Bruxelles 5, le 17 octobre 1966

Cher Grothendieck,

J'ai bien reçu ta lettre.

Je n'ai pas l'intention d'essayer de démontrer, cette année, le "théorème de Lefschetz vache". J'espère donc que tu trouves quelqu'un qui le fasse.

J'ai été malade au début du mois et, comme lecture de convalescence, je lis EGA IV. Je ne sais pas si tu collectionnes déjà les erratas et compléments pour EGA 0_{IV} ; je t'envoie toujours ceux qui suivent.

0_{IV} 19.3.12 est canulé : il faut prendre pour W_s l'ensemble des homomorphismes d'algèbre $B \to C_s$ qui relèvent $B \to C_s/J_s$, et ce n'est pas une variété linéaire [on n'a pas $J_s^2 = 0$] – Pour faire marcher l'argument, il faudrait savoir que pour A artinien, l'ensemble des parties de A^I définie par ~~un ens~~ des équations $P(x_i) \in b$ (b idéal) jouit d'une propriété de compacité. C'est faux pour I infini, déjà pour A un corps infini [$I = k \cup \{\infty\}$, parties $(x_\infty - u)y_u = 1$, les $\cap$ finies sont non vides, l'$\cap$ est vide] – Je crois qu'il n'y a pas d'espoir.

oui

0_{IV} 17.3.4 Je te signale une jolie démonstration cohomologique de ce résultat, qui fournit un résultat plus complet (lequel se trouve dans Northcott)

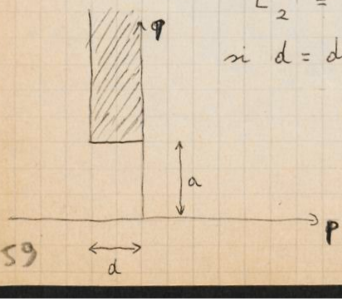
(th. de Auslander) prop : A local noethérien, M de type fini sur A, non nul, et de dimension projective finie. Alors $\dim \operatorname{proj}(M) = \operatorname{prof} A - \operatorname{prof} M$.

on utilise la formule suivante, valable pour un complexe parfait L

$$R\mathrm{Hom}(K, L) = R\mathrm{Hom}(K, A) \overset{L}{\otimes} L$$

avec $K = k$, $L = M$. On trouve une suite spectrale

$$E_2^{pq} = \mathrm{Tor}_{-p}(\mathrm{Ext}^q(k, A), M) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(k, M).$$ (dessin ci contre)



si $d = \dim \operatorname{proj} M$, $a = \operatorname{prof} A$, on trouve

$$\mathrm{Ext}^n(k, M) = 0 \text{ si } n < a - d \text{ et}$$

$$\mathrm{Ext}^{a-d}(k, M) = \mathrm{Tor}_d(\mathrm{Ext}^a(k, A), M)$$, non nul par hypothèse (car $\mathrm{Ext}^a(k, A)$ est somme de copies de k)

D'où la profondeur de M ...

59

2

en remplaçant dim proj par Tor dim

Le même résultat, est encore valable pour M de type fini sur un anneau ~~local A~~ noethérien B, qui soit une A-algèbre telle que $\mathfrak{m}B \subset \mathrm{radical}(B)$

Il faut savoir (I) qu'on peut encore définir la profondeur de M sur A dans ce cas

(II) que la Tor dimension de M est le plus grand entier d tel que $\mathrm{Tor}^d(k, M) \neq 0$, où k est le corps résiduel de A.

C'est là une conséquence facile du résultat suivant, pour lequel je ne connais pas de référence :

<u>prop</u> : Soit A un anneau <u>local noethérien</u>, B une A-algèbre locale noethérienne ($A \to B$ étant local), <u>$\mathfrak{m}$ un idéal de A</u>, <u>N un A-module de type fini</u>, <u>M un B-module de type fini</u>. On a

$$\underleftarrow{\lim}\ \mathrm{Tor}^p_A(N/\mathfrak{m}^k N, M) = \mathrm{Tor}^p_A(N, M)^\wedge$$

et plus précisément une égalité de proobjets

$$``\underleftarrow{\lim}"\ \mathrm{Tor}^p_A(N, M)/\mathfrak{m}^k \mathrm{Tor}^p(N, M) \xrightarrow{\sim} ``\underleftarrow{\lim}"\ \mathrm{Tor}^p_A(N/\mathfrak{m}^k N, M)$$

Si B était plat sur A, on prendrait une résolution de M sur B, et il suffirait d'appliquer Artin-Rees, qui exprime que "le pro-objet complétion" est foncteur exact. On peut par ailleurs remplacer B par une algèbre dont il soit quotient. On peut aussi compléter B. L'assertion résulte alors du lemme suivant, qui coiffe

O_{IV} 19.7.1.3 et O_{III} 10.3.1

dans réédition du chap I ?

<u>prop</u> : Soit $A \longrightarrow B$ un homomorphisme local d'<u>anneaux locaux noethériens</u>, avec <u>B complet</u>. B est quotient d'un Aanneau C, tel que

(I) C est local, $A \to C$ et et $C \to B$ sont locaux

(II) <u>C est plat sur A</u>

(III) Si k est le corps résiduel de A, $C_0 = C \otimes_A k$, $B_0 = B \otimes_A k$, <u>C_0 est un anneau</u> régulier ~~de séries formelles sur une extension K de k~~, et l'application graduée associée à $C_0 \to B_0$: $\mathrm{gr}\, C_0 \to \mathrm{gr}\, B_0$ est bijective en degré 0 et 1

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{n}$) l'idéal maximal de A (B), K le corps résiduel de B. Soit t_i une base d'un supplémentaire de l'image de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \otimes_k K \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$. Si on relève les t_i dans B, on définit une flèche $A[[T_i]] \longrightarrow B$. Soit $A' = A[[T_i]]$, $\mathfrak{m}'$ son idéal maximal. A' est plat sur A, et on a ~~[illegible]~~

$$\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2 + \mathfrak{m}A' \xrightarrow{\sim} \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B .$$

60

3

Remplacant A par A', il reste à prouver que si $m/m^2 \otimes K \to n/n^2$ est surjectif (i.e. $K = B \otimes k$) on peut trouver C tel que $K = C \otimes k$ (d'où $\mathrm{gr}\, C = K \otimes_k \mathrm{gr}\, A$). On va manger K par étapes

a) soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de transcendance de K sur k ; ~~et~~ on relève les x_i en des éléments de B, définissant ainsi $A(x_i) \to B$. $A(x_i)$ est la limite inductive des localisées, au point générique de la fibre spéciale, des $A[X_i]_{i \in J}$, J fini ds I. (cf Nagata, Local rings pg 17 et 18). On peut soit utiliser 0_{III} 10.3.1.3 pour vérifier que cet anneau est noethérien, soit le compléter et utiliser le critère de platitude pour vérifier que son complété est plat sur A

b) on s'est ainsi réduit à supposer K algébrique sur k et, si on y tient, à supposer A complet. On trouve sans histoire A' plat sur A, non ramifié, de corps résiduel la clôture séparable de k dans K, et $A' \to B$.
Reste à traiter le cas où K/k est purement inséparable, et on va utiliser une propriété "d'intersection complète" des corps, que je n'ai pas su bien dégager

c) on suppose : K/k purement inséparable, A et B complets, $K = B \otimes k$.
soit K_n le sous corps de K formé des x tels que $x^{p^n} \in k$ ($K_n = K \cap k^{p^{-n}}$), et soit x_n^α une p-base de K_n sur K_{n-1} $(n \geq 1)$. K est l'anneau engendré par des éléments x_n^α soumis à des relations $(x_n^\alpha)^p = P_n^\alpha(x_m^\beta, m<n)$.
(P à coefficients dans k)
Relevons les x_n^α dans B. On aura des relations

$$(x_n^\alpha)^p = P_n^\alpha(x_m^\beta, m<n) + q_n^\alpha \quad \text{avec } q_n^\alpha \text{ dans l'idéal maximal } (P \text{ à coeff ds } A)$$

par hypothèse, $m/m^2 \otimes_k K \to n/n^2$ est surjectif. D'où

$$(x_n^\alpha)^p = P_n^\alpha(x_m^\beta, m<n) + Q_{n1}^\alpha(x_m^\beta) + r_n^\alpha \quad \text{avec } P \text{ (resp } Q) \text{ à coefficients dans}$$

$Q^\alpha_{n,i}$ linéaires en les x_m^β ... ( ) i ?

A (resp m) et par récurrence et passage à la limite

$$\boxed{(x_n^\alpha)^p = P_n^\alpha(x_m^\beta, m<n) + \sum_1^\infty Q_{n\,i}^\alpha(x_m^\beta)}$$

où P_n^α (resp $Q_{n\,i}^\alpha$) est un polynome en les x_m^β à coefficients dans A (resp dans $m^{(n)}$)
Pour C, il suffira maintenant de prendre l'anneau complet engendré par des générateurs x_n^α soumis aux relations précédentes. Pour une définition rigoureuse, disons qu'on prend la limite projective des A/m^k-algèbres engendrées par des générateurs x_n^α soumis aux relations

$$(x_n^\alpha)^p = P_n^\alpha(x_m^\beta, m<n) + \sum_1^{k-1} Q_{n\,i}^\alpha(x_m^\beta) \qquad (1)$$

Il reste à voir qu'on obtient ainsi une A/m^k-algèbre plate.
Pour cela, il suffit vérifier que le quotient de $A[X_n^\alpha]$ par un nombre fini de

61

4

relations (1) est plat, seules un nombre fini d'indéterminées jouant alors un rôle, et on va appliquer 0_{IV} 15.1.16 c) ⇒ b) : il faut vérifier que dans $k[X_n^\alpha]$, les $(X_n^\alpha)^p - P_n^\alpha(X_m^\beta, m<n)$ forment une suite régulière, et cela résulte d'un calcul de dimension trivial –

CQFD

La propriété que je n'ai pas su bien dégager est que toute extension algébrique K/k est du type $K = k[T_\alpha]/(P_i)$, de sorte que si on relève les P_i à un anneau artinien de corps résiduel k, soit A, $A[T_\alpha]/(\tilde{P}_i)$ **soit** plat sur A.

0_{IV} ~~16.4~~ 15

Il manque des résultats sur les suites régulières, notamment le suivant auquel Quillen faisait une référence fantôme dans sa lettre sur $\Omega_{B/A}$.

regarder EGA IV 19, – à simplifier éventuellement –

<u>prop</u> : <u>Soit A noethérien, I un idéal</u> <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>.

(i) $\mathrm{Sym}_{A/I}(I/I^2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_I(A)$ et I/I^2 <u>projectif sur</u> A/I

(ii) $\Lambda I/I^2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}(A/I, A/I)$ et " " " "

<u>Si de plus A est local</u>, et si $f_1 \ldots f_n$ est un <u>système minimal de générateurs de I</u> (i.e. $n = \dim_k I \otimes k$), <u>cela équivaut</u> encore à

(iii) $f_1 \ldots f_n$ est <u>une suite régulière</u> ~~xxxxxxxx~~ (?)

(iv) le <u>complexe de l'algèbre extérieure</u> $K(f, A)$ est <u>une résolution</u> de A/I

(v) $\mathrm{Ext}^i(A/I, A) = 0$ si $i < n$

<u>Démonstration</u> : (i) et (ii) étant de nature locale, on peut supposer A local ; on peut aussi supposer $I \neq A$.

Il est clair que (i) ⇔ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (ii), (iv) ⇒ (v) (car IV ⇒ que $\mathrm{Tor}^1(A/I, A/I) = I/I^2$ est A/I-libre)

– l'implication <u>(ii) ⇒ (iv)</u> : Soit P_* une résolution projective de A/I ; il existe une seule classe d'homotopie d'applications $K(f, A) \longrightarrow P_*$ (2) induisant l'identité sur A/I, et l'application $\Lambda I/I^2 = H_*(K(f,A) \otimes A/I) \to \mathrm{Tor}(A/I, A/I) = H_*(P_* \otimes A/I)$ déduite coïncide avec celle considérée en (ii), qui provient de la structure multiplicative de Tor( ). [facile] – Soit E le mapping cylinder de (2). (ii) signifie que $E \otimes A/I$ est acyclique, ce qui implique par Nakayama que E l'est, donc que (iv) est vrai.

– l'implication <u>(v) ⇒ (iii)</u> va être modulée.

<u>prop</u> : <u>Si</u> I est un idéal de l'<u>anneau local</u> A, $f_1 \ldots f_n$ un système minimal de générateurs de I, M un A-module de type fini et si <u>$\mathrm{Ext}^i(A/I, M) = 0$ pour $i < n$</u> <u>alors</u> <u>$f_1 \ldots f_n$ est une suite M-régulière</u>

62

5

démonstration : 1) on remarque d'abord que la conclusion ne dépend qu'apparemment du système de générateurs choisis :

$f_1 \dots f_n$ régulière $\Leftrightarrow$ $f_1 \dots f_n$ quasi-régulière $\Leftrightarrow$

$$A/I\,[T_1 \dots T_n] \otimes_{A/I} M/I \longrightarrow \mathrm{gr}_I(A) \otimes_{\mathrm{gr}^0_I(A)} \mathrm{gr}^0_I(M) \longrightarrow \mathrm{gr}_I(M) \quad \text{bijectif}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{gr}_I(A) \otimes_{A/I} M/I \longrightarrow \mathrm{gr}_I(M) \quad \text{bijectif} \qquad \text{et}$$

$$A/I\,[T_1 \dots T_n] \otimes A/\mathrm{Ann}(M/I) \longrightarrow \mathrm{gr}_I(A) \otimes A/\mathrm{Ann}(M/I) \quad \text{bijectif.}$$

$\Leftrightarrow \mathrm{gr}_I(A) \otimes M/I \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_I(M)$, et modulo $\mathrm{Ann}(M/I)$, I/I^2 libre de rg n et $\mathrm{Sym}_{A/I}(I/I^2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_I(A)$.

2) supposons qu'il existe f dans $I \setminus mI$ qui soit M-régulier.
on sait que $\mathrm{Ext}^i_A(A/I, M)$ ~~signifie~~ $=0$ pour $i < n$ signifie qu'il existe une n-suite M-régulière contenue dans I. On aura donc $\mathrm{Ext}^i_{A/f}(A/I, M/fM) = 0$ pour $i \leq n-1$ et I/f est engendré par $n-1$ générateurs. On conclut par récurrence sur n

3) supposons enfin qu'aucun élément de $I \setminus mI$ ne soit M-régulier.
On a $I \subset mI \cup \bigcup_{p \in \mathrm{Ass}(M)} p$, donc (lemme plus bas) $\exists p \in \mathrm{Ass}\,M : I \subset p$.

et $\mathrm{Hom}(A/I, M) \neq 0$ donc $n = 0$, $I = 0$ et l'assertion est vraie

On a utilisé le

lemme (Nagata !) : Soit a un idéal d'un anneau A, $(b_i)_{0<i\leq n}$ des idéaux, $(p_i)_{0<i\leq m}$ des idéaux premiers. Si $a \subset \bigcup_i b_i \cup \bigcup_i p_i$, soit $a \subset \bigcup b_i$, soit $\exists i : a \subset p_i$.

démonstration : α) reduction à $m=1$ [regarder les p comme b, sauf 1 et récurrence] et à ce que $p \not\supset b_i$. β) Si $a \not\subset \bigcup b_i$, soit $x \in a \setminus \bigcup b_i$ donc $x \in p$. Si $y \in a \cap \bigcap b_i$, $x + y \in a \setminus \bigcup b_i$ donc $x+y \in p$ et $y \in p$: $a \cap \bigcap b_i \subset p$ et comme $b_i \not\subset p$, $a \subset p$.

~~[NB : un bricolage analogue permet je crois de montrer (iv) ⇒ (iii) sans utiliser l'hypothèse supplémentaire (iv)]~~

0_{IV} 16.1.9. On peut y supprimer l'hypothèse noethérienne, en référant à Bourb. Alg Comm ch V § 1 n° 1 Th 1 (E_{III})

0_{IV} 19.2 Il manque la proposition suivante, dont tu démontres un cas particulier en 19.7.1.1 (et un peu plus, car tu prouves là B strictement formellement projectif)

prop : Soit $A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, M un B-module de type fini ; on munit A et M des topologies m et n-adiques ($m = R(A)$, $n = R(B)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

63

6

(I) M est plat sur A

(II) M est formellement projectif sur A

démonstration : a) réduction à A artinien local

b) (II) $\Leftrightarrow$ $\forall N$ sur A, $\varinjlim \mathrm{Ext}^1_A(M/m^k M, N) = 0$ $\Leftrightarrow$ itou pour N un k-vectoriel (dévissage) $\Leftrightarrow$ $\varinjlim (\mathrm{Ext}^1_A(M/m^k M, k))^I = 0$ $\forall I$

$\Leftrightarrow$ "$\varinjlim$" $\mathrm{Ext}^1_A(M/m^k M, k) = 0$ comme ind-objet $\Leftrightarrow$ "$\varprojlim$" $\mathrm{Tor}^1_A(M/m^k M, k) = 0$ comme pro-objet, le précédent étant dual de celui-ci. On calcule ce Tor par une résolution plate de k, et par Artin-Rees, le pro-objet précédent n'est autre que

"$\varprojlim$" $\mathrm{Tor}^1_A(M, k)/m^k \mathrm{Tor}^1_A(\dots)$ dont la nullité signifie $\mathrm{Tor}^1(M, k) = 0$.

i.e. que M est plat sur A.

0_{IV} 19.4.6 (changement de base et limite formelle) _ Il n'est pas nécessaire de supposer B formellement projectif dans l'hypothèse 2°, en faisant sur la classe de l'extension le jeu fait ici sur le cocycle de Hochschild _ De même, dans 1°, l'hypothèse de "formellement projectif" peut se remplacer par une hypothèse de finitude (B/J_B fini sur A/J_B qui est noethérien p.e.)

2 0_{IV} 19.4.7. La démonstration se simplifierait si tu avais fait remarquer auparavant que $\mathrm{Exalcotop}_A(B, L)$ est foncteur semi-exact en L.

0_{IV} 19.8.3 { pg 110 ligne -8, -6 / pg 111 ligne 7 } : lire homomorphisme local et non homomorphisme

0_{IV} 20.4.6 Le signe choisi pour dx est l'opposé du signe universellement choisi en analyse (où $\Delta f(x; x') = f(x') - f(x)$, $g.\Delta f(x; x') = g(x)\,\Delta f(x; x')$), compte tenu de ce que $B \otimes B$ et $P^1_{B/A}$ sont des B-~~modules~~ algèbres par $b \to b \otimes 1$.

faire errata ; remplacer $p_1 - p_2$ par $p_2 - p_1$! attention aux signes pas intrinsèquement

0_{IV} 20.4.13 (IV) l'hypothèse "A intégralement clos" n'a rien à faire ici [cf 20.5.9 par ex.]

!

enfin

III 4.3.6 pg 133 ligne 7 la formule $K' = K \otimes_A \hat{A}$ est fausse en général !

!!!

En relisant cette lettre, je suis honteux de la démonstration tordue donnée pg 2 de ce que Tor et "pro-objet complétion" commutent. Il suffisait, par dévissage, de traiter directement le cas $N = A$ (et $M = B$), i.e. "$\varprojlim$" $\mathrm{Tor}^p_A(A/m^k, M) = 0$ si $p > 0$, mais j'en suis incapable. Tu trouveras ci-joint une lettre de Serre que je te renvoie

Bien à toi

P. Deligne

64