Digression combinatoire (pour Réflexions t. 4)

Chap 1 Géométrie des ens de cardinal ≤ 4

NB Paire polygônes des sommets, et dualité rigidement...

Chap 2 L'icosaèdre grandes : ces trois perspectives

~~Orientations~~ $\alpha(F) \in \Omega(S)$ défini par les trois perspectives

Chap 3 Biicosaèdres : ces trois perspectives. $\mathrm{Ic}(S) \simeq S^* \times \omega(S) = \mathrm{Bic}(S)$

Chap 4 Dualité des hexagrammes / pour bihexagrammes

1. L'autodualité $\mathrm{Ens}_6 \simeq \mathrm{Ens}_6$ décrite via $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{Aut}(S^*)$
Application aux groupes d'automorph. des biicosaèdres et icos.

2. Structure biicosaèdrale par coloriage des arêtes

3. L'autodualité (trois perspectives)
a) $\forall s \in S$, $s^* \in S^*$ $S \setminus \{s\} \simeq S^* - \{s^*\}$
b) $R \in \ldots \mathrm{Ar}(S) \times \mathrm{Ar}(S^*)$
c) $P_{3,3}(S) \simeq P_{3,3}(S^*)$ avec axiomes

4. Le dictionnaire de la dualité

A) $\mathrm{Ens} \simeq \mathrm{Ens}(1,5) \simeq$ Biicos.
$\mathrm{Ens}_5^+ \simeq \mathrm{Ens}^+(1,5) \simeq$ Icos

B) $\mathrm{Ens}_2 \times \mathrm{Ens}_4 \simeq \mathrm{Ens}_{2,2,2} \simeq \mathrm{Cub}_3$

C) $\mathrm{Ens}_{3,3} \simeq \mathrm{Ens}_{3,3}$ dualité Notion bidiffrides $\equiv$ diffrides

A') Biicos. + sommets $\simeq$ $\mathrm{Bipunct}_5$
Icos + — $\simeq$ Punct_5

B') Biicos + ar. $\simeq$ $\ldots \times$ Car $\ldots \mathrm{Ens}_2 \times \ldots$
Car
longueurs
automorphismes de $\mathrm{Ens}_2 \times$ Car

C') Biicos + bifaces $\simeq \mathrm{Ens}_2 \times \mathrm{Ens}_3$ ~ (Hexagones)
$\alpha \times f \leftarrow (\alpha, f)$

renvoi au Chap 3

154

3/)

TSVP

155

B_1) $\mathrm{Can}(S) \simeq \mathrm{Can}(S^*)$

explicitement

$\varepsilon \cdot \square \; S(Q)$ $\longleftrightarrow$ $\varepsilon^* \cdot \square \; S(Q^*)$

$\varepsilon \wedge \varepsilon^* \wedge \omega(Q) = 1$
$\omega(Q) = \omega(Q^*)$
$Q^* \simeq \varepsilon \wedge Q$, $Q \simeq \varepsilon^* \wedge Q^*$

C_1) Relation avec les données d'un ~~espace~~ plan affine V sur $\mathbb{F}_3$

i.e. ~~card~~ $\mathrm{Card}(E = P(V)) = 4$, ~~Aut~~

$G_{P(V)} \simeq \underline{\mathrm{Aut}}(V)(\mathbb{F}_3) \simeq GL(2, \mathbb{F}_3)$

et une partition (ou antipodalisme) (2,2) de E

i.e. structures connues sur E.

$\mathrm{card}(E_i) = 3$ $i \in E$

$V \xrightarrow{p_i} E_i$

$V \subset \prod E_i$

$E_i \times E_j \simeq V$ pour $i, j \in E$, $i \neq j$

Groupe d'automorphismes trilatéraux d'ordre $3^3 \times 2^4 = 3 \cdot 144$

Opère sur G_ε $\qquad \varepsilon = \coprod_{i \in E} E_i$

et laisse invariant ~~trois~~ un sous-G_α des 3 sous-groupes

$(\alpha \in$ ~~Aut~~ $\mathrm{Can}(E) = \mathrm{Antip.}(E))$ Le stabilisateur d'un G_α est le groupe des automorphismes d'une bi-dérivation Opérant

fidèlement sur G_α, sous groupe d'ordre 16 des $\mathrm{Aut}(G_\alpha)$ (d'ordre $8 \cdot 2 \cdot (8!)$)

Les G_α ont un 3-sous-groupe commun, et V

V_0 Sylow en indicatrices ... invariant

la ~~...~~ de V ... centralisateur ... de

et V/V_0 ... groupe (V_0) ... Note G_α (sous-V covr.)

(3') 1, 2, 3 $\quad$ $\mathrm{Ens}_2 \times \mathrm{Ens}_3$

(1) (1, 5) $\longleftrightarrow$ (bi-icosaèdre)

(2) {(2, 4) $\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2$; (2, 2, 2) i.e. cube (ou as. orienté) ext. de $\mathfrak{S}_3$ par $\mathfrak{S}_2^3$ } $\longrightarrow$ on a une 2 structure bi-icos. i.e. 4 str. icos. fermées en deux paires d'opposées

(3) (3, 3) ext. de $\mathfrak{S}_2$ par $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$

$F_3^2 \simeq Syl_3$

$D_4 \times \mathbb{F}_2 \simeq Syl_2$

paires comme rubriques (2, 3)

(2') $\left(\vdots \; \boxtimes \right) \longleftrightarrow \left(\vdots \; \boxtimes \right)$

$\varepsilon \quad a_Q \quad Z_Q \quad = \quad a_Q \quad Z_Q \quad \varepsilon^*$

$\boxed{Q^* = \varepsilon \wedge Q^\vee \quad Q \simeq \varepsilon \wedge Q^{*\vee}}$

$\omega(Q) \simeq \omega(Q^*) = \omega$

$\boxed{\varepsilon' \wedge \varepsilon \wedge \omega = 1}$

$\overbrace{\varepsilon \wedge \mathrm{codiag}\, Q}^{\omega(S)} \simeq \overbrace{\varepsilon^* \wedge \mathrm{codiag}\, Q^*}^{\omega(S^*)}$

i.e. $\underbrace{\varepsilon \wedge \varepsilon^*}_{\omega} \wedge \mathrm{codiag}^{\vee} Q \wedge \mathrm{codiag}\, Q^* \simeq 1$

d'où $\mathrm{codiag}\, Q^* \simeq \mathrm{diag}\, Q$

(1'') 1 + bipentagone $\longleftrightarrow$ 1 + bipentagone $\quad$ | bicos. + demi

le ϖ!

1 + pentagone $\longleftrightarrow$ 1 + pentagone $\quad$ | icos. + demi

(2'') 1 | 1 |  $\longleftarrow$ comparer avec 2'

bicos. + orient.

Q^* | $\varepsilon \simeq \omega(Q^*)$

icos. + or.

- - - - 8

4

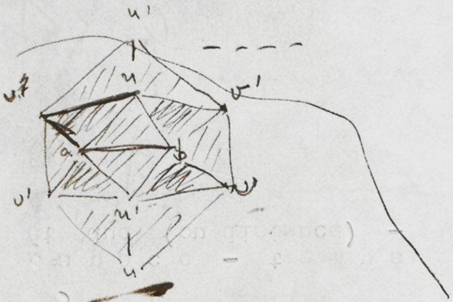
(3'') 

- - - - - - - comparer 3'

~~a, a', u, b, u'~~

bicos. + bi... on ... $f \times \varepsilon$

icos + f... on pr. en $f \times \{0, 1\}$



Programme icosaèdre

$\{a, b\} \wedge \{u, u'\} \to \{v, v'\}$

~~$\{a, b\} \wedge$~~ $\quad a \wedge u = v$

$a \wedge u' = u'$

$\underbrace{\{a, b\} \wedge \{u, u'\}}_{\mathrm{codiag}\,(Q)} \wedge \{v, v'\} \simeq$ [illegible] $\mathrm{diag}\, Q$

$\{a, b\} \simeq \omega(Q)$

(*) ... deux structures icosaédrales dans la bi-icosaèdre

$\mathrm{diag}(Q)$ / Mais on $\simeq$ ... $(S \amalg \varepsilon) \simeq \omega(S) \wedge \varepsilon \simeq \mathrm{codiag}(Q) \wedge \varepsilon \simeq \mathrm{diag}\, Q$ ok!

156

157

~~IV''5~~ V''4 ~~Avenir - passé~~ Désir

Avenir - Passé
destinée - histoire
pérennité - ancienneté
innovation - tradition (III)
~~le nouveau - l'ancien~~
~~élan - ...~~
élan - enracinement (II)

~~IV''6~~ V''5 Espace-temps

Espace - temps
étendue (ou distance) - durée
~~ubiquité - éternité~~

= ? ?

complément t. d. m.
mis en page (+ harmonie) liste
feuille couverture
dessins ...

98 (*) texte bon

~~99~~ (**) Plusieurs existences successives

100 (*) texte bon

(*) Elle qui m'a pourvu de lui. Comparer note n° 162, b. d. p. (*) p. 789 "conviction et connaissance"

(**) Réf cours 1977. Frustration.

103 (*) Autre perspective.

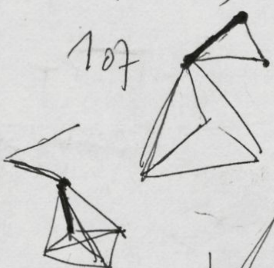
107 (*) Mais pas encore ... la multiplicité ... (abc) bcn (ac)n

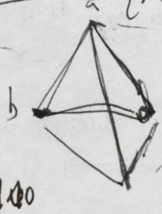
(**) Copie ... délibérée a b c'

(***) chaînes ... logiques

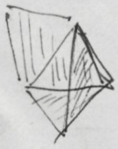
je n'ai pas communiqué

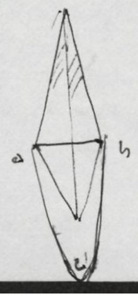
ac
bc
ab
c'a
c'b'

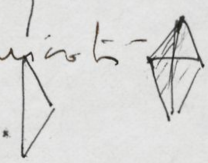




100







Trialité des bi-ditriades

On peut voir la structure de deux façons, soit par une voie : 5 éléments V (supplément affine sur F_3), soit par l'autre : 12 éléments E (ensemble des droites de V). Relations d'incidence entre E et V.

NB E est dans un plan projectif sur F_3 privé d'un point.

A) La structure sur V revient à la donnée d'une partie E de $P_3(V)$, telle que

$$\begin{cases} \mathrm{card}\, E = 12 \\ \forall a, b \in E, \text{ on a } \mathrm{card}\, a \cap b \leq 1 \end{cases}$$

~~En fait~~

~~B~~
B) Structure sur E : 1) partition des parties en classes de 3 éléments (partition en les quatre directions de droites) $E = \coprod_{i \in I} E_i$

2) ~~Ens~~ V de parties : 4 éléments de E (ensemble des droites passant par un point de F_3) sous les propriétés

a) Toute ~~droite~~ $D \in V$ rencontre chaque E_i en un (au moins) pt (ie : au plus un, ~~...~~ ~~(donc D...)~~ $D \to I$ est bijectif)

b) Si $D, D' \in V$, $D \neq D'$, alors $\mathrm{card}\, D \cap D' = 1$

NB b) résulte de a) et c)

c) Si $a, b \in E$ n'appartiennent pas à un même E_i, $\exists$ unique $D \in V$ qui y passe. (unicité provient d'ailleurs de b))

NB c implique déjà que $\mathrm{card}\, V = 9$, et compte tenu de a), que par tout point $a \in E$ passent exactement 3 "droites".

158

Géométrie des ens. finis (de card ≤ 3) (Plan)

I Ens : deux éléments

1. Produit contracté (deux interprétations) $\mathfrak{S}_2 \simeq \pm 1 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_3^*$
2. Orientation d'un ens fini ($\omega(E)$). Associativité ; liens avec orientation des vectoriels réels, ou des vectoriels orthogonaux (car $\neq 2$), ou des vectoriels sur $\mathbb{F}_3$.
3. Hypercubes et antipodismes. Orientation [illegible]
4. Carrés (sans liens avec carrés et cubes ordinaires)

II Ens : trois éléments

1. 2-vectoriels sur $\mathbb{F}_2$ (ou ~~[illegible]~~ droite projective sur $\mathbb{F}_2$) : $\mathfrak{S}_3 \simeq GL(2,\mathbb{F}_2) \simeq SL(2,\mathbb{F}_2) \simeq GP(1,\mathbb{F}_2)$
2. Droites affines sur $\mathbb{F}_3$. Application aux ditriades biditriades.
$\mathfrak{S}_3 \simeq Aff(1,\mathbb{F}_3)\ (\to \mathbb{F}_3^* \simeq \pm 1)$
~~3. Quadritriades (ou tri-biditriades)~~
$1 \to \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3 \to$ Aut d'une biditriade $\to$ [illegible] $\to 1$

III Ens : quatre éléments

1. ~~Espace~~ Plan affine sur $\mathbb{F}_2$: $\mathfrak{S}_4 \simeq Aff(2,\mathbb{F}_2)$
2. Liens avec cubes : $\underline{Ens}_4 \times Ens_2 \approx \underline{Cub}_3$
$\mathfrak{S}_4 \simeq Aut^+(Cub_3) \simeq$ [illegible] aut. d'un vect. de dim 3 sur $\mathbb{F}_3$ qui invariant un syst. de trois droites formant base
3. Liens avec rapport anharmonique
4. Droite projective sur $\mathbb{F}_3$ $\mathfrak{S}_4 \simeq GP(1,\mathbb{F}_3)$
5. Les quadritriades (ou ~~tri~~ biditriades).

$$1 \to (\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3)' \to \text{Aut d'une quadritriade} \to \mathfrak{S}_4 \to 1$$

$(\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3)' = \{(u,v) \mid \varepsilon(u)=\varepsilon(v)\}$, Aut d'une quadritriade $\simeq Aff(2,\mathbb{F}_3)$

IV Ens : 5 éléments

1. ($\mathfrak{S}_5^+ \simeq GP(1,\mathbb{F}_4)$) Droite proj. sur corps à 4 éléments
$\mathfrak{S}_5 \simeq$ Aut. droite projective sur un corps à 4 élém. non précisé
Si E droite proj. sur $k \simeq \mathbb{F}_4$ alors $\omega(E) \simeq (k^* \setminus \{1\})$ = ens des deux gén. de k sur $\mathbb{F}_2$
Explicitez rapport anharmonique
2. $\mathfrak{S}_5 \simeq GP(1,\mathbb{F}_5)$ sera développé avec th. de l'icosaèdre

159

V Théorie combinatoire des ens : 6 élément et des bicosaèdres [Peut être scindé en deux : A) Icosaèdre et bicosaèdre
B) géométrie des ens : 6 éléments]
Voir plus détaillé ailleurs...

~~VI~~

<u>Appendice</u> Polygones combinatoires.

Pour bien faire, il faudrait un exposé sur les relations géométriques des configurations envisagées ici...

160