STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

A. GROTHENDIECK

Structure à l'infini des $M_{g,\nu}$

La "Longue Marche" à Travers la Théorie de Galois

https://grothendieck.umontpellier.fr/archives-grothendieck/

Ce texte a été déchiffré et transcrit par Mateo Carmona

https://agrothendieck.github.io/

SOMMAIRE

§ VII. —STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

Soit k un corps algébriquement clos. Une "courbe standard" sur k es une schéma X sur k satisfaisant les conditions suivantes :

a) X quasi-projectif, toute composante irréductible est de dim 1

b) Tout point de X est soit lisse, soit un "point quadratique" (ordinaire) - i.e. isom (loc. ét) à la courbe Spec($k[X,Y]/XY$) au point 0.

Il est connu qu'on peut [] $\widehat{X}$ de X, telle que X soit un schéma propre, [] X s'identifie à un ouvert dense de $\widehat{X}$, et que $\widehat{X}$ soit lisse sur les points de $\widehat{X}\backslash X = I$. Alors $\widehat{X}$ est une courbe projective, I est une partie finie de $\widehat{X}(k)$ contenant [] ouvert des points des lissité de $\widehat{X}$. [] A des points singuliers de X s'identifie à []

La donnée de X équivaut à celle des $(\widehat{X}, I)$, où $\widehat{X}$ est un schéma projectif, dont toute composante irréductible est de dim 1, et dont l'ensemble singulier est formé des points [] ordinaires - et I est un sous-schéma fini étale de $\widehat{X}^{lisse}$, ou ce qui revient au même, une partie fini de $\widehat{X}^{lisse}(k)$.

Soit

Ainsi, à la courbe standard X nous avons associé les systèmes de données suivantes :

[]

Inversement, [] on construit une courbe standard X en passant au quotient dans $\widetilde{A}_k Y\backslash I_k$ par l'involution σ - i.e. X est universel [] pour la donnée p:

[]

soumise à $(pi)\sigma = pi$.

Ainsi la catégorie des courbes standard sur k [] apparaît comme équivalente à celle des systèmes a) b) c) ci-dessus. (pour les iso)...

N.B. On récupère $\widehat{X}$ comme quotient de Y par σ.

Généralisation sur une base quelconque.

Une *courbe standard* sur S (multiplicité schématique, disons) [] défini constructivement en termes d'un système a), b), c) comme ci-dessus, i.e.

[]

On construit alors $\widehat{X} = Y/\sigma$, contenant $A = \widetilde{A}/\sigma$ et I comme sous-schémas fermés finis étales sur S, et [] $X = \widehat{X} \backslash I$. On peut montrer que le foncteur

$$(Y, \widetilde{A}, \widehat{I}, \sigma_{\widetilde{A}}) \mapsto X$$

des systèmes (5) (pour les iso) vers les schémas relatifs [], est *pleinement fidèle* ([1]).

N.B. []

[]

(par abus de langage, puisque c'est non seulement le schéma relatif Y, mais Y avec la structure supplémentaire $\widetilde{A}, I, \sigma_{\widetilde{A}}$...).

2. Graphe associé à une courbe standard

Revenons au cas d'un corps de base k algébriquement clos, pour commencer. Soit X une courbe standard, d'où $Y, I, \widetilde{A}, \sigma_{\widetilde{A}}$.

Posons

(7) $$S = \pi_{\circ}(Y) \simeq \text{ [] des corps irréductibles de } X$$

On a alors le diagramme d'application canoniquement entre ensembles finis

(8) []

où q est de degré 2 et définit l'involution $\sigma_{\widetilde{A}}$. Les applications σ et p sont induites par les [] en passant aux $\pi_{\circ}$.

[1]faux tel quel

Le système $(\widetilde{A} \xrightarrow{\sigma} S, \sigma_{\widetilde{A}})$ où [], peut être considéré comme définissant un *graphe*, dans S est l'un des sommets, et $\widetilde{A}$ l'un des [] l'application σ étant l'application "origine d'un []". Ce graphe ne dépend que de $\widehat{X}$, pas de X i.e. des choix de $I \subset \widehat{X}(k)$. C'est [] compte de ce choix que l'on considère, [] plus de la structure de graphe, le donnée supplémentaire

$$I \longrightarrow S \tag{9}$$

Le graphe indique comment les composantes irréductibles de X (figurés par les sommets) se récupèrent deux à deux - les points d'intersections, i.e. les points singuliers ("doubles" []) de X, correspondant aux arêtes. Si une composante irréductible X_α correspond au sommet α des graphes, alors les [] fermés en α correspondent bieunivoquement aux points doubles de X_α - donc [] X_α sont lisses [] l'extrémité.

Il est clair que tout graphe fini peut être obtenue (à iso près) par une $\widehat{X}$ convenable - et même avec des composantes X_α de genre g_α donné (i.e. des $\widetilde{X}_\alpha$ de genre g_α...). De plus, [] $I \longrightarrow S$ (I [] fini), cela peut être réalisé par un $I \subset \widehat{X}^{lisse}$, i.e. par une courbe standard S.

La *maquette* d'une courbe standard X consiste, pour définition, en les donnes suivantes []

Une structure formée d'une graphe fini $G = (S, \widetilde{A}, \sigma)$, d'une ensemble fini I au dessus de l'une des sommets de G, et d'une application "genre": $S \xrightarrow{g} \mathbf{N}$, [] appelé ici une "maquette".

Proposition. — *Considérons la maquette d'une courbe standard X*

a) Soient $\alpha, \beta \in S$, alors α, β appartiennent à la même composante connexe de graphe G, si et seule si X_α et X_β appartiennent à la même composante connexe de X. Donc on a une bijection canonique

$$\pi_0(G_X) \simeq \pi_0(X), \tag{11}$$

en particulier X est connexe si et seule si G_X est connexe.

b) Supposons X connexe i.e. $\widehat{X}$ connexe, i.e.[] on a alors [] i.e. [] où []

.

3. Courbes "stables" et MD-graphes

Une courbe standard (sur k algébriquement clos) est "stable", si elle satisfait à l'un des conditions équivalentes suivantes

a) $\operatorname{Aut} X$ est fini

b) Pour tout α, $(Y_\alpha, I_\alpha \cup \widetilde{A}_\alpha)$ est anabélien i.e. $2g_\alpha + \widehat{\nu}_\alpha \geq 3$ i.e. $2g_\alpha - 2 + \widehat{\nu}_\alpha \geq 1$, i.e.

   1) Si $g_\alpha = 1$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 1$

   2) Si $g_\alpha = 0$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 3$

c) Tout champ de vecteurs sur Y nul sur $I \cup \widetilde{A}$ est nul.

d) $\underline{\operatorname{Aut}}_{(Y, \widetilde{A}_k, I)}$ est un schéma en groupes fini étale sur k. On voit que cette condition (sous la forme b)) ne dépend que de la *maquette* de la courbe. On dit que X est une *MD-courbe* (MD, initiale de "Mumford-Deligne" ou de "modulaire") si elle est stable, et 0-connexe (i.e. connexe non vide).

Les maquettes de telles courbes sont les maquettes 0-connexes et stables (i.e. dont les sommets de guère 1 sont de poids total ≥ 1, et les sommets de guère 0 sont de poids total ≥ 3), on les appellera les MD-graphes.

NB. Une maquette est une MD-graphe si et seule si

a) elle est 0-connexe (i.e. le graphe G est connexe $\neq \varnothing$)

b) elle n'est pas réduit à un seul sommet de guère 1, de poids total 0 [ ]

c) les sommets [ ]

Proposition. — *Si* $(G = (S, \widetilde{A}, \sigma), I, \underline{g} : S \longrightarrow \mathbf{N})$ *est une MD-graphe, son type* (g, ν) *est anabélien, i.e.* $2g + \nu \geq 3$.

Si on avait $g = 1$, $\nu = 0$, alors la relation

$$g = 1 = \sum g_\alpha + h_1$$

montre que ou bien tous les g_α sont nuls et h_1 [], ou bien tous les g_α sauf une g_{α_0} sont nuls, []

[]

Soit G une maquette. On dit qu'une courbe standard sur un corps algébriquement clos est *de type* G, si sa maquette est isomorphe à G, on dit qu'elle est *G-épinglée* si on se donne un isomorphisme entre se maquette et G (c'est donc une structure []).

Soit $(\widehat{X}, \underline{I})$ une courbe standard sur une base S quelconque, on dit qu'elle est de type G si ses fibres géométriques sont de type G. Alors les maquettes des fibres géométriques de $(\widehat{X}, \underline{I})$ forment les fibres d'une schéma en maquettes (ou un MD-graphe) sur S $(\underline{S}, \underline{\widetilde{A}}, \sigma_{\underline{\widetilde{A}}}, \underline{I}, \underline{\widetilde{A}} \longrightarrow \underline{S}, \underline{I} \longrightarrow \underline{S}, \underline{S} \xrightarrow{g} \mathbf{N}_S)$ (système de revêtements finis étales de S et de morphismes entre ceux-ci), localement isomorphe à la maquette G donnée. On appelle G-épinglage entre $(\widehat{X}, \underline{I})$ tout isomorphisme entre G_S et $\underline{G}(\widehat{X}, \underline{I})$. Si

$$\Gamma = \operatorname{Aut} G \tag{18}$$

(groupe fini), les G-épinglages de $(\widehat{X}, \underline{I})$ s'identifient aux sections d'une certain Γ_S-torseur, appelé *torseur de G-épinglages* de $(\widehat{X}, \underline{I})$.

Considérons, sur une base S fixée, le catégorie ([]) des courbes standard G-épinglées. Pour tout $\alpha \in S$

N.B. Si $\operatorname{card} J = \nu$, alors

[] Il en est donc de même dans $M_{g,J}$, donc ainsi de M_G (pour G semi-stable) et de $M_{[G]} = (M_G, \Gamma)$.

4. La théorie de Mumford-Deligne

Soient S une multiplicité schématique, X une schéma relatif sur S, propre sur S, $\underline{I}$ une sous-schéma fermé de X. On dit que $(X, \underline{I})$ est une MD-courbe relative sur S, si X, $\underline{I}$ sont plats de présentation finie sur S, et si pour tout point géométrique de S, la fibre $(X_{\bar{s}}, \underline{I}_{\bar{s}})$ est une MD-courbe géométrique sur $k(s)$ i.e. $X_{\bar{s}}$ est 0-connexe, de dimension 1, [] c'est une fonction localement constant sur S.

Fixons nous une type numérique (g, ν) *anabélien* $(2g + \nu \geq 1)$, et considérons, pour S variable, le groupoïde fibré

$$S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}(S) = \text{ MD-courbes relatives sur } S, \text{ de type numérique égal à } (g, \nu) \tag{24}$$

On a alors le vraiment [] théorème suivant :

Théorème de Mumford-Deligne ([2]). — *Le groupoïde fibré* $S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}/S$ *sur* Sch *(plus générale-ment, sur les multiplicités schématiques...) est représentable pour une multiplicité schématique* $\widehat{M_{g,\nu}}$*, qui est* lisse *et* propre *sur* Spec $\mathbf{Z}$*, D'autre part* $M_{g,\nu}$ *est un ouvert de Zariski de* $\widehat{M_{g,\nu}}$*, schématiquement dense fibre par fibre.*

On en déduit aisément p. ex. la connexité des fibres géométriques
[]. Nous allons revenus là dessus maintenant.

5. Spécialisation des MD-graphes

Soit

6. Morphismes de [] de graphes et de maquettes

7. Étude des [] de dim ≤ 2 [] détermination des graphes correspondantes

8. Structure []

9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ([] MDT-structure) : cas [],

10. Structures MDT analytiques : []

11. Digression : [] Structure à l'infini des groupoïdes fondamentaux

12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une [] et leur dévissages en "topos élémentaires"

13. Digression sur stratification "locales" []

Une *stratification globale*

[2] On suppose $2g + \nu \geq 3$ (cas anabélien)