LA LONGUE MARCHE À TRAVERS LA THÉORIE DE GALOIS

Première Partie

1981

par

Alexandre GROTHENDIECK

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

https://agrothendieck.github.io/

SOMMAIRE

§ 1. — TOPOS MULTIGALOISIENS

Proposition (**1.1**). — *Soit E une catégorie. Conditions équivalentes :*

a) E est un topos, et tout objet de E est localement constant.

b) E est équivalent à une catégorie $\widehat{C}$, où C est un groupoïde[1].

b') Il existe une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes et une équivalence de catégories

$$E \approx \prod_{i \in I} \mathrm{Ens}(G_i)$$

c) Conditions d'exactitudes ad-hoc, du type de celles données dans SGA 1…

Démonstration : b) ⇒ b') ⇒ a) immédiat. Pour a) ⇒ b) je suis moins sûr, peut être faut-il supposer que E est localement connexe, et qu'il a suffisamment de foncteurs fibres i.e. suffisamment de points.

Définition (**1.2**). — *Si les conditions équivalentes b), b') ci-dessus sont satisfaites, on dit que C est un* topos multigaloisien *(ou une* catégorie multigaloisienne*).*

Proposition (**1.3**). —

a) Si E est multigaloisien, tout topos induit C/S aussi.

[1] N.B. On verra plus bas qu'on peut choisir C *canoniquement*

b) Toute somme de topos multigaloisiens (i.e. tout produit de catégories multigaloisiennes) l'est itou.

Proposition (**1.4**). — *Soient E un topos, C la catégorie des points de E, (opposée à la catégorie des foncteurs fibres sur E). Le foncteur canonique $E \times C^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ induit un foncteur canonique*

$$E \longrightarrow \mathrm{Hom}(C^\circ, \mathrm{Ens}) \overset{def}{=} \widehat{C}$$

Ceci posé : (E étant multigaloisien)

a) C est un groupoïde (appelé "groupoïde fondamental" du topos multigaloisien E et souvent noté $\Pi_1(E)$).

b) $E \longrightarrow \widehat{C}$ est une équivalence de catégories.

Un objet S d'un topos E est dit 0-connexe s'il est $\neq \varnothing_E$ (i.e. n'est pas objet initial) et s'il est connexe (i.e. $S \simeq S' \amalg S''$ implique S' ou $S'' \simeq \varnothing_E$) — cela signifie aussi que le topos induit $E_{/S}$ est 0-connexe i.e. n'est pas le topos initial ("topos vide", équivalent à la catégorie finale) et qu'il est connexe, i.e…On dit que S est 1-connexe (ou "simplement connexe") s'il est 0-connexe, et si tout objet S' de $E_{/S}$ localement constant est constant — ce qui ne dépend encore que du topos induit $E_{/S}$, qui sera dit alors 1-connexe.

Proposition (**1.5**). — *Soit E un topos multigaloisien, et soit S un objet de E. Conditions équivalentes*

a) S est 1-connexe

b) S est 0-connexe et projectif

c) Le foncteur covariant représenté par S

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_E(S, T)$$

est un foncteur fibre, ou encore (comme il est déjà exact à gauche) il commute aux $\varinjlim$ inductives quelconques (N.B. il suffit qu'il commute aux sommes et aux passages aux quotients…)

d) $E_{/S}$ *est équivalent au topos ponctuel*

e) (Si $E = \widehat{C}$, C *un groupoïde) le foncteur* S *sur* C *est représentable.*

Définition (**1.6**). — *On dit alors, parfois, que* S *(ou mieux, le topos* $E_{/S}$*) est un* revêtement universel *du topos multigaloisien* E.

Proposition (**1.7**). — *Soit* $E_\circ$ *la sous-catégorie pleine de* E *formée des objets* 1*-connexes (de la catégorie multigaloisienne* E*), et* $\Pi_1(E)$ *le groupoïde fondamental de* E. *On a par* **1.5** *un foncteur canonique*

$$E_\circ \longrightarrow \Pi_1(C)$$

(associant à tout $S \in Ob(E_\circ)$ *le foncteur fibre qu'il représente, ou plutôt le "point" correspondant de* C*), qui est (non seulement pleinement fidèle, mais même) une équivalence de catégorie : tout foncteur fibre sur* E *est représentable (par un objet (*1*-connexe) essentiellement unique comme de juste...)*

Corollaire (**1.8**). — *Soit* P *un "point" de* E *(associé à un foncteur fibre* F_P*). Il existe un objet* 1*-connexe* S *de* E *et un relèvement*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\xrightarrow{\sim}"] & & E_{/S} \arrow[dl, dashed] \\ & E & \end{tikzcd}$$

(i.e. $\alpha \in F(S)$*) et cela détermine* (S, α) *à isomorphisme près.*

En fait, S *est l'unique objet de* E *qui représente* F_P...

Définition (**1.9**). — *On dit que* S *(ou* $E_{/S}$*) est le* revêtement universel ponctué au dessus de P *déterminé par le point* P.

Scholie (**1.10**). — *Se donner un "point" du topos multigaloisien* E, *ou se donner un revêtement universel, revient essentiellement au même : chacun détermine l'autre...*

Proposition (**1.11**). — *Soient* E, E' *deux topos multigaloisiens,* $\Pi_1(E)$, $\Pi_1(E')$

leur groupoïdes fondamentaux. Le foncteur évident

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{top}(E,E') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underbrace{\Pi_1(E)}_{C},\underbrace{\Pi_1(E')}_{C'})$$

est une équivalence de catégories, on trouve une équivalence quasi-inverse en composant

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\mathrm{Hom}}(C,C') & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{top}(\widehat{C},\widehat{C'}) & \xrightarrow{\approx} & \underline{\mathrm{Hom}}_{top}(E,E') \\ & & \cap & & \\ & & \underline{\mathrm{Hom}}(\widehat{C'},\widehat{C}) & & \end{array}$$

(ou $\widehat{C} \approx E$, $\widehat{C'} \approx E'$)

(**1.12**). Explicitation du cas où E, E' sont 0-connexes et ponctués, donc donnés comme $E \approx \mathrm{Ens}(G)$, $E' \approx \mathrm{Ens}(G')$…

§ 2. — APPLICATIONS AUX REVÊTEMENTS DES TOPOS

Théorème (**2.1**). — *Soit E un topos localement connexe (i.e. dont tout objet est somme d'objets connexes) et localement simplement connexe (i.e. admettant un système de générateurs qui sont* 1*-connexes)*[2]*. Alors la catégorie E_{lc} des objets localement constants de E est un topos multigaloisien, et l'inclusion*

$$E_{lc} \hookrightarrow E \tag{2.1.1.}$$

commute aux $\varprojlim$ finies (NB en fait, sans hypothèses sur le topos E, E_{lc} est stable par $\varinjlim$ finies) et *aux $\varprojlim$ quelconques.*

Définition (**2.2**). — *On dénote ce topos par $E_{[1]}$, on l'appelle l'enveloppe multigaloisienne de E, et le morphisme de topos transposé de l'inclusion (2.1.1.) :*

$$E \longrightarrow E_{[1]}$$

prend le nom de morphisme canonique.

N.B C'est l'équivalent en théorie des topos de l'opération de "tuage des π_i pour $i \geq 2$".

On peut définir aussi un $E_{[0]}$ et une suite

$$E \longrightarrow E_{[1]} \longrightarrow E_{[0]}$$

[2]N.B. peut-être faut-il supposé que E ait "assez de points" i.e. assez de foncteurs libres…

[$E_{[0]}$ est le topos *discret* défini par $\pi_0(E)$, qui a un sens satisfaisant dès que E localement connexe …]. Moyennant des hypothèses convenables sur E (du type "locale contractibilité"), on doit pouvoir définir les $E_{[i]}$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, et des morphismes canoniques

$$E \longrightarrow \dots E_{[i]} \longrightarrow E_{[i-1]} \longrightarrow \dots E_{[1]} \longrightarrow E_{[0]}.$$

2.3. Le *groupoïde fondamental* de E se définit comme ayant pour objets les points de E (qui induisent des points de $E_{[1]}$ grâce à $E_{[1]} \longrightarrow E$), et comme morphismes les morphismes *de points de* $E_{[1]}$. On a donc des foncteurs canoniques

$$\underline{\mathrm{Pt}}(E) \xrightarrow{\alpha} \Pi_1(E) \xrightarrow[\approx]{\beta} \underline{\mathrm{Pt}}(E_{[1]}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Pi_1(E_{[1]})$$

où β est une équivalence (mais pas surjectif sur les objets), et où bien sûr α n'est pas nécessairement une équivalence ni même pleinement fidèle, ou seulement fidèle. Par exemple si E est 1-connexe i.e. $\Pi_1(E)$ équivalent à la catégorie ponctuelle, il ne s'ensuit pas nécessairement que les Hom dans $\mathrm{Pt}(E)$ soient tous de cardinal ≤ 1 !

Comme un point P de E définit un point (noté encore P par abus) de $E_{[1]}$, on peut donc définir le *revêtement universel de* E basé en ce point, comme un objet S 1-connexe de $E_{[1]}$ — il est caractérisé dans E par le fait d'être localement constant, 1-connexe, et muni d'un relèvement

$$P \longrightarrow E_{/S}.$$

Mais comme α n'est pas une équivalence de catégories (bien qu'il soit essentiellement surjectif si on suppose que E a suffisamment de points…) on ne peut *pas* dire que tout revêtement universel de E soit défini par un point de E, défini à isomorphisme unique près…

§ 3. — VARIANTES “PRO-MULTIGALOISIENNES”

Respectivement profinies (en se bornant, pour simplifier, au cas des topos localement connexes…)

§ 4. — COMPLÉMENT-REMORD SUR LES CATÉGORIES MULTIGALOISIENNES,

Qui précise l'intention que pour un topos E, la donnée d'un objet $S \in E$ définit un topos induit $E_{/S} \longrightarrow E$, et que S se reconstitue à isomorphisme près par la connaissance du topos induit en tant que topos *au dessus de E*.

Ici, E étant multigaloisien, $E_{/S}$ aussi — et il se pose la question quand un morphisme de topos multigaloisien $E' \longrightarrow E$ peut être considéré comme un morphisme d'induction. Si $C = \Pi_1(E)$, $C' = \Pi_1(E')$, la donnée de $E' \longrightarrow E$ équivaut à la donnée d'un foncteur $C' \longrightarrow C$.

On trouve que $E' \longrightarrow E$ est un morphisme d'induction si et seulement si $C' \longrightarrow C$ est *fidèle*. Ainsi, on trouve une équivalence entre la catégorie E (des objets S de la catégorie multigaloisienne $E \approxeq \widehat{C}$, où C est un groupoïde, *quelconque si on y tient*[3]) et la catégorie dont les objets sont les "groupoïdes C' au dessus de C", avec un foncteur structural $C' \longrightarrow C$ *fidèle*, les morphismes de C'_1 dans C'_2 étant les *classes d'isomorphie* d'une couple (f, α) d'un foncteur $f : C'_1 \longrightarrow C'_2$ et d'un isomorphisme de foncteurs $\alpha : p_1 \xrightarrow{\sim} p_2 \circ f$[4]

$$\begin{tikzcd} C'_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow[\sim]{\alpha}"] & C'_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

[3]un peu vif !

[4]Préciser les isomorphismes entre couples (f, α) et (g, β) …

Dans le cas où par exemple C est la catégorie réduite à un seul objet, avec groupe d'automorphisme G, cette description de la catégorie $E = \mathrm{Ens}(G)$ est évidemment un peu lourde, mais elle s'insère bien dans certains contextes plus bas.

Ainsi, si k est un corps de base, la catégorie E des schémas étales sur k est décrit, en termes d'une clôture séparable k_s de k et du groupe profini $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$, comme les groupoïdes profinis au dessus du groupoïde profini (pt, Γ)... Nous voulons insérer cette description dans une "description" "galoisienne" de [certains] schémas [lisses quasi-projectifs de dimension ≤ 1] sur k, du moins si k corps de type fini sur $\mathbf{Q}$.

§ 5. — INTRODUCTION DU CONTEXTE ARITHMÉTIQUE; "CONJECTURE ANABÉLIENNE" FONDAMENTALE

Soit K une extension de type fini de $\mathbf{Q}$, et choisissons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. On pose $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

5.1. Nous considérons des couples (X, S), où :

a) X est un schéma projectif et lisse sur K, de dimension ≤ 1 ;

b) S est sous-schéma fini réduit de X (donc fini étale sur K) contenu dans la réunion des composantes irréductibles de dimension 1 de X.

Les morphismes $(X', S') \longrightarrow (X, S)$ seront par définition les morphismes de schémas

$$f : X' \longrightarrow X$$

tels que

$$S' = f^{-1}(S)_{\mathrm{red}}$$

i.e. tels que $\mathrm{supp} S' = f^{-1}(\mathrm{supp} S)$.

Nous cherchons une "description galoisienne" de cette catégorie, ou tout au moins d'une sous-catégorie pleine V_K que nous allons définir maintenant.

Lemme **(5.2)**. — *Soit Ω un corps algébriquement clos, X une courbe projective lisse connexe sur Ω, S une partie finie de $X(\Omega)$, $U = X \backslash S$, g le genre de X et $n = \mathrm{card}\, S$. Conditions équivalentes :*

a) $\pi_1(U)$ *non abélien,*

b) $\mathrm{Aut}(U)$ *fini,*

c) pour tout schéma connexe réduit X *de type fini sur* Ω*, l'ensemble des morphismes* non constants *de* X *dans* U *est fini,*

d) on est dans l'un des trois cas suivant : 1°) $g \geq 2$ 2°) $g = 1$, $n \geq 1$ 3°) $g = 0$, $n \geq 3$

e) (si $\Omega \subset \mathbf{C}$*) le revêtement universel de* $X(\mathbf{C})\backslash S(\mathbf{C})$ *est isomorphe au demi plan de Poincaré,*

f) (??) (si $\Omega = \overline{\mathbf{Q}}$, $S \neq \varnothing$*) Le revêtement universel de* $X\backslash S = U$ *est isomorphe à celui de* $\mathbb{P}^1_\Omega\backslash\{0, 1, \infty\}$.

Définition **(5.3)**. — *On dit alors que* (X, S) *est anabélien.*

Comme cette condition est (par d) par exemple) invariante par extension du corps de base algébriquement clos, on étend cette définition au cas d'un couple (X, S), avec (X, S) comme dans (**5.1**) (**NB** On regarde séparément les composantes connexes de $X_{\overline{K}}\ldots$). Dorénavant, dans (5.1) nous allons nous borner au cas de couples (X, S) anabéliens.

(5.4). À un couple (X, S) (pas nécessairement anabélien) — plus généralement à tout schéma X localement de type fini sur S, on associe un objet "de nature galoisienne" [à] savoir le groupoïde fondamental (profini) $\Pi(X)$ de X (formé si on veut des revêtements universel de X), *muni* d'un foncteur canonique

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X) & \longrightarrow & \Pi_1(K) \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle\approx} \\ & & [\mathrm{Tors}(\Gamma)] \end{array}$$

Un morphisme de K-schémas

$$X' \xrightarrow{f} X$$

définit un foncteur

$$\Pi_1(X') \xrightarrow{\Pi_1(f)} \Pi_1(X)$$

et un isomorphisme α de commutation

$$\begin{tikzcd} \Pi_1(X') \arrow[rr, "\Pi_1(f)"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\xrightarrow[\sim]{\alpha}"] & & \Pi_1(X) \arrow[dl] \\ & \Pi_1(K) & \end{tikzcd}$$

On trouve ainsi un foncteur, de la catégorie des schémas localement de type fini X sur K, dans la "catégorie des groupoïdes profinis sur $\Pi_1(K)$", définie comme au $n°4$.

Quand on passe à la catégorie des schémas localement de type fini connexes, *munis d'un point géométrique au dessus de* $\overline{K}/K$[5] (i.e. d'un $x \in X$, d'une clôture séparable $\overline{k(x)}$ de $k(x)$ et d'un K-morphisme $\overline{K} \hookrightarrow \overline{k(x)}$), cela correspond à un foncteur des K-schémas localement de type fini et connexes, ponctués sur $\overline{K}/K$ (au ses précédent) vers la catégorie des groupes profinis π munis d'un homomorphisme (de groupes profinis)

$$\pi \longrightarrow \Gamma$$

(dont l'image sera d'ailleurs nécessairement ouverte donc d'indice fini, pour des objets provenant de X comme [ci-]dessus).

Conjecture **(5.5)**[6] — *La restriction du foncteur précédent* $X \mapsto (\Pi_1(X)$ *sur* $\Pi_1(K))$ *aux schémas projectifs lisses de dimension* ≤ 1 *et anabéliens (i.e. tels que* (X, S) *soit anabélien, où* S *est la réunion des composantes de dimension* 0*) est pleinement fidèle.*

Il revient au même de dire ceci :

Définition **(5.5 bis)**. — *Le foncteur qui, à tout* X *comme dans (5.5.) et de plus* connexe, *(de dimension* 0 *ou* 1*), muni d'un point géométrique* ξ *au dessus de* $\overline{K}$*, associe le groupe profini* $\pi_1(X, \xi)$ *sur* $\Gamma = \pi_1(K, \xi)$*, est un foncteur pleinement fidèle.*

[5] il vaut mieux dire : munis d'un revêtement universel…

[6] c'est un peu faux cf $n°9$

Il faut quand même expliciter les morphismes $(X,\xi)\longrightarrow(X',\xi')$ dans la catégorie de départ : morphismes de K-schémas $X \xrightarrow{f} X'$, munis d'un morphisme de $\Pi_1(X')$ (ou classe de chemins) $f(\xi)\simeq\xi'$.

Ces conjectures se réduisent à la théorie de Galois, pour des X de dimension 0. Pour des X de dimension 1, elles ne concernent que des X tels que les composantes connexes de $X_{\overline{K}}$ soient de genre ≥ 2 (ou, ce qui revient au même, introduisant l'extension finie $K'=\mathrm{H}^0(X,\underline{\mathcal{O}}_X)$) de K, de sorte que X soit géométriquement connexe sur K', tel que X comme courbe algébrique *sur* K' soit de genre ≥ 2. On voit aisément (prenant $X'=\mathrm{Spec}(K)$, $X=\mathbb{P}^1_K$ courbe elliptique sur K) qu'elles deviennent fausses sinon — c'est pourquoi il a fallu introduire S, plus l'hypothèse anabélienne sur (X,S), pour associer à (X,S) une structure plus riche que $\Pi_1(X)$ sur $\Pi_1(K)$. On trouvera des conjectures (par exemple) pour X courbe géométriquement connexe sur K de genre 1 (resp. 0), *pourvu* que S soit de degré ≥ 1 (resp. ≥ 3).

§ 6. — ANALYSE LOCALE DE (X, S) EN UN $s \in S$

On s'intéresse au cas où $\dim_s(X) = 1$, i.e. où s n'est pas point isolé dans X.

Soit $\underline{\mathcal{O}}_s$ le hensélisé (ou le complété, si on y tient) de $\underline{\mathcal{O}}_{X,s}$, K_s son corps de fractions, $D_s^* = \mathrm{Spec}(K_s)$, on identifie s à $\mathrm{Spec}\, k(s)$ ($k(s)$ est le corps résiduel de l'anneau-jauge $\underline{\mathcal{O}}_s$). Considérons $D_s = \mathrm{Spec}(\underline{\mathcal{O}}_s)$ ("disque arithmétique relatif à $k(s)$"), donc $D_s^* = D_s \backslash \{s\} =$ ("disque épointé") $\longrightarrow D_s$, on a :

(6.1)
$$
\begin{tikzcd}
\Pi_1(D_s^*) \arrow[r, "\text{surj. sur Hom}", "i_s"'] \arrow[rr, bend left, "p_s"] \arrow[dr, dashed, "\sigma_s"'] & \Pi_1(D_s) \arrow[r, "\text{fidèle}", "q_s"'] & \Pi_1(K) \\
& \Pi_1(s) \arrow[u, "\approx"] \arrow[ur, "j_s"'] &
\end{tikzcd}
$$

Pour le choix d'un point géométrique ξ_s de D_s^* sur $\overline{K}/K$ (i.e. d'une clôture algébrique $\overline{K}_s$ de K_s et d'une K-injection $\overline{K} \hookrightarrow \overline{K}_s$), ce diagramme de groupoïdes se reflète en un homomorphisme de groupes [7] de

(6.2)
$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(D_s^*, \xi_s) \arrow[r, "\text{surjectif}"] & \pi_1(k(s), \xi_s) \arrow[r, hook, "\text{injectif}"] \arrow[d, "\sim"'] & \Gamma \\
\mathrm{Gal}(\overline{K}_s/K_s) \arrow[u, "\sim"] & \mathrm{Gal}(\overline{k(s)}/k(s)) &
\end{tikzcd}
$$

dont le noyau, on le sait par Kummer, est canoniquement isomorphe à $T(\overline{k}_s) \simeq T(\overline{K}_s)$ $[\simeq T(\overline{K})]$. On veut exprimer la donnée de cet isomorphisme privilégié

[7] **NB** Le choix de $\overline{K}_s$ implique un choix de $\overline{k}_s$ — c'est la flèche pointillée (6.1).

comme une structure supplémentaire sur (6.1) — i.e. sur le groupoïde $\Pi_1(D_s^*)$ sur $\Pi_1(s)$ (ou sur $\Pi_1(K)$). On peut le dire ainsi. Si à tout $\xi \in \Pi_1(D_s^*)$, on associe le noyau de

$$\mathrm{Aut}(\xi) \longrightarrow \mathrm{Aut}(i(\xi))$$

(qui est aussi le noyau des composés

$$\mathrm{Aut}(\xi) \longrightarrow \mathrm{Aut}(i(\xi)) \longrightarrow \mathrm{Aut}(p_s(\xi) = q_s(i_s(\xi)))$$

on trouve un groupe *abélien*, qui ne dépend (à isomorphisme canonique près) que de $i(\xi) = \xi'$ [ceci, et la suite de la phrase, marche chaque fois qu'on a un foncteur de groupoïdes connexes à noyau abélien et surjectif sur les Hom], et pour ξ' variable forme un système local sur $\Pi_1(D_s)$, qu'on peut appeler le π_1 *relatif* du groupoïde $\Pi_1(D_s^*)$ sur le groupoïde $\Pi_1(D_s)$. Ceci dit, on a un isomorphisme de systèmes locaux de groupes

$$\pi_1(\Pi_1(D_s^*) \text{ sur } \Pi_1(D_s)) \simeq q_s^*(\mathscr{T}_K)$$

où $\mathscr{T}_K$ est le système local de Tate sur K.

Posons maintenant

$$D_S = \amalg_{s \in S} D_s \quad (\text{“multidisque arithmétique en } S\text{”})$$

$$D_S^* = \amalg_{s \in S} D_s^* \quad (\text{“multicouronne arithmétique en } S\text{”})$$

On a un homomorphisme de groupoïdes

$$\Pi_1(D_S^*) \xrightarrow{\sigma_s} \Pi_1(S) \quad (\xrightarrow{j_s} \Pi_1(K))$$

et un isomorphisme canonique

$$\pi_1(\Pi_1(D_S^*)/\Pi_1(S)) \simeq j_S^*(\mathscr{T}(K))$$

Ceci posé, on a aussi un morphisme

$$D_S^* \xrightarrow{\rho_S} X \backslash S$$

induisant

$$\Pi_1(D_S^*) \xrightarrow{\Pi_1(\rho_S)} \Pi(X \backslash S).$$

§ 7. — REFORMULATION "BORDÉLIQUE" DE LA CONJECTURE (LE PURGATOIRE NÉCESSAIRE ...)

Ainsi, à (X,S) comme dans **5.1.**, on associe :

1°) Trois groupoïdes (profinis) Π_U, Π_D, Π_{D^*} (en plus de $\Pi_e = \Pi_1(\mathrm{Spec}(K))(\simeq \mathrm{Tors}(\Gamma)))$.

2°) Quatre foncteurs (de groupoïdes profinis) :

$$\begin{tikzcd} & \Pi_{D^*} \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ \Pi_U \arrow[dr, "\varphi"'] & & \Pi_D \arrow[dl, "\psi"] \\ & \Pi_e & \end{tikzcd}$$

3°) Un isomorphisme de commutation

$$\alpha : \varphi\rho \simeq \psi\sigma$$

(qui est même l'identité dans le cas de système provenant de (X,S), mais il vaut mieux oublier qu'il en soit ainsi). Ces données satisfaisant aux conditions préliminaires

a) σ induit un isomorphisme sur les π_0, et des épimorphismes sur les Hom, et il est à noyau abélien ;

b) ψ est fidèle

[c) ρ est fidèle…

d) φ est épimorphique modulo groupes finis sur les Aut…]

La condition a) permet déjà de définir le π_1 relatif $\pi_1(\sigma) = \pi_1(\Pi_{D^*}/\Pi_D)$, qui est un système local de groupes abéliens sur Π_D i.e. un foncteur $(\Pi_D)^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens}$, et la dernière donnée

4°) Un isomorphisme kummérien

$$\varkappa : \pi_1(\sigma) \simeq \psi^*(\mathscr{T})$$

Si on a deux systèmes de cette nature $\Pi = (\Pi_U, \Pi_D, \Pi_{D^*}, \varphi, \psi, \rho, \sigma, \alpha, \varkappa)$ et $\Pi' = (\Pi_U, \dots)$, un *morphisme* de Π' dans Π est un système de trois foncteurs

$$f_U : \Pi'_U \longrightarrow \Pi_U$$

$$f_D : \Pi'_D \longrightarrow \Pi_D$$

$$f_{D^*} : \Pi'_{D^*} \longrightarrow \Pi_{D^*}$$

et de quatre isomorphismes de commutation $\alpha_{D^*,D}$, $\alpha_{D^*,U}$, $\alpha_{U,e}$, $\alpha_{D,e}$, pour les quatre faces du prisme :

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \Pi'_{D^*} \arrow[dl, "\rho'"] \arrow[dr, "\sigma'"] \arrow[ddllll, "f_{D^*}"'] & \\
 & & & & \Pi'_U \arrow[dr, "\varphi'"] \arrow[ddllll, "f_U"] & & \Pi'_D \arrow[dl, "\psi'"] \arrow[ddllll, "f_D"'] \\
 & \Pi_{D^*} \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\sigma"] & & & & \Pi_e \arrow[ddllll] & \\
\Pi_U \arrow[dr, "\varphi"'] & & \Pi_D \arrow[dl, "\psi"] & & & & \\
 & \Pi_e & & & & &
\end{tikzcd}$$

satisfaisant une équation de compatibilité avec α, α' que je n'écris pas — signifiant que les *deux* isomorphismes u, v de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \Pi'_{D^*} \arrow[r, shift left=1.5ex, "\varphi\circ\rho\circ f_{D^*}"] \arrow[r, shift right=1.5ex, "\mathrm{id}\circ\varphi'\circ\sigma'"'] \arrow[r, phantom, "u\Downarrow\Downarrow v"] & \Pi_e \end{tikzcd}$$

obtenus respectivement, u en utilisant successivement α, $\alpha_{D^*,D}$, $\alpha_{D,e}$, v en utilisant successivement $\alpha_{D^*,U}$, $\alpha_{U,e}$, α', sont égaux. [Cette compatibilité pourrait s'exprimer en interprétant la donnée de Π comme celle d'une catégorie fibrée Π sur la "catégorie carrée"

$$Q: \quad \begin{tikzcd} & D^* \arrow[dl, "\rho_0"'] \arrow[dr, "\sigma_0"] & \\ U \arrow[dr, "\varphi_0"'] & & D \arrow[dl, "\psi_0"] \\ & e & \end{tikzcd}$$

(où $\varphi_0\rho_0 = \psi_0\sigma_0$) à restriction à $\{e\}$ imposée, et en prenant des foncteurs cartésiens entre catégories fibrées…]. De plus, on exige une autre compatibilité, savoir que l'homomorphisme de systèmes locaux en groupes abéliens sur Π'_D

$$\pi_1(\sigma') \longrightarrow (f_D)^*(\pi_1(\sigma))$$

défini à l'aide de f_{D^*}, f_D, $\alpha_{D^*,D}$ rende commutatif le diagramme suivant d'isomorphismes de systèmes locaux sur Π'_D[8] :

$$\begin{tikzcd} (f_{D^*})^*(\pi_1(\sigma)) \arrow[d, "(f_{D^*})^*(x)"', "\sim"] & \pi_1(\sigma') \arrow[l] \\ (f_{D^*})^*(\psi^*(T)) \arrow[d, "\mathrm{can.}"', "\sim"] & \psi'(T) \arrow[u, "\sim", "x'"'] \arrow[dl, "x"'] \\ (\psi f_D)^*(T) & \end{tikzcd}$$

(où x est déduit de $\alpha_{D,e} : \psi' \simeq \psi \circ f_D$)

[8] *non*, cela ne marche que pour le cas de morphismes étales, sinon il faut faire intervenir la multiplication par les "degrés de ramifications" $d_{i'}$ ($i' \in \pi_0(\Pi'_{D^*})$).

Pour Π, Π^* fixés, les systèmes $(f_\alpha = (f_U, f_D, f_{D^*}, \alpha_{D^*,D}, \alpha_{D^*,U}, \alpha_{U,e}, \alpha_{D,e}))$ précédents forment une catégorie de façon naturelle — en fait un groupoïde — en prenant comme morphismes μ de (f', α') dans (f, α) les triplets de morphismes (foncteurs profinis)

$$f'_U \xrightarrow{\mu_U} f_U, \quad f'_D \xrightarrow{\mu_D} f_D, \quad f'_{D^*} \xrightarrow{\mu_{D^*}} f_D$$

satisfaisant quatre conditions de compatibilité avec $\alpha_{D^*,D}$ et $\alpha'_{D^*,D}$, avec $\alpha_{D^*,U}$ et $\alpha'_{D^*,U}$ avec $\alpha_{U,e}$ et $\alpha'_{U,e}$, avec $\alpha_{D,e}$ et $\alpha'_{D,e}$ respectivement (i.e. on travaille avec une sous-catégorie pleine de la catégorie des $\underline{\mathrm{Hom}}$ entre catégories fibrées sur Q, à fibre en e fixée…).

J'ai l'impression que le groupoïde $\underline{\mathrm{Hom}}((f', \alpha'), (f, \alpha))$ est toujours *rigide*, i.e. $\mathrm{Aut}(f, \alpha)$ est toujours réduit au groupe unité — j'ai la flemme de vérifier — donc que si (f', α') et (f, α) son isomorphes, l'isomorphisme en question est unique. Quoi qu'il en soit, on posera

$$\mathrm{Hom}((f', \alpha'), (f, \alpha)) = \pi_0 \underline{\mathrm{Hom}}((f', \alpha'), (f, \alpha))$$

D'où une *catégorie* des systèmes $\Pi = (\Pi_U, \Pi_D, \Pi_{d^*}, \varphi, \psi, \rho, \sigma, \alpha, \varkappa)$.

On a un foncteur des couples (X, S)[9] (où X schéma localement de type fini sur K, S sous schéma fermé de X étale sur K, tels que $\forall s \in S$, X soit lisse de dimension relative 1 en s) vers cette catégorie bordélique B.

Conjecture bordélique **(7.1)**. — *Quand on se borne aux* (X, S) *tels que* X *projectif lisse de dimension* ≤ 1*, et qui de plus sont anabéliens, alors le foncteur précédent est pleinement fidèle*[10].

Description de la catégorie bordélique en termes de théorie de groupes.

Soit $I = \pi_0(\Pi_{D^*}) \simeq \pi_0(\Pi_D)$. Choisissons un élément D_i^* dans chaque composante de Π_{D^*}, et soit $D_i = \sigma(D_i^*)$. Pour tout i, choisissons un isomorphisme

$$\psi(D_i) \xrightarrow[\sim]{\lambda_i} \mathrm{Spec}(\overline{K})$$

[9] [les] morphismes $(X', S') \longrightarrow (X, S)$ sont les morphismes $f : X' \longrightarrow X$ tels que $f^{-1}(S)_{\mathrm{red}} = S'$

[10] **N.B.** La fidélité est facile…

Quitte à remplacer l'objet par un "sous-objet" isomorphe on peut supposer que Π_{D^*} est la catégorie somme de catégories $[E_i]$ définis par les $E_i = \mathrm{Aut}(D_i^*)$, Π_D la catégorie somme des catégories $[\Gamma_i]$ définies par les $\Gamma_i = \mathrm{Aut}(D_i)$, le foncteur σ s'exprimant par un système d'homomorphismes

$$\sigma_i : E_i \longrightarrow \Sigma_i \quad (i \in I)$$

qui sont surjectifs de noyaux abéliens, le foncteur ψ par un système *d'inclusions* $\psi_i : \Gamma_i \hookrightarrow \Gamma$ et la donnée de $\varkappa$ équivaut en fait à des isomorphismes

$$\varkappa_i : \ker \sigma_i \simeq T(\overline{K})$$

compatibles avec les opérations de Γ_i et de Γ sur les deux morphismes respectivement, et les inclusions ψ_i. On peut dire que la donnée de $(\sigma, \psi, \varkappa)$ est exprimée par la donnée du système $(E_i)_{i\in I}$, d'un système de suites exactes[11][12]

$$\boxed{1 \longrightarrow T(\overline{K}) \xrightarrow{\varkappa_i} \longrightarrow E_i \xrightarrow{p_i} \Gamma}$$

telles que les $\Sigma_i = \mathrm{Im}\, p_i$ soient ouverts, et que $\varkappa_i$ soit compatible avec les opérations de $\Sigma_i \simeq \mathrm{Coker}\varkappa_i$ (ou de E_i et Γ sur les deux termes respectivement).

Supposant d'autre part (pour simplifier) Π_U connexe, et choisissant un élément $\widetilde{U}$ de Π_U et un isomorphisme

$$\varphi(\widetilde{U}) \xrightarrow{\lambda_U} \mathrm{Spec}(\overline{k})$$

donc (quitte à remplacer Π_U par un groupoïde équivalent) on peut supposer Π_U réduit à $\widetilde{U}$, et Π_U est donné alors par un groupe E, et φ par un homomorphisme de groupes

$$\boxed{E \xrightarrow{\varphi_{\widetilde{U}}, \lambda_U, (\text{ou } p)} \Gamma}$$

dont l'image $\Sigma \subset \Gamma$ est encore un sous-groupe ouvert de Γ, et le noyau sera noté π[13]

$$\boxed{1 \longrightarrow \pi \xrightarrow{\varkappa} E \longrightarrow \Sigma \longrightarrow 1}$$

[11]**NB** Les extensions des Γ_i par $T(\overline{K})$ obtenues par des situations géométriques splittent le choix d'une uniformisante en s_i définit un splittage, et même [seulement ?] le choix d'une base de l'espace tangent en $s\ldots$

[12]Re N.B. Deux bases différents définissent des scindages différents !

[13]N.B. Dans la situation géométrique cette extension de *noyaux de groupes* splitte, i.e. il existe un sous-groupe ouvert $\Sigma_\circ$ dans σ, et un relèvement $\Sigma_\circ \longrightarrow E\ldots$

Ayant remplacé Π_U initial par une sous-catégorie pleine plus petite, on sera obligé de modifier ρ à isomorphisme près, pratiquement en choisissant pour chaque $i \in I$ un isomorphisme

$$\rho(D_i) \xrightarrow{\mu_i} \widetilde{U}$$

moyennant quoi ρ s'explicite simplement par des homomorphismes de groupes

$$\boxed{\rho_i : E_i \longrightarrow E}$$

Il reste à expliciter l'isomorphisme de commutation

$$\alpha : \varphi\rho \longrightarrow \psi\sigma$$

qui est défini par un système d'éléments

$$\boxed{\gamma_i \in \Gamma \quad (i \in I)}$$

tels que

$$(*) \qquad \varphi \circ \rho_i = \operatorname{int}(\gamma_i) \circ \rho_i$$

ce qui implique d'ailleurs que ρ_i applique $\ker\rho_i$ dans $\ker\rho$, i.e. induit un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & T(\overline{K}) \arrow[r] \arrow[d] & E_i \arrow[r] \arrow[d, "\rho_i"] & \Gamma_i \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi \arrow[r] & E \arrow[r] & \Gamma_0 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

avec un homomorphisme induit $\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_0$ injectif — et ceci posé, la relation de compatibilité (*) devient une relation sur des monomorphismes de groupes

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_i \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \Gamma \\
\Gamma_0 \arrow[r, hook] & \Gamma.
\end{tikzcd}$$

[Les "objets bordéliques simplifiés" sont donc les systèmes d'homomorphismes de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & T(\overline{K}) \arrow[r, "\varkappa_i"] \arrow[d, "\rho_i^\circ"] & E_i \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "\rho_i"] & \Gamma_i \arrow[d, "\mathrm{int}(\gamma_i)"] \\ 1 \arrow[r] & \pi \arrow[r, "\varkappa"] & E \arrow[r, "p"] & \Gamma_0 \end{tikzcd}$$

]

Ainsi, on a une description relativement simple des systèmes bordéliques "réduit" (i.e. où dans les groupoïdes Π_U, Π_{D^*}, Π_D, chaque composante connexe a exactement un objet, et où de plus on force en quelque sorte $\Pi(K)$ a n'avoir que l'objet $\mathrm{Spec}(\overline{K})$. Mais on est retrouvé en [ne] tournant pas la détermination des *morphismes* des systèmes

$$G = (I, G_i, p_i, K_i, E, \underbrace{\varphi}_{\text{ou } p?}, \rho_i, \gamma_i) \quad \text{et} \quad G' = (I', G'_i, \dots),$$

disons dans le sens $f : G' \longrightarrow G$. Il faut donc (pour f_{D^*}) une application

$$\boxed{\tau = \tau_f : I' \longrightarrow I}$$

et pour tout i un homomorphisme

$$\boxed{G'_{i'} \xrightarrow{f_{i'}} G_{\tau i'}}$$

induisant (compte tenu de f_D) par passage au quotient des homomorphismes

$$\Gamma'_{i'} \xrightarrow{g_i} \Gamma_{\tau i'}$$

de sous groupes ouverts de Γ, et la donnée $f_{D^*}, f_D, \alpha_{D^*,D}, \alpha_{D,e}$ équivaut donc à la donnée d'éléments α_i $(i \in I)$ de Γ,

$$\boxed{\alpha_{i'} \in \Gamma} \quad (i' \in I')$$

tels que

$$g_{i'}(\gamma') = \mathrm{int}(\alpha_{i'})(\gamma') \quad \forall i' \in I', \gamma' \in \Gamma'_{i'}$$

La donnée de f_U équivaut à la donnée d'un homomorphisme de groupes

$$\boxed{f_E : E' \longrightarrow E}$$

celle de $\alpha_{D,e}$ équivaut à la donnée de

$$\boxed{\alpha \in \Gamma}$$

tel que

$$(*) \qquad \varphi f_E = \mathrm{int}(\alpha)\varphi$$

de sorte que f_E induit un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi' \arrow[r] \arrow[d] & E'_i \arrow[r] \arrow[d, "f_E"'] & \Gamma'_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_{\sigma_0}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi \arrow[r] & E \arrow[r] & \Gamma_0 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

et moyennant cela, la condition dite (*) devient une condition sur des inclusions de sous-groupes de γ :

$$f_{\sigma_0}(\gamma') = \mathrm{int}(\alpha)\gamma' \quad \text{si} \quad \gamma' \in \sigma'_0.$$

Il faut expliciter encore (en plus de f_{D^*}, f_D, f_U, $\alpha_{D^*,D}$, $\alpha_{D,e}$, $\alpha_{U,e}$ déjà explicités) la donnée de commutation $\alpha_{D^*,U}$, et écrire les conditions de compatibilités avec α, α' et $\varkappa$, $\varkappa'$. La donnée de $\alpha_{D^*,U}$ équivaut à celle de systèmes d'éléments

$$\boxed{\beta_{i'} \in E'} \quad (i' \in I')$$

tels que l'on ait, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G'_{i'} \arrow[r, "\rho'_{i'}"] \arrow[d, "f_{i'}"'] & E' \arrow[d, "f_E"] \\
G_{\tau i'} \arrow[r, "\rho_{\tau i'}"'] & E
\end{tikzcd}$$

la relation

$$f_E \rho'_{i'} = \mathrm{int}(\beta_i)\rho_{\tau i'} \circ f_{i'}$$

Reste à exprimer les deux compatibilités de $(f_{D^*}, f_{D^1}, F_U, \alpha_{D^*,D}, \alpha_{D,e}, \alpha_{D^*,U}, \alpha_{U,e})$ avec lui même et avec $\varkappa$ — la deuxième compatibilité est simplement la compatibilité des $f'_{i'}$ avec les $\varkappa'_{i'}$, $\varkappa_i$, i.e.

$$f'_{i'} \circ \varkappa'_{i'} = \varkappa_i \quad (i = \tau i')$$

et la première *sauf erreur* s'exprime par la “commutativité”

$$\boxed{\alpha_{i'} = \gamma_i^{-1} p(\beta_{i'}^{-1}) \alpha \gamma'_{i'}} \quad \forall i' \in I'$$

En résumé les homomorphismes, dans un système de diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & T(\overline{K}) \arrow[r, "\varkappa_i"] \arrow[d] & E_i \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "\rho_i"] & \Gamma \arrow[d, "\mathrm{int}(\gamma_i)"] & (i \in I) \\
1 \arrow[r] & \pi \arrow[r] & E \arrow[r, "p"] & \Gamma &
\end{tikzcd}$$

d'un système analogue, relatif à un ensemble d'indices I', est donné par une application

$$\tau : I' \longrightarrow I$$

et pour tout $i' \in I'$, posant $i = \tau(i')$, d'un système de flèches verticales $f_{i'} : E'_{i'} \longrightarrow E_i$, et d'une flèche verticale $f_E : E' \longrightarrow E$, enfin d'un système d'éléments $\beta_{i'} \in E$ et d'un $\alpha \in \Gamma$, s'insérant dans le système de diagrammes[14]

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & T(\overline{K}) \arrow[rr, "\varkappa'_{i'}"] \arrow[dr, "\varepsilon'_{i'}"] \arrow[dd, "d_{i'}"'] & & E'_{i'} \arrow[rr, "p'_{i'}"] \arrow[dr, "\rho'_{i'}"] \arrow[dd, "f_{i'}"'] & & \Gamma \arrow[dr, "\mathrm{int}(\gamma'_{i'})"] \arrow[dd, "\mathrm{int}(\alpha_{i'})"] & \\
1 \arrow[rr] & & \pi' \arrow[rr] \arrow[dd, "f_{i'}"'] & & E' \arrow[rr, "p'"] \arrow[dd, "f_E"'] & & \Gamma \arrow[dd, "\mathrm{int}(\alpha)"] \\
1 \arrow[r] & T(\overline{K}) \arrow[rr, "\varkappa_i"] \arrow[dr, "\varepsilon_i"'] & & E_i \arrow[rr, "p_i"] \arrow[dr, "\rho_i"] & & \Gamma \arrow[dr, "\mathrm{int}(\gamma_i)"] & \\
& 1 \arrow[r] & \pi \arrow[rr] & & E \arrow[rr, "p"] & & \Gamma
\end{tikzcd}$$

[14]N.B. Comme les $E_i \longrightarrow E$ sont injectifs, $f_{i'}$ est connu quand on connaît f_E et $\beta_{i'}$, (l'existence de $f_{i'}$ est donc une condition sur les couples f_E, $\beta_{i'}$ savoir que $\mathrm{int}(\beta_{i'})^{-1} f_E \rho_{i'}$ applique $E_{i'}$ dans $p_i(E_i)$. On peut supposer les $\gamma_{i'}$, γ_i égaux à 1 (en choisissant l'isomorphisme de $\psi(\sigma(D_i^*))$ avec $\mathrm{Spec}(\overline{K})$ via l'isomorphisme de $\varphi(\rho(D_i^*)) = \varphi(\widetilde{U})$ avec $\mathrm{Spec}\,\overline{K}$ [?])

où on a posé

$$\alpha'_i = \gamma_i^{-1} p(\beta_i^{-1}) \alpha \gamma'_{i'} \quad \text{i.e.} \quad \alpha \gamma'_{i'} = p(\beta_i) \gamma_i \alpha_{i'}$$

et où la face verticale postérieure des prismes est commutative (deux conditions, sur deux carrés), la face verticale antérieure aussi (c'est *une* condition, sur le carré de droite, l'autre carré commutatif s'en déduit par définition de $\pi' \longrightarrow \pi$ comme induit par $f_E \dots$), la face verticale gauche du cube de droite étant commutative modulo l'isomorphisme de commutativité $\mathrm{int}(\beta_{i'})$, et la face verticale droite étant commutative (non seulement, par la condition précédente, sur $\sum'_{i'} = \mathrm{Im}(E'_{i'} \xrightarrow{p'_{i'}} \Gamma)$, mais sur Γ tout entier) en vertu de la relation plus précise.

Conjecture bordélique précisée (correspondant aux Π_U *connexes*). — *Ces objets sont les homomorphismes de groupes profinis*

$$E \xrightarrow{p} \Gamma$$

(donnant naissance à une suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi \xrightarrow{x} E \xrightarrow{p} \Gamma)$$

et un ensemble fini de sous-groupes (indexés par un ensemble I d'indices)

$$E_i \xhookrightarrow{\rho_i} E,$$

et d'isomorphismes

$$E_i \cap \pi \xrightarrow[\sim]{x_i} T(\overline{K})$$

Un homomorphisme d'un système $(E', p', (E'_{i'})_{i' \in I'}, (x'_{i'})_{i' \in I'})$ dans un système $(E, p, (E_i)_{i \in I}, \dots)$ est donné par un homomorphisme

$$f : E' \longrightarrow E$$

et des $\beta_{i'} \in E$ $(i' \in I')$[15], $\alpha \in \Gamma$, tels que l'on ait les conditions :

[15]Les $\beta_{i'}$ *pas* uniques (si $\beta_{i'}$ convient aussi $\gamma \beta_{i'}$, avec $\gamma \in \mathrm{Im} x_i$) Mais α unique ??

1°) $p \circ f = \mathrm{int}(\alpha) p'$

2°) $\forall i' \in I'$, $\exists i \in I$ (unique !) tel que

$$\mathrm{int}(\beta_{i'})^{-1} f(E'_{i'}) = E_i$$

et un entier $d_{i'} \in \mathbf{N}^*$[16] tel que

$$\mathrm{int}(\beta_{i'}^{-1}) f \varkappa'_{i'} = \varkappa_i \circ (d_i, \mathrm{id}_{T(\overline{K})})$$

Je me a'perçois qu'il vaut mieux remplacer les $\beta_{i'}$ par les $\beta_{i'}^{-1}$, i.e. prendre l'isomorphisme de commutation plutôt dans le sens

$$f_\varepsilon \rho'_{i'} \xrightarrow{\beta_{i'}} \rho_i f_{i'}$$

qu'en sens inverse. De plus, conceptuellement le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi_{D^*} \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\
\Pi_U \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[rr, phantom, "\xrightarrow{\alpha}" below] & & \Pi_D \arrow[dl, "\psi"] \\
 & \Pi_e &
\end{tikzcd}$$

est trop compliqué, il suffit de se donner

$$\boxed{\Pi_{D^*} \xrightarrow{\rho} \Pi_U \xrightarrow{\varphi} \Pi_e}$$

et de déduire Π_D par factorisation canonique de l'homomorphisme de groupoïdes $\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_e$ en un homomorphisme qui induit un isomorphisme sur π_0 et un épimorphisme sur les π_1, suivi d'un homomorphisme qui est [épi. sur π_0, et pour cause, et qui est] *fidèle*. Alors les 1-morphismes de

$$\Pi'_{D^*} \xrightarrow{\rho'} \Pi'_U \xrightarrow{\varphi'} \Pi_e$$

[16]N. B. $d_{i'}$ est aussi unique…

dans

$$\Pi_{D^*} \xrightarrow{\rho} \Pi_U \xrightarrow{\varphi} \Pi_e$$

sont les quintuplés de 2-foncteurs et 3-isomorphismes de foncteurs $(f_{D^*}, f_U, \alpha_{D^*,U}, \alpha_{U,e}, \varkappa)$ donnant un diagramme avec données de commutation[17][18]

$$\begin{tikzcd}
\Pi'_{D^*} \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "f_{D^*}"'] & \Pi'_U \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "f_U"] & \Pi_e \arrow[d, "\sim"] \\
\Pi_{D^*} \arrow[r, "\rho"'] \arrow[ur, phantom, "\alpha_{D^*,U}\nearrow"] & \Pi_U \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\alpha_{U,e}\nearrow"] & \Pi_e
\end{tikzcd}$$

et si on a deux tels 1-morphismes $f = (f_{D^*}, f_U, \alpha_{D^*,U}, \alpha_{U,e})$ et $g = (g_{D^*}, g_U, \beta_{D^*,U}, \beta_{U,e})$ un 0-morphisme de f dans g est formé d'un couple (μ_{D^*}, μ_U) d'isomorphismes de foncteurs

$$\mu_{D^*} : f_{D^*} \xrightarrow{\sim} g_{D^*}, \quad \mu_U : f_U \xrightarrow{\sim} g_U$$

compatibles avec $\alpha_{D^*,U}$, $\beta_{D^*,U}$ (deux conditions de compatibilités sur les deux carrés).

Si on se borne à des Π_U connexes, on trouve en choisissant comme plus haut un objet $\widetilde{U}$ de Π_U, et un isomorphisme

$$\varphi(\widetilde{U}) \xrightarrow[\sim]{\lambda} \Omega$$

(où $\Omega = \mathrm{Spec}(\overline{K})$ est l'objet référence de $\Pi_e \ldots$), un groupe E et un homomorphisme

$$E \xrightarrow{\varphi} \Gamma$$

(qui est changé par automorphisme intérieure si on change λ, et E lui même remplacé par un groupe isomorphe, l'isomorphisme défini modulo isomorphisme intérieur, si on change l'objet de référence $\widetilde{U}$). De même, choisissant un $\widetilde{U}_i$ dans chaque composante $i \in \pi_0(\Pi_{D^*})$, et un isomorphisme

$$\lambda_i : \rho(\widetilde{U}_i) \simeq \widetilde{U},$$

[17] de plus, $\pi_1(\varphi\rho) = \pi_1(\Pi_{D^*}/\Pi_e)$ peut se définir comme un système local de groupes (commutatifs) sur ΠD^*, et on peut alors définir $\varkappa : (\varphi\rho)^* T'_K \simeq \pi_1(\varphi\rho)$.

[18] avec *une* condition sur le morphisme $\pi_1(\varphi'\rho') \simeq f_{D^*}(\pi_1(\varphi\rho))$ induit, qui modulo les isomorphismes de Kummer doit être la multiplication par un d (indice de ramification) qui est un application $\pi_0(\Pi'_{D^*}) \longrightarrow \mathbf{N}^*$.

on trouve des groupes E_i et des homomorphismes

$$E_i \xrightarrow{\rho_i} E$$

Si on change λ_i, ρ_i est changé par automorphisme intérieur de E. Si on change $\widetilde{U_i}$, E_i est remplacé par un groupe isomorphe, l'isomorphisme défini à automorphisme intérieur près.

Considérons les composés

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r] \arrow[dr, "p_i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & \Gamma \end{tikzcd}$$

d'où [un ?] noyau, $\varkappa$ est défini par un système d'isomorphismes

$$T(\overline{K}) \xrightarrow[\sim]{\varkappa_i} \operatorname{Ker} p_i \quad (i \in I)$$

s'insèrent dans une famille de suites exactes

$$1 \longrightarrow T(\overline{K}) \xrightarrow{\varkappa_i} E_i \xrightarrow{p_i} \Gamma$$

(NB l'image de p_i est un sous-groupe ouvert) $\varkappa_i$ étant compatible aux actions de E_i, quand on fait opérer E_i sur $T(\overline{K})$ via l'action de Γ sur $T(\overline{K})$, et su lui même par automorphismes intérieures. Introduisant également $\pi = \operatorname{Ker} p$, on trouve donc un homomorphisme de suites exactes:

$$(D) \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & T(\overline{K}) \arrow[r, "\varkappa_i"] \arrow[d, "\varepsilon_i"] & E_i \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "\rho_i"] & \Gamma \arrow[d, "|"] \\ 1 \arrow[r] & \pi \arrow[r, "\varkappa"] & E \arrow[r, "p"] & \Gamma \end{tikzcd}$$

($i \in I$). On peut dire que Π_U définit un “groupe extérieur” $[E]$, et $\Pi_U \longrightarrow \Pi_e$ un homomorphisme de groupes extérieures

$$[E] \longrightarrow [\Gamma]$$

de même Π_{D^*} définit un système de “groupes extérieures” $[E_i]$, et $\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U$ un système d'homomorphismes extérieurs

$$[E_i] \longrightarrow [E],$$

mais comment en termes de groupes extérieurs exprimer les données de Kummer $\varkappa_i$?

Revenant aux systèmes de diagrammes D (relatif à un ensemble d'indices I) et à un D' analogue (avec un ensemble d'indices I') :

$$D' \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & T(\overline{K}) & \xrightarrow{\varkappa'_{i'}} & E'_{i'} & \xrightarrow{p_{i'}} & \Gamma \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon'_{i'}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho'_{i'}} & & \big\downarrow{\scriptstyle |} \\ 1 & \longrightarrow & \pi & \xrightarrow{\varkappa'} & E' & \xrightarrow{p'} & \Gamma \end{array} \qquad i' \in I'$$

un homomorphisme f de D' dans D s'explicite par

a) Un homomorphisme[19]

$$\boxed{f_E : E' \longrightarrow E}$$

[s'explicite en termes du choix d'un isomorphisme

$$\nu : f(\widetilde{U}') \simeq \widetilde{U}$$

(un autre choix modifie f_E par un $\mathrm{int}(\beta), \beta \in E$)]

b) Une application[20] $\tau : I' \longrightarrow I$, et pour tout $i' \in I'$, posant $i = \tau(i')$, un homomorphisme de groupes

$$\boxed{E_i \xrightarrow{f'_{i'}} E_i}$$

[s'explicite en terme du choix d'un isomorphisme $f_{D^*}(\widetilde{U_{i'}}) \underset{\sim}{\xrightarrow{\nu_i}} \Pi_{U_i}$, et modifié par des $\mathrm{int}(\beta_{i'})$, $\beta_{i'} \in E_i$, si on change $\nu_{i'}$]

c) Une donnée de commutation[21] pour

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{p'} & \Gamma \\ {\scriptstyle f_E}\big\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \alpha} & \big\downarrow{\scriptstyle \sim} \\ E & \xrightarrow[p]{} & \Gamma \end{array} \qquad \boxed{\alpha \in \Gamma}$$

i.e.

$$\boxed{p f_E = \mathrm{int}(\alpha) p'}$$

---

[19] décrit le foncteur f_U
[20] décrit le foncteur f_{D^*}
[21] α décrit $\alpha_{U,e}$

d) $\forall i' \in I$ une donnée de commutation[22] pour

$$\begin{tikzcd} E'_{i'} \arrow[r, "p'_{i'}"] \arrow[d, "f_{i'}"'] & E' \arrow[d, "f_E"] \\ E_i \arrow[r, "p_i"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow \alpha_{i'}"] & E \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\alpha_{i'} \in \Gamma} \quad (i' \in I')$$

i.e.

$$\boxed{p_i f_{i'} = \mathrm{int}(\alpha_{i'}) f_E \rho'_{i'}}$$

Notons que c), d) ensemble définissent une donnée de commutation

$$\begin{tikzcd} E'_{i'} \arrow[r, "p'_{i'}"] \arrow[d, "f_{i'}"'] & \Gamma \arrow[d, "|"] \\ E_i \arrow[r, "p_i"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow \beta_{i'}"] & \Gamma \end{tikzcd} \qquad \text{avec } \beta_{i'} = p(\alpha_{i'})\alpha$$

i.e.

$$p_i f_{i'} = \mathrm{int}(\beta_{i'}) p'_{i'}$$

i.e. on a commutativité dans

$$\begin{tikzcd} E'_{i'} \arrow[r, "p'_{i'}"] \arrow[d, "f_{i'}"'] & \Gamma \arrow[d, "\mathrm{int}(\beta_{i'})", "\sim"'] \\ E_i \arrow[r, "p_i"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$

donc $f_{i'}$ induit un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & T(\overline{K}) \arrow[r, "\varkappa'_{i'}"] \arrow[d, "f^{\circ}_{i'}"] & E'_{i'} \arrow[r, "p_{i'}"] \arrow[d, "f_{i'}"] & \Gamma \arrow[d, "\mathrm{int}(\beta_{i'})"] \\ 1 \arrow[r] & T(\overline{K}) \arrow[r, "\varkappa_i"'] & E_i \arrow[r, "p_i"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$

[22] $\alpha_{i'}$ décrit $\alpha_{D^*,U}$

et il faut exprimer la fonctorialité de $f^\circ_{i'}$ avec l'indice de ramification $d_{i'} \in \mathbf{N}$, on trouve

$$\boxed{f^\circ_{i'} = d_{i'}\chi(\beta_{i'})\,\mathrm{id}_{T(\overline{K})}}$$

où

$$\chi : \Gamma \longrightarrow \widehat{\mathbf{Z}}^*$$

est le caractère canonique.

Ceci posé, déterminons, pour un 1-morphisme $f = (f_E, \tau, (f_{i'}), \alpha, (\alpha_i))$ et un autre $f' = (f'_E, \tau', (f'_{i'}), \alpha', (\alpha'_i))$, les 0-morphismes de l'un dans l'autre correspondants à de systèmes d'isomorphismes $\mu_{D^*} : f_{D^*} \longrightarrow f'_{D^*}$, $\mu_U : f_U \longrightarrow g_U$. Cela correspond [à la] *condition*

$$\tau' = \tau, \quad \underbrace{d'_{i'} = d'_i \quad \forall i' \in I'}_{\text{ceci résulte des autres conditions}}$$

et à la donnée de

a) $\boxed{\mu \in E}$[23] définissant un isomorphisme entre $f_E : E' \longrightarrow E$ et $f'_E : E' \longrightarrow E$ i.e. tel que

$$\boxed{f'_E = \mathrm{int}(\mu) f_E}$$

b) $\boxed{\mu_{i'} \in E_i}$[24] $(i' \in I', i = \tau(i'))$ satisfaisant

$$\boxed{f'_{i'} = \mathrm{int}(\mu_{i'}) f_{i'}}$$

ceci implique déjà $d_{i'} = d'_{i'}$. Les $\mu \in E$, $\mu_{i'} \in E_i$ étant liés aux α, α' $(\in E)$, aux $\alpha_{i'}$, $\alpha'_{i'}$ $(\in \Gamma)$ de la façon suivante

$$\boxed{\alpha' = p(\mu)\alpha}$$

$$\boxed{\alpha'_{i'} = \rho_i(\mu_{i'})\alpha'} \quad \forall i' \in I'$$

ou encore

$$\begin{cases} p(\mu) = \alpha'\alpha^{-1} \\ \rho_i(\mu_{i'}) = \alpha'_{i'}\alpha_{i'}^{-1} \end{cases}$$

[23] décrit μ_U

[24] décrit μ_{D^*}

Notons que, comme ρ_i est injectif, les deuxièmes relations, donnant les $\rho_i(\mu_{i'})$, déterminent les $\mu_{i'}$ *de façon unique*, l'existence de ces $\mu_{i'}$ équivaut aux relations

$$\boxed{\alpha_{i'}\alpha_{i'}^{-1} \in \rho_i(E_i)} \qquad i' \in I'$$

Quant à la relation $p(\mu) = \alpha'\alpha^{-1}$, elle détermine μ modulo multiplication (à droite disons) par un $\mu_0 \in \operatorname{Ker} p = \pi$, mais qui doit être tel que l'on ait encore

$$f'_E = \operatorname{int}(\mu\mu_0) f_E$$

(en plus de $f'_E = \operatorname{int}(\mu) f_E$) ce qui signifie que

$$\operatorname{int}(\mu_0) f_E = f_E$$

i.e.

$$\boxed{\mu_0 \in \operatorname{Centr}_\Pi f_E(E')}$$

C'est donc cela l'indétermination exacte dans le choix d'un 0-morphisme des 1-morphismes f et f' de D' dans D.

Si par exemple on est dans les conditions où $\pi \longrightarrow \pi$ induit par $f_E : E' \longrightarrow E$ a une image d'indice fini (image ouverte) — cas d'un “morphisme non constant” ! — alors μ_0 doit centraliser un sous-groupe ouvert de π — sauf erreur cela aussi implique $\mu_0 = 1$, donc il semble bien que (dans les cas correspondants à des homomorphismes dominants de courbes algébriques) une 0-morphisme d'un f dans un f' (s'il existe) est unique, i.e. $\underline{\operatorname{Hom}}(D', D^*)$ est une catégorie *discrète*.

On peut interpréter D comme E muni de *sous-groupes* $E_i \subset E$, et de $p : E \longrightarrow \Gamma$, (noyau π) enfin d'isomorphismes

$$\varkappa_i : T(\overline{K}) \xrightarrow{\sim} E_i \cap \pi = L_i$$

(commutant à l'action de E_i). Si on a une autre système $(E', (\underbrace{E'_{i'}}_{\subset E'})_{i' \in I'}, p' : E' \longrightarrow \Gamma, (\varkappa'_{i'})_{i' \in I'})$, un morphisme du premier dans le second est *défini* par un

$$f : E' \longrightarrow E$$

satisfaisant les conditions suivantes

a) $\forall i' \in I'$, $\exists i \in I$ tel que $f(E'_i)$ soit contenu dans un conjugué de E_i [soit $\alpha_{i'} \in E$ tel que $f(E'_i) \subset \mathrm{int}(\alpha_{i'}^{-1}(E_i))$] i.e. $\mathrm{int}(\alpha_{i'})f(E'_i) \subset E_i$.

b) pf est conjugué de f' [soit $\alpha \in \Gamma$ tel que $pf = \mathrm{int}(\alpha)p'$]

NB Le $i \in I$ correspondant à $i' \in I'$ est unique, d'où $\tau : I' \longrightarrow I$. Si les $\alpha_{i'}$ sont choisis, on déduit $\forall i'$ [un] homomorphisme induit $f_{i'} : E'_{i'} \longrightarrow E_i$, $f_{i'} = (\mathrm{int}(\alpha_{i'}) \circ f)/E'_{i'}$, qui induit dès lors, via les $\varkappa'_{i'}$, $\varkappa_i$, un endomorphisme $f^\circ_{i'} : T(\overline{K}) \longrightarrow T(\overline{K})$[25]. On exige que $\alpha \in \Gamma$ (qui conjugue f_E en f'_E, et est probablement uniquement déterminé par cette condition) et $\alpha_{i'}$ (qui est sans doute déterminé modulo composition à gauche avec élément du normalisateur de E_i (du moins des transporteurs des E_i d'un sous-groupe ouvert de E_i — c'est itou si f est isomorphisme) puissent être choisis de telle façon que, posant $\beta_{i'} = p(\alpha_{i'})\alpha$, on ait

$$f^\circ_{i'} = (d_{i'}\chi(\beta_{i'}))\,\mathrm{id}_{T(\overline{K})} \quad \text{i.e.} \quad \chi_{i'} = d_{i'}\chi(\beta_{i'})$$

où $d_{i'} \in \mathbf{N}^*$ est un entier naturel (évidement uniquement déterminé quand α et les $\alpha_{i'}$ sont choisis)[26].

[25]**NB** A priori $f^\circ_{i'}$ est la multiplication par un $\chi_{i'} \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$; le centralisateur dans Γ d'un sous-groupe ouvert est réduit à l'unité.

[26]Cette condition sur les systèmes des $\alpha_{i'}$ ne change pas (α restant fixé) si on change $\alpha_{i'}$ en $\mu_{i'}\alpha_{i'} \in E_i$.

§ 8. — RÉFLEXIONS TAXONOMIQUES

Le cas $\dim X = 0$ se traduit sur le paradigme du système

$$(\ T(\overline{K}) \xrightarrow{x_i} E_i \xhookrightarrow{\rho_i} E \xrightarrow{p} \Gamma \ )$$

par la condition p injectif et donc $I = \varnothing$ — donc ce cas se décrit simplement par la donnée d'un *sous-groupe* ouvert de $E \hookrightarrow \Gamma$, i.e. une sous-extension finie L de $\overline{K}/K$ (NB on aura bien sûr $X' = \operatorname{Spec} L$, et le choix faits sur X — i.e. sur $\Pi_{D^*}(= \varnothing) \longrightarrow \Pi_U \longrightarrow \Pi_e$ — aboutissant à cette description, reviennent ici au choix d'une telle K-immersion de $L = \mathrm{H}^0(X, O_X)$ dans $\overline{K}/K$).

Le cas $\dim X = 1$ se traduit par le fait que $E \longrightarrow \Gamma$ n'est pas injectif — quand à I, il peut être vide ou non dans ce cas. S'il est vide, la description se fait donc simplement en termes d'un homomorphisme de groupes profinis $E \xrightarrow{p} \Gamma$ (où Γ donnée d'avance $= \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)) = \mathrm{Aut}_{\Pi_e}(\Omega)$).

Supposons données maintenant à la fois $D = (E, p, I, (\rho_i : E_i \hookrightarrow E), (x_i : T(\overline{K}) \longrightarrow E_i))$ et $D' = (E', p', I', (\rho'_i), (x'_i))$, et revenons à la question de la description des morphismes de D' dans D. On va distinguer quatre cas suivant les deux valeurs possibles 0, 1 de $n = \dim D$ et $n' = \dim D'$ respectivement.

I) $n = 0$, $n' = 0$, $I = I' = \varnothing$ et les données se réduisent à des sous-groupes ouverts $E \overset{p}{\hookrightarrow} \Gamma$, $E' \overset{p'}{\hookrightarrow} \Gamma$. Dans la pesante description plus haut, les considérations relatives à I, I' tombent et un morphisme $D' \longrightarrow D$ revient à une classe de couples (f, α), où $f : E' \longrightarrow E$ et $\alpha \in \Gamma$, tels que l'on ait

$pf = \mathrm{int}(\alpha)f$

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Gamma \arrow[r, "\sim", "\mathrm{int}(\alpha)"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$

— ce qui implique que f est déjà déterminé par α, étant induit par $\mathrm{int}(\alpha)$ [α assujetti à $\alpha \in \mathrm{Trans}_\Gamma(E', E) = \mathrm{Trans}_\Gamma(L, L')$] [qui induit bien un homomorphisme de $L \subset \overline{K}$ dans $L' \subset \overline{K}$, donc un homomorphisme $\mathrm{Spec}(L') \longrightarrow \mathrm{Spec}(L)$ en sens inverse].

La condition que α, $\alpha' \in \Gamma$ définissent le même morphisme $D' \longrightarrow D$ (ou encore $\mathrm{Spec}\,L' \longrightarrow \mathrm{Spec}\,L$) se décrit par l'existence d'un $\mu \in E$ tel que $\alpha' = \mu\alpha$. Le fait qu'on trouve une correspondance 1-1 entre $\mathrm{Hom}_K(X', X) \simeq \mathrm{Hom}_K(L, L')$ avec $\mathrm{Hom}(D', D)$ explicité aussi, est clair.

II) $n' = 1$, $n = 0$. Ici $n = 0$ implique déjà $I = \varnothing$. Pour que $\mathrm{Hom}(X', X) \neq \varnothing$, il faut que l'on ait $I' = \varnothing$ (par la condition $\underbrace{F^{-1}(S)}_{=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing} = S'$ qui implique $S' = \varnothing$, si $f : (X', S') \longrightarrow (X, S)$) — dans la description des morphismes $D' \longrightarrow D$, cela correspond au fait qu'on ne peut avoir d'application $\tau : I' \longrightarrow I (= \varnothing)$ que si $I' = \varnothing$. Se bornant donc au cas $I' = \varnothing$ (sinon $\mathrm{Hom}(X', X) = \mathrm{Hom}(D', D) = \varnothing$ et on est heureux), on trouve donc que D revient à la donnée de $E \overset{p}{\hookrightarrow} \Gamma$ sous-groupe ouvert, et D' à la donnée d'un homomorphisme de groupes profinis $p' : E' \longrightarrow \Gamma$, dont l'image sera un sous-groupe ouvert de Γ, soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$, correspondant à une sous-extension finie L' de $\overline{K}/K$. Les choix faits relatifs à X' implique qu'on a un isomorphisme fixé $L' \simeq \mathrm{H}^0(X', \underline{\mathcal{O}}_{X'})$. Ceci dit, un K-morphisme de $(X', \varnothing)$ dans $(X, \varnothing)$ i.e. de $X' \longrightarrow X$ revient (comme X affine) à la donnée d'un K-morphisme $\mathrm{Spec}\,L' \longrightarrow X$ ($\simeq \mathrm{Spec}\,L$) de l'enveloppe affine, i.e. d'un K-homomorphisme $L \longrightarrow L'$ (ce qui ne dépend que de L, L' ou encore que des sous-groupes $E \hookrightarrow \Gamma$ et $\Gamma_0 \hookrightarrow \Gamma$ de Γ). D'autre part la description en termes des diagrammes D, D' revient à dire qu'un morphisme est déterminé par un couple (f, α), $f : E' \longrightarrow E$ et

$\alpha \in \Gamma$, tels que l'on ait encore commutativité

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, hook, "p"] \\ \Gamma \arrow[r, "\mathrm{int}(\alpha)"] & \Gamma \end{tikzcd} \qquad pf = \mathrm{int}(\alpha)p'$$

ce qui implique encore que f est déterminé par α (savoir, induit par $\mathrm{int}(\alpha)$), et α étant sujet à la seule condition

$$\alpha \in \mathrm{Transp}_\Gamma(\Gamma_0', E)$$

— et α, α' décrivant le même homomorphisme si et seulement si $\exists \mu \in E$ tel que

$$\alpha' = \mu\alpha$$

donc on a encore

$$\mathrm{Hom}(D', D) \simeq_E \backslash \mathrm{Transp}_\Gamma(\Gamma_0', \Gamma)$$

$$\simeq \mathrm{Transp}_\Gamma(L, L')/\mathrm{Fix}_\Gamma(L)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{K-\mathrm{ext}}(L, L')$$

donc on trouve encore dans ce cas le pleine fidélité.

En fait, on aurait pu traiter ensemble les deux cas ($n' = 0, n' = 1$) où $n = 0$, et la description de $\mathrm{Hom}(X, X')$ en termes de D, D' est valable d'ailleurs, sans faire des hypothèses draconiennes (projective, lisse, dimension ≤ 1, anabélienne) sur X'.

En effet, comme X est fini étale sur K, son image inverse $X_{X'} = X' \times_K X$ sur X' est fini étale sur X', et

$$\mathrm{Hom}_K(X, X') \simeq \mathrm{Sections}(X_{X'}/X')$$

peut se décrire en termes de la catégorie $\widehat{\Pi_1(X')}(= \Pi_U)$ des systèmes locaux finis sur X' i.e. des systèmes locaux finis sur Π_U. Suivant cette description, on aboutit à la description commune donnée dans I, II, sans aucune hypothèse autre sur X que la 0-connexité (pour pouvoir décrire $\Pi_U = \Pi_{X'}$ sur Π_e en termes d'un homomorphisme de groupe $p' : E' \longrightarrow \Gamma \dots$)

Quand on se donne (X', S'), avec S' pas nécessairement vide, X' 0-connexe (et X' lisse de dimension 1 aux points de S' (il suffirait même que S' ne disconnecte pas localement pas localement (ét) X', donc $X' \backslash S'$ 0-connexe…), alors la donnée $\Pi_1(X' \backslash S') \longrightarrow \Pi_1(e_K)$ es décrite encore par $E' \xrightarrow{p'} \Gamma$ (indépendamment de la considération des E_i etc) et par suite $\mathrm{Hom}_K(X' \backslash S', X)$ est décrit comme on vient de dire. Mais on a (avec les hypothèses de normalité sur X' aux points de S') $\mathrm{Hom}_K(X' \backslash S', X) = \mathrm{Hom}_K(X', X)$. Ceci encourage à modifier la définition des morphismes $(X', S') \longrightarrow (X, S)$ donnée au début, via $f : X' \longrightarrow X$ avec $f^{-1}(S)_{\mathrm{red}} = S'$, en exigeant ceci non pour f, mais seulement pour la restriction de f à la réunion des composantes irréductibles de X' qui son envoyées dans des composantes irréductibles de X non discrète i.e. non réduites à un point. Dans la description correspondante D', D, on spécifiait que l'on n'exige la donnée d'une application $I' \longrightarrow I$ (et des données correspondantes $f_{i'}$, $\alpha_{i'}$) *que* si $n \neq 0$ i.e. $p_{si} : E \longrightarrow \Gamma$ pas injectif - dans le cas contraire (impliquant $I = \varnothing$) si par hasard $I' \neq \varnothing$, on laisse tomber la connaissance des I' et des éléments de structure correspondants.

III) $n' = 0$, $n = 1$. Ici on a donc $I' = \varnothing$, $p' : E' \hookrightarrow \Gamma$ i.e. D' se réduit à la donnée d'un sous-groupe ouvert $E \hookrightarrow \Gamma$ de Γ.

Du coté $(X', S' = \varnothing)$ et (X, S), la condition $f^{-1}(S)_{\mathrm{red}} = S' = \varnothing$ sur le K-morphisme $f : X' \longrightarrow X$ implique que f se factorise par $X' = \mathrm{Spec}(L') \longrightarrow X \backslash S$, sans préjudice si $S = \varnothing$ ou non, i.e. si $I = \varnothing$ ou non. Donc il s'agit de décrire $\mathrm{Hom}_{K-\mathrm{Sch}}(X', S \backslash S)$, en termes de $\Pi_1(X') \longrightarrow \Pi_e = \Pi_1(e_K)$ et de $\underbrace{\Pi_1(X \backslash S)}_{=\Pi_U} \longrightarrow \Pi_e$. Ici les éventuelles donnés supplémentaires relatives à I ne servent pas explicitement à la description, en termes de diagrammes de groupoïdes.

Sauf erreur, une réduction facile (descente galoisienne) nous ramène au cas où $X' = \mathrm{Spec}\, K$ i.e. $E' \hookrightarrow \Gamma$. La description des homomorphismes $D' \longrightarrow D$ est alors encore en terme des couples (f, α), où $f : \Gamma' = \Gamma \longrightarrow E$ et où

$\alpha \in \Gamma$ avec les sempiternelles conditions $pf = \mathrm{int}(\alpha)p'$, qui devient (comme $p' = \mathrm{id}$))

$$pf = \mathrm{int}(\alpha).$$

Ici bien sûr α ne décrit plus f (mais l'inverse est vraie, ici la connaissance de f de $pf \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ implique celle de α, i.e. $\mathrm{Centr}(\Gamma) = \{1\}\dots$). Les couples (f,α) et (f',α') définissent le même morphisme de diagramme, si et seulement si $\exists \mu \in E$ tel que $f' = \mathrm{int}(\mu)\circ f$, $\alpha' = p(\mu)\alpha$. Comme (si $\exists (f,\alpha)$) p surjectif, on veut que, quitte à choisir μ au-dessus de α^{-1}, et de remplacer (f,α) par $(f',\alpha') = (\mathrm{int}(\mu)f, p(\mu)\alpha)$, on peut toujours décrire un morphisme $D' \longrightarrow D$ par (f,α) avec $\alpha = 1$ donc par une *section* f de l'homomorphisme $E \longrightarrow \Gamma$, et deux sections f, f' (correspondant à $(f,1)$, $(f',1)$) définissent le même homomorphisme de D' dans D, si et seulement si $\exists \mu \in E$ tel que $p(\mu) = 1$, i.e. $\mu \in \pi = \mathrm{Ker}(p)$, et tel que $f' = \mathrm{int}(\mu)\circ f$.

Ainsi, les morphismes de D' (correspondant à $X' = \mathrm{Spec}\, K$) dans D correspondent exactement aux classes de scindages de $E \xrightarrow{p} \Gamma$, modulo automorphismes intérieures par des $\mu \in K = \mathrm{Ker}\, p$. La "conjecture bordelique" dans le cas III équivaut donc à ceci:

$$\Gamma((X,S)/K) \longrightarrow \text{Classes de } \pi-\text{conjugaison de sections de } E \longrightarrow \Gamma$$

$$\text{i.e de sections de } \Pi_1(X) \longrightarrow \Pi_1(e_K)$$

est bijective (si (X,S) est un couple permis "anabélien")[27].

Je sais en tout cas que cette application est *injective* — ceci vaut chaque fois qu'on a un schéma U sur K (ici $X \setminus S$) qui se plonge dans un groupe algébrique G extension d'une variété abélienne par un tore, et résulte alors du théorème de Mordell-Weil "absolu" : $G(K)$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini. En fait, il suffit de connaître la classe de splittage de l'extension $E^\natural$ de Γ par $\pi_{ab} = \pi/\overline{[\pi,\pi]} \simeq \mathrm{H}_1(U)$, correspondant à un point de U rationnel sur K pour connaître ce point. Donc le résultat de fidélité est obtenu, avec des

[27] Faux tel que, cf. n°9 ci-dessus - il faut des conditions supplémentaires sur les $f\dots$ *Peut-être* si $I = \varnothing$.

hypothèses moins draconiennes sur X que l'hypothèse anabélienne (avec les notations du lemme 5.2, cela signifie que $g=0 \Rightarrow n \geq 2$ i.e. qu'il n'y a pas de composante irréductible de $U_{\overline{K}}$ qui soit isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ ou $\mathbb{E}^1_{\overline{K}} \ldots$).

NB Ceci suggère une approche de la conjecture de Mordell, via une meilleure connaissance des extensions de Γ par π : le fait qu'il n'a ait (pour $g \geq 2$) qu'un nombre fini de classes de π-conjugaison de scindages d'une telle extension…

Itou pour une approche du théorème de Fermat, via une bonne connaissance d'une extension de Γ par $\pi = \pi_1(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \backslash \{0,1,\infty\}) \ldots$

IV) $n=1$, $n'=1$ i.e. X, X' de dimension 1.

a) Si $I = I' = \varnothing$, je n'ai rien à ajouter à la description des morphismes $f : X \longrightarrow X'$ en termes de morphismes de diagrammes de groupoïdes. Ici la condition $f^{-1}(S)_{\text{réd}} = S'$ n'est pas une restriction sur f — on n'exclut donc pas des applications constantes. Celles-ci (grâce à l'étude du cas II) sont d'ailleurs décrites de façon "pleinement fidèle" pas des homomorphismes de diagrammes — ils correspondent aux cas $f : E' \longrightarrow E$ qui sont nuls sur π'.

b) Le cas $I' = \varnothing$, $I \neq \varnothing$ (i.e. $S' = \varnothing$, $S \neq \varnothing$) signifie, avec la condition $f^{-1}(S)_{\text{réd}} = S'$ i.e. $f^{-1}(S) = \varnothing$, que f doit appliquer X' dans $X \backslash S$, donc que tout f correspond à un morphisme de $(X', \varnothing)$ dans (X, S) soit constant. La conjecture bordélique dans ce cas exprime donc essentiellement qu'au niveau des homomorphismes $E' \xrightarrow{p'} \Gamma$ et $E \xrightarrow{p} \Gamma$, tout homomorphisme des groupes $E' \xrightarrow{f} E$ tel que $pf = \operatorname{int}(\alpha)p'$ pour $\alpha \in \Gamma$ [on est ramené au cas où $\alpha = 1$, p, p' surjectifs, i.e. aux homomorphismes d'extensions de Γ par des groupes $\pi = \pi_1(\overline{X \backslash X})$ et $\pi' = \pi_1(\overline{X'})$] est trivial sur π' [i.e. "est" une section]. Il faudrait essayer de vérifier ce point directement, qui (modulo le cas III) établirait la "conjecture bordélique" dans ce cas-là.

c) Le cas $I' \neq \varnothing$, $I = \varnothing$ implique que $\operatorname{Hom}((X,S),(X',S')) = \varnothing$ (cas $f^{-1}(S) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \neq S'$!), ce qui correspond bien à $\operatorname{Hom}(D', D) = \varnothing$ puisque $\nexists \tau : I' \longrightarrow I$.

d) Dans le cas $I' \neq \varnothing$, $I \neq \varnothing$, la condition $f^{-1}(S)_{\text{réd}} = S'$ implique que f n'est pas constante (sinon on aurait $f^{-1}(S)_{\text{réd}} = \varnothing$ ou X'), donc f est dominant et fini, génériquement étale. Donc, de tels f ne peuvent intervenir que si I et I' soit tous deux $\varnothing$ (cas a), soit tous deux $\neq \varnothing$ (cas actuel d)). Le fait que dans ces cas-là, la description diagrammatique galoisienne soit *fidèle* (peut-être pas pleinement) résulte aisément du résultat analogue dans le cas III.

La pleine fidélité par contre est chose mystérieuse, même si le résultat correspondant dans le cas III était acquis (et encore semble loin, même si K fini sur $\mathbf{Q}$…).

Réductions élémentaires. Pour prouver la "conjecture bordélique", on est ramené (par des extensions finies du corps K) au cas où $E \longrightarrow \Gamma$ (et, si on y tient, aussi $E' \longrightarrow \Gamma$) est épimorphique. Sauf erreur, la connaissance du cas III pour des extensions de type fini de K, implique le cas général pour K (avec suffisamment de sueurs techniques…).

Revenant cependant au cas général quand $E \longrightarrow \Gamma$ est surjectif, dans toute classe d'équivalence de systèmes $(f : E' \longrightarrow E, \alpha \in \Gamma, \tau : I' \longrightarrow I, (\alpha_i \in E_{\tau(i')=i})_{i' \in I'})$, on peut trouver un système avec $\alpha = 1$, de sorte que $f : E' \longrightarrow E$ soit compatible avec les homomorphismes dans Γ (i.e. les structures d'extension). Quand on se borne à de tels systèmes, l'équivalence par conjugaison se fait par un système $(\mu, (\mu_{i'})_{i' \in I'})$ avec $\mu \in \pi$ ($= \operatorname{Ker} p$), et les $\mu_{i'} \in E_{i=\tau(i')}$ comme avant. Ainsi, $f : E' \longrightarrow E$ est un homomorphisme d'extensions, défini modulo automorphisme intérieur par un élément de $\pi = \operatorname{Ker}(E \longrightarrow \Gamma)$, et satisfaisant à des conditions explicitées par ailleurs. Il se pourrait (comme on a déjà remarqué) que la connaissance de la classe de π-conjugaison de f suffise à déterminer le "morphisme bordélique" dans lequel f s'insère (si $I, I' \neq \varnothing$).

[C'est lié à la question de savoir si $\forall d \in \mathbf{N}^*$, $\operatorname{Trans}_E(L_i^d, L_i)$ est réduit à E_i (où $L_i = \operatorname{Ker}(p_i : E_i \longrightarrow \Gamma) = \operatorname{Im}(\varkappa_i : T(\overline{K}) \longrightarrow E_i)$). Dans ce cas, E_i serait connu en termes de $L_i \subset \pi$, et même en termes du noyau de sous-groupes qu'il définit dans π, et a fortiori en termes des noyaux d'homomorphismes définis par $\varkappa_i : T(\overline{K}) \longrightarrow \pi$…

Cas où $E_i \longrightarrow \Gamma$ sont surjectifs (i.e. les $k(s_i) = K$ i.e. s_i rationnel sur K).

Alors si $(f,\tau,(\alpha_{i'}))$ est un homomorphisme de D' dans D, quitte à corriger par des $\mu_i \in E_i$ ayant même image que les $\alpha_{i'}$ dans Γ, on peut supposer $\alpha_{i'} \in \pi$, en plus de $\alpha = 1$ (obtenu en corrigeant par μ convenable). Donc on décrit l'homomorphisme $D' \longrightarrow D$ par $(f,1,\tau,(\alpha_{i'}))$, les $\alpha_{i'}$ appartenant à π. La condition ici est que $f : E' \longrightarrow E$ soit un homomorphisme de groupes sur Γ, que $f(E'_{i'}) \subset \operatorname{int}(\alpha_{i'}^{-1} E_{\tau(i')=i})$, et que l'homomorphisme induit $E'_i \longrightarrow E_{i'}$ par $\operatorname{int}(\alpha_{i'})f$ induit sur $T(\overline{K})$ (*via* $\varkappa_{i'}, \varkappa_i$) *l'homomorphisme de multiplication par* d_i sans plus — que c'est beau ! Deux systèmes $(f,\tau,(\alpha_i,1))$ et $(f',\tau',(\alpha'_i,1))$ définissent le même morphisme, si et seulement si $\tau = \tau'$ et s'il existe $\boxed{\mu \in \pi, \mu_{i'} \in L_{i=\tau(i')} = \varkappa_i(T(\overline{K}))}$ tels que

$$f' = \operatorname{int}(\mu) f$$

$$\alpha'_{i'} = \mu_{i'} \alpha_{i'}$$

Notons qu'à priori, pour (f,τ) fixé, les $\alpha_{i'}$ sont déterminés modulo multiplication à droite par des éléments de $\operatorname{Transp}_\pi((L)_i^{d_{i'}}, L_i)$, qui est sans doute $= L_i = \operatorname{Ker}(\varkappa_i : E_i \longrightarrow \Gamma) = 1 = \operatorname{Im}(\pi_i : T(\pi) \longrightarrow E_i \pi)$. Donc on trouve que la classe de π-conjugaison de groupes sur Γ de $f : E' \longrightarrow E$ suffit à déterminer l'homomorphisme $D' \longrightarrow D$ dans la catégorie bordélique. Je présume qu'un peu de sueur permettrait de prouver que cela marche encore dans le cas général (sans supposer les $\Gamma_i = \operatorname{Im}(E_i \longrightarrow \Gamma)$ égaux à Γ). Cela signifie (dans le cas actuel) que la structure essentielle qui décrit (X,S) est celle *d'"extension extérieure"* de Γ par un groupe π [homomorphisme extérieur surjectif d'un groupe, de noyau sur π], avec π muni d'une *structure à lacets* i.e. *d'homomorphismes extérieurs* $\varkappa_i : T(= T(\overline{K}) \simeq \hat{\mathbf{Z}}) \longrightarrow \pi$ (satisfaisant certaines conditions), les homomorphismes de $E' \longrightarrow \Gamma$ (noyau π') dans $E \longrightarrow \Gamma$ (noyau π) étant les classes de π-conjugaisons d'homomorphismes $E' \longrightarrow E$ de groupes sur Γ, induisant des homomorphismes $\pi' \longrightarrow \pi$ compatibles avec la structure à lacets.

§ 9. — STRUCTURE TANGENTIELLE EN LES $s \in S$

Les sections d'extensions "de deuxième type"

Revenant à la description "intrinsèque" des (X,S) par $\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U \longrightarrow \Pi_e$, un $s_i \in S$ correspond donc à une composante connexe de $\Pi_{D_i^*}$ dans Π_{D^*}, ou un Π_{D_i} de son quotient Π_D — considérons $\Pi_{D_i^*} \xrightarrow{\sigma_i = \sigma_{D_i^* D_i}} \Pi_{D_i}$. On va décrire certaines sections (à isomorphisme près) de ce morphisme de groupoïdes, i.e. des couples (γ, λ) ou γ est un foncteur $\Pi_{D_i} \xrightarrow{\gamma} \Pi_{D_i^*}$ et λ un isomorphisme $\sigma_i \circ \gamma \simeq \mathrm{id}$.

Si on choisit un $\widetilde{D_i^*} \in \mathrm{Ob}\,\Pi_{D_i^*}$ (revêtement universel de D_i^*) d'où [un] homomorphisme surjectif $E_i = \mathrm{Aut}(\widetilde{D_i^*}) \longrightarrow \Gamma_i = \mathrm{Aut}(\sigma_i(\widetilde{D_i^*}) = \widetilde{D_i})$, la donnée de (γ, λ), et d'un isomorphisme $\gamma(\widetilde{D_i}) \simeq \widetilde{D_i^*}$ donnant l'isomorphisme identique par application des σ_i, revient à celle d'un homomorphisme $\Gamma_i \longrightarrow E_i$ — et les classes d'isomorphismes des couples (γ, λ) correspondent aux classes de L_i-conjugaison ($L_i = \mathrm{Ker}(E_i \longrightarrow \Gamma_i)$) de sections de l'extension E_i de Γ_i par L_i.

Ceci posé, on a

$$\Gamma_i = \mathrm{Gal}(\overline{K}_i / K_i)$$

où $K_i = K(s_i)$, $\overline{K}_i$ est la clôture algébrique de K_i définie par $\widetilde{D_i}$ (à priori, elle n'est pas canoniquement isomorphe à $\overline{K}$ sur K...), et les classes de scindages d'extensions forment un *torseur* Σ_i (s'il y en a, et on sait qu'il y en a...) sous $\mathrm{H}^1(\Gamma_i, L_i)$, ou encore, comme $\varkappa_i : L_i \xleftarrow{\sim} T(\overline{K}_i)$, sous $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(\overline{K}_i/K_i), T(\overline{K}_i)) \simeq$

$\mathrm{H}^1(K_i, T_l(\mathbb{G}_m)) \simeq \varprojlim_n \mathrm{H}^1(K_i, \mu_n)$. Or la suite exacte de Kummer donne

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(K_i, \mathbb{G}_m)_n & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(K_i, \mu_n) & \longrightarrow & {}_n\mathrm{H}^1(K_i, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & 0 \\ & & \Vert & & & & \Vert & & \\ & & (K_i^*)_n & & & & 0 & & \end{array}$$

i.e. $\mathrm{H}^1(K_i, \mu_n) \simeq (K_i^*)_n$, donc $\mathrm{H}^1(K_i, T(\mathbb{G}_m)) \simeq \varprojlim_n (K_i^*)_n$

Notons qu'on a un homomorphisme kummérien

$$K_i^* \longrightarrow \underbrace{\mathrm{H}^1(K_i, T(\mathbb{G}_m))}_{H_i} \simeq \varprojlim (K_i^*)_n$$

dont le noyau est formé des $x \in K_i^*$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $x \in K_i^{*n}$. Comme K_i est de type fini sur $\mathbf{Q}$, cet homomorphisme est injectif, i.e. K_i^* s'identifie à un sous-groupe de H_i.

Ceci posé, on va définir, dans le torseur Σ_i sous H_i des scindages de D_i^* sur D_i, un sous-K_i^*-torseur (i.e. un élément de Σ_i/K_i^*). Pour ceci, considérons plus généralement le cas d'un corps k ($= K_i$) de caractéristique 0, et d'une k-algèbre O qui est une jauge hensélien de corps résiduel k. Soit L le corps des fractions de O. On va, pour tout uniformisante t de O, définir une section (γ, λ) du groupoïde des clôtures algébriques de L, vers celui ses revêtements universels de $\operatorname{Spec} O$ ou, ce qui revient au même, des clôtures algébriques de k. Pour ceci, soit $O(n,t) = O[T_n]/(T_n^n - t)$, et $O(\infty, t) = \varinjlim_n O(n,t)$, par $T_n \mapsto T_{mn}^m$.

Soit $L(n,t) = O(n,t) \otimes_O K =$ corps de fractions de $O(n,t)$, $L(\infty,t) = \varinjlim L(n,t)$ le corps des fractions de $O(\infty, t)$. C'est une extension algébrique de L et pour tout extension finie ou ind-finie k' de k, posant $O' = O \otimes_k k'$ (qui est aussi une jauge hensélienne sur k' de corps résiduel k', de corps des fractions $L' \simeq L \otimes_k k'$), on a des isomorphismes canoniques

$$O(n,t) \otimes_O O' \simeq O'(n,t)$$

$$O(\infty,t) \otimes_O O' \simeq O'(\infty,t)$$

d'où

$$L(n,t) \otimes_k k' \simeq L'(n,t)$$

$$L(\infty,t)\otimes_k k' \simeq L'(\infty,t)$$

Or si k' est algébriquement clos O' strictement hensélien, on sait que $L'(\infty,t)$ est alors algébriquement clos. D'ailleurs comme $K' \subset O'(\infty,t) \subset L'(\infty,t)$ dans ce cas k [?] s'identifie à la clôture algébrique $\overline{k}$ de k dans $L'(\infty,t) = \overline{L}$. Donc on a bien trouvé une section de Π_{D^*} sur Π_D.

Mais si on remplace s par $s' = su^n$, avec $u \in O^*$, on trouve des isomorphismes

$$\lambda(n,u) : O(n,s)(= O[T_n]/(T_n^n - s)) \longrightarrow O(n,s')(= O[T_n]/(T_n^n - s'))$$

$$\text{par } T_n \mapsto uT_n$$

d'où par passage à la limite

$$\lambda(\infty,n) : O(\infty,s) \longrightarrow O(\infty,s')$$

induisant

$$L(\infty,s) \xrightarrow{\sim} L(\infty,s')$$

isomorphisme d'extension de L, d'où un isomorphisme entre les sections correspondantes des Π_L sur Π_k. Ceci implique que si s, s' diffèrent par un $v \in O^*$ tel que son image dans k soit 1 (i.e. $v \in 1 + m$ [qui est un sous-groupe divisible de O^*] alors s, s' définissent des sections isomorphes).

On trouve une application canonique

$$\begin{array}{ccc} (m/m^2)^* & & (\text{classes d'isomorphie de sections de } \Pi_L \text{ sur } \Pi_k \\ & & \text{i.e. de } \mathrm{Gal}(\overline{L}/L) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \\ (\text{ensemble des bases de } m/m^2) & \longrightarrow & \text{qui est un torseur sous } \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), T(\overline{k})) \\ \text{qui est un torseur sous } k^* & & \text{i.e. sous } \mathrm{H}^1(k, T(\mathbb{G}_m))\ldots) \end{array}$$

On constate aussitôt que cette application est compatible avec l'homomorphisme

$$\theta : k^* \longrightarrow \mathrm{H}^1(k, T(\mathbb{G}_m))$$

sur les groupes d'opérateurs de ces torseurs.

Dans le cas où cet homomorphisme est injectif (par exemple k de type fini sur $\mathbf{Q}$) on trouve donc un plongement de m/m^2 comme un sous $\theta(k^*)$-torseur du $\mathrm{H}^1(k, T(\mathbb{G}_m))$-torseur des scindages de Π_{D^*} ($\simeq$ groupoïde des clôtures algébriques de L) sur Π_D ($\simeq$ groupoïde des clôtures algébriques de k).

Revenant au cas des $\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U \longrightarrow \Pi_e$, $K\ldots$ et des $D : T(\overline{K}^*) \xrightarrow{x_i} E_i \hookrightarrow E \xrightarrow{p} \Gamma$ qui les explicitent, on trouve donc une structure supplémentaire sur ce D via les extensions E_i de $\Gamma_i \subset \Gamma$ par $T(\overline{K}^*)$, savoir $\forall i \in I$, un sous-K_i^*-torseur dans le torseur sous $\mathrm{H}^1(K_i, T(\mathbb{G}_m)) \simeq \varprojlim(K_i^*)_n$ des classes de scindages de E_i. Il faudrait expliciter le comportement de cette structure supplémentaire relativement à des morphismes (provenant de situations géométriques) et la relation avec la norme des 1-formes différentielles - j'ai la flemme de l'expliciter en long en en large !

La chose nouvelle que je retiens surtout, c'est que pour $I \neq \varnothing$ et les $E_i \longrightarrow \Gamma$ surjectifs (pour simplifier), on trouve $\forall i$ une "famille trancendante" de scindages de $E \longrightarrow \Gamma$ (via les scindages de E_i sur Γ) - essentiellement [?] par $\mathrm{H}^1(K, T(\mathbb{G}_m)) \simeq \varprojlim(K^*)_n$ (plus précisément, par un torseur sous le dit) - dans cette famille, une sous-famille de scindages qu'on peut qualifier de "géométriques", indexée par K^* (plus précisément, un sous-torseur...). On vérifie que les classes de π-scindages obtenus par des indices i, i' distincts sont distinctes, même en se ramenant aux scindages correspondants de l'extension de Γ par π_{ab} déduite de l'extension E de Γ par π (je ne fais pas le détail des vérifications, via Mordell-weil...) et distincts des scindages associées aux points rationnels sur K de $X \backslash S$.

Il faudrait corriger la conjecture bordélique dans le cas III, en énonçant (sous toutes réserves, encore !) qu'il n'y a (peut-être) pas d'autres scindages de l'extension E par π que ceux-là...

§ 10. — AJUSTEMENT DES HYPOTHÈSES (REMORDS)

Je me rends compte que dans la définition des morphismes $(X', S') \xrightarrow{f} (X, S)$, l'hypothèse $f^{-1}(S)_{\mathrm{red}} = S'$ est étriquée - il faut prendre des morphismes *quelconques* $X' \backslash S' \xrightarrow{f} X \backslash S$ (se prolongeant bien sûr en $\hat{f} : X' \longrightarrow X$). On aura donc $S' \supset \hat{f}^{-1}(S)_{\mathrm{red}}$, mais S' peut être strictement plus grand que $\hat{f}^{-1}(S)_{\mathrm{red}}$.

Il faut ajuster en conséquence la description de la "catégorie bordélique" - les objets restent les diagrammes de groupoïdes $D : \Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U \longrightarrow \Pi_e$ (plus donnée de Kummer), mais un morphisme d'un D' dans un D ne définit plus nécessairement un $\Pi'_{D^*} \longrightarrow \Pi_{D^*}$ (en plus de $\Pi'_U \longrightarrow \Pi_U$) il faut se donner une partie I'_f de $I' = \pi_0(\Pi'_{D^*})$ et se donner seulement $\Pi'_{D^*, I'_f} \xrightarrow{f_{D^*}} \Pi_{D^*}$ (avec donnée de commutation $\alpha_{D^*,U}$ relative au carré avec f_U). Bien sûr, dans la description en termes de E', E etc, on exige que pour $i' \in I' \backslash I'_f$, $f_E : E' \longrightarrow E$ est trivial sur $E'_{i'} \subset E'$ - et τ est défini comme $I'_{f'} \longrightarrow I$; les données relatives aux $i' \in I'_{f'}$ ($f_{i'} : E_{i'} \longrightarrow E_{i=\tau(i')}$, les $\alpha_{i'} \in E$) sont pareilles que dans le cas envisagé précédemment.

N.B. Cela signifie en fait qu'on commence à "boucher les trous" (de X') correspondants aux $i' \in I' \backslash I'_{f'}$, en remplaçant E' par le groupe quotient de E' par le sous-groupe invariant engendré par les $L_{i'} = \varkappa_{i'}(T(\overline{K}))(i' \in I' \backslash I'_{f'})$, et les $E_{i'}(i' \in I'_f)$ par leurs images dans le dit groupe quotient, et en oubliant $I' \backslash I'_{f'}$ i.e. remplaçant I' par I'_f.

[Pour bien faire, il faudrait exprimer ces opérations aussi au niveau des diagrammes de groupoïdes $\Pi'_{D^*} \longrightarrow \Pi'_U \longrightarrow \Pi_e \dots$].

Cela signifie donc qu'en fait, on s'est ramené à la situation envisagée au début, où $S' = \hat{f}^{-1}(S)$…Donc finalement la différence des deux points de vue n'est pas énorme, et celui adopté au début a l'avantage de l simplicité plus grande (tout est relatif !)

§ 11. — CONDITIONS SUR LES SYSTÈMES DE GROUPOÏDES OBTENUS À PARTIR DE SITUATIONS GÉOMÉTRIQUES

On en a déjà cité au passage, par exemple que les groupes noyaux de $\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_e$ sont abéliens (avec l'isomorphisme de Kummer $\varkappa$) et que les images sont des sous-groupes ouverts, et de même pour l'image des π_1 dans le cadre de l'interprétation en termes de

$$T(\overline{K}) \xrightarrow{\varkappa_i} E_i \xrightarrow{\rho_i} E \xrightarrow{p} \Gamma$$

(cas de la "dim 1" - on n'exclut pas le cas $I = \varnothing$ le cas "dim 0" étant trivial...)

a) L'image Σ de p est ouverte, plus précisément il existe un sous-groupe ouvert $\Gamma' \subset \Gamma$ au dessus du quel E ait une section [et même une "section admisible" en un sens qui sera défini par la suite - de sorte à exclure les sections "triviales" provenant des E_i...].

b) L'image Σ_i de E_i dans Γ est ouverte, et l'extension E_i de Σ_i par $L_i(\simeq (\overline{K}))$ est triviale. [En fait, on a une classe privilégiée de scindages, dits "algébriques", formant un torseur sous $K_i^* \hookrightarrow \varprojlim (K_i^*)_n$, cf n° 9 – mais on ne va pas considérer pour l'instant cet élément de structure supplémentaire...]

Le reste des conditions concerne essentiellement la structure des groupes

$$\pi = \mathrm{Ker}(p : E \longrightarrow \Gamma)$$

avec ses classes de conjugaison de sous-groupes (ou plutôt les homomorphismes extérieures $\varkappa_i : T(= T(\overline{K}^*) \longrightarrow \pi)$, et la façon dont Σ opère extérieurement sur π. Ces conditions s'expriment de façon particulièrement simple lorsque les $\Sigma_i \subset \Gamma$ sont égaux à Γ ("les points de S sont rationnels sur K") i.e. $E_i \longrightarrow \Gamma$ surjectif, a fortiori $\Sigma = \Gamma$ i.e. $E \longrightarrow \Gamma$ surjectif. On va se borner à se cas. Le cas général s'en déduit par extension finie du corps de base [chaque point de S non rationnel sur K i.e. chaque $\Sigma_i \neq \Gamma$ donne naissance à n_i points, $n_i = [\Gamma : \Sigma_i]$ - et $X_{K'}$ se scinde en $n = (\Gamma : \Sigma)$ composantes connexes qui sont géométriquement connexes] - mais j'ai la flemme d'expliciter comme il faudrait, dans le contexte des groupoïdes ou des homomorphismes de groupes profinis, l'opération d'extension du corps de base...

Il est entendu que les conditions que je vais décrire seront invariantes par extension du corps de base.

c) $\forall i$, l'homomorphisme extérieur

$$\varkappa_i : T \longrightarrow \pi$$

est compatible avec l'action extérieure de Γ (opérant sur T par le caractère cyclotomique χ, et sur π grâce à l'extension E de Γ par π). En d'autres termes, pour tout $g \in E$, existe un $\alpha \in \pi$ (N.B. pas seulement $\alpha \in E$!) tel que l'on ait :

$$\mathrm{int}(g)\varkappa_i(\xi) = \mathrm{int}(\alpha)\varkappa_i(\chi(p(g))\xi) \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{int}(\alpha^{-1}g)\varkappa_i(\xi) = \varkappa_i(\chi(p(g))\xi)$$

Ceci signifie que 1°) $\alpha^{-1}g$ normalise $L_i = \varkappa_i(T)$ [et ceci signifie même, probablement, que $\alpha^{-1}g \in E_i$ - et qu'on puisse trouver un tel $\alpha \in \pi$ (tel que $\alpha^{-1}g \in E_i$) provient de l'hypothèse $E_i \longrightarrow \Gamma$ surjectif - on prend un $\beta (= \alpha^{-1}g) \in E_i$ ayant même image que g dans Γ et on prend $\alpha = g\beta^{-1}$] et que 2°) l'action intérieure de $\beta = \alpha^{-1}$ sur T n'est autre que par multiplication par $\chi(g) = \chi(\beta)$ - ce qui (pour $\beta \in E_i$) n'est autre que la condition déjà explicitée que l'homomorphisme de groupes $\varkappa_i : T \longrightarrow E_i$ est compatible avec l'action de E_i, opérant sur T via $\chi \circ p|_{E_i}$, et sur lui même par automorphismes intérieures.

Donc la condition c) n'est pas vraiment nouvelle - je la réexplicite en termes un peu différents, à cause de son importance. Elle implique que l'opération de Γ sur π est *très* non triviale (puisque $\chi : \Gamma \longrightarrow \widehat{\mathbf{Z}}^*$ a une image ouverte !) - il n'était pas même évident, a priori (sans raisons arithmétiques profondes !) - compte tenu de la structure de π qu'on va donner - qu'il existe de telles opérations de Γ sur π !

Cette condition sera complétée par une condition de non trivialité à la Weil.

d) $\exists \eta \in T^*$ (une base de T), et des $\alpha_i \in \pi$ (afin de conjuguer $\varkappa_i$ en $\varkappa_i' = \mathrm{int}(\alpha_i) \circ \varkappa_i$), enfin un entier $g \geq 0$ et des éléments x_j, $y_j \in \pi$ $(1 \leq j \leq g)$, tels que l'on ait

1°) Les $\varkappa_i'(\eta)$, et les x_j, y_j engendrent le groupe profini π.

2°) Ils satisfont la relation

$$\boxed{[x_1, y_1].[x_2, y_2] \ldots [x_g, xy_g]\varkappa_1'(\eta)\varkappa_2'(\eta) \ldots \varkappa_\nu'(\eta) = 1}$$

3°) Cette relation, avec les générateurs envisagés, décrit π (en tant que groupe profini) par générateurs et relations...

N.B. On sait que par ces conditions, g est uniquement déterminé, par exemple par le fait que $\pi_{ab}/\Sigma\varkappa_i(T)$ est un $\widehat{\mathbf{Z}}$-module libre de rang $2g$ - π_{ab} étant libre de rang $2g + \nu - 1$ où $\nu = \mathrm{card}(I)$.

Pour le choix de η, on voit que si η convient, alors tout $\chi(\alpha)\eta$ aussi (où $\alpha \in \Gamma$) - quitte à prendre des conjugués. Donc les η qui conviennent contiennent un sous-torseur de T^* sous le sous-groupe ouvert $\chi(\Gamma)$ de $\widehat{\mathbf{Z}}^*$.

En fait, comme la structure du groupe π est indépendante de K, prenant $K = \mathbf{Q}$ (et en admettant qu'il existe une courbe lisse projective (géométriquement connexe de genre g sur $\mathbf{Q}$, ayant ν points rationnels sur $\mathbf{Q}$!), on trouve que si les l_i]$(1 \leq i \leq \nu)$ s'insèrent dans un système de générateurs privilégies (avec des x_j, y_i) alors pour tout $\rho \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$, on peut trouver des conjugués l_i' des l_i^ρ qui s'insèrent de même. Même pour $\rho = -1$ ce n'est pas entièrement trivial...

Enfin, on va énoncer une condition draconienne de non trivialité de l'opération de Γ sur π. Soient E' un sous-groupe ouvert (donc d'indice fini) de E, $\pi' = \pi \cap E' = \mathrm{Ker}(E' \longrightarrow \Gamma)$, Γ' l'image de E' dans Γ. On trouve donc une extension de $\Gamma' (= \mathrm{Gal}(\overline{K}'/K'))$ sur π', donc aussi par $(\pi'_{ab})(\ell)$ (ℓ étant un nombre fourni), qui est (on le sait par d)) un $\mathbf{Z}_\ell$-module libre de type fini, sur lequel Γ' opère.

[Avec un peu de travail[28], on doit pouvoir mettre sur $E' \longrightarrow \Gamma$ une "structure à lacets" i.e. des $E'_{i'}$ comme pour E, et décrire dans $(\pi_{ab}(\ell))$ la somme des images des $L'_{i'}$, sur lesquels Γ' opère donc via le caractère χ. On s'intéresse au quotient de $(\pi'_{ab})(l)$ par ce sous-module relativement trivial (la partie "VA" du module ℓ-adique envisagé). Ceci posé, on exige que la représentation de Γ' là dessus soir "pure de poids 1" - et que les polynômes caractéristiques des frobénius (qui sont à coefficients dans $\mathbf{Z}$, pas seulement dans $\mathbf{Z}_\ell$) soient *indépendants* de ℓ.

[28] Ça se fait très élégamment dans le contexte $\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U \longrightarrow \Pi_e$.

§ 12. — L'ANALOGIE TOPOLOGIQUE

Soit X une surface (topologique) compacte orientable, S une partie finie de X. Si X est connexe, on considère l'ensemble Ω de ces deux orientations, on l'utilise pour tordre le groupe $\mathbf{Z}$, d'où un groupe

$$T = \mathbf{Z} \wedge_{\pm 1} \Omega$$

isomorphe (non canoniquement) à $\mathbf{Z}$. Plus généralement, supposons donné un tel groupe T, i.e. un $\omega \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ens}_2$, une T-orientation de X sera par définition un élément de l'ensemble $\mathrm{Or}(X) \wedge_{\pm 1} \omega$ [dans le cas précédent, X sera donc canoniquement T-orienté...]

Considérons le groupoïde fondamental de $X \backslash S = U$ soit Π_U, et le groupoïde fondamental Π_{D^*} des germes d'espaces de X autour de S, *privé* de S (groupoïde des germes de revêtements universels de $X \backslash S$ au voisinage de S). On a donc un foncteur canonique

$$\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U$$

et d'autre part, si X est T-orienté, on a une structure supplémentaire intéressante sur le groupoïde Π_{D^*} : le système local de ses π_1 est canoniquement isomorphe à T.

Associant à tout X T-orienté le système

$$\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_X, \quad \varkappa : T_{(\Pi_{D^*})} \simeq \pi_1(\Pi_{D^*}/e),$$

on trouve une 2-équivalence entre la 2-catégorie isotopique des couples (X, S) d'une variété compacte T-orientée (pour les homéomorphismes à isotopie près...), et de la 2-catégorie des systèmes précédents (pour les équivalences) qui satisfont les conditions

a) $\pi_0(\Pi_{D^*})$, $\pi_0(\Pi_X)$ finis

b) Pour toute composante connexe de Π_U, soit Π_{U_0}, et la partie $\Pi_{D_0^*}$ au-dessus, explicitant la situation groupoïde par un groupe π, et une famille d'homomorphisme $T \xrightarrow{\varkappa_i} \pi$ (N.B. le tout dépendant de choix, mais π étant intrinsèque comme groupe extérieur, et les $\varkappa_i$ comme homomorphismes extérieurs - définissant une "T-structure à lacets sur S" -) on a ce qui suit :

il existe générateur $t \in T$ (i.e. $t \in T^*$) et un ordre $i_1, \dots, i_\nu$ sur l'ensemble I, des conjugués l_i des $\varkappa_i(g)$, et $g \in \mathbf{N}$ et des x_α, $y_\alpha \in \pi (1 \leq \alpha \leq g)$ tels que l'on ait

$$(\prod_{\alpha=1}^{g}[x_\alpha, y_\alpha])\prod_{i=1}^{\nu} l_i = 1$$

et que ceci soit une relation de définition de π.

Il y a cependant un grain de sel pour $I = \varnothing$ (auquel cas T ne sert à rien apparemment dans la description groupoïde de $(X,S) = (X,\varnothing) = X$) il faut alors, au lieu des données "kummériennes" $\varkappa$, se donner un isomorphisme[29]

$$\mathrm{H}^2(\pi, \mathbf{Z}) \overset{\varkappa}{\simeq} T$$

Enfin, il faut (même avec ce grain de sel) exclure le cas $X = \mathbb{S}^2$, $S = \varnothing$ (en tant que composante connexe) - i.e. du coté groupes, le cas d'une composante connexe de Π_U avec $\pi = (1)$ et $I = \varnothing$. Si je me rappelle bien, il n'y a pas lieu d'exclure $(\mathbb{S}^2, \mathrm{pt})$ (i.e. $X \backslash S = U \simeq \mathbf{R}^2 \simeq E^1_{\mathbf{C}}$ où pourtant on a $\pi = 0$. Mais sauf dans ces deux cas (correspondant au cas $g = 0$, $\nu = 1$) l'homomorphisme $\varkappa_i : T \longrightarrow \pi$ est injectif. Si $T = \mathbf{Z}$, la donnée des $\varkappa_i$ équivaut à celle d'éléments $l_i \in \pi$, et on retrouve la définition usuelle des structures à lacets.

Ceci est explicité dans la thèse de Yves Ladegaillerie - ce qui y manque, est (entre autre) la considération de flèches entre (X,S) autres que des homéomorphismes (modulo isotopies) ; par exemple des applications $X' \xrightarrow{f} X$ telles que $S' = f^{-1}(S)$

[29]Il faut introduire ceci comme donnée supplémentaire dans la définition des groupes à lacets. L'exclusion des cas $X_0 \simeq \mathbb{S}^2$ (dans le cas $S = \varnothing$) est alors particulièrement convaincante.

[et que X' soit étale sur $X\backslash S$, si on y tient], ce qui se ramène au cas précédent - le cas plus général où on suppose seulement que X' est un revêtement ramifié de X (pouvant être ramifié aussi en dehors de S') et $S' \supset f^{-1}(S)$ (mais S' pouvant être plus grand) demanderait une étude soigneuse, avec une notion ad-hoc de l'isotopie…

Une autre direction importante (notamment pour l'étude du cas non orienté, non orientable) est l'introduction de groupes finis d'homéomorphismes, ne respectant pas nécessairement l'orientation. Pour traiter le cas du changement d'orientation, notons que dans la description groupoïdale $(\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U, \varkappa)$ d'une (X,S) T-orientée, le passage à l'orientation opposée s'exprime en gardant tel que $\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U$, et en remplaçant $\varkappa$ par $\overline{\varkappa} = \varkappa^{-1}$

$$\overline{\varkappa}(\xi) = \varkappa(-\xi) = \varkappa(\xi)^{-1}$$

(si $T = \mathbf{Z}$, sur le système $(\pi,(l_i))$, cela revient à remplacer les l_i par les $l_i^{-1}\ldots$), et itou (si $I = \varnothing$) pour $\varkappa : T \simeq \mathrm{H}^2(\pi, \mathbf{Z})$ remplacé par $-\varkappa$.

Soit donc Γ un groupe (a priori pas nécessairement fini) qui opère sur (X,S) donc sur $U = X\backslash S$ et sur Π_U, Π_{D^*}. On trouve alors des groupoïdes fondamentaux mixtes par la construction bien connue

$$\Pi_{D^*,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{U,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{e,\Gamma}$$

(où $\Pi_{e,\Gamma}$ est la catégorie des Γ-torseurs i.e. des objets 1-connexes dans $\Gamma - \mathrm{Ens}$) correspondant aux foncteurs en sens inverse

$$\Gamma - \text{revêtement étale de } D^* \longleftarrow \Gamma - \text{revêtement étale de } U \longleftarrow \Gamma - \mathrm{Ens}.$$

Les composantes connexes de $\Pi_{D^*,\Gamma}$ correspondent aux *orbites de* Γ *dans* $S = \pi_0(\Pi_{D^*})$, et même pour celles de $\Pi_{U,\Gamma}$. Le cas $\Pi_{U,\Gamma}$ connexe i.e. le topos $\hat{\Pi}_{U,\Gamma}$ connexe est celui où Γ transitif sur $\pi_0(U) \simeq \pi_0(X)$ - quitte à remplacer X par une composante connexe X_0, et Γ par le sous-groupe $\Sigma \subset \Gamma$ qui le stabilise, on serait ramené (pour l'étude des topos $\hat{\Pi}_{U,\Gamma}$ et des morphismes de topos

$$\hat{\Pi}_{D^*,\Gamma} \longrightarrow \hat{\Pi}_{U,\Gamma} \longrightarrow (\hat{\Pi}_{e,\Sigma} \longrightarrow)\hat{\Pi}_{e,\Gamma}$$

au cas de (X_0, S_0, Σ). Mais l'analogie que j'ai en vue le cas “arithmétique” prend cette réduction inopportune dans le cas général (cas dans le cas arithmétique, on ne se borne pas non plus au cas où $\Sigma = \Gamma$ i.e. $E \longrightarrow \Gamma$ surjectif, i.e. la composante connexe X *géométriquement* connexe sur K). Notons ici que (X, S, Γ) se récupère à partir des $(X_0, S_0, \Gamma_0 = \Sigma)$ comme somme amalgamée $X = X_0 \wedge_\Sigma \Gamma \ldots$

Quand on exprime (pour $\Pi_{U,\Gamma}$ connexe) la situation en termes de théorie de groupes, on trouve donc un groupe fondamental mixte

$$E_{U,\Gamma} = \pi_1(U, \Gamma)$$

et un homomorphisme

$$E_{U,\Gamma} \longrightarrow \Gamma$$

surjectif si et seulement si U connexe (on a $\Gamma/\Sigma \simeq \pi_0(U)$), enfin un ensemble d'indices I ($\simeq S/\Gamma \simeq \pi_0(\Pi_{D^*,\Gamma})$) et des groupes fondamentaux mixtes.

$$E_i \simeq \pi_1(D_i^*, \Gamma) \simeq \pi_1(D_{i,0}^*, \Sigma_i)$$

où $D_{i,0}^*$ est une composante connexe du multidisque troué D_i^*, (correspondant au choix d'un $s_{i,0} \in S$) et où $\Sigma_i \subset \Gamma$ est son stabilisateur (i.e. le stabilisateur de $s_{i,0}$ dans Γ, qui est (si Γ_i est fini et opère fidèlement au voisinages de s_i) un groupe cyclique ou diédral...On trouve donc, si X est T-orientée, une extension de $\Gamma_{i,0}$ par T, l'homomorphisme $E_i \longrightarrow \Sigma_i \hookrightarrow \Gamma_i$ étant induit bien sûr via $E_{U,\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ et $E_i \longrightarrow E_{U,\Gamma}$.

Il faut encore lier l'action de Γ sur X à l'orientation de X - pour ceci on suppose donné un caractère

$$\chi : \Gamma \longrightarrow \mathbf{Z}^* = \{\pm 1\}$$

et on exige que pour $g \in \Gamma$, g_X conserve l'orientation si $\chi(g) = 1$, la renverse si $\chi(g) = -1$. Ceci implique que l'on a un isomorphisme

$$\underbrace{\pi_1(\Pi_{D^*,\Gamma}/\Pi_{e,\Gamma})}_{\text{système local des noyaux des } \pi_1(\xi) \longrightarrow \pi_1(\varphi\rho(\xi)) \text{ pour } \xi \in \mathrm{Ob}\,\Pi_{D^*,\Gamma}} \xleftarrow[\sim]{\varkappa_\Gamma} T$$

T étant considéré comme système local sur $\Pi_{\Gamma,e}$ i.e. comme Γ-groupe, grâce à l'action de Γ via le caractère χ. Il revient au même de dire que $\forall i \in I$, l'application

$$\varkappa_i : T \xrightarrow{\sim} L_i = \mathrm{Ker}(E_i \longrightarrow \Gamma)$$

en tant que homomorphisme de T dans E_i, est compatible avec l'action de E_i (opérant sur T via $\chi\, p_i$ ($p_i : E_i \longrightarrow \Gamma$)), et sur lui même par automorphisme intérieure…)

Si on exclut le cas où (X_0, S_0) est isomorphe à $(\mathbb{S}^2, \varnothing)$ ou $(\mathbb{S}^2, 1\,\text{pt})$ (i.e. le cas $\pi = 0$), les $\varkappa_i : T \longrightarrow \pi$ sont injectifs, donc aussi les $E_i \longrightarrow E_{U,\Gamma}$, donc les E_i peuvent être considérés comme des *sous-groupes* de $E_{U,\Gamma}$.

Ici il serait particulièrement contre-indiqué (même si on suppose $\Sigma = \Gamma$ i.e. $X = X_0$ i.e. X connexe) de supposer que les Γ_i sont égaux à Γ i.e. que les $s \in S$ sont fixés par Γ !

Comme le centre de π est réduit à 1 (si on excepte le cas $(X_0, S_0) \simeq (\mathbb{S}^2$, deux points) i.e. $U_0 \simeq \mathbf{C}^*$ - cas de la couronne -), la donnée d'une extension de Σ ($\subset \Gamma$) par π revient (à isomorphisme unique près) à la donnée d'un homomorphisme

$$\Sigma \longrightarrow \operatorname{Autext}(\pi)$$

E se reconstitue comme image inverse de l'extension

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow \operatorname{Aut}(\pi) \longrightarrow \operatorname{Autext}(\pi) \longrightarrow 1.$$

Mais ici les automorphismes extérieures relatifs aux $\alpha \in \Sigma$ *respectent la structure à lacets* de π, modulo le signe $\chi(\alpha)$ - i.e. pour $g \in E$, et $s \in S$ $\exists \alpha \in pi$ et $s' \in S$ (s' unique !) tels que

$$\operatorname{int}(\alpha^{-1} g)\varkappa_s(\xi) = \operatorname{int}(\alpha)\varkappa_{s'}(\chi(p(g))\xi)$$

$\forall \xi \in \Gamma$, i.e.

$$\operatorname{int}(\alpha^{-1} g)\varkappa_s(\xi) = \varkappa_i(\chi(p(g))\xi)$$

Ainsi, l'opération de Σ sur S_0 (donc de Γ sur $S = S_0 \wedge_\Sigma \Gamma$) est connue, par l'opération extérieure de $\Sigma \subset \Gamma$ sur π muni de sa structure à "T-lacets" (i.e. les homomorphismes extérieures $\varkappa_s : T \longrightarrow \pi$) - donc aussi $I = S_0/\Sigma \simeq S/\Gamma$. Peut-on reconstituer E_i ($i \in I$) à partir de la structure d'extension ? On voit, en vertu des choix faits, que si $i \in I$ (donc i une orbite de Σ dans S_0) $\exists s \in i$ tel que ($\operatorname{Ker} E_i \longrightarrow \Gamma$) ne soit autre que $L_s = \varkappa_s(T)$, et on a donc $E_i \subset \operatorname{Norm}_E(L_s)$, mais on a

$$\operatorname{Norm}_E(L_s) \cap \pi = \operatorname{Norm}_\pi(L_s) = L_s = E_i \cap \pi,$$

et d'autre part l'image de $\mathrm{Norm}_E(L_s)$ dans $\Sigma \subset \Gamma$ est inclus dans $\Sigma_s =$ stabilisateurs de s dans $\Sigma =$ Image de E_i dans Σ, donc en résumé

$$E_i = \mathrm{Norm}_E(L_s)$$

Inversement, la donnée de $E \longrightarrow \Gamma$ et des E_i, $x_i : T \longrightarrow E_i$ redonne la structure à lacets de π, en prenant les x_i et tous les conjugués extérieures distincts par les $\alpha \in \Sigma$ (modifiés par $\chi(\alpha)\ldots$).

Donc la donnée de la situation $E \xleftarrow{p} \Gamma$, $E_i \hookrightarrow E$ (famille de sous-groupes, chacun défini modulo conjugaison *dans* E) équivaut à la donnée de

a) $\pi = \operatorname{Ker} p$, avec sa structure à T-lacets (ensemble fini d'homomorphismes extérieurs de T dans π)

b) Un sous-groupe $\Sigma \subset \Gamma$, et un homomorphisme

$$\Sigma \longrightarrow \begin{array}{c}\text{Teichmüller étendu de } \pi \\ \text{(automorphismes extérieurs de } \pi, \\ \text{respectant la structure à lacets modulo signe)}\end{array}$$

compatible avec le caractère $\chi|_\Sigma$ et le caractère "signe" sur Teichmüller étendu. En fait, (X, S, Γ) où (U, Γ) ne définit π que comme groupe extérieur à T-lacets, sur lequel Γ opère de façon compatible avec χ.

En résumé, on a un foncteur canonique

Catégorie isotopique des $(X, S, \Gamma), X$ surface compacte T-orientée, S partie discrète, Γ opérant par χ-automorphisme ($\gamma \in \Gamma$ respectant l'orientation si $\chi(\gamma) = +1,$ la renversant sinon), Γ transitif sur $\pi_0(X),$ et si (X_0, S_0) est une composante connexe de $(X, S),$ on veut que si $X_0 \simeq \mathbb{S}$ on ait $\operatorname{card} S \geq 3$

$$\downarrow$$

Catégorie des groupes extérieurs à T — lacets π, π non commutatif (i.e. $\pi \neq 0, \mathbf{Z}$) sur lesquels un sous-groupe $\Sigma \subset \Gamma$ de Γ opère. (Cette description étant équivalente à une description en termes de système de groupoïdes $\Pi_{D^*,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{U,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{e,\Gamma}$ et $\varkappa \ldots,$ plus conceptuelle dans certains contextes).

Je présume que la démonstration du fait que ce foncteur soit pleinement fidèle ne fasse pas de difficultés essentielles[30], en utilisant ce qui est connu pour $\Gamma = 1$. Mais le fait que, pour Γ groupe fini donné, il soit essentellement surjectif est un problème ouvert sur lequel les gens sèchent. Bien sûr on peut supposer $\Sigma = \Gamma$, et $\Gamma \subset$ Teichmüller étendu et la question est si tout sous-groupe fini de Teichmüller étendu se réalise comme groupe opérant sur (X_0, S_0), de façon essentiellement unique. Plus précisément, si $A =$ groupe des homéomorphismes (ou difféomorphismes, si X_0 est différentiable) de X_0, A° sa composante connexe [neutre] (N.B. A° est contractile dans le cas anabélien) donc $A/A^\circ = T_{g,\nu}$ (groupe de Teichmüller pour genre g et ν trous), la question revient à ceci si pour tout homomorphisme d'un groupe fini Σ dans $T_{g,\nu}$, (on peut supposer $\Sigma \subset T_{g,\nu}$), celui-ci se relève en un homomorphisme dans A, et si deux tels relèvements sont conjugués par un $a \in A^\circ$ (isotopie au sens strict de deux relèvements...).

Ayant aboutit à une réinterpretation tellement simple de la 1-catégorie ("1-

[30]Ca vaudrait drôlement le coup de le faire très soigneusement...

isotopique") déduite de la 2-catégorie des systèmes

$$(\Pi_{D^*,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{U,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{e,\Gamma}, \quad \varkappa)$$

en termes de groupes extérieurs à lacets π [munis d'un ensemble d'homomorphismes extérieurs $\varkappa_i : T \longrightarrow \pi$, et à défaut d'un $\varkappa : T \longrightarrow \mathrm{H}^2(\pi, \mathbf{Z})$ (pour bien faire, il faudrait écrire $T^{(\otimes-1)} \simeq \mathrm{H}^2(\pi, \mathbf{Z})$, mais ici on a un isomorphisme canonique $T^{\otimes-1} \simeq T$ i.e. $T^{\otimes 2} \simeq \mathbf{Z}\ldots$)], la question se pose comment récupérer, (à équivalence définie à isomorphisme unique près) ce diagramme, en termes de $\varkappa$; tout revient à la description des catégories $\Pi_{D^*,\Gamma}$ et $\Pi_{U,\Gamma}$ et des deux foncteurs $\Pi_{D^*,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{U,\Gamma}$, $\Pi_{U,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{e,\Gamma}$; ou ce qui revient au même, des topos (multigaloisiens) et morphismes de topos correspondants.

a) Description de $\Pi_{U,\Gamma}$ et de $\Pi_{U,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{e,\Gamma}$.

Soit plus généralement π un groupe extérieur *dont le centre soit trivial* (ceci correspond à l'hypothèse anabélienne !), montrons comment on lui associe une topos classifiant B_π, qui (comme catégorie de faisceaux) sera $\mathrm{Ens}(\pi)$) de façon "fonctorielle" (pour les isomorphismes). Tout revit à voir comment, à une *classe de conjugaison d'isomorphismes*

$$\pi' \xrightarrow{u} \pi$$

on associe un foncteur "image inverse" $\mathrm{Ens}(\pi) \longrightarrow \mathrm{Ens}(\pi')$, défini à isomorphisme unique près. Considérons pour tout u de la classe θ, le foncteur "u-restriction des opérations"

$$\mathrm{Ens}(\pi) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Ens}(\pi')$$

[qui définit donc, [?] $(u^{-1})^*$, une équivalence de topos

$$\mathrm{B}_{\pi'} \xrightarrow[\approx]{u_\bullet} \mathrm{B}_\pi \quad]$$

On va, entre ces équivalences pour $u \in \theta$, définir un système transitif d'isomorphismes (ce qui permet donc de les identifier entre eux !).

Soit $u, u' \in \theta$, d'où u^*, u'^* ; on a par hypothèse un $g \in \pi$ tel que $u' = \mathrm{int}(t) \circ u$, de plus g est déterminé module un élément de $\mathrm{Centr}_\pi\, u(\pi') = \mathrm{Centr}(\pi) = 1$, donc ici g est unique. Mais g peut servir à définir un isomorphisme fonctoriel

$$i_{u',u} : u^* \xrightarrow{\sim} u'^*$$

en prenant, pour $E \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ens}(\pi)$,

$$i_{u',u}(E) : u^*(E) \longrightarrow u'^*(E) \quad i_{u',u}(E) = g_E.$$

N.B. Le raisonnement marche pour toute classe de conjugaison d'homomorphismes de groupes $\pi' \longrightarrow \pi$ (i.e. tout homomorphisme extérieur) dont le centralisateur dans π est réduit à 1 (ce qui pour un épimorphisme se réduit à l'hypothèse $\mathrm{Centr}(\pi) = 1$)[31].

Si maintenant un groupe Σ opère sur le groupe extérieur π, alors par le résultat précédent on peut dire qu'il opère aussi sur le topos B_π, d'où un topos $\mathrm{B}_{\pi,\Gamma}$. On peut dire aussi que (comme $\mathrm{Centr}(\pi) = 1$) l'opération de Σ sur π définit une extension E de Σ par π d'où un topos $\mathrm{B}_{\pi,\Gamma} = \mathrm{B}_E$. On récupère bien sûr aussi $\mathrm{B}_{\pi,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_\Gamma$. Pour se tranquilliser il faudrait s'assurer que si on a un homomorphisme de groupes extérieurs $\pi' \xrightarrow{\theta} \pi$ commutant à l'action d'un Σ, avec $\mathrm{Centr}_\pi(\theta) = (1)$, alors il existe un $\theta_\Gamma : \mathrm{B}_{\pi,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_{\pi,\Gamma}$ défini à isomorphisme canonique près.

Or tout $u \in \theta$ définit un homomorphisme d'extension u_Γ (de Σ par π' resp. π) $E' \longrightarrow E$ au-dessus de u, et si on passe de u à $u' = \mathrm{int}(g) \circ u$, on aura $u'_\Gamma = \mathrm{int}_E(g) \circ u_\Gamma$, et on termine comme plus haut avec unicité de g ; c'est maintenant un homomorphisme extérieur *injectif*

$$\Lambda = [\varkappa] : T \longrightarrow \pi \qquad (T \text{ commutatif})$$

(Λ comme initiale de "lacets")

L'injectivité dans le cas qui nous intéresse résulte de l'hypothèse anabélienne.

Supposons que (pour $\varkappa \in [\varkappa]$)

$$\mathrm{Centre}_\pi\, \varkappa = \varkappa(T)$$

(ce qui ne dépend pas de choix de $\varkappa$ dans $[\varkappa]$). Je vais alors définir un groupoïde abélien connexe Π_λ, et un isomorphisme de son π_1 avec T (d'où un topos, qui joue le rôle de $\hat{\Pi}_D$). Un objet sera un $\varkappa \in [\varkappa]$. Un homomorphisme de $\varkappa$ dans

[31] Marche pour les groupes à lacets anabéliens, et les homomorphismes de tels dont l'image soit d'indice fini… (car le centralisateur dans un tel groupe π d'un sous-groupe d'indice fini est encore réduit à e)

x' sera un élément $g \in \mathrm{Transp}_\pi(x, x')$. La composition des homomorphismes est évidente. On trouve bien un groupoïde connexe, dans lequel

$$\mathrm{Aut}(x) = \mathrm{Centr}_\pi(x) \overset{\text{par hyp.}}{=} x(T) \overset{x}{\simeq} T. \quad \text{OK.}$$

Bien sûr, on a un homomorphisme

$$\Pi_\Lambda \longrightarrow \text{groupoïde ponctuel}$$

d'où sur les topos classifiants définis par π

$$\mathrm{B}_\Lambda \longrightarrow \mathrm{B}_\pi$$

Il faut voir le comportement de cette construction par homomorphisme extérieur. Soit donc

$$\theta = f_\pi = [u] : \pi' \longrightarrow \pi$$

un homomorphisme extérieur tel que $\mathrm{Centr}_\pi(\theta) = 1$, et $\Lambda' : T \longrightarrow \pi'$ un homomorphisme extérieur injectif tel que $x' \in \Lambda' \Rightarrow \mathrm{Centr}_{\pi'}(x') = \mathrm{Im}\, x'$ et considérons le composé

$$f_\pi \circ \Lambda' : T \longrightarrow \pi$$

soit $d \in \mathbf{Z}$ et considérons

$$\Lambda = f_\pi \circ \Lambda' \circ (d\, \mathrm{id}_T)$$

supposons que $x \in \Lambda$ ($\Rightarrow \mathrm{Centr}_\pi(x) = \mathrm{Im}\, x$).

On va définir un homomorphisme de $\Pi_{\lambda'}$ dans Π_λ, d'où un homomorphisme de topos $\mathrm{B}_{\Lambda'} \longrightarrow \mathrm{B}_\Lambda$, et une donnée de commutativité α du

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{B}_{\Lambda'} \arrow[r, "f_D"] \arrow[d] & \mathrm{B}_\Lambda \arrow[d] \\ \mathrm{B}_{\pi'} \arrow[r, "\mathrm{B}_{f_\pi}"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow\alpha"] & \mathrm{B}_\pi \end{tikzcd}$$

Soit $x \in T \longrightarrow \pi'$ un objet de $\Pi_{\Lambda'}$ on veut définir (à isomorphisme unique près) un objet x de Π_Λ. Pour tout $u \in f_\pi = \theta$, on considère $u \circ x \circ (d\, \mathrm{id}_T)$,il y a entre eux un système transitif d'isomorphismes pour u variable dans θ, on peut les identifier entre eux.

La fonctorialité de cet objet par rapport à x' variable est évidente : on peut dire que $u \in \theta$ définit un homomorphisme de groupoïdes $u_\Lambda : \Pi_\Lambda \longrightarrow \Pi_{\Lambda'}$, et entre ceux-ci il y a un système transitif d'isomorphismes. En fait, pour u fixé on a un diagramme commutatif d'homomorphismes de groupoïdes

$$\begin{tikzcd} \Pi_{\Lambda'} \arrow[r, "u_\Lambda"] \arrow[d] & \Pi_\Lambda \arrow[d] \\ (e,\pi') \arrow[r, "u"'] & (e,\pi) \end{tikzcd}$$

et entre ces diagrammes il y a un système transitif d'isomorphismes, d'où le diagramme (*) et la donnée de commutation α.

Quant on a une famille Λ' (ou un ensemble) d'homomorphisme extérieurs $\Lambda'_{i'}$ $(i' \in I') : T \longrightarrow \pi'$, et une famille $\Lambda(\Lambda_i)_{i\in I}$ d'homomorphismes extérieures $T \longrightarrow \pi$, et un $\tau : I' \longrightarrow I$, et $(d_{i'})_{i'\in I'}$ avec $d_{i'} \in \mathbf{Z}$, tels que (pour $\theta : \pi' \longrightarrow \pi$ homomorphisme extérieur donné) $\forall i' \in I'$, posant $i = \tau(i')$, on ait $\Lambda_i = \Lambda_{i'} \circ \theta \circ (d_i \,\mathrm{id})$

[N.B. Si $I \longrightarrow \mathrm{Homext}(T,\pi)$ injectif, ces conditions montrent que τ est déterminé par θ, et si de plus $\mathbf{Z}$ opère fidèlement sur T, par exemple si $T \simeq \mathbf{Z}$, alors $(d_{i'})$ est également unique…] alors on construit $\Pi_{D^*,\Lambda'} =$ groupoïde somme des $\Pi_{\Lambda'_{i'}}$ et de même $\Pi_{D^*,\Lambda}$, et on trouve un diagramme essentiellement commutatif de topos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}_{D^*,\Lambda'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B}_{D^*,\Lambda} \arrow[d] \\ \mathrm{B}_{\pi'} \arrow[r] & \mathrm{B}_{\pi} \end{tikzcd}$$

Supposons maintenant (ouf !) que Σ opère sur [un] groupe extérieur à lacets…Je déclare forfait - il est évident que tout marche bien !

§ 13. — RETOUR AU CAS ARITHMÉTIQUE

Retour au cas arithmétique, où on veut décrire en termes "galoisiens" les couples (X, S) anabéliens connexes sur un corps K de type fini sur $\mathbf{Q}$. [N. B. Si on prend un K de type fini sur $\mathbf{F}_p$, il faudrait se borner aux groupes fondamentaux "premiers à p", à cela près nos développements pourraient se faire quand même...]

Il est devenu clair qu'en termes d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, d'où un groupe de Galois profini $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, la description la plus simple est en termes de groupes extérieures à lacets et d'actions extérieures de sous-groupes ouverts Σ de Γ dessus.

De façon précise, on choisit une composante connexe $\overline{X}_0$ de $\overline{X}$ (ou ce qui revient au même, $\overline{U}_0$ de $\overline{U} = (X \backslash S)_{\overline{K}}$), soit Σ son stabilisateur dans Γ (il est remplacé par un conjugué, quand on change $\overline{U}_0$). Alors Σ opère sur le schéma $\overline{U}_0$, donc opère extérieurement sur π_1 (considéré comme groupe extérieure). Or sur celui-ci il y a une $T(\overline{K})$-structure à lacets, avec comme ensemble d'indices $I = S_0(\overline{K}) \subset S(\overline{K}) \simeq S_0(K) \wedge_\Sigma \Gamma$ [vide si et seulement si $S \neq \varnothing$] et l'opération de Σ sur π est compatible avec cette structure à lacet, et le caractère cyclotomique $\chi : \Gamma \longrightarrow \widehat{\mathbf{Z}}^*$ (plutôt, $\chi|_\Sigma$). Ainsi l'opération de Σ sur π implique son action sur Σ, d'où $S(\overline{K}) \simeq S_0(\overline{K}) \wedge_\Sigma \Gamma$ en tant que σ-ensemble - on récupère donc le K-schéma étale S. Mais mieux, on récupère tout le diagramme

$$\Pi_{\overline{D_0^*}} \longrightarrow [\Pi_{\overline{U}_0} \longrightarrow] \Pi_{\overline{U}} \longrightarrow \Pi_e$$

et l'opération de Σ dessus d'où le diagramme des topos classifiant - où si on préfère, le diagramme

$$\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U \longrightarrow \Pi_e$$

(avec les notations du début de ces notes, qui deviendraient ici

$$\Pi_{D^*,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{U,\Gamma} \longrightarrow \Pi_{e,\Gamma}$$

plus bien sur K [?]...

Les homomorphismes $(X', S') \xrightarrow{f} (X, S)$ [$S' \supset f^{-1}(S)$, f dominant] se décrivent simplement (via le choix d'un $\overline{X}'_0$ au dessus d'un $\overline{X}_0$ par des homomorphismes extérieures $\pi(= \pi_1(\overline{X}_0)) \longrightarrow \pi(= \pi_1(\overline{X}_0))$, compatibles avec les actions de Σ ($\subset \Sigma$) et de Σ, et avec les structures à lacets anabéliennes (ce qui s'exprime à l'aide d'une application $\tau : (I' \subset \overline{S}'_0) \longrightarrow I = \overline{S}_0$[32] compatible avec σ', et un système d'entiers naturels $(d_{i'})_{i' \in I}$).

Il faut cependant compléter, pour $I = \varnothing$, la définition de la structure à lacets, par la donnée d'un isomorphisme

$$\varkappa : T^{\otimes -1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(\pi, \widehat{\mathbf{Z}})$$

[N.B. en caractéristique $p \geq 0$, on doit se borner aux composantes ℓ-adiques avec $\ell \neq p$] i.e.

$$\widehat{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(\pi, T)$$

compatible avec l'action de Σ - et il faut exiger, dans l'interprétation "galoisienne" de $f : (X', S') \longrightarrow (X, S)$, quand $S = S' = \varnothing$ que l'homomorphisme $\pi \longrightarrow \pi'$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbf{Z}} & \xrightarrow[\sim]{\varkappa} & \mathrm{H}^2(\pi, T) \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \widehat{\mathbf{Z}} & \xrightarrow[\sim]{\varkappa'} & \mathrm{H}^2(\pi', T) \end{array}$$

où $d \in \mathbf{N}$ est le *degré* (défini de façon unique par cette condition, comme l'ordre de Coker f^*). Quand $S = \varnothing$, mais $S' \neq \varnothing$, il devrait y avoir encore une compatibilité pour les données kummériennes (de natures différentes sur π', où il y a bel et bien

[32] N.B. $I' = \overline{S}'_0 \cap f^{-1}(\overline{S}_0)$

"des lacets", et sur π, où elle est purement cohomologique). La question équivaut sans doute à celle de décrire une structure kummérienne "cohomologique" sur le groupe $\widetilde{\pi}'$, déduit d'un π' à lacets (avec $I' \neq \varnothing$) en divisant par les dits lacets[33]. La question est la même, semble-t-il dans le cadre topologique, ou le cadre arithmétique, il me faudra revenir dessus. Il faudrait que pour tout homomorphisme $\pi' \longrightarrow \pi$ de groupes à lacets, l'homomorphisme $\widetilde{\pi}' \longrightarrow \widetilde{\pi}$ correspondant respecte aussi (pour un degré convenable) la structure à lacets.

Quand on s'intéresse aux systèmes anabéliens $(\overline{X}, \overline{S})$ définis directement sur $\overline{K}$, avec $\overline{X}$ connexe disons, ceci s'exprime par un groupe extérieur à T-lacets, muni d'une action (non de Γ mais des) *noyaux* de groupes profinis définis par Γ. Si on considère les "Γ-automorphismes" d'un tel objet (formés d'un $\gamma \in \Gamma$ et d'un automorphisme extérieur f de π respectant la structure à lacets, f et γ étant compatible dans un sens évident...), on trouve un groupe (profini ???) ("discret" ??) G et un homomorphisme $G \longrightarrow \Gamma$ (à image un sous-groupe ouvert de Γ, et à noyau G_0 le sou-groupe des automorphismes extérieures à lacets de π qui commutent à l'action extérieure du " noyau" (lequel G_0 est conjecturellement par la "conjecture bordélique", isomorphe au groupe fini $\mathrm{Aut}_{\overline{K}}(\overline{K}, \overline{S}\ldots)$. En termes de cette suite exacte

$$1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma$$

la "restriction de $(\overline{X}, \overline{S})$ au corps K" s'exprime donc (on l'espère, de façon pleinement fidèle, si la conjecture bordélique est valable) par un scindage $\Gamma \longrightarrow G$ de $G \longrightarrow \Gamma\ldots$

[33] Paradigme du passage de (X, S) à X : "bouchage de trous"...

§ 13 bis. — RETOUR SUR LA NOTION DE GROUPE À LACETS

Soit π un groupe, $([L_i])_{i\in I}$ une famille de classes de conjugaison de sous-groupes de π. On dit que cela définit une "structure à lacets" sur π (de type (g,ν)) si $\exists g \in \mathbf{N}$, $\forall i \in I$ un $L_i \in [L_i]$, un générateur $l_i \in L_i$, des éléments x_α, $y_\alpha \in \pi$ $(i \leq \alpha \leq g)$ enfin un ordre $i_1, \dots, i_\nu$ sur I ($\nu = \mathrm{card}(I)$) tels que (posant $l_\alpha = l_{i_\alpha}$ pour simplifier)

$$[x_1,y_1][x_2,y_2]\dots[x_g,y_g]l_1\dots l_\nu = 1$$

soit une présentation du groupe π. On n'exclut pas a priori le cas $g=0$, ni le cas $\nu=0$, i.e. $I=\varnothing$.

On déduit de ceci :

a) Si $\nu \neq 0$, π est libre (à $2g+\nu-1$ générateurs) - donc libre *non abélien* sauf si $g=0$, $\nu \leq 2$.

b) [34] Si $\nu=0$, le seul cas où π abélien est celui où $g\leq 1$. [donc $\pi \simeq \pi_{g,\nu}$ est abélien si et seulement si $g=0$, $\nu \leq 3$ ou $g=1$, $\nu=0$]

En tout cas[35], on a une suite exacte canonique de $\mathbf{Z}$-modules libres de types finis

$$0 \longrightarrow T_\pi \longrightarrow \prod_{i\in I} L_i \xrightarrow{i} \pi_{ab} \longrightarrow \widetilde{\pi}_{ab} \longrightarrow 0$$

[34]Dire que $\pi = 0$ si et seulement si $\nu = 0$ ou 1, et qu'en dehors de ces cas les L_i sont $\simeq \mathbf{Z}$

[35]N. B. Sauf si $\pi = 0$

où pour $I \neq \varnothing$, $\pi \neq \varnothing$ T_π est $\simeq \mathbf{Z}$ (défini comme $\operatorname{Ker} i$), et où les projections

$$T_\pi \longrightarrow L_i$$

sont des isomorphismes. Dans le cas $I \neq \varnothing$, on appelle T_π le **Z**-*module des orientations de* π (muni de la famille des (L_i)) - on définit, si $I = \varnothing$, $(\nu = 0)$ mais $g \neq 0$ (donc $\pi \neq 1$)

$$T_\pi = \underbrace{\mathrm{H}^2(\pi, \mathbf{Z})}_{\mathbf{Z}\text{—module libre de rang 1}}{}^{\otimes -1}$$

[on établira plus loin une relation entre les deux définition de T_π]. Ainsi π_{ab} est libre de rang $2g + \nu - 1$ si $\nu \neq 0$, $2g$ si $\nu = 0$ (donc g est uniquement déterminé par π et $\nu = \operatorname{card} \pi$).

Notons que [si $\nu \neq 0$, et] sauf les cas “abéliens” $g = 0$, $\nu = 1, 2$, les classes de conjugaison des L_i $(i \in I)$ sont distinctes, donc la structure à lacets de π peut se décrire comme la donnée d'un ensemble de ν classes de conjugaison de sous-groupes de ${}_p i$. De plus, on voit que tout $g \in \pi$ qui normalise un L_i le centralise[36] (c'est évident en tout cas pour $\nu \geq 2$, car alors $L_i \longrightarrow \pi_{ab}$ est injectif), ce qui implique que les L_i d'une même classe $[L_i]$ sont canoniquement isomorphes entre eux (ce qui donne un sens intrinsèque au terme $\prod L_i$ dans la suite exacte plus haut, et à l'isomorphisme canonique $T_\pi \longrightarrow L_i \ldots$

Si[37] un groupe Σ opère sur la structure à lacets $(\pi, ([L_i]))$ il opère sur le **Z**-module inversible T_π, d'où un caractère

$$\chi : \Sigma \longrightarrow \mathbf{Z}^* = \{\pm 1\}$$

inversement, si l'on a un caractère χ sur Σ donné d'avance, on parlera d'une action de Σ sur $(\pi, ([L_i]))$ *compatible avec* χ.

On a es variantes profinies (ou profinies premières à p, si p est premier donné…) - mais il y a dès maintenant à signaler deux points à vérifier dans ce cas :

$$\operatorname{Norm}_\pi(L_i) = \operatorname{Centr}_\pi(L_i) = L_i \text{ dans le cas } \nu = 1\text{, sinon pas de problème.}$$

[36]voir à part le cas $\nu = 1$: normalisateur du sous-groupe engendré par $\prod [x_\alpha, y_\alpha]$, dans le groupe libre engendré par les générateurs x_α, y_α,…

[37]On suppose dorénavant qu'on est dans le cas anabélien, ou du moins on exclut $g = 0$, $\nu \leq 2$

> $\mathrm{Centr}(\pi) = 1$ (cas anabéliens) plus généralement, le centralisateur de tout sous-groupe discret ouvert de π est réduit à 1…

([ces deux points ne sont] *démontrés* pour le moment dans *aucun* cas anabélien profini !)

§ 14. — DIGRESSION COHOMOLOGIQUE (SUR LE "BOUCHAGE DE TROUS")

Soit[38] un schéma localement noethérien, régulier de dimension 1, S un sous-schéma fermé réduit discret tel que $\forall s \in S$, $\dim_s S = 1$ (donc S défini par une partie fermée discrète de X), $U = X \backslash S$. On veut expliciter par voie galoisienne les faisceaux d'ensembles étales constructibles sur X tels que $F|_U$ soit localement constant. Par le tapis d'Artin sur les ouverts du topos, ils correspondent aux triples

$$(F_U, F_S, \varphi)$$

où F_U est un faisceau constructible localement constant sur U, F_S un faisceau (nécessairement localement constant) et φ un homomorphisme

$$F_S \xrightarrow{\varphi} j^* i_*(F_U)$$

(où $i : U \hookrightarrow X$ et $j : S \hookrightarrow X$ sont les inclusions). Toute condition de constructibilité etc mises à part, un faisceau étale F sur X correspond à un tel triple - on se restreint ici aux F tels que F_U provienne du topos fondamental $\mathrm{B}_{\Pi_1(U)}$ de U…(il n'y a pas lieu de supposer F_U à fibres finies pour ce qui suit).

Soit pour tout s dans S, $\underline{\mathcal{O}}_s$ un hensélisé de $\underline{\mathcal{O}}_{X,s}$, $D_s = \operatorname{Spec} \underline{\mathcal{O}}_s$ ("disque en s"), $D_s^* = D_s \backslash \{s\} = \operatorname{Spec} K_s$ (K_s corps des fractions de $\underline{\mathcal{O}}_s$) ("disque épointé" en s),

[38] Il vaudrait peut être mieux démarrer avec le cas purement topologique d'une surface…et faire le lien avec les groupes *discrets*.

$D = \amalg_{s\in S} D_s$, $D^* = \amalg_{s\in S} D_s^*$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & D^* \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\sigma"] & & \\
U \arrow[dr, "i"'] & & D(\arrow[dl, "k"'] & S) \arrow[l, "j_0"'] \arrow[dll, "j"] \\
 & X & &
\end{tikzcd}$$

en on voit (par Artin) que ce diagramme permet d'exprimer les faisceaux étales sur X comme des systèmes (F_U, F_D, φ) avec F_U faisceau étale sur U, F_D faisceau étale "essentiellement localement constant" sur D [N.B. l'inclusion $S \hookrightarrow D$ définit une équivalence entre la catégorie de ces faisceaux sur D, et celle des faisceaux étales sur S] et un homomorphisme de faisceaux

$$F_D \longrightarrow \sigma_* \rho^* F_U$$

ou encore

$$\boxed{\sigma^*(F_D) \xrightarrow{\varphi} \rho^*(F_U)}$$

Or, si on se borne aux F_U tels que F_U soit lui-même essentiellement localement constant, alors les données F_U, F_D, φ ne font intervenir que des faisceaux essentiellement localement constants, i.e. des topos fondamentaux (multigaloisiens) associés aux schémas envisagés, donc se décrivent entièrement en termes des diagrammes

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
 & \mathrm{B}_{\Pi_1 D^*} \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\
\mathrm{B}_{\Pi_1 U} & & \mathrm{B}_{\Pi_1 D}
\end{tikzcd}$$

- d'ailleurs le cas où φ est un *isomorphisme* correspond justement au cas des faisceaux localement essentiellement constant sur X, i.e. de faisceaux sur $\mathrm{B}_{\Pi_1 X}$ - lequel topos fondamental apparaît donc comme somme amalgamée du diagramme de topos précédent, s'insérant dans le carré

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}_{\Pi_1 D^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{B}_{\Pi_1 U} \arrow[dr] & & \mathrm{B}_{\Pi_1 D} \arrow[dl] \\ & \mathrm{B}_{\Pi_1 X} & \end{tikzcd}$$

Supposons pour simplifier U connexe, choisissons un revêtement universel de $\widetilde{U}$ de U, et un revêtement universel $\widetilde{D}_i^*$ de chaque D_i^* - d'où un revêtement universel $\widetilde{D}_i$ de D_i - et des isomorphismes (= "classes de chemins") entre $\rho_!(\widetilde{D}_i^*)$ et $\widetilde{U}$ - donc le diagramme de topos (*) - ou des groupoïdes fondamentaux - s'explicite en termes d'un diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Gal}(\overline{K}_i/K_i) \arrow[d, equal] & \\ & E_i \arrow[dl, "\rho_i"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ E \arrow[d, equal] & & \Gamma_i \arrow[d, equal] \\ \pi_1(U, \widetilde{U}) & & \mathrm{Gal}(\overline{k(s)}) \end{tikzcd}$$

et la donnée d'un F comme envisagé sur X revient à la donnée d'un système $(E_U, (E_i)_{i\in I}, (\varphi_i)_{i\in I})$ où E_U est un E-ensemble, E_i un Γ_i-ensemble ($\forall i \in I$), et φ_i un E_i-homomorphisme de E_i dans E_U (i.e. un Γ_i-homomorphisme

$$\varphi_i : E_i \longrightarrow E_U^{\pi_i},$$

où $\pi_i = \mathrm{Ker}(\sigma_i)$ s'insère dans la suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi_i \longrightarrow E_i \longrightarrow \Gamma_i \longrightarrow 1 \quad)$$

Le cas où les $E_i \longrightarrow E_U$ sont des isomorphismes, i.e. E_i s'identifiant tous à E_U, avec action triviale de π_i sur E_U, correspond au cas où F est essentiellement localement constant sur X, d'où aussitôt

$$\pi_1(X) = E = \pi_1(U)/\text{ sous-groupe invariant engendré par les } \rho_i(\pi_i)$$

Notre propos est celui d'un calcul galoisien (si possible) de la cohomologie de X pour les F envisagés.

Soit $\mathrm{B}_{X,U}$ le topos dont les faisceaux sont les triples (F_U, F_D, φ) comme dessus, qui s'envoie donc dans le topos $\mathrm{B}_{\Pi_1 X}$, correspondant aux couples pour lesquels φ est un isomorphisme, et reçoit le topos $X_{\text{ét}}$:

$$X_{\text{ét}} \xrightarrow{f} \mathrm{B}_{X,U} \xrightarrow{g} B_{\Pi_1 X}$$

On se pose la question

a) Calcul [?] “explicite”, en termes de cohomologie des groupes profinis, de la cohomologie du topos abracadabra $\mathrm{B}_{X,U}$. (N.B. La cohomologie de $\mathrm{B}_{\Pi_1 X}$ n'est autre que la cohomologie galoisienne profinie de $\pi_1(X) = E/\ldots$ calculée plus haut…).

b) Vérifier si pour un faisceau de torsion F sur $\mathrm{B}_{X,U}$ l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{B}_{X,U}, F) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X_{\text{ét}}, f^*F)$$

est un isomorphisme.

N. B. Jusqu'à maintenant, l'hypothèse $\dim X = 1$ n'a pas servi, ni l'hypothèse noethérienne - seulement le fait que S soit partie fermée discrète, X connexe…

Pour les calculs qui suivent, correspondants du cas où les $\underline{\mathscr{O}}_s$ sont des jauges à corps résiduels $k(s)$ de caractéristique 0, on va supposer que

$$\pi_i \simeq \hat{\mathbf{Z}} \quad \text{(non canoniquement)}$$

— en fait, par la théorie Kummérienne on a un système locaux de Tate T_E (sur E), T_i (sur Γ_i), et des E_i-isomorphismes $T_E \simeq T_i$ (i.e. un T_X sur lequel opère $\widetilde{E} = E\backslash\ldots$) et on aura un isomorphisme canonique Kummérien

$$T_i \xrightarrow[\sim]{\varkappa_i} \Pi_i$$

On aimerait pouvoir paraphraser, sur $\mathrm{B}_{X,U}$, la suite exacte de cohomologie bien connue

$$\longrightarrow \mathrm{H}^i(X,F) \longrightarrow \mathrm{H}^i(U,F) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_S(X,F) \longrightarrow \dots$$

relative à l'ouvert U du topos X, et son "complémentaire" fermé S. Or, tout comme X s'insère dans un diagramme de topos

$$\begin{tikzcd}
& D^*_{\text{ét}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
U_{\text{ét}} \arrow[dr] & & D_{\text{ét}} \arrow[dl] & S_{\text{ét}}, \arrow[l] \\
& X_{\text{ét}} & &
\end{tikzcd}$$

de même $\mathrm{B}_{X,U}$ s'insère dans

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{B}_{\Pi_1 D^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\mathrm{B}_{\Pi_1 U} \arrow[dr] & & \mathrm{B}_{\Pi_1 D} \arrow[dl] & \mathrm{B}_{\Pi_1 S}, \arrow[l, "\approx"'] \\
& \mathrm{B}_{X,U} & &
\end{tikzcd}$$

[N.B. Les $\varprojlim$ finies et les $\varinjlim$ quelconques dans $\mathrm{B}_{X,U}$ i.e. pour les (F_U, F_D, φ), se calculent "termes à termes"]

Je dis que $\mathrm{B}_{\Pi_1 U} \longrightarrow \mathrm{B}_{X,U}$ s'identifie à un morphisme d'induction, relatif à l'objet (noté encore U par abus de notation) de $\mathrm{B}_{X,U}$ défini par

$$F_U = \text{ faisceau final } e_U, \quad F_D = \text{ faisceau initial } \varnothing_D$$

(et φ étant alors fixé !).

En effet, les objets de $\mathrm{B}_{X,U}$ au dessus de U s'identifient aux (F_U, F_D, φ) avec $F_D = \varnothing_D$ ([?] que fixe φ ? [?]) donc ils forment une catégorie équivalente à celle des F_U, i.e. ‘ $\mathrm{B}_{\Pi_1 U}$.

On voit que le topos résiduel ('identifiant à la catégorie des $F = (F_U, F_D, \varphi)$ tels que $F_U = e_U$ faisceau final), s'identifie de même à la catégorie $\mathrm{B}_{\Pi_1 D}$ des f_D - le foncteur canonique " image inverse sur $\mathrm{B}_{\Pi_1 D}$ de l'image directe sur $\mathrm{B}_{\Pi_1 U}$" n'étant autre [que [?]] $\sigma_* \rho^*$, de sorte que l'on retrouve la description typique d'Artin d'un topos déduit par "recollement" d'un ouvert et du fermé complémentaire.

On trouve donc une suite exacte

$$\longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathrm{B}_{X,U}, F) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathrm{B}_{\Pi_1 U}, F_U) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}_{S(\text{ou } D)}(\mathrm{B}_{X,U}, F) \longrightarrow \dots$$

s'envoyant dans la suite exacte analogue relative à $X_{\text{ét}}$, $U_{\text{ét}}$, $S_{\text{ét}}$. (On n'a toujours pas utilisé d'hypothèse spéciale sur $S\dots$).

Pour vérifier que l'on a des isomorphismes au niveau des $\mathrm{H}^i(\mathrm{B}_{X,U}, F) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_{\text{ét}}, F)$, il suffit par le lemme des cinq de le prouver au niveau des $\mathrm{H}^i(\mathrm{B}_{\Pi_1,U}, F) \longrightarrow \mathrm{H}^i(U_{\text{ét}}, F)$ [i.e. vérifions que la cohomologie de $U_{\text{ét}}$ "se calcule galoisiennement"] *et* au niveau des H^i_S.

Regardons d'abord ces derniers - on a

$\mathrm{H}^0_S(\mathrm{B}_{X,U}, F) =$ ensemble des sections de F [i.e. des couples d'une section de F_U et d'une de F_D se correspondant par φ, i.e. d'un élément x de E_U invariant par E, et des $x_i \in E_i$ invariants par les Γ_i, tels que $\forall i \ x = \varphi_i(x_i)$] tels que $X = 0$ $= \prod_i (\mathrm{Ker}(E_i \longrightarrow E_U))$

On constate que ce foncteur se factorise par le foncteur H^0_S relatif à "l'inclusion" analogue

$$\underbrace{\mathrm{B}_{\Pi_1 D}}_{\text{remplaçant } \Pi_1 U} \longrightarrow \mathrm{B}_{D,D^*}$$

et les H^i_S sur $D_{X,U}$ se calculent comme ceux dans la situation locale B_{D,D^*} - où on trouve le calcul habituel[39] en termes de l'homomorphisme de groupes $E_i \longrightarrow \Gamma_i$. Mais dans le cas actuel, l'hypothèse $\dim_s X = 1$ aux points $s \in S$, implique la situation du topos [?] $D^*_{\text{ét}} \hookrightarrow D_{\text{ét}}$ est déjà entièrement définie en termes des topos fondamentaux i.e. le topos B_{D,D^*} est équivalente à $D_{\text{ét}}$ - or les $\mathrm{H}^i_S(X_{\text{ét}}, F)$ se calculent bien sur $D_{\text{ét}}\dots$

On trouve donc

Proposition[40] : *L'homomorphisme de suites exactes de cohomologie envisagé*

[39] que j'ai un peu oublié !

[40] Corollaire : *Dans ce cas la cohomologie de X à coefficients dans un F_X localement constant se calcule également ? Non, à cause du genre 0 !! Dans le cas de courbes projectives lisses de genre $\neq 0$ il faut un argument spécial.*

est un isomorphisme, pourvu que l'on sache que l'homomorphisme $\mathrm{H}^i(E, F_E) \longrightarrow \mathrm{H}^i(U_{ét}, F_U)$ *est un isomorphisme pour tout i (*F_U *faisceau étale sur* $U_{ét}$ *défini par un groupe* F_E *sur lequel* $E = \pi_1(U)$ *opère).*

Exemple : OK si U est une courbe affine sur k algébriquement clos F premier à car [k [?]] (car OK pour $i = 0, 1$, et pour $i = 2$ les deux [membres [?]] sont nuls (la cohomologie galoisienne, car le groupe fondamental premier à p est libre...) - d'où on déduit le cas analogue pour U affine sur k quelconque, puis même si U n'est pas affine mais simplement quasi-projective ?)

Nous nous intéressons maintenant au cas où X projective (connexe) sur k algébriquement clos, on voit donc que :

a) Si $S = \varnothing$ i.e. $X = U$, la cohomologie de U (à coefficients dans des [?] locaux) est celle de π. Donc on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^2(\pi, T) \simeq \mathrm{H}^2(X, T) \quad (\simeq \hat{\mathbf{Z}})$$

(avec [un] grain de sel en caractéristique $p > 0$)

b) Si $S \neq \varnothing$, les $\mathrm{H}^i_!(U, -)$ se décrivent et [se] calculent par voie galoisienne, en termes de groupes à lacets, permettant de reconstituer la situation

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}_{\Pi_1 D^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{B}_{\Pi_1 U} \arrow[dr] & & \mathrm{B}_{\Pi_1 D} \arrow[dl] \\ & \mathrm{B}_{\Pi_1 X} & \end{tikzcd} \qquad (= \text{topos discret défini par } S = I)$$

en notant que le composant $\mathrm{B}_{\Pi_1 D_i^*}$ n'est autre que B_{L_i} (avec les notations du numéro précédent). On trouve alors des isomorphismes canoniques (par [calculs] [?] locaux)

$$\mathrm{H}^2_{s_i}(\mathrm{B}_{U,X}, L_i) \simeq \hat{\mathbf{Z}} \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{H}^2_{s_i}(\mathrm{B}_{U,X}, \hat{\mathbf{Z}}) \simeq L_i^{\otimes -1}$$

(si $g \neq 0$)

$$\mathrm{H}^2_{s_i}(\mathrm{B}_{U,X}, \hat{\mathbf{Z}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(X, \hat{\mathbf{Z}}) \simeq \mathrm{H}^2(\pi, \hat{\mathbf{Z}})$$

d'où en mettant ensemble, des isomorphismes canoniques

$$L_i \simeq \mathrm{H}^2(\pi, \hat{\mathbf{Z}})^{\otimes -1}$$

d'où en mettant ensemble[41], des isomorphismes canoniques

$$L_i \simeq \mathrm{H}^2(\pi, \hat{\mathbf{Z}})^{\otimes -1}$$

On constate que les composés

$$T_\pi \xrightarrow{\sim} L_i \longrightarrow \mathrm{H}^2(\pi, \hat{\mathbf{Z}})^{\otimes -1}$$

ne dépendent pas du choix de i, de sorte que le module d'orientation T_π du groupe profini à lacets π s'identifie au *dual* de $\mathrm{H}(\pi, \hat{\mathbf{Z}})$ (si $g \neq 0$).

Considérons maintenant un homomorphisme de groupes à lacets $\pi' \xrightarrow{f} \pi$, $I'_0 \xrightarrow{\tau} I$ associé à un isomorphisme $T_{\pi'} \simeq T_\pi$ et une application degré $d : I'_0 \longrightarrow \mathbf{N}$ (N.B. $i' \in I' \backslash I'_0 \longrightarrow f(L'_{i'}) = (1)$).

On voudrait en déduire un diagramme de morphismes de topos

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{B}_{\Pi_1 U'} & \longrightarrow & \mathrm{B}_{X', U'} & \longrightarrow & \mathrm{B}_{\Pi_1 X'} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{B}_{\Pi_1 U} & \longrightarrow & \mathrm{B}_{X, U} & \longrightarrow & \mathrm{B}_{\Pi_1 X}
\end{array}$$

et un homomorphisme *trace* sur la cohomologie à supports propres de U', U (définie en termes de cohomologie sur $\mathrm{B}_{X', U'}$, $\mathrm{B}_{X, U}$ relativement) qui induise un isomorphisme

$$\mathrm{H}^2_!(U', \widehat{\mathbf{Z}}) \longrightarrow \mathrm{H}^2_!(U, \widehat{\mathbf{Z}})$$

qui soit justement (contragrédiant de) l'isomorphisme des modules d'orientations associé à f…

[41] Mais dans tous les cas (même si $g = 0$, du moment qu'on n'a pas $\nu = 0$) on trouve $\mathrm{H}^2_!(\mathrm{B}_{\pi, U}, \hat{\mathbf{Z}}) \simeq \hat{T}_\pi^{\otimes -1}$ canoniquement, d'où une description cohomologique des modules des orientations, commune au cas sans trous et avec trous…

§ 14 bis. — OÙ ON REVIENT SUR LES MORPHISMES *MIXTES*

(Correspondants, dans le cadre topologique, au cas de $f : (X', S') \longrightarrow (X, S)$ (avec X, X' T-orientés) tels que l'on ait [$f(X' \backslash S') \subset X \backslash S$, i.e. $S' \supset f^{-1}(S)$, mais] $S' \neq f^{-1}(S)$, i.e. il y a des points de S' qui sont envoyés dans $U = X \backslash S$).

Dans le paradigme toposique et groupoïdal, (X, S) est décrit par un diagramme de groupoïdes

$$\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U \quad (\text{et } \varkappa : T_{\Pi_{D^*}} \simeq \text{ système local des } \pi_1 \text{ sur } \Pi_{D^*})$$

ou de topos

$$\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow B_U$$

et un isomorphisme $\varkappa$ du système local constant T, qui permet de définir le topos discret $B_D (\simeq \mathrm{B}_{\Pi_0 D^*})$ et le topos $B_{X,U}$, s'insérant dans le diagramme de topos

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}_{D^*} \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ \mathrm{B}_U \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathrm{B}_D \arrow[dl, "\psi"] \\ & \mathrm{B}_{X,U} & \end{tikzcd} \qquad (\text{topos discret } \simeq \mathrm{B}_S)$$

où φ, ψ sont des morphismes d'inductions de sous-topos, φ ouvert ψ fermé, complémentaire l'un de l'autre, et pour (X', S'), décrit par un diagramme analogue

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}_{D'^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{B}_{U'} \arrow[dr] & & \mathrm{B}_{D'} \simeq \mathrm{B}'_S \arrow[dl] \\ & \mathrm{B}_{X',U'} & \end{tikzcd}$$

Ceci dit, on veut absolument, dans une description de $f : (X', S') \longrightarrow (X, S)$, que celle-ci permette de retrouver non seulement $\mathrm{B}_{U'} \longrightarrow \mathrm{B}_U$ (ce qui sera acquis par la donnée d'un $f_\pi : \pi' \longrightarrow \pi$), mais aussi $\mathrm{B}_{X',U'} \longrightarrow \mathrm{B}_{X,U}$. On aura $S' = S'_0(= f^{-1}(S)) \amalg S'_1$, donc $D' = D'_0 \amalg D'_1$ et en fait f induit $S'_1 \xrightarrow{f} U$ (et non $S'_1 \longrightarrow S$) qui doit s'expliciter, au niveau des topos multigaloisiens, par un morphisme

$$B_{D'_1}(\simeq \mathrm{B}_{S'_1}) \longrightarrow \mathrm{B}_U$$

i.e. la donnée d'une famille de revêtements universels de U, paramétrée par $S'_1 = I'_1$, ou (si un te revêtement universel est choisi, U étant connexe, d'où un $\pi = \mathrm{Aut}(\widetilde{U})$) par une famille de torseurs sous π, $(P_{i'})_{i' \in I'_1}$. Ceci étant posé, on pourra décrire, en termes de

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}_{D'^*_0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B}_{U'} \arrow[d] \\ \mathrm{B}_{D^*} \arrow[r] \arrow[ur, "\sim"] & \mathrm{B}_U \end{tikzcd}$$

et de

$$B_{D'^*_1} \longrightarrow \mathrm{B}_{D'_1} \longrightarrow B_U$$

l'homomorphisme de topos $\mathrm{B}_{X',U'} \longrightarrow \mathrm{B}_{X,U}$[42]

- Je passe sur le détail de la description.

Quand on se donne un groupe d'opérateurs Γ sur la situation $(X', S') \longrightarrow (X, S)$ donc sur la situation groupoïdale ou toposique, il faut en tenir compte dans la description ci-dessus.

[42]Il semble qu'on soit en train de faire la description des morphismes de topos $\mathrm{B}_{X',U'} \longrightarrow B_{X,U}$ qui induisent $U' \longrightarrow U$ et qui sur $D'^*_1(= D'^*|_U)$, se factorisent par $D'^*_1 \longrightarrow D'_1 \ldots$

Ainsi I'_0 [?] I'_1 sera stable par Γ, et le morphisme $\mathrm{B}_{D'_1} \longrightarrow \mathrm{B}_U$ doit être stable par Γ. CE qui signifie aussi, sans doute, qu'on a un morphisme de topos de $\mathrm{B}_{D'_1,\Sigma} = \mathrm{B}_{I'_1,\Sigma}$ dans $\mathrm{B}_{U,\Gamma}$. Choisissant pour toute orbite de Γ dans I'_1 un représentant $s' \in I'_1$, et considérant son stabilisateur $\Gamma_{s'} \subset \Gamma$, il faut donc pour toute telle orbite i.e. tout i' se donner un $\Gamma_{s'}$ objet de la catégorie des revêtements universels de (U, Γ).

Décrivant (U, Γ) en termes d'une extension E de $\Sigma \subset \Gamma$ par π (en choisissant un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U), la donnée de $\mathrm{B}_{\Gamma_{s'}} \longrightarrow \mathrm{B}_{X,U}$ compatible avec tout revient sauf erreur à la donnée d'un torseur P à droite sous π (permettant de tordre le revêtement universel de référence $\widetilde{U}$ de U, à l'aide de P don aussi de tordre E par P), et d'un scindage de $E^P \longrightarrow \Gamma$ au dessus de $\Gamma_{s'} \ldots$)

Un automorphisme d'un tel couple $(P, \Gamma_{s'} \xrightarrow{q} E^P)$ correspond à un $\alpha \in \pi$ qui *centralise* $\Gamma_{s'_i}$, i.e. qui soit fixé par $\Gamma_{s'_i}$ opérant sur π.

Si les $\Gamma_{s'_i}$ opèrent assez fortement sur π pour que l'on sache que $\pi^{\Gamma_{s'_i}} = (1)$, l'objet $(P, q : \Gamma_{s_i} \longrightarrow E^P)$ est défini à *isomorphisme unique* près par la classe d'isomorphie (classe de scindage de E sur Γ_{s_i}).

Il me semble probable que ceci soit toujours le cas dans le cas *arithmétique*, où $\Gamma_{s'_i}$ est un sous-groupe ouvert du groupe de Galois Γ (dont l'opération extérieure est alors draconienne !) ; ceci en direction de la conjecture qu'une classe de scindage de E sur Γ est "aussi bonne" qu'un point rationnel de U sur K — et permet de paradigmer ce qu'un tel point rationnel permettrait d'obtenir…

§ 15. — RETOUR SUR LE CAS TOPOLOGIQUE
Structure des Γ-orbites critiques en termes d'extensions

Soit Γ un groupe fini opérant sur un groupe à lacets π ; supposons que ceci provienne d'une situation topologique, Γ opérant sur (X,S). Il y a des points à vérifier (*cas anabélien*).

a) Opération de Γ triviale $\Longleftrightarrow \Gamma \underset{\text{trivial}}{\longrightarrow} \mathrm{Autext}(\pi)$.

En d'autres termes : un *automorphisme* d'ordre fini de (S,X) ne peut être isotope à l'identité (ou même seulement homotope, cela revient au même d'ailleurs) que si il est trivial.

C'est même connu en Géométrie Algébrique "abstraite" du moment qu'on admet que u conserve une structure complexe - il en est justement ainsi si on admet qu'il n'y a pas de sauvagerie…

Sans doute toute action d'un groupe fini Γ laisse [une] structure conforme invariante, et même si on restreint à $\Gamma^\circ = \ker(\Gamma \xrightarrow{\chi} \{\pm 1\})$, [laisse une] structure complexe invariante.

Supposons dorénavant que Γ opère fidèlement ($\Gamma \neq 1$), le choix d'une structure complexe sur $Y = X/\Gamma^\circ$ en définit une sur X[43] stable par Γ° - et une structure conforme stable par Γ si on choisit celle de Y invariée par l'élément non trivial de Γ/Γ° (s'il y en a un)[44].

---

[43](N. B. Γ/Γ° opère encore sur X/Γ°, en fait si $\Gamma \neq \Gamma^\circ$ i.e. $\Gamma/\Gamma^\circ \simeq \{\pm 1\}$, X/Γ° est muni d'une "structure de courbe algébrique réelle"…)

[44](cela marche chaque fois qu'on a un revêtement ramifié de surface conforme).

Tout $x \in U^\Gamma$ définit une classe de π-conjugaison de scindages de l'extension E de Γ par π, comme on voit en prenant x comme point base[45].

Notons que si $\Gamma^\circ \neq 1$ (i.e. Γ n'est pas réduit à l'identité et une anti-involution). U^Γ est un ensemble fini - on trouve une application $U^\Gamma \longrightarrow$ ensemble des classes de π-conjugaison de scindages de $E \longrightarrow \Gamma$, i.e. ensemble des relèvements de $\Gamma \longrightarrow$ Autext π ou $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi)$ mod. π-conjugaison.

Question. — Si $\Gamma^\circ \neq \{1\}$, cette application est-elle bijective ? Si $\Gamma^\circ = \{1\}, \Gamma/\Gamma^\circ \simeq \{\pm 1\}$, alors X^Γ est l'ensemble des points réels d'une courbe algébrique réelle et $U^\Gamma = X^\Gamma \backslash S^\Gamma$ est le complémentaire d'une partie finie dedans, on a :

$$\pi_0(X^\Gamma \backslash S^\Gamma) \longrightarrow \pi - \text{classe de scindages de } E \text{ sur } \Gamma$$

et la question analogue de bijectivité se pose, pour l'extension de $\{\pm 1\}$ par π…

Pour l'injectivité de l'application dans le cas $\Gamma^\circ \neq \{1\}$, on peut supposer $\Gamma = \Gamma^\circ \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, avec p premier, i.e. Γ engendré par un automorphisme complexe u d'ordre p, qui définit (si $x, y \in U^\Gamma$, $x \neq y$) un automorphisme d'ordre p dans $\pi_1(U, x)$, u_x donc une classe de π-conjugaison d'automorphisme de π d'ordre p, et de même un automorphisme u_y de $\pi_1(U, y)$. Il faut prouver que u_x, u_y ne sont pas conjugués sur π.

Soient U un espace topologique connexe par arcs, Γ un groupe fini opérant sur U, $\widetilde{U}$ un revêtement universel de U, d'où un groupe extension

$$1 \longrightarrow \pi \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma \longrightarrow 1$$

opérant fidèlement sur $\widetilde{U}$ ($\pi = \mathrm{Aut}_U(\widetilde{U} \simeq \pi_1(U))\ldots$). Pour tout point fixe $x \in U^\Gamma$, Γ opère sur le revêtement universel ponctué sur x, soir R_x, en laissant fixe le point marqué $\tilde{x}$ dans R_x au-dessus de x, d'où un scindage de l'extension relative

$$1 \longrightarrow \pi_x \xrightarrow{i_x} E_x \underset{\sigma_x}{\overset{p_x}{\rightleftarrows}} \Gamma \longrightarrow 1$$

et pour tout isomorphisme c ("chemin") : $R_x \simeq \widetilde{U}$, induisant un isomorphisme d'extension $R_x \simeq E$ (défini de manière compatible avec l'automorphisme intérieur induit par un $\alpha \in \pi\ldots$) on trouve par transport de structure un scindage $\sigma_{x,l}$ de

[45](N.B. $U^\Gamma \neq \varnothing$ implique que Γ est cyclique).

$E \overset{p}{\longleftarrow} \Gamma$ (qui, pour l variable, est défini à automorphisme intérieur près par un $\alpha \in \mathbf{R}$).

On trouve ainsi une application

(∗)

$$U^{\Gamma} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{classes de } \pi-\text{conjugaison des scindages de l'extension } E \text{ de } \Gamma \text{ par } \pi \\ (= \text{classes de } \pi-\text{conjugaison de sous-groupes } \Gamma' \text{ de } E \\ [\text{images de sections}]) \end{array}$$

L'image de cette application est donc formée des classes de conjugaison de sous-groupes sections $\Gamma' \subset E$ tels que $\widetilde{\Gamma'} \neq \varnothing$, et pour un tel Γ', l'ensemble des $x \in U^{\Gamma}$ qui donnent comme image cette classe de conjugaison est l'image de U^{Γ} dans U[46].

Enfin, si x est dans cette image, l'ensemble $\widetilde{U}_x^{\Gamma'}$ des $\widetilde{x} \in \widetilde{U}^{\Gamma'}$ au-dessus de x ($\neq \varnothing$ par hypothèse sur x) est un torseur sous $\pi^{\Gamma'}$ i.e. si $\widetilde{x} \in (U^{\Gamma'})_x$, et si $\alpha \in \pi$, alors

$$\alpha \widetilde{x} \in \widetilde{U}^{\Gamma'} \Longleftrightarrow \alpha \in \pi^{\Gamma'}$$

(vérification triviale, comme dans toutes les assertions précédentes).

a) (*) est une bijection, et pour tout sous-groupe Γ de E section de l'extension, on a $\pi^{\Gamma'} = \{1\}$.

b) pour tout Γ' comme dans a), Γ' opérant sur $\widetilde{U}$ a un point fixe et un seul.

Ceci posé, prouvons le

Lemme fondamental. — *Soit* Γ *un groupe fini, opérant fidèlement sur un espace* $D \simeq \mathbf{R}^2$, *soit* Γ° *le sous-groupe de* Γ *(d'indice 1 ou 2) formé des* $g \in \Gamma$ *tels que* g_D *conserve l'orientation, et supposons* $\Gamma^{\circ} \neq \{1\}$ *(i.e.* Γ *n'est réduit ni au groupe unité, ni au groupe* $\{1, \sigma\}$, *où* σ *est une anti-involution de D). Alors*

a) Γ *admet un point fixe et un seul dans D i.e. card* $D^{\Gamma} = 1$.

[46](N.B. $\widetilde{U}_x$ étant identifié à $\mathrm{Isom}_U(R_x, \widetilde{U})$, $\widetilde{U}_x^{\Gamma'}$ s'identifie à $\mathrm{Isom}_{U,\Gamma}(R_x, \widetilde{U})$. Les deux isomorphismes qui commutent à l'action de Γ, et $\pi^{\Gamma} = (1)$ signifie donc que cet isomorphisme est unique en terme de la classe de conjugaison des sections de [?])

b) Γ° *est cyclique, et si* $\Gamma \neq \Gamma^\circ$. Γ *est un groupe diédral.*

précisément, il existe un homéomorphisme $D \simeq \mathbf{C}$ tel que le groupe d'homéomorphismes de $\mathbf{C}$ transformé de Γ soit : soit le groupe des homothéties par $\mu_n(\mathbf{C})$ (si $\Gamma = \Gamma^\circ$ d'ordre n), soit le groupe diédral associé

$$z \mapsto \xi\tau^\varepsilon(z) \quad (\xi \in \mu_n(\mathbf{C}), \varepsilon = \pm 1)$$

où τ est la conjugaison complexe.

Démonstration du lemme fondamental.

a) Supposons d'abord qu'on puisse trouver une structure C^2 sur D invariante par Γ alors un argument standard montre qu'il existe une structure conforme invariante par Γ, or le théorème fondamental de la représentation conforme montre qu'alors

ou bien $D \simeq$ intérieur Δ du disque unité ou du demi-plan de Poincaré

ou bien $D \simeq \mathbf{C}$ (isomorphisme conforme).

Dans le premier cas, les groupes des automorphismes conformes est

$$\simeq \mathrm{Sl}(2,\mathbf{R})\tilde{} = \{u \in \mathrm{Sl}(2,\mathbf{R}) / \det u = \pm 1\} (u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \text{ opérant par } \theta_u\tau^{\det u} \text{ où } \tau$$

est la conjugaison complexe et $\theta_u(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ en laissant stable le demi plan de Poincaré, et tout sous-groupe compact est contenu dans un conjugué du sus-groupe compact maximal qui (en repassant au disque unité Δ) s'identifie au groupe $O(2,\mathbf{R})$ des transformations du disque unité de la forme

$$z \mapsto \chi\tau^\varepsilon \quad \xi \in \mathbb{U} = \{\xi \in \mathbf{C} / |\xi| = 1\}$$

$$\varepsilon \in \{\pm 1\}$$

$$\tau \text{ est la conjugaison complexe.}$$

Tout sous-groupe fini de ce groupe est de l'un des types explicités plus haut.

On gagne, en utilisant un homéomorphisme $[0,1[\longrightarrow [0,+\infty[$ pour définir un homéomorphisme $D \simeq \mathbf{C}$ commutant à l'action de $G = O(2,\mathbf{R})$.

Dans le cas $D \simeq \mathbf{C}$, on voit que le groupe des endomorphismes conformes de $\mathbf{C}$ est le groupe des transformations $az+b$ ou $a\overline{z}+b$, dans lequel un sous-groupe compact maximal est le même groupe $O(2,\mathbf{R})$ que tantôt — et tout sous-groupe compact (à fortiori tout sous-groupe fini) est contenu dans un conjugué de celui-ci.

On gagne encore.

Le reste du travail consiste essentiellement à montrer que l'hypothèse de non-sauvagerie est toujours satisfaite, du moins pour Γ°. Supposons d'abord $\Gamma = \Gamma^{\circ}$.

On suppose que tout est prouvé pour les ordres $<$ card Γ.

b) Γ admet un point fixe où $D^{r} \neq \varnothing$.

Sinon, les sous-groupes des orbites $\widetilde{x}$ des $x \in D$ étant d'ordre $<$ card Γ, par hypothèse de récurrence les Γ_x ont la structure dite dans le théorème, donc $D^{\Gamma} = U$ est une surface topologique et $D \longrightarrow U$ est un revêtement ramifié ; choisissons une structure conforme sur U, il y a une unique structure conforme sur D telle que $D \longrightarrow U$ soit "conforme" (holomorphe ou antiholomorphe), celle-ci est invariante par Γ et, d'après a), Γ admet un point fixe, contradiction.

c) Γ n'admet pas d'autre point fixe que 0. On fait opérer Γ fidèlement sur $D^{*} = D\backslash\{0\}$ et il faut prouver que $D^{*\Gamma} = \varnothing$.

Soit donc $x \in D^{*\Gamma}$. On va alors aboutir à une contradiction. Considérons le revêtement universel $\widetilde{D}^{*}$ de D^{*} ponctué en x, donc Γ opère sur $\widetilde{D}^{*}$ avec point fixe $\widetilde{x}$ au-dessus de x. Ici $\pi = \pi_1(D^{*}) \simeq \mathbf{Z}$, et Γ y opère trivialement (car $\Gamma = \Gamma^{\circ}$) donc $\Gamma \times \mathbf{Z}$ opère sur $\widetilde{D}^{*}$.

On peut supposer $D = \mathbf{C}$, $O = 0$, $x = 1$, $D^{*} = \mathbf{C}^{*}$, $\widetilde{D}^{*} = \mathbf{C}$, $\widetilde{x} = 0$, $\widetilde{D}^{*} \longrightarrow \widetilde{D}$ donné par exp $(2i\pi z)$, et $\mathbf{Z}$ opérant sur $\mathbf{C}$ par $\theta_n z = z + n$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Il reste à prouver que si un groupe fini Γ opère sur $\mathbf{C}$ en commutant à l'action de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{C}$, et en laissant fixe le point 0, alors Γ opère trivialement (ce qui contredit l'hypothèse de fidélité de l'opération).

On est ramené au

Lemme. — *Soit u un homéomorphisme d'ordre fini de* $\mathbf{C}$ *commutant à* $z \mapsto z+1$ *et laissant invariant l'origine, alors* $u \simeq \mathrm{id}$.

On peut supposer qu'il existe un nombre premier p tel que $u^p = \mathrm{id}$, i.e. que u correspond à une opération de $\Gamma = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{C}$. Tous les points de $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$ sont fixe par Γ. Passant à $\widetilde{\mathbf{C}} \simeq \mathbb{S}^2$, on trouve que ∞ est un point d'accumulation des points fixes sous Γ. Si Γ n'opérait pas trivialement, ce serait décidément très sauvage ! On doit pouvoir terminer par la suite spectrale d'Adams… je n'entre pas dans ces dédales…

d) La partie purement topologique étant ainsi supposée prouvée, on en conclut aussi, si $\Gamma \neq \Gamma^\circ$, $\Gamma^\circ \neq \{1\}$, comme D^{Γ° est invariant sous Γ, comme D^{Γ° est réduit à un point, celui-ci est invariant sous Γ tout entier, pas seulement Γ°. D'autre part, on en sait assez maintenant pour savoir que si Γ groupe fini opère sur une surface compacte U, les Γ_x $(x \in U)$ respectant l'orientation, alors $U\backslash\Gamma \simeq V$ est un surface $U \longrightarrow V = U\backslash\Gamma$ est un revêtement ramifié, choisissons une structure conforme sur V, on trouve par image inverse une structure conforme sur U invariante par Γ. Pour le cas $U = D$, on termine par *a*) pour le complément du lemme fondamental.

[Mais pour bien faire, il faudrait prouver qu'il existe toujours une structure conforme invariante si Γ est un groupe fini opérant sur une surface compacte - donc $U\backslash\Gamma$ est une surface à bord… Ici ce qui manque, c'est l'analyse de l'action d'une anti-involution d'une surface au voisinage d'un point fixe…][47]

Conséquence du lemme fondamental :

Théorème. — *Soit U une surface topologique paracompacte 0-connexe, Γ un groupe fini opérant fidèlement sur U, on suppose $\widetilde{U}$ non compacte (i.e. U non homéomorphe à $\mathbb{S}^2$ ni au plan projectif réel) on suppose que de plus si U est orientable, le sous-groupe Γ° de Γ des $g \in \Gamma$ qui conservent une orientation soit $\neq \{1\}$ [donc Γ n'est*

[47] Il faudrait prouver que si τ est un anti-automorphisme involutif de D, alors il existe un isomorphisme $D \simeq \mathbf{C}$ tel que τ devienne $z \mapsto \overline{z}$ (donc $D^\tau \simeq \mathbf{R}$!) ce qui doit permettre de prouver, si $\Gamma = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ opère par anti-automorphisme sur U ([orientable $U \neq S^2$]) que $\pi_0(U^\Gamma) \longrightarrow$ classes de π-conjugaison de sections de E sur Γ est bijectif.

ni réduit à 1, ni à 1 et une anti-involution], et si U non orientable, que $\Gamma \neq \{1\}$ *i.e.* *card* $\Gamma > 3$.

Ceci posé considérons l'extension E de Γ par $\pi = \pi_1(U)$, et l'application

$$U^{\Gamma} \longrightarrow \textit{classes de } \pi - \textit{conjugaison des scindages de } E \longrightarrow \Gamma$$

on a ceci :

a) *Cette application est bijective*

b) *Pour tout sous-groupe section* $\Gamma' \subset E$ *on a* $\pi^{\Gamma'} = \{1\}$.

c) *Si* $U^{\Gamma} \neq \varnothing$, *i.e. il existe un scindage, alors* Γ *est cyclique ou diédral (et dans le cas U ouvert,* Γ° *est cyclique)*[48].

Corollaire. — *Supposons U orientée,* Γ *conservant l'orientation. Soit* $U^{!}$ *l'ensemble de* $x \in U$ *tels que* $\Gamma_x \neq \{1\}$ *(qui est donc une partie discrète dans U). A tout* $x \in U^{!}$, *associons la classe de π-conjugaison des sous-groupes de E (sections partielles de E sur* $\Gamma_{x'}$*) qui correspond à cet* $x \in U^{\Gamma_{x'}}$.

Alors

a) *les sections partielles ainsi obtenues sont* maximales *parmi celles qui sont* $\neq \{1\}$.

b) *l'application de* $U^{!}$ *vers l'une des classes de π-conjugaison des sections partielles* $\neq (1)$ *maximales est bijective*[49].

c) *pour toutes telles sections partielles, on a* $\pi^{\Gamma'} = \{1\}$, *i.e. les automorphismes du revêtement universel* R_x *de U qui commutent à l'action de* Γ_x *sont triviaux. Il y a un isomorphisme unique commutant à l'action* Γ_x *entre ce torseur et le torseur déduit de* $\widetilde{U}$ *en tordant par le π-torseur* P_x *de* Γ'' *dans la classe [*Γ'*]…*

Prouvons a). Soit $\Gamma' \subset E$ section partielle sur Γ_x déduite de $x \in U^{!}$. Soit $\Gamma'' \supset \Gamma'_x$ un autre sous-groupe tel que $\Gamma'' \cap \pi = \{1\}$ i.e. $\Gamma'' \hookrightarrow \Gamma$. Soit $\Gamma_1 \supset \Gamma_x$ son image dans

[48] N.B. Les hypothèses sur U assurant que $\widetilde{U} \simeq D$, et celles sur Γ que Γ opérant sur D satisfait aux hypothèses du lemme fondamental.

[49] (N.B. Cette application commute aux actions naturelles de Γ !).

Γ. Par le théorème précédent, il est défini par un unique $y \in U^{\Gamma_1}$, et il est clair que cet y ne change pas si on remplace l'action de Γ_1 sur U par l'action d'un groupe plus petit $\neq \{1\}$ (et la section induite) tel Γ_x, donc [?] Γ_1 fixe x donc (par définition de Γ_x) $\Gamma_1 = \Gamma_x$ donc $\Gamma'' = \Gamma'$.

b) Soient x, y donnant même image $[\Gamma']$, $[\Gamma'']$, donc $\Gamma_x = \Gamma_y$, soit Γ_1, et appliquant le théorème à Γ_1 opérant sur U, on trouve $x = y$. Soit d'autre part Γ_0' une section partielle $\neq 1$ maximale, $\Gamma_0 \subset \Gamma$, son image ; par le théorème appliqué à l'action de Γ_0 sur U, $\exists x \in U$ tel que $x \in U^{\Gamma_0'}$ i.e. $\Gamma_0' \subset \Gamma_x$ et que $[\Gamma_0']$ soit défini par x, mais si $[\Gamma']$ est défini par x pour l'action de Γ_x tout entier, on aura $[\Gamma_0'] \subset [\Gamma']$, donc par le caractère maximal de $[\Gamma_0']$, on aura $[\Gamma_0'] = [\Gamma']$, ce qui prouve b). D'autre part c) est clair.

Revenons maintenant au cas où $U = X\backslash S$, X surface T-orientée compacte avec S partie finie, anabélienne. Donc on a une description "pleinement fidèle" de U par un π avec structure à lacets, et on voudrait se convaincre que l'opération extérieure d'un Γ sur π, quand Γ conserve l'orientation (pour simplifier) est également suffisante pour décrire pleinement l'objet (M, Γ) dans le catégorie isotopique qui convient.

On récupère déjà une description de $U^!$ en terme de l'action de π, soit $J(\simeq U^!)$ l'ensemble des classes de π-conjugaison de sections partielles ($\neq 1$) maximales de E sur Γ. Pour tout $j \in J$, j est un π-torseur comme classe de π-conjugaison de sections [que ce soit un π-torseur résulte de $\pi^{\Gamma'} = \{1\}$]. En fait l'ensemble de toutes ces sections partielles maximales ($\neq 1$) est de façon naturelle un E-ensemble (par conjugaison) sur lequel π opère librement et cet E-ensemble s'identifie canoniquement à $\widetilde{U}|_{U^!} = \widetilde{U}$ pour la structure de E-ensemble.

Soit $S' = S \cup U^!$, $U' = X\backslash S'$, il s'impose d'essayer de reconstituer (en terme de l'extension E de Γ par le groupe à lacets π) le groupe extérieur à lacets correspondant à X', S' i.e. à U' et l'action extérieure de Γ sur celui-ci. Mais il faudrait d'abord s'assurer du caractère intrinsèque de la définition de $J(\simeq U^!)$ comme Γ-ensemble, en terme du groupe extérieur π, et de l'action extérieure de Γ dessus. (Ceci est assez évident d'ailleurs : en termes justement de classes de π-conjugaison de relèvements partiels de $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi)$ (vers $\mathrm{Aut}_{\mathrm{lac}}(\pi)$)). On aimerait cependant aussi une description intrinsèque de $\widetilde{U}|_{U^!}$, en un paradigme pour l'application de Γ-espace

: $U^! \longrightarrow U$; on doit donc décrire un morphisme de topos avec opération de Γ dessus

$$\mathrm{B}_J \xrightarrow{\nu} \mathrm{B}_E$$

qui correspond donc à un foncteur "image inverse" ν^* (compatible avec l'action de Γ)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}_E \arrow[rr, "\nu^*"] \arrow[d, "\approx"] & & \mathrm{B}_J \arrow[d, "\approx"] \\ \pi - \text{ensemble} & & \text{Ensemble sur } J \end{tikzcd}$$

Ce n'est autre que le produit contracté sur π avec l'ensemble des sections partielles $\neq 1$ invariantes de E sur Γ.

Revenons 'l'extension E de Γ par π provenant d'une situation géométrique (laquelle extension dans le cas anabélien est définie déjà en terme d'une opération extérieure de Γ sur π) on voit que celle-ci satisfait des conditions supplémentaires draconiennes. (Pour les formules, on va supposer l'action de Γ fidèle).

Tout-sous-groupe $\Gamma' \subset E$ tel que $\Gamma' \cap \pi = \{1\}$ ("sections partielles") est cyclique (si $\Gamma = \Gamma^\circ$) ou diédral, et l'ensemble des classes de π-conjugaison de tels sous-groupes est fini. Tout sous-groupe section $\Gamma' \neq 1$ est contenu dans un unique sous-groupe section *maximal*. (On l'a établi tout au moins dans le cas $\Gamma = \Gamma^\circ$, il faudrait revenir sur le cas général, je pense que cela reste vrai tel quel, à vérifier...)

De plus on vit apparaître une *structure supplémentaire* sur le groupe E [qui dans le cas anabélien s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\pi)$], à savoir une application

$$\mu : \{\text{élément } u \text{ d'ordre fini de } E\} \longrightarrow T \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

obtenu en notant que si $u \in E$ est d'ordre fini n d'où $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \hookrightarrow iE$, on a $\mathrm{Im}\, i \cap \pi = \{1\}$ (π n'a pas d'élément de torsion) donc $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \hookrightarrow \Gamma$ d'où un sous-groupe $\Gamma_1 \subset \Gamma$ (i.e. l'image a le même ordre n) et le relèvement $\Gamma_1 \longrightarrow E$ définit un $x \in U^{\Gamma_i}$ et U_1 opérant sur U en laissant fixe n correspond donc au voisinage de n à un "multiplicateur", qui (pour une orientation locale choisie) est une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de 1 i.e. un élément de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et qui pour l'orientation changeante s'interprète intrinsèquement comme élément de $T \otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \subset T \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$[50].

[50]Pour un u d'ordre fini de E, on doit avoir, si $u \notin E^\circ$, que u est d'ordre 2 exactement (...) [?].

L'application μ satisfait les conditions évidentes :

$$\begin{cases} \mu(\alpha u \alpha^{-1}) = \mu(u) & \text{si} \quad \alpha \in \pi \\ \mu(u^n) = n\mu(u) & \text{si} \quad n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

J'ignore si cette application μ peut se définir intrinsèquement en terme de l'extension ou si au contraire il peut exister deux extensions E, E' de Γ par π, définies par des situations géométriques de Γ opérant sur U et U' et un isomorphisme d'extension E, E' qui ne soit compatible avec les fonctions μ, μ'. Le cas non trivial le plus simple à regarder est le cas abélien (où $\pi \simeq \mathbf{Z}$ (card $I = 2$) ou $\pi \simeq \mathbf{Z}^2$ ($I = \varnothing$)). Dans le premier cas $\pi = \mathbf{Z}$, on doit avoir (pour avoir une action fidèle de $\Gamma = \Gamma^\circ$),

Γ° cyclique, $E \simeq \mathbf{Z}$, il n'y a pas d'éléments d'ordre fini dans E sauf 1 donc la question ne se pose pas.

Le cas $\pi \simeq \mathbf{Z}^2$ est plus intéressant ; si π est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang n, on aune suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi \longrightarrow \pi \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \longrightarrow X_0(\pi) \longrightarrow 0$$

et si Γ opère sur π, la suite exacte de cohomologie donne :

(compte tenu de $\mathrm{H}^i(\Gamma, \pi \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}) = 0$ pour $i > 0$)

$$\mathrm{H}^2(\Gamma, \pi) \xleftarrow{\ \sim\ } \mathrm{H}^1(\Gamma, X_0(\pi))$$

classes d'extension — classes de $X_0(\pi)$ torseur

avec opération de Γ dessus compatible avec

son action sur $X_0(\pi)$

donc la donnée d'une extension E de Γ par π revient essentiellement à celle d'un Γ-$X_0(\pi)$-torseur X (n-tore inhomogène intrinsèque sur lequel Γ opère - donc il opère sur son groupe des translations X_0, donc sur $\pi = \pi_1(X_0, 0)\ldots$). S'il était vrai pour $n = 1$ que toute opération de Γ sur une surface torique ($\simeq S' \times S'$) est isomorphe à une telle action standard, alors le caractère intrinsèque de l'application μ dans ce cas serait établi - ce qui ne rendrait pas inintéressant pour autant le calcul de μ, qui prend ses valeurs dans $T \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où ici $T \simeq \Lambda^2_{\mathbf{Z}}\pi$ (dim 2 dans $\mathrm{H}^2(\pi, \mathbf{Z}) \simeq \Lambda^2\mathrm{H}^2(\pi, \mathbf{Z}) = \pi$).

La question revient à ceci : on a une extension *scindée* d'un groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de générateur u par π (décrite entièrement par un automorphisme θ de π tel que $\theta^n = \mathrm{id}_\pi$), décrire en termes de ceci un élément de $T \otimes \mathbf{Z}/\mathbf{Z}$.

Réponse : la situation géométrique standard correspond à $X = X_0(\pi)$, avec 0 comme point fixe sous Γ. Si on renverse l'orientation il est d'ordre 1 ou 2, il n'y a pas de problème, sinon c'est dans $\pi \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ une rotation autour de 0 (d'ordre 2, 3, 4 ou 6) qui se repère bien par un élément de $T \otimes \mathbf{Z}/\nu\mathbf{Z}$ (si ν est l'ordre). C'est aussi (si on identifie $T \otimes \mathbf{Z}/\nu\mathbf{Z}$ à $\mu_\nu(\mathbf{C}^*)$), en posant $T \xleftarrow{\sim} \mathbf{Z}$ donné i.e. π orienté i.e. $X_0(\pi) = X$ *orienté*) *une* de deux valeurs propres de $u \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$ (automorphisme du vectoriel sur $\mathbf{C}$ de dimension 2 $\pi \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$).

Ceci nous montre, dans ce cas de la géométrie algébrique sur un corps algébriquement clos Ω, que si $X = X_0$ est une courbe elliptique, u un automorphisme d'ordre fini, on a comme description paradigmatique non *seulement* $\pi = \pi_1(X, 0)$ ($\mathbf{Z}$-module libre de rang 2) et l'action de u sur π, mais comme structure *supplémentaire* l'une des deux solutions dans Ω de l'équation caractéristique de u (à coefficients entiers)

$$T^2 + aT + b = 0 \quad (a = -\mathrm{Tr}\, u, b = \det u)$$

Il est clair que cette structure supplémentaire ne peut se déduire de la seule connaissance de l'action de u sur π.

Mais il reste la question si ce $\mu(u) \in \mu_n(\Omega)$ peut se déduire de la connaissance au moins de l'action extérieure de u sur le groupe "avec un lacet" correspondant à la situation géométrique — i.e. un automorphisme extérieur d'ordre n d'un tel groupe[51]

[51]Oui il le peut grâce à la considération des "sous-groupes de ramification" de E qui définissent des structures d'extensions

$$1 \longrightarrow T \xrightarrow{n_i\, \mathrm{id}_T} E_I(\simeq T) \longrightarrow \Gamma_I \longrightarrow 1$$

d'où $\Gamma_i \simeq T/n_iT\ldots$

(Où si là encore il faut la considérer décidément comme une donnée supplémentaire).

Mais s'il en était bien ainsi, cela impliquerait d'autre part que la construction de u appartenant au groupe à (1) lacet(s), avec l'opération de Γ dessus ne peut se faire non plus à l'aide de la seule connaissance de l'action de $\Gamma(=\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ sur π.

C'est cette question de "forage de trous" qu'il faut donc en fin de compte, à la fin du fin, attaquer !

Quand à la question de savoir si dans le cas *anabélien*, l'application $\mu : {}_{\infty}E \longrightarrow T \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (${}_{\infty}E$: ensemble des éléments d'ordre fini de E) est déduisible de l'action de Γ sur π [si elle est *fidèle*, E s'identifie donc à un sous-groupe de $\mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi) = A$, et on peut se demander si μ n'est pas alors définissable sur ${}_{\infty}E$ tout entier], ou si c'est une donné supplémentaire dont il faut disposer pour reconstruire la situation géométrique. La question reste entière[52]

[52]N.B. Cela semble bien ainsi, compte tenu que pour Γ *résoluble* (a fortiori pour Γ cyclique) sauf erreur, on sait que toute action de Γ sur π se réalise géométriquement.

§ 16. — BOUCHAGE ET FORAGE DE TROUS : PRÉLIMINAIRES TOPOLOGIQUES GÉNÉRAUX

Considérons une situation[53]

$$\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow B_U$$

Je m'aperçois qu'il me fut revenir sur les notations des divers topos associes à une telle donnée. Mais je vais me guider sur la situation des n°…où on a un schéma régulier X de dimension 1, un sous-schéma fermé S de dimension 0, d'où $U = X \backslash S$ — dans ce cas $X_{\text{ét}}$ *ne* peut se reconstituer à partir des B_{D^*} comme B_I avec $I = \pi_0(\mathrm{B}_{D^*})$, il faut tenir compte des corps résiduels $k(s)$ ($s \in S$) i.e. des groupes de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{k(s)}/k(s))$.

Donc il y a lieu de revenir à *une* situation de départ (qui est adaptée au cas arithmético-géométrique) de morphismes de topos *multigaloisiens*

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{B}_{D^*} \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ \mathrm{B}_U & & \mathrm{B}_S \end{tikzcd}$$

(attention, on écrit B_S, non B_D, qui aura un autre sens), *où σ induit un isomorphisme sur les π_0* (et est surjectif sur les Hom).

[53](N.B. Une telle situation topossique (de topos multigaloisiens) décrit 2-fidèlement la situation topologique (X, S) ou U, pourvu qu'aucune composante irréductible de U ne soit $\simeq \mathbb{S}^2$, et du fait qu'elle reste très proche du langage et de l'intuition topologique, elle est supérieure au point de vue “groupe à lacets”, qui correspond plutôt à l'approche calculatoire.)

Pour l'instant, on ne va faire aucune hypothèse particulière sur cette situation, qui pour B_U connexe, et en termes des choix (de revêtements universels $\widetilde{D}_i^*$ des composantes connexes D_i^* de D^*, d'un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U, et d'isomorphismes entre les $\rho_!(\widetilde{D}_i^*)$ et $\widetilde{U}$ s'explicite par la donné des groupes E (ou π) ($= \mathrm{Aut}(\widetilde{U})$) et E_i (ou π_i ($= \mathrm{Aut}(\widetilde{D}_i^*)$), $\Gamma_i (i \in I)$), et des homomorphismes de groupes

$$\begin{tikzcd} & E_i \arrow[dl, "\rho_i"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ E & & \Gamma_i \end{tikzcd}$$

avec les σ_i surjectifs (quand il y a un corps de base K pour la situation géométrique alors dans la description toposique, posons $e = \mathrm{Spec}\, K$ et désignons par E_e le topos étale $e_{\text{ét}}$ de e, i.e. B_Γ si $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, le diagramme (*) s'insère dans

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}_{D^*} \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ \mathrm{B}_U \arrow[dr, "\varphi"] & & \mathrm{B}_S \arrow[dl, "\psi"'] \\ & \mathrm{B}_e & \end{tikzcd}$$

avec donnée de commutativité pour le carré envisagé... Comme au début de ces notes).

En termes de (*), on construit par "recollement" de B_U et de B_S (via le foncteur de recollement $\sigma_*\rho^*$) un topos mixte, qui n'est pas en général multigaloisien, noté précédemment $\mathrm{B}_{X,U}$, et que je préfère maintenant noté $\mathrm{B}_{X,S}$ [pour rappeler qu'il s'agit de faisceaux sur X, mais n'ayant de singularités que sur S].

Il s'insère dans un diagramme de topos

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}_{D^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{B}_U \arrow[dr] & & \mathrm{B}_S \arrow[dl] \arrow[ll, phantom, ""] \\ & \mathrm{B}_e & \end{tikzcd}$$

avec une flèche “de commutation” α_X qui n’est telle que par abus de langage — ce n’est pas un isomorphisme mais un morphisme de foncteurs sans plus

$$\sigma^*\psi^* \xrightarrow{\alpha_X} \rho^*\varphi^*$$

De la même façon, recollant D^* et S via σ_* (i.e. remplaçant B_U par B_{D^*} dans la construction précédente de $\mathrm{B}_{X,S}$), on trouve un topos, pas multigaloisien en général, noté $\mathrm{B}_{D,S}$. Dans le modèle géométrique avec un X, S comme dessus, B_X correspond aux faisceaux sur X qui sont essentiellement localement constants sur U (et sur S, où ils n’ont pas de mérite) i.e. sur U provenant de l’image inverse par $U\ U \longrightarrow \mathrm{B}_{\Pi,U}$ d’un faisceau sur $\mathrm{B}_{\Pi,U}$ et de même $\mathrm{B}_{D,S}$ correspond aux faisceaux sur $D = \coprod_i \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_i =$ hensélisé de $\underline{\mathscr{O}}_{X,S})$ qui sont localement constants sur $D^* = D\backslash S$ (et sur S, sans mérite !) mais avec l’hypothèse de dimension faite on a en fait

$$\mathrm{B}_{D,S} \simeq D_{\text{ét}}$$

(D_i n’a que 2 points, $D_i^* = \{\eta_i\}\dots$).

Ainsi $\mathrm{B}_{D,S}$ ($\simeq D_{\text{ét}}$ quand on part de X, S) s’insère dans un triangle de morphisme de

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{B}_{D^*} \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[d, phantom, "\xleftarrow{\alpha_D}"] & \\
\mathrm{B}_{D^*} \arrow[dr, "\varphi_D"] & {} & \mathrm{B}_S \arrow[dl, "\psi_D"'] \\
 & \mathrm{B}_{D,S} &
\end{tikzcd}$$

où α_D, comme α_X ci-dessus, n’est qu’un vulgaire homomorphisme (pas isomorphisme en général)[54].

Quand on parle du morphisme canonique de B_D dans $\mathrm{B}_{D,S}$ c’est de φ_D (et non $\psi_D\sigma$) qu0il s’agit — dans le cas géométrique on a $\mathrm{B}_{D^*} \simeq D^*_{\text{ét}}$ et φ_D correspond à l’inclusion de schémas

$$D^* \supset D\backslash S \longrightarrow D$$

et $\psi_D : \mathrm{B}_S \longrightarrow B_{D,S}$ à l’inclusion de schémas $S \longrightarrow D$ alors que σ ni $\psi_D\sigma$ ne correspondent en général à des morphismes de schémas.

[54](N.B. dans le cas géométrique, les trois topos de ce diagramme sont des topos étales ($D^*_{\text{ét}}, D_{\text{ét}}, S_{\text{ét}}$) et les flèches φ_D et ψ_D correspondent à des morphismes de topos, mais non σ).

On obtient ainsi un diagramme de topos

$$(**)\qquad \begin{tikzcd}
 & & \underline{B}_S \arrow[dl] \arrow[dd, equal, shift right] \arrow[dd, shift left] \\
\underline{B}_{D^*} \arrow[urr] \arrow[r] \arrow[dd] & B_{D,S} \arrow[dd] & \\
 & & \underline{B}_S \arrow[dl] \\
\underline{B}_U \arrow[r] & B_{X,S} &
\end{tikzcd}$$

(Attention le triangle n'est pas essentiellement commutatif mais on a une pseudo-commutativité…)

où les trois topos soulignés $\underline{B}_U$, $\underline{B}_S$, et $\underline{B}_{D^*}$ sont multigaloisiens, et $B_{D,S}$ et $B_{X,S}$ sont composites (obtenus par recollement de deux topos multigaloisiens).

Sauf erreur les deux carrés sont [non seulement essentiellement commutatifs, mais aussi] 2-cartésiens (dans la 2-catégorie des topos).

Passant aux B_{Π_1} ? des topos envisagés (correspondant aux objets localement constants sur ce topos) on trouve un topos $B_X = B_{\pi_1 B_{X,S}}$ comme somme amalgamée de topos dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & B_{D^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B_U \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\xleftarrow{\sim}" below=12pt] & & B_S \arrow[dl] \\
 & B_X &
\end{tikzcd}$$

(ce carré est bel et bien essentiellement commutatif) et de même (en remplçant B_U par B_{D^*}) un B_D, qui est cependant (par $B_S \longrightarrow B_D$) isomorphe (plutôt équivalent) à B_S. Le diagramme (**) devient alors

(∗∗∗)
$$\begin{tikzcd}
 & & \underline{B}_S \arrow[dl, "\sim"] \arrow[dd, Rightarrow] \\
\underline{B}_{D^*} \arrow[r] \arrow[urr, "\sigma"'] \arrow[dd] & B_D \arrow[dd] & \\
 & & \underline{B}_S \arrow[dl] \\
\underline{B}_U \arrow[r] & B_X &
\end{tikzcd}$$

où cette fois-ci le triangle supérieur est bien essentiellement surjectif (c'est bien comme ça que l'on a défini σ, dans le cas géométrique !) et on a un morphisme de (**) dans (***), qui par les flèches qui sont par essence des identités [à] savoir $B_{D,S} \longrightarrow B_D$ et $B_{X,S} \longrightarrow B_X$, ont une nette tendance à être "acyclique" ou à induire des isomorphismes sur la cohomologie (il faudrait vérifier ce point). Enfin, dans le cas géométrique, on a un diagramme analogue de morphismes de topos étales

(∗∗∗∗)
$$\begin{tikzcd}
 & & S_{\text{ét}} \arrow[dl] \arrow[dd, Rightarrow] \\
D^*_{\text{ét}} \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[dd] & D_{\text{ét}} \arrow[dd] & \\
 & & S_{\text{ét}} \arrow[dl] \\
U_{\text{ét}} & X_{\text{ét}} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

(triangle supérieur pas essentiellement commutatif)

où toutes les flèches sauf $D^*_{\text{ét}} \longrightarrow S_{\text{ét}}$ sont induites par des morphismes de topos, le (****) s'insère dans le diagramme homologue (**), en induisant des isomorphismes de topos pour D^*, D, S et, pour $U_{\text{ét}} \longrightarrow B_U$ et $X_{\text{ét}} \longrightarrow X$, induisant des morphismes qui ont moins tendance à être acyclique, mais qui le sont quand même dans des cas importants, rappelés dans une section antérieure…

Les constructions de (**) et (***) en termes du diagramme de départ

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}_{D^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{B}_U & & \mathrm{B}_S \end{tikzcd}$$

sont purement formelles, et indépendantes de toutes hypothèses. La construction d'un B_X multigaloisien, comme somme amalgamée, peut être interprété comme la traduction (au niveau des groupoïdes fondamentaux) d'une opération de "bouchage de trous".

Dans le contexte calculatoire (avec choix de $\widetilde{U}$, $\widetilde{U}_i$, $\rho_!(\widetilde{U}_i) \simeq \widetilde{U}$) avec

$$\begin{tikzcd} & E_i \arrow[dl, "\rho_i"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ \pi & & \Gamma_i \end{tikzcd}$$

posant $\widetilde{X} =$ image de $\widetilde{U}$ par $i\,!$ $(i : \mathrm{B}_U \longrightarrow \mathrm{B}_{\pi_1 X})$, B_U est décrit en termes de ce $\widetilde{U}$ comme le classifiant $\mathrm{B}_{\pi X}$, où $\pi_X = \pi_1(X, \widetilde{X})$ se calcule comme quotient de π par le sous-groupe invariant engendré par les $\rho_i(L_i)$, où $L_i = \ker \sigma_i \supset E_i$.

Si on se donne une sommande directe $\mathrm{B}_{D_0^*}$ dans B_{D^*} (correspondant à une partie de I_0 de $I = \pi_0(\mathrm{B}_{D^*})$) on trouve de même une somme amalgamée de B_U et de B_{S_D} sous $\mathrm{B}_{D_0^*}$ notée $\mathrm{B}_{U \cup S_1}$ qui se visualise comme un bouchage partiel de trous, interprété au niveau des groupoïdes fondamentaux. Dans le cas géométrique, si on pose $I = I_0 \amalg I_1$, i.e. $S = S_0 \amalg S_1$, on peut interpréter ce topos comme $\mathrm{B}_{\pi_1 U_1}$, où $U = X \backslash S_1$.

Bien sûr, on a un homomorphisme de diagrammes cartésiens de topos relatifs à

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}_{D_0^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{B}_U & & \mathrm{B}_{S_0} \end{tikzcd}$$

celui relatif à B_{D^*} s'envoyant dans B_U, et B_S.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{B}_{D_1^*} \arrow[rrr] \arrow[ddl] \arrow[dr] & & & \mathrm{B}_{D^*} \arrow[ddl] \arrow[dr] & \\
{[\mathrm{B}_{D_1^*}]} \arrow[dr, dashed] & & & \mathrm{B}_{S_0} \arrow[rrr] \arrow[ddl] & & & \mathrm{B}_S \arrow[ddl] \\
 & \mathrm{B}_U \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & \mathrm{B}_U \arrow[dr] & & \\
 & & \mathrm{B}_{U\cup S_0} \arrow[rrr] & & & \mathrm{B}_{U\cup S} &
\end{tikzcd}$$

et d'autre part on a un composé

$$\mathrm{B}_{D_1^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U \longrightarrow B_{U_1}$$

qui avec $\mathrm{B}_{D_1} \longrightarrow \mathrm{B}_{S_1}$, donne un diagramme de topos

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{B}_{D_1^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{B}_{U_1} & & \mathrm{B}_{S_1}
\end{tikzcd}$$

du même type qu'au début, qu'on peut utiliser pour construire encore une somme amalgamée. Et il est évident que celle-ci est canoniquement équivalente à B_X, la somme amalgamée correspondant à cette situation du départ…

Toutes ces opérations sont essentiellement triviales et sans mystère, et indépendantes de toutes hypothèses spéciales du type "groupe à lacets". Un intérêt particulier s'attache au cas où B_S est un topos discret : e s'identifie B_I où $I = \pi_0(\mathrm{B}_{D^*})$ de sorte qu'on part simplement d'un morphisme de topos multigaloisiens

$$\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$$

mais où de plus on a un groupe Γ (discret, disons ou profini dans le contexte arithmétique) qui opère sur B_{D^*}, B_U ; le morphisme précédent commutant à l'action de Γ.

Notons que la donnée d'une action de Γ sur un topos B permet de construire un topos (B,Γ), et un morphisme $(\mathrm{B},\Gamma) \longrightarrow \mathrm{B}_\Gamma$ (topos classifiant de Γ) *i.e.* un Γ-torseur dans (B,Γ) et B s'identifie au topos induit par $X = (\mathrm{B}/\Gamma)$ sur ce Γ torseur.

Inversement, la donnée d'un topos X et d'un Γ-torseur U dans X et d'un isomorphisme de B avec le topos induit X/U (identifié à U, ou à B) permet de récupérer des opérations de Γ sur B, via les opérations sur U. Donc la *donnée* d'une opération de Γ sur un topos B revient à celle de la donnée de B comme revêtement galoisien de groupe Γ d'un autre topos (essentiellement unique, noté alors (B,Γ)...). Ainsi, faire opérer Γ sur $\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$, c'est la même chose que d'insérer cette flèche dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}_{D^*} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{B}_U \arrow[d] \\
\mathrm{B}_{D^*,\Gamma} \arrow[r] & \mathrm{B}_{U,\Gamma}
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont Γ-galoisiennes, et le carré est 2-cartésien, ou encore (indépendamment de la donné préalable de $\underline{D}^*$, B_U) c'est se donner un triangle essentiellement commutatif de morphismes de topos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}_{D^*,\Gamma} \arrow[dr] & & \mathrm{B}_{U,\Gamma} \arrow[dl] \\
& \mathrm{B}_\Gamma &
\end{tikzcd}$$

Si Γ opère sur un topos multigaloisien, on veut que (B,Γ) soit aussi multigaloisien, et la situation d'un topos multigaloisien B_U et d'une opération de Γ dessus revient à celle d'un topos multigaloisien $\mathrm{B}_{U,\Gamma}$ et d'un morphisme $\mathrm{B}_{U,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_\Gamma$.

Donc la donnée d'une situation $\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$ de topos multigaloisiens et d'une opération de Γ dessus revient exactement à celle d'homomorphismes de topos multigaloisiens

$$\mathrm{B}_{D^*,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_{U,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_\Gamma$$

$\mathrm{B}_{U,\Gamma}$ est 0-connexe si et seulement si card $\pi_0(\mathrm{B}_U)/\Gamma = 1$, i.e. B_U non vide est Γ-transitif sur $\pi_0(\mathrm{B}_U)$. Notons que la situation envisagée au début, avec (X,S) sur un corps K, d'où $\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U \longrightarrow \mathrm{B}_\Gamma$ ($\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$), peut être interprétée comme déduite de la situation "géométrique" $(\overline{K}, \overline{S})$ sur $\overline{K}$, $\mathrm{B}_{\overline{D}_E^*} \longrightarrow \mathrm{B}_{\overline{U}}$, en tenant compte des opérations de Γ dessus. Il se trouve que pour beaucoup de questions, c'est cette interprétation "géométrique" (au sens strict, i.e. $\overline{K}$ algébriquement clos) avec opérations d'un groupe de Galois Γ, qui est la plus commode.

Si on regarde une opération de Γ sur un topos (B_{D^*} disons), il opère sur le topos discret B_I ($I = \pi_0(\mathrm{B}_{D^*})$), et $\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow B_I$ est compatible aux actions de Γ.

Mais le topos $\mathrm{B}_{(I,\Gamma)}$ est aussi celui des Γ-ensembles au dessus de I (sur lequel Γ opère) un topos induit dans B_Γ. Ses composantes connexes correspondent aux orbites de Γ sur I. Si Γ est transitif sur I non vide (ou si on regarde *une* telle orbite…), choisissant $i \in I$, le topos en question s'identifie à B_{Γ_i} où Γ_i est le stabilisateur de i dans Γ.

N.B. Si on donne une opération de Γ sur un topos *discret* $\mathrm{B}(= \mathrm{B}_I)$, quand on l'interprète en tant que morphisme d'un topos multigaloisien $\mathrm{B}' = (\mathrm{B}, \Gamma) \longrightarrow \mathrm{B}_\Gamma$, est caractérisé par le fait que le morphisme du groupoïde qui la décrit soit *injectif* sur les flèches, i.e. en termes d'un système d'homomorphismes de groupe $\Gamma_j \longrightarrow \Gamma$ $i \in J(\simeq I\backslash\Gamma)$, par la condition que ces homomorphismes soient injectifs. Γ est donc I se reconstitue comme la somme directe des $\Gamma\backslash\Gamma_j \ldots$]

Ainsi un diagramme $\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$ *avec action de* Γ équivaut à la donnée d'un diagramme

$$\mathrm{B}_{D^*,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_{U,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_\Gamma$$

et celui-ci se complète (en utilisant l'action de Γ sur $\pi_0(\mathrm{B}_{D^*})$ — B étant lui-même déduit de $\mathrm{B}_{D^*\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_\Gamma$ comme l'image inverse du torseur universel) en

$$\mathrm{B}_{D^*,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_{I,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_\Gamma$$

i.e. il s'agit de la factorisation canonique d'un homomorphisme de groupoïdes en homomorphisme bijectif (pour les objets) épimorphique (pour les Hom) suivi d'un homomorphisme épimorphique (sur les Hom).

On trouve ainsi un carré essentiellement commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{B}_{D^*,\Gamma} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{B}_{U,\Gamma} \arrow[dr] & & \mathrm{B}_{I,\Gamma} \arrow[dl] \\ & \mathrm{B}_{\Gamma} & \end{tikzcd}$$

qui correspond au diagramme de groupoïdes au début des notes (§7)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \Pi_{D^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \Pi_{U} \arrow[dr] & & \Pi_{D} \arrow[dl] \\ & \Pi_{e} & \end{tikzcd}$$

J'ai l'impression d'avoir à peu près compris le mécanisme des actions des groupes sur des topos multigaloisiens, et comment l'opération de passage d'un topos B avec opération de Γ au topos "quotient" $(\mathrm{B},\Gamma) =$ "B/Γ", commute aux opérations du type passage de $\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$ à un $\mathrm{B}_{X,S}$, via un B_X ("Bouchage des trous"). Le temps semble donc mûr enfin pour s'expliquer avec l'opération inverse hypothétique de "forage des trous".

§ 17. — COMPLÉMENTS SUR LES OPÉRATIONS DE GROUPES FINIS SUR LES SURFACES (COMPLÉMENT AU §15)

Théorème. — *Soit U surface paracompacte connexe telle que $\pi_1(U) \neq (1)$, i.e. $U \not\simeq \mathbb{S}^2$, $\mathbf{R}^2$. On dit que U est "anabélienne" si $\pi = \pi_1(U)$ non abélien (auquel cas* $\mathrm{Centre}(\pi) = 1$*) et si $U \not\simeq \mathbf{C}^*$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

Soit Γ un groupe fini opérant sur U[55]*, on a les conditions équivalentes :*

a) (cas anabélien) Γ opère trivialement ou (cas abélien) structure de groupe topologique sur U (donc $U \simeq \mathbb{S}^*$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$) de façon que Γ opère par translations,

b) $\forall g \in \Gamma$, g_U est isotope à l'identité,

b') $\forall g \in \Gamma$, g_U est homotope à identité,

c) l'opération extérieure de Γ sur $\pi_1(U)$ est triviale,

d) (cas anabélien) l'extension E de Γ par π est isomorphe à une extension produit, ou (cas abélien) elle est centrale

[55]N. B. : Il est prudent de supposer que Γ opère en conservant l'orientation de U (supposée orientable) sinon on a des ennuis par exemple avec $z \mapsto \overline{z}^{-1}$ de $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$ (Cela doit être le sel contre-exemple dans le cas où Γ ne conserve pas l'orientation…) En tout cas un contre-exemple doit être tel que (si Γ fidèle) $\Gamma = \simeq \{\pm 1\}$, opère par anti-involutions… Il faudrait tirer au clair le cas de la situation générale…

*D*émonstration. a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ b') $\Rightarrow$ c) trivial.

c) $\Rightarrow$ d). Dans [le] cas anabélien, cela provient du fait que Centre$(\pi) = 1$ une extension de Γ par π est définie déjà par l'action extérieure, comme image inverse de l'extension

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow \operatorname{Aut}\pi \longrightarrow \operatorname{Autext}\pi \longrightarrow 1.$$

Dans le cas abélien c'est trivial.

d) $\Rightarrow$ a) est la partie pas évidente. OPS que Γ opère fidèlement.

Cas anabélien : Si on avait $\Gamma = 1$, pour un scindage de l'extension de Γ par π, on doit avoir par le théorème du n° 15 $\pi^\Gamma = 1$, or le scindage canonique de $\pi \times \Gamma$ sur Γ donne $\pi^\Gamma = \pi$, absurde.

Cas abélien. $U \simeq \mathbf{C}^*$ (plus intrinsèquement U est un torseur sous $U_0 = \pi \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}/\pi$) ou $U \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (plus intrinsèquement U est un torseur sous $U_0 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$).

Je dis qu'une action de Γ sur U est (à homéomorphisme près) défini par une action de Γ sur le torseur[56] ; la classe d'isomorphisme d'un tel torseur s'identifie par ailleurs par la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi \longrightarrow \pi \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \longrightarrow U_0 \longrightarrow 0$$

$$(\text{ou } \pi \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R})$$

à une classe d'extension de Γ par π.

Mais dire que l'action de Γ sur π est triviale, signifie que l'action de Γ sur le torseur U sous U_0 se fait par translations.

Corollaire — Scholie. — *Le cas "abélien" n'est pas tout à fait démontré faute d'avoir établi la classification topologique des opérations d'un groupe fini sur* $\mathbf{C}^*$ *ou sur* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. *Cependant, si dans le cas abélien on suppose d'avance que* $U^\Gamma = \varnothing$ alors *il est encore vrai que l'opération triviale de* Γ *sur* π *équivaut à la trivialité de l'action de* Γ *sur* U. *Car on est ramené au cas où* Γ *opère fidèlement et à prouver dans ce cas que si l'opération de* Γ *sur* π *est triviale on a* $\Gamma = 1$. *Et on fait comme plus haut dans le cas anabélien.*

[56] pas prouvé !

§ 18. — FORAGE DE TROUS ; APPLICATION AUX ACTIONS EXTÉRIEURES DE GROUPES FINIS

Soit π' un groupe à lacets de type $(g, \nu+1)$ non abélien (i.e. si $g=0$ on a $\nu \geq 2$).

Si T son module des orientations et I' (card $I' = \nu+1$) l'ensemble de ses classes de conjugaison de sous-groupes de lacets.

Fixons nous un $i \in I'$ et soit $L'_i \subset \pi'$ dans la classe i.

Quand on se donne seulement un groupe *extérieur* à lacets $[\pi']$ (ce qui équivaut à la donnée de $\mathrm{B}_{D'_*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$), la donnée d'un $i \in I'$ équivaut à celle d'une composante connexe de $\mathrm{B}_{D'_*}$, et celle d'une réalisation du groupe extérieur (i.e. d'un couple d'un groupe π' et d'un isomorphisme extérieur $\pi' \longrightarrow [\pi']$) équivaut à isomorphisme près à celle d'un objet de $\pi_1 \mathrm{B}_{U'}$ (revêtement universel $\widetilde{U}'$ de U' pour $\pi' = \mathrm{Aut}(\widetilde{U}')$).

Enfin la donnée d'un couple (π', L'_i) (L'_i dans la classe de conjugaison) équivaut (à isomorphisme unique près) à la donnée d'un objet $\widetilde{D}'^*_i$ dans $\pi_1 \mathrm{B}_{D'^*_i}$ en prenant l'image $\widetilde{U}'$ de $\widetilde{D}'^*$ dans $\pi_1 \mathrm{B}_{U'}$ et $\pi' = \mathrm{Aut}(\widetilde{U}')$, $L'i = \mathfrak{I}(\mathrm{Aut}(\widetilde{D}'^*_i))$ dans $\mathrm{Aut}(\widetilde{U}')$.

Quand on se donne un objet U'_0 de $\pi_1 \widetilde{\mathrm{B}_{U'}}$, d'où une réalisation $\pi' = \mathrm{Aut}(\widetilde{U}'_0)$. (On va laisser tomber provisoirement les primer) alors la donnée d'un $L_i \subset \pi$ dans la classe i équivaut à la donnée d'un couple $(\widetilde{D}_i, \lambda)$ d'un $\widetilde{D}_i \in \mathrm{Ob}\, \pi_1 \mathrm{B}_{D_i}$ et d'un isomorphisme de $\rho_!(\widetilde{D}_i) = \widetilde{U}$ avec $\widetilde{U}_0$.

Quand la situation topossique est réalisée à partir d'un situation topologique (X, S) et qu'on définit $\widetilde{U}_0$ à l'aide d'un point de base $a \in U$, alors la façon standard de définir un $L_i \subset \pi = \mathrm{Aut}(\widetilde{U}_0) = \pi_1(U, a)$ est de choisir une petite rondelle Δ_i

autour de $s_i \in X$, un point b_i sur le bord et une classe d'homotopie de chemin dans $U-(\Delta_i^\circ-\{s_i\})=V_i$ de a vers b_i et de prendre le groupe L_i engendré par l'un quelconque des deux lacets correspondants autour de s_i (qui donnent des lacets opposés dans π).

On voit que l'on trouve ainsi une application surjective de $\mathrm{Isom}_{\pi_1 V_i}(a,b_i) \simeq\simeq_{\pi_1 U} (a,b_i)$ sur l'ensemble des $L_i \subset \pi$ dans la classe i, application compatible avec l'action naturelle de π opérant sur $\mathrm{Isom}_{\pi_1 U}(a,b_i)$ de la façon évidente par composition et sur l'ensemble des L_i par automorphisme intérieur

Ici le lien avec la description "abstraite" topossique s'établit ainsi : le choix d'un b_i peut servir de point de base pour définir un revêtement universel de $\Delta_i\backslash\{s_i\} \simeq D_i^*$, d'où un objet $\rho_!(\widetilde{D_i^*(b_i)})$ et les $L_i \subset \pi$ correspondant (d'après la description abstraite) aux isomorphismes de $\widetilde{U}_0 = \widetilde{U}(a_i)$ avec $D_i^*(b_i)$ modulo composition avec un automorphisme de $D_i^*(b_i)$ provenant d'un automorphisme de $D_i^*(b_i')$ mais les isomorphismes $\widetilde{U}(a_i) \simeq \rho_!(\widetilde{D}_i^*(b_i))$ correspondent justement aux classes de chemins de a vers b_i.

(On revient aux notations π', u',…)

Considérons un objet de $\pi_1\,\mathrm{B}_{D_i'^*}$, i.e. un couple (π', L_i'). Soit π le groupe quotient de π' par le sous-groupe invariant de π' engendré par L_i'. *Je dis qu'à isomorphisme près (isomorphisme effectif de groupes, par seulement extérieur !) il ne dépend pas du choix de l'objet $\widetilde{D}_i^*$ dans $\pi_1\,\mathrm{B}_{D_i'^*}$.* En effet $\pi(\widetilde{\mathrm{B}}_i^*)$ dépend fonctoriellement de $\widetilde{D}_i^*$ et tout revient à voir que ce foncteur est *constant*, i.e., que l'opération de $\mathrm{Aut}(\widetilde{D}_i^*) \simeq T \simeq L_i$ sur $\pi = \pi(\widetilde{D}_i^*)$ est triviale. Or soit $u \in L_i$, l'automorphisme de π qu'il défini est défini par l'automorphisme intérieur $\mathrm{int}(u)$, pas passage au quotient donc (comme u devient 1 dans π) il est trivial.

On trouve ainsi un *foncteur* : “bouchage du trou i”

$$\begin{pmatrix}\text{Groupes extérieurs à lacets } \pi' \\ \text{de type } (g,\nu+1) \text{ munis d'une} \\ \text{classe de lacets } i \in I(\pi')\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\text{groupes (réalisés)} \\ \text{à lacets de type } (g,\nu)\end{pmatrix}$$

$$(\pi',1) \longmapsto \beta(\pi',i)$$

qui s’exprime par un homomorphisme de groupes

$$\begin{array}{c}\mathrm{Autext}(\pi',i) \\ (= \text{ensemble des automorphismes extérieures} \\ \text{de } \pi' \text{ respectant la structure à lacets)} \\ \text{et fixant la classe de lacets } i\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\mathrm{Aut}\,\pi \\ (\text{où } \pi = \beta(\pi',i))\end{array}$$

D’un point de vue géométrique ce fait (existence d’un foncteur) ne fait qu’exprimer le fait qu’après “bouchage du trou” i on a un $U = U' \cup \{s_i\}$ *muni* d’un point s_i, que l’on peut utiliser comme *point de base canonique* pour calculer $\pi_1(U)$. On peut dire aussi que le choix de i permet de construire la somme amalgamée partielle (bouchage partiel de trous) B_U.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}_{D_i'^*} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{B}_{U'} \arrow[dr] & & \mathrm{B}_{s_i} \arrow[dl] \\ & \mathrm{B}_U & \end{tikzcd}$$

et $\mathrm{B}_{s_i} \longrightarrow \mathrm{B}_{U^*}$ fournit un point géométrique dans B_{U^*} qui permet de décrire un objet canonique de $\pi_1\,\mathrm{B}_{U^*}$ (revêtement universel relatif à ce point) d’où canoniquement un groupe π, qui bien sûr est un groupe à lacets de type $(g,\nu-1)$.

Théorème. — *Supposons* g, ν *tel que non seulement les groupes* π' *de type* (g, ν), *mais aussi le groupe* π *(de type* $(g, \nu-1)$*) soient anabélien, i.e.* $2g+\nu \geq 4$. *Alors le foncteur précédent* $(\pi', i) \mapsto \pi$ *est une équivalence de catégorie. En d'autres termes (comme il s'agit de groupoïdes 0-connexes)*

$$\mathrm{Autext}(\pi', i) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi)$$

est un isomorphisme.

Notons pour ceci que l'on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\pi \longrightarrow \mathrm{Autext}\,\pi \longrightarrow 1$$

(car centre $\pi = 1$ par hypothèse anabélienne sur π) or on va définir une suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow \mathrm{Autext}(\pi', i) \longrightarrow \mathrm{Autext}\,\pi \longrightarrow 1$$

et un homomorphisme d'extension de celle-ci dans la précédente (qui sera nécessairement un isomorphisme). O.P.S. $T = \mathbf{Z}$, on considère les groupes à lacets standard $\pi_{g,\nu+1}$, $\pi_{g,\nu}$. Posons

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Autext}(\pi_{g,\nu}) & & T^{\circ\circ}_{g,\nu} \\ \text{(induisant l'identité sur} & = & \text{(groupe de Teichmüller} \\ I(\pi_{g,\nu} \text{ et sur } T(\pi_{g,\nu})) & & \text{d'indice } (g,\nu)) \end{array}$$

N.B. Le revêtement universel universel de $M_{g,\nu}$ est contractile par Teichmüller.

On sait que (pour $2g+\nu \geq 3$) $T_{g,\nu}$ est le groupe fondamental du topos modulaire complexe $M_{g,\nu}$ des courbes complexes (projectives non singulières connexes de genre g, avec un système de ν point $s_1 \ldots s_\nu$ distincts données). Or le topos modulaire $M_{g,\nu+1}$ n'est autre que la "courbe complexe universelle de genre g à ν tous numérotés" sur $M_{g,\nu}$ [car se donner une courbe U' de genre g avec $\nu+1$ trous $x_1 \ldots x_{\nu+1}$ *plus* un point de U] d'où une suite exacte d'homotopie

$$\begin{tikzcd} \pi_2(M_{g,\nu}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1(M_{g,\nu+1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1(M_{g,\nu}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \pi_0(U) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \pi = \pi_{g,\nu} \arrow[r] & T^{\circ\circ}_{g,\nu+1} \arrow[r] & T^{\circ\circ}_{g,\nu} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

d'où une structure d'extension

$$1 \longrightarrow \pi_{g,\nu} \longrightarrow T^{\circ\circ}_{g,\nu+1} \longrightarrow T^{\circ\circ}_{g,\nu} \longrightarrow 1$$

qui est (à passage à un sous-groupe d'indice $2\nu\,!$ près) la structure d'extension annoncée. Les vérification de compatibilités sont laissées…

On a donc un foncteur quasi-inverse (défini à isomorphisme unique près)

$$\begin{pmatrix} \text{groupes à lacets de type} \\ g,\nu \quad 2g+\nu \geq 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{groupes extérieurs à lacets de type } (g,\nu+1) \\ \text{avec une “classe de lacets” distinguée} \\ (\text{couples } (\pi', i \in I(\pi'))) \end{pmatrix}$$

Au niveau topossique, quand on a un système $\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$ de type (g,ν) $(2g+\nu \geq 3)$ et un “point” de B_U i.e. un $\widetilde{U} \in \mathrm{Ob}\,\pi_1\,\mathrm{B}_U$, alors on peut de façon canonique trouver un $\mathrm{B}_{D_i^*}$ (T-groupoïde connexe, où T est le module d'orientation) et un système

$$\mathrm{B}_{D^*} \amalg \mathrm{B}_{D_i^*} \longrightarrow \mathrm{B}_{U'}$$

de type $g,\nu{+}1$ de façon que $(\mathrm{B}_{D^*}, \mathrm{B}_U, \widetilde{U})$ s'en déduise par l'opération de “bouchage du trou D_i^*”.

Ces constructions sont si fonctorielles qu'elles commutent aux actions de groupe Γ. Si un groupe Γ opère sur un groupe à lacet π de type (g,ν) (pas seulement extérieurement), alors on en déduit une opération *extérieure* de Γ sur un π' à lacets de type $(g,\nu+1)$ qui fixe une classe de lacets privilégiée $i \in I$.

Mais alors, dans l'extension correspondante

$$1 \longrightarrow \pi' \longrightarrow E' \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1,$$

choisissons un $L_i' \subset \pi'$ est soit E_i' le normalisateur dans L_i de E', on trouve

$$1 \longrightarrow L_i'(\simeq T) \longrightarrow E_i' \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

(ceci marche sans hypothèse de finitude sur Γ, le cas universel étant celui où Γ est le groupe de Teichmüller de π' fixant i ; i.e. $\mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi', i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\mathrm{lac}}(\pi)$).

J dit que si Γ opère *fidèlement sur* π, i.e. si son opération extérieure sur π' est fidèle, et Γ est *fini* alors Γ est nécessairement cyclique (cas $\Gamma = \Gamma^\circ$) ou diédral ($\Gamma = \Gamma^\circ$) et que si de plus $\Gamma = \Gamma^\circ$ alors $E_i \simeq \mathbf{Z}$ i.e. $\exists !$ isomorphisme $T \xrightarrow{\sim} E_i'$ tel que $T \xrightarrow{x_i} E_i'$ s'identifie à $n\,\mathrm{id}_T$ (de sorte qu'on trouve $\Gamma = E_i'/nE_i' \simeq T \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si $n = $card $\Gamma\ldots$)

Changeant de notations, ceci revient au

Théorème[57]. — *Soit* Γ *un groupe fini opérant fidèlement sur un groupe extérieur à lacet* π *de type* $(g, \nu+1)$ $(\nu \geq 0)$*, en laissant fixé un* $i \in I(\pi)$*. Alors* Γ *est cyclique (si* $\Gamma = \Gamma^\circ$*) ou diédral (si* $\Gamma = \Gamma^\circ$*) et dans l'extension correspondante* E *de* Γ *par* π*, si* E_i *est le normalisateur d'un* L_i *dans* E *[de sorte que l'on a une suite exacte* $1 \longrightarrow L_i \longrightarrow E_i \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$*] l'image inverse* E_i° *de* Γ° *est* $\simeq \mathbf{Z}$*.*

Donc si $n = \mathrm{card}\,\Gamma^\circ = [E_i^\circ : L_i] x \mapsto x^n$ *est un isomorphisme* $E_i^\circ \simeq L_i$*, qui compte tenu de* x_i *donne un isomorphisme* $E_i^\circ \simeq T$*, dont le composé avec* $T \xrightarrow[\sim]{x_i} L_i \subset E_i^\circ$ *est* $n\,\mathrm{id}_T$ *de sorte que l'on a un isomorphisme canonique*

$$\Gamma^\circ \simeq E_i^\circ / L_i \simeq T/nT$$

(évidemment indépendant du choix de $L_i \ldots$*).*

Démonstration. Considérons l'extension E° de Γ° par $L_i \simeq T$ (isomorphe non canoniquement à $\mathbf{Z}$), comme Γ° opère trivialement sur T (sans torsion) cette extension (par la suite exacte de cohomologie associée à

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow T \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \longrightarrow T \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0)$$

est canoniquement isomorphe à l'extension définie par un homomorphisme $\Gamma^\circ \longrightarrow T_n = T/nT$, comme image de l'extension $o \longrightarrow T \xrightarrow{n} T \longrightarrow T_n \longrightarrow 0$ de T_n par T. Je dis que cet homomorphisme est un isomorphisme (d'où résulteront les autres assertions), ou ce qui revient au même puisque Γ° et T_n sont tous deux d'ordre n, qu'il est injectif. Remplaçant Γ° par le noyau de $\Gamma^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, OPS que l'homomorphisme en question est nul et il faut prouver que cela implique que l'action de Γ° est triviale (ce qui, puisque par hypothèse l'action de Γ est fidèle, implique $\Gamma^\circ = \{1\}$, OK). Donc on est ramené au

[57] Il y a équivalence si dans le théorème on suppose (g, ν) anabélien sinon le théorème est un peu plus général.

Lemme fondamental. — *Tout automorphisme direct extérieur u d'ordre fini n d'un groupe à lacets π, qui fixe une classe de lacets i et est tel que l'extension de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par $L_i \in i$ définie par u soit triviale est trivial.*

L'hypothèse signifie que u se remonte en un automorphisme u_0 de π qui normalise L_i, et qui soit aussi d'ordre n (ou d'ordre fini, cela revient au même compte tenu que T est sans élément d'ordre fini) alors u_0 est trivial ; i.e. cela équivaut au corollaire :

Corollaire[58]. — *Tout automorphisme direct d'ordre fini d'un groupe à lacet π qui normalise un sous-groupe à lacet L_i (i.e. qui centralise L_i) est réduit à l'identité.*

Pour le démontrer on est ramené aussitôt au cas où u_0 est tel que $u_0^p = 1$ avec p premier, i.e. u_0 correspond à une opération au sens strict (pas seulement extérieure) de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur π. Mais (que l'on puisse ou non trouver un tel p) considérons le cas où l'on sait que l'opération *extérieure* de $\Gamma = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ($n =$ ordre de u) sur π se réalise géométriquement par une opération (fidèle) de Γ sur U de type $(g, \nu+1)$ $U = X \backslash S$, $S \simeq I$, X compacte de genre g, le point s_i de S correspondant à un point fixe de Γ opérant sur U. On exprime l'hypothèse de l'opération [...?] de Γ sur π, centralisant un L_i, en disant que l'opération extérieure donne une extension de Γ par $L_i = T$ triviale. Mais on sait par ailleurs dans le cas géométrique (et opération fidèle) qu'elle *n'est pas* triviale !

Il suffirait donc pour prouver le lemme fondamental de savoir que toute action extérieure (fidèle) d'un groupe cyclique sur un groupe à lacets de type $(g, \nu+1)$ est réalisable, et il suffit même de le savoir pour un groupe cyclique d'ordre premier. Or sauf erreur, ce résultat est connu (même pour les groupes résolubles) (comme théorème d'existence de point fixe d'un tel groupe opérant sur l'espace de Teichmüller...) de sorte que le lemme fondamental semble démontré. J'ai seulement un doute s'il est démontré dans le cas général d'un (g, ν), ou seulement pour $g \geq 2$, $\nu = 0$. Mais s'il en est bien ainsi, je pense que (pour $g \geq 2$ tout au moins) on n'en tire par dévissage pour le cas ν quelconque et le cas $g = 0, 1$ demanderait aussi

[58]N.B. Dans le lemme ou son corollaire, le cas $g = 0$, $\nu + 1 = 1$ ou $\nu + 1 = 2$ est trivial, le cas $\nu + 1 = 3$ ($(g, \nu) = (0, 2)$ abélien !) n'est pas trivial par contre, ni le cas $g = 1$, $\nu + 1 = 1$ (i.e. $(g, \nu) = (1, 0)$ abélien). Pourtant le résultat doit être valable aussi dans ce cas.

un traitement à part. Je reviendrai là-dessus par la suite et préfère pour l'instant admettre le "lemme fondamental", et examiner des conséquences et corollaires de celui-ci.

Pour une action extérieure fidèle d'un Γ fini sur un groupe à lacets *anabélien* π, correspondant à une extension E de Γ par π on a donc établi[59].

a) Que les scindages partiels de celle-ci ne peuvent se faire que sur des sous-groupes Γ' de Γ tels que $\Gamma'\circ$ soit cyclique et Γ' dihédral si $\Gamma \neq \Gamma'^{\circ}$.

b) Pour toute classe de π-conjugaison de tels scindages partiels, on a un isomorphisme canonique correspondant $\Gamma' \simeq T_n (= T/nT)$ où $n = \operatorname{card} T'$. Ce sont là des résultats que l'on avait précédemment obtenus pour le cas d'un opération *réalisable*.

Il n'y avait pas lieu d'ailleurs de se borner au cas anabélien, du moment que l'on suppose $\pi \neq 0$) (cas essentiellement vide !) ce qui inclut les cas abéliens $g = 0$, $\nu = 2$ et $g = 1$, $\nu = 0$ pour lesquels un traitement direct est possible, et a déjà été donné essentiellement, ces cas là où l'on part d'une *extension* (pas d'une extension "extérieure" i.e. ici d'une action tout court de Γ sur $\pi \simeq \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}^2$) étant toujours réalisables. (N.B. Dans ce cas, l'hypothèse d'une action fidèle est remplacée par celle que l'extension n'est une extension *produit* sous aucun sous-groupe $\Gamma' \subset \Gamma$ $\Gamma' \neq 1\ldots$).

Il reste cependant d'autres résultats [de ?] cas réalisable qu'il faudrait examiner dans le cas général :

[O.P.S. $\Gamma = \Gamma^{\circ}$ donc Γ engendré par un automorphisme direct u ou Γ engendré par un anti-isomorphisme d'ordre 2].

c) Si Γ est un sous-groupe fini de $\operatorname{Aut}(\pi)$ i.e. un groupe fini opérant *fidèlement* sur π a-t-on $\pi^{\Gamma} = \{1\}$?

d) Si Γ' et Γ'' sont des sous-groupes finis de E (extension du groupe fini Γ par π correspondant à une opération extérieure fidèle, respectant l'orientation)

[59] i.e. on a établi l'existence d'une application canonique de l'ensemble des éléments d'ordre fini de $\operatorname{Aut}_{\mathrm{lac}}(\pi)$ dans $T \otimes \mathbf{Q}/T$, satisfaisant les conditions examinées précédemment.

tels que $\Gamma' \cap \Gamma'' = \{1\}$, alors Γ' et Γ'' sont-ils contenus dans le π-conjugué d'un sous groupe fini Γ''' de E ?

[i.e. tout sous-groupe section $= 1$ est contenu dans un unique sous-groupe section maximal modulo conjugaison].

N.B. Deviendrait faux en se plaçant dans le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{lac}}(\pi)$ [...?].

e) Pour tout sous-groupe Γ' de Γ l'ensemble des classes de π-conjugaison de relèvements de Γ' sur E est-il fini ?

[OPS $\Gamma' = \Gamma$ cyclique (et $\Gamma = \Gamma^\circ$) ou dihédral sinon].

Dans le cas c), OPS Γ cyclique d'ordre premier et c'est OK s'il est acquis qu'une opération extérieure d'un tel groupe sur un $\pi_{g,\nu}$ est réalisable. De même e) est établi si l'on admet que les opérations extérieures de groupes cycliques sur un $\pi \simeq \pi_{g,\nu}$ sont réalisables.

Démontrons d). Nous identifions Γ' et Γ'' à des sous-groupes de Γ, et posons $\Gamma_0 = \Gamma' \cap \Gamma''$. Soit $E^!$ le sous-groupe de E formé des $g \in E$ tel que $\mathrm{int}(g)\Gamma_0$ soit π-conjugué de Γ_0 et dont l'image dans Γ centralise Γ_0.

On a $E^! \supset \pi$ et E' est donc l'image inverse d'un sous-groupe de $\Gamma^!$ de Γ qui centralise Γ_0 et qui contient Γ' et Γ'' (car $E^!$ contient le centralisateur de Γ_0 dans E, donc Γ' et Γ''). Quitte à remplacer Γ par $\Gamma^!$, E par $E^!$, OPS $E = E^!$, $\Gamma = \Gamma^!$ i.e. que $\Gamma_0 \subset$ Centre de Γ et que $\Gamma_0 \hookrightarrow E$ invariant modulo π-conjugaison par Γ.

On va construire une section de E sur Γ tout entier, ainsi. Soit $\widetilde{\Gamma} \subset E$ le centralisateur de Γ_0 dans E, on a $\widetilde{\Gamma} \cap \pi = (1)$ (car cela signifie $\pi^{\Gamma_0} = (1)$) donc $\widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ est injectif, je dis qu'il est surjectif. En effet, soit $\gamma \in \Gamma$, $g \in E$ au-dessus de Γ, par hypothèse $\exists \alpha \in \pi$ tel que $\mathrm{int}(g)\Gamma_0 = \mathrm{int}(\alpha)\Gamma_0$.

i.e. OPS $\mathrm{int}(g)\Gamma_0 = \Gamma_0$, i.e. g normalise Γ_0, mais comme Γ_0 est central dans Γ cela signifie que g centralise Γ_0 i.e. $g \in \widetilde{\Gamma}$. Ainsi $\widetilde{\Gamma} \simeq \Gamma$ est un sous-groupe *fini* de $\mathrm{Aut}(\pi)$ contenant Γ' et Γ'' *c.q.f.d.*.

N.B. Si on n'avait pas au début supposé Γ fini il serait vrai encore que Γ' et Γ'' engendre un sous-groupe $\widetilde{\Gamma} \subset \mathrm{Aut}(\pi)$ tel que $\widetilde{\Gamma} \cap \pi = (1)$ mais cela nous fait une belle jambe.

§ 19. — TOUR DE TEICHMÜLLER

Soit $g \in \mathbf{N}$ et X_g une surface compacte connexe orientable de genre g. Soit $(a_{g,i})_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de points distincts de X_g. On pose pour $\nu \in \mathbf{N}$

(1) $$S_{g,\nu} = \{a_{g,i} | 0 \leq i \leq \nu - 1\} \quad (\nu = \operatorname{card} S_{g,\nu})$$

(2) $$U_{g,\nu} = X_g \backslash S_{g,\nu} \quad \text{N.B. on a } a_{g,\nu} \in U_{g,\nu}.$$

On a donc $S_{g,0} = \varnothing$ et $U_{g,0} = X_g$.

Les $S_{g,\nu}$ forment une suite strictement croissante de parties finies de X_g et les $U_{g,\nu}$ une partie strictement décroissante d'ouverts de X_g. On prendra par la suite $U_{g,\nu}$ comme surface orientable type, de type (g,ν).

(3) Soit $A_g = \operatorname{Aut}(X_g)$ le groupe des automorphismes de X_g muni de la topologie de la convergence uniforme de u et de son inverse. On pose

(4) $$A_{g,\nu} = \{u \in A_g | u(S_{g,\nu}) = S_{g,\nu}\}$$

on a un isomorphisme canonique (de restriction)[60]

(5) $$A_{g,\nu} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut}(U_{g,\nu})$$

[60]N.B. C'est sans doute un isomorphisme topologique quand $A_{g,\nu}$ est muni de la topologie induite par A_g et $\operatorname{Aut}(U_{g,\nu})$ de la topologie habituelle de la convergence compacte de u et de son inverse.

on a aussi un morphisme canonique surjectif

(6) $$A_{g,\nu} \longrightarrow \mathrm{Aut}(S_{g,\nu}) \simeq \mathfrak{S}_\nu$$

dont le noyau est noté $A^!_{g,\nu}$

(7) $$A^!_{g,\nu} = \{u \in A_g | u(a_{g,i}) = a_{g,i} \forall i \in \{0, \dots, \nu - 1\}\}$$

d'où la suite exacte :

(8) $$1 \longrightarrow A^!_{g,\nu} \longrightarrow A_{g,\nu} \longrightarrow \mathfrak{S}\nu \longrightarrow 1$$

Soit $A^\circ_{g,\nu}$ la composante neutre du groupe $A_{g,\nu}$ on a donc :

(9) $$A^\circ_{g,\nu} (= A^{!\circ}_{g,\nu}) \subset A^!_{g,\nu}$$

Posons

(10) $$\Gamma_{g,\nu} = A_{g,\nu}/A^\circ_{g,\nu} = \pi_0(A_{g,\nu}) \quad \text{groupe de Teichmüller de type } g, \nu)$$

On pose aussi $\Gamma_g = \Gamma_{g,0} (= \Gamma^!_{g,0})$

(11) $$\Gamma^!_{g,\nu} = A^!_{g,\nu}/A^\circ_{g,\nu}$$

la suite exacte (8) donne donc une suite exacte.

(12) $$1 \longrightarrow \Gamma^!_{g,\nu} \longrightarrow \Gamma_{g,\nu} \longrightarrow \mathfrak{S}_\nu \longrightarrow 1$$

On a des homéomorphismes canoniques :

(13) $A_g/A_{g,\nu} \simeq$ ouvert $\mathrm{Sym}^\nu(X_g)^*$ du produit symétrique $(\mathrm{Sym}^\nu(X_g))$ formé des parties finies de card $\nu (= \mathfrak{P}_\nu(X_g))$.

(14) $A_g/A^!_{g,\nu} \simeq$ ouvert $(X^\nu_g)^*$ des ν-uples de points distincts $\simeq \mathrm{Mon}(I_\nu, X_2)$ (ou $I_\nu = \{0, 1, \dots, \nu\}$).

(Cet homéomorphisme respectant les actions naturelles de $\mathfrak{G}_\nu = A_{g,\nu}/A^!_{g,\nu}$).

Les $A^!_{g,\nu}$ pour ν variable forment une suite décroissante de sous-groupes de A_g.

(15) $$A_g = A^!_{g,0} \supset A^!_{g,1} \supset A^!_{g,2} \supset \cdots \supset A^!_{g,\nu} \supset \dots$$

et les homomorphismes correspondants entre espaces homogènes de A_g s'insèrent dans le diagramme commutatif :

(16)
$$\begin{tikzcd} A_g/A^{!}_{g,\nu} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Mon}(I_\nu, X) \arrow[d] \\ A_g/A^{!}_{g,\nu} \arrow[r] & \mathrm{Mon}(I_{\nu'}, X) \end{tikzcd} \qquad 0 \leq \nu' \leq \nu$$

pour $\nu = 1$ on a $A^{!}_{g,1} = A_{g,1}$ et l'isomorphisme (13) (ou au choix (14)) s'écrit

(17)
$$A_g/A_{g,1} \simeq X_g$$

(homéomorphisme compatible avec les actions de A_g).

D'ailleurs si à tout $x \in X_g$ on associe son stabilisateur $A_{g,x}$ dans A_g on trouve une application évidemment surjective

(18) $X_g \longrightarrow$ ensemble des conjugués du sous groupe $A_{g,1}$ de $A_g(\simeq A_g/\mathrm{Norm}_{A_g}(A_{g,1}))$

qui s'identifie via (17) à l'application canonique sur les espaces homogènes

$$A_g/A_{g,1} \longrightarrow A_g/\mathrm{Norm}_{A_g}(A_{g,1})$$

déduite de l'inclusion $A_{g,1} \subset \mathrm{Norm}_{A_g}(A_{g,1})$.

On voit de suite que (18) est bijective i.e. que

(19)
$$A_{g,1} = \mathrm{Norm}_{A_g}(A_{g,1})$$

Plus généralement pour tout ν on a

(20)
$$A_{g,\nu} = \mathrm{Norm}_{A_g}(A_{g,\nu}) = \mathrm{Norm}_{A_g}(A^{!}_{g,\nu})$$

Ce qui signifie que les applications canoniques de A_g-ensembles homogènes :

$$\mathfrak{P}_\nu(X_g) \longrightarrow \text{ensemble des conjugués de } A_{g,\nu}$$

(21)
$$S \longmapsto \text{stabilisateur } A_{g,S} \text{ de } S$$

(22)
$$S \longmapsto A^{!}_{g,S}$$

sont non seulement surjectives mais même *bijectives*. Cela provient du fait que l'on retrouve S en termes de $A_{g,S}$ (ou de $A^!_{g,S}$) :

$$S = \{x \in X_g | u(x) = x \quad \forall u \in A^!_{g,S}\} = X^{(A'_{g,S})} \tag{23}$$

$$= \{x \in X_g | A_{g,S}x \text{ fini}\} \tag{24}$$

$$= \{x \in X_g | A_{g,S}x \neq X_g\}$$

On a aussi une application canonique d'espaces homogènes sous A_g

$$\mathfrak{P}_\nu(X_g) \longrightarrow \text{Ensemble des conjuguées de } A^\circ_{g,\nu} \text{ dans } A_g (\simeq A_g / \mathrm{Norm}_{A_g}(A^\circ_{g,\nu}))$$

$$S \longmapsto A^\circ_{g,S} \tag{25}$$

qui est bijective car on a la relation suivante qui renforce (23) et (24) : $\forall S \in \mathfrak{P}_\nu(X_g)$

$$S = \{x \in X_g | A^\circ_{g,S} = \{x\}\} = X_g^{A^\circ_{g,S}} \tag{26}$$

$$= \{x \in X_g | A^\circ_{g,S}x \text{ fini}\}$$

$$= \{x \in X_g | A^\circ_{g,S}x \neq X_g\}$$

ainsi pour tout ν

$$A_{g,\nu} = \mathrm{Norm}_{A_g}(Ag,\nu) = \mathrm{Norm}_{A_g}(A^!_{g,\nu}) = \mathrm{Norm}_{A_g}(A^\circ_{g,\nu}) \tag{27}$$

Soi G un groupe topologique, muni d'une classe de conjugaison X de sous-groupes ; soit G_1 dans cette classe. On dit que (G, X) est un couple de Teichmüller de type g, s'il existe un isomorphisme de groupes topologiques $G \simeq A_g$, transformant X en la classe de conjugaison de $A_{g,1}$

Il revient au même de dire que X avec sa topologie d'espace homogène sous G ($\simeq G/G_1$) est une surface compacte connexe orientable de genre g, et que l'application naturelle

$$G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \tag{28}$$

est un homéomorphisme de groupes topologiques.

On voit alors que $(G,X) \mapsto X$ de la catégorie des couples de Teichmüller de type g, vers la catégorie des surfaces compactes orientables de genre g est une équivalence de catégorie. Il en résulte que pour un automorphisme u du groupe topologique G, u est intérieur si et seulement si u conserve la classe X i.e. si et seulement si $U(G_1)$ est conjugué de G_2.

D'ailleurs le centre de G est trivial.

On peut donner une description analogue pour la catégorie des surfaces orientées de genre g à ν trous (i.e. homéomorphismes à $U_{g,\nu}$) en termes d'un groupe topologique G_v ($\simeq A_{g,\nu}$) et d'une classe de conjugaison U_ν de sous-groupes H_ν de celui-ci ($\simeq A_{g,\nu} \cap A_{g,\nu+1}$) avec les conditions que $(G_\nu, \{H_\nu\})$ soit isomorphe à $(A_{g,\nu}, \{A_{g,\nu} \cap A_{g,\nu+1}\})$ ou encore que l'homomorphisme continu

$$G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_\nu) \tag{29}$$

soit un homéomorphise de groupes topologiques. On trouve alors une équivalence entre la catégorie des couples de Teichmüller $(G_\nu, \{H_\nu\})$ de type (g,ν), et celle des surfaces orientables de type (g,ν). On trouve encore que les automorphismes d'un tel G_ν ($\simeq A_{g,\nu}$) qui fixent la classe U_ν (i.e. qui transforme H_ν en un conjugué) sont intérieurs et que le centre de H_ν est $\{1\}$.

En fait U_ν peut être interprété aussi comme espace homogène sous G_ν° et pas seulement sous G_ν ; plus généralement on a que G_ν° est transitif sur U_ν et même sur $\mathfrak{P}_{\nu'}(U_\nu)$ pour tout $\nu' \in \mathbf{N}^*$.

Revenant à la situation type avec $U_{g,\nu}$, ou trouve :

$$\begin{aligned} U_{g,\nu} &\simeq A_{g,\nu}/A_{g,(\nu,\nu+1)} \text{ (avec } A_{g,(\nu,\nu+1)} = A_{g,\nu} \cap A_{g,\nu+1}) \\ &\simeq A^\circ_{g,\nu}/B_{g,(\nu,\nu+1)} \end{aligned} \tag{30}$$

(avec $B_{g,(\nu,\nu+1)} = A_{g,\nu+1} \cap A^{\circ}_{g,\nu} = \{u \in A^{\circ}_{g,\nu}$ tel que $u(a_{g,\nu}) = a_{g,\nu}\})$.

On a ainsi un diagramme d'inclusion de sous-groupes de $A_{g,\nu}$: (en posant $B_{g,\nu} = A^{\circ}_{g,\nu} \cap A^{!}_{g,\nu+1}$ et en remarquant que $A^{\circ}_{g,\nu+1} = B^{\circ}_{g,\nu} = (A^{!}_{g,\nu+1})^{\circ}$)

(31)
$$\begin{tikzcd}
A^{\circ}_{g,\nu+1} \arrow[r, hook, "\pi_{g,\nu}"'] & B_{g,\nu} \arrow[r, hook, "\text{inv.}", "\Gamma^{!}_{g,\nu}"'] \arrow[d] & A^{!}_{g,\nu+1} \arrow[r, hook, "\text{inv.}", "\mathfrak{S}_{\nu}"'] \arrow[d] & A_{g,(\nu,\nu+1)} \arrow[d] & {[} \arrow[r, hook] & A_{g,\nu+1}] \\
& A^{\circ}_{g,\nu} \arrow[r, hook, "\text{inv.}", "\Gamma^{!}_{g,\nu}"'] & A^{!}_{g,\nu} \arrow[r, hook, "\text{inv.}", "\mathfrak{S}_{\nu}"'] & A_{g,\nu}
\end{tikzcd}$$

où les 2 carrés sont cartésiens et les inclusions horizontales (sauf celle entre crochets) sont des inclusions de sous groupes invariants (invariant même dans le groupe le plus grand $A_{g,\nu}$ (resp. $A_{g,\nu+1}$)).

(L'égalité $B^{\circ}_{g,\nu} = (A^{!}_{g,\nu+1})^{\circ}$, (qui précise l'inclusion triviale de $B^{\circ}_{g,\nu}$ dans $(A^{!}_{g,\nu+1})^{\circ}$ par l'inclusion inverse équivalente à $(A^{!}_{g,\nu+1})^{\circ} \subset B^{\circ}_{g,\nu}$) provient de l'inclusion

$$(A^{!}_{g,\nu+1})^{\circ} \subset (A^{!}_{g,\nu})^{\circ} = A^{\circ}_{g,\nu}, \quad \text{d'où} \quad A^{\circ}_{g,\nu+1} \subset A_{g,\nu+1} \cap A^{\circ}_{g,\nu} = B_{g,\nu}).$$

On notera dorénavant $A_{g,(\nu,\nu+1)}$ par $A^{\bullet}_{g,\nu}$ (comme $A_{g,\nu}$ ponctué par $a_{g,\nu}$).

Les trois inclusions verticales définissent trois espaces homogènes et les homomorphismes d'inclusions entre ceux-ci qui sont *bijectifs*

$$(A_{g,\nu} \simeq) \quad A_{g,\nu}/A^{\bullet}_{g,\nu} \xleftarrow{\sim} A^{!}_{g,\nu}/A^{!}_{g,\nu+1} \xleftarrow{\sim} A^{\circ}_{g,\nu}/B_{g,\nu}$$

et de même les groupes quotient $\mathfrak{S}_{\nu}$ et $\Gamma^{!}_{g,\nu}$ définis par les inclusions de la première ligne son isomorphes par les inclusions verticales aux quotients correspondants dans la deuxième ligne. Ainsi l'extension de groupe

(12)
$$1 \longrightarrow \Gamma^{!}_{g,\nu} \longrightarrow \Gamma_{g,\nu} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\nu} \longrightarrow 0$$

peut se déduire indifféremment de la 1ère ligne ou de la 2ème ligne de (31) en particulier

$$\mathfrak{S}_{\nu} \simeq A^{\bullet}_{g,\nu}/A^{!}_{g,\nu+1}$$

(32)
$$\Gamma_{g,\nu} \simeq A^{\bullet}_{g,\nu}/B_{g,\nu}$$

$$\Gamma^{!}_{g,\nu} \simeq A^{!}_{g,\nu+1}/B_{g,\nu}$$

Ainsi le torseur canonique e groupe $A^{\bullet}_{g,\nu}$ sur l'espace homogène $U_{g,\nu}$ et celui de groupe $A^{!}_{g,\nu+1}(\subset A^{\bullet}_{g,\nu})$ qui lui donne naissance sont l'un et l'autre déduit par extension du groupe structural d'un torseur de groupe $B_{g,\nu}$ (dont la fibre en $x \in U_{g,\nu}$ est l'ensemble des $u \in A^{\circ}_{g,\nu}$ tel que $u(a_{g,\nu}) = x$). Le revêtement galoisien associé de groupe $B_{g,\nu}/B^{\circ}_{g,\nu}$ est donc aussi l'espace homogène $A^{\circ}_{g,\nu}/A^{\circ}_{g,\nu+1}$ qui est évidemment connexe et ponctué au dessus de $a_{g,\nu} \in U_{g,\nu}$.

Posons pour $(g,\nu) \neq (1,0)$ et $(g,\nu) \neq (0,2)$.

$$\widetilde{U}_{g,\nu} = A^{\circ}_{g,\nu}/A^{\circ}_{g,\nu+1} \tag{13}$$

On a le théorème :

Théorème. — *$\widetilde{U}_{g,\nu}$ est simplement connexe (et même contractile si $(g,\nu) \neq (0,0)$) et s'identifie donc au revêtement universel de $U_{g,\nu}$ ponctué en $a_{g,\nu}$.*

Corollaire. — *On a un isomorphisme canonique*

$$B_{g,\nu}/B^{\circ}_{g,\nu} \simeq \pi_1(U_{g,\nu}; a_{g,\nu}) \overset{def}{=} \pi_{g,\nu} \tag{34}$$

Démonstration du théorème en termes de choses "bien connues".

La suite exacte d'homotopie pour la fibration de $A^{\circ}_{g,\nu}$ sur $A^{\circ}_{g,\nu+1}/A^{\circ}_{g,\nu+1} \simeq \widetilde{U}_{g,\nu}$ est

(35)

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(\widetilde{U}_{g,\nu}) \longrightarrow \pi_i(A^{\circ}_{g,\nu+1}) \longrightarrow \pi_i(A^{\circ}_{g,\nu}) \longrightarrow \pi_i(\widetilde{U}_{g,\nu}) \longrightarrow \pi_{i-1}(A^{\circ}_{g,\nu+1}) \cdots$$

$$\cdots \pi_1(A^{\circ}_{g,\nu+1}) \longrightarrow \pi_1(A^{\circ}_{g,\nu}) \longrightarrow \pi_1(\widetilde{U}_{g,\nu}) \longrightarrow 1$$

Elle montre que $\pi_1(\widetilde{U}_{g,\nu})$ est isomorphe au conoyau de $\pi_1(A^{\circ}_{g,\nu+1}) \longrightarrow \pi_1(A^{\circ}_{g,\nu})$ dont le noyau est un quotient de $\pi_2(\widetilde{U}^{\circ}_{g,\nu})\ldots$

Si $(g,\nu) \neq (0,0)$ on sait que $\pi_i(\widetilde{U}_{g,\nu}) = 0 \; \forall i \geq 2$ d'où si $(g,\nu) \neq (0,0)$ on a

$$\pi_i(A^{\circ}_{g,\nu+1}) \longrightarrow \pi_i(A^{\circ}_{g,\nu}) \tag{36}$$

est bijectif si $i \geq 2$, injectif à image invariante si $i = 1$ et l'on veut prouver que c'est bijectif pour $i = 1$.

La chose à retenir (?) est celle ci :

Théorème (bien connu). — *Conditions équivalentes sur le couple* $(g,\nu)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$*:*

a) $2g+\nu\geq 3$ *(i.e. on n'est pas dans les cas :* $(1,0),(0,0),(0,1),(02)$*).*

b) $\pi_1(U_{g,\nu})$ *est non abélien.*

c) $A^\circ_{g,\nu}$ *est simplement connexe.*

d) $A^\circ_{g,\nu}$ *est contractile et* $(g,\nu)\neq(0,1)$*.*

En tous cas, que ces condition soient ou non vérifies, on a $\pi_i(A^\circ_{g,\nu})=0$ *si* $i\geq 2$*, et* $(g,\nu)\neq(0,0)$*.*

(i.e. les $A^\circ_{g,\nu}$ sont des espaces classifiants de groupes discrets, avec la seule exception de $A^\circ_{0,0}\simeq\mathrm{Aut}^\circ\,\mathbb{S}^2$).

Compte tenu de (36) ce théorème équivaut aux relations :

(37) $\qquad \pi_i(A^\circ_{g,0})=0 \quad$ si $g\geq 2, i\geq 1$ (i.e. pour $g\geq 2 A_{g,0}$ est cotractile)

$$\pi_i(A^\circ_{g,0})=0 \quad \text{pour } i\geq 1 \text{ (i.e. } A^\circ_{1,1} \text{ est contractile)}$$

$$\pi_i(A^\circ_{0,1})=0 \quad \text{pour } i\geq 1 \text{ (i.e. } A^\circ_{0,1} \text{ est contractile)}$$

(38) $$\pi_i(A^\circ_{1,0})=0 \text{ et } \pi_i(A^\circ_{0,1})=0 \text{ pour } i\geq 2$$

$$\text{i.e } A^\circ_{1,0}\; A^\circ_{0,1} \text{ sont des } K(\pi,1)$$

et elles ont comme conséquences que $\widetilde{U}_{g,\nu}$ est simplement connexe dans les cas anabéliens ($2g+\nu\geq 3$). Pour savoir ce qu'il en est dans le cas abélien, il faut préciser la structure topologique de $A^\circ_{g,\nu}$ dans les 4 cas “abéliens” $2g+\nu\leq 2$.

Or on a le

Corollaire. — *Pour que* $U=U_{g,\nu}$ *soit à* π_i *abélien (i.e. ne satisfasse pas aux conditions équivalentes du théorème) il faut et il suffit que* U *puisse :*

Soit être muni d'une structure de groupe topologique (qui sera nécessairement isomorphe à $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$ *(*$\mathbb{U}=\{z/|z|=1\}$*), (cas* $(1,0)$*) et* $\mathbf{C}^*$ *(cas* $(0,2)$ *ou* $\mathbf{C}$ *(cas* $(0,1)$*))).*

Soit d'une structure d'espace homogène sous un groupe topologique (on peut prendre $\mathrm{SO}(3,\mathbf{R})$ *ou* $\mathrm{Gl}(1,\mathbf{C})$ *pour le cas de* $\mathbb{S}^2$*) par un sous groupe connexe. Dans tous les cas le groupe topologique en question peut se décrire e la façon suivante : on choisit une structure complexe sur* $X_g=\widehat{U}_{g,\nu}=\widehat{U}$ *(le compactifié pur de* U*) et on prend la structure complexe induite sur* U *(i.e. on choisit une structure de courbe algébrique (sur* $\mathbf{C}$*) sur* $U\dots$*) et on prend* $G=\mathrm{Aut}^\circ_{\mathbf{C}}U$ *composante neutre du groupe des automorphismes complexes de* U *i.e. des automorphismes complexes qui invarient* $S_\nu=\widehat{U}\backslash U$*.*

Ceci posé, l'inclusion $G\hookrightarrow\mathrm{Aut}^\circ U\simeq A^\circ_{g,\nu}$ *est une équivalence d'homotopie.*[61][62]

Le corollaire nous donne :

(39)

$$G=\mathbb{U}\times\mathbb{U}\qquad \pi_1(A^\circ_{1,0})=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\qquad\text{i.e.}\qquad A^\circ_{1,0}\simeq K(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z},1)$$

$$G=\mathbf{C}^*=\mathrm{Gl}(1,\mathbf{C})\qquad \pi_1(A^\circ_{0,2})\simeq\mathbf{Z}\qquad\text{i.e.}\qquad A^\circ_{0,2}\simeq K(\mathbf{Z},1)$$

$$G=\mathrm{Aff}(1,\mathbf{C})\qquad \pi_1(A^\circ_{0,1})\simeq\mathbf{Z}\qquad\text{i.e.}\qquad A^\circ_{0,1}\simeq K(\mathbf{Z},1)$$

($\mathrm{Aff}(1,\mathbf{C})$ homotope à $\mathbf{C}^*$ par l'inclusion $\mathrm{Gl}(\mathbb{S}^2)\subset\mathrm{Aff}(1,\mathbf{C})$)

$$A^\circ_{0,0}=\mathrm{Aut}(\mathbb{S}^2)\simeq\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}})$$

[61]N.B. Le fait que si U est un espace homogène de groupe topologique par un sous groupe connexe alors π_1 est abélien provient de la suite exacte d'homotopie et du fait que le π_1 d'un groupe topologique est commutatif. Le réciproque dans le cas des surfaces topologiques est assez remarquable !

[62]On a un résultat plus précis : si k est le plus petit entier tel que $(g,\nu+k)$ soit un couple anabélien, alors $\dim G=k$ et G est simplement transitif sur l'ensemble des k-uples $(u_1,\dots,u_k)$ de points distincts de $U_{g,\nu}$ d'où il résulte aussitôt que tout élément de $A_{g,\nu}$ s'écrit de façon unique comme un produit gu avec $g\in G$ et $u\in A_{g,\nu,\nu+k}$; donc $A_{g,\nu}$ est homéomorphe à $A_{g,(\nu,\nu+k)}\times G$. Comme G est connexe on en conclut $\Gamma_{g,\nu}\simeq\Gamma_{g,(\nu,\nu+k)}\subset\Gamma_{g,\nu+k}$, et $A^\circ_{g,\nu}\simeq G\times A^\circ_{g,\nu+k}$ et comme $A^\circ_{g,\nu+k}$ est ∞-connexe on e conclut un homotopisme $G\xrightarrow{\approx}A^\circ_{g,\nu}$.

est homotope par l'inclusion au sous groupe $\mathrm{GP}(1,\mathbf{C})$ (donc à son sous groupe compacte maximal $\mathrm{SO}(3,\mathbf{R})/\{\pm 1\}$) qui *n'est pas* un $K(\pi,1)$ et dont le π_1 est $\simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

On va utiliser ce corollaire pour déterminer la nature de $\widetilde{U}_{g,\nu}$ (comme revêtement de $U_{g,\nu}$) pour les cas “abéliens”.

Notons pour ceci que l'inclusion $G \hookrightarrow A^\circ_{g,\nu}$ induit une inclusion $G_0 \hookrightarrow B_{g,\nu}$ où

$$G_0 = G \cap B_{g,\nu} = \text{ stabilisateur de } a_{g,\nu} \text{ dans } G \tag{40}$$

et comme $G/G_0 \simeq A^\circ_{g,\nu}/B_{g,\nu} \simeq U_{g,\nu}$ (G étant transitif sur $U_{g,\nu}$), on trouve que le fait que $G \longrightarrow A^\circ_{g,\nu}$ soit une équivalence d'homotopie équivaut à celle que $G_0 \hookrightarrow B_{g,\nu}$ en soit une. Or dans tous les cas envisagés, G_0 est déjà connexe : il est réduit à 1 dans les cas $(1,0)$ et $(0,2)$ (donc dans ce cas le corollaire équivaut à la *contractibilité* de $B_{g,\nu}$) et c'est $\simeq \mathbf{C}^*$ dans le cas $(0,1)$, enfin c'est $\mathrm{Aff}(1,\mathbf{C})$ dans le cas $(0,0)$. Donc on trouve le corollaire :

Corollaire. — *Dans les cas abéliens $2g+\nu<3$ (et dans ceux-là seulement bien sûr) $B_{g,\nu}$ est connexe (i.e. $=A^\circ_{g,\nu+1}$) i.e. $A^\circ_{g,\nu}/A^\circ_{g,\nu+1} \longrightarrow U_{g,\nu}$ est un homéomorphisme. Donc $A^\circ/A^\circ_{g,\nu+1} \longrightarrow U_{g,\nu}$ fait du premier membre un revêtement universel de $U_{g,\nu}$ si et seulement si $(g,\nu) \neq (0,2)$ et $\neq (1,0)$.*

Supposons donc (g,ν) différent de $(0,1)$ et $(0,2)$ (moralement on travaille dans le cas anabélien, les cas abéliens inclus $(0,1)$ et $(0,0)$ étant sans intérêt pour ce qui va suivre il me semble).

Reprenons le diagramme (31) où dans la 1ère ligne le groupe quotient $B_{g,\nu}/B^\circ_{g,\nu}$ s'identifie donc à $\pi_{g,\nu} = \pi_1(U_{g,\nu}, a_{g,\nu})$.

On trouve donc :

Théorème. — *Supposons $(g,\nu) \neq (1,0)$ et $(0,2)$, le sous groupe $A^\bullet_{g,\nu}/A^\circ_{g,\nu+1}$ du groupe de Teichmüller $\Gamma_{g,\nu+1} = A_{g,\nu+1}/A^\circ_{g,\nu+1}$ admet une suite de composition de longueur 3 dont les facteurs successifs sont $\mathfrak{S}_\nu$, $\Gamma^!_{g,\nu}$ et $\pi_{g,\nu}$, déduite d'une structure d'extension sur $\Gamma^!_{g,\nu+1} = A^!_{g,\nu+1}/A^\circ_{g,\nu+1}$*

$$1 \longrightarrow \pi_{g,\nu} \longrightarrow \Gamma^!_{g,\nu+1} \longrightarrow \Gamma^!_{g,\nu} \longrightarrow 1 \tag{41}$$

Les opérations extérieures de $\Gamma^!_{g,\nu}$ sur $\pi_{g,\nu}$ sont celles déduites par passage au quotient de celles de $A^!_{g,\nu} \subset \mathrm{Aut}(U_{g,\nu})$ opérant extérieurement sur $\pi_{g,\nu}$. Une autre façon de dire les choses est celle-ci : distinguons dans $\Gamma_{g,\nu+1}$ opérant sur $S_{\nu+1}$ le stabilisateur du dernier élément $a_{g,\nu}$, i.e. de son complémentaire ; soit $\Gamma'_{g,\nu+1} \simeq A^{\bullet}_{g,\nu}/A^{\circ}_{g,\nu+1}$ le sous-groupe d'indice $\nu+1$ image inverse de $\mathfrak{S}_\nu$ dans $\mathfrak{S}_{\nu+1}$ par $\Gamma_{g,\nu+1} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\nu+1}$. Ceci posé on a un homomorphism évident de groupes discrets, déduit de l'inclusion $A^{\circ}_{g,\nu} \hookrightarrow A_{g,\nu+1}$[63]

$$\Gamma'_{g,\nu+1} \longrightarrow \Gamma_{g,\nu} \tag{42}$$

et cet homomorphisme est surjectif (sans condition sur (g,ν)) et pour $(g,\nu) \neq (1,0)$ et $(0,1)$ son noyau est canoniquement isomorphe à $\pi_{g,\nu}$ de sorte que l'on a une extension

$$1 \longrightarrow \pi_{g,\nu} \longrightarrow \Gamma'_{g,\nu+1} \longrightarrow \Gamma_{g,\nu} \longrightarrow 1 \tag{43}$$

où les opérations extérieurs correspondants de $\Gamma_{g,\nu}$ sur $\pi_{g,\nu}$ sont celles déduites par passage au quotient de celles de $A_{g,\nu} \simeq \mathrm{Aut}(U_{g,\nu})$ sur $\pi_1(U_{g,\nu}, a_{g,\nu}) = \pi_{g,\nu}$. La structure d'extension (41) est déduite de (43) par image inverse par l'inclusion $\Gamma^!_{g,\nu} \longrightarrow \Gamma_{g,\nu}$.

Supposons que l'on soit dans le cas anabélien $2g+\nu \geq 3$. Comme pour toute structure d'extension par un noyau de centre trivial, il y a un homomorphisme canonique dans la structure d'extension canonique associée à $\pi_{g,\nu}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_{g,\nu} & \longrightarrow & \Gamma'_{g,\nu+1} & \longrightarrow & \Gamma_{g,\nu} & \longrightarrow & 1 \\ & & \Big\Downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_{g,\nu} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\pi_{g,\nu}) & \longrightarrow & \mathrm{Autext}(\pi_{g,\nu}) & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{44}$$

où la flèche verticale centrale s'obtient en associant à $g \in \Gamma'_{g,\nu+1}$ la restriction à $\pi_{g,\nu} \subset \Gamma'_{g,\nu+1}$ de l'automorphisme intérieur $\mathrm{int}(g)$.

Théorème (bien connu). — *Dans le cas anabélien* $(2g+\nu \geq 3)$[64]

$$\Gamma_{g,\nu} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Autext}_{lac}(\pi_{g,\nu})$$

[63] N.B. c'est un isomorphisme dans le cas abéliens $2g+\nu \leq 2$.

[64] N.B. En fait ceci reste vrai pour le couple $(1,0)$ (cf. plus bas) et même dans le cas $(0,2)$ si on définit ad-hoc la notion groupe à lacets de type $(0,2)$.

ou ce qui revient au même par (44) :

$$\Gamma'_{g,\nu+1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{lac}(\pi_{g,\nu})$$

L'image de $\Gamma_{g,\nu} \longrightarrow \mathrm{Autext}(\pi_{g,\nu})$ *est formé des automorphismes extérieurs qui respectent la structure à lacets de* $\Gamma_{g,\nu}$ *(condition vide si* $\nu = 0$ *d'ailleurs…)*

Corollaire. — *Dans le cas anabélien le foncteur* $X \mapsto \pi_1(X)$ *de la catégorie isotopique (les fèlches dans la catégorie isotopique sont les classes d'isotopie d'homéomorphisme) des surfaces de type* (g,ν) *vers la catégorie des groupes* extérieurs *à lacets de type* (g,ν) *est une équivalence de catégorie, ainsi que le foncteur* $(X,s) \mapsto \pi_1(X,s)$ *de la catégorie isotopique des surfaces* ponctuées *de type* (g,ν) *vers la catégorie des groupes à lacets de type* (g,ν)[65].

Il reste à examiner dans quelle mesure on peut adapter ces résultats au cas “abélien”. Rappelons que dans ce cas on a

$$\Gamma'_{g,\nu+1} \xrightarrow{\sim} \Gamma_{g,\nu} \quad \text{si} \quad 2g+\nu \leq 2 \quad \text{(cas “abélien”)).} \tag{45}$$

i.e. $\Gamma_{g,\nu}$ s'identifie au sous-groupe de $\Gamma_{g,\nu+1}$ formé des éléments qui fixent $a_{g,\nu}$.

(1)) Cas $g=1$, $\nu=0$ donc $\Gamma_{1,0} \simeq \Gamma'_{1,1} = \Gamma_{1,1}$.

Considérons l'homomorphisme canonique

$$\Gamma_1 = \Gamma_{1,0} \longrightarrow \mathrm{Autext}(\pi_{1,0}) = \mathrm{Aut}(\pi_{1,0}) \tag{46}$$

($\simeq \mathrm{Gl}(2,\mathbf{Z})$ quand on a choisi une base de $\pi_{0,1} \simeq \mathbf{Z}^2$), qui correspond à l'homomorphisme

$$\Gamma_{1,1} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\pi_1(U_{1,0},a_{1,0}) \quad (\simeq \mathrm{Gl}(2,\mathbf{Z})) \tag{46$^{\text{bis}}$}$$

déduits l'un et l'autre par passage au quotient à partir des opérations évidentes de $A_1 = A_{1,0} = \mathrm{Aut}(X_1)$ et de $A_{1,1} = \mathrm{Aut}(X_1, a_{1,0})$. Il est immédiat que ce homomorphisme est surjectif mais moins évident que ce soit un isomorphisme i.e. que tout

[65] N.B. C'est même une équivalence au niveau des catégories ∞-*isotopiques* ce qui exprime seulement le fait que $A^\circ_{g,\nu}$ et $A^\circ_{g,\nu+1}$ sont contractiles.

homéomorphisme de X_1 qui induit l'identité sur π_1 soit isotope à l'identité ; c'est pourtant un résultat vrai (et connu).

Dans le cas actuel où X_1 s'identifie à l'espace topologique sous-jacent à un groupe topologique H (ce qui est le cas dans tous les cas abéliens sauf celui de $g=0$, $\nu=0$ de la 2-sphère), par translation on a un homomorphisme naturel

$$H \longrightarrow A_{g,\nu} \simeq \mathrm{Aut}_{\mathrm{top}} H \tag{47}$$

permettant d'identifier H à un sous-groupe topologique de $A_{g,\nu}$ et on trove que l'application

$$\begin{array}{ccc} H \times A_{g,\nu+1} & \longrightarrow & A_{g,\nu} \\ (g,u) & \longmapsto & gu \end{array} \tag{48}$$

est un homéomorphisme.

Ceci redonne (45) (puisque H est connexe) et le précise considérablement par

$$\pi_i(A_{g,\nu+1}) \simeq \pi_i(A_{g,\nu}) \times \pi_i(H) \tag{49}$$

Cas abéliens non sphériques i.e. un des trois cas $(1,0),(0,1),(0,2)$.

Dans le cas "limites" $(1,0)$ et $(0,2)$ (quand (g,ν) est abélien et $(g,\nu+1)$ anabélien) comme $A^\circ_{g,\nu} \simeq H \times A^\circ_{g,\nu+1}$ contractile, on retrouve que $H \longrightarrow A^\circ_{g,\nu}$ est un homotopisme. Notons que dans les cas anvisagés $(1,0),(0,2),(0,1)$, si on choisit une structure complexe sur le compactifié pur $\widehat{X}$ de $X = U_{g,\nu}$ et qu'on choisit $a_{g,\nu}$ comme origine, il y a une structure de groupe $\mathbf{C}$-algébrique unique sur X admettant $a_{g,\nu}$ comme unité et la composante neutre du groupe des automorphismes de la variété algébrique X n'est autre justement que le groupe des translations dans les cas limites $(1,0)$ et $(0,2)$.

2) Cas $g=0$, $\nu=2$ donc $H=\mathbf{C}^*$, $A_{g,\nu} \simeq H \times A^\bullet_{g,\nu+1}$ i.e. $A_{0,2} \simeq \mathbf{C}^* \times A^\bullet_{0,3}$ donc

$$\Gamma_{0,2} \simeq \Gamma'_{0,3}$$

$$A^\circ_{0,2} \xleftarrow{\ \approx\ } \mathbf{C}^* \quad \text{(équivalence d'homotopie)} \tag{50}$$

Ici $\pi_{0,2} = \pi_1(U_{0,2}) \simeq \mathbf{Z}$, considérons

$$\Gamma_{0,2} \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(\pi_{0,2}) \simeq \{\pm 1\} = \mathfrak{S}_2 \tag{51}$$

s'identifiant à

$$\Gamma'_{0,3} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi_{0,2}) \simeq \{\pm 1\} \tag{52}$$

Cette fis-ci l'homomorphisme (51) *n'est pas bijectif*, il s'identifie à l'homomorphisme canonique.

$$\Gamma_{0,2} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{S}_2 \tag{51$^{\mathrm{bis}}$}$$

de noyau $\Gamma^!_{0,1}$ et $\Gamma^!_{0,2}$ n'est pas réduit à 1, par exemple (si on prend $U_{0,2} = \mathbf{C}^*$) $z \longrightarrow \overline{z}$ définit un élément de $\Gamma^!_{0,2}$ qui n'est pas égal à 1. Notons maintenant l'homomorphisme canonique[66] (défini sans restriction sur (g,ν))

$$\Gamma_{g,\nu} \xrightarrow{\chi} \{\pm 1\} \tag{53}$$

via l'action de $\Gamma_{g,\nu}$ sur le moule d'orientation $T_g = T$ de $U_{g,\nu}$ (qui se définit pour $(g,\nu) \neq (0,0), (0,1)$ et $(0,2)$ en termes de la structure à lacets de $\pi_{g,\nu}$). Dans le cas actuel mettant ensemble ρ et χ on trouve un homomorphisme

$$g \mapsto (\rho(g), \chi(g)) : \Gamma_{0,2} \longrightarrow \mathfrak{S}_2 \times \{\pm 1\} \simeq \{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \tag{54}$$

qui est évidemment surjectif (si g correspond à $z \longrightarrow z^{-1}$ son image est $(-1,1)$, s'il correspond à $z \longrightarrow \overline{z}$, son image est $(1,-1)$). Je dis qu'il est *bijectif*

$$\Gamma_{0,2} \xrightarrow[\rho,\chi]{\sim} \mathfrak{S} \times \{\pm 1\}$$

ou ce qui vient au même, que la restriction de ρ (51^{bis}) au noyau $\Gamma^+_{0,2}$ de $\chi : \Gamma_{0,2} \mapsto \{\pm 1\}$ est un isomorphisme ou ce qui revient au même

Théorème (bien connu !). — $\Gamma^{!+}_{0,2} = 1$, *ou encore* $\rho^+_{0,2} : \Gamma^+_{0,2} \longrightarrow \mathfrak{S}_2$ *est un isomorphisme (ou* $\chi^!_{0,1} : \Gamma^!_{0,2} \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$*)*[67].

[66]Cet homomorphisme est toujours surjectif. Nous noterons son noyau $\Gamma^+_{g,\nu}$ (et non plus $\Gamma^\circ_{g,\nu}$!)

[67]N.B. Ceci suggère que pour une description isotopique de la catégorie des surfaces de types $(0,2)$ il faut utiliser le couple de $(\pi_1(X), T)$ où T est le module d'orientation ; itou plus bas pour le cas du type $(0,1)$ mais alors $\pi_1 = 0$ et il suffit de T.

[N. B. Si on veut un énoncé commun aux deux cas “abéliens limites” $(1,0)$ et $(0,2)$ on dira que dans ce cas $\Gamma^+_{g,\nu} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi)$ est injectif, et a comme image le groupe des automorphismes du $\mathbf{Z}$-module libre π de rang 2 ou 1 qui sont de déterminant égal à 1].

Ceci équivaut, modulo l'isomorphisme $\Gamma'_{0,3} \simeq \Gamma_{0,2}$ au

Corollaire. —

$$\begin{cases} \Gamma^+_{0,3} \xrightarrow{\rho^+_{0,3}} \mathfrak{S} & \textit{est un isomorphisme et} \\ \Gamma_{0,3} \xrightarrow{(\rho_{0,3},\chi_{0,3})} \mathfrak{S}_3 \times \{\pm 1\} & \textit{aussi.} \end{cases} \tag{56}$$

3) Cas $g=0$, $\nu=1$ donc $H \simeq \mathbf{C}$ donc

$$A_{0,1} \xrightarrow{\text{homéo}} \mathbf{C} \times A_{0,2} = \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times A_{0,3} \tag{57}$$

(avec$\mathbf{C} \times \mathbf{C}^* = \mathrm{Aff}(1,\mathbf{C})$ (qui est simplement transitif sur les couples d'éléments distincts)) en prenant sur $A_{0,3}$ une structure de groupe algébrique complexe $\simeq \mathbf{C}$[68].

On a ici $\Gamma_{g,1} \simeq \Gamma'_{g,2} = \Gamma^!_{g,1} \simeq \{\pm 1\}$ i.e. :

Corollaire. — *On a par la signature un isomorphisme :*

$$\Gamma_{0,1} \xrightarrow[\sim]{\chi} \{\pm 1\} \tag{58}$$

4) Cas $g=0$, $\nu=0$. Ici il n'y a pas de H, i.e. de structure de groupe topologique sur $X \simeq X_0 = U_{0,0} \simeq \mathbb{S}^2$ mais prenant une structure complexe sur X (d'où $X \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$) on trouve un groupe G de $\mathbf{C}$-automorphismes, $G = \mathrm{GP}(1,\mathbf{C})$, et

$$G \hookrightarrow A_0 = A_{0,0} \tag{59}$$

Prouvons à nouveau que c'est un homotopisme. Comme G est simplement transitif sur les triples de 3 points distincts de X_0, on trouve encore un homéomorphisme

$$\begin{aligned} G \times A^!_{0,3} &\xrightarrow{\ \sim\ } A_0 \\ (g,u) &\longmapsto gu \end{aligned} \tag{60}$$

[68]N. B. Comme $A^\circ_{0,3}$ est contractile cela redonne bien que l'inclusion de $G = \mathrm{Aff}(1,\mathbf{C}) = \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X)^\circ$ dans $A_{g,1}$ est un homotopisme.

d'où

$$\Gamma_0 \simeq \Gamma^!_{0,3} \simeq \{\pm 1\}$$

et compte tenu que la composante neutre $A^\circ_{0,3}$ de $A^!_{0,3}$ est contractile on trouve bien encore que (59) est un homotopisme.

Conclusion commune à tous les cas.

Il convient d'inclure dans la notion de "groupe à lacets" également les quatre cas abéliens, et on le fait de la manière suivante :

1) Type $(1,0)$: on n'a pas à compléter la définition générale qui revient à dire ici que π est un groupe abélien, $\mathbf{Z}$-module libre de rang 2. Son module d'orientation T peut se définir alors comme $\mathrm{H}_2(\pi,\mathbf{Z})$ ou comme $\bigwedge^2_{\mathbf{Z}} \pi$. La signature d'un automorphisme de π est donné par son action su T, c'est aussi son déterminant.

2) Type $(0,2)$: $\pi \simeq \mathbf{Z}$. Ici il faut se donner *en plus* de π, un $\mathbf{Z}$-module inversible T et la structure à lacets est définie par l'ensemble des deux isomorphismes $T \simeq \mathbf{Z}$. Un automorphisme de la structure à lacets est donc défini par n'importe quel couple (u_π, u_T) d'un automorphisme de π et d'un de T.

3) Types $(0,1)$ et $(0,0)$ qui sont ceux où $\pi_1 = \{1\}$. Par définition, une structure de groupe à lacets de type (g,ν) est définie ici par la donné d'un "module d'orientation" sans plus, qui est un $\mathbf{Z}$-module inversible T ; et il faut donner de plus le type i.e. (sous entendu $g=0$) le $\nu \in \{0,1\}$; les automorphismes sont ceux de T.

Avec ces définitions et pour g,ν fixés on a le

Théorème. — *Soit $(g,\nu) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, le foncteur naturel de la catégorie isotopique des surfaces de type (g,ν) vers la catégorie des groupes extérieures à lacets de type (g,ν) est une équivalence de catégorie. (N.B. Comme flèches on prend les classes d'isomorphisme d'un coté comme de l'autre.)*

Mais ce théorème n'est pas sûr pleinement satisfaisant dans le cas abélien par exemple. La donnée d'un objet de la catégorie isotopique (explicité par son π_1 extérieur à lacets) dans le cas d'une action d'un groupe ne permet pas même de récupérer l'extension de ce groupe par le dit π_1 ! Ce qui cloche, on le sent bien, est le fait que cette équivalence de catégorie soit isotopique (i.e. tient compte des π_0 des espaces d'homéomorphismes) mais néglige la structure topologique interne des espaces topologiques Homeo(X,X'), en négligeant la structure homotopique des composantes connexes qui, en tant que torseurs sous des groupes topologiques $\simeq A^\circ_{g,\nu}$, sont homéomorphes à $A^\circ_{g,\nu}$. C'est justement dans le cas anabélien et dans celui là seulement que ce groupe est ∞-connexe. Dans le cas abélien, l'expérience prouve que la description précédente doit être remplacée par celle de Ladegaillerie en termes des

$$\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U \quad \text{ou} \quad \pi_{D^*} \longrightarrow T_U$$

elle devient alors (dans tous les cas sauf $(0,0)$) ∞-fidèle (i.e. tient compte des $\pi_i(A^\circ_{g,\nu})$[69])

Le seul cas entièrement réfractaire (d'importance il faut bien dire !) est celui du type $(0,0)$ i.e. des surfaces homéomorphes à $\mathbb{S}^2$ le type d'homotopie de

$$A^\circ_0 = A^+_0 \simeq \mathrm{GP}(1,\mathbf{C}) \equiv \mathbb{S}^3/\pm 1 \quad \text{(quaternions)}$$

et en particulier ses π_i n'étant pas tous bien connus.

Il faudrait pour commencer expliciter la Gr-catégorie G, d'invariant $\pi_0 \simeq \{\pm 1\}$ et $\pi_1 \simeq \pi_1(A^\circ_0) \simeq \{\pm 1\}$, déduit de A_0 en tuant les groupes d'homotopie supérieurs $\pi_i (i \geq 2)$ de A_0 ou, si l'on préfère, du groupe des automorphismes conformes de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$ (extension scindée de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par $\mathrm{GP}(1,\mathbf{C})$). La 2-catégorie 2-isotopique des surfaces homómorphes à $\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$ est alors décrite par le 2-groupoïde des 1-torseurs sous la Gr-catégorie précédente[70].

[69] N.B. Il n'y a pas à se donner un k ici, T se décrit intrinsèquement à partir de la structure de topos ou de groupoïde.

[70] On peut supposer que $\mathscr{G}$ n'a que deux objets correspondant à l'identité et à la conjugaison complexe de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbf{C}}$; en fait elle est scindable et même canoniquement scindée…

§ 20. — DIGRESSION : DESCRIPTION 2-ISOTOPIQUE DE LA CATÉGORIE DES SPHÈRES TOPOLOGIQUES

Voici une façon de trouver une description 1-isotopique (et même 2-isotopique, il se trouve) en utilisant un groupe revêtement canonique $\widetilde{A}_0$ de A_0, s'insérant dans la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_2(\mathbf{C}) \longrightarrow \widetilde{A}_0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow 1, \tag{62}$$

qui contient la suite exacte correspondante de sous-groupes

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{C}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{GP}}(1,\mathbf{C}) \longrightarrow 1 \tag{63}$$

où $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2,\mathbf{C})$ est formé des automorphismes semi-linéaires de $\mathbf{C}^2$ (pour un $\mathbf{R}$-automorphisme ρ non précisé, id ou la conjugaison complexe τ), tels que l'automorphisme ρ-linéaire correspondant de $\bigwedge^2 \mathbf{C}^2 \simeq \mathbf{C}$ soit l'identité si $\rho = \mathrm{id}$ et soit $\tau : z \mapsto \overline{z}$ si $\rho = \tau$ i.e. indépendamment des cas, on considère un vectoriel unimodulaire V sur $\mathbf{R}$, d'où $V_\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$, avec une restriction de $\bigwedge^2 V_\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$, d'où une conjugaison complexe sur $\bigwedge^2 V_\mathbf{C}$ et une base de $\bigwedge^2 V_\mathbf{C}$ invariante par celle-ci - et on s'intéresse aux automorphismes ρ-linéaires ($\rho \in \mathrm{Aut}_\mathbf{R}\mathbf{C}$ de $V_\mathbf{C}$ qui sur $\bigwedge^2 V_\mathbf{C}$ soient id ou la conjugaison complexe...)

$\widetilde{\mathrm{GP}}(1,\mathbf{C})$[71] s'identifie au groupe des automorphismes conformes de la sphère de Riemann $P^1_\mathbf{C} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbf{C}^2)$, i.e. des automorphismes de $P^1_\mathbf{C}$ comme $\mathbf{R}$-schéma.

[71] N.B. $\widetilde{\mathrm{GP}}(1,\mathbf{C})$ est aussi le grupe des automorphismes $\mathbf{R}$-linéaires de la $\mathbf{R}$-algèbre $M_2(\mathbf{C})$ (et la classification ∞-isotopique des 2-sphères équivaut donc à celle des algèbres simples de rang 4 sur une extension quadratique non précisée de $\mathbf{C}$...)

On choisit ici $X_0 = P^1_{\mathbf{C}}$, de sorte qu'on a une inclusion canonique

$$\widetilde{\mathrm{GP}}(1,\mathbf{C}) \hookrightarrow A_0$$

qui est (par ce qui précède (59)) une équivalence d'homotopie.

Sauf erreur il en résulte que la classification des extensions du groupe topologique A_0 par un groupe discret disons μ est équivalente (par le foncteur restriction, à la catégorie des extensions correspondantes pour $\mathrm{GP}(1,\mathbf{C})$, ce qui permet de construire $\widetilde{A}_0$, à isomorphisme unique près).

Ceci posé la donnée d'une surface compacte orientée X de genre 0, qui équivaut à celle d'un torseur $[\mathrm{Isom}(\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}, X)]$ sous A_0, définit

1°) le torseur sous $\{\pm 1\}$ qui s'en déduit par $\chi : A_0 \longrightarrow \{\pm 1\}$ (qui est surjectif de noyau A_0°) et

2°) le groupoïde des relèvements de ce A_0-torseur en un $\widetilde{A}_0$-torseur, qui est un groupoïde connexe (= gerbe) lié par le lien abélien $\underbrace{\mu_2(\mathbf{C}) = \{\pm 1\}}_{\mu}$, et sur lequel par suite $\mathrm{Tors}(\mu) \simeq \mathrm{Ens}_2$ opère (c'est un 1-torseur sous la Gr-catégorie $\mathrm{Tors}(\mu)$).

Associant ainsi à tout X le couple (ω, R) du μ-torseur associé ω (i.e. l'ensemble à 2 éléments des deux orientations de X, ou ce qui revient au même, le module des orientations de X), plus le μ-groupoïde R, on trouve un 2-foncteur de la 2-catégorie 2-isotopique des 2-sphères topologiques dans la catégorie des couples (ω, R), et celui-ci est une équivalence de 2-catégorie.

De ce point de vue on a envie de dire qu'elle est 3-fidèle, mais comme la surjectivité essentielle sur les objets est triviale, il vaut mieux l'appeler 2-fidèle, et même (comme pour la décrire on a fait attention de respecter les π_1 (en plus des π_0) des composantes connexes du A_0-torseur $\mathrm{Isom}(X_0, X)$, qui sont des A_0°-torseurs donc à π_1 isomorphe à $\mu = \{\pm 1\}$, il vaut encore mieux l'appeler 1-fidèle).

Mais en fait elle est même 2-fidèle (en le sens correspondant) grâce au fait que

$$\pi_2(A_0^\circ) \xleftarrow{\sim} \pi_2(\mathrm{GP}(1,\mathbf{C})) \xleftarrow{\sim} \pi_2(S^3/\pm 1) \simeq \pi_2 S^3 = 0 \tag{65}$$

Par contre elle n'est pas 3-fidèle, car

$$\pi_i(A_0^\circ) \xleftarrow{\sim} \pi_i(S^3) \qquad \text{pour } i \geq 2 \tag{66}$$

et $\pi_0(S^3) \simeq \mathbf{Z}(\neq 0)$ donc $\pi_3(A_0^\circ) \simeq \mathbf{Z} \neq 0$.

On cherche une description ∞-isotopique, qui tienne compte des groupes d'homotopie de tous ordres (à déterminer !) de A_0° i.e. de S^3 (ou encore $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{C})$, ou de $\mathrm{GP}(1,\mathbf{C})$). Au concours !

Mais déjà pour la modeste description proposée à prétention 1 ou 2-isotopique, faute d'avoir écrit les choses avec soin je ne suis pas trop sûr si la description donnée est bien correcte - je suis un peu inquiet du fait que je n'ai pas imposé de relations entre le μ-torseur w, et le μ-groupoïde R.

Soit plus généralement un groupe topologique G ($\widetilde{A}_0$, ou $\widetilde{\mathrm{GP}}(1,\mathbf{C})$) tel que G° soit simplement connexe :

$$\pi_1(G^\circ) = 0 \tag{67}$$

Soit

$$\mu = \mathrm{Centre}(G^\circ), \quad \Gamma = G/G^\circ \tag{68}$$

On suppose μ discret (donc G° s'identifie au groupe revêtement universel de $G^\circ/\mu = H^\circ$ si $H = G/\mu$).

Alors l'extension de groupes topologiques G de Γ par G° définit

$$\Gamma \longrightarrow \mathrm{Autext}(G^\circ)(\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mu)) \tag{69}$$

et l'ensemble des classes d'extensions correspondants à une opération extérieure donnée de Γ sur G° est de façon naturelle un torseur sous $\mathrm{H}^2(\Gamma,\mu)$ (s'il n'est vide, ce qu'on a exclu par l'hypothèse de départ, en parlant de $G\ldots$)

Cette catégorie d'extension est d'ailleurs équivalente à celle des scindages d'une certaine Gr-catégorie définie par Sinh via (69) dont les π_0 et π_1 sont respectivement Γ est μ - laquelle est donc ici scindée par la donnée de l'extension G. Dans le cas qui nous intéresse, $\Gamma \simeq \mu \simeq \{\pm 1\}$, et cette extension est même scindée, et correspond à une opération d'ordre 2 de Γ sur G°, dont je doute fort que ce soit un automorphisme intérieur.

En fait, j'ai l'impression que dans les deux cas qui nous occupent ($\widetilde{\mathrm{GP}}(1,\mathbf{C})$ et $\widetilde{A}_0$) que (69) est un *isomorphisme* : $\Gamma = \{\pm 1\} \simeq \mathrm{Autext}(G^\circ)$.

Ceci posé, la donné d'un torseur sous $H = G/\mu$ définit[72]

[72]on suppose que Γ opère *trivialement* que μ i.e. $\mu \subset \mathrm{Centre}(G)$

1°) un torseur sous Γ, grâce à $H \longrightarrow \Gamma \simeq H/H^\circ$

2°) le groupoïde des relèvements des relèvements de ce torseur est un torseur sous G, qui est un μ-groupoïde connexe (sur lequel μ opère).

Si on reprend en termes de fibrés sur un espace de base S, on trouve encore sur S (pour tout H_S-torseur topologique) un couple (ω, R) d'un Γ-torseur et d'une μ-gerbe sur S, qui sont décrits, (à isomorphisme et à équivalence près) par $\mathrm{H}^1(S,\Gamma)$ et $\mathrm{H}^2(S,\mu)$ respectivement[73].

On voudrait dégager des conditions sur G et sur S pour que l'application

$$\mathrm{H}^1(S,H) \longrightarrow \mathrm{H}^1(S,\Gamma) \times \mathrm{H}^2(S,\mu) \tag{70}$$

soit bijective.

Injectivité : si l'image d'un $\xi \in \mathrm{H}^1(S,H)$ dans $\mathrm{H}^2(S,\mu)$ est nulle, ξ se relève en un élément $\widetilde{\xi}$ dans $\mathrm{H}^1(S,\widetilde{H}=G)$, dont l'image dans $\mathrm{H}^1(S,\Gamma)$ est la même que celle de ξ. Donc si elle est triviale, on voit que $\widetilde{\xi}$ provient d'un $\widetilde{\xi}_0 \in \mathrm{H}^2(S,G^\circ)$.

Si on sait que $\mathrm{H}^2(S,G^\circ)=\{1\}$, on gagne. Par les marteaux-pilons d'homotopie, ça marche si $\exists n \in \mathbf{N}$ avec :

$$\pi_i(G^\circ)=0 \text{ si } i \leq n \text{ (donc } \pi_i(B_G^\circ)=0 \text{ si } i \leq n+1)$$

(dans le cas qui nous occupe on peut prendre $n=2$) et S un CW-complexe de dimension $\leq n+1$.

Par la surjectivité notons que pour un élément dans $\mathrm{H}^2(S,\mu)$, l'obstraction à ce qu'il se relève en un élément ξ dans $\mathrm{H}^1(S,H)$ est dans $\mathrm{H}^2(S,G)$ [par la suite exacte de cohomologie associée à $1 \longrightarrow \mu_S \longrightarrow G_S \longrightarrow H_S \longrightarrow 1$].

Il faut exprimer qu'une certaine gerbe liée par g_s est neutre - brr ! Mais partons plutôt de l'élément ω de $\mathrm{H}^1(S,\Gamma)$, si l'extension de Γ par H° est scindée, alors on peut trouver un $\xi_0 \in \mathrm{H}^1(S,H_S)$ qui donne naissance à ω.

Elle a une certaine obstruction ρ_0 dans $H^2(S,\mu)$, et il s'agit de corriger ρ_0 en ξ, de telle façon que l'obstruction devienne $\rho \in \mathrm{H}^2(S,\mu)$ donnée.

[73]N.B. ω ne dépend pas du choix de l'extension G de H par ? $\simeq \pi_1(H^\circ)$; par contre R en dépend (et il faudrait voir comment).

Utilisant ρ_0 pour tordre H_S en H'_S, et (via l'opération de $H_S = G_S/\mu_S$ sur G_S, compte tenu que $\mu_S \subset \operatorname{Centre} G_S$) pour tordre aussi G_S et G'_S, d'où

$$1\mu \longrightarrow G'_S \longrightarrow H'_S \longrightarrow 1$$

on trouve que les ξ ayant même image dans $\mathrm{H}^1(s,\Gamma)$ que ξ_0 correspond bijectivemment aux $\xi' \in \mathrm{H}^1(S,H'_S)$.

Pour un tel ξ', soit $S'(\xi') \in \mathrm{H}^2(S,\mu)$ l'obstruction à le relever dans $\mathrm{H}^1(S,G'_S)$ et $S(\xi') = S(\xi)$ l'obstruction à le relever dans $\mathrm{H}^2(S,G_S)$.

Sauf erreur on a

$$\delta'(\xi') = \delta(\xi') - \rho_0$$

i.e. $\delta(\xi') = (\xi) = \delta'(\xi') + \rho_0$ et on veut $\delta(\xi) = \rho$ i.e. $\delta'(\xi') = \rho - \rho_0$ et la question revient encore à la surjectivité de

$$\mathrm{H}^1(S,H'_S) \longrightarrow \mathrm{H}^2(S,\mu)$$

- je ne m'en tire pas. Il faudrait consulter des gens compétents, comme Giraud ou Larry Breen. On sent qu'il faudrait travailler avec un Gr-champ $\mathbf{H}$ de coefficients, d'invariants, $\underline{\pi}_0 = \Gamma$ et $\underline{\pi}_1 = \mu$, (mais pas nécessairement un champ de Picard !) et $\mathrm{H}^1(S,\mathbf{H}) \simeq$ Classes d'applications de S dans $B_{\mathbf{H}}$, qui est un espace connexe avec $\pi_1(B_{\mathbf{H}}) \simeq \Gamma$ et $\pi_2(B_{\mathbf{H}}) = \mu$.

Ici la classe de Postnikov dans $\mathrm{H}^3(\Gamma,\mu)$ est nulle. [mais peut-être n'y a-t-il pas lieu trop sa raccrocher à cette hypothèse, correspondant à l'existence d'une extension G de H par $\pi_1(H^\circ)$ qui redonne l'extension universelle de H° par $\pi_1(H^\circ)$].

On a un homomorphisme $B_H \longrightarrow B_{\mathbf{H}}$ qui induit un isomorphisme sur les π_i pour $i \leq 2$, et pour $i \leq n$ (où $n \geq 2$ est donné) si et seulement si $\pi_i(B_H) = 0$ pour $2 < i \leq n$, i.e. $\pi_i(H) = 0$ pour $2 \leq i \leq n-1$ (dans le cas qui nous intéresse $H = A_0$, on peut prendre $n = 3$).

Ceci implique que pour tout CW-complexe S de dimension $\leq n$, on a

$$\operatorname{Hot}(S,B_H) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hot}(S,B_{\mathbf{H}})$$

(Hot désignant les morphismes dans la catégorie homotopique non ponctuée) i.e.

$$\mathrm{H}^1(S,H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(S,\mathbf{H})$$

Mais si l'invariant de Postnikov-Sinh $k \in \mathrm{H}^3(\Gamma, \mu)$ est nul, (ainsi qu'l'action de Γ sur μ) alors sauf erreur $B_{\mathbf{H}}$ s'identifie à un produit $K(\Gamma, 1) \times K(\pi, 2)$ (cette "idetification" dépendant justement du choix des $\mathrm{H}^2(\pi_1, \pi_2) \simeq \mathrm{H}^2(\Gamma, \mu)$!) et par suite

$$\mathrm{H}^1(S, \mathbf{H}) \simeq \mathrm{H}^1(S, \Gamma) \times \mathrm{H}^2(S, \mu)$$

pour tout espace S donc pour S un CW-complexe de dimension $\leq n$

$$\mathrm{H}^1(S, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(S, \Gamma) \times \mathrm{H}^2(S, \mu) \tag{71}$$

Donc la classification des fibrés en sphères topologiques sur un espace topologique S, pour un CW-complexe S de dimension ≤ 3, marche bel et bien.

Bien entendu, le fait qu'on soit obligé ici à se borner à S de dim ≤ 3 tient au fait que nous n'avons trouvé (via $\mathbf{H}$) qu'une description 2-isotopique (et non ∞-isotopique) de la catégorie des 2-sphères topologiques.

Je voudrais reprendre la classification pour un CW-complexe S quelconque, en utilisant le fait que l'inclusion

$$\widetilde{\mathrm{GP}}(1, \mathbf{C}) \hookrightarrow A_0$$

est une équivalence d'homotopie, et induit donc une bijection

$$\mathrm{H}^1(S, \widetilde{\mathrm{GP}}(1, \mathbf{C})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(S, A_0)$$

et même une ∞-équivalence des ∞-catégories des torseurs sur S de groupe $\widetilde{\mathrm{GP}}$ (correspondant aux fibrés en sphères conformes, en droites projectives sur une R-algèbre non précisée isomorphe à $\mathbf{C}$) et de groupe A_0 - correspondant aux fibrés en sphères sur S.

Le premier invariant d'un fibré de groupe $\widetilde{\mathrm{GP}}$ est un torseur η sous $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_S$, défini (à isomorphisme *non unique près*) par un $\chi \in \mathrm{H}^1(S, \mathbf{Z}/2Z)$ i.e. un revêtement de degré 2. La donnée de η revient à la donnée d'une système T d'entiers tordus sur S.

Ce torseur servira à tordre $\mathbf{C}$ (via l'opération fidèle de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur la $\mathbf{R}$-extension $\mathbf{C}$), d'où un fibré localement constant en extension quadratiques de $\mathbf{R}$, soit C, et on [?] S par le faisceau $\underline{C}_S$ (ou $\underline{C}$) des sections continues de C (ce qui est une façon de tordre $\mathrm{GP}(1, \mathbf{C})_S$ ou $\mathrm{GP}(1, C)_S = \mathrm{GP}(1, \underline{C})$) et il s'agit de décrire de façon compréhensible - en passant au besoin aux n-isotopiques, pour $n = \dots$ - la catégorie (dépendant du choix de χ via $\underline{C}$) des algèbres d'Azumaya de rang 4 sur $\underline{C}$, ou encore des fibrés en droites projectives sur $\underline{C}$, ou des torseurs sous $\mathrm{GP}(1, \underline{C})$.

Or utilisant la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_{2S} \longrightarrow \mathrm{Sl}(2, \underline{C}_S) \longrightarrow \mathrm{GP}(1, \underline{C}_S) \longrightarrow 1$$

on associe à un objet de la catégorie - disons un torseur sous $\mathrm{GP}(1, \underline{C}_S)$ - la catégorie fibrée (sur des ouverts variables de S) de ces relèvements à $\mathrm{Sl}(2, \underline{C}_S)$, qui est une *gerbe* G liée par μ_2. C'est cette gerbe qui est le deuxième invariant complet - plus fin que sa classe d'équivalence qui s'identifie à un $\xi \in \mathrm{H}^2(S, \mu_2) = \mathrm{H}^2(S, \{\pm 1\})$ (jouant le rôle d'un groupe de Brauer).

Un isomorphisme de fibrés, d'invariants $(T, G) \simeq (T', G')$, définira un isomorphisme $T \simeq T'$ (d'où un isomorphisme $\underline{C}_T \simeq \underline{C}_{T'}$ d'où un isomorphisme $\mathrm{GP}(1, \underline{C}_T) \simeq \mathrm{GP}(1, \underline{C}_{T'})$) et une équivalence de gerbes.

Il faudrait expliciter que pour deux isomorphismes f et g des torseurs, d'où

$$f_T, g_T : T \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightrightarrows}} T' \qquad\qquad f_G, g_G : G \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightrightarrows}} G'$$

et pour toute homotopie h_t $(0 \leq t \leq 1)$ de f à g on trouve $f_T = g_T$ et un isomorphisme $h_* : f_G \xrightarrow{\sim} g_G$ d'équivalence des gerbes, qui ne dépend que de la classe d'homotopie de cette homotopie.

On trouve ainsi un 2-foncteur de la 2-catégorie des torseurs sur S de groupe $\widetilde{\mathrm{GP}}(1, \mathbf{C})$ vers la 2-catégorie formée des couples (T, G) d'un système d'entiers tordus ($\Leftrightarrow$ d'un torseur sur S de groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$) et d'une $\mu_2(\mathbf{C})$-gerbe G sur S.

Ce 2-foncteur, sauf erreur, est 2-fidèle sous les conditions explicitées plus haut ($\dim S \leq 4$) et est 3-fidèle (i.e. l'application injective

$$\mathrm{H}^1(S, \widetilde{\mathrm{GP}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(S, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathrm{H}^2(S, \mu_2)$$

est surjective) si on a même $\dim S \leq 3$.

On s'attend qu'elle soi 1-fidèle dès que $\dim S \leq 5$, 0-fidèle dès que $\dim S \leq 6$ (??...).

N.B. : l'assertion "0-fidèle" signifie que si ci-dessus on a deux homotopies h, h', de f à g, telles que $h_* = h'_*$ alors h et h' sont homotopes.

La condition "1-fidèle" signifie 0-fidèle et que tout isomorphisme de f_G à g_G est de la forme h_* (avec h bien déterminé à homotopie près, par la condition précédente de 0-fidélité).

La condition 2-fidèle signifies de plus que pour toute $\varphi : T \xrightarrow{\sim} T'$, $\psi : G \xrightarrow{\approx} G'$, il existe un isomorphisme de fibrés f tel que $\varphi = f_T$, et un isomorphisme $\psi \xrightarrow{\sim} f_G$.

Enfin 3-fidèle signifie que de plus, pour tout couple T, G, $\exists T', G'$ provenant d'un fibré, un isomorphisme $T \xrightarrow{\sim} T'$ et une équivalence $G \xrightarrow{\sim} G'$.

Ces notions catégoriques doivent interpréter simplement que, si on regarde $H = \widetilde{\mathrm{GP}}(1, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{H}$ - ou $\mathbf{H}$ est déduite de H en "tuant les groupes d'homotopie π_i pour $i \geq 2$", de sorte que α induit un isomorphisme des π_i pour $i \leq 1$ (et même pour $i \leq n$ si $\pi_i(H) = 0$ pour $1 < i \leq n$) d'où $B_\alpha : B_H \longrightarrow B_{\mathbf{H}}$[74] (induisant un isomorphisme des π_i pour $i \leq n+1$), alors prenant pour un espace donné S, l'application correspondante des espaces d'applications continues

$$\underline{\mathrm{Cont}}(S, B_H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Cont}}(S, B_{\mathbf{H}})$$

celle-ci induit un isomorphisme pour les π_i $(0 \leq i \leq 2)$.

Il semblerait que 0-fidèle est une condition d'injectivité pour les π_2, 1-fidèle la bijectivité pou les π_2, l'injectivité pour les π_1, 2-fidèle la bijectivité π_2 et π_3 et l'injectivié pour π_0, 3-fidèle la bijectivité pour π_0, π_1, π_2.

Comme $\pi_i(\mathrm{Cont}(S, B)) \simeq \pi_0(S \times S^i, B)$, il semblerait qu'on est conduit, pour la 0-fidèlité, de faire l'hypothèse draconienne que $S \times S^2$ de dim ≤ 4 pour la 1-fidèlite que $S \times S^2$ de dim ≤ 3 i.e. dim $S \leq 1$?, (qui impliquerait alors la 3-fidélité…)

Prenons l'analogue arithmétique d'une description (plus ou moins "fidèle") de nature "profinie" des droites projectives (éventuellement tordues) définies sur un corps de type fini K sur $\mathbf{Q}$ (plus généralement sur un schéma S quelconque), celle-ci forment à priori une catégorie sans plus - un groupoïde (pas nécessairement connexe) - je ne sais pas en faire une 2-catégorie raisonnablement, pour deux isomorphismes f, g $(= f \circ u)$ de tels torseurs, définir les homotopismes de f à g, i.e. pour une "forme" G de $\mathrm{GP}(1)_S$ et une section u de G, définir les "homotopies" de u à l'identité, ou plutôt une notion qui remplace la notion de classe d'homotopie

[74] N.B. $B_{\mathbf{H}}$ est déduite de B_H en tuant les π_i pour $i \geq 3$

de telles homotopies. Et serait sans doute un relèvement de u en une section du revêtement simplement connexe $\widetilde{G}$ de G !

Je tiens là quelque chose d'assez amusant, mais que je ne vais pas poursuivre - de toute façon il est clair que la "description" des droites projectives (sur un corps de type fini disons) à laquelle on aboutit, n'a rien de fidèle - par même 0-fidèle !

Ainsi tous les automorphismes de $\mathbb{P}^1_K$ provenant de $\mathrm{Sl}(2,K)$ seraient identifiés à l'identité - c'est un peu brutal ! Mais je me rends compte que le travail conceptuel autour du thème "Brauer" n'est pas terminé - qu'il y a à comprendre des choses pour l'étude de la catégorie (qui devrait être une **2**-catégorie !) des Algèbres d'Azumaya de degré *fixé* (ici 4)…

§ 21. — LIEN AVEC LES ESPACES DE TEICHMÜLLER

D'abord un complément lié au diagramme d'inclusion (31) du n°19. Considérons l'inclusion de sous-groupes de A_g :

$$A^{\circ}_{g,\nu} \supset B_{g,\nu} \supset A^{\circ}_{g,\nu+1} (= B^{\circ}_{g,\nu}) \tag{72}$$

donne en divisant par $A^{\circ}_{g,\nu+1}$ et dans le cas anabélien la filtration

$$(A^{\circ}_{g,\nu}/A^{\circ}_{g,\nu+1} =)\widetilde{U}_{g,\nu} \longrightarrow U_{g,\nu} \tag{73}$$

On cherche le plus grand sous-groupe de A_g qui normalise les triples (72), et qui opère donc sur la fibration ci-dessus. Comme les normalisateurs de $A^{\circ}_{g,\nu}$ et $A^{\circ}_{g,\nu+1}$ sont respectivement $A_{g,\nu}$ et $A_{g,\nu+1}$, le groupe en question doit être contenu dans leur intersection $A^{\bullet}_{g,\nu}$, lequel normalise également $\mathrm{B}_{g,\nu} = A^{\bullet}_{g,\nu} \cap A^{\circ}_{g,\nu}$. C'est donc ce groupe qu'il y a lieu de faire opérer sur la fibration (73). Le sous-groupe formé des éléments de $A^{\bullet}_{g,\nu}$ dont l'opération sur $U_{g,\nu}$ est isotope à l'identité étant justement $\mathrm{B}_{g,\nu}$, donc c'est le groupe $\Gamma = A^{\bullet}_{g,\nu}/\mathrm{B}_{g,\nu} \simeq \Gamma_{g,\nu}$ qui comme de juste opère à isotopie près. On voudrait décrire le groupe de tous les automorphismes de la fibration topologique $\widetilde{U}_{g,\nu}$ sur $U_{g,\nu}$ qui sera a priori une extension du groupe $A^{\circ}_{g,\nu} = \mathrm{Aut}(U_{g,\nu})$ par

$$\pi_{g,\nu} = \pi_1(U_{g,\nu}, a_{g,\nu}) = \mathrm{Aut}_{U_{g,\nu}}(\widetilde{U}_{g,\nu})$$

Cette extension est scindé sur $A^{\bullet}_{g,\nu}$ stabilisateur du point de base $a_{g,\nu}$, et on retrouve ainsi l'opération de $A^{\bullet}_{g,\nu}$ sur la fibration (73). Or on a déjà une extension $\Gamma'_{g,\nu+1}$ de

$\Gamma_{g,\nu}$ par $\pi_{g,\nu}$ d'où par image inverse par $A_{g,\nu} \longrightarrow \Gamma_{g,\nu}$ une extension (que je vais notes $\widetilde{A}_{g,\nu}$) de $A_{g,\nu}$ par $\pi_{g,\nu}$:

$$\widetilde{A}_{g,\nu} = A_{g,\nu} \times_{\Gamma_{g,\nu}} \Gamma^{i}_{g,\nu+1} = \begin{cases} \text{groupe quotient du sous-groupe } A^{\natural}_{g,\nu} \text{ de} \\ A_{g,\nu} \times A^{\bullet}_{g,\nu} \text{ formé des couples} \\ (u,v) \text{ tel que } u \equiv v \text{ mod. } A^{\circ}_{g,\nu}, \\ \text{par le sous-groupe } 1 \times A^{\circ}_{g,\nu+1} \end{cases}$$

donc on a deux (et même trois) structures d'extension sur $\widetilde{A}_{g,\nu}$

$$1 \longrightarrow \pi_{g,\nu} \longrightarrow \widetilde{A}_{g,\nu} \xrightarrow{p} A_{g,\nu} \longrightarrow 1$$

(75) $$1 \longrightarrow A^{\circ}_{g,\nu} \longrightarrow \widetilde{A}_{g,\nu} \longrightarrow \Gamma'_{g,\nu+1} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow A^{\circ}_{g,\nu} \times \pi_{g,\nu} \longrightarrow \widetilde{A}_{g,\nu} \longrightarrow \Gamma_{g,\nu} \longrightarrow 1$$

Je voudrais faire opérer $\widetilde{A}_{g,\nu}$ sur $\widetilde{U}_{g,\nu}$, i.e. faire opérer $H = \widetilde{A}^{\natural}_{g,\nu}$ avec opération triviale de $A^{\circ}_{g,\nu+1}$, et ceci en respectant les conditions suivantes :

a) (Compatibilité avec $\pi_{g,\nu} \longrightarrow \widetilde{A}_{g,\nu}$). Le couple $(u,v) \in H$ opère sur $\widetilde{U}_{g,\nu}$ par un automorphisme compatible avec l'automorphisme u de $U_{g,\nu}$ (on dira que c'est un u-automorphisme).

b) (Compatibilité avec $\pi_{g,\nu} \longrightarrow \widetilde{A}_{g,\nu}$). Si $u = 1$, [donc $v \in A^{\circ}_{g,\nu}$ donc (comme $v \in A^{\bullet}_{g,\nu}$) $u \in \mathrm{B}_{g,\nu}$] alors l'opération de $(u,v) = (1,v)$ sur $\widetilde{U}_{g,\nu}$ n'est autre que celle définie par v $\mathrm{mod}\mathrm{B}^{\circ}_{g,\nu} = A^{\circ}_{g,\nu+1}$ qui est un élément de $\pi_{g,\nu} \simeq \mathrm{Aut}\, \widetilde{U}_{g,\nu}/U_{g,\nu}$ ou encore celle définie par translation à droite par v^{-1}.

c) Compatibilité avec l'opération déjà obtenue plus haut de $A^{\bullet}_{g,\nu}$ sur $\widetilde{U}_{g,\nu}$: si $(u,v) \in H$ est tel que $u = v$ (donc $u = v \in A^{\bullet}_{g,\nu}$) alors $(u,v) = (u,u)$ opère via l'automorphisme intérieur défini par u.

d) Compatibilité avec $A^{\circ}_{g,\nu} \longrightarrow \widetilde{A}_{g,\nu}$; l'opération de $A^{\circ}_{g,\nu}$ est continue (ce qui, joint à a) détermine une opération de façon unique et l'existence à priori d'une telle opération résulte de $\pi_1(A^\circ_{g,\nu}) = 0$. Or tout élément (u,v) de H s'écrit de manière unique comme produit d'un élément (v,v) dans $\delta(A^\bullet_{g,\nu})$, par un élément $(v^{-1}u,1)$ de $A^\circ_{g,\nu}\times 1$ (le 1$^{\text{er}}$ groupe normalisant le 2$^{\text{ème}}$)[75] et une opération de ce produit semi-direct est donnée bel et bien par la donnée d'opérations des deux groupes facteurs, satisfaisant une condition de compatibilité, qui est vérifiée ici par transport de structure. On a bien défini une opération de $H = \widetilde{A}^\natural_{g,\nu}$ sur la fibration (73) satisfaisant aux contions c) et d) par construction même ; il reste à vérifier a) et b). Or pour a), il suffit de vérifier séparément pour des éléments de H dans $\delta(A^\bullet_{g,\nu})$ et de $A^\circ_{g,\nu}\times 1$, où c'est trivial par construction dans les deux cas. Reste à vérifier b) et à expliciter l'opération d'un élément $(1,v)$, $v\in \mathrm{B}_{g,\nu}$ qu'on écrit comme $(1,v) = (v,v)(v^{-1},1)$ d'où $\rho(1,v) = \rho(v,v)\rho(v^{-1},1)$ or $\rho(v,v)$ est induit par $\mathrm{int}(v)$ et $\rho(v^{-1},1)$ par translation à guache $x \longrightarrow v^{-1}x$ donc le composé opère par $x\mapsto xv^{-1}$.

On suppose maintenant que X_g est muni d'une structure C^∞ et l'on remplace dans les considérations précédentes les groupes d'homéomorphismes par des groupes de difféomorphismes.

$$\text{Soit } E_g = \begin{matrix}\text{Ensemble des structures conformes sur } X_g\\ \text{compatibles avec sa structure } C^\infty\end{matrix} \tag{76}$$

On voit de suite que E_g est un espace topologique ∞-connexe, comme quotient de l'espace ∞-connexe (et même convexe) des structures riemaniennes par le groupe ∞-connexe des applications C^∞ de X_g dans $\mathbf{R}^{+*}$. Sur E_g le groupe A_g opère mais bien sûr E_g n'est plus un espace homogène. Notons tout de suite

$$E_g/A_g \simeq \begin{matrix}\text{Ensemble des classes d'isomorphie de surfaces}\\ \text{conformes compactes orientables de genre } g.\end{matrix} \tag{77}$$

Si on choisit une des deux orientations de X_g de sorte que E_g s'identifie à l'ensemble des structures complexes sur X_g (compatible avec sa structure C^∞

[75]N.B. L'opération de $A^\circ_{g,\nu}\times 1$ se décrit le plus simplement par *translation* de $A^\circ_{g,\nu}$ sur l'espace homogène $\widetilde{U}_{g,\nu}$ de $A^\circ_{g,\nu}$

et son orientation) alors E_g/A_g s'identifie à l'espace des classes d'isomorphie de courbes complexes (non singulières) connexes compactes de genre g, *modulo* passage à la complexe conjuguée. D'autre part

(78) $$E_g/A_g^+ \simeq \begin{array}{l}\text{Ensemble des classes d'isomorphie de courbes}\\ \mathbf{C}\text{ algébriques lisses connexes de genre } g.\end{array}$$

plus généralement

(79)

$$E_g/A_g^\bullet \simeq \begin{array}{l}\text{Ensemble des classes d'isomorphie de surfaces compactes conformes}\\ \text{connexes multiponctuées de type } (g,\nu).\end{array}$$

Si X_g est orientée :

(80) $$E_g/A_g \simeq \begin{array}{l}\text{Ensemble des classes d'isomorphie de courbes algébriques}\\ [\text{lisses projectives connexes de genre } g]\\ \text{munies d'une multiponctuation de type } (g,\nu)\end{array}$$

Ce sont là les "espaces modulaires grossiers" ("Coarse moduli" de Mumford) qu'on peut noter $M_g^\natural$ et $M_{g,\nu}^\natural$ et qui sont justement trop grossiers pour les usages géométriques les plus importants.

Beaucoup plus intéressant est le quotient

(81) $$E_g/A_{g,\nu}^\circ = \widetilde{M}_{g,\nu} \quad (\widetilde{M}_g = \widetilde{M}_{g,0} = E_g/A_g^\circ)$$

sur lequel opère le groupe

$$\Gamma_{g,\nu} = A_{g,\nu}/A_{g,\nu}^\circ$$

par passage au quotient de l'opération de $A_{g,\nu}$.

L'espace $\widetilde{M}_{g,\nu}$ (avec l'opération de $\Gamma_{g,\nu}$ est appelé *l'espace de Teichmüller* de type g,ν). Bien sûr on retrouve $M_{g,\nu}^\natural$ à partir de $\widetilde{M}_{g,\nu}$ et de l'opération de $\Gamma_{g,\nu}$ dessus par

$$M_{g,\nu}^\natural = \widetilde{M}_{g,\nu}/\Gamma_{g,\nu}$$

Théorème (Teichmüller). — *L'espace de Teichmüller* $\widetilde{M}_{g,\nu}$ *est homéomorphe à* $\mathbf{C}^\mu$ *où* $\mu = 3g-3+\nu$ *dans le cas anabélien* $2g+\nu \geq 3$ *et* $\mu = 3g-3+\nu+\delta$ *avec* $\delta = \dim_{\mathbf{C}} G$ *dans le cas général* G *étant le groupe des automorphismes algébriques d'une* $U_{g,\nu}$ *complexe (donc* $\delta = 1$ *dans le cas "limites"* $(1,0)$ *et* $(0,2)$, *et plus généralement* δ *augmente de 1 chaque fois pour* g *fixé et* $(g,\nu-1)$ *abélien quand on passe de* ν *à* $\nu-1$*), donc*

> $\mu = 1$ *dans le cas* $(1,0)$
>
> $\mu = 0$ *dans le cas* $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, *i.e.* $\widetilde{M}_{g,\nu}$ *est réduit à 1 point i.e. l'action de* $A^\circ_{g,\nu}$ *sur* $E_g = E_0$ *est transitive et ce sont avec le cas anabélien* $(0,3)$ *les seuls 4 cas où il en est ainsi.*

A partis de $\widetilde{M}_{0,3}$ ou de $\widetilde{M}_{1,1}$ ou de $\widetilde{M}_{g,0} = \widetilde{M}_g$ avec $g \geq 1$ quand ν augmente la "dimension complexe" des $\widetilde{M}_{g,\nu}$ augmente d'autant (par contre $\widetilde{M}_{1,1} \xrightarrow{\sim} \widetilde{M}_{1,0}$ est un homéomorphisme). On peut préciser le théorème de Teichmüller ainsi :

Corollaire. — *Dans le cas* anabélien, $A^\circ_{g,\nu}$ *opère librement sur* E_g, *de sorte que* E_g *devient un torseur sur* $\widetilde{M}_{g,\nu}$, *de groupe structural* $A^\circ_{g,\nu}$.

On en déduit que $\widetilde{M}_{g,\nu}$ joue le rôle *d'espace classifiant* pour $A^\circ_{g,\nu}$ et que

(83) $$\pi_i(\widetilde{M}_{g,\nu}) \xrightarrow{\sim} \pi_{i-1}(A^\circ_{g,\nu})$$

et le fait que $\widetilde{M}_{g,\nu}$ soit ∞-connexe (contenu dans le théorème de Teichmüller) équivaut à celui que $A^\circ_{g,\nu}$ le soit ce qui est un "théorème bien connu" rappelé au n° 19.

Je n'insiste pas ici sur l'interprétation de points de $\widetilde{M}_{g,\nu}$ comme des classes d'isomorphisme de courbes complexes, munies d'une "rigidification de Teichmüller" convenable et le point de vue espaces modulaires rigidifiés, qui permet de vérifier à priori que $\widetilde{M}_{g,\nu}$ est muni d'une structure de variété complexe non singulière ; mais déjà le fait que $\widetilde{M}_{g,\nu}$ soit *simplement connexe* (ce qu'on peut exprimer en interprétant $\widetilde{M}_{g,\nu}$ comme revêtement universel d'un *topos modulaire* $U_{g,\nu}$) est un résultat profond qui ne semble pas pouvoir rentrer dans le cadre de la topologie (ou de la topologie différentielle (C^∞)) sans plus…

N.B. Pour prouver que les $\widetilde{M}_{g,\nu}$ sont ∞-connexe on est réduit facilement au cas de $M_{g,0}$ (si $g \geq 2$) ou de $M_{1,1}$ (cas elliptique ponctué) en utilisant $A^{\circ}_{g,\nu}/A^{\circ}_{g,\nu+1} \simeq \widetilde{U}_{g,\nu}$ (qui est ∞-connexe) le cas $g=1$ est d'ailleurs facile et bien compris...

Notons que les inclusions des sous-groupes $A^{\circ}_{g,\nu+1} \hookrightarrow A^{\circ}_{g,\nu} \cdots \subset A^{\circ}_{g,0} = A^{\circ}_{g}$, définissent une tour d'applications continues :

(84) $$\ldots \longrightarrow \widetilde{M}_{g,\nu+1} \longrightarrow \widetilde{M}_{g,\nu} \longrightarrow \ldots \widetilde{M}_{g,\nu} = \widetilde{M}_g$$

(85)
où $\widetilde{M}_{g,\nu+1} \longrightarrow \widetilde{M}_{g,\nu}$ est pour (g,ν) anabélien une fibration en fibre $A^{\circ}_{g,\nu} \simeq \widetilde{U}_{g,\nu}$

[il est donc à fibre contractile et l'∞-connexité de $\widetilde{M}_{g,\nu}$ équivaut à celle de $\widetilde{M}_{g,\nu}$; ce qui nous ramène au cas $\widetilde{M}_g$ si $g \geq 2$ de $M_{1,1}$ et de $M_{0,3}$ si $g=1$ ou 0].

Dans le cas (g,ν) abélien on trouve

$$\widetilde{M}_{g,\nu+1} \xrightarrow{\sim} \widetilde{M}_{g,\nu}$$

ce qui signifie que dans ce cas si on a deux structures complexes α, β sur X qui sont congrues par $u \in A^{\circ}_{g,\nu}$ (i.e. $\beta = u\alpha$) elles sont mêmes congrues par $A^{\circ}_{g,\nu+1}$. En effet si G est la composante neutre du groupe des automorphismes complexes de $U_{g,\nu}$ pour β on peut écrire $u = gv$ avec $g \in G$, $v \in A^{\circ}_{g,\nu+1}$ donc $\beta = gu\alpha$ donc (comme $g^{-1}\beta = \beta$) $\beta = u\alpha$ c.q.f.d.

Donc $\widetilde{M}_{1,1} \simeq \widetilde{M}_{1,0}$ et il est immédiat que celui-ci est isomorphe au demi plan de Poincaré. De même $\widetilde{M}_{3,0} \simeq \widetilde{M}_{1,0} \simeq \widetilde{M}_{0,0}$ et comme A°_0 est simplement formé des automorphismes de $X_0 = S^2$ qui conservent l'orientation, on voit que deux structures complexes sur $\mathbb{S}^2$ sont isotopes (puisqu'elles sont isomorphes et qu'un isomorphisme conserve l'orientation). Cela prouve que les $\widetilde{M}_{0,i}$ $(i \leq 3)$, sont réduits à des points ! Ainsi le théorème de Teichmüller est assez évident si $g=0$ ou 1, c'est le cas $g \geq 2$ qui est profond...

L'espace de Teichmüller (plus généralement tout espace E ∞-connexe sur lequel A_g opère de façon que $A^{\circ}_{g,\nu}$ opère librement) va permettre d'interpréter l'extension canonique $\Gamma'_{g,\nu+1}$ de $\Gamma_{g,\nu}$ par $\pi_{g,\nu}$ (cas (g,ν) anabélien) comme groupe fondamental mixte d'un espace (homotope à $U_{g,\nu}$) sur lequel $\Gamma_{g,\nu}$ opère.

(On était ennuyé précédemment, car $\Gamma_{g,\nu}$ n'opérait pas lui même sur $U_{g,\nu}$ mais seulement le groupe $A_{g,\nu}$ dont $\Gamma_{g,\nu}$ est quotient, on avait l'impression que le passage au quotient par $A^\circ_{g,\nu}$ était pourtant inessentiel, car $A^\circ_{g,\nu}$, car $A^\circ_{g,\nu}$ est ∞-connexe et d'ailleurs on avait trouvé une extension $\widetilde{A}_{g,\nu}$ de $\Gamma'_{g,\nu+1}$ par ce même groupe ∞-connexe $A^\circ_{g,\nu}$ qui opère sur le revêtement universel, et un homomorphisme surjectif $\widetilde{A}_{g,\nu} \longrightarrow A_{g,\nu}$ de noyau $\pi_{g,\nu}$ compatible avec cette opération).

Or si $\widetilde{M} = E/A^\circ_{g,\nu}$, E est un $A^\circ_{g,\nu}$ - torseur de base $\widetilde{M}$, qu'on peut utiliser pour tordre $U_{g,\nu}$ sur lequel $A^\circ_{g,\nu}$ opère continuement, on trouve donc un fibré H ($\simeq U_{g,\nu} \times E/A^\bullet_{g,\nu}$ opérant diagonalement) sur $\widetilde{M}$, de fibre $U_{g,\nu}$ (c'est pour $E = E_g$ le fibré universel en courbes complexes de type (g,ν) avec rigidification de Teichmüller...). Comme E et $A^\circ_{g,\nu}$ sont ∞-connexes, $\widetilde{M}$ aussi, donc l'inclusion d'une fibre dans le fibré est un homotopisme. Or maintenant $\Gamma_{g,\nu}$ opère sur X (de façon compatible avec son opération sur $\widetilde{M}$), d'où la construction d'une extension de $\Gamma_{g,\nu}$ par $\pi_1(H) = \pi_1(U_{g,\nu}) = \pi_{g,\nu}$.

On a fait tout ce qu'il fallait pour prouver que c'est bien essentiellement $\Gamma'_{g,\nu}$...

§ 23. — RETOUR SUR LES SURFACES À GROUPES D'OPÉRATORS

Notre point de vue sera non celui des groupes extérieurs à lacets mais celui des topos multigaloisiens et morphismes entre ceux-ci, plus souple, on l'a vu. Avant de faire intervenir des opérations de groupes, introduisons la catégorie des surfaces U orientables (NB pas orientées !) *admissibles* (i.e. de la forme $X \backslash S$ où X est compacte, S fini et toute composante connexe de X de genre zéro rencontre S) comme dans Ladegaillerie (en prenant comme 2-morphismes entre homéomorphismes $f, g : U \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightrightarrows}} U'$ les classes d'homotopie de chemins de f à g dans l'espace $\mathrm{Isom}(U, U')$) (qui, avec les hypothèses faites a comme composantes connexes des torseurs sous de produits de groupes $A^{\circ}_{g,\nu}$ (avec $(g, \nu) = (0, 0)$)) donc ce sont des $K(\pi, 1)$.

On trouve un 2-foncteur de la 2-catégorie précédente dans celle des morphismes de topos multigaloisiens (ou, si on préfère, dans celle des morphismes de groupoïdes) notés

$$\mathrm{B}_{D^*} \xrightarrow{\rho} \mathrm{B}_U,$$

où pour deux objets de la 2-catégorie $\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$ et $\mathrm{B}_{D'^*} \longrightarrow \mathrm{B}_{U'}$, la catégorie des morphismes de l'une dans l'autre est formée des diagrammes essentiellement commutatifs de morphismes de topos (ou de morphismes de groupoïde).

$$\begin{tikzcd} B_{D'^*} \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "f^{D^*}"'] & B_{U'} \arrow[d, "f_U"] \\ B_{D^*} \arrow[r, "\rho"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\alpha}{\underset{\sim}{\nearrow}}"] & B_U \end{tikzcd}$$

où f^{D^*} et f_U sont des morphismes et $\alpha : \rho \circ f_{D^*} \xrightarrow{\sim} f_U \circ \rho'$ une donnée de commutativité. Les morphismes entre un h et un g étant définis ad hoc…

Il peut être utile de considérer les objets de la 2-catégorie comme des topos cofibrés (ou des groupoïdes cofibrés) sur la catégorie "flèche" $D^* \longrightarrow U$ ayant deux objets D^* et U et une seule flèche non identique $D^* \longrightarrow U$. En termes d'un foncteur entre groupoïdes, $\Pi_{D^*} \longrightarrow \Pi_U$ la catégorie cofibrée ("en groupoïdes") associée Π est définie par : $\mathrm{Ob}\,\Pi = \mathrm{Ob}\,\Pi_{D^*} \amalg \mathrm{Ob}\,\Pi_U$.

Les flèches entre deux objets de Π_{D^*}, ou deux objets de Π_U, étant celles de Π_{D^*}, resp. de Π_U et les flèches de $\widetilde{D}^* \in \mathrm{Ob}\,\Pi_{D^*}$ dans $\widetilde{U} \in \mathrm{Ob}\,\Pi_U$ étant les isomorphismes $\rho_!(\widetilde{D}) \simeq \widetilde{U}$ dans Π_U.

On a un foncteur canonique $\Pi \longrightarrow \Delta_1$ qui est "cofibrant" et pour lequel toute flèche de Π est cocartésienne. [Quand on préfère travailler avec les topos et qu'on rapère les morphismes ρ de topos par les foncteurs images inverses ρ^* (N.B. on a une suite de trois foncteurs adjoints $\rho_! \rho^* \rho_*$) alors $B_U \xrightarrow{\rho^*} B_{D^*}$ est décrit par une catégorie *fibrée* en topos sur Δ i.e. une catégorie fibrée B telle que les catégories fibres soient des topos, et le foncteur de changement de base soit exact à guache et commute aux limites inductives quelconques.]

Soit $\mathscr{S}$ la 2-catégorie des surfaces admissibles, $\mathscr{M}$ celle des morphismes de topos multigaloisiens (sans condition). On a un 2-foncteur de 2-catégories

$$\mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{M}$$

et on sait décrire l'image 2-essentielle par la condition "structure à lacets"[76] qui définit une sous 2-catégorie pleine de $\mathscr{M}$ soit $\mathscr{M}_{\mathrm{lac}}$. Par ailleurs on sait que le

[76]N.B. On exclut par exemple $B_{D^*} \simeq$ "topos vide" $B_U \simeq$ "topos ponctuel" i.e. $\pi_{D^*} = \varnothing$ et $\pi_U \simeq$ catégorie ponctuelle.

foncteur est 2-fidèle, donc induit une 2-équivalence de 2-catégories[77]

$$\mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{M}_{\mathrm{lac}}$$

Si maintenant Γ est un groupe et si on considère des surfaces admissibles avec action de Γ, elles définissent des topos (ou groupoïdes) B_{D^*}, B_U avec opération de Γ dessus [ou des topos cofibrés sur le groupoïde $[\Gamma]$ défini par Γ] et des morphismes entre ceux-ci commutant à Γ. On peut considérer une telle donnée comme celle d'un topos multigaloisien (ou groupoïde) cofibré sur $\Delta \times [\Gamma]$. Mais la donnée d'un tel morphisme de topos multigaloisiens avec opération de Γ, équivaut à celle de morphismes de topos multigaloisiens :

$$\mathrm{B}_{D^*,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_{U,\Gamma} \longrightarrow \mathrm{B}_\Gamma$$

ceci semble un point de vue conceptuellement commode, notamment quand on fait varier Γ.

On peut remplacer Γ par un groupoïde Π (jouant le rôle d'un groupoïde fondamental) et se proposer de décrire la 2-catégorie $\mathscr{R}\mathscr{S}$ des foncteurs de Π dans la catégorie des surfaces admissibles, [ou encore la 2-catégorie des "surfaces fibrées admissibles" sur le topos multigaloisiens $\widehat{\Pi}^\circ$ correspondant à Π]. On la décrit par la 2-catégorie $\mathscr{R}\mathfrak{M}$ des diagrammes de topos multigaloisiens (ou de groupoïdes)

$$\mathrm{B}_{D^*,\Pi} \longrightarrow \mathrm{B}_{U,\Pi} \longrightarrow \mathrm{B}_\Pi \tag{1}$$

donc finalement on a un 2-foncteur entre deux 2-catégories : celle des représentations de groupoïdes dans la catégorie des surfaces admissibles et celle des diagrammes de topos multigaloisiens (ou de groupoïdes) (1).

Prenant pour toute composante connexe B_{Π_i} de B_Π un revêtement universel $\widetilde{B}_{\Pi_i}$, et prenant les produits fibrés, on récupère comme de juste un diagramme

$$\mathrm{B}_{D_i^*} \xrightarrow{\rho_i} \mathrm{B}_{U_i} \longrightarrow \widetilde{B}_\Pi \simeq \text{ topos ponctuel} \tag{2}$$

[77] Il n'y a pas à se donner une structure supplémentaire dans le cas $\mathrm{B}_{D^*} \simeq$ "topos vide" sur B_U - à savoir un isomorphisme $T \simeq \mathrm{H}^2(M, \mathbf{Z})$ pour toute composante connexe - car on ne suppose pas que l'on travailler avec des structures orientées ! (Dans l'analogue arithmétique il n'en sera plus de même bien sûr…)

et une action de $\pi_i = \mathrm{Aut}_{\mathrm{B}_{\Pi_i}} \widetilde{B}_{\Pi_i}$ dessus ; et la famille de ceux-ci pour i variable permet de récupérer la situation complète…

On dira que le diagramme (1) est "admissible", si les ρ_i dans (2) sont admissibles ; d'où une 2-catégorie $\mathscr{R}\mathscr{M}_{\mathrm{lac}}$, et un 2-foncteur

$$\mathscr{R}\mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{R}\mathscr{M}_{\mathrm{lac}}$$

On regarde la sous 2-catégorie pleine obtenue en se limitant aux Π dont les groupes fondamentaux sont finis, d'où un 2-foncteur induit

$$\mathscr{R}_f\mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{R}_f\mathscr{M}_{\mathrm{lac}}$$

et on se propose d'étudier ses propriétés de fidélité.

Je conjecture que c'est une équivalence de 2-catégorie i.e. qu'il est 3-fidèle.

Bien entendu on est ramené quand même au cas de groupoïdes connexes Π_f définis par un groupe (fini s'il le faut) et on est aussi ramené par des arguments essentiellement triviaux à regarder le cas de diagrammes $\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$ avec B_U connexe.

Du côté géométrique la situation serait donnée par un $U = X\backslash S$ de type (g,ν), $(g,\nu) = (0,0)$ et une opération de Γ dessus. OPS $U = U_{g,\nu}$ donc on donne $\Gamma \longrightarrow A_{g,\nu}$. Pour la question de i-fidélité avec $i \leq 2$ OPS qu'il s'agit du même groupe Γ qui opère…

a) **0-fidélité**. Soit U, U' avec opérations de Γ dessus $k, g : U \xrightarrow{\sim} U'$ commutant à Γ et α, β deux homotopies de f à g i.e. : deux chemins de f à g dans $\mathrm{Isom}_\Gamma(U, U')$. On suppose que dans la description topossique

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}_{D^*,\Gamma} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_{D^*,\Gamma}"'] \arrow[d, shift left, "g_{D^*,\Gamma}"] & \mathrm{B}_{U,\Gamma} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_{U,\Gamma}"'] \arrow[d, shift left, "g_{U,\Gamma}"] & \mathrm{B}_\Gamma \arrow[d, "="] \\
\mathrm{B}_{D'^*,\Gamma} \arrow[r] & \mathrm{B}_{U',\Gamma} \arrow[r] & \mathrm{B}_\Gamma
\end{tikzcd}$$

$\alpha_*^{D^*} = \beta_*^{D^*} : f_{D^*} \longrightarrow g_{D^*}$ et $\alpha_*^U : \beta_*^U : f_U \longrightarrow g_U$.

A prouver que α et β sont homotopes. OPS $g = \mathrm{Id}$, $U = U_{g,\nu}$, donc $f \in A^\Gamma_{g,\nu}$, et on a deux chemins α, β de 1 à f dans l'espace $A^\Gamma_{g,\nu}$. On suppose que les deux isomorphismes correspondants entre identité de Π_{D^*} et $f_{D^*,\Gamma} : \Pi_{D^*_{S_\nu},\Gamma} \longrightarrow \Pi_{D^*_{S_\nu},\Gamma}$ d'une part entre identité de $\pi_{U,\Gamma}$ et $f_{U,\Gamma}$ d'autre part sont les mêmes. On veut prouver que α et β sont homotopes. Bien sur l'hypothèse sur α, β relative à l'action de Γ est vérifiée a fortiori en se restreignant à un groupe plus petit, par exemple, $\Gamma' = 1$, et en fait on voit qu'elle est équivalente pour Γ et pour son sous-groupe 1. Le résultat déjà connu (Ladegaillerie) pour $\Gamma = 1$, montre que ceci signifie que si deux chemins dans $A^\Gamma = (A^\Gamma_{g,\nu})$ de 1 à f sont homotopes dans A ils le sont dans A^Γ ou encore que

$$\boxed{\pi_1(A^\Gamma) \longrightarrow \pi_1(A) \quad \text{est injectif.}}$$

Dans le cas $\pi_1(A) = 0$ (cas (g,ν) anabélien) cela revient donc à prouver que $\pi_1(A^\Gamma) = 0$.

b) **1 fidélité**. Cela signifie (en plus de la 0-fidélité) que tout isomorphisme entre B_f et B_g provient d'un chemin de f à g. Avec la réduction précédente OPS $g = \mathrm{id}$ donc on a $f \in A^\Gamma$ d'où $f : (\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \underline{U}) \longrightarrow (\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U)$ (respectant Γ) et on a un isomorphisme avec l'identité.

Soit A un groupe topologique, d'où deux invariants :

$$\pi_0 = \pi_0(A), \quad \pi_1 = \pi_1(A)$$

le premier est un groupe (pas nécessairement commutatif) le deuxième est un groupe commutatif sur lequel π_0 opère. On définit une Gr-catégorie $\underline{A}$ d'invariant π_0, π_1 et correspondant à cette opération de π_0 sur π_1 en prenant comme catégorie sous jacente le groupoïde fondamental (naïf) de A et comme foncteur de composition celui de $A \times A \longrightarrow A$ (l'associativité de $\underline{A} = \Pi_1 A$ est stricte...).

Ceci posé, tout torseur sur A définit un 1-torseur sous la Gr-catégorie $\underline{A}$. Plus généralement pour tout espace topologique S (ou tout topos qui est localement un espace topologique) tout torseur sur S de groupe A_S définit un $\underline{A}_S$-champ sur S qui est un champ en $\underline{A}_S$-torseurs. Si $\pi_i(A) = 0$ pour $i \geq 2$, alors on trouve ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ une *n-équivalence* entre la n-catégorie des torseurs sur S de groupe A_S, et la n-catégorie déduite de la 2-catégorie des $\underline{A}_S$-torseurs en la prolongeant de façon discrète...

Mais considérons un groupe Γ, et considérons la classification des A_{B_Γ}-torseurs sur le topos classifiant - i.e. celle des A-torseurs avec une opération de Γ dessus (commutant à l'action de A). Ces objets forment une 2-catégorie dont les composantes connexes correspondent aux classes de conjugaison d'homomorphismes de Γ dans A. Si on a un homomorphisme $\Gamma \longrightarrow A$, il définit une action sur le torseur trivial 1_A. Si u, v sont deux homomorphismes, les isomorphismes de $(1_A, u)$ avec $(1_A, v)$ correspondent aux éléments de l'ensemble :

$$\mathrm{Transp}(u,v) = \{g \in A | v = \mathrm{int}(g) \circ u\}$$

Mais on fera une catégorie 0-isotopique en remplaçant par son groupoïde fondamental Π_1 Transp(u,v).

Donc un isomorphisme de u et v est encore un point de Transp(u,v) ; mai si on a deux tels isomorphismes f, g les isomorphismes $f \simeq g$ sont les classes de chemins dans Transp(u,v) de f à g. Ainsi la catégorie $\underline{\mathrm{Aut}}(u)$ est équivalente à

$$\Pi_1 \,\mathrm{Transp}(u,v) \quad (\mathrm{Transp}(u,u) = A^u) \quad \underline{\mathrm{Aut}}(u) = \Pi_1 \,\mathrm{Transp}(u)$$

et la catégorie Isom(u,v) est soit vide (si u, v ne sont pas conjugués) soit un torseur sous $\underline{\mathrm{Aut}}(u)$.

Mais pour tout torseur P sous A sur lequel Γ opère le 1-torseur $\Pi_1 P$ sous $\Pi_1 A = \underline{U}$ est muni d'opérations de Γ d'où un $(\Gamma, \underline{A})$ torseur. On trouve ainsi un foncteur de 2-catégorie :

$$\begin{pmatrix} \text{2-catégorie des } (\Gamma, A)-\text{torseurs} \\ [\text{ou encore des homomorphismes } \Gamma \longrightarrow A] \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{2-catégorie des 1-torseurs sous} \\ \underline{A} \text{ avec opération de } \Gamma \text{ dessus} \end{pmatrix}$$

En somme, on vient de répéter sur le topos classifiant B_Γ la construction faite plus haut pour un espace topologique S. On aimerait encore exprimer des conditions pour que ce 2-foncteur soient une 2-équivalence.

Pour ceci, il conviendrait d'abord d'avoir une compréhension de la classification des classes d'équivalence d'objets de la deuxième catégorie qui sont eux de nature purement algébrique, en terme de la Gr-catégorie $\underline{A}$ et de Γ. Quitte à se borner à des torseurs triviaux sous $\underline{A}$ (ce qui est licite) il faudrait expliciter ce qui signifie que Γ opère sur le torseur trivial. On constate que cea signifie qu'on a un homomorphisme de Gr-catégorie de la Gr-catégorie discrète définie par Γ dans $\underline{A}$.

Donc la 2-catégorie envisagée est celle dont les objets sont les homomorphismes de Gr-catégories

$$\Gamma \xrightarrow{u} \underline{A}$$

et pour deux tels morphismes u et v il faut définir (non seulement un ensemble $\mathrm{Hom}(u,v)$ mais) une catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(u,v)$ comme la sous-catégorie $\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)$ de A, à définir ad-hoc.

Considérons pour simplifier le cas où $\pi_1 = 0$, d'où $\underline{A}$ se réduit à π_0 et la catégorie des homomorphismes $\Gamma \longrightarrow \underline{A}$ à celle des homomorphismes $\Gamma \longrightarrow \pi_0$. Le fait que le foncteur de 2-catégorie plus haut soit une équivalence de 2-catégorie se traduit alors pas à pas ainsi :

1) **0-fidèle** signifie que pour tout hom $u : \Gamma \longrightarrow A$, on a $\pi_1(A^u) = 0$.

   N.B. A^u et $A^{\circ u}$ ont même composante neutre donc la condition s'écrit

$$\boxed{\pi_1((A^\circ)^u) = 0}$$

2) **1-fidèle** signifie que de plus, si u, v sont des homomorphismes de $\Gamma \rightrightarrows A$, et $\alpha, \beta \in \mathrm{Transp}_A(u,v)$ ont même image dans $\mathrm{Transp}_{\pi_0}(\underline{u},\underline{v})$ alors α, β sont dans une même composante connexe de $\mathrm{Transp}_A(u,v)$.

   Pour le voir OPS $u = v$ et on est ramené à exprimer que l'application $\pi_0(A^u) \longrightarrow \pi_0$ est injective i.e. que son noyau est réduit à 1, i.e. que le sous-groupe ouvert $A^u \cap A^\circ = (A^\circ)^u$ de A^u est connexe, i.e.

$$\boxed{\pi_0((A^\circ)^u) = 0}$$

3) **2-fidèle** signifie que en plus des conditions précédentes, qui assurent que pour u, v, fixés, le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(u,v) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{u},\underline{v})$ est pleinement fidèle, que celui-ci est essentiellement surjectif, i.e. que si u, v sont tels que $\underline{u}, \underline{v} : \Gamma \longrightarrow \pi_0$ sont conjugués (si on veut égaux) alors u et v sont déjà conjugués par un élément de π_0.

   Il faut le dire de façon plus forte : $\mathrm{Transp}(u,v) \longrightarrow \mathrm{Transp}(\underline{u},\underline{v})$ surjectif : cela équivaut à dire que si $\underline{u} = \underline{v}$ alors u et v sont conjugués par un *élément* de A°.

En d'autres termes : pour tout homomorphisme $\underline{u} : \Gamma \longrightarrow \pi_0 = A/A^\circ$ s'il existe un relèvement de u en $\Gamma \longrightarrow A$, celui-ci est unique à conjugaison près.

4) **3-fidèle** signifie qu'en plus tout hom $\underline{u} : \Gamma \longrightarrow \pi_0$ se relève en $u : \Gamma \longrightarrow A$. En résumé, si $\pi_1(A^\circ) = 0$ la 3-fidélité signifie que pour tout homomorphisme $\underline{u}$: $\Gamma \longrightarrow \pi_0 = A/A^\circ$, il existe un relèvement $u : \Gamma \longrightarrow A$, unique à conjugaison près, et qu'alors $(A^\circ)^u$ est connexe et simplement connexe. Je présume que dans le cas général où on ne suppose pas $\pi_1(A^\circ) = 0$ il faut remplacer la condition $\pi_1(A^{\circ u}) = 0$ par $\pi_1(A^{\circ u} \longrightarrow \pi_1(A^\circ))$ est un isomorphisme.

Trop brutal ! la condition en question disant $\pi_1(A^{\circ\Gamma}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(A^\circ)^\Gamma$ mais il faut reprendre avec soin l'ensemble des conditions et les modifier ad-hoc… Cf feuille intercalaire.

(Le plus agréable serait que ce soit un homotopisme - c'est cela sans doute qui exprimerait qu'on a une ∞-équivalence…)

J'ai envie de prouver d'abord 1), 2), 3) dans le cas $A = A_{g,\nu}$, en me limitant au besoin au cas anabélien (sa doute le plus dur en fait ! mais moins touffu conceptuellement) et bien sûr au cas où Γ est fini. Le premier travail sera bien sûr celui de déterminer $A^{\circ u}$ et sa structure topologique pour essayer de prouver que $A^{\circ u}$ est contractile dans ce cas.

[Intercalaire]

(On ne suppose plus $\pi(A^\circ) = 0$).

1) 0-fidèle. $\pi_1(A^\circ\Gamma) \longrightarrow \pi_1(A^\Gamma) = \mathrm{H}^\circ(\Gamma, \pi_1(A))$ injectif.

2) 1-fidèle. $\pi_1(A^{\circ\Gamma}) \longrightarrow \pi_1(A^\Gamma)$ bijectif et $\pi_0(A^{\circ\Gamma}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma, \pi_1)$ injectif.

3) 2-fidèle. $\pi_1(A^{\circ\Gamma}) \longrightarrow \mathrm{H}^\circ(\Gamma, \pi_1(A))$ et $\pi_0(A^{\circ\Gamma}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma, \pi_1(A))$ bijectif et $\pi_0(A^\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\pi_0(A)^\Gamma) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\Gamma, \pi_1)$ (qui est déjà injectif par la condition précédente) est surjectif i.e. tout élément de $\pi_0(A)$ qui centralise *strictement* Γ provient d'un élément de A qui centralise Γ. Il faut un peu plus, quand on a deux homomorphismes $u, v : \Gamma \longrightarrow A$ qui coïncident *strictement* dans $\underline{A}$, on veut qu'il soient conjugués par un élément de A°.

4) 3-fidèle. En plus des conditions précédentes, on veut que tout homomorphismes $\Gamma \longrightarrow \underline{A}$ (défini par $\Gamma \longrightarrow \pi_0(A)$ et un scindage de la Gr-catégorie de Sinh-Postnikov extension de Γ par $\pi_1(A)$) provienne d'un homomorphisme $\Gamma \longrightarrow A$.

§ 24. — ESSAI DE DÉTERMINATION DE $A^{0\Gamma}$; LIEN AVEC LES RELATIONS $\pi^{\Gamma}_{g,(\nu,\nu+n-1)} = \{1\}$, ET PROGRAMME DE TRAVAIL

Considérons une opération (fidèle si on y tient) du groupe fini Γ sur la surface $U \subset X = \widehat{U}$ de type (g,ν), $U = X \backslash S$.

Soit $A = \mathrm{Aut}(U)$, donc $\Gamma \subset A$ et $A^{u} = A^{\Gamma}$ est le centralisateur de Γ. Supposons d'abord $\Gamma = \Gamma^{+}$; évidemment $f \in A^{\Gamma}$ implique que f induit un automorphisme g de $X/\Gamma = X'$ dont X est un revêtement galoisien de groupe Γ.

Soit S' l'image de S dans X' (donc $S = X|_{S'}$) et soit $S^{!}$ l'ensemble des points de ramification de Γ dans U, $S'^{!}$ son image dans $U' = X' \backslash S'$ (NB $U = X|_{U'}$).

Ainsi g est un automorphisme de (X', S'), appliquant $S'^{!}$ sur lui même, et induisant donc un automorphisme de $V' = U' \backslash S'^{!} = X' \backslash (S' \cup S'^{!})$.

L'image inverse $V = X|V'$ est étale sur V', c'est même un $\Gamma_{V'}$-torseur sur V' et l'image inverse de celui-ci par $g|_{V'}$ est (via f) isomorphe à V. La donnée de f équivaut à la donnée d'un automorphisme du Γ-revêtement V de V', induisant un isomorphisme de V' qui, prolongé à X', envoie S' dans lui même. Cela donne une interprétation de A^{Γ} en termes de constructions sur X'.

Considérons le groupe fondamental π' de V'[78], avec sa structure à lacets indexée par $S' \sqcup S'^{!}$, on a donc un homomorphisme surjective

$$\pi' \xrightarrow{\varphi} \Gamma$$

---

[78]On a choisit un point $x \in V$ et son image $x' \in V'$ comme points de base, pour expliciter π.

qui sur chacun des sous-groupes à lacets d'indice $s' \in S'^{!}$ n'est pas trivial, et un automorphisme g de V' définit un automorphisme extérieur $\overline{g}$ de π'. La condition à mettre dessus est que son composé avec φ est conjugué de φ, et que $\overline{g}$ applique $S'^{!}$ dans lui même.

Ceci posé, g est défini par $\overline{g}$ à isotopie près (si on excepte les cas (g', ν') dégénérés, à savoir $(0, \nu')$ avec $\nu' = 0, 1, 2$ qu'il faudra examiner à part...) et g étant choisi, f est défini modulo multiplication par un élément du centre de Γ mais on sait déjà que $A^\circ \cap \Gamma = \{1\}$, donc si on se borne à examiner des éléments f dans $A^{\circ\Gamma}$, alors f sera déterminé par g de façon unique.

On est ainsi amené au problème suivant :

Soit $V' = X' \backslash (S' \sqcup S'^{!})$ une surface admissible de type (g', ν') avec X' compacte, et $\nu' = \operatorname{card} S' + \operatorname{card} S'^{!}$, muni d'un sous ensemble $S'^{!}$ de l'ensemble des points à l'infini et d'un point de base x', d'où $\pi' = \pi_1(V', x')$.

On se donne un revêtement galoisien connexe V de V' de groupe fini Γ, ponctué au dessus de x', donc défini par un homomorphisme surjectif

$$\pi' \xrightarrow{\varphi} \Gamma$$

et on suppose V' ramifié en chacun des $s' \in S'^{!}$ i.e. (pour un choix du groupe à lacets $L_{s'}$ correspondant à s') que $L_{s'} \longrightarrow \Gamma$ n'est pas trivial.

On considère le compactifié pour X de V, et l'ensemble S (resp. S') des points de X sur S' (resp. $S'^{!}$).

Soit g un automorphisme de V, définissant un automorphisme extérieur $\overline{g}$ de π'[79], on suppose que

$$g^*(V'|_V) \xrightarrow[V-\text{iso}]{\sim} V'$$

i.e. que $\varphi \circ \overline{g}$ est conjugué à φ (ce qui exprime que g provient par passage au quotient d'un automorphisme f de V, défini modulo multiplication par un élément $z \in \operatorname{Centre} \Gamma$).

Soit $U = V \cup S^{!} = X \backslash S$ (revêtement ramifié sur $U' = V' \cup S'^{!} = X' \backslash S'$), on veut exprimer que parmi les f qui remonte g, il y en a un (nécessairement unique !) qui est isotope à 1 dans $\underline{\operatorname{Aut}}(U)$ - i.e. qui induise l'automorphisme extérieur trivial de $\pi_1(U)$. On aimerait prouver que se sont exactement ceux qui sont isotopes à 1

[79] OPS que g fixe x' donc $\overline{g}$ est un automorphisme bien défini de π'.

dans $\underline{\mathrm{Aut}}(V')$ - ou encore que pour un tel f, f est nécessairement isotope à 1 dans $\underline{\mathrm{Aut}}(V)$ - i.e. est dans $\underline{\mathrm{Aut}}(V)^\circ$ et pas seulement dans $\underline{\mathrm{Aut}}(U)^\circ$.

Notons, lorsque $\underline{\mathrm{Aut}}(V')^\circ$ est connexe, que $\underline{\mathrm{Aut}}(V')^\circ$ se relève (en vertu de principes généraux) en

$$\underline{\mathrm{Aut}}(V')^\circ \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(V)^{\circ\Gamma} \subset \underline{\mathrm{Aut}}(U)^{\circ\Gamma}$$

Donc la condition énoncée sur g d'isotopie à 1 est certainement *suffisante*. Notons d'ailleurs que les résultats déjà obtenus impliquent que $\underline{\mathrm{Aut}}(U)^\Gamma \cap \underline{\mathrm{Aut}}(U)^\circ = \underline{\mathrm{Aut}}(U)^{\circ\Gamma}$ induit *l'identité* sur $S'^!$ ($= U$ avec une notation antérieure).

Or soit $B \subset \underline{\mathrm{Aut}}(U)^\circ \cap \mathrm{Aut}(U, S^!)$ le sous-groupe des automorphismes qui fixent les $s \in S^!$ de sorte que

$$\underline{\mathrm{Aut}}(U)^\circ / B \simeq \underline{\mathrm{Mon}}(S^!, U) \quad \text{et} \quad B^\circ = \underline{\mathrm{Aut}}(V)^\circ$$

un argument connu nous montre que

$$B/B^\circ \simeq \pi_1(\underline{\mathrm{Mon}}(S^!, U))$$

Comme

$$\underline{\mathrm{Aut}}(U)^{\circ\Gamma} \subset B \quad \text{i.e.} \quad \underline{\mathrm{Aut}}(U)^{\circ\Gamma} = B^\Gamma$$

on déduit donc de $1 \longrightarrow B^\circ \longrightarrow B \longrightarrow B/B^\circ \longrightarrow 1$

$$1 \longrightarrow B^{\circ\Gamma} \longrightarrow B^\Gamma \longrightarrow (B/B^\circ)^\Gamma \longrightarrow \mathrm{H}(\Gamma, B^\circ)(= 1?)$$

Donc on trouve que la composante neutre de $\underline{\mathrm{Aut}}(U)^{\circ\Gamma}$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Aut}}(V)^\circ$ (donc est ∞-connexe si V anabélienne), et son π_0 est inclus dans $(B/B^\circ)^\Gamma \simeq \pi_1(\mathrm{Mon}(S^!, U))^\Gamma$. On voudrait prouver que le sous-groupe des invariants sous Γ est réduit à $\{1\}$

$$\mathrm{H}^\circ(\Gamma, \pi_1(\mathrm{Mon}(S^!, U))) = 0$$

On aimerait que ceci soit vrai même indépendemment d'hypothèse de réalisabilité, quand on se donne un homomorphisme de Γ dans le groupe de Teichmüller d'un V, et qu'on fait les hypothèses adéquates...

Conjecture. — *Soit π un groupe extérieur à lacets de type (g, ν), I l'ensemble d'indices des classes des lacets,* Γ *un groupe fini opérant extérieurement sur π. Alors il* *existe un groupe extérieur à lacets π', d'ensemble I' des classes de lacets, une opération extérieure de Γ sur π', une partie $I'^{!}$ de I' stable par Γ, un homomorphisme extérieur de "bouchage des trous de I'"*

$$\pi' \longrightarrow \pi$$

compatible avec l'action de Γ, tels que :

1°*) Le stabilisateur dans Γ de tout élément de $I'^{!}$ soit réduit à 1.*

2°*) L'extension de Γ par π' déduite de l'action extérieure de Γ n'a pas d'éléments d'ordre fini $\neq 1$ (i.e. pour aucun élément de $\Gamma \neq 1$, l'action extérieure sur π' ne se réalise par un automorphisme de π' d'ordre fini).*

De plus le Γ-groupe extérieur à lacets π', muni du morphisme $\pi' \longrightarrow \pi$, est déterminé à isomorphisme près.

Commentaire. L'existence de π', $\pi' \longrightarrow \pi$ est évidente dans le cas "réalisable". L'unicité à isomorphisme unique près, même dans le cas réalisable n'est pas évidente, ni même prouvée. Le noyau de

$$\mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi', \pi) = \mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi', I'^{!}) \longrightarrow \mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi)$$

est justement le groupe π_1 de tantôt[80], et pour montrer que le foncteur des couples $(\pi', I'^{!})$ d'un Γ-groupe extérieur π' et d'une partie $I'^{!}$ de $I(\pi')$ stable par Γ, telle que l'extension correspondante de Γ par π' soit "sas torsion" et que le stabilisateur de tout $i' \in I'^{!}$ dans Γ soit non trivial, vers les Γ-groupes extérieurs, soit (non seulement essentiellement surjectif mais) pleinement fidèle, est déjà problématique.

La fidélité signifie justement que $\pi_1^{\Gamma} = \{1\}$, la pleine fidélité est plus forte que le fait que

$$\mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi', \pi)^{\Gamma} \longrightarrow \mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi)^{\Gamma}$$

est surjectif (dans le cas réalisable, cette surjectivité serait conséquence du fait que toute classe d'homéomorphisme commutant à Γ contient un homéomorphisme commutant à Γ) - il faut ajouter à ceci que tout autre relèvement de Γ en une

[80]Plutôt une extension de $\mathfrak{S}_{I'}$ par ce π_1

opération extérieure sur π' [i.e. un $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi', \pi)$], ayant la même action de Γ sur $I'^{!}$, est conjugué du précédent par un élément du noyau π_1 de $\mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi', I'^{!}) \longrightarrow \mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi) \times (\mathfrak{S}_{I'^{!}})\ldots$

On va ré-énoncer la conjecture précédente sous une forme un peu plus générale. Introduisons une notation :

Si Γ est un groupe fini opérant extérieurement de façon directe sur un groupe à lacets π anabélien, donnant lieu à une extension E de π par Γ, on va désigner par $\Phi = \Phi(\pi, \Gamma)$ ("points fixés") l'ensemble des classes de π-conjugaison des sections partielles $\neq \{1\}$ maximales de l'extension. (Le caractère intrinsèque de $\Phi(\pi, \Gamma)$, indépendemment des choix particuliers de E a été déjà noté). Il est clair que Φ est un Γ-ensemble, on sait aussi qu'il est fini.

Soit maintenant (π', Γ) un Γ-groupe extérieur à lacets avec Γ opérant de façon directe ($\Gamma = \Gamma^+$) et fidèle (pour simplifier), fixons nous une partie $I'^{!}$ de $I' = I(\pi')$, stable par Γ, telle $\forall i' \in I'^{!}$, on ait $\Gamma_{i'} \neq \{1\}$, et considérons le groupe extérieur quotient, défini par bouchage de $I'^{!}$, soit π ; il est clair que Γ opère encore dessus.

On veut d'abord définir une bijection

$$(*) \qquad \Phi(\pi, \Gamma) \simeq \Phi(\pi', \Gamma) \sqcup I'^{!}$$

en supposant (π, Γ) également anabélien pour être plus sur !

a) Application $I' \longrightarrow \Phi(\pi, \Gamma)$.

   Soit $L_{i'} \subset \pi'$ de classe $i' \in I'$, $Z_{i'}$ son centralisateur dans l'extension E' de Γ par π' de sorte $L_{i'}$ est une extension de $\Gamma_{i'}$ par $L_{i'}$. LE passage au quotient $E' \longrightarrow E$ définit une section partielle $\Gamma_{i'} \hookrightarrow E$, contenue dans une unique section partielle maximale (sans doute déjà maximale elle même…[81]). On trouve ainsi une application $I' \longrightarrow \Phi(\pi, \Gamma)$, évidemment compatible avec les actions de Γ.

b) Application $\Phi(\pi', \Gamma) \longrightarrow \Phi(\pi, \Gamma)$

   Toute section partielle $\neq 1$ de E' sur Γ en définit évidemment une de E sur Γ en passant au quotient ; on a comme ci dessus qu'une section maximale donne une section maximale, en se ramenant au cas Γ cyclique. [82]

[81] oui car pour le voir on peut supposer Γ cyclique et donc la situation est réalisable…! (?)

[82] pas clair, car l'hypothèse que les $\Gamma_{i'} \neq 0$, risque de ne pas être réalisée.

c) Bijectivité de (*)

Elle n'est pas prouvée (sauf si la situation de départ est réalisable, ou si $I^{'!}$ réduit à un seul élément mais alors Γ est cyclique et la situation est réalisable...)

Ceci admis on a défini un foncteur

$$(\pi', \Gamma, I^{'!}) \mapsto (\pi, \Gamma, I^{'!})$$

allant de la catégorie des Γ-groupes extérieurs à lacets π' munis d'une partie $I^{'!}$ de $I' = I(\pi')$ stable par Γ, telle que $s' \in I' \Rightarrow \Gamma_{s'} \neq \{1\}$, dans la catégorie des Γ-groupes extérieures à lacets, munis d'une partie $I^{'!}$ de $\Phi(\pi, \Gamma)$.

La conjecture est que le foncteur (lui même un peu conjectural, sauf si on se réduit aux situations de départ réalisables, d'où situations d'arrivée également réalisables) est une équivalence de catégories i.e. i) pleinement fidèle et ii) essentiellement surjectif.

Le point ii) est clair, quand on se borne de part et d'autre à des situations réalisables. Mais même dans ce cas, le point i) n'est pas prouvé. Je pense que si I' est *réduit à un élément*, alors les propriétés du foncteur "forage d'un trou" permettront de l'établir aisément. On voit aussi que pour l'établir, on est ramené à établir la bijectivité de (*), et le théorème d'équivalence dans le cas où Γ est transitif sur $I^{'!}$.

Pour résumer, le programme d'attaque du problème de réalisabilité d'un Γ-groupe extérieur à lacets serait le suivant :

I) Établir la bijectivité de (*) dans le cas général.

II) Établir la pleine fidélité du foncteur précédent (en se ramenant au besoin au cas où $I^{'!}$ est *une* orbite (singulière) de Γ dans $I' = I(\pi')$).

III) Dans le cas où $\Phi(\pi, \Gamma) = \varnothing$ i.e. l'extension E n'a pas d'élément d'ordre fini $\neq 1$, prouver que E, muni de l'ensemble des E-classes de conjugaison des centralisateurs des L_i $(i \in I(\pi))$ dans E, est un groupe à lacets.

D'ailleurs, pour disposer des propriétés préliminaires indispensables des ensembles $\Phi(\pi, \Gamma)$, il faudrait commencer par réaliser ce programme pour les groupes cycliques (opérants de façon directe), et procéder dans ce cas par dévissage.

Si le théorème de classification complet (comme équivalence des 2-catégories - des opérations topologiques et des opérations isotopiques -) était vrai, les points I, II, III de ce programme devrait l'être aussi, et ce serait donc un bon programme d'approche. Les points I et II devraient être encore valables, dès que le 2-foncteur entre 2-catégories serait 2-fidèle (pas nécessairement 3-fidèle), du moins pour les situations réalisables. On dirait alors qu'une action extérieure de Γ est *admissible*, si

$$\mathrm{Autext}(\pi', \Gamma, I'^{!}) \simeq \mathrm{Aut}(\pi, \Gamma, I'^{!})$$

et si de plus toute autre action de Γ sur π', induisant la même action sur π et la même application $I'^{!} \longrightarrow \Phi(\pi, \Gamma)$, est conjugué de l'action originelle.

Ceci posé, la condition nécessaire et suffisante de réalisabilité d'une action extérieure fidèle de Γ sur π serait alors que cette action se remonte (par “forage de trous” pour $I'^{!} = \Phi(\pi, \Gamma)$) en une action *admissible* de Γ sur un $(\pi', I'^{!})$, (par définition même le relèvement serait alors unique) et que de plus l'extension correspondante E' de Γ par π' soit un groupe à lacets.

§ 25. — GROUPES DE TEICHMÜLLER SPÉCIAUX

Revenons aux notations du $n^\circ 19$, on va définir un sous-groupe $SA_{g,\nu}$ de $A^!_{g,\nu}$

$$SA_{g,\nu} = \{u \in A_g \mid u \text{ induise l'identité sur un voisinage de } S_{g,\nu}\}$$

i.e. ensemble des automorphismes de $U_{g,\nu}$ qui induisent l'identité dans le complémentaire d'un compact.

Contrairement aux autre sous-groupes de A_g considérés jusqu'à présent, celui-ci n'est pas un sous-groupe fermé. N.B. Dans le cas où on travaille avec des surfaces compactes à bord au lieu de surfaces compactes (sans bord) "trouées", il y aurait lieu de prendre le groupe des automorphismes qui induisent l'identité sur le bord.

$SA_{g,\nu}$ est un sous-groupe invariant de $A_{g,\nu}$, le quotient $A_{g,\nu}/SA_{g,\nu}$ étant isomorphe au groupe des *germes* d'automorphismes de X_g au voisinage de $S_{g,\nu}$, ou encore le groupe des germes à l'infini d'automorphismes de $U_{g,\nu}$ ([?] les complémentaires de compacts…)

On aura évidemment, puisque $SA_{g,\nu} \subset A_{g,\nu}$

$$(SA_{g,\nu})^\circ \subset A^\circ_{g,\nu}$$

Posons

$$SA^!_{g,\nu} = SA_{g,\nu}/SA^\circ_{g,\nu}$$

on aura un homomorphisme canonique

$$SA^!_{g,\nu} \longrightarrow \Gamma^{!+}_{g,\nu}$$

qu'on va interpréter de façon algébrique, en termes de l'interprétation de $\Gamma^!_{g,\nu}$ comme le groupe des automophismes extérieures du groupe à lacets $\pi_{g,\nu}$, induisant l'identité sur $S_{g,\nu} = I(\pi_{g,\nu})$.

Pour tout $i \in S_{g,\nu}$, choisissons un L_i de classe i dans $\pi_{g,\nu}$ - ce qui revient à se donner un "point" de $B_{D^*_i}$ ($\simeq$ un revêtement universel $\widetilde{D^*_i}$) et un isomorphisme entre son image dans $B_{U=U_{g,\nu}}$ avec le "point" $s = s_{g,\nu}$ de référence, qui servait à définir $\pi_{g,\nu}$ comme $\mathrm{Aut}_{B_U} \simeq \pi_1(B_U, s)$.

Ceci dit, si u est un automorphisme de $\pi = \pi_{g,\nu}$ le fait qu'il respecte (strictement, en induisant l'identité sur $S_{g,\nu}$) la structure à lacets, s'exprime par l'existence d'une famille d'éléments $g_i \in \pi$, tels que

$$u(l) = \mathrm{int} g_i^{-1}(l^\alpha) \quad (i \in I, l \in L_i, \alpha = \chi(n))$$

-lesquels g_i sont déterminés par u modulo multiplication à droite par des $\lambda_i \in L_i$. Si on a de même v, (h_i), alors : pour $l \in L_i$ on a (si $\alpha = \chi(u)$, $\beta = \chi(v)$)

$$(uv)(l) = v(u(l)) = v(\mathrm{int}(g_i^{-1}))v(l^\alpha) = \mathrm{int}(v(g_i^{-1})h_i^{-1})(l^{\alpha\beta}) = \mathrm{int}(h_i u(g_i)^{-1})l^{\alpha\beta}$$

donc vu est compatible avec le système des $h_i v(g_i)$. Posons

$$(v,(h_i))(u,(g_i)) = (vu, h_i v(g_i))$$

On trouve alors une structure de groupe sur l'ensemble $SE^!$ des $(u,(g_i))$, sous-groupes du produit semi-direct de $E^! = \mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi, \mathrm{id\ sur\ } I)$ par π^I, sur lequel $E^!$ opère de façon évidente. L'homomorphisme naturel

$$SE^! \longrightarrow E^!$$

est surjectif, et son noyau est essentiellement isomorphe à $\prod_{i \in I} L_i \simeq T^I$, où T est le module des orientations. D'où une structure d'extension où E opère sur T^I via son action sur T

$$1 \longrightarrow T^I \longrightarrow SE^! \longrightarrow E^! \longrightarrow 1$$

Et je voudrais interpréter cette extension comme l'image inverse d'une extension canonique de $\Gamma^!$ par T^I (canonique en tous cas, une fois choisi les $\widetilde{D^*_i}$).

Pour ceci, notons que si $\dot{u}$ est une auto-équivalence de la situation $\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$, induisant l'identité sur I, on peut considérer les $\widetilde{u}$ au dessus de $\dot{u}$, à savoir les systèmes $(\dot{u}, \gamma_i)$, où pour tout $i \in I$, $\gamma_i : \widetilde{D_i^*} \longrightarrow \dot{u}(\widetilde{D_i^*})$ [déterminé mod élément de T].

Le groupe des classes d'isomorphie d'automorphismes de $(\mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U, (\widetilde{D_i^*}))$, ou si on préfère, des classes d'isomorphie d'automorphismes de $(\mathrm{B}_I \longrightarrow \mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U)$ induisant l'identité sur I, est donc une extension de $\Gamma^!$ par T^I, soit $ST^!$.

On va définir un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & T^I \arrow[r] \arrow[d, equal] & SE^! \arrow[r] \arrow[d] & E^! \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & T^I \arrow[r] & S\Gamma^! \arrow[r] & \Gamma^! \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

qui prouve que $SE^!$ est bien l'image de l'extension $S\Gamma^!$ par T^I. Pour ceci, on note que $E^!$ est le groupe des classes d'isomorphie d'auto-équivalences de

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}_{D^*} \arrow[d] & \\
\mathrm{B}_U & \mathrm{pt}.s \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

et $SE^!$ celui des classes d'isomorphie d'auto-équivalences de

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}_{D^*} \arrow[d] & \mathrm{B}_I \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{B}_U & \mathrm{pt}.s \arrow[l] \arrow[ul, "\star"']
\end{tikzcd}$$

($\star$ est un isomorphisme de commutation)

qui s'envoie e façon naturelle dans celui des classes d'isomorphie d'auto-équivalences des diagrammes $\mathrm{B}_I \longrightarrow \mathrm{B}_{D^*} \longrightarrow \mathrm{B}_U$.

En fait, dans tout ceci il n'y avait aucunement lieu de se borner aux automorphismes de π (extérieurs ou totaux) induisant l'identité sur I. On trouve de toutes façons des extensions SE de E par T^I, $S\Gamma$ de Γ par T_I, et un homomorphisme d'extension

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & \pi \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \pi \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & T^I \arrow[r] \arrow[d, equal] & SE \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & T^I \arrow[r] & S\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

de façon que l'on peut considérer SE comme extension de Γ par $T^I \times \pi$

$$1 \longrightarrow T^I \times \pi \longrightarrow SE \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

et l'extension E resp. $S\Gamma$ se déduit en divisant par T^I resp. par π.

Revenant maintenant au cas type $U_{g,\nu} = X_{g,\nu} \backslash S_{g,\nu}$, on prends des notations

$$E_{g,\nu} = \mathrm{Aut}_{\mathrm{lac}}(\pi_{g,\nu}) \quad (\simeq \Gamma_{g,\nu+1} \text{ si } (g,\nu) \neq (0,0),(0,1) \text{ i.e. } \pi_{g,\nu} \neq 0)$$

et

$$S\Gamma_{g,\nu} = S\,\mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi_{g,\nu}) \quad (\text{extension de } \Gamma_{g,\nu} \text{ par } T^I)$$

et

$$SE_{g,\nu} \quad (\simeq S\Gamma'_{g,\nu+1}/\Gamma_{g,\nu}),$$

(où $S\Gamma'_{g,\nu+1}$ désigne le sous-groupe de $S\Gamma_{g,\nu+1}$ [?] des éléments qui fixent le dernier élément $s_\nu \ldots$)

On désigne par $S\Gamma^!_{g,\nu}$ et $SE^!_{g,\nu}$ les sous-groupes des précédents $S\Gamma_{g,\nu}$, $SE_{g,\nu}$ qui induisent l'identité sur $I = S_{g,\nu}$.

Et revenons enfin aux relations avec $SA_{g,\nu}$, on va définir

$$SA_{g,\nu} \longrightarrow S\Gamma^{!+}_{g,\nu}$$

en notant que si un $u \in A_{g,\nu}$ induit l'identité sur un voisinage de $S_{g,\nu}$, alors $u_\bullet(\widetilde{D_i^*}) = \widetilde{D_i^*}$ et on pourra définir un élément de $S\Gamma^!_{g,\nu}$ en prenant comme Γ_i les identités. Le fait que l'homomorphisme obtenu soit trivial sur $(SA_{g,\nu})^\circ$ est sans doute trivial, d'où

$$SA_{g,\nu}/(SA_{g,\nu})^\circ \longrightarrow S\Gamma^{!+}_{g,\nu}$$

Dire que c'est surjectif signifie que tout automorphisme dans $A^{!+}_{g,\nu}$ (i.e. tout automorphisme de $U_{g,\nu}$ induisant l'identité sur $S_{g,\nu}$ et respectant l'orientation) est isotope (par une isotopie, si on veut, qui reste l'identité dans l'extérieur d'un petit voisinage de $S_{g,\nu}$) à un automorphisme qui soit l'identité sur un voisinage, c'est facile. L'injectivité [est] peut-être plus délicate, elle revient essentiellement à déterminer le noyau de

$$SA_{g,\nu}/(SA_{g,\nu})^\circ \longrightarrow \Gamma^{!}_{g,\nu}, \quad \text{i.e.} \quad SA_{g,\nu} \cap A^\circ_{g,\nu}/(SA_{g,\nu})^\circ$$

comme $T^I = T^{S_{g,\nu}}$. On peut sans doute se ramener au contexte des surfaces compactes à bord (notons par un $'$ les groupes topologiques correspondants), on a

$$1 \longrightarrow SA'^{+}_{g,\nu} \longrightarrow A'^{!+}_{g,\nu} \longrightarrow \prod_{i \in S_{g,\nu}} \mathrm{Aut}^+(C_i) \longrightarrow 1$$

où $\mathrm{Aut}^+(C_i)$ homotope au groupe circulaire standard $\mathbb{U}$ tordu par T, et le $+$ indique les automorphismes conservant l'orientation et les C_i sont les composantes connexes du bord. On en conclut la suite exacte d'homotopie

$$\begin{tikzcd}
\prod_i \pi_2(\mathrm{Aut}^+(C_i)) = 0 \arrow[dd] & & & \\
& \pi_1(A'^{+}_{g,\nu}) \arrow[d, equal] & T^I & \\
\pi_1(SA'^{\circ}_{g,\nu}) \arrow[r] & \pi_1(A'^{!+}_{g,\nu}) \arrow[r] & \prod_i \pi_1(\mathrm{Aut}^+(C_i)) \arrow[u, "\sim"'] \arrow[dl] & \\
& \pi_0(SA'^{!+}_{g,\nu}) \arrow[r] & \pi_0(A'^{!+}_{g,\nu}) \arrow[r] & \prod_i \pi_0(\mathrm{Aut}^+(C_i)) = 1 \\
& \text{(à calculer)} \arrow[u] & \Gamma'_{g,\nu} \arrow[u, equal] &
\end{tikzcd}$$

[et $\pi_i(SA'^{\circ}_{g,\nu}) \simeq \pi_i(A'^{\circ}_{g,\nu})$ si $i \geq 2$] i.e.

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \pi_1(SA'^{+}_{g,\nu}) \longrightarrow \pi_1(A'^{\circ}_{g,\nu}) \longrightarrow T^I \longrightarrow \pi_0(A'^{!+}_{g,\nu}) \longrightarrow \Gamma'^{!+}_{g,\nu} \longrightarrow 1 \\ \pi_i(SA'^{+}_{g,\nu}) \xrightarrow{\sim} \pi_i(A'^{\circ}_{g,\nu}) \quad \forall i \geq 2 \end{cases}$$

On a un homomorphisme évidente (par "recollement de disques") $A'^{\circ}_{g,\nu} \longrightarrow A_{g,\nu}$ induisant $SA'_{g,\nu} \longrightarrow SA_{g,\nu}$, et ce sont là sûrement des équivalences d'homotopie donc la suite exacte précédente doit pouvoir s'interpréter comme suite exacte

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \pi_1(SA_{g,\nu})^{\circ} \longrightarrow \pi_1(A^{\circ}_{g,\nu}) \longrightarrow T^I \longrightarrow \pi_0(SA^{!+}_{g,\nu}) \longrightarrow \Gamma^{!+}_{g,\nu} \longrightarrow 1 \\ \pi_i(SA_{g,\nu})^{\circ} \xrightarrow{\sim} \pi_i(A_{g,\nu})^{\circ} \quad \forall i \geq 2 \end{cases}$$

Dans le cas anabélien, on trouve bien, puisque $\pi_1(A^{\circ}_{g,\nu}) = 0$, une structure d'extension

$$\boxed{1 \longrightarrow T^{S_{g,\nu}} \longrightarrow \pi_0(SA_{g,\nu}) \longrightarrow \Gamma^{!+}_{g,\nu} \longrightarrow 1}$$

et de plus

$$\pi_i((SA_{g,\nu})^{\circ}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq 2$$

Dans le cas abélien, on doit expliciter

$$\pi_1(A^{\circ}_{g,\nu}) \longrightarrow T^{S_{g,\nu}}$$

et on va distinguer les deux cas abéliens (sous-entendant que l'on ait $I \neq \varnothing$!) - on a toujours $g = 0$, $\nu = 1$ ou 2.

En tous cas, introduisant une structure analytique complexe et le groupe G, composante neutre du groupe des automorphismes complexes, on a

$$G \xrightarrow{\approx} A^{\circ}_{g,\nu}$$

a) Cas $g = 0$, $\nu = 2$ $G \simeq \mathbf{C}^*$, on voit que si la structure à lacets de π est définie par les deux isomorphismes $x_i : T \longrightarrow \pi$ ($i \in I = \{s_{0,0}, s_{0,1}\}$) alors $\pi_1(G) \longrightarrow T^I$ s'identifie, à $T \longrightarrow T^I$ dont les composantes sont ces deux x_i (qui sont symétriques, donc c'est un homomorphisme injectif dont l'image est le noyau de l'application somme $T^I \longrightarrow T$, donc ici le noyau de $\pi_0(SA_{g,\nu}) \longrightarrow \Gamma^{!+}_{g,\nu}$ (dont $\pi_0(SA_{g,\nu})$) lui même) est isomorphe, non à T^I, mais à son quotient T.

Quant à $(SA'_{g,\nu})^{\circ}$, tous ses π_i ($i \geq 1$) sont nuls - il est encore ∞-connexe.

b) Cas $g=0$, $\nu=1$. Alors $G \simeq \mathrm{Aff}(1,\mathbf{C})$, $\pi_1(G) \simeq T$ et $\pi_1(G) \longrightarrow T^I = T$ est un isomorphisme. Ici, le noyau de l'homomorphisme $\pi_0(SA_{g,\nu}) \longrightarrow \Gamma^{!+}_{g,\nu}$ est nul i.e. $\pi_0(SA_{g,\nu}) = 0$.

Dans ce cas encore, on trouve que $\pi_i(SA^\circ_{g,\nu}) = 0$ pour tout $i \geq 1$. On trouve donc

Théorème. — *Supposons $\nu > 0$. Si (γ,ν) est anabélien, alors $\pi_0(SA_{g,\nu})$ est canoniquement isomorphe à $S\Gamma^{!+}_{g,\nu}$. Dans tous les cas $(SA_{g,\nu})^\circ$ est ∞-connexe.*

Nous allons expliciter une relation de compatibilité pour $S\Gamma$ relatif à un π à lacets, en fixant un $i \in I = I(\pi)$, d'où un stabilisateur $\Gamma_i \subset \Gamma$ dont l'image inverse $(S\Gamma)_i$ dans $S\Gamma$ est donc une extension de Γ_i par T^I.

Utilisant la projection $T^I \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} T$, on trouve une extension de Γ_i par T, qu'on va décrire d'une autre façon.

L'extension $S\Gamma$ est définie intrinsèquement par la donnée de I réalisation $(\pi)_{i\in I}$ du groupe extérieur π par des groupes, avec dans chaque π_i un $L_i \subset \pi_i$ de la classe i (c'est cela, la donnée d'un système de $(\widetilde{D^*_i})$!).

Pour un automorphisme extérieur à lacets $u \in \Gamma$ de π, pour tout i il est possible de le réaliser pour $u_i \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{lac}}(\pi_i)$, avec $u_i(L_i) \subset L_i$ - cet u_i est déterminé modulo multiplication à droite par un $\mathrm{int}(\varkappa_i(\alpha))$, où $\alpha \in T$.

Si on regarde la sous-extension obtenue par restriction à Γ_i, on note que la projection $T^I \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} T$ est stable par Γ_i, donc on en déduit une extension de Γ_i par T, qui n'est autre que le groupe des automorphismes à lacets de π_i qui normalisent L_i - qui est bien une extension de Γ_i par L_i (son intersection avec $\pi_i \subset \mathrm{Aut}_{\mathrm{lac}}(\pi_i)$ étant réduite à L_i).

Ceci nous montre que l'extension de Γ par T^I a une nette tendance à ne pas être triviale, car il en est ainsi (pour $i \in I$ fixé) de l'extension de Γ_i par T à qui elle donne naissance. Si par exemple on a un sous-groupe *fini* $G \subset \Gamma_i^+$, l'extension induite n'est jamais triviale si $G \neq 1$, on l'a vu. En ait, G doit être cyclique et son image inverse dans l'extension en question est isomorphe à T…

§ 25 bis. — CAS DES DEUX GROUPES. RETOUR SUR LES NOTATIONS

On se place d'abord pour fixer les idées dans le cas topologique et discret, mais la motivation est le cas d'un courbe algébrique U sur un corps de type fini K, où on a à la fois le groupe $G_K = \mathrm{Aut}_K(U)$[83] et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ qui opérant extérieurement sur le $\pi_1(U_{\overline{K}})$.

Dans ce cas, G et Γ commutent, mais on peut regarder plus généralement le cas du groupe (plus gros que G_K) $G_{\overline{K}} = \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(U)$, sur lequel Γ opère (de façon pas nécessairement triviale - cette opération décrit un groupe algébrique étale fini sur K).

Supposons donc qu'on ait une surface U (orientable, $U = X \backslash S$, X compacte connexe, S finie) sur laquelle opère deux groupes G, Γ, l'action de Γ normalisant celle de G - donc on a un groupe $\mathscr{G} = \Gamma G$ (produit semi-direct, pour une certaine action de Γ sur G) qui opère sur U. On suppose G fini, mais pas nécessairement Γ fini.

On suppose choisi un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U, d'où un groupe à lacets $\pi = \mathrm{Aut}(\widetilde{U})$, sur lequel $\mathscr{G}$ opère extérieurement, d'où l'extension

$$(1) \qquad 1 \longrightarrow \pi \longrightarrow E \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 1$$

Si l'action de $\mathscr{G}$ sur U est fidèle, alors $\mathscr{G} \hookrightarrow \mathrm{Autext}(\pi)$, et l'extension précédente

[83] Cas anabélien donc G fini.

est l'image inverse de l'extension de Teichmüller de π

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{lac}}(\pi) \longrightarrow \mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi) \longrightarrow 1$$

On aura à regarder d'autres revêtements universels que $\widetilde{U}$, et leurs isomorphismes avec $\widetilde{U}$. Quand $\widetilde{U} = \widetilde{U}(P)$ est le revêtement universel basé en un certain $P \in U$, alors pour les revêtements universels $U(Q)$ basés en un point, les U-isomorphismes $\widetilde{U}(P) \xrightarrow{\sim} \widetilde{U}(Q)$ correspondent donc aux classes de chemins de P à Q.

Soit $Q \in U$ tel que son sous-groupe d'isotropie G_Q dans G soit tel que $G_Q^+ \neq 1$. (Donc G_Q^+ est cyclique). Choisissant une classe de chemins de P à Q, on trouve une opération de G_Q sur $\widetilde{U}(P)$ i.e. un relèvement $G_Q \xrightarrow{r_{G_Q}} E$ dans l'extension (1) - le changement de classe de chemins de λ en λ' donnera un relèvement r'_{G_Q} qui sera conjugué de r par un unique élément de $\pi = \pi_1(U,P)$ (l'unicité provient de $\pi^{G_Q} = 1$), savoir celui qui fait passer d'un chemin à l'autre.

Considérons le stabilisateur Γ_Q de Q dans Γ, qui opère bien sur $\widetilde{U}(Q)$ tout comme G_Q (en fait c'est $\mathscr{G}_Q$ qui opère d'où $r : \mathscr{G}_Q \longrightarrow E\ldots$), donc via λ on a aussi un relèvement $r_{\Gamma_Q} : \Gamma_Q \longrightarrow E$, qui a la même propriété de normaliser r_{G_Q} (avec opération de Γ_Q dessus, qui est celle provenant de l'opération de Γ sur G)[84]. Pour simplifier, supposons quand même que Γ opère trivialement sur G i.e. $\mathscr{G} = \Gamma \times G$, alors $r_{\Gamma_Q}(\Gamma_Q) \subset E$est contenu dans le *centralisateur* de r (ou de $r(G_Q)$) et comme $\pi^{r(G_Q)} = 1$, donc l'homomorphisme

$$\mathrm{Centr}(r(G_Q)) \longrightarrow \mathscr{G}$$

est injectif[85], le relèvement en question r_{Γ_Q} est uniquement déterminé par la condition précédente.

En ait, l'image de Centr $r(G_Q)$ dans $\mathscr{G}$ contient $\mathscr{G}_Q$, et on [] de même le relèvement $\mathscr{G}_Q \xrightarrow{r_{G_Q}} E$. La chose intéressante, c'est que le choix d'un relèvement du (petit) groupe $\mathscr{G}_Q$, impose déjà le choix d'un relèvement du (grand) groupe Γ_Q, ou $\mathscr{G}_Q$.

[84]N. B. Comme l'ensemble des points Q est fini, et que $\mathscr{G}$ opère dessus, l'orbite de Q sous $\mathscr{G}$ est finie, i.e. $\mathscr{G}_Q$ est d'indice fini dans $\mathscr{G}$ et de même Γ_Q sous Γ.

[85]N. B. Indépendamment de toute hypothèse que Γ centralise G, le normalisateur de $r(G_Q)$ dans π, égal à son centralisateur, est réduit à 1, donc $\mathrm{Norm}(r(G_Q)) \longrightarrow \mathscr{G}$ est injectif.

Je dis que l'image dans $\mathcal{G}$ du centralisateur (et même du normalisateur) de $r(G_Q)$ est $\mathcal{G}_Q$ lui même (a priori il le contient).

Revenant à $\widetilde{U}(Q)$ lui-même, cela signifie que si $g \in \mathcal{G}$ est tel qu'il existe un automorphisme $\widetilde{g}$ de $\widetilde{U}(Q)$ qui relève g, en normalisant l'action de G_Q, alors $g \in \mathcal{G}_Q$ et $\widetilde{g}$ est le relèvement évident). En effet, si $\widetilde{g}$ normalise l'action de G_Q, il invarie l'ensemble des points fixes de G_Q dans $\widetilde{U}(Q)$, qui est réduit au point $\overline{Q}$.

L'ensemble $U^!$ des points $Q \in U$ tels que $G_Q^+ \neq (1)$ est stable par l'action de $\mathcal{G}$, et s'identifie (avec cette action) à l'ensemble des relèvements maximaux modulo π de sous-groupes (cycliques) $\neq 1$ de G^+.

Quand on connaît, pour un relèvement partiel r d'un G_Q dans E, i.e. le relèvement correspondant de $\mathcal{G}_Q$, alors de même pour les conjugués de r par n'importe quel élément g (non seulement de π_1 mais même de E), par simple conjugaison. Donc les cas à déterminer correspondent pratiquement aux orbites de $\mathcal{G}$ dans $U^!$.

On peut s'intéresser à décrire $\mathcal{G} \longrightarrow \Gamma$ en tant que sous-groupes de $\mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\pi) = \Gamma'$ donnant lieu à l'extension E' de Γ' par π (donc $E \subset E'$). Mais pour tout relèvement r d'un G_Q, considérons $\mathrm{Centr}_{E'}(r)$, on a encore $\mathrm{Centr}_{E'} \cap \pi = (1)$ i.e. on trouve une section au dessus de l'image de ce centralisateur dans Γ', soit $\Gamma'(Q)$. Cette image ne dépend que de Q i.e. de la classe de π-conjugaison de r ou de $r(G_Q)$, et est remplacée par un G-conjugué quand Q est remplacé par un G-conjugué. Ceci dit, l'intersection $\Gamma'^{\natural}$ des $\Gamma'(Q)$, pour $Q \in U^!$, est un sous-groupe de Γ' qui contient l'intersection $\mathcal{G}^{\natural}$ des $\mathcal{G}_Q$, et le centralisateur de G dans $\Gamma'\natural$ contient de même l'intersection $\Gamma^{\natural}$ des Γ_Q, qui est un sous-groupe invariant d'indice fini de Γ. Et on peut alors se proposer de voir s'il est posssible de caractériser au moins le sous-groupe fini $\Gamma^{\natural}$ de Γ comme $\mathrm{Centr}_{\Gamma'^{\natural}}(G)$, et de récupérer peut être Γ comme le normalisateur de $\Gamma^{\natural}$ dans $\mathrm{Centr}_G(\Gamma)$.

Je m'intéresse plus particulièrement à la variante profini de ceci, dans le cas où $U = \mathbb{P}^1_{\mathbf{Q}} \backslash 0, 1, \infty$, $G = \mathfrak{S}_3$, $\Gamma =$ groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ de la clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$ et $p = \exp(2i\pi/6)$.

Je n'ai pas vérifier que $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Autext}_{\mathrm{lac}}(\widehat{\pi})$ soit injectif, cela m'empêche de faire des calculs dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{lac}}(\widehat{\pi})$, fussent-ils heuristiques pour le moment.

Je bute sur des ennuis de notations - trop de groupes sont désignés par la lettre Γ (avec éventuellement des primes, indices, exposants...) Il y a trois types de groupes qui interviennent dans mes réflexions :

a) Les groupes de Teichmüller et ses variantes, qui jouent le rôle de groupes “universels” opérant (éventuellement modulo isotopie) sur des surfaces, ou sur des groupes extérieurs à lacets. Ces groupes ont tendance à être infinis.

Des groupes (le plus souvent finis) opérant sur des surfaces topologiques, ou sur des courbes algébriques (sans, dans ce cas là, bouger le corps de base).

c) Des groupes de Galois profinis (donc infinis), [] de corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, opérant “arithmétiquement” sur des surfaces et leurs $\widehat{\pi}_1$-géométriques[86].

C’est à cause des analogies profondes entre les cas b) et c), et leurs relations étroites avec le cas a), que j’avais été induit à adopter des notations communes, mais qui à la longue finissent par aboutir à des collisions. Il y a donc lieu de revoir les notations. Je vais réserver la lettre G et variantes pour des actions géométriques (cas b)) de groupes, le plus souvent finis, la lettre Γ et variantes pour des groupes de Galois, la lettre $\mathcal{G}$ pour des groupes mixtes.

Quant aux groupes “universels” de type Teichmüller, comme ceux notés $\Gamma_{g,\nu}$ précédemment, je vais plutôt les noter $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_{g,\nu}$ (initiale de “Teichmüller”, alors que Γ, G sont l’initiale de Galois).

Le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ de la clôture $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$ mérite une lettre spéciale, je le noterai $\mathbb{\Gamma}$. Le quotient $\mathrm{Norm}_{\widehat{\mathfrak{T}}_{g,\nu}}(\widehat{\mathfrak{T}}_{g,\nu})/(\widehat{\mathfrak{T}}_{g,\nu})$, qui s’apparente plus à un groupe de Galois qu’à un group de Teichmüller, sera noté $\mathbb{\Gamma}_{g,\nu}$ (lettre grasse !). Dans le cas $(g,\nu)=(0,3)$ qui m’occupe plus particulièrement, $\mathbb{\Gamma}_{0,3}$[87] s’identifie au centralisateur de $G=\mathfrak{S}_3=\mathfrak{T}^+_{0,3}$ dans $\hat{\hat{\mathfrak{T}}}_{0,3}$ il est contenu dans $\hat{\hat{\mathfrak{T}}}^!_{0,3}$, et peut-être égal. On a un homomorphisme canonique $\mathbb{\Gamma}\longrightarrow\mathbb{\Gamma}_{0,3}$ (plus généralement $\Gamma\longrightarrow\Gamma_{g,\nu}$) dont j’ignore pour l’instant s’il est injectif, et encore plus s’il est surjectif. Les réflexions qui précèdent suggèrent des conditions sur l’image, qui sont surtout intéressantes si on admet les relations

$$\widehat{\pi}^{\rho}S=\widehat{\pi^{\sigma_0}}=(1)$$

[86]Les cas b) et c) se mélangent parfois (dans un groupe $\mathcal{G}$ extension d’un groupe de Galois Γ par un groupe fini G) dans le cas de la Géométrie Algébrique.

[87]$\mathbb{\Gamma}$ est ici produit semi-direct de $\mathfrak{S}_3=\mathfrak{T}^+$ par $\mathfrak{T}^!$.

On a désigné par $E_{g,\nu}$ l'extension canonique de $\mathfrak{T}_{g,\nu}$ par $\pi_{g,\nu}$ (qui pour (g,ν) anabélien s'identifie à $\mathfrak{T}'_{g,\nu+1}$). L'opération extérieure d'un groupe G, Γ, $\mathscr{G}$ définit aussi une extension par π (ou par $\widehat{\pi}$), qu'on a également désigné par la lettre E (initiale d'extension) - il y a à nouveau collisions de notations.

Je vais prendre la lettre $\mathfrak{S}$ (qui fait penser à $\mathfrak{T}$) pour ces extensions dans les cas universels à la Teichmüller, (en écrivant $\mathfrak{S}_{g,\nu}$ au lieu de $\Gamma'_{g,\nu+1}$, puisque l'optique est différente…), et en gardant la lettre E dans le cas précédent. Donc E a tendance à être une sous-extension d'un $\mathfrak{S}$.

Admettant que $\mathbb{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{\Gamma}_{0,3}$ est injectif, on aurait donc

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \widehat{\pi}_{0,3} \arrow[r] & \widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}_{0,3} \arrow[r] & \widehat{\widehat{\mathfrak{T}}}_{0,3} \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \widehat{\pi}_{0,3} \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"] & \widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}'_{0,3} \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathfrak{T}^{+}_{0,3} \times \mathbb{\Gamma}_{0,3} \arrow[r] \arrow[u, hook] & 1 \\
1 \arrow[r] & \widehat{\pi}_{0,3} \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"] & E \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathfrak{S} \times \mathbb{\Gamma} \arrow[r] \arrow[u, hook] & 1 \\
1 \arrow[r] & \widehat{\pi}_{0,3} \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathfrak{S}_{0,3} \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathfrak{S}_{3} \times \mathbf{Z}/2 \arrow[r] \arrow[u, hook] & 1
\end{tikzcd}$$

N. B. On note $\widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}'_{g,\nu}$ le normalisateur de $\widehat{\mathfrak{S}}^{+}_{g,\nu}$ dans $\widehat{\widehat{\mathfrak{S}}}_{g,\nu}$, extension de $\mathbb{\Gamma}_{g,\nu}$ par $\widehat{\mathfrak{S}}^{+}_{g,\nu}$.

Si $\gamma \in \mathbb{\Gamma}_{0,3}$, pour qu'il soit dans l'image de $\mathbb{\Gamma}$ il faut qu'il admette un relèvement u qui commute à ρ, et un relèvement qui commute à σ_0 (ce qui, dès que $\gamma \in \widehat{\widehat{\mathfrak{T}}}_{0,3}$, implique déjà que γ dans $\widehat{\widehat{\mathfrak{T}}}_{0,3}$ commute à $\mathfrak{T}^{+}_{0,3} = \mathfrak{S}_3$, i.e. qu'ils est dans $\mathbb{\Gamma}_{0,3}$). Il se pourrait que tout élément de $\mathbb{\Gamma}_{0,3}$ ait déjà cette propriété, donc que cette condition ne pose pas de restriction sur l'image de $\mathbb{\Gamma}$ dans $\mathbb{\Gamma}_{0,3}$.