C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 389-392 (1er février 1971). Série A

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — $\otimes$-*catégories et dualité de Tannaka.*

Note (*) de M. **Neantro Saavedra Rivano**, transmise par M. Henri Cartan.

Introduction. — Soit S un schéma. Dans une Note précédente (⁹) on a associé à un S-groupe affine et plat G une $\otimes$-catégorie ACU abélienne Rep(G) munie d'un foncteur fibre $\omega^G : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Q\,coh}(S)$, et on a remarqué que le couple $(\mathrm{Rep}(G), \omega^G)$ permet de reconstituer le S-groupe G; toutefois, Rep(G) ne détermine pas à elle seule G. Dans cette Note, on s'intéresse à classifier ces $\otimes$-catégories indépendamment d'un foncteur fibre choisi, et plus généralement à classifier les $\otimes$-catégories ACU abéliennes $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-linéaires qui possèdent un foncteur fibre « localement » pour la topologie fpqc. Des exemples de ces catégories apparaissent en Géométrie algébrique, notamment dans la théorie des motifs de Grothendieck (²).

Pour simplifier les énoncés, on supposera que S est affine, S = Spec(A).

1. Dualité de Tannaka.

1.1. Soit C une catégorie abélienne A-linéaire avec des limites inductives. Si E est un A-module, X un objet de C, on note $E \otimes X$ l'objet de C qui représente le foncteur $Y \to \mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}(X, Y))$. Si A′ est une A-algèbre (commutative, unifère), on note $C_{(A')}$ la catégorie des « A′-modules de C » : ses objets sont les objets X de C munis d'un homomorphisme de A-algèbres $A' \to \mathrm{End}(X)$, ses morphismes sont les morphismes de C qui commutent à l'action de A′. $C_{(A')}$ est une catégorie abélienne A′-linéaire avec des limites inductives, et on a un foncteur A-linéaire $i_{A'/A} : C \to C_{(A')}$ défini par $X \mapsto A' \otimes X$ qui commute avec les limites inductives. Celui-ci a la propriété universelle évidente pour les foncteurs A-linéaires commutant avec les limites inductives de C dans une catégorie A′-linéaire avec des limites inductives.

Si C possède une loi $\otimes$-ACU, $C_{(A')}$ est canoniquement une $\otimes$-catégorie ACU et $i_{A'/A}$ un $\otimes$-foncteur ACU. En tant que tel, il a encore une propriété universelle évidente.

Définition 1.2. — Une $\otimes$-catégorie ACU abélienne A-linéaire C est dite *ind-tannakienne* s'il existe une A-algèbre fidèlement plate A′ telle que

(*a*) Le fonteur $i_{A'/A}$ soit fidèle et exact;

(*b*) $C_{(A')}$ soit $\otimes$-équivalente à une $\otimes$-catégorie Rep(G′), où G′ est un A′-groupe affine et plat.

Les catégories ind-tannakiennes sur A constituent de façon naturelle une 2-catégorie.

73

1.3. Si C est une catégorie ind-tannakienne sur A, A′ une A-algèbre, on appelle *foncteur fibre* sur C à valeurs dans A′ un $\otimes$-foncteur ACU A′-linéaire $\omega : C_{(A')} \to \mathrm{Mod}(A')$ qui soit fidèle, exact et commute avec les limites inductives. En prenant comme morphismes les $\otimes$-morphismes unifères on obtient une catégorie $\mathrm{Fib}(C, A')$. La collection de ces catégories, pour A′ variable, définit de façon naturelle une catégorie fibrée sur la catégorie $\mathrm{Sch}_{/A}$ des A-schémas, qu'on notera $\mathrm{FIB}(C)$. On remarque alors que $\mathrm{FIB}(C)$ est une *gerbe* sur $\mathrm{Sch}_{/A}$ pour la topologie fpqc [(4), III, 2.1.1], et que cette gerbe est liée localement par un groupe affine et plat. Une gerbe vérifiant cette dernière condition sera appelée *tannakienne*.

Remarquons enfin que la formation de la gerbe tannakienne $\mathrm{FIB}(C)$ est 2-fonctorielle en C.

1.4. Soit $\mathcal{G}$ une gerbe tannakienne sur A, i. e. une gerbe sur $\mathrm{Sch}_{/A}$ pour la topologie fpqc, liée localement par un groupe affine et plat. On note $\mathrm{Rep}(\mathcal{G})$ la catégorie des foncteurs cartésiens $\mathcal{G} \to \mathrm{QCOH}(A)$, où $\mathrm{QCOH}(A)$ dénote le champ sur $\mathrm{Sch}_{/A}$ des $\mathcal{O}_{S'}$-modules quasi-cohérents, pour un A-schéma variable S′. La loi $\otimes$ de $\mathrm{QCOH}(A)$ définit sur $\mathrm{Rep}(\mathcal{G})$ une loi $\otimes$ ACU pour laquelle $\mathrm{Rep}(\mathcal{G})$ est une catégorie ind-tannakienne sur A. Par exemple, si G est un A-groupe affine et plat, et $\mathcal{G} = \mathrm{TORS}(G)$ est la gerbe tannakienne des torseurs à droite sous G, pour la topologie fpqc, on a une équivalence de catégories ind-tannakiennes $\mathrm{Rep}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Rep}(G)$.

1.5. Soient C une catégorie ind-tannakienne, $\mathcal{G}$ une gerbe tannakienne sur A. On laisse au lecteur le soin de définir des morphismes canoniques :

$$C \to \mathrm{Rep}(\mathrm{FIB}(C)), \ \mathcal{G} \to \mathrm{FIB}(\mathrm{Rep}(\mathcal{G})).$$

Théorème 1.6. — *Les morphismes précédents sont des équivalences; la correspondance $C \to \mathrm{FIB}(C)$ définit une 2-anti-équivalence de la 2-catégorie des catégories ind-tannakiennes sur* A *avec celle des gerbes tannakiennes sur* A, *ayant $\mathcal{G} \to \mathrm{Rep}(\mathcal{G})$ comme quasi-inverse.*

2. Le cas d'un corps de base.

2.1. Soit k un corps, C_0 une $\otimes$-catégorie ACU abélienne k-linéaire possédant des objets *Hom*. On dit que C_0 est une catégorie tannakienne sur k s'il existe une extension k'/k et un $\otimes$-foncteur ACU k-linéaire $C_0 \to \mathrm{Mod}(k')$ qui soit fidèle et exact et qui commute avec les *Hom*. Si C_0 est une catégorie tannakienne sur k, on définit comme dans [(9), 2.2] la catégorie fibrée $\mathrm{FIB}_0(C_0)$ des foncteurs fibre $C_0 \to \mathrm{Loclib}(T)$, où T est un k-schéma variable.

Proposition 2.2. — *Si C_0 est une catégorie tannakienne sur k, la $\otimes$-catégorie $C = \mathrm{Ind}(C_0)$ des ind-objets de C_0* [(5), A, 2] *est ind-tannakienne sur k; de plus, on a une équivalence de gerbes tannakiennes*

$$\mathrm{FIB}(C) \xrightarrow{\approx} \mathrm{FIB}_0(C_0). \qquad (2.2.1)$$

74

2.3. Un cas important est celui où la gerbe $\mathrm{FIB}_0(C_0)$ est *algébrique*, i. e. est liée localement par un groupe de type fini. On dit également que la catégorie tannakienne C_0 est *algébrique*. On peut voir que C_0 est algébrique si et seulement si elle possède un $\otimes$-générateur [([9]), 4]. Il en résulte que toute catégorie tannakienne est réunion de ses sous-catégories tannakiennes algébriques donc que sa gerbe est *pro-algébrique*, i. e. limite projective de gerbes tannakiennes algébriques. Réciproquement, si C est une catégorie ind-tannakienne sur k et si sa gerbe $\mathrm{FIB}(C)$ est pro-algébrique, C est équivalente à une catégorie ind-tannakienne $\mathrm{Ind}(C_0)$. J'ignore si cette condition est toujours satisfaite, elle l'est en tout cas si le lien de $\mathrm{FIB}(C)$ [*voir* ([4]), chap. III] est représentable par un groupe. Le résultat essentiel pour démontrer ce qui précède est le suivant :

Théorème 2.4. — *Si C est une catégorie ind-tannakienne sur k dont la gerbe* $\mathrm{FIB}(C)$ *est algébrique, C est une catégorie localement noethérienne* [([3]), II, 4], *et la sous-catégorie pleine de ses objets noethériens est tannakienne. De plus, C possède un foncteur fibre sur une extension* finie *de k.*

On se sert dans la preuve de ce théorème du résultat suivant d'Algèbre homologique non-abélienne.

Théorème 2.5. — *Pour une catégorie fibrée E sur $\mathrm{Sch}_{/k}$, il est équivalent d'être une gerbe tannakienne algébrique pour la topologie fpqc ou pour la topologie fppf.*

2. Exemples.

3.1. Soit k un corps, $\dot{M}_k$ la catégorie des motifs sur k ([2]); c'est une $\otimes$-catégorie ACU pseudo-abélienne $\mathbf{Q}$-linéaire, dont la loi $\otimes$ est déduite du produit direct des k-variétés lisses et projectives. Supposons la validité des conjectures standard [([7]), ([8])] pour une théorie de la cohomologie à valeurs dans un corps K de caractéristique o (par exemple, la cohomologie l-adique). Il en résulte en particulier que $\dot{M}_k$ est munie d'une $\otimes$-graduation de type $\mathbf{Z}$: chaque motif M se décompose de façon canonique en une somme finie

$$\mathrm{M} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{M}^n$$

et, de plus, on a un isomorphisme canonique $(\mathrm{M}\otimes\mathrm{N})^n \simeq \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{M}^p\otimes\mathrm{N}^q$. Modifions la contrainte de commutativité dans $\dot{M}_k$: si M, N sont des motifs, et l'isomorphisme de commutativité $\dot{\psi} : \mathrm{M}\otimes\mathrm{N} \xrightarrow{\sim} \mathrm{N}\otimes\mathrm{M}$ a des composantes $\dot{\psi}^{p,q} : \mathrm{M}^p\otimes\mathrm{N}^q \xrightarrow{\sim} \mathrm{N}^q\otimes\mathrm{M}^p$, le nouvel isomorphisme de commutativité ψ a des composantes $\psi^{p,q} = (-l)^{pq}\,\dot{\psi}^{p,q}$. On vérifie que la nouvelle $\otimes$-catégorie ACU obtenue, notée M_k, est une catégorie tannakienne sur $\mathbf{Q}$. Les foncteurs fibre sur M_k à valeurs dans des extensions K de $\mathbf{Q}$ sont les théories de la cohomologie à valeurs dans K; elles vérifient automatiquement les conjectures standard.

75

On déduit de 2.3 et 2.4 que si N est une sous-catégorie tannakienne de M_k possédant un $\otimes$-générateur, il existe des théories de la cohomologie définies sur N et à valeurs dans une extension *finie* de $\mathbf{Q}$.

3.2. Soit k un corps parfait de caractéristique $p \neq 0$, W l'anneau des vecteurs de Witt sur k, K son corps des fractions; l'automorphisme de Frobenius de k induit un automorphisme σ du corps K. On appelle F-*isocristal* sur k un espace vectoriel M de rang fini sur K, munie d'un automorphisme σ-linéaire $F_M : M \to M$, i. e., vérifiant $F_M(\lambda x) = \sigma(\lambda)\, F_M(x)$ si $\lambda \in K$, $x \in M$. On obtient ainsi une catégorie F Criso(k), qui est muni d'une loi $\otimes$ ACU évidente, et pour laquelle c'est une catégorie tannakienne sur le corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques.

La catégorie tannakienne F Criso(k) dépend fonctoriellement du corps parfait k. Si k est *algébriquement clos*, on prouve que la gerbe tannakienne sur $\mathbf{Q}_p$ qui la définit est liée par un $\mathbf{Q}_p$-groupe pro-diagonalisable, ayant $\mathbf{Q}$ comme groupe de caractères.

Les F-isocristaux apparaissent dans la théorie de Dieudonné-Grothendieck des groupes de Barsotti-Tate, et en cohomologie cristalline [(1), (5)]. On espère que la cohomologie cristalline des variétés lisses et projectives sur k définit un morphisme de catégories tannakiennes

$$M_k \to \mathrm{F\,Cris}\,(k).$$

(*) Séance du 25 janvier 1971.

(1) P. Berthelot, *Comptes rendus*, 269, série A, 1969, p. 297.

(2) M. Demazure, *Motifs des variétés algébriques*, Séminaire Bourbaki, 365 (novembre 1969).

(3) P. Gabriel, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 90, 1962, p. 323-448.

(4) J. Giraud, *Cohomologie non-abélienne*, Notes miméographiées, Columbia University.

(5) A. Grothendieck, TDTE III, *Séminaire Bourbaki*, 195 (février 1969).

(6) A. Grothendieck, Notes by J. Coates and O. Jussila : *Crystals and the De Rham cohomology of schemes*; dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, 1968.

(7) A. Grothendieck, *Standard Conjectures on Algebraic Cycles*; Proceedings of the Bombay Colloquium on Algebraic Geometry, 1968, p. 193-199.

(8) S. Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*; dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, 1968.

(9) N. Saavedra, *Comptes rendus*, 272, série A, 1971, p. 258.

(*Institut des Hautes Études scientifiques, 35, route de Chartres, 91-Bures-sur-Yvette, Essonne.*)

183281. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e). Imprimé en France.

76