C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 1144-1147 (8 décembre 1971) Série A

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Polarisations des catégories tannakiennes : cas homogène.* Note (*) de M. **Neantro Saavedra Rivano**, transmise par M. Henri Cartan.

Dans cette Note, on définit et on étudie des « structures de positivité » sur des $\otimes$-catégories de la forme Rep_0 (G) pour G un **R**-groupe algébrique affine, et plus généralement sur des catégories tannakiennes sur **R** [*voir* (1), 2.1].

On donne un sous-corps K de **R** (qui sera **R** lui-même à partir du 2.3) et une catégorie tannakienne C sur K [par exemple, Rep_0 (G) pour un K-groupe affine G] dont les objets seront notés V, W, ... Enfin, Z désigne le K-groupe affine abélien, centre du lien de C; on a un isomorphisme canonique

$$Z \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}^{\otimes}(\mathrm{id}_C).$$

1. Formes de Weil. — 1.1. Si $\varphi : V \otimes V \to 1$ est une forme bilinéaire non-dégénérée sur V à valeurs dans l'objet unité de C, on définit la *parité* ε_φ de φ comme le seul endomorphisme de V vérifiant

$$\varphi \circ (\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon_\varphi) = \varphi \circ \sigma_V, \tag{1.1.1}$$

où $\sigma_V : V \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes V$ est la symétrie canonique donnée par la contrainte de commutativité sur la loi $\otimes$ de C. On définit aussi, si $u \in \mathrm{End}(V)$, le transposé u^φ de u relativement à la forme φ; on a

$$\varphi \circ (u \otimes \mathrm{id}_V) = \varphi \circ (\mathrm{id}_V \otimes u^\varphi); \tag{1.1.2}$$

$$(u^\varphi)^\varphi = \varepsilon_\varphi\, u\, \varepsilon_\varphi^{-1}. \tag{1.1.3}$$

Définition 1.2. — Une forme bilinéaire non-dégénérée $\varphi : V \otimes V \to 1$ est appelée une *forme de Weil* si ε_φ est dans le centre de End (V) et si, pour $u \in \mathrm{End}(V)$, $u \neq 0$, on a $\mathrm{Tr}(uu^\varphi) > 0$. Deux formes de Weil $\varphi : V \otimes V \to 1$, $\psi : W \otimes W \to 1$ sont *compatibles* si $\varphi \oplus \psi$ est une forme de Weil sur $V \oplus W$.

1.3. Si ε est un automorphisme de V central dans End (V), la relation de compatibilité pour des formes de Weil sur V de parité ε est une relation d'équivalence; l'ensemble quotient sera noté $w_\varepsilon(V)$. Si $V_{\mathbf{R}} = V \otimes_K \mathbf{R}$ est l'objet déduit de V dans la catégorie tannakienne $C_{\mathbf{R}}$ sur **R** obtenue de C par extension des scalaires de K à **R** (2), il résulte aussitôt de la densité de K dans **R** qu'on a une bijection canonique

$$w_\varepsilon(V) \simeq w_\varepsilon(V_{\mathbf{R}}). \tag{1.3.1}$$

Si V est un objet semi-simple de C et φ une forme de Weil sur V, pour tout sous-objet V′ de V, la restriction $\varphi_{V'}$ de φ à V′ est une forme de Weil sur V′, compatible avec φ. De plus, l'ensemble $w_\varepsilon(V)$ $(\varepsilon = \varepsilon_\varphi)$ est fini et a 2^r éléments, où r est le nombre de composantes isotypiques de V.

Exemple 1.4. — Soient G un **R**-groupe affine, $C \in G(\mathbf{R})$ tel que $C^2 \in Z(\mathbf{R})$, où Z est le centre de G. On pose $C = Rep_0$ (G). Si V est un objet de C,

61

une forme $\varphi : V \otimes V \to 1$ est appelée une forme de C-*polarisation* si la forme bilinéaire φ_C sur le **R**-vectoriel V

$$\varphi_C(x, y) = \varphi(x, C_V y).$$

est symétrique définie positive. L'existence d'une telle forme sur V entraîne que V est un objet semi-simple, et la parité de φ est C_V^2. Si φ est une forme de C-polarisation sur V, φ' une forme de Weil sur V de même parité C_V^2, φ et φ' sont compatibles si et seulement si φ' est aussi une forme de C-polarisation. Enfin, si φ (resp. ψ) est une forme de C-polarisation sur V (resp. W), $\varphi \oplus \psi$, $\varphi \otimes \psi$ sont des formes de C-polarisation sur $V \oplus W$, $V \otimes W$ respectivement.

Remarque 1.5. — La définition de forme de Weil peut être généralisée de façon évidente pour des formes bilinéaires non dégénérées $\varphi : V \otimes V \to T$ à valeurs dans un objet inversible T. Les résultats énoncés ici restent valables dans ce contexte.

2. Polarisations.

Définition 2.1. — Soit $\varepsilon \in Z(K)$. Une ε-*polarisation* (homogène) π de C consiste en la donnée pour chaque objet V de C d'une classe d'équivalence $\pi(V)$ des formes de Weil de parité ε_V sur V; on exige que si $\varphi \in \pi(V)$, $\psi \in \pi(W)$, alors

$$\varphi \oplus \psi \in \pi(V \oplus W) \qquad \text{et} \qquad \varphi \otimes \psi \in \pi(V \otimes W).$$

L'élément ε sera appelé la *parité* de π et noté $\varepsilon(\pi)$.

2.2. L'ensemble des polarisations de C sera noté Pol (C), celui des ε-polarisations, $\mathrm{Pol}_\varepsilon(C)$. Les polarisations de parité 1 sont appelées *symétriques*. La parité définit une application

$$\varepsilon : \mathrm{Pol}(C) \to Z(\mathbf{R}). \tag{2.2.1}$$

Si Pol $(C) \neq \varnothing$ on prouve facilement que la catégorie C est semi-simple. Si C est présentée comme réunion filtrante de ses sous-catégories tannakiennes algébriques [*voir* [1], 2.3], $C = \varinjlim C_i$, on prouve qu'on a

$$\mathrm{Pol}(C) \simeq \varprojlim \mathrm{Pol}(C_i). \tag{2.2.2}$$

D'autre part, si $\varepsilon \in Z(K)$, il résulte de (1.3.1) qu'on a une bijection canonique

$$\mathrm{Pol}_\varepsilon(C) \simeq \mathrm{Pol}_\varepsilon(C_{\mathbf{R}}), \tag{2.2.3}$$

où $C_{\mathbf{R}}$ est la catégorie tannakienne sur **R** obtenue par extension des scalaires de K à **R** [2]. Les isomorphismes (2.2.2), (2.2.3) justifient la convention suivante :

Convention 2.3. — *Dans la suite de cette Note, C est une catégorie tannakienne algébrique sur* **R**.

62

2.4. Supposons $\mathrm{Pol}(C) \neq \emptyset$. Ceci entraîne que le lien de C est réductif, et que le $\mathbf{R}$-groupe algébrique affine Z est compact; rappelons qu'un $\mathbf{R}$-groupe algébrique affine H est dit *compact* si $\mathrm{H}(\mathbf{R})$ est compact et Zariski-dense dans H. En particulier, on a des isomorphismes canoniques

(2.4.1) $$\mathrm{H}^1(\mathbf{R}, \mathrm{Z}) \simeq {}_2\mathrm{Z}(\mathbf{R});$$

(2.4.2) $$\mathrm{H}^2(\mathbf{R}, \mathrm{Z}) \simeq \mathrm{Z}(\mathbf{R})/\mathrm{Z}(\mathbf{R})^2.$$

Le groupe $\mathrm{Z}(\mathbf{R})$ agit sur l'ensemble $\mathrm{Pol}(C)$ de la façon suivante : si

$$\pi \in \mathrm{Pol}(C), \quad z \in \mathrm{Z}(\mathbf{R}), \quad \mathrm{V} \in \mathrm{ob}\, C, \qquad \varphi \in (z\,\pi)(\mathrm{V}) \iff \varphi \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes z_{\mathrm{V}}) \in \pi(\mathrm{V});$$

on a d'autre part

(2.4.3) $$\varepsilon(z.\pi) = z^2.\varepsilon(\pi).$$

D'autre part, le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{L}}(C)$ des classes d'isomorphisme d'équivalences de C avec elle-même liées par l'identité du lien L de C agit sur $\mathrm{Pol}(C)$ par transport de structure, et on sait par [(1), 1.6] qu'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Aut}_{\mathrm{L}}(C) \simeq \mathrm{H}^1(\mathbf{R}, \mathrm{Z})$. Si on identifie $\mathrm{Aut}_{\mathrm{L}}(C)$, avec ${}_2\mathrm{Z}(\mathbf{R})$ par (2.4.1), on vérifie que l'action de ${}_2\mathrm{Z}(\mathbf{R})$ sur $\mathrm{Pol}(C)$ obtenue ainsi coïncide avec l'action déduite de l'action précédente de $\mathrm{Z}(\mathbf{R})$.

Exemple 2.5. — Soient G un $\mathbf{R}$-groupe algébrique affine, $\mathrm{C} \in \mathrm{G}(\mathbf{R})$ tel que $\mathrm{C}^2 \in \mathrm{Z}(\mathbf{R})$. On pose $C = Rep_0(\mathrm{G})$. Si pour chaque objet V de C il existe une forme de C-polarisation sur V (*voir* 1.4), l'ensemble de ces formes définit une polarisation π_{C} de C, de parité $\varepsilon(\pi_{\mathrm{C}}) = \mathrm{C}^2$ [*voir* (3), 5.1]. Un élément C définissant une polarisation du type π_{C} est appelé *hodgien*, et une polarisation du type π_{C} est appelée *hodgienne*. Enfin, G est dit *hodgien* s'il existe un élément hodgien dans $\mathrm{G}(\mathbf{R})$. On prouve [*voir* (4), 2.8] que C est hodgien si et seulement si la forme G_{C} de G définie par la conjugaison $g \mapsto \mathrm{C}\,\bar{g}\,\mathrm{C}^{-1}$ sur $\mathrm{G}(\mathbf{C})$ est compacte (au sens de 2.4). Si C, C′ sont des éléments hodgiens, on a $\pi_{\mathrm{C}} = \pi_{\mathrm{C}'}$ si et seulement s'il existe $z \in \mathrm{Z}(\mathbf{R})$ (nécessairement unique), $g \in \mathrm{G}(\mathbf{R})$ tels que $\mathrm{C}' = zg\,\mathrm{C}\,\bar{g}^{-1}$. Enfin, G est hodgien si et seulement s'il est réductif et est une forme tordue *intérieure* de sa forme compacte K; ceci revient aussi à dire que le lien de G est le lien d'un $\mathbf{R}$-groupe compact.

3. Classification des polarisations; liens polarisables.

Proposition 3.1. — *L'ensemble* $\mathrm{Pol}(C)$ *est un pseudo-torseur* (i. e. vide ou un ensemble principal homogène) *sous l'action de* $\mathrm{Z}(\mathbf{R})$ (2.4); *de même, si* $\varepsilon \in \mathrm{Z}(\mathbf{R})$, $\mathrm{Pol}_\varepsilon(C)$ *est un pseudo-torseur sous* ${}_2\mathrm{Z}(\mathbf{R})$.

3.2. Il résulte de cette proposition et de (2.4.3) que pour $\pi \in \mathrm{Pol}(C)$ l'image de $\varepsilon(\pi)$ dans $\mathrm{Z}(\mathbf{R})/\mathrm{Z}(\mathbf{R})^2$ est indépendante de $\pi \in \mathrm{Pol}(C)$ et détermine donc, par (2.4.2), une classe de cohomologie $\varepsilon_C \in \mathrm{H}^2(\mathbf{R}, \mathrm{Z})$ chaque fois que $\mathrm{Pol}(C) \neq \emptyset$. On peut interpréter ε_C comme l'obstruction à l'existence sur C d'une polarisation symétrique (2.2).

63

Théorème 3.3. — *Soit C une catégorie tannakienne de lien* L. *Alors, si C est polarisable* [i. e. Pol $(C) \neq \emptyset$], *toute catégorie tannakienne de lien* L *est polarisable. De plus, l'application*

$$(3.3.1) \qquad H^2(\mathbf{R}, L) \to H^2(\mathbf{R}, Z), \qquad C \mapsto \varepsilon_C.$$

qu'on en déduit [*voir* (1), 1.6] *est compatible avec les actions de* $H^2(\mathbf{R}, Z)$ [*voir* (5), 3.3, où on munit $H^2(\mathbf{R}, L)$ d'une structure de pseudo-torseur sous $H^2(\mathbf{R}, Z)$], *et en particulier est une bijection.*

Corollaire 3.4 (Théorème de rigidité). — *Si C, C' sont des catégories tannakiennes de lien* L, *munies de polarisations* π, π' *avec* $\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\pi')$, *il existe une équivalence de* L*-catégories tannakiennes* $C \simeq C'$ *unique à isomorphisme* (non unique) *près respectant les polarisations données.*

Définition 3.5. — Un lien L sur $\mathbf{R}$ (défini localement par un groupe) algébrique affine est dit *polarisable* s'il existe une catégorie tannakienne liée par L qui soit polarisable.

4. Détermination des liens polarisables.

Théorème 4.1. — *Soit* L *un lien algébrique affine qui est, soit connexe, soit abélien. Alors* L *est polarisable si et seulement si* L *est le lien d'un* $\mathbf{R}$*-groupe compact. De plus, dans ce cas, l'unique classe* $e \in H^2(\mathbf{R}, L)$ *envoyée par l'application* (3.3.1) *en* 0 *est neutre.*

Corollaire 4.2. — *Soit C une catégorie tannakienne dont le lien* L *est comme ci-dessus. Alors C possède une polarisation symétrique si et seulement s'il existe un foncteur fibre* $\omega : C \to \operatorname{Mod} f(\mathbf{R})$ *avec* $\operatorname{Aut}^{\otimes}(\omega)$ *compact. De plus, la correspondance qui, à un tel* ω, *associe la polarisation par les formes* $\varphi : V \otimes V \to 1$ *telles que* $\omega(\varphi)$ *soit symétrique définie positive induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels foncteurs fibre sur l'ensemble* $\operatorname{Pol}_1(C)$ *des polarisations symétriques sur C.*

Corollaire 4.3. — *Soit* G *un* $\mathbf{R}$*-groupe algébrique affine connexe ou abélien. Alors,* $\operatorname{Rep}_0(G)$ *est polarisable si et seulement si* G *est hodgien* (2.5) *et, dans ce cas, toutes les polarisations sont hodgiennes.*

Question 4.4. — A-t-on des énoncés analogues sans supposer L connexe ou abélien ? Le premier cas à décider est celui des $\mathbf{R}$-groupes finis (non constants).

(*) Séance du 29 novembre 1971.

(1) N. Saavedra, *Comptes rendus*, 272, série A, 1971, p. 398.

(2) Pour des généralités concernant les catégories tannakiennes, on pourra se reporter à un ouvrage en cours de préparation, à paraître dans les *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag.

(3) P. Deligne, *Travaux de Griffiths*, Séminaire Bourbaki, 376 (mai-juin 1970).

(4) P. Deligne, *La conjecture de Weil pour les surfaces* K_3 (à paraître dans *Inventiones Mathematicae*).

(5) J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

Institut des Hautes Études scientifiques,
35, *route de Chartres,*
91-*Bures-sur-Yvette, Essonne.*

184937. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e)
Imprimé en France