the premonition of the ubiquity of stratified structures in practically all domains of geometry (which surely others had seen clearly a long time before). Since then, I have seen such structures appear, in particular, in any situation where “moduli” are involved for geometric objects which may undergo not only continuous variations, but also “degeneration” (or “specialisation”) phenomena – the strata corresponding then to the various “levels of singularity” (or to the associated combinatorial types) for the objects in question. The compactified modular multiplicities $\widehat{M}_{g,v}$ of Mumford-Deligne for the stable algebraic curves of type (g, v) provide a typical and particularly inspiring example, which played an important motivating role when I returned to my reflection about stratified structures, from December 1981 to January 1982. Two-dimensional geometry provides many other examples of such modular stratified structures, which all (if not using rigidification) appear as “multiplicities” rather than as spaces or manifolds in the usual sense (as the points of these multiplicities may have non-trivial automorphism groups). Among the objects of two-dimensional geometry which give rise to such modular stratified structures in arbitrary dimensions, or even infinite dimension, I would list polygons (Euclidean, spherical or hyperbolic), systems of straight lines in a plane (say projective), systems of “pseudo straight lines” in a projective topological plane, or more general immersed curves with normal crossings, in a given (say compact) surface.

[]

6. “Differentiable theories” (à la Nash) and “tame theories”

One of the most interesting foundational theorems of (tame) topology which should be developed would be a theorem of “dévissage” (again!) of a proper tame

map of tame spaces

$$f : X \longrightarrow Y,$$

via a

[]

7. Pursuing Stacks

Since the month of March last year, so nearly a year ago, the greater part of my energy has been devoted to a work of reflection on the *foundations of non-commutative (co)homological algebra*, or what is the same, after all, of *homotopical algebra*. These reflections have taken the concrete form of a voluminous stack of typed notes, destined to form the first volume (now being finished) of a work in two volumes to be published by Hermann, under the overall title “*Pursuing Stacks*”. I now foresee (after successive extensions of the initial project) that the manuscript of the whole of the two volumes, which I hope to finish definitively in the course of this year, will be about 1500 typed pages in length. These two volumes are moreover for me the first in a vaster series, under the overall title “*Mathematical Reflections*”, in which I intend to develop some of the themes sketched in the present report.

Since I am speaking here of work which is actually now being written up and is even almost finished, the first volume of which will doubtless appear this year and will contain a detailed introduction, it is undoubtedly less interesting for me to develop this theme of reflection here, and I will content myself with speaking of it only very briefly. This work seems to me to be somewhat marginal with respect to the themes I sketched before, and does not (it seems to me) represent a real renewal of viewpoint or approach with respect to my interests and my mathematical vision of before 1970. If I suddenly resolved to do it, it is almost out of desperation, for nearly twenty years have gone by since certain visibly fundamental questions, which were ripe to be thoroughly investigated, without anyone seeing them or taking the trouble to fathom them. Still today, the basic structures which occur in the homotopical point of view in topology are not understood, and to my knowledge, after the work of Verdier, Giraud and Illusie on this theme (which are so many beginnings still waiting for continuations...) there has been

no effort in this direction. I should probably make an exception for the axiomatisation work done by Quillen on the notion of a category of models, at the end of the sixties, and taken up in various forms by various authors. At that time, and still now, this work seduced me and taught me a great deal, even while going in quite a different direction from the one which was and still is close to my heart. Certainly, it introduces derived categories in various non-commutative contexts, but without entering into the question of the essential internal structures of such a category, also left open in the commutative case by Verdier, and after him by Illusie. Similarly, the question of putting one's finger on the natural "coefficients" for a non-commutative cohomological formalism, beyond the stacks (which should be called 1-stacks) studied in the book by Giraud, remained open – or rather, the rich and precise intuitions concerning it, taken from the numerous examples coming in particular from algebraic geometry, are still waiting for a precise and supple language to give them form.

I returned to certain aspects of these foundational questions in 1975, on the occasion (I seem to remember) of a correspondence with Larry Breen (two letters from this correspondence will be reproduced as an appendix to Chap. I of volume 1, "History of Models", of *Pursuing Stacks*). At that moment the intuition appeared that ∞ -groupoids should constitute particularly adequate models for homotopy types, the n -groupoids corresponding to *truncated* homotopy types (with $\pi_i = 0$ pour $i > n$). This same intuition, via very different routes, was discovered by Ronnie Brown and some of his students in Bangor, but using a rather restrictive notion of ∞ -groupoid (which, among the 1-connected homotopy types, model only products of Eilenberg-Mac Lane spaces). Stimulated by a rather haphazard correspondence with Ronnie Brown, I finally began this reflection, starting with an attempt to define a wider notion of ∞ -groupoid (later rebaptised stack in ∞ -groupoids or simply "stack", the implication being: over the 1-point topos), and which, from one thing to another, led me to *Pursuing Stacks*. The volume "History of Models" is actually a completely unintended digression with respect to the initial project (the famous stacks being temporarily forgotten, and supposed to reappear only around page 1000...).

This work is not completely isolated with respect to my more recent interests.

For example, my reflection on the modular multiplicities $\widehat{M}_{g,v}$ and their stratified structure renewed the reflection on a theorem of van Kampen in dimension > 1 (also one of the preferred themes of the group in Bangor), and perhaps also contributed to preparing the ground for the more important work of the following year. This also links up from time to time with a reflection dating from the same year 1975 (or the following year) on a “De Rham complex with divided powers”, which was the subject of my last public lecture, at the IHES in 1976; I lent the manuscript of it to I don’t remember whom after the talk, and it is now lost. It was at the moment of this reflection that the intuition of a “schematisation” of homotopy types germinated, and seven years later I am trying to make it precise in a (particularly hypothetical) chapter of the History of Models.

The work of reflection undertaken in Pursuing Stacks is a little like a debt which I am paying towards a scientific past where, for about fifteen years (from 1955 to 1970), the development of cohomological tools was the constant Leitmotiv in my foundational work on algebraic geometry. If in this renewal of my interest in this theme, it has taken on unexpected dimensions, it is however not out of pity for a past, but because of the numerous unexpected phenomena which ceaselessly appear and unceremoniously shatter the previously laid plans and projects – rather like in the thousand and one nights, where one awaits with bated breath through twenty other tales the final end of the first.

8. Digressions on 2-dimensional geometry

Up to now I have spoken very little of the more down-to-earth reflections on two-dimensional topological geometry, directly associated to my activities of teaching and “directing research”. Several times, I saw opening before me vast and rich fields ripe for the harvest, without ever succeeding in communicating this vision, and the spark which accompanies it, to one of my students, and having it open out into a more or less long-term common exploration. Each time up through today, after a few days or weeks of investigating where I, as scout, discovered riches at first unsuspected, the voyage suddenly stopped, upon its becoming clear that I would be pursuing it alone. Stronger interests then took precedence over a voyage which at that point appeared more as a digression or even a dispersion, than a common

adventure.

One of these themes was that of planar polygons, centred around the modular varieties which can be associated to them. One of the surprises here was the irruption of algebraic geometry in a context which had seemed to me quite distant. This kind of surprise, linked to the omnipresence of algebraic geometry in plain geometry, occurred several times.

Another theme was that of curves (in particular circles) immersed in a surface, with particular attention devoted to the “stable” case where the singular points are ordinary double points (and also the more general theme where the different branches at a point mutually cross), often with the additional hypothesis that the immersion is “cellular”, i.e. gives rise to a map. A variation on the situations of this type is that of immersions of a surface with non-empty boundary, and first of all a disk (which was pointed out to me by A’Campo around ten years ago). Beyond the question of the various combinatorial formulations of such situations, which really represent no more than an exercise of syntax, I was mainly interested in a dynamical vision of the possible configurations, with the passage from one to another via continuous deformations, which can be decomposed into compositions of two types of *elementary operations* and their inverses, namely the “*sweeping*” of a branch of a curve over a double point, and the *erasing* or the *creation* of a bigon. (The first of these operations also plays a key role in the “dynamical” theory of systems of pseudo-lines in a real projective plane.) One of the first questions to be asked here is that of determining the different *classes of immersions* of a circle or a disk (say) modulo these elementary operations; another, that of seeing which are the immersions of the boundary of the disk which come from an immersion of the disk, and to what extent the first determine the second. Here also, it seems to me that it is a systematic study of the relevant modular varieties (of infinite dimension here, unless a purely combinatorial description of them can be given) which should give the most efficient “focus”, forcing us in some sense to ask ourselves the most relevant questions. Unfortunately, the reflection on even the most obvious and down-to-earth questions has remained in an embryonic state. As the only tangible result, I can cite a theory of canonical “*dévissage*” of a stable cellular immersion of a circle in a surface into “undecomposable” immersions, by “tele-

scoping” such immersions. Unfortunately I did not succeed in transforming my lights on the question into a DEA thesis, nor other lights (on a complete theoretical description, in terms of fundamental groups of topological 1-complexes, of the immersions of a surface with boundary which extend a given immersion of its boundary) into the beginnings of a doctoral thesis...

A third theme, pursued simultaneously over the last three years at different levels of teaching (from the option for first year students to the three third-cycle theses now being written on this theme) deals with the topologico-combinatorial classification of systems of lines or pseudo-lines. Altogether, the participation of my students here has been less disappointing than elsewhere, and I have had the pleasure of occasionally learning interesting things from them which I would not have thought of. Things being what they are, however, our common reflection was limited to a very elementary level. Lately, I finally devoted a month of intensive reflection to the development of a purely combinatorial construction of a sort of “modular surface” associated to a system of n pseudo-lines, which classifies the different possible “relative positions” (stable or not) of an $(n + 1)$ -st pseudo-line with respect to the given system, in other words: the different possible “affinisations” of this system, by the different possible choices of a “pseudo-line at infinity”. I have the impression of having put my finger on a remarkable object, causing an unexpected order to appear in questions of classification which up to now appeared fairly chaotic! But the present report is not the place to dwell further on this subject.

Since 1977, in all the questions (such as the two last themes evoked above) where two-dimensional maps occur, the possibility of realising them canonically on a conformal surface, so on a complex algebraic curve in the compact oriented case, remains constantly in filigree throughout my reflection. In practically every case (in fact, in all cases except that of certain spherical maps with “few automorphisms”) such a conformal realisation implies in fact a *canonical Riemannian metric*, or at least, canonical up to a multiplicative constant. These new elements of structure (without even taking into account the arithmetic element which was considered in par. 3) are of a nature to deeply transform the initial aspect of the questions considered, and the methods of approaching them. A beginning of fa-

miliarisation with the beautiful ideas of Thurston on the construction of Teichmüller space, in terms of a very simple game of hyperbolic Riemannian surgery, confirms me in this presentiment. Unfortunately, the very modest level of culture of almost all the students who have worked with me over these last ten years does not allow me to investigate these possibilities with them even by allusion, since the assimilation of even a minimal combinatorial language already frequently encounters considerable psychical obstacles. This is why, in some respect and more and more in these last years, my teaching activity has often acted like a weight, rather than a stimulus for the unfolding of a somewhat advanced or even merely delicate geometric reflection.

9. Assessment of a teaching activity

The occasion appears to be auspicious for a brief assessment of my teaching activity since 1970, that is, since it has taken place in a university. This contact with a very different reality taught me many things, of a completely different order than simply pedagogic or scientific. Here is not the place to dwell on this subject. I also mentioned at the beginning of this report the role which this change of professional milieu played in the renewal of my approach to mathematics, and that of my centres of interest in mathematics. If I pursue this assessment of my teaching activity on the research level, I come to the conclusion of a clear and solid failure. In the more than ten years that this activity has taken place, year after year in the same university, I was never at any moment able to suscite a place where “something happened” – where something “passed”, even among the smallest group of people, linked together by a common adventure. Twice, it is true, around the years 1974 to 1976, I had the pleasure and the privilege of awakening a student to a work of some consequence, pursued with enthusiasm: Yves Ladegailerie in the work mentioned earlier (par. 3) on questions of isotopy in dimension 2, and Carlos Contou-Carrère (whose mathematical passion did not await a meeting with myself to blossom) an unpublished work on the local and global Jacobians over general base schemes (of which one part was announced in a note in the CR). Apart from these two cases, my role has been limited throughout these ten years to somehow or other conveying the rudiments of the mathematician’s trade to

about twenty students on the research level, or at least to those among them who persevered with me, reputed to be more demanding than others, long enough to arrive at a first acceptable work written black on white (and even, sometimes, at something better than acceptable and more than just one, done with pleasure and worked out through to the end). Given the circumstances, among the rare people who persevered, even rarer are those who will have the chance of carrying on the trade, and thus, while earning their bread, learning it ever more deeply.

10. Epilogue

Since last year, I feel that as regards my teaching activity at the university, I have learned everything I have to learn and taught everything I can teach there, and that it has ceased to be really useful, to myself and to others. To insist on continuing it under these circumstances would appear to me to be a waste both of human resources and of public funds. This is why I have applied for a position in the CNRS (which I left in 1959 as freshly named director of research, to enter the IHES). I know moreover that the employment situation is tight in the CNRS as everywhere else, that the result of my request is doubtful, and that if a position were to be attributed to me, it would be at the expense of a younger researcher who would remain without a position. But it is also true that it would free my position at the USTL to the benefit of someone else. This is why I do not scruple to make this request, and to renew it if it is not accepted this year.

In any case, this application will have been the occasion for me to write this sketch of a programme, which otherwise would probably never have seen the light of day. I have tried to be brief without being sibylline and also, afterwards, to make it easier reading by the addition of a summary. If in spite of this it still appears rather long for the circumstances, I beg to be excused. It seems short to me for its content, knowing that ten years of work would not be too much to explore even the least of the themes sketched here through to the end (assuming that there is an “end”...), and one hundred years would be little for the richest among them!

Behind the apparent disparity of the themes evoked here, an attentive reader will perceive as I do a profound unity. This manifests itself particularly by a common source of inspiration, namely the geometry of surfaces, present in all of these

themes, and most often front and centre. This source, with respect to my mathematical “past”, represents a renewal, but certainly not a rupture. Rather, it indicates the path to a new approach to the still mysterious reality of “*motives*”, which fascinated me more than any other in the last years of this past⁵⁰. This fascination has certainly not vanished, rather it is a part of the fascination with the most burning of all the themes evoked above. But today I am no longer, as I used to be, the voluntary prisoner of interminable tasks, which so often prevented me from springing into the unknown, mathematical or not. The time of tasks is over for me. If age has brought me something, it is lightness.

⁵⁰On this subject, see my commentaries in the “Thematic Sketch” of 1972 attached to the present report, in the last section “motivic digressions”, (loc. cit. pages 17-18)

Les mois écoulés

LE BI-ICOSAÈDRE

Extrait de “Récoltes et Semailles”

[...] Il me faut d’abord donner quelques explications préliminaires purement géométriques, sur la combinatoire de l’icosaèdre gauche et sur la notion de bi-icosaèdre gauche. Comme il semblerait que je sois le seul qui ait jamais pris la peine (et le plaisir) de regarder l’icosaèdre (ordinaire ou “gauche”, au choix) du point de vue combinatoire, et qu’il n’y a donc aucune référence dans la littérature sur ces choses (qui devraient être “bien connues” depuis plus de deux mille ans), je me fais un plaisir de développer ici “en forme” le peu dont nous aurons besoin, pour nous y reconnaître⁵¹.

Dans la suite, on se donne un ensemble S à six éléments (S , comme “sommets”). Les éléments de S s’appelleront “*sommets*”, et les parties à deux éléments de S (ou

⁵¹Mes réflexions sur l’icosaèdre, avec un fort accent sur l’aspect combinatoire, datent de 1977, où j’ai fait un cours de DEA d’une année sur ce thème magnifique. Cela a été en même temps ma première grosse frustration dans mon expérience enseignante. Malgré le niveau délibérément très élémentaire et très “visuel” où j’ai placé le cours, avec l’espoir de voir s’y impliquer les auditeurs (étudiants de troisième cycle ou enseignants à mon Université), je n’ai pas réussi à vraiment déclencher une étincelle de vrai intérêt et de participation en aucun. La seule exception a été la mise au point, par un ou deux parmi les auditeurs, de tracés de la projection stéréographique sur le plan de l’icosaèdre (vu comme inscrit sur la sphère unité, avec les arêtes figurées par des arcs de grand cercle), en faisant apparaître en même temps le dodécaèdre dual. Il est vrai que ces tracés stéréographiques (en prenant comme centre de projection soit un sommet, soit le milieu d’une arête, soit le centre d’une face) sont de toute beauté, surtout quand on tient compte du coloriage canonique des arêtes (voire, des faces également) en cinq couleurs...

“paires”) dans S s’appelleront “arêtes”. Enfin, pour abréger, on appellera “triangles” (de S) les parties de S à trois éléments. Si on désigne par $A(S)$ ou A , et par $T(S)$ ou T l’ensemble des arêtes et l’ensemble des triangles de S , on vérifie aussitôt que l’on a

$$(S) = 6, \quad A = 15, \quad T = 20$$

(où la première relation est mise pour mémoire). (NB si E est un ensemble fini, (E) désigne le nombre de ses éléments.)

Définition 1. — *Une partie F de l’ensemble T des triangles de S est appelée une structure icosaédrale (sous-entendu : gauche) sur S , si toute arête de S est contenue dans exactement deux triangles appartenant à F .*

En d’autres termes, si on appelle “faces” les triangles éléments de F , la condition envisagée dit que *chaque arête est contenue dans exactement deux faces*. Un ensemble S à six éléments muni d’une structure icosaédrale F est appelé un *icosaèdre combinatoire* (sous entendu : “gauche”, pour ne pas confondre avec l’icosaèdre “ordinaire”, qui a douze sommets au lieu de six), ou simplement un *icosaèdre (gauche)*. Si $I = (S, F)$ et $I' = (S', F')$ sont deux tels icosaèdres, on appelle *isomorphisme* de l’un avec l’autre toute bijection

$$u : S \xrightarrow{\sim} S'$$

telle que $u(F) = F'$, i.e. telle que les faces de I' soient exactement les images par u des faces de I .

On peut “regarder” un icosaèdre en “centrant” son attention soit sur un sommet, soit sur une arête, soit sur une face, de façon à obtenir trois types de “perspectives” différentes, pour l’étudier. Ce sera la perspective centrée sur une face, qui sera la plus commode pour notre propos actuel. Voici l’énoncé récapitulatif, contenant tout ce qui nous sera nécessaire (et au delà) :

Théorème 1. —

- a) *Deux icosaèdres (combinatoires gauches) sont toujours isomorphes, et plus précisément, il y a exactement 60 isomorphismes de l’un avec l’autre.*
- b) *Un icosaèdre a exactement dix faces. Si f est une face d’un icosaèdre $I = (S, F)$, f'' une face d’un icosaèdre $I' = (S', F')$, alors pour toute bijection u_0 de f avec*

f' , il existe un isomorphisme et un seul u de I avec I' , tel que u transforme f en f'' et induise entre f et f' la bijection u_0 .

- c) Soit $I = (S, F)$ un icosaèdre, et F' le complémentaire de F dans T , i.e. l'ensemble des triangles de S qui ne sont pas des faces. Alors pour toute face $f \in F$ de I , son complémentaire f' dans S (i.e. l'ensemble des sommets qui n'appartiennent pas à la face f) est dans F' (i.e. est un triangle qui n'est pas une face de I). L'application

$$f \mapsto f' : F \longrightarrow F'$$

est une bijection de F avec F' . Enfin, F' est également une structure icosaédrale sur S (appelée structure icosaédrale complémentaire de la structure F).

- d) Soient S un ensemble de sommets à six éléments,

$$\text{Ic}(S) \subset P(T(S)) \quad (= \text{ens. des parties de } T(S))$$

l'ensemble des structures icosaédrales sur S . Alors $\text{Ic}(S)$ a douze éléments, et l'application

$$F \mapsto F', \quad \text{Ic}(S) \longrightarrow \text{Ic}(S)$$

est une involution sans points fixes de cet ensemble (i.e. on a, pour tout F dans $\text{Ic}(S)$, $(F')' = F$ et $F' \neq F$.)

- e) Soient F une structure icosaédrale sur S , F' la structure complémentaire, $f \in F$ une face de F , $f' \in F'$ la face de F' complémentaire de f . Pour tout sommet $s \in f$, soit s' le "troisième sommet" de l'unique face $f(s)$ de F , distincte de f , contenant l'arête $a_s = f - \{s\}$. On a alors $s' \in f'$, et l'application

$$s \mapsto s' : f \longrightarrow f'$$

est une bijection de f avec f' , notée

$$u_f : f \xrightarrow{\sim} f'.$$

On définit de même (en interchangeant les rôles de F et de F') une bijection

$$u_{f'} : f' \xrightarrow{\sim} f.$$

Ses bijections sont inverses l'une de l'autre :

$$u_{f'}u_f = \text{id}_f, \quad u_fu_{f'} = \text{id}_{f'}.$$

f) Soit S un ensemble à six éléments, f un triangle de S , f' le triangle complémentaire, P_f l'ensemble des bijections de f avec f' (c'est un ensemble à six éléments), et $\varepsilon_f = \{f, f'\}$ la partie à deux éléments de $T(S)$ (ensemble des triangles), formée de f et de f' . Pour toute structure icosaédrale F sur S , soit

$$c(F) = (\alpha(F), u(F)) \in \varepsilon_f \times P_f$$

défini ainsi : $\alpha(F)$ est égal à f ou à f' , suivant que $f \in F$ ou $f' \in F$ (i.e. $\alpha(F)$ est l'unique élément de ε_f tel que $\alpha(F) \in F$), et $u(F)$ est égal à u_f (notations de d)). On a donc défini une application

$$c : \text{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cette application est bijective. En d'autres termes, "il revient au même" de se donner une structure icosaédrale F sur S , ou de se donner un couple d'éléments (φ, u) , où φ est l'un des deux éléments f, f' (celui qui doit être face de F), et où u est une bijection $f \xrightarrow{\sim} f'$.

Démonstration du théorème. La partie a) est conséquence de b), compte tenu qu'il y a exactement 6 bijections de f avec f' et 10 faces de I' , et que $60 = 10 \cdot 6$. D'autres part, dans d) le fait que $F \mapsto F'$ soit une involution sans points fixes, est évident sur la définition donnée dans c). Quant au fait que $\text{Ic}(S)$ a douze éléments, cela résulte aussitôt de a) par un argument de "comptage" standard (vu que le groupe de toutes les bijections de S avec lui même a $6! = 720$ éléments, et que le sous-groupe stabilisateur de F en a soixante, d'où le nombre

$$12 = 720/60 \quad .)$$

Une autre façon de retrouver 12 (via la "perspective autour d'une face" expliquée dans f)) est par⁵²

$$12 = 2 \times 6.$$

⁵²Il s'agit ici de la description, utilisant la "perspective" centrée sur une face. Il y a deux autres

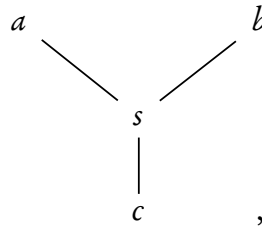
Il y a donc à prouver seulement les parties b), c), e), f). Dans b), c), f) on part d'une structure icosaédrale donnée (S, F) . Comme chaque arête est contenue dans deux faces, il existe au moins une face, soit f . Soit f' son complémentaire dans S , et considérons l'application

$$u_f : f \longrightarrow f', \quad a \mapsto a'$$

définie dans e). Montrons qu'elle est injective, donc bijective (puisque f et f' ont même nombre d'éléments, savoir trois). Si on avait deux sommets distincts $a \neq b$ dans f , tels que $a' = b'$, alors posant

$$c = a' = b'$$

et désignant par s le troisième sommet de f , on aurait une configuration



avec trois faces $\{s, b, c\}$, $\{s, c, a\}$, $\{s, a, b\}$ se rajustant cycliquement autour de s , le long d'arêtes communes $\{s, a\}$, $\{s, b\}$, $\{s, c\}$. Je dis que ce n'est pas possible.

descriptions toutes aussi instructives de l'ensemble $\text{Ic}(S)$, obtenues par la perspective centrée soit sur une arête, soit sur un sommet. Enfin, je signale aussi la bijection canonique suivante

$$\text{Ic}(S) \text{Bic}(S) \times \omega(S),$$

où $\text{Bic}(S)$ désigne l'ensemble des structures biicosaédrales sur S , et $\omega(S)$ l'ensemble à deux éléments formé des "orientations" de S (i.e. l'ensemble quotient de l'ensemble des "repères" de S i.e. des numérations de ses éléments de 1 à 6, par l'action du sous-groupe alterné du groupe symétrique G_6). L'application est obtenue en associant à toute structure icosaédrale F , d'une part la structure biicosaédrale associée $\{F, F'\}$, et d'autre part une certaine orientation $\text{or}(F)$ de S canoniquement associée à F , que je me dispense de décrire ici. Il se trouve que l'on a

$$\text{or}(F) \neq \text{or}(F'),$$

de sorte que les deux structures icosaédrales correspondant à une même structure biicosaédrale $\{F, F'\}$ sont "repérées" par les deux orientations possibles de S .

Soient en effet u et v les deux points de S distincts des points précédents s, a, b, c , considérons l'arête $\{s, u\}$, et soit h une face qui la contienne. Alors le troisième sommet de h (distinct de s et u par définition) ne peut pas être égale à un des trois points a, b, c , disons a , car l'arête $\{s, a\}$ serait contenue dans trois faces de l'icosaèdre. Donc le troisième sommet est v , et l'arête $\{s, u\}$ ne serait contenue que dans le seul triangle $\{s, u, v\}$, absurde.

Nous avons maintenant qui si a, b, c sont les trois sommets de la face f , alors les sommets a', b', c' dans f' sont distincts, donc les six sommets de l'icosaèdre sont a, b, c, a', b', c' . Nous pouvons maintenant écrire la liste de l'ensemble de toutes les faces de l'icosaèdre, via la "perspective par rapport à f ". Pour bien visualiser cette liste, il est pratique de faire un dessin, où les sommets sont figurés par des points du plan, les arêtes par des segments joignant ces points, et les faces par des aires triangulaires délimitées par les trois arêtes contenues dans la face. De plus, pour une bonne visibilité du graphisme, on va faire figurer chacun des points a', b', c' (mais non a, b, c) en *deux* exemplaires, dont le deuxième sera désigné (en tant que point du plan) par a'', b'', c'' respectivement. Ainsi, a' et a'' sont des points différents du plan, mais qui désignent le même élément de l'ensemble "abstrait" S .

On trouve la figure suivante, qui peut aussi être interprétée comme une vue "en perspective" de l'icosaèdre régulier ordinaire dans l'espace, vue "centrée" sur une face (nommée $\{a, b, c\}$)

Sur cette figure apparaissent dix figures (triangulaires), parmi lesquelles les quatre faces de départ

$$(1) \quad f = \{a, b, c\}, \quad f_a = \{b, c, a'\}, \quad f_b = \{c, a, b'\}, \quad f_c = \{a, b, c'\}$$

plus les six faces "externes", se raccordant par paires le long des trois arêtes $\{a, a''\} = \{a, a'\}$, $\{b, b''\} = \{b, b'\}$, $\{c, c''\} = \{c, c'\}$. Donc, en toutes lettres

$$(2) \quad f_{a,b} = \{a, a'', b'\} = \{a, a', b'\},$$

et les cinq triangles similaires $f_{a,c}, f_{b,c}, f_{b,a}, f_{c,a}, f_{c,b}$. Pour montrer que $f_{a,b}$ (par exemple) est bien une face, on note que l'arête $\{a, a''\} = \{a, a'\}$ doit appartenir à deux faces, dont le troisième sommet ne peut être ni b ni c (car chacune des arêtes a, b et a, c sont déjà contenues dans deux parmi les quatre faces (1)), donc il ne reste comme possibilité que b' et c' , d'où les faces $f_{a,b}$ et $f_{a,c}$.

Je dis que l'ensemble de ces dix faces épuise l'ensemble F de toutes les faces. Pour ceci, comptons le nombre d'arêtes figurant dans notre graphisme représentatif. Trois pour f , deux supplémentaires pour chacun des trois triangles f_a, f_b, f_c (ça fait neuf), trois arêtes de la forme $\{a, a''\} = \{a, a'\}$ (fait douze), et six qui forment le contour de la figure (arêtes de la forme $\{a', b''\}$ etc), ça fait dix-huit, alors qu'il n'y en a que quinze arêtes en tout ! Mais on note que les arêtes telles que $\{a', b''\}$ et $\{a'', b'\} = \{b', a''\}$, symétriques par rapport au centre de la figure, représentant une seule et même arête de S (savoir $\{a', b'\}$ en l'occurrence), ce qui fait que le compte est bon : toutes les arêtes de S figurent sur notre tracé, et une seule fois sauf celles de triangle $\{a', b', c'\}$, lesquelles y figurent deux fois.

Ceci dit, un rapide coup d'oeil sur la figure nous convainc que chacune des arêtes qui y figurent, appartient bien à exactement deux parmi les dix faces précédentes et une seule. Si donc il existait une face h qui ne faisant pas partie de ce paquet de dix, alors une arête contenue dans h appartiendrait à au moins trois faces, absurde.

Ainsi, on est arrivé expliciter le “tracé” d'un icosaèdre quelconque, à partir d'une de ses faces, comme une “figure standard”. La partie b) du théorème 1 est une conséquence immédiat de cette détermination.

Ainsi, b) donc aussi a) sont prouvés, prouvons c). Le fait que pour une face f (que nous pouvons prendre comme notre face centrale), le triangle complémentaire ne soit pas une face, est immédiat sur notre tracé, puisque $f' = (a', b', c')$ ne figure pas parmi nos dix faces. Comme l'ensemble T des triangles à 20 éléments et que F en a dix, F' en a dix, et comme l'application $f \mapsto f'$ de F dans F' est évidemment injective, elle est bijective. En d'autres termes, pour qu'un triangle f de S soit une face, il faut *et il suffit* que le triangle complémentaire ne le soit pas.

Pour terminer de prouver c), il reste à prouver que F' est une structure icosaédrale, donc que pour toute arête L de S , il y a exactement deux triangles éléments de F' qui la contiennent. Passant aux complémentaires dans S , cela revient à dire que toute partie “carrée” de S (i.e. une partie ayant quatre éléments), contient exactement deux faces (pour la structure icosaédrale F). Or les faces non contenues dans cette partie $S - L$ sont exactement celles qui rencontrent son complémentaire $L = \{a, b\}$, i.e. celles qui contiennent soit a , soit b . Or l'ensemble F_a des

faces contenant le sommet a a exactement cinq éléments (voir le tracé, où on peut bien sûr supposer que a est bien un sommet de la face de départ f utilisée pour faire le tracé), et de même pour F_b , d'autre part l'intersection $F_a \cap F_b$ est formée des faces qui contiennent l'arête $\{a, b\}$, donc a exactement deux éléments. Il s'ensuit que $F_a \cup F_b$ a $5 + 5 - 2 = 8$ éléments. Comme F en a dix, il reste bien deux éléments de F pour être contenus dans $S - L$.

Il reste à prouver e) et f). Dans e), il ne reste plus qu'à prouver la relation

$$u_{f'} u_f = \text{id}_f,$$

et la relation symétrique (qui s'en déduira en échangeant les rôles de F et de F'). Utilisant encore f pour faire le tracé plus haut, cette relation se lit sur la figure : l'appliquant à a par exemple (ce sera pareil pour b et c) cette relation $(a')' = a$ équivaut simplement à dire que le triangle $\{b', c', a\}$ est une face pour F' , c'est à dire, n'est *pas* une face pour la structure de départ, ce qui est bien le cas.

Reste à prouver f), i.e. la bijectivité de l'application

$$c : F \mapsto (\alpha(F), u(F)) : \text{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cela signifie que pour tout couple (φ, u) , où φ est un des triangles f, f' et où u est une bijection $u : f \xrightarrow{\sim} f'$, il existe une unique structure icosaédrale F dont il provienne. Si $\varphi = f$, cela revient à dire qu'il existe une unique structure icosaédrale admettant f comme face, et donnant lieu à la bijection u - et c'est bien ce que nous avons vu dans la construction explicite de tantôt. Si $\varphi = f''$, cela signifie qu'il existe une unique structure F tel que $f' \in F$, et que $u_f = u$. Désignant par F' la structure icosaédrale complémentaire, cela signifie aussi qu'il existe une unique structure icosaédrale F' telle que $f \in F'$ et $u_f = u$, ce qui (au changement de notation près) est ce qu'on vient de voir.

Cela achève la démonstration du théorème 1.

Définition 2. — *Soit S un ensemble à six éléments. On appelle structure biicosaédrale (combinatoire gauche) sur S , une paire formée de deux structures icosaédrales complémentaires l'une de l'autre.*

En vertu de la partie d) du théorème, il y a donc sur S exactement $12/2 = 6$ structures biicosaédrales. D'après la partie f), si f est un triangle de S et f' le

triangle complémentaire, l'ensemble S^* de ces six structures icosaédrales est en correspondance biunivoque canonique avec $P_f =$ ensemble des bijections de f avec f' . De façon plus précise, si on identifie l'ensemble $\text{Ic}(S)$ des structures icosaédrales sur S avec l'ensemble produit $\varepsilon_f \times P_f$ comme dans f), alors l'opération $F \mapsto F'$ de passage à la structure icosaédrale complémentaire s'interprète comme l'opération

$$(\varphi, u) \mapsto (\varphi', u),$$

où pour tout φ dans l'ensemble à deux éléments $\varepsilon_f = \{f, f''\}$, φ' désigne l'autre élément de ε_f .

On appelle *biicosaèdre combinatoire gauche* (ou simplement *biicosaèdre*) un couple $(S, \{F, F'\})$ formé d'un ensemble S à six éléments, et d'une structure biicosaédrale $\{F, F'\}$ sur S , formée de deux structures icosaédrales F, F' complémentaires l'une de l'autre.

On définit les *isomorphismes* de tels objets de la façon habituelle. On notera que deux biicosaèdres sont isomorphes, et l'ensemble des isomorphismes de l'un sur l'autre a exactement 120 éléments. Par exemple, si on regarde les automorphismes d'un biicosaèdre $(S, \{F, F'\})$, ceux-ci forment un "groupe" (au sens technique mathématique du terme : stabilité par composition et par passage à l'inverse), lequel se décompose en deux sous-ensembles disjoints, ayant chacun 60 éléments (faisant donc bien un total de 120) : le premier est formé des bijection de S avec lui-même (ou "permutations" de S) qui transforment F en lui-même, ou ce qui revient au même, F' en lui-même - en d'autres termes, ce sont les automorphismes de l'icosaèdre (S, F) (ou (S, F')). Le deuxième est formé des permutations qui transforment F en F' , ou ce qui revient au même, F' en F , c'est à dire encore les isomorphismes de l'icosaèdre (S, F) avec (S, F') . Par la partie a du théorème 1, il y en a bien 60 également.

Là je me suis laissé entraîner à en dire nettement plus que ce qu'il faut pour mon propos "philosophique"⁵³. La chose essentielle, c'est de bien voir la structure de l'icosaèdre (gauche), mise en évidence sur le tracé de la page PU 119, la

⁵³(14 avril) Par contre, c'est peu pour mon ardeur de mathématicien, laquelle s'est à nouveau réveillée ces jours derniers - et voilà repartie ma réflexion sur l'icosaèdre, cet amour mathématique de mon âge mûr ! Je vais donc peut-être rajouter à ces notes (en appendice ?) quelques compléments sur la combinatoire de l'icosaèdre et sur la géométrie des ensembles à six éléments...

notion d'icosaèdre complémentaire (donnant lieu à la notion de biicosaèdre), et enfin la description de structures icosaédrales ou biicosaédrales sur S , en termes de l'ensemble P_f des six bijection d'une triangle préalablement donné f de S , avec son complémentaire f' . Enfin, du point de vue de l'intuition géométrique spatiale de la structure combinatoire, il est fort utile, pour s'y reconnaître, d'avoir chez soi un modèle en carton de l'icosaèdre régulier ordinaire⁵⁴, lequel a douze sommets, trente arêtes et vingt faces, et de "visualiser" un icosaèdre combinatoire gauche, comme décrit (de façon essentiellement canonique, en un sens qu'il serait facile à expliciter⁵⁵), en termes d'un icosaèdre "ordinaire" ou "pythagoricien" (vu comme un solide dans l'espace), en prenant comme sommets, arêtes et faces de l'icosaèdre gauche, les *paires* de sommets, arêtes ou faces diamétralement opposées du solide pythagoricien. C'est bien dans cet esprit qu'a été fait le tracé de la page PU 119, où les paires $\{a', a''\}$, $\{b', b''\}$ et $\{c', c''\}$ désignent justement des paires de sommets opposés de l'icosaèdre-solide, et de même pour les paires d'arêtes ($\{a', b''\}$, $\{a'', b'\}$) etc, qu'il nous avait fallu justement identifier à une seule arête.

⁵⁴J'en ai un chez moi, et de toute beauté, qui représente la "copie" d'un élément de première année de Fac, pour un examen de fin d'année d'un "cours d'option" (en collaboration avec Christine Voisin) sur l'icosaèdre (en 1976, je crois). Contrairement à mon cours de DEA l'année suivante sur le même thème, ce cours adressé à des étudiants frais émoulus du lycée avait rencontré une participation chaleureuse. Les résultats à l'examen étaient si brillants que mes collègues professeurs ont cru à un canular que j'aurais monté pour discréditer le fonction enseignante, et ils ont diminué d'office toutes les notes d'un tiers (les 18 sur 20 devenant 12 sur 20). C'est à cette occasion que j'ai appris avec stupéfaction que la plupart de mes collègues considéraient comme choquante l'idée qu'un étudiant puisse prendre du plaisir à étudier et à préparer un examen. Eux-mêmes s'étaient bien assez emmerdés pour faire les études et arriver à leur belle situation de prof. de Fac, il n'y avait vraiment aucune raison que les autres à présent ne s'emmerdent à leur tour...

⁵⁵Si on a deux telles "réalisations" par des icosaèdres-solides (ou "pythagoriciens"), alors il existe une *unique* similitude directe de l'un avec l'autre, compatible avec ces réalisations i.e. avec les "marquages" des paires de sommets opposés par les points de S . Si les deux icosaèdres ont même "taille" i.e. même longueurs d'arêtes, alors la similitude en question sera même un "déplacement".

VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES

I. Vers une géométrie des formes (topologiques)

[Apprendre] vers une construction recouvrante (sur l'action naturelles) d'une "géométrie des formes de dimension $\leq n$ ".

Une "forme de dim 0" soit pour définition $[]$ dont les éléments sont appelés les "lieux" de la forme.

Modèle de dimension 1. — Une tel modèle

$[]$

- 1) Deux ensembles de $[]$ L_α (ensemble des *lieux* de modèles) et S (ensemble des *segments* des modèle)
- 2) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}(L), I \longrightarrow \tilde{I}$ (lieux sur un segment) - i.e. une relation entre S et L .
- 3) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}_2(L) []$

N.B. J'ignore s'il faut supposer que I est connu, quand on connaît

Modèle d'une forme 1-dimensionnelle

L ensemble de "lieux"

S ensemble de "segments"

II. Réalisations topologiques des réseaux

1. — $[\]$ topologique

Soit X un espace topologique, $A \subset X$ partie fermée non vide de X . $X_{/A}$ l'espace déduit de X en $[\] A$ en un point, a le point déduit de A par $[\]$. Si X' est une partie de X contenant A , alors $X'_{/A} \hookrightarrow X_{/A}$ identifié $X'_{/A}$ à un sous-espace topologique de X .

Les fermées de $X'_{/A}$ s'identifient aux fermées de X' qui on bien contient A

III. Réseaux via découpages

Je voudrais définir une $[\]$ axiomatique a structure $[\]$ réseaux sur un $[\] L$ ($[\]$ de “lieux”).

$[\]$

Exemple 2 Soit L un ensemble ordonné, on suppose L filtrant croissante, filtrant décroissant, sans plus grand $[\]$ plus petit élément, localement filtrant croissante et filtrant décroissante divisible.

On appellera un tel ensemble une $[\]$ ordonnée.

IV. Analysis situs (première mouture)

V. Algèbre des figures

VI. Analysis situs (deuxième mouture)

Avant de décrire ce qu'est une $[\]$, je vais décrire ce qui sera $[\]$ avec notion de multistrates” - la famille des multistrates choisies jouant un peu le rôle des une famille d'ouverts $[\]$ donc une topologie, ou une famille génératrice d'éléments d'un topos. Je vais donc commencer pas

I. “Algèbre des figures” ou “Ateliers”.

1. — Une *algèbre des figures* implique avant tout trois types d'objets, les *lieux*, les *multistrates*, les *figures*, formant trois ensembles

$$(1.1) \quad L, M, F$$

liées entre eux par diverses applications, et $[]$ muni de diverses structures. Ainsi, on a des applications canoniques injectives

$$(1.2) \quad L \xhookrightarrow{b)} M \xhookrightarrow{a)} F$$

que nous utiliserons souvent pour identifier un lieu à une multistrate particulière, et une multistrate à une figure particulière ou L à une sous-ensemble de M , M à un sous-ensemble de F .

Il y a d'autre part deux entres paires d'applications, que voici :

$$(1.3) \quad []$$

où $\text{Fig}(M)$ désigne la partie de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ formée des figures ensemblistes dans M . On peut considérer que la première application correspond à une relation entre M et F , appelée relation d'incidence. Pour une figure F , \widehat{T} s'appelle l'ensemble des *multistrates incidentes*, ou le *déploiement* de la figure F . Si $X \in M$, $F \in \widetilde{F}$, on dit que la multistrate X est *incidente* à la figure F ou encore que c'est une *strate de la figure F* , si $X \in \widetilde{F}$. D'autre part, tout élément X de M (i.e. toute multistrate), $[]$ comme une figure par (1.2), admet un déploiement \widetilde{X} , et on pose

$$(1.4) \quad []$$

et il résultera des axiomes que c'est une figure ensembliste des M , $[]$ fidèlement par l'un \widetilde{F} des strates de F .

En fait, M sera muni d'une relation d'ordre \leq , $[]$ plus bas, et $\widetilde{F} \subset M$ sera une partie fermée de M , et pour tout $X \in \widetilde{F}$, on aura

$$(1.5) \quad \widetilde{X} = \{Y \in M \mid Y \leq X\}$$

À cause de cette interpolation, le passage de $\widetilde{F} \subset M$ à $\text{Fig}_M(F)$ est à tout $[]$, que cette figure ensembliste des M un semble revenant important - mais à voir...

VII. Analysis situs (troisième mouture)

VIII. Analysis situs (quatrième mouture)