INSTITUT DES HAUTES ETUDES SCIENTIFIQUES

C A T E G O R I E S D E R I V E E S

Quelques résultats (Etat 0)*)

par Jean-Louis VERDIER

----

*) Ce texte a été rédigé en 1963 (sauf pour un très petit nombre de changements, signalés en bas de page, et pour l'addition de quelques notes de bas de page, en 1976).

S o m m a i r e

Chapitre 1 : Catégories triangulées

§ 1 : Définitions et exemples

§ 2 : Catégories quotients

Chapitre 2 : Applications aux catégories abéliennes

§ 1 : Les catégories dérivées

§ 2 : Les foncteurs dérivés

§ 3 : Exemples

Chapitre I : CATEGORIES TRIANGULEES

§ 1 : Définitions et exemples

n° 1 - Définition des catégories triangulées -

1-0 : Soient A une catégorie additive, T un automorphisme additif de A. X et Y étant deux objets de A, nous poserons

$$\overset{i}{\mathrm{Hom}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_A(X,T^i(Y)) \qquad i \in Z$$

Soient X, Y, Z trois objets de A, $\alpha \in \overset{i}{\mathrm{Hom}}(X,Y)$, $\beta \in \overset{j}{\mathrm{Hom}}(Y,Z)$. Nous définirons le composé $\beta \circ \alpha$ appartenant à $\overset{i+j}{\mathrm{Hom}}(X,Z)$ par :

$$\beta \circ \alpha = \beta \circ T^i(\alpha)$$

On vérifie qu'on obtient ainsi une nouvelle catégorie dont les groupes de morphismes entre les objets sont gradués. Cette nouvelle catégorie sera appelée, par abus de langage : la catégorie A, graduée par le foncteur de translation T.

Soit A une catégorie graduée par un foncteur de translation T. Lorsqu'on nommera ou notera un morphisme sans spécifier le degré, il s'agira toujours d'un morphisme de degré zéro.

Soient A et A' deux catégories additives graduées par les

....

foncteurs T et T', F un foncteur additif de A dans A'. On dira que F <u>est gradué</u> si l'on s'est donné un isomorphisme de foncteurs

$$F_\circ T \simeq T'_\circ F \qquad (*)$$

La définition des morphismes de foncteurs gradués est donnée au chap. 2, § 2, n° 1.

A étant une catégorie additive graduée par le foncteur T, on appellera triangle, un ensemble de trois objets X, Y, Z et de trois morphismes $u : X \longrightarrow Y$, $v : Y \rightarrow Z$, $w : Z \longrightarrow T(X)$ ($\deg w = 1$). Pour désigner les triangles on utilisera la notation : (X,Y,Z,u,v,w) ou bien le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "w"'] & \\ X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd} \qquad \deg(w) = 1$$

Soient (X,Y,Z,u,v,w), (X',Y',Z',u',v',w') deux triangles de A ; un morphisme du premier triangle dans le second est un ensemble de trois morphismes : $f : X \rightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$, $h : Z \longrightarrow Z'$, tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & T(X') \end{tikzcd}$$

(*) texte modifié en 1976 : le texte original demandait une égalité $F \circ T = T' \circ F$. Le cas des foncteurs à plusieurs variables est discuté dans SGA 4 XVII 0.3 . Il pose un problème de signes.

<u>1-1</u> : On appelle <u>catégorie triangulée</u>, une catégorie additive graduée par un foncteur de translation, munie d'une famille de triangles qu'on appelle famille des triangles distingués. Cette famille doit vérifier de plus les axiomes :

(TR1) Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Tout morphisme $u : X \longrightarrow Y$ est contenu dans un triangle distingué (X,Y,Z,u,v,w) . Le triangle $(X,X,0,id_X,0,0)$ est distingué.

(TR2) Pour que (X,Y,Z,u,v,w) soit distingué, il faut et il suffit que $(Y,Z,T(X),v,w,-T(u))$ soit distingué.

(TR3) (X,Y,Z,u,v,w), (X',Y',Z',u',v',w') étant distingués, pour tout morphisme $(f,g) : u \longrightarrow u'$, il existe un morphisme $h : Z \longrightarrow Z'$ tel que (f,g,h) soit un morphisme de triangles.

(TR4)

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "\deg 1"'] & \\ X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ul, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "\deg(j) = 1"'] & \\ Y \arrow[rr, "v"] & & Z \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "\deg 1"'] & \\ X \arrow[rr, "w"] & & Z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

étant trois triangles distingués tels que $w = v_\circ u$, il existe deux morphismes $f : Z' \longrightarrow Y'$ $g : Y' \longrightarrow X'$ tels que

1) (id_X,v,f) soit un morphisme de triangle

2) (u,id_Z,g) soit un morphisme de triangle

3) $(Z',Y',X',f,g,T(i)\,j)$ soit un triangle distingué

C et C' étant deux catégories triangulées, on appelle <u>foncteur exact</u> de C dans C' , tout foncteur additif, gradué, transformant les triangles distingués en triangles distingués. Les morphismes de foncteurs exacts sont les morphismes de foncteurs gradués .

On déduit immédiatement des axiomes (TR1), (TR2), (TR3) la propriété suivante :

<u>1-2 Proposition</u> : Soient (X,Y,Z,u,v,w) un triangle distingué et M un objet d'une catégorie triangulée . On a alors les suites exactes :

$$\cdots \to \overset{i}{\mathrm{Hom}}(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,u)} \overset{i}{\mathrm{Hom}}(M,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,v)} \overset{i}{\mathrm{Hom}}(M,Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,w)} \overset{i+1}{\mathrm{Hom}}(M,X) \to \cdots$$

$$\cdots \to \overset{i}{\mathrm{Hom}}(Z,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(v,M)} \overset{i}{\mathrm{Hom}}(Y,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(u,M)} \mathrm{Hom}(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(w,M)} \overset{i+1}{\mathrm{Hom}}(Z,M) \to \cdots$$

On déduit alors de cette proposition des énoncés du genre :

-(f,g,h) étant un morphisme de triangle distingué et f,g des isomorphismes, h est un isomorphisme .

- Les triangles distingués construits sur un morphisme (TR1), sont tous isomorphes (<u>mais les isomorphismes ne sont pas, en général, uniquement déterminés</u>).

- Lorsque dans un triangle distingué, un des morphismes admet un noyau ou un conoyau, celui-ci se scinde i.e. il est de la forme :

$$\begin{tikzcd}
 & Z + T(X) \arrow[dl] & \\
X + Y \arrow[rr] & & Y + Z \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

- La somme de deux triangles distingués est distinguée. (On utilise l'axiome (TR4)) .

<u>n° 2</u> - <u>Exemples</u> -

<u>2.1</u> : Nous allons d'abord fixer quelques notations. Soit A une catégorie additive $C(A)$ désignera la catégorie suivante :

- Les objets de $C(A)$ seront les complexes de A , sans limitation de degré, à différentielle de degré +1

- Les morphismes de A seront les morphismes de complexes (qui commutent avec la différentielle) conservant le degré .

Soit T le foncteur suivant : Pour tout objet $X^{\cdot}$ de $C(A)$

$$T(X^{\cdot})_i = (X^{\cdot})_{i+1}$$

$$d_i(T(X^{\cdot})) = -d_{i+1}(X^{\cdot})$$

Sur les morphismes le foncteur T agit de la manière suivante : Pour tout morphisme $f : X^{\cdot} \longrightarrow Y^{\cdot}$, le morphisme $T(f) : T(X^{\cdot}) \longrightarrow T(Y^{\cdot})$ est défini par

$$T(f)_i = f_{i+1}$$

On vérifie immédiatement que T est un automorphisme additif de A. Les morphismes de degré n, définis à l'aide de ce foncteur de translation, sont alors les morphismes qui augmentent le degré de n, et qui commutent ou anticommutent avec la différentielle suivant la parité de n. On retrouve ainsi la définition généralement adoptée.

$\mathcal{T}$ désignera la famille de triangles suivante : Un triangle $(X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet, u, v, w)$ est un élément de la famille si[(*)]

- $Z^\bullet$ est le complexe simple associé au complexe double

$$\dots \to 0 \to X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet \to 0 \to \dots$$

où les objets de $Y^\bullet$ sont les objets de premier degré zéro, et les objets de $X^\bullet$, les objets de premier degré -1

- v est l'image par le foncteur : complexe double $\rightsquigarrow$ complexe simple, du morphisme de doubles complexes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

- w est l'opposé de l'image, par le même foncteur, du morphisme de doubles complexes :

(*) texte modifié en 1976, pour assurer la validité de 2-4 .

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & X^\bullet \arrow[r] \arrow[u] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2-2 : L'ensemble des morphismes homotopes à zéro est un idéal bilatère (si f et g sont composables et si f ou g est homotope à zéro, le composé est homotope à zéro . Si f et g sont homotopes à zéro, le morphisme $f \oplus g$ est homotope à zéro) . Pour tout couple d'objet $X^\bullet, Y^\bullet$ on désigne par $Htp(X^\bullet,Y^\bullet)$ le sous-groupe de $Hom_{C(A)}(X^\bullet,Y^\bullet)$ des morphismes homotopes à zéro. $K(A)$ sera alors la catégorie dont les objets sont les objets de $C(A)$ et les morphismes de source $X^\bullet$ et de but $Y^\bullet$, le groupe :

$$Hom_{C(A)}(X^\bullet,Y^\bullet)/Htp(X^\bullet,Y^\bullet)$$

La loi de composition sur les morphismes de $K(A)$ se définit à partir de la loi de composition sur les morphismes de $C(A)$ en passant au quotient. $K(A)$ est une catégorie additive. Le foncteur de translation T sur $C(A)$ passe au quotient (le translaté d'un morphisme homotope à zéro, est homotope à zéro). Le foncteur obtenu est un automorphisme additif de $K(A)$ que nous noterons encore T . Par abus de notation $K(A)$ désignera par la suite la catégorie $K(A)$ graduée par le foncteur T .

On appellera triangle distingué dans $K(A)$, tout triangle isomorphe à un triangle provenant de $\mathcal{C}$. La famille des triangles distingués vérifie les axiomes (TR1), (TR2) (TR3) et (TR4). Par abus de notation $K(A)$ désignera la catégorie $K(A)$ triangulée par la famille de triangles définie ci-dessus.

2-3 : On définit de plus tout un arsenal de sous-catégories :

- Un complexe est dit borné inférieurement si tous ses objets de degré négatif, sauf au plus un nombre fini, sont nuls . On définit de même les complexes bornés supérieurement, les complexes bornés. On désignera par $K^+(A), K^-(A), K^b(A)$ les sous-catégories pleines de $K(A)$ engendrées par ses familles d'objets . Ces sous-catégories sont des "sous-catégories triangulées" de $K(A)$: Tout triangle distingué dont deux des objets sont des objets de la sous-catégorie, est isomorphe à un triangle dont les trois objets sont des objets de la sous-catégorie .

- Supposons que A soit une catégorie abélienne . Un complexe est dit cohomologiquement borné inférieurement si tous ses objets de cohomologie de degré négatif sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux . On définit de manière analogue les complexes cohomologiquement bornés supérieurement, les complexes cohomologiquement bornés, les complexes acycliques . $K^{\infty,+}(A)$, $K^{\infty,-}(A), K^{\infty,b}(A)$, $K^{\infty,\emptyset}(A)$ désigneront les sous-catégories pleines engendrées par ces familles d'objets . Ce sont des sous-catégories triangulées.
On paiera aussi des sous-catégories triangulées $K^{+,b}(A)$, $K^{+,\emptyset}(A)$, ...etc... (Le premier signe en exposant donne des renseignements sur les objets des complexes, le deuxième signe sur les objets de cohomologie) .

- A n'étant plus nécessairement abélienne, soit O un ensemble d'objets de A stable par isomorphisme et par somme directe. $O(A)$ désignera la sous-catégorie pleine de $C(A)$ engendrée par les complexes dont les objets en tout degré sont des objets de O , On notera $\underline{O}(A)$ la sous-catégorie triangulée correspondante dans $K(A)$. A étant abélienne, on pourra prendre pour ensemble $\mathcal{O}$, l'ensemble I des injectifs ou l'ensemble P des projectifs .

2-4 : Unicité de $K(A)$

$K(A)$ est uniquement déterminée par la donnée de $C(A)$ et de la famille $\mathcal{T}$. De manière précise : Tout foncteur additif gradué de $C(A)$ dans une catégorie triangulée, transformant tout triangle de $\mathcal{T}$ en un triangle distingué, se factorise de manière unique par $K(A)$, et le foncteur obtenu est exact .

Pour tout complexe $X^\cdot$ de $C(A)$, $\bar{X}^\cdot$ désignera le complexe obtenu à partir de $X^\cdot$ en annulant la différentielle. Une suite à trois termes :

$$0 \longrightarrow X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot \longrightarrow Z^\cdot \longrightarrow 0$$

sera dite suite semi-scindée si la suite

$$0 \longrightarrow \bar{X}^\cdot \longrightarrow \bar{Y}^\cdot \longrightarrow \bar{Z}^\cdot \longrightarrow 0$$

est scindée; i.e. si elle est isomorphe à la suite :

$$0 \longrightarrow \bar{X}^\cdot \longrightarrow \bar{X}^\cdot + \bar{Z}^\cdot \longrightarrow \bar{Z}^\cdot \longrightarrow 0$$

Soit $0 \longrightarrow X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot \longrightarrow Z^\cdot \longrightarrow 0$ une suite semi-scindée. Choisissons un scindage i.e. pour tout n un isomorphisme

$$(Y^\cdot)^n \approx (X^\cdot)^n + (Z^\cdot)^n$$

La matrice de la différentielle de $Y^\cdot$, dans la décomposition en somme directe ci-dessus est de la forme :

$$\begin{pmatrix} d_{X^\cdot} & \varphi_n \\ 0 & d_{Y^\cdot} \end{pmatrix}$$

où φ_n est un morphisme de $(Z^\cdot)^n$ dans $(X^\cdot)^{n+1}$. Les φ_n déterminent un morphisme de complexes

$$\varphi : Z^\cdot \longrightarrow T(X^\cdot)$$

Lorsqu'on change le scindage, la classe modulo homotopie de φ ne change pas . De plus, en notant $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{\varphi}$ les images dans $K(A)$ des morphismes u, v, φ , le triangle $(X^\cdot,Y^\cdot,Z^\cdot,\underline{u},\underline{v},\underline{\varphi})$ est distingué . Désignons par S.S.S.(A) la catégorie des suites semi-scindées de $C(A)$, et par Tr.K(A) la catégorie des triangles distingués de $K(A)$. Ce qui précède permet de définir un foncteur :

$$\rho : S.S.S(A) \longrightarrow Tr.K(A)$$

Ce foncteur est essentiellement surjectif .

n° 3 - Exemples de foncteurs cohomologiques et de foncteurs exacts -

3.1 : Définition : Soient A une atégorie triangulée, B une catégorie abélienne. Un foncteur additif $F: A \rightarrow B$ est dit foncteur cohomologique si pour tout triangle distingué (X,Y,Z,u,v,w) la suite

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z)$$

est exacte .

Le foncteur $F_{\circ}T^{i}$ sera souvent noté F^{i} . En vertu de l'axiome (TR2) des catégories triangulées, on a la suite exacte illimitée :

$$\cdots \to F^{i}(X) \longrightarrow F^{i}(Y) \longrightarrow F^{i}(Z) \longrightarrow F^{i+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

3.2. <u>Exemples</u> : 1) Soit A une catégorie triangulée . Pour tout objet X de A le foncteur $\mathrm{Hom}_A(X, ;)$ est un foncteur cohomologique . Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot , X)$ est un foncteur cohomologique $A^{\circ} \to Ab$.

2) Soient A une catégorie abélienne , $C(A)$ la catégorie des complexes de A . On désigne par $H^{\circ}: C(A) \to A$ le foncteur suivant : Soit $X^{\bullet}$ un objet de $C(A)$. On pose

$$H^{\circ}(X^{\bullet}) = \mathrm{Ker}\, d^{0} / \mathrm{Im}\, d^{-1}$$

H° annule les morphismes homotopes à zéro, donc se factorise de manière unique par $K(A)$. On désignera encore par $H^{\circ}: K(A) \longrightarrow A$, le foncteur obtenu .

3.3. <u>Exemple de bi-foncteur exact</u> : Soient A, A', A'' trois catégories additives,

$$P : A \times A' \longrightarrow A''$$

un foncteur bilinéaire (i.e. additif par rapport à chacun des arguments séparément). On en déduit alors le foncteur bilinéaire :

$$P^* : C(A) \times C(A') \longrightarrow C(A")$$

de la manière suivante :

Soient $X^\cdot$ un objet de $C(A)$ et $Y^\cdot$ un objet de $C(A')$. $P(X^\cdot, Y^\cdot)$ est un complexe double de $A"$. On pose alors : $P^*(X^\cdot, Y^\cdot)$ = complexe simple associé à $P(X^\cdot, Y^\cdot)$.

Soient f un morphisme de $C(A)$ (resp. $C(A')$) homotope à zéro et $Z^\cdot$ un objet de $C(A')$ (resp. $C(A)$) . Le morphisme $P^*(f, Z^\cdot)$ (resp. $P^\cdot(Z^\cdot,f)$) est alors homotope à zéro . On en déduit que P^* définit d'une manière unique un foncteur :

$$P^\cdot : K(A) \times K(A') \longrightarrow K(A")$$

$P^\cdot$ est un bi-foncteur exact .

En particulier, soit A une catégorie additive . On peut prendre pour P le foncteur :

$$A^\circ \times A \longrightarrow Ab$$
$$(X,Y) \rightsquigarrow Hom\ (X,Y)$$

On obtient alors par la construction précédente un foncteur

$$Hom^\circ : K(A)^\circ \times K(A) \longrightarrow K(Ab)$$

qui, composé avec le foncteur H°: $K(Ab) \longrightarrow Ab$, redonne évidemment le foncteur $Hom_{K(A)}$.

§ 2 - Les catégories quotients

n° 1 - Sous-catégories épaisses. Systèmes multiplicatifs de morphismes -

Nous commencerons par donner deux définitions

1-1 Définition : Une sous-catégorie B d'une catégorie triangulée A est dite épaisse si B est une sous-catégorie triangulée pleine de A et si de plus B possède la propriété suivante :

Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, se factorisant par un objet de B et contenu dans un triangle distingué (X,Y,Z,f,g,h) où Z est un objet de B , la source de f et le but de f sont des objets de B .

L'ensemble des sous-catégories épaisses de A sera noté $\mathcal{N}$.

L'intersection d'une famille quelconque de sous-catégories épaisses est une sous-catégorie épaisse.

1-2 Définition : Soit A une catégorie triangulée. Un ensemble S de morphismes de A est appelé système multiplicatif de morphismes s'il possède les cinq propriétés suivantes :

(FR1) Si f, $g \in S$ et si f et g sont composables, $f_{\circ}g \in S$. Pour tout objet X de A , le morphisme identique de X est un élément de S .

(FR2) Dans la catégorie A , tout diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "s \in S"] \\ Z \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"', "t \in S"'] & Y \arrow[d, dash, "s \in S"] \\ Z \arrow[r, dash, "f"] & X \end{tikzcd}$$

De plus la propriété symétrique est vraie .

(FR3) Si f et g sont des morphismes, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un $s \in S$ tel que $s_\circ f = s_\circ g$

ii) Il existe un $t \in S$ tel que $f_\circ t = g_\circ t$

(FR4) Soit T le foncteur de translation de A . Pour tout élément s de S , $T(s) \in S$.

(FR5) (X,Y,Z,u,v,w), (X',Y',Z',u',v',w') étant deux triangles distingués, f et g deux éléments de S tels que le couple (f,g) soit un morphisme de u dans u', il existe un morphisme $h \in S$, tel que (f,g,h) soit un morphisme de triangle.

Un système multiplicatif de morphismes est dit saturé s'il possède la propriété suivante :

Un morphisme f appartient à S si et seulement s'il existe deux morphismes g et g' tels que $g_\circ f \in S$ et $f_\circ g' \in S$.

L'intersection d'une famille quelconque de systèmes multiplicatifs saturés est un système multiplicatif saturé .

L'ensemble des systèmes multiplicatifs saturés sera noté $\mathcal{S}$.

Soit B une sous-catégorie épaisse; on désigne par $\varphi(B)$ l'ensemble des morphismes f qui sont contenus dans un triangle distingué (X'Y'Z',f,g,h) où Z est un objet de B . $\varphi(B)$ est un système multiplicatif saturé .

Soit S un système multiplicatif saturé ; on désigne par $\psi(S)$ la sous-catégorie pleine engendrée par les objets Z contenus dans un triangle distingué (X,Y,Z,f,g,h) où f est un élément de S . La sous-catégorie $\psi(S)$ est une sous-catégorie épaisse .

Le résultat principal de ce numéro est alors le suivant : φ est un isomorphisme (conservant la relation d'ordre définie par l'inclusion) de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{S}$. L'isomorphisme inverse n'est autre que ψ .

n° 2 - Problèmes Universels -

Soient A et A' deux catégories triangulées et F un foncteur exact de A dans A' . Soient S(F) l'ensemble des morphismes de A qui sont transformés par F en isomorphismes et B(F) la sous-catégorie pleine engendrée par les objets de A qui sont transformés par F en objets nuls de A' . S(F) est un système multiplicatif saturé et B(F) est une sous-catégorie épaisse. De plus $S(F) = \varphi(B(F))$. Soient alors A une catégorie triangulée B une sous-catégorie épaisse et $S = \varphi(B)$ le système multiplicatif saturé correspondant . Les deux problèmes universels ci-dessous sont équivalents

Problème 1 - Trouver une catégorie triangulée A/B et un foncteur exact $Q : A \longrightarrow A/B$ tels que tout foncteur exact de A dans une catégorie triangulée A' , transformant les objets de B en objets nuls de A' , admette, de manière unique, une factorisation de la forme $G{\circ}Q$ où G est un foncteur exact .

Problème 2 - Trouver une catégorie triangulée A_S et un foncteur exact $Q : A \rightarrow A_S$ tels que tout foncteur exact de A dans une catégorie triangulée A' , transformant les morphismes de S en isomorphismes de A', admette, de manière unique, une factorisation de la forme $G{\circ}Q$ où G est un foncteur exact .

(Le rédacteur prie le lecteur de bien vouloir l'excuser pour l'emploi de ce langage désuet et rétrograde). Nous allons montrer, dans le numéro suivant, que le problème 2 admet une solution. Donc le problème 1 correspondant admet la même solution .

n° 3 - Calcul de fraction

3.1. Soient A une catégorie triangulée, S un système multiplicatif saturé. Désignons par $A(S^{-1})$ la catégorie de fraction de A pour l'ensemble de morphismes S et Q le foncteur canonique de A dans $A(S^{-1})$. Le couple

$(A(S^{-1}), Q)$ résout le problème suivant : Tout foncteur de A dans une catégorie quelconque (non nécessairement additive) transformant morphisme de S en isomorphisme, se factorise, d'une manière unique, par $(A(S^{-1}), Q)$. Un tel couple existe toujours, sans hypothèse sur l'ensemble de morphismes S [C.G.G.]. Cependant l'ensemble de morphismes S, étant un système multiplicatif saturé, possède les propriétés (FR1), (FR2), (FR3). Par suite, d'après C.G.G., la catégorie $A(S^{-1})$ peut s'obtenir par un calcul de fractions, à droite ou à gauche. Nous allons rappeler comment on obtient $A(S^{-1})$ par un calcul de fractions à droite. (Le calcul de fractions à gauche s'obtient par le procédé du renversement des flèches).

3.2. Les objets de $A(S^{-1})$ sont les objets de A.

- Pour tout objet X de A, désignons par S_X la catégorie des flèches appartenant à S, ayant pour but X. A tout objet Y de A, on associe, fonctoriellement en Y, le foncteur suivant sur S_X° à valeur dans la catégorie des ensembles : (S_X° désigne la catégorie opposée)

$$H_Y : \quad s \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{source}(s), Y)$$

On pose alors :

$$\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(X,Y) = \varinjlim_{S_X^{\circ}}(H_Y)$$

(Pour tout ce qui concerne les limites inductives, on se référera à "Grothendieck Topologies").

On constatera alors, avec plaisir en utilisant (FR1), (FR2), (FR3) que la catégorie S_X° possède les propriétés L1, L2, L3 . Les limites inductives possèdent donc toutes les bonnes propriétés des limites inductives sur les ensembles ordonnés filtrants).

- Soient X, Y, Z, trois objets de A, a un élément de $\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(X,Y)$ et b un élément de $\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(Y,Z)$. Soient s un objet de S_X, $\underline{a}$ un élément de Hom(source(s),Y) dont l'image est a et un objet de S_Y, $\underline{b}$ un élément de Hom(source(t),Z) dont l'image est b . On a alors un diagramme :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "\underline{a}"] & \cdot \arrow[d, "t"] \arrow[dr, "\underline{b}"] & \\ X & Y & Z \end{tikzcd} \qquad (1)$$

que, d'après (FR2), on peut compléter en un diagramme :

$$t' \in S \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "t'"'] \arrow[dr, "\underline{c}"] & & \\ \cdot \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "\underline{a}"] & \cdot \arrow[d, "t"] \arrow[dr, "\underline{b}"] & \\ X & Y & Z \end{tikzcd}$$

Notons $b_\circ a$ l'image dans $\mathrm{Hom}_{A(S^{-1})}(X,Z)$ du morphisme $\underline{b}_\circ\underline{c}$. On vérifie que grâce aux propriétés (FR1) (FR2) (FR3) $b_\circ a$ ne dépend pas des représentants $\underline{a}$ et $\underline{b}$ choisis et qu'il ne dépend pas non plus de la manière de compléter le diagramme (1) . On vérifie de plus qu'on a ainsi défini une catégorie $A(S^{-1})$.

Nous noterons Q le foncteur évident : $A \longrightarrow A(S^{-1})$

A étant une catégorie additive, $A(S^{-1})$ est une catégorie additive. De plus, on démontre en utilisant (FR4) qu'il existe un et un seul foncteur de translation sur $A(S^{-1})$, que nous noterons encore T, vérifiant la relation :

$$Q_\circ T = T_\circ Q$$

Enfin, à l'aide de (FR5), on démontre qu'il existe une et une seule structure triangulée sur $A(S^{-1})$ telle que le foncteur Q soit exact. Les triangles distingués de $A(S^{-1})$ ne sont autre que les triangles isomorphes aux images, par Q, des triangles distingués de A. En désignant par A_S, la catégorie $A(S^{-1})$ munie de cette structure triangulée, on démontre sans difficulté que le couple (A_S, Q) est une solution au problème 2.

<u>3-3 Définition</u> : Soient A une catégorie triangulée, B une sous-catégorie épaisse de A, $(Q, A/B)$ la solution du problème 1 (n° 2). A/B sera appelée la catégorie quotient de A par B. Q sera appelé le foncteur canonique de passage au quotient. Plus généralement soit N une sous-catégorie triangulée de A et soit $\underline{N}$ la plus petite sous-catégorie épaisse contenant N. La catégorie quotient de A par N : A/N sera par définition $A/\underline{N}$.

<u>n° 4 - Propriétés des catégories quotients</u>

4-1 : Soient A une catégorie triangulée et H un foncteur cohomologique à valeur dans une catégorie abélienne G. Soient B_H la sous-catégorie pleine engendrée par les objets dont tous les translatés sont transformés par H en objets nuls de G et S_H l'ensemble des morphismes dont tous les translatés sont transformés par H en isomorphismes de G. B_H est une sous-catégorie épaisse de A ; S_H est un système multiplicatif saturé. De plus $S_H = \varphi(B_H)$ (n° 1). Le foncteur H se factorise d'une manière unique par $(Q, A/B_H)$.

4-2 : Théorème : Soient A une catégorie triangulée, B une sous-catégorie triangulée, N une sous-catégorie épaisse de A, $S = \varphi(N)$ le système multiplicatif saturé correspondant.

(a) La catégorie $N \cap B$ est une sous-catégorie épaisse de B. Le système multiplicatif correspondant est $S \cap B$.

(b) Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout objet X de B et tout morphisme $s : R \longrightarrow X$ où s est un élément de S, il existe un morphisme $s' : R' \longrightarrow R$ où $s_\circ s'$ est un élément de $S \cap B$; et $R' \in \mathrm{Ob}\, B$.

(ii) Tout morphisme d'un objet X de B dans un objet Y de N se factorise par un objet de $N \cap B$.

(c) Les propriétés (i)' et (ii)' obtenues à partir de (i) et (ii) en renversant les flèches sont équivalentes.

(d) Si les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées ou bien si les propriétés (i)' et (ii)' sont vérifiées, le foncteur canonique :

$$B/N \cap B \longrightarrow A/N$$

est fidèle .

Comme ce foncteur est injectif sur les objets, il réalise $B/N \cap B$ comme sous-catégorie de A/N .

(e) Si de plus B est une sous-catégorie pleine de A, $B/N \cap B$ est une sous-catégorie pleine de A/N .

4-3 Corollaire : Soient $A \subset B \subset C$ trois catégories triangulées, A sous catégorie épaisse de B , B sous-catégorie épaisse de C . Alors A est une sous-catégorie épaisse de C , B/A est une sous-catégorie épaisse de C/A . Le foncteur canonique $C/B \longrightarrow (C/A)/(B/A)$ est un isomorphisme .

n° 5 - Propriétés du foncteur de passage au quotient -

Soient A une catégorie triangulée, B une sous-catégorie épaisse, S le système multiplicatif correspondant, $Q : A \longrightarrow A/B$ le foncteur canonique de passage au quotient .

5-1 Proposition : X et Y étant des objets de A , les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, tel qu'il existe un morphisme $s : Z \longrightarrow X$, de S , vérifiant $f_\circ s = 0$, est un morphisme nul

b) Tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, tel qu'il existe un morphisme $s : Y \longrightarrow Z$, $s \in S$, vérifiant $s_\circ f = 0$, est un morphisme nul

c) Tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ qui se factorise par un objet de B est nul .

d) L'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) \xrightarrow{\ Q\ } \mathrm{Hom}_{A/B}(Q(X),Q(Y))$$

est injective .

<u>5-2 Proposition</u> : Soient X et Y deux objets de A . Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Tout diagramme :

$$s \in S \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & Y \end{tikzcd}$$

se complète en un diagramme :

$$\begin{array}{l} t \in S \\ s \in S \end{array} \qquad \begin{tikzcd} Z' \arrow[d, "t"'] & \\ Z \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & Y \end{tikzcd}$$

où $f_\circ t$ se factorise par $(X, s_\circ t)$

b) Assertion obtenue en renversant le sens des flèches dans a) et en permutant X et Y

c) Tout diagramme :

$$X \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Y$$

où $g_\circ f = 0$ et où N est un objet de B , se complète en un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & N' \arrow[d, "i"] & \\ X \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

où $f = i_\circ h$ et où $g_\circ i = 0$.

d) Assertion obtenue en changeant le sens des flèches dans c) et en permutant X et Y .

e) L'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) \xrightarrow{Q} \mathrm{Hom}_{A/B}(Q(X),Q(Y))$$

est surjective .

<u>5-3 Proposition</u> : Soit X un objet de A . Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout objet Y de A , l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) \xrightarrow{Q} \mathrm{Hom}_{A/B}(Q(X),Q(Y))$$

est un isomorphisme .

b) Tout morphisme de X dans un objet de B est nul .

De même, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a)' Pour tout objet Y de A , l'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_A(Y,X) \xrightarrow{Q} \mathrm{Hom}_{A/B}(Q(Y),Q(X))$$

est un isomorphisme .

b)' Tout morphisme d'un objet de B dans X est nul .

5-4 Définition : Tout objet possédant les propriétés équivalentes a) et b) de la proposition précédente, sera appelé : objet libre à gauche sur A/B ou bien encore objet Q-libre à gauche . De même, tout objet possédant les propriétés équivalentes a)' et b)' sera appelé objet libre à droite sur A/B ou encore objet Q-libre à droite . Il est défini à isomorphisme près par la connaissance de $Q(X) \in \mathrm{Ob}\, A/B$.

n° 6 - Foncteurs adjoints au foncteur de passage au quotient -

6-1 Définition : Deux sous-catégories triangulées N et N' d'une catégorie triangulée A sont dites orthogonales si pour tout objet X de N et tout objet Y de N', on a :

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) = 0$$

N' sera dite alors orthogonale à droite à N et N orthogonale à gauche à N'.

6-2 Proposition : Soit N une sous-catégorie triangulée d'une catégorie triangulée A . La catégorie pleine $N^{\perp}$ (resp $^{\perp}N$) engendrée par les objets X de A tels que pour tout objet Y de N on ait $\mathrm{Hom}_A(Y,X) = 0$

(resp $Hom_A(X,Y) = 0$), est une sous-catégorie épaisse de A . La catégorie $N^{\perp}$ est appelée par abus de langage, l'orthogonale à droite de N .

Cette proposition nous permet de traduire la proposition 5-3 .

<u>6-3 Proposition</u> : Soit $B \subset A$, une sous-catégorie épaisse d'une catégorie triangulée A . La catégorie pleine engendrée par les objets libres à droite sur A/B (resp. à gauche), n'est autre que l'orthogonale à droite (resp. à gauche) de B .

<u>6-4 Proposition</u> : Soient A une catégorie triangulée, B une sous-catégorie épaisse de A $B^{\perp}$ l'orthogonale à droite de B , $S(B)$, $S(B^{\perp})$ les systèmes multiplicatifs correspondants, Q et $Q^{\perp}$ les foncteurs canoniques de passage au quotient . Considérons pour un objet X de A , les propriétés suivantes :

i) X s'envoie par un morphisme de $S(B)$ dans un objet de $B^{\perp}$,

ii) X reçoit par un morphisme de $S(B^{\perp})$ un objet de B .

iii) La catégorie $S_X(B)$ des flèches de $S(B)$ de source X , admet un objet final.

iv) La catégorie $S^X(B^{\perp})$ des flèches de $S(B^{\perp})$ de but X admet un objet initial.

v) La catégorie B/X des objets de B au-dessus de X , admet un objet final.

vi) La catégorie $B^{\perp}/X$ des objets de $B^{\perp}$ au-dessous de X admet un objet initial .

$$\text{On a alors} \quad i \Longleftrightarrow ii \Longleftrightarrow iii \Longleftrightarrow v \begin{array}{l} \nearrow iv \\ \searrow vi \end{array}$$

Si de plus ${}^{\perp}\!\left(B^{\perp}\right) = B$ alors toutes les propriétés sont équivalentes .

Soient B une sous-catégorie épaisse d'une catégorie triangulée A, le foncteur d'injection i de B dans A et Q le foncteur de passage au quotient de A dans A/B , $B^{\perp}$ l'orthogonale à droite de B , les foncteurs correspondant $i^{\perp}$ et $Q^{\perp}$. On déduit immédiatement de la proposition 6-4 les propositions suivantes :

<u>6-5 Proposition</u> : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le foncteur i admet un adjoint à droite.

ii) Le foncteur Q admet un adjoint à droite.

La proposition est encore vraie lorsqu'on remplace le mot droite par le mot gauche.

<u>6-6 Proposition</u> : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le foncteur i admet un adjoint à droite.

ii) Le foncteur $i^{\perp}$ admet un adjoint à gauche . L'orthogonale à gauche de la catégorie $B^{\perp}$ est égale à B .

<u>6-7 Proposition</u> : Supposons vérifiées les propriétés des propositions 6-5 et 6-6. Soient i^* et Q^* les adjoints à droite de i et Q . De même soient ${}^*i^{\perp}$ et ${}^*Q^{\perp}$ les adjoints à gauche de $i^{\perp}$ et de $Q^{\perp}$. Tous ces foncteurs

sont exacts . De plus :

Il existe un isomorphisme fonctoriel $Q^{*}{}_{\circ}Q \xrightarrow{\sim} I^{\perp}{}_{\circ}{}^{*}i^{\perp}$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{id} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Q^{*}{}_{\circ}Q \arrow[rr, "\sim"] & & I^{\perp}{}_{\circ}{}^{*}i^{\perp} \end{tikzcd}$$

(les flèches obliques sont définies par les propriétés d'adjonction).

Il existe de même un isomorphisme ${}^{*}Q^{\perp}{}_{\circ}Q^{\perp} \xrightarrow{\sim} i_{\circ}i^{*}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} {}^{*}Q^{\perp}{}_{\circ}Q^{\perp} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & i_{\circ}i^{*} \arrow[dl] \\ & \mathrm{id} & \end{tikzcd}$$

Enfin, il existe un morphisme fonctoriel de degré 1 : $\partial : i^{\perp}{}_{\circ}{}^{*}i^{\perp} \longrightarrow i_{\circ}i^{*}$ tel que le triangle suivant soit distingué :

$$\deg \partial = 1 \qquad \begin{tikzcd} i^{\perp}{}_{\circ}{}^{*}i^{\perp} \arrow[rr, "\partial"] & & i_{\circ}i^{*} \arrow[dl] \\ & \mathrm{id} \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Un tel morphisme δ est unique et vérifie $\delta(TX_{\circ}) = - T\delta(X)$ (X objet qcq, T translation) .

-:-:-:-:-

Chapitre II : APPLICATIONS aux CATEGORIES ABELIENNES

§ 1 : Les catégories dérivées d'une catégorie abélienne

n° 1 - Les catégories dérivées

On utilise les notations du chapitre 1, § 1, n° 2.2. On utilisera de plus les notations suivantes :

1.1. Notation : Soit A une catégorie abélienne. On pose :

$$D(A) = K^{\infty,\infty}(A)/K^{\infty,\emptyset}(A)$$

$$D^b(A) = K^{b,b}(A)/K^{b,\emptyset}(A)$$

$$D^+(A) = K^{+,+}(A)/K^{+,\emptyset}(A)$$

$$D^-(A) = K^{-,-}(A)/K^{-,\emptyset}(A)$$

1.2. Proposition : Les foncteurs naturels qui figurent dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & D(A) & \\
D^+(A) \arrow[ur] & & D^-(A) \arrow[ul] \\
 & D^b(A) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

sont pleinement fidèles.

Les foncteurs naturels :

$$D^b(A) = K^{b,b}/K^{b,\emptyset}(A) \longrightarrow K^{+,b}(A)/K^{+,\emptyset}(A)$$

$$D^b(A) = K^{b,b}(A)/K^{b,\emptyset}(A) \longrightarrow K^{-,b}(A)/K^{-,\emptyset}(A)$$

sont des équivalences de catégories .

Les foncteurs du diagramme :

$$\begin{tikzcd} & D(A) & \\ D^+(A) \arrow[ur] & & D^-(A) \arrow[ul] \\ & D^b(A) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

étant injectifs sur les objets, réalisent les catégories $D^b(A), D^+(A)$, $D^-(A)$ comme sous-catégories pleines de $D(A)$.

La preuve de cette proposition se trouve au chap. 1, § 2, n° 4, théorème 2 .

1.3. <u>Définition</u> : La catégorie $D(A)$ sera appelée la catégorie dérivée de la catégorie A . Les objets de $D(A)$ isomorphes aux objets do $D^b(A)$ seront appelés les objets bornés de $D(A)$. Les objets de $D(A)$ isomorphes aux objets de $D^+(A)$ seront appelés les objets limités à gauche, les objets de $D(A)$ isomorphes aux objets de $D^-(A)$ seront appelés les objets limités à droite.

Nous désignerons par D le foncteur canonique :

$$D : \quad C(A) \longrightarrow D(A)$$

La "restriction" de D à la sous-catégorie pleine A de $C(A)$ sera encore noté D. Le foncteur D restreint à A est pleinement fidèle. Le foncteur D se factorise d'une manière unique par $K(A)$. Soient X et Y deux objets de A.

On vérifie sans difficulté que pour tout $m \geqslant 0$, les groupes :

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(D(X), T^{-m}D(Y)) \qquad (T \text{ est le foncteur translation})$$

sont nuls. La dimension cohomologique de A sera le plus petit des entiers n tels que pour tout $m > n$ on ait :

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(D(X), T^{m}D(Y)) = 0 \quad \text{pour tout couple } X, Y \text{ d'objets}$$

de A.

S'il n'y a pas de tels entiers, on dira que la dimension cohomologique de A est infinie.

Désignons par $I^+(A)$ (resp. $I(A)$) la sous-catégorie triangulée pleine de $K^+(A)$ (resp. de $K(A)$) définie par les complexes dont les objets sont injectifs en tout degré.

<u>1.4. Proposition</u> : Supposons que la catégorie A possède suffisamment d'injectifs. Le foncteur naturel :

$$Q^+ \ : \quad K^+(A) \longrightarrow D^+(A)$$

induit une équivalence de catégorie :

$$I^+(A) \longrightarrow D^+(A)$$

Le foncteur quasi-inverse est un adjoint à droite de Q^+.

Si de plus A est de dimension cohomologique finie, l'assertion précédente est encore vraie lorsqu'on y supprime les exposants $+$.

On a un énoncé analogue concernant les projectifs .

La démonstration de la proposition 1.4 s'appuie sur le chap. 1, § 2, n° 6.4.

La structure triangulée de $D(A)$, est précisée par la proposition suivante .

Soit $E(A)$ la catégorie des suites exactes à trois termes de $C(A)$. La catégorie $S.S.S(A)$ des suites exactes semi-scindées (chap.1, § 1, n° 2-4) est une sous-catégorie pleine de $E(A)$. On a défini (Loc. cit.) un foncteur :

$$\rho : S.S.S(A) \longrightarrow Tr.K(A)$$

où $Tr.K(A)$ désigne la catégorie des triangles distingués de $K(A)$. On en déduit un foncteur

$$\sigma : S.S.S(A) \longrightarrow Tr.D(A)$$

où $Tr.D(A)$ désigne la catégorie des triangles distingués de $D(A)$.

<u>1.5 Proposition</u> : Il existe un et un seul foncteur :

$$\pi : E(A) \longrightarrow Tr.\ D(A)$$

de la forme : $(S = 0 \to X^\cdot \to Y^\cdot \to Z^\cdot \to 0) \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} & D(Z^\cdot) \arrow[dl, "\delta(S)"'] & \\ D(X^\cdot) \arrow[rr, "D(u)"] & & D(Y^\cdot) \arrow[ul, "D(v)"'] \end{tikzcd} \qquad \deg \delta(S) = 1$$

dont la restriction à S.S.S(A) soit σ . <u>Ce foncteur est essentiellement surjectif</u> .

<u>1.6 Proposition</u> : Le foncteur cohomologique canonique :

$$H^\circ : K(A) \longrightarrow A$$

se factorise d'une manière unique par un foncteur que nous noterons encore H°

$$H^\circ : D(A) \longrightarrow A$$

Sur $D(A)$ le foncteur H° et ses translatés H^i forment un système conservatif, i.e. un morphisme $f : X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ et un isomorphisme si et seulement si pour tout entier i

$$H^i(f) : H^i(X) \longrightarrow H^i(Y)$$

est un isomorphisme .

<u>1.7 Définition</u> : Un morphisme $f : X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ de $C(A)$ (resp. de $K(A)$) est appelé un quasi-isomorphisme lorsque pour tout entier i

$$H^i(f) : H^i(X^\cdot) \longrightarrow H^i(Y^\cdot)$$

est un isomorphisme. D'après la proposition précédente les quasi-isomorphismes sont les morphismes qui deviennent des isomorphismes dans $D(A)$.

<u>1.8 Définition</u> : Soient σ un ensemble d'objets de A , $X^{\cdot}$ un objet de $C(A)$ (resp. de $K(A)$) . Une résolution droite (resp. gauche) de type σ de $X^{\cdot}$, est un quasi-isomorphisme : $X^{\cdot} \longrightarrow V^{\cdot}$ (resp. $V^{\cdot} \longrightarrow X^{\cdot}$) où $V^{\cdot}$ est un complexe dont tous les objets appartiennent à σ. On dira résolution injective (resp. projective) au lieu de résolution droite (resp. gauche) de type injectif (resp. projectif) . De manière générale, on se permettra de supprimer les mots "droite" ou "gauche" lorsqu'aucune ambiguité n'en résultera.

<u>1.9 Proposition</u> : 1) Supposons que tout objet de A s'injecte dans un objet de σ (resp. soit quotient d'un objet de σ) . Alors tout objet de $C^{+}(A)$ (resp. de $C^{-}(A)$) admet une résolution droite (resp. gauche) de type σ dans $C^{+}(A)$ (resp. dans $C^{-}(A)$) .

2) Supposons de plus qu'il existe un entier n tel que pour toute suite exacte :

$$Y^{0} \longrightarrow Y^{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y^{n-1} \longrightarrow Y^{n} \longrightarrow 0$$

$$(\text{ resp. } \quad 0 \longrightarrow Y^{n} \longrightarrow Y^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y^{1} \longrightarrow Y^{0})$$

d'objets de A ou pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, Y^{i} est un objet de σ, l'objet Y^{n} soit un objet de σ. Alors tout objet de $C(A)$ admet une résolution droite (resp. gauche) de type σ.

n° 2 : Etude des Ext

Soient $X^\cdot$ et $Y^\cdot$ deux objets de $C(A)$ (resp. $K(A)$) et $D : C(A) \longrightarrow D(A)$ (resp. $Q : K(A) \longrightarrow D(A)$) le foncteur canonique .

2.1 Définition : On appelle i-ème hyper-ext et on note :

$$(X^\cdot, Y^\cdot) \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^i(X^\cdot, Y^\cdot)$$

le foncteur : $\mathrm{Hom}_{D(A)}(D(X^\cdot), T^i D(Y^\cdot))$ (resp. $\mathrm{Hom}_{D(A)}(Q(X^\cdot), T^i Q(Y^\cdot))$) .

2.2. Proposition : Soit $0 \longrightarrow X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot \longrightarrow Z^\cdot \longrightarrow 0$ une suite exacte de $C(A)$. Soit $V^\cdot$ un objet de $C(A)$. On a les suites exactes illimitées :

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i(V^\cdot, X^\cdot) \to \mathrm{Ext}^i(V^\cdot, Y^\cdot) \to \mathrm{Ext}^i(V^\cdot, Z^\cdot) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{i+1}(V^\cdot, X^\cdot) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i(Z^\cdot, V^\cdot) \to \mathrm{Ext}^i(Y^\cdot, V^\cdot) \to \mathrm{Ext}^i(X^\cdot, V^\cdot) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{i+1}(Z^\cdot, V^\cdot) \to \cdots$$

Soient $X^\cdot$ et $Y^\cdot$ deux objets de $K(A)$. On désigne par $Qis/X^\cdot$ (resp. $Qis^+/X^\cdot$, $Qis^-/X^\cdot$, $Qis^b/X^\cdot$) la catégorie des quasi-isomorphismes de but $X^\cdot$ et de source dans $K(A)$ (resp. $K^+(A)$, $K^-(A)$, $K^b(A)$) . De même on définit les catégories $Y^\cdot/Qis$, $Y^\cdot/Qis^+ \ldots$ (quasi-isomorphismes de source $Y^\cdot$) .

On se propose de résumer dans la proposition suivante les différentes définitions équivalentes des Ext^i .

2.3. Proposition : 1) Il existe des isomorphismes de foncteurs :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^0(X^\bullet, Y^\bullet) = \mathrm{Hom}_{D(A)}(Q(X^\bullet), Q(Y^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(Qis/X^\bullet)^\circ} \mathrm{Hom}_{K(A)}(\,\cdot\,, Y^\bullet)$$

$$\xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y^\bullet/Qis} \mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\bullet, \,\cdot\,) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(Qis/X^\bullet)^\circ \times Y^\bullet/Qis} \mathrm{Hom}_{K(A)}(\,\cdot\,, \,\cdot\,)$$

2) Si $X^\bullet$ est un objet de $K^-(A)$:

$$\mathrm{Ext}^0(X^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(Qis^-/X^\bullet)^\circ} \mathrm{Hom}_{K(A)}(\,\cdot\,, Y^\bullet)$$

Si $Y^\bullet$ est un objet de $K^+(A)$:

$$\mathrm{Ext}^0(X^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y^\bullet/Qis} \mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\bullet, \,\cdot\,)$$

3) Si $X^\bullet$ est un objet de $K^-(A)$ et si $Y^\bullet$ est un objet de $K^b(A)$:

$$\mathrm{Ext}^0(X^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y^\bullet/Qis^b} \mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\bullet, \,\cdot\,)$$

Si $X^\bullet$ est un objet de $K^b(A)$ et $Y^\bullet$ un objet de $K^+(A)$:

$$\mathrm{Ext}^0(X^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(Qis^b/X^\bullet)^\circ} \mathrm{Hom}_{K(A)}(\,\cdot\,, Y^\bullet)$$

4) Si la catégorie A possède suffisamment d'injectif et si $Y^\bullet$ est un objet de $K^+(A)$, $Y^\bullet$ admet une résolution injective

et une seule (à isomorphisme près dans $K^+(A)$) :

$$Y^\bullet \longrightarrow I(Y^\bullet)$$

et on a :

$$\mathrm{Ext}^0(X^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\bullet, I(Y^\bullet))$$

On a de même un énoncé analogue pour les projectifs .

5) Si la catégorie A admet suffisamment d'injectifs et si A est de <u>dimension cohomologique finie</u>, tout objet $Y^\bullet$ de $K(A)$ admet une résolution injective et une seule :

$$Y^\bullet \longrightarrow I(Y^\bullet)$$

et on a :

$$\mathrm{Ext}^0(X^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K(A)}(X^\bullet, I(Y^\bullet))$$

Enoncé analogue pour les projectifs .

<u>Remarque</u> : En explicitant l'isomorphisme de la proposition 2.3. (3) on retrouve la définition de Yoneda.

§ 2 : Les foncteurs dérivés

n° 1 : Définition des foncteurs dérivés.

1.1 Définition : Soient C et C' deux catégories graduées (on désigne par T le foncteur de translation de C et de C'), F et G deux foncteurs gradués de C dans C'. Un morphisme de foncteurs gradués est un morphisme de foncteurs :

$$u : F \to G$$

qui possède la propriété suivante :

Pour tout objet X de C le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{lccc} u(TX) : & F(TX) & \longrightarrow & G(TX) \\ & \uparrow\wr & & \uparrow\wr \\ Tu(X) : & TF(X) & \longrightarrow & TG(X) \end{array}$$

Soient C et C' deux catégories triangulées. On désigne par $\mathrm{Fex}(C,C')$ la catégorie des foncteurs exacts de C dans C', les morphismes entre deux foncteurs étant les morphismes de foncteurs gradués.

Soient A et B deux catégories abéliennes et $\Phi : K^*(A) \longrightarrow K^{*'}(B)$ un foncteur exact ($*$ et $*'$ désignent l'un des signes $+$, $-$, b, ou v "vide") . Le foncteur canonique :

$Q : K^*(A) \longrightarrow D^*(A)$ nous donne, par composition, un foncteur :

$$\mathrm{Fex}(D^*(A), D^{*'}(B)) \longrightarrow \mathrm{Fex}(K^*(A), D^{*'}(B))$$

d'où (en désignant aussi par Q' le foncteur canonique $K^{*'}(B) \longrightarrow D^{*'}(B)$) un foncteur : $\%$ (resp. $\%'$) : $\mathrm{Fex}(D^*(A), D^{*'}(B)) \longrightarrow (Ab)$:

$$\Psi \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(Q_\circ^! \Phi, \Psi_\circ Q)$$

$$\text{(resp.} \qquad \Psi \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(\Psi_\circ Q, Q_\circ^! \Phi))$$

<u>1.2 Définition</u>[*]: On dira que Φ admet un foncteur dérivé total à droite (resp. à gauche) si le foncteur $\%$ (resp. $\%'$) est représentable. Un objet représentant le foncteur $\%$ (resp. $\%'$) sera appelé foncteur dérivé total à droite (resp. à gauche) de Φ et sera noté $\underline{\underline{R}}\,\Phi$ (resp. $\underline{\underline{L}}\,\Phi$) .

<u>1.3 Notations</u> : Soient A et B deux catégories abéliennes et $f : A \rightarrow B$ un foncteur additif. Le foncteur dérivé total à droite du foncteur $K^+(f) : K^+(A) \rightarrow K^+(B)$ sera noté $\underline{\underline{R}}^+ f$. On définit de même $\underline{\underline{R}}^- f$, $\underline{\underline{R}} f$, $\underline{\underline{L}}^+ f$, $\underline{\underline{L}}^- f$, $\underline{\underline{L}} f$.

Soit de même $F : K^*(A) \rightarrow B$, un foncteur cohomologique . Le foncteur canonique de passage au quotient $Q : K^*(A) \longrightarrow D^*(A)$ définit par composition un foncteur :

$$\mathrm{Foco}(D^*(A), B) \longrightarrow \mathrm{Foco}(K^*(A), B)$$

(Foco(,) désigne la catégorie des foncteurs cohomologiques) d'où un

---

(*) Une définition plus maniable (et en pratique équivalente) est donnée dans SGA 4 XVII 1.2 .

foncteur % (resp. %') $\mathrm{Foco}(D^*(A),B) \longrightarrow (Ab)$: $G \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(F, G\circ Q)$ (resp. $G \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(G\circ Q, F)$) .

<u>1.4 Définition</u> : On dira que le foncteur F admet un foncteur dérivé cohomologique à droite (resp. à gauche) si le foncteur % (resp. %') est représentable . Un objet représentant le foncteur % (resp. %') sera appelé foncteur dérivé cohomologique à droite (resp. à gauche) et sera noté RF (resp. LF) .

<u>1.5 Notations</u> : Soient A et B deux catégories abéliennes et $f : A \to B$ un foncteur additif . Le foncteur dérivé cohomologique à droite du foncteur :

$$H^{\circ}_{\circ}K^{+}f \ : \ K^{+}(A) \longrightarrow B$$

sera noté $R^{+}f$. Lorsqu'aucune confusion n'en résultera le foncteur $R^{+}f\circ T^{i}$ (T est le foncteur de translation) sera noté : $R^{i}f$. Le foncteur dérivé cohomologique à droite du foncteur $H\circ Kf$ sera noté Rf . Lorsqu'aucune confusion n'en résultera le foncteur $Rf\circ T^{i}$ sera noté $R^{i}f$.

On définit de même les foncteurs $L^{-}f$, Lf, $L^{i}f$;

<u>1.6 Remarques</u> : Ces définitions contiennent, ainsi que nous le verrons dans le numéro suivant, la définition classique des foncteurs dérivés lorsque les catégories ont suffisamment d'injectifs ou de projectifs et que les complexes sont convenablement limités. Elles sont cependant plus

générales . Mais sans autres hypothèses elles sont peu maniables. Par exemple, soit $f : A \to B$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. Supposons que les foncteurs $\underline{\underline{R}}^+ f$ et $\underline{\underline{R}}f$ existent . Je ne sais pas démontrer que $\underline{\underline{R}}f$ induit sur $D^+(A)$ le foncteur $\underline{\underline{R}}^+ f$. Supposons de plus que le foncteur $R^+ f$ (dérivé cohomologique) existe . Je ne sais pas démontrer que le foncteur $H^\circ_\circ \underline{\underline{R}}^+ f$ est isomorphe au foncteur $R^+ f$. Cependant dans la pratique ces propriétés seront vérifiées .

n° 2 : Existence des foncteurs dérivés

2.1 Proposition : Les hypothèses sont celles de la définition 1.4 . Supposons en outre que A soit une $\mathcal{U}$-catégorie, où $\mathcal{U}$ est un univers tel que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers rationnel soit un élément de $\mathcal{U}$, telle que l'ensemble des objets de A soit un élément de $\mathcal{U}$. Supposons de plus que la catégorie B soit la catégorie des $\mathcal{U}$-groupes abéliens ou plus généralement la catégorie des faisceaux de $\mathcal{U}$-groupes abéliens sur un $\mathcal{U}$-site quelconque . (Un $\mathcal{U}$-site est une $\mathcal{U}$-catégorie, dont l'ensemble des objets est un élément de $\mathcal{U}$, munie d'une topologie) .
Le foncteur F admet un foncteur dérivé cohomologique à droite. Ce foncteur se calcule de la manière suivante :

Soient X un objet de $D^*(A)$, $\underline{X}$ l'objet de $K^*(A)$ au-dessus de X . On a alors un isomorphisme fonctoriel :

$$RF(X) = \varinjlim_{\underline{X}/Qis^*} F(\;.\;) \; .$$

En particulier soit $f : A \rightarrow B$ un foncteur additif. Les foncteurs Rf et R^+f existent et se calculent de la manière indiquée ci-dessus. Le foncteur Rf induit sur $D^+(A)$ le foncteur R^+f. Comme aucune confusion ne peut alors en résulter, nous emploierons la notation R^if.

2.2. Remarques : On peut exprimer la proposition 2.1 sous une forme plus générale dans le cadre des catégories triangulées. Les hypothèses à faire sur la catégorie B, pour assurer la validité de la proposition 2.1 sont des hypothèses d'existence et d'exactitude des limites inductives suivant les U-catégories pseudo-filtrantes, dont les ensembles d'objet sont éléments de $\mathcal{U}$. La proposition 2.1 introduit une dissymétrie entre les foncteurs dérivés droits et les foncteurs dérivés gauches tout au moins dans la pratique.

2.2. Théorème : Les données sont celles de la définition 1.2. On se donne de plus une sous-catégorie triangulée pleine de $K^*(A)$: C, et on désigne par N la sous-catégorie triangulée pleine des objets de C qui sont acycliques. Supposons que

1) Tout objet de N soit transformé par $\underline{\Phi}$ en objet acyclique de $K^{*'}(B)$.

2) Tout objet X de $K^*(A)$ soit source (resp. but) d'un quasi-isomorphisme dont le but (resp. la source) soit un objet de C.

a) Alors $\underline{\Phi}$ admet un foncteur dérivé total à droite (resp. à gauche).

b) Le foncteur $\underline{\underline{R}}\,\Phi$ (resp. $\underline{\underline{L}}\,\Phi$) s'obtient de la manière suivante :

La restriction du foncteur $Q_0^! \Phi : K^*(A) \longrightarrow D^{*'}(B)$ à la catégorie C s'annule sur les objets de N , donc se factorise par C/N . On obtient ainsi un foncteur $\Phi' : C/N \longrightarrow D^{*'}(B)$. Mais le foncteur naturel : $C/N \longrightarrow D^*(A)$ est une équivalence de catégories (chap. I § 2 n° 4 th. 2). D'où en composant avec le foncteur quasi-inverse le foncteur $\underline{\underline{R}}\,\Phi$ (resp. $\underline{\underline{L}}\,\Phi$) .

c) Soit X un objet de $K^*(A)$. Soient Y un objet de C et $X \longrightarrow Y$ (resp. $Y \longrightarrow X$) un quasi-isomorphisme . L'objet $\underline{\underline{R}}\,\Phi_\circ Q(X)$ (resp. $\underline{\underline{L}}\,\Phi_\circ Q(X)$) est isomorphe à $Q_\circ \Phi\,(Y)$.

d) Le foncteur $X \rightsquigarrow \underline{\underline{R}}\,\Phi_\circ Q(X)$ (resp. $X \rightsquigarrow \underline{\underline{L}}\,\Phi_\circ Q(X)$) est isomorphe au foncteur : $X \rightsquigarrow \varinjlim_{X/Qis} Q_\circ \Phi(\,.\,)$ (resp. $X \rightsquigarrow \varinjlim_{Qis/X} Q_\circ \Phi(\,.\,)$) .

e) Le foncteur $H_0^\circ \Phi : K^*(A) \longrightarrow B$, admet un foncteur dérivé cohomologique à droite (resp. à gauche) qui n'est autre que le foncteur $H_0^\circ \underline{\underline{R}}\,\Phi$ (resp. $H_0^\circ \underline{\underline{L}}\,\Phi$) .

<u>Corollaire 1</u> : Supposons que $* = +$ (resp. $* = -$) dans les hypothèses du théorème précédent, et que A possède suffisamment d'injectifs (resp. de projectifs). Alors le théorème 2.2 s'applique en prenant pour C la catégorie des complexes injectifs (resp. projectifs) . Supposons de plus que A soit de dimension cohomologique finie , alors le théorème 2.2 s'applique, sans restriction sur $*$, en prenant pour C la catégorie des complexes injectifs (resp. projectifs) .

<u>2.3 Définition</u> : Soient A et B deux catégories abéliennes et $f : A \longrightarrow B$ un foncteur additif .

On dira que f est de dimension cohomologique finie à droite (resp. à gauche) si R^+f (resp. L^-f) existe et s'il existe un entier $m \geq 0$ tel que pour tout entier $n > m$, R^nf (resp. $L^{-n}f$) soit nul sur les objets provenant de A par le foncteur D . La dimension cohomologique à droite (resp. à gauche) de f est alors le plus petit des entiers m possédant la propriété ci-dessus. Si R^+f (resp. L^-f) existe et si f n'est pas de dimension cohomologique finie, on dira que f est de dimension cohomologique infinie .

Un objet X de A sera dit f-acyclique à droite (resp. à gauche) si pour tout entier $n > 0$, $R^nf(D(X)) = 0$ (resp. $L^{-n}f(D(X)) = 0$).

<u>Corollaire 2</u> : Les données sont celles de la définition 2.3. Supposons qu'il existe un ensemble σ d'objets de A stable par somme directe possédant les propriétés suivantes :

1) Tout complexe acyclique $\in \mathrm{Ob}\, K^+(A)$ (resp. $\in \mathrm{Ob}\, K^-(A)$) d'objets de σ, est transformé par f en complexe acyclique.

2) Tout objet X de A s'injecte dans (resp. est quotient de) un objet de σ . Les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées en prenant $* = +$ (resp. $* = -$) et en prenant pour catégorie C , la catégorie des complexes dont les objets en tout degré sont des éléments de σ .
Les éléments de σ sont des objets f-acycliques à droite (resp. à gauche).

Si de plus f est de dimension cohomologique finie à droite (resp. à gauche), l'ensemble des objets f-acycliques à droite (resp. à gauche) possède en plus des propriétés (1) et (2) ci-dessus, la propriété (2) de chap. 2, § 1, n° 1, prop. 9. Le Théorème 2.2 s'applique alors au foncteur Kf en prenant pour catégorie C la catégorie des complexes dont les objets sont f-acycliques à droite (resp. à gauche) en tout degré . Le foncteur $\underline{\underline{R}}f$ (resp. $\underline{\underline{L}}f$) existe et induit sur $D^{+}(A)$ le foncteur $\underline{\underline{R}}^{+}f$ (resp. $\underline{\underline{L}}^{+}f$) et sur $D^{-}(A)$ le foncteur $\underline{\underline{R}}^{-}f$ (resp. $\underline{\underline{L}}^{-}f$) .

n° 3 : Produit. Composition.

Soient A une catégorie abélienne, $F : D(A) \longrightarrow Ab$ un foncteur cohomologique . Soient $X^{\cdot}$ et $Y^{\cdot}$ deux objets de $C(A)$. Le foncteur F définit une application :

$$\mathrm{Ext}^{0}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(F(D(X^{\cdot})), F(D(Y^{\cdot})))$$

d'où un accouplement : $F(D(X^{\cdot})) \times \mathrm{Ext}^{0}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) \longrightarrow F(D(Y^{\cdot}))$

Cet accouplement donne, en appliquant des translations, des accouplements :

$$F^{i}(D(X^{\cdot})) \times \mathrm{Ext}^{j}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) \longrightarrow F^{i+j}(D(Y^{\cdot}))$$

Ces accouplements, appliqués aux foncteurs dérivés cohomologiques, ne sont autres, par définition, que les produits de Yoneda . Les propriétés de ces produits se déduisent immédiatement de cette définition. Nous ne les développerons pas ici .

Soient A , A', A'' trois catégories abéliennes et $f: A \to A'$, $g : A' \to A''$ deux foncteurs additifs . Supposons que les foncteurs $\underline{\underline{R}}^+ f$ et $\underline{\underline{R}}^+ g$ existent . Je ne sais pas en déduire que le foncteur $\underline{\underline{R}}^+ g \circ f$ existe et même si ce dernier foncteur existe, il n'est probablement pas vrai en général que l'on ait la formule :

$$\underline{R}^+ g \circ f \xrightarrow{\sim} \underline{R}^+ g \circ \underline{R}^+ f$$

On a cependant la proposition suivante :

<u>3.1 Proposition</u> : Supposons que la catégorie A' possède suffisamment d'objets g-acycliques à droite et que la catégorie A possède suffisamment d'objets f-acycliques à droite transformés par f en objets g-acycliques à droite . Alors le foncteur $\underline{R}^+ g \circ f$ existe et on a un isomorphisme :

$$\underline{R}^+ g \circ f \xrightarrow{\sim} \underline{R}^+ g \circ \underline{R}^+ f$$

Enoncé analogue pour les foncteurs dérivés gauches .

§ 3 : Exemples

n° 1 : Le foncteur $\underline{\underline{\mathrm{Hom}}}^{\bullet}$:

Soit A une catégorie abélienne, possédant suffisamment d'injectifs.

Le foncteur : $Y^{\bullet} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}^{\bullet}(X^{\bullet}, Y^{\bullet})$ (chap. 1, § 1, n° 3)

où $X^{\bullet}$ est un objet de $K(A)$ et $Y^{\bullet}$ un objet de $K^{+}(A)$, admet un foncteur dérivé total à droite (§ 2, n° 2, Th. 2, cor. 1) qui sera noté $\underline{\underline{R}}\,\mathrm{Hom}^{\bullet}(X^{\bullet}, \,.\,)$. Soit Y un objet de $D^{+}(A)$ le foncteur

$$K(A) \longrightarrow D(Ab)$$

$$X^{\bullet} \rightsquigarrow \underline{\underline{R}}\,\mathrm{Hom}^{\bullet}(X^{\bullet},Y)$$

est exact et s'annule sur les complexes acycliques, d'où un bi-foncteur exact

$$D(A)^{\circ} \times D^{+}(A) \longrightarrow D(Ab)$$

que nous désignerons par $\underline{\underline{\mathrm{Hom}}}^{\bullet}$.

Lorsque A est de dimension cohomologique finie , le foncteur $\underline{\underline{\mathrm{Hom}}}^{\bullet}$ se prolonge à $D(A)^{\circ} \times D(A)$ (loc. cit.) .

Si en outre A possède suffisamment de projectifs on peut dériver le foncteur $\mathrm{Hom}^{\bullet}$ par rapport au premier argument. Les deux définitions coïncident dans leur domaine commun de validité .

n° 2 : $\mathcal{T}$or de faisceaux :

Soient E un site annelé (en particulier un espace topologique annelé) $\mathcal{A}$ le faisceau d'anneaux et $\underline{E}$ la catégorie des $\mathcal{A}$-modules . Un objet X de $\underline{E}$ est dit $\mathcal{A}$-plat si pour toute suite exacte :

$$0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$$

la suite :
$$0 \to Y' \underset{\mathcal{A}}{\otimes} X \to Y \underset{\mathcal{A}}{\otimes} X \to Y'' \underset{\mathcal{A}}{\otimes} X \to 0$$

est exacte . Il existe suffisamment d'objets $\mathcal{A}$-plats : les sommes directes d'objets $\mathcal{A}_U$, où U est un objet de E et $\mathcal{A}_U$ le faisceau $\mathcal{A}$ "prolongé par zéro en dehors de U". Le théorème 2 du § 2, n° 2 s'applique donc et on peut définir le foncteur

$$D^{-}(\underline{E}) \times D^{-}(\underline{E}) \longrightarrow D^{-}(\underline{E})$$

$$(X, Y) \rightsquigarrow X \underline{\underline{\otimes}} Y$$

produit tensoriel total, dérivé gauche du foncteur produit tensoriel . On définit ainsi en passant à la cohomologie les $\underline{\mathcal{T}or}_i^{\mathcal{A}}(X, Y)$: hyper- tor locaux .

La catégorie $\underline{E}$ ayant suffisamment d'injectifs, on peut dériver le foncteur : $\mathrm{Hom}^{\bullet}(X, Y)$: complexe des homomorphismes locaux, d'où $\underline{\underline{\mathrm{Hom}}}(X,Y)$ $(X \in \mathcal{D}, Y \in \mathcal{D}^{+})$.

Soient X et Y deux objets de $D^{-}(\underline{E})$, Z un objet de $D^{+}(\underline{E})$. Il existe un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_{D(\underline{E})}(X \underset{=}{\otimes} Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(\underline{E})}(X, \underline{\underline{\mathrm{Hom}}}(Y, Z))$$

n° 3 : Foncteur dérivé gauche de l'image réciproque :

Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application d'espaces topologiques annelés . Le foncteur image réciproque :

$$f^{*}: \quad \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}$$

n'est pas nécessairement exact . Mais on sait définir des objets f^{*}-plats et il existe suffisamment de tels objets . On sait donc définir le foncteur $\underline{\underline{L}}^{-}f^{*}$. On a de même une formule de dualité :

Soient X un objet de $D^{-}(\underline{E})$ et Y un objet de $D^{+}(\underline{E}')$; il existe un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathrm{Hom}_{D(\underline{E}')}(\underline{\underline{L}}^{-}f^{*}(X), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(\underline{E})}(X, \underline{\underline{R}}^{+}f_{*}(Y))$$

-:-:-:-:-