

**COLLECTED WORKS**  
**Vol I. Mathematical Reflections**

by  
**Alexandre GROTHENDIECK**

*Edited by*  
**M. CARMONA**

## PREFACE

## CONTENTS

<b>Collections</b>	<b>19</b>
Archives Grothendieck	19
FGA : Fondements de la géométrie algébrique	20
EGA : Éléments de Géométrie Algébrique	21
EGA I : Le langage des schémas . . . . .	22
EGA II : Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes .	22
EGA III : Étude cohomologique des faisceaux cohérents . . . . .	22
EGA IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas . . . .	23
SGA : Séminaire de géométrie algébrique	24
SGA 1 : Revêtements Étales et Groupe Fondamental . . . . .	27
SGA 2 : Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux . . . . .	28
SGA 3 : Schémas en groupes . . . . .	29
SGA 4 : Théorie des topos et cohomologie étale des schémas . . . . .	30
SGA 5 : Cohomologie $\ell$ -adique et fonctions $L$ . . . . .	31
SGA 6 : Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch . . . .	31
SGA 7 : Groupes de monodromie en géométrie algébrique . . . . .	32
<b>Correspondences</b>	<b>34</b>
A. Grothendieck - J.-P. Serre . . . . .	34
A. Grothendieck - D. Mumford . . . . .	34

A. Grothendieck - R. Brown . . . . .	34
<b>Dated</b>	<b>34</b>
1945 — 1950	35
Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe	38
Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces $(F)$	39
Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologies des espaces $(LF)$	40
Lettre à J. Dixmier	41
Lettre à J. Dixmier	43
Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux	46
1951	47
Lettre à J. Dixmier	48
Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques	50
Sur certains espaces de fonctions holomorphes I	51
Sur certains espaces de fonctions holomorphes II	52
Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion	53
1952	54
Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$	56

Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles	57
Lettre à J. Dixmier	58
Sur les espaces $(F)$ et $(DF)$	60
Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires	61
Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires	62
La théorie de Fredholm	63
1953	64
Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires	65
Sur certains sous-espaces vectoriels de $L^p$	66
Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers	67
Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques	68
Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux	69
1954	70
Espaces vectoriels topologiques	72
La théorie de Fredholm	73
Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires I	74
Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires II	75
Lettre à J. Dixmier	76

Quelques points de la théorie des produits tensoriels topologiques	79
Lettre à J. Dixmier	80
Lettre à J. Dixmier	84
Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces $L_1$	91
1955	92
Lettre à J. Dixmier	94
Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de von Neumann munies d'une trace	97
Un résultat sur le dual d'une $C^*$ -algèbre	98
A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf	99
Introduction . . . . .	101
I. General fibre spaces . . . . .	103
II. Sheaves of sets . . . . .	106
III. Group bundles and sheaves of groups . . . . .	107
IV. Fibre spaces with structure sheaf . . . . .	107
V. The classification of fibre spaces with structure sheaf . . . . .	107
Sur Quelques Points d'Algèbre Homologique	108
1956	109
Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann	113
Sur le mémoire de A. Weil. Généralisation des fonctions abéliennes	114
Classification des groupes algébriques semi-simples	115
1957	116
Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents	117

Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch	118
1958	119
La théorie des classes de Chern	120
Torsion homologique et sections rationnelles	121
Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections	122
Sur une note de Mattuck-Tate	123
The cohomology theory of abstract algebraic varieties	124
1959	126
1960	127
Techniques de construction en géométrie analytique	128
The trace of certain operators	129
Lettre à N. Bourbaki	130
1961	132
1962	133
Résidus et dualité	134
Letter to J. Murre	135
Letter to J. Tate	139
Letter to H. Hironaka	145
1963	150
Letter to M. Atiyah	151

1964	152
Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions $L$	153
Lettre à J.P. Serre	154
1965	157
Le groupe de Brauer I : Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses	158
Le groupe de Brauer II : Théories cohomologique	159
Lettre à J. Dieudonné	160
Lettre à P. Deligne	163
Introduction au Langage Fonctoriel	167
0. Cadre logique . . . . .	168
I. Généralités sur les catégories . . . . .	171
1. Type de diagramme . . . . .	171
2. Catégorie . . . . .	172
3. Exemples de catégories . . . . .	175
4. Produit de catégories, somme de catégories . . . . .	179
5. Équivalence de catégories . . . . .	182
6. Limite projective, limite inductive . . . . .	185
7. Catégorie filtrante . . . . .	197
II. Catégorie abélienne . . . . .	199
1. Catégorie additive . . . . .	199
2. Catégorie abélienne . . . . .	203
3. Exactitude dans une catégorie abélienne . . . . .	205
4. Diagrammes dans une catégorie abélienne . . . . .	207
5. Objet injectif. Objet projectif . . . . .	209
III. Foncteurs représentables . . . . .	213
1. Définition et propriétés . . . . .	213
2. Application . . . . .	215



3. Structures algébriques dans les catégories . . . . .	216
Quelques ouvrages de références . . . . .	219
1966	220
Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens	221
Letter to J. Coates	222
Lettre à J. Tate	226
Crystals and the De Rham cohomology of schemes	253
Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques	254
1967	255
Letter to J. Coates	256
Lettre à J. Dieudonné	261
Lettre à J. Dieudonné	263
Letter to S. Anantharaman	266
Letter to J. Murre	269
1968	271
Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments	272
Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif	273
Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets	274
Hodge's general conjecture is false for trivial reasons	275

<b>Tapis de Quillen</b>	<b>276</b>
1. Catégories formelles . . . . .	277
<b>Tapis de Quillen</b>	<b>278</b>
1. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux . . . . .	279
2. $n$ -catégories, catégories $n$ -uples, et Gr-catégories . . . . .	282
3. Point de vue “motivique” en théorie du cobordisme . . . . .	282
<b>1969</b>	<b>284</b>
<b>Standard Conjectures on Algebraic Cycles</b>	<b>285</b>
<b>Résumé de quelques résultats de Kostant</b>	<b>286</b>
<b>Letter to Kostant</b>	<b>288</b>
<b>Letter to J. Lipman</b>	<b>291</b>
<b>Letter to J. Lipman</b>	<b>293</b>
<b>Letter to J. Lipman</b>	<b>295</b>
<b>Letter to J. Lipman</b>	<b>297</b>
<b>Lettre à L. Illusie</b>	<b>300</b>
<b>1970</b>	<b>302</b>
<b>Letter to J. Lipman</b>	<b>303</b>
<b>Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux de Dieudonné</b>	<b>305</b>
<b>Letter to I. Barsotti</b>	<b>306</b>
<b>Notes sur la théorie de Dieudonné</b>	<b>313</b>
1. Programme de la théorie de Dieudonné sur une base $S$ où $p$ est lo- calement nilpotent . . . . .	314
2. Théorie de déformations pour les schémas abéliens . . . . .	314

3. Relations entre les deux théories (pour schémas abéliens et pour groupes de BT) . . . . .	314
Sur un théorème de Tate . . . . .	314
<b>Travaux de Heisouké Hironaka sur la résolution des singularités</b>	<b>316</b>
<b>Groupes de Barsotti-Tate et cristaux</b>	<b>317</b>
<b>Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets</b>	<b>318</b>
<b>Lettre à Michon</b>	<b>319</b>
<b>Lettre à D. Ferrand</b>	<b>321</b>
<b>Lettre à J.L. Verdier</b>	<b>323</b>
<b>Lettre à P. Deligne</b>	<b>325</b>
<b>1971</b>	<b>327</b>
<b>The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme</b>	<b>328</b>
<b>Platitude d'une adhérence schématique et lemme de Hironaka généralisé</b>	<b>330</b>
<b>Lettre à J.L. Verdier</b>	<b>331</b>
<b>1972</b>	<b>333</b>
<b>Curriculum vitae</b>	<b>334</b>
Principales publications . . . . .	337
<b>Esquisse thématique des principaux travaux mathématiques</b>	<b>340</b>
1. Analyse Fonctionnelle . . . . .	341
2. Algèbre Homologique . . . . .	342
3. Topologie . . . . .	342
4. Algèbre . . . . .	344

5. Géométrie Analytique . . . . .	345
6. Groupes Algébriques . . . . .	347
7. Groupes discrets . . . . .	347
8. Groupes formels . . . . .	348
9. Arithmétique . . . . .	348
10. Géométrie Algébrique . . . . .	349
Bibliographie . . . . .	354
<b>1973</b>	<b>360</b>
<b>Introduction to Functorial Algebraic Geometry</b>	<b>361</b>
0. Introductory material . . . . .	363
I. Functorial description of the sets of solutions of systems of polynomial equations . . . . .	366
1. The isomorphism $\text{Aff}_k \simeq G_k^\circ$ . . . . .	366
2. Restriction to particular $k$ -algebras ( $k' = k$ , $k'$ reduced, $k'$ a field) . . . . .	366
II. Limits in the category $\text{Aff}_k$ of affine algebraic spaces . . . . .	366
1. Categorical preparation . . . . .	366
2. Limits in the category $\text{Aff}_k$ . . . . .	366
III. Affine schemes . . . . .	366
1. The functor $\text{Spec} : G \longrightarrow I$ . . . . .	366
2. Sheaves on affine schemes . . . . .	366
<b>Fonctions holomorphes (Théorie de Cauchy)</b>	<b>367</b>
0. Introduction . . . . .	368
1. Prélude . . . . .	368
2. Intégrales curvilignes . . . . .	368
3. Primitives d'une forme différentiable . . . . .	368
4. Fonctions holomorphes . . . . .	368
2. Développement en série d'une fonction holomorphe . . . . .	368
6. Homotopie des chemins . . . . .	368
<b>Fonctions holomorphes (Suite et fin)</b>	<b>369</b>
7. Principe du maximum . . . . .	370

8. Développement de Laurent . . . . .	370
9. Calcul des résidus . . . . .	370
Letter to F. Knudsen	371
Lettre à H. Seydi	376
Lettre à L. Illusie	381
1974	387
Lettre à P. Deligne, J. Giraud et J.-L. Verdier	388
Lettre à P. Deligne	390
1975	395
Lettre à L. Breen	396
Lettre à L. Breen	397
Lettre à L. Breen	398
Complexe de De Rham à puissance divisée et ombres des modules	399
Notations semi-simpliciaux. Constructions universelles	411
Faisceautisation du topos de De Rham	417
1976	419
1977	420
1978	421
1979	422
1980	423

1981	424
La “Longue Marche” à Travers la Théorie de Galois	425
Structures Stratifiées	427
1. La situation la plus élémentaire . . . . .	428
2. Stratification globale . . . . .	429
3. Stratification globale . . . . .	430
4. Topos canoniques associées à une stratification globale . . . . .	430
1980	433
1983	434
Brief an G. Faltings	435
Notes Anabéliennes	438
I. Résultats de fidélité . . . . .	439
II. La question de pleine fidélité . . . . .	452
III. Étude des sections de $E_U$ sur $\Gamma$ . . . . .	457
IV. Sections d’extensions et anneaux de valuations généraux . . . . .	470
Structure à l’infini des $M_{g,\nu}$	476
1. Courbes standard . . . . .	477
2. Graphe associé à une courbe standard . . . . .	478
3. Courbes “stables” et $MD$ -graphes . . . . .	480
4. La théorie de Mumford-Deligne . . . . .	481
5. Spécialisation des $MD$ -graphes . . . . .	482
6. Morphismes de $[\ ]$ de graphes et de maquettes . . . . .	483
7. Étude des $[\ ]$ de $\dim \leq 2$ $[\ ]$ détermination des graphes correspondantes	483
8. Structure $[\ ]$ . . . . .	483
9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ( $[\ ]$ MDT-structure) : cas $[\ ]$ , . . . . .	483
10. Structures MDT analytiques : $[\ ]$ . . . . .	483
11. Digression : $[\ ]$ Structure à l’infini des groupoïdes fondamentaux . .	483

12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une $[\mathcal{C}]$ et leur dévissages en “topos élémentaires” . . . . .	483
13. Digression sur stratification “locales” $[\mathcal{C}]$ . . . . .	483
<b>Pursuing stacks</b>	<b>484</b>
<b>1984</b>	<b>485</b>
<b>Esquisse d’un Programme</b>	<b>486</b>
<b>Récoltes et Semailles</b>	<b>487</b>
<b>Rapport d’activité</b>	<b>490</b>
<b>Rapport d’activité</b>	<b>495</b>
<b>Brief an V. Diekert</b>	<b>497</b>
<b>Letter to L. Bers</b>	<b>499</b>
<b>1985</b>	<b>506</b>
<b>1986</b>	<b>507</b>
<b>Vers une Géométrie des Formes</b>	<b>508</b>
I. Vers une géométrie des formes (topologiques) . . . . .	509
II. Réalisations topologiques des réseaux . . . . .	510
III. Réseaux via découpages . . . . .	510
IV. Analysis situs (première mouture) . . . . .	510
V. Algèbre des figures . . . . .	510
VI. Analysis situs (deuxième mouture) . . . . .	510
VII. Analysis situs (troisième mouture) . . . . .	511
VIII. Analysis situs (quatrième mouture) . . . . .	511
<b>1987</b>	<b>512</b>
<b>Letter to P. Blass</b>	<b>513</b>

1988	515
1990	516
Les Dérivateurs	517
1991	518
Lettre à R. Thomason	519
Lettre à A. Y.	535
1992 — 2014	538
Undated	538
Categories tannakiennes	539
Catégories tannakiennes définies par des cristaux . . . . .	540
4. . . . .	540
5. $F$ -cristaux de pente nulle . . . . .	540
6. . . . .	541
7. . . . .	541
8. . . . .	541
9. . . . .	541
10. Cas $k$ fini . . . . .	541
Filtrations sur foncteurs fibres pour catégories tensorielles	542
Quelques exemples de catégories tensorielles	544
Motifs à coefficients sur un corps de $[]$	552
Motifs	554
Letter to J. Murre	555



Letter to J. Murre 559

Letter to J. Murre 561



## ARCHIVES GROTHENDIECK

---

- This [page] contains the public part (1949-1991) of Alexander Grothendieck's mathematical notes, scanned at Montpellier's University.
- Ce fonds a été donné par Alexandre Grothendieck à l'un de ses anciens élèves, Jean Malgoire, enseignant-chercheur à l'Université de Montpellier. Il a été réalisé en deux temps, fin juin ou début juillet 1990 et le 28 juillet 1995. Jean Malgoire conserve à son domicile les archives Grothendieck jusqu'en 2010, date à laquelle elles sont déposées à l'Université de Montpellier.

# FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE

(Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957-1962)

---

- This text was published in: *FGA : Fondements de la géométrie algébrique*.  
Secrétariat Math. IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris, (1962)
- [scan]
- Ongoing [translation] by T. Hosgood

## ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

---

- The IHÉS was founded in 1958 with Grothendieck and Dieudonné as their scientific members. The “Publications Mathématiques de l’IHÉS” was established in 1959 with Dieudonné as Editor. EGA I was published in Volume 4 of 1960. Grothendieck was the author and Dieudonné his collaborator.
- *“Pendant les années en question (1958–1964), le temps de Dieudonné se partageait pour l’essentiel entre la rédaction des Éléments de Géométrie Algébrique (où j’apparais malencontreusement comme auteur principal) et les rédactions Bourbaki — mis à part le piano et la cuisine (Dieudonné était à la fois fin musicien et fin cuisinier).”*  
Récoltes et Semailles
- EGA was planned to be a reference book on the foundations of algebraic geometry. As originally planned it would constitute thirteen chapters of which only four would appear (in eight volumes).
- [review] of EGA by S. Lang. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (3): 239–246 (1961).
- Open-source [translation] in English.

## EGA I : Le langage des schémas

- This text was published in: *Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 4 (1960), pp. 5-228 [scan] (Ed. 1), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (in French). Vol 166. Springer-Verlag [scan] (Ed. 2).
- [translation] in Russian by F. V. Sirokov. *Elements of algebraic topology*, Uspekhi Mat. Nauk, 1972, Volume 27, Issue 2, 135–148

## EGA II : Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes

- EGA was planned to be a reference book on the foundations of algebraic geometry. As originally planned it would constitute thirteen chapters of which only four would appear (in eight volumes).
- This text was published in: *Éléments de géométrie algébrique : II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 8 (1961), pp. 5-222.
- [scan]

## EGA III : Étude cohomologique des faisceaux cohérents

- This first part was published in: *Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 11 (1961), pp. 5-167.
- [scanI], [scanII]
- This second part was published in: *Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Seconde partie*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 17 (1963), pp. 5-91.

## EGA IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas

- This first part was published in: *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Première partie*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 20 (1964), pp. 5-259.
- [scanI], [scanII], [scanIII], [scanIV]
- This second part was published in: *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 24 (1965), pp. 5-231.
- This third part was published in: *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 28 (1966), pp. 5-255.
- This fourth part was published in: *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 32 (1967), pp. 5-361.

## SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE

---

- “Le signe SGA est une abréviation pour “Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie”. Il désigne (ou du moins, désignait dans les années soixante) les séminaires dans lesquels j’ai développé, entre 1960 et 1969 (et en collaboration avec des élèves et d’autres, à partir de 1962) mon programme de fondements de la géométrie algébrique nouvelle, parallèlement aux textes (moins “avancés”, et en style plus canonique) de la série EGA (“Éléments de Géométrie Algébrique”). Ces séminaires se déroulaient au “Bois Marie”, lieudit (à Bures sur Yvette) où est implanté l’IHES depuis 1962. À vrai dire, les deux premiers séminaires (entre 1960 et 1962) se sont poursuivis dans un local de fortune à Paris (à l’Institut Thiers), devant un auditoire qui ne devait guère dépasser une dizaine de personnes, et devant lesquels je faisais rigoureusement “cavalier seul”. Le sigle SGA date de ces années, où il n’était pas encore question de “Bois Marie”. J’ai rajouté ultérieurement cette jolie appellation au nom initial “séminaire de Géométrie Algébrique”, pour le rendre mains austère.

Il va sans dire que la suite de ces séminaires, de SGA 1 à SGA 7, est numérotée par ordre chronologique. Il allait de soi que la conception d’ensemble de chacun de ces séminaires provenait de moi. Elle était inspirée par mon propos global et à longue échéance, de poser de vastes fondements de la géométrie algébrique, et de plus en plus, ceux en même temps d’une “géométrie” plus vaste, que je sentais fortement à partir tout ou moins des années 1963 et



suivantes, et qui restait non nommée. (Je l'appellerais aujourd'hui du nom de "géométrie arithmétique", synthèse de la géométrie algébrique, de la topologie et de l'arithmétique.) Le dernier de ces séminaires est SGA 7, qui s'est poursuivi (contrairement aux précédents) sur deux années consécutives, 1967–69, et qui était animé en collaboration avec Deligne.

### Récoltes et Semailles

- The series of SGA is a textual reproduction of the mimeographed notes from an oral seminar, which were distributed by the IHÉS. Later Grothendieck would make critical remarks regarding the published editions of them, mainly SGA 5 and 7.
- “Le but que se propose le *Séminaire*, parallèlement au traité *Éléments de Géométrie Algébrique*” de J. Dieudonné et A. Grothendieck, est de jeter les fondements de la Géométrie Algébrique, suivant les points de vue dans ce dernier ouvrage. La référence standard pour tous les volumes du *Séminaire* est constituée par les Chapitres I, II, III des *Éléments de Géométrie Algébrique*” (cités EGA I, II, III), et on suppose le lecteur en possession du bagage d’algèbre commutative et l’algèbre homologique que ces chapitres impliquent<sup>1</sup>. De plus, dans chaque volume du *Séminaire* il sera référé librement, dans le mesure des besoins, à des volumes antérieurs du même *Séminaire*, ou à d’autres chapitres publiés ou sur le point de paraître des “Éléments”.

Chaque *partie* du *Séminaire* est centrée sur un sujet principal, indiqué dans le titre du ou des volumes correspondants ; le séminaire oral porte généralement sur une année académique, parfois plus. Les exposés à l’intérieur de chaque partie du *Séminaire* sont généralement dans une dépendance logique étroite les uns par rapport aux autres ; par contre, les différentes parties du *Séminaire* sont dans une large mesure logiquement indépendants les uns par rapport aux autres. Ainsi, la partie “Schémas en Groupes” est à peu près entièrement indépendante des deux parties du *Séminaire* qui la précèdent chronologiquement ; par contre, elle fait un fréquent appel aux résul-

---

<sup>1</sup>Voir l’Introduction à EGA I pour des précisions à ce sujet.

tats de EGA IV. Voici la liste des parties du *Séminaire* qui doivent paraître prochainement (cités SGA 1 à SGA 7 dans la suite) :

SGA 1. Revêtements étales et groupe fondamental, 1960 et 1961.

SGA 2. Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, 1961/62.

SGA 3. Schémas en groupes, 1963 et 1964 (3 volumes), en coll. avec M. Demazure.

SGA 4. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, 1963/64 (3 volumes), (en coll. avec M. Artin et J.L. Verdier).

SGA 5. Cohomologie  $\ell$ -adique et fonctions  $L$ , 1964 et 1965 (2 volumes).

SGA 6. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, 1966/67 (2 volumes) (en coll. avec P. Berthelot et L. Illusie).

SGA 7. Groupes de monodromie locale en géométrie algébrique.

Trois parmi ces *Séminaires* partiels ont été dirigés en *collaboration* avec d'autres mathématiciens, qui figureront comme co-auteurs sur la couverture des volumes correspondants. Quant aux autres participants actifs du *Séminaire*, dont le rôle (tant au point de vue rédactionnel que de celui du travail de mise au point mathématique) est allé croissant d'année en année, le nom de chaque participant figure en tête des exposés dont il est responsable comme conférencier ou comme rédacteur, et la liste de ceux qui figurent dans un volume déterminé se trouve indiquée sur la page de garde dudit volume.

Il convient de donner quelques précisions sur les rapports entre le *Séminaire* et les *Éléments*. Ces derniers étaient destinés en principe à donner un exposé d'ensemble des notions et techniques jugées les plus fondamentales dans la Géométrie Algébrique, à mesure que ces notions et techniques elles-mêmes se dégagent, par le jeu naturel d'exigences de cohérence logique et esthétique. Dans cette optique, il était naturel de considérer le *Séminaire* comme une version préliminaire des *Éléments*, destinée à être englobée à peu près totalement, tôt ou tard, dans ces derniers. Ce processus avait déjà commencé dans

une certaine mesure il y a quelques années, puisque les exposés I à IV du présent volume SGA 1 sont entièrement englobés par EGA IV, et que les exposés VI à VIII devaient l'être d'ici quelques années dans EGA VI. Cependant, à mesure que se développe le travail d'édification entrepris dans les *Éléments* et dans le *Séminaire*, et que les proportions d'ensemble se précisent, le principe initial (d'après lequel le *Séminaire* ne constituerait qu'une version préliminaire et provisoire) apparaît de moins en moins réaliste en raison (entre autres) des limites imposées par la prévoyante nature à la durée de la vie humaine. Compte tenu du soin généralement apporté dans la rédaction des différentes parties du *Séminaire*, il n'y aura lieu sans doute de reprendre une telle partie dans les *Éléments* (ou des traités qui en prendraient la relève) que lorsque des progrès ultérieurs à la rédaction permettront d'y apporter des améliorations très substantielles, aux prix de modifications assez profondes. C'est le cas dès à présent pour le présent séminaire SGA 1, comme on l'a dit plus haut, et également pour SGA 2 (grâce aux résultats récents de Mme Raynaud). Par contre, rien n'indique actuellement qu'il en sera ainsi dans un proche avenir pour aucune des parties citées plus haut SGA 3 à SGA 7."

## SGA 1

- Ongoing [translation] by T. Hosgood

## SGA 1 : Revêtements Étales et Groupe Fondamental

- **Title:** *Revêtements Étales et Groupe Fondamental*
- **English title:** *Étale Coverings and the Fundamental Group*
- Un séminaire dirigé par A. Grothendieck Augmenté de deux exposés de Mme M. Raynaud
- **Language:** French
- **Oral seminar:** 1960-1961
- **Published Date:** 1971

- **Published** in: Lecture Notes in Mathematics, 224, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- **Reprinted** in: [edition] recomposée et annotée par B. Edixhoven. Ceci est une *version légèrement corrigée* du texte original. Elle est éditée par la Société mathématique de France dans la série “Documents Mathématiques”. Documents Mathématiques (Paris), 3. Société Mathématique de France, Paris, 2003. xviii+327 pp.
- **Scan:** [scan] (464 pp)
- **Notes:**

*Ayant à rédiger l'exposé VII du Séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES de 1961, qui devait être consacré au formalisme général de la théorie de la descente, nous avons été conduit, et même poussé, à y inclure un certain nombre de considérations qui n'ont qu'un rapport lointain avec la Géométrie. C'est une des raisons pour lesquelles ce travail est présenté de manière autonome, l'autre étant sa date d'achèvement. La Géométrie Algébrique moderne faisant grand usage des techniques de descente, il est bon qu'elles soient exposées en détail. C'est aussi la raison pour laquelle nous ne donnons que peu d'exemples: on en trouvera dans le séminaire susnommé et dans celui de 1963.*

Méthode de la descente, J Giraud

## SGA 2 : Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux

- **Title:** *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*
- **English title:** *Local cohomology of coherent sheaves and global and local Lefschetz theorems*
- Alexander Grothendieck (rédigé par un groupe d'auditeurs). Augmenté d'un exposé de Mme Michèle Raynaud

- **Language:** French
- **Oral seminar:** 1961-1962
- **Published Date:** 1968
- **Published in:** Advanced Studies in Pure Mathematics 2, North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1968.
- **Reprinted in:** [edition] with a preface and edition by Yves Laszlo. Revised reprint of the 1968 French original. Documents Mathématiques (Paris), 4. Société Mathématique de France, Paris, 2005. x+208 pp.
- **Scan:** [scan] (292 pp)

### SGA 3 : Schémas en groupes

- **Title:** *Schémas en groupes*
- **English title:** *Group schemes*
- Un séminaire dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Artin, J. E. Bertin P. Gabriel, M. Raynaud, J. P. Serre
- **Language:** French
- **Oral seminar:** 1962-1964
- **Published Date:** 1970
- **Published in three parts:** Lecture Notes in Mathematics, n° 151, 152, and 153. Springer (1970)
- **Edition:** [editionI], [editionII], [editionIII] par Philippe Gille et Patrick Polo. 2011
- **Scan:** [scanI], [scanII], [scanIII]
- **Review:** [review] of SGA 3 (2011 edition), by J.S. Milne

- **Notes:**

SGA 3 was originally distributed by IHES in typed mimeographed form under the title SGA D (“Demazure”).

The first two-thirds of the seminar develops the theory of group schemes over an arbitrary base scheme, and the final third is a detailed exposition by Demazure of his results on reductive group schemes over an arbitrary base scheme (the topic of his thesis). Many of the participants of these seminars were also involved in the writing of Bourbaki’s “Groupes et Algebres de Lie”.

## SGA 4 : Théorie des topos et cohomologie étale des schémas

- **Title:** *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*
- **English title:** *Topos theory and étale cohomology of schemes*
- Un séminaire dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne, B. Saint-Donat
- **Language:** French
- **Oral seminar:** 1963-1964
- **Published Date:** 1972
- **Place:** Le Bois-Marie
- **Published in:** Lecture Notes in Mathematics, n° 269, 270, and 305. Springer (1972)
- **Edition:** [réédition] de F. Orgogozo
- **Scan:** [scanI], [scanII], [scanIII]
- **Notes:**

SGA 4 was originally distributed by IHES in typed mimeographed form under the title SGA A (“Artin”).

## SGA 5 : Cohomologie $\ell$ -adique et fonctions $L$

- **Title:** *Cohomologie  $\ell$ -adique et fonctions  $L$*
- **English title:**  *$\ell$ -adic cohomology and  $L$ -functions*
- Un séminaire dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de I. Bucur, C. Houzel, L. Illusie, J. P Jouanolou et J. P Serre
- **Language:** French
- **Oral seminar:** 1965-1966
- **Published Date:** 1977
- **Place:** Le Bois-Marie
- **Published in:** Lecture Notes in Mathematics n 589, Springer (1977)
- **Errata:** [errata]] à SGA 5 III, L Illusie
- **Edition:** Ongoing [edition] by M. Carmona
- **Scan:** [scan]
- **Notes:**

SGA 4 1/2. *Cohomologie étale*, P. Deligne Lecture Notes in Mathematics (in French). Vol. 569. Berlin; New York: Springer-Verlag. pp. iv+312. [scan], [transcription], [translation] (Étale cohomology: starting points) by J. Milne

## SGA 6 : Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch

- **Title:** *Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch*
- **English title:** *Intersection theory and the Riemann–Roch theorem*

- Un séminaire dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie. Avec la collaboration de D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P Serre
- **Language:** French
- **Oral seminar:** 1966-1967
- **Published Date:** 1971
- **Place:** Le Bois-Marie
- **Published in:** Lecture Notes, n 225, Springer-Verlag, Berlin, 1971
- **Edition:** Ongoing [edition] by M. Carmona
- **Scan:** [scan]

## SGA 7 : Groupes de monodromie en géométrie algébrique

- **Title:** *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*
- **English title:** *Monodromy groups in algebraic geometry*
- **Part I**
- Un séminaire dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim
- **Language:** French
- **Oral seminar:** 1967-1969
- **Published Date:** 1972
- **Place:** Le Bois-Marie
- **Published in:** Lecture Notes in Mathematics. Vol.288. Berlin; New York: Springer-Verlag. viii+523.



- **Edition:** Ongoing [edition] by M. Carmona
- **Scan:** [scan]
  
- **Part II**
- Un séminaire dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de P. Deligne et N. Katz
- **Language:** French
- **Oral seminar:** 1967-1969
- **Published Date:** 1973
- **Place:** Le Bois-Marie
- **Published in:** Lecture Notes in Mathematics. Vol.340. Berlin; New York: Springer-Verlag. pp. x+438.
- **Scan:** [scan]

## CORRESPONDENCES

---

### A. Grothendieck - J.-P. Serre

- This text was published in: *Grothendieck-Serre correspondence*. Pierre Colmez - Jean-Pierre Serre (Eds.), Société Mathématique de France, 2001.
- Letters from January, 1955 to January, 1987.
- [edition]

### A. Grothendieck - D. Mumford

- This text was published in: *Grothendieck-Mumford correspondence*. D. Mumford. Selected Papers, Volume II
- Letters from August, 1958 to February, 1986.
- [edition]

### A. Grothendieck - R. Brown

- Letters from February, 1982 to April, 1991.
- [edition] par M. Künzer (avec la collaboration de R. Brown et G. Maltsiniotis)

## 1945 — 1950

---

- License studies (equivalent to a BS) in mathematics in the University of Montpellier 1945-48.
- “Ce qui me satisfaisait le moins, dans nos livres de maths, c’était l’absence de toute définition sérieuse de la notion de longueur (d’une courbe), d’aire (d’une surface), de volume (d’un solide). Je me suis promis de combler cette lacune, dès que j’en aurais le loisir. J’y ai passé le plus clair de mon énergie entre 1945 et 1948, alors que j’étais étudiant à l’Université de Montpellier. Les cours à la Fac n’étaient pas faits pour me satisfaire.”

Récoltes et Semailles

- On November 1948 Grothendieck obtained a fellowship to be a “Auditeur libre à l’École Normale Supérieure à Paris en 1948-49.”
- “Dans l’année qui a suivi, j’ai été l’hôte d’un cours de Cartan à “l’Ecole” (sur le formalisme différentiel sur les variétés), auquel je m’accrochais ferme ; celui aussi du “Séminaire Cartan”, en témoin ébahi des discussions entre lui et Serre, à grands coups de “Suites Spectrales” (brr!) et de dessins (appelés “diagrammes”) pleins de flèches recouvrant tout le tableau. C’était l’époque héroïque de la théorie des “faisceaux”, “carapaces” et de tout un arsenal dont le sens m’échappait totalement, alors que je me contraignais pourtant tant bien que mal à ingurgiter définitions et énoncés et à vérifier les démonstrations. Au Séminaire Cartan il y avait aussi des apparitions périodiques de

Chevalley, de Weil, et les jours des Séminaires Bourbaki (réunissant une petite vingtaine ou trentaine à tout casser, de participants et auditeurs), on y voyait débarquer, tel un groupe de copains un peu bruyants, les autres membres de ce fameux gang Bourbaki : Dieudonné, Schwartz, Godement, Delsarte. Ils se tutoyaient tous, parlaient un même langage qui m'échappait à peu près totalement, fumaient beaucoup et riaient volontiers, il ne manquait que les caisses de bière pour compléter l'ambiance — c'était remplacé par la craie et l'éponge. Une ambiance toute autre qu'aux cours de Leray au Collège de France (sur la théorie de Schauder du degré topologique dans les espaces de dimension infinie, pauvre de moi !), que j'allais écouter sur les conseils de Cartan. J'avais été voir Monsieur Leray au Collège de France pour lui demander (si je me rappelle bien) de quoi traiterait son cours. Je ne me rappelle ni des explications qu'il a pu me donner, ni si j'y ai compris quoi que ce soit — seulement, que là aussi je sentais un accueil bienveillant, s'adressant au premier étranger venu. C'est cela et rien d'autre, sûrement, qui a fait que je suis allé à ce cours et m'y suis accroché bravement, comme au Séminaire Cartan, alors que le sens de ce que Leray y exposait m'échappait alors presque totalement.”

Récoltes et Semailles

- At the end of 1948 started the *Séminaire H. Cartan* (1948-1964). The themes chosen for that year were simplicial algebraic topology and the basic notions of sheaf theory.
- Surprisingly enough Grothendieck was not (yet) particularly interested in these subjects, he preferred to continue his studies on analysis (particularly functional analysis). On the advice of H. Cartan and A. Weil, he went to Nancy in October 1949. At that time, Delsarte, Godement, L. Schwartz and J. Dieudonné organized a seminar on topological vector spaces.
- De 1949 à 1953 je poursuis des recherches à Nancy sur les espaces vectoriels topologiques, comme élève de J. Dieudonné et de L. Schwartz, aboutissement à ma thèse de doctorat en 1953, sur la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaire.

- L. Schwartz was awarded the Fields medal in 1950 at the International Congress of Mathematicians for developing “the theory of distributions, a new notion of generalized function motivated by the Dirac delta-function of theoretical physics”.
- Grothendieck was one of five “cobayes” (guinea-pigs; young mathematicians invited to see whether they would be suitable for Bourbaki and Bourbaki for them) at a Bourbaki meeting which took place in Nancy, Feb. 3-7, 1950. The other “cobayes” were F. Bruhat, Braconnier, Berger and Riss. The other presents were H. Cartan, Chabauty, J. Delsarte, J. Dieudonné, Ehresmann, R. Godement, Mackey, Pisot, Roger, P. Samuel, J.-P. Serre, L. Schwartz.

SUR LA COMPLÉTION DU DUAL D'UN ESPACE  
VECTORIEL LOCALEMENT CONVEXE

Note<sup>1</sup> de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Élie Cartan

---

- This text was published in: *Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe*. C. R. Acad. Sc. Paris 230, 605-606 (1950)
- [scan]

---

<sup>1</sup>Séance du 6 février 1950.

# QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS À LA DUALITÉ DANS LES ESPACES ( $F$ )

Note<sup>2</sup> de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud  
Denjoy

---

- This text was published in: *Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces ( $F$ )*. C. R. Acad. Sci. Paris 230, 1561-1563 (1950)
- [scan]

---

<sup>2</sup>Séance du 30 octobre 1950.

CRITÈRES GÉNÉRAUX DE COMPACITÉ DANS LES  
ESPACES VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXES.  
PATHOLOGIES DES ESPACES ( $LF$ )

Note<sup>3</sup> de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud  
Denjoy

---

- This text was published in: *Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologies des espaces ( $LF$ )*. C. R. Acad. Sci. Paris 231, 940-941 (1950)
- [scan]

---

<sup>3</sup>Séance du 30 octobre 1950.



LETTRE À J. DIXMIER  
20.11.1950

---

- [scan]

A. Grothendieck  
33 rue du Maréchal Gérard  
Nancy (M et M)

Nancy le 20.11.1950

Cher Monsieur Dixmier,

LETTRE À J. DIXMIER  
10.12.1950

---

- [scan]

A. Grothendieck  
33 rue du Maréchal Gérard  
Nancy (M et M)

Nancy le 20.11.1950

Cher Monsieur Dixmier,

Merci pour votre lettre et votre tirage à part. – Malheureusement, la suggestion que vous me faites ne m’apporte rien de neuf, car les minimisations dont vous parlez sont à fortiori incluses dans le fait de prendre un flot compact convexe *minimal* (ce qui est possible grâce au théorème de Zorn).

Il est bien vrai que dans un espace complet quelconque, l’enveloppe convexe fermé d’une partie flot compacte est encore flot compacte. Godement nous a donné la démonstration dans le cas où l’espace est séparable ; dans le cas général, on remarque que d’après le théorème d’Eberlein, il suffit de montrer que toute *suite* extraite de l’enveloppe convexe admet un point faiblement adhérent, ce qui ramène immédiatement au cas séparable. — Notez qu’il existe un assez grand nombre de théorèmes dont l’énoncé ne fait intervenir aucune condition de dénombrabilité, et qui ne peuvent se démontrer sans l’aide du théorème d’Eberlein (j’en connais cinq exemples au moins). Cela tient à ce que l’emploi des suites permet d’appliquer le théorème de Lebesgue sur l’intégrale d’une limite simple de fonctions bornées dans leur ensemble !

Vous me demandez avec raison comment, du théorème sur la moyenne des fonctions flot p.p., on pourrait déduire que tout groupe  $G$  borné d’opérateurs dans un Hilbert est semblable à un groupe d’opérateurs unitaires. Si on savait que les fonctions sur  $G$  de la forme  $\varphi_{x,y}(s) = \langle T^s x, T^s y \rangle$  sont flot p.p., on n’aurait qu’à considérer la forme bilinéaire sur  $H : B(x,y) = M_s(\langle T^s x, T^s y \rangle) = M(\varphi_{x,y})$ , où  $M$  est la moyenne invariante sur l’espace des fonctions flot p.p., et l’affirmation apparaîtrait aisément. J’avais cru voir que ces  $\varphi_{x,y}$  sont en effet flot p.p., mais n’en aperçois plus la raison maintenant que je vous écris, de sorte qu’il me semble bien possible que je me suis trompé – mais je n’en suis pas convaincu. Comme ces semaines-ci je suis partiellement pris par des soucis matériels de recherche de logement et de déménagement, et ai d’autre part une autre recherche en cours, je ne peux pas avant quelques semaines examiner la question de près, aussi j’ai préféré

vous répondre tout de suite. – Il est à noter que la  $\sigma$ -translation à droite de  $\varphi_{xy}$  est  $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$ , or si  $\sigma$  parcourt le groupe  $G$ ,  $T^\sigma x$  et  $T^\sigma y$  y parcourent des parties flot relativement compactes de  $H$ . D'autre part  $(a, b) \longrightarrow \varphi_{ab}$  est application bilinéaire continue de  $H \times H$  dans  $C^\infty(G)$ . Il n'en suit malheureusement pas pour autant que l'ensemble des  $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$  est une partie flot relativement compacte de  $C^\infty(G)$ , car il est possible de trouver une application bilinéaire continue du produit de deux Hilberts dans un Banach, telle que l'image du produit des deux boules unité ne soit pas flot relativement compacte. – Peut-être m'étais-je trompé sur ce point ?

Je vous joins le tirage à part de ma dernière note.

Recevez mes cordiales salutations

A. Grothendieck

P. S. Les autres résultats de ma précédente lettre, et de celle-ci, ont été regardé par moi avec assez de soin pour être tout à fait certains !

# CRITÈRES DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES FONCTIONNELS GÉNÉRAUX

By A. Grothendieck

---

- This text was published in: *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*. Amer. J. Math. 74, 168-186 (1952)
- [scan]

1951

---

- Grothendieck was one of three “cobayes” at a Bourbaki meeting which took place in Nancy, Jan. 27 — Feb. 3, 1951. The other “cobayes” were G. Glaeser and “Un Brésilien”. The other presents were H. Cartan, J. Delsarte, J. Dieudonné, J. Dixmier, R. Godement, J.-L. Koszul, S. Eilenberg, P. Samuel, J.-P. Serre, L. Schwartz, Laurent.

LETTRE À J. DIXMIER

7.6.1951

---



A. Grothendieck  
3 chemin du Grand Moulin  
Nancy

Nancy le 7.6.1951

Cher Dixmier,

Pouvez-vous m'envoyer votre article sur la trace dans les anneaux de type fini, et votre papier aux Annals sur les "fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs..."?

Je vous signale une réponse (quasi-triviale) à une question que vous posez dans ce dernier papier (vous en connaissez probablement la réponse aujourd'hui): vous demandez si dans  $T'$ , convergence faible (i.e.: pour  $\sigma(T', B)$ ) implique convergence forte, pour les suites. La réponse est non, car soit  $a \in H, a \neq 0$ , l'application  $x \longrightarrow a \otimes x$  de  $H$  dans  $T'$  est évidemment un isomorphisme dans; mais si la propriété envisagée était vraie pour  $T'$ , elle le serait pour ses sous-espaces, donc pour  $H$ , ce qui est faux.

Je vous envoie mes meilleures salutations

A. Grothendieck

# QUELQUES RÉSULTATS SUR LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Note de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud  
Denjoy

---

- This text was published in: *Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques*. C. R. Acad. Sci. Paris 233, 839-841 (1951)
- [scan]

SUR CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS  
HOLOMORPHES I

Par Alexandre Grothendieck, Nancy



- This text was published in: *Sur certains espaces de fonctions holomorphes I*. J. reine angew. Math. 192, 35-64 (1953)
- [scan]

SUR CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS  
HOLOMORPHES II  
Par Alexandre Grothendieck, Nancy

---

- This text was published in: *Sur certains espaces de fonctions holomorphes I*. J. reine angew. Math. 192, 77-95 (1953)
- [scan]

SUR UNE NOTION DE PRODUIT TENSORIEL  
TOPOLOGIQUE D'ESPACES VECTORIELS  
TOPOLOGIQUES, ET UNE CLASSE REMARQUABLE  
D'ESPACES VECTORIELS LIÉE À CETTE NOTION  
Note<sup>1</sup> de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud  
Denjoy

---

- This text was published in: *Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion*. C. R. Acad. Sci. Paris 233, 1556-1558
- [scan]

---

<sup>1</sup>Séance du 3 décembre 1951.

1952

---

- 
- Laurent Schwartz visited Brazil in 1952 and told people there about his brilliant young student who was having trouble finding a job in France.
- Grothendieck was invited at a Bourbaki meeting which took place in Celles-sur-Plaine, Mars 8-16, 1952. The other presents were H. Cartan, J. Dieudonné, J. Dixmier, J. Delsarte, R. Godement, P. Samuel, L. Schwartz.
- First exposé at the Séminaire Bourbaki (1948 - ).
- L. Schwartz left Nancy for Paris.
- "C'est en 1952 je crois, quand Serre est venu à Nancy (où je suis resté jusqu'en 1953), qu'il a commencé à devenir pour moi un interlocuteur privilégié — et pendant des années, il a été même mon *seul* interlocuteur pour les thèmes se plaçant en dehors de l'analyse fonctionnelle. La première chose je crois dont il m'ait parlé c'était les Tor et les Ext, dont je me faisais un monde et pourtant, regarde donc, simple comme bonjour..., et la magie des résolutions injectives et projectives et des foncteurs dérivés et satellites, à un moment où le "diplococus" de Cartan-Eilenberg n'était pas publié encore. Ce qui m'avait attiré vers la cohomologie dès ce moment, c'étaient les "théorèmes A et B" qu'il venait de développer avec Cartan, sur les espaces analytiques de Stein — j'en avais déjà entendu parler je crois, mais c'est par un ou deux

tête à tête avec Serre que j’ai senti toute la puissance, la richesse géométrique que recelaient ces énoncés cohomologiques tellement simples. Ils m’avaient d’abord totalement passé par dessus la tête, avant qu’il ne m’en parle, à un moment où je ne “sentais” pas encore la substance géométrique dans la cohomologie faisceautique d’un espace. J’étais enchanté au point que pendant des années j’avais l’intention de travailler sur les espaces analytiques, dès que j’aurais mené à bonne fin les travaux que j’avais encore en train en analyse fonctionnelle, où décidément je n’allais pas m’éterniser ! Si je n’ai pas vraiment suivi ces intentions, c’est parce que Serre entretemps s’était tourné vers la géométrie algébrique et avait écrit son fameux article de fondements “FAC”, qui rendait compréhensible et hautement séduisant ce qui auparavant m’était apparu rébarbatif au possible — si séduisant même que je n’ai pas résisté à ces charmes, et me suis dirigé alors vers la géométrie algébrique, plutôt que vers les espaces analytiques.”

Récoltes et Semailles

SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES FAIBLEMENT  
COMPACTES D'ESPACES DU TYPE  $C(K)$

A. Grothendieck



- This text was published in: *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type  $C(K)$* . Canadian J. Math. 5, 129-173 (1953)
- [scan]



SUR LES ESPACES DE SOLUTIONS D'UNE CLASSE  
GÉNÉRALE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Par A. Grothendieck

à Nancy, France

---

- This text was published in: *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles*. J. Analyse Math. 2, 243-280 (1953)
- [scan]

LETTRE À J. DIXMIER  
2.5.1952

---

le 2.5.1952

Cher Dixmier,

Je n'ai jamais prouvé ni prétendu avoir prouvé le théorème dont tu parles, et qui d'ailleurs est faux. Il est en effet immédiat qu'il équivaudrait à l'énoncé suivant: Si  $K$  est un espace compact muni d'une mesure  $\mu$ ,  $M$  l'espace des fonctions sur  $K$  qui sont mesurables pour  $\mu$ , muni de la topologie de la convergence *simple*,  $F$  un sous-espace de  $M$  contenant une suite partout dense, alors il existe pour tout  $\varepsilon > 0$  un compact  $K_1 \subset K$  avec  $|\mu|(K \setminus K_1) < \varepsilon$ , les  $f \in F$  ayant toutes une restriction à  $K_1$  continue. Or, prends  $K = (0, 1)$  avec la mesure de Lebesgue, il est (je pense) connu, et facile à démontrer (excellent exercice Bourbaki) qu'il existe une suite de fonctions mesurables sur  $K$  à laquelle toute fonction numérique définie sur  $K$  soit adhérente, ce qui prouve en particulier que  $M$  lui-même est déjà séparable, or  $M$  est loin d'avoir la propriété voulu !

Néanmoins, ton théorème sous sa forme initiale est vrai si  $F$  est métrisable, comme tu t'en es sans doute convaincu tout seul, car on se ramène alors au cas où la fonction faiblement mesurable donnée prend ses valeurs dans une partie *équicontinue* de  $F'$ , cas où l'énoncé est trivial et figure déjà dans une rédaction antérieure. Comme le théorème est vrai encore lorsque  $F$  est le dual faible d'un espace métrisable séparable  $F$  (puisque alors  $t \rightarrow \lambda_t$  est *fortement* mes.), ou le dual d'un espace de Banach  $F'$  (comme par exemple  $\ell^\infty$ ) pour lequel la boule unité du dual faible  $F$  de  $F'$  admet une suite partout dense (même méthode que pour  $F$  du type  $(f)$ ), il reste que dans les cas usuels, le théorème envisagé est valable. On pourrait même remarquer (re-exercice ?) que la catégorie d'espaces localement convexes séparables  $F$  pour lesquels l'énoncé envisagé est vrai, est stable pour le produit topologique ou la somme directe d'un ensemble dénombrable d'espaces facteurs, et par l'opération de prendre un quotient ou une topologie moins fine – donc aussi pour les limites inductives dénombrables etc – en fait, on attrape tous les espaces raisonnables de l'Analyse.

Bien à toi

A. Grothendieck

## SUR LES ESPACES $(F)$ ET $(DF)$

---

- This text was published in: *Sur les espaces  $(F)$  et  $(DF)$* . Summa Brazil. Math. 3, 57-123 (1954)
- [scan]
- [translation] in Russian by D. A. Raikov. Matematika, 1958, Volume 2, Issue 3, Pages 81–128

# RÉSUMÉ DES RÉSULTATS ESSENTIELS DANS LA THÉORIE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET DES ESPACES NUCLÉAIRES

---

- Due to the length of Grothendieck's thesis and because it was taking time to be published, he also wrote a summary of it.
- This text was published in: *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires*. Annales de l'Institut Fourier, Volume 4 (1952), pp. 73-112.
- [scan]
- [translation] by T. Hosgood

## PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

---

- This text was published in: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Séminaire Bourbaki : années 1951/52 - 1952/53 - 1953/54, exposés 50-100, Séminaire Bourbaki, no. 2 (1954), Talk no. 69, 8 p.
- [scan]
- [erratum]. Annales de l'Institut Fourier, Volume 6 (1956), pp. 117-120.

## LA THÉORIE DE FREDHOLM

---

- This text was published in: *La théorie de Fredholm*. Bulletin de la Société Mathématique de France, Volume 84 (1956), pp. 319-384.
- [scan]
- [translation] in Russian by S. N. Krachkovskii. Matematika, 1958, Volume 2, Issue 5, 51–104

## 1953

---

- At the beginning of 1953, Grothendieck's thesis was entirely written and was defended in Paris, on February 28, 1953.
- Grothendieck accepted an offer of a visiting professor position at the Universidad de Sao Paulo, which he held during the academic years 1953 and 1954 with a special arrangement so that he would be able to return to Paris to attend seminars.
- After his arrival in Paris, L. Schwartz started in 1953 a Séminaire Schwartz (1953-1961). The first year was devoted to Grothendieck's thesis "Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires".



# PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

---

- This text was published in: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Mem. Amer. Math. Soc. n° 16, 1955
- [scan]

# SUR CERTAINS SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $L^p$

A. Grothendieck

---

- This text was published in: *Sur certains espaces de fonctions holomorphes I.*  
Canadian J. Math. 6, 158-160 (1954)
- [scan]

SUR CERTAINES CLASSES DE SUITES DANS LES ESPACES  
DE BANACH, ET LE THÉORÈME DE  
DVORETZKY-ROGERS

---

- This text was published in: *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*. Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8, 81-110, (1956)
- [scan]
- [transcription]

## RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

---

- **Title:** *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*
- **English title:** *Summary of the metric theory of topological tensor products*
- **Published Date:** 1953
- **Written Date:** 1953
- **Published in:** Boletim da Sociedade Matemática de Sao Paulo, v. 8, p. 1–79, 1953
- **Reprinted in:** Resenhas 2 (1996), no. 4, 401–480
- **Scan:** [scan] (80 pp)
- **Transcription:** [transcription] (63 pp)
- **Language:** French

# THÉORÈMES DE FINITUDE POUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX

---

- This text was published in: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux*. Bull.Soc. Math. France 84, 1-7 (1956)
- [scan]

1954

---

- “Au temps où je faisais encore de l’Analyse Fonctionnelle, donc jusqu’en 1954, il m’arrivait de m’obstiner sans fin sur une question que je n’arrivais pas à résoudre, alors même que je n’avais plus d’idées et me contentais de tourner en rond dans le cercle des idées anciennes qui, visiblement, ne “mordaient” plus. Il en a été ainsi en tous cas pendant toute une année, pour le “problème d’approximation” dans les espaces vectoriels topologiques notamment, qui allait être résolu une vingtaine d’années plus tard seulement par des méthodes d’un ordre totalement différent, qui ne pouvaient que m’échapper au point où j’en étais. J’étais mû alors, non par le désir, mais par un entêtement, et par une ignorance de ce qui se passait en moi. Ça a été une année pénible — le seul moment dans ma vie où faire des maths était devenu pénible pour moi ! Il m’a fallu cette expérience pour comprendre qu’il ne sert à rien de “sécher” — qu’à partir du moment où un travail est arrivé à un point d’arrêt, et sitôt l’arrêt perçu, il faut passer à autre chose — quitte à revenir à un moment plus propice sur la question laissée en suspens. Ce moment presque toujours ne tarde pas à apparaître — il se fait un mûrissement de la question, sans que je fasse mine d’y toucher, par la seule vertu d’un travail fait avec entrain sur des questions qui peuvent sembler n’avoir aucun rapport avec celle-là. Je suis persuadé que si je m’obstinais alors, je n’arriverais à rien même en dix ans ! C’est à partir de 1954 que j’ai pris l’habitude en maths d’avoir toujours beaucoup de fers dans le feu en même temps. Je ne travaille que sur un d’eux à la fois, mais par une sorte de miracle

qui se renouvelle constamment, le travail que je fais sur l'un profite aussi à tous les autres, qui attendent leur heure.”

### **Récoltes et Semailles**

- J.-P. Serre was awarded the Fields medal in 1954 at the International Congress of Mathematicians for achieving “major results on the homotopy groups of spheres, especially in his use of the method of spectral sequences. Reformulated and extended some of the main results of complex variable theory in terms of sheaves.” He gave an address by invitation of the organizing committee of the ICM entitled *Cohomologie et géométrie algébrique*.

## ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

---

- The present book consists of a course in French that Grothendieck gave in Sao Paulo in 1954. It was only available in mimeographed form and then published as a translation by O. Chaljub.
- This text was published in: *Espaces vectoriels topologiques*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidad de Sao Paulo, (1954)
- [scan]
- [translation] by O. Chaljub. Notes on Math. and its App. Gordon and Breach Science Publishers, New-York-London-Paris, 1973



## LA THÉORIE DE FREDHOLM

---

- This text was published in: *La théorie de Fredholm*. Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 91, p. 377-384
- [scan]

# RÉSULTATS NOUVEAUX DANS LA THÉORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES I

Note<sup>1</sup> de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud  
Denjoy

---

- This text was published in: *Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires I*. C. R. Acad. Sci. Paris 239, 577-579 (1954)
- [scan]

---

<sup>1</sup>Séance du 28 juin 1954.

# RÉSULTATS NOUVEAUX DANS LA THÉORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES II

Note<sup>2</sup> de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud  
Denjoy

---

- This text was published in: *Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires II*. C. R. Acad. Sci. Paris 239, 607-609 (1954)
- [scan]

---

<sup>2</sup>Séance du 28 juin 1954.

LETTRE À J. DIXMIER

28.6.1954

---

A. Grothendieck  
1052 rua Oscar Freire  
Sao Paulo (Brésil)

Sao Paulo le 28.6.1954

Cher Dixmier,

Connais-tu la réponse à la question suivante. Soit  $\underline{A}$  un anneau d'opérateurs dans un Hilbert  $H$ , existe-t-il une projection  $u$  de norme 1 de  $R(H)$  sur  $\underline{A}$ , compatible avec l'involution, et telle que  $u(ATB) = Au(T)B$  pour  $A, B \in \underline{A}$ ? C'est vrai si  $H$  est de dimension finie (et évidemment c'est bien facile dans ce cas), ou si  $\underline{A} \supset \underline{A}'$ , et de ce dernier cas on déduit facilement que c'est vrai si  $\underline{A}$  est commutative (commencer à appliquer le résultat précédent à un anneau commutatif maximal  $\underline{B}$  contenant  $\underline{A}$ , d'autre part on sait qu'il existe une projection de  $\underline{B}$  sur  $\underline{A}$  qui a les propriétés voulues). Bien entendu, même si  $\underline{A}$  est commutatif maximal, il n'y a pas unicité de la projection  $u$ . Voici la démonstration du deuxième cas  $\underline{A} \subset \underline{A}'$ : Soit  $K$  le spectre de  $\underline{A}'$ ,  $\Omega$  l'ensemble des partitions finies de  $K$  en ensembles ouverts et fermés, muni de sa relation d'ordre naturelle; pour  $\omega = (\omega_i) \in \Omega$  on pose  $u_\omega(T) = \sum_i T_{\omega_i} T T_{\omega_i}$ , on considère un ultrafiltre sur  $\Omega$  plus fin que le filtre des sections croissantes, et on pose  $u(T) = \lim u_\omega(T)$  (limite faible!) – Le problème m'intéresse pour pouvoir ramener les propriétés vectorielles-topologiques d'algèbres autoadjointes uniformément fermées quelconques d'opérateurs, aux propriétés de  $R(H)$ , d'où facilement aux propriétés de l'algèbre  $R_0(H)$  des opérateurs compacts, ce qui ramènera souvent à des propriétés de nature métrique sur les  $R(H)$  où  $H$  est de dimension finie. De même, les propriétés des espaces duals de  $C^*$ -algèbres (et aussi des espaces  $L^1$  qui interviennent en intégration non commutative) se ramèneraient aux propriétés des espaces  $H \widehat{\otimes} H$ .

À propos, en vue de simplifier l'exposé de Godement sur la transformation de Fourier des groupes loc. comp. unimod., j'ai eu besoin du résultat suivant, qui se démontre assez facilement en se ramenant à  $R(H)$ : les formes linéaires positives sur une  $C^*$ -algèbre engendrent le dual. Cela est-il connu, ou te semble-t-il utile de publier une petite note là-dessus?

J'espère que cette lettre t'arrivera, et que tu pourras me donner une réponse positive.

Bien à toi

A. Grothendieck

# QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

Par A. Grothendieck

---

- This text was published in: *Quelques points de la théorie des produits tensoriels topologiques*. Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Julio 1954, 173-177. Centro de Cooperación Científica de la UNESCO para América Latina, Montevideo, Uruguay, 1954

LETTRE À J. DIXMIER

18.7.1954

---



Sao Paulo le 18.7.1954

Cher Dixmier,

Bien merci pour la copie de ton bouquin, que je n'ai reçu qu'il y a quelques jours, et dont j'ai commencé la lecture avec grand intérêt. Je ne suis pas sur de pouvoir faire des remarques très utiles pour la rédaction, mais bien entendu je lis le crayon à la main, et te communiquerai mes observations à l'occasion. Pour l'instant, je m'aperçois que systématiquement tu n'énonces que pour les seules algèbres de von Neumann des définitions et propositions valables souvent pour des  $C^*$ -algèbres arbitraires, c'est parfois dommage. Pour l'instant, je te signale des erreurs (?) de détail. Page 7, il me semble que la caractérisation de  $T$  dans le lemme 2, 2°, n'est pas correcte. Page 12, fin du No 2 à la ligne 5 de la fin, je pense que "et un seul" est faux, déjà si  $A_i = B_i = \underline{C}$  (mais n'ai pas cherché le contre-exemple). Page 22 lignes 9-10 "il suffit" est manifestement faux, tu penses sans doute au cas  $B = 0$ . D'autres remarques plus tard. Quelques questions: une sous-algèbre autoadjointe uniformément fermée de  $L(H)$ , stable pour le sup des familles filtrantes croissantes majorées, est-elle faiblement fermée ? Une  $C^*$ -algèbre pour laquelle le sup d'une famille filtrante croissante majorée existe toujours, est-elle isomorphe à une algèbre de von Neumann ? Je ne le sais pas même dans le cas commutatif, ce qui prouve que je ferai bien de lire ton article dans "Summa Brasiliensis", as-tu encore des tirages à part ? Je suis aussi bien curieux de la suite du bouquin, et te suis reconnaissant pour tout papier que tu peux me passer là dessus. Feras-tu un Plancherel abstrait pour les  $C^*$ -algèbres, qui inclurait la théorie des caractères de Godement ?

La lecture du début de ton bouquin m'a permis aussi de répondre par l'affirmative à la question de ma lettre précédente (je viens de trouver la démonstration aujourd'hui, et ne l'ai pas encore mise par écrit canoniquement, mais je pense qu'il n'y a pas d'erreur). Soit  $M$  une sous-algèbre autoadjointe abélienne maximale dans le commutant de  $A'$  de l'algèbre de von Neumann  $A$ , on sait qu'il existe une projection de  $L(H)$  sur  $M'$  ayant les propriétés voulues, il suffit donc de trouver une projection analogue de  $M'$  sur  $A$ . J'arrive à la prouver par un raisonnement direct (grâce au fait que  $M'$  est engendré au sens de v.N. par  $A$  et la sous-algèbre abélienne  $M$  du commutant de  $A$ ), tout à fait différent du raisonnement du premier cas, calqué plutôt sur la preuve du théorème analogue, bien connu, pour une algèbre

Stonienne plongée dans un  $C(K)$ . Le raisonnement prouve presque qu'il existe même une projection de  $M'$  sur  $A$  qui est un homomorphisme, et je pense que ça doit en effet pouvoir se prouver (c'est en tous cas vrai dans le cas de la dimension finie, donc il y a de l'espoir!). – En zornifiant sur l'ensemble des sous- $C^*$ -algèbres  $B$  de  $M'$  contenant  $A$ , pour lesquelles une projection  $B \longrightarrow A$  du type voulu existe, il faut pouvoir passer de  $B$  à son adhérence faible (ce qui est un des deux pas essentiels du raisonnement, inutile dans le cas commutatif rappelé plus haut). Pour ça, on doit introduire le bidual  $B''$  de  $B$ , le munir canoniquement d'une structure d'algèbre de von Neumann telle que l'application naturelle  $B'' \longrightarrow \overline{B}$  soit un homomorphisme *normal* de  $B''$  sur  $\overline{B}$  (*donc se relève*, d'où facilement une application cherchée  $\overline{B} \longrightarrow A$  en composant  $\overline{B} \longrightarrow B'' \longrightarrow A$ ). Pour ces histoires de bidual de  $C^*$ -algèbre, il faut seulement utiliser le résultat sur le dual que je t'avais signalé dans ma lettre précédente, et qui est presque trivial : *Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre,  $u$  une forme linéaire hermitienne continue sur  $A$ , alors on a  $u = v - w$ , où  $v$  et  $w$  sont positives, et  $\|v\| + \|w\| = \|u\|$ .* Démonstration : Soit  $K$  la partie de  $A'$  formée des formes positives de norme  $\leq 1$ , c'est une partie convexe faiblement compacte contenant 0, et il est trivial que pour  $x \in A$ ,  $x$  hermitien, on a  $\|x\| = \sup |\langle x, x' \rangle|$ ,  $x' \in K$ . Se bornant aux sous-espaces hermitiens de  $A$  et  $A'$ , le théorème des bipolaires montre que la boule unité de  $A'_h$  est l'enveloppe convexe symétrique faiblement fermée de  $K$ , i.e. l'ensemble des  $x$  (?)  $\lambda u - \mu w$ , où  $\lambda, \mu \leq 0$ ,  $\lambda + \mu = 1$ ,  $v, w \in K$  (cet ensemble est déjà faiblement compact, car  $K$  l'est), ce qui prouve le théorème. Si on ne suppose plus  $u$  hermitienne, on aura  $u = v + iw$  avec  $v, w$  hermitiennes et  $\|v\|, \|w\| \leq \|u\|$ , et on peut appliquer à  $v$  et  $w$  le résultat précédent. – De plus, le raisonnement prouve que réciproquement, si  $A$  est une algèbre normée complète qui satisfait au théorème précédent (mais où on suppose  $v$  et  $w$  “bornées” – ce qui est automatiquement vrai si  $A$  a une unité), alors (du moins sur sa partie hermitienne) sa norme est la norme polaire de  $K$  donc une norme satisfaisant aux identités algébriques qui caractérisent les  $C^*$ -algèbres. Si on suppose seulement que les formes positives engendrent algébriquement le dual de  $A$ , on peut encore dire (en utilisant Baire) que la norme de  $A$  est *équivalente* à la  $C^*$ -norme polaire de  $K$ , donc que par un changement de norme  $A$  devient une  $C^*$ -algèbre. – Enfin, il est probable que dans l'énoncé du théorème plus haut,  $v$  et  $w$  soient uniques (peut-

être en leur imposant d'autres conditions); il en résulterait que si  $u$  est centrale,  $v$  et  $w$  le sont etc. Mais je ne me suis pas amusé à regarder ça de près.

Merci aussi pour ta lettre où tu réponds à mes questions. Je te salue amicalement

A. Grothendieck

LETTRE À J. DIXMIER

13.8.1954

---

1052 rua Oscar Freire  
Sao Paulo (Brésil)  
USA

Sao Paulo le 13.8.1954

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre détaillée du 28.7. C'est bien dommage que tu penses la théorie des  $C^*$ -algèbres trop vaste pour être englobée dans ton bouquin. Mais où serait le mal d'un livre de 400 pages ou plus sur ce sujet, ça serait au contraire bien agréable qu'il en existe un, car ce n'est certes pas amusant de s'orienter à tâtons dans la littérature courante. Je regrette surtout que tu ne fasses pas Plancherel ; car il ne coûte vraiment pas cher, puisqu'on a déjà la bonne technique des algèbres de v.N., et un Plancherel joliment présenté ferait certainement du bien. D'ailleurs, si j'ai bien compris, c'est surtout pour des Plancherels et Cie que sert toute la théorie des  $C^*$ -algèbres.

Je précise un point de ma lettre précédente, qui te semblait obscur. Soit  $A$  une  $*$ -algèbre,  $P$  l'ensemble des formes positives, unitaires, bornées (au sens algébrique) et normées (i.e.  $f(1) = 1$  s'il y a unité) sur  $A$ . Soit pour tout  $x \in A$  :  $N(x)^2 = \sup_{f \in P} f(x * x)$ , alors on a aussi  $N(x) = \sup \|U_x\|$ , où  $U$  parcourt toutes les représentations unitaires de  $A$ . Donc  $N$  est une norme sur  $A$  telle que l'algèbre complétée de  $A$  soit une  $C^*$ -algèbre, et les représentations unitaires de  $A$  correspondent biunivoquement à celles de cette  $C^*$ -algèbre (qui se substitue donc avantageusement à  $A$  dans diverses questions, p. ex. Plancherel)<sup>1</sup>. Supposons maintenant que  $A$  soit déjà muni d'une norme  $\|x\|$  qui en fasse une algèbre normée complète, et pour simplifier supposons qu'il existe une unité. Alors les formes positives unitaires et bornées sont identiques aux formes positives *continues*, les formes normées sont celles telles que  $f(1) = 1$ , ou encore celles de norme 1. Elles forment une partie convexe faiblement compacte de la partie hermitienne du dual de  $A$ . La partie hermitienne de ce dual est le dual de la partie hermitienne de  $A$ , il revient donc au même de dire que sur  $A_h$ , la norme donnée est égale à  $N(x) = \sup |f(x)|$ , ou que la boule unité de  $A'_h$  est l'enveloppe disquée (disquée = convexe symétrique)

---

<sup>1</sup> Si  $x \in A$  est hermitienne,  $N(x) = \sup_{f \in P} |f(x)|$

faiblement fermée de  $P$ . Cette dernière par raison de faible compacité n'est autre que l'ensemble des formes  $f - g$ ,  $f$  et  $g$  positives,  $\|f\| + \|g\| \leq 1$ . S'il en est donc ainsi, la norme donnée est identique à la norme  $N$  sur  $A_b$ , et par suite *équivalente* à  $N$  sur  $A$  (car du point de vue réel, une algèbre normée involutive est somme directe topologique de sa partie hermitienne et de sa partie antihermitienne). Donc  $A$  est complète pour  $N$ , donc à condition de changer  $\|x\|$  par une norme équivalente,  $A$  devient une  $C^*$ -algèbre. Si on ne veut plus que les deux normes coïncident sur la partie hermitienne, il suffirait même de supposer que toute forme hermitienne sur  $A$  est différence de deux formes positives, i.e. que  $SA'_b$  est engendré par l'enveloppe disquée  $Q$  de  $P$ . Car  $A'_b$  étant tonnelé, il en résulte que  $Q$  est un voisinage de  $O$ , donc par polarité que les normes  $\|x\|$  et  $N(x)$  sur  $A_b$  (donc aussi sur  $A$ ) sont équivalentes.

Soit  $A$  une  $C^*$ -algèbre. Par bitransposition, toute représentation unitaire de  $A$ , soit  $x \rightarrow U(x)$ , se prolonge en une application de même norme du bidual  $A''$  dans  $L(H)$ , et de façon précise sur l'adhérence faible de  $U(A)$ . Si toute forme positive sur  $A$  est de la forme  $(U(x)a, a)$  (pour ceci, on prend pour  $U$  la somme hilbertienne des représentations unitaires associées aux diverses formes positives normées sur  $A$ ), la bitransposée  $U''$  est biunivoque, et identifie donc  $A''$  à une algèbre de von Neumann. On voit aussitôt que la topologie ultrafaible de  $A''$  est  $\sigma(A'', A')$ , en particulier les formes positives normales sur  $A''$  sont les formes positives quelconques sur  $A$ . De plus, on constate aussitôt que si  $V$  est une représentation unitaire de  $A$ , alors  $V''$  est une représentation normale de  $U''$  (ce qui établit une correspondance biunivoque entre les représentations unitaires quelconques de  $A$ , et les représentations normales de  $A''$ ). Cela établit d'ailleurs le fait (facile directement aussi) que la structure d'algèbre de v.N. sur  $A''$  est canonique. Ceci me semble commode dans bien des cas. Ainsi on appellera support d'une forme positive sur  $A$  le support de la forme normale sur  $A''$  qu'elle définit (mais gaffe, si  $A$  est de v.N. et si la forme donnée est déjà normale, ça fait deux supports différents). Deux formes positives seront dites disjointes si leurs supports sont orthogonaux. Cette fois-ci, il n'y a pas d'ambiguïté quand  $A$  est déjà une algèbre de von Neumann et  $u$  et  $v$  normales, comme il résulte par exemple de la proposition (bien facile): deux formes positives  $u, v$  sur la  $C^*$ -algèbre  $A$  sont disjointes si et seulement si  $\|u - v\| = \|u\| + \|v\|$ .

J'en viens à la question d'unicité de la décomposition d'une forme linéaire hermitienne  $\varphi$  comme différence de deux formes positives disjointes  $u$  et  $v$ . On peut supposer  $A$  une algèbre de v.N. et  $u, v$  normales. Alors on a un résultat plus général : Soient  $u, v$  deux formes positives (finies ou non) normales définies sur  $A^+$ , et semi-finies (par quoi on entend qu'il existe un idéal bilatère faiblement dense, sur la partie positive duquel  $u$  resp.  $v$  est fini). La notion de support est définie de façon évidente; supposons les supports de  $u$  et  $v$  orthogonaux. Alors je dis que  $u$  et  $v$  sont uniquement déterminés par la connaissance de la forme  $u - v$  (qui est une forme linéaire sur un idéal bilatère faiblement dense convenable de  $A$  ; noter que l'ensemble des idéaux bilatères faiblement denses est une base de filtre, ce qui précise le sens de l'énoncé précédent). La démonstration est absolument élémentaire (pas de décompositions spectrales !), on montre directement comment  $u$  et  $v$  peuvent s'exprimer en termes de  $\varphi = u - v$ . En fait, on peut encore affaiblir la notion de semi-fini dans cette démonstration. Corollaire: si  $\varphi$  est centrale,  $u$  et  $v$  sont des traces etc. Mais question: si on ne suppose pas  $u$  et  $v$  disjointes, peut-on écrire pourtant  $\varphi$  comme différence de deux formes positives normales semi-finies *disjointes* ? C'est bien plausible, mais je n'ai pas encore regardé. – Bien entendu, si on ne suppose plus que  $A$  est une algèbre de v.N., on a des mêmes énoncés sans condition de normalité, mais la condition de semi-finitude étant ici remplacée par l'existence d'un idéal bilatère dense (*pour la norme*) sur lequel la forme positive envisagée est finie (ce qui rejoint le point de vue de Godement dans son exposé de Plancherel). On devra passer comme toujours à  $A''$  (mais j'avoue que je n'ai pas fait les vérifications).

Enfin, dans la décomposition canonique  $\varphi = u - v$  avec  $u$  et  $v$  positives,  $\|\varphi\| = \|u\| + \|v\|$ , si  $A$  est de v.N. et  $\varphi$  ultrafaiblement continue, alors  $u$  et  $v$  le sont aussi (i.e. sont normales). Il suffit d'exhiber une telle décomposition, avec  $u$  et  $v$  normales. Mais la topologie ultrafaible de  $A$  étant induite par la top. ultrafaible d'un  $L(H)$ , on peut supposer  $A = L(H)$ . Mais alors on a une forme bien explicite des formes hermitiennes ultrafaiblement continues, données par des opérateurs à trace hermitiens, dont la décomposition spectrale donne la décomposition voulue.

Malheureusement, je n'ai pas vu de démonstration générale du théorème de commutation suivant (qu'il suffit maintenant d'énoncer pour les formes positives):

Soit  $A$  alg. de v.N.,  $\mathfrak{u}$  une forme positive normale sur  $A$  (en fait, il devrait être inutile de supposer  $\mathfrak{u}$  finie, semi-finie devrait suffire), soit  $B$  son “commutant” dans  $A$ . Alors,  $B$  contient son commutant  $B'$  dans  $A$ . Cela suggère une théorie de la commutation, qui serait la suivante: dis-moi si par hasard tu ne sais pas si elle est fausse. (Mais il me semble que le seul cas présentant des difficultés – i.e. qui ne se réduit pas par des techniques connues de décompositions spectrales – est celui d’une algèbre purement infinie). On prend les commutants dans  $A$  (laissant tomber  $L(H)$ !), notation  $B', B''$  etc. Une sous-algèbre de v.N. de  $A$  est dite close, si elle est identique à son bicommutant (question : suffit-il qu’elle contienne le centre ?) Soit  $P$  l’ensemble des formes positives normales semi-finies sur  $A$ . (Il est cependant possible que la définition donnée plus haut de semi-finie soit trop stricte. Car alors sur un facteur purement infinie, donc simple, une forme semi-finie serait automatiquement finie ; alors ça semble trop beau que la théorie esquissée ci-dessous puisse marcher). On dit que  $x \in A$  et  $U \in P$  commutent, si  $\mathfrak{u}(xy) = \mathfrak{u}(yx)$  pour tout  $y$  dans un idéal bilatère faiblement dense assez petit (définition sujette à variation, voir ci-dessus). D’où notion de commutant  $\gamma(B)$  dans  $P$  d’une partie de  $A$ , et commutant  $\gamma(M)$  dans  $A$  d’une partie  $M$  de  $P$ . Voici ce qui devrait être vrai (et est vrai dans le cas d’une algèbre semi-finie):

Th. 1. — *Les parties de  $A$  qui sont des commutants  $\gamma(M)$  ( $M \subset P$ ) sont exactement les sous-algèbres closes.*

(Ce théorème serait faux, déjà pour  $A = L(H)$ , si on restreignait  $P$  aux formes finies). Une partie  $M$  de  $P$  est dite close, si c’est le commutant  $\gamma(B)$  d’une partie de  $A$ . Une intersection de partie closes est close, d’où partie close engendrée. Si  $M \subset P$ , soit  $\sigma(M) = \gamma(M)'$ ,  $M \longrightarrow \sigma(M)$  établit une correspondance biunivoque entre les parties closes de  $P$  et celles de  $A$ . On dit que  $M$  et  $N$  commutent, si  $\sigma(M)$  et  $\sigma(N)$  commutent. Pour ceci, il faut et il suffit que tout élément de  $M$  commute à tout élément de  $N$ . Partie commutative de  $P$  : qui commute à elle-même. Deuxième conjecture:

Th. 2. — *Tout  $u \in P$  commute à lui-même, i.e. la partie close qu’il engendre est commutative (ou encore  $\gamma(M)$  contient son commutant, ou encore  $\sigma(u)$  est commutative). Alors (supposant pour simplifier que  $\text{supp. } \mathfrak{u} = 1$ ), la partie close engendrée*



par  $u$  est identique à l'ensemble des bornes supérieures dans  $P$  des ensembles de formes  ${}^x u = u^x$ , où  $x$  parcourt la partie positive de  $\sigma(u)$ . Si  $u$  est finie, l'ensemble des formes finies qui sont dans la partie close engendrée par  $u$ , est aussi l'adhérence de l'ensemble des  ${}^x u = u^x$  (pour la norme du dual de  $A$ ).

On pose bien entendu  ${}^x u(y) = u(yx)$ ,  $u^x(y) = u(xy)$  ; si  $x$  est positive et  $x \in \sigma(u)$ , alors  ${}^x u = u^x$  est une forme positive (semi-finie). Enfin:

Th. 3. — *Pour qu'une partie close  $M$  de  $P$  (resp. de la partie  $P_0$  de  $P$  formée des formes positives finies) soit commutative, il faut et il suffit que ce soit un lattice (existence du sup de deux éléments).*

En vertu du théorème de Kakutani, il s'ensuivra que l'espace vectoriel engendré par  $M$  (dans le cas où  $M \subset P_0$ ) est isomorphe avec toutes ces structures à un espace  $L_1$ , dont le dual sera alors  $\sigma(M)^2$ . — Bien entendu, on dira qu'une partie de  $P_0$  est close si c'est l'intersection de  $P_0$  avec sa clôture dans  $P$ .

Dans le cas où  $A$  est finie, la théorie se simplifie, car il suggit dans le th. 1 de ne considérer que des formes positives finies ; elle est d'ailleurs à peu près triviale dans ce cas. Dans le cas général, si on est embêté par la considération de formes positives non finies, on peut ignorer l'énoncé 1, et n'envisager que les deux autres énoncés, dans le cas de formes finies.

Dernière question, qui ne devrait pas être très vache : sait-on si toute forme linéaire ultrafaiblement continue  $u$  sur l'algèbre de v.N.  $A$  admet une décomposition polaire  $u = {}^U v$ , avec  $v$  forme positive normale, et  $U$  partiellement isométrique ? Bien entendu, il y a aussi des questions d'unicité, sous des conditions faciles à préciser.

Pour la démonstration du théorème sur la projection de  $L(H)$  sur une sous-algèbre de v.N., je t'enverrai une copie dès que j'aurai rédigé ça. J'écirai peut-être un petit article à l'occasion.

J'espère que mes questions ne finissent pas par t'embêter. Meilleures salutations.

---

<sup>2</sup>Où du moins un quotient de  $\sigma(M)$  (car dans le cas du type purement infini, s'introduit une question de supports. Ainsi,  $M = \{0\}$  est alors stable, c'est le commutant  $\gamma(A)$  de  $A$ , donc  $\sigma(M) = Z$ , or  $Z \neq 0$  n'est pas le dual de  $\{0\}$  !)

A. Grothendieck

P.S. Écris-moi plutôt à mon adresse personnelle, c'est plus sur. – Je sais démontrer qu'en décomposant une distribution centrale de type positif sur un groupe de Lie, on peut se borner à des caractères qui sont des distributions (d'ordre un de plus). Ce n'est pas bien profond d'ailleurs. Est-ce que ça se savait déjà ?

# UNE CARACTÉRISATION VECTORIELLE-MÉTRIQUE DES ESPACES $L_1$

---

- This text was published in: *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces  $L_1$* . Canad. J. Math. 7, 552-561 (1955)
- [scan]

1955

---

- In early 1955 Grothendieck arrived in Lawrence (Kansas) for a six months assignment as a visiting research associate professor. Although he was formally invited by the department, the person who specifically requested his visit was Nachman Aronszajn (because of his work on topological vector spaces), who knew Grothendieck already from having encountered him in Paris. He would spend nine months there “learning” the fundamentals of topology and analytic geometry.
- “L’année 1955 marque un tournant crucial dans mon travail mathématique : celui du passage de l’“analyse” à la “géométrie”. Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de “pays promis” aux richesses luxuriantes, se multipliant à l’infini partout où il plait à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller... Et cette impression de richesse accablante, au delà de toute mesure, n’a fait que se confirmer et s’approfondir au cours des ans, jusqu’à aujourd’hui même.”

#### **Récoltes et Semailles**

- Apparition of the fundamental paper FAC (“Faisceaux Algebriques Coherents”).

“Le travail (cité (FAC)) de J.-P. Serre peut aussi être considéré comme un exposé intermédiaire entre le point de vue classique et le point de vue des

schémas en Géométrie algébrique.”

**EGA I**

LETTRE À J. DIXMIER  
24.1.1955

---

A. Grothendieck  
1645 Kentucky Street  
Lawrence (Kansas)  
USA

Lawrence 24.1.1955

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre. Bien que je me doutais qu'une partie des notions introduites dans mon papier (sinon toutes) devaient être connues, je ne connaissais aucune bibliographie, et ne savais pas, en effet, que les  $\Delta_A(t)$  avaient été considérés par [Richard] Kadison. A-t-il aussi la "formule fondamentale"  $\Delta_{|AB|} \leq \Delta_{|A|} \Delta_{|B|}$  ?

Je ne t'ai jamais demandé si une forme linéaire hermitienne ultrafaiblement continue sur une  $C^*$ -algèbre se décompose sous la forme  $\varphi_1 - \varphi_2$ , avec  $\varphi_1, \varphi_2 \gg 0$  et  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  disjointes. Si je me rappelle bien, je t'ai au contraire donné la démonstration dans la dernière lettre de Sao Paulo (mais *l'as-tu reçue* ?) C'était une lettre fort longue, écrite à la machine, où je posais un tas de conjectures<sup>1</sup>. Je n'ai jamais eu de réponse. Mais peut-être n'as-tu pas pu déchiffrer mon écriture dans une lettre antérieure (?!). En effet, on prouve

- a) Toute  $\varphi$  hermitienne continue sur une  $C^*$ -algèbre  $A$  s'écrit  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , avec  $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \gg 0$  (Hahn-Banach) ;
- b) Cette décomposition est unique. La condition  $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$  équivaut aussi au fait que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont disjointes ;
- c) Si  $\varphi$  est ultrafaiblement continue (sur  $A$  supposé de von Neumann),  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  le sont.

c) est immédiat, car il suffit de prouver l'existence d'au moins une décomposition  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2 \in A_*$ ,  $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ . Par Hahn-Banach, on est ramené au cas où  $A = L(H)$ . Mais alors  $A_* = L'(H)$  (espace des opérateurs de Fredholm),

---

<sup>1</sup>Je t'y donnais aussi la démonstration explicite que si  $A$  est une  $*$ -algèbre normée complète telle que toute forme linéaire hermitienne continue sur  $A$  est différence de deux formes positives, alors (par changement de norme)  $A$  est équivalente à une  $C^*$ -algèbre.

et la décomposition d'un opérateur de Fredholm hermitien en sa partie positive et négative donne le résultat cherché.

Quant à la preuve de b), je n'ai pas les papiers sous la main (ils sont dans une grosse malle qui va arriver dans quelques semaines). Aussi il vaut mieux que je te la donne quand j'aurai les papiers. J'ai une rédaction complète de ce fourbi (il n'y a donc pas de canular imprévu à craindre, je pense !).

As-tu l'intention de regarder les questions que je pose dans mon papier sur les inégalités de convexité. Et si oui, penses-tu que le fourbi mérite une rédaction soigneuse dans un "joint paper" ? En ce cas, il serait sans doute préférable que tu assumes la rédaction, pour le bien du lecteur !

Je suis en train de passer en revue mes éléments de top. alg. et me délecte dans des diagrammes variés. J'ai beaucoup de temps à moi, et suis ici tout à fait bien.

Amitiés

A. Grothendieck



# RÉARRANGEMENTS DE FONCTIONS ET INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ DANS LES ALGÈBRES DE VON NEUMANN MUNIES D'UN TRACE

---

- This text was published in: *Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de von Neumann munies d'une trace*. Sémin. N. Bourbaki, 1956, exp. no 113, p. 127-139
- [scan]

## UN RÉSULTAT SUR LE DUAL D'UNE $C^*$ -ALGÈBRE

---

- This text was published in: *Un résultat sur le dual d'une  $C^*$ -algèbre*. J. Math. Pures Appl., 36, 97-108 (1957)
- [scan]

# A GENERAL THEORY OF FIBRE SPACES WITH STRUCTURE SHEAF

By Alexandre Grothendieck



- University of Kansas, (1955).
- [scan]
- Ongoing [translation] in French.

UNIVERSITY OF KANSAS  
Department of Mathematics  
Lawrence, Kansas

A GENERAL THEORY OF FIBRE SPACES  
WITH  
STRUCTURE SHEAF  
By Alexandre Grothendieck

National Science Foundation Research Project  
on  
Geometry of Function Space  
Research Grant NSF — G 1126  
Report No. 4  
First Edition August, 1955  
Second Edition May, 1958

## Introduction

When one tries to state in a general algebraic formalism the various notions of fibre space: general fibre spaces (without structure group, and maybe not even locally trivial); or fibre bundle with topological structure group  $G$  as expounded in the book of Steenrod (The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press); or the “differentiable” and “analytic” (real or complex) variants of these notions; or the notions of algebraic fibre spaces (over an abstract field  $k$ ) - one is led in a natural way to the notion of fibre space with a structure sheaf  $\mathbf{G}$ . This point of view is also suggested a priori by the possibility, now classical, to interpret the (for instance “topological”) classes of fibre bundles on a space  $X$ , with *abelian* structure group  $G$ , as the elements of the first cohomology group of  $X$  with coefficients in the sheaf  $\mathbf{G}$  of germs of continuous maps of  $X$  into  $G$ ; the word “continuous” being replaced by “analytic” respectively “regular” if  $G$  is supposed an analytic respectively an algebraic group (the space  $X$  being of course accordingly an analytic or algebraic variety). The use of cohomological methods in this connection have proved quite useful, and it has become natural, at least as a matter of notation, even when  $G$  is not abelian, to denote by  $H^1(X, \mathbf{G})$  the set of classes of fibre spaces on  $X$  with structure sheaf  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}$  being as above a sheaf of germs of maps (continuous, or differentiable, or analytic, or algebraic as the case may be) of  $X$  into  $G$ . Here we develop systematically the notion of fibre space with structure sheaf  $\mathbf{G}$ , where  $\mathbf{G}$  is any sheaf of (not necessarily abelian) groups, and of the first cohomology set  $H^1(X, \mathbf{G})$  of  $X$  with coefficients in  $\mathbf{G}$ . The first four chapters contain merely the first definitions concerning general fibre spaces, sheaves, fibre spaces with composition law (including sheaves of groups) and fibre spaces with structure sheaf. The functor aspect of the notions dealt with has been stressed throughout, and as it now appears should have been stressed even more. As the proofs of most of the facts stated reduce of course to straightforward verifications, they are only sketched or even omitted, the important point being merely a consistent order in the statement of the main facts. In the last chapter, we define the cohomology set  $H^1(X, \mathbf{G})$  of  $X$  with coefficients in the sheaf of groups  $\mathbf{G}$ , so that the expected classification theorem for fibre spaces with structure sheaf  $\mathbf{G}$  is valid. We then proceed to a careful study of the exact cohomology sequence associated with an

exact sequence of sheaves  $e \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{H} \longrightarrow e$ . This is the main part, and in fact the origin, of this paper. Here  $\mathbf{G}$  is any sheaf of groups,  $\mathbf{F}$  a subsheaf of groups,  $\mathbf{H} = \mathbf{G}/\mathbf{F}$ , and according to various supplementary hypotheses of  $\mathbf{F}$  (such as  $\mathbf{F}$  normal, or  $\mathbf{F}$  normal abelian, or  $\mathbf{F}$  in the center) we get an exact cohomology sequence going from  $H^0(X, \mathbf{F})$  (the group of section of  $\mathbf{F}$ ) to  $H^1(X, \mathbf{G})$  respectively  $H^1(X, \mathbf{H})$  respectively  $H^2(X, \mathbf{G})$ , with more or less additional algebraic structures involved. The formalism thus developed is quite suggestive, and as it seems useful, in particular in dealing with the problem of classification of fibre bundles with a structure group  $G$  in which we consider a sub-group  $F$ , or the problem of comparing say the topological and analytic classification for a given analytic structure group  $G$ . However, in order to keep this exposition in reasonable bounds, no examples have been given. Some complementary facts, examples, and applications for the notions developed will be given in the future. This report has been written mainly in order to serve the author for future reference; it is hoped that it may serve the same purpose, or as an introduction to the subject, to somebody else.

Of course, as this report consist in a fortunately straightforward adaptation of quite well known notions, no real difficulties had to be overcome and there is no claim for originality whatsoever. Besides, at the moment to give this report for mimeography, I hear that results analogous to those of chapter 5 were known for some years to Mr. Frenkel, who did not publish them till now. The author only hopes that this report is more pleasant to read than it was to write, and is convinced that anyhow an exposition of this sort had to be written.

*Remark* (added for the second edition). It has appeared that the formalism developed in this report, and specifically the results of Chapter V, are valid (and useful) also in other situations than just for sheaves on a given space  $X$ . A generalization for instance is obtained by supposing that a fixed group  $\pi$  is given acting on  $X$  as a group of homeomorphisms, and that we restrict our attention to the category of fibre spaces over  $X$  (and specially sheaves) on which  $\pi$  operates in a manner compatible with its operations on the base  $X$ . (See for instance A. Grothendieck, Sur le mémoire de Weil; Généralisations des fonctions abéliennes, Séminaire Bourbaki Décembre 1956). When  $X$  is reduced to a point, one gets (instead of sheaves) sets, groups, homogeneous spaces etc. admitting a fixed group  $\pi$

of operators, which leads to the (commutative and non-commutative) cohomology theory of the group  $\pi$ . One can also replace  $\pi$  by a fixed Lie group (operating on differentiable varieties, on Lie groups, and homogeneous Lie spaces). Or  $X$ ,  $\pi$  are replaced by a fixed ground field  $k$ , and one considers algebraic spaces, algebraic groups, homogeneous spaces *defined over*  $k$ , which leads to a kind of cohomology theory of  $k$ . All this suggests that there should exist a comprehensive theory of non-commutative cohomology in suitable categories, an exposition of which is still lacking. (For the “commutative” theory of cohomology, see A. Grothendieck, *Sur quelques points d’Algèbre Homologique*, Tohoku Math. Journal, 1958).

## I. General fibre spaces

Unless otherwise stated, none of the spaces to occur in this report have to be supposed separated.

### 1.1 Notion of fibre space

**Definition 1.1.1.** — A fibre space over a space  $X$  is a triple  $(X, E, p)$  of the space  $X$ , a space  $E$  and a continuous map  $p$  of  $E$  into  $X$ .

We do not require  $p$  to be onto, still less to be open, and if  $p$  is onto, we do not require the topology of  $X$  to be the quotient topology of  $E$  by the map  $p$ . For abbreviation, the fibre space  $(X, E, p)$  will often be denoted by  $E$  only, it being understood that  $E$  is provided with the supplementary structure consisting of a continuous map  $p$  of  $E$  into the space  $X$ .  $X$  is called the *base space* of the fibre space,  $p$  the *projection*, and for any  $x \in X$ , the subspace  $p^{-1}(x)$  of  $E$  (which is closed if  $\{x\}$  is closed) is the *fibre* of  $x$  (in  $E$ ).

Given two fibre spaces  $(X, E, p)$  and  $(X', E', p')$ , a *homomorphism* of the first into the second is a pair of continuous maps  $f : X \longrightarrow X'$  and  $g : E \longrightarrow E'$ , such that  $p'g = fp$ , i.e. commutativity holds in the diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

Then  $g$  maps fibres into fibres (but not necessarily *onto*!); furthermore, if  $p$  is surjective, then  $f$  is uniquely determined by  $g$ . The continuous map  $f$  of  $X$  into  $X'$  being given,  $g$  will be called also a  $f$ -homomorphism of  $E$  into  $E'$ . If, moreover,  $E''$  is a fibre space over  $X'$ ,  $f'$  a continuous map  $X' \longrightarrow X''$  and  $g' : E' \longrightarrow E''$  a  $f'$ -homomorphism, then  $g'g$  is a  $f'f$ -homomorphism. If  $f$  is the identity map of  $X$  onto  $X$ , we say also  $X$ -homomorphism instead of  $f$ -homomorphism. If we speak of homomorphisms of fibre spaces over  $X$ , without further comment, we will always mean  $X$ -homomorphisms.

The notion of *isomorphism* of a fibre space  $(X, E, p)$  onto a fibre space  $(X', E', p')$  is clear: it is a homomorphism  $(f, g)$  of the first into the second, such that  $f$  and  $g$  are onto-homeomorphisms.

## 1.2 Inverse image of a fibre space, inverse homomorphisms

Let  $(X, E, p)$  be a fibre space over the space  $X$ , and let  $f$  be a continuous map of a space  $X'$  into  $X$ . Then the *inverse image* of the fibre space  $E$  by  $f$  is a fibre space  $E'$  over  $X'$ .  $E'$  is defined as the subspace of  $X' \times E$  of points  $(x', y)$  such that  $f x' = p y$ , the projection  $p'$  of  $E'$  into the base  $X'$  being given by  $p'(x', y) = x'$ . The map  $g(x', y) = y$  of  $E'$  into  $E$  is then an  $f$ -homomorphism, inducing for each  $x' \in X'$  a *homeomorphism* of the fibre of  $E'$  over  $x'$  onto the fibre of  $E$  over  $f x'$ .

[]

## 1.3 Subspace, quotient, product

Let  $(X, E, p)$  be a fibre space,  $E'$  any subspace of  $E$ , then the restriction  $p'$  of  $p$  to  $E'$ , defines  $E'$

[]

## 1.4 Trivial and locally trivial fibre spaces

Let  $X$  and  $F$  be two spaces,  $E$  the product space, the projection of the product on  $X$  defines  $E$  as a fibre space over  $X$ , called the *trivial fibre space over  $X$  with fibre  $F$* .

All fibres are canonically homeomorphic with  $F$ .

[]



### 1.5 Definition of fibre spaces by coordinate transformations

Let  $X$  be a space,  $(U_i)$  a covering of  $X$ , for each

[]

### 1.6 The case of locally trivial fibre spaces

The method of the preceding section for constructing fibre spaces over  $X$  will be used mainly in the case where we are given a fibre space over  $T$  over  $X$ , and where, given an open covering  $(U_i)$  of  $X$ , we consider the fibre spaces

[]

### 1.7 Sections of fibre spaces

**Definition 1.7.1.** — *Let  $(X, E, p)$  be a fibre space; a section of this fibre space (or, by pleonasm, a section of  $E$  over  $X$ ) is a map  $x$  of  $X$  into  $E$  such that  $px$  is the identity map of  $X$ . The set of continuous sections of  $E$  is noted  $H^0(X, E)$ .*

It amounts to the same to say that  $s$  is a function the value of which at each  $x \in X$  is in the fibre of  $x$  in  $E$  (which depends on  $x$ !).

The existence of a section implies of course that  $p$  is onto, and conversely if we do not require continuity. However, we are primarily interested in continuous sections. A section of  $E$  over a subset  $Y$  of  $X$  is by definition a section of  $E|Y$ . If  $Y$  is open, we write  $H^0(Y, E)$  for the set  $H^0(Y, E|Y)$  of all continuous sections of  $E$  over  $Y$ .

$H^0(X, E)$  as a functor. Let  $E, E'$  be two fibre spaces over  $X$ ,  $f$  an  $X$ -homomorphism of  $E$  into  $E'$ . For any section  $s$  of  $E$ , the composed map  $fs$  is a section of  $E'$ , continuous if  $s$  is continuous. We get thus a map, noted  $f$ , of  $H^0(X, E)$  into  $H^0(X, E')$ . The usual functor properties are satisfied:

- a. If the two fibre spaces are identical and  $f$  is the identity, then so is  $f$ .
- b. If  $f$  is an  $X$ -homomorphism of  $E$  into  $E'$  and  $f'$  an  $X$ -homomorphism of  $E'$  into  $E''$  ( $E, E', E''$  fibre spaces over  $X$ ) then  $(f'f) = f'f$ .

Let  $(X, E, p)$  be a fibre space,  $f$  a continuous map of a space  $X'$  into  $X$ , and  $E'$  the inverse image of  $E$  under  $f$ .

## II. Sheaves of sets

Throughout this exposition, we will now use the word “*section*” for “*continuous section*”.

### 2.1 Sheaves of sets

**Definition 2.1.1.** — *Let  $X$  be a space. A sheaf of sets on  $X$  (or simply a sheaf) is a fibre space  $(E, X, p)$  with base  $X$ , satisfying the condition: each point  $a$  of  $E$  has an open neighbourhood  $U$  such that  $p$  induces a homeomorphism of  $U$  onto an open subset  $p(U)$  of  $X$ .*

This can be expressed by saying that  $p$  is an interior map and a local homeomorphism. It should be kept in mind that, even if  $X$  is separated,  $E$  is not supposed separated (and will in most important instances not be separated).

[]

### 2.2

### 2.3 Definition of a sheaf by systems of sets

### 2.4 Permanence properties

### 2.5 Subsheaf, quotient sheaf. Homeomorphism of sheaves

### 2.6 Some examples

- a.
- b.
- c.
- d. **Sheaf of germs of subsets.** Let  $X$  be a space, for any open set  $U \subset X$  let  $P(U)$  be the set of subsets of  $U$ . If  $V \subset U$ , consider the map  $A \longrightarrow A \cap V$  of  $P(U)$  into  $P(V)$ . Clearly the conditions of transitivity, and of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, so that the sets  $P(U)$  appear as the sets  $H^0(U, P(X))$  of sections of a well determined sheaf on  $X$ , the elements of which are called *germs of sets in  $X$* . Any condition of a local character

on subsets of  $X$  defines a subsheaf of  $P(X)$ , for instance the sheaf of *germs of closed sets* (corresponding to the relatively closed sets in  $U$ ), or if  $X$  is an analytic manifold, the sheaf of germs of analytic sets, etc.

Other important examples of sheaves will be considered in the next chapter.

### **III. Group bundles and sheaves of groups**

### **IV. Fibre spaces with structure sheaf**

### **V. The classification of fibre spaces with structure sheaf**

## SUR QUELQUES POINTS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

---

- **Title:** *Sur quelques points d'algèbre homologique*
- **English title:** *Some aspects of homological algebra*
- **Language:** French
- **Published Date:** 1957
- **Written Date:** 1955 — 1957
- **Published** in two parts: Tôhoku Mathematical Journal. vol 9, n.2, 3, 1957.
- **Scan:** [scan] (103 pp)
- **Translations:** [english] (120 pp) by M. L. Barr and M. Barr, [russian] in Biblioteka Sbornika Matematika, Moskva 1961
- **Notes:** The essential content of Chapters 1, 2, and 4, and part of Chapter 3 was developed in the spring of 1955 during a seminar in homological algebra at the University of Kansas, it was improved with the influence of correspondence with J. P. Serre and then considered for a Bourbaki redaction, the paper was again written down when Grothendieck was back in Paris somewhere in the second half of 1956. It was proposed to Tannaka for the Tôhoku as an independent article at the end of 1956 and received for publication in March 1957.

- 
- After Grothendieck's time on functional analysis and before the new foundations of algebraic geometry with the ("twinned") notions of schemes and topoi, he made two main contributions to geometry. A theory of "continuous" and "discrete" duality (derived categories, "six operations") and the yoga Riemann–Roch–Grothendieck ( $K$ -theory, relation to intersection theory). Later these theories will feed the new geometry.
  - "Dans la deuxième moitié des années cinquante, j'avais développé dans le contexte des schémas un formalisme de "dualité cohérente". Ces réflexions, motivées par le désir de comprendre le sens et la portée exacte du théorème de dualité de Serre en géométrie analytique et surtout en géométrie algébrique<sup>1</sup>, avaient été poursuivies dans une solitude à peu près complète, n'ayant pas l'heur d'intéresser personne d'autre que moi<sup>2</sup>. Ce sont ces réflex-

---

<sup>1</sup>Mes premières réflexions de dualité se plaçaient dans le cadre des espaces analytiques, et sont antérieures à celles de Serre. En utilisant des techniques de dualité "évêquesques" et le lemme de Poincaré–Grothendieck sur l'opération  $\overline{\partial}$  (que je venais de démontrer), j'avais prouvé que si  $X$  est une variété de Stein, les  $H^i(X, \underline{\mathcal{O}}_X)$  (resp.  $H^i(X, \underline{\omega}_X)$ ) sont des espaces de Fréchet nucléaires, en dualité parfaite avec les  $H_1^{n-i}(X, \omega_X)$  (resp. les  $H_1^{n-i}(X, \underline{\omega}_X)$ ). Je n'ai pas songé alors à appliquer la même méthode au cas des fibres vectoriels (ne m'étant pas aperçu de ce fait algébrique très simple, que l'opérateur  $\overline{\partial}$ , étant  $\overline{\mathcal{O}}_X$ -linéaire, se prolonge aux formes différentielles différentiables à valeurs dans un fibre vectoriel holomorphe), ni aux variétés complexes autres que celles de Stein (les seules alors qui me soient familières). La démonstration de Serre de son théorème de dualité analytique dans le cas général, est pratiquement la mime que celle que j'avais trouvée dans un cas particulier.

<sup>2</sup>Bien entendu, le mathématicien entre tous chez qui je me serais attendu à un intérêt pour mes

ions qui m'ont amené à dégager progressivement la notion de catégorie dérivée, dont les objets se présentaient comme “*les coefficients*” naturels dans le formalisme homologique et cohomologique des espaces et variétés en tous genres, s'insérant dans un premier embryon d'un formalisme des “six opérations” sur les espaces annelés (en attendant les topos annelés). Quatre de ces opérations m'étaient déjà plus ou moins familières depuis mon travail de 1955 “Sur quelques points d'algèbres homologique”<sup>3</sup>, au langage des catégories dérivées près : avec les notations qui se sont dégagées au cours des années suivantes (en même temps que le point de vue des catégories dérivées), ce sont les opérations “internes”  $\otimes^L$  et  $\mathrm{RHom}$  (version “foncteur dérivé total” du formalisme des faisceaux  $\mathrm{Tor}_i$  et  $\mathrm{Ext}^i$  introduit dans “Tohoku”), et “externes”  $Lf^*$  et  $Rf^*$  (images inverses, et directes “à la Leray”), formant deux couples de foncteurs (ou bifoncteurs) adjoints. Dans le cas où  $f$  est un morphisme “immersion”  $i : X \longrightarrow Y$ , il s'y ajoute encore le couple de foncteurs adjoints  $Ri_!$ ,  $Ri^!$ , incarnant respectivement les opérations de “prolongement par zéro” et “cohomologie locale à supports dans  $X$ ”. Le fil conducteur dans mes réflexions est d'arriver à un *théorème de dualité* (globale, à un moment où il n'était pas question encore de version locale...), généralisant celui prouvé par Serre pour un faisceau cohérent localement libre sur une variété projective lisse sur un corps. Il s'agissait de donner une formulation qui s'appliquerait à un faisceau cohérent quelconque (ou complexe de tels), voire même un faisceau quasi-cohérent, sans hypothèse de lissité ni de projectivité sur  $X$  (en gardant seulement la propriété, qui paraissait alors essentielles). De

---

réflexions de dualité cohérente, a été Serre. Il a été intéressé, je crois me rappeler, par la généralisation de son résultat de dualité à un faisceau cohérent  $F$  (pas nécessairement localement libre) sur  $X$  projective et lisse sur un corps  $k$ , identifiant le dual de  $H^i(X, F)$  à  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{n-i}(X; F, \omega_X)$ . Cela donnait un sens géométrique intrinsèque à un résultat “calculatoire” de FAC (qui m'avait bien sûr intrigué et inspiré), dans le cas où  $X$  est l'espace projectif. Mais à part ce résultat, un des premiers dans mon voyage à la découverte de la dualité, et proche encore de ce qui lui était familier. Serre a toujours refuser d'écouter, quand il me prenait envie de lui parler dualité. Je crois que je n'ai guère essayé d'en parler à quiconque d'autre, mis à part (bien plus tard) Hartshorne, qui a fait sur mes idées un très beau séminaire à Harvard, publié en 1966 (“Residues and duality” par R. Hartshorne, Lecture Notes in Mathematics, n° 20, Springer Verlag).

<sup>3</sup>In Tohoku Mathematical Journal, 9 (1957), p. 119–221.

plus, en analogie avec mes réflexions sur le théorème de Riemann-Roch, je sentais que le bon énoncé devait concerner, non une variété sur un corps, mais un morphisme propre  $f : X \longrightarrow Y$  de schémas, par ailleurs quelconques. C'est par approximations successives, au cours de plusieurs années de travail<sup>4</sup>, que le théorème de dualité globale se décante progressivement de ses hypothèses superflues, en même temps que la notion de catégorie dérivée elle aussi sort des limbes du pressenti pour prendre forme concrète, et donner au formalisme et aux énoncés un *sens intrinsèque*, à défaut duquel je me serais senti bien incapable de travailler ! C'est tout d'abord pour arriver à dégager un énoncé de dualité globale qui me satisfasse pleinement, que j'introduis le formalisme des *complexes dualisants* et dégage le *théorème de bidualité*, et que je découvre (sous des hypothèses noethériennes convenables) l'existence d'un complexe dualisant injectif, essentiellement canonique que j'appelle le "*complexe résiduel*", et une théorie de variance pour celui-ci. Une première formulation du théorème de dualité globale, qui à un moment me semblait être "la bonne", était que le foncteur  $Rf_*$  commutait aux foncteurs dualisants sur  $X$  et sur  $Y$  (pour deux complexes dualisants qui se "correspondent"). C'est par la suite seulement que je découvre que la théorie de variance pour les seuls complexes dualisants (via les complexes résiduels) se généralise par un foncteur de nature entièrement nouvelle, le foncteur  $Rf^!$  où "image inverse inhabituelle", de nature locale sur  $X$ . Des lors, apparaît aussi la formulation définitive du théorème de dualité pour le morphisme propre  $f$  : ce nouveau foncteur est *adjoint à droite* de  $Rf_*$ , s'insérant donc dans une suite de trois foncteurs adjoints

$$Lf^*, Rf_*, Rf^!.$$

Pour avoir un formalisme entièrement achevé, il manquait seulement la de-

---

<sup>4</sup>Il va sans dire qu'au cours de ces "plusieurs années de travail", j'avais bien d'autres fers dans le feu que les seules questions de dualité cohérente ! Je me familiarise alors avec les fondements alors connus de géométrie algébrique (avec le point de vue de FAC de Serre comme principale référence), avec la problématique des conjectures de Weil, et avec le formalisme des multiplicités d'intersection appris dans un cours de Serre, où il développait son idée des "sommes alternées des tor"). Cela allait me déclencher en 1957 sur le formalisme de  $K$ -théorie et le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck, très proche (par son esprit) de mes réflexions de dualité.

scription d'un foncteur  $Rf_!$ , "image directe à supports propres", pour un morphisme (séparé) de type fini quelconque, généralisant le foncteur déjà connu quand  $f$  est une immersion, se réduisant à  $Rf_*$  pour  $f$  propre, et formant avec  $Rf^!$  un couple de foncteurs adjoints  $Rf_!, Rf^!$ . Je ne me rappelle pas m'être affligé dans les années cinquante de cette imperfection d'un formalisme dont la portée générale, au delà de la dualité cohérente schématique ou analytique, m'échappait encore."

**Récoltes et Semailles**



SUR LA CLASSIFICATION DES FIBRÉS HOLOMORPHES  
SUR LA SPHÈRE DE RIEMANN  
Par A. Grothendieck

---

- This text was published in: *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*. Amer. J. Math. 79, 121-138 (1957)
- [scan]

## SUR LE MÉMOIRE DE WEIL. GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS ABÉLIENNES

---

- This text was published in: *Sur le mémoire de A. Weil. Généralisation des fonctions abéliennes*. Sémin. N. Bourbaki, 1958, exp. n 141, p. 57-71
- [scan]

# CLASSIFICATION DES GROUPES ALGÈBRIQUES SEMI-SIMPLES

C. Chevalley avec la collaboration de Pierre Cartier, Alexandre  
Grothendieck et Michel Lazard

---

- This text was published in: *Classification des groupes algébriques semi-simples*.  
Texte révisé en 2003 par Pierre Cartier, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [scan]

1957

---

- “L’année 1957 est celle où je suis amené à dégager le thème “*Riemann–Roch*” (version Grothendieck) — qui, du jour au lendemain, me consacre “grande vedette”. ”

**Récoltes et Semailles**

- Séminaire A. Grothendieck (1957) Algèbre homologique

## SUR LES FAISCEAUX ALGÈBRIQUES ET LES FAISCEAUX ANALYTIQUES COHÉRENTS

---

- This text was published in: *Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents*. Séminaire Henri Cartan, tome 9 (1956-1957), exp. n° 2, p. 1-16
- [scan]
- [translation] by T. Hosgood

## CLASSES DE FAISCEAUX ET THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

---

- This text was published in: *Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch*. Notes miméographiées, Princeton 1957. Reproduit dans SGA 6
- [scan]

1958

---

- “L’année qui a suivi cet intermède (1958) est peut-être la plus féconde de toutes dans ma vie de mathématicien. C’est en cette année que se place l’éclosion des deux thèmes centraux de la géométrie nouvelle, avec le démarrage en force de la *théorie des schémas* (sujet de mon exposé au congrès international des mathématiciens à Edinburgh, l’été de cette même année), et l’apparition de la notion de “*site*”, version technique provisoire de la notion cruciale de *topos*. Avec un recul de près de trente ans, je peux dire maintenant que c’est l’année vraiment où est née la vision de la géométrie nouvelle, dans le sillage des deux maître-outils de cette géométrie : les schémas (qui représentent une métamorphose de l’ancienne notion de “variété algébrique”), et les topos (qui représentent une métamorphose, plus profonde encore, de la notion d’espace).”

#### **Récoltes et Semailles**

- O. Zariski invited Grothendieck to Harvard and tried to set up a regular visiting appointment for him.
- Foundation of the IHÉS (Institut des hautes études scientifiques)

## LA THÉORIE DE CLASSES DE CHERN

---

- This text was published in: *La théorie des classes de Chern*. Bulletin de la Société Mathématique de France 86 (1958), 137–154
- [scan]
- [translation] by T. Hosgood



## TORSION HOMOLOGIQUE ET SECTIONS RATIONNELLES

---

- This text was published in: *Torsion homologique et sections rationnelles*. Sém. Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. no 5, p. 1-29
- [scan]

## SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES EN THÉORIE DES INTERSECTIONS

---

- This text was published in: *Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections*. Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. n° 4, p. 1-36
- [scan]

## SUR UNE NOTE DE MATTUCK-TATE

---

- This text was published in: *Sur une note de Mattuck-Tate*. J. reine angew. Math. 200, 208-215 (1958)
- [scan]
- [translation] in Russian by Y. I. Manin. Matematika, 1960, Volume 4, Issue 2, 29–38

## THE COHOMOLOGY THEORY OF ABSTRACT ALGEBRAIC VARIETIES

---

- The following is part of the proceedings of the international congress of mathematicians held in Edinburgh, Scotland, from 14 August to 21 August 1958, Grothendieck was already considered for the Fields medal. He says: *“Depuis l’année précédente [1957], avec mon travail sur le théorème de Riemann—Roch, j’étais promu grande vedette, et (sans que j’aie eu à me le dire en termes clairs alors) j’étais aussi une des vedettes du Congrès.”* Récoltes et Semailles
- *“Le compte rendu de ce “démarrage en force” de la théorie des schémas fait l’objet de mon exposé au Congrès International des Mathématiciens à Edinburgh, en 1958. Le texte de cet exposé me semble une des meilleurs introductions au point de vue des schémas, de nature (peut-être) à motiver un lecteur géomètre à se familiariser tant bien que mal avec l’imposant traité (ultérieur) “Éléments de Géométrie Algébrique”, exposant de façon circonstanciée (et sans faire grâce d’aucun détail technique) les nouveaux fondements et les nouvelles techniques de la géométrie algébrique.”*  
Récoltes et Semailles
- This text was published in: *The cohomology theory of abstract algebraic varieties*. Proc. Int. Congress Math. (Edinburgh, 1958), 103-118. Cambridge Univ. Press, New York, 1960

- [scan]

1959

---

- The IHÉS started in two offices rented at the Fondation Thiers (in the 16th arrondissement of Paris), one for the director (Léon Motchane) and the secretary (Annie Rolland), the other for the first two permanent professors: Jean Dieudonné and A. Grothendieck.
- Appeared the *Publications Mathématiques de l'IHÉS*.
- “Pendant les années héroïques de l'IHÉS, Dieudonné et moi en avons été les seuls membres, et les seuls aussi à lui donner crédibilité et audience dans le monde scientifique, Dieudonné par l'édition des “Publications Mathématiques” (dont le premier volume est paru dès 1959, l'année qui a suivie celle de la fondation de l'IHÉS par Léon Motchane), et moi par les “Séminaires de Géométrie Algébrique”. Dans ces premières années, l'existence de l'IHÉS restait des plus précaires, avec un financement incertain (par la générosité de quelques compagnies faisant office de mécènes) et avec pour seul local une salle prêtée (avec une mauvaise humeur visible) par la Fondation Thiers à Paris pour les jours de mon séminaire. Je me sentais un peu comme un cofondateur “scientifique”, avec Dieudonné, de mon institution d'attache, et je comptais bien y finir mes jours ! J'avais fini par m'identifier fortement à l'IHÉS, et mon départ (comme conséquence de l'indifférence de mes collègues) a été vécu comme une sorte d'arrachement à un autre “chez moi”, avant de se révéler comme une libération.”

**Récoltes et Semailles**

1960

---

•

## TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

---

- This text was published in: *Techniques de construction en géométrie analytique*. Séminaire Henri Cartan, tome 13, Fasc. n° 1 et 2 (1960-1961)
- [scan]



# THE TRACE OF CERTAIN OPERATORS

By A. Grothendieck

---

- This text was published in: *Techniques de construction en géométrie analytique*. Studia Math. 20, 141-143 (1961)
- [scan]

LETTRE À N. BOURBAKI  
9.10.1960

---

- [scan]
- [translation] by W. Messing

Paris le 9.10.1960

Monsieur et cher Maître,

Je Vous remercie pour votre lettre, empreinte à la fois de sagesse et de mansuétude. Il semble vain en effet qu'un différend personnel puisse être l'occasion du départ d'une disciple. Je reconnais qu'il était vain que j'attende du Maître qu'il arbitre une querelle qui ne le concerne pas, et qu'un tel arbitrage ne pouvait résoudre rien.

Je me suis interrogé plusieurs fois pendant les années de ma collaboration avec le Maître si mes habitudes peu sociables, mon caractère passionné et ma répugnance à vaincre les répugnances d'autrui, ne me rendaient inapte à une collaboration fertile pendant les congrès. Sans plus vouloir chercher la cause ailleurs qu'en moi-même, je pense maintenant qu'il en est bien ainsi, et que j'ai atteint avant l'âge traditionnel le moment où je servirai mieux le Maître par mon départ, qu'en restant sur Ses amicales instances.

Je m'efforcerai de rester digne des enseignements que Vous m'avez prodigués pendant si longtemps et de ne pas trahir l'esprit du Maître, qui, je l'espère, restera visible dans mon travail comme par le passé.

Votre très dévoué élève et serviteur,

A. Grothendieck

1961

---

- Grothendieck goes back to Harvard and with John Tate and D. Mumford run a seminar on existence theorems and the representability of various functors, especially Picard schemes. He also gave courses.
- “C’est vers le moment où j’ai commencé avec SGA 1 la série de mes “Séminaires de Géométrie Algébrique” (en 1960) que j’ai été contacté par Verdier, en même temps que par Jean Giraud et Michel Demazure, me demandant si j’avais du travail pour eux — et ils frappaient là à la bonne porte !”

**Récoltes et Semailles**

1962

---

- The IHÉS moved into the estate of Bois-Marie, a 10-hectare park in Bures-sur-Yvette.
- SGA 3 was held between 1962 and 1964.
- After military service, M. Demazure studied under Grothendieck (1962–64) and assisted him in the production of SGA3. His thesis was “Schemas en groupes reductifs”.

RÉSIDUS ET DUALITÉ,  
PRÉNOTES POUR UN SÉMINAIRE HARTSHORNE 1963

---

- This text was published in: *Résidus et dualité*. Hartshorne, Residues and Duality, Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966
- [scan]

LETTER TO J. MURRE  
18.7.1962

---

- [scan]

July 18, 1962

My dear Murre,

I recently had some thought on finiteness conditions for Picard preschemes, and substantially improved on the results stated in the last section of my last Bourbaki talk. The main result stated there for a simple projective morphism with connected geometric fibers (namely that the pieces  $\underline{\text{Pic}}_{X/S}^P$  are of finite type over  $S$ ) has been extended by Mumford to the case where instead of  $f$  simple we assume only  $f$  flat with integral geometric fibers, (at least if these are normal). Using his result (the proof of which is quite simple and beautiful), I could get rid of the normality assumption, and even (as in theorem 4.1. of my talk) restrict to the consideration of the two first non trivial coefficients of the Hilbert polynomials. The key results for the reduction are the following (the proofs being very technical, and rather different for (i) and (ii), except that (ii) uses (i) to reduce to the normal case; moreover (ii) uses Mumford's result and the equivalence criteria as developed in my last Seminar):

- (i) Let  $X, Y$  be proper over  $S$  noetherian, let  $f : X \longrightarrow Y$  be a *surjective*  $S$ -morphism, assume for simplicity of the statement that the Picard preschemes exist, then  $f : \underline{\text{Pic}}_{Y/S} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S}$  is of finite type (and in fact affine if  $S$  is the spectrum of a field), i.e. a subset  $M$  of  $\underline{\text{Pic}}_{Y/S}$  is quasi-compact iff its image in  $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$  is.
- (ii) The same conclusion holds for a canonical immersion  $X \longrightarrow Y$ , is  $Y/S$  is projective with fibers all components of which are of dimension  $\geq 3$ , and if  $X$  is the sub-scheme of zeros of a section over  $Y$  of an invertible sheaf  $\underline{L}$  ample with respect to  $S$ .

A connected result is that for any  $X/S$  proper, and integer  $n \neq 0$ , the  $n$ -th power homomorphism in the Picard prescheme is of finite type.

I tell you about this, namely (i), because of the method of proof, involving of course considerations of non flat descent. The fact that I do not have any good effectivity criterion does not hamper, by just recalling what the effectivity of a given descent datum means. Now it turns out that by a slightly more careful analysis of



the situation, one can prove the following theorem, of a type very close to the one you have proved recently, and to some you still want to prove as I understand it.

**Theorem.** — *Let  $S$  be an integral noetherian scheme,  $X$  and  $X'$  proper over  $S$  and  $f : X' \longrightarrow X$  a surjective  $S$ -morphism, look at the corresponding homomorphism for the Picard functors  $f^\bullet : \underline{\text{Pic}}_{X/S} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X'/S}$ . Assume:*

- a) the existence problems  $A$  and  $B$  defined below for  $X/S$  has always a solution (this is certainly true when  $X/S$  is projective).*
- b) the morphism  $f_S : X'_S \longrightarrow X_S$  induced on the generic fiber is a morphism of descent, i.e.  $\underline{\mathcal{O}}_{X_S} \longrightarrow f(\underline{\mathcal{O}}_{X'_S}) = h(\underline{\mathcal{O}}_{X''_S})$  is exact. Then, provided we replace  $S$  by a suitable non empty open set, the homomorphism  $f^\bullet$  is representable by a quasi-affine morphism, more specifically in the factorisation of  $f^\bullet$  via the functor representing suitable descent data,  $f^\bullet = v \circ u$  with  $u$  affine and  $v$  a monomorphism (as you well know),  $v$  is in fact representable by finite direct sums of immersions.*

**Corollary 1.** — *Without assuming b), but instead in a) allowing  $X/S$  to be replaced by suitable other schemes  $X_i$  finite over  $X$ , the same conclusion holds, namely  $f^\bullet$  is representable by quasi-affine morphisms.*

This follows from the theorem, using a suitable factorisation of  $f$ . For instance, using Chow's lemma and the Main existence theorem in my first talk on Picard schemes, one gets:

**Corollary 2.** — *Assume  $X/S$  proper satisfies the condition*

- a') for every  $X'$  finite over  $X$ , there exists a non empty open subset  $S_1$  of  $S$  such that problem  $A$  for  $X'/S_1$  has always solution (this condition is satisfied if  $X/S$  is projective).*

*Then provided we replace  $S$  by a suitable  $S_1$  non empty and open,  $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$  exists, is separated, its connected components are of finite type over  $S$ .*

**N.B.** The proof does not give any evidence towards the fact that in the theorem, one could replace “quasi-affine” by “affine”. This is true however over a field, because a quasi-affine algebraic group is affine!

It would be interesting to have a counterexample, say, over a ring of dimension 1 such as  $k[t]$ ,  $X$  and  $X'$  projective and simple over  $S$  and  $X' \rightarrow X$  birational, or alternatively,  $X$  and  $X'$  projective and normal over  $S$ , and  $f : X' \rightarrow X$  finite. A counterexample in the latter case would of course provide a counterexample to the effectivity problem for a finite morphism raised in my first talk on descent...

“Problem A” is the following: given  $X/S$  and Module  $F$  on  $X$ , to represent the functor on the category of  $S$ -preschemes taking any  $S'/S$  into a one-element or into the empty set, according as to whether  $F'$  on  $X'/S'$  is flat with respect to  $S'$  or not, where  $X' = X \times_S S'$ ,  $F' = F \times_S S'$ .

Given  $X/S$ , we say that “Problem A for  $X/S$  has always a solution” if for every constant  $F'$  on some  $X'/S'$ , the previous functor on  $\text{Sch}/S'$  is representable by a  $S'$ -scheme of finite type. The main step in my proof of existence of Hilbert schemes shows that this condition is satisfied when  $X/S$  is projective. In the proof, essential use is made of the Hilbert polynomial, in fact we get a solution as a disjoint sum of subschemes of  $S$  corresponding to various Hilbert polynomials. Still I would expect that the functor is representable as soon as  $X/S$  is proper. In view of the application we have in mind here, it would be sufficient (for any integral  $S$ ) to find in  $S$  a non empty open set  $S_1$  such Problem A has always a solution for  $X_1 = X \times_S S_1$  over  $S_1$ . To prove this weaker existence result, it is well possible that a reduction to the projective case is possible, using Chow’s lemma and some induction on the relative dimension perhaps. I also would expect that a proof will be easier when working over a complete noetherian local ring, hence the case of a general noetherian local ring by flat descent. And it is well possible that, putting together two such partial results, a proof of the existence in general could be obtained. (I met with such difficulties already time ago in a very analogous non projective existence problem, which beside I did not solve so far!). This problem A has been met also by Hartshorne (A Harvard Student), but I doubt he will work seriously on it. Thus I now wrote you in the hope you may be interested to have a try on this problem. As a general fact, our knowledge of non projective existence theorems is exceedingly poor, and I hope this will change eventually.

Sincerely yours.

A. Grothendieck

LETTER TO J. TATE  
5.2.1962

---

Paris Feb 5, 1962

Dear John,

In connection with my Bourbaki talk, I pondered again on Picard schemes. For instance, as I told Mumford, I proved that if  $X/S$  is projective and simple, then  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$  is of finite type over  $S$ . More generally, the decomposition of  $\text{Pic}_{X/S}$  according to the Hilbert polynomials (in fact, the first two non trivial coefficients of the polynomial suffice) consists of pieces which are of finite type, hence projective over  $S$ . Another way of stating this is to say that a family of divisors  $D_i$  on the geometric fibers of  $X/S$  is "limited" iff the projective degrees of the  $D_i$  and  $D_i^2$  are bounded.

Another result, of interest in connection with your seminar, is a proof of the fact that, for an abelian scheme  $A/k$ ,  $k$  a perfect field, the absolute formal scheme of moduli over  $\mathbb{W}_\infty(k)$  is simple over  $k$ . This comes from the following general fact: Let  $X_0/S_0$  be simple,  $X'_0/X_0$  étale,  $S_0$  subscheme of  $S$  defined by an ideal  $J$  of square 0. Let  $\xi_0 \in H^2(X_0, \mathfrak{G}_{X_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} J)$  and  $\xi'_0 \in H^2(X'_0, \mathfrak{G}_{X'_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} J)$  be the obstruction for lifting. Then  $\xi'_0$  is the inverse image of  $\xi_0$  under the obvious map. As a consequence, if  $X_0/S_0$  is abelian, taking  $X'_0 = X_0$ ,  $X'_0 \rightarrow X_0$  multiplication by  $n$  prime to the residue characteristic, we get  $\xi_0 = n^*(\xi_0)$ . If  $S = \text{Spec } \Lambda$ ,  $\Lambda$  local artin, and  $mJ = 0$ , then we are reduced to an obstruction in the  $H^2$  of the reduced  $X_0 \otimes_{\Lambda_0} k = A$ , satisfying  $\xi = n^*(\xi)$  for  $n$  prime to  $p$ . Using the structure

$$H^*(A, \mathfrak{G}_{A/k}) \simeq \bigwedge^* H^1(A, \mathcal{O}_A) \otimes t_A,$$

we get  $n^*(\xi) = n^3 \xi$ , hence  $(n^3 - 1)\xi = 0$ . Taking  $n = -1$  we get  $2\xi = 0$ , hence  $\xi = 0$ , and we win!

I just noticed the proof does not give any information for residue char. = 2! Here is a simple proof valid in any char.: Consider the obstruction  $\eta_0$  for lifting  $X_0 \times_{S_0} X_0$ , then  $\eta_0 = \xi_0 \otimes 1 + 1 \otimes \xi_0$ , and  $\eta_0$  is invariant under the automorphism  $(x, y) \rightsquigarrow (x, y + x)$  of  $X_0 \times_{S_0} X_0$ . Thus we get an element  $\xi = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i \wedge e_j$  in  $H^2(A, \mathcal{O}_A) = \bigwedge^2 t$ , s.th.  $\eta = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e'_i \wedge e'_j + \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e''_i \wedge e''_j$  in  $\bigwedge^2(t \oplus t)$  is invariant under  $(x, y) \rightsquigarrow (x, y + x)$ , carrying  $e'_i \rightsquigarrow e'_i + e''_i$  and  $e''_i \rightsquigarrow e''_i$ , hence trivially  $\xi = 0$ !

As a consequence, we get that the scheme of moduli for the *polarized* abelian schemes, with polarizations degree  $d$ , is simply over  $\mathbf{Z}$  at all those primes  $p$  which do not divide  $d$ . This comes from the fact that the obstruction to polarized lifting lies in a module  $H^2(A, E)$ , where  $E$  is an extension (the “Atiyah extension”) (\*)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow E \longrightarrow \mathfrak{G}_{A/k} \longrightarrow 0$$

whose class  $c$  in  $H^1(A, \Omega_{A/k}^1)$  is just the Chern class  $\frac{dL}{L}$  of the invertible sheaf  $L$  on  $A$  defining the polarization. Now in the exact sequence of cohomology for (\*), the map

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathfrak{G}_{A/k}) & \xrightarrow{\partial^{(i)}} & H^{i+1}(\mathcal{O}_A) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \bigwedge^i t' \otimes t & & \bigwedge^{i+1} t' \end{array} \quad t = t_A, \quad t' = t_{\hat{A}}$$

is trivially described in terms of

$$c \in H^1(A, \Omega_{A/k}^1) \simeq \text{Hom}(t, t'),$$

where the homomorphism  $c : t \longrightarrow t'$  is just the tangent map for  $\varphi : A \longrightarrow \hat{A}$  defined by the polarization. This map being surjective by assumption,  $\partial^{(i)}$  is surjective, hence  $H^i(E) \longrightarrow H^i(\mathfrak{G}_{A/k})$  is injective, in particular

$$H^2(E) \longrightarrow H^2(\mathfrak{G}_{A/k})$$

is *injective*. As the obstructions obtained in  $H^2(\mathfrak{G}_{A/k})$  are zero, the same holds for the polarized obstructions in  $H^2(E)$ , hence the assertion of the simplicity. (If however  $p|d$ , simplicity *does not hold at any point* of  $M$  over  $p$ !)

Using the simplicity for the formal scheme of moduli of abelian varieties, I can prove the following:

Let  $X/\Lambda$  be flat, proper,  $k \xrightarrow{\sim} H^0(X_0, \mathcal{O}_0)$ , where  $\Lambda$  is local artin with residue field  $k$ . Assume  $\text{Pic}_{X_0/k}$  exists, and is *simple* over  $k$ , i.e.  $\dim \text{Pic}_{X_0/k} = \dim H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$  (always true in char 0). Then

- a)  $\text{Pic}_{X/\Lambda}^0$  exists and is an *abelian* scheme over  $\Lambda$ .

- b) The “base extension property” holds for  $R^i f_*(\mathcal{O}_X)$  in dimension 1, and more generally in any dimension  $i$  such that

$$\bigwedge^i H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \longrightarrow H^i(X_0, X_0)$$

is *surjective*, and  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$  is free over  $\Lambda$ .

Idea of proof:

- a)  $\text{Pic}_{X/k}^0$  is constructed stepwise. Having  $\text{Pic}_{X_{n-1}/k}^0 = A_{n-1}$ , to get  $A_n$  we first lift *arbitrarily*  $A_{n-1}$  to an abelian scheme  $A'_n$ . We then try to construct the can. invertible “Weil sheaf” on  $X_n \times_{\Lambda_n} A'_n$ , extending the given Weil sheaf on  $X_n \times_{\Lambda_{n-1}} A_{n-1}$ . The obstruction lies in

$$H^2(X_0 \times A_0, \mathcal{O}_{X_0 \times A_0}) \simeq H^2(\mathcal{O}_{X_0}) \times H^2(\mathcal{O}_{A_0}) \times H^1(\mathcal{O}_{X_0}) \otimes H^1(\mathcal{O}_{A_0})$$

and in fact, as easily seen, in the last factor  $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \otimes H^1(A_0, \mathcal{O}_{A_0}) \simeq t_{A_0} \otimes H^1(A_0, \mathcal{O}_{A_0}) \simeq H^1(A_0, \mathfrak{G}_{A_0/k})$ . This space is exactly the group operating in a simply transitive way on the set of all extensions of  $A_{n-1}$ . Thus we can *correct*  $A'_n$  in just one way to get an  $A_n$  with a “Weil sheaf” on it!

This does it.

- b) Let  $\omega$  be the conormal sheaf to the unit section of  $A = \text{Pic}_{X/S}^0$ , thus  $\omega$  is *free* because  $A/S$  is simple, and by definition of  $\text{Pic}_{X/S}^0$  we have

$$H^1(X, \mathcal{O}_A) \simeq \text{Hom}(\omega, \mathcal{O}_S)$$

This description holds also after any base extension, hence the fact that  $H^1(X, \mathcal{O}_S)$  is free over  $\Lambda$  and its formation commutes with base extension. This implies also  $H^1(X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \longrightarrow H^1(X_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$  surjective, hence  $H^i(X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \longrightarrow H^i(X_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})$  is surjective for the  $i$ ’s as in the theorem, ok.

Corollary. — *Let  $A/S$  be any abelian scheme, then the modules  $R^i f_*(\mathcal{O}_A)$  on  $S$  are locally free and in fact  $\simeq \bigwedge^i R^1 f_*(\mathcal{O}_A)$ . If  $\text{Pic}_{A/S}$  exists, then  $\text{Pic}_{A/S}^0$  is open and is an abelian scheme over  $S$ .*

(Moreover, biduality holds, as follows easily from the statement over a field...)

Corollary. — Let  $f : X \longrightarrow S$  be flat, proper,  $k(s) \xrightarrow{\sim} H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$  for every  $s$ , let  $s \in S$  be such that  $\dim H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \dim \text{Pic}_{X_s/k(s)}$ , (the latter defined, if  $\text{Pic}_{X_s/k(s)}$  is not known to exist, in terms of the formal Picard scheme). Then  $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$  is free at  $s$ .

This is always applicable if  $\text{char } k = 0$ .

I do not know if, in the case considered, the  $R^i f_*(\mathcal{O}_X)$  or even  $R^i f_*(\Omega_{X/S}^j)$  are also free at  $s$ , even in  $\text{char } 0$ . It is true for  $f_*(\Omega_{X/S}^1)$  whenever we know that  $\dim H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \dim H^0(X_s, \Omega_{X_s}^1)$ , for instance if  $\text{char } k(s) = 0$  and  $f : X \longrightarrow S$  is projective and simple. (If moreover  $S$  is reduced, Hodge theory implies all  $R^i f_*(\Omega_{X/S}^j)$  are free at  $s$ ; but if  $S$  is artin, I have no idea!)

I now doubt very much that it be true in general that  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$  is flat over  $S$ , or even only universally open over  $S$ , when  $X/S$  is simply. Here is an idea of an example, inspired by Igusa's surface. Let  $A/S$  be an abelian scheme,  $G$  a finite group of automorphisms of  $A$ . If  $G$  operates without fixed points on  $B/S$  projective and simple over  $S$ , with  $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} g_*(\mathcal{O}_B)$ , we construct  $X = B \times_G \hat{A}$  which is an abelian scheme over  $Y = B/G$ , and one checks

$$\text{Pic}_{X/S} \simeq \text{Pic}_{Y/S} \times_S (\text{Pic}_{\hat{A}/S})^G$$

(where upper  $G$  denotes the subscheme of invariants), hence

$$\boxed{\text{Pic}_{X/S}^\tau \simeq \text{Pic}_{Y/S}^\tau \times_S A^G}$$

Hence for getting examples of bad  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$ , we are led to study schemes of the type  $A^G$ , with  $S$  say spectrum of a discrete valuation ring  $V$ . Thus we are led to the questions:

- a) Can it occur that there are components of  $C = A^G$  which do not dominate  $S$ ? For instance,  $A_1^G = \text{unit subgroup}$  (set theoretically, or even scheme-theoretically) and  $A_0^G \neq \text{unit subgroup}$  set theoretically - where  $A_0, A_1$  are the special and the general fibers.
- b) If  $C_1 = A_1^G$  is connected (for instance is the unit subgroup), and hence  $C^\circ = C_0^\circ \cup C_1^\circ$  is open, can it occur that  $C^\circ$  is non flat over  $S$  [for instance  $C_1 = \{e\}$ ,  $C_0^\circ \neq \{e\}$ ]?

such that multiplication  $p : \text{Pic}_{X/S} \longrightarrow \text{Pic}_{X/S}$  is *not* universally open, i.e. such that there exists an irreducible component  $C$  of  $\text{Pic}_{X/S}$  not dominating  $S$ , but such that  $pC$  is contained in a component dominating  $S$ . [N.B. if  $n$  prime to all residue char., multiplication by  $n$  in any  $\text{Pic}_{X/S}$  is étale.]

Best regards to Karin, kids etc.

Schurik

P.S. I just proved: If  $X \longrightarrow S$  is *simple* and *projective*, then  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$  is *projective* over  $S$ . Method:

- a) From the fact that the fibers of  $\text{Pic}_{X/S}^0$  are proper, follows that  $\text{Pic}_{X/S}^0$  is proper over  $S$ , hence closed in  $\text{Pic}_{X/S}$ , hence easily that  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$  is *closed* in  $\text{Pic}_{X/S}$ . It remains to prove it is of *finite type* over  $S$  – hence proper over  $S$ , and quasi-projective over  $S$ , hence projective.
- b) For every  $n > 0$ , the kernel of  $\text{Pic}_{X/S} \xrightarrow{n} \text{Pic}_{X/S}$  is of finite type over  $S$  [and even more: the multiplication  $\mu$  by  $n$  is of finite type, hence finite]. If  $n$  is prime to the residue characteristics, this follows from the fact that  $\mu$  is *étale* and has finite fibers. This reduces to the case  $S$  of char  $p > 0$ ,  $n = p$ . Then I use a technique of descent involving the “relative  $p$ -power scheme”  $(X/S)^{(p)}$ , following a suggestion of Serre.
- c) For variable  $s \in S$  ( $S$  noetherian), the Néron-Severi torsion group of  $X_s$  remains of bounded order. This can be shown using the method of Matusaka’s proof for the finiteness of the “torsion group”.

From a), b), c), the theorem follows.

**Remark:** Using the Picard-Igusa inequality for  $\rho = \text{rank}$  of Néron-Severi, and Lefschetz type theorems I told you about, one gets also that  $\rho(X_s)$  remains bounded for  $s \in S$  ( $S$  noetherian).

**Question:** Is  $\text{Pic}_{X/S}^\tau$  always of finite type over  $S$ , under merely the usual assumptions for existence of  $\text{Pic}_{X/S}$ ? I have no proof even if  $X \longrightarrow S$  is normal! Same question for  $\rho$ . This seems related to the question of uniform majorization of the Mordell-Weil-Néron-Lang finiteness theorem, for a *variable* abelian variety.



LETTER TO H. HIRONAKA  
6.7.1962

---

- [scan]

Neuilly July 6 1962

Dear Hironaka,

I had a little thought over our conversation last Tuesday, it occurred to me that the type of argument I used yields in fact the following stronger result:

Theorem. — *Let  $f : X \longrightarrow Y$  be a proper morphism of analytic spaces over  $\mathbb{C}$ , let  $y \in Y$ ,  $Y_n = (\underline{O}_y / \underline{m}_y^{n+1})$ ,  $X_n = X \times_Y Y_n$ ,*

$$\mathrm{Pic}(X_y) = R^1 f(\underline{O}_X^\bullet)_y = \varinjlim \mathrm{Pic}(f^{-1}(U)) \quad y \in U,$$

$$\mathrm{Pic}(\hat{X}_y) = \varprojlim \mathrm{Pic}(X_n),$$

*and consider the canonical homomorphisms*

$$\mathrm{Pic}(X_y) \xrightarrow{u} \mathrm{Pic}(\hat{X}_y) \xrightarrow{v_n} \mathrm{Pic}(X_n)$$

*Then the following are true:*

- (i) *The inverse system  $(\mathrm{Pic}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies the condition of Mittag-Leffler (even with Artin-Riesz type of uniformity).*
- (ii)  *$\mathrm{Im} v_n = \mathrm{Im} v_n u =$  (in virtue of (i)) *set of universal images of  $\mathrm{Pic}(X_n)$  in the inverse system  $(\mathrm{Pic}(X_m))_{m \in \mathbb{N}}$ .**
- (iii) *In order for  $u$  to be an isomorphism, it is nec and suff that  $R^1 f_*(\underline{O}_X)_y$  is a module of finite length.*

*In fact (i) can be more precise:*

- (ibis) *In the inverse system  $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/\mathbb{C}})_{n \in \mathbb{N}}$  of analytic groups, the system of the “Néron-Séveri groups” is constant for  $n$  large, whereas for  $m > n$  and  $n$  large, the Kernel and Cokernel of*

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X_m/\mathbb{C}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/\mathbb{C}}$$

*are just vector groups.*

Parts (i) and (ii) yield the

Corollary 1. — *The following conditions are equivalent*

(i) *There exists an open  $U \subset Y$  such that  $X|_U$  is projective over  $U$*

(ii) *For every  $n$ ,  $X_n$  is a projective analytic space.*

For instance, if  $\dim X_0 \leq 1$ , then (ii) and hence (i) holds.

The proof of the theorem only uses Grauert's analogues of the algebraic theorems of finiteness and comparison for direct images (of his blue paper) and the usual exact sequences  $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \underline{O} \rightarrow \underline{O}^\bullet \rightarrow 0$ , together with some standard use of Mittag-Leffler story and five lemma. It is valid in fact for any  $H^i(\underline{O}^\bullet)$ , not only  $i = 1$  (which seems the only one however to have geometric significance).

In the case of a formal scheme proper over a complete noeth. local ring with residue field of *characteristic* 0, the analogon of the previous theorem (reducing to statements (i), (i bis)) hold true, and I wrote a purely algebraic proof of this, relying only on the fact that the kernel and Cokernel of  $\underline{\text{Pic}}_{X_{n+1}} \rightarrow \underline{\text{Pic}}_{X_n}$  are without torsion, and Néron's finiteness theorem; in particular, the analogon of corollary 1 holds true in this case. These results break down of course in  $\text{car.} > 0$ .

However, using the (as yet unwritten !) *GAGA* of Serre-Grauert-Remmert-Grothendieck (of Grauert-Remmert's paper, complemented by the method of an old talk of mine in Cartan's Seminar, to recover the case of proper morphisms of schemes from the projective one, via Chow's lemma...), the analytic theorem above yields an interesting intrinsic property of analytic algebras over  $\mathbf{C}$ , with respect to algebraic geometry over such a local ring:

**Theorem.** — *Let  $A$  be an analytic algebra over  $\mathbf{C}$  (we can suppose  $A$  to be the ring of convergent power series in  $n$  variables),  $\hat{A}$  its completion,  $Y$  and  $\hat{Y}$  the spectra,  $X$  a proper scheme over  $Y$ ,  $\hat{X} = X \times_Y \hat{Y}$ . Then*

(i) *The inverse system  $(\text{Pic}(X_n))$  satisfies MLAR (as stated above, this depends only on the  $\text{car.}$  0 assumption for the residue field).*

(ii)  *$\text{Pic}(X)$  and  $\text{Pic}(\hat{X})$  have same image in  $\text{Pic}(X_n)$ , – namely the group of “universal images”. (NB recall  $\text{Pic}(\hat{X}) \simeq \varprojlim \text{Pic}(X_n)$ ).*

(iii) *In order for  $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(\hat{X})$  to be an isomorphism, it is necessary and sufficient that  $\text{supp } R^1 f_*(\underline{O}_X) \subset \{y\}$ , i.e.  $H^1(X, \underline{O}_X)$  of finite length over  $A$ . (NB It*

amounts also to the same to ask that the inverse system of the subgroups  $\text{Pic}'(X_n)$  of universal images is constant for large  $n$ ).

We get for example:

Corollary 1. — *The following conditions are equivalent:*

- (i)  $X/Y$  projective
- (ii)  $\hat{X}/\hat{Y}$  projective
- (iii) For every  $n$ ,  $X_n/Y_n$  projective.

This applies for instance if  $\dim X_0 \leq 1$ .

Now applying your theorem of *resolution of singularities*, and Mumford's method of relating the local Picard group of  $A$  to the global Picard group of a regular scheme dominating  $A$  birationally, one gets from the last statement (iii) of last theorem:

Corollary 2. — *Let  $A$  be as above, assume  $Y' = Y - (y)$  regular, and let  $\hat{Y}' = \hat{Y} - (\hat{y})$ . Then  $\text{Pic}(Y') \longrightarrow \text{Pic}(\hat{Y}')$  is an isomorphism.*

This explains “à priori” (when  $A$  is normal) why Mumford was able to introduce on the group of divisor-classes of  $A$  a structure of an analytic group (which in fact is algebraic...), which from the algebraic point of view should be possible rather for the group of divisors classes of the completion  $\hat{A}$ ; of course Mumford uses directly the same kind of argument I used.

I do not know if in the last statement, the hypothesis that  $Y'$  is regular (“ $y$  isolated singularity”) is essential; we could dispense with it and replace it by “ $A$  reduced” if you can prove by your theory of resolution the following: if  $f : X \longrightarrow Y$  is proper “birational”,  $X$  regular, then  $R^1 f_*(\underline{O}_X) = 0$ . I understand you prove this if  $Y$  also is regular (which is easily checked by your theory), but I wonder if this is really needed. I would not be surprised either if in this statement,  $Y'$  can be replaced by any open subset of  $Y$  (replacing of course  $\hat{Y}'$  by the inverse image of the latter). Moreover, I would expect the analogous statements to hold for  $\pi_1$ , more generally for all “topological” invariants as Weil homology, homotopy

groups etc, that can be defined for schemes. This should be related to the fact that all these invariants vanish for the geometric fibers of the morphism  $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ . This is easy to check at least for  $\pi_0$  (and is true in fact for any henselian ring which is a “good” ring); however I do not know if this is true also for  $\pi_1$ .

Besides, I would not be surprised if most of the previous results (namely parts (ii) and (iii) of the second theorem, and the two corollaries, as well as the conjectures of the previous sections) did hold true for any “good” ring which is henselian or at least for the “henselian closures” of the local rings arising from algebras of finite type over a field, or over the integers, - although I do not have any result along these lines (except those stemming from my remark on  $\bar{k}_0$ ). This can be stated of course directly in terms of conjectures for the latter local rings without explicit reference to a henselian closure, for instance corollary 2 would yield the conjectural statement: Let  $A$  be a local ring of an algebra of finite type over a field,  $\hat{A}$  its completion,  $Y$  and  $\hat{Y}$  the spectra,  $Y'$  and  $\hat{Y}'$  the complements of the closed points, then any invertible sheaf on  $\hat{Y}'$  can be defined by an invertible sheaf on some  $Y'_1$ , where  $Y_1$  is local and  $Y_1 \longrightarrow Y$  is étale with trivial residue field extension (i.e. inducing an isomorphism for the completions  $A \longrightarrow A_1$ ). I wonder what information is given by Mumford’s example in his blue paper, p.16, which I believe yields a case where the invertible sheaf considered does not come from an invertible sheaf on  $Y'$ ? I was not able to understand his construction.

Anyhow, one should be able to determine whether or not the analytic algebras over  $\mathbb{C}$  have any significant intrinsic property which is not shared by all “good” henselian rings with residue field of char. 0 (I recall that by good I mean “quotient of a regular local ring  $B$  such that the fibers of  $\mathrm{Spec} \hat{B} \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$  are universally regular”).

Please give my regards to Waka, and also Mireille’s; she just got the parcel from Waka, and was extremely pleased, in fact, she slipped into her new bed-shirt on the spot, and is delighted by it in every respect.

Sincerely yours

1963

---

•

## LETTER TO M. ATIYAH

(Extract)

14.10.1963



- Letter on the Rham cohomology of algebraic varieties
- This text was published in: *Letter to M. Atiyah*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 29 (1966), p. 95-103
- [scan]

1964

---

•



## FORMULE DE LEFSCHETZ ET RATIONALITÉ DES FONCTIONS $L$

---

- This text was published in: *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions  $L$* .  
Sém. N. Bourbaki, 1966, exp. no 279, p. 41-55
- [scan]

LETTRE À J.-P. SERRE  
12.8.1964

---

- [scan]

Bures le 12.8.1964

Mon cher Serre,

Je commence à avoir de faibles lumières sur la façon de faire des VA avec les cycles algébriques équivalentes à zéro d'une variété projective non singulière  $X$  (sur un corps alg clos  $k$ ). Si  $X$  est connexe de dimension  $n$ , je sais associer à chaque entier  $i$  compris entre 1 et  $n$  une VA  $J^i(X)$ , jouant le rôle d'une "jacobienne intermédiaire" au sens de Weil, correspondant à des classes de cycles de codimension  $i$  (pour une relation d'équivalence que je ne sais pas bien identifier pour l'instant, mais qui mérite certainement d'être appelée "équivalence d'Albanese"). Je suis moralement sûr que ce sont "les bonnes", bien que je n'ai pas prouvé grand-chose dessus pour l'instant ; par contre, j'ai des conjectures en pagaille. Je te signale seulement que  $J^1 = \text{Pic}^\circ$  et  $J^n = \text{Alb}^\circ$ , que  $J^i$  et  $J^{n+1-i}$  sont canoniquement duales l'une de l'autre, que  $\dim J^i \leq \frac{1}{2} b_{2i-1}$  (nombre de Betti) — de façon plus précise  $T_\ell(J^i)$  est un quotient d'un sous-module de  $H^{2i-1}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$  (et quand on sera plus savant, on saura prouver que c'est même un sous-module dudit), en caractéristique 0 on peut également remplacer la cohomologie de Weil par la cohomologie de Hodge  $H^i(X, \underline{\Omega}_X^{i-1}) \dots$

Moyennant un certain nombre de choses non prouvées (qui risquent d'ailleurs d'être vaches) le théorème de positivité de Hodge se ramène à l'énoncé suivant, que je ne sais pas prouver, et que j'ai envie de te communiquer car il est bien terre à terre. Moralement, il s'agit de prouver que dans le cas où  $\dim X = 2m - 1$ , l'autodualité de  $J^m$  (qui s'exprime par une classe de correspondance divisorielle sur  $J^m \times J^m$  *symétrique*, donc provenant - du moins modulo le facteur 2- d'un élément du groupe de Néron Severi de  $J^m$ ) est *positive* i.e. l'élément en question de Néron-Severi est ample, i.e. une polarisation. Pratiquement, cela s'explicite ainsi : Soit  $T$  une variété de paramètres connexe non singulière munie d'un point marqué  $a$ ,  $z$  une classe de cycles de codimension  $m$  sur  $T \times X$  (à équivalence linéaire près, mettons), telle que  $z(a) = 0$  dans  $X$ , soient  $p$  et  $q$  les deux projections de  $T \times T \times X$  sur  $T \times X$ ,  $r$  sa projection sur  $T \times T$ , considérons

$$D = r_*(p^*(z)q^*(z))$$

qui est une classe de diviseurs sur  $T \times T$ , que nous considérons comme une classe

de correspondance divisorielle sur  $T \times T$ . Si  $A = \text{Alb}^\circ(T)$  (NB si tu veux, tu peux supposer  $T = A$  et a l'origine), elle provient donc d'une classe de correspondance sur  $A \times A$ , évidemment symétrique. Soit  $N$  le "noyau" de cette classe (i.e. le noyau de  $A \longrightarrow (\text{duale de } A)$  qu'elle définit), on obtient alors une classe de correspondance symétrique sur  $J \times J$ , où  $J = A/N$ . A prouver que cette dernière est *positive* ! Je me demande si les spécialistes "abéliens" pourraient avoir une idée sur une telle question, peut-être Matsusaka ? Ou toi-même ? Notes d'ailleurs que cette question te dévoile pratiquement le méthode de construction des  $J^i$  généraux ; si tu veux, tu peux te borner aussi au cas où te disposes d'une sous-variété de codimension  $m - 1$   $Y$  de  $X$ , non singulière si tu y tiens, où  $T = \text{Pic}^\circ(Y)$ , considéré comme paramétrant les diviseurs alg équiv à zéro de  $Y$ , mais considérés comme classes de cycles de codimension  $m$  de  $X$ .

Merci pour la copie de la lettre à Ogg !

Bien à toi

1965

---

•

## LE GROUPE DE BRAUER I : ALGÈBRES D'AZUMAYA ET INTERPRÉTATIONS DIVERSES

---

- This text was published in: *Le groupe de Brauer I : Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses*. Sémin. N. Bourbaki, 1966, exp. no 290, p. 199-219
- [scan]

## LE GROUPE DE BRAUER II : THÉORIES COHOMOLOGIQUES

---

- This text was published in: *Le groupe de Brauer II : Théories cohomologique*.  
Sém. N. Bourbaki, 1966, exp. no 297, p. 287-307
- [scan]

LETTRE À J. DIEUDONNÉ  
29.9.1965

---

- [scan]
- [translation]



29.9.1965

Cher Dieudonné,

Merci de ta lettre du 24 et pour la table des matières des par. 16 à 19. Je serais content de recevoir à l'occasion la table des matières provisoire des par. 20 et 21 ; d'accord pour les joindre au fascicule 4 du Chap IV. Mais comment vaux-tu subdiviser mon ancien par.20, et quels seront les titres des deux morceaux ? Comme je commence à me perdre dans le plan, et qu'il est parfois commode de pouvoir référer sans trop déconner à un n° de paragraphe, je te donne ici ce qui me semble être le plan actuel, dis-moi si tu es d'accord :

20. ???

21. ???

22. Systèmes linéaires, compléments sur le groupe de Picard.

23. Grassmaniennes.

24. Formes lisses, singularités quadratiques ordinaires.

25. Sections hyperplanes et bordel.

26. Résultant et discriminant.

27. Extensions infinitésimales.

Le 25. risque d'ailleurs d'être fort long, et je te vois déjà vouloir le subdiviser en deux ! Pourtant,  $27 = 3^3$  est un bien joli nombre !

Il n'est pas question que je publie l'ex-Appendice au par.18 sous mon nom ; ta rédaction n'a à peu près plus rien de commun avec les vagues notes manuscrites que je t'avais passées, si même je t'en ai jamais passé, et ne me suis borné à te dire : il n'y a qu'à faire pareil que pour les anneaux complets... Il serait d'autre part dommage que ton travail de mise au point soit perdu pour les éventuels utilisateurs (il finit toujours par s'en trouver...). C'est pourquoi je te demande de bien vouloir reconsidérer la question d'en faire un "joint paper".

Pour par. 20, 10.9.1, il faut bien entendu utiliser le fait que l'ensemble des points de  $Z_\lambda$  en lesquels  $F_\lambda$  restreint à la fibre est de  $\text{prof} > 0$  donné, est *constructible*

(on a même du prouver au par. 12 qu'il est ouvert, avec les hypothèses de platitude et de présentation finie qu'on a faites). Comme son image inverse dans  $Z$  est tout, c'est que c'est déjà tout un peu plus loin que  $\lambda$ . C'est vraiment toujours le même argument qui revient !

Bien à toi

A. Grothendieck

LETTRE À P. DELIGNE  
10.12.1965

---

- Letter about duality and  $\ell$ -adic cohomologies.
- Scan

10.12.1965

Cher Deligne,

[Je vous propose une simplification pour la démonstration du théorème de dualité, qui permet d'éviter tout recours au théorème de pureté relative. Vous vous rappelez qu'on était réduit au cas où  $f : X \longrightarrow Y$  est de dimension relative 1,  $F = A_X$  et  $G = A_Y$ . Le procédé de passage à la limite de Exp VI, par. 6, permet de supposer la base noethérienne, et même si on y tient de dimension finie (car de type fini sur  $\mathbf{Z}$ ). On raisonne par récurrence sur  $n = \dim X$ . Si  $n = 0$ , on sait le vérifier. Supposons le théorème démontré en dimension  $< n$ . Se localisant sur  $Y$ , on peut supposer  $Y$  strictement local. Alors, si  $y$  est son point fermé, on a  $\dim(Y - y) = n$ , et comme on est réduit à prouver le théorème séparément pour  $X \times_Y (Y - y)$  et  $X \times_Y y$ , on gagne. — Autre remarque : le théorème de dualité peut se démontrer, essentiellement de la même façon et avec le même énoncé, pour un morphisme lisse  $f : X \longrightarrow Y$  compactifiable, lorsque  $Y$  est muni d'un faisceau d'anneaux  $A$  quelconque tel que il existe un entier  $n$  premier aux caractéristiques résiduelles annulant  $A$ , et  $X$  d'un faisceau d'anneaux  $B$ , et  $f$  étant donné comme morphisme de  $(X, B)$  dans  $(Y, A)$ , de sorte qu'on a un homomorphisme de faisceau d'anneaux  $f^{-1}(A) \longrightarrow B$ . On définit alors

$$f^!(K^\bullet) = R\text{Hom}_{f^{-1}(A)}^\bullet(B, f^{-1}(K) \otimes_{T_{X/T}} 2d).$$

La définition de l'homomorphisme trace et la démonstration du théorème de dualité se décomposent alors en le cas où  $f^{-1}(A) \longrightarrow B$  est un isomorphisme, qui se traite comme le cas  $A = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_Y$ , et le cas où  $f = \text{id}$ , qui est trivial. Je pense qu'il vaut le coup d'inclure cette forme générale du théorème de dualité, soit de prime abord, soit à la fin dans un numéro-page. Je n'ai pas regardé si par hasard il pourrait se déduire du cas particulier  $A = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_Y$  comme simple corollaire, mais ça m'étonnerait. La même remarque s'applique d'ailleurs également au théorème de dualité local, qui s'énonce pour des faisceaux d'anneaux plus généraux que le faisceau constant  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .]

Il me semble que la relation de nature transcendante qui lie la cohomologie de De Rham ou de Hodge aux cohomologies  $\ell$ -adiques, lorsque le corps de base est  $\mathbf{C}$ , via la cohomologie entière, devrait avoir analogue lorsque le corps de base est

algébriquement clos value complet non archimédien, à corps résiduel de caractéristique  $p$ , et corps des fractions  $K$  de caractéristique zéro, savoir que  $H^*(Z, \mathbf{Z}_p)$  doit s'envoyer alors de façon  $\mathbf{Z}_p$ -linéaire dans la cohomologie de De Rham  $H^*(X)$ , qui serait isomorphe alors à  $H(X, \mathbf{Z}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} K$ . Pour définir un tel homomorphisme, on pourrait penser à utiliser l'espace rigide-analytique au sens de Tate défini par  $X$  (NB c'est un site qui ne peut être défini par une topologie au sens ordinaire, ce qui explique les difficultés conceptuelles initiales de Tate pour arriver à définir la notion d'espace rigide-analytique), soit  $X^{\text{an}}$ . On espère que les arguments habituels prouveront que pour des faisceaux de torsion, la cohomologie de  $X_{\text{ét}}$  coïncide avec celle de  $X^{\text{an}}$ , et un excès d'optimisme nous ferait espérer que la cohomologie de  $X^{\text{an}}$  à coefficients constants  $\mathbf{Z}_p$  est bien la limite projective des cohomologies à coefficients dans les  $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ , donc coïncide avec la cohomologie  $p$ -adique  $H(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}_p)$  (définie précisément comme une limite analogue). Si cela était vrai, l'immersion canonique de  $\mathbf{Z}_p$  dans les fonctions constantes sur  $X^{\text{an}}$  semblerait permettre d'envoyer  $H(X^{\text{an}}, \mathbf{Z}_p)$  dans la cohomologie de De Rham de  $X^{\text{an}}$ , qui par GAGA rigide-analytique n'est autre que celle de  $X$ . L'“excès” plus haut serait justifié essentiellement par un “lemme de Poincaré” rigide-analytique, disant que sur  $X^{\text{an}}$ , le complexe de De Rham est bien une résolution de faisceau des fonctions constantes à valeurs dans le corps de base. Notez bien que c'est certainement trivial pour l'analytique  $p$ -adique ordinaire, étant une simple question de séries convergentes dans ce cas, mais que la question pour la topologie rigide-analytique (qui est beaucoup plus grossière) est plus délicate. Je vous avoue d'ailleurs que j'ai de grands doutes que les choses marchent aussi simplement que ça, i.e. que la cohomologie rigide-analytique à coefficients constants tout bêtes donne les “bons” nombres de Betti. Je crois me rappeler que Tate m'avait dit que c'était déjà faux pour le  $H^1$  des courbes elliptiques — il faudrait lui demander quel était son argument ; apparemment, on trouverait un peu plus que pour la cohomologie étale, mais quand même par toute la cohomologie. Il reste plausible néanmoins, quoi qu'il en soit, que la topologie rigide-analytique aura son rôle à jouer dans ces questions.

Noter qu'en caractéristique  $p > 0$ , on a un homomorphisme évident de  $H^*(X, \mathbf{F}_p)$  dans la cohomologie de De Rham, comme on voit en calculant cette dernière pour la cohomologie étale et non pour la cohomologie de Zariski (ce qui

donne le même résultat, puisque les composantes du complexe de De Rham sont quasi-cohérents), et utilisant la suite spectrale en cohomologie étale

$$H^*(X) \leftarrow H^p(X, \underline{H}^q(\underline{\Omega})).$$

Cet homomorphisme se factorise d'ailleurs à travers  $H^*(X, \mathcal{F}_p) \longrightarrow H^*(X, \underline{\mathcal{O}}_X)$ , ce dernier s'envoyant dans  $H^*(X)$  grâce à l'homomorphisme de puissance  $p$ -ème  $f \rightsquigarrow f^p$ , induisant un isomorphisme  $\underline{\mathcal{O}}_X \simeq \underline{H}^0(\underline{\Omega})$ . Le composé des homomorphismes canoniques  $H^n(X, \underline{\mathcal{O}}_X) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(X, \underline{\mathcal{O}}_X)$  (ce dernier résultant de l'autre suite spectrale pour la cohomologie de De Rham) ne peut guère être autre chose que l'homomorphisme de Frobenius. Il faut dire que tout ça est bien éculé, et qu'on ne pourra dire des choses vraiment intéressantes et nouvelles qu'en faisant appel à la "vraie" cohomologie  $p$ -adique.

Bien cordialement

## INTRODUCTION AU LANGAGE FONCTORIEL

---

- The Algerian war was a major armed conflict between France and Algerians that took place between 1954 to 1962 that leads to its independence. Grothendieck's trip to Algiers, the Algerian capital, probably persuaded by R. Godement, took place in November and December of 1965 with the intention to give a course at the Faculté des Sciences at the University of Algiers. It was motivated by a framework of cooperation of French intellectuals that traveled there for several weeks to give lessons and courses. These contributed to the development of a Department of Mathematics.
- The following notes (in French), taken by M. Karoubi, were the result of a series of talks on the functorial language that Grothendieck gave during the month of November 1965 as requested by mathematicians there.
- [scan]

# INTRODUCTION AU LANGAGE FONCTORIEL

par Alexandre Grothendieck

---

Ce fascicule contient une rédaction succincte d'une série d'exposés que Monsieur A. Grothendieck a bien voulu venir faire à Alger au cours du mois de Novembre 1965. Il a pour but de familiariser un débutant avec les éléments du langage fonctoriel, langage qui sera utilisé par la suite dans les divers séminaires : Algèbre Homologique dans les catégories abéliennes, Fondement de la  $K$ -théorie...

Les propositions non démontrées sont de deux types : des sorites dont la démonstration tiendra lieu d'exercices, des propositions moins évidentes (signalés par une astérisque) dont on trouvera les démonstrations dans les ouvrages de références.

## 0. Cadre logique

Lorsque l'on définit une catégorie, il y a des inconvénients à supposer que les forment une classe, au sens de la théorie des ensembles de Gödel-Bernays. En effet, si l'on sait définir les applications d'une classe dans une autre, ces applications ne forment cependant pas elles-mêmes une classe. En particulier on ne saurait parler de la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre. Aussi se placera-on dans le cadre de la théorie des ensembles de Bourbaki pour définir les *Univers*.

**Univers :**



On appelle *univers* un ensemble  $\mathfrak{U}$  vérifiant les axiomes suivants :

- (U<sub>1</sub>) Si  $Y$  appartient à  $X$  et si  $X$  appartient à  $\mathfrak{U}$ , alors  $Y$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .
- (U<sub>2</sub>) Si  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $\mathfrak{U}$  alors  $\{X, Y\}$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .
- (U<sub>3</sub>) Si  $X$  est un ensemble appartenant à  $\mathfrak{U}$ , l'ensemble  $\mathfrak{P}(X)$  des parties de  $X$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .
- (U<sub>4</sub>) Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensembles appartenant à  $\mathfrak{U}$ , et si  $I$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ , alors  $\bigcup_{i \in I} X_i$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .

On déduit de ces axiomes les propositions suivantes :

- (1) Si  $X$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ ,  $\{X\}$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .
- (2)  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $\mathfrak{U}$  si et seulement si le couple<sup>1</sup>  $(X, Y)$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .
- (3) L'ensemble vide est un élément de  $\mathfrak{U}$  (puisque c'est un élément de  $\mathfrak{P}(X)$  pour tout ensemble  $X$  de l'univers  $\mathfrak{U}$ ).
- (4) Si  $Y$  est contenu dans  $X$  et si  $X$  appartient à  $\mathfrak{U}$  alors  $Y$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .
- (5) Si  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensembles de  $\mathfrak{U}$  et si  $I$  appartient à  $\mathfrak{U}$ , alors  $\prod_{i \in I} X_i$  appartient à  $\mathfrak{U}$ .
- (6) Si  $X$  est un ensemble appartenant à  $\mathfrak{U}$ ,  $\text{Card}(X) < \text{Card}(\mathfrak{U})$ .
- (7) L'univers  $\mathfrak{U}$  n'est pas un élément de  $\mathfrak{U}$ . En effet si  $\mathfrak{U}$  appartient à  $\mathfrak{U}$ , alors  $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$  appartient à  $\mathfrak{U}$ . Soit  $E$  appartenant à  $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$  (donc  $E$  appartient à  $\mathfrak{U}$ ) défini ainsi:  

$$E = \{X \in \mathfrak{U} \mid X \notin X\}$$

On aurait alors :  $E$  appartient à  $E$  si et seulement si  $E$  n'appartient pas à  $E$  !

- (8) L'intersection d'une famille quelconque d'univers est un univers. En particulier si  $E$  est un ensemble et s'il existe un univers contenant  $E$ , alors il existe un plus petit univers contenant  $E$  qu'on appelle l'univers engendré par  $E$ .

---

<sup>1</sup>On rappelle que le couple  $(X, Y)$  est l'ensemble  $\{X, \{X, Y\}\}$

Si  $E_0$  est un ensemble quelconque, on se propose de chercher s'il existe un plus petit univers  $\mathfrak{U}$  contenant  $E_0$ . Il apparaît naturel de plonger  $E_0$  dans un ensemble  $E_1$  par le procédé suivant :

Soit  $G_0$  l'ensemble ainsi défini :  $X \in G_0 \iff (\exists Y)(Y \in E_0 \text{ et } X \in Y)$  et  $F_1 = E_0 \cup G_0$

Soit  $G_1 : X \in G_1 \iff (\exists Y)(\exists Z)(Y \in F_1, Z \in F_1 \text{ et } X = \{Y, Z\})$  et  $F_2 = F_1 \cup G_1$

Soit  $G_2 : X \in G_2 \iff (\exists Y)(Y \in F_2 \text{ et } X = \mathfrak{P}(Y))$  et  $F_3 = F_2 \cup G_2$

Soit  $G_3 : X \in G \iff (\exists I)(\exists (X_i)_{i \in I})(I \in F_3, \forall i \in I, X_i \in F_3 \text{ et } X = \bigcup_{i \in I} X_i)$  et  $F_4 = F_3 \cup G_3$ .

On pose alors  $E_1 = F_4 \cup \{E_0\}$

En itérant cette opération on forme une suite transfinie d'ensembles :

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_\alpha \subset E_{\alpha+1} \subset \dots$$

Pour qu'il existe un plus petit univers contenant  $E_0$ , il faut et il suffit que cette suite devienne stationnaire 'partir d'un certain rang (c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha$  tel que  $E_{\alpha+1} = E_\alpha$ )  $E_\alpha$  sera précisément l'univers  $\mathfrak{U}$  recherché.

En particulier si l'on prend  $E_0 = \emptyset$ , on montre que  $\mathfrak{U} = E_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ . Lorsqu'on part d'un ensemble  $E_0$  infini, on ne peut prouver l'existence d'un univers  $\mathfrak{U}$  contenant  $E_0$ . Il convient donc d'ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome suivant :

**(a<sub>1</sub>) Axiome des univers :**

Pour tout ensemble  $X$ , il existe un univers  $\mathfrak{U}$ , tel que  $X$  soit élément de  $\mathfrak{U}$ .

De plus comme on ne souhaite pas sortir d'un univers  $\mathfrak{U}$  par l'usage du symbole  $\tau$  de Hilbert on introduit l'axiome supplémentaire :

**(a<sub>2</sub>)** Si  $R$  est une relation,  $x$  une lettre figurant dans  $R$ , et s'il existe un élément  $X$  d'un univers  $\mathfrak{U}$  tel que  $(X|x)R$  soit vrai alors l'objet  $\tau_x(R(x))$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ .

# I. Généralités sur les catégories

## 1. Type de diagramme

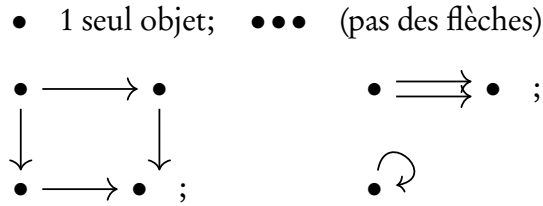
### 1.1 Définition

Un *type de diagramme*  $D$  est la donnée d'un quadruple  $D = (\text{Fl}, \text{Ob}, s, b)$  où :  
 $\text{Fl}$  et  $\text{Ob}$  sont des ensembles respectivement appelés ensemble des *flèches* (ou des morphismes...), ensemble des *objets* (ou des sommets)  
 $s$  et  $b$  sont des applications de  $\text{Fl}$  dans  $\text{Ob}$  respectivement appelés *source*, *but*.

- Un type de diagrammes sera souvent noté :

$$\begin{array}{c} \text{Fl} \\ \downarrow s \quad \downarrow b \\ \text{Ob} \end{array}$$

- *Exemples* : On peut représenter certains types de diagramme :



### 1.2 Morphisme d'un type de diagrammes dans une autre :

Si  $D = (\text{Fl}_D, \text{Ob}_D, s_D, b_D)$  et  $D' = (\text{Fl}_{D'}, \text{Ob}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$  sont deux types de diagramme, un *morphisme*  $F$  de  $D$  dans  $D'$  est un couple d'applications  $F = (F_0, F_1) : F_0 : \text{Ob}_D \longrightarrow \text{Ob}_{D'}, F_1 : \text{Fl}_D \longrightarrow \text{Fl}_{D'}$ , tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fl}_D & \xrightarrow{F_1} & \text{Fl}_{D'} \\ s_D \downarrow & & \downarrow s_{D'} \\ \text{Ob}_D & \xrightarrow{F_0} & \text{Ob}_{D'} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Fl}_D & \xrightarrow{F_1} & \text{Fl}_{D'} \\ b_D \downarrow & & \downarrow b_{D'} \\ \text{Ob}_D & \xrightarrow{F_0} & \text{Ob}_{D'} \end{array}$$

si  $D''$  est un troisième type de diagrammes et  $F' = (F'_0, F'_1)$  un morphisme de  $D'$  dans  $D''$ , on définit le *composé* des morphismes  $F$  et  $F'$ , c'est le morphisme

$F'' = (F_0'', F_1'')$  de  $D$  dans  $D''$  ou  $F_0'' = F_0' F_0$ ,  $F_1'' = F_1' F_1$ . Le morphisme noté  $1_D = (1_{\text{Fl}_D}, 1_{\text{Ob}_D})$  de  $D$  sur  $D$  est le *morphisme identique* de  $D$ .

### 1.3 Sous-type de diagramme d'un type de diagrammes.

Soit  $D = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, s_D, b_D)$  un type de diagrammes. On dit que  $D' = (\text{Ob}_{D'}, \text{Fl}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$  est un *sous-type de diagrammes* de  $D$  si  $\text{Ob}_{D'}$  est inclus dans  $\text{Ob}_D$ ,  $\text{Fl}_{D'}$  est inclus dans  $\text{Fl}_D$  et si  $s_{D'}$  (respectivement  $b_{D'}$ ) est la restriction à  $\text{Fl}_{D'}$  de  $s_D$  (respectivement  $b_D$ ).

1.4. Si  $D = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, s_D, b_D)$  est un type de diagrammes le type de diagramme noté  $D^\circ = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, b_D, s_D)$  est appelé type de *diagrammes opposé* de  $D$ .

Un *morphisme contravariant de types de diagrammes* de  $D$  dans  $D'$  est un morphisme de type de diagramme de  $D^\circ$  dans  $D'$ .

## 2. Catégorie

Définition (2.1). — Une catégorie  $C$  est la donnée :

- (i) d'un *type de diagramme*  $(\text{Fl}, \text{Ob}, s, b)$  appelé type de diagramme sous-jacent à  $C$ , noté  $(\text{Fl}_C, \text{Ob}_C, s_C, b_C)$
- (ii) d'une *application* du produit fibré  $(\text{Fl}_C, b_C) \times_{\text{Ob}_C} (\text{Fl}_C, s_C)$  dans  $\text{Fl}_C$ , appelé loi de composition des flèches, notée  $\mu_C : (f, g) \longrightarrow g \circ f = gf$  et vérifiant les propriétés :
  - (a)  $(gf)h = g(fh)$  pour tous les éléments  $f, g, h$  de  $\text{Fl}_C$  tels que cette écriture ait un sens.
  - (aa) pour tout objet  $X$  il existe une flèche  $1_X$  telle que  $s_C(1_X) = b_C(1_X) = X$ , appelée *flèche identique* de  $X$  vérifiant  $1_X f = f$ ,  $f 1_X = f$  pour toute flèche  $f$  telle que cette écriture ait un sens.

On remarque que pour tout objet  $X$ , la flèche  $1_X$  est unique.

**Notations.** Chaque fois que l'on écrit  $gf$ , il est entendu que la composition a un sens, c'est-à-dire que  $b(f) = s(g)$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont deux objets d'un type de diagramme  $D$  (resp. d'une catégorie  $C$ ), l'ensemble des flèches de source  $X$ , de but  $Y$  est noté  $\text{Hom}_D(X, Y)$  ou  $\text{Fl}_D(X, Y)$  (resp.  $\text{Hom}_C(X, Y)$ ...)

Une flèche de source  $X$  et de but  $Y$  est aussi notée  $f : X \longrightarrow Y$ .

## 2.2 Foncteurs.

Soient  $C$  et  $C'$  deux catégories dont  $D$  et  $D'$  sont respectivement les types de diagrammes sous-jacents. Un *foncteur* de  $C$  dans  $C'$  est un *morphisme*  $F = (F_0, F_1)$  du type de diagramme  $D$  dans le type de diagramme  $D'$ , *compatible* avec la composition des flèches, c'est-à-dire tel que  $F_1(fg) = F_1(f)F_1(g)$ .

Pour tout  $X$ ,  $F_1(1_X)$  est alors la flèche identique de  $F_0(X)$ . Si  $C''$  est une troisième catégorie de type de diagramme  $D''$ ,  $F'$  un foncteur de  $C'$  dans  $C''$ , le *foncteur composé* des foncteurs  $F$  et  $F'$ ,  $F'' = F'F$  est le composé des morphismes de type de diagramme sous-jacent 1.2. On vérifie que  $F''$  est compatible avec la composition des flèches. Pour tout catégorie  $C$ , de type de diagramme  $D$ , on définit un *foncteur identique*  $1_C = 1_D$ .

**2.3.** Soit  $C$  une catégorie de type de diagramme sous-jacent  $D$ . La *catégorie opposée* de  $C$ , notée  $C^\circ$ , est la catégorie de type de diagramme  $D^\circ$ , et dont la loi de composition des flèches  $\mu_{C^\circ}$  est définie par  $\mu_{C^\circ}(f, g) = \mu_C(g, f)$ .

On remarque que  $C^{\circ\circ} = C$ .

Un *foncteur contravariant* de  $C$  dans  $C'$  on lui associe canoniquement un foncteur  $F^\circ$  de  $C^\circ$  dans  $C'^\circ$ :

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C^\circ \\ F \downarrow & & \downarrow F^\circ \\ C' & \longrightarrow & C'^\circ \end{array}$$

On remarque que  $(FG)^\circ = F^\circ G^\circ$ ,  $1_C^\circ = 1_{C^\circ}$ ,  $F^{\circ\circ} = F$

## 2.4 Monomorphisme - Epimorphisme.

**2.4.1.** On dit qu'une flèche  $f : X \longrightarrow Y$  d'une catégorie  $C$  est un *monomorphisme* si pour tout objet  $T$  de  $C$  l'application naturelle qui à  $u : T \longrightarrow X$ , fait correspondre  $f u$  de  $\text{Hom}(T, X)$  dans  $\text{Hom}(T, Y)$  est *injective*. Une flèche

$f : X \longrightarrow Y$  d'une catégorie  $C$  est un *épimorphisme* si  $f$  est un monomorphisme en tant que flèche de  $C^\circ$  ou, ce qui est équivalent, si pour tout objet  $T$  de  $C$  l'application naturelle de  $\text{Hom}(Y, T)$  dans  $\text{Hom}(X, T)$  est *injective*.

Une flèche est un *bimorphisme* si c'est un monomorphisme et un épimorphisme.

**2.4.2.** Une flèche  $f$  de  $C$  est *inversible à gauche* (ou *rétractable*) s'il existe une flèche  $g : b(f) \longrightarrow s(f)$  telle que  $gf = 1_{s(f)}$ ;  $g$  est une *rétraction* de  $f$ .

Une flèche  $f$  de  $C$  est *inversible à droite* (ou *sectionnable*) s'il existe une flèche  $g : b(f) \longrightarrow s(f)$  telle que  $fg = 1_{b(f)}$ ;  $g$  est une *section* de  $f$ .

Une flèche rétractable et sectionnable est appelée un *isomorphisme*, il existe alors un  $g : b(f) \longrightarrow s(f)$  unique tel que  $fg = 1_{b(f)}$  et  $gf = 1_{s(f)}$ ,  $g$  est *l'inverse* de  $f$ .

**2.4.3.** Une flèche rétractable est un monomorphisme. Une flèche sectionnable est un épimorphisme. Donc un isomorphisme est un bimorphisme. Les réciproques sont *fausses*.

## 2.5 Sous-objet, objet quotient.

Soit  $X$  un objet quelconque d'une catégorie  $C$ , on définit sur l'ensemble des monomorphismes de but  $X$  une *relation de préordre*:  $i \leq i'$  si et seulement si  $ii'$  se factorise par  $i$  c'est-à-dire si et seulement si il existe un morphisme  $u$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & X \\ & \nwarrow u & \nearrow i' \\ & B' & \end{array}$$

c'est-à-dire tel que  $i' = iu$ .

On remarque que  $u$  est un monomorphisme, et est déterminé de façon unique. On considère la relation d'équivalence associée à cette relation de préordre. Dans chaque classe d'équivalence on choisit (par exemple grâce au symbole  $\tau$ ) un monomorphisme que l'on appelle *sous objet* de  $X$ . Par abus du langage on appellera aussi sous-objet de  $X$  la source d'un tel monomorphisme. On notera  $(B, i)$  un sous objet de  $X$ , ou simplement  $B$ . La relation de préordre ci-dessus induit donc une relation d'ordre sur l'ensemble des sous objets de  $X$ . Si  $B, B'$  sont deux

sous objets de  $X$ , la borné inférieure (resp. la borne supérieure) lorsqu'elle existe, est notée  $B \wedge B'$  (resp.  $B \vee B'$ ). Par exemple, dans la catégorie des ensembles, notée  $\text{Ens}$ ,  $B \wedge B' = B \cap B'$ ,  $B \vee B' = B \cup B'$ .

Dualement on définit les *objets quotients* d'un objet  $X$ , et une relation d'ordre sur leur ensemble.

## 2.6 Sous catégorie d'une catégorie.

Soit  $C$  une catégorie de type de diagramme sous-jacent  $D$ , on dit que  $C'$ , de type de diagramme  $D'$  est une *sous catégorie* si  $D'$  est un sous-type de diagramme de  $D$  et si de plus  $\mu_{C'}$  (loi de composition des flèches dans  $C'$ ) est la restriction de  $\mu_C$  au produit fibre  $(\text{Fl}_{C'}, b_{C'}) \times_{\text{Ob}_{C'}} (\text{Fl}_{C'}, s_{C'})$ .

On remarque que pour tout couple  $X, Y$  d'objets de  $C'$  on a :  $\text{Fl}_{C'}(X, Y) \subset \text{Fl}_C(X, Y)$ . Si de plus on a l'égalité on dit que  $C'$  est une *sous-catégorie pleine* de  $C$ .

## 3. Exemples de catégories

**3.1.** Soit une catégorie dont l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, alors l'ensemble des flèches se trouve naturellement muni d'une structure de monoïde unitaire. Soit  $M$  une telle catégorie,  $C$  une catégorie quelconque, un foncteur  $F = (F_0, F_1)$  de  $M$  dans  $C$  est essentiellement un homomorphisme de monoïde de  $\text{Fl}_M$  dans  $\text{Hom}(X, X)$ , où  $X$  est l'image par  $F_0$  de l'unique objet de  $M$ . On appelle *groupoïde* une catégorie dans laquelle toute flèche est inversible ; si de plus l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, l'ensemble des flèches est muni alors d'une structure de groupe.

**3.2.** Soit  $I$  un ensemble préordonné, on appelle *catégorie associée* à  $I$ , la catégorie notée  $\text{Cat}(I)$ , dont l'ensemble des objets est  $I$ , et dont l'ensemble des flèches est le graphe de la relation de préordre ; si  $(i, j)$  est une flèche  $s(i, j) = j$ ,  $b(i, j) = i$ , la composition des flèches se définit évidemment par  $(i, j)(j, k) = (i, k)$  ( $i, i$ ) est la flèche identité de  $i$ . Les propriétés (a) et (a a) se vérifient immédiatement.

Inversement, pour toute catégorie  $C$  on peut définir sur  $\text{Ob } C$  une relation de préordre, à savoir :  $X \leq Y \Leftrightarrow \text{Hom}_C(X, Y) \neq \emptyset$ . Une catégorie  $C$  est isomorphe à une catégorie  $\text{Cat}(I)$  si et seulement si toute flèche de  $\text{Fl } C$  est un monomor-

phisme. Il suffit de prendre  $I = \text{Ob } C$  muni de la relation de préordre précédente.

### 3.3 Catégories de types de diagramme, catégories de catégories

Dans cette section, on choisit une fois pour toute un univers  $\mathfrak{U}$ , et tous les ensembles utilisés sont des éléments de  $\mathfrak{U}$ .

Soit l'ensemble des "types de diagramme dans  $\mathfrak{U}$ ", notée  $\text{Diag}_{\mathfrak{U}}$ , (resp. l'ensemble des "catégories dans  $\mathfrak{U}$ ", noté  $\text{Cat}_{\mathfrak{U}}$ ) c'est-à-dire des types de diagramme  $D$  (resp. des catégories  $C$ ) tels que les ensembles  $\text{Ob}_D, \text{Fl}_D$  (resp.  $\text{Ob}_C, \text{Fl}_C$ ) soient des *éléments de  $\mathfrak{U}$* . En considérant 1.2 (resp. 2.2) on définit la *catégorie des types de diagramme* dans  $\mathfrak{U}$  notée  $\underline{\text{Diag}}_{\mathfrak{U}}$  (resp. la *catégorie des catégories dans  $\mathfrak{U}$*  notée  $\underline{\text{Cat}}_{\mathfrak{U}}$ ).

Explicitons par exemple  $\underline{\text{Cat}}_{\mathfrak{U}}$ , le type de diagramme est le suivant : l'ensemble des objets est  $\text{Cat}_{\mathfrak{U}}$ , l'ensemble des flèches est l'ensemble des triples  $(F, C, C')$  où  $F$  est un foncteur de la catégorie  $C$  dans la catégorie  $C'$ ,  $s(F, C, C') = C$ ,  $b(F, C, C') = C'$ . La loi de composition des flèches est la composition des foncteurs définie en 2.2. On vérifie les propriétés (a) et (aa).

### 3.4 Catégorie des morphismes de type de diagramme d'un type de diagramme dans une catégorie, catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre

Soient  $D = (\text{Ob}_D, \text{Fl}_D, s_D, b_D)$  un type de diagramme et  $C'$  une catégorie de type de diagramme sous-jacent  $(\text{Ob}_{C'}, \text{Fl}_{C'}, s_{C'}, b_{C'})$ . Un morphisme de type de diagramme  $D$  dans  $C'$  est aussi appelé *diagramme de type  $D$  dans  $C'$* .

On considère l'ensemble des morphismes de type de diagramme de  $D$  dans  $C'$  noté  $\text{Diag}(D, C')$ . Soient  $F = (F_0, F_1)$ ,  $G = (G_0, G_1)$  deux morphismes de type de diagramme de  $D$  dans  $C'$ . Une *flèche de source  $F$  de but  $G$*  est une application  $u$  de  $\text{Ob}_D$  dans  $\text{Fl}_{C'}$  ( $u(x)$  sera souvent noté  $u_x$ ) telle que pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$  de  $D$ , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_0(X) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_0(Y) \\ u(X) \downarrow & & \downarrow u(Y) \\ G_0(X) & \xrightarrow{G_1(f)} & G_0(Y) \end{array}$$

Si  $u$  et  $v$  sont deux flèches,  $u : F \longrightarrow G$ ,  $v : G \longrightarrow H$ , la *flèche composée*  $vu : F \longrightarrow H$



$H$  est définie  $vu(X) = v(X)u(X)$  pour tout  $X$  de  $\text{Ob}_D$ .

La flèche identique de  $F$  notée  $1_F$  est définie par  $1_F(X) = 1_{F_0}(X)$  pour tout  $X$  de  $\text{Ob}_D$ . On vérifie les propriétés (a) et (a a). On a alors défini la *catégorie des morphismes de type de diagramme de  $D$  dans  $C'$* , encore appelée catégorie des *diagrammes de type  $D$  dans  $C'$*  et notée  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$ .

Si  $C$  et  $C'$  sont deux catégories de types de diagrammes sous-jacents  $D$  et  $D'$ , on définit également la *catégorie des foncteurs de  $C$  dans  $C'$*  notée  $\underline{\text{Hom}}(C, C')$ .

$C'$  est par définition une *sous-catégorie pleine* de  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$ .

### 3.5 Exemples de catégories de diagramme de type donné dans une catégorie

**3.5.1.** Si  $D$  est tel que  $\text{Ob}_D$  se réduit à un seul élément et si l'ensemble des flèches est vide, alors  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$  est canoniquement isomorphe à la catégorie  $C'$ .

**3.5.2.** Si  $D$  est du type suivant :  $\bullet \longrightarrow \bullet$ , alors la catégorie  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$  est appelée catégorie des flèches de  $C'$ , notée  $\underline{\text{Fl}}(C')$ .

Les objets s'identifient aux éléments de  $\text{Fl } C'$  et un morphisme de la flèche  $f : X \longrightarrow Y$ , dans la flèche  $f' : X' \longrightarrow Y'$  est défini par un couple de flèche  $(u, v)$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ X' & \longrightarrow & Y'. \end{array}$$

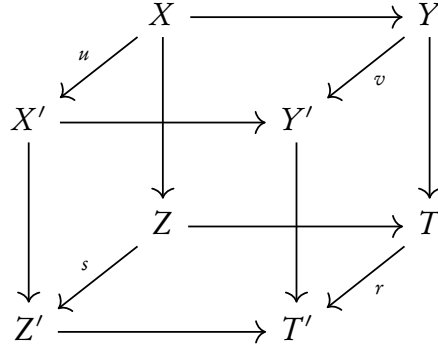
**3.5.3.** Si  $D$  est du type suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

les objets de  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$  sont essentiellement les “carrés” (non nécessairement commutatifs) de  $C'$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & T, \end{array}$$

et un morphisme d'un tel carré dans un autre est défini par un quadruple de flèches  $(u, v, r, s)$  tel que tous les côtés latéraux de “cube” suivant, où interviennent ces flèches, soient commutatifs :



### 3.6 Diagramme avec relations de commutation

**3.6.1.** Soit  $D$  un type de diagramme, on appelle *chemin* une suite finie  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de flèches de  $D$  formellement composable, c'est-à-dire telle que  $s(f_{i+1}) = b(f_i)$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . On considère le type de diagramme dont les objets sont ceux de  $D$ , dont les flèches sont les chemins  $c = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$  avec  $s(c) = s(f_1)$  et  $b(c) = b(f_n)$ . Sur ce type de diagramme on définit la composition des chemins, elle consiste à mettre “bout à bout” deux chemins s'ils sont formellement composables. On obtient ainsi une catégorie notée  $\hat{D}$ , appelée *catégorie libre engendré par le type de diagramme  $D$* .

Soit  $C$  une catégorie, pour tout morphisme de type de diagramme  $\varphi : D \longrightarrow C$ , il existe un foncteur et un seul  $\hat{\varphi} : \hat{D} \longrightarrow C$  tel que pour tout chemin  $c = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\hat{\varphi}_1(c) = \varphi_1(f_1) \dots \varphi_1(f_{n-1})$ .

**3.6.2.** On appelle *donnée de commutation* sur  $D$ , la donnée d'un ensemble  $R$  de couples de flèches de  $\hat{D}$ ,  $(c, c')$  tels que  $s(c) = s(c')$  et  $b(c) = b(c')$ .

Soit  $C$  une catégorie, on dit qu'un diagramme  $\varphi$  de type  $D$  dans  $C$  vérifie les *relations de commutation*  $R$  si pour tout couple  $(c, c')$  de  $R$ ,  $\hat{\varphi}_1(c) = \hat{\varphi}_1(c')$ . On note  $\underline{\text{Diag}}_R(D, C)$  la sous-catégorie pleine de  $\underline{\text{Diag}}(D, C)$  formée par les diagrammes de type  $D$  vérifiant  $R$ .

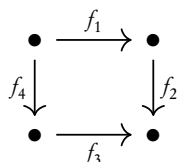
**3.6.3.** Dans  $\text{Fl } \hat{D}$  on définit la relation d'équivalence  $R$  suivante :

$R(c, c')$  si et seulement si  $s(c) = s(c')$  et  $b(c) = b(c')$ , la classe de  $c$  sera notée  $\bar{c}$ .

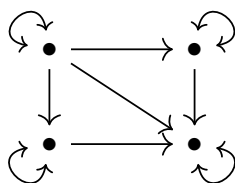
Soit  $\tilde{D}$  la catégorie telle que  $\text{Ob}(\tilde{D}) = \text{Ob}(\hat{D}) = \text{Ob}(D)$  et  $\text{Fl}(\tilde{D}) = \text{Fl}(D)/R$  avec  $s(\bar{c}) = s(c)$  et  $b(\bar{c}) = b(c)$ . La catégorie  $\underline{\text{Hom}}(\tilde{D}, C)$  est appelée catégorie des diagrammes de *type D commutatifs* dans  $C$  et notée  $(D, C)$ .

### Exemple

Soit  $D$  le type de diagramme représenté par



Alors  $\text{Ob} \hat{D} = \text{Ob}(D)$ ,  $\text{Fl} \hat{D} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, (f_2, f_1), (f_3, f_4)\}$  chemin vide, dans  $\tilde{D}$  on identifie  $(f_2, f_1)$  et  $(f_3, f_4)$  on peut donc représenter  $\tilde{D}$  par



## 4. Produit de catégories, somme de catégories

### 4.1 Produit de catégories

Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de catégories,  $I$  un ensemble.

**4.1.1.** La catégorie produit des catégories  $C_i$ , notée  $C = \prod_{i \in I} C_i$  est ainsi définie:

- $\text{Ob } C = \prod_{i \in I} \text{Ob } C_i$ ,  $\text{Fl } C = \prod_{i \in I} \text{Fl } C_i$ ,  $s = \prod_{i \in I} s_i$ ,  $b = \prod_{i \in I} b_i$ .
- Si  $f = (f_i)_{i \in I}$  et  $g = (g_i)_{i \in I}$  sont deux flèches, la flèche composée  $gf$  est la flèche  $(g_i f_i)_{i \in I}$ ; la flèche identique sur  $\prod_{i \in I}$  est la flèche  $\prod_{i \in I} 1_{X_i}$ .

On définit une famille de foncteurs notée  $(\text{pr}_i)_{i \in I}$ ,  $\text{pr}_i : \prod_{i \in I} C_i \longrightarrow C_i$  est tel que  $\text{pr}_i((X_i)_{i \in I}) = X_i$ ,  $\text{pr}_i((f_i)_{i \in I}) = f_i$ .

**Proposition 4.1.2.** — Pour tout catégorie  $T$ , l'application de  $\text{Hom}(T, \prod_{i \in I} C_i)$  dans  $\prod_{i \in I} \text{Hom}(T, C_i)$  qui à  $u$  fait correspondre  $(\text{pr}_i \circ a)_{i \in I}$  est bijective.

## 4.2 Multifoncteurs

**4.2.1.** On considère une famille  $(C_i)_{i \in I}$  de catégories, deux sous-ensembles  $J$  et  $K$  de  $I$  tels que  $I = J \cup K$ ,  $J \cap K \neq \emptyset$ . Soit  $C$  la catégorie produit de  $\prod_{i \in I} C_i$  et de  $\prod_{i \in I} C_i^\circ$ . Un *multifoncteur* de  $\prod_{i \in I} C_i$  dans une catégorie  $C'$ , *covariant* par rapport aux indices  $i$  de  $J$  et *contravariant* par rapport aux indices  $i$  de  $K$  est un foncteur de  $C$  dans  $C'$ .

**4.2.2. Exemples.** Si  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  sont trois catégories on considère le *produit* de catégories  $\underline{\text{Hom}}(C, C') \prod \underline{\text{Hom}}(C', C'')$  l'application de  $\underline{\text{Hom}}(C, C') \prod \underline{\text{Hom}}(C', C'')$  dans  $\underline{\text{Hom}}(C, C'')$  qui à  $(F, G)$  fait correspondre  $GF$  permet de définir un *bifoncteur*, deux fois covariant de  $\underline{\text{Hom}}(C, C') \prod \underline{\text{Hom}}(C', C'')$  dans  $\underline{\text{Hom}}(C, C'')$ . Soient  $F$  et  $F'$  deux foncteurs de  $C$  dans  $C'$ ,  $G$  et  $G'$  deux foncteurs de  $C'$  dans  $C''$ ,  $u : F \longrightarrow F'$  et  $v : G \longrightarrow G'$ , au couple  $(u, v)$  de flèche on fait correspondre la flèche notée  $v^*u : GF \longrightarrow G'F'$  définie pour tout objet  $X$  de  $C$  par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G_\circ F_\circ(X) & \xrightarrow{G_1(u(X))} & G_\circ F'_\circ(X) \\ v(F_\circ(X)) \downarrow & \searrow v^*u(X) & \downarrow v(F'_\circ(X)) \\ G'_\circ F_\circ(X) & \xrightarrow{G'_1(u(X))} & G'_\circ F'_\circ(X) \end{array}$$

On vérifiera que  $v^*u$  est bien un morphisme *fonctoriel*, c'est-à-dire que pour toute  $f : X \longrightarrow Y$  de  $C$  le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G_\circ F_\circ(X) & \xrightarrow{v^*u(X)} & G'_\circ F'_\circ(X) \\ G_1 F_1(f) \downarrow & & \downarrow G'_1 F'_1(f) \\ G_\circ F_\circ(Y) & \xrightarrow{v^*u(Y)} & G'_\circ F'_\circ(Y) \end{array}$$

et que l'application qui à  $(u, v)$  fait correspondre  $v^*u$  respecte la composition des flèches.

Si l'on fixe  $F$  appartenant à  $\underline{\text{Hom}}(C, C')$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}(C', C'')$ ) on obtient un foncteur de  $\underline{\text{Hom}}(C', C'')$  dans  $\underline{\text{Hom}}(C, C'')$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}(C, C')$  dans  $\underline{\text{Hom}}(C, C'')$ ) noté  $F_*$  (resp.  $F^*$ ).

**4.2.3.** Si  $C'$  et  $C''$  sont deux catégories, définissons un bifoncteur  $\varphi$  de  $C' \prod \underline{\text{Hom}}(C', C'')$  dans  $C''$ .

A l'objet  $(X, G)$  on fait correspondre  $\varphi_o(X, G) = G_o(X)$ .

A la flèche  $(f, v)$ , où  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $v : G \longrightarrow G'$  on ait correspondre  $\varphi_1(f, v)$  définie par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G_o(X) & \xrightarrow{G_1(f)} & G_o(Y) \\ v(X) \downarrow & \searrow \varphi_1(f, v) & \downarrow v(Y) \\ G'_o(X) & \xrightarrow{G'_1(f)} & G'_o(Y) \end{array}$$

Si  $A$  est une catégorie ponctuelle ( $\text{Ob } A = \{\emptyset\}$ ,  $\text{Fl}_A = 1_{\{\emptyset\}}$ ), pour toute catégorie  $C$ ,  $\underline{\text{Hom}}(A, C)$  est canoniquement isomorphe à  $C$ , et le bifoncteur ci-dessus peut s'interpréter comme un foncteur de  $\underline{\text{Hom}}(A, C') \prod \underline{\text{Hom}}(C', C'')$  dans  $\underline{\text{Hom}}(A, C'')$ ; ce n'est autre que celui définie en 4.2.2.

### 4.3 Somme de catégories

**Rappel.** Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles,  $S = \coprod_{i \in I} X_i$  sa somme. Pour tout  $x$  élément de  $S$  on sait qu'il existe un unique indice noté  $i(x)$  et un élément  $x_{i(x)}$  dans  $X_{i(x)}$  tels que  $x = (x_{i(x)}, i(x))$ .

**4.3.1.** Soit  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de catégories,  $I$  un ensemble. La catégorie *somme de la famille*  $(C_i)_{i \in I}$  notée  $S = \coprod C_i$  est définie par le *type de diagramme* suivant :  $\text{Ob } S = \coprod_{i \in I} C_i$ ,  $\text{Fl } S = \coprod_{i \in I} \text{Fl } C_i$ ,  $s = \coprod_{i \in I} s_i$ ,  $b = \coprod_{i \in I} b_i$ , et la *composition des flèches* suivante : deux flèches  $f = (f_i(f), i(f))$  et  $g = (g_i(g), i(g))$  sont composables si et seulement si  $b(f) = s(g)$  si et seulement si  $i(f) = i(g) = i$  et  $b_i(f_i) = s_i(g_i)$ , on a alors  $gf = (g_i f_i, i)$ , l'identité pour un objet  $X$  est la flèche  $1_X = (1_{X_{i(x)}, i(x)})$ .

On définit une *famille de foncteurs* notée  $(\text{inj}_i)_{i \in I}$ ,  $\text{inj}_i : C_i \longrightarrow S$ , tel que  $\text{inj}_i(X_i) = (X_i, i)$ ,  $\text{inj}_i(f_i) = (f_i, i)$ .

**Proposition 4.3.2.** — *Pour toute catégorie  $T$ , l'application de  $\text{Hom}(\coprod_{i \in I} C_i, T)$  dans  $\prod_{i \in I} \text{Hom}(C_i, T)$ , qui à  $u$  fait correspondre  $(u \circ \text{inj}_i)_{i \in I}$ , est bijective.*

**4.3.3.** Soit  $\prod_{i \in I} C_i$  (resp.  $\coprod_{i \in I} C_i$ ) la catégorie produit (resp. somme) d'une famille  $(C_i)_{i \in I}$  de catégories, alors pour tout catégorie  $T$ , la *bijection* naturelle de  $\text{Hom}(T, \prod_{i \in I} C_i)$  dans  $\prod_{i \in I} \text{Hom}(T, C_i)$  (resp.  $\text{Hom}(\coprod_{i \in I} C_i, T)$  dans  $\prod_{i \in I} \text{Hom}(C_i, T)$ ) est un *isomorphisme* de  $\underline{\text{Hom}}(T, \prod_{i \in I} C_i)$  dans  $\prod_{i \in I} \underline{\text{Hom}}(T, C_i)$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}(\coprod_{i \in I} C_i, T)$  dans  $\prod_{i \in I} \underline{\text{Hom}}(C_i, T)$ ).

## 5. Équivalence de catégories

**5.1 Définition.** Soit  $F = (F_0, F_1)$  un foncteur d'une catégorie  $C$  dans une catégorie  $C'$ .

**5.1.1.** Le foncteur est dit *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ ,  $F_1|_{\text{Hom}(X, Y)}$ , restriction de  $F_1$  à  $\text{Hom}(X, Y)$ , est *injectif* (resp. *bijectif*).

Si  $F_1$  est injectif (resp. bijectif) alors  $F$  est fidèle (resp. pleinement fidèle). Les réciproques sont fausses.

**5.1.2.** Le foncteur  $F$  est dit *essentiellement surjectif* si pour tout objet  $X'$  de  $C'$ , il existe un objet  $X$  de  $C$  tel que  $F_0(X)$  soit isomorphe à  $X'$ .

**5.1.3.** Un foncteur  $F$  est appelé une *équivalence de catégories* s'il est *pleinement fidèle* et *essentiellement surjectif*.

**5.1.4.** Ces propriétés se conservent par la composition de foncteurs.

**5.1.5.** On dit que la catégorie  $C$  est *équivalente* à la catégorie  $C'$ , s'il existe un foncteur  $F : C \longrightarrow C'$  qui soit une équivalence de catégories ; on définit ainsi une relation d'équivalence sur  $\text{Cat}_{\mathbb{U}}$ . En effet la relation est évidemment réflexive, elle est transitive **5.1.4**, elle est symétrique du fait de la proposition suivante :

**Proposition 5.1.6.** — *Le foncteur  $F$  de  $C$  dans  $C'$  est une équivalence de catégories si et seulement si il existe un foncteur  $G$  de  $C'$  dans  $C$ , tel que  $GF$  soit isomorphe à  $1_C$  et  $FG$  soit isomorphe à  $1_{C'}$ . Un tel foncteur  $G$  est appelé un quasi-inverse de  $F$ .*

Alors que l'inverse d'un morphisme lorsqu'il existe est unique, un foncteur peut avoir plusieurs quasi-inverses qui sont isomorphes entre eux.

**Démonstration.** Supposons que  $F$  soit une équivalence de catégories. Puisque  $F$  est *essentiellement surjectif*, pour tout objet  $X'$  de  $C'$ , l'ensemble des objets de  $C$  tels que l'image par  $F_0$  soit isomorphe à  $X'$  est non vide. On en choisit un (grâce au symbole  $\tau$  !)  $X$  et l'on note  $u_x$ , un isomorphisme de  $F_0(X)$  sur  $X'$ .

On pose alors  $G_0(X') = X$ .

Pour toute flèche  $f' : X' \longrightarrow Y'$ , on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} F_0(X) & \xrightarrow{u_x} & X' \\ & & \downarrow f' \\ F_0(Y) & \xrightarrow{u_y} & Y' \end{array}$$

Il existe une unique flèche de  $F_0(X)$  dans  $F_0(Y)$  rendant le diagramme commutatif  $(u_y^{-1}f'u_x)$ . Puisque  $F$  est *pleinement fidèle*, cette flèche est l'image par  $F_1$  d'une unique flèche  $f : X \longrightarrow Y$ .

On pose  $G_1(f') = f$ .

Par construction de  $G = (G_0, G_1)$  on a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\approx} & G_0 F_0(X) \\ \downarrow & & \downarrow G_1 F_1(f) \\ Y & \xrightarrow{\approx} & G_0 F_0(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\approx} & F_0 G_0(X') \\ \downarrow & & \downarrow F_0 G_0(f') \\ Y' & \xrightarrow{\approx} & F_0 G_0(Y') \end{array}$$

ce qui montre que  $GF$  est isomorphe à  $1_C$ , et  $FG$  isomorphe à  $1_{C'}$ .

Réciproquement supposons que  $F$  possède un quasi-inverse  $G$  ; alors  $F$  est évidemment *essentiellement surjectif*, d'autre part  $F_1|_{\text{Hom}(X,Y)}$  est une *bijection* de  $\text{Hom}(X,Y)$  sur  $\text{Hom}(F_0(X),F_0(Y))$  pour tout couple d'objets  $(X,Y)$ . En effet  $F_1|_{\text{Hom}(X,Y)}$  est une *surjection* sur  $\text{Hom}(F_0(X),F_0(Y))$ . C'est aussi une *injection*, soient deux flèches,  $f$  et  $g$  de  $X$  dans  $Y$  telles que  $F_1(f) = F_1(g)$ , alors  $G_1 F_1(f) = G_1 F_1(g)$ , comme il y a une seule flèche de  $X$  dans  $Y$  rendant le diagramme ci-dessus commutatif, on a  $f = g$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\approx} & G_0 F_0(X) \\ f \downarrow \downarrow g & & \downarrow G_0 F_0(f) = G_0 F_0(g) \\ Y & \xrightarrow{\approx} & G_0 F_0(Y) \end{array}$$

## 5.2

**Proposition 5.2.1.** — *Si  $F$  est un foncteur d'une catégorie  $C$  dans une catégorie  $C'$ , les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a)  *$F$  est pleinement fidèle ;*

(b) Il existe une sous-catégorie pleine  $C'_1$  de  $C'$  telle que  $F$  se factorise par  $C'_1$  au moyen d'un foncteur qui est une équivalence de catégories.

Si  $F$  est pleinement fidèle, il suffit de prendre  $C'_1$  l'image par  $F$  de  $C$ , ou l'image essentielle de  $F$  par  $C$  (c'est-à-dire l'ensemble des objets de  $C'$  isomorphes à  $F(X)$   $X$  variant dans  $\text{Ob}_C$ ).

Réciproquement si  $F$  se factorise par  $C'_1$  sous-catégorie pleine de  $C'$ , le foncteur  $\text{inj} : C'_1 \longrightarrow C$  est pleinement fidèle, et la composition avec une équivalence de catégorie donne un foncteur pleinement fidèle.

**Proposition 5.2.2.** — Soit  $F$  un foncteur de  $C$  dans  $C'$ ,  $T$  une catégorie,  $F_*$  le foncteur de  $\underline{\text{Hom}}(C', T)$  dans  $\underline{\text{Hom}}(C, T)$  4.2.1 on a les propriétés suivantes :

- (i) Si  $F$  est fidèle alors  $F_*$  est fidèle ;
- (ii) Si  $F$  est pleinement fidèle alors  $F_*$  est pleinement fidèle ;
- (iii) Si  $F$  est une équivalence de catégories alors  $F_*$  est une équivalence de catégories.

Si l'on considère  $F^*$  le foncteur  $\underline{\text{Hom}}(T, C)$  dans  $\underline{\text{Hom}}(T, C')$ , seule la propriété (iii) est vraie.

**Proposition 5.2.3.** — Soit  $F$  un foncteur de  $C$  dans  $C'$  pleinement fidèle ; alors une flèche  $f$  de  $C$  est inversible si et seulement si  $F_1(f)$  est inversible.

**Proposition 5.2.4.** — Soit dans  $\text{Cat}_{\mathbb{U}}$  une famille de foncteurs  $(F_i)_{i \in I}$ ,  $I$  élément de  $\mathbb{U}$ ,  $F_i : C_i \longrightarrow C'_i$ , et soit  $\prod_{i \in I} F_i : \prod_{i \in I} C_i \longrightarrow \prod_{i \in I} C'_i$ , on a les propriétés suivantes :

- (i) Si pour tout  $i$  élément de  $I$ ,  $F_i$  est fidèle alors  $\prod_{i \in I} F_i$  est fidèle.
- (ii) Si pour tout  $i$  élément de  $I$ ,  $F_i$  est pleinement fidèle alors  $\prod_{i \in I} F_i$  est pleinement fidèle.
- (iii) Si pour tout  $i$  élément de  $I$ ,  $F_i$  est une équivalence de catégories alors  $\prod_{i \in I} F_i$  est une équivalence de catégories.



On énoncera la proposition duale.

### 5.3 Exemple

Soient  $X$  un espace topologique, connexe par arc, localement simplement connexe par arc,  $x$  un élément de  $X$ . On note  $\text{Rev}(X)$ , la catégorie des revêtements de  $X$  éléments d'un univers  $\mathcal{U}$  donné,  $\Pi = \Pi_1(X, x)$ ,  $\text{Ens}(\Pi)$  la catégorie des ensembles de  $\mathcal{U}$  sur lesquels  $\Pi$  opère.

Proposition. — *Les catégories  $\text{Rev}(X)$  et  $\text{Ens}(\Pi)$  sont équivalentes.*

Au revêtement  $E, X, p$  on fait correspondre la fibre  $F = p^{-1}(x)$ ,  $\Pi$  opère sur  $F$  ; si  $E', X, p'$  est un revêtement et  $f : E \rightarrow E'$  un morphisme de revêtement, à  $f$  on fait correspondre  $f|_{p^{-1}(x)} : F \rightarrow F'$  qui est compatible avec  $\Pi$ . On a ainsi défini un foncteur  $\alpha : \text{Rev}(X) \rightarrow \text{Ens}(\Pi)$ .

Construisons un foncteur quasi-inverse. Soit  $F$  un ensemble sur lequel  $\Pi$  opère. La revêtement universel  $\tilde{X}$  de  $X$  est un fibré principal de groupe  $\Pi$ , on considère le fibré associé  $\tilde{X} *_\Pi F$  de fibre  $F$ , c'est un revêtement de  $X$ , on définit ainsi un foncteur  $\beta : \text{Ens}(\Pi) \rightarrow \text{Rev}(X)$ . On vérifiera que  $\beta\alpha \simeq 1_{\text{Rev}(X)}$  et  $\alpha\beta \simeq 1_{\text{Ens}(\Pi)}$ .

## 6. Limite projective, limite inductive

6.1. Soit  $I$  un type de diagramme,  $C$  une catégorie et  $\varphi$  un morphisme de type de diagramme de  $I$  dans  $C$  (c'est-à-dire un diagramme de type  $I$  dans  $C$ ).

6.1.1. Une famille  $(u_i)_{i \in \text{Ob } I}$  de morphismes de  $C$ , de source  $X$ ,  $u_i : X \rightarrow \varphi_0(i)$  est dite *admissible pour  $\varphi$* , si pour toute flèche  $f : i \rightarrow j$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_0(i) & \\ u_i \nearrow & \downarrow \varphi_1(f) & \\ X & & \\ u_j \searrow & \downarrow & \\ & \varphi_0(j) & \end{array}$$

Une telle famille est notée  $(X, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$ .

6.1.2. On appelle *limite projective* du diagramme  $\varphi$ , une famille admissible pour  $\varphi : (X, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$ , qui est “universelle” dans le sens suivant : pour toute

famille admissible pour  $\varphi : (Y, (v_i)_{i \in \text{Ob } I})$ , il existe un unique morphisme  $u : Y \longrightarrow X$  tel que pour tout élément  $i$  de  $\text{Ob } I$ , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_0(i) & \\ v_i \nearrow & & \nwarrow u_i \\ Y & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

Deux limites projectives du diagramme  $\varphi$  sont canoniquement isomorphes. Si l'ensemble des limites projectives d'un diagramme  $\varphi$  n'est pas vide, on en choisit une que l'on note  $\varprojlim_I \varphi$  (ou si aucune confusion n'est possible  $\varprojlim \varphi$ ).

Si  $\varprojlim_I \varphi = (X, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$ , par abus de langage on dira que  $X$  est la limite projective de  $\varphi$ , il est alors sous entendu qu'on s'est donné avec  $X$  la famille  $(u_i)_{i \in \text{Ob } I}$  qu'on n'explicite pas sans doute parce qu'elle est évidente.

**6.1.3.** Si  $F$  est un foncteur de la catégorie  $C$  de type de diagramme sous-jacent  $D$ , dans la catégorie  $C'$ , la limite projective du foncteur  $F$  est la limite projective du morphisme de type de diagramme sous-jacent à  $F$  (c'est-à-dire du morphisme  $F : D \longrightarrow C'$ ).

#### 6.1.4 Exemples.

Si  $C$  est la catégorie  $\text{Ens}_{\mathcal{U}}$  des ensembles d'un univers  $\mathcal{U}$ ,  $I$  un type de diagramme,  $\varphi : I \longrightarrow \text{Ens}_{\mathcal{U}}$ ,  $\varprojlim_I \varphi$  est un sous ensemble du produit  $\prod_{i \in \text{Ob } I} \varphi_0(i)$  défini ainsi :

$$(X_i)_{i \in \text{Ob } I} \in \varprojlim \varphi \Leftrightarrow (\forall f)(f \in \text{Fl } I, f : i \longrightarrow j, X_j = \varphi_1(f)X_i)$$

*En particulier :*

- a) Si  $I$  est un type de diagramme discret (c'est-à-dire tel que  $\text{Fl}_I = \emptyset$ ) on récupère pour  $\varprojlim \varphi$  le produit  $\prod_{i \in \text{Ob } I} \varphi_0(i)$
- b) Si  $I$  est la catégorie associé à un ensemble préordonné, un diagramme  $\varphi$  est essentiellement un "système projectif d'ensembles" (Bourbaki, Théorie des Ensembles) et l'on retrouve la notion classique de limite projective.

**6.2.** Soit  $C$  une catégorie,  $I$  un type de diagramme et  $\varphi$  un morphisme de  $I$  dans  $C$ . A tout objet  $Y$  de  $C$  on associe le morphisme  $\varphi^Y$  de  $I$  dans  $\text{Ens}_{\mathcal{U}}$  ainsi défini :

Si  $i$  appartient à  $\text{Ob}_I$ ,  $\varphi_0^Y(i) = \text{Hom}(Y, \varphi_0(i))$

Si  $\alpha$  appartient à  $\text{Fl}_I$ ,  $\alpha : i \longrightarrow j$ ,  $\varphi_1^Y(\alpha)$  est l'application de  $\text{Hom}(Y, \varphi_0(i))$  dans  $\text{Hom}(Y, \varphi_0(j))$  qui à  $f$  correspondre  $\varphi_1(\alpha)f$ .

**Proposition.** — *La famille admissible  $(X, (u_i)_{i \in \text{Ob}_I})$  est limite projective de  $\varphi$  si et seulement si pour tout  $Y$  l'application naturelle  $*_Y$  de  $\text{Hom}(Y, X)$  dans  $\prod_{i \in \text{Ob}_I} \text{Hom}(Y, \varphi_0(i))$  induit une bijection de  $\text{Hom}(Y, X)$  sur  $\varprojlim \varphi^Y$ .*

*La famille admissible  $(X, (u_i)_{i \in \text{Ob}_I})$  est limite projective de  $\varphi$  si et seulement si  $*_Y$  est une bijection dont l'image est l'ensemble des familles admissibles pour  $\varphi$  de source  $Y$ . Or ce sous-ensemble de  $\prod_{i \in \text{Ob}_I} (Y, \varphi(i))$  est par définition  $\varprojlim_I \varphi^Y$  6.1.4.*

### 6.3. Exemples de limites projectives dans une catégorie quelconque.

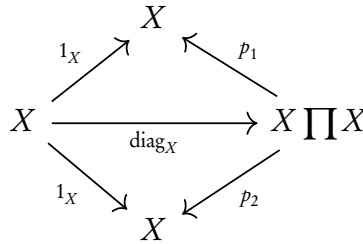
**6.3.1.** Soit  $I$  un type de diagramme *discret*, et  $\varphi$  un morphisme de  $I$  dans  $C$ . Si la limite projective de  $\varphi$  existe,  $\varprojlim \varphi = (P, (p_i)_{i \in \text{Ob}_I})$ , on dit que la famille  $(p_i)_{i \in \text{Ob}_I}$  représente  $P$  comme produit des  $X_i = \varphi(i)$ ,  $P$  est noté  $\prod_{i \in \text{Ob}_I} X_i$ .

Le produit vérifie donc la propriété suivante :

Pour tout objet  $Z$  l'application de  $\text{Hom}(Z, \prod_{i \in \text{Ob}_I} X_i)$  dans  $\prod_{i \in \text{Ob}_I} \text{Hom}(Z, X_i)$  qui à  $f$  fait correspondre  $(p_i f)_{i \in \text{Ob}_I}$  est une bijection.

La famille de morphisme  $(p_i f)_i$  est appelée quelque fois famille des *composantes* du morphisme  $f$ .

Considérons par exemple  $X \prod X$ , il existe un unique morphisme de  $X$  dans  $X \prod X$  de composantes  $1_X, 1_X$  noté  $\text{diag}_X$ .



Dans le cas particulier où  $I$  est le type de diagramme vide  $((\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)!)$  la limite projective d'un morphisme de  $I$  dans  $C$  est appelée *objet final* de la catégorie. C'est un objet  $\Omega$  de  $C$  tel que pour tout objet  $Y$  de  $C$ , il existe un morphisme et un seul de  $Y$  dans  $\Omega$ .

**6.3.2.** Si  $I$  est le type de diagramme suivant:  $\bullet \rightrightarrows \bullet$ , la limite projective d'un diagramme de type  $I$  dans  $C$ :  $X \rightrightarrows Y$  s'appelle, lorsqu'elle existe, *noyau du couple* de morphismes  $(f, g)$ . C'est la donnée d'un objet  $Z$  et d'un morphisme  $u : Z \longrightarrow X$  possédant les propriétés suivantes :

- (i)  $f u = g u$
- (ii) pour tout objet  $Z'$  et tout morphisme  $u' : Z' \longrightarrow X$  tel que  $f u' = g u'$ , il existe un morphisme unique  $v$  de  $Z'$  dans  $Z$  tel que  $u$  factorise  $u'$ .

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{u} & X & \rightrightarrows & Y \\ & \swarrow v & \nearrow u' & & \\ & Z' & & & \end{array}$$

Le morphisme  $u$  (quelque fois aussi l'objet  $Z$ ) sera noté  $\text{Ker}(f, g)$ .

**Remarque :**  $u$  est un monomorphisme.

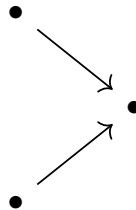
Un diagramme du type  $Z \xrightarrow{u} X \rightrightarrows Y$  est dit *exact* s'il fait de  $u$  le noyau du couple  $(f, g)$ .

Proposition. — *Le diagramme*

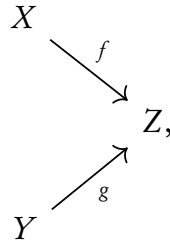
$$Z \longrightarrow X \rightrightarrows Y$$

*est exact si et seulement si pour tout objet  $M$ , le diagramme  $\text{Hom}(M, Z) \longrightarrow \text{Hom}(M, X) \rightrightarrows \text{Hom}(M, Y)$  de  $\underline{\text{Ens}}_{\mathbb{U}}$  est exact, c'est-à-dire la première flèche est injective et son image est le sous ensemble de  $\text{Hom}(M, X)$  des coïncidences de  $\alpha$  et  $\beta$ .*

**6.3.3.** Soit le type de diagramme  $I$ :

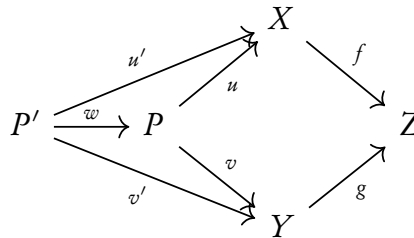


La limite projective d'un diagramme de type  $I$  dans  $C$  :



si elle existe est appelée *produit fibré* de  $(X, f)$  et  $(Y, g)$  au dessus de  $Z$  ; il est noté  $(X, f) \prod_Z (Y, g)$ . C'est la donnée d'un objet  $P$  et de deux<sup>2</sup> morphismes,  $u : P \longrightarrow X$ ,  $v : P \longrightarrow Y$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $f u = g v$
- (ii) pour tout objet  $P'$  et tout couple de morphismes  $u' : P' \longrightarrow X$ ,  $v' : P' \longrightarrow Y$ , tels que  $f u' = g v'$  il existe un morphisme et un seul  $w$  de  $P'$  dans  $P$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :



**Remarque :** Si  $f$  (resp.  $g$ ) est un monomorphisme,  $v$  (resp.  $u$ ) est un monomorphisme.

**6.4.** Soit  $C$  une catégorie, telle que pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  soit élément d'un univers  $\mathfrak{U}$ .

**6.4.1.** Soit  $(I_\alpha)_\alpha$  une famille de type de diagrammes,  $I_\alpha$  appartenant à  $\mathfrak{U}$  pour tout  $\alpha$ , on dit que dans  $C$  les limites *projectives de type*  $(I_\alpha)_\alpha$  *existent* si, pour tout  $\alpha$ , tout  $\varphi : T_\alpha \longrightarrow C$  admet une limite projective.

Cette définition donne un sens aux locutions : *Dans  $C$  les limites projectives existent* (la famille  $(I_\alpha)_\alpha$  est formée de tous les types de diagrammes appartenant à

---

<sup>2</sup>Il est inutile de se donner  $r : P \longrightarrow Z$  tel que  $r = f u = g v$ .

$\mathcal{U}$ ), les *limites projectives finies existent* (la famille  $(I_\alpha)_\alpha$  est formée de tous les types de diagrammes finis, c'est-à-dire tels que l'ensemble  $\text{Ob } I_\alpha$  soit fini), les *produits existent* (la famille  $(I_\alpha)_\alpha$  est formée de tous les types de diagrammes discrets...), les *noyaux existent* ( $(I_\alpha)_\alpha$  se réduit au type de diagramme suivant :  $\bullet \rightrightarrows \bullet$ ), etc...

**6.4.2.** On vérifiera les assertions suivantes :

Dans la catégorie  $C$  les *limites projectives finies* existent si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) Les produits finis existent
- (b) Les produits fibrés existent.

La condition (a) est équivalente à la condition (a') les deux-produits existent et il existe un objet final.

De plus le couple de conditions (a) (b) est équivalente au couple (a) (b') avec (b') les noyaux existent.

Dans la catégories  $C$ , les *limites projectives* existent si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a<sub>1</sub>) Les produits existent
- (b) Les produits fibrés existent.

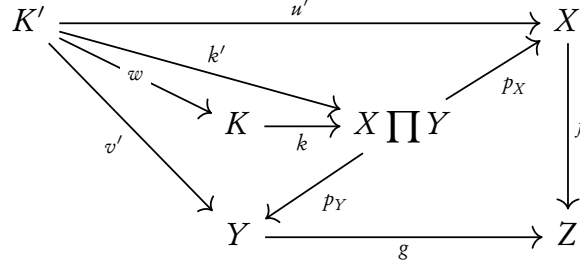
Le couple de conditions (a<sub>1</sub>)(b) est équivalente au couple (a<sub>1</sub>)(b').

Évoquons la démonstration de l'équivalence de (a)(b) et (a)(b').

Supposons (a) et (b') vérifiés et considérons deux morphismes  $f : X \longrightarrow Z$ ,  $g : Y \longrightarrow Z$ . Soient  $X \amalg Y$  le produit de  $X$  et de  $Y$ ,  $p_X : X \amalg Y \longrightarrow X$ ,  $p_Y : X \amalg Y \longrightarrow Y$ , les morphismes canoniques, et  $k : K \longrightarrow X \amalg Y$  le noyau de couple de morphismes  $(p_X f, p_Y g)$ ;  $(K, u = p_X k, v = p_Y k)$  définissent le *produit fibré* de  $(X, f)$  et  $(Y, g)$  au dessus de  $Z$ . En effet :

- (i) Par définition du noyau,  $f u = g v$ .
- (ii) Soient un objet  $K'$  et deux morphismes,  $u' : K' \longrightarrow X$ ,  $v' : K' \longrightarrow Y$  tels que  $f u' = g v'$ . Par définition du produit il existe un morphisme unique  $k' : K' \longleftarrow X \amalg Y$  tel que  $u' = p_X k', v' = p_Y k'$ . Puisque  $f p_X k' = g p_Y k'$

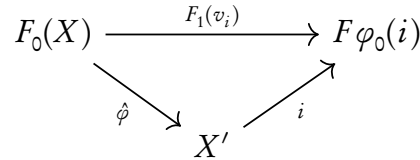
par définition du noyau il existe un unique morphisme  $w : K' \longrightarrow K$  tel que  $k' = kw$ , donc tel que  $u' = uv$  et  $v' = vw$ .



Réciproquement supposons (a) et (b) vérifiés, et considérons deux morphismes  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $g : X \longrightarrow Y$ . Soient le morphisme  $\varphi : X \longrightarrow Y \amalg Y$  de composantes  $(f, g)$ , et le morphisme  $\text{diag} : Y \longrightarrow Y \amalg Y$  ; on considère alors le produit fibré,  $(K, k, k')$ , de  $(X, \varphi)$  et  $(Y, \text{diag})$  au dessus de  $Y \amalg Y$  et l'on vérifie que  $k : K \longrightarrow X$  possède les propriétés de noyau du couple de morphismes  $(f, g)$ .

**6.4.3.** Soient un type de diagramme  $I$ , un morphisme de type de diagramme  $\varphi : I \longrightarrow C$  et un foncteur  $F$  de la catégorie  $C$  dans une catégorie  $C'$ . Si  $(Y, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$  est une famille admissible pour  $\varphi$  alors  $(F_0(Y), (F_1(u_i)_{i \in \text{Ob } I}))$  est une famille admissible pour  $F\varphi : I \longrightarrow C'$ .

Si la limite projective de  $\varphi$  existe,  $\varprojlim_I \varphi = (X, (v_i)_i)$  et si la limite projective de  $F\varphi$  existe,  $\varprojlim_I F\varphi = (X', (v'_i)_i)$  il existe alors un unique morphisme  $\hat{\varphi} : F_0(X) \longrightarrow X'$  tel que pour tout élément  $i$  de  $\text{Ob } I$  le diagramme suivant soit commutatif :



On dit que le foncteur  $F$  *commute aux limites projectives de type  $I$* , si pour toute  $\varphi : I \longrightarrow C$  admettant une limite projective, et tel que  $F\varphi : I \longrightarrow C'$  admettons une limite projective, le morphisme  $\hat{\varphi}$  est un isomorphisme. Ce qui traduit par la formule :

$$F(\varprojlim_I \varphi) \simeq \varprojlim_I F\varphi$$

Soit  $(I_\alpha)_\alpha$  une famille de type de diagramme,  $I_\alpha$  appartenant à  $\mathbb{U}$  pour tout  $\alpha$ , on dit que le foncteur  $F$  *commute aux limites projectives de types  $(I_\alpha)_\alpha$*  si pour tout  $\alpha$ ,  $F$  commute aux limites projectives de type  $I_\alpha$ .

Ces définitions donnent un sens aux locutions : le foncteur  $F$  *commute aux limites projectives*, *commute aux limites projectives finies*, *commute aux produits*, *commute aux noyaux*, etc...

**Exemple :** Si  $C$  est une catégorie définie par des espèces de structures algébriques, ou topologiques, ou algébro-topologiques, on définit un foncteur *oubli la structure* noté  $\text{Oub}$  de  $C$  dans  $\text{Ens}$ , qui à un objet de  $C$  associe l'ensemble sous-jacent, et à un morphisme de  $C$  associe l'application d'ensembles sous-jacente. Pour ces catégories, le foncteur  $\text{Oub}$  commute généralement aux limites projectives. Par exemple considérons la catégorie notée  $\underline{\text{Top}}$ , des espaces topologiques, un type de diagramme  $I$  et un morphisme de type de diagramme,  $\varphi$ , de  $I$  dans  $C$ . On sait que  $\varprojlim_I \text{Oub } \varphi$  existe, c'est un sous-ensemble de  $\prod_{i \in \text{Ob } I} \text{Oub } \varphi_0(i)$ , lequel peut être muni canoniquement d'une structure topologique (topologie initiale). On vérifie alors que le sous-espace topologique  $\varprojlim \text{Oub } \varphi$  satisfait à la propriété universelle de la limite projective de  $\varphi$  dans  $\underline{\text{Top}}$ . On en déduit que dans  $\underline{\text{Top}}$ , les limites projectives existent et que de par leur construction même, le foncteur  $\text{Oub}$  commute aux limites projectives.

**6.4.4.** Soient  $C$  et  $C'$  deux catégories et  $F$  un foncteur de  $C$  dans  $C'$ . Le foncteur  $F$  est dit *exact à gauche*, s'il *commute aux limites projectives finies*, où ce qui est équivalent lorsque dans  $C$  les limites projectives finies existent, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- (a)  $F$  commute aux produits finis.
- (b)  $F$  commute aux produits fibrés.

La condition (a) est équivalente à

- (a')  $F$  commute aux deux-produit et transforme objet final en objet final.

Le couple de condition (a)(b) est équivalente au couple (a')(b') avec

- (b')  $F$  commute aux noyaux.

De plus si dans  $C$  les limites projectives existent,  $F$  commute aux limites projectives si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (a<sub>1</sub>)  $F$  commutes aux produits



(b)  $F$  commute aux produits fibrés (ou aux noyaux).

### 6.5. Limite inductive :

Soit un type de diagramme  $I$ , une catégorie  $C$ , et un morphisme de type de diagramme  $\varphi : I \longrightarrow C$ .

**6.5.1.** Une famille de morphismes de  $C$  est dite *coadmissible* pour  $\varphi$  si elle est admissible pour  $\varphi^\circ$ .

**6.5.2.** On appelle *limite inductive* de  $\varphi$ , une limite projective de  $\varphi^\circ$ . Une limite inductive de  $\varphi$ ,  $(X, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$ , est donc “universelle” au sens suivant ; pour toute famille coadmissible pour  $\varphi$ ,  $(Y, (v_i)_{i \in \text{Ob } I})$  il existe un morphisme unique  $u : X \longrightarrow Y$  tel que pour tout élément  $i$  de  $\text{Ob } I$  le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_\circ(i) & \\ v_i \swarrow & & \searrow u_i \\ Y & \xleftarrow{u} & X \end{array}$$

Deux limites inductives de  $\varphi$  étant canoniquement isomorphes, si l'ensemble des limites inductives de  $\varphi$ , n'est pas vide on en choisit une que l'on note  $\varinjlim_I \varphi$ . On peut alors écrire :  $\varinjlim_I \varphi \simeq \varprojlim_I \varphi^\circ$ .

### 6.6. Exemples de limites inductives

**6.6.1.** Soit  $I$  un type de diagramme *discret*, et  $\varphi : I \longrightarrow C$ . Si la limite inductive de  $\varphi$  existe,  $\varinjlim_I \varphi = (S, (e_i)_{i \in \text{Ob } I})$  on dit que la famille  $(e_i)_i$  *représente*  $S$  comme *somme directe des*  $X_i = (i)$ . On note  $S = \coprod_{i \in \text{Ob } I} X_i$ .

Le somme directe vérifie donc la propriété suivante :

Pour tout objet  $Z$  l'application de  $\text{Hom}(\coprod_{i \in \text{Ob } I} X_i, Z)$  dans  $\prod_{i \in \text{Ob } I} \text{Hom}(X_i, Z)$  qui à  $f$  fait correspondre  $(f e_i)_{i \in \text{Ob } I}$  est une *bijection*.

Dans le cas particulier où le type de diagramme  $I$  est *vide*, la limite inductive est appelée *objet initial* de la catégorie  $C$ . Donc  $\varepsilon$  est un objet initial si et seulement si pour tout objet  $Y$  de  $C$ ,  $\text{Card Hom}(\varepsilon, Y) = 1$ .

Un objet initial et final est appelé un *objet nul* il est souvent noté  $0_C$ .

**6.6.2.** Si  $I$  est le type de diagramme :  $\bullet \rightrightarrows \bullet$ , la limite inductive d'un diagramme de type  $I$  dans  $C$  :  $X \rightrightarrows Y$  s'appelle, lorsqu'elle existe, le *conoyau*

du couple de morphisme  $(f, g)$ . C'est la donnée d'un objet  $Z$  et d'un morphisme  $u : Y \longrightarrow Z$  tel que :

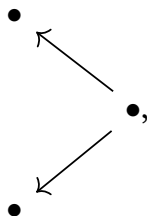
- (i)  $uf = ug$
- (ii) pour tout objet  $Z'$  et tout morphisme  $u' : Y \longrightarrow Z'$  tel que  $u'f = u'g$ , il existe un morphisme unique  $v$  de  $Z$  dans  $Z'$  tel que  $v$  factorise  $u'$  :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{u} & Z \\ & \xrightarrow{g} & & \searrow u' & \swarrow v \\ & & & Z & \end{array}$$

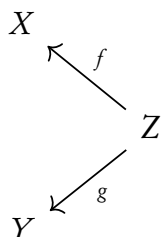
Le morphisme  $u$ , (et quelque fois par abus de langage l'objet  $Z$ ) sera noté  $\text{Coker}(f, g)$ .

*Remarque :*  $u$  est un épimorphisme.

**6.6.3.** Soit le type de diagramme  $I$  :



la limite inductive d'un diagramme de type  $I$  dans  $C$  :



si elle existe est appelée somme *amalgamée* de  $(X, f)$  et  $(Y, g)$  au-dessus de  $Z$ , elle est notée  $(X, f) \amalg_Z (Y, g)$ . C'est donc la donnée d'un objet  $S$  et de deux morphismes  $u : X \longrightarrow S$ ,  $v : Y \longrightarrow S$  vérifiant les propriétés... que le lecteur précisera.

**Remarque :** Si  $f$  (resp.  $g$ ) est un épimorphisme,  $v$  (resp.  $u$ ) est un épimorphisme.

### Exemple :

Dans la catégorie des *anneaux commutatifs avec élément unité*, on considère trois anneaux  $X, Y, Z$  et les morphismes  $f : Z \longrightarrow X, g : Z \longrightarrow Y$ . Grâce à  $f$  on munit  $X$  d'une structure de  $Z$ -module, l'application de  $Z \times X$  étant définie par  $(xy) \rightsquigarrow f(x)y$ .

On procède de même pour  $Y$  avec  $g$ , et  $Z$  avec l'application identique. On montrera que le  $Z$ -module  $X \otimes_Z Y$  muni de la multiplication  $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'$  et les homomorphismes d'anneaux  $u : X \longrightarrow X \otimes_Z Y$  tel que  $u(x) = x \otimes e_Y$  (où  $e_Y$  est l'élément unité de  $Y$ ) et  $v : Y \longrightarrow X \otimes_Z Y$  tel que  $v(y) = e_X \otimes y$ , définissent la somme amalgamée  $(X, f) \amalg_Z (Y, g)$ .

**6.6.4.** Dans les catégories définies par des espèces de structures algébriques, les *limites inductives existent*, mais l'exemple qui précède montre que leur construction n'est pas aussi simple que dans le cas projectif. Cependant dans le cas particulier de la catégorie Top, on constate que le foncteur Oub commute aux limites inductives. Soit  $\varphi : I \longrightarrow \underline{\text{Top}}$  un morphisme de type de diagramme, on considère la limite inductive de Oub.  $\varphi : I \longrightarrow \underline{\text{Ens}}, (E, (u_i)_{i \in \text{Ob } I})$ . On munit  $E$  de la topologie la plus fine rendant les  $u_i$  continues ; il suffit de prendre pour ouverts de  $E$ , les éléments  $U$  de  $\mathfrak{P}(E)$  tels que pour tout  $i$   $\varphi_i^{-1}(U)$  soit un ouvert de  $\varphi(i)$ . On vérifie que l'espace topologique  $E$  est bien la limite inductive cherchée. Mais cette construction n'est valable qu'exceptionnellement, on montrera par exemple qu'elle est en échec dans le cas , catégorie des espaces topologiques compacts.

**6.7.** On énoncera les définitions et propriétés duales de celles développées dans le paragraphe 6.4. On établira des conditions nécessaires et suffisantes d'existence *des limites inductives* (resp. finies) dans une catégorie  $C$ . On définira un foncteur  $F$  de  $C$  dans  $C'$  commutant aux limites inductives de type  $I$ ... On définira un foncteur exact à droite.

**6.7.1.** Un *foncteur exact* est un foncteur exact à gauche et exact à droite.

**6.7.2.** Bien qu'il n'y ait théoriquement rien à ajouter pour un *foncteur contravariant*  $F$  de  $C$  dans  $C'$ , il faut cependant remarquer que  $F$  commute aux limites projectives (resp. inductives) de type  $I$ , si pour tout  $\varphi : X \longrightarrow C$  admettant une limite inductive (resp. projective) et tel que  $F\varphi$  admette une limite projective (resp. inductive) on a  $\varprojlim_I (F\varphi) \simeq F(\varinjlim_I \varphi)$  (resp.  $\varinjlim_I (F\varphi) \simeq F(\varprojlim_I \varphi)$ ).

## 6.8. Propriétés générales des limites inductives et projectives.

**6.8.1.** Soit  $C$  une catégorie,  $I$  un type de diagramme. Les diagrammes de type  $I$  dans  $C$  qui admettent une limite projective forment une sous catégorie strictement pleine de  $\underline{\text{Diag}}(I, C)$ , notée  $\underline{\text{Diag}}p(I, C)$ . L'application qui à  $\varphi$  fait correspondre  $\varprojlim_I \varphi$ , de  $\underline{\text{Diag}}p(I, C)$  dans  $\text{Ob } C$ , définit un foncteur de  $\underline{\text{Diag}}p(I, C)$  dans  $C$ . En effet si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux objets de  $\underline{\text{Diag}}p(I, C)$ ,  $u$  une flèche de  $\varphi$  dans  $\psi$ , par définition de  $\varprojlim \varphi$ ,  $\varprojlim \psi$  et de  $u$ , pour tout couple  $(i, j)$  d'objets de  $I$  et toute flèche  $f : i \longrightarrow j$  on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \varprojlim \varphi & \xrightarrow{u_i} & \varphi_{\circ}(i) & \xrightarrow{u(i)} & \psi_{\circ}(i) & \xleftarrow{v_i} & \varprojlim \psi \\ & \searrow u_j & \downarrow \varphi_1(f) & & \downarrow \psi_1(f) & \swarrow v_j & \\ & & \varphi_{\circ}(j) & \xrightarrow{v(j)} & \psi_{\circ}(j) & & \end{array}$$

La famille  $(\varprojlim \varphi, (u(i)u_i)_{i \in \text{Ob } I})$  est admissible pour  $\psi$ , il existe donc une flèche *unique* de  $\varprojlim \varphi$  dans  $\varprojlim \psi$ , que l'on note  $\varprojlim u$ , et telle que  $v_i \varprojlim u = u(i)u_i$  pour tout  $i \in \text{Ob } I$ .

Le foncteur ainsi défini se note  $\varprojlim(I, C)$  ou  $\varprojlim : \underline{\text{Diag}}p(I, C) \longrightarrow C$ .

**Proposition.** — *Pour tout type de diagramme  $I$ , et toute catégorie  $C$ , le foncteur  $\varprojlim(I, C)$  commute aux limites projectives.*

Dualement on définit un foncteur de  $\underline{\text{Diag}}i(I, C)$  dans  $C$ , noté  $\varinjlim(I, C)$  qui commute aux limites inductives.

Il n'y a aucun énoncé, valable pour toute catégorie, sur la commutativité entre les limites projectives et inductives.

**Proposition 6.8.2.** — *Soit  $I$  un type de diagramme,  $C'$  un catégorie où les limites projectives (resp. inductives) de type  $I$  existent. Alors pour tout type de diagramme  $D$ , (resp. toute catégorie  $C$ ) les limites projectives (resp. inductives) de types  $I$  existent dans  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$  (resp.  $\underline{\text{Hom}}(C, C')$ ).*

Soit  $\varphi$  un diagramme de type  $I$  dans  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$ . A tout objet  $d$  de  $D$ , l'application  $i \rightsquigarrow \varphi(i)d$  associe un morphisme  $\Phi_d : I \longrightarrow C'$  ( $\Phi_d(i) = \varphi(i)(d)$ ).

Soit  $X_d = \varprojlim \Phi_d$  l'application  $d \rightsquigarrow X_d$  définit un morphisme  $\Phi$  de  $D$  dans  $C$

$$\begin{array}{ccc} d & \longrightarrow & X_d \\ \delta \downarrow & & \downarrow \Phi_1 \\ d' & \longrightarrow & X_{d'} \end{array} \quad \delta) = \varprojlim_I \varphi(i)(\delta)$$

Soit une famille admissible  $(\Omega, (v_i)_{i \in \text{Ob } I})$  pour le morphisme  $\varphi$ . Pour tout objet  $d$  de  $D$ , il existe alors un morphisme  $v_d$  unique de  $\Omega(d)$  dans  $X_d$  tel que pour tout  $i$  de  $\text{Ob } I$  le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega(d) & \xrightarrow{v_i(d)} & \varphi(i)(d) = \Phi_d(i) \\ & \searrow v_d & \nearrow \\ & X_d & \end{array}$$

Donc  $\Phi = \varprojlim_I \varphi$ .

**6.8.3.** Dans  $\underline{\text{Cat}}\mathbb{U}$ , pour tout type de diagramme  $I$  élément de  $\mathbb{U}$ , les limites projectives (resp. inductives) de type  $I$  existent. Si  $I$  est discret on retrouve le produit (resp. la somme) de catégories.

## 7. Catégorie filtrante

### 7.1 Définitions :

**7.1.1.** Une catégorie  $I$  est *pseudo-filtrante* à gauche si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

a) Pour tout diagramme de  $I$  de type

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ & \searrow \alpha & \\ & & Z \\ & \nearrow \beta & \\ Y & & \end{array}$$

il existe un objet  $M$  et deux morphismes,  $f : M \longrightarrow X$ ,  $g : M \longrightarrow Y$ .

- b) Pour tout diagramme de  $I$  du type  $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{smallmatrix} Y$  il existe un morphisme  $h : T \longrightarrow X$  tel que  $uh = vh$ .

Une catégorie  $I$  est pseudo filtrante à droite si  $I^\circ$  est pseudo filtrante à gauche. On écrira les conditions a'), b') correspondantes.

**7.1.2.** Une catégorie  $I$  est connexe si la propriété suivante est vérifiée :

- c) Pour tout couple  $(P, Q)$  d'objets, il existe une suite finie d'objets :  $P_0 = P, P_1, \dots, P_i, P, \dots, P_n = Q$ , telle que  $\text{Hom}(P_i, P_{i+1}) \neq \emptyset$ , où  $\text{Hom}(P_{i+1}, P_i) \neq \emptyset$  pour  $i = 0, \dots, n-1$ .

**7.1.3.** Une catégorie  $I$  est *filtrante à gauche* (resp. à droite) si les conditions a), b), c) (resp. a'), b'), c')) sont vérifiées.

**Remarque :**

On considère la condition suivante :

- $\alpha$ ) Pour tout couple d'objets  $(X, Y)$  de  $I$ , il existe un objet  $M$  et deux morphismes  $f : M \longrightarrow X, g : M \longrightarrow Y$ .

La condition  $\alpha$ ) est équivalente au couple de conditions (a), c)).

Donc une catégorie  $I$  est *filtrante à gauche* (resp. à droite) si les conditions  $\alpha$ ), b) (resp.  $\alpha'$ ) b')) sont vérifiées.

Une catégorie  $I$  est *filtrante* si elle est filtrante à gauche et à droite.

## 7.2 Exemples

**7.2.1.** Si dans une catégorie  $C$ , pour tout couple d'objets le produit (resp. la somme) existe, et si pour tout couple de morphismes le noyau (resp. le conoyau) existe, alors  $C$  est filtrante à gauche (resp. filtrante à droite).

**7.2.2.** La catégorie associée à un ensemble préordonné  $I$  est filtrante si et seulement si  $I$  est filtrante.

**7.2.3.** Dans la catégorie des ensembles, des groupoïdes, des modules sur un anneau..., les *limites inductives filtrantes*, c'est-à-dire les limites inductives de foncteurs d'une catégorie filtrante dans la catégorie en question, sont des foncteurs exacts à gauche, donc *exacts*, puisqu'on sait qu'ils sont exacts à droite.

## II. Catégorie abélienne

### 1. Catégorie additive

On peut donner deux versions de la définition d'une catégorie additive, l'une consiste à *se donner* sur les ensembles  $\text{Hom}(X, Y)$  une structure de groupe abélien, cette structure supplémentaire étant soumise à certaines conditions ; l'autre consiste à construire canoniquement une loi de groupe sur tout  $\text{Hom}(X, Y)$  en termes d'*axiomes* convenables sur la catégorie  $C$ .

#### 1.1 Version 1

Une catégorie additive est une catégorie  $C$  où pour tout couple d'objets  $(X, Y)$  de  $C$  est donnée une structure de groupe abélien sur  $\text{Hom}(X, Y)$ , les axiomes suivants étant vérifiés :

$CA_1$ . pour tout triplet d'objets  $(X, Y, Z)$  de  $C$ , l'application  $(u, v) \rightsquigarrow vu$  de  $\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z)$  dans  $\text{Hom}(X, Z)$  est *bilinéaire*.

$CA_2$ . Les sommes directes finies existent, ou ce qui est équivalent il existe un objet initial *et* pour tout couple d'objets la somme existe.

L'axiome  $CA_2$  est équivalent à l'axiome  $CA'_2$ . Les produits finis existent ou ce qui est équivalent il existe un objet final et pour tout couple d'objets le produit existe.

**1.1.1.** Tout objet initial est final. En effet si  $\varepsilon$  est un objet initial,  $\text{Hom}(\varepsilon, X)$  se réduit à un seul élément noté  $0$  (puisque c'est l'élément neutre pour le groupe  $\text{Hom}(\varepsilon, X)$  en particulier  $\text{Hom}(\varepsilon, \varepsilon) = 1_\varepsilon = 0$ , donc pour tout élément  $f$  de  $\text{Hom}(Y, \varepsilon)$ ,  $f = 1_\varepsilon f = 0$  ;  $\text{Hom}(Y, \varepsilon)$  se réduit, à l'élément  $0$ ).

Il y a donc équivalence entre les propositions suivantes :

$\varepsilon$  est un objet initial

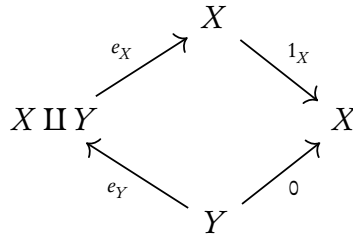
$\varepsilon$  est un objet final

$$1_\varepsilon = 0$$

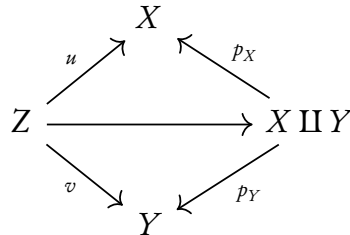
Dans une catégorie additive il existe donc un *objet nul*, deux objets nuls étant canoniquement isomorphes, parmi les objets nuls on en choisit un que l'on note aussi 0.

Remarque : Dans une catégorie  $C$  à objet nul 0, pour tout couple d'objet  $(X, Y)$  on définit un morphisme nul de  $X$  dans  $Y$  qui est le composé de  $X \longrightarrow 0$  et  $0 \longrightarrow Y$ . Dans le cas où  $C$  est additive ce morphisme nul est évidemment l'élément neutre du groupe  $\text{Hom}(X, Y)$ .

1.1.2. Si pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ , la somme  $X \amalg Y$  existe, alors le produit existe et  $X \amalg Y \simeq X \prod Y$ , on peut *choisir*  $X \prod Y = X \amalg Y$ , on note cet objet  $X \oplus Y$ . Si  $(e_X, e_Y)$  représentent  $X \amalg Y$  comme somme de  $X$  et  $Y$  le diagramme suivant :



montre qu'il existe un unique morphisme  $p_X : X \amalg Y \longrightarrow X$  tel que  $p_X e_X = 1_X$  et  $p_X e_Y = 0$ . De même il existe un unique morphisme  $p_Y : X \amalg Y \longrightarrow Y$  tel que  $p_Y e_Y = 1_Y$  et  $p_Y e_X = 0$ . On vérifie que les applications  $e_X p_X + e_Y p_Y$  et  $1_{X \amalg Y}$  ont les mêmes composantes donc  $e_X p_X + e_Y p_Y = 1_{X \amalg Y}$ . Alors  $p_X$  et  $p_Y$  représentent  $X \amalg Y$  comme produit de  $X$  et de  $Y$ , en effet pour tout objet  $Z$  de  $C$  et tout couple de morphismes  $u : Z \longrightarrow X$ ,  $v : Z \longrightarrow Y$ , l'application  $e_X u + e_Y v : Z \longrightarrow X \amalg Y$  rend le diagramme suivant commutatif, et c'est la seule.



## 1.2 Version 2

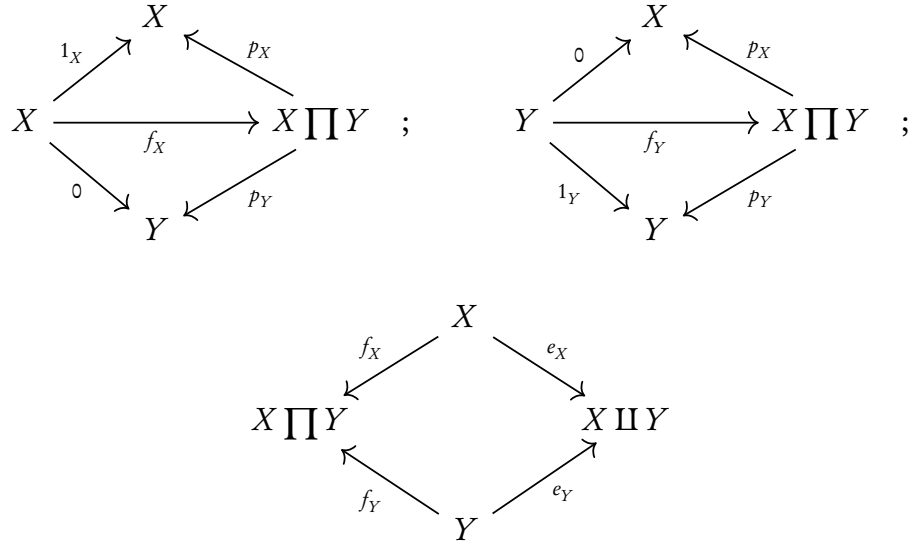
Soit  $C$  une catégorie satisfaisant aux axiomes suivants :



$C A'_1$  Il existe un objet nul

$C A'_2$  Pour tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $C$ , le produit et la somme existent.

La catégorie  $C$  admettant un objet nul, il existe un unique morphisme  $C_{XY} : X \amalg Y \longrightarrow X \prod Y$  tel que les diagrammes suivants soient commutatifs.



$C A'_3$  Pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ ,  $C_{XY}$  est un *isomorphisme*.

A tout couple  $(u, v)$  de morphismes de  $X$  dans  $Y$  on fait correspondre alors un morphisme de  $X$  dans  $Y$  défini par le diagramme suivant :

$$X \xrightarrow{(u,v)} Y \prod X \xrightarrow{C_{XY}^{-1}} X \amalg Y \longrightarrow Y$$

On obtient ainsi sur  $\text{Hom}(X, Y)$  une structure de monoïde commutatif avec élément unité. L'application naturelle de  $\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z)$  dans  $\text{Hom}(X, Z)$  est bilinéaire.

$C A'_4$  Pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ , le monoïde  $\text{Hom}(X, Y)$  construit ci-dessus est un *groupe*.

On montre le lemme suivant : Soit  $C$  une catégorie, il existe au plus une fonction qui à tout couple d'objets  $(X, Y)$  de  $C$  associe une structure de monoïde associatif

sur  $\text{Hom}(X, Y)$  tel que la composition des morphismes soit bilinéaire<sup>3</sup>. On en déduit que les définitions 1.1 et 1.2 d'une catégorie additive sont équivalentes.

### 1.3 Noyau et conoyau d'un morphisme

Dans une *catégorie avec objet nul* on considère un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$ .

1.3.1. Le *noyau* (resp. *conoyau*) de  $f$  est, lorsqu'il existe, le *noyau* (resp. *conoyau*) du couple de morphismes  $(f, 0)$ .

Le noyau de  $f$  est donc un morphisme  $u : K \longrightarrow X$  tel que :

(i)  $f u = 0$

(ii) pour tout morphisme  $u' : K' \longrightarrow X$ , tel que  $f u' = 0$ , il existe un morphisme unique  $v : K' \longrightarrow K$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow v & \nearrow u' & & \\ & K' & & & \end{array}$$

Le morphisme  $u$  (et quelque fois aussi l'objet  $K$ ) est *noté*  $\text{Ker } f$ . On rappelle que le noyau de  $f$  est un *monomorphisme*.

Dualement on écrira la définition du conoyau de  $f$ , noté  $\text{Coker } f$ , qui est un *épimorphisme*.

Sous la seule hypothèse de l'existence d'un objet nul dans une catégorie  $C$ , tout monomorphisme (resp. épimorphisme) a un noyau (resp. un conoyau) nul.

1.3.2. Dans une *catégorie additive*, la réciproque est vraie, et l'on a la :

Proposition. — *Un morphisme est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si son noyau (resp. conoyau) est nul.*

### 1.4 Foncteur additif

1.4.1. Soient  $C$  et  $C'$  deux catégories additives,  $F$  un foncteur de  $C$  dans  $C'$ , les conditions suivantes sont équivalentes

---

<sup>3</sup>Ce lemme est un cas particulier d'une proposition que l'on trouvera dans : Eckmann-Hilton. Group-like structures in general categories. Math. Ann. (62-63)

- (a) Pour tout couple d'objets  $(X, Y)$  de  $C$ , l'application  $F_{\circ}|_{\text{Hom}(X, Y)} : \text{Hom}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}(F(X), F(Y))$  est un *morphisme de groupe abélien*.
- (b) Le foncteur  $F$  commute aux sommes finies.
- (c) Le foncteur  $F$  commute aux produits finis.

On appelle *foncteur additif* un foncteur vérifiant l'une de ces conditions.

#### 1.4.2. Exemples :

Soit  $C$  une catégorie additive ; pour tout objet  $X$  de  $C$ , le *foncteur*  $\text{Hom}(X, \cdot)$  de  $C$  dans la catégorie des groupes abéliens  $\underline{\text{Ab}}$ , défini par  $Y \rightsquigarrow \text{Hom}(X, Y)$  et le foncteur contravariant  $\text{Hom}(\cdot, X)$ , sont additifs.

Soit  $\underline{\text{Mod}}_A^S$  la catégorie des modules à gauche sur un anneau  $A$ , pour tout module à droite  $X$  sur  $A$  le foncteur  $X \otimes_A \cdot$  de  $\underline{\text{Mod}}_A^S$  dans  $\underline{\text{Ab}}$  défini par  $Y \rightsquigarrow X \otimes_A Y$  et  $f \rightsquigarrow 1_X \otimes f$  est additif.

Plus généralement un foncteur exact à droite ou à gauche, d'une catégorie additive dans une autre est additif.

### 1.5 Image, coimage d'un morphisme

Dans une catégorie avec objet nul, soit  $f$  un morphisme admettant un noyau et un conoyau. Si le conoyau de  $\text{Ker } f$  (resp. le noyau de  $\text{Coker } f$ ) existe, on l'appelle *coimage de  $f$* , on le note  $\text{Coim } f$  (resp. *image de  $f$* ,  $\text{Im } f$ ). Si  $\text{Im } f$ ,  $\text{Coim } f$  existent, soit  $\hat{f}$  l'unique morphisme de  $X$  dans  $K'$  tel que  $\text{Im } f \hat{f} = f$ ,  $\text{Im } f$  est un mono, donc  $\hat{f} \text{Ker } f = 0$  et il existe un *unique morphisme  $\bar{f}$  de  $K'$  dans  $C'$*  tel que  $f = \text{Im } f \bar{f} \text{Coim } f$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 K & \xrightarrow{\text{Ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{Coker } f} & C \\
 & & \downarrow \text{Coim } f & \searrow \hat{f} & \uparrow \text{Im } f & & \\
 & & C' & \xrightarrow{\bar{f}} & K' & & 
 \end{array}$$

## 2. Catégorie abélienne

**2.1.** Une *catégorie abélienne* est une catégorie additive qui vérifie les axiomes suivants

$AB_1$  Pour tout morphisme, le noyau et le conoyau existent.

$AB_2$  Pour tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $\bar{f} : C' \longrightarrow K'$  est un isomorphisme.

Une conséquence de ces axiomes est que tout morphisme  $f$  se décompose de façon canonique en un monomorphisme et un épimorphisme  $f = \text{Im} f \text{ Coim} f$ .

On remarque également que pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes de même but (resp. de même source)  $A$  le produit fibré (resp. la somme amalgamée) existe.

On vérifie par exemple que  $(X, f) \prod_A (Y, g) = \text{Ker}(f p_X \longrightarrow g p_Y)$  ou  $X = s(f)$ ,  $Y = s(g)$ .

## 2.2 Axiomes supplémentaires dans une catégorie abélienne

Pour une catégorie  $C$  appartenant à un univers  $\mathfrak{U}$  il est quelque fois utile d'ajouter certains des axiomes suivants :

### 2.2.1.

$AB_{3\mathfrak{U}}$  . Pour tout objet  $I$  de  $\underline{\text{Diag}}_{\mathfrak{U}}$ , les diagrammes de type  $I$  dans  $C$  possèdent une limite inductive.

**Remarque.** Pour qu'il en soit ainsi il suffit que les sommes indexées par tout  $I$  appartenant à  $\mathfrak{U}$  existent.

### 2.2.2.

$AB_{4\mathfrak{U}}$  .  $AB_{3\mathfrak{U}}$  est vérifié et pour tout objet  $I$  de  $\underline{\text{Diag}}_{\mathfrak{U}}$ , la somme  $\prod_{i \in I} u_i$  d'une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de monomorphismes est un monomorphisme.

**Remarque.** Cela revient à dire que la somme directe commute aux noyaux, et se trouve donc être un foncteur exact.

### 2.2.3.

$AB_{5\mathfrak{U}}$  (est strictement plus fort que  $AB_{4\mathfrak{U}}$ ) :  $AB_{3\mathfrak{U}}$  est vérifié et pour tout catégorie filtrante  $I$ , élément de  $\mathfrak{U}$ , le foncteur  $\varinjlim_I : \underline{\text{Hom}}(I, C) \longrightarrow C$  est exact.

On énonce de façon duale des axiomes notés  $AB_{3\mathfrak{U}}^*$ ,  $AB_{4\mathfrak{U}}^*$ ,  $AB_{5\mathfrak{U}}^*$ . Il serait déraisonnable de prétendre imposer simultanément à une catégorie les axiomes  $AB_{5\mathfrak{U}}$  et  $AB_{5\mathfrak{U}}^*$ , car alors tout objet de  $C$  est nul...

**2.2.4. Famille génératrice.** Soit  $C$  une catégorie. On dit qu'une famille  $(Ai)_{i \in I}$  d'objet, de  $C$ , est une *famille génératrice* si pour tout objet  $X$  de  $C$  et tout monomorphisme  $f : Y \longrightarrow X$  qui n'est pas un isomorphisme, il *existe*  $i$  appartenant à  $I$  et un morphisme  $u : Ai \longrightarrow X$ , tels que  $u$  ne se factorise pas par  $f$ .

Un objet de  $C$  est un *générateur* si la famille réduite à ce élément est une famille génératrice.

**Proposition.** — Soit  $(Ai)_{i \in I}$ , une famille d'objets de  $C$  telle que la somme  $A = \coprod_{i \in I} Ai$  existe. La famille  $(Ai)_{i \in I}$  est une famille génératrice si et seulement si  $A$  est un générateur.

En effet, soient un objet  $X$  et un monomorphisme  $f : Y \longrightarrow X$  ; pour qu'un morphisme  $u : A \longrightarrow X$  se factorise par  $f$  il faut et il suffit que pour tout  $i$  élément de  $I$  la composante  $u_i$  se factorise par  $f$ .

Une catégorie  $C$  admet toujours une famille génératrice, à savoir la famille de tous les objets. Mais pour une “grosse catégorie”, par exemple la catégorie de tous les groupes appartenants à un univers donné  $\mathfrak{U}$ . Aussi s'imposent-on l'axiome :

$AB_{6\mathfrak{U}}$  . Il existe famille génératrice  $(Ai)_{i \in I'}$  de  $C$  avec  $I$  élément de  $\mathfrak{U}$ .

**Exemple :** Soit  $A$  un anneau appartenant à un univers  $\mathfrak{U}$ , la catégorie  $\text{Mod}_A^S$  de tous les modules à gauche sur  $A$  admet  $A$ , considéré comme  $A$  module à gauche, comme générateur.

On définit dualement les notions de famille cogénératrice, de cogénérateur, on énonce un axiome  $AB_{6\mathfrak{U}}^*$  dual de  $AB_{6\mathfrak{U}}$ .

**2.2.5.** Il sera bon de vérifier que la catégorie  $\text{Mod}^S A\mathfrak{U}$  est abélienne et satisfait aux axiomes précédemment énoncés, à ceci près que  $AB_{5\mathfrak{U}}^*$  et que  $AB_{6\mathfrak{U}}^*$  n'est pas évident...

### 3. Exactitude dans une catégorie abélienne

#### 3.1 Suite exacte

Une suite de morphismes  $(u_i)_{i \in [a,b]}$ ,  $[a,b] \subset \mathbb{Z}$  telle que  $s(ui) = b(u_{i-1})$  est “nulle” (resp. *exacte*) si pour tout  $i$ ,  $a < i \leq b$ ,  $u_i u_{i-1} = 0$  (resp.  $\text{Ker } u_i$  est isomorphe à  $\text{Im } u_{i-1}$ , ou ce qui est équivalent  $\text{Coker } u_{i-1}$  est isomorphe à  $\text{Coim } u_i$ .)

On appelle suite *exacte courte* une suite exacte du type  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ . Une telle suite est aussi appelée une *extension* de  $A'$  par  $A''$ .

Par définition même d'une suite exacte, un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si la suite  $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y$  (resp.  $X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ ) est *exacte*.

### 3.2 Suite scindée

On dit qu'une suite exacte courte  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  *se scinde* si elle possède l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- (a)  $f$  est *rétractable*, c'est-à-dire il existe  $r : A \longrightarrow A'$  tel que  $rf = 1_{A'}$
- (b)  $g$  est *sectionnable*, c'est-à-dire il existe  $s : A'' \longrightarrow A$ , tel que  $gs = 1_{A''}$
- (c) il existe  $s : A'' \longrightarrow A$  (resp.  $r : A \longrightarrow A'$ ) tel que  $(f, s)$  (resp.  $(g, r)$ ) représente  $A$  comme somme directe (resp. produit direct) de  $A'$  et  $A''$ .
- (d) Il existe  $r : A \longrightarrow A'$  et  $s : A'' \longrightarrow A$  tels que  $fr + sg = 1_A$  on dit aussi que  $A'$  ou  $A''$  est *facteur direct* de  $A$ .

### 3.3 Foncteur exact

**Proposition 3.3.1.** — Soient  $C$  et  $C'$  deux catégories abéliennes  $T$  un foncteur de  $C$  dans  $C'$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $T$  est exact à droite (resp. à gauche)
- (b)  $T$  est additif et pour toute suite exacte  $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  (resp.  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$ ) la suite  $T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'') \longrightarrow 0$  (resp.  $0 \longrightarrow T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'')$ ) est exacte.

**Remarque.** Si l'on considère un foncteur contravariant  $T$  de  $C$  dans  $C'$ , la proposition se traduit ainsi :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a')  $T$  est exact à droite (resp. à gauche)

(b')  $T$  est *additif* et pour toute suite exacte  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$  (resp.  $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ ) la suite  $T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$  (resp.  $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$ ) est exacte.

On en déduit qu'un foncteur  $T$  (resp. un foncteur contravariant) est *exact* si et seulement si  $T$  est *additif* et pour toute suite exacte  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ , la suite  $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$  (resp.  $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$ ) est exacte).

**3.3.2 Exemples.** Si  $C$  est une catégorie abélienne, pour tout objet  $X$  de  $C$ , les foncteurs  $\text{Hom}(X, \cdot)$  et  $\text{Hom}(\cdot, X)$  sont exacts à gauche.

Pour tout module à droite  $X$  sur  $A$ , le foncteur  $X \otimes_A \cdot : \text{Mod}_A^S \longrightarrow \text{Ab}$  est exact droite.

**3.3.3.** On dit qu'un foncteur  $T$  (resp. un foncteur contravariant) est *semi exact* s'il est additif et si pour toute suite exacte  $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  la suite  $T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'')$  (resp.  $T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A')$ ) est exacte.

## 4. Diagrammes dans une catégorie abélienne

**4.1.** Deux théorèmes vont nous permettre de transposer certains résultats connus sur les catégories des groupes abéliens, ou de modules, dans une catégorie abélienne quelconque.

**Théorème de Freyd 4.1.2.** — *Pour toute catégorie abélienne appartenant à un univers  $\mathfrak{U}$ , il existe un anneau  $A$  appartenant à  $\mathfrak{U}$  et un foncteur exact et pleinement fidèle de  $C$  dans  $\text{Mod}_{A\mathfrak{U}}^S$ .*

Ce résultat implique le théorème précédent.

**Lemme 4.1.3.** — *Soit  $C$  et  $C'$  des catégories abéliennes et  $F$  un foncteur exact de  $C$  dans  $C'$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $F$  est fidèle
- (b) Pour tout objet  $X$  de  $C$ ,  $F(X) = 0$  implique  $X = 0$
- (c)  $F$  est conservatif, c'est-à-dire pour toute flèche  $u$  de  $C$ ,  $F(u)$  est inversible implique que  $u$  est inversible.

(d) Pour tout flèche  $u$  de  $C$ ,  $F(u)$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) implique que  $u$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).

## 4.2 Applications

Lemme des 5 **4.2.1.** — Dans une catégorie abélienne  $C$ , on considère le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{-2} & \longrightarrow & A_{-1} & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ \downarrow f_{-2} & & \downarrow f_{-1} & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ B_{-2} & \longrightarrow & B_{-1} & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 \end{array}$$

Si  $f_{-1}$  et  $f_1$  sont des monomorphismes (resp. des épimorphismes) et si  $f_{-2}$  est un épimorphisme (resp.  $f_2$  un monomorphisme), alors  $f_0$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).

On en déduit que si  $f_{-1}$  et  $f_1$  sont des isomorphismes, si  $f_{-2}$  est un épimorphisme, et  $f_2$  un monomorphisme, alors  $f_0$  est un isomorphisme.

Ce résultat est bien connu dans  $\text{Ab}_{\mathbb{U}}$  et se transpose dans  $C$  à l'aide du théorème **4.1.1** et du lemme **4.1.3**.

**4.2.2.** On appelle *carré cartésien* le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ v' \uparrow & & \uparrow v \\ B' & \xrightarrow{u'} & A' \end{array}$$

dans lequel  $B'$  est le produit fibré de  $(A, u)$  et  $(A', v)$  au dessus de  $B$ .

Dans une catégorie abélienne si  $v$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme)  $v'$  est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), on a la même propriété pour  $u$ .

On écrira la propriété duale dans le carré cocartésien.

**4.2.3.** Par les mêmes méthodes on montrera dans une catégorie abélienne la propriété connue dans  $\text{Mod}_A^S$  sous le nom de “lemme de serpent”.

**4.3.** Le résultat suivant sera fort utilisé :



**Proposition 4.2.3.** — Soit  $C'$  une catégorie additive (resp. abélienne) pour tout type de diagramme  $D$  la catégorie  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$  est additive (resp. abélienne). De plus si  $C'$  vérifie l'un des axiomes  $AB_{1\mathfrak{U}}$  à  $AB_{6\mathfrak{U}}$  ou l'un des axiomes duaux  $AB_{3\mathfrak{U}}^*$  à  $AB_{6\mathfrak{U}}^*$  il en est de même de  $\underline{\text{Diag}}(D, C')$ .

## 5. Objet injectif. Objet projectif

### 5.1 Soit $C$ une catégorie abélienne.

**Proposition 5.1.1.** — Pour tout objet  $Q$  de  $C$  les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) Le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, Q)$  (exact à gauche) est exact.
- (b) Pour tout monomorphisme  $f : X \longrightarrow Y$  et pour tout morphisme  $u : X \longrightarrow Q$ , il existe un monomorphisme  $v : Y \longrightarrow Q$  tel que  $vf = u$ .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow u & \swarrow v & \\ & & Q & & \end{array}$$

- (c) Toute suite exacte  $0 \longrightarrow Q \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$  se scinde.

La proposition 3.3.1 montre que les assertions (a) et (b) sont équivalentes.

### 5.2

**Lemme 5.2.1.** — Soit  $(A_k)_{k \in K}$ ,  $K$  appartenant à un univers  $\mathfrak{U}$ , une famille génératrice d'une catégorie  $C$  dans laquelle les produits fibrés existent et telle que pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  appartient à  $\mathfrak{U}$ . Alors pour tout objet  $Y$  de  $C$  les sous-objets de  $Y$  forment un ensemble dont le cardinal est élément de  $\mathfrak{U}$ .

Si les produits fibrés existent, tout couple  $(X, i)$ ,  $(X', i')$  de sous-objets de  $Y$  admet une borne inférieure à savoir le sous-objet de  $Y$ ,  $(X, i) \prod_Y (X', i')$ .

A tout sous-objet  $(X, i)$  de  $Y$  on fait correspondre la famille  $(H_i^k)_{k \in K}$  où pour tout  $k$ ,  $H_i^k$  est le sous-ensemble de  $\text{Hom}(A_k, Y)$  formé par les morphismes qui se

factorisent par  $i$ . Supposons qu'il existe un autre sous-objet  $(X', i')$  de  $Y$  tel que pour tout  $k$   $H_i^k = H_{i'}^k$ . Alors pour tout  $k$  et tout morphisme  $f_k : A_k \longrightarrow X$ , il existe un morphisme  $g_k$  tel que  $if_k = i'g_k$ , et par définition du produit fibré, il existe un morphisme unique  $A_k \longrightarrow XAX'$  grâce auquel  $f_k$  (resp.  $g_k$ ) se factorise par le monomorphisme canonique  $XAX' \longrightarrow X$  (resp.  $XAX' \longrightarrow X'$ ). On en déduit que  $X = X'$ . Il y a donc une correspondance biunivoque entre les sous-objets de  $Y$  et un sous-ensemble de  $\prod_{k \in K} \mathfrak{P}(\text{Hom}(A_k, Y))$ . Or  $\text{Hom}(A_k, Y)$  appartient à  $\mathfrak{U}$  par hypothèse  $\mathfrak{P}(\text{Hom}(A_k, Y))$  appartient à  $\mathfrak{U}$  en vertu de l'axiome  $\mathfrak{u}_3$  des univers, et  $\prod_{k \in K} \mathfrak{P}(\text{Hom}(A_k, Y))$  appartient à  $\mathfrak{U}$  puisque  $K$  est un élément de  $\mathfrak{U}$ , donc les sous-objets de  $Y$  forment un ensemble dont le cardinal appartient à  $\mathfrak{U}$ .

Soit  $u, v$  deux morphismes de même but, on dit que  $v$  *prolonge*  $u$  si

- (i)  $s(u) < s(v)$ , soit  $i$  le morphisme injection canonique de  $s(u)$  dans  $s(v)$
- (ii)  $u = vi$ .

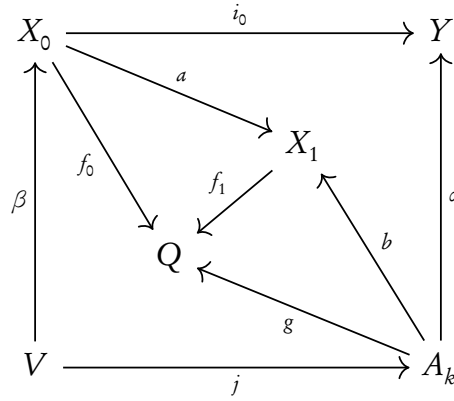
**Théorème 5.2.2.** — *Soit  $C$  une catégorie abélienne telle que pour tout couple d'objets  $(X, Y)$ ,  $\text{Card Hom}(X, Y)$  appartient à  $\mathfrak{U}$  et vérifiant  $AB_{5\mathfrak{U}}$ ,  $(A_k)_{k \in K}$ ,  $K$  élément de  $\mathfrak{U}$ , une famille génératrice. Un objet  $Q$  de  $C$  est injectif si et seulement si pour tout  $k$  appartenant à  $K$ , pour tout sous-objet  $V$  de  $A_k$ , et pour tout morphisme  $u : Y \longrightarrow Q$ , il existe un morphisme  $v : A_k \longrightarrow Q$  qui prolonge  $u$ .*

Soit un objet  $Y$  de  $C$ , un sous-objet  $X$  de  $Y$  et un morphisme  $f : X \longrightarrow Q$ . On considère l'ensemble  $E$  des morphismes de but  $Q$ , dont la source est un sous-objet de  $Y$  et qui prolonge  $f$  ; cet ensemble ordonné par la relation :  $f' < f''$  si et seulement si  $f''$  prolonge  $f'$  est *inductif*. Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une partie totalement ordonnée de  $E$ ,  $I$  étant un élément de  $\mathfrak{U}$  5.2.1,  $L = \varinjlim_I s(f_i)$  existe et c'est un sous-objet de  $Y$  en vertu de  $AB_{5\mathfrak{U}}$ , de plus il existe un morphisme  $l : L \longrightarrow Q$  qui prolonge  $f_i$  pour tout  $i$ . L'ensemble  $E$  admet donc un *élément maximal*  $f_0 : X_0 \longrightarrow Q$ .

Montrons que  $X_0 = Y$ . Pour cela supposons que  $X_0$  soit différent de  $Y$  et montrons qu'il existe un sous-objet  $X_1$  de  $Y$ ,  $X_0 < X_1$  et un morphisme  $l : X_1 \longrightarrow Q$  qui prolonge  $f$ .

Si le monomorphisme canonique  $i_0 : X_0 \longrightarrow Y$  n'est pas un isomorphisme, il existe  $k$  appartenant à  $K$  et  $\alpha : A_k \longrightarrow Y$  qui ne se factorise par  $i_0$ . Soit  $V$

l'image inverse de  $X_0$  par  $\alpha$ , c'est-à-dire  $\text{Ker}(\text{Coker } i_0 \alpha)$ , il existe un morphisme  $\beta : V \longrightarrow X_0$  unique tel que  $i_0 \beta = \alpha j$  avec  $j = \text{Ker}(\text{Coker } i_0 \alpha)$ . On considère  $X_1$ ,  $a, b$  la somme amalgamée de  $(X_0, \beta)$  et  $(A_k, j)$  au dessus de  $V$ , c'est un sous-objet de  $Y$ , en effet  $X_1$  est isomorphe à  $X_0 \vee \text{Im } \alpha$ . Comme  $j$  est un monomorphisme,  $a$  est un monomorphisme et  $X_0$  est un sous-objet de  $X_1$ , de plus  $X_0$  est différent de  $X_1$ , car  $\alpha$  se factoriserait alors par  $i_0$  au moyen de  $b$ . Par hypothèse le morphisme  $f_0 \beta : V \longrightarrow Q$  se prolonge en un morphisme  $g : A_k \longrightarrow Q$ . Comme  $gj = f_0 \beta$  il existe un morphisme  $f_1 : X_1 \longrightarrow Q$  tel que  $f_0 = f_1 a$ .



On énoncera le théorème dual.

**5.2.3.** Dans la catégorie  $\text{Mod}_{\mathcal{A}\mathfrak{U}}^S$  un objet  $Q$  est injectif si et seulement si pour tout idéal à gauche  $V$  de  $A$  et tout morphisme  $u : V \longrightarrow Q$  il existe un élément  $x$  de  $Q$  tel que  $u(\lambda) = \lambda x$  pour tout  $\lambda$  appartenant à  $V$ .

**5.3.** On dit qu'une catégorie abélienne  $C$  possède *assez d'objets injectifs* (resp. assez d'objets projectifs) si pour tout objet  $X$  de  $C$  il existe un *objet injectif*  $Q$  (resp. un objet projectif  $P$ ) et un *monomorphisme*  $X \longrightarrow Q$  (resp. un *épimorphisme*  $P \longrightarrow X$ ).

**Théorème 5.3.1.** — Soit  $C$  une catégorie vérifiant  $AB_{5\mathfrak{U}}$  et telle que pour tout couple d'objets  $(X, Y)$   $\text{Hom}(X, Y)$  appartient à  $\mathfrak{U}$ . S'il existe un générateur, la catégorie  $C$  possède assez d'objets injectifs.

Soit  $X$  un objet quelconque de  $C$ ,  $A$  le générateur,  $(B_k)_{k \in K}$  l'ensemble de tous les sous-objets de  $A$ ,  $K$  appartient à  $\mathfrak{U}$  en vertu du lemme 5.2.1, on pose  $J(X) = \bigcup_{k \in K} \text{Hom}(B_k, X)$ .

Soient  $B = \coprod_{k \in K} B_k^{(\text{Hom}(B_i, X))_4}$ , le morphisme de  $B$  dans  $X$  dont les composantes sont tous les morphismes de tous les sous-objets de  $A$  dans  $X$ , et  $i$  le monomorphisme de  $B$  dans  $A^{I(X)}$  somme directe des monomorphismes canoniques de  $B_i$  dans  $A$ ,  $i$  est bien un monomorphisme d'après  $AB_{5\mathbb{U}}$ .

On considère  $T_1(X) = (x, f) \coprod_B (i, A^{I(X)})$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & A^{I(X)} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ X & \xrightarrow{j_1} & T^1(X) \end{array}$$

Puisque  $i$  est un monomorphisme,  $j_1$  est monomorphisme, mais  $T^1(X)$  n'est pas en général injectif. On définit par *récurrence transfinie*, une suite d'objets  $T^\lambda(X)$  et pour tout couple  $(\lambda', \lambda)$  tel que  $\lambda' < \lambda$  un monomorphisme  $T^{\lambda'}(X) \longrightarrow T^\lambda(X)$ , de la façon suivante :

Si  $\lambda$  n'est pas un ordinal limite on pose  $T^\lambda(X) = T^1(T^{\lambda-1}(X))$

si  $\lambda$  est un ordinal limite on pose  $T^\lambda(X) = \varinjlim_{\lambda' < \lambda} T^{\lambda'}(X)$ , on remarque qu'on ne sortira pas de l'univers si l'ensemble des  $\lambda' < \lambda$  appartient à l'univers.

Pour tout couple  $(\lambda', \lambda)$ ,  $\lambda' < \lambda$  on obtient par cette construction un monomorphisme canonique  $T^{\lambda'}(X) \longrightarrow T^\lambda(X)$ .

On pose  $T^\circ(X) = X$ .

Soit  $\alpha$  le plus petit ordinal dont le cardinal est strictement plus grand que  $\text{Card } K$ . Montrons que  $T^\alpha(X)$  est injectif.

Soit  $(V, i)$  un sous-objet de  $A$  et  $u : V \longrightarrow T^\alpha(X)$ . Pour tout  $\lambda < \alpha$ , on note  $S^\lambda$  l'image inverse par  $u$  de  $T^\lambda(X)$ ,  $\alpha$  est un ordinal limite,  $T^\lambda(X) = \varinjlim_{\lambda' < \lambda} T^{\lambda'}(X)$  et en vertu de  $AB_{5\mathbb{U}}$   $V = \varinjlim_{\lambda < \alpha} S^\lambda$ . Le cardinal de l'ensemble des sous-objets de  $V$  est inférieur à  $\text{Card } K$  et l'ensemble des ordinaux inférieurs à  $\alpha$  a un cardinal supérieur à  $\text{Card } K$ , donc il existe  $\lambda_0 < \alpha$  à partir du que la suite  $S^\lambda$  est *stationnaire*. Donc  $u$  se factorise par  $u_0 : V \longrightarrow T^{\lambda_0}(X)$  et par définition de  $T_1(T^{\lambda_0}(X))$  il existe

---

<sup>4</sup>Si  $Y$  est un objet de  $C$ ,  $I$  un ensemble appartenant à  $\mathbb{U}$ , on note  $Y^{(I)}$  la somme  $\coprod_{i \in I} Y_i$  où pour tout  $i$ ,  $Y_i = Y$ .

un morphisme  $\bar{u} : A \longrightarrow T^{\lambda_0+1}(X)$  tel que le diagramme suivant soit commutatif. Donc  $u$  se prolonge en un morphisme  $v : A \longrightarrow T^\alpha(X)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V & & \\
 & \swarrow & \downarrow i & \searrow & \\
 & u_0 & A & u & \\
 & \swarrow & \downarrow \bar{u}_0 & \searrow & \\
 T^{\lambda_0}(X) & \longrightarrow & T^{\lambda_0+1} & \longrightarrow & T^\alpha(X)
 \end{array}$$

On énoncera le théorème dual.

**5.3.2.** Dans  $\text{Mod}_{\mathcal{A}\mathfrak{U}}^S$ ,  $A$  appartenant à  $\mathfrak{U}$ , qui vérifie  $AB_{5\mathfrak{U}}$  et dont  $A$  est un générateur, il existe assez d'injectifs. On déduit de 5.1.1 qu'il existe assez de projectifs.

### III. Foncteurs représentables

#### 1. Définition et propriétés

##### 1.1 Définition

Soit  $\mathfrak{U}$  un univers,  $C$  une catégorie telle que pour tout couple  $(X, Y)$  d'objets de  $C$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  appartient à  $\mathfrak{U}$ . On rappelle que  $\text{Hom}(., .)$  est un bifoncteur de  $C \times C$  dans  $\text{Ens}_{\mathfrak{U}}$  contravariant par rapport à la première variable, covariant par rapport à la seconde.

**1.1.1.** On appelle *catégorie des préfaisceaux* sur  $C$ , la catégorie  $\underline{\text{Hom}}(C^o, \text{Ens}_{\mathfrak{U}})$ , que l'on note  $\hat{C}$ .

On définit un foncteur  $\varepsilon$  de  $C$  dans  $\hat{C}$ . A tout objet  $Y$  de  $C$ ,  $\varepsilon$  fait correspondre le foncteur contravariant de  $C$  dans  $\text{Ens}_{\mathfrak{U}} : \text{Hom}(., Y)$ , que l'on note  $h_Y$ .

Tout morphisme  $f : Y \longrightarrow Y'$ ,  $\varepsilon$  associe le morphisme fonctoriel naturel de  $\text{Hom}(., Y)$  dans  $\text{Hom}(., Y')$ .

**1.1.2.** On dit que le foncteur  $h_Y$  est le *foncteur représenté* par  $Y$ .

On dit qu'un préfaisceau  $F$  est *représentable*, s'il existe un *objet*  $Y$  de  $C$  et un *isomorphisme*  $\varphi$  de  $h_Y$  sur  $F$ . On dit alors que  $F$  est représenté par le couple  $(Y, \varphi)$  ou encore que le couple  $(Y, \varphi)$  est une *donnée de représentation* de  $F$ .

##### 1.2 Propriétés

**Théorème 1.2.1.** — Si  $F$  est un préfaisceau sur  $C$ ,  $Y$  un objet de  $C$ , il existe une bijection de  $\text{Hom}(h_Y, F)$  sur  $F(Y)$ , fonctorielle en  $Y$ ,  $F$ .

- a. Soit  $u$  un morphisme de  $h_Y$  dans  $F$ . On rappelle (Chap. 1, 3.4) qu'à tout objet  $X$  de  $C$   $u$  fait correspondre une application  $u(X)$  de  $\text{Hom}(X, Y)$  dans  $F(X)$  que l'on notera  $u_X$ . Soit  $\alpha : \text{Hom}(h_Y, F) \longrightarrow F(Y)$  telle que  $\alpha(u) = u_Y(1_Y)$
- b. Soit  $\beta : F(Y) \longrightarrow \text{Hom}(h_Y, F)$ , qui à tout élément  $v$  de  $F(Y)$  fait correspondre le morphisme  $\beta(v) : h_Y \longrightarrow F$ , tel que pour tout objet  $X$  et tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  on ait  $\underline{\beta(v)}_X(f) = F(f)(v)$ . On vérifie en effet que pour tout morphisme  $g : X \longrightarrow X'$  le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(X', Y) = h_Y(X') & \xrightarrow{h_Y(g)} & \text{Hom}(X, Y) = h_Y(X) \\ \underline{\beta(v)}_{X'} \downarrow & & \downarrow \underline{\beta(v)}_X \\ F(X') & \xrightarrow{F(g)} & F(X) \end{array}$$

- c. Pour tout morphisme fonctoriel  $u$  de  $h_Y$  dans  $F$  et tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  on a  $u_X h_Y(f) = F(f) u_Y$ , en particulier  $F(f) u_Y(1_Y) = u_X(f)$ , donc  $\beta \alpha(u) = u$ . Inversement pour tout élément  $v$  de  $F(Y)$ ,  $\alpha \beta(v) = \underline{\beta(v)}_Y(1_Y) = F(1_Y)(v) = 1_F(Y)(v) = v$ .

**Corollaire 1.2.2.** — Si  $F$  est un préfaisceau représentable, représenté par  $(X, \varphi)$   $Y$  un objet de  $C$ , il existe une bijection de  $\text{Hom}(Y, X)$  sur  $\text{Hom}(h_Y, h_X)$ .

C'est dire que le foncteur canonique  $\varepsilon$  est *pleinement fidèle*, ce qui permet de “plonger” canoniquement toute catégorie  $C$  dans la catégorie  $\hat{C}$  des préfaisceaux sur  $C$ .

Aussi nous arrivera-t-il d'identifier un objet  $Y$  de  $C$  à  $h_Y$ , un morphisme fonctoriel de  $h_Y$  dans  $F$  à l'élément de  $F(Y)$  correspondant. Une donnée de représentation de  $F$  est définie à un isomorphisme unique près : en effet, si  $(X, \varphi)$ ,  $(X', \varphi')$  sont deux données de représentation de  $F$ ,  $h_X$  et  $h'_X$  sont isomorphes, comme  $\varepsilon$  est pleinement fidèle  $X$  et  $X'$  sont isomorphes ainsi que  $\varphi$  et  $\varphi'$ .

**Proposition 1.2.3.** — Soit  $F$  un préfaisceau sur  $C$ .

Le couple  $(X, \alpha)$ , où  $X$  est un objet de  $C$ ,  $\alpha$  un élément de  $F(X)$  définit une donnée de représentation de  $F$  si et seulement si pour tout couple  $(Y, \beta)$  où  $Y$  est un objet de  $C$ ,  $\beta$  un élément de  $F(Y)$ , il existe un unique morphisme  $v : Y \longrightarrow X$  tel que  $\beta = F(v)\alpha$ .

Si  $(X, \alpha)$  définit une donnée de représentation de  $F$ ,  $\alpha$  s'identifie à un isomorphisme de  $h_X$  sur  $F$ ,  $\beta$  s'identifie à un morphisme de  $h_Y$  dans  $F$ , et un morphisme  $v$  s'identifie à un morphisme de  $h_Y$  dans  $h_X$ . Pour tout objet  $Y$ , et tout morphisme  $\beta : h_Y \longrightarrow F$ , il existe bien un unique morphisme  $h_Y \longrightarrow h_X$  tel que  $\beta = \alpha u$ , à savoir  $u = \alpha^{-1}\beta$

$$\begin{array}{ccc} h_X & \xrightarrow{\approx \alpha} & F \\ & \nwarrow u \quad \nearrow \beta & \\ & h_Y & \end{array}$$

Réciproquement si  $(X, \alpha)$  jouit d'une telle propriété universelle, pour tout  $Y$  il existe une bijection de  $\text{Hom}(Y, X) = h_X(Y)$  sur  $\text{Hom}(h_Y, F) \simeq F(Y)$ , donc  $\alpha$  est un isomorphisme fonctoriel, et  $(X, \alpha)$  définit une donnée de représentation de  $F$ .

## 2. Application

De nombreuses notions peuvent s'interpréter avantageusement en langage de foncteurs représentables.

**2.1.** Soit  $C$  une catégorie,  $D$  un type de diagramme et  $\varphi : D \longrightarrow C$ . Pour tout objet  $Y$  de  $C$ , on définit le diagramme constant  $C_Y$  : pour tout objet  $i$  de  $D$   $C_Y(i) = Y$ , pour toute flèche  $f$  de  $D$   $C_Y(f) = 1_Y$ . Pour tout objet  $Y$  de  $C$ , l'ensemble des systèmes admissibles  $(Y, u_i)_{i \in \text{Ob } D}$  de  $\varphi$  est l'ensemble  $\text{Hom}(C_Y, \varphi)$ .

Soit  $F$  le préfaisceau sur  $C$  défini par  $F(Y) = \text{Hom}(C_Y, \varphi)$ . En appliquant 1.2.3 on obtient la

**Proposition 2.1.1.** — *La limite projective de  $\varphi$  existe si et seulement si le foncteur  $F$  est représentable.*

Si  $\varphi$  ne possède pas de limite projective dans  $C$ , on utilise souvent le procédé suivant on plonge  $C$  dans  $\hat{C}$  au moyen du foncteur  $\varepsilon$  et on appelle limite projective de  $\varphi$  la limite projective de  $\varepsilon\varphi$ , qui existe toujours puisque  $\hat{C} = \text{Hom}(C^o, \text{Ens}_{\mathbb{U}})$ .

2.2. On considère la catégorie des modules sur un anneau commutatif  $A$ ,  $\text{Mod}_A$ . Soient  $M$  et  $N$  deux modules, le foncteur de  $\text{Mod}_A$  dans  $\text{Ens}$  qui à tout module  $P$  fait correspondre l'ensemble  $\text{Bil}_A(M \times N, P)$  des applications bilinéaires de  $M \times N$  dans  $P$  est *représentable*, et le module qui le représente est le produit tensoriel  $M \otimes_A N$ .

2.3. On peut définir dualement un foncteur  $\varepsilon' : C^o \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(C, \text{Ens})$ . On définira alors un foncteur représentable et l'on vérifiera que cette notion recouvre celle de limite inductive.

### 3. Structures algébriques dans les catégories

On se propose de *définir* une structure algébrique par exemple une structure de groupe sur un objet  $X$  d'une catégorie  $C$ . On peut procéder de deux façons.

3.1. La plus naturelle consiste à généraliser dans la catégorie  $C$ , la notion habituelle de structure algébrique sur un ensemble.

Supposons que dans  $C$  le produit  $X \amalg X$  existe, une *loi de composition interne* sur  $X$  est la donnée d'un morphisme  $m_X : X \amalg X \longrightarrow X$ .

Les axiomes définissant sur  $X$  une *structure de  $C$ -groupe* vont s'exprimer en terme de commutativité de diagrammes. Supposons que  $X \amalg X \amalg X$  existe, on a les isomorphismes canoniques :  $(X \amalg X) \amalg X \simeq X \amalg X \amalg X \simeq X \amalg (X \amalg X)$ .

3.1.1. La loi est *associative* si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X \amalg X & \xrightarrow{m_X \amalg 1_X} & X \amalg X \\ \downarrow 1_X \amalg m_X & & \downarrow m_X \\ X \amalg X & \xrightarrow{m_X} & X \end{array}$$

Supposons de plus qu'il existe dans  $C$  un objet final  $E$ , il existe alors un unique morphisme  $e : X \longrightarrow E$ .

3.1.2. Il existe un morphisme  $w : E \longrightarrow X$  tel que les diagrammes suivants



soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 E \amalg X & \xrightarrow{\omega \amalg 1_X} & X \amalg X \\
 \nwarrow \simeq & & \swarrow m_X \\
 & X &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X \amalg E & \xrightarrow{1_X \amalg \omega} & X \amalg X \\
 \nwarrow \simeq & & \swarrow m_X \\
 & X &
 \end{array}$$

On montre que  $w$  est alors déterminé de façon unique.

**3.1.3.** Il existe un *morphisme*  $s : X \longrightarrow X$  tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{(s, 1_X)} & X \amalg X \\
 e \downarrow & & \downarrow \\
 E & \xrightarrow{\omega} & X
 \end{array}$$

ainsi que celui obtenu en permettant  $s$  et  $1_X$ . On montre que le morphisme  $s$  est déterminé de façon unique.

On pourrait de façon duale définir une structure de  $C$ -cogroupe.

**3.2.** *Sans faire d'hypothèses* sur la catégorie  $C$ , on peut définir une structure sur  $X$  en se ramenant au cas *ensembliste*. Les limites projectives existent dans  $\hat{C}$ , ainsi pour deux éléments  $F, F'$  de  $\hat{C}$ , pour tout objet  $X$  de  $C$ ,  $F \amalg F'(X) = F(X) \amalg F'(X)$ .

Une *loi de composition interne* sur  $X$  est la donnée d'un *morphisme*  $M_X : h_X \amalg h_X \longrightarrow h_X$ . Cela revient à se donner pour tout objet  $Y$  de  $C$ , une loi de composition interne sur l'ensemble  $h_X(Y)$  qui soit fonctorielle, c'est-à-dire telle que pour tout  $u : Y \longrightarrow Y'$ ,  $h_X(u) : h_X(Y') \longrightarrow h_X(Y)$  soit un morphisme au sens de la structure considérée.

**3.3.** Dans le cas particulier où le produit  $X \amalg X$  existe dans  $C$ ,  $h_X \amalg h_X$  est canoniquement isomorphe à  $h_{X \amalg X}$ , une loi de composition interne sur  $X$  peut donc être considérée comme un morphisme  $M_X : h_{X \amalg X} \longrightarrow h_X$  il lui est donc canoniquement associé (III, 1.2.2) un morphisme  $m_X : X \amalg X \longrightarrow X$  tel que  $\varepsilon(m_X) = h_{m_X} = M_X$ .

**3.3.1.** Si l'on suppose que  $X \amalg X \amalg X$  existe,  $X \amalg X \amalg X$  étant canoniquement identifié à  $(X \amalg X) \amalg X$  l'application  $M_X(Y) \amalg 1_{h_X(Y)}$  s'identifie pour tout objet  $Y$  de  $C$  à  $h_{m_X \amalg 1_X}(Y)$ . Il est donc *équivalent* de dire que la loi  $M_X$  est associative, c'est-à-dire que pour tout  $Y$  le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) \amalg h_X(Y) \amalg h_X(Y) & \xrightarrow{M_X(Y) \amalg 1} & h_X(Y) \amalg h_X(Y) \\ \downarrow 1 \amalg M_X(Y) & & \downarrow M_X(Y) \\ h_X(Y) \amalg h_X(Y) & \xrightarrow{M_X(Y)} & h_X(Y) \end{array}$$

ou que le diagramme **3.1.1** est commutatif.

**3.3.2.** S'il existe dans  $C$  un objet final...

$E, h_E$  est objet final de  $\hat{C}$ , le morphisme  $\Omega : h_E \longrightarrow h_X$  induit un morphisme  $\omega : E \longrightarrow X$  qui vérifie la propriété **3.1.2**.

**3.3.3.** Pour tout  $Y$  de  $C$  il existe un morphisme  $S(Y) : h_X(Y) \longrightarrow h_X(Y)$  fonctoriel par rapport à  $Y$ , soit  $S : h_X \longrightarrow h_X$  est un morphisme auquel est canoniquement associé un morphisme  $s : X \longrightarrow X$  tel que  $\varepsilon(s) = h_s = S$ , et tel que le diagramme **3.1.3** correspondant soit commutatif.

**3.4.** Il faut remarquer qu'il y a des structures que l'on ne peut définir de cette façon, par exemple si leur définition fait intervenir des limites inductives, car  $\varepsilon : C \longrightarrow \hat{C}$  ne commute pas aux limites inductives.

## Quelques ouvrages de références

- [1] ECKMANN - HILTON — *Group-like structure in general categories*. I. Math. Ann. **145** (1962) 227-255 ; II. Math. Ann. **151** (1963), 150-186 ; III. Math. Ann. **150** (1963) 165-187.
- [2] EHRESMANN — *Catégories et structures*. (Dunod 1965).
- [3] FREYD — *Abelian categories*. Harter et Row Publishers N-Y 1964.
- [4] GABRIEL — *Des catégories abéliennes*. Thèse. Bulletin Société Mathématique de France (1962) 323 - 448.
- [5] GROTHENDIECK —  
*Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tohoku Math. Journal. Vol. 9 p. 119 - 221 (1977).  
*Éléments de géométrie algébrique*. I.H.E.S Publications mathématiques (1961 - 62).
- [6] HILTON — *Catégories non abéliennes*. Séminaire d'été de Montreal (1964).
- [7] MITCHELL — *Theory of categories*. Academic Press (1965).

1966

---

•

## UN THÉORÈME SUR LES HOMOMORPHISMES DE SCHÉMAS ABÉLIENS

---

- This text was published in: *Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens*. Inventiones Math. 2, 59-78 (1966)
- Scan

LETTER TO J. COATES  
6.1.1966

---

- Letter on the standard conjectures
- [scan]

Dear Coates,

Here a few more comments to my talk on the conjectures. The following proposition shows that the conjecture  $C_\ell(X)$  is independent of the chosen polarization, and has also some extra interest, in showing the part played by the fact that  $H^i(X)$  should be “motive-theoretically” isomorphic to its natural dual  $H^{2n-i}(X)$  (as usual, I drop the twist for simplicity).

*Proposition. — The condition  $C_\ell(X)$  is equivalent also to each of the following conditions:*

- a)  $D_\ell(X)$  holds, and for every  $i < n$ , there exists an isomorphism  $H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^i(X)$  which is algebraic (i.e. induced by an algebraic correspondence class; we do not make any assertion on what it induces in degrees different from  $2n - i$ ).*
- b) For every endomorphism  $H^i(X) \longrightarrow H^i(X)$  which is algebraic, the coefficients of the characteristic polynomial are rational, and for every  $i < n$ , there exists an isomorphism  $H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^i(X)$  which is algebraic.*

*Proof.* — I sketched already how  $D_\ell(X)$  implies the fact that for an algebraic endomorphism of  $H^i(X)$ , the coefficients of the characteristic polynomial are rational numbers. Therefore we know that a) implies b), and of course  $C_\ell(X)$  implies a). It remains to prove that b) implies  $C_\ell(X)$ . Let  $u : H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^i(X)$  be the given isomorphism which is algebraic, and  $v : H^i(X) \longrightarrow H^{2n-i}(X)$  the algebraic isomorphism in the opposite direction, induced by  $L_X^{n-i}$ . Then  $uv = w$  is an automorphism of  $H^i(X)$  which is algebraic, and the Hamilton-Cayley formula  $u^b - \sigma_1(w)u^{b-1} + \dots + (-1)^b \sigma_b(w) = 0$  (where the  $\sigma_i(w)$  are the coefficients of the characteristic polynomial of  $w$ ) shows that  $w^{-1}$  is a linear combination of the  $w^i$ , with coefficients of the type  $+/- \sigma_i(w)/\sigma_b(w)$  (N.B.  $b = \text{rank } H^i$ ). The assumption implies that these coefficients are rational, which implies that  $w^{-1}$  is algebraic, and so is  $w^{-1}u = v^{-1}$ , which was to be proved.

N.B. In characteristic 0, the statement simplifies to:  $C(X)$  equivalent to the existence of algebraic isomorphisms  $H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^i(X)$ , (as the preliminary in

b) is then automatically satisfied). Maybe with some extra care this can be proved too in arbitrary characteristics.

Corollary. — *Assume  $X$  and  $X'$  satisfy condition  $C_\ell$ , and let  $u : H^i(X) \longrightarrow H^{i+2D}(X')$  ( $D \in \mathbb{Z}$ ) be an isomorphism which is algebraic. Then  $u^{-1}$  is algebraic.*

Indeed, the two spaces can be identified “algebraically” (both directions!) to their dual, so that the transpose of  $u$  can be viewed as an isomorphism  $u' : H^{i+2D}(X') \longrightarrow H^i(X)$ . Thus  $u'u$  is an algebraic automorphism  $w$  of  $H^i(X)$ , and by the previous argument we see that  $w^{-1}$  is algebraic, hence so is  $u^{-1} = w^{-1}u'$ .

As a consequence, we see that if  $x \in H^i(X)$  is such that  $u(x)$  is algebraic ( $i$  being now assumed to be even), then so is  $x$ . The same result should hold in fact if  $u$  is a monomorphism, the reason being that in this case there should exist a left-inverse which is algebraic; this exists indeed in a case like  $H^{n-1}(X) \longrightarrow H^{n-1}(Y)$  (where we take the left inverse  $\bigwedge_X \varphi_*$ ). But to get it in general, it seems we need moreover the Hodge index relation. (The complete yoga then being that we have the category of motives which is semi-simple!). Without speaking of motives, and staying down on earth, it would be nice to explain in the notes that  $C(X)$  together with the index relation  $I(X \times X)$  implies that the ring of correspondences classes for  $X$  is semi-simple, and how one deduces from this the existence of left and right inverses as looked for above.

This could be given in an extra paragraph (which I did not really touch upon in the talk), containing also the deduction of the Weil conjectures from the conjectures  $C$  and  $A$ .

A last and rather trivial remark is the following. Let's introduce variants  $A'_\ell(X)$  and  $A''_\ell(X)$  as follows:

$A'_\ell(X)$  : if  $2i \leq n-1$ , any element  $x$  of  $H^i(X)$  whose image in  $H^i(Y)$  is algebraic, is algebraic.

$A''_\ell(X)$  : if  $2i \geq n-1$ , any algebraic element of  $H^{i+2}(X)$  is the image of an algebraic element of  $H^i(Y)$ .

Let us consider also the specifications  $A'_\ell(X)^\circ$  and  $A''_\ell(X)^\circ$ , where we restrict to the critical dimensions  $2i = n-1$  if  $n$  odd,  $2i = n-2$  if  $n$  even. All these conditions are in the nature of “weak” Lefschetz relations, and they are trivially implied by  $A_\ell(X)$  resp.  $C_\ell(X)$  (in the first case, applying  $\varphi$  we see that  $L_X X$  is



algebraic; in the second, we take  $y = \bigwedge_Y \varphi^+(x)$ ). The remark then is that these pretendently “weak” variants in fact imply the full Lefschetz relations for algebraic cycles, namely:

*Proposition. —  $C_\ell(X)$  is equivalent to the conjunction  $C_\ell(Y) + A_\ell(X \times X)^\circ + A''_\ell(X \times X)^\circ$ , hence (by induction) also to the conjunction of the conditions  $A'_\ell{}^\circ$  and  $A''_\ell{}^\circ$  for all of the varieties  $X \times X, Y \times Y, Z \times Z, \dots$  Analogous statement with  $X \times Y, Y \times Z$  etc instead of  $X \times X, Y \times Y$  etc.*

This comes from the remark that  $A_\ell(X)^\circ$  follows from the conjunction of  $A'_\ell(X)^\circ$  and  $A''_\ell(X)^\circ$ , as one sees by decomposing  $L_X^2 : H^{2m-2}(X) \longrightarrow H^{2m+2}(X)$  into  $H^{2m+2}(X) \xrightarrow{\varphi^k} H^{2m+2}(Y) \xrightarrow{\varphi_\alpha} H^{2m}(X) \xrightarrow{L_X} H^{2m+2}(X)$  if  $\dim X = 2m$  is even, and  $H^{2m+1-1}(X) \longrightarrow H^{2m+1+1}$  into  $H^{2m}(X) \xrightarrow{\varphi^*} H^{2m}(Y) \xrightarrow{\varphi_*} H^{2m+2}(X)$  if  $\dim X = 2m + 1$  is odd.

Sincerely yours

LETTRE À J. TATE  
5.1966

---

- Letter on crystals
- [scan]

Cher John,

J'ai réfléchi aux groupes formels et à la cohomologie de De Rham, et suis arrivé à un projet de théorie, ou plutôt de début de théorie, que j'ai envie de t'exposer, pour me clarifier les idées.

## Chapitre 1. — La notion de cristal

Commentaire terminologique : Un cristal possède deux propriétés caractéristiques : la *rigidité*, et la faculté de *croître*, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de soufre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs etc.

1.0. — Soit  $S$  un préschéma, au dessus d'un autre  $R$ ; dans le cas qui nous intéressera le plus, on aura  $R = \text{Spec}(\mathbf{Z})$ . Soit  $C$  la catégorie des  $R$ -préschémas  $T$  sous  $S$ , (i.e. munis d'un  $R$ -morphisme  $S \longrightarrow T$ ), tels que  $S \longrightarrow T$  soit une immersion fermée définie par un idéal localement nilpotent. On a le foncteur "oubli" de  $C$  dans  $\text{Sch}$ , et la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur des préschémas variables induit donc une catégorie fibrée sur  $C$ , associant à tout  $T$  la catégorie des Modules quasi-cohérents sur  $T$ .

Définition (1.1). — *On appelle cristal de modules (sous-entendu: quasi-cohérents) sur  $S$ , relativement à  $R$ , une section cartésienne de la catégorie fibrée précédente au dessus de  $C$ . Plus généralement, pour toute catégorie fibrée  $\mathcal{F}$  sur  $\text{Sch}_{/R}$ , on définit la notion de " $\mathcal{F}$ -cristal" sur  $S$ , ou "cristal en objets de  $\mathcal{F}$ ", de la façon correspondante. Ceci donne un sens aux expressions: cristal en algèbres, en algèbres commutatives, en préschémas relatifs etc, sur  $S$  relativement à  $R$ . Quand  $R = \text{Spec}(\mathbf{Z})$ , on parlera de "cristal absolu" sur  $S$ , de l'espèce considérée.*

1.2. — Les  $\mathcal{F}$ -cristaux sur  $S$  forment une catégorie, qui dépend fonctoriellement de  $\mathcal{F}$ . Ceci permet, en particulier, de définir sur la catégorie des cristaux de modules sur  $S$  les opérations tensorielles habituelles: produit tensoriel de deux cristaux de modules etc, satisfaisant aux propriétés habituelles.

**1.3.** — Regardons de même ce qui se passe quand on fixe  $\mathcal{F}$  et fait varier  $R, S$ . Tout d’abord, si  $R \longrightarrow R' \longrightarrow R$ , alors tout cristal sur  $S$  relativement à  $R$  en définit un relativement à  $R'$ , par simple restriction. En particulier, un cristal absolu définit un cristal relatif, pour tout préschéma de base  $R$  de  $S$ .

Fixons maintenant  $R, S$ , et soit  $S' \longrightarrow S$  un morphisme. On définit alors de façon naturelle un foncteur “image inverse” allant des cristaux de type  $\mathcal{F}$  sur  $S$  vers les cristaux de type  $\mathcal{F}$  sur  $S'$  (tout relatif à  $R$ ). Pour s’en assurer, il suffit de définir un foncteur  $C' \longrightarrow C$  (ou  $C'$  est défini en termes de  $S'$  comme  $C$  en termes de  $S$ ), compatible avec les foncteurs “oubli”. Or si  $S' \longrightarrow T'$  est un objet de  $C'$ , il y a une construction évidente de somme amalgamée dans la catégorie des préschémas, qui donne un  $T = S \amalg_{S'} T'$  et un morphisme  $S \longrightarrow T$ , qui fait de  $T$  un objet de  $C$ , ce qui définit le foncteur cherché.

On peut donc dire que pour un  $S$  variable sur  $R$ , les cristaux de type  $\mathcal{F}$  sur  $S$  forment une *catégorie fibrée* sur  $\text{Sch}_R$ , grâce à la notion d’image inverse précédente.

Les deux variantes (en  $R$ , et en  $S$ ) sont compatibles dans un sens évident, et peuvent être regardées comme provenant d’une variance en  $(R, S)$  directement.

**1.4.** — On a un foncteur naturel et évident qui va des cristaux de modules (disons) sur  $S$  (rel à  $R$ ) dans des Modules quasi-cohérents sur  $S$ : c’est le foncteur “valeurs en  $S$ ”. On fera attention que ce foncteur n’est en général pas même fidèle (cf exemple 1.5. plus bas). Il est donc un peu dangereux de vouloir considérer un cristal de modules sur  $S$  comme étant un Module quasi-cohérent  $\mathcal{M}$  sur  $S$ , muni d’une structure supplémentaire, sa “structure cristalline”. Dans certains cas cependant (cf 1.8.), le foncteur cristaux de modules  $\rightsquigarrow$  Modules est fidèle et le point de vue précédent devient plus raisonnable.

**1.5. Exemple 1: relations avec les vecteurs de Witt.** — Supposons que  $S$  soit le spectre d’un corps *parfait*  $k$ , et  $R = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Soit  $W$  l’anneau de Cohen de corps résiduel  $k$ : si  $\text{car } k > 0$ , c’est l’anneau des vecteurs de Witt défini par  $k$ , si  $\text{car } k = 0$ , c’est  $k$  lui-même; dans ce dernier cas, supposons  $k$  *algébrique* sur  $\mathbb{Q}$ . Alors il est bien connu que la catégorie  $C$  de 1.0. est équivalente à celle des  $W$ -algèbres locales, annulées par une puissance de l’idéal maximal de  $W$ , à extension résiduelle triviale. Écrivant  $W = \varprojlim W_n$  comme à l’accoutumée, dans le cas  $p > 0$ , on trouve

que la donnée d'un cristal de modules (absolu) sur  $k$  équivaut à celle d'un système projectif  $(M_n)$  “ $p$ -adique” de modules  $M_n$  sur les  $W_n$  ; donc les cristaux de modules de présentation finie sur  $k$  forment une catégorie équivalente à celle des modules de type fini sur  $W$ . Si  $p = 0$ , alors la catégorie des cristaux de modules sur  $k$  est équivalente à celle des vectoriels sur  $k = W$ . Ces descriptions sont compatibles avec les notions de changement de base pour  $k$  variable. Elles se formulent évidemment pour toute autre espèce de cristaux, défini par une catégorie fibrée  $\mathcal{F}$ .

Dans le cas envisagé, le foncteur “valeur en  $S$ ”, sur la catégorie des cristaux de présentation finie sur  $k$ , s'identifie au foncteur  $\otimes_W k$  sur la catégorie des modules de type fini sur  $W$ , foncteur qui (si  $p > 0$ ) n'est pas fidèle.

**1.6. Exemple 2.  $S$  étale sur  $R$ .** — Si  $S = R$ , la catégorie  $C$  admet  $R$  lui-même comme objet final, donc le foncteur “valeur en  $R$ ” est une équivalence de la catégorie des cristaux sur  $R$ , de type  $\mathcal{F}$  donné, avec la catégorie  $\mathcal{F}_R$ . En particulier, un cristal de modules sur  $\text{Spec } \mathbf{Z}$  est essentiellement la même chose qu'un  $\mathbf{Z}$ -module.

De façon un peu plus général, si  $S$  est étale sur  $R$ , alors  $S$  est un objet final de  $C$ , et les cristaux de modules (disons) sur  $S$ , relativement à  $R$ , s'identifient aux Modules quasi-cohérents sur  $S$ .

**1.7. Exemple 3 :  $S$  un sous-préschéma de  $R$ .** — Comme la notion de cristal relatif sur  $S$  ne change pas si on remplace  $R$  par un ouvert par lequel se factorise  $S$ , on peut supposer  $S$  fermé dans  $R$ , défini par un idéal quasi-cohérent  $J$ . Soit  $S_n = V(J^{n+1})$  le  $n$ -ème voisinage infinitésimal de  $R$  dans  $S$ . Alors la famille des objets  $S_n$  de  $C$  est finale dans  $C$ , d'où on conclut facilement qu'un cristal de type  $\mathcal{F}$  sur  $S$  s'identifie à une suite  $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'objets des  $F_{S_n}$  qui se recollent. En particulier, si  $R$  est localement noethérien, un cristal de modules sur  $S$  relativement à  $R$ , de présentation finie, s'identifie à un Module cohérent sur le complété formel de  $R$  le long de  $S$ .

Cet exemple contient le cas de car  $p > 0$  de l'exemple 1, si on note qu'à priori, grâce à Cohen, un cristal absolu sur  $k$ , c'est pareil qu'un cristal relativement à  $W$ .

On peut aussi donner un énoncé commun aux exemples 2 et 3, en partant du cas où on se donne un  $S \rightarrow R$  non *ramifié*, ce qui permet en effet de construire encore des “voisinages infinitésimaux”  $S_n$ .

**1.8. Relation avec la notion de stratification.** — Les données  $R, S, \mathcal{F}$  étant

comme d'habitude, considérons pour chaque entier  $n \geq 0$  le voisinage infinitésimal  $\Delta_n$  de la diagonale de  $S \times_R S$ , qui s'envoie dans  $S$  par les deux projections  $pr_1$  et  $pr_2$ . Si  $E$  est un objet de  $\mathcal{F}_S$ , une  $n$ -*connexion* sur  $E$  (relativement à  $R$ ) est la donnée d'un isomorphisme  $pr_1^*(E) \simeq pr_2^*(E)$  qui induit l'identité sur la diagonale. Une  $\infty$ -*connexion* ou *pseudo-stratification* de  $E$ , est la donnée pour tout  $n$  d'une  $n$ -connexion, de telle façon que ces  $n$ -connexions se recollent. Enfin, une *stratification* sur  $E$  est la donnée d'une pseudo-stratification qui satisfait aux conditions formelles d'une donnée de descente, quand on fait intervenir les voisinages infinitésimaux de tous ordres de la diagonale de  $S \times_R S \times_R S$ . Ces notions donnent lieu à des sorties analogues à ceux de 1.2. et 1.3. Notons que lorsque  $S$  est “formellement non ramifié sur  $R$ ” i.e.  $\Omega_{S/R}^1 = 0$ , alors toutes ces notions deviennent triviales: un objet  $E$  admet alors toujours exactement une connexion de tout ordre, donc une seule pseudo-stratification, et celle-ci est une stratification: donc la catégorie des objets de  $\mathcal{F}_S$  munis d'une stratification relativement à  $R$  est alors équivalente, par le foncteur “valeur en  $S$ ”, à la catégorie  $\mathcal{F}_R$  elle-même. (Dans tous les cas, le foncteur “valeur en  $S$ ” est fidèle).

Ceci défini, on voit que pour tout cristal  $\mathcal{M}$  sur  $S$  de type  $\mathcal{F}$  (relativement à  $R$ ), sa valeur  $\mathcal{M}(S) = M$  est un objet de  $\mathcal{F}_S$  muni d'une *stratification canonique* relativement à  $R$ , d'où un foncteur: cristaux relatifs de type  $\mathcal{F} \rightsquigarrow$  objets de  $\mathcal{F}$  munis d'une stratification. La remarque de 1.4. montre d'ailleurs que ce foncteur n'est pas toujours fidèle. Il y a cependant des cas intéressants où ce foncteur est une *équivalence de catégories*: il en est en tous cas ainsi si  $S \longrightarrow R$  est “*formellement lisse*”, par exemple si c'est un morphisme lisse, ou si  $S$  et  $R$  sont des spectres de corps  $k_0, k$ , avec  $k$  une extension *séparable* de  $k_0$ . (Quand d'ailleurs  $S \longrightarrow R$  est même formellement étale, alors les deux catégories: celle des cristaux et celle des objets à stratification, deviennent équivalentes, par le foncteur “valeur en  $S$ ”, à  $\mathcal{F}_S$  lui-même, ce qui nous redonne l'exemple à la noix de 1.5 ou  $k$  est de car. nulle). Sauf erreur, on a encore une équivalence de catégories si  $S \longrightarrow R$  est *plat et localement de présentation finie*, (du moins si  $R$  localement noétherien, et se bornant aux Modules cohérents) mais je n'ai pas écrit la démonstration.

### 1.9. Une digression sur la notion de stratification en caractéristique nulle.

— Quand  $S$  est lisse sur  $R$  (en fait, il suffit que  $S$  soit différentiellement lisse sur  $R$ ,

i.e. le morphisme diagonal  $S \longrightarrow S \times_R S$  une immersion régulière), et si  $R$  est de caractéristique nulle, alors une stratification d'un Module  $M$  sur  $S$  (relativement à  $R$ ) est connue quand on connaît la 1-connexion qu'elle définit, et on peut se donner celle-ci arbitrairement, soumise à la seule condition que le "tenseur courbure", qui est une certaine section de  $\underline{\Omega}_{S/R}^2 \otimes \text{End}(M)$ , soit nul. (Cela peut aussi s'exprimer en disant qu'on fait opérer le faisceau  $\underline{\text{Der}}_{S/R}$  des dérivations relatives de  $S$  sur  $R$ , sur  $M$ , de façon à satisfaire aux relations habituelles, y compris celle de transformer crochet en crochet). J'ignore dans quelle mesure l'hypothèse de lissité est nécessaire pour cet énoncé, ou si (dans le cas lisse disons) on peut formuler un énoncé analogue pour toute catégorie fibrée  $\mathcal{F}$  sur  $\text{Sch}/R$ . Mais bien entendu, l'hypothèse de caractéristique nulle faite sur  $R$  est tout à fait essentielle. Si  $R$  est de caractéristique  $p > 0$ , l'énoncé qui remplace le précédent (et qui sauf erreur est dû à Cartier) est que dans ce cas, la donnée d'une "connexion sans torsion" sur  $M$ <sup>1</sup> équivaut à une "donnée de descente" sur  $M$  relativement à frobenius  $S \longrightarrow S^{(p/R)}$ . Il y a loin de là à une stratification !

**1.10. La notion de  $p$ -cristal et ses variantes.** — Nous supposons maintenant que  $S$  est de caractéristique  $p > 0$ , et  $R = \text{Spec}(\mathbf{Z})$  (ou  $\text{Spec}(\mathbf{Z}_p)$ , spectre des entiers  $p$ -adiques, cela reviendrait au même). Si  $\mathcal{M}$  est un cristal de modules sur  $S$ , de présentation finie, alors en vertu de 1.5., pour tout  $s \in S$ , si  $s'$  est le spectre d'une clôture parfaite de  $k(s)$ , l'image inverse  $\mathcal{M}(s')$  de  $\mathcal{M}$  en  $s'$  peut être interprétée comme un module de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt  $W(k(s'))$ . Ainsi, la notion de cristal de modules sur  $S$  (au sens absolu) semble convenable pour formaliser la notion de "*famille algébrique de modules sur les anneaux de vecteurs de Witt aux différents points parfaits au dessus de  $S$* ". Bien entendu, la notion de cristal est plus fine que ça encore, et doit donner, j'espère, la bonne notion de "famille" lorsque, disons,  $S$  est le spectre d'un corps de fonctions (donc pas nécessairement parfait). Je vais maintenant introduire une structure supplémentaire, qui devrait permettre de formuler, de même, la notion de "*famille algébrique de modules de Dieudonné*", paramétrée par  $S$ ,

Considérons le morphisme "puissance  $p$ -ème"

$$S \xrightarrow{\text{frob}_S} S,$$

---

<sup>1</sup>"compatible avec puissances  $p$ -èmes"

il permet d'associer, à tout cristal (absolu) sur  $S$ , d'espèce quelconque, un cristal image inverse:

$$\mathcal{M}^{(p)} = \text{frob}_S(\mathcal{M}).$$

On appelle *p-cristal* sur  $S$  un cristal  $\mathcal{M}$  sur  $S$ , muni d'un morphisme de cristaux

$$\mathcal{M}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{M}.$$

Évidemment, les  $p$ -cristaux sur  $S$  d'espèce  $\mathcal{F}$  donnée forment encore une catégorie, dépendant fonctoriellement de  $\mathcal{F}$  (pour les foncteurs *covariants* cartésiens de catégories fibrées), ce qui permet par exemple, pour les  $p$ -cristaux de modules sur  $S$ , d'introduire toutes les opérations tensorielles habituelles covariantes (produits tensoriels, puissances alternées et symétriques etc). Pour définir le *dual* d'un  $p$ -cristal de modules, il y a lieu d'introduire une notion duale de celle de  $p$ -cristal d'espèce  $\mathcal{F}$ , c'est celle de  $p^{-1}$ -cristal d'espèce  $\mathcal{F}$  : c'est un cristal d'espèce  $\mathcal{F}$ , avec un morphisme de cristaux en sens inverse:

$$V : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{(p)}.$$

Ainsi un contrafoncteur cartésien entre catégories fibrées sur  $\text{Sch}$  transforme  $p$ -cristaux en  $p^{-1}$ -cristaux, et inversement. Les  $p^{-1}$ -cristaux de modules se multiplient tensoriellement entre eux comme les  $p$ -cristaux de modules.

Pour obtenir une notion "autoduale", il y a lieu d'introduire la notion de *bi-cristal de poids 1* sur  $S$ , qu'on pourrait aussi appeler un *cristal de Dieudonné* sur  $S$ , lorsque  $\mathcal{F}$  est fibré en catégories additives: c'est un cristal muni à la fois d'une  $p$ -structure et d'une  $p^{-1}$ -structure, satisfaisant aux relations

$$FV = p \text{Id}_M, \quad VF = \text{Id}_{M^{(p)}}.$$

Cette notion semble tout à fait adéquate à l'étude des groupes formels, ou ce qui revient moralement au même, à l'étude de la cohomologie de De Rham en dimension 1. En dimension supérieure  $i$ , il y a lieu d'introduire la notion de *bi-cristal de poids  $i$* , qui est un cristal muni de  $F$  et  $V$  satisfaisant aux relations

$$FV = p^i \text{Id}_M, \quad VF = p^i \text{Id}_{M^{(p)}}.$$



Par exemple, on définit le *bicristal de Tate de poids  $2i$* , qui est défini par le cristal de modules unité (associant à tout  $T$  sous  $S$  le module  $\underline{O}_T$  lui-même), et les morphismes de cristaux

$$F = p^i \text{Id}_{T^i}, \quad V = p^i \text{Id}_{T^i}.$$

Ainsi le bicristal de Tate de poids  $2i$  est la puissance tensorielle  $i$ -ème du bicristal de Tate de poids 1. (**N.B.** les bicristaux de poids quelconques se multiplient tensoriellement, de façon que les poids s'ajoutent).

**1.11.** — Si on veut “rendre inversible” le bicristal de Tate  $T^1$ , on est obligé, qu’on le veuille ou non, de passer à une catégorie de fractions de la catégorie des cristaux de modules sur  $S$ , (qui entre parenthèses est une catégorie  $\mathbf{Z}_p$ -linéaire, (i.e. les  $\text{Hom}$  sont des  $\mathbf{Z}_p$ -modules...), tout comme les catégories de  $p$ -cristaux etc qu’on en déduit). Il revient donc au même de passer à une catégorie de fractions, en déclarant qu’on veut rendre notre catégorie abélienne  $\mathbf{Q}$ -linéaire, ou en déclarant qu’on la veut rendre  $\mathbf{Q}$ -linéaire : il faut faire le quotient par la sous-catégorie abélienne épaisse formée des objets de torsion, qui sont aussi des objets de  $p$ -torsion<sup>2</sup>. On trouve la catégorie des “*cristaux de modules à isogénie près*”, ou *isocristaux*, sur  $S$ . Utilisant cette nouvelle notion, on définit comme ci-dessus la notion de  $p$ -isocristal, comme étant la donnée d’un isocristal  $\mathcal{M}$  muni d’un homomorphisme  $F : \mathcal{M}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{M}$ . La notion de bi-isocristal de poids  $i$ , qui serait calquée de celle de bicristal de poids  $i$ , n’est pas très raisonnable alors, car  $V$  doit être alors donné en termes de  $F$  comme  $p^i F^{-1}$ . Il y a lieu plutôt d’appeler *bi-isocristal* (sans précision de poids) un  $p$ -isocristal pour lequel  $F$  est un *isomorphisme*, et de ne pas choisir entre les différents  $p^i F^{-1}$  possibles; il vaut mieux également ne pas parler ici de  $p^{-1}$ -isocristal, la notion intéressante étant celle de bi-isocristal, qui est manifestement *autoduale* quand on se restreint aux objets de type fini: le dual de  $(\mathcal{M}, F)$  est  $(\mathcal{M}, {}^t F^{-1})$ , où  $\mathcal{M}$  est le iso-cristal dual de  $\mathcal{M}$ .

On peut également, bien sûr, localiser par rapport à  $p$  en partant déjà de la catégorie des bi-isocristaux de poids  $i$ , on trouve les *bicristaux de poids  $i$  à isogénie près*, qui forment une catégorie abélienne  $\text{Isbicr}(S, i)$ , et un foncteur exact “oubli

---

<sup>2</sup>et cela revient simplement à garder les mêmes objets, et à prendre comme nouveaux  $\text{Hom}$  les  $\text{Hom} \otimes_{\mathbf{ZQ}}$ .

de  $V$ ”

$$\text{Isbcr}(S, i) \longrightarrow \text{Isbcr}(S),$$

à valeurs dans la catégorie  $\text{Isbcr}(S)$  des iso-bicristaux sur  $S$ . Ce foncteur est *pleinement fidèle*, de sorte que *les bi-isocristaux forment une généralisation commune des bicristaux de poids  $i$  à isogénie près*. Pour préciser ce point, désignant par  $\text{Bicr}(S, i)$  la catégorie des bicristaux de poids  $i$  sur  $S$ , il y a lieu d’introduire des foncteurs canoniques

$$\text{Bicr}(S, i) \longrightarrow \text{Bicr}(S, i + 1) \longrightarrow \dots,$$

donnés par  $(\mathcal{M}, F, V) \rightsquigarrow (\mathcal{M}, F, pV)$ . Quand on localise ces foncteurs par  $p$ , on trouve des foncteurs

$$\text{Isbcr}(S, i) \longrightarrow \text{Isbcr}(S, i + 1) \longrightarrow \dots$$

qui se trouvent être *pleinement fidèles* : on peut donc considérer que, pour  $i$  croissant, la notion de “bicristal de poids  $i$ , à isogène près” constitue une généralisation de plus en plus large de celle de “cristal de Dieudonné”. La notion de “bi-isocristal” est à ce titre une généralisation qui englobe toutes les précédentes, et qui de plus a la louable vertu d’être stable par produit tensoriel, *et* passage au dual. Cela semble donc une catégorie toute indiquée comme catégorie des valeurs pour un foncteur “cohomologie de De Rham” convenable, lorsqu’on se décide à travailler à isogénie près.

**1.12. Exemple 1 : Cas où  $S$  est le spectre d’un corps parfait  $k$ .** — Alors la donnée d’un cristal de modules de type fini sur  $k$  équivaut à la donnée d’un module de type fini  $M$  sur  $W$ , la formation du motif  $\mathcal{M}^{(p)}$  correspond à la formation

$$M^{(p)} = M \otimes_W (W, f_W),$$

où  $f_W$  est l’endomorphisme de Frobenius de  $W$ , et  $(W, f_W)$  est la  $W$ -algèbre définie par  $f_W$ . Par suite une structure de  $p$ -cristal sur  $M$  revient à la donnée d’un homomorphisme de  $W$ -modules  $M^{(p)} \longrightarrow M$ , ou si on préfère, à la donnée d’un homomorphisme  $f_W$ -semi-linéaire

$$F_M : M \longrightarrow M.$$

Comme l'application  $x \longrightarrow x \otimes 1$  de  $M$  dans  $M \otimes_W (W, f_W)$  est bijective,  $f_W$  étant un automorphisme de  $W$ , on peut considérer la bijection inverse, qui est  $f_W^{-1}$ -semi-linéaire. Par suite, la donnée d'une  $p^{-1}$ -structure sur  $M$  revient à la donnée d'un homomorphisme  $f_W^{-1}$ -linéaire:

$$V_M : M \longrightarrow M.$$

la donnée d'un couple  $(F, V)$  définit sur  $M$  une structure de bi-cristal de poids  $i$  si et seulement si on a

$$FV = VF = p^i Id_M.$$

En particulier, pour  $i = 1$ , on retrouve la notion de *module de Dieudonné*: la catégorie des cristaux de Dieudonné sur  $k$  est canoniquement équivalente à celle des modules de Dieudonné relativement à  $k$ .

La catégorie des isocristaux de type fini sur  $k$  est équivalente à la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps des fractions  $K$  de  $W$ . Donc un biisocristal (de type fini) sur  $k$  s'identifie à un tel vectoriel, muni d'un  $f_K$ -endomorphisme bijectif.

Toutes ces descriptions sont compatibles avec les opérations tesorielles, et la formation d'images inverses pour  $k$  variable.

On peut se demander, avec la description précédente des bi-isocristaux, quels sont ceux qui sont les couples  $(E, F)$ ,  $E$  un vectoriel sur  $K$  et  $F$  un automorphisme semi-linéaire, tels que, si on pose  $V = p^i F^{-1}$ , pour tout  $x \in E$ , l'ensemble de ses transformés par les différents monômes non commutatifs en  $F$ ,  $V$  soit une partie *bornée* de  $E$ : c'est une pure tautologie. Pour qu'il existe un  $i$  ayant cette propriété, il faut et il suffit que pour tout  $x \in E$ , l'ensemble des  $F^n x$  soit borné. Bien entendu, c'est là une propriété qui est stable par changement de  $F$  en  $pF$  (correspondant à la tensorisation par le bi-isocristal de Tate de poids 2), mais non par le changement de  $F$  en  $p^{-1}F$  (correspondant à la tensorisation par l'inverse  $T^{-1}$  du bi-isocristal précédent). Comme on tient beaucoup à inverser Tate, on voit qu'il n'est pas naturel, en fait, de poser une condition de croissance sur l'ensemble des itérés de  $F$ . De façon précise, appelant *effectis* les bi-isocristaux qui proviennent d'un objet d'un Isbicr( $S, i$ ), on voit que tout bi-isocristal est de la forme  $T^{-i} \otimes_{\underline{N}}$ , avec  $\underline{N}$  effectif: on n'a pas ajouté plus de nouveaux objets qu'il n'était absolument nécessaire !

**1.13. Exemple 2 :  $S$  lisse sur un corps parfait  $k$ .** — Déterminons d’abord dans ce cas les cristaux sur  $S$ , sans plus. Wout d’abord, sans condition de lissité, on voit à l’aide de la propriété caractéristique de  $W$  que la catégorie  $C$  introduite dans 1.0. ne change pas, essentiellement, quand on remplace  $R = \text{Spec}(\mathbf{Z})$  par  $R = \text{Spec}(W)$ . D’autre part, il résulte aussitôt des définitions que la donnée d’un cristal sur  $S$ , relativement à  $W$ , revient à la donnée d’un système cohérent de cristaux sur  $S$ , relatifs aux  $W_n = W/p^{n+1}W$ . (**NB** On n’a pas formulé avec la généralité qui convenait l’exemple 3 de 1.7.!) Théoriquement, on est donc ramené à déterminer, pour chaque  $n$ , la catégorie des cristaux sur  $S$  relatifs à  $W_n$ , et les foncteurs restrictions entre ces catégories. D’ailleurs, il est inoffensif de se localiser sur  $S$ , par exemple de supposer au besoin  $S$  affine. Utilisant maintenant la lissité de  $S$ , on peut donc supposer que pour tout  $n$ ,  $S$  se remonte en un  $S_n$  lisse sur  $W_n$ , de façon que ces choix se recollent (il suffit pour ceci  $S$  lisse et affine). Or, il résulte encore facilement des définitions, utilisant seulement que  $S = S_0 \longrightarrow S_n$  est une immersion fermée définie par un Idéal nilpotent, que le foncteur restriction des cristaux sur  $S_n$  (relativement à une base quelconque - ici on prendra  $W_n$ ) vers les cristaux sur  $S_0$ , est une équivalence de catégories, donc un cristal sur  $S$  relativement à  $W_n$  s’identifie à un cristal sur  $S_n$  relativement à  $W_n$ . Comme  $S_n b$  est lisse sur  $W_n$ , il résulte de ce qui a été dit dans 1.8. que les cristaux en question s’identifient aux objets (de l’espace  $\mathcal{F}$  considérée) sur  $S_n$ , munis d’une stratification relativement à  $R_n = \text{Spec}(W_n)$ . Les foncteurs restrictions sur les cristaux s’expriment alors par les foncteurs restrictions correspondants pour objets stratifiés. En résumé: *un cristal  $\mathcal{M}$  sur  $S$  s’identifie à un système cohérent  $(\mathcal{M}_n)$  d’objets à stratification sur les différents  $S_n$  sur  $R_n = \text{Spec}(W_n)$ .* Pour relier ceci à des objets qui soient plus dans la nature d’objets “définis en caractéristique nulle”, supposons d’abord que l’on puisse même relever  $S$  en un schéma  $X$  propre sur  $R = \text{Spec}(W)$ , hypothèse évidemment bien restrictive. On voit alors, utilisant les théorèmes de comparaison EGA III 4.5 que *dans le cas de cristaux de modules cohérents sur  $S$ , la catégorie des dits est canoniquement équivalente à la catégorie des Modules cohérents  $M$  sur  $X$ , munis d’une stratification relativement à  $R = \text{Spec}(W)$ .* (**N.B.** Il se trouve donc, à posteriori, que cette dernière catégorie est essentiellement indépendante du relèvement choisi  $X$  de  $S$ ). Considérant la fibre générique  $X_K$  de  $X$  sur  $R$ , qui est un schéma

propre et lisse sur un corps de caractéristique nulle, on trouve donc un foncteur remarquable “restriction” ou “localisation”, allant de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur  $S$ , dans la catégorie des Modules cohérents sur  $X_K$ , stratifiés relativement à  $X_K$ . Or (oubli de 1.8.) on voit facilement qu’un Module cohérent stratifié sur un préschéma localement de type fini sur un corps est nécessairement localement libre. De plus comme ici  $K$  est de caractéristique nulle, et  $X_K$  lisse dessus, on a signalé dans 1.8. que la notion de stratification s’explique très simplement comme celle de “connexion intégrable”. [Enfin, lorsque  $S$  donc  $X_K$  est géométriquement connexe, et que  $K$  peut se plonger dans le corps des complexes  $\mathcal{C}$ , alors la notion de module cohérent à action intégrable sur  $X_K$  s’interprète en termes de représentations linéaires (complexes) du groupe fondamental transcendant de  $X_{\mathcal{C}}^{an}$ , de façon bien connu. Si par exemple le groupe fondamental transcendant est le groupe unité, alors on conclût par descente que tout Module cohérent stratifié sur  $X_K$  est trivial, ce qui en termes de  $S$  s’énonce en disant que tout cristal de modules cohérents sur  $S$  est isogène à un cristal “croissant”, i.e. à un cristal qui est l’image inverse d’un cristal sur  $k$ , (lui-même défini par un module de type fini sur  $W$ ). De ceci et de la rigidité de la notion de cristal on déduit facilement, par exemple, que tout  $p$ -cristal cohérent sur  $S$  ou tout bi-cristal de poids  $i$  donné (par exemple tout cristal de Dieudonné) est isogène à un fournit de même espèce *trivial*. On voit donc là un principale d’approche transcendante pour l’étude des familles de groupes formels (par exemple) en caractéristique  $p$ ...] Quand à la notion d’isocristal (de modules cohérents) sur  $S$ , on constate aussitôt que le foncteur précédent induit un foncteur *pleinement fidèle* de la catégorie de ces derniers, dans la catégorie des modules cohérents stratifiés sur  $X_K$ . Il s’impose évidemment d’en déterminer l’image essentielle, et pour commencer d’examiner si par hasard ce foncteur ne serait pas une équivalence de catégories. Cela me <sup>3</sup> semble un peu *trop optimiste*, mais je ne suis sûr de rien, faute d’avoir regardé. Tout ce qu’on peut dire à priori, c’est que la condition cherchée sur un Module stratifié doit être de nature locale en les points de  $X$  qui sont maximaux dans  $S$ .

Quand on ne suppose pas  $S$  propre et remonté globalement, mais qu’on suppose seulement qu’on a remonté  $S$  formellement, en un *schéma formel*  $X$  sur  $R$ ,

---

<sup>3</sup>effectivement []

alors il est vrai (en fait, de façon essentiellement triviale) que *la catégorie des cristaux de modules cohérents sur  $S$  est équivalente à la catégorie des Modules cohérents sur le schéma formel  $X$ , munis d'une stratification relativement à  $\mathrm{Spec}(W) = R$*  (quand on transcrit de façon évidente toutes les définitions envisagées dans 1.8. dans le cadre formel). Si on veut encore, comme il est légitime, trouver un analogue la restriction à  $X_K$  envisagées plus haut, il faut définir  $X_K$  comme *l'espace rigide-analytique sur  $K$  défini par le schéma formel  $X$* , et considérer sur  $X_K$  des Modules cohérents munis de *stratifications au sens rigide-analytique*, ou ce qui revient au même, de connexions intégrables en ce sens. De tels Modules sont encore nécessairement localement libres. On trouve ainsi un foncteur des cristaux de Modules cohérents sur  $S$  dans les Modules cohérents stratifiés sur  $X_K$ , induisant un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux cohérents sur  $S$ , dans la catégorie des Modules cohérents stratifiés sur  $X_K$ . Comme tout à l'heure (et même plus, si on peut dire, car c'est vraiment ici la situation "naturelle"), il s'impose de regarder quelle est l'image essentielle. On peut également se demander si les Modules cohérents stratifiés sur un espace rigide-analytique n'admettraient pas une description simple, en termes d'un groupe plus ou moins discret jouant le rôle du groupe fondamental dans la théorie transcendante sur le corps de complexes. La description donnée des cristaux sur  $S$ , toute triviale qu'elle soit, a déjà des conséquences intéressantes pour la structure de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur  $S$ : cette catégorie est noethérienne (si  $S$  est noethérien i.e. de type fini sur  $k$ ), tout objet contient donc un plus grand sous-objet de torsion, de plus objets sans torsion correspondent dans la description ci-dessus aux Modules stratifiés sans torsion sur  $X$ , lesquels sont alors automatiquement localement libres. Il est bien probable que des résultats analogues doivent être vrais sans hypothèse du genre lissité sur  $S$ .

**1.14.** — Il faut encore expliciter, dans la description générale précédente, le foncteur  $[\ ]$ , pour pouvoir décrire de façon générale, si en plus de la donnée de  $S$  sur  $k$ , on a un  $S'$  lisse sur  $k'$  parfait, et des automorphismes  $S' \rightarrow S$  et  $\mathrm{Spec}(k') \rightarrow \mathrm{Spec}(k)$  donnant lieu à un carré commutatif, et si enfin on peut relever  $S'$  formellement en  $X'$ , et  $S' \rightarrow S$  en  $X' \rightarrow X$ , donnant un carré commutatif avec  $\mathrm{Spec}(W') \rightarrow \mathrm{Spec}(W)$ , alors la notion d'image inverse de cristaux de modules cohérents, de  $S$  à  $S'$ , s'explicite en termes d'image inverse de Modules

cohérents stratifiés, de  $X$  à  $X'$ . Lorsque  $k = k'$ ,  $S = S'$ , et que les morphismes envisagés sont les puissances  $p$ -èmes, on est donc conduit à chercher à relever ce morphisme à  $X$  de façon compatible avec le morphisme  $\mathrm{Spec}(W) \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$  déduit de  $f_W$ , ou ce qui revient au même, de relever le morphisme canonique  $S \longrightarrow S^{(p/k)}$  en un morphisme de  $R$ -schémas formels  $X \longrightarrow X \times_R (R, f_R)$ . C'est en tous cas toujours possible si  $S$  est affine, cas auquel on peut se ramener. Ayant donc ainsi un morphisme

$$f_X : X \longrightarrow X,$$

compatible avec  $f_R$  sur  $R = \mathrm{Spec}(W)$ , et induisant  $f_S$  sur  $S$ , le foncteur  $[\ ]$  s'explique comme l'image inverse ordinaire de Modules stratifiés sur  $X$  relativement à  $R$ , resp. (dans le cas de isocristaux) de Modules stratifiés sur l'espace rigide-analytique  $X_K$ , pour le "morphisme"  $X_K \longrightarrow X_K$  d'espaces rigide-analytiques (relatif à  $f_K$  sur le corps de base !) induit par  $f_K$ . Bien que  $f_K$  et par suite  $f_{X_K}$  loin d'être unique, le foncteur envisagé qu'il définit ne dépend pas, essentiellement, des choix faits.

**1.15. Bicristaux et biisocristaux sur une base quelconque.** — Ne supposons plus nécessairement  $S$  de caractéristique déterminé  $p$ . Pour chaque nombre premier  $p$ , soit  $S_p$  la fibre  $V(pI_{\mathcal{O}_S})$  de  $S$  sur le point  $p\mathbb{Z}$  de  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ . Un bicristal de poids  $i$  sur  $S$  est par définition la donnée d'un cristal de Modules  $\mathcal{M}$  sur  $S$ , et pour chaque  $p$  d'une structure de bi-cristal de poids  $i$  sur la restriction  $\mathcal{M}_p$  de  $\mathcal{M}$  à  $S_p$ , définie par la donnée de  $F_p, V_p$ . On définit de même la notion de bi-isocristal sur  $S$ , étant entendu qu'un isocristal est un objet de la catégorie des isocristaux sur  $S$  (comme de juste), définie à partir de la catégorie des cristaux de modules en "localisant" par rapport à des entiers  $n > 0$  arbitraires, i.e. en tensorisant les Hom sur  $\mathcal{Z}$  par  $\mathcal{Q}$ . - Lorsque  $S$  est de caractéristique nulle, le supplément de structure impliqué par "bi" est évidemment vide, tandis que si  $S$  est de type fini sur  $\mathcal{Z}$  et domine  $\mathrm{Spec}(\mathcal{Z})$ , alors la notion envisagée est d'une essence arithmétique, les différents  $F_p$  jouant le rôle d'homomorphismes de Frobenius, comme de bien entendu; dans le cas du poids 1, en particulier, on peut considérer que le cristal avec sa bi-structure supplémentaire permet de relier entre eux les groupes formels en les diverses caractéristiques auxquels il donne naissance...

**1.16. Un retour en arrière.** — La définition 1.1. et le sortie 1.3. sont un petit peu canulés. Au lieu de prendre dans 1.0. pour  $C$  la catégorie des  $R$ -flèches

$S \longrightarrow T$  qui..., il faut prendre la catégorie des  $R$ -flèches  $U \longrightarrow T$  qui..., où  $U$  est un ouvert induit non précisé de  $S$ . De plus, la définition n'est guère raisonnable alors que si la catégorie fibrée envisagée  $\mathcal{F}$  est un "champ" pour la topologie de Zariski sur  $\text{Sch}_{/R}$ , i.e. si on peut y recoller flèches et objets. Ceci est nécessaire en tous cas pour pouvoir dans 1.3. définir la notion d'image inverse, la définition que j'y ai donnée n'étant raisonnable que si  $S, S'$  sont affines. Dans le cas général, il faut se localiser sur  $S$  et  $S'$  pour se ramener à cette situation. Autrement on bute sur des canulars idiots de nature globale, comme le fait que sans restrictions sur  $S' \longrightarrow S$ , la construction envisagée de somme amalgamée fait sortir de la catégorie des préschémas... Il est probable qu'il y aura bien d'autres canulars de détail dans ces notes, mais, je pense, sans conséquence !

Il est évidemment tentant de vouloir interpréter les cristaux de modules comme faisceaux de modules sur un certain site. C'est possible, en prenant le "*site cristallogène de  $S$  sur  $R$* ", qui est précisément le site dont la catégorie sous-jacente  $C$  est celle des  $R$ -morphisms  $U \longrightarrow T$  ( $U$  ouvert de  $S$ ,  $U \longrightarrow T$  immersion fermée surjective définie par Ideal nilpotent sur  $T$ ), la topologie est celle de Zariski: on prend comme familles couvrantes "de définition" de  $(U \longrightarrow T)$  les familles définies par des recouvrements ouverts  $(T_i)$  de  $T$ , chaque  $T_i$  muni de la structure induite, et définissant  $(U_i \longrightarrow T_i)$  par  $U_i = U \cap T_i$ . Un faisceau d'ensembles sur ce site s'identifie à un système de faisceaux d'ensembles  $F_{U \longrightarrow T}$  sur les objets but des objets de  $C$ , avec, pour tout flèche  $(U \longrightarrow T) \longrightarrow (U' \longrightarrow T')$  de  $C$ , un homomorphisme de l'image inverse de  $F_{U' \longrightarrow T'}$  [ ]  $T$ , dans  $F_{U \longrightarrow T}$  (homomorphisme qui n'est pas nécessairement un isomorphisme !) et qui sont un isomorphisme si  $T \longrightarrow T'$  est une immersion ouverte. En particulier, associant à tout  $(U \longrightarrow T)$  le faisceau  $\mathcal{O}_T$  sur  $T$ , on trouve un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_C$  sur  $C$ . Ceci posé, les cristaux de modules (quasi-cohérents) sur  $S$  s'identifient aux Modules quasi-cohérents (i.e. localement conoyau d'un homomorphisme de Modules libres) sur  $\mathcal{O}_C$  ; les cristaux "de présentation finie" i.e. les cristaux de Modules de présentation finie, correspondant exactement aux Modules de présentation finie sur  $\mathcal{O}_C$ .

Quand on a un  $R$ -morphisme  $S' \longrightarrow S$ , je ne vois pas de morphisme naturel correspondant entre les *sites* cristallogènes correspondants à  $S, S'$ . Ce n'est pas bien gênant, car introduisant les *topos cristallogènes*  $\text{Topcr}_{S/R}$  et  $\text{Topcr}_{S'/R}$  définis par les



sites en question, on définit par la méthode esquissée dans 1.3. un morphisme

$$\mathrm{Topcr}_{S'/R} \longrightarrow \mathrm{Topcr}_{S/R},$$

correspondant à la notion naturelle de “image inverse de faisceaux” au sens inverse (qui, j’avoue devrait être définie avec le plus grand soin).

**1.17.** — On est donc dans une situation où on peut faire marcher la machine cohomologique. Étant loin de mes bases, je n’ai pas tenté sérieusement de tirer au clair si les images directes supérieures qu’on définit ainsi, et en particulier les groupes de cohomologie du site cristallogène, donnent ce qu’on voudrait.

Le test-clef est le suivant: *si  $R$  est le spectre d’un corps, et si  $S$  est lisse sur  $R$ , et propre sur  $R$  dans le cas de la caractéristique  $p > 0$ , on voudrait trouver, comme cohomologie à coefficients dans  $\underline{O}_C$  lui-même, la cohomologie de De Rham de  $S$  relativement à  $R$ . Plus généralement, sans condition sur  $R$ , si  $f : S' \longrightarrow S$  est propre et lisse, on voudrait trouver comme “valeur en  $S'$ ”  $R^1 f_{cris*}(\underline{O}_{C'})$  (cf 1.4.) le faisceau de cohomologie de De Rham  $R^i f_*(\Omega_{S'/S}^*)$ , et on voudrait <sup>4</sup> que la connexion canonique à la Gauss-Manin sur ce dernier soit celle associée à la stratification canonique provenant de la structure cristalline (cf 1.8.).*

L’existence d’une connexion de Gauss-Manin en cohomologie de De Rham (que j’ai vérifié pour n’importe quel morphisme lisse), et le tapis de Washnitzer-Monsky, sont en tous cas des indications assez fortes pour conduire à penser qu’il doivent exister une théorie cohomologique, en termes de cristaux, donnant de telles valeurs pour l’argument  $\underline{O}_C$ . Au cas où la cohomologie du site cristallogène ne donnerait pas les résultats qu’il faut, on pourrait essayer (au lieu de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie de *tous* les Modules sur le site annelé cristallogène) de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie des seuls Modules quasi-cohérents sur le site cristallogène, i.e. dans la catégorie des cristaux de modules.

## Chapitre 2. — La cohomologie de De Rham est un cristal

**2.1.** — L’affirmation du titre n’est pour l’instant qu’une hypothèse ou un vœux pieux mais je suis convaincu qu’elle est essentiellement correcte. Comme je l’ai dit dans 1.17., il y a pour le moment deux indications dans cette directions

---

4

- a) Le travail de Washnitzer-Monsky. Deux grosses imperfections dans leur tapis: 1° ils n'obtiennent que des invariants cohomologiques *locaux* sur leur variété lisse en caractéristique  $p > 0$ , via leurs relèvements; pour avoir un invariante global, ils doivent se limiter à la dimension 1. On peut penser que cela tient à leur manque de familiarité avec les machines cohomologiques. 2° leurs invariants sont des (faisceaux de) vectoriels sur le corps des fractions de  $W$ , et non sur  $W$ , i.e. ils n'obtiennent que des invariants “modulo isogénie”. Il semble bien, en effet, que leur démonstration d'invariance fait intervenir de façon essentielle des dénominateurs. Il n'est pas exclu, d'après cette indication, que dans le titre du Chapitre il faille remplacer “cristal” par “isocristal” (et “est” par “définit”). Ce serait bien dommage, mais n'exclurait pas pour autant l'existence d'une bonne théorie cohomologique pour les cristaux, qui pour un morphisme propre et lisse et le “cristal unité” coïnciderait *modulo isogénie* avec ce que donne De Rham. Le est décisif reste celui indiqué dans 1.17, savoir: donnent-ils un résultat positif seulement en caractéristique zéro, ou en toute caractéristique ?
- b) L'existence des connexions de Gauss-Manin. J'ai vérifié pour tout morphisme lisse  $f : X \longrightarrow S$  l'existence d'une connexion canonique (absolue) sur les  $R^i f$  au sens de De Rham relatif, ou plus correctement, sur le complexe  $Rf_*(\Omega_{X/S}^\bullet)$ , considéré comme objet de la catégorie dérivée  $D(\mathcal{O}_S)$ . A vrai dire, je n'ai pas vérifié pour cette connexion une condition de “nullité de la  $[]$ ”; c'est vérifié en tous cas (par voie transcendante !) si  $S$  est lisse, sur  $R$  réduit de caractéristique nulle. [Il faut noter d'ailleurs qu'il n'y a pas d'espoir de montrer que la connexion en question provient toujours d'une stratification: c'est *faux* en caractéristique  $p > 0$ ; la raison étant que la cohomologie de De Rham pour une variété algébrique non complète (par exemple affine) n'est plus du tout raisonnable, étant beaucoup trop grosse. Pour pouvoir espérer une stratification sur  $Rf_*(\Omega_{X/S}^\bullet)$ , sans restriction de caractéristique, il faut donc supposer  $f$  *propre*.]
- c) La nécessité d'une interprétation cristallographique de la cohomologie de De Rham est également suggérée par le problème que j'avais signalé dans mon papier bleu sur De Rham: si  $R$  est le spectre du corps des complexes,  $S$  lisse sur  $R$  et  $X$

lisse et propre sur  $S$ , alors la théorie transcendante de la cohomologie fournit une suite spectrale

**2.2.** — Je vais préciser l’affirmation du titre, en me plaçant dans l’éventualité optimiste bien sûr où on n’aurait pas besoin de s’isogéniser. Comme les cristaux de modules sur un préschéma  $S$  forment une catégorie abélienne, on peut prendre la catégorie dérivée; ces objets seront appelés simplement “complexes de cristaux”. Un tel animal induit sur  $S$ , plus généralement sur tout objet-but  $T$  d’un objet  $(U \longrightarrow T)$  du site cristallogène  $C$  de  $S$ , un complexe de Modules ordinaire (envisagé comme objet de la catégorie dérivée des faisceaux de Modules sur  $S$ , resp.  $T$ ). Un complexe de cristaux est dit pseudo-cohérent (resp. parfait, resp. ...) si pour tout objet  $(U \longrightarrow T)$  de  $C$ , le complexe induit sur  $T$  est pseudo-cohérent (resp. ...). Ceci posé, voilà la théorie qu’on voudrait: A tout morphisme lisse et propre  $f : X \longrightarrow S$ , serait associé un complexe de cristaux (absolu)  $\mathrm{DR}(f)$  sur  $S$ , appelé cohomologie de De Rham cristalline de  $f$ . Ce complexe doit être parfait, sa formation doit être compatible avec tout changement de base sur  $S$  (l’image inverse des complexes des cristaux étant entendu, bien entendu, au sens de catégories dérivées...), et bien sûr  $\mathrm{DR}(f)$  dépend fonctoriellement (de façon contravariant) de  $X$  sur  $S$ . Tôt ou tard, il faudra expliciter aussi une formule de Künneth  $\mathrm{DR}(f \times_S g) \simeq \mathrm{DR}(f) \otimes \mathrm{DR}(g)$ , et une formulé de dualité, qui pour  $f$  partout de dimension relative  $d$  s’exprime comme un accouplement, définissant une autodualité,  $\mathrm{DR}(f) \times \mathrm{DR}(f) \longrightarrow T^d[2d]$ , où  $T^d$  est le cristal de Tate de poids  $2d$ , et où  $[2d]$  indique qu’on translate les degrés de  $2d$  (attention au facteur 2 !). Enfin, on veut comme de juste un isomorphisme  $\mathrm{DR}(f)(S) \simeq Rf_*(\Omega_{X/S}^\bullet)$ , fonctoriel en  $X$ , compatible avec les changements de base, avec Künneth et la dualité (déjà connus pour la cohomologie de De Rham ordinaire).

Par prudence, je me suis abstenu de dire quoi que ce soit sur le cas  $f$  non propre, dont il faudrait parler tout au moins si on voulait faire sérieusement le lien avec Washnitzer-Monsky.

**2.3. La cohomologie de De Rham comme biisocristal** — A supposer qu’on ait une théorie du type envisagé dans 2.2., on trouve pour chaque entier  $p$  un homomorphisme de frobenius

$$F_p : \mathrm{DR}(f)_p^{(p)} \longrightarrow \mathrm{DR}(f)_p,$$

où l'indice  $p$  au complexe de cristaux  $\mathrm{DR}(f)$  désigne la restriction à  $S_p = V(p.1)$  (au sens des catégories dérivées), qui d'après les conditions de 2.2. n'est autre que  $\mathrm{DR}(f_p), f_p : X_p \longrightarrow S_p$  étant induit par  $f$ . Utilisant toujours la même condition de compatibilité avec le changement de base, on constate que  $\mathrm{DR}(f_p)^{(p)}$  n'est autre que  $\mathrm{DR}(f_p^{(p)})$ , où  $f_p^{(p)} : X_p^{(p/S_p)} \longrightarrow S_p$  est le morphisme structural de frobenius relatif de  $X_p$  sur  $S_p$ . Or on a le morphisme de frobenius  $X_p^{(p/S)} \longrightarrow X$ , qui est un  $S$ -morphisme, qui par fonctorialité de  $\mathrm{DR}$  nous donne  $\mathrm{DR}(f_p)^{(p)} \longrightarrow \mathrm{DR}(f)_p$  comme on voulait. Il faut prouver que cet homomorphisme est en fait une isogénie, donc que l'isocrystal défini par  $\mathrm{DR}(f)$  devient, à l'aide des  $F_p$ , un bi-isocrystal. Mais utilisant la relation de dualité écrite dans 2.2. (à vrai dire, l'écriture  $T^p$  pour le cristal unité ne prend son sens que lorsque on le regarde comme muni de sa structure de bi-cristal naturelle, qui n'intervient qu'ici), on peut transposer  $F$  en un  $V$ , tel que  $FV = VF = p^{2d}$ , ce qui prouve notre assertion.

D'ailleurs, lorsque l'on passe du cristal de De Rham  $\mathrm{DR}(f)$  à l'isocrystal correspondant, donc des objets de cohomologie  $\mathrm{DR}^i(f)$  aux isocristaux correspondants, il sera vrai (tout comme pour les  $R^i f_*$  de De Rham en caractéristique nulle) que leur formation commute à tout changement de base, de sorte que chacun des isocristaux  $\mathrm{DR}^i(f)$  devient à son propre titre un bi-isocrystal. Au moment de rédiger 1.10. il m'avait semblé que, sans mettre du iso dans le coup,  $\mathrm{DR}^i(f)$  devrait être un bi-cristal de poids  $i$ , mais je m'étais canulé, il faudrait pour cela une polarisation de  $X$  de  $S$  qui définisse un isomorphisme (pas seulement une isogénie) de  $\mathrm{DR}^i(f)$  avec  $\mathrm{DR}^{2d-i} \otimes T^{-(d-i)}$ , ce qui n'existe évidemment que très exceptionnellement; une fois qu'on l'a, on définit  $V$  dans  $\mathrm{DR}^i$  en transposant  $F$  dans  $\mathrm{DR}^{2d-i}$ .

**2.4. Cas d'un schéma abélien** — Il semble que ce ne soit guère que dans ce cas-là où il soit bien raisonnable de parler de bi-cristaux et non seulement de bi-iso-cristaux. De façon précise,  $\mathrm{DR}^1(f)$  a dans ce cas une structure de bicristal, défini par les  $F_p$  précédents, et des  $V_p$  qui se définissent encore, par fonctorialité de  $\mathrm{DR}$ , à l'aide de l'homomorphisme "Verschiebung"  $A_p^{(p/S_p)} \longrightarrow A_p$  (défini avec la généralité qui convient dans les notes de Gabriel dans SGAD). Comme  $\mathrm{DR}^1(A/S)$  est un foncteur multiplicatif en  $A$ , grâce à Kunneth postulé dans 2.2., et que l'on a  $FV = VF = pId$  sur les schémas abéliens en car  $p$ , on en conclut les mêmes relations dans  $\mathrm{DR}^1$ . Cela montre donc que  $\mathrm{DR}^1(A)$  est un bicristal de poids 1, i.e. un

*cristal de Dieudonné*. Lorsque  $S$  est le spectre d'un corps parfait de caractéristique  $p \neq 0$ , un tel cristal s'identifie simplement, d'après 1.12, à un module de Dieudonné sur  $W = W(k)$ . Bien sûr, *on doit trouver que ce module n'est autre que le module de Dieudonné du groupe formel* (ou plutôt, du groupe  $p$ -divisible) *défini par la variété abélienne*  $A$ . Débarrasser de l'hyperstructure axiomatique-conjectural de 2.2., on peut exprimer ainsi la construction obtenue du module de Dieudonné:

- 1° Soit  $A$  un schéma abélien sur un schéma affine  $S$ . On sait que pour tout morphisme  $S \rightarrow T$  d'immersion fermée surjective, défini par Idéal nilpotent sur  $T$ ,  $A$  se prolonge en un schéma abélien  $B$  sur  $T$ . On peut regarder la cohomologie de De Rham ordinaire  $R^1 g_* (\Omega_{B/T}^\bullet)$ , où  $g : B \rightarrow T$  est le morphisme structural, et on sait que c'est un Module localement libre de rang  $2g$
- 2° Supposons que  $S$  soit le spectre d'un corps parfait  $k$  de car  $p > 0$ , alors le cristal précédent s'identifie à un module libre de rang  $2g$  sur  $W = W(k)$ . On y introduit les structures  $F$  et  $V$ , en utilisant comme ci-dessus les homomorphismes  $F : A \rightarrow A^{(p)}$  et  $V : A^{(p)} \rightarrow A$ . On trouve ainsi un module de Dieudonné  $M$ , et: *Deuxième affirmation* : C'est bien celui défini par Dieudonné. En d'autres termes: si  $A$  est n'importe quel anneau local artinien de corps résiduel  $k$ , et  $B$  un prolongement de  $A$  en un schéma abélien sur  $\Lambda$ , alors la cohomologie de De Rham  $H_{\text{DR}}^1(B) = H^1(B, \Omega_{B/\Lambda}^\bullet)$  est canoniquement et fonctoriellement isomorphe à  $M \otimes_W \Lambda$ , où  $M$  est le module de Dieudonné classique de  $A$ , et où on tient compte du théorème de Cohen qui munit  $\Lambda$  d'une structure canonique de  $W$ -algèbre (N.B. la fonctorialité de l'isomorphisme garantira automatiquement qu'il est compatible avec  $F$  et  $V$ ).

**2.5.** — Je n'ai pas vérifié, à vrai dire, les deux affirmations, mais n'ai pas le moindre doute qu'elles sont correctes telles quelles. Cette façon de voir le module de Dieudonné permet de plus d'explicitier de façon remarquable les variations infinitésimales de structure de la variété abélienne  $A$  donnée, en caractéristique  $p > 0$ , en termes du module de Dieudonné: les prolongement de  $A$  en un schéma abélien  $B$  sur  $\Lambda$  doivent correspondre exactement aux modules quotients libres

de rang  $g$  de  $M \otimes_W \Lambda$  qui redonnent, modulo  $p$ , le module quotient de rang  $g$  canonique de  $M \otimes_W k = H_{\text{DR}}^1(A)$ , (correspondant à la filtration canonique de cette cohomologie). Plus généralement et plus précisément :

3° Considérons, pour tout schéma abélien  $A$  sur une base  $S$ , sur la cohomologie de De Rham  $R^1 f_*(\Omega_{A/S}^\bullet) = H^1(f)$ , la filtration canonique

$$0 \leftarrow R^1 f_*(\mathcal{O}_A) \leftarrow H^1(f) \leftarrow R^0 f_*(\Omega_{A/S}^1) \leftarrow 0.$$

Donc pour tout  $B$  sur  $T$  comme dans 1°, on a sur  $\mathcal{M}(T) = \text{DR}^1(A/S)(T) = H^1(g)$  une filtration naturelle, ne dépendant que de la classe à isomorphisme près connue de  $\mathcal{M}(S) = H^1(f)$  provenant de  $A$ . Ceci dit, *troisième affirmation : on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre classes de prolongements de  $A$  à  $T$ , et prolongements de la filtration donnée de  $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_S$  en une filtration de  $\mathcal{M}(T)$* . Plus précisément encore, le foncteur  $B[(A, \varphi)]$ , de la catégorie des schémas abéliens  $B$  sur  $T$ , dans la catégorie des schémas abéliens  $A$  sur  $S$ , munis d'une filtration  $\varphi$  de  $\text{DR}^1(A/S)(T)$  prolongement celle de  $\text{DR}^1(A/A)(S)$  (N.B. il ne s'agit que de filtrations à quotients localement libres, bien sûr) est une équivalence de catégories.

Ce énoncé est évidemment fort suggestif aussi pour des généralisations en cohomologie de De Rham de dimension supérieure, pour un morphisme lisse et projectif quelconque, tenant compte de la filtration canonique de celle ci. On voit bien en tous cas que ce dernier élément de structure n'est *pas* de nature cristalline, i.e. donnée par une filtration du cristal de De Rham postulé dans 2.2., mais est au contraire dans la nature d'un élément de structure "continu", dont la variation doit refléter fidèlement les variations de structure de motif donnant naissance au cristal envisagé. Pour arriver à préciser ce dernier point, il faudrait des fondements un peu plus fermes de la théorie des motifs, comme de celle (certainement beaucoup plus élémentaire) des cristaux et de la cohomologie de De Rham. Une autre généralisation, (suggérée par comparaison du 3° avec Serre-Tate, disant que si  $S$  est de caractéristique  $p > 0$ , alors étendre  $A$  à  $T$ , c'est pareil qu'étendre le groupe  $p$ -divisible correspondant), concerne la théorie des groupes formels, dont il sera question au Chapitre 3. Pour préparer le terrain, je vais présenter d'une façon un peu différente le cristal  $\text{DR}^1(A/S)$  associé à un schéma abélien, en utilisant explicitement la structure de groupe du dit.

**2.6.** — De façon générale, paraphrasant sur une base quelconque une vieille construction de Serre (c'est de lui que je l'ai apprise, du moins), on trouve que pour tout schéma abélien  $A$  sur une base  $S$ , il y a une extension naturelle de  $A$  par le fibré vectoriel  $V(R^1 f_*(\mathcal{O}_A)) = V(\sqcup_A)$ , (où  $A$  est le schéma abélien dual de  $A$ ). Attention à la notation, le fibré vectoriel  $V(\mathcal{E})$  est contravariant en  $\mathcal{E}$ , ces sections sont les homomorphismes  $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_S$  ! L'extension en question est universelle parmi les extensions de  $A$  par des fibrés vectoriels, est fonctorielle en  $A$ , et compatible avec changement de base. Appelons la  $G(A)$ . Ainsi, le faisceau de Lie de  $G(A)$  est une extension

$$[]$$

qui est duale à la suite exacte envisagée dans 2.5., dont nous avons donc ici une construction indépendante en termes d'extensions de  $A$  par des groupes vectoriels. On peut en profiter pour préciser en affirmant que, pour un prolongement  $B$  de  $A$ , de  $S$  à  $T$ , le schéma en groupes  $G(B/S)$  est déterminé, à isomorphisme canonique (et même unique) près, par la seule donnée de  $A$  et de  $S \longrightarrow T$ , indépendamment du choix particulier du prolongement  $B$ . En d'autres termes, on trouve un *cristal en schémas de groupes lisses*  $\mathcal{G}(A/S)$ , et pour chaque prolongement infinitésimal  $B$  de  $A$  à un  $T$ , un isomorphisme canonique  $\mathcal{G}(A/S)(T) \simeq G(B/T)$ ; tout ça bien sûr fonctoriel en  $A$  et compatible avec changements de base. D'autre part, on peut préciser alors 3° en indiquant quel est le foncteur quasi-inverse de celui envisagé dans cet énoncé: l'extension de la filtration de  $DR^1(A/S)(S)$  en une filtration du faisceau de Lie  $DR^1(A/S)(T)[\ ]$  de  $\mathcal{G}(A/S)(T)$  revient à étendre le sous-groupe vectoriel canonique de  $\mathcal{G}(A/S)(S)$  en un sous-groupe vectoriel de  $\mathcal{G}(A/S)(T)$ , et l'on trouve  $B$  en passant simplement au quotient.

N.B. Je suis tombé sur la connexion canonique de  $G(A/S)$  en essayant de simplifier la construction de Manin de l'application  $A(S) \longrightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$  associée à une équation de Picard-Fuchs sur  $S$ , relativement à  $A$ . Pour ceci, il suffit de noter que localement sur  $S$  toute section de  $A$  sur  $S$  se remonte en une section de  $G = G(A/S)$  sur  $S$  ! La donnée de la connexion de  $G$  permet alors de prendre la dérivée de cette section, qui est un élément de  $\Gamma(S, \sqcup_G \otimes \Omega_S^1)$ , déterminé modulo une section de l'image du faisceau  $[\ ]$ , correspondant à l'indétermination du relèvement d'une section de  $A$  en une section de  $G$ . Les équations de Picard-Fuchs sont définies tout

juste pour arriver, d'une telle section de  $[]$  (qui en fait est un *cocycle*, compte tenu de la connexion canonique de  $\sqcup_G$  provenant de  $G$ ), avec l'indétermination qu'on vient de préciser, à tirer une section de  $\mathcal{O}_S$ ... (Du moins en caractéristique nulle, cas dans lequel se place Manin de toutes façons).

Voici les résultats positifs que j'ai vérifiés dans la direction des assertions précédentes :

- a) Si  $S$  est de caractéristique nulle, les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par l'introduction du schéma en groupes  $G(A)$ ) sont vraies.
- b) Sans restriction sur  $S$ , il est vrai que  $G(A)$  n'a pas d'automorphismes infinitésimaux<sup>5</sup>, donc si pour deux relèvements infinitésimaux données  $B, B'$  de  $A$ ,  $G(B)$  et  $G(B')$  sont isomorphes, l'isomorphisme entre eux est unique. Donc si l'hypothèse précédente est vérifiée quels que soient les relèvements infinitésimaux de  $A$  au dessus d'un ouvert  $U$  de la base  $S$ , alors les  $G(B)$  définissent effectivement un cristal en groupes sur  $S$ , à fortiori les  $H(B)$  définissent un cristal de modules, et  $G(A)$  et  $H_{DR}^1(A/S)$  sont munis de stratifications absolues canoniques, fonctorielle d'ailleurs en  $A$  satisfaisant aux conditions envisagées, et compatible avec tout changement de base qui invarie notre hypothèse sur  $A$ .
- c) Les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par  $G(A)$ ) sont vraies par les relèvements infinitésimaux *d'ordre 1*, ou tout au moins lorsque  $T$  est de la forme  $D(\mathcal{J})$ , schémas des nombres duals d' fini par un  $\mathcal{J}$  quasi-cohérent.<sup>6</sup>

**2.7.** — Arrivé à ce point de mes brillantes conjectures, je m'aperçois avec consternation qu'elles sont fausses telles quelles, malgré les indications concordantes militant en leur faveur. De façon précise, soit  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$ . Je dis qu'il *n'est pas possible, pour tout  $k$ -schéma  $S$  de type fini, de dimension  $\leq 1$* <sup>7</sup>, avec  $S_{reg}$  régulier, et tout schéma elliptique  $A$  sur  $S$ , de mettre sur  $H_{DR}^1(A/S)$  une stratification relativement à  $k$ , qui soit fonctorielle en  $A$  et compatible avec les changements de base. L'ennui, comme d'habitude, provient des courbes elliptiques de

---

<sup>5</sup>faux

<sup>6</sup>à vérifier, c'est peut-être faux

<sup>7</sup>ou même  $\leq 0$  !



Hasse nul. Appliquant en effet les deux fonctorialités postulées, on trouve que l'homomorphisme "frobenius" qui va de  $M^{(p)}$  dans  $M$  ( $M = H_{\text{DR}}^1(A/S)$ ) serait compatible avec la stratification. Si alors  $S \in S$  est un point correspondant à un  $A_S$  de Hasse nul, i.e. tel que frobenius sur  $H_{\text{DR}}^1(A_S)$  soit de carré nul, on en conclurait aisément, grimpant sur les voisinages infinitésimaux de  $S$ , que la même propriété serait vraie aux points voisins de  $S$ , ce qui est évidemment faux p.ex. pour la famille modulaire.

Ceci montre que décidément, il faut en rabattre, et que dans le titre du Chapitre et les considérations de 2.2., c'est à condition de prendre partout des isocristaux qu'il reste une chance d'une théorie du genre de celle envisagée précédemment. Il est fort possible d'ailleurs que la notion de isocristal que j'ai adoptée est encore trop restrictive, en ce sens que dans la description de 1.13. il faudra peut-être prendre des stratifications en caractéristique nulle qui ne se prolongeraient pas nécessairement sur le schéma formel sur  $W =$  vecteurs de Witt tout entier. C'est une analyse soigneuse du calcul-clef de Washnitzer-Monsky qui devrait permettre de tirer cette question au clair.

2.8. — Il se pose la question, d'autre part, pour quels schémas abéliens les énoncés 1° et 3° de 2.4, 2.5. et 2.6. sont valables, en dehors du cas déjà signalé:  $S$  de caractéristique nulle.

Il n'est pas exclu entièrement, cependant, que en restant en car.  $p > 0$ , l'énoncé sur la non-variation infinitésimal de  $G(A)$  avec  $A$ ,  $A$  partout ordinaire, soit vrai. Cela impliquerait que sur l'ouvert des valeurs "ordinaires" de l'invariant, le  $H_{\text{DR}}^1$  a une stratification canonique, mais celle-ci ne se prolongerait pas à la courbe modulaire toute entière. Mais je dois dire que ce drôle de comportement, où on aurait une stratification naturelle en car.  $p$  et une autre en car.  $0$ , sans qu'elles veuillent se recoller, semble assez canularique.

[Les considérations précédentes font bien ressortir la nature "infinite" de la notion de stratification, par contraste avec celle de connexion, malgré les trompeuses apparences de la caractéristique nulle. Ainsi, sur le  $H_{\text{DR}}^1$  de la famille modulaire sur  $F$  de schémas elliptiques, il y a au dessus de la fibre générique  $S_Q$  de  $S$  une stratification naturelle, mais nous venons de voir (ou presque...) que cette stratification ne s'étend pas en une stratification sur  $S_U$ ,  $U$  un ouvert non vide de  $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ . (Le

“presque” provient du fait qu’il n’est pas absolument clair si la stratification qu’on obtiendrait ainsi en caractéristique  $p$  serait respectée par Frobenius; il faut absolument tirer au clair cet exemple particulier !). C’est en un sens assez moral, puisque pour nous le module à stratification doit jouer dans une large mesure le rôle d’un faisceau  $\ell$ -adique, dont il partage également les propriétés de rigidité.]

Pour en revenir à l’alinéa précédent, concernant un schéma abélien “ordinaire” en car  $p > 0$ , s’il n’est pas exclu que le  $H_{DR}^1$  admette une stratification canonique fonctorielle, il me semble cependant exclu, malheureusement, que celle-ci provienne d’un cristal de modules sur  $S$ , i.e. que ceci reste vrai en remplaçant  $S$  par toute extension infinitésimale, pas nécessaire de car  $p$ , (tout au moins en admettant que la connexion associée à la stratification en question soit la connexion de Gauss-Manin). En effet, appliquant une telle hypothèse au schéma modulaire  $S$  sur  $\mathbf{Z}_p$  précédent, dont on enlèverait les points de Hasse nul d’abord d’où  $S'$ , on conclurait sauf erreur que la stratification qu’on a en caractéristique nulle sur  $H_{DR}^1$  se prolongerait à  $S$  tout entier, car elle se “recollerait” en un sens évident avec la stratification qu’on aurait au dessus du complété  $p$ -adique de  $S'$  (ce qui doit impliquer le prolongement sur  $S$  de façon assez formelle). Mais alors on aurait en car  $p$  une stratification du  $H_{DR}^1$  au dessus du schéma modulaire tout entier, Hasse nul inclus, ce qui est absurde comme on l’a déjà remarqué. Il faut en conclure, hélas, que si les isocristaux, et le cas échéant les modules stratifiés même en caractéristique  $p > 0$ , ont des chances d’être des outils convenables pour l’étude de familles de variétés abéliennes, celle de cristal elle-même semble irrémédiablement trop fine, même en se restreignant à des familles de variétés abéliennes “ordinaires” en car  $p > 0$ . Elle peut tout au mieux de prêter au cas d’un schéma de base réduit à un point, spectre d’un corps pas nécessairement parfait, et on peut alors espérer les résultats les plus satisfaisants en se bornant aux variétés abéliennes ordinaires ? - Pour que la notion de cristal elle-même puisse être utilisée pour des schémas abéliens sur des bases plus générales, il semble donc qu’il faille imposer aux familles envisagées des restrictions très sérieuses, consistant à imposer la variation infinitésimale du  $G(A)$ . Cela semble assez proche du point de vue de Serre, qui étudie les variations de variétés abéliennes (éventuellement à multiplication complexe donnée) en imposant à priori l’espace tangent (et l’action de la multiplication complexe dessus)...

### Chapitre 3. — Remarques sur les groupes $p$ -divisibles

**3.1.** — Bien sûr, en même temps que pour les variétés abéliennes, je dois en rabattre sur les groupes formels. Je veux simplement signaler que la construction de  $G(A)$  dans 2.6. doit pouvoir se paraphraser sans difficulté pour un groupe  $p$ -divisible  $\emptyset$  sur un préschéma  $S$  à caractéristiques résiduelles égales au même  $p$ . En effet les homomorphismes de ce groupe dans le groupe formel associé à  $G_a$  sont triviales (en particulier,  $\emptyset$  n'a pas d'automorphismes infinitésimaux), d'autre part (sauf erreur) le faisceau en modules des  $H^2$  de  $\emptyset$  à valeurs dans le groupe formel associé à  $G_a$  (au sens du complexe du groupe  $\emptyset$ , variante formelle), est un Module localement libre de rang  $g^*$ , où  $g^*$  est la dimension du groupe dual de  $\emptyset$ , soit  $\emptyset^*$ ; plus précisément, ce Module doit être canoniquement isomorphe à  $\text{Lie}(\emptyset^*) = t_{\emptyset^*}$ . (Tout ceci est suggéré par les résultats de Tate et Lubin sur les modules de groupes formels; je dois avouer d'ailleurs que je n'ai pas essayé de tirer au clair ce qu'il faut entendre, dans ce contexte, par "le groupe formel associé à  $G_a$ ", et s'il y a lieu de prendre le groupe formel purement infinitésimal). Il s'impose alors de paraphraser la construction de Serre, en regardant l'extension universelle de  $\emptyset$  par un groupe formel vectoriel, qui sera ici le groupe formel (covariant) de  $t_{\emptyset^*}$ . Désignant par  $G(\emptyset)$  cette extension, son algèbre de Lie  $H(\emptyset)$  sers une extension

$$(*) \quad 0 \longrightarrow t_{\emptyset^*}^v \longrightarrow H(\emptyset) \longrightarrow t_{\emptyset} \longrightarrow 0.$$

Bien entendu,  $G(\emptyset)$  et par suite  $H(\emptyset)$  seront fonctoriels en  $\emptyset$ , et compatibles avec changement de base. Alors qu'il est certainement vrai, dans un sens qu'il conviendrait de préciser, que  $G(\emptyset)$  varie "moins que  $\emptyset$ ", quand on fait varier  $\emptyset$  infinitésimalement dans une famille, il n'est pas vrai pour autant que  $G(\emptyset)$  soit indépendant de telles variations (à l'exception, probablement, de celles du premier ordre), i.e. puisse être considéré comme provenant d'un cristal en groupes plus ou moins formels. Cela sera le cas seulement, sans doute, quand  $\emptyset$  sera extension d'un groupe ind-étale par un groupe  $p$ -divisible torique, et  $S$  réduit à un point (?). Dans le cas général, il semble intéressant d'étudier les variations infinitésimales de  $\emptyset$ , quand on se fixe celles de  $G(\emptyset)$  à l'aide d'un cristal en groupes  $\underline{G}$ .

**3.2.** — En tous cas, l'extension  $(*)$  semble un invariant intéressant du groupe  $p$ -divisible envisagé. Il subsiste, par passage à la limite, en passant au cas où  $S$  est

par exemple le spectre d'un anneau  $A$  noethérien  $j$ -adique séparé et complet, où  $J$  est un idéal tel que  $A/J$  soit à caractéristiques résiduelles égales à  $p$ . On trouve par exemple un bon invariant quand  $A$  est un anneau de valuation discrète complet, éventuellement d'inégales caractéristiques, à caractéristique résiduelle  $p$ . Dans le cas où le groupe formel réduit a la structure triviale mentionnée plus haut dans 3.1., que la donnée d'un relèvement du groupe  $p$ -divisible qu'on a sur  $k$  en un groupe  $p$ -divisible sur  $A$ , soit entièrement équivalente à la donnée d'un relèvement de la filtration de  $M \otimes_{\mathbb{W}} k$  donnée par  $(*)$ , en une filtration de type  $(g, g^*)$  de  $M \otimes_{\mathbb{W}} A$ . Il serait bien intéressant d'essayer de déterminer, en termes d'une telle donnée, quel est le module de Tate correspondant à la fibre générique de  $\emptyset$  ! On aimerait préciser également, pour des groupes  $p$ -divisibles plus généraux, quelle quantité d'information est liée à l'extension  $(*)$ , qui remplace ici le  $H^1$  de De Rham.

# CRYSTALS AND THE DE RHAM COHOMOLOGY OF SCHEMES

A. Grothendieck

---

- These notes are a rough summary of five talks given at I.H.E.S in November and December 1966. The purpose of these talks was to outline a possible definition of a  $p$ -adic cohomology theory, via a generalization of the De Rham cohomology which was suggested by work of Monsky-Washnitzer and Manin. The notes were taken by I. Coates and O. Jussila
- The lectures were also intended to refine and expand his letter to J. Tate.
- This text was published in: *Crystals and the De Rham cohomology of schemes*. Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 306-358. North Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968
- Scan

# CRITÈRES DIFFÉRENTIELS DE RÉGULARITÉ POUR LES LOCALISÉS DES ALGÈBRES ANALYTIQUES

A. Grothendieck et J. Dieudonné



- This text was published in: *Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques*. J. Algebra 5, 305-324 (1967)
- [scan]

1967

---

•

## LETTER TO J. COATES

4.1.1967

---

- Letter on algebraic cycles and standard conjectures
- [scan]



4.1.1967

Dear Coates,

I want to add a few more comments to the talk on algebraic cycles and to what I told you on the phone.

I think the best will be to state the index conjecture right after the statement of the main results of Hodge theory, adding that this conjecture will take its whole significance only when coupled with “conjecture  $A$ ” in the next paragraph. This will give more freedom in the next paragraph to express some extra relationships between various conjectures, such as  $A + \text{index implies } B$ .

In characteristic zero, state some known extra features: index theorem holds, the properties  $A_\ell$  to  $D_\ell$  are independent of  $\ell$  (because of the existence of Betti cohomology, so that these properties are equivalent to the corresponding one’s for rational cohomology),  $A$  and  $C$  are independent of the chosen polarisation  $x$  (for  $A$  because it is equivalent with  $B$ , for  $C$  because it can be expressed in terms of  $A$ ,  $C(X) = (A(X \times X) + A(Y \times Y) + \dots)$ )

Thus the conditions without ambiguity can be called  $A(X)$  to  $D(X)$ , without subscript  $\ell$  and without indication of polarisation. Say too that it is known that  $C(X)$  is of finite dimension over  $\mathbf{Q}$ , (so that  $A$  can also be expressed in terms of an equality of dimensions of  $C^i$  and  $C^{n-1}$ , which again proves it is independent of  $\ell$ ), but that this is not known in characteristic  $p > 0$ . Contrarily to what I hastily stated in my talk (influenced from my recollections of the characteristic 0 case) it is not clear to me if in characteristic  $p > 0$  the conditions  $A_\ell(X, \xi)$  and  $C_\ell(X, \xi)$  are independent of the polarisation  $\xi$ ; if you do not find some proof of this independence, then the possible dependence should be pointed out, as well as the fact that we do not have a proof that  $A$  to  $D$  are independent of  $\ell$ . Of course, if the index theorem is proved for  $X$ , then  $A_\ell(X, \xi) = B_\ell(X)$  is again independent of the polarisation, and analogous remark for  $C_\ell(X, \xi)$ .

When speaking about condition  $C_\ell(X, \xi)$ , emphasise at once its stability properties by products (the proof I suggested works indeed) specialisation (with possible change of characteristics), hyperplane or more generally linear sections. Give an extra proposition for the relations with the property  $A$ , via a formal proposition as follows:

Proposition. — Conditions équivalentes sur  $X$  (variété polarisée) :

(i)  $C_\ell(X)$

(ii)  $C_\ell(Y)$  et  $A_\ell(X \times X)$

(ii bis)  $C_\ell(Y)$  et  $A_\ell(X \times X)^\circ$ , où l'exposant  $^\circ$  signifie qu'on se borne à exprimer la condition  $A$  pour l'homomorphisme en dimension critique  $H^{2n-2} \longrightarrow H^{2n+2}$ .

(iii)  $C_\ell(Y)$  et  $A_\ell(X \times Y)$ .

(iii bis)  $C_\ell(Y)$  et  $A_\ell(X \times X)^\circ$ , où l'exposant  $^\circ$  signifie qu'on se borne à exprimer la condition  $A$  en dimension critique  $H^{(2n-1)-1} \longrightarrow H^{(2n-1)+1}$ .

(iv)  $C_\ell(Y)$ , et pour tout  $i \leq n-1$ , l'homomorphisme naturel  $H^i(Y) \longrightarrow H^i(X)$  inverse à gauche de  $\varphi^i : H^i(X) \longrightarrow H^i(Y)$  (induit par  $\Lambda_X \varphi_*$ ) est induit par une classe de correspondance algébrique (induisant ce qu'elle veut sur les autres  $H^i(Y)$ ).

(iv bis)  $C_\ell(Y)$ , et pour  $j \geq n+1$ , l'homomorphisme naturel  $H^j(X) \longrightarrow H^{j-2}(Y)$  inverse à droite de  $\varphi_{j-2} : H^{j-2}(Y) \longrightarrow H^j(X)$  (induit par  $\varphi^* \Lambda_X$ ) est induit par une classe de correspondance algébrique (induisant ce qu'elle veut sur les autres  $H^i(X)$ ).

Corrolaire. — Ces conditions équivalent aussi à

(v)  $A_\ell(X \times X) + A_\ell(Y \times Y)^\circ + A_\ell(Z \times Z) + \dots$ , où  $X \supset Y \supset Z$  est une suite décroissante de sections hyperplanes.

(vi)  $A_\ell(X \times Y)^\circ + A_\ell(Y \times Z)^\circ + \dots$ , avec les mêmes notations.

Of course, the products and hyperplane sections are endowed with the polarisations stemming from the polarisation on  $X$ . The conditions (v) and (iv) have the slight interest that they allow to express the conjecture  $A(k) = C(k)$  in terms of  $A(T)^\circ$  for every  $T$  of even (resp. odd dimension), where the upper  $^\circ$  means that it is sufficient to look at what happens in critical dimensions.

For the proof of the proposition, I told you already the equivalence of (i) and (ii), (ii bis). The equivalence of (iv) and (iv bis) is trivial by transposition,

they imply (i) because  $H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^i(X)$  is the composition  $H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^{2n-i-2}(Y) \longrightarrow H^i(Y) \longrightarrow H^i(X)$  where the extreme arrows are the ones of (iv bis) and (iv) and the middle one is induced by  $\Lambda_Y^{(n-1)-i}$ , and they are implied by (iii bis) because of the formula

$$(\Lambda_X \varphi_*) L_Y + L_X (\Lambda_X \varphi_*) = (\varphi_* \Lambda_Y \varphi^* + id_X) \varphi_*.$$

On the other hand (iii)  $\Rightarrow$  (iii bis) is trivial, and so is (i)  $\Rightarrow$  (iii) because of the stabilities. N.B.  $(\varphi^* \Lambda_X) L_X + L_Y (\varphi^* \Lambda_X) = \varphi^* (\varphi_* \Lambda_Y \varphi^* + id_X)$ .

For the list of the known facts, you can state that:

- 1) In arbitrary characteristic,  $C(X)$  is known if  $\dim X \leq 2$ , because more generally, it is known that in arbitrary dimension  $n$ ,  $H^{2n-1}(X) \longrightarrow H^1(X)$  is induced by an algebraic correspondence class; also, in arbitrary dimension, it is known that  $\pi_0, \pi_{2n}, \pi_1, \pi_{2n-1}$  are algebraic (trivial for the first two, not quite trivial for the two next one's). If  $\dim X = 3$ , it is not known however, even in characteristic 0, if  $C(X)$  or only  $D(X)$  hold, nor  $A(X)$  and  $B(X)$  in characteristic  $p > 0$ , also if for 1-cycles,  $\tau$ -equivalence is the same as numerical equivalence...

By the way, the fact that the  $\pi_1$  for a surface are algebraic was pointed out (Tate tells me) by Hodge in Algebraic correspondences between surfaces, Proc, London Math. Soc. Series 2, Vol XLIV, 1938, p. 226. It is rather striking that this statement should not have struck the algebraic geometers more, and has fallen into oblivion for nearly thirty years!

- 2) In characteristic 0,  $A(X)$  is known for  $\dim X \leq 4$ . But  $A(X)^\circ$  is not known if  $\dim X = 5$ ; the first interesting case would be for a variety  $X \times X$ ,  $X$  of dimension 3 and  $Y$  a hyperplane section, as this would prove  $C(X)$ , see above.

Thus the main problems arise already for 1-cycles on threefolds, and partially even in characteristic 0. Urged by Kleiman's question, I will look again at my old scribbles on that subject (when I pretend to reduce the "strong" form of Lefschetz to the "weak" one). As for the suggestion I made on the phone, to try to get any  $X$  as birationally equivalent to a non singular  $X'$ , which is a specialisation of a

non singular  $X''$ , itself birationally equivalent to a non singular hypersurface - this cannot work as Serre pointed out, because such an  $X$  would have to be simply connected ! Thus if one wants to reduce somehow to the case of hypersurfaces, one will have to work also with singular ones, and see how to reformulate for singular varieties the standard conjectures...

Sincerely yours

LETTRE À J. DIEUDONNÉ  
27.8.1967

---

- [scan]

27.8.1967

Cher Dieudonné,

LETTRE À J. DIEUDONNÉ  
15.9.1967

---

- [scan]

Cher Dieudonné,

Tes objections de ta lettre du 11 Septembre sont encore fondées. D'ailleurs, il ne me semble pas évident que le fait de pouvoir trouver  $p, q$  fixes tels qu'on ait des suites exactes  $A_n^p \longrightarrow A_n^q \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$ , permette de s'en tirer ; tant mieux si tu y arrives. L'existence de ces  $p$  et  $q$  me semble d'autre part facile, en utilisant le

*Lemme. — Soit  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module,  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  des éléments de  $A$  engendrant l'idéal unité, supposons que pour tout  $i$ , le  $A_{f_i}$ -module  $M_{f_i}$  soit engendré par  $m_i$  générateurs. Alors  $M$  est engendré par  $m$   $m_i$  générateurs.*

**Démonstration.** Soient  $g_j^i \longrightarrow M_{f_i}$  ( $1 \leq j \leq m_i$ ) les générateurs de  $M_{f_i}$ , on aura donc  $g_j^i = h_j^i / f_i^{N_{ij}}$ , avec  $h_j^i \in M$ . Alors les  $h_j^i$  pour  $j$  fixes engendrent  $M$  sur l'ouvert  $\text{Spec}(A_{f_i})$  de  $\text{Spec}(A_f)$ , donc comme pour  $i$  variable ces ouverts recouvrent  $\text{Spec}(A)$ , 1 s'ensuit que les  $h_j^i$  pour  $i, j$  variables engendrent  $M$ , donc  $M$ , ce qui établit le lemme.

Revenant alors à la situation de 10.10.5, on sait que  $M = \lim M_n$  est un  $A$ -module de type fini, considérons alors un épimorphisme  $u : A^q \longrightarrow M$ . Soient  $f_i \longrightarrow A$  dont les images dans  $A_0$  engendrent l'idéal unité, et tel que sur les ouverts correspondants  $X_i$  de  $X = \text{Spec } f(A)$ ,  $F$  admette une présentation finie. Alors  $u$  restreint à  $X_i$  définit un épimorphisme  $A_i^q \longrightarrow M_i$ , et comme  $M_i$  est de présentation finie, il existe un homomorphisme  $v_i$  rendant exacte la suite  $A_i^p \longrightarrow A_i^q \longrightarrow M_i \longrightarrow 0$ . Tensorisant par  $A_0$ , on en déduit une suite exacte  $(A_n)_{f_i}^p \longrightarrow (A_n)_{f_i}^q \longrightarrow (M_n)_{f_i} \longrightarrow 0$ , ce qui montre que si  $R_n = \text{Ker}(A_n^q \longrightarrow M_n)$ , alors  $R_n$  est sur  $\text{Spec}((A_n)_{f_i})$  engendré par  $p$  éléments. Donc en vertu du lemme  $R_n$  est engendré par  $m p$  éléments où  $m$  est le nombre des  $f_i$ , et  $m p$  est bien indépendant de  $n$ .

La difficulté qui semble rester est de trouver les suites exactes que tu demandes de telle façon qu'elles se recollent, pour  $n$  variable. Donc,  $u$  étant déjà choisi, de trouver un homomorphisme  $A^p \longrightarrow A^q$  dont l'image soit  $\text{Ker } u \dots$  Si tu y arrives, on pourrait présenter encore 10.10.5 sous forme de trois conditions équivalentes, mais en demandant dans b) une "présentation finie uniformément en  $n$ ". Sinon, il faudrait trouver un contre-exemple à l'implication a)  $\Rightarrow$  c), car il me semble



- a)  $F$  est localement libre de type fini.
- b)  $F$  est isomorphe à la limite projective d'une suite  $(F_n)$  de  $\underline{O}_{X_n}$ -Modules localement libres de type fini qui se recollent.
- c)  $F$  est isomorphe à un  $M$ , avec  $M$  un  $A$ -module projectif de type fini.

Pour la démonstration, on procède comme dans 10.10.5 en utilisant EGA IV 18.3.2.1. Ce lemme devrait d'ailleurs venir en corollaire après 0<sub>I</sub> 7.2.9.

Pour les modifications que je préconisais pour I 10.11, elles tombent à l'eau si on n'arrive pas à arranger 10.10.5 sans hypothèses noethériennes ; on peut cependant dire que si  $F$  sur  $X$  est de présentation finie, alors il est limite projective de faisceaux  $F_n$  de présentation finie sur les  $X_n$  qui se recollent (mais on n'a pas une réciproque), et que  $F$  est localement libre sans les  $F_n$  le sont. Et les autres énoncés du n° 10.11. restent valables sans hypothèses noethérienne, sauf 10.7.11.2 et la partie "injectivité" dans 10.11.9 (sauf erreur).

LETTER TO S. ANANTHARAMAN  
11.9.1967

---

- [scan]

Dear Anantharaman,

Matsumura proved that if  $X$  is proper over a field  $k$ , then  $\underline{\text{Aut}}_{X/k}$  is representable by a group scheme locally of finite type over  $k$ . I think I can systematize the key step of his argument in the following way. Consider a scheme  $S$ , and a morphism

$$\varphi : Z \longrightarrow X$$

of  $S$ -schemes which are proper, flat and of finite presentation. Let  $Y$  be locally of finite presentation and separated over  $S$ , then  $\varphi$  induces a homomorphism of functors  $u \rightsquigarrow u\varphi$ :

$$\varphi' : \underline{\text{Hom}}_S(X, Y) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_S(Z, Y).$$

Then one can define a subfunctor of  $\underline{\text{Hom}}_S(X, Y)$  where  $\varphi'$  is “unramified” in a rather obvious sense, and this turns out to be an “open subfunctor”, say  $\underline{\text{Hom}}_S(X, Y; \varphi)$ . Now look at the induced homomorphism

$$\underline{\text{Hom}}_S(X, Y; \varphi) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_S(Z, Y).$$

Using the main result of Murre’s talk, one can prove that the latter morphism is representable by unramified separated morphisms locally of finite presentation ; as a consequence, if  $\underline{\text{Hom}}_S(Z, Y)$  is representable, so is  $\underline{\text{Hom}}_S(X, Y; \varphi)$ .

To get, given  $X$  and  $Y$ , a representability theorem for  $\underline{\text{Hom}}_S(X, Y)$ , one tries to find morphisms  $\varphi_i : Z_i \longrightarrow X$  as above, such that the open subfunctors  $\underline{\text{Hom}}_S(X, Y; \varphi_i)$  cover  $\underline{\text{Hom}}_S(X, Y)$  (as a fpqc sheaf), and such that the functors  $\underline{\text{Hom}}_S(X_i, Y)$  are all representable. If for instance  $S$  is the spectrum of a field  $k$ , and if  $X$  has “enough” points radicial over  $k$  (which is always true if  $k$  is alg. closed) then we can take for  $Z_i$  all finite subschemes of  $X$  whose points are radicial over  $k$ , and we get that  $\underline{\text{Hom}}_S(X, Y)$  is representable (any  $Y$  locally of finite presentation and separated over  $k$ ); if we do not make any assumptions on  $X$  except properness over  $k$ , the previous assumption becomes true after finite ground-field extension  $k'/k$ , so that we get that for every  $Y$  as above,  $\underline{\text{Hom}}_S(X, Y) \times_S (k')$  is representable. From this Matsumura’s theorem stated at the beginning follows in a standard way by descent arguments. The result holds too for  $\underline{\text{Isom}}_k(X, Y)$  instead of  $\underline{\text{Aut}}_k(X)$ ,

but as you probably know,  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  is not always representable, even if  $X$  is a quadratic extension of  $S = \mathrm{Spec} k$ ,  $Y$  being proper non projective.

Over an arbitrary base  $S$ , one can give a fairly general statement of a representability theorem, the points radicial over  $k$  used above being replaced by suitable flat subschemes of  $X$ . As particular cases, we get for instance that if  $X$  has integral geometric fibers and a section along which  $X$  is smooth, then  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  is representable; and if  $X$  has reduced geometric fibers, then  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  is representable locally for the étale topology over  $S$ . Also, if  $Y$  is quasi-projective over  $S = \mathrm{Spec} k$ , then  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$  is representable.

To fix the ideas, I gave the statements for  $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$ , but one has quite analogous results of course for the  $\prod_{X/S} P/X$  functors, which I guess will imply rather formally the other ones.

If you are interested, I can send you a photocopy of the statement of the general theorem of representability I alluded to above, and a couple of corollaries (I already listed here the most striking ones).

Sincerely yours

LETTER TO J. MURRE  
24.4.1967

---

- [scan]

11.9.1967

Dear Murre,

I am sending you enclosed the sketch which I promised on ramification data,  
as well as your manuscript

1968

---

- S. Kleiman spends the summer of 1968 at the IHÉS. He collaborates with Grothendieck and others in SGA 6.

## LE GROUPE DE BRAUER III : EXEMPLES ET COMPLÉMENTS

---

- This text was published in: *Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments*. IHES, Mars 1966. Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 88-188. North Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968
- [scan]



## CATÉGORIES COFIBRÉES ADDITIVES ET COMPLEXE COTANGENT RELATIF

---

- This text was published in: *Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif*. Lecture Notes in Math. 79, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968
- [scan]

## CLASSES DE CHERN ET REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES DISCRETS

---

- This text was published in: *Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets*. Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 215-305. North Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968
- [scan]

HODGE'S GENERAL CONJECTURE IS FALSE FOR  
TRIVIAL REASONS  
A. Grothendieck

---

- This text was published in: *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons*. Topology Vol. 8, pp. 299-303. Pergamon Press, 1969
- [scan]

## TAPIS DE QUILLEN

---

- Notes du 6.9.1968
- Scan

# TAPIS DE QUILLEN

6.9.1968

---

## 1. Catégories formelles

Catégorie formelle  $C$  “sur  $X_0$ ” i.e.

## TAPIS DE QUILLEN

---

- Notes du 10.9.1968
- Scan

# TAPIS DE QUILLEN

10.9.1968

---

## I. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux

A toute catégorie  $C$ , on associe un ensemble semi-simplicial  $S(C)$ , trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$S : \text{Cat} \longrightarrow \text{Simpl}.$$

Les systèmes locaux d'ensemble sur  $SC$  correspondent aux foncteurs sur  $C$  qui transforment toute flèche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à  $C$ ). Les  $H^i$  sur  $SC$  d'un tel système local ( $H^0$  pour ensembles,  $H^1$  pour groupes,  $H^i$  quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs  $\varprojlim^{(i)}$  dérivés de  $\varprojlim$ , ou si on préfère, des  $H^i$  (du *topos*  $C$ ). On voit ainsi à quelle condition un foncteur  $C \longrightarrow C'$  induit un homotopisme  $SC \longrightarrow SC'$  : en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il  $f$  et  $s$  que pour tout système de coefficients  $F'$  sur  $C'$ , l'homomorphisme naturel  $\varprojlim_{C'}^{(i)} F' \longrightarrow \varprojlim_C^{(i)} F$  soit un isomorphisme (pour les  $i$  pour lesquels cela a un sens).

A  $C$  on peut associer le topos  $\tilde{C}$ , qui varie de façon *covariante* avec  $C$ . (NB le foncteur  $C \mapsto \tilde{C}$  n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??).

Les systèmes de coefficients ensemblistes sur  $C$  ( $\stackrel{\text{def}}{=}$  les foncteurs  $C^\circ \longrightarrow \text{Ens}$  transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux localement constants i.e. les objets localement constants de  $\tilde{C}$ , définis intrinsèquement en termes de  $\tilde{C}$ . Ainsi, le fait pour un foncteur  $F : C \longrightarrow C'$  d'induire une

homotopisme  $S(C) \longrightarrow S(C')$  ne dépend que du morphisme de topos  $\tilde{F} : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}'$  induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant  $F'$  sur  $C'$  i.e. sur  $\tilde{C}'$ , les applications induites  $H^i(\tilde{C}', F') \longrightarrow H^i(\tilde{C}, \tilde{F}^*(F'))$  sont des isomorphismes (pour les  $i$  pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T : \text{Simpl} \longrightarrow \text{Cat},$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial  $X$  la catégorie  $T(X) = \Delta_{/X}$  des simplexes sur  $X$ , dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des  $X_n \dots$  (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie  $\Delta$  des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les  $X_n$ ). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout  $X$ ,  $ST(X)$  est isomorphe canoniquement à  $X$  dans la catégorie homotopique construite avec  $\text{Simpl}$ , et que pour toute  $C$ , la catégorie  $TS(C)$  est canoniquement "homotopiquement équivalente à  $C$ " i.e. canoniquement isomorphe à  $C$  dans la catégorie quotient de  $\text{Cat}$  obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. Ces isomorphismes sont fonctoriels en  $X$ . Il en résulte formellement qu'un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  dans  $\text{Simpl}$  est un homotopisme si et seulement si en est ainsi de  $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$ , d'où des foncteurs  $S' : \text{Cat}' \longrightarrow \text{Simpl}'$  et  $T' : \text{Simpl}' \longrightarrow \text{Cat}'$  entre les catégories "homotopiques", construites avec  $\text{Cat}$  resp.  $\text{Simpl}$ , qui sont quasi-inverses l'un de l'autre.

De plus, Quillen construit un isomorphisme canonique et fonctoriel dans  $\text{Cat}'$  entre  $C$  et la catégorie opposée  $C^\circ$ , ou ce qui revient au même, un isomorphisme canonique et fonctoriel dans  $\text{Simpl}'$  entre  $S(C)$  et  $S(C^\circ)$ . La définition est telle que le foncteur induit sur les systèmes locaux sur  $C$  transforme le foncteur contravariant  $F$  sur  $C$ , transformant toute flèche en flèche inversible, en le foncteur covariant (i.e. contravariant sur  $C^\circ$ ) ayant mêmes valeurs sur les objets, et obtenu sur les flèches en remplaçant  $F(u)$  par  $F(u)^{-1}$ ; en d'autres termes, l'effet de l'homotopisme de Quillen sur les groupoïdes fondamentaux est l'isomorphisme évident entre les groupoïdes fondamentaux de  $C$  et de  $C^\circ$ , compte tenu que le deuxième est l'opposé du premier. Comme application, Quillen obtient une interprétation faisceutique de la cohomologie d'un ensemble semi-simplicial à coefficients dans un système local covariant  $F$  (défini classiquement par le complexe cosimplicial des  $C^n(F) = \coprod_{x \in X_n} F(x)$ ): on considère le système local contravariant



défini par  $F$ , on l'interprète comme un faisceau sur  $T(X)$  i.e. objet de  $\text{Simpl}_{/X}$ , et on prend sa cohomologie. - Cependant, quand  $F$  est un système de coefficients covariant pas nécessairement local, on n'a toujours pas d'interprétation de ses groupes de cohomologie classiques en termes faisceautiques; ni, lorsque  $F$  est contravariant, de son homologie, ou inversement de sa cohomologie faisceautique en termes classiques.

A propos de la notion de foncteur qui est un homotopisme. Quillen montre qu'un tel foncteur  $F : C \longrightarrow C'$  induit une équivalence entre la sous-catégorie triangulée  $D_{lc}^b(C')$  de la catégorie dérivée bornée de celle des faisceaux abéliens sur  $C'$ , dont les faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux, et la catégorie analogue pour  $C$ ; et réciproquement. On peut dans cet énoncé introduire aussi n'importe quel anneau de base (à condition de le supposer  $\neq 0$  dans le cas de la réciproque); la partie dire vaut aussi avec un anneau de coefficients par nécessairement constant, mais constant tordu. Je pense que ce résultat (facile) doit pouvoir se généraliser ainsi : Soit  $f : X \longrightarrow X'$  un morphisme de topos qui soit tel que pour tout faisceau localement constant sur  $X'$ ,  $f$  induise un isomorphisme sur les cohomologies (avec cas non commutatif inclus). Supposons que  $X$  et  $X'$  soit *localement homotopiquement trivial*, i.e. que pour tout entier  $n \geq 1$ , tout objet  $U$  ait un recouvrement par des  $U_i \longrightarrow U$ , tels que a) tout système local sur  $U$  devient constant sur  $U_i$ , et toute section sur  $U$  devient constant sur  $U_i$  et b) pour tout groupe abélien  $G$ , les  $H^j(U, G) \longrightarrow H^j(U_i, G)$  sont nuls pour  $1 \leq j \leq n$ <sup>1</sup>. Alors le foncteur  $D_{lc}^b(X') \longrightarrow D_{lc}^b(X)$  induit par  $f$  est une équivalence. Même énoncé si on met dans le coup un système local d'anneaux sur  $X'$ . Enfin,  $f$  induit une équivalence entre la catégorie des coefficients locaux sur  $C$  et celle des coefficients locaux sur  $C'$ .

Principe de démonstration : on commence par prouver ce dernier résultat, en notant que si un topos est localement hom. trivial, il est loc. connexe et loc. simplement connexe, d'où une bonne théorie du  $\pi_0$  et du  $\pi_1$  (qui sont ici discrets), et on est ramené à un cas particulier du critère d'homotopisme de Artin et Mazur, savoir un critère cohomologique pour qu'un homomorphisme de groupes

---

<sup>1</sup>Attention, cette condition n'est typiquement *pas* satisfaite par les schémas avec leur topologie étale) mais bien par  $[\ ]$  avec top. Zariski).

$G \longrightarrow H$  (ici les groupes  $\pi_1$  de  $X, X'$ ) soit un isomorphisme : il doit induire des isomorphismes sur les  $H^0$  et  $H^1$  (y inclus dans le cas non commutatif...). On prouve la pleine fidélité en se ramenant par la suite spectrale encore, cela résultera du fait suivant : si  $X$  est localement hom. trivial, alors la catégorie des faisceaux abéliens loc. constants est stable par  $\underline{\text{Ext}}^i$ , et le foncteur  $M \mapsto M_X$  de  $\text{Ab}$  dans  $X_{\text{ab}}$  commute aux dits  $\text{Ext}^i$ . En fait,  $X$  et  $X'$  étant loc. homp. triviaux, les conditions suivantes sur  $f$  seront équivalentes :

a)  $f$  est un homotopisme, i.e. induit pour tout système local (pas néc. commutatif) sur  $X'$  un isomorphisme sur les  $H^i$ .

b)  $f$  induit une équivalence  $D_{lc}^b(X') \longrightarrow D_{lc}^b(X)$ .

a')  $f$  induit une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux abéliens sur  $X'$  et  $X$ , et des isomorphismes sur les  $H^i$  correspondants (donc on ne prend ici que des coefficients commutatifs).

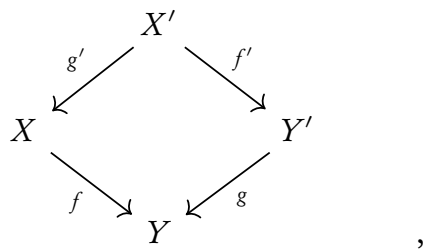
J'ignore si on peut dans a) se borner aux systèmes locaux commutatifs. L'équivalence entre a) et b) fournit une première justification ou motivation pour définir des types d'homotopie via la catégorie  $D_{lc}^b(X)$ , éventuellement muni de la sous-catégorie pleine de tous les systèmes locaux sur  $X$ , et du foncteur cohomologique sur  $D_{lc}^b(X)$  à valeurs dans le dite catégorie, et bien sur du produit tensoriel (mais alors on sort de  $D^b$  pour entrer dans  $D^-$ , redactor demerdetur).

## 2. $n$ -catégories, catégories $n$ -uples, et Gr-catégories

### 3. Point de vue “motivique” en théorie du cobordisme

Soit  $C$  la catégorie des variétés différentiables (pas nécessairement orientables), les morphismes étant les classes d'homotopie d'applications continues. Si  $B$  est une catégorie, on s'intéresse aux couples  $(F_\bullet, F^\bullet)$  d'un foncteur covariant et d'un foncteur contravariant de  $C$  dans  $B$ , satisfaisant les conditions que pour tout  $X \in$

Ob  $C$ , on a  $F_{\bullet}(X) = F^{\bullet}(X)$ , et que si on a un produit fibré ordinaire



avec  $f$  et  $g$

1969

---

•

## STANDARD CONJECTURES ON ALGEBRAIC CYCLES

---

- This text was published in: *Standard Conjectures on Algebraic Cycles*. Algebraic geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), 193-199. Oxford Univ. Press, London, 1969
- [scan]

## RÉSUMÉ DE QUELQUES RÉSULTATS DE KOSTANT

(sous-groupes simples de rang 1)

---

- Scan

## RÉSUMÉ DE QUELQUES RÉSULTATS DE KOSTANT

(sous-groupes simples de rang 1)

---

$G$  est un groupe semi-simple sur un corps  $k$  de caractéristique nulle,  $Y$  son algèbre de Lie.

## LETTER TO KOSTANT

22.10.1969

---

- [scan]



Massy 22.10.1969

Dear Kostant,

I read again through your papers in the Amer. Journ. on “The principal three-dimensional subgroup...” and “Lie group representations on polynomial rings”, prompted by some nice work of Brieskorn on Klein singularities. I very much appreciate this work of yours, and would appreciate getting reprints of any latter work you may have available. As I already felt when your work appeared, it cries for careful reconsideration in the framework of Alg. Geometry, and suggests number of interesting problems. I wonder if you know the answer to some of them. For instance, I feel it would be of interest to classify (for a given complex simple adjoint Lie group, say) quadruples  $(T, B, T', B')$ , where  $T$  and  $T'$  are maximal tori “in apposition” (in your terminology), and  $B$  and  $B'$  Borel subgroups of  $G$  containing  $T$  resp.  $T'$ . The number of conjugacy classes of such animals is equal to  $\text{card}(W)^2/hz\varphi(h)$ , where  $W$  is the Weyl group,  $h$  the Coxeter number,  $z$  the order of the center of  $\tilde{G}$ , and  $\varphi(h) = \text{card}(\mathbf{Z}/h\mathbf{Z})^*$  is the Euler indicatrix; if you want to classify such data with moreover a generating element (principal regular in your terminology) given for the finite group of order  $h$   $T \cap N(T')$ , then we get  $\text{card}(W)^2/hz$  choices. One of the reasons I think this question is interesting is that the stability subgroup in  $G$  of such a quadruple is  $T \cap T' = e^1$ , hence such a structure makes  $G$  entirely “rigid” up to exterior automorphisms. Among the first questions one may wish to ask in this direction are the following: is it true that for some, or for all such quadruples,  $B$  and  $B'$  are “in general position” i.e.  $B \cap B'$  is a torus (necessarily maximal), so that  $B$  and  $B'$  are “opposite” to each other with respect to the latter? Is there in any sense a *distinguished* conjugacy class of such quadruples (which should then be, of course, invariant by action of exterior automorphisms)? What are the groups of automorphisms of such quadruples (they are isomorphic to subgroups of the group of exterior automorphisms of  $G$ )?

In a different direction, it would be interesting to know more about the canonical morphism  $\underline{g} \longrightarrow \underline{h}/W$ , where  $\underline{g}$  is the Lie algebra of  $G$  and  $\underline{h}$  a Cartan subalgebra, and of the orbits of  $G$  on  $\underline{g}$ , and the analogous morphism of Steinberg  $G \longrightarrow T/W$  and the orbits of  $G$  acting on itself. Do you know for instance ex-

---

<sup>1</sup>NB.  $N(T) \cap N(T')$  is an extension of  $(\mathbf{Z}/h\mathbf{Z})^*$  by  $[\ ]$

actly how varies the rank (= rang of the tangent map) of this map ? There are some reasons to believe that for points of unipotent orbits of dimension  $n - r - 2$  (just the next lower after the maximal dimension  $n - r$ ), the rank is  $r - 1$  in case all roots have same length (that is the corresponding diagrams  $A, D, E_6, E_7, E_8$  are those corresponding to Klein singularities), and  $< r - 1$  in all other cases; in the first case, I would expect that there is just one orbit as stated, by the way, and maybe this property will be characteristic of the “homogeneous” case when all roots have same length. Also, what can be said of the dimension of the set of all Borel subgroups containing a given element  $g \in G$ , resp. whose Lie algebra contains a given element  $x \in \underline{g}$ ? If  $2N = n - r$  is the number of roots and if the dimension of the previous variety to be equal to  $i$ ; the inequality  $\leq i$  would imply, by generalizing a depth argument of Brieskorn, that the singularities of the fibers of your map  $\underline{g} \longrightarrow \underline{h}/W$  (resp. Steinberg’s  $G \longrightarrow T/W$  in case  $G$  is simply connected instead of adjoint) are “rational”, i.e. if  $F$  is such a fiber and  $F' \xrightarrow{f} F$  a resolution of singularities of  $F$ , then  $R^i f_*(\underline{O}_{F'}) = 0$  for  $i > 0$ . Maybe the answer to most of the questions I am asking are well known and I am just ignorant; for some of them, it would indeed be scandalous that the experts do not know the answer! In any case, I would be grateful for any comment you would have on any of my questions.

Sincerely yours

A. Grothendieck

LETTER TO J. LIPMAN  
21.5.1969

---

- [scan]

21.5.1969

Dear Lipman,

I got a copy of your nice work on rational singularities. Just one comment to the “main unanswered question” on p. (iv) of your manuscript: the answer is quite evidently [] eventually for the reason you indicate yourself. The simple example would be to start with an elliptic curve  $E$  over a field  $k$ , such that  $E(k) = 0$ , a torsor (= princ. hom. space)  $C$  under  $E$  of order  $n \geq 3$ , and the projective cone of the natural projective embedding of  $C$  [] (or the smallest []  $\text{Pic}^n(C) \neq \emptyset$ , if  $\text{Br}(k)$  is not zero); [] the completion of the local ring at the origin of that cone.

This example is also an example where  $A$  is functorial, but  $A[[t]]$  is not: the main reason is that the local Picard scheme (cf SGA 2 XIII p.19) is of  $\dim > 0$ , although  $P(k) = 0$ .

Sincerely yours,

A. Grothendieck

LETTER TO J. LIPMAN  
22.8.1969

---

- [scan]

Massy 22.8.1969

Dear Lipman,

Thank you for your letter.

LETTER TO J. LIPMAN  
16.9.1969

---

- [scan]

Massy 16.9.1969

Dear Lipman,

Following your letter I am sending you the outline of a program of work for the local Picard schemes,



LETTER TO J. LIPMAN  
12.6.1969

---

- [scan]

Massy 12.6.1969

Dear Lipman,

Thanks for your letter. The answer to your question whether  $\hat{A}[[T]]$  factorial implies  $A$  has a rational singularity is affirmative, at least in the equal characteristic case. This comes from the construction of the local Picard scheme  $G$  over the residue field in this case (cf. SGA 2 XIII 5), as it is easily checked that  $A$  has a rational singularity if and only if  $G$  is of dimension zero. In the contrary case, as the neutral component  $G^\circ$  is smooth of  $\dim > 0$ , there would exist a non constant formal arc passing through the origin of  $G^\circ$ , and it is easily seen that this arc defines a non trivial divisor class of  $A[[T]]$ . This argument will work in the unequal characteristics case too, provided we can extend to this case the construction of the local Picard scheme (and its universal property). I hope this could be done, at least for a perfect residue field, but never checked this point. (I proposed this to Lichtenbaum seven years ago, but I am afraid he never looked into this!)

As for the question you mention concerning the  $H^1(Z, \underline{O}_Z)$  of the Zariski-Riemann space  $Z$  of  $A$ , I confess I have not much feeling for that animal, but I guess this is equivalent with the direct limit of the  $H^1(X, \underline{O}_X)$  for all models birational and proper over  $\text{Spec } A$  (which, in case we have resolution, would be also the  $H^1$  of any regular such model). The idea that this direct system might be essentially constant, and that this may be used to prove resolution, had been mentioned to me also, five or six years ago, by Artin, but I believe he could not push it through. An analogous problem, whose solution would be needed in order to construct local Picard schemes for noetherian local (excellent ?) rings of higher dimension, is the following: does there exists a birational proper model  $X$  of  $\text{Spec}(A) = S$ , inducing an isomorphism  $X|(S - s) \simeq (S - s)$  ( $s = \text{closed point}$ ), such that every invertible sheaf on  $S - s = X - X_0$  extend to an invertible sheaf on  $X$ ? If  $s$  is an isolated singularity, this would follow of course from resolution. In case  $s$  is not isolated, it seems the answer is not known even for complete local rings of char. 0.

In any case, I asked Hironaka who does not know.

Sincerely yours,

A. Grothendieck

*Comments:* 1). Pic of a curve is reduced ( $H^2 = 0$ ) and is smooth.

LETTRE À L. ILLUSIE  
2-4 Déc 1969

---

- Letter on deformations of Barsotti-Tate groups. It has two parts. In the first part, Grothendieck describes a (conjectural) theory of first order deformations for flat commutative group schemes. This theory was developed in the second volume of Illusie's thesis "*Complexe Cotangent et Déformations*". In the second part, he applies it to Barsotti-Tate groups, stating theorems of existence and classification of deformations for Barsotti-Tate groups and truncated ones. He gave the proofs in his course at the Collège de France in 1970-71. These proofs were written up in Illusie's "*Déformations de groupes de Barsotti-Tate, d'après A. Grothendieck*".
- [scan]

les 2-4 déc. 1969

Cher Illusie,

Le travail avance, mais avec une lenteur ridicule.

1970

---

•

LETTER TO J. LIPMAN  
3.3.1970

---

- [scan]

Massy March 3, 1970

Dear Dr. Lipman,

Thanks a lot for your interesting letter. Your method seems the most natural indeed, moreover it seems rather natural to restrict to perfect rings on arguments.

You should not take too seriously my suggestion to prove actual representability, and I would not be surprised if this were actually false. Of course, it would be nice to know the answer, still. I will appreciate hearing about your progress.

I have put you on my permanent mailing list, and given instructions for mailing whatever is still available. Unfortunately a lot has become unavailable, but I hope most of it will come out in Springer's lecture notes during 1970.

Sincerely yours

A. Grothendieck



## GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX DE DIEUDONNÉ

---

- In 1970 Grothendieck has left the IHÉS, and he started his “mission” in social and ecological activism. In June he goes to Romania to give a public lecture about social responsibility. After his return from Romania, Grothendieck spent only a short time in Paris before traveling to a summer school in Montreal. The main event there was the spontaneous founding of the group “Survivre”. At the end of July Grothendieck was back in Paris, and in his own way, he prepared himself for the International Congress of Mathematicians in Nice.
- The following notes, primarily due to the efforts of Monique Hakim and Jean-Pierre Delale, include certain material treated by Grothendieck in the Montreal summer course.
- This text was published in: *Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux de Dieudonné*. Sémin. de Math. Sup. 45 (Été 1970). Les Presses de l’Université de Montréal, Montréal, Que., 1974
- [scan]
- [translation] by Eric Peterson

## LETTER TO I. BARSOTTI

11.5.1970

---

- Letter about Barsotti-Tate groups.
- This text was published in: *Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux de Dieudonné*.  
Sém. de Math. Sup. 45 (Été 1970). Les Presses de l'Université de Montréal,  
Montréal, Que., 1974
- [scan]
- [transcription] by Eric Peterson

Bures May 11.1970

Dear Barsotti,

I would like to tell you about a result on specialization of Barsotti-Tate groups (the so-called  $p$ -divisible groups on Tate's terminology) in characteristic  $p$ , which perhaps you know for a long time, and a corresponding conjecture or rather question, whose answer may equally be known to you.

First some terminology. Let  $k$  a perfect field of characteristic  $p > 0$ ,  $W$  the ring of Witt vectors over  $k$ ,  $K$  its field of fractions. An  $F$ -cristal over  $k$  will mean here a free module of finite type  $M$  over  $W$ , together with a  $\sigma$ -linear endomorphism  $F_M : M \longrightarrow M$  (where  $\sigma : W \longrightarrow W$  is the Frobenius automorphism) such that  $F_M$  is injective i.e.  $F(M)$  contains  $p^n M$  for some  $n \geq 0$ . I am rather interesting in  $F$ -iso-cristals, namely  $F$ -cristals up to isogeny, which can be interpreted as finite dimensional vector spaces  $E$  over  $K$ , together with a  $\sigma$ -linear automorphism  $F_E : E \longrightarrow E$ , such that there exists a "lattice"  $M \subset E$  mapped into itself by  $F_E$ ; I will rather call such objects *effective*  $F$ -isocristals (and drop the suffix "iso" (and even  $F$ ) when the context allows it), and consider the larger category of  $(E, F_E)$ , with no assumption of existence of stable lattice  $M$  made, as the category of  $F$ -isocristals. It is obtained from the category of effective  $F$ -isocristals and its natural internal tensor product, by "inverting" formally the "Tate cristal"  $K(-1) = (K, F_{K(-1)} = p)$ : the isocristals  $(E, F_E)$  such that  $(E, p^n F_E)$  is effective (i.e. the set of iterates of  $(p^n F_E)$  is bounded for the natural norm structure) can be viewed as those of the form  $E_0(n) = E_0 \otimes K(-1)^{\otimes(-n)}$ , with  $E_0$  an effective  $F$ -(iso)-cristal.

Assume now  $k$  algebraic closed. Then by Dieudonné's classification theorem as reported on in Manin's report, the category of  $F$ -(iso)cristals over  $k$  is semi-simple, and the isomorphism classes of simple elements of this category can be indexed by  $\mathbf{Q}$  (the group of rational numbers), or what amounts to the same, by pairs of relative prime integers

$$r, s \in \mathbf{Z}, \quad r \geq 1, \quad (s, r) = 1$$

to such a pair corresponding the simple object

$$\mathbf{E}_{s/r} = \mathbf{E}_{r,s}$$

whose rank is  $r$ , and which for  $s \geq 0$  can be described by the cristal over the prime field  $\mathbf{F}_p$  as

$$E_{s/r} = \mathbf{Q}_p[T]/(T^r - p^s), \quad F_{s/r} = \text{multiplication by } T.$$

For  $s \leq 0$ , we get  $E_{s/r}$  by the formula

$$E_\lambda = (E_\lambda)^\vee,$$

where  $^\vee$  denotes ordinary dual endowed with the contragredient  $F$  automorphism. In Manin's report, only effective  $F$ -cristals are considered, with the extra restriction that  $F_E$  is topologically nilpotent, but by Tate twist this implies the result as I state it now. Indexing by  $\mathbf{Q}$  rather than by pairs  $(s, r)$  has the advantage that we have the simple formula

$$E_\lambda \otimes E_{\lambda'} \simeq \text{sum of cristals } E_{\lambda + \lambda'}.$$

In other words, if we decompose each cristals in its isotypic component corresponding to the various "slopes"  $\lambda \in \mathbf{Q}$ , so that we get a natural graduation on it with group  $\mathbf{Q}$ , we see that this graduation is compatible with the tensor product structure:

$$E(\lambda) \otimes E'(\lambda') \subset (E \otimes E')(\lambda + \lambda').$$

The terminology of "slope" of isotypic cristal, and of the sequence of slopes occurring in any cristal (when decomposing it into its isotypic components) is due, I believe, to you, as discussed on formal groups in Pisa about three years ago; but I did not appreciate then the full appropriateness of the notion and of the terminology. Let's define the sequence of slopes of a cristal  $(E, F_E)$  by its isotypic decomposition, repeating each  $\lambda$  a number of times equal to  $\text{rank } E(\lambda)$  (bearing in mind that if  $\lambda = s/r$  with  $(s, r) = 1$ , then the multiplicity of  $\lambda$  in  $E$  i.e.  $\text{rank } E(\lambda)$  is a multiple of  $r$ ); moreover it is convenient to order this sequence in increasing order. This definition makes still a good sense if  $k$  is not algebraically closed, by passing over to the algebraic closure of  $k$ ; in fact, the isotypic decomposition over  $\bar{k}$  *descends* to  $k$ , so we get much better than just a pale sequence of slopes, but even a canonical "iso-slope" ("isopentique" in french) decomposition over  $k$

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{Q}} E(\lambda)$$

(NB This is true only because we assumed  $k$  perfect ; there is a reasonable notion of  $F$ -cristal also if  $k$  is not perfect, but then we should get only a *filtration* of a cristal by increasing slopes...). Now if  $k$  is a finite field with  $q$  elements, of rank  $a$  over the prime field, and if  $(E, F_E)$  is a cristal over  $k$ , then  $F_E^a$  is a linear endomorphism of  $E$  over  $K$ , and it turns out that the slopes of the cristal are just the valuations of the proper values of  $F_E^a$ , for a valuation  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  normalised in such a way that

$$v(q) = 1, \quad \text{i.e.} \quad v(p) = 1/a.$$

(This is essentially the “technical lemma” in Manin’s report, the restrictive conditions in Manin being in fact not necessary.) Thus, the sequence of slopes of the cristal, as defined above, is just the sequence of slopes of the *Newton polygon* of the characteristic polynomial of the arithmetic Frobenius endomorphism  $F_E^a$ , and their knowledge is equivalent to the knowledge of the  $p$ -adic valuations of the proper values of this Frobenius!

Lets come back to a general perfect  $k$ . Then the cristals which are effective are those whose slopes are  $> 0$ ; those which are Dieudonné modules, i.e. which correspond to Barsotti-Tate groups over  $k$  (not necessarily connected) are those whose slopes are in the closed interval  $[0, 1]$  : slope zero corresponds to ind-étale groups, slope one to multiplicative groups. Moreover, an arbitrary cristal decomposes canonically into a direct sum

$$E = \oplus_{i \in \mathbf{Z}} E_i(-i),$$

where  $(-i)$  are Tate twists (corresponding to multiplying the  $F$  endomorphism by  $b^i$ ), and the  $E_i$  have slopes  $0 \leq \lambda < 1$  (or, if we prefer,  $0 < \lambda \leq 1$ ), and hence correspond to Barsotti-Tate groups up to isogeny over  $k$ , without multiplicative component (resp. which are connected). The interest of this remark comes from the fact that if  $X$  is a proper and smooth scheme over  $k$ , then the cristallin cohomology groups  $H^i(X)$  can be viewed as  $F$ -cristals,  $H^i$  with slopes between 0 and  $i^{-1}$  and define in this way a whole avalanche of Barsotti-Tate groups over  $k$  (up to isogeny), which are quite remarkable invariants whose knowledge should be

---

<sup>1</sup>This is not proved now in complete generality, but is proved if  $X$  lifts formally to char. zero, and is certainly true in general.

thought as essentially equivalent with the knowledge of the characteristic polynomials of the “arithmetic” Frobenius acting on (any reasonable) cohomology of  $X$  (although the arithmetic Frobenius is not really defined, unless  $k$  is finite!).

Now the result about specialization of Barsotti-Tate groups. This is as follows: assume the BT groups  $G, G'$  are such that  $G'$  is a specialization of  $G$ . Let  $\lambda_1, \dots, \lambda_h$  ( $h$  = “height”) be the slopes of  $G$ , and  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_h$  the ones for  $G'$ . Then we have the equality

$$\sum \lambda_i = \sum \lambda'_i \quad (= \dim G = \dim G') \quad (1)$$

and the inequalities

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1, \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda'_1 + \lambda'_2, \dots, \sum_{i=1}^j \lambda_i \leq \sum_{i=1}^j \lambda'_i \dots \quad (2)$$

In other words, the “Newton polygon” of  $G$  (i.e. of the polynomial  $\Pi_i(1+(p^{\lambda_i}T))$ ) lies below the one of  $G'$ , and they have the same end-points  $(0,0)$  and  $(h,N)$ .

I get this result through a generalized Dieudonné theory for BT groups over an arbitrary base  $S$  of char.  $p$ , which allows to associate to such an object an  $F$ -cristal over  $S$ , which heuristically may be thought of as a *family* of  $F$ -cristals in the sense outlined above, parametrized by  $S$ . Using this theory, the result just stated is but a particular case of the analogous statement about specialization of arbitrary cristals.

Now this latter statement is not hard to prove at all: passing to  $\wedge^b E$  and  $\wedge^b E'$ , the equality (1) is reduced to the case of a family of rank one cristals, and to the statements that such a family is just a twist of some fixed power of the (constant) Tate cristal. And the general equality (2) is reduced, passing to  $\wedge^j E$  and  $\wedge^j E'$ , to the first inequality  $\lambda_1 \leq \lambda'_1$ . Raising both  $E$  and  $E'$  to a tensor-power  $r$ .th such that  $r\lambda_1$  is an integer, we may assume that  $\lambda_1 = 0$ , so the statement boils down to the following: if the general member of the family is an *effective* cristal, so are all others. This is really checked in terms of the explicit definition of “cristal over  $S$ ”.

The wishful conjecture I have in mind now is the following: the necessary conditions (1) (2) that  $G'$  be a specialization of  $G$  are also sufficient. In other words, starting with a BT group  $G_0 = G'$ , and taking its formal modular deformation in char.  $p$  (over a modular formal variety  $S$  of dimension  $dd^*$ ,  $d = \dim G_0$ ,  $d^* =$

$\dim G_0^*$ ), and the BT group  $G$  over  $S$  thus obtained, we want to know if for every sequence of rational numbers  $\lambda_i$  between 0 and 1, satisfying (1) and (2), these numbers occur as the sequence of slopes of a fiber of  $G$  at some point of  $S$ . This does not seem too unreasonable, in view of the fact that the set of all  $(\lambda_i)$  (satisfying the conditions just stated) is indeed finite, as is of course the set of slope-types of all possible fibers of  $G$  over  $S$ .

I should mention that the inequalities (2) were suggested to me by a beautiful conjecture of Katz, which says the following: if  $X$  is smooth and proper over a finite field  $k$ , and has in dimension  $i$  Hodge numbers  $h^0 = h^{0,i}, h^1 = h^{1,i-1}, \dots, h^i = h^{i,0}$ , and if we consider the characteristic polynomial of the arithmetic Frobenius  $F^a$  operating on some reasonable cohomology group of  $X$  (say  $\ell$ -adic for  $\ell \neq p$ , or crystalline), then the Newton polygon of this polynomial should be *above* the one of the polynomial  $\Pi(1 + p^i T)^{h^i}$ , in a very heuristic and also very suggestive way, this could now be interpreted by stating (without any longer assuming  $k$  finite) that the crystalline  $H^i$  of  $X$  is a specialisation of a crystal whose sequence of slopes is: 0  $h^0$  times, 1  $h^1$  times, ...,  $i h^i$  times. If  $X$  lifts formally to char zero, then we can introduce also the Hodge numbers of the lifted variety, which are numbers satisfying

$$h'^0 \leq h^0, \dots, h'^i \leq h^i,$$

and one should expect a strengthening of Katz's conjecture to hold, with the  $h'^j$  replaced by the  $h^j$ . Thus the transcendental analogon of a char.  $p$   $F$ -cristl seems to be something like a Hodge structure or a Hodge filtration and the sequence of slopes of such a structure should be defined as the sequence in which  $j$  enters with multiplicity  $h'^j = \text{rank } Gr^j$ . (NB. Katz made his conjecture only for global complete intersections, however I would not be as cautious as he!). I have some idea how Katz's conjecture with the  $h^i$ 's (not the  $h'^i$ 's for the time being) may be attacked by the machinery of crystalline cohomology, at least the first inequality among (2); on the other hand, the formal argument involving exterior powers, outlined after (2), gives the feeling that it is really the first inequality  $\lambda_1 \leq \lambda'_1$  which is essential, the other should follow once we have a good general framework.

I would very much appreciate your comments to this general non-sense, most of which is certainly quite familiar to you under a different terminology.

Very sincerely yours,

A. Grothendieck



## NOTES SUR LA THÉORIE DE DIEUDONNÉ

---

- Scan

## NOTES SUR LA THÉORIE DE DIEUDONNÉ

---

1. Programme de la théorie de Dieudonné sur une base  $S$  où  $p$  est localement nilpotent
2. Théorie de déformations pour les schémas abéliens
3. Relations entre les deux théories (pour schémas abéliens et pour groupes de BT)

Supposons que  $p$  soit localement nilpotent sur  $S$ . Travaillons à nouveau avec le site cristallin de Berthelot (pas le nilpotent).

### Sur un théorème de Tate.

(Devrait venir avec foncteur mystérieux !)

C'est le théorème suivant (Driebergen...) :

*Théorème. (Tate). — Soit  $S$  un schéma noethérien normal intègre dont le cos des fonctions  $k(y)$  est de caractéristique zero. Alors le foncteur*

$$\mathrm{BT}(S) \longrightarrow \mathrm{BT}(y)$$

*est pleinement fidèle.*

Ainsi, un groupe de BT sur  $S$  est connu à isomorphisme unique près quand on connaît la représentation  $p$ -adique qu'elle définit de  $\pi_1(y) = \mathrm{Gal}(\overline{k(y)}/k(y))$ .

Prenant d'abord le cas où  $S$  est le spectre

## TRAVAUX DE HEISOUKÉ HIRONAKA SUR LA RÉSOLUTION DES SINGULARITÉS

---

- This text was published in: *Travaux de Heisouké Hironaka sur la résolution des singularités*. Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 7 à 9.
- Scan

## GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX

---

- This text was published in: *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*. Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 431 à 436. Gauthier-Villars, Paris, 1971
- Scan

# REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES ET COMPACTIFICATION PROFINIE DES GROUPES DISCRETS

---

- This text was published in: *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets*. Manuscripta Math. 2, 375-396 (1970)
- [scan]

LETTRE À MICHON  
3.11.1970

---

- Letter about SGA
- [scan]

Massy le 3.11.1970

Chère Madame Michon,

Je m'aperçois que dans les exemplaires SGA d'archives que j'ai emportés de chez vous, il manque les suivants:

SGA 4 *XVII*,      SGA 4 *VI* première partie

D'autre part j'ai besoin de ces exemplaires pour faire l'édition photooffset en préparation. Pourriez vous me les retrouver ?

Bien cordialement

A. Grothendieck



LETTRE À D. FERRAND  
3.11.1970

---

- Letter about SGA
- [scan]

Massy le 3.11.1970

Cher Ferrand,

J'aimerais savoir si je peux compter sur ton exposé SGA 6 XI dans un avenir assez rapproché (disons d'ici fin décembre). Dans le cas contraire, je pense qu'il serait préférable que je publie SGA 6 sans l'exposé XI. Il serait quand même raisonnable, après le travail que tu t'es tapé, que tu en fasses au moins un article d'exposition, et j'aimerais savoir alors où tu penses le publier, pour que je puisse y référer dans l'introduction à SGA 6.

Bien cordialement

LETTRE À J.L. VERDIER  
3.11.1970

---

- Letter about SGA
- [scan]

Massy le 3.11.1970

Cher Verdier,

Ne m'étant guère occupé de Math depuis trois mois, je suis un peu perdu pour SGA 4. Si je me rappelle bien, tu as rédigé ou es en train de rédiger les parties suivantes, qui sont exactement ce qui manque pour que SGA 4 soit complet :

V

VI par. 5 et suivants

Si je me rappelle bien, VI était en fait terminé d'être rédigé, il fallait seulement y apporter quelques modifications dont on avait discuté avant ton départ. De plus, je pense que tu as avec toi l'exposé

VI B

de Saint Donat, et je t'envoie également l'Appendice à XVII du même, dont j'avais apparemment lu les premières pages. Pourrais tu me le renvoyer (ou le renvoyer à St Donat) avec tes annotations et commentaires ?

Tu dois avoir un exemplaire du tirage de XVII ; le XVIII n'a pas été tapé sur Stencils, mais directement sur papier pour offset ; la frappe est terminée, et Deligne est censé la corriger.

Écris-moi stp où tu en es avec ta part de rédaction, et avec la lecture de VI B. Pour des raisons techniques, ce serait bien agréable mois qui viennent. Dis-moi en tous cas si tu as l'intention de terminer, et si oui, quand tu penses avoir terminé.

Bien cordialement

LETTRE À P. DELIGNE  
3.11.1970

---

- Letter about SGA
- [scan]

Massy le 3.11.1970

Cher Deligne,

Pourrais-tu me dire si tu as terminé de regarder l'exposé de Rim SGA 7 VI, et si oui, me l'envoyer avec tes commentaires (sinon, me dire si tu as l'intention de le regarder et quand) ?

J'ai demandé à Mlle Altazin, qui a tapé ton exposé SGA 4 XVIII, de te l'envoyer avec le manuscrit, pour que tu le corriges. Pourrais-tu me dire si tu l'as reçu et si tu as l'intention de faire les corrections ? Quand elles seront faites, ou si tu ne veux pas les faire, envoyés moi le texte au net stp.

As-tu eu des nouvelles de Ferrand pour SGA 6 XI ?

Bien cordialement

1971

---

•

# THE TAME FUNDAMENTAL GROUP OF A FORMAL NEIGHBOURHOOD OF A DIVISOR WITH NORMAL CROSSINGS ON A SCHEME

A. Grothendieck and J. Murre

---

- *Grothendieck was always very generous in sharing his ideas. The paper to which you are referring started like this. Grothendieck and I took a walk together, I am not so sure of when, most likely in 1968 or 69. He told me that he wanted to study the tame fundamental group of a normal point on a two-dimensional scheme, in a way similar to Mumford's classical study. He already had an idea of how to do this and had in effect solved the major part of the problem, however, there remained some technical parts he had not yet resolved. He suggested that I look into it, as he had more pressing things to attend to. On my return back to Leiden I struggled with them, and after some time I was able to sort out the remaining parts, and of course I wrote him. He suggested I should publish those results on my own. I protested in my next letter, pointing out that the idea, as well as a large part of the solution was due to him. The only honorable thing would be to write a joint paper, and he agreed.*

Remembering Grothendieck, Interview with J. Murre. NAW 5/17 nr. 1  
maart 2016

- This text was published in: *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme*. Lecture Notes in



Math. 208, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971

- [scan]

PLATITUDE D'UNE ADHÉRENCE SCHÉMATIQUE ET  
LEMME DE HIRONAKA GÉNÉRALISÉ

A. Grothendieck et H. Seydi

---

- This text was published in: *Platitude d'une adhérence schématique et lemme de Hironaka généralisé*. Manuscripta Math. 5, 323-339 (1971)
- [scan]

LETTRE À J.L. VERDIER<sup>1</sup>  
23.6.1971

---

- Letter about SGA
- [scan]

---

<sup>1</sup>Transcribed with the collaboration of M. Küster

Massy le 23.6.1971

Cher Verdier,

Merci pour ta lettre du 23 Mai. C'est dommage que tu ne m'aies pas envoyé ce malheureux exercice 4.10.6, cela aurait permis d'envoyer enfin à l'imprimeur le fascicule 1 de SGA 4. La personne qui a frappé le texte termine maintenant, elle partira en vacances et Springer rend la machine qu'elle avait en location, faute d'autres manuscrits. Cela remet donc la publication même de ce fascicule sine die.

Bien cordialement

1972

---

•

CURRICULUM VITAE  
DE ALEXANDRE GROTHENDIECK

---

- Scan

## CURRICULUM VITAE DE ALEXANDRE GROTHENDIECK

Vous trouverez ci-joint l'exposé des titres et travaux des candidats à  
une direction de recherche

---

Né le 28 mars 1928 à Berlin, de mère allemande et de père apatride, émigré de Russie en 1921, mes parents émigrent d'Allemagne en 1933, participent à la révolution espagnole ; je les rejoins en mai 1939. Mes parents sont internés, d'abord mon père en 1939, puis ma mère en 1940 avec moi. Mon père est déporté du camp de Vernet en août 1942 pour Auschwitz et est resté disparu; ma mère meurt en 1957 des suites d'une tuberculose contractée au camp de concentration. Je reste près de deux ans dans des camps de concentration français, puis suis recueilli par une maison d'enfants du "Secours suisse" au Chambon-sur-Lignon, où je termine mes études de lycée en 1945. Études de licence (mathématiques) à Montpellier 1945-48, auditeur libre à l'École Normale Supérieure à Paris en 1948-49, où je suis le premier séminaire Cartan sur la théorie des faisceaux, et un cours de Leray du Collège de France sur la théorie de Schauder du degré topologique dans les espaces localement convexes. De 1949 à 1953 je poursuis des recherches à Nancy sur les espaces vectoriels topologiques, comme élève de J. Dieudonné et de L. Schwartz, aboutissement à ma thèse de doctorat en 1953, sur la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, publiée dans les "Memoirs of the American Mathemati-

cal Society”. Je passe alors deux ans à l’Université de Sao Paulo (Brésil), où je continue et mène à leur aboutissement naturel certaines recherches liées aux produits tensoriels topologiques [6, 7], mais en même temps, sous l’influence de J. P. Serre, commence à me familiariser avec des questions de topologie algébrique et d’algèbre homologique. Ces dernières continueront à m’occuper jusqu’à aujourd’hui, et son encore très loin d’être menées à leur terme. Ce sont elles qui m’occuperont surtout pendant l’année 1955 passée à l’Université du Kansas (USA) ; j’y développe une théorie commune pour la théorie de Cartan-Eilenberg des foncteurs dérivés des foncteurs de modules et la théorie de Leray-Cartan de la cohomologie des faisceaux [8], et développe des notions de “cohomologie non commutative” dans le contexte des faisceaux et des espaces fibrés à faisceau structural, qui trouveront leur cadre naturel quelques années plus tard avec la théorie des topos (aboutissement naturel du point de vue faisceautique en topologie générale) [16, SGA 4].

À partir de 1956 je suis resté en France, à l’exception de séjours de quelques semaines ou mois dans des universités étrangères. De 1950 à 1958 j’ai été chercheur au CNRS, avec le grade de directeur de recherches en 1958. De 1959 à 1970 j’ai été professeur à l’Institut des Hautes Études Scientifiques. Ayant découvert à la fin de 1959 que l’IHES était subventionné depuis trois ans par le Ministère des Armées, et après des essais infructueux pour inciter mes collègues à une action commune sans équivoque contre la présence de telles subventions, je quitte l’IHES en septembre 1970.

Depuis 1959 je suis marié à une française, et je suis père de quatre enfants. Je suis apatride depuis 1940, et ai déposé une demande de naturalisation française au printemps 1970.

Depuis 1956 jusqu’à une date récente, mon intérêt principal s’est porté sur la géométrie algébrique. Mon intérêt pour la topologie, la géométrie analytique, l’algèbre homologique ou le langage catégorique a été constamment subordonné aux multiples besoins d’un vaste programme de construction de la géométrie algébrique, dont une première vision d’ensemble remonte à 1958. Ce programme est poursuivi systématiquement dans [16, 17], d’abord dans un isolement relatif, mais progressivement avec l’assistance d’un nombre croissante de chercheurs de valeur. Il est loin d’être achevé à l’heure actuelle. L’extraordinaire crise écologique



que nous aurons à affronter dans les décades qui viennent, rend peu probable qu'il le sera jamais. Elle nous imposera d'ailleurs une perspective et des critères de valeur entièrement nouveaux, qui réduiront à l'insignifiance ("irrelevance") beaucoup des plus brillants progrès scientifiques de notre siècle, dans la mesure où ceux-ci restent étrangers au grand impératif évolutionniste de notre temps : celui de la survie. Cette optique s'est imposée à moi avec une force croissante au cours de discussions avec de nombreux collègues sur la responsabilité sociale des scientifiques, occasionnées par ma situation à l'IHES depuis la fin de 1969. Elle m'a conduit en juillet 1970 à m'associer à la fondation d'un mouvement international et interprofessionnel "Survivre", et à consacrer aux questions liées à la survie une part importante de mon énergie. Dans cette optique, la seule valeur de mon apport comme mathématicien est de me permettre aujourd'hui, grâce à l'estime professionnelle et personnelle acquise parmi mes collègues, de donner plus de force à mon témoignage et à mon action en faveur d'une stricte subordination de toutes nos activités, y compris nos activités de scientifiques, aux impératifs de la survie, et à la promotion d'un ordre stable et humain sur notre planète, sans lequel la survie de notre espèce ne serait ni possible, ni désirable.

A Grothendieck

## Principales publication

### Espaces Vectoriels Topologiques

1. *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. 74 (1952), p. 168-186.
2. *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, J. Crelle 192 (1953), p. 35-64 et 77-95.
3. *Espaces Vectoriels Topologiques*, Notes polyc., Sao Paulo (1954), 240 p.
4. *Sur les espaces  $(F)$  et  $(DF)$* , Summa Bras. 3 (1954), p. 57-123.
5. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. AMS, n° 16 (1955), 329 p.

6. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologique*, Bull. Sao Paulo 8 (1953), p. 1-79.
7. *La théorie de Fredholm*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 319-384.

### Topologie et algèbre homologique

8. *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku M.j., 9 (1957), p. 119-221.
9. *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 1-7.

### Géométrie analytique

10. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J., 79 (1957), p. 121-138.
11. *Techniques de construction en géométrie analytique*, Sem. H. Cartan, 13 (1960/61), exposés 7 à 17.

### Géométrie algébrique

12. *La théorie des classes de Chern*, Bull. SMF 86 (1958), p. 137-154.
13. *Sur une note de Mattuck-Tate*, J. Crelle 200 (1958), p. 137-154.
14. *The cohomologie theory of abstract algebraic varieties*, Proc. Int Congress, Edinburgh (1958), p. 103-118.
15. *Éléments de Géométrie Algébrique* (rédigés avec la coll. de Jean DIEUDONNÉ), Chap. I-IV, publ. Math. IHES (1960/67), env. 1800 pages.
16. *Séminaires de Géométrie Algébrique* (SGA 1, ..., 7), IHES, 1960/69, env. 4000 pages (en cours de réédition chez Springer, Lecture Notes) :

SGA 1 Théorie du Groupe Fondamental

SGA 2 Cohomologie locale et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux

SGA 3 (en coll. avec M. Demazure) Schémas en Groupes des Topos et Cohomologie étale des Schémas

SGA 5 Cohomologie  $\ell$ -adique et fonctions  $L$

SGA 6 (en coll. avec J. Berthelot et J.L. Illusie) Théorie des Intersections et Théorèmes de Riemann-Roch

SGA 7 Groupe de Monodromie en Géométrie Algébrique

17. *Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens*, Invent. Math. 2 (1966), p. 59-78.
18. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (en coll. avec J. Giraud, S. Kleiman, M. Raynaud, J. Tate), North Holland, 1968.
19. *Catégorie cofibrées additives et complexe cotangent relatif*, Lecture Notes in Maths., Springer n° 79 (1968), 167 pages.

## ESQUISSE THÉMATIQUE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE A. GROTHENDIECK

---

- *L’“Esquisse thématique” a été écrite en 1972 à l’occasion d’une autre candidature (à un poste de professeur au Collège de France). Elle contient une esquisse, par thèmes, de ce que je considérais alors comme mes principales contributions mathématiques. Ce texte se ressent des dispositions dans lesquelles il a été écrit, à un moment où mon intérêt pour la mathématique était tout ce qu’il y a de marginal, à dire le moins. Aussi cette esquisse n’est-elle guère mieux qu’une énumération sèche et méthodique (mais qui fort heureusement ne vise pas à être exhaustive...). Elle ne paraît pas portée par une vision ou par le souffle d’un désir — comme si ces choses que j’y passe en revue comme par acquit de conscience (et c’étaient bien là en effet mes dispositions) n’avaient jamais été effleurées par une vision vivante, ni par une passion de les tirer au jour alors qu’elles n’étaient encore que pressenties derrière leurs voiles de brume et d’ombre...*

Récoltes et Semailles

- [scan]

## ESQUISSE THÉMATIQUE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE A. GROTHENDIECK

---

Les numéros entre crochets renvoient, soit à la bibliographie sommaire jointe à mon Curriculum Vitae (numéros de [1] à [19]), soit au complément à cette bibliographie placée à la fin du présent rapport (numéros entre [1 bis] et [20 bis]). Enfin, nous avons joint en dernière page une liste par ordre alphabétique des auteurs de certains des travaux cités dans le présent rapport qui ont été directement suscités ou influencés par les travaux de A. Grothendieck ; le renvoi à cette dernière bibliographie se fait par le sigle [\*] derrière le nom de l'auteur cité, comme pour I. M. Gelfand [\*].

### 1. Analyse Fonctionnelle ([1] à [7], [6 bis])

Mes travaux d'Analyse Fonctionnelle (de 1949 à 1953) ont porté surtout sur la théorie des espaces vectoriels topologiques. Parmi les nombreuses notions introduites et étudiées (produits tensoriels topologiques [5,6], applications nucléaires et applications de Fredholm [5,6,7], applications intégrales et ses variantes diverses [5,6], applications de puissance  $p$ -ième sommable [5], espaces nucléaires [5], espaces  $(DF)$  [4], etc.), c'est la notion d'*espace nucléaire* qui a connu la meilleure fortune : elle a fait jusqu'à aujourd'hui l'objet de nombreux séminaires et publications. En particulier, un volume du traité de I. Gelfand [\*] sur les "Fonctions Généralisées" lui est consacré. Une des raisons de cette fortune provient sans doute de la théorie des probabilités, car il s'avère que parmi tous les EVT, c'est dans les es-

paces nucléaires que la théorie de la mesure prend la forme la plus simple (théorème de Minlos). Les résultats de [6], plus profonds, semblent avoir été moins bien assimilés par les développements ultérieurs, mais ils apparaissent comme source d'inspiration dans un certain nombre de travaux délicats assez récents sur des inégalités diverses liées à la théorie des espaces de Banach, notamment ceux de Pelczynski. Signalons également les résultats assez fins de [6] et de [8 bis] sur les propriétés de décroissance de la suite des valeurs propres de certains opérateurs dans les espaces de Hilbert et dans les espaces de Banach généraux.

*Références* : L. Schwartz, J. Dieudonné, I. Gelfand, P. Cartier, J. L. Lions.

## 2. Algèbre Homologique ([8], [9], [19], [9 bis])

Depuis 1955, me plaçant au point de vue de "l'utilisateur" et non celui de spécialiste, j'ai été amené continuellement à élargir et à assouplir le langage de l'algèbre homologique, notamment sous la poussée des besoins de la géométrie algébrique (théories de dualité, théories du type Riemann-Roch, cohomologies  $\ell$ -adiques, cohomologies du type de De Rham, cohomologies cristallines...). Deux directions principales à ces réflexions : développement d'une algèbre homologique non commutative (amorcée dans [10 bis] et systématisée dans la thèse de J. Giraud [\*]); théorie des catégories dérivées (développée systématiquement par J. L. Verdier, exposée dans Hartshorne [\*], Illusie [\*] et [16 SGA 4 Exp. XVIII]). Ces deux courants de réflexion sont d'ailleurs loin d'être épuisés, et sont sans doute appelés à se rejoindre, soit au sein d'une "algèbre homotopique" dont une esquisse préliminaire a été faite par Quillen [\*], soit dans l'esprit de la théorie des  $n$ -catégories, particulièrement bien adaptée à l'interprétation géométrique des invariants cohomologiques (cf. le livre cité de J. Giraud et le travail de Mme. M. Raynaud [\*]).

*Références* : J.L. Verdier, P. Deligne, D. Quillen, P. Gabriel.

## 3. Topologie ([16, SGA 4], [9])

Jusqu'à présent, c'est surtout le  $K$ -invariant des espaces topologiques que j'avais introduit à l'occasion de mes recherches sur le théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique, qui a connu la fortune la plus brillante, étant le point de

départ de très nombreuses recherches en topologie homotopique et topologie différentielle. De nombreuses constructions que j'avais introduits pour les besoins de la démonstration algébrique du théorème de Riemann-Roch (telles les opérations  $\lambda_i$  et leurs liens avec les opérations du groupe symétrique) sont devenues pratique courante non seulement en géométrie algébrique et en algèbre, mais également en topologie et en théorie des nombres, notamment dans les travaux de mathématiciens comme Atiyah, Hirzebruch, Adams, Quillen, Bass, Tate, Milnor, Karoubi, Shih, etc...

Plus fondamental me semble néanmoins l'élargissement de la topologie générale, dans l'esprit de la théorie des faisceaux (développée initialement par J. Leray), contenu dans le point de vue des topos ([16, SGA 4]). J'ai introduit ces topos à partir de 1958 en partant du besoin de définir une cohomologie  $\ell$ -adique des variétés algébriques (plus généralement, des schémas), qui convienne à l'interprétation cohomologique des célèbres conjectures de Weil. En effet, la notion traditionnelle d'espace topologique ne suffit pas à traiter le cas des variétés algébriques sur un corps autre que le corps des complexes, la topologie proposée précédemment par Zariski ne donnant pas lieu à des invariants cohomologiques "discrets" raisonnables. A l'heure actuelle, le point de vue des topos, et la notion de "localisation" correspondante, font partie de la pratique quotidienne du géomètre algébriste, et il commence à se répandre également en *théorie des catégories* et en *logique mathématique* (avec la démonstration par B. Lawvere [\*] du théorème de Cohen d'indépendance de l'axiome du continu, utilisant une adaptation convenable de la notion de topos). Il n'en est pas encore de même en topologie et en géométrie différentielle et analytique, malgré certains premiers essais dans ce sens (comme la tentative de démonstration par Sullivan d'une conjecture d'Adams en  $K$ -théorie, par réduction à une propriété de l'opération de Frobenius sur les variétés algébriques en car.  $p > 0$ ).

*Références* : M. Atiyah, F. Hirzebruch, H. Bass, J. Leray, M. Artin, D. Quillen, M. Karoubi...

## 4. Algèbre ([15], [16], [18])

Comme l'algèbre homologique, l'algèbre a été pour moi un outil à développer, et non un but en soi. J'ai parlé au par. 2 de mes contributions à l'algèbre homologique, et au par. 3 de mes contributions à la  $K$ -théorie; celle-ci comprend une partie purement algébrique (qui, une fois étendue en une théorie des  $K^i$  supérieurs, finira par devenir une partie de l'algèbre homologique ou homotopique). Ainsi, un certain nombre de mes résultats en géométrie algébrique se spécialisent en des résultats en algèbre pure, comme la relation  $K(A[t]) \simeq K(A)$ , où  $A$  est un anneau. Mises à part ces retombées, on peut signaler les contributions ci-dessous.

- a) *Algèbre catégorique* : En fait, de façon continue depuis 1953, je me suis senti dans l'obligation, au fur et à mesure des besoins, de développer une panoplie catégorique toujours insuffisante. La plupart des résultats et des notions ainsi introduites se trouvent développés un peu partout dans [15, 16], notamment dans le premier exposé de SGA 4. Il ne peut être question de passer en revue ici même sommairement les notions qui sont ainsi entrées dans l'usage courant. Signalons seulement ici le langage des *univers* (pour éliminer des difficultés logiques dans la manipulation intensive des catégories), et celui de la *descente* (développé de façon systématique par Giraud [\*]).

*Références* : J. Giraud, P. Gabriel.

- b) *Algèbre commutative* : Dans le langage géométrique des "schémas", l'algèbre commutative peut être considérée comme étant, essentiellement, l'étude locale des schémas. C'est ainsi que [15], et notamment le Chap. IV de cet ouvrage, contient de très nombreux résultats nouveaux d'algèbre commutative, dont il ne peut être question ici d'énumérer même les plus couramment utilisés. Notons seulement ici, en algèbre locale, la notion d'anneau *excellent* et ses propriétés de permanence (dont l'absence constituait sans doute la lacune la plus marquante de l'ouvrage de M. Nagata sur les anneaux locaux).

*Références* : M. Nagata, P. Samuel, M. Raynaud, O. Zariski.

- c) *Théorie du groupe de Brauer* : Mes contributions découlent pour l'essentiel de l'application de la cohomologie étale (développée dans [16, SGA 3]) à la



théorie du groupe de Brauer. J'ai fait un exposé d'ensemble sur les résultats connus sur ce groupe dans [18].

*Références* : M. Artin, J. Tate, J.P. Serre

- d) *Théorie des algèbres de Lie* : Comme sous-produit de recherches sur les groupes algébriques en car.  $p > 0$ , je trouve certains résultats délicats sur les sous-algèbres de Borel ou de Cartan de certaines algèbres de Lie, notamment sur les corps de base imparfaits (cf. [16, SGA 6, Exp. XIII et XIV]).

*Références* : M. Demazure, J. Tits, J.P. Serre

## 5. Géométrie Analytique ([10], [11], [16 bis])

Mon influence sur la géométrie analytique est due moins aux résultats nouveaux que j'ai pu y démontrer (la plupart contenus dans les réf. cit.), que par les points de vue directement inspirés par la géométrie algébrique que j'ai pu y introduire, et les nombreuses suggestions d'énoncés que j'ai pu y faire.

Un des plus anciens est le théorème de finitude de Grauert pour les morphismes propres d'espaces analytiques, aboutissant à sa généralisation récente en un théorème qui s'énonce en termes de catégories dérivées (formulation sur laquelle j'avais insisté de longue date, et qui a été prouvée indépendamment par R. Kiehl [\*] et O. Forster et K. Knorr [\*]). D'autres théorèmes de finitude (de Frisch et Siu) pour les images directes supérieures d'un faisceau cohérent par une immersion ouverte, utilisant la profondeur du faisceau en les points du complémentaire, sont inspirés de théorèmes analogues en géométrie algébrique [16, SGA 2]; remarques analogues pour des théorèmes sur la cohomologie à supports compacts des faisceaux algébriques cohérents, complétés par un théorème d'existence, et leur interprétation en termes de théorèmes du type de Lefschetz pour la cohomologie cohérente (la version algébrique faire partie de la thèse de Mme. Michèle Raynaud (en cours de publication), et la version analytique est due à Trautmann [\*]). Parlant en termes de grands thèmes de recherche plutôt qu'en termes de résultats techniques particuliers, je pense qu'outre les thèmes déjà nommés, les thèmes suivants ont été directement suscités ou tout au moins influencés par des idées que j'avais développées en géométrie algébrique:

- a) *Techniques de construction d'espaces analytiques*, aboutissant aussi bien à des espaces “modulaires” “globaux” comme les espaces modulaires de Picard, pour certains espaces analytiques compacts comme dans [11] (le cas général ne semble pas encore traité), qu'à des espaces modulaires “locaux” de déformation d'une structure analytique complexe donnée, ou au modèle de la Géométrie Formelle (“th. d'existence des modules formels”, cf. [15 bis, Exp. no 195]). Dans certains cas, les énoncés obtenus en géométrie algébrique sont directement applicables (cf. M. Hakim [\*]), dans d'autres de nouvelles difficultés surgissent, pas toujours surmontées à l'heure actuelle. Parmi les travaux définitifs dans ce sens, on peut citer la thèse de A. Douady [\*].
- b) *Théorèmes de dualité locaux et globaux pour les faisceaux cohérents*, développés notamment par J.L. Verdier [\*] et J.P. Ramis et G. Ruget [\*], inspirés par la théorie que j'avais développée dans le cas des schémas, exposée dans R. Hartshorne [\*].
- c) *Formulations de théorèmes du type de Riemann-Roch* pour des variétés analytiques compactes ou des morphismes propres de telles variétés, cf. [16, SGA 6, Exp. 0]. Les problèmes essentiels restent toujours ouverts.
- d) *Théorèmes de De Rham analytiques complexes [16 bis], cohomologie cristalline complexe*. Certains des résultats et des idées que j'avais développés à ce sujet ont été utilisés dans des développements théoriques divers, comme la théorie de Hodge généralisée de P. Deligne [\*].
- e) *Espaces rigide-analytiques*. M'inspirant de l'exemple de la “courbe elliptique Tate”, et des besoins de la “géométrie formelle” sur un anneau de valuation discrète complet, j'étais parvenu à une formulation partielle de la notion de variété rigide-analytique sur un corps valué complet, qui a joué son rôle dans la première étude systématique de cette notion par J. Tate [\*]. Par ailleurs, les “cristaux” que j'introduis sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique  $> 0$  peuvent s'interpréter parfois en termes de fibrés vectoriels à connexion intégrable sur certains types d'espaces rigide-analytiques sur des corps de caractéristique nulle; ceci fait pressentir l'existence de relations pro-

fondes entre cohomologie cristalline en  $\text{car.} > 0$ , et cohomologie de systèmes locaux sur des variétés rigide-analytiques en  $\text{car.}$  nulle.

*Références* : J. P Serre, H. Grauert, H. Cartan, P. Deligne, A. Douady, B. Malgrance, K. Knorr, R. Kiehl, J. Tate.

## **6. Groupes Algébriques ([16 SGA 3 - en trois volumes] [12 bis])**

Ce sujet relève à la fois de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes. Le travail cité SGA 3 se place surtout sur des schémas de base généraux, et la part de la géométrie algébrique y est certes considérablement plus large que celle de la théorie des groupes. Néanmoins, grâce à la technique des schémas, nous y obtenons des résultats nouveaux même dans le cas de groupes définis sur un corps de base, les plus intéressants (relatifs surtout au cas d'un corps de base imparfait) étant contenus dans SGA 3, Exp XIV. Ma contribution principale, continuant dans la voie ouverte par A. Borel et C. Chevalley dans le contexte de la géométrie algébrique habituelle, a été de montrer le parti qu'on pouvait tirer d'une application systématique de la théorie des schémas aux groupes algébriques et aux schémas en groupes.

*Références* : J. Tits, F. Bruhat, M. Demazure, P. Gabriel, A. Borel, D. Mumford.

## **7. Groupes discrets ([18, Exp VIII], [13 bis])**

Dans [18, Exp. VIII] je développe une théorie purement algébrique des classes de Chern des représentations d'un groupe discret sur un corps de base (ou même un anneau de base) quelconque, avec des applications de nature arithmétique sur l'ordre des classes de Chern des représentations complexes. Cette théorie peut être considérée comme cas particulier d'une théorie des classes de Chern des représentations linéaires de schémas en groupes quelconques, elle-même contenue dans la théorie des classes de Chern  $\ell$ -adiques des fibrés vectoriels sur des topos annelés quelconques. Dans [13 bis], j'établis, à peu de choses près, que pour un groupe discret  $G$ , la théorie des représentations linéaires de  $G$  (sur un anneau de base quelconque) ne dépend que du complété profini  $\hat{G}$  de  $G$ .

## 8. Groupes formels ([17] [16 SGA 7] [14 bis])

C'est un sujet qui relève à la fois de la théorie des groupes, de celle des groupes de Lie, de la géométrie algébrique, de l'arithmétique, et (sous la forme voisine des groupes de Barsotti-Tate) de la théorie des systèmes locaux. Ici encore, la théorie des schémas permet une grande aisance, et c'est dans ce contexte par exemple que se place d'emblée I. Manin [\*a], dans son exposé classique de la théorie de Dieudonné. Ma principale contribution, en dehors de cette simplification conceptuelle, a été le développement d'une "théorie de Dieudonné" pour les groupes de Barsotti-Tate sur des schémas de base généraux à caractéristiques résiduelles  $> 0$ , en termes du "cristal de Dieudonné" associé à un tel groupe. Une esquisse de cette théorie a été exposée dans divers cours et séminaires, y compris dans mon cours au Collège de France en 1970/71 et 71/72; certains énoncés principaux sont esquissés dans les C.R. du Congrès International de Nice en 1970 [14 bis]. Une partie de ces idées est développée dans la thèse de W. Messing [\*], et les besoins techniques de la théorie ont été la motivation pour le développement par L. Illusie [\*] de sa théorie des déformations des schémas en groupes commutatifs, vérifiant des conjectures suggérées par cette "théorie de Dieudonné cristalline". Par ailleurs, les relations entre schémas abéliens et groupes de Barsotti-Tate associés sont explorées et exploitées également dans [17] et dans [16, SGA 7, Exp. IX].

*Références* : J. Tate, B. Mazur, A. Néron, L. Illusie, J.N. Katz, W. Messing, I. Manin.

## 9. Arithmétique ([16 SGA 5, Exp XVI] [18, Exp III])

Ma contribution principale a consisté (en collaboration avec M. Artin) en la démonstration de la rationalité des fonctions  $L$  associées à des faisceaux  $\ell$ -adiques généraux sur des variétés algébriques sur des corps finis, comprenant comme cas particulier les fonctions  $L$  associées à des caractères de groupes finis opérant sur de telles variétés. S'inspirant des conjectures de Weil, on arrive en effet à exprimer ces fonctions  $L$  en termes de produits alternés de polynômes caractéristiques de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la "cohomologie à support propre" de la variété envisagée. Bien au delà d'une simple question de rationalité, ces ré-

sultats ouvrent la voie à une approche cohomologique systématique d’invariants arithmétiques subtils comme les fonctions  $\zeta$  et  $L$  des variétés, et l’interprétation en termes arithmétiques de théorèmes tels que les théorèmes de dualité (démontrés à l’heure actuelle) et de Lefschetz pour les sections hyperplanes (non démontrés encore en car.  $> 0$ ). Il y a là un champ d’étude immense, qui par la nature des choses devrait se trouver, tôt ou tard, centré sur la notion de “motif” (dénominateur commun des divers types de cohomologie qu’on sait attacher à une variété algébrique) – mais qui probablement ne sera jamais exploré jusqu’au bout, l’heure de ce genre d’investigations étant déjà passée (même si rares sont ceux qui en ont pris conscience).

*Références* : J.P. Serre, A. Weil, B. Dwork, J. Tate, M. Artin, P. Deligne...

## 10. Géométrie Algébrique ([12] à [19], [15 bis] à [20 bis])

C’est dans cette direction que mon influence a été la plus directe et la plus profonde, puisque c’est dans cette optique que se placent pour l’essentiel mes travaux depuis 1959. Voici les thèmes principaux sous lesquels on peut placer mes contributions:

- a) *Travail de fondement* : Il s’agissait de dégager un cadre suffisamment vaste pour servir de fondement commun à la géométrie algébrique habituelle (y compris celle développée par des auteurs comme A. Weil, O. Zariski, C. Chevalley, J.P. Serre sur des corps de base quelconques) et à l’arithmétique. C’est fait pour l’essentiel dans [15, Chap. I,II et des parties des Ch. III et IV], avec l’introduction et l’étude de la *notion de schéma*. Des généralisations ont été développées par la suite, dans le même esprit, avec les schémas formels [15, Chap. I, par. 10], la théorie des “algebraic spaces” de M. Artin (cf. Knutson [\*]), les “algebraic stacks” ou “multiplicités algébriques” de P. Deligne et D. Mumford (\*), des “schémas relatifs” de la thèse de M. Hakim [\*] (en attendant les “multiplicités formelles” et les “multiplicités algébriques relatives” sur des topos annelés généraux, etc). Ces généralisations montrent la part conceptuelle importante qui revient, dans le langage des schémas, à la notion générale de la localisation, c’est à dire à celle de *topos* (dont il a été question au par. 3). Les fondements développés dans [15] et [16] sont aujourd’hui le “pain quotidien” de la grande majorité des géomètres algébristes,

et leur importance a été soulignée à de nombreuses occasions par des mathématiciens aussi divers que O. Zariski, J.P. Serre, H. Hironaka, D. Mumford, I. Manin, F. Chafarévitch.

- b) *Théorie locale des schémas et des morphismes de schémas* : Dans ce contexte se placent les développements d'algèbre commutative mentionnés au par. 4, et l'étude détaillée de notions comme celles de morphisme lisse, étale, net, plat, etc. Les quatre volumes de [15, Chap. IV] sont consacrés à ces développements, qui ont d'ailleurs inspiré des développements analogues en théorie des espaces analytiques et rigide-analytiques
- c) *Techniques de construction de schémas* : Parmi les techniques développées, exposées surtout dans [15 bis] et des séminaires non publiés (par moi-même et d'autres), il y a la *théorie de la descente* (cf. aussi [16, SGA I, Exp. V, VI]), celle des *schémas quotients*, des *schémas de Hilbert*, des *schémas de Picard*, des "*modules*" formels, le *théorème d'existence* des faisceaux de modules algébriques associés à des modules formels ([15, Chap. III, par. 5]). Le point de vue adopté est surtout celui de la construction d'un schéma à partir du foncteur qu'il représente. Dans cette optique, je n'étais pas parvenu à une véritable caractérisation maniable des foncteurs représentables par un schéma relatif (localement de type fini sur un schéma noethérien) – c'est M. Artin qui y est parvenu ultérieurement [\*], en remplaçant la notion de schéma par celle, plus générale et plus stable, d'espace algébrique. Parmi d'autres recherches dans la même direction, suscitées par mes travaux, il y a celles de J. Murre sur les schémas de Picard sur un corps [\*], celles de D. Mumford et de M. Raynaud [\*] sur ces mêmes schémas sur des bases générales, et dans une certaine mesure ceux de D. Mumford [\*] et de S. Seshadri sur le passage au quotient, pour n'en citer que quelques-uns.
- d) *Théories cohomologiques* :
  - 1°) *Cohomologie "cohérente"* : résultats de finitude, de comparaison avec la cohomologie formelle, cf. [15, Chap. III]. Théorèmes de dualité et des résidus : un exposé systématique de mes idées et résultats est développé dans le séminaire de R. Hartshorne [\*], cf. aussi [18 bis].

- 2°) *Cohomologie  $\ell$ -adique* : définition de la cohomologie étale, théorèmes de comparaison, de finitude, de dimension cohomologique, de Lefschetz faible, [16 SGA 4]; théorèmes de dualité, formules de Lefschetz et d'Euler-Poincaré, application aux fonctions  $L$ , [16, SGA 15].
- 3°) *Cohomologie de De Rham* : [16 bis], [17 bis].
- 4°) *Cohomologie cristalline* : quelques idées de départ sont esquissées dans [18, Exp. IX], puis reprises et systématisées dans la thèse de P. Berthelot [\*], et dans le travail de P. Berthelot et L. Illusie sur les classes de Chern cristalline [\*].
- e) *Théorie du groupe fondamental* ([16, SGA 1], SGA 2, SGA 7, Exp. I et II], [15 bis, no 182], [19 bis]) :
- D'un point de vue algébrico-géométrique, tout était à faire, depuis la définition du groupe fondamental d'une variété quelconque, en passant par des propriétés "de descente" incluant des résultats assez formels du type de van Kampen, jusqu'au calcul du groupe fondamental dans les premiers cas non triviaux, comme celui d'une courbe algébrique privée de certains points; on peut y adjoindre les théorèmes de génération et de présentation finie du groupe fondamental d'une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Ce programme est accompli pour l'essentiel dans SGA 1, en utilisant à la fois les résultats classiques sur le corps des complexes (établis par voie transcendante) et une panoplie d'outils faits sur mesure (théorie de la descente, étude des morphismes étales, théorème d'existence de faisceaux cohérents...). Les autres références contiennent des résultats plus spéciaux: théorèmes du type de Lefschetz dans SGA 2, action des groupes de monodromie locale sur le groupe fondamental d'une fibre dans SGA 7, Exp. I, calculs de certains groupes fondamentaux locaux dans [19 bis], via les groupes fondamentaux de certains schémas formels. Tous ces résultats ont été utilisés couramment dans de nombreux travaux, et en ont inspiré d'autres comme la thèse de Mme. Michèle Raynaud [\*].
- f) *Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* pour les groupes de Picard, le groupe fondamental, la cohomologie étale, la cohomologie cohérente. Il s'agit ici

de la comparaison entre les invariants (cohomologiques ou homotopiques) d'une variété algébrique et d'une section hyperplane. Les idées de départ sont développées dans [16, SGA 2]. Cependant, pour des énoncés “définitifs”, en termes de conditions nécessaires et suffisantes, se reporter plutôt à la thèse de Mme. Michèle Raynaud [\*] déjà citée.

g) *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch :*

La principale idée nouvelle, c'est qu'il y a presque identité entre le groupe “de Chow” des classes de cycles sur une variété  $X$ , et un certain groupe de “classes de faisceaux cohérents” (tout au moins modulo torsion), à savoir le groupe  $K(X)$  (mentionné dans le par. 3). Dans un contexte modeste c'est exposé dans [12] et le travail de A. Borel et J.P. Serre [\*], dans un contexte plus ambitieux cela donne l'imposant séminaire [16, SGA 7]. Dans le même esprit, cf. [12 bis].

Par ailleurs, l'idée (que je semble avoir été le premier à introduire avec ma formulation du théorème de Riemann-Roch) de reformuler un théorème sur une variété (dû en l'occurrence à F. Hirzebruch) en un théorème plus général sur un morphisme de variétés, a connu par la suite une grande fortune, non seulement en géométrie algébrique, mais aussi en topologie algébrique et topologie différentielle (à commencer par la “formule de Riemann-Roch différentiable”, développée par M.F. Atiyah et F. Hirzebruch sous l'inspiration de ma formulation “relative” du théorème de Riemann-Roch).

h) *Schémas abéliens :*

En termes plus classiques, ce sont les familles de variétés abéliennes, paramétrées par un schéma quelconque. Les résultats les plus importants que j'y ai établis sont le “*théorème de réduction semi-stable*” et ses conséquences et variantes [16, SGA 7, Exp. IX], le théorème d'*existence de morphismes de schémas abéliens* contenu dans [17] et ses variantes (généralisé par P. Deligne [\*] en un théorème sur la cohomologie de Hodge-De Rham relative d'une famille de variétés projectives complexes non singulières), enfin une théorie des *déformations infinitésimales des schémas abéliens* (non publiée sur une base



quelconque), en termes de la déformation d'une filtration de Hodge sur un  $H^1$  relatif de De Rham (interprété comme une cohomologie cristalline).

i) *Groupes de monodromie :*

Mes principales contributions sont exposées (en partie par P. Deligne) dans le premier volume de [16, SGA 7], donnant des propriétés fondamentales de l'action du groupe de monodromie locale sur la cohomologie comme sur le groupe fondamental d'une fibre. Parmi les principales applications, il y a le théorème de "réduction semi-stable" des schémas abéliens signalé au paragraphe précédent.

j) *Divagations motiviques :*

Nous entrons ici dans le domaine du rêve éveillé mathématique, où on s'essaie à deviner "ce qui pourrait être", en étant aussi insensément optimiste que nous le permettent les connaissances parcellaires que nous avons sur les propriétés arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. La notion de motif peut se définir en toute rigueur avec les moyens du bord (c'est fait par I. Manin [\*] et M. Demazure [\*]), mais dès qu'on veut aller plus loin et formuler des propriétés fondamentales "naturelles", on bute sur des conjectures actuellement indémontrables, comme celles de Weil ou de Tate, et d'autres analogues que la notion même de motif suggère irrésistiblement. Ces propriétés ont fait l'objet de nombreuses conversations privées et de plusieurs exposés publics, mais n'ont jamais fait l'objet d'une publication, puisqu'il n'est pas d'usage en mathématique (contrairement à la physique) de publier un rêve, si cohérent soit-il, et de suivre jusqu'au bout où ses divers éléments nous peuvent entraîner. Il est évident pourtant, pour quiconque se plonge suffisamment dans la cohomologie des variétés algébriques, "qu'il y a quelque chose" – que "les motifs existent". Il y a quelques années encore, j'ai joué avec l'idée d'écrire contrairement à l'usage, un livre entièrement conjectural sur les motifs – une sorte de science-fiction mathématique. J'en ai été empêché par des tâches plus urgentes que des tâches de mathématicien, et je doute fort actuellement qu'un tel livre soit jamais écrit, ni qu'on arrive jamais (même conjecturalement) à se faire une idée d'ensemble à la fois pré-

cise et suffisamment vaste sur le formalisme des motifs. Avant qu'on n'y parvienne, il sera sans doute devenu évident pour tous, sous la poussée des événements, la science spéculative et parcellarisée ne faisant plus vivre son homme, qu'il est des tâches plus urgentes que de mettre sur pied même la plus belle théorie du monde, conjectural ou non.

## **Complément à la bibliographie sommaire jointe au Curriculum Vitae de A. Grothendieck (travaux non inclus dans la dite bibliographie)**

### **Analyse fonctionnelle**

- 1 bis. *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles*, Journal d'Analyse Math. vol II, pp. 243-280 (1952/53).
- 2 bis. *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*, Boletim da Soc. Mat. de Sao Paulo, vol. 8°, pp. 85-110 (1953).
- 3 bis. *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type  $C(K)$* , Canadian Journal of Math., Vol. 5, pp. 125-173 (1953).
- 4 bis. *Sur certains sous-espaces vectoriels de  $L^p$* , Can. J. Math. vol. 6, pp. 158-160 (1953).
- 5 bis. *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces  $L^1$* , Can. Journ. Math. vol. 7, pp. 552-561 (1955).
- 6 bis. *Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de Von Neumann munies d'une trace*, Séminaire Bourbaki n° 115 (Mars 1955).
- 7 bis. *Un résultat sur le dual d'une  $C^*$ -algèbre*, Journ. de Math. vol. 36, pp. 97-108 (1957).
- 8 bis. *The trace of certain operators*, Studia Mathematica t. 20 (1961) pp. 141-143.

## Algèbre Homologique

- 9 bis. *A general theory of fiber spaces with structure sheaf*, University of Kansas, 1955.
- 10 bis. *Standard conjectures on algebraic cycles*, Proc. Bombay, Coll. on Alg. Geom. 1968, pp. 193-199.

## Algèbre

- 11 bis. (en collaboration avec J. Dieudonné) *Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques*, Journal of Algebra, vol. 5, pp. 305-324 (1967).

## Groupes algébriques

- 12 bis. Exposés 4 (Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections) et 5 (torsion homologique et sections rationnelles), in Anneaux de Chow et applications, Sémin. Chevalley à l'ENS, 1958, (36 p + 29 p.).

## Groupes discrets

- 13 bis. *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets*, Manuscripta Math. vol 2, pp. 375-396 (1970).

## Groupes Formels

- 14 bis *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes Congr. Int. math. 1970, t. 1., pp. 431-436.

## Géométrie Algébrique

- 15 bis. *Techniques de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique* (recueil des exposés Bourbaki n° 182, 190, 195, 212, 221, 232, 236), Secrétariat de l'IHP, rue Pierre Curie, Paris (1958-1962).

- 16 bis. *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES, vol. 29, pp. 95-103 (1966).
- 17 bis. *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons*, Topology, vol. 8, pp. 299-303 (1969).
- 18 bis. *Local cohomology* (notes by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math. n° 41 (1967), Springer.
- 19 bis. (en coll. avec J.P. Murre) *The tame fundamental group of a formal neighbourhood...* Lecture Notes in Math. n° 208 (1971), Springer.
- 20 bis. (avec H. Seydi), *Platitude d'une adhérence à schématique et lemme de Hironaka généralisé*, Manuscripta Math. 5, pp. 323-339 (1971).

## Liste de travaux cités, suscites ou influences par les travaux de A. Grothendieck

M. ARTIN, Algebraization of Formal Moduli, I (in Global Analysis, pp. 21-71, University of Tokyo Press, Princeton University Press, 1968), II Existence of modifications, Annals of Mathematics, Vol. 91, pp. 88-135 (1970).

M.F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 65, pp 276-281 (1959).

P. BERTHELOT, Cohomologie cristalline des schémas propres et lisses de caractéristique  $p > 0$ , Thèse, Université Paris VII, 1971 (paraîtra dans Lecture Notes of Math. chez Springer).

P. BERTHELOT et L. ILLUSIE, Classes de Chern en cohomologie cristalline, C.R. Acad. Sci. Paris t. 270, pp. 1695-1697 (22 juin 1970) et p. 1750-1752 (29 juin 1970).

A. BOREL et J.P. SERRE, Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck), Bull. Soc. Math. France, t. 86, pp. 97-136 (1958).

P. DELIGNE, Théorie de Hodge I (Actes du Congrès International des mathématiciens, Nice 1970) et II, Publications Math. n° 40, pp. 5-57 (1971).

P. DELIGNE et D. MUMFORD, The irreducibility of the space of curves of a given genus, Pub. Math. n° 36, pp. 75-110 (1969).

M. DEMAZURE, Motifs des variétés algébriques, Sémin. Bourbaki n° 365, 1969/70.

A. DOUADY, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts..., Ann. Inst. Fourier, vol. 16, pp. 1-98 (1966).

O. FORSTER et K. KNORR, Relativ-analytische Raume und die Kohärenz von Bildgarden, Inventiones Math. Vol. 16, pp. 113-160 (1972).

I.M. GELFAND et N. Ja. VILENKIN, Les distributions, tome 4, Applications de l'analyse harmonique, Dunod, Paris, 1968 (traduction).

J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne, Grundlehren des Maths. Wiss. Bd. 179, 1971, Springer.

M. HAKIM, Topos annelés et schémas relatifs, Ergebnisse des Math. Bd. 64, 1972, Springer.

R. HARTSHORNE, Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics n° 20 (1966).

L. ILLUSIE, Complexe Cotangent et Déformations I, Lecture Notes in Math. n° 239 (1971), Springer et II, idem, n° 283 (1972).

R. KIEHL, Relativ analytische Raume, Inventiones Math. vol. 16, pp. 40-112 (1972).

D. KNUTSON, Algebraic spaces, Lecture Notes in Math. n° 203 (1971), Springer.

F.N. LAWVERE, Toposes, algebraic geometry and logic, Lecture notes in Math., n° 274 (1972), Springer.

I. MANIN,

a) Théorie des groupes formels commutatifs sur des corps de caractéristique finie, (en russe) Uspekhi mat. Nauk, 1963, t. 18, pp. 3-90. (Il existe une traduction anglaise de l'Amer. Math. Soc).

b) Correspondances, motifs et transformations monoïdales (en russe), Mat. Sbornik t. 77, pp. 475-507.

W. MESSING, The crystals associated to a Barsotti-Tate group, Lecture Notes in Math. n° 264 (1971) Springer.

D. MUMFORD, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Math. Bd 34, 1965, Springer.

J.P. MURRE, On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups, Pub. Math. n° 23, pp. 5-43 (1964).

D. QUILLEN, Homotopical algebra, Lecture Notes in Math. n° 43 (1967), Springer.

M. RAYNAUD, Spécialisation du Foncteur de Picard, Publications Math. n° 38, pp. 27-76 (1970).

Mme. M. RAYNAUD, Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et cohomologie étale, Thèse Paris 1972 (paraîtra dans Lecture Notes of Math.)

J.P. RAMIS et G. RUGET, Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe, Pub. Math. n° 38, pp. 77 à 91 (1970).

J. TATE, Rigid-analytic spaces, Inventiones Mathematicae, vol. 12, pp. 257-289 (1971).

G. TRAUTMANN, Abgeschlossenheit von Corandmoduln une Fortsetzbarkeit kohärenter analytischer Garben, Inventiones Math. vol. 5, pp. 216-230 (1968).

J.L.VERDIER, J.P. RAMIS et G. RUGET, Dualité relative en géométrie analytique complexe, Inventiones Math., vol. 13, pp. 261-283 (1971).

1973

---

•



## INTRODUCTION TO FUNCTORIAL ALGEBRAIC GEOMETRY

---

- At the beginning of 1973, Grothendieck was already preparing for his departure from social and ecological activities. He intended to move to the countryside (at Villecun). But before this, he went for several weeks on a lecture tour in the USA, it was on this occasion that he delivered the following course at SUNY, Buffalo in the summer of 1973. Then he went to Paris in order to take care of the formalities concerning his appointment to the University of Montpellier, where he began his activity at the start of the term.
- The following notes of the course were written by Federico Gaeta, and printed by the university in 1984 in the form of mimeographed notes. These are not based on prenotes by Grothendieck and to some extent represent Gaeta's personal understanding of what was taught. For more on this, see the foreword in the introduction.
- [audio]. The lectures were audio-recorded.
- [scan]

INTRODUCTION  
TO  
FUNCTORIAL ALGEBRAIC GEOMETRY

After a Summer Course by  
A. GROTHENDIECK

Vol. I  
AFFINE ALGEBRAIC GEOMETRY

SUNY at Buffalo

## 0. Introductory material

Bibliography.

**Foreword.** These notes were primarily written from tape recordings of *Grothendieck*'s lectures during his visit at SUNY in the summer of 1973. However, there recordings were supplemented by exercises, references to classical algebraic geometry, historical comments and concrete quotations of such "Bibles" as SGA, EGA, etc.<sup>1</sup>

*Grothendieck* himself does not assume any responsibility for the publication of these notes; I believe however that since no adequate "textbooks" exist today and the original publications present considerable difficulties to the beginner, a publication of this kind will help a much wider audience. This is intended as an introduction to the sources SGA, EGA,...: with concrete references to Ch., § and page number, I have completed the bibliography by referring to other introductory publications such as the *Dieudonné* articles, *Mumford*'s lecture notes, etc. Most of them contain sketchy or no proofs at all, or they are addressed to a different type of reader, cf. Macdonald-*Schemes*, addressed to classical algebraic geometers. I hope that these lecture notes, directed primarily to beginning graduate students, will bring the gap, between the previously mentioned lecture notes and the sources. To aid the newcomer, the reader will find many more details than is customary in informal publications of this type. I took advantage of some of the oral repetitions to insert "*summaries*" at the beginning of most paragraphs (mostly using the tape-recorded lectures, or my own initiative if I could not find any better source). There are many complete proofs, and others are almost complete with very few, really trivial details left to the reader.

No knowledge of "old-time" or 'classical' algebraic geometry was assumed although *Grothendieck* himself gave examples involving plane algebraic curves or surfaces, etc. In many points, especially in the introduction for future applied mathematicians and in the Summary of the course, I tried to build some bridges with "old-time" algebraic geometry based on the study of algebraic varieties instead of *schemes*. If this might seem contrary to *Grothendieck*'s mathematical spirit, it is definitively not unfaithful to his current philosophical or sociological worries. In his prior visit to Buffalo, and in many other places as well, *Grothendieck* campaigned against *expert knowledge* and technology. How can we ignore that many

---

<sup>1</sup>The names or authors and/or titles of books, papers, etc. between " " refer to the Bibliography.

people feel disappointed if they do not see the words algebraic curve or surfaces on page one in an Algebraic Geometry text? Or they complain “a priori”, just by “hearsay” that there is a lot of algebra and categorical language but — where is the geometry? I try to overcome these psychological difficulties or prejudices in order to emphasize the major simplifications introduced by *Grothendieck*. The introduction for applied mathematicians is addressed to any person with a bachelor degree in Mathematics but it should be understood also by theoretical physicist and engineers...

I hope that very soon after a final revision of the whole course the second part dealing with the category of schemes will appear.

I am grateful to many colleagues and students in the audience who helped me in preparing these notes, mainly: J. Duskin, B. Fell, L. Gupta, R. Hamsher, N. Kazarinoff, M. Klun, I. Ozaki, F. C. Schanuel, G. Sicherman, J. Winthrop by correcting all kinds of mistakes, typographical, linguistic, mathematical..., and I am especially grateful first of all to *Grothendieck* who was so kind with everybody and so generous with his time. He lectured several times for periods of almost seven hours, with only a few short breaks. Who can believe that he is not interested in Mathematics anymore?

Last but not least, I am very grateful too to the typist, Mrs. Gail Berti, for her excellent job and her angelic patience, correcting and retyping the manuscript dozens of times and never once protesting.

Buffalo, June 1974  
Federico Gaeta

**0. Propaganda for applied mathematicians.** Not more than one century ago the distinction between pure and applied mathematics was to a large extent artificial and unimportant.

**1. Prerequisites.** We shall assume familiarity with the

## **I. Functorial description of the sets of solutions of systems of polynomial equations**

1. The isomorphism  $\text{Aff}_k \simeq G_k^\circ$
2. Restriction to particular  $k$ -algebras ( $k' = k$ ,  $k'$  reduced,  $k'$  a field)

## **II. Limits in the category $\text{Aff}_k$ of affine algebraic spaces**

1. Categorical preparation
2. Limits in the category  $\text{Aff}_k$

## **III. Affine schemes**

1. The functor  $\text{Spec} : G \longrightarrow I$
2. Sheaves on affine schemes

# FONCTIONS HOLOMORPHES

## (Théorie de Cauchy)

---

- Année Universitaire 1973-1974
- [scan]

# FONCTIONS HOLOMORPHES

## (Théorie de Cauchy)

---

### **0. Introduction**

La théorie présentée dans les fascicules précédent

### **1. Prélude**

### **2. Intégrales curvilignes**

### **3. Primitives d'une forme différentiable**

### **4. Fonctions holomorphes**

### **5. Développement en série entière d'une fonction holomorphe**

### **6. Homotopie de chemins**



## FONCTIONS HOLOMORPHES

(Suite et fin)

---

- Année Universitaire 1973-1974
- [scan]

## FONCTIONS HOLOMORPHES

(Suite et fin)

---

- 7. Principe du maximum
- 8. Développement de Laurent
- 9. Calcul des résidus

## LETTER TO F. KNUDSEN

19.5.1973

---

- This text was published in: *Letter to F. Knudsen*. Determinant functors on exact categories and their extensions to categories of bounded complexes. Michigan Math. J., 50 (2):407-444, 2002
- Scan

Buffalo May 19, 1973

Dear Finn Knudsen,

Mumford sent me your notes on the determinant of perfect complexes, asking me to write you some comments, if I have any. Indeed I do have several - except for the obvious one that it is nice to have written up with details at least *one* full construction of that damn functor! I did not enter into the technicalities of your construction, which perhaps will allow to get a better comprehension of the main result itself. The main trouble with your presentation seems to me that the bare statement of the main result looks rather mysterious and not “natural” at all, despite your claim on page 3b! The mysterious character is of course included in the alambicated sign of definition 1.1. Here two types of criticism come to mind:

- 1) The sign looks complicated - are there not simpler sign conventions for getting a nice theory of  $\det^*$  and its variance? It seems to me that Deligne wrote down a system that really did look natural at every stage - however he never wrote down the explicit construction, as far as I know, and the chap who had undertaken to do so, gave up in disgust after a year or two of letting the question lie around and rot!
- 2) Even granted that your conventions are as simple or simpler than other ones, the very fact that they are so alambicated and technical calls for an elucidation, somewhat of the type you give on page 3b with those  $\varepsilon_i$ 's. That is one would like to *define* first what any theory of  $\det^*$  should be (with conventions of sign as yet unspecified), stating say something like a *uniqueness theorem* for every given system of signs chosen for canonical isomorphisms, and moreover *characterizing* those systems of sign conventions which allow for an existence theorem - which will include the existence of at least one such system of signs. If one has good insight into all of them, it will be a matter of taste and convenience for the individual mathematician (or the situation he has to deal with in any instance) to make his own choice!

A second point is the introduction of such evidently superfluous assumptions like working on Noetherian (!) schemes, whereas the construction is clearly so general as to work, say, over any ringed space and even ringed topos - and of course it will

be needed in this generality, for instance on analytic spaces, or on schemes with groups of automorphisms acting, etc. Its just a question of some slight extra care in the writing up. It is clear in any case that the question reduces to defining  $\det^*$  for strictly perfect complexes (i.e. which are free of finite type in every degree), and for homotopy classes of homotopy equivalences between such complexes, as well as for short exact sequences of such complexes. (NB! One may wish to deal, more generally, in the Illusie spirit, with strictly perfect complexes filtered - by a filtration which is finite but possibly not of level two - by sub-complexes with strictly perfect quotients.) Now this allows to restate the whole thing in a more general setting, which could make the theory more transparent, namely:

An additive category  $C$  (say free (or projective) modules of finite type over a commutative ring  $A$ ) is given, as well as a category  $P$  which is a groupoid, endowed with an operation  $\otimes$  together with associativity, unity and commutativity data, satisfying the usual compatibilities (see for instance Saavedra's thesis in Springer's lecture notes) and with all objects "invertible". In the example for  $C$ , we take for  $P$  invertible  $\mathbf{Z}$ -graded modules over  $A$ , with tensor product, the commutative law  $L \otimes L' \simeq L' \otimes L$  involving the Koszul sign  $(1)^{dd'}$  where  $d$  and  $d'$  are the degrees of  $L$  and  $L'$  respectively. We are interested in functors (or a given functor)  $f : (C, \text{isom}) \longrightarrow P$ , together with a functorial isomorphism  $f(M + N) \simeq f(M) \otimes f(N)$ , compatible with the associativity and commutativity data (cf. Saavedra for this notion of a  $\otimes$ ); for instance, in the example chosen, we take  $f(M) = \det^*(M)$ , the determinant module where  $*$  stands for the degree which we put on the determinant module (our convention will be to put the degree equal to the rank of  $M$ , which will imply that our functor is indeed compatible with the commutativity data). It can be shown (this was done by a North Vietnamese mathematician, Sinh Hoang Xuan) that given  $C$  (indeed any associative and commutative  $\otimes$ -category would do), there exists a universal way of sending  $C$  to  $P$  as above - in the case considered, this category can be called the category of "stable" projective modules over  $A$ , and its main invariants (isomorphism classes of objects, and automorphisms of the unit object) are just the invariants  $K^0(A)$  and  $K^1(A)$  of myself and Dieudonné-Bass; but this existence of a universal situation is irrelevant for the technical problem to come. Now con-

sider the category  $K = K^b(C)$ , of bounded complexes of  $C$ , up to homotopy. It is a triangulated category<sup>1</sup>, and as such we can define the notion of a  $\otimes$ -functor from  $K$  into  $P$ ; it's first of all a  $\otimes$ -functor for the additive structure of  $K$  (the internal composition of  $K$  being  $\otimes$ ), but with moreover an extra structure consisting giving isomorphisms  $g(M) \simeq g(M') \otimes g(M'')$  whenever we have an exact triangle  $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow M'$ . This should of course satisfy various conditions, such as functoriality with respect to the triangle, case of split exact triangle  $M = M' \oplus M''$ , case of the triangle obtained by completing a quasi-isomorphism  $M' \longrightarrow M$ , and possibly also a condition of compatibility in the case of an exact triangle of triangles. (I guess Deligne wrote down the reasonable axioms some day; it may be more convenient to work with the filtered  $K$ -categories of Illusie, using of course finite filtrations that split in the present context). Of course if we have such a  $g : K \longrightarrow P$ , taking its “restriction” to  $C$  we get an  $f : C \longrightarrow P$ . The beautiful statement to prove would then be that conversely, every given  $f$  extends, uniquely up to isomorphism, to a  $g$ , in other terms, that the restriction functor from the category of  $g$ 's to the category of  $f$ 's is an equivalence. The whole care, for such a statement, will of course be to give the right set of “sign conventions” for defining admissible  $g$ 's (that is compatibilities between the two or three structures on the set of  $g(M)$ 's - which in fact all can be reduced to giving the isomorphisms attached to exact triangles). In this general context, the group of signs  $\pm 1$  is replaced by the subgroup of elements of order 2 of the group  $K^1(P) = \text{Aut}(1_P)$  (which is always a commutative group). The “sign map”  $n \longrightarrow (1)^n$  from the group of degrees to the group of signs is replaced here by a canonical map  $K^0(P)$  (= group of isomorphism classes of  $P$ )  $\longrightarrow K^1(P)$ , associating to every  $L$  in  $P$  the symmetry automorphism

---

<sup>1</sup>Be careful that one has to take the term “triangulated category” in a slightly more precise sense than in Verdier's notes, the “category of triangles” being something more precise than a mere category of distinguished diagrams in  $K$ . We have a functor from the former to the latter, but it is not even a faithful one. (Illusie's treatment in terms of filtered complexes, in his Springer lecture notes, is a good reference) It is with respect to the category of “true” triangles only that the isomorphism  $g(M) \simeq g(M') \otimes g(M'')$  will be functorial. For instance, if we have an *automorphism* of a triangle, inducing  $u, u', u''$  upon  $M, M'$  and  $M''$ , then functoriality is expressed by the relation  $\det u = \det u' \det u''$  (which implies, replacing  $u$  by  $id + tu$ ,  $t$  an indeterminate, that  $\text{Tr } u = \text{Tr } u' + \text{Tr } u''$ ) but this relation may become *false* if we are not careful to take automorphisms of true triangles, instead of taking mere automorphisms of diagrams.

of  $L \otimes L$  (viewed as coming from an automorphism of the unit object by tensoring with  $L \otimes L$ ). What puzzles me a little is that apparently, you have not been able to define  $g$  in terms intrinsic to the triangulated category  $K = K^b(C)$  - the signs you introduce in 1.1 do depend on the actual complexes, not only on their homotopy classes. I guess the whole trouble comes from the order in which we write any given tensor product in  $P$ , in describing  $\det^*(M^\bullet)$  we had to choose such an order rather arbitrarily, and it is passing from one such to another that involves “signs”.

If  $C$  is an *abelian* category, there should be a variant of the previous theory, putting in relations on the  $\otimes$ -functors  $f : C \longrightarrow P$  together with the extra structure of isomorphisms  $f(M) \simeq f(M') \otimes f(M'')$  for all short exact sequences  $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$  satisfying a few axioms, and  $\otimes$ -functors  $g : D^b(C) \longrightarrow P$ . There should also be higher dimensional analogous, involving  $P$ 's that are  $n$ -categories instead of mere 1-categories, and hence involving (implicitly at least) the higher  $K$ -invariants  $K^i(C)$  ( $i \geq 0$ ). But of course, first of all the case of the relation between  $C$  and  $K^b(C)$  in the simplest case should be elucidated!

I am finishing this letter at the forum where I have no typewriter. I hope you can read the handwriting!

Best wishes

A. Grothendieck

LETTRE À H. SEYDI  
13.2.1973

---

- Letter on the “ombres”.
- Scan



Châtenay le 13.2.1973

Cher Seydi,

Je viens de regarder votre travail sur les ombres, après une lecture plus approfondie par Illusie, dont je vous envoie ci-joint les commentaires détaillés. Comme lui, je pense que la théorie n'est par tout à fait au propre à décourager le lecteur. Une rédaction plus satisfaisante risque de vous demander pas mal de travail et de retarder votre soutenance inutilement. Comme vos résultats d'algèbre commutative sont parfaitement suffisants pour avoir sur ceux-ci. Si vous en avez l'envie, vous rédigerez par la suite sans vous presser un article sur les ombres - peut-être en collaboration avec autre mathématicien, au cas où cela vous inspirerait plus.

Pour qu'un travail sur les ombres soit commodément utilisable, il faudrait d'abord qu'il y ait un résumé des principaux résultats de la théorie, à quoi le lecteur peut se reporter, pour voir clairement de quoi il s'agit sans être troublé par les bizarreries de plan pouvant résulter de certaines nécessités de démonstration. De plus, il en est possible que de poser dès le début quelle théorie on veut obtenir, vous permette de voir plus clair vous-même et de court-circuiter notablement la construction effective de la théorie. En somme, il s'agit de poser d'emblée la question de trouver un foncteur

$$X \mapsto \text{Omb}(X)$$

des schémas formels noethériens vers les espaces localement annelés, et un homomorphisme fonctoriel

$$i_X : X \longrightarrow \text{Omb}(X),$$

satisfaisant à un certain nombre de propriétés naturelles, dont on ferait la liste, et qu'on pourrait espérer caractéristiques (i.e. de nature à définir la théorie à isomorphisme unique près sur le foncteur Omb cherché). Ou encore, on peut dégager d'abord un ensemble de propriétés caractéristiques (caractérisation de la théorie) et énoncer ensuite des propriétés supplémentaires importantes. Pour contribuer à donner de l'ouverture à l'exposé, il faudrait également faire une liste de problèmes naturels qui devraient être résolus, et une liste de situations où la théorie développée s'introduit de façon naturelle (cf les exemples indiqués par Illusie ; il y en a d'autres dans le travail d'Artin sur l'existence d'éclatements et de contractions, et dans un travail de Hironaka que j'ai oublié, mais que vous pourriez lui demander).

**Propriétés caractéristiques.** On peut, pour les formuler, introduire la notion d'espace *annelé géométrique* : c'est un espace annelé qui est noethérien, sobre (toute partie fermée irréductible a exactement un point générique), avec  $\underline{O}_S$  cohérent, ses fibres locaux et noethériens, tel que pour tout  $F$  constant et tout idéal cohérent  $J$  tels que  $\text{supp } F \subset \text{supp } \underline{O}_S/J$ , il existe un  $n \geq 0$  tel que  $J^n F = 0$ , tel que pour toute partie fermée  $T$  de  $S$  il existe un idéal cohérent  $J$  tel que  $T = V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \text{supp } \underline{O}_S/J$ , et tel que pour tout ouvert  $U$  de  $S$ , toute section  $f$  de  $\underline{O}_U$  et tout faisceau cohérent  $F$  sur  $S$ , et toute section  $h$  de  $F$  sur  $U_f = U - V(f)$ , il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $f^n h$  se prolonge en une section de  $F$  sur  $U$ . Il faudra demander de plus, soit que tout faisceau cohérent sur un ouvert de  $S$  se prolonge en un faisceau cohérent sur  $S$  (ou serait-ce conséquence du reste), ou du moins que les conditions b) et c) restent valables quand on remplace  $S$  par un ouvert quelconque, car on veut que tout ouvert d'un espace géométrique soit géométrique. La propriété b) implique que  $V(J) \subset V(J')$  implique (donc équivaut) à l'existence d'un  $n$  tel que  $J'^n \subset J$ , donc  $V(J) = V(J')$  à l'existence d'un  $n$  tel que  $J'^n \subset J$  et  $J^n \subset J'$ . Donc l'ensemble des parties fermées de  $S$ , avec sa relation d'ordre réticulée, s'identifie grâce à

[]

**Propriétés supplémentaires.** Il y a d'abord les propriétés qui relient de façon plus géométrique  $X$  et  $\text{Omb}(X)$ , qui n'ont guère été dégagés, sauf le fait que  $i_X$  est un homéomorphisme de  $X$  sur une partie fermée de  $\text{Omb}(X)$ , provenant du fait plus précis que pour tout  $n$ ,  $i_X$  induit sur  $X_n$  une immersion fermée. D'ailleurs, la connaissance de l'espace annelé  $S$  et de sa partie fermée  $S_0$  permet de retrouver  $X$  à isomorphisme unique près comme le "complété formel" de  $S$  le long de  $S_0$ . On peut se demander de trouver les propriétés sur un couple  $(S, S_0)$  qui assurent qu'il provient bien d'un schéma formel comme ci-dessus. Il faut évidemment que  $S$  soit géométrique, et que si  $S$  est défini par l'idéal  $J$ , alors  $(S_0, \underline{O}_S/J|_{S_0})$  soit un schéma - mais ce n'est évidemment pas suffisant. Mais définissant alors  $S$  de façon évidente, ainsi que  $S \xrightarrow{j} S$ , une condition néc et suff est évidemment que  $j^* : \text{Coh}(S) \longrightarrow \text{Coh}(S)$  soit une équivalence de catégories.

Il devrait être vrai que pour tout espace géométrique

[]

### Autres questions à traiter ou à signaler.

- 1) La catégorie des Algèbres de présentation finie sur  $X$  et sur  $\text{Omb}(X)$  est “la même”: devrait être facile, en termes d’une caractérisation de la catégorie des Alg. de prés. finie sur un  $Y$  en termes de  $\text{Coh}(Y)$ , comme les objets de  $\text{Ind}(\text{Coh}(Y))$  munis d’une multiplication  $A \otimes A$  ayant certaines propriétés... caractérisation qui devrait être valable pour des  $Y$  tels que  $X$  (schéma formel noethérien) et  $S$  (ombre d’un tel)... (Il faudrait donner bien sûr des conditions générales sympa sur  $Y$  qui soient manifestement vérifiées pour  $X, S$ ).
- 2) Le foncteur image inverse par  $i_X$  allant des schémas relatifs propre sur  $S = \text{Omb}(X)$  vers les schémas relatifs propres sur  $X$ , est une équivalence de catégories. (NB dans le cas relatif projectif cela devrait se ramener à 1) dans le cas d’Algèbres graduées...) NB si on prend des schémas de présentation finie sans plus, le foncteur n’est même pas fidèle, comme on voit en prenant des schémas relatifs sur  $S - X_0$ .
- 3) Un schéma relatif de présentation finie sur  $X$  en définit-il un sur  $S = \text{Omb}(X)$  ? D’après 1) et 2) cela devrait être vrai tout au moins dans le cas affine relatif ou propre relatif. Le cas  $X$  affine est déjà intéressant à regarder !
- 4) Pour tout faisceau cohérent  $F$  sur  $S = \text{Omb}(X)$ , l’homomorphisme canonique induit par  $i_X$

$$H^i(S, F) \rightarrow H^i(S, i_X(F))$$

est-il un isomorphisme ? (Si oui, cela impliquerait l’énoncé analogue pour les  $\text{Ext}^1$  globaux de Modules cohérents) Cela résulterait d’un théorème d’effacement de classes de cohomologie de faisceaux cohérents par immersion dans un cohérent (ou dans un -cohérent), sur des espaces tels que  $X$  (schéma formel) et  $S$  (ombre d’un tel).

- 5) Bien entendu, des questions analogues se posent en cohomologie étale - mais ce n’est sans doute pas le lieu dans un premier exposé de fondements !

- 6) Application de la théorie pour associer fonctoriellement un espace annelé géométrique à tout espace rigide-analytique quasi-cohérent sur le corps des quotients d'un anneau de valuation discrète complet, en utilisant la théorie de Raynaud, de tel façon qu'à la fibre générique d'un schéma formel de type fini sur  $V$  soit associé  $\text{Omb}(X) - X_0$ . C'est évident modulo la théorie de Raynaud - mais il resterait à étudier les propriétés de fidélité du foncteur obtenu. Serait-il pleinement fidèle. (C'est lié à la question suivante : soient  $X, X'$  schémas formels de type fini sur  $K$ ,  $S = \text{Omb}(X)$ ,  $S' = \text{Omb}(X')$ ,  $u : S \longrightarrow S'$  un  $K$ -morphisme d'espaces localement annelés ( $K$  étant le corps des fractions de  $V$ ), existe-il un éclatement  $\bar{X}$  de  $X$  le long d'un sous-schéma concentré sur la fibre spéciale, et un morphisme  $f : \bar{X} \longrightarrow X'$  qui induise  $u$  ?)
- ?) Relations entre propriétés locales sur l'espace rigide-analytique et sur son ombre...

LETTRE À L. ILLUSIE  
3.5.1973

---

- Letter on motives.
- [transcription]

Buffalo le 3.5.1973

Cher Illusie,

Je t'envoie quelques afterthoughts de notre conversation mathématique sur les motifs. J'avais dit à tort que les isomotifs n'ont pas de "modules infinitésimaux", c'est-à-dire que si  $i : S_0 \longrightarrow S$  est une immersion nilpotente, le foncteur image inverse de motifs est une équivalence de catégories. Cela doit être vrai en car.  $p > 0$  (plus généralement si  $\mathcal{O}_S$  est annulé par une puissance de  $p$ ), pour la raison heuristique (qu'on peut expliciter entièrement lorsqu'on travaille dans le contexte bien assis des schémas abéliens, ou des groupes de Barsotti-Tate) que lorsqu'on se ramène par dévissage au cas d'une nilimmersion d'ordre 1 ( $J^2 = 0$ ), on peut définir une obstruction à la déformation sur  $S$  d'un homomorphisme (ou isomorphisme) de (pas iso) motif sur  $S_0$ , qui sera tué par  $p^i$  si  $p^i$  tue  $J$ , donc qui sera tué lorsqu'on passe aux isomotifs. Par contre, en caractéristique nulle, les schémas abéliens à isogénie près ont la même théorie des modules infinitésimaux que les schémas abéliens tout court, et il faut s'attendre à la même chose pour les motifs et isomotifs. En termes des théories de systèmes de coefficients de de Rham ou de Hodge, l'élément de structure "filtration de DR" introduit bel et bien un élément de continuité, qui a pour effet de rendre faux le fait que pour ces coefficients, le foncteur image inverse par nilimmersion soit une équivalence. Il semble que donc qu'il faille bannir cette propriété (hors du cas des schémas de torsion) du yoga des "coefficients discrets". À moins qu'il se trouve que les besoins du formalisme (construction de foncteurs adjoints du type etc.) nous impose de modifier la notion de faisceau de Hodge ou de DR sur un schéma  $X$ , en partant du genre de notion que nous avons regardée ensemble, et en passant ensuite aux catégories correspondantes associées à  $X'$ , où  $X'$  est réduit et  $X' \longrightarrow X$  est fini radiciel surjectif. Mais j'espère qu'il ne sera pas nécessaire de canuler ces notions ainsi. Une question liée est celle-ci : si  $X$  est de car. 0, un motif serein sur  $X$  qui est "effectif de poids 1" définit-il bien un schéma abélien à isogénie près, ou seulement un schéma abélien à isogénie près au-dessus d'un  $X'$  comme ci-dessus ? Ce dernier devrait être le cas en tout cas en car.  $p > 0$ , si on veut qu'un morphisme fini surjectif soit un morphisme de descente effective pour les isomotifs (et cela à son tour doit être vrai, étant vrai pour les  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceaux, si on veut que le foncteur isomotifs  $\longrightarrow \mathbf{Q}_\ell$ -faisceaux commute

aux opérations habituelles et est fidèle – et on le veut à tout prix). Ainsi, en car.  $p > 0$ , si  $k$  est un corps, un isomotif effectif de poids 1 sur  $k$  devrait être, non un schéma abélien à isogénie près sur  $k$ , mais sur la clôture parfaite de  $k$  !

Je n’ai pas le cœur net non plus sur la nécessité de mettre du “iso” partout dans la théorie des motifs. Je ne serais pas tellement étonné qu’il y a en caractéristique nulle une théorie des motifs (et *pas* iso), qui s’envoie dans les théories  $\ell$ -adiques (sur  $\mathbf{Z}_\ell$ , pas  $\mathbf{Q}_\ell$ ) pour tout  $\ell$ . Pour ce qui est des coefficients de Hodge, il devrait être assez trivial de les définir “pas iso”, de telle façon que les  $\mathbf{Z}$ -faisceau de torsion algébriquement constructibles (sur  $X$  de type fini sur  $\mathbf{C}$ ) en forment une sous-catégorie pleine, et avec un foncteur vers les  $\mathbf{Z}$ -faisceau algébriquement constructibles (“foncteur de Betti”). En caractéristique  $p > 0$ , j’ai des doutes très sérieux pour l’existence d’une théorie des motifs pas iso du tout, à cause des phénomènes de  $p$ -torsion (surtout pour les schémas qui ne sont pas projectifs et lisses). Ainsi, si on admet la description de Deligne des “motifs mixtes” de niveau 1 comme le genre de choses permettant de définir un  $H^1$  motivique d’un schéma pas pas projectif ou pas lisse, on voit que déjà pour une courbe algébrique sur un corps imparfait  $k$ , la construction ne peut fournir en général qu’un objet du type voulu sur la clôture parfaite de  $k$ . par contre, il pourrait être vrai que seul la  $p$ -torsion canule, et qu’il suffise de localiser par tuage de  $p$ -torsion, c’est-à-dire moralement de travailler avec des catégories  $\mathbf{Z}[1/p]$ -linéaires. On aurait alors encore des foncteurs allant des “motifs” (pas iso) vers les  $\mathbf{Z}_\ell$ -faisceaux (quel que soit  $\ell \neq p$ ) mais pas vers les  $F$ -cristaux, mais seulement vers les  $F$ -isocristaux. Dans cette théorie, on renoncerait donc simplement à regarder en car.  $p$  des phénomènes de  $p$ -torsion. Pourtant il est “clair” que ceux-ci existent et sont fort intéressants, tout au moins pour les morphismes propres et lisses, et on a bien l’impression que la cohomologie cristalline (plus fine que DR) pas iso en donne la clef. (Au fait, Berthelot est-il parvenu à des conjectures plausibles à ce sujet ?) On peut donc espérer que pour les motifs sereins et semi-simples fibre par fibre, on a des catégories sur  $\mathbf{Z}$ , pas seulement sur  $\mathbf{Z}[1/p]$ , les Hom étant des  $\mathbf{Z}$ -modules de type fini. Cette impression peut être fondée par exemple sur le joli comportement des schémas abéliens sur les corps des fractions d’un anneau de val. discrète : dans la théorie de spécialisation, il se trouve qu’à aucun moment la  $p$ -torsion ne canule.

Bien sûr, alors même qu'on arriverait à travailler avec des catégories de motifs pas iso, dans "l'état actuel de la science", pour en déduire une théorie de groupes de Galois motiviques, étant obligé de s'appuyer sur ce que Saavedra a rédigé, on est obligé à tensoriser tout par  $\mathbf{Q}$ , et on ne trouve que des groupes algébriques sur  $\mathbf{Q}$  ou des extensions de  $\mathbf{Q}$ . Néanmoins, on a certainement dans l'idée que les "vrais" groupes de Galois motiviques (associés à des foncteurs-fibres comme la cohomologie  $\ell$ -adique, ou la cohomologie de Betti) sont des schémas en groupes sur  $\mathbf{Z}_\ell$  et sur  $\mathbf{Z}$  plutôt que sur  $\mathbf{Q}_\ell$  et sur  $\mathbf{Q}$ , et par là on devrait rejoindre le point de vue des groupes de type arithmétique de gens comme Borel, Griffiths, etc.

Encore une remarque : alors même qu'on travaille avec des isomotifs, on peut associer à un tel  $M$  quelque chose de mieux qu'une suite infinie de  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceaux (lorsqu'il y a une infinité de  $\ell$  premiers aux car. résiduelles). En fait, on a ce qu'on pourrait appeler un faisceau "adélique", i.e. un faisceau de modules (moralement) sur l'anneau des adèles finis de  $\mathbf{Q}$ . De façon précise, on peut considérer tous les  $T_\ell(M)$  sauf un nombre fini comme étant des  $\mathbf{Z}_\ell$ -faisceaux (pas seulement des  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceaux). Éliminant toute métaphysique motivique, on peut dire que la théorie de Jouanolou écrite en fixant un  $\ell$ , pourrait être développée avec des modifications techniques mineures pour avoir une théorie des " $A$ -faisceaux", où  $A$  est l'anneau des adèles, ou un facteur direct  $A'$  de celui-ci obtenu en ne prenant qu'un paquet de nombres premiers (pas nécessairement tous). On obtient ainsi une théorie de coefficients (au sens technique dont nous avons discuté) ayant comme anneau de coefficients la  $\mathbf{Q}$ -algèbre  $A$  resp.  $A'$ . Comme  $A$  et  $A'$  sont "absolument plats", il n'y a pas introduction de  $\text{Tor}_i$  gênants et de canulars de degrés infinis dans cette théorie.

Pour en revenir au yoga des coefficients "discrets", où j'avais énoncé une propriété de trop apparemment, par contre il y en a une autre que nous n'avions pas explicitée. Il s'agit de la définition de l'objet de Tate sur  $S$  comme l'inverse de l'objet (inversible pour  $\otimes$ )

$$T(-1) = R^2 f_*(1_P) = R^2 g_!(1_E)$$

où  $f : P \longrightarrow S$  resp.  $g : E \longrightarrow S$  sont les projections de la droite projective resp. la droite affine sur  $S$ . D'autre part, les objets (définis en fait sur le schéma de base  $S_0$  de la théorie de coefficients) interviennent également dans la formulation des



théorèmes de pureté relative ou absolue et la définition des classes fondamentales locales (qui, j'espère, doit être possible en termes des données initiales de la théorie de coefficients envisagée, sans constituer une donnée supplémentaire), et dans le calcul de  $f^!$  pour  $f$  lisse (donc pour  $f$  lissifiable), pour ne parler que du démarrage du formalisme cohomologique. En fait, on les retrouve ensuite à chaque pas.

Une dernière remarque. Je crois qu'il vaudrait la peine de formaliser, dans le cadre d'une théorie de coefficients plus ou moins arbitraires, les arguments de dévissage qui ont conduit, dans le cas des coefficients étales, aux théorèmes de finitude pour  $f$  propre, puis pour  $f$  séparé de type fini seulement (moyennant résolution des singularités). Ces dévissages apparaîtraient maintenant comme des pas destinés à prouver *l'existence* de (en même temps, s'il y a lieu, que sa commutation aux changements de base). À vrai dire, il n'est pas clair pour moi que l'on arrivera à des formulations qui s'appliqueraient directement aux  $\mathbf{Z}_\ell$ -faisceaux, disons; en fait, ce n'est pas ainsi que procède Jouanolou dans ce cas, qui au contraire se ramène aux énoncés déjà connus dans le cas des coefficients de torsion (procédé qui n'a guère de chance de s'axiomatiser dans le cas qui nous intéresse). Par contre, pensant directement au cas des motifs, on peut songer à utiliser un dévissage qui s'appuie entre autres sur les propriétés suivantes (quitte à se tirer par les lacets de souliers pour les établir chemin faisant) : (a) un (iso)motif se dévisse en motifs sereins sur des schémas irréd. normaux (NB on suppose qu'on travaille sur des schémas excellents); (b) un motif serein sur un schéma normal irréductible se dévisse en motifs sereins "simples" – en fait, il suffit de faire le dévissage en le point générique; (c) un motif simple (pourvu qu'on remplace la base  $S$  par un voisinage ouvert assez petit du point générique) est un facteur direct d'un  $R^i f_{(1_X)}$ , où  $f : X \longrightarrow S$  est propre et lisse, tout du moins moyennant tensorisation par un objet de Tate  $T(j)$  convenable. Ainsi, moyennant au moins deux gros grains de sel qu'il faudrait essayer d'expliciter un jour, les motifs généraux (toujours iso, bien sûr) se ramènent aux motifs plus ou moins naïfs tels qu'ils sont décrits notamment dans Manin et Demazure. Cela s'applique tout aux moins aux objets – quant aux morphismes, c'est une autre paire de manches – et encore pire pour les  $\text{Ext}^i \dots$

À ce propos, on peut se convaincre que l'application qui va des classes d'extension de deux motifs (dans la catégorie abélienne des motifs) vers le  $\text{Ext}^1$

défini comme  $\mathrm{Hom}(M, N[1])$  (Hom dans la catégorie triangulée) ne devrait pas être bijective (mais sans doute injective). Plaçons-nous en effet sur une base  $S$  spectre d'un corps fini, prenons pour  $M$  et  $N$  le motif unité  $1_S = T_S(0) = T(0)$ , de sorte que le  $\mathrm{Ext}^1$  n'est autre que  $H^1(S, T(0))$ . Les calculs  $\ell$ -adiques du  $H^1$  nous suggèrent fortement que le  $H^1$  absolu motivique est canoniquement isomorphe à  $\mathbf{Q}$ . Mais d'autre part les classes d'extension de  $T(0)$  par  $T(0)$  doivent être nulles (sur tout corps  $K$ ) si  $M$  et  $N$  sont des motifs de poids  $r$  et  $s$  avec  $r \neq s$ , si on admet le yoga de la filtration d'un motif par poids croissants, avec gradué associé semi-simple. (NB En fait, sur un corps fini, la catégorie des motifs devrait être tout entière semi-simple, i.e. toute extension devrait être triviale, i.e. la filtration croissante précédente devrait splitter canoniquement : cela résulte du fait que l'endomorphisme de Frobenius du motif opère avec des "poids" différents sur les composantes des différents poids—plus un petit exercice de catégories tannakiennes.)

Bien cordialement

Alexandre

1974

---

•

LETTRE À P. DELIGNE, J. GIRAUD ET J.-L. VERDIER  
23.6.71974

---

- [scan]

Villecun le 23.6.71974

Chers Deligne, Giraud, Verdier,

Vous savez peut-être qu'une mathématicienne vietnamienne, Hoang Xuan Sinh

Pour ce qui est des formalités administratives, c'est la frère de Hoan Xuan Man, qui habite à Antony, qui s'en occupera pour elle. À toutes fin utile, je vous passe son adresse :

Hoang Xuan Sinh, 49 rue de Châtenay, Estérel, 92 Antony, Tél BER 63 79.

Dans l'attente d'une réponse prochaine, bien cordialement

Schurik

PS. N'ayant pas l'adresse de Giraud, je demande à Verdier s'il peut bien lui transmettre la lettre et le rapport. Je pense que celui-ci doit pouvoir servir comme rapport de thèse aussi vis à vis de l'administration universitaire en France.

# LETTRE À P. DELIGNE<sup>1</sup>

7.8.1974

---

- [scan]

---

<sup>1</sup>Transcribed with the collaboration of M. Künger

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par mon jambe d'assurer un cours de 1<sup>er</sup> cycle au 1<sup>er</sup> trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les fourbis de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". à ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si  $M, N$  sont deux faisceaux abéliens sur un topos  $X$ , et  $\tau_{\leq 2} \mathrm{RHom}(M, N) = E(M, N)$  est le complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} \mathbf{H}^i = {}^i(M, N) & \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ \mathbf{H}^i = 0 & \text{si } i \notin [0, 2], \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

$$(T) \quad \begin{array}{ccc} & \mathrm{Hom}(M, 2N)[-2] & \\ \swarrow & & \searrow \\ E(M, N) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E'(M, N), \end{array}$$

donc  $E'(M, N)$  est un complexe dont les invariants  $\mathbf{H}^i$  sont ceux de  $E(M, N)$  en degré  $i \neq 2$ , et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*) \quad 0 \longrightarrow {}^2(M, N) \longrightarrow \overbrace{\mathbf{H}^2(E'(M, N))}^{P(M, N)} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Hom}(M, 2N) \longrightarrow 0.$$

Heuristiquement,  $E'(M, N)$  est le complexe qui exprime le "2-champ de Picard strict" formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) "épinglés" par  $M, N$  sur des objets variables de  $X$ , en admettant que ta théorie pour les 1-champs de Picard stricts s'étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute); de même  $E(M, N)$  correspond aux champs de Picard *stricts* épinglés par  $M, N$ . La suite exacte  $(*)$  se construit en tous cas canoniquement "à la main", où le terme médian est le faisceau des classes à "équivalence" près des champs de Picard épinglés par  $M, N$ , or étant l'invariant qui s'obtient en associant à toute section  $L$  d'un champ de Picard la symétrie de  $L \otimes L$ , interprété comme section de  $2N$ . Je sais prouver (sauf erreur) que tout homomorphisme

$M \longrightarrow 2N$  provient d'un champ de Picard convenable (épinglé par  $M, N$ ) (a priori l'obstruction est dans  $\text{Ext}^3(X; M, N)$ , mais un argument ‘universel’ prouve qu'elle est nulle). Cela prouve que l'extension  $(*)$  est bien proche d'être splittée : toute section du troisième faisceau, sur un objet quelconque de  $X$ , se remonte – en d'autres termes, l'extension a une section “ensembliste”. Bien sûr, il y a mieux en fait : toute section sur un  $U \in \text{Ob } X$  “provient” d'un élément de  $H^2(U, E'(M, N))$  (hypercohomologie -  $H^2$ ).

*Exemple.* Soit  $A$  un anneau sur  $X$ , soient  $M, N$  respectivement les faisceaux  $K^0, K^1$  associés au champ additif des  $A$ -Modules projectifs de type fini (p. ex.). Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par  $M, N$ , d'où une section canonique du terme médian  $P(M, N)$  de  $(*)$ .

*NB.* Tout ce qui précède a les functorialités évidentes en  $M, N, X, \dots$

*Question.* Le triangle exact (T) et la suite exacte  $(*)$  sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie ...) ? Connaissent-ils des variantes “supérieures” ? (Un principe “géométrique” pour les obtenir pourrait être via des  $n$ -champs de Picard non nécessairement stricts ...)

Je profite de l'occasion pour soulever une question sur la “cohomologie relative”. Soit  $q : X \longrightarrow Y$  un morphisme de topos. Si  $F$  est un faisceau abélien (ou un complexe d'iceux) sur  $Y$ , peut-on définir *fonctoriellement* en  $F$  la cohomologie relative  $\text{R}\Gamma(Y/X, F)$  (de la catégorie dérivée de  $\text{Ab}(Y)$  dans celle de  $\text{Ab}$ ) ? L'interprétation “géométrique” en termes d'opérations sur des  $n$ -champs de Picard ( $n$  “grand”) suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente “à la main” que dans les deux cas extrêmes :

- (a)  $q$  est “ $(-1)$ -acyclique”, i.e. pour tout  $F$  sur  $Y$ ,  $F \longrightarrow q_* q^* F$  est injectif (NB C'est le cas de  $Y/P \longrightarrow Y$  si  $P \longrightarrow e_Y$  est un épimorphisme – c'est donc le cas de  $e \longrightarrow_G$  plus haut.)

On prend

$$\text{R}\Gamma(\text{Coker}(F \longrightarrow q_*(\underbrace{C(q^*(F))}_{\text{résolution injective}})))[-1]).$$

- (b)  $\forall F$  injectif sur  $Y$ ,  $q^*(F)$  est injectif et  $F \longrightarrow q_* q^* F$  est un épimorphisme



(exemple :  $q$  inclusion d'un ouvert  $Ue_Y$ ). On prend

$$R\Gamma_Y(\underbrace{\text{Ker}(C(F) \longrightarrow q_* q^*(C(F)))}_{\text{résolution injective}}).$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d'un morphisme de complexes (tel que

$$F \longrightarrow q_*(q^*(F)) \quad )$$

n'est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) par rapport à la flèche dont on veut prendre le cône. Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

*Question pour Illusie :* Dans sa théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des  $H^3({}_G/X, -)$  resp. des  $\text{Ext}^2(X; -, =)$ . Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (supposée écrite) des Gr-champs – resp. via ta théorie des champs de Picard ? J'ai [phrase incomplète]

Je te signale que j'ai réfléchi aux Gr-champs sur  $X$ . Si  $G$  est un Groupe sur  $X$ ,  $N$  un  $G$ -Module, les Gr-champs sur  $X$  “épinglés par  $G, N$ ” forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l'opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à 1 échelon à qui lui correspond est le tronqué

$$\tau_{\leq 2}(R\Gamma({}_G X, N)[1]).$$

(NB la cohomologie de  $R\Gamma({}_G X, N)$  commence en degré 1.) Plus géométriquement, un Gr-champ sur  $X$  épinglé par  $(G, N)$  est essentiellement “la même chose” qu'une 2-gerbe sur  ${}_G$ , liée par  $N$ , et munie d'une trivialisation au dessus de  $X \approx_e ({}_G)/P$  (où  $P$  est l'objet de  ${}_G$  “torseur universel sous  $G$ ”). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se trouve que dans celle-ci, les 3-flèches sont triviales (i.e. si source = but, ce sont des identités) – cela ne fait qu'exprimer  $H^0({}_G/X, N) = 0$  (i.e.  $H^0({}_G, N) \longrightarrow H^0(X, N)$  injectif...). Donc la 3-catégorie peut être regardée comme une 2-catégorie – et “c'est” celle des Gr-champs sur  $X$  épinglés par  $G, N$ . Si on veut localiser sur  $X$ , et décrire le 2-champs de Picard sur  $X$  des champs de Picard (sur des objets variables de  $X$ ) épinglés par  $G, N$ , on trouve

qu'il est exprimé par le complexe

$$\tau_{\leq 2}(\mathbf{R} p_{G*} \operatorname{Coker}(N \longrightarrow \mathbf{R} q_{G*} \overbrace{C(q_G^* N))}^{\text{résolution injective})),$$

où  $p_G : {}_G \longrightarrow X$  et  $q_G : {}_e \approx X \simeq ({}_G)_P \longrightarrow {}_G$ . Toutes ces descriptions étant compatibles avec des variations de  $G, N, X$ , cela donne en principe une description de la 2-catégorie des Gr-champs, avec  $X, G, N$  variables...

1975

---

•

LETTRE À L. BREEN  
5.2.1975

---

- This letter was included as an appendix to Pursuing stacks.
- [scan]

LETTRE À L. BREEN  
5.2.1975

---

- This letter was included as an appendix to Pursuing stacks.
- [scan]

LETTRE À L. BREEN  
17/19.7.1975

---

- This letter was included as an appendix to Pursuing stacks.
- [scan]
- [scan] of translation by R. Brown and [scan] of notes

# COMPLEXE DE DE RHAM À PUISSANCES DIVISÉES ET OMBRES DES MODULES

---

- IHÉS. 12 Décembre 1975
- A [transcription]

# COMPLEXE DE DE RHAM À PUISSANCES DIVISÉES ET OMBRES DES MODULES

---

géométrie	différentielle
—	analytique
—	algébrique
—	arithmétique
topologie algébrique	$\left\{ \begin{array}{l} \text{PL} \\ \text{semi-simplicial} \end{array} \right.$

## 1) Historique

- a) Notion de forme différentielle (*Poincaré*) et formule de *Stokes*

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \quad (\text{d'où } H_{\text{DR}}^*(X) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{C}).)$$

- b) Th. de *De Rham* (conjecturé par *E. Cartan*). Mais [-] Maintenant bien compris à th. des faisceaux, lemme de *Poincaré*
- c) Théorie de *Hodge* des intégrales harmoniques (structure supplémentaire bigraduée sur  $H_{\text{DR}}^*(X)$  si  $X$  kählérienne compacte.)



- d) Théorème de *Cartan-Serre* sur variétés de Stein (car Lemme de Poincaré valable dans l'analytique).
- e) Cas des variétés algébriques ou schémas sur corps de base (ou schéma de base général) : *Dwork*, *Washnitzer-Monsky*, plus tard le yoga "cristallin" développé par *Berthelot*, *Illusie*, *Messing*, *Mazur* (cf avec Hartshorne, Herrera, Ogus, Bloch (?)). Ici on trouve des théories cohomologiques qui ne sont plus à "anneau de coefficients" de caractéristique nulle, i.e. contenant  $\mathbf{Q}$  — i.e. on perd [?] les phénomènes de torsion [?]. Du point de vue Weil, c'était un défaut irréparable.
- f) Th. de *Grothendieck* pour variétés algébriques sur  $\mathbf{C}$  (généralise par *Deligne*, *Hartshorne* pour des coefficients plus généraux). Ceci donne confiance (du moins en car. 0) en la signification topologique de la cohomologie de De Rham "algébrique" des schémas algébriques.
- g) Complexe de De Rham-Sullivan pour espaces topologiques généraux : *formes différentielles singulières*  $C^\infty$  (resp.  $\mathbf{C}$ -algébriques, resp.  $\mathbf{R}$ -algébriques, resp.  $\mathbf{Q}$ -algébriques). Donne la cohomologie à coefficients dans  $\mathbf{C}$  (resp.  $\mathbf{R}$ , resp.  $\mathbf{Q}$ ) (facile)

$$C_{\text{DRSR-alg.}}^\bullet \subset C_{\text{DRS } C^\infty}^\bullet \subset C_{\text{DRS}}^\bullet$$

$$\cup$$

$$C_{\text{DR}}^\bullet$$

Sullivan montre mieux que le  $\mathbf{Q}$ -type d'homotopie de  $X$  est récupéré si  $X$  est simplement connexe - de façon plus précise, il y a (sauf erreur) une équivalence de catégories donnée par  $C_{\text{DRS}}^\bullet$  entre la catégorie homotopique faible des espaces connexes et simplement connexes (du point de vue singulier), et une certaine catégorie dérivée formée avec les  $\mathbf{Q}$ -algèbres graduées associatives anticommutatives à degrés  $\geq 0$  telles que  $H^0(A) \xleftarrow{\sim} \mathbf{Q}$ ,  $H^1(A) \simeq 0$ . Il y a une théorie des modèles minimaux pour de telles algèbres, une façon très simple de récupérer les  $\pi_i \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  en termes d'un tel modèle... (On renvoie au papier de Sullivan.)

Mais à nouveau, on prend la torsion !

Donc du théorème d'isomorphisme de Sullivan

$$H^\bullet(C_{\text{DRS}/\mathbf{Q}}^\bullet(X, \mathbf{Q})) \simeq H^\bullet(X, \mathbf{Q})$$

$\forall n \geq 0,$

$[n]$  simplexe type de dimension  $n$ ,

$\Delta^{[n]}$  sa réalisation géométrique<sup>1</sup>,

$E^{[n]}$  l'espace affine qu'il soustend [plutôt engendré] (avec une  $\mathbf{Q}$  — structure)<sup>2</sup>,

$\mathrm{DRS}_{[n]}^\bullet = C_{\mathrm{DR}}^\bullet(E^{[n]})$  son complexe de De Rham  $\mathbf{Q}$  — algébrique.

C'est contravariant en  $[n]$ , d'où

$$\mathrm{DRS}_*^\bullet = (\mathrm{DRS}_{[n]}^\bullet)_{n \geq 0}.$$

Algèbre différentielle graduée semi-simpliciale (et même simpliciale) - à degrés  $\geq 0$ , anticommutative.

Pour tout espace topologique  $X$ ,  $S_*(X)$  son complexe singulier semi-simplicial.

On a

$$C_{\mathrm{DRS}}^\bullet(X, \mathbf{Q}) \simeq \mathrm{Hom}(S_*(X), \mathrm{DRS}_*^\bullet),$$

i.e.

- a)  $C_{\mathrm{DRS}}^\bullet(X, \mathbf{Q})$  dépend de  $X$  si  $S_*(X)$  [plutôt 'ne dépend que']
- b) Sur  $(\mathrm{Ss}) = (\mathrm{Ens}_*)$ , le foncteur  $C_{\mathrm{DRS}}^\bullet(-, \mathbf{Q})$  est représentable par  $\mathrm{DRS}_*^\bullet$ .

Or

- a)  $\mathrm{DRS}_*^\bullet$  est une résolution de  $\mathbf{Q}_*$  (dans la catégorie des groupes semi-simpliciaux). (Lemme de Poincaré algébrique sur l'espace  $\mathbf{Q}$ -affine  $E^{[n]}$ ).
- b) Les composantes  $\mathrm{DRS}_*^i$  ( $i \geq 0$ ) de  $\mathrm{DRS}_*^\bullet$  sont des objets abéliens acycliques du topos  $(\mathrm{Ss})$  (ce qui revient à dire que leurs  $\pi_j(\mathrm{DRS}_*^i)$  sont nuls, ce qu'on vérifie facilement).

(Il [?] serait [Hom] des formes  $C^\infty$  à coefficients dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , ou analytiques réels, ou analytiques complexes...)

On aimerait avoir une  $\mathbf{Z}$ -algèbre différentielle [graduée]  $C_{\mathrm{DR}}^\bullet(X, \mathbf{Z})$  différentielle [?] [?dont tout sur]  $X$  [?(ou  $S_*(X)$ )] dont [?]  $\mathbf{Z}$  [?] qu'il y a [?]

Si on prend  $C_{\mathbf{Z}-\mathrm{DR}}^\bullet(E^{[n]})$  (où  $E^{[n]}$  a même une  $\mathbf{Z}$ -structure affine), c'est a) qui devient déjà faux : pour intégrer  $\int x^n dx$ , il faut un dénominateur avec  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$  ! Mais

en géométrie, on est déjà familiarisé avec une façon de sauter à pieds-joints par dessus le conneau, en introduisant des puissances divisées et de polynômes (ou séries formelles) à puissances divisées. Si  $E^{[n]}$  avait son origine sur  $\mathbf{Z}$  (i.e. provenant canoniquement d'un  $\mathbf{Z}$ -module libre de type fini), on aurait un complexe de De Rham à puissances divisées. Mais pas pour un espace affine ! Notons

$$\begin{aligned} \mathrm{DRS}_{[n]}^\bullet &\simeq C_{\mathrm{DR}/\mathbf{Q}}^\bullet(\mathbf{Q}[(X_i)_{0 \leq i \leq n}]/\Sigma X_i - 1) \\ &\simeq \mathbf{Q}[X_i, dX_i]_{0 \leq i \leq n}/\Sigma X_i - 1, \Sigma dX_i \\ &\simeq \mathbf{Q}[X_0, \dots, X_{n-1}][dX_0, \dots, dX_{n-1}] \end{aligned}$$

Donc on aurait envie de prendre

$$\mathbf{Z}\{X_i\}[dX_i]_{0 \leq i \leq n}/(\Sigma X_i - 1, \Sigma dX_i),$$

où  $\{\}$  désigne les polynômes à puissances divisées, mais on n'est plus isomorphe à  $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n+1}\}[dX_0, \dots, dX_{n-1}]$  ([?] bien une résolution de  $\mathbf{Z}$ ), car si on [?] de la relation [?]  $\Sigma_0^n X_i - 1 = 0$ ,  $X_n = 1 - \Sigma_0^{n-1} X_i$  (et  $dX_n = -\Sigma_0^{n-1} dX_i$  de  $\Sigma_0^n dX_i = 0$ ), on a le “bec” [?] que  $1 - \Sigma_0^{n-1} X_i$  n'appartient pas à l'idéal à puissances divisées donné dans  $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$  [?] (donc on ne voit pas comment envoyer  $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$  dans  $\mathbf{Z}\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$  avec l'élément [?]  $\Sigma_0^n X_i - 1$  dans le noyau...).

On s'en tire en prenant un anneau de coefficients différent de  $\mathbf{Z}$ , soit  $S$ , avec un “paramètre”  $t \in S$  fixé dont on sache *prendre des puissances divisées* (i.e.  $t \in J$ ,  $J$  idéal à puissances divisées [?]), et en remplaçant [?] les équations  $\Sigma X_i = 1$  de  $E^{[n]}$  par l'équation

$$\Sigma X_i = t \quad \text{dans} \quad S^{n+1}$$

et définissant

$$C_{\mathrm{DRpd}[n]}^\bullet(S, J, t) \simeq (S\{X_i\}_{0 \leq i \leq n})/(\Sigma X_i - t, \Sigma dX_i).$$

On divise par l'idéal à *puissances divisées* engendré [?] car dans  $S\{X_i\}[dX_i]$  [?] l'idéal formé des formes [?] à puissances divisées d'augmentation dans  $J$  est à puis-

sances divisées,

$$[C_{\mathrm{DRpd}[n]}^\bullet(S, J, t) \simeq] \quad (S\{X_i\}_{0 \leq i \leq n} / (\sum X_i - t)_{\mathrm{pd}}) \otimes_S \Lambda^*(S^{[n]} / \mathrm{diag} S^{[n]}).$$

C'est une  $S$ -algèbre différentielle graduée anticommutative à degrés  $[?]$  augmentée vers  $S/J$  et à puissances divisées sur l'idéal noyau de l'augmentation

$$C_{\mathrm{DRpd}[n]}^\bullet(S, J, t) \longrightarrow S/J^3;$$

et comme telle isomorphe à  $S\{X_0, \dots, X_{n-1}\} [dX]$ , qui est une résolution de  $S$ . Pour  $[n]$  variable, on trouve

$$C_{\mathrm{DRpd}*}^\bullet(S, J, t) = (C_{\mathrm{DRpd}[n]}^\bullet(S, J, t))_{n \geq 0},$$

qui est une résolution semi-simpliciale (et même simpliciale) de  $S$ , avec augmentation vers  $S/J = k$ , et puissances divisées sur l'idéal d'augmentation,  $[?]$ . Elle dépend fonctoriellement de  $(S, J, t)$ , et elle peut de  $[? \text{ un}]$  pour  $X_* \in \mathbf{Ss}$

$$C_{\mathrm{DRpd}}^\bullet(X_*; S, J, t) = \mathrm{Hom}(X_*, C_{\mathrm{DRpd}}^\bullet(S, J, t)),$$

foncteur contravariant en  $X_*$ <sup>4</sup> (et si  $X$  espace topologique  $[?]$ )

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{DRpd}}^\bullet(X; ) &= C_{\mathrm{DRpd}}^\bullet(S_*(X); ) \\ &= \mathrm{Hom}(S_*(X), C_{\mathrm{DRpd}*}^\bullet()). \end{aligned}$$

[À ne pas confondre :  $S$  (anneau de base) et  $S^*$  (ensemble simplicial singulier)].

Mais on ne peut dire en général quelle est sa cohomologie (on a seulement  $H^{\mathrm{DRpd}}(X; S, J, t) \longrightarrow H^*(X, S)$ ), et en tous cas  $[?]$

Alors soit  $k$  anneau commutative (associatif unitaire), et  $T$  une indéterminée, on prendra dorénavant

$$S = k\{T\}, \quad J = k\{T\}^+ = \mathrm{Ker}(k\{T\} \xrightarrow{\ddot{k}} k), \quad t = T.$$

Donc

$$\begin{cases} C_{\mathrm{DRpd}[n]}^\bullet(S, J, t) \simeq \underbrace{k\{T, X_0, \dots, X_n\} / (\sum X_i - T)_{\mathrm{pd}}}_{\simeq k\{X_0, \dots, X_n\}} \otimes_k \Lambda^\bullet k^{[n]} / k \\ S/J \simeq k \end{cases}$$

<sup>3</sup> $[?]$  i.e.  $d(X^{[n]}) = X^{[n-1]}dx[?]$ .

<sup>4</sup>à valeurs dans les  $S$ -algèbres graduées différentielles  $S/J$ -augmentées à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la différentielle.

Soit

$$\Phi_{k_*} = ([n] \mapsto k^{[n]}) \longleftarrow k_* = ([n] \mapsto k[?])$$

immersion diagonale

$$\Psi_{k_*} = \Phi_{k_*} / k_* = ([n] \mapsto k^{[n]} / \underbrace{k}_{\text{diag}}).$$

On a alors

$$C_{\text{DRpd}*}^{\bullet\bullet}(k) \stackrel{\text{def}}{=} C_{\text{DRpd}*}^{\bullet}(k\{T\}, k\{T\}^+, k) \simeq \Gamma_k^{\bullet} \Phi_{k_*} \otimes_k \Lambda^{\bullet} \Psi_{k_*}[?],$$

$$\boxed{C_{\text{DRpd}*}^{\bullet\bullet}(k) \simeq \Gamma_k^{\bullet} \Phi_{k_*} \otimes_k \Lambda^{\bullet} \Psi_{k_*}}.$$

**Structure.**  $k\{T\}$ -Algèbre différentielle *bigradué* (degré complexe  $[?]$  et degré extérieur, d'où degré total)<sup>5</sup> unitaire associative alternée (anticommutative et carrés des éléments de degré impair nuls), augmentation vers  $[?]$  à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, avec  $[?]$ .

Ces structures sont héritées  $[?]$  par les

$$\boxed{\begin{aligned} C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k) &\stackrel{\text{def}}{=} C_{\text{DRpd}}^{\bullet}(X_*, k\{T\}, k\{T\}^+, T) \\ &= \text{Hom}(X_*, C_{\text{DRpd}*}^{\bullet\bullet}(k)) \end{aligned}}$$

et dépendent de façon contravariant de  $X_*$  (covariant de  $k$ ).

$\Phi_{k_*}$  est un  $k$ -Module semi-simpliciale homotope à 0, donc  $\Gamma_k^p(\Phi_{k_*}) \otimes \Lambda^q \Psi_{k_*}$  est homotope à  $\Gamma_k^p(0) \otimes \Lambda^q \Psi_{k_*}$ , donc homotope à 0 si  $p \neq 0$ . Donc  $C_{\text{DRpd}*}^{p,q}(k)$  est homotope à 0 (donc acyclique) si  $p = 0$  [plutôt si  $p \neq 0$ ]. En degré total donné  $n$ , on a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{\text{DRpd}*}^{n,0} & \longrightarrow & C_{\text{DRpd}*}^{n-1,1} & \longrightarrow & C_{\text{DRpd}*}^{n-2,2} \longrightarrow \dots & C_{\text{DRpd}*}^{1,n-1} & \longrightarrow & C_{\text{DRpd}*}^{0,n} \\ & & \uparrow & & & & & & & \\ & & k_* & & & & & & & \end{array}$$

i.e. on trouve une résolution de longueur  $n$  de  $k_*$  par des  $k$ -modules semi-simpliciaux qui sont acycliques sauf le dernier - donc on peut la considérer comme

---

<sup>5</sup>Bigraduation venant de la *graduation* de  $S$ , en tant que  $[?]$  est hom. (ici de degré 2)  $[?]$ .

un tronqué de degré  $n$  d'une résolution flasque de  $k_*$  - la cohomologie de ses sections sur un  $X_*$  est donc la cohomologie de  $X_*$  tronquée en degré  $n$  :

$$H_{\text{DRpd}}^{p,q}(X_*, k) = \begin{cases} H^q(X_*, k) & \text{si } q \leq p + q, \quad \text{i.e. } p \geq 0 \\ [?] \end{cases}$$

$[?]$  structure  $[?]$  de  $k\{T\}$ -module de  $H_{\text{DRpd}}^{\bullet,q}(X_*, k)$  ? On voit que pour le *degré total* (égal au degré extérieur  $p$  *plus*  $q$  [pluôt degré extérieur  $q$  *plus*  $p$  ?]), on trouve  $H^0(X_*, k) \otimes_k k\{T\}$  tronqué en degré  $\geq q$ , donc

$$H_{\text{DRpd}}^{\bullet,q}(X_*, k) \simeq \tau_q(H^0(X_*, k) \otimes_k k\{T\}) \quad \underbrace{[q]}_{\text{translation } [?] \text{ de degrés pas } -q}.$$

Si on réindexe le bidegré par le couple (degré total, degré extérieure)

$$H_{\text{DRpd}}^{'p,q}(X_*, k) = H_{\text{DRpd}}^{\overbrace{n-q}^p, q}(X_*, k)$$

(donc la condition de degré  $p, q \geq 0$  devient  $n \geq q \geq 0$ , l'opérateur différentielle est de bidegré  $(0, 1)$ , donc c'est un homomorphisme (*homogène*) de  $S$ -modules gradués), or trouve

$$H_{\text{DRpd}}^{'\bullet,q}(X_*, k) \simeq \tau_q(H^q(X_*, k) \otimes_k k\{T\}).$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les structures multiplicatives (et bien entendu fonctoriels en  $X_*, k, \dots$ ). Donc *a priori* on en récupère (via  $H_{\text{DRpd}}^{'\bullet,q}(X_*, k)$ ) les  $k$ -modules  $H^q(X_*, k)$  et leurs cup-accouplements  $[?]$  les  $k$ -modules gradués  $\tau_q(H^q(X_*, k) \otimes_k k\{T\})$ . Ce qui donne un espoir que le complexe de De Rham à p.d de  $X_*$  à coefficients dans  $k = S/J$  disons  $[?]$  (comme dans le cas  $k = \mathbf{Q}$  qu'il contient) donne une information homotopique précise sur  $X_*$ , c'est l'observation qu'en fait, pour un  $k$ -module  $M$  quelconque, on récupère  $M$  à isomorphisme canonique près par la connaissance d'un quelconque des tronqués  $\tau_q(M \otimes_k S)$  (quelque grand que soit  $p \dots$ ), qu'on appelle le  $q$ -ième ombre de  $M$ , et de même tout accouplement  $M \otimes N \longrightarrow P$  est connu quand on connaît, pour  $q$  assez grand, l'accouplement correspondant  $\tau_q(M_S) \otimes \tau_q(N_S) \longrightarrow \tau_q(P_S)$ . Donc une  $k$ -algèbre gradué  $H^\bullet$  à degrés  $\geq 0$  est connu à isomorphisme canonique près quand on connaît la  $k$ -algèbre bigraduée dont les composantes de degré "extérieure"  $q$  sont les

$\tau_q(H^q \otimes_k S) \dots$  Cette “théorie des ombres” étant supposée acquise, on veut que la connaissance de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  (en tant que  $S$ -algèbre différentielle bigraduée) implique celle de l’algèbre graduée  $H^0(X_*, k)$  - et en raffinant un peu, on veut qu’on trouve même  $R\Gamma(X_*, k)$  comme étant [?]

$$R\Gamma(X_*, k) \otimes^L R\Gamma(X_*, k) \longrightarrow R\Gamma(X_*, k).$$

### Remarques et Problèmes

- a) Si  $k$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre, de sorte que  $C_{\text{DRS}}^\bullet(X_*, k)$  est défini, on le reconstruit à partir de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  par la formule

$$C_{\text{DRS}}^\bullet(X_*, k) C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k) / (T - 1).$$

Plus généralement, *quelque soit*  $k$ , on a

$$C_{\text{DRS}}^\bullet(X_*, \underbrace{k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}}_{k_{\mathbf{Q}}}) \simeq C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k) / (T - 1).$$

(et plus généralement encore, si  $(S, J, t)$  comme au début

$$C_{\text{DRpd}}^\bullet(X_*; S, J, t) / (t - 1) \simeq C_{\text{DRS}}^\bullet(X_*, S_{\mathbf{Q}}) / (t - 1) \quad )$$

[plutôt  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, S, J, t) / (t - 1)$ ].

- b) Je suis convaincu que la structure à puissances divisées sur l’idéal d’augmentation de

$$C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k) \longrightarrow H^0(X_*, k) = \text{Hom}(X_*, k_*)$$

est importante<sup>6</sup>. Il n’est peut-être pas ici [?] de se poser la question pour  $X_*$  simplement connexe, si la connaissance de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  [?] *avec toutes ses structures* (y compris celle des puissances divisées) n’implique pas la connaissance du type d’homotopie de  $X_*$  [?] plus précisément appelé *complexe de De Rham à puissances divisées virtuel sur  $k$* , une  $k$ -bialgèbre différentielle  $k$ -augmentée, associative, unitaire, alternée à différentielles

---

<sup>6</sup>Avec [?] condition de finitude sur  $X_*$ , savoir les  $H_i(X_*)$  [?] de type fini.

de bigebré  $(-1, +1)$  à bidegrés  $\geq 0$ , avec puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la différentielle ( $d(x^{[n]}) = x^{[n-1]}dx$ ), et telle que les  $H^{\bullet, q}(C^{\bullet\bullet})[-q]$  sont des  $q$ -ombres (auquel cas on récupère à partir de  $C^{\bullet\bullet}$  un élément de  $D(k)$  avec structure multiplicative associative unitaire commutative...), passe à une "catégorie dérivée" de ces complexes en inversant les flèches qui sont des quasi-isomorphismes, d'où par  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  un foncteur

$$\underbrace{(\text{Hot})}_{\text{types d'homotopie}} \longrightarrow \underbrace{(\text{DRpd})}_{\text{catégorie dérivée des complexes DRpd}},$$

et on peut se demander si sa restriction aux espaces connexes et simplement connexes avec des  $H^i(X, \mathbf{Z})$  de type fini (cas  $k = \mathbf{Z}$ ) induit une équivalence avec les complexes de De Rham à puissances divisées sur  $\mathbf{Z}$  tels que  $H^0(C^{\bullet\bullet}) \xleftarrow{\sim} k$ ,  $H^1(C^{\bullet\bullet})[?]$  les  $H^i(C^{\bullet\bullet})[?]$

- c) Je n'ai pas réfléchi si on peut reconstruire les opérations cohomologiques (type Steenrod ou Whitney) dans la catégorie des  $X_*$  par la connaissance de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, -)$ , et n'ai que des résultats partiels négatifs qui montrent qu'en dehors  $[?]$  des automorphismes multiplicatifs de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(k)$ , on ne trouve rien d'intéressant.
- d) Il faudrait sans doute chercher  $[?]$  des modèles minimaux à la Sullivan, pour essayer entre autres d'exprimer les groupes d'homotopie de  $X_*$  en termes de  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, \mathbf{Z})$  (cas où  $X_*$  simplement connexe avec condition de finitude...). Je n'ai rien fait dans cette direction. Je n'ai même pas développé une formule de Künneth pour  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet}$  d'un produit  $X_* \times Y_*$  - il y a des difficultés techniques dues au fait qu'on ne peut sans doute supposer  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_* \text{ ou } Y_*, k)[?]$
- e) Le complexe de chaînes  $C_{\bullet}(X_*, k)$  permet de reconstruire tous les complexes de cochaînes  $C^{\bullet}(X_*, k')$  pour  $k'$  [une]  $k$ -algèbre variable, par

$$C^{\bullet}(X_*, k) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Z}}^{\bullet}(C_{\bullet}(X_*, k), k)$$

[plutôt  $C^{\bullet}(X_*, k') \simeq \text{Hom}_k^{\bullet}(C_{\bullet}(X_*, k), k')$ ]. (L'objet le plus fin est donc  $C_{\bullet}(X_*, \mathbf{Z})$ , on a alors  $C_{\bullet}(X_*, k) \simeq C_{\bullet}(X_*, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} k$   $[?]$ ).



Il est possible de même de définir une cobigèbre différentielle  $C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, k)$   $k$ -coaugmenté à copuissances divisées telle que l'on ait, pour tout  $k$ -algèbre  $k'$

$$C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k') \simeq \text{Hom}_k(C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, k), k')$$

(compatible avec toutes les structures).

On aura d'ailleurs

$$C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, k') \simeq C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, k) \otimes_k k'.$$

L'objet le plus fin est  $C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, \mathbf{Z})$ . C'est lui qu'il conviendrait de considérer (au lieu de son "dual"  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, \mathbf{Z})$ ) si on veut aborder b) c) d) sans condition de finitude. Notons que (tout comme  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, \mathbf{Z})$ , pour  $X_*$  variable, transforme  $\varinjlim$  quelconques en  $\varprojlim$ )  $C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}(X_*, \mathbf{Z})$  coaugmenté  $[?]$   $\varinjlim$  quelconques  $([?])$

f) <sup>7</sup> **Faisceautisation.** Il y a une définition évidente de complexes de De Rham à puissances divisées sur  $k$  si  $k$  est un Anneau commutatif dans un topos. On aimerait, p.ex. en comparant un tel complexe à un autre quasi-isomorphisme dont les composantes soient flasques (mais y en a-t-il toujours ?), définir des opérations  $[?] Rf_*$  dans des catégories dérivées convenables pour de tels complexes, quand  $f : X \longrightarrow Y$  est un morphisme de topos (supposé au besoin de dimension cohomologique finie...). Si  $k$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre, le même problème se rencontre d'ailleurs déjà pour les complexes de type De Rham-Sullivan (et le problème est ouvert - et posé par *Deligne* - quand  $X = (\text{Ens})^* =$  topos des ensembles cosimpliciaux,  $Y =$  topos ponctuel). Mais sauf erreur (si [mes souvenirs sont exacts]) il y a un topos qui marche pour les espaces topologiques paracompacts...

f) On peut associer à un espace topologique  $X$  ou un ensemble semi-simplicial  $X_*$  des invariants algébriques "linéaires" *plus fins* a priori que le  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}$  (et même que  $C_{\bullet\bullet}^{\text{DRpd}}$ , en dualisant...).

---

<sup>7</sup>Voir f) ci-dessus.

P.ex. on peut observer que  $C_{\text{DRpd}^*}^{\bullet\bullet}(k) \xrightarrow{\sim} \Gamma^\bullet \Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet \Psi_{\bullet k}$  se déduit de  $D_*^{\bullet\bullet}(k) = \Gamma^\bullet \Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet \Phi_{\bullet k}$  (qui est une algèbre  $k$ -augmentée à puissances divisées qui est une *résolution de  $k$* ) et de  $T \in \Gamma(D_{*k}^{1,0})$  comme conoyau de la multiplication par  $dT$  (i.e. on divise par l'idéal engendré par  $dT$ ), ou encore en bidegré donné  $(p, q)$ ,

$$C_{*k}^{p,q} \simeq \text{Ker}(D_*^{p,q+1} \xrightarrow[\text{produit par } dT]{} D_*^{p,q+2}),$$

d'où

$$C_{\text{DRpd}}^{p,q}(X_*, k) \simeq \text{Ker}(D^{p,q+1}(X_*, k) \longrightarrow D^{p,q+2}(X_*, k)),$$

et on peut considérer les structures disons sur  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  comme déduites de certaines structures (à expliciter...) sur  $D_*^{\bullet\bullet}(X_*, k)$ . On peut aussi définir “La structure multiplicative à puissance divisées cohomologique du type d'homotopie  $X'_*$  en sens convenable, qui permet de reconstituer aussi bien  $C_{\text{DRpd}}^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  que  $D_k^{\bullet\bullet}(X_*, k)$  (ou les complexes de De De Rham-Sullivan...[?]) complexe de De Rham à puissances divisées (ou sinon  $D^{\bullet\bullet}(X_*, \mathbf{Z})$ ) suffit déjà pour récupérer toute la structure multiplicative à puissances divisées cohomologique de  $X_*$  (sous réserve de conditions de finitude bien sûr). Dans le cas contraire, ce serait cette dernière qui serait le candidat algébrique “linéaire” naturel pour exprimer le type d'homotopie  $X_*$  (du moins si  $X_*$  [est] connexe et simplement connexe, et en passant à une catégorie dérivée convenable bien sûr).

NOTATIONS SEMI-SIMPLICIAUX.  
CONSTRUCTIONS UNIVERSELLES  
1975 ou 1976

---

- A [transcription]

## NOTATIONS SEMI-SIMPLICIAUX. CONSTRUCTIONS UNIVERSELLES

---

$\Delta$  = catégorie des simplexes  $\Delta^n$  ( $n \geq 0$ ),  $\Delta^n = [0, n] \subseteq \mathbf{N}$  avec relation d'ordre total.

$$\Delta^\wedge = \mathbf{Ss} = \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta^\circ, \mathbf{Ens}) = \mathbf{Ens}_*.$$

Plus généralement, si  $A$  est une catégorie, on pose

$$A_* = \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta^\circ, A)$$

$$A^* = \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta, A),$$

donc

$$(A^\circ)^* \simeq (A_*)^\circ, \quad A^* \simeq ((A^\circ)_*)^\circ,$$

où l'exposant  $^\circ$  désigne le passage à la catégorie opposée.

Les objets de  $A_*$  (resp.  $A^*$ ) sont considérés comme des structures algébriques de type simple (sur une infinité d'objets de base) dans  $A$ , les 'objets semi-simpliciaux' resp. 'semi-cosimpliciaux'. On écrira  $\mathbf{Ens}_*$  quand on a en vue cet aspect, et  $\Delta^\wedge$  ou  $\mathbf{Ss}$  quand on a plutôt le point de vue 'objet d'un topos' ou 'faisceau sur un topos'<sup>1</sup>. Tous les développements qui suivent ont pour objet d'étudier ces objets (l'équivalent combinatoire des espaces topologiques) et leurs 'types d'homotopie', via des invariants qu'on peut leur associer, qui en dépendent de façon covariante ou contravariante. Nous avons ici en vue une étude systématique, dans l'esprit de

---

<sup>1</sup>On veut garder  $[?]$  à l'aspect  $[?]$  la nature algébrique très particulier de ce topos, la notation  $\mathbf{Ss}$  quand on veut l'oublier, on profite de sa signification topologique.

l'algèbre universelle, de ces invariants (qui sont donc des foncteurs  $\Delta^\wedge = \text{Ens}_*$ ), de leurs structures et des opérations qui peuvent être définies sur elles, permettant d'en déduire certaines complexes à partir d'autres plus simples.

Un objet de  $A_*$  sera généralement noté par un symbole de la forme  $K_*$ , où  $K_*$  désigne la famille des

$$K_*(\Delta^n) = K_{[n]}, \quad K_* = (K_{[n]})_{n \geq 0}, (= \text{abus de notation})$$

avec les opérations semi-simpliciales entre elles. On fera attention qu'on écrit  $K_{[n]}$  et non  $K_n$ , pour des raisons qui vont apparaître (impérieuses lorsque  $A$  est additive...).

De même, un objet de  $A^*$  sera noté

$$K^* = ([n] \mapsto K^{[n]}) = (K^{[n]})_n (= \text{abus de notation})$$

Nous aurons à travailler avec la situation où on a deux catégories  $A$  et  $B$ , et une équivalence (notée  $M \mapsto M^\vee$ )

$$\vee : A^\circ \xrightarrow{\sim} B, \quad \text{d'où} \quad B^\circ \xrightarrow{\sim} A$$

(le plus souvent  $A = B$  et  $(M^\vee)^\vee \underset{\text{isomorphisme fonctoriel}}{\simeq} M$ , avec compatibilité habituelle d'une autodualité...), on notera alors souvent par la même lettre un objet de  $A_*$  (ou  $A^*$ ) et l'objet de  $A^*$  (resp.  $A_*$ ) qui lui correspond par application de  $\vee$ , mais en indiquant la variance par la position du signe  $*$ ,

$$\begin{aligned} K^* &= (K_*)^\vee & K^{[n]} &= (K_{[n]})^\vee \\ K_* &= (K^*)^\vee & K_{[n]} &= (K^{[n]})^\vee. \end{aligned}$$

On s'intéressera surtout au cas où ( $k$  étant un anneau fixé) on a

$A = k$  — modules à gauche projectifs de type fini

$B = k$  — modules à droite projectifs de type fini

(si  $k$  est commutatif, on a  $A = B$  et  $[?]$  autodualité sur  $[?] A$ ).

On a le foncteur canonique pleinement fidèle

$$(*) \quad \Delta \hookrightarrow \Delta^\wedge = \text{Ss},$$

l'image par ce foncteur de  $\Delta^n$  est noté  $\Delta_*^n$ , ou mieux

[]

**Yoga :** nous nous intéressons surtout (en première étape) aux invariants covariants attachés à  $X_*$ , à valeurs dans une catégorie  $A$ , qui commutent aux  $\varinjlim$  par rapport à  $X_*$  — ils sont donc exprimés (si  $A$  est “grande” pour contenir les quelconques) par des éléments de  $A^*$ , i.e. des objets *cosimpliciaux* de  $A$ . Pour les invariants contravariants en  $X_*$ , à valeurs dans une catégorie  $B$ , nous nous attendons en premier lieu à ceux qui commutent aux  $\varprojlim$  en  $X_*$ , pour  $B$  stable par  $\varprojlim$ , ils correspondent donc aux objets de  $B_*$ , i.e. les objets *semi-simpliciaux* de  $B$ . Si  $B = (\text{Ens})$ , ils correspondent donc des ensembles semi-simpliciaux [?]

Ce n'est autre que le foncteur représenté par  $K_*$ , et on le notera aussi

$$X_* \mapsto K_*(X_*) = \text{Hom}(X_*, K_*).$$

Si  $B = \text{Ab}$ ,  $K_*$  sera de même un objet de  $\text{Ss}_{\text{ab}}$ , et en effet le foncteur qu'il représente est automatiquement muni d'une structure additive. Même remarque pour toute structure algébrique (sur un ou plusieurs objets de base) qui “peuvent s'exprimer en termes de  $\varinjlim$  exclusivement” (groupes, anneaux, modules sur tels, etc.).

**Remarque.** Les invariants ainsi obtenus à coups de foncteurs représentables — plus généralement, d'objets simpliciaux ou cosimpliciaux de catégories  $B$  ou  $A$  — sont de nature trop “grosses” et “frustes” pour être intéressants directement — en particulier, ce ne sont pas des invariants du type d'homotopie de  $X_*$ . On devra en extraire des invariants plus subtils qui soient des invariants du type d'homotopie de  $X_*$  — ceux-ci ne seront pas de nature si simples — i.e. “représentés” par des objets simpliciaux ou cosimpliciaux. Notre propos ici de [?] vient [?] de décrire, un maximum de structure supplémentaire remarquable, et dans les catégories de structures de ce type (complexes de chaînes ou de cochaînes, algèbres cosimpliciales etc.) d'inverser les flèches qu'on obtient à partir d'équivalence d'homotopie dans  $\text{Ss}$ , et de passer à des “catégories de fractions” en inversant ces flèches. L'invariant ainsi obtenu (plus “grossier” bien sûr, mais plus subtil dans sa définition, et moins “redundant”) exprimera alors de façon plus ou moins complète le type d'homotopie, on en saisira de façon adéquate tes ou tels aspects.

[]

**Remarques.**

- a) On trouve assentielllement les mêmes objets ( $L_*$  ou  $L_\bullet$ ) pour exprimer des *opérations* sur [des] invariants additifs contravariants, ou sur [des] invariants “additifs” covariants (du type envisagé) — c’était clair a priori, à cause du passage de  $A$  à  $B$  par passage à la catégorie opposée — mais l’opération définie par  $L_*$  dépend de  $L_*$  de façon contravariante dans le premier cas, covariante dans le deuxième.
- b) On a en principe résolu, et de façon quasi-tautologique, la question initiale de déterminer les constructions possibles sur [des] invariants contravariants ou covariants “additifs” du type envisagé : On trouve même [des] *grosses* catégories,  $\text{Ab}_*$  ou  $\text{Ab}_\bullet$  (par passage [?] de celle-ci à l’opposée). Cela tient au fait que l’on a admis des catégories  $A$  de valeurs  $A^\circ$  ou  $B$  assez spéciales, [?] où on peut effectuer *toutes* les  $\varinjlim$ , ou toutes les  $\varprojlim$  — ce qui a pour effet que ces mêmes opérations peuvent s’effectuer sur les invariants, et opèrent sur les invariants.

[]

(c’est ce qu’on va vérifier directement dans certains cas remarquables, p.ex. celui où  $L = \emptyset$  et où on trouve la sous-catégorie pleine de  $\text{Ab}_\bullet$  engendré par les  $G_0[n]$  [i.e.  $G_0(\Delta^{[n]})$ ) grâce aux seules sommes finies.

- c) On a oublié de noter que dans le cas particulier  $B = \text{Ab}$ , on trouve les mêmes types d’objets (savoir ceux de  $\text{Ab}_*$  ou de  $\text{Ab}_\bullet$  au choix) pour exprimer les différents *invariants* contravariants  $F$  possibles à valeurs dans  $\text{Ab}$  (commutant aux  $\varinjlim$ ) et les *opérations*  $\Omega$  qu’on peut faire sur des invariants contravariants opérer [?] (à valeurs dans une catégorie additive à  $\varinjlim$ ).

[]

qui permet se déduire du foncteur universel

$$\Delta^{\wedge^\circ} \xrightarrow{F_0} (\text{Ab}_*)^\circ$$

(défini par  $(F_0)^\circ(X_*) = C_*(X_*)$  en lui appliquant l’opération  $\Omega^*$  pour  $\Omega^* \in U^L$ ), ou encore qui se déduit du foncteur covariant [?] universel

$$\Delta^\wedge \xrightarrow{F_0^\circ = (X_* \mapsto C_*(X_*))} (\text{Ab}_*)$$

qui se dénote par  $C_*$ , en lui appliquant de tels  $\Omega_*$ . [?] formulations équivalentes en termes de  $\Omega^\bullet, \Omega_\bullet$  opérant sur  $(Ab_\bullet)^\bullet$  ( $\Omega^\bullet : Ab^\bullet \longrightarrow Ab$ ,  $\Omega_\bullet : Ab_\bullet \longrightarrow Ab$ ), en remplaçant  $C_*(X_*)$  par  $C_\bullet(X_*)$ <sup>2</sup>.

- e) Quel est le rôle dans tout ceci de Dold-Puppe ? On voit en travaillant que l'avantage de  $A_\bullet$  sur  $A_*$ , c'est que la description d'un objet y est nettement plus simple – on se perd facilement dans la description des opérations semi-simpliciales ! — et si on a deux avatars  $L_\bullet, L_*, L_\bullet$  est aussi nettement “moins gros” que  $L_*$  (NB on a toujours  $L_n \subset L_{[n]}$  comme facteur direct),  $L_*$  apparaît comme une sorte de version pléthorique de  $L_\bullet$  !

Néanmoins, alors que (dans le cas de  $A = Ab_*$  disons)  $Ab_{k*}$  et  $Ab_{k\bullet}$  est leur structure multiplicative - qui ne se correspond *pas* par DP et ND — celle de  $Ab_{k*}$  est plus simple à beaucoup d'égards, et s'introduit d'ailleurs de bien des façons par la suite de façon absolument impérieuse, alors que celle de  $Ab_{k\bullet}$  ne s'introduit pratiquement pas. De plus, pour les opérations tensorielles de type  $\bigwedge^i, \Gamma^i, \text{Sym}^i$ , elles manquent purement et simplement dans  $Ab_{k\bullet}$  (sauf de les [définir] par transport de structure via DP !) alors qu'elles sont évidentes sur  $Ab_{k*}$  ! Or ces structures également joueront un rôle essentiel par la suite.

---

<sup>2</sup>Sous réserve que  $L$  soit assez gros pour permettre au moins des noyaux de projecteurs !



## FAISCEAUTISATION DU TOPOS DE DE RHAM

---

-

## FAISCEAUTISATION DU TOPOS DE DE RHAM

---

**1.**

Soit  $X$  un topos, et

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{u} \Phi$$

une immersion de  $\mathbf{Z}$  dans un faisceau  $\Phi$ , tel que

1976

---

•

1977

---

•

1978

---

•

1979

---

•

1980

---

•

1981

---

•



## LA “LONGUE MARCHÉ” À TRAVERS LA THÉORIE DE GALOIS

---

- The “Longue Marche” was written between January and June 1981. It consists of about 1600 manuscript pages, and nearly as much again in various addenda and developments.
- *Je fais un premier voyage de prospection de ce “monde nouveau”, de janvier à juin 1981. Ce premier jet se matérialise en un paquet de quelques 1300 pages manuscrites, baptisées “La Longue Marche ‘a travers la théorie de Galois”. Il s’agit avant tout d’un effort de compréhension des relations entre groupes de Galois “arithmétiques” et groupes fondamentaux profinis “géométriques”. Assez vite, il s’oriente vers un travail de formulation calculatoire de l’opération de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  sur  $\hat{p}i_{0,3}$ , et dans un stade ultérieur, sur le groupe légèrement plus gros  $\widehat{\text{Sl}(2, \mathbf{Z})}$ , qui donne lieu à un formalisme plus élégant et plus efficace. C’est au cours de ce travail aussi (mais développé dans des notes distinctes) qu’apparaît le thème central de la géométrie algébrique anabélienne, qui est de reconstituer certaines variétés  $X$  dites “anabéliennes” sur un corps absolu  $K$  à partir de leur groupe fondamental mixte, extension de  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  par  $\pi_1(X_{\overline{K}})$  ; c’est alors que se dégage la “conjecture fondamentale de la géométrie algébrique anabélienne”, proche des conjectures de Mordell et de Tate que vient de démontrer Faltings. C’est là aussi que s’amorcent une première réflexion sur les groupes de Teichmüller, et les premières intuitions sur la structure multiple de la “tour de Teichmüller” – les multiplicités modulaires ouvertes  $M_{g,nu}$  apparaissant par ailleurs*

*comme les premiers exemples importants, en dimension  $> 1$ , de variétés (ou plutôt, de multiplicités) qui semblent bien mériter l'appellation "anabélienne". Vers la fin de cette période de réflexion, celle-ci m'apparaît comme une réflexion fondamentale sur une théorie alors encore dans les limbes, pour laquelle l'appellation "Théorie de Galois-Teichmüller" me semble plus appropriée que "théorie de Galois" que j'avais d'abord donnée à mes notes.*

Esquisse d'un programme

- *"La "période de frénésie" dont il s'agit s'étend de février à juin 1981. C'est celle aussi de la "longue marche à travers la théorie de Galois". Elle débouche sur une longue période de méditation sur ma relation à la mathématique. Celle-ci va du 19 juillet jusqu'en décembre 1981."* Récoltes et Semailles
- This text was partly available in: *La Longue Marche à Travers la Théorie de Galois*. Transcription d'un manuscrit inédit. Tome 1, Paragraphes 1 à 37. Par Jean Malgoire. Montpellier, France, 1995
- [edition] of the first part by M. Carmona

## STRUCTURES STRATIFIÉES

---

- [scan]

# STRUCTURES STRATIFIÉES

---

## 1. La situation la plus élémentaire

En un sens qui apparaîtra, sera la suivante.

[ ]

de groupoïdes fondamentaux [ ] est cocartésien - ou encore, si  $Y, X, X^*$  sont connexes, et [ ] (i.e. par définition, un revêtement universel de [ ]) [ ] un isomorphisme canonique de groupes fondamentaux [ ] où [ ] est isomorphe extérieurement à  $\pi_1(Y)$ .

Pour expliciter  $\pi_1(X)$  en termes de données “élémentaires”, dont  $\pi_1(Y)$  et  $\pi_1(X^*)$  [ ] encore à expliciter la structure de [ ], qui s’envoie dans l’un et dans l’autre, donnant [ ] [ ] qui exprime (8). C’est ici que l’hypothèse de *locale* [ ] a un [ ] (celle de lissité [ ] comme devant techniquement initiale, [ ] de notre heuristique...).

On doit se [ ], dans ce cas, pour démontrer que les [ ] homotopique de [ ] sont celles d’une *fibration localement triviale des fibres* [ ]: [ ] - et c’est [ ] qui devrait [ ] le contexte topologique (p. ex. celui des schémas avec le topos étale) de *définition* de la “locale trivialité” [ ] homotopique [ ]  $Y \hookrightarrow X$ . (Bien sûr, dans le contexte schématique, il faudra de plus travailler avec des types d’homotopie profini, et même sans doute “localiser” ces types d’homotopie en l’un des [ ] premières qui sont distinctes des caractéristique résiduelle qui interviennent, ou que en n’est que alors ce contexte [ ] des théorèmes qu’il faut, cf Artin-Mazur...)

On ont en particulière une suite exacte d’homotopie [ ]

Si on suppose par exemple que [ ]

allusion, en devrait  $[\ ]$  exprimer alors le *type d'homotopie de  $X$*  (et non seulement son  $\pi_1$ ) en termes de diagrammes de groupoïdes (8), ou ce qui revient au même, des diagrammes de groupes (10).

En tous cas, il est clair (indépendamment de toutes hypothèses de nullité de  $[\ ]$   $\pi_i$ , ou de  $[\ ]$ ) comment reconstruire en termes du diagramme (8),  $[\ ]$  faisceaux sur  $X$ ,  $[\ ]$  tels que l'on ait

$$(16) \quad F|_{X^*} \quad \text{et} \quad F|_Y \quad \text{localisation triviaux}$$

Cette catégorie  $F$  est équivalent en effet à celle des systèmes

$$(17) \quad (E_{X^*}, E_{Y,X}, \varphi)$$

$E_{X^*}$  est un système locale sur  $\pi$ ,  $X^*$  (un recouvrement étale de  $X^*$ ),  $E_{Y,X}$  un système locale sur  $[\ ]$  un homomorphisme de systèmes locaux sur  $[\ ]$

$$(18) \quad \varphi : p^*(E_{Y,X}) \longrightarrow i^*(E_{X^*}).$$

En termes de diagrammes de groupes (10)

## 2. Stratification globale : $[\ ]$ (sans tubes)

Pour simplifier, je vais en placer sur un espace topologique  $X$  - par le suite  $X$   $[\ ]$  un topos quelconque. Les constructions qui suivent, relatifs à une "stratification globale",  $[\ ]$  de la façon habituelle - ce qui  $[\ ]$  alors à imposer des conditions supplémentaires de connexité et de locale connexité, qui pour  $[\ ]$ . De même  $[\ ]$ .

Soit  $I$  un ensemble ordonné,

$$(X_i)_{i \in I} \quad X_i \subset X$$

une famille de sous-espaces de  $X$ . On suppose  $[\ ]$  Posant  $[\ ]$  on a un morphisme canonique

$$(3) \quad X_{\Delta_0} \longrightarrow X$$

et l'hypothèse a) signifie que ce morphisme est fini - i.e. propre sépare et à fibres finies. C'est aussi une *immersion locale*. On introduit une partie fermé  $[\ ]$  On voit alors que les deux projections  $[\ ]$  ont respectivement les propriétés suivantes :  $[\ ]$  Par ailleurs

### 3. Stratification globale : introduction au tubes

On [] les notations précédentes.

Pour toute couple  $(i \leq j) \in I \times I$ , considérons

### 4. Topos canoniques associées à une stratification globale

On va montrer comment, à une situation stratifiée donnée, on peut en associer d'autres.

A) Image inverse générale.

Rappelons les axiomes utilisés jusqu'à présent : []

Notons que pour tout  $X'$  au dessus de  $X$ , la famille des [] satisfait alors aux mêmes conditions.

D'ailleurs le système [] des  $X_{\Delta_r}$  - comme image inverse le lui des  $X'_{\Delta_r}$ , défini par les  $X'_i$ , [] des isomorphismes []

**NB.** Nous appliquons ces [] sauf en cas où  $X'$  est un ouvert de  $X$ . C'est pour [] prendre de telles images inverses [], qu'il [] été commode de supposer les  $X_i$  ou les  $X_i^*$  non-vides, ou encore par  $I \mapsto X_i$  est un *plongement* d'une ordonnée  $I \hookrightarrow \mathfrak{P}(X)$ .

Lorsque  $X' \longrightarrow X$  est une immersion locale propre (mais pas si c'est une immersion ouverte !) alors [] les images inverses de parties [] de  $X$  comment à [] des voisinages tubulaires de une telles parties []. Notons d'ailleurs que pour  $i < j$ , [] (sans hypothèse d'ailleurs que  $X' \longrightarrow X$  sont une immersion locale) [] d'où, dans le cas d'une immersion locale propre, des isomorphismes [] et plus généralement [] tout qui à faire.

Ceci montre en particulière que la démonstration du théorème de recollement, [] théorème énoncé p.22, est une [] *locale* sur  $X^1$  - ce qui prenant par exemple de nos [] au cas où  $I$  est *fini*.

B) Cas d'un  $X_{I'}$ .

Soit  $I'$  une partie de  $I$  telle que

$$(7) \quad i \leq j \in I' \Rightarrow i \in I'$$

---

<sup>1</sup>*non*, ce n'est pas absolument clair []

et tout

$$(8) \quad X_{I'} = \bigcup_{i \in I'} X_i \quad (\text{partie fermée de } X)$$

On a bien sûr  $[]$  (et aussi  $[]$ )  $[]$  à (11 d). Dans ces formules,  $I'$ ,  $I''$ , les  $I'_\alpha$  sont des parties de  $I$  satisfaisant (7) ( $[]$  cribles de  $I$ ).

Si dans A) on prend  $X' = X$ , il est plus commode de travailler avec la stratification de  $X'$  définie par les  $X_i$  avec  $i \in I'$  - il est clair que les conditions (II) relatives à  $X' = X_{I'}$  sont satisfaites. Les “parties cribles” de  $X'$  pour cette stratification, ou pour celle induit au sens général des espaces au dessus de  $X$ , sont les mêmes -  $[]$  sur  $X' = X_{I'}$ , des parties-cribles de l'espace stratifié  $X$ .

Ici, les espaces élémentaires pour la stratification de type  $I'$  de  $X' = X_{I'}$ , sont les espaces  $[]$

$[]$  pour une instant à  $X$ , et considérons l'un  $I_0$  des  $i \in I$  tel que  $X_i = \emptyset$ . C'est une crible, et on a  $X_i^* = \emptyset$ ,  $[]$  si  $i \in I_0$ .  $[]$  on voit que les diagrammes de type  $\tilde{I}$  défini par l'espace stratifié  $X$   $[]$  en remplaçant  $I$  par  $I \setminus I_0$ , ou plus guère par  $I \setminus I'_0$ , où  $I'_0 \subset I'$  est une crible, ce qui donne lieu à un diagramme  $[]$  qu'est *contenu* dans  $\tilde{I}$  (cela est vrai pour *toute* crible de  $I$ ).

Si par exemple on a deux cribles

$$(14) \quad I'' \subset I' \subset I$$

d'où

$$(15)$$

$[]$  regarder plutôt la stratification de type  $I' \setminus I''$ , définie par les

$$(16)$$

dont les topos élémentaires sont dans les  $X_{i'}^*$  ( $i' \in I' \setminus I''$ ) et des  $[]$  couples  $(i', j')$  avec  $i' \in I' \setminus I''$   $[]$  on a

$$(17)$$

*mais il n'est pas clair en générale que ces soient mêmes semblant équivalences d'homotopie...*

Donc il [] il s'agit de [] les constructions sur une  $X_{I'}$ , et sur un [].

Je vais en [] par  $C$  sauf de regarder plus particulièrement ce qui se [] en l'induisant ainsi sur un ouvert  $U_{I', I''}$ .

C) Les [].

On suppose donnée des cribles

(18)

d'où

(19)



1982

---

•

1983

---

•

## BRIEF AN G. FALTINGS

27.6.1983

---

- Letter about Anabelian geometry.
- [translation]. In: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

27.6.1983

Lieber Herr Faltings,

Vielen Dank für ihre rasche Antwort und Übersendung der Separata! Ihr Kommentar zur sog. "Theorie der Motive" ist von der üblichen Art, die wohl grossenteils der in der Mathematik stark eingewurzelten Tradition entspringt, nur denjenigen mathematischen Situationen und Zusammenhängen eine (eventuell langatmige) Untersuchung und Aufmerksamkeit zuzuwenden, insofern sie die Hoffnung gewähren, nicht nur zu einem vorläufigen und möglicherweise z.T. mutmasslichen Verständnis eines bisher geheimnisvollen Gebietes zu kommen, wie es in den Naturwissenschaften ja gang und gäbe ist — sondern auch zugleich Aussicht auf die Möglichkeit einer laufenden Absicherung der gewonnenen Einsichten durch stichhaltige Beweise. Diese Einstellung scheint mir nun psychologisch ein ausserordentlich starkes Hindernis zur Entfaltung mathematischer Schaukraft, und damit auch zum Fortschreiten mathematischer Einsicht im üblichen Sinn, nämlich *der* Einsicht, die durchdringend oder erschöpfend genug ist, um sich schliesslich "beweisen" zu können. Was meine Erfahrung in mathematischer Arbeit mich immer wieder lehrte, ist dass stets in erster Linie der Beweis aus der Einsicht entspringt, nicht im Gegenteil — und dass die Einsicht in erster Linie aus einem feinfühligem und hartnäckigen Aufspüren der relevanten Wesenheiten und Begriffen entsteht, und deren Wechselbeziehung. Der leitende Faden ist innere Kohärenz des allmählich sich aus dem Dunst lösenden Bildes, und Einklang auch mit der anderweilig Bekannten oder Erahntem — und er leitet um so sicherer, als die "exigence" der Kohärenz eine strengere und feinfühlendere ist.

Um auf Motive zurückzukommen, so existiert meines Wissens keinerlei "Theorie" der Motive, aus dem einfachen Grund, dass niemand sich die Mühe machte, eine solche Theorie auszuarbeiten. Das vorhandene Material an bekannten Tatsachen und an geahnten Zusammenhängen ist von beindruckender Reichhaltigkeit — unverhältnismässig viel mehr, will mir scheinen, als je zu Ausarbeitung einer physikalischen Theorie vorlag! Es existiert z.Z. eine Art "yoga des motifs", das einer Handvoll Eingeweihter geläufig ist, und in manchen Situationen einen sicheren Anhalt gewährt zur Erratung gewisser Zusammenhänge, die sich dann auch bisweilen tatsächlich so oder so beweisen lassen (wie etwa in Ihren let-

zten Arbeit der Satz über Galois Aktion auf Tateschen Moduln abelscher Mannigfaltigkeiten). Es hat den Status scheint mir einer Art Geheimwissenschaft — Deligne scheint mir der, dem sie am geläufigsten ist. Seine erste [veröffentlichte] Arbeit, über die Entartung der Leray'schen Spektralfolge für eine glatte eigentliche Abbildung algebraischer Mannigfaltigkeiten über  $\mathbb{C}$ , entsprang einer einfachen Überlegung über "Gewichte" von Kohomologiegruppen, die zu jener Zeit reine Heuristik ware, heute aber (seit dem Beweis der Weil'schen Vermutungen) sich wohl über beliebigem Grundschema durchführen liesse. Es ist mir auch klar, dass die Deligne'sche Erweiterung der Hodge Theorie weitgehend aus dem ungeschriebenen "Yoga" der Motive schöpfte — nämlich dem Bestreben entsprang, gewisse "Tatsachen" aus jenem Yoga, und ganz besonders die Existenz der Filtration der Kohomologie durch "Gewichte", und zudem die Halbeinfachheit gewisser Aktionen von Fundamentalgruppen, im Rahmen der transzendenten Hodge-Strukturen sicherzustellen.

## NOTES ANABÉLIENNES

---

- Notes for “La Longue Marche à Travers la Théorie de Galois”

## NOTES ANABÉLIENNES

---

### I. Résultats de fidélité

À tout corps  $K$ , associons son topos étale  $B_K$ , qui est un topos (profini) galoisien. Le groupoïde des points de  $B_K$  est noté  $\Pi_K$ , il est anti-équivalent canoniquement à la catégorie des clôtures algébriques séparables de  $K$ . Si  $\bar{K}$  est une telle clôture, son groupe des  $K$ -automorphismes  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$  ou  $E_{\bar{K}/K}$  s'identifie au groupe des automorphismes des points de  $B_K$  associé à  $\bar{K}/K$  (il vaut peut-être mieux de dire à l'opposé de ce groupe - la variance des clôtures algébriques de  $K$  est comme celle des foncteurs fibres, à l'opposée de celles des points ...) Bien entendue,  $B_K$  se reconstitue à partir de  $\Pi_K$ , comme le topos des systèmes locaux (continues) sur  $\Pi_K$  - et en termes de  $E_{\bar{K}/K}$ , comme le topos des ensembles discrets à actions continues de  $E_{\bar{K}/K}$ .

Pour un homomorphisme de corps  $K \longrightarrow K'$ , i.e. un homomorphisme de schémas  $\text{Spec } K' \longrightarrow \text{Spec } K$ , on a un morphisme de topos correspondant

$$(1) \quad B_{K'} \longrightarrow B_K$$

associé à un homomorphisme de groupoïdes fondamentaux

$$(2) \quad \Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K.$$

Ceci [s'explique] en disant qu'un objet  $[] \Pi_{K'}$  (i.e. point de  $B_{K'}$ , ou revêtement universel de  $B_{K'}$ , ou clôture séparable  $\bar{K}'$  de  $K'$ ) en définit un des  $\Pi_K$  (ainsi, on

prend  $\bar{K}$  = clôture algébrique séparable de  $K'$  dans  $\bar{K}'$ ) et pour deux points correspondants, on a un homomorphisme de groupes fondamentaux correspondants, qui s'interprète par exemple comme

$$(3) \quad E_{\bar{K}'/K'} \longrightarrow E_{\bar{K}/K}$$

et qui peuvent de reconstitue l'homomorphisme de topos comme une “restriction des scalaires”.

L'image de (3) est le sous-groupe fermé de  $E_{\bar{K}/K}$  qui correspond à la sous-extension  $K_1$  de  $\bar{K}/K$ , clôture algébrique séparable de  $K$  dans  $K'$ , i.e.  $K_1 = \bar{K} \cap K'$ .

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{K} & \longrightarrow & \bar{K}' \end{array}$$

Quand  $K'$  est une extension de type fini de  $K$ ,  $K_1$  est une extension finie de  $K$ , et on en conclut que l'image de (3) est alors un sous-groupe d'indice fini, égale à  $E_{\bar{K},K}$  si et seule si  $K_1 = K$  i.e.  $K$  est séparablement algébrique clos dans  $K'$ . D'ailleurs, on montre sans mal que (si  $K$  est extension de type fini) l'homomorphisme (3) est injectif si et seule si  $K'$  est une extension algébrique de  $K$ . Donc il est bijectif si et seule si  $K'$  est une extension [radicielle] de  $K$ . Dans le suite nous nous bornons (précisément) aux corps de caractéristique 0, et la condition précédente signifie alors que  $K \longrightarrow K'$  est un *isomorphisme*.

Ainsi, le foncteur  $K \longrightarrow B_K$  ou  $K \longrightarrow \Pi_K$ , ou  $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K}/K}$ , est *conservatif* quand on se limite comme morphismes de corps  $K \longrightarrow K'$  (de caractéristique 0) à ceux que fait de  $K'$  une extension de type fini de  $K$ .

Par exemple il suffit de se limiter aux extensions de type fini des corps fermées  $\mathbf{Q}$  - on trouve un foncteur conservatif de la catégorie de ces corps dans celle de groupoïdes (ou de topos), au sens à un morphisme de corps qui donne une équivalence de groupoïdes (ou de topos) est un *isomorphisme*<sup>1</sup>.

Quand on prend des corps quelconques, le 2-foncteur  $K \longrightarrow B_K$  ou  $K \longrightarrow \Pi_K$  ou  $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K}/K}$  est cependant loin d'être fidèle. Ainsi, si  $K$  est séparablement clos,  $B_K$  est le “topos ponctuel”,  $\Pi_K$  le groupoïde ponctuel,  $E_{\bar{K}/K} \simeq 1$  - il est donc

---

<sup>1</sup>au cas []



que les morphismes entre corps séparablement clos ne sont pas décrits par les morphismes entre leurs topes étales, ou groupoïdes fondamentaux! Pour cette raison, il y a lieu d'associer à un corps  $K$  un objet plus fin que  $B_K$  ou  $\Pi_K$ , à savoir le système projectif des  $B_{K_i}$ , ou des  $\Pi_{K_i}$ , pour  $K_i$  sous-corps de  $K$  de type fini sur le corps  $[\ ]$ , et à un système  $(K, \bar{K})$  le système projectif des  $E_{\bar{K}_i/K_i}$ , où  $\bar{K}_i$  est le clôture algébrique séparable de  $K_i$  dans  $\bar{K}$ . On []

$$(4) \quad \begin{cases} \Pi_K \simeq \varprojlim \Pi_{K_i} \\ B_K \simeq \varprojlim B_{K_i} \\ E_{\bar{K}/K} \simeq \varprojlim E_{\bar{K}_i/K_i} \end{cases}$$

i.e. on reconstitue les objets  $B_K$ ,  $\Pi_K$ ,  $E_{\bar{K},K}$  à partir des systèmes projectifs correspondant - mais l'inverse n'est pas vrai. En fait, comme le foncteur

$$\text{Ind}(\text{Corps type fini}) \longrightarrow \text{corps}$$

de la catégorie des systèmes inductifs de corps de type fini, vers celle des corps, est une équivalence de catégories (pour des raisons triviales), il s'ensuit que les foncteurs  $K \longrightarrow B_K$ , ou  $K \longrightarrow \Pi_K$ , ou  $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K},K}$ , étant des corps vers les propriétés idoines, avoir [] les propriétés de fidélité des foncteurs  $K \longrightarrow B_K$ , ou  $K \longrightarrow \Pi_K$ , ou  $(K, \bar{K}) \longrightarrow E_{\bar{K},K}$  [] aux corps absolument de type fini, auxquels nous allons pour la suite nous borner, la plupart des temps. Mais il sera nécessaire au cours de travail, de donner une description purement algébrique, par exemple, de pro-groupes finis associé par exemple à (plus précisément, à  $(C, C)$  !).

Le rôle dominant sous joué par le corps premier de caractéristique 0,  $\mathbf{Q}$  donc pour  $B_{\mathbf{Q}}$  et  $\Pi_{\mathbf{Q}}$ , qui a un objet canonique, noté  $\bar{\mathbf{Q}}_0$  - la clôture algébrique de  $\mathbf{Q}$  dans  $\bar{\mathbf{Q}}$ . On posera<sup>2</sup>

$$(5) \quad G_{\mathbf{Q}} = E_{\bar{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$$

Pour tout corps  $K$  de caractéristique 0 - en particulière pour les corps  $K$  de type fini sur  $\mathbf{Q}$ , lequel nous allons nous borner par la suite - on a donc des homomorphismes canoniques

$$(6) \quad B_K \longrightarrow B_{\mathbf{Q}} \quad \text{Quad} \quad \Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbf{Q}}$$

---

<sup>2</sup>et on écrit souvent  $\Gamma_{\bar{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$  au limite des  $E_{\bar{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$ , pour une clôture algébrique  $[\ ] \bar{\mathbf{Q}}$  de  $\mathbf{Q}$

qui l'explicitait, quand on a choisi un objet de  $\Pi_K$  i.e. un  $\bar{K}/K$ , d'où un  $\bar{Q}/Q$ , pour un homomorphisme de groupes profinis

$$(7) \quad E_{\bar{K}/K} \longrightarrow \Gamma_{\bar{Q}/Q}.$$

Par le suit, on regarde toujours  $B_K$ ,  $\Pi_K$  ou  $E_{\bar{K},K}$  comme muni de cette structure supplémentaire - ce sont les morphismes (de topos, de groupoïdes, ou de groupes profinis) "arithmétiques", dominant la situation.

Un intérêt particulier s'attende au noyau de (7), que je note  $\pi_{\bar{K},K}$  - on<sup>3</sup> l'appelle "partie géométrique" de groupe de Galois  $E_{\bar{K},K}$  par opposition au quotient  $E_{\bar{K},K}/\pi_{\bar{K},K} = \Gamma_{\bar{K},K} \hookrightarrow \Gamma_{\bar{Q},Q}$ , que j'appelle se partie "arithmétique" - celle-ci est un sous-groupe ouvert de  $\Gamma_{\bar{Q},Q}$ , qui son [], correspond au sous-corps  $\underline{K}$  de  $\bar{Q}/Q$ , extension finie  $/Q$  de  $\bar{Q}/Q$ , clôture algébrique de  $Q$  dans  $K$ , de sorte qu'on a une suite exacte

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_{\bar{K}/K} & \longrightarrow & E_{\bar{K}/K} & \longrightarrow & \Gamma_{\bar{K}/K} \longrightarrow 1 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \Gamma_{\bar{Q}/Q} \end{array}$$

On<sup>4</sup> va donner une interprétation de ce noyau, et de la suite exacte (8), en écrivant

$$(9) \quad K = \varinjlim_i A_i$$

où les  $A_i$  sont les sous- $Q$ -algèbres de type fini de  $K$ , correspondant au système projectif des "modèles affines"  $U_i = \text{Spec}(A_i)$  de  $K/$ . Parmi les  $A_i$ , il y a d'ailleurs un système [] fermé des  $A_i$  réguliers, i.e. des  $U_i$  lisses/, [] comme morphismes de transition des morphismes de localisation []. On peut même, d'après Mike Artin, prendre comme  $U_i$  des schémas "élémentaires" sur  $K_0$ , se dévissant en fibrations successives de courbes. Notons que  $\text{Spec} K = \eta$  est le point générique [] des  $U_i$ , qui sont [] sur  $k$  (clôture algébrique de dans  $K$ ).

Le choix de  $\bar{K}$  définit un point géométrique  $\bar{\eta}$  sur les  $U_i$ , d'où des groupes  $\pi_1(U_i, \bar{\eta}) = \Gamma_i$ , et [] bien connus

$$\text{Spec} K = \varprojlim U_i$$

<sup>3</sup> on va noter  $\Gamma = \Gamma_{\bar{K}/K}$  cette "partie arithmétique"

<sup>4</sup> NB  $\pi_{\bar{K}/K} = (1)$  si et seule si  $K$  algébrique sur  $Q$ , i.e. fini sur  $Q$ .

$$(10) \quad E_{\bar{K}/K} = \pi_1(\eta, \bar{\eta}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i [\ ] \quad (\Gamma_i = \pi_1(U_i, \bar{\eta}))$$

D'autre part, si on pose

$$(11) \quad \bar{U}_i = U_i \otimes_K$$

on a pour tout  $i$  une suite exacte d'homotopie

$$(12) \quad 1 \longrightarrow$$

qui forment un système projectif de suites exactes, ou d'extensions ayant toutes même quotient  $\Gamma'$ , et dont les noyaux

$$\pi_i = \pi_1(\bar{U}_i, \bar{\eta})$$

sont des groupes fondamentaux “géométriques” - que  $[\ ]$  d'ailleurs  $[\ ]$ , en utilisant un plongement de  $[\ ]$  dans  $\mathbb{C}$  (d'où un isomorphisme  $\simeq \bar{\circ}$ ), comme les  $[\ ]$  profinis de  $\pi_1(U_i(\mathbb{C}), \bar{\eta})$ , ou maintenant  $\bar{\eta}$  est interprète comme un point  $[\ ]$  aux variétés complexes  $U_i(\mathbb{C})$ .

La suite exacte (8) est donc le limite projectif des suites exactes d'homotopie (12)  $(\bar{\circ})$ , ce qui donne en particulière

$$(13) \quad \pi_{\bar{K}/K} \simeq \varprojlim_i$$

Utilisant les fibrations des  $U_i$  (dans le cas où on s'astreint prendre de variétés élémentaires d'Artin), on trouve que tout  $\pi_i$  est un groupe extension successive des groupes profinis *fibres* (où  $[\ ]$ ). Ceci redonne p. ex. que le dimension cohomologique de  $\pi_i$  est  $[\ ]$ , celle de  $E_i$  est  $\leq n+2$  (pour des coefficients de  $m$ -torsion,  $[\ ]$ ) - et par passage à la limite, des  $[\ ]$  correspondantes pour les dimension cohomologiques de  $\pi_{\bar{K}/K}$  et  $E_{\bar{K}/K}$

$$(14) \quad \dim \text{coh} + \pi_{\bar{K}/K} \leq n, \quad \dim \text{coh} \Gamma_{\bar{K}/K} \leq n+2$$

qui sont en fait même des *égalités* (sauf erreur), et donnant donc une description cohomologique simple de degré  $d$   $[\ ]$  absolu de  $K$ .

---

<sup>5</sup>cette interprétation

**Théorème (1).** — Soit  $K$  un corps extension de type fini de  $\mathbb{C}$ ,  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ . Alors pour tout sous-groupe ouvert  $E$  de  $E_{\bar{K}/K}$ , son centralisateur dans  $E_{\bar{K}/K}$  est réduit au groupe unité. Itou pour  $\pi_{\bar{K}/K}$ .

**Démonstration.** — Soit  $\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma_{\bar{K}/K}$  l'image de  $E$  dans  $\Gamma = \Gamma_{\bar{K}/K}$  qui est donc un sous-groupe ouvert. L'image dans  $\Gamma$  des centralisateurs de  $E'$  dans  $E$  [] centralisateur de  $\Gamma'$  dans  $\Gamma$ . Je dis qu'il est égale à 1, ce qui équivaut donc au

**Corollaire.** — Dans  $\mathbf{G} = \Gamma_{\bar{K}/K}$ , le centralisateur de tout sous-groupe ouvert est réduit à (1).

OPS Ce sous-groupe ouvert  $\Gamma'$  invariant, il est bien connue <sup>(6)</sup> que son centre est réduit à 1 donc si  $Z$  est son centralisateur dans  $\Gamma$ , l'homomorphisme  $Z \longrightarrow \Gamma/\Gamma'$  est injectif donc  $Z$  est fini. Mais on sait que les seuls éléments  $\neq 1$  de  $\Gamma$  d'ordre fini sont les conjugués de  $\tau$ , conjugaison complexe. Mais le centralisateur de  $\tau$  dans  $\Gamma$  est réduit à [] donc on peut contenir  $\Gamma'$ , donc  $\tau \notin Z$ , donc  $Z = (1)$ .

[] à  $E \subset E_{\bar{K}/K}$ , on voit donc que son centralisateur  $Z$  dans  $E_{\bar{K}/K}$  est une image dans  $\Gamma$  réduite à  $\{1\}$  donc  $Z \subset \pi_{\bar{K}/K}$ . Soit  $\pi' \subset \pi = \pi_{\bar{K}/K}$  le [] de  $Z'$  sur  $\pi$ , c'est un sous-groupe ouvert de  $\pi$ , et on est ramené à voir que  $\text{Centr}_{\pi}(\pi') = \{1\}$ , i.e. le

**Corollaire.** — Soit  $\pi$  un groupe profini, extension successives de groupes profinis libres. Alors le centralisateur  $Z$  dans  $\pi$  de tout sous-groupe ouvert  $\pi'$  de  $\pi$  est réduit à  $\{1\}$ .

Par dévissage on est ramené au cas d'un groupe profini libre. On sait que  $\pi'$  est donc libre. OPS  $\pi'$  invariant, <sup>(7)</sup> et on admet que le centre d'un groupe profini libre est réduit à 1.

Donc  $Z \longrightarrow \pi/\pi'$  est injectif, donc  $Z$  est fini, et on admet que dans un groupe profini libre, il n'y a pas d'élément <sup>(8)</sup> d'ordre fini  $\neq 1$  - ce qui [] la démonstration.

**Scholie.** — Le fait que  $E_{\bar{K}/K}$  soit à centre trivial peut s'exploiter en disant que le groupoïde  $\Pi_K$  (ou le topos  $B_K$ ) [] à équivalence près, définie à isomorphisme unique près, quand on connaît le groupe extérieure associé à  $E_{\bar{K}/K}$ .

---

<sup>6</sup>à vérifier

<sup>7</sup>à vérifier

<sup>8</sup>à vérifier

Les homomorphismes  $E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$  associés à des homomorphismes  $K \longrightarrow K'$  d'extensions de type fini de  $k$ , ayant une image ouverte dans un centralisateur réduit à 1, on voit de même que l'homomorphisme de topos  $B_{K'} \longrightarrow B_K$  ou de groupoïdes  $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$ , sont déterminés à équivalence près (définie à isomorphisme unique près) par l'homomorphisme correspondant de groupes extérieurs. Il en est en particulier ainsi de morphisme structurel  $B_K \longrightarrow B$  ou  $\Pi_K \longrightarrow \Pi$  qu'on peut interpréter intrinsèquement comme un homomorphisme de groupes profinis extérieurs  $E_K \longrightarrow E$ . Mais nous suivons [1], en exploitant le fait que  $\pi_{\overline{K}/K}$  est lui-même associé à centre trivial. Cela signifie que l'extension de  $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$  par  $\pi_{\overline{K}/K}$  est entièrement connue, à isomorphisme près, pour  $\pi_{\overline{K}/K}$  et  $\Gamma$  fixés, en termes de l'action extérieure correspondant de  $\Gamma$  sur  $\pi$ , comme l'image inverse de l'extension universelle

$$1 \longrightarrow \text{Aut}(\pi) \longrightarrow \text{Autext}(\pi) \longrightarrow 1$$

Pour  $K$  fixé, donc  $k$  fixé, [1] qu'on fixe un  $\Gamma = \Gamma_k$  revient à dire qu'on fixe une clôture algébrique de  $k$ , [1] qu'on fixe un  $\pi_{\overline{K}/K} = \pi_1(K \otimes_k \overline{k})$  signifie [1] qu'on fixe une revêtement universel de  $\text{Spec}(K \otimes_k \overline{k}) = \eta \otimes_k \overline{k}$ , les deux ensembles reviennent à se donner le revêtement universel  $\overline{\eta} = \text{Spec}(\overline{K})$  de  $K$ . Par la suite, nous décrivons (avec une fidélité qui reste à [1]) les couples  $(K, \overline{K})$  d'une extension  $K$  de  $k$  de type fini, et d'une clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$ , par les triples  $(\pi, \Gamma, \varphi)$ , où  $\pi = \pi_{\overline{K}, K}$  et  $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}, K}$  sont des groupes profinis, et  $\varphi : \Gamma \longrightarrow [\pi]$  une action extérieure de  $\Gamma$  sur  $\pi$  - ce qui peut se reconstituer l'extension  $\overline{K}$  de  $K$  par  $\pi_{\overline{K}, K}$ . J'ai oublié [1] qu'il faut *de plus* se donner  $\Gamma$  comme sous-groupe d'un  $\Gamma_0$  bien déterminé, i.e. qu'il faut se donner un objet de  $\Pi$  et une [1] fidèle de  $\Gamma$  dessus - pour reconstruire [1] cas donné un homomorphisme de groupoïdes profinis  $\Pi_K \longrightarrow \Pi$ , plus un objet de  $\Pi_K$  - ou encore, un morphisme de topos progaloisien  $B_K \longrightarrow B$ , plus un point de  $B_K$ . On peut ainsi fixer un objet de  $\Pi$ , i.e. un point de  $B$ , i.e. un  $\overline{Q}$ , et étudier les  $K$ , avec un plongement de  $k$  (clôture algébrique de  $k$  dans  $K$ ) dans  $\overline{K}$  - mais [1] donner une clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$  qui induise  $\overline{k}$ . Ils sont décrits [2]

On a ainsi plusieurs [1] essentiellement équivalentes, pour décrire par voie profinie une extension  $K$  de type fini de  $k$  :

- 1) Pour le topos étale  $B_K$ , en tant que topos progaloisien sur  $B$  ;

- 2) Pour le groupoïde fondamental  $\Pi_K$  de ce topos (groupoïde de ces points, ou de ses revêtement universel) - en tant que groupoïde au dessus de  $\Pi$  ;
- 3) Pour le groupe extérieur  $E_K$ , au dessus de groupe extérieur  $E$  ou  $\Gamma$  ([]) ;
- 4) En termes d'une clôture algébrique  $\bar{K}/K$  (i.e. en décrivant le couple  $(K, \bar{K})$  plutôt que  $K$ ), par un objet  $\in (\Pi)$  et un homomorphisme de groupes profinis  $E \longrightarrow \Gamma$  ;
- 5) En termes d'une clôture algébrique fixe de , et où  $\Gamma = \Gamma$ , [ ] les couples  $(K, i)$  où  $i : k \longrightarrow$  est un plongement de la clôture algébrique  $\bar{k}$  de dans des : pour le groupes extérieur  $\pi_K = \pi_1(K)$ , sur lequel un sous-groupe ouvert  $\Gamma_K \subset \Gamma$  opère extérieurement par des groupes profinis extérieures  $\pi_1(K) = \Gamma_K$ , sur lesquels un sous-groupe ouvert  $\Gamma$  (non précisé [ ]) de  $\Gamma$ , opère extérieurement ;
- 6) En termes d'une / : pour le groupoïde  $\Pi_{K \otimes}$  [ ] .

Un homomorphisme de corps  $K \longrightarrow K'$  donne <sup>(9)</sup> [ ] à un homomorphisme de groupes extérieures,  $\pi' \longrightarrow \pi$ , où l'image de  $\pi'$  dans  $\pi$  est ouvert [ ] de centralisateur réduit à (1), ce qui implique [ ] que le morphisme de topos  $B_{K' \otimes K} \longrightarrow B_{K \otimes K}$  est déterminé (à isomorphisme unique près) par [ ] homomorphisme extérieur. De plus on a des actions extérieures de  $\Gamma = \Gamma_K \subset \Gamma_{K'}$  sur  $\pi'$  et  $\pi$ , de façon que  $\pi' \longrightarrow \pi$  [ ] et ceci suffit pour reconstitue, d'une part les groupes extérieures  $E, E'$  extensions ("extérieures") de  $\Gamma$  [ ]  $\pi, \pi'$  (et , à équivalence rigide près, les  $B_K, B_{K'}$  et  $B_K \longrightarrow B, B_{K'} \longrightarrow B$ ) et de plus l'homomorphisme d'extensions extérieures  $E \longrightarrow E'$  de  $\Gamma$ .

*Remarque.* — Quand  $\pi \neq (1)$ , i.e.  $K$  pas fini sur , le théorème 1 peut se renforcer, sauf erreur, en écrivant que pour tout sous-groupe  $\pi' \subset \pi$  ouvert dans  $\pi$ ,  $\text{Centr}_E(\pi') = \{1\}$ .

Si  $z$  est se centralisateur, on a  $z \cap \pi = (1)$  d'après le théorème 1, prouvons que l'image de  $z$  dans  $\Gamma_{\bar{K}, K} \subset \Gamma$ , est finie (ce qui [ ] alors, que  $z$  est d'ordre 1 ou 2, et dans le [ ] cas que son image des  $\Gamma$ , est [ ] pour un  $\tau$  de conjugaison complexe).

[ ]  $E$  pour un sous-groupe ouvert assez petit (ce qui revient à poser à une extension finie de  $K$ ) [ ]  $\pi' = \pi$ , alors l'image  $z'$  de  $z$  dans  $\Gamma$  est contenue dans le noyau

---

<sup>9</sup>on suppose pour simplifier qui c'est

de l'homomorphisme  $\varphi : \Gamma \longrightarrow [](\pi)$ . [] je sais prouver que cet homomorphisme est injectif (ou est ramené aussitôt au cas où  $K$  est de degré de [] 1, et on est ramené au cas des  $\pi_1$  d'une courbe algébrique ...)

**Théorème (2).** <sup>(10)</sup> — *Le foncteur  $K \longrightarrow \Pi_K/\Pi$  des extensions de type fini de vers les groupoïdes profinis sur  $\Pi$  est fidèle i.e. si deux homomorphismes  $f, g : K \longrightarrow K'$  définissent des homomorphismes de groupoïdes sur  $\Pi$  isomorphes*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{K'} & \xrightarrow{f^*, g^*} & \Pi_K \\ & \searrow p' \quad \swarrow p & \\ & \Pi & \end{array}$$

(i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs  $\alpha : f^* \longrightarrow g^*$  tel que pour tout objet  $\bar{\eta}'$  de  $\Pi_{K'}$ , le carré

$$\begin{array}{ccc} p f^*(\bar{\eta}') & \xrightarrow[p(\alpha)]{\sim} & p g^*(\bar{\eta}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ p(\bar{\eta}') & \xrightarrow{\sim} & p'(\bar{\eta}') \end{array}$$

est commutatif) alors  $f = g$ .

L'hypothèse sur  $f, g$  signifie aussi, en termes d'une clôture algébrique choisie  $\bar{K}'$  de  $K'$ , donnent via  $f$  []  $g$  deux clôtures algébriques de [] l'on peut trouver un isomorphisme [] celui-ci <sup>(11)</sup> ([] d'identifier  $E_{\bar{K}/K}$  et  $E_{\bar{K}'/K}$ ) de telle façon que les deux homomorphismes

$$f^*, g^* : E_{\bar{K}', K'} \longrightarrow E_{\bar{K}, K}$$

sont égaux. C'est sans doute plus claire en termes d'une clôture algébrique fixée de , en disant que les deux homomorphismes  $f^*, g^* : E_{K'} \longrightarrow E_K$  de groupes profinis extérieures (avec opérateurs  $\Gamma_{\bar{Q}, Q}$ ) sont égaux.

Écrivons comme []  $K = \varinjlim A_i$ , donc  $\eta = \text{Spec}(K) = \varprojlim U_i$ , on a (en termes d'un point géométrique quelconque  $\bar{\eta}$  de  $\text{Spec } K$  i.e. en termes d'un  $\bar{K}$ )

$$\pi_K = \varprojlim_i \pi_1(\bar{U}_i, \bar{\eta}), \quad \text{où} \quad \bar{U}_i = U_i \otimes_K \bar{K}$$

<sup>10</sup>En fait, ce théorème n'est pas spécial à - il [] avait sur un corps de [] quelconque est en fait

<sup>11</sup>induisant "l'identité" sur [] clôtures algébriques []

et il suffit de voir que pour tout  $i$ ,  $f|_{A_i} = g|_{A_i}$  [] le fait que  $\pi_1(f_i^*) = \pi_1(g_i^*) : \pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(U_i)$  (comme homomorphisme de groupes extérieures. On [] fixé, on a  $K' = \varinjlim A_j$ , où les  $A_j$  contiennent  $f_i(A_i)$  et  $g_i(A_i)$ , donc

$$\pi_{K'} = \varprojlim_j \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta}'), \quad \text{avec} \quad \overline{V}_j = \text{Spec}(A_j) \otimes_K.$$

Notons (prenant les  $V_j$  réguliers) que les homomorphismes de transition des le système projectif de  $\pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta}')$  sont surjectifs - donc  $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta}')$  est surjectif, ce qui implique que l'égalité de  $f^*$  et  $g^* : \pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(\overline{U}_i)$  (comme homomorphismes extérieures) implique celle de  $\pi_1(\overline{V}_j) \longrightarrow \pi_1(\overline{U}_j)$ .

Donc l'égalité  $f_i = g_i$  (d'où  $f = g$ ) est conséquence de résultat plus général). “[] géométrique”

**Corollaire (1).** — Soient  $X, Y$  des schémas de type fini réduits 0-connexes sur un corps algébriquement close  $k$ , et  $f, g : X \longrightarrow Y$  deux morphismes, on suppose que  $\pi_1(f), \pi_1(g) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$  sont égaux (en fait [] extérieurs) Alors

- a) Si  $Y$  se plonge par un  $i : Y \longrightarrow G$  un groupe algébrique commutatif extension d'une V.A par un tore, il existe un  $u \in Y$  (unique) tel que  $g(x) = f(x) + u$  et pour tout  $x \in X(h)$ , i.e.  $(i \circ g) = \tau_u \circ (i \circ f)$  ( $\tau_u$  [])
- b) Si  $Y$  est une variété élémentaire d'Artin, avec fibres successives des courbes abéliennes, et  $X$  [] et  $f$  ou  $g$  est dominant, alors  $f = g$ .

**Démonstration.** — a) L'unicité de [] est [] - i.e. il suffit <sup>(12)</sup> d'examiner les actions de  $\pi(f), \pi(g)$  sur les groupes abelianisés dans  $\pi_1$ , et même sur leurs composantes  $l$ -adiques. Prenant le Jacobienne généralisée de type “extension d'une V.A par une tore” de  $X$ , on sait que

- 1°) Les morphismes  $f : X \longrightarrow G$  tel que  $f(\alpha) = 0$  se factorisent de façon unique par  $X \xrightarrow{\text{can}} J \xrightarrow{\varphi} G$  avec  $\varphi$  un homomorphisme de groupes algébriques ;
- 2°) Un tel homomorphisme  $\varphi$  est connu quand on connaît ses actions sur les  $H_1(, \mathbb{Z})$  ce qui [] à la connaissance sur les points d'ordre [] que soit  $v$  - on ceux-ci sont denses ...

---

<sup>12</sup>En fait, dans a) il suffit de supposer que



$$3^\circ) H_1(X, \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H_1(J, \mathbb{Z}_l).$$

De ceci, on conclut (par 3°)) que  $H_1(f) = H_1(g)$  implique (si  $f = \varphi \circ \text{can}$ ,  $g = \psi \circ \text{can}$ )  $H_1(\varphi) = H_1(\psi)$ , donc par 2°) que  $\varphi = \psi$ , donc  $f = g$  []

Notons que l'on

b) on va pourtant prouver l'égalité sans l'hypothèse anabéliennes

[] L'hypothèse que  $\pi_1(f) = \pi_1(g)$  signifie donc qu'il existe  $\alpha \in \pi_1(Y)$ , tel que

$$\pi(f')(\gamma) = [] \pi(j)(\gamma)$$

pour tout  $\gamma \in \text{Im}(\pi_1(X) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(U))$ . [] cette image est un sous-groupe ouvert de  $\pi_1(U)$  ([] dominant !). Donc on est ramené à ceci: Soit  $U$  ouvert  $\neq \emptyset$  de  $Y$ ,  $u \in G$ , tels que  $\tau_u U \subset Y$  [et tels que (désignant par  $f, f'$  les morphismes  $y \rightarrow y$  et  $y \mapsto y$  en de  $U$  dans  $Y$ )  $\pi_1(f)$  et  $\pi_1(f')$  [] extérieurement en un sous-groupe ouvert de  $\pi_1(U)$ ] alors  $f = f'$  via  $u =$

Finalement, je [] que [] pas à la prouve par voie géométrique [] arithmétique.

**Corollaire (2).** — *La condition  $f = g$  de corollaire précédent, est valable si on suppose que  $K$  est de caractéristique 0,  $X$  [] est dans l'une des hypothèses suivantes*

- c) *l'image de  $\pi_1(F)$  est un sous-groupe ouvert de  $\pi_1(Y)$ ,  $Y$  est une variété élémentaire d'Artin anabélienne ;*
- d) *l'image de  $\pi_1(X)$  par  $\pi_1(f)$  a un centralisateur dans  $\pi_1(Y)$  réduit à (1), et  $Y$  se plonge dans un groupe algébrique extension d'une VA par un tore.*

Comme le centralisateur [] de un sous-groupe ouvert de  $\pi_1(Y)$  ( $\pi_1(Y)$  étant extension successive de groupes profinis fibres anabéliennes) est réduit à (1), comme un a un<sup>13</sup> plus haut, le cas c) est un cas particulier de d), [] dans le cas d), []  $X$  pour un ouvert d'Artin []

La situation  $X, Y, f, g$  provient, par extension de corps de [] d'une situation analogue sur un corps  $K$  extension de type fini de . Soit  $\bar{K}$  la clôture algébrique de  $K$  dans  $k$  [] de  $K$  à  $\bar{K}$ . On a donc [] satisfaisant la condition d) avec [] trivial.

---

<sup>13</sup>il faut

Mais ces hypothèses impliquent que les extensions  $E(X/K) = \pi_1(X)$ ,  $E(Y/K) = \pi_1(Y)$  de  $E_{\bar{K},K}$  [], ainsi que les homomorphismes [] induits, sont reconstruite à partir de [] et de l'action extérieure de  $E_{\bar{K},K}$  sur ces groupes. On va montrer maintenant le

**Corollaire (3).** — Soient  $X, Y$  deux schémas de type fini sur un corps  $K$  extension de type fini de  $\mathbb{Q}$ , On suppose que  $Y$  se plonge dans une extension d'une V.A. par un tore,  $X$  réduit,  $X, Y$  [] 0-connexe. Soit  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ , d'où des extensions "extérieures"  $E_{X,K}, E_{Y,K}$  de  $E_{\bar{K},K} = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  []  $\pi_1(\bar{X}), \pi_1(\bar{Y})$ , et pour tout morphisme  $f : X \longrightarrow Y$ , un morphisme [] de  $E_{X,K}$  []  $E_{Y,K}$ .

Soient  $f, g : X \rightrightarrows Y$  tels que [] - i.e. [] soient conjugués pour un élément de  $\pi_1(Y)$  [] alors  $f = g$ .

En fait, il suffit même que ls homomorphismes d'extensions [] soient égaux, []  $f = g$ . (C'est à dire, [] des hypothèses *anabéliennes*, des hypothèses [] géométriques sue les actions de [], [] on peut laisser tomber les aspects anabéliens [] sur les aspects abéliens []) [].

Il suffit de voir que [] à noyau abélien associée - l'hypothèse implique que  $f(x)$  et  $g(x)$  définissent le même donne de conjugaison de scindages. Donc il suffit maintenant de prouver le

**Théorème (3).** — Soit  $X$  un schéma de type fini sur un corps  $K$ , extension de type fini de  $\mathbb{Q}$ , on suppose que  $X$  est géométriquement 0-connexe et se plonge dans une extension d'une V. A. par un tore (p. ex.  $X$  est une variété élémentaire d'Artin, à fibres []).

Considérons une clôture algébrique  $\bar{K}/K$  et l'extension extérieure correspondant  $E_{X/K}$  dans  $E_{\bar{K}/K} = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  par  $\pi_1(\bar{X})$  ( $\bar{X} = X \otimes_K \bar{K}$ ) et l'extension déduite de  $\tilde{E}_{X/K}$  de  $E_{\bar{K}/K}$  par  $\pi_1(\bar{X})_{ab}$ . Considérons les applications

$$(*) \quad X(K) \longrightarrow \text{Classes de } \pi_1(\bar{X})\text{-conjugaison de scindages de } E_{X/K} \text{ sur } E_{\bar{K}/K}$$

$$(**) \quad X(K) \longrightarrow \text{Classes de conjugaison de scindages}$$

Ces applications sont *injectives*.

Démonstration. — Il suffit de le [] pour le seconde application, et on est ramené au cas où  $X$  est lui-même un groupe algébrique  $G$ , extension d'une V. A. par une tore. Alors l'application est un homomorphisme de groupes

$$(16) \quad G(K)$$

obtenue ainsi. On considère pour tout [] la suite exacte []

$$0 \longrightarrow [] \longrightarrow G[] \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

[] suite exacte de cohomologie

[]

et passant à la limite, on trouve

$$0 \longrightarrow$$

le composé de (16) avec l'homomorphisme canonique

[]

compte tenu de

[]

[] que l'homomorphisme induite par

[]

dont le noyau [] est fermé des éléments de  $G(K)$  *infinitement divisibles* dans . []  
ici  $K$  étant un corps [] de type fini le théorème de Mordell-Weil [] que  $G(K)$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini - donc  $G(K) \longrightarrow \varprojlim G(K)_n$  est injectif. Donc []

Remarque. —

[]  $x$  dans le “revêtement universel abélien”  $\tilde{G}$  de  $G$  construit comme  $\varprojlim$  des revêtements  $G(n) \simeq G$  de  $G$ , donnée, []. L'énoncé dit que si [] est trivial - i.e. si [] mais dans ce cas [] soit [] étales.

est cependant possible que [] ...

[] aux conditions de de Corollaire 1, b), [] avec les groupes fondamentaux [], on trouve que

[]

*Complément.* — Retour sur une démonstration *géométrique* du Théorème 2, Corollaire 1 b). On peut supposer que ce est la Jacobienne généralisée de  $Y$ , et il suffit de montrer le

Lemme. — Soit  $Y$  une variété élémentaire d'Artin anabélienne (sur  $K$  algébriquement clos),  $Y \hookrightarrow J_Y^1$  son plongement dans sa Jacobienne généralisée,  $u \in J_Y^0(k)$  et  $U$  un ouvert non vide de  $Y$ , tels que  $U + u \subset Y$ . Alors  $u = 1$ , ou encore: l'application  $x \mapsto x + u$  de  $U$  dans  $Y$  est l'identité.

Par dévissage, on se ramène au cas où  $Y$  est une courbe. Supposons le d'abord complète, de sorte que  $U + u \subset Y$  implique  $Y + u \subset Y$  - alors la [1] est bien connu (et résulte par exemple de la formation des points fixes, qui implique que [1] ce qui [1]  $J_Y^0(k)$  est nulle. Pour que  $x + u$  soit de la forme  $y$  ( $y \in Y$ ) il faut [1] que  $u \in \alpha$  et  $y$  aient même image dans  $J_Y^1$ , ce qui [1] Je veut mieux, dans le cas général, présenter les choses sous forme homologique. Considérons les deux morphismes  $U \hookrightarrow iY$  induisant et  $J : U \rightarrow Y$  induit par lui, je dis que  $H_1(i) = H_1(j)$ , ou ce qui revient au même, puisque  $Y \xrightarrow{\alpha} J'_Y$  induit un isomorphisme  $H_1(\alpha) : H_1(Y) \rightarrow H_1(J'_Y)$ , que

Si le genre est 0, on en concluait (puisque [1]. Dans le cas de genre 1, on en concluait maintenant que l'image de un des  $J_Y^0$  est égale à 1, et on [1] comme précédemment. [1]

## II. La question de pleine fidélité

Soient  $K, K'$  deux extensions de type fini de  $\mathbf{Q}$  - est-il vrai que tout  $\Pi_{\mathbf{Q}}$ -homomorphisme  $\Pi_{K'} \rightarrow \Pi_K$  provient d'un homomorphisme de corps  $K' \rightarrow K$ ? On est ramené aussitôt au cas où - une clôture algébrique  $\overline{\mathbf{Q}}$  de  $\mathbf{Q}$  étant choisie, d'où un  $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$  -  $K$  et  $K'$  ont des sous-corps  $k, k'$  (clôture algébrique de  $\mathbf{Q}$  dans  $K$  resp.  $K'$ ) isomorphes, avec des plongements  $k, k' \rightarrow \mathbf{Q}$  de même image, que  $E_K$  et  $E_{K'}$  peuvent être considérés comme des extensions d'un même groupe  $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$  par  $\pi_K$  resp.  $\pi_{K'}$ . La question est alors si *tout* homomorphisme de  $\pi_{K'}$  dans  $\pi_K$  qui commute à l'action de  $\Gamma$ , est induit par un homomorphisme  $K \hookrightarrow K'$ . Pour construire ce dernier, il faudrait donc avoir une idée comment reconstruire  $K, K'$  à partir des extensions  $E_K, E_{K'}$ , ou encore à partir des groupes profinis extérieurs avec opération de  $\Gamma$  dessus. Et on pressent que le Théorème 3 du paragraphe précédent (appliqué notamment à  $\mathbb{P}_K^1$  convenablement troué...) pourrait donner la clef d'une telle construction.

Bien sûr, des homomorphismes extérieurs quelconques  $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$  n'auront pas de sens géométrique - l'idée est que les opérations du groupe  $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$  dessus soit si draconienne, qu'il n'est possible de trouver un homomorphisme extérieur qui y commute que par voie géométrique - par des plongements de corps. Donc il est essentiel ici que le corps de base ne soit pas quelconque, mais un corps tel que  $\mathbf{Q}$  (ou, ce qui revient manifestement au même, une extension de type fini de  $\mathbf{Q}$ ). Encore faut-il se borner aux homomorphismes  $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$  dont on décrète d'avance que l'image soit ouverte - sinon, prenant pour  $\pi_{K'}$  le groupe unité (i.e.  $K' = k$ ), on trouverait un homomorphisme  $K \longrightarrow k$  correspondant! Il faut pour le moins, pour travailler à l'aise à partir d'homomorphismes  $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$  (au lieu de  $E_{K'} \longrightarrow E_K$ ) supposer que le centralisateur dans  $\pi_K$  de l'image de tout sous-groupe ouvert de  $\pi_{K'}$  soit réduit à  $\{1\}$  - on dira que l'homomorphisme en question est *anabélien* alors - de telle façon qu'à partir de cet homomorphisme (commutant à  $\Gamma$ ) on reconstitue l'homomorphisme d'extensions  $E_K$  et  $E_{K'}$ , qui est l'objet vraiment essentiel. Par exemple, si justement  $K' = k$ , donc  $E_{K'} = \Gamma$ , ce qui nous intéressera, ce ne seront pas le  $\Gamma$ -homomorphismes de  $\pi_{K'} = \{1\}$  (!) dans  $\pi_K$ , mais bien les *sections* de  $E_K$  sur  $\Gamma$ .

Question-conjecture. — Soient  $K, K'$  deux corps, extensions de type fini de  $\mathbf{Q}$ , et un morphisme  $B_{K'} \longrightarrow B_K$  de topos sur  $B_{\mathbf{Q}}$ .

Les conditions suivantes sont-elles bien équivalentes [?]

- (a) L'homomorphisme provient d'un plongement de corps  $K \hookrightarrow K'$ .
- (b) L'image de l'homomorphisme extérieur  $E_{K'} \longrightarrow E_K$  a une image ouverte.
- (c) L'homomorphisme extérieure  $E_{K'} \longrightarrow E_K$  est anabélien<sup>14</sup>.

**NB.** On sait que (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c) et que (b) équivaut à  $\pi_K \longrightarrow \pi_{K'}$  a une image ouverte.

Une réponse affirmative impliquerait que si  $\deg_{\text{tr}} K'/\mathbf{Q} < \deg_{\text{tr}} K/\mathbf{Q}$ , alors il n'y a pas de tel homomorphisme  $E_{K'} \longrightarrow E_K$ , compatible avec les projections dans

---

<sup>14</sup>(c) n'est pas assez fort, cf. plus bas ...

$E_Q = \Gamma_Q$ , en particulier, il en résulterait que toute section de  $E_K$  sur  $\Gamma = \text{Im}(E_K \longrightarrow \Gamma_Q)$ , ou sur un sous-groupe ouvert  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ , a un centralisateur non-trivial dans  $E_K$  – et comme son centralisateur dans  $\Gamma$  est réduit à  $\{1\}$ , cela impliquerait que pour toute telle section, on aurait (si  $\pi_K \neq 1$ )  $\pi_K^{\Gamma'} \neq \{1\}$ . Or je m'aperçois que ceci est sans doute faux (cf. plus bas, numéro 3) – il faudrait renforcer (c) ci-dessus en [ : ]

(c') L'homomorphisme  $E_{K'}^\circ \longrightarrow E_K$  induit par  $E_{K'} \longrightarrow E_K$  est anabélien (où  $E_{K'}^\circ$  est le noyau de l'homomorphisme composé

$$E_{K'} \longrightarrow \Gamma_{\overline{Q}/Q} \xrightarrow{\chi \text{ caractère cyclotomique}} \wedge$$

$Z^* \rangle$ ).

Mais pour voir que cette condition est *nécessaire* pour que l'homomorphisme soit géométrique, il faudrait vérifier que pour tout sous-groupe ouvert  $E'$  d'un  $E_K$ , le centralisateur dans  $E_K$  (non seulement de  $E'$  lui-même, mais même de  $E'^\circ$ ) est réduit à 1 – ce qui résulte de la démonstration du Théorème 1, et du fait<sup>15</sup> que pour tout sous-groupe ouvert  $\Gamma'$  de  $\Gamma = \Gamma_Q$ , le centralisateur (non seulement de  $\Gamma'$ , mais même) de  $\Gamma'^\circ$  dans  $\Gamma$  est réduit à  $\{1\}$ .

Donc, la conjecture initiale revue et corrigée donné la

Conséquence (conjecturale). — *Pour tout section de  $E_K$  sur un sous-groupe ouvert  $\Gamma'$  de  $\Gamma_Q$ , de sorte que  $\Gamma'$  opère (effectivement) sur  $\pi_K$ , on a (si  $K$  pas algébrique sur  $Q$ , i.e.  $\pi_K \neq \{1\}$ )  $\pi_K^{\Gamma'^\circ} \neq \{1\}$ .*

À vrai dire, à certains égards les  $\Gamma_K$  sont des groupes trop gros pour pouvoir travailler directement avec, il y a lieu de regarder  $\Gamma_K$  comme un  $\varprojlim$  de groupes  $\Gamma_{U/Q}$  associés à des modèles affines de  $K$  – et on s'intéressera plus particulièrement à des modèles affines qui sont des variétés élémentaires – plus généralement, qui sont des  $K(\pi, 1)$  (au sens profini...). Il est possible qu'il faille d'ailleurs, dans l'énoncé de la conjecture de départ, prendre un homomorphisme extérieur  $E_{K'} \longrightarrow E_K$  dont on suppose d'avance (en plus de l'hypothèse anabélienne et de la compatibilité avec les homomorphismes dans  $\Gamma_Q$ ) qu'elle est compatible avec les *filtrations* de ces groupes, associés à ces modèles ("filtration modélique" (grossière)).

---

<sup>15</sup>à vérifier !

Nous allons alors, au même temps que des extension de type fini de  $\mathbf{Q}$ , les homomorphismes entre tels, et homomorphismes de groupes profinis associés, étudier la situation analogue pour des “modèles” élémentaires anabéliens, voire des modèles  $K(\pi, 1)$  généraux (On peut aussi regarder de tels modèles sur un corps  $K$ , extension de type fini de  $\mathbf{Q}$  – mais passons pour le moment sur cette situation mixte, un peu bâtarde...). Si  $U, V$  sont des tels modèles, tout morphisme  $V \longrightarrow U$  définit un morphisme de topos galoisiens sur  $B_{\mathbf{Q}}$ ,  $B_U \longrightarrow B_V$ , et si  $U$  est élémentaire anabélien, ce morphisme est connu quand on connaît seulement  $H_1(B_{\overline{U}}, \mathbf{Z}_{\ell}) \longrightarrow H_1(B_{\overline{V}}, \mathbf{Z}_{\ell})$  – ce qui est beaucoup moins que la classe d’isomorphie d’homomorphismes de  $B_{\mathbf{Q}}$ -topos. (En fait, sans hypothèse anabélienne sur  $V$ , dès que  $V$  se plonge dans une variété anabélienne,  $f$  est connu quand on connaît son action sur les topos étales...). Mais quels sont les homomorphismes  $B_U \longrightarrow B_V$ , ou  $E_U \longrightarrow E_V$ , qui correspondent à des morphismes de modèles ? Avec un peu de culot, on dirait [ : ]

*Conjecture fondamentale. — Soient  $U, V$  deux schémas de type fini sur  $\mathbf{Q}$ ,  $V$  séparé régulier,  $U$  une variété élémentaire anabélienne sur une extension finie de  $\mathbf{Q}$ . Considérons un morphisme  $B_V \longrightarrow B_U$  des topos étales sur  $\mathbf{Q}$  – ou, ce qui revient au même, un homomorphisme de groupes extérieurs*

$$f : E_V = \pi_1(V) \longrightarrow E_U = \pi_1(U),$$

*compatible avec les homomorphismes extérieurs dans  $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \pi_1(\mathbf{Q})$ <sup>16</sup>.*

*Conditions équivalentes [ : ]*

- (a) *Cet homomorphisme provient (à isomorphisme près) d’un morphisme  $V \longrightarrow U$  sur les modèles (qui est donc uniquement déterminé)*
- (b)  *$f|E_V^{\circ}$  est anabélien, i.e. l’image par  $f$  de tout sous-groupe ouvert de  $E_V^{\circ}$  a un centralisateur réduit à 1.*

Pour la nécessité de (b), on est ramené aussitôt au cas où  $V$  est réduit à un point, où cela se réduit à la

---

<sup>16</sup>**NB** Pour l’unicité, on est ramené aussitôt au cas où  $V$  lui-même est un modèle élémentaire anabélien, si ça nous chante.

Conséquence conjecturale. — Soit  $\Gamma' \subset \text{Im}(E_U \longrightarrow \Gamma_Q)$  un sous-groupe ouvert, correspondant à un corps  $k$  fini sur  $\mathbf{Q}$ , considérons un  $k$ -point de  $U$ , d'où un relèvement  $\Gamma' \longrightarrow E_U$ , de sorte que  $\Gamma'$  opère sur  $\pi_U$ . Ceci posé, on a  $\pi_U^{\Gamma'} = \{1\}$ .

On étudiera par la suite les relations entre cette “conséquence conjecturale”, et la précédente (d'apparence opposée !) concernant les  $E$ .

La conjecture fondamentale sur les modèles implique la conjecture fondamentale sur les corps, à condition de prendre soin, dans cette dernière, de se limiter aux homomorphismes compatibles aux filtrations modéliques.<sup>17</sup>

Plus généralement, prenant maintenant pour  $U$  des schémas qui sont des  $\varprojlim$  des modèles élémentaires anabéliens, avec morphismes de transition des immersions ouvertes affines (pour pouvoir passer à la  $\varprojlim$  dans la catégorie des schémas), pour  $V$  un schéma  $\varprojlim$  de schémas séparés réguliers de type fini sur  $\mathbf{Q}$  (morphismes de transition immersions ouvertes affines sans plus). Alors les morphismes dominants de schémas  $V \longrightarrow U$  doivent correspondre aux homomorphismes extérieurs  $E_V \longrightarrow E_U$  compatibles avec les projections dans  $E_Q = \Gamma_Q$ , et telle que l'image soit ouverte. Par exemple, on pourrait prendre pour  $U, V$  les spectres d'anneaux locaux réguliers essentiellement de type fini sur  $\mathbf{Q}$ .

—

Cette conjecture fondamentale (éventuellement revue et corrigée en cours de route !) étant admise, la question qui se pose ensuite est de déterminer les topologies (pro)galoisiennes sur  $B_Q$  qui proviennent de modèles élémentaires anabéliens – ou encore, les  $\pi_U = \pi_1(\overline{U})$  de tels modèles étant connus, de déterminer quelles sont [les] actions extérieures possibles de sous-groupes ouverts  $\Gamma$  de  $\Gamma_Q$  sur de tels groupes fondamentaux – et éventuellement question analogue pour d'autres types de groupes profinis, correspondant à des  $K(\pi, 1)$  qui se réaliseraient par des variétés algébriques (sur  $\mathbf{C}$ , disons), mais pas par des variétés élémentaires. (J'ai en vue autant des variétés modulaires, tels que, notamment, des variétés modulaires pour les courbes algébriques...) à partir de là, on reconstruirait par recollement, en termes profinis, tous les schémas lisses sur un corps de type fini sur  $\mathbf{Q}$  (ou plutôt la

<sup>17</sup> Et il vaut mieux se borner à l'équivalence de (a) et (b) – la condition (c) avec les centralisateurs risque de passer mal à la  $\varprojlim$ .



catégorie de ceux-là), ou plus généralement, sur un corps quelconque – puis, sans doute, par “recollement”, la catégorie des schémas localement de type fini sur un  $K$  – tant [?] des [varier?] la catégorie des fractions qui s’en déduit en rendant inversibles les homéomorphismes universels...

Les réflexions précédentes suggèrent aussi des énoncés comme le suivant : Pour un schéma de base  $S$  localement noethérien donné<sup>18</sup>, les foncteurs  $X \longrightarrow X_{\text{ét}}$ , allant de la catégorie des schémas réduits localement de présentation finis sur  $S$ , vers la 2-catégorie des topos au-dessus de  $X_{\text{ét}}$ , est 1-fidèle (deux homomorphismes  $f, g: X \rightrightarrows Y$  tels que les morphismes de topos  $f_{\text{ét}}, g_{\text{ét}}: X_{\text{ét}} \rightrightarrows Y_{\text{ét}}$  au-dessus de  $\text{Set}$  soient isomorphes, sont égaux) et même peut-être *pleinement fidèle*, quand on passe à la catégorie des fractions de  $(\text{Sch}_{\text{l.t.f.}})/S$  obtenue en rendant inversibles les homéomorphismes universels... Expriment ceci par exemple pour les automorphismes d’une courbe algébrique propre sur une extension finie de  $\mathbf{Q}$ , on retrouverait le “fait” que tout automorphisme extérieur de  $E_K$  ( $K$  le corps des fonctions de  $X$ ) qui respecte la structure à lacets [?] et qui commute à l’action de  $\Gamma$ , provient d’un automorphisme de  $X$ .

### III. Étude des sections de $E_U$ sur $\Gamma$

Soit  $U$  un schéma connexe lisse de type fini géométriquement 0-connexe sur le corps  $K$ , d’où  $E_U \longrightarrow E_K$ , et <sup>(19)</sup> on se propose d’étudier les sections mod  $\pi_{U,K}$ -conjugaison - plus généralement, on [ ] un même topos [ ] les sections  $E'_K \longrightarrow E_U$ , où  $E'_K$  est un sous-groupe ouvert de  $E_K$  (ce qui signifie que [ ] fait une extension de base finie sur  $K$ ). Si  $K$  de type fini sur le corps  $\mathbf{Q}$  et si  $U$  se plonge dans un schéma sur un groupe commutatif rigide l’application

$$U(K) \longrightarrow [ ] \text{ d'isomorphisme section de } B_U \text{ sur } B_K [ ] \pi_{U,K} \text{—conjugaison de sections de } E_U \text{ sur } E_K$$

est injectif. On va examiner d’entre façons “géométriques” de trouver des sections.

Supposons d’abord que  $U$  soit une courbe algébrique, que ne soit pas de type  $(0,0)$  ou  $(0,1)$ , i.e.  $\pi_1(\overline{U}) = \pi_{U,K} \neq \{0\}$ . On a que pour tout  $i \in \widehat{\overline{U}} \setminus \overline{U}$  (point à

<sup>18</sup>  $S$  de caractéristique 0?

<sup>19</sup> On a choisie un revêtement universel  $\tilde{U}$  de  $U$  pour définir  $X$ , et  $E_U, E_K$ , et  $E_U \longrightarrow E_K$ .

l'infini) le groupe de lacets  $L_i$  fournit un scindage (des  $[]$  i.e.  $[]$ ) en prenant son centralisateur  $Z(L_i)$  dans  $E$ , d'où

$$(2) \quad 1 \longrightarrow L_i \longrightarrow Z(L_i) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

et en prenant les scindages de cette extension. Il ne existe, p. ex. définis par une  $[]$  de  $\overline{O}_{\widehat{U},i}$ . L'un des données de conjugaison des scindages de (2) est un  $[]$

(3)

et  $[]$  injectivement de l'un des données de  $\pi$ -conjugaison de scindages.

*Proposition.* — <sup>(20)</sup> On suppose  $(g, v) \neq (0, 0), (0, 1)$  i.e.  $\pi_{\overline{U}} = \pi_{U,K} \neq (1)$ . Alors les classes de  $\pi$ -conjugaison scindage de (1) définis pour les scindages de (2) sont distinctes de celles associés aux points de  $U(K)$ . Si de plus  $(g, v) \neq (0, 2)$ , i.e. si  $[]$  est dans le cas anabélien, alors les classes de  $\pi$ -conjugaison de scindages de (1), associés à des scindages de (2) pour deux indices  $i = i_1$  et  $i = i_2$  distincts, soient distincts.

La première assertion s'obtient en "bordant" le trou  $i$ , alors la section envisagé devient la section de  $U \cup \{i\} = U'$  associée au point  $i$ , et celle est donc distincte de celle associée aux  $[]$  points de  $U'$ , i.e. aux points de  $U$  - a fortiori  $[]$  pour le sous-groupe  $[]$  par  $L_i$ . On  $[]$  de même pour  $[]$  que les  $[]$  de scindages associées a un  $L_{i_1}$  et un  $L_{i_2}$ ,  $i_1 \neq i_2$ , sont distinctes,  $[]$  sauf le cas de type  $(0, 3)$   $[]$  on tombe sur le type  $(0, 1)$ , où  $[]$  de résultat d'injectivité. Mais on peut  $[]$ , à condition d'admettre que pour un scindage de (2), faisant opérer  $\Gamma$  sur  $\pi$ , on a

$$(3) \quad \pi^{\Gamma^\circ} = L_i$$

(donc  $\pi^\Gamma = (1)$ , d'ailleurs) - résultat que on  $[]$  plausible.  $[]$  que le  $[]$  de conjugaison de sections détermine le  $[]$  de conjugaison de  $L_i$ , donc  $i$ .

**Conjecture (A).** — Soit  $U$  courbe algébrique anabélienne géométrique 0-connexe sur corps  $K$  de type fini sur  $\mathbf{Q}$ . Alors toute section de (1) est d'une des deux types précédents, i.e. soit définie par un point de  $U(K)$  <sup>21</sup>, Sont pas une section d'une extension (2), avec  $i \in I(\pi)^\Gamma$  i.e.  $[]$  un point de  $\widehat{U} \setminus U$ , rationnel sur  $K$ .

<sup>20</sup>C'est démontré sauf pour le type  $(0, 3)$   $[]$

<sup>21</sup>Il y a  $[]$  plus  $[]$

Si on obtient cette conjecture, alors on va conclurait, pour passage à la limite, en considérant le corps de fonctions  $L$  de  $U$  et  $E_L \longrightarrow E_K$  ( $E_L$  peut être considéré comme un groupe à lacets “infini” (avec une infinité des classes de sous-groupes lacets  $L_i...$ ) que tout scindage de cette extension provient d’une scindage d’une extension de type (2), avec  $i \in I$   $\Gamma = X(K)$  ( $X = \hat{U}$ ). Les classes conjugués de tels scindages se grouperaient donc pour paquets (en regardent les centralisateurs des sous-groupes image de  $\Gamma^\circ$  par ses sections,) et un  $[]$  ensemble des scindages qui est donc  $[](\Gamma^\circ)$  conjugués (même s’il ne sont eux-mêmes conjugués). Donc on retrouve  $[]$  une description de  $X(K)$  (donc ainsi de  $X(K')$ ) pour toute extension finie  $K'$  de  $K$ ) en termes de l’extension  $E_L$  de  $E_K$  par  $\pi_{L,K}$ , au même temps qu’une  $[]$  de reconstitue les  $U = X \setminus I$   $[]$

Donc en fait c’est la structure  $E_L \longrightarrow E_K$  qui est le plus riche a priori, et de loin plus commode pour le genre 0 et 1, où le considération des  $U$  de type  $(g, v)$  ( $2g + v \geq 3$ )  $[]$  le groupe “continue” d’automorphismes... La forme “modélisque” de la conjecture précédente revient à la forme “birationnelle”, quand on y précise cette  $[]$  en disant que tout scindage de  $E_U \longrightarrow E_K$  se revient au un scindage de  $E_L \longrightarrow E_K$  (on ainsi,  $[]$  un scindage de  $E_V \longrightarrow E_K$ , si  $V$  est un modèle  $[] U$ ).

On ne  $[]$  les conjectures précédentes (sous forme modélisque, disons) sous une forme plus géométrique, en introduisant, un même topos qu’un revêtement universel  $\tilde{U}$  de  $U$ ,  $[] X'$  de  $X$   $[] \tilde{U}$  (où  $X = \hat{U}$ ). (NB je m’abstient de le noter  $\tilde{X}$ ,  $[]$  il n’est pas  $[]$  sur  $X$ ). Notons que pour  $i \in I = \overline{X} - \overline{U}$ , l’un des  $L_i$  des  $\overline{\pi} = \pi(\overline{U})$   $[]$  en correspondance 1-1 avec  $[]$  fibre  $X'_i$  de  $X'$  au dessus de  $i$ .

$$X \longrightarrow \overline{X} \longrightarrow X'$$

Donc  $X'$  peut être considéré comme le  $[]$  de  $\tilde{U}$ , et de  $X' \setminus I =$  ensemble des sous-groupes lacets de  $\overline{\pi}$ , qui apparaissent ainsi comme des “points à l’infini” des revêtements universel  $\tilde{U}$ . D’ailleurs  $E_U$  s’interprète comme le groupe de  $[]$  schéma  $\tilde{U}$   $[]$ , et  $E_U \longrightarrow E_K$  comme l’homomorphisme de passage au quotient  $[]$  (NB.  $\overline{K}$  s’identifie a la clôture algébrique de  $K$  dans  $[]$ , donc  $E_U$  opère sur  $\text{Spec } \overline{K}$  de façon  $[]$ ) Une section de  $E_U$  sur  $E_K$  est donc une action de  $E_K$  sur  $\tilde{U}$ , compatible avec son action sur  $\tilde{U}$   $[]$  convenable (sans doute  $[] \overline{U}_i$  finis sur  $\overline{U}$  entre  $\overline{U}$  et  $\overline{U}...$ ). Considérons alors la

Conjecture (B). <sup>(22)</sup> — Toute telle action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{U}$  admet dans  $X' = \widehat{\tilde{U}}$  un point fixe et un seul.

Ceci signifie alors

a) S'il y a un point fixe à distance finie i.e.  $\tilde{X} \in \tilde{U}^T$ , alors

1°) L'image de  $\tilde{X}$  dans  $U$  est uniquement déterminée - c'est essentiellement le Théorème 3 dans §1 (des  $\alpha$  points distincts de  $U(K)$  définissent des classes de conjugaison des scindages distinctes) et

2°) <sup>23</sup>  $\pi^\Gamma = (1)$  (i.e. il n'y a pas d'autre point fixe dans  $\tilde{U}$  sur ce même  $x \in U(K)$ ), et []

3°) il n'y a pas au même temps ce point fixe à l'infini - i.e. il n'existe pas de  $L_i$  normalisé par  $\Gamma$ , i.e. une scindage des [] type n'est pas au même temps des deuxièmes (fait que nous avons et oublié directement, précédemment).

D'autre part, dans le cas de points fixes à l'infini, l'unicité de l'image dans  $X$  signifie qu'une même action effective [] à la fois un  $L_i$  et [] ( $v \neq J$ ) - Fait [] établi sauf dans le cas  $(g, v) = (0, 3)$  - et l'unicité au dessus d'une  $i \in I$  fixé signifie que le  $L_i$  ( $i$  fixé) normalisé par  $\Gamma$  est unique, ce qui est un affaiblissement de la relation

$$L_i = \text{Cen} \pi^{\Gamma^\circ}$$

pour ces opérations, conjecture plus haut.

En fait, je conjecture que dans la conjecture B, il est même vrai que  $\Gamma^\circ$  agissant sur  $X' = \widehat{\tilde{U}}$  a un point fixe et un seul (ce qui est plus haut, [] point fixe [] nécessairement fixe pour  $\Gamma$ ). Ceci implique dans le cas des points fixes à distance finie, qu'est alors  $\pi^{\Gamma^\circ} = (1)$ , comme il se devrait en général [] et dans le cas de points fixes à l'infini, que

$$\pi^{\Gamma^\circ} \subset \text{Norm}_\pi(L_i) = L_i$$

donc le []  $\pi^{\Gamma^\circ} = L_i$  [] !

---

<sup>22</sup>et même l'action induit de  $\Gamma^\circ$  doit avoir un point fixe [] plus bas

<sup>23</sup>C'est un cas particulier []

[ ] tous nos beaux énoncés devraient être valables, [ ] un corps de base  $K$  de type fini de  $\mathbf{Q}$ , mais [ ] que  $K$  est extension de type fini d'un corps cyclotomique (pas [ ] fini sur  $\mathbf{Q}$ ).

Nous pourrions définir les *courbes de Poincaré* sur un corps algébriquement clos de  $\bar{K}$  de caractéristique 0, comme étant les courbes isomorphes à des revêtements universels de courbes algébriques anabéliennes sur  $K$  (donc courbes anabéliennes  $\bar{U}, \bar{V}$  sur  $\bar{K}$  définissent des revêtements de Poincaré isomorphes, si et seule si existe un revêtement fini étale de l'un, isomorphes à un revêtement fini étale de l'autre). Étant donné une courbe de Poincaré  $\widehat{U}$  sur  $\bar{K}$ , on définit canoniquement sa complétion  $\widehat{U} \rightarrow \widehat{U}$ . Ceci posé :

**Conjecture (B').** — Soient  $K$  un corps de type fini sur  $\mathbf{Q}$  (ou sur un corps cyclotomique suffise peut-être),  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ ,  $U$  une courbe de Poincaré sur  $\bar{K}$ , de complétion  $\widehat{U} = X$ . Considérons une action de  $\Gamma = \Gamma_{\bar{K}, K}$  sur  $U$ , compatible avec sous-action sur  $\bar{K}$ , d'où une action de  $\Gamma$  sur  $X$ . Ceci posé : Il existe un point fixé et un seul de  $\Gamma^\circ$  agissent sur  $X$  ( $\Gamma^\circ$ , noyau de caractère cyclotomique  $\Gamma \xrightarrow{\chi} \widehat{\mathbf{Z}}^*$ ).

La différence avec la conjecture B, pour celle-ci [ ], [ ] d'un groupe profini  $\pi$ , [ ] librement sur  $U$  de façon que  $U/\pi$  soit une courbe algébrique anabélienne sur  $\bar{K}$ .

Que donneraient les conjecture précédentes, quand on les applique à une situation où  $K$  est [ ] pour un modèle  $S$  de  $K$  (disons, élémentaire anabélienne), quand  $U_K$  provient d'une courbe relative  $U_S$  sur  $S$  - de sorte qu'on a un homomorphisme de groupes

$$(4) \quad E_{U_S} \longrightarrow E_S$$

de noyau  $\pi_{\bar{U}}$ , dont  $E_{U_K} \longrightarrow E_K$  est déduit pour changement de base i.e. par produit fibre

$$(5) \quad E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S} [ ]$$

Ainsi, les sections de  $E_{U_K}$  sur  $E_K$  correspondant aux relèvement continus  $E_K \longrightarrow E_{U_S}$  de l'homomorphisme surjectif  $E_K \longrightarrow E_S$  et parmi ce relèvement, ceux qui sont triviaux sur le noyau de  $E_K \longrightarrow E_S$  correspondants existent aux sections de  $E_{U_S}$  sur  $U_S$ . Nos conjectures impliquent donc qu'il y a existent deux sortes

telles sections : 1°) celles qui correspondent à des points de  $U_K/K$  i.e à des sections rationnelles des  $U_S$  sur  $S$  - mais on va vérifier sans mal, sans doute, qu'une telle section rationnelle ne correspond effectivement à une section de l'extension (4), que si c'est une section régulière (à vérifier tantôt). 2°) Celles correspondant à des  $i \in I(U_{\overline{K}})$  rationnels sur  $K$ , i.e. à une section de  $\widehat{U_S} \setminus U_S = S'$  (étales fini sur  $S$ ) sur  $S$ . Et il faudrait étudier encore à quelle conditions une telle section définit un paquet non vide de scindages de (4) - et comment déterminer exactement tous ces scindages.

Avant d'élucider ces deux points, un peu technique, je voudrais voir dans quelle manière la conjecture **A** (ou **B**) faite des ces §, permet de reconstruire la catégorie des modèles élémentaires anabéliennes sur  $\mathbf{Q}$ , et celle des extensions de type fini de  $\mathbf{Q}$  et des modèles élémentaires anabéliennes sur ceux-ci, en termes des groupes extérieurs (ou topos galoisiens) associés à partir bien sûr de la donnée fondamentale de  $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}, \overline{\mathbf{Q}_0}}$ , opérant extérieurement sur  $\widehat{\pi_{0,3}}$ , d'où déjà l'extension  $E_{0,3} = E_{U_{0,3}/\mathbf{Q}}$ , où  $U_{0,3} = \mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ .

Prenons les donne de  $\widehat{\pi_{0,3}}$ -conjugaison de  $[]$  sections de  $E_{0,3}$  sur  $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma$  i.e. les "points" telles que le centralisateur de  $\Gamma^0$  soit trivial (sections "admissibles")  $[]$  des topos  $B_{\widehat{\pi_{0,3}}, \Gamma_{\mathbf{Q}}}$   $[]$  sur  $B_{\Gamma_{\mathbf{Q}}}$   $[]$  - on trouve un ensemble sur lequel  $\Gamma$  opère (qui n'est autre que  $U_{0,3}(\overline{\mathbf{Q}_0})$ , à isomorphisme canonique près). Pour tout ensemble fini  $I$  des sections, stable par  $[]$  la formation "forage de trous" doit nous fournir un groupe extérieur  $\pi_{0,3}(I)$ , de type  $[]$  sur lequel  $\Gamma$  opère (il voit mieux peut-être utiliser le yoga introduit par ailleurs des groupoïdes rigides - donc on peut  $[]$  ainsi  $[]$  de trous  $0, 1, \infty$  - on trouve donc l'équivalent groupoidal de la droite projective  $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^1$ , on l'appelle  $[]$  - qui correspond à un groupe extérieure à lacets infini sur lequel  $\Gamma$  opère - en fait, ce n'est autre que  $E_{K_1}$ , où

$$(6) \quad K_1 = \mathbf{Q}(T_1)$$

est l'extension transcendantal pour type de degré 1 de  $\mathbf{Q}$ .

Partant de (6), on construit de même l'équivalent groupoidal de  $U_{0,3}$  et on reconstruit comme précédent, pour avoir, sont des courbes de type  $(0, \nu_2)$  sur  $K_1$  (ou sur une extension finie de  $K_1$ ) sont des courbes relatives de tipe  $(0, \nu_2)$  sur une courbe sur  $\mathbf{Q}$  (ou une extension finie de  $\mathbf{Q}$ , ou une revêtement étale fini d'une telle  $U_{0,\nu_1}$ ).

On procède [] pour construire finalement tous les  $E_K$  sur  $E_Q$  ([] tout corps extension de type fini de  $\mathbf{Q}$ , est extension finie d'une extension transcendantale []) et tous les modèles élémentaires, où [] chaque avec la fibration [] sont une courbe de genre 0, suite un revêtement étale fini d'une telle fibration particulière. Sauf erreur, ça fait assez pour avoir un système fondamental de voisinages de tout point d'une  $X$  lisse sur un  $K$  et de reconstituer en principe les schémas lisses sur des  $K$ , pour recolllements de tels morceaux avec des "immersions ouvertes". Mais [] que pour faire une telle description, il en faudrait développer un langage géométrique qui celle mieux à l'intuition géométrique, que les sempiternelles extensions de groupes profinis ... ou actions extérieures, et où les points rigides (à [] alors des clôtures algébriques de corps) jouent un rôle prépondérant. Je me faudra y revenir dessus - et en même temps, expliciter les topos étales (pas seulement le "morceau  $K(\pi, 1)$ ") [] entiers des schémas décrits ici par des extensions.

Reprenons le cas de  $U = U_S$  schéma relatif sur  $S$ , "élémentaire" sur  $S$  - à fibres successives anabéliennes (s'il le faut) ou de moins à  $\pi_1$  non nul,  $S$  étant lui-même (pour fixer les idées) lisse sur  $\mathbf{Q}$ , irréductible, corps de fonctions  $K$ , et reprenons la digression 5. Considérons une section rationnelle  $f$  de  $U$  sur  $S$ , définissant une section de  $E_{U_K}$  sur  $E_K$  - ou, ce qui revient au même, un relèvement de l'homomorphisme surjectif,  $E_K \longrightarrow E_S$  en  $E_K \longrightarrow E_{U_S}$  (composé de la section  $E_U \longrightarrow E_{U_K}$  []  $E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}$ ). Je veux montrer que  $f$  est pourtant définie i.e. une section de  $U_S$  sur  $S$ , si et seule si le section de  $E_{U_K}$  sur  $E_K$  provient d'une section de  $E_{U_S}$  sur  $E_S$ , i.e. si et seule si le relèvement  $E_K \longrightarrow E_{U_S}$  [] sur le noyau de  $E_K \longrightarrow E_S$ .

Notons que cette dernière condition est une condition "de codimension 1 sur  $S$ " - de façon plus précise, si  $Z$  est un sous-schéma fermé de  $S$  de codimension  $\geq 2$ , alors, posant  $S' = S \setminus Z$ , on a  $\pi_1(S') \xrightarrow{\sim} \pi_1(S) = E_S$  pour le "théorème de pureté" - donc le noyau de  $E_K \longrightarrow E_S$  est le même que celui de  $E_K \longrightarrow E_{S'}$ , ou, si [] (comme  $S'$  n'est pas un "modèle") que le sous-groupe fermé engendré pour les noyaux des  $E_K \longrightarrow E_{S'_i}$ , où les  $S'_i$  sont des ouvert "modèles" qui recouvrent  $S'$ . Si donc les conditions envisagés sont [] relativement aux  $S'_i$  (qui pourtant un recouvrement par  $S$ , []  $S'$ ) - ce qui est [] signifie que ce section rationnelle envisagé est [] sur les  $S'_i$ , i.e. sur  $S'$  - alors celle est vérifié relativement à  $S$  - ce qui est [] signifie que le section est [] sur  $S$ . Donc, [], il faudrait [] a priori qu'une section de  $U_{S'}$  sur  $S'$  []

une section de  $U_S$  sur  $S$ . [] d'une courbe relative  $U_S = X_S - T$ ,  $X$  lisse sur  $S$  de dimension relative 1,  $T$  fini [] sur  $S$ , []  $T$  décomposé sur  $S$ . Si  $X$  [] relatif  $\geq 1$ , on sait ([] Weil) que le section [] une section de  $X$ , soit  $D$  l'image inverse de  $T$ , c'est un diviseur sur  $S$ , dont le [] sur  $S' = S \setminus Z$  est nul, donc (comme  $\text{codim}(Z, S) \geq 1$ ) il est nul, OK.

(9)

(10)

avec des carrés cartésiens, et des flèches horizontales surjectives. L'homomorphisme  $E_{U_S} \longrightarrow E_K$  est composé d'un relèvement  $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$  de  $E_K \longrightarrow E_{D_n}$  avec l'homomorphisme canonique  $E_{U_{D_n}} \longrightarrow E_{U_S}$ . (relèvement  $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$  correspondant biunivoquement aux sections de  $E_{U_n}$  sur  $E_K$ , ou aux relèvements de  $E_K \longrightarrow E_S$  ou  $E_K \longrightarrow E_{U_S} \dots$ ).

Ceci dit <sup>24</sup>, j'ai envie de prouver que  $\varphi_n : E_K \longrightarrow E_{D_n}$  [] i.e. provient d'une section de  $E_{O_n}$  sur  $O_n$  si et seule si la section rationnelle correspondant de  $U_S/S$  est définie en  $n$ . Ceci impliquera l'assertion précédent (que la section  $\phi$  de  $E_{U_K}$  sur  $E_K$  provient d'une section de  $E_{U_S}$  sur  $E_S$ , si t seule si la section rationnelle correspondant isomorphe).

Mais il s'agit ici d'un énoncé en fait [] géométrique, que j'ai envie de reformuler sous forme plus générale :

**Théorème.** — Soit  $T$  un trait ([]),  $U$  un schéma relatif "élémentaire" sur  $T$ , anabélienne <sup>25</sup>,  $K$  le corps des fonctions de  $T$ , On [] un revêtement universel  $\tilde{U}$  de  $U$ , d'où une clôture algébriquement  $\bar{K}$  de  $K$ , et on considère l'extension  $E_U = \pi_1(U; \tilde{U})$  de  $E_K = \pi_1(K, \bar{K}) \simeq \text{Gal}(\bar{K}/K)$  par  $\pi = \pi_1(U_{\bar{K}}, \tilde{U})$ . On a donc un carre cartésien des groupes profinis

[]

---

<sup>24</sup>**N.B.**

<sup>25</sup>anabélienne [] - il suffit que les fibres de ordre 1 de la fibration élémentaire de  $U$  ne soient que de type  $(0,0)$  ou  $(0,1)$  - i.e. à  $\pi_1$  nul



où  $E_S$  s'identifie au quotient de  $E_K$  par le sous-groupe  $[\ ]$  engendré par un groupe d'inertie  $I_{K'} \simeq T_\infty(\overline{K})$ , cf plus haut. Soit  $f_K$ ,  $K$  un point de  $U_K \text{ rel}/K$ , d'où une section  $\Psi = \Psi_{f_K}$  de  $E_K$  sur  $E_{U_K}$ . Ceci posé les conditionnes suivantes sont équivalentes

- (a)  $f_K$  se prolonge en une section de  $U$  sur  $S$  ;
- (b)  $\Psi$  provient d'une section de  $E_U$  sur  $E_S$  ;
- (b') le compose  $E_K \xrightarrow{\Psi} E_{U_K} \longrightarrow E_U$  s'annule sur  $I_{K'}$ .

L'équivalence de (b) et (b'), et qu'elles soient impliquées par (a), est clair. C'est l'implication (b)  $\Rightarrow$  (a) qui demande une démonstration. On est  $[\ ]$  au cas où  $T$  est strictement local (donc  $E_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$  est réduit à son sous-groupes d'inertie, et  $E_S = (1)$ ). On est ramené de prendre un  $[\ ]$  au cas où  $U/S$  est une courbe relative élémentaire,  $U = X \setminus T$ ,  $X$  lisse et propre. Alors  $f$  se prolonge en une section  $f$  au  $X$  sur  $S$ , et la conclusion  $[\ ]$  que  $f(S) \subset U$ . Donc on est ramené  $[\ ]$  au

*Lemme. — Soit  $X$  schéma projectif lisse de donnée relation 1 connexe sur  $S$  trait strictement local, soit  $T \subset X$  sous-schéma, fini étale sur  $S$ , donc  $T \simeq I_S$ ,  $I$  ensemble fini, et soit  $U = X \setminus T$  (donc  $T$  est défini par une  $[\ ](g_i)_{i \in I}$  des sections disjointes de  $X$  sur  $S$ ) si  $g$  est de genre relatif,  $v = [\ ]I$ , on suppose  $(g, v) \neq (0, 1)$ . Soit  $i_0 \in I$ ,  $f$  une section de  $X/S$  distinctes des disjointes  $g_i$ , et telle que  $f$  et  $g_{i_0}$  coïncident en  $s$  (point fermé de  $S$ ). Si  $\eta = S \setminus s$ , on a donc un morphisme  $\eta \longrightarrow U$ , d'où  $\pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$ . Je dis que cet homomorphisme n'est pas trivial, et même, si  $v \geq 2$ , que pour la donnée  $[\ ]$  n'est pas trivial (pour  $[\ ]$  distinct de la caractéristique résiduelle).*

Comme la section rationnelle de  $J_{X/S}^1$  défini par  $f$  est régulière, on voit que le composé de l'homomorphisme envisagé avec  $H_n(J_{X/S}^1, \mathbf{Z}_\ell)$  est nul - i.e. le  $H_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)$  s'envoie dans la partie torique de  $H_1(U, \mathbf{Z}_\ell)$   $[\ ]$ , qu'est canoniquement isomorphe à  $T_\ell^I/T_\ell$ . (**N. B** cette partie est nulle si  $\text{card } I = i$ , et dans ce cas le critère homologique  $[\ ]$  insuffisant...) Il faudrait donc calculer cet homomorphisme

$$T_\ell(\simeq H_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)) \longrightarrow T_\ell^I/T_\ell$$

pour constater qu'il n'est pas nul dans le cas envisagé,  $v \geq 2$  (et traiter  $[\ ]$  le cas  $v = 1$ ). Je vais dériver le résultat : soit  $x = g_{i_0}(s)$ ,  $A = \underline{O}_{X,n}$ ,  $V$  l'anneau de  $S$ ,  $J_{i_0}$

l'idéal de l'homomorphisme  $A \xrightarrow{g_{i_0}^*} V$  associé à  $[\ ]$ , c'est donc un idéal inversible de  $A$  -soit de même  $J_f$  l'idéal associé à  $f^* = A \longrightarrow V$ , et considérons  $g_{i_0}^*(J_f)$ , c'est un idéal de  $V$  engendré par un générateur, et comme  $g_{i_0} \neq f$ , on voit que cet idéal n'est pas nul. Soit  $H = [\ ]\nu/g_{i_0}^*(J_f)$ , cet entier  $[\ ]$  de  $g_{i_0}$  et  $f$ , ces  $[\ ]$  comme une multiplicité d'intersection. Ceci posé, je  $[\ ]$  que l'homomorphisme

$$T_\ell \longrightarrow T_\ell^I/T_\ell$$

est le produit  $[\ ]$  des injections canoniques  $T_\ell \longrightarrow T_\ell^I$ , correspondant à l'indice  $i_0$ . Il faudrait que  $[\ ]$ .

Reste le cas  $\nu = 1$ , qui semble demander un traitement séparé <sup>26</sup>.  $[\ ]$  à vérifier (pour les groupes fondamentaux premiers à  $p$ ) c'est que l'homomorphisme extérieur  $\pi_1(U_s) \simeq \pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$  est égal à  $K_{i_0} \circ (\mu Id_T)$ , où  $K_{i_0}$  est l'homomorphisme "local"

$$[\ ]$$

associé à l'indice  $i_0$ . Je vais admettre à priori, qui une ne peut guère être difficile.

Pour terminer ce numéro, je veux encore étudier, dans la situation d'une  $U$  courbe relation sur une  $S$  avec  $U = X \setminus T$ ,  $X$  lisse et propre sur  $S$ ,  $T$  fini étale, avec sections  $g_i$  donnée de  $T$  sur  $S$ , les "sections de  $2^{eme}$  espèce" de l'extension

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow E_U \longrightarrow E_S \longrightarrow 1$$

associées <sup>27</sup> à  $i = i_0$  - que définit une classe de  $\pi$ -conjugaison de sous-groupes ouverts lacets  $L_i$  dans  $\pi$ . (On suppose qu'on a bien une telle suite exact i.e. que  $\pi_2(S) \longrightarrow \pi_1(\text{fibre})$  est nul, ce qui  $[\ ]$  le cas si  $\pi_2(S) = 0$ , p. ex  $[\ ]$ ) si on est dans le cas d'une modèle élémentaire au dessus d'un corps de caractéristique 0 ( la reconstruction de ces  $[\ ]$  étant sans doute  $[\ ]$ , si on  $[\ ]$  aux groupes fondamentaux premiers aux cas résiduelles...)  $[\ ]$   $L_i$  dans  $E_U$  s'envoie *sur*  $E_S$ , on trouve donc des scindages pour cette extension, qu'on peut regarder comme une extension

$$(13) \quad 1 \longrightarrow T \longrightarrow N(L_i) \longrightarrow E_S \longrightarrow 1$$

<sup>26</sup>Ceci doit être indépendant de la  $[\ ]$  de  $\nu$  !

<sup>27</sup>en tous cas, même sous  $[\ ]$

La classe d'isomorphisme est un élément

(14)

que je ne propos d'étudier. On [] si  $S$  est un  $K(\pi, 1)$

(15)

d'ailleurs on a une suite exacte de Kummer (ou  $\text{Pic}(S) = []$ )

(16)  $0 \longrightarrow \text{Pic}(S)[[]]$

d'où par passage à la limite

(17)

Dans le cas où  $S$  est un schéma élémentaire sur un corps de type fini sur  $\mathbf{Q}$ ,  $\text{Pic}(S)$  est un  $\mathbf{Z}$ -modèle de type fini (par Mordell-Weil-Néron), donc l'homomorphisme

(18)  $\text{Pic}(S) \longrightarrow \text{Pic}(S)^\wedge \longrightarrow H^2(S, T)$

est *injectif*.

Sous nous [] de cette condition, considérons le cas général - je dis que la classe  $c$  (14) est donc l'image de (18), de façon précise que c'est l'image de l'élément

$$g_i \in \text{Pic}(S)$$

classe des faisceaux [] (on []) de  $X$  le [] de  $g_i$ . Principe d'une vérification : [] la complété formel de  $X$  [] de  $g_v(S)$ , [] ou interpréter la suite exacte (13) comme la suite exacte d'homotopie de ce topos [], au dessus de  $S$ . On a donc à prouver une histoire d'ombres...

Dans le cas "arithmétique", on voit donc que l'extension (13) est scindée si et seule si  $g_i = 0$  i.e. [], globalement sur  $S$ , []

Quand  $g_i = 0$ , parmi les scindages, il y a [] provenant [] d'une base de  $J_i/J_i^2$  qui soit [].

L'indétermination des choix d'une telle base [] celle des choix d'une section de (13) est donc

(20)

On a ici des suites exactes de Kummer

$$[ ]$$

d'où par passage à la limite

(21)

Dans le “cas arithmétique”  $[ ]$  on trouve donc

$$[ ]$$

Si le genre est zéro, prenant une de ces sections de  $T$  sur  $S$  comme section à l'infini, OPS ( $[ ]$  à se localiser)  $U_S = \mathbb{E}'_S \setminus T'$ , donc  $f$  s'identifie à une section de  $\mathbb{E}^1_S$  sur  $S'$ , i.e. de  $\underline{O}_S$  sur  $S$ , donc (comme  $\text{codim}(2, S) \geq 2$   $[ ]$ ) elle se prolonge en une section de  $\mathbb{E}'_S$ . Et on  $[ ]$  comme précédemment, OK. Considérons donc les diviseurs irréductibles  $D_i$  sur  $S$ , ou ce qui revient au même, les points  $x_v$  de  $X$  de codim 1, i.e tels que  $\underline{O}_{x_v}$  soit un  $[ ]$  () anneau de valuations discrète). Considérons son  $[ ] \overline{O}_{x_v}$  dans  $\overline{K}$ ,  $[ ]$  un idéal maximal  $[ ]$  (ces idéaux correspondent aux points  $[ ] \tilde{S}$  de  $S$  dans  $\overline{K}$  au dessus de  $x$ ) et considérons son stabilisateur  $N_n$  dans  $E_K$ , qui opère donc dans  $k(\tilde{x}) = \overline{k(x)}$ , et s'envoie en fait, on le sait, *sur*  $\text{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$ .

Soit  $I_{\tilde{x}}$  le noyau de l'homomorphisme obtenue ( $[ ]$  “géométriques” de  $[ ]$ ), donc on a une suite exacte

$$(7) \quad 1 \longrightarrow [ ] \text{Gal}(\overline{k(x)}/k(x)) \longrightarrow 1$$

et par Kummer une isomorphisme canonique<sup>28</sup>

(8)

On notera que si  $x$  est le  $[ ]$  du diviseurs  $D$ , alors  $k(x)$  est le corps des fonctions de  $D$ . C'est un corps de type fini sur  $\mathbf{Q}$ .

Il est immédiat (sans supposer que le corps de base pour  $S$  soit  $\mathbf{Q}$ ) que le noyau de  $E_K \longrightarrow E_S$  est le sous-groupe  $[ ]$  engendré par les  $I_{\tilde{n}}$ . Donc l'hypothèse que  $E_K \longrightarrow E_{U_S}$   $[ ]$  sur le dit noyau, signifie aussi qu'il  $[ ]$  sur  $[ ]$  des  $I_{\tilde{n}}$ . Soit alors  $U_{\underline{O}_x}$

---

<sup>28</sup> à corps de  $[ ]$  de car 0 !

induit par  $U$  sur  $\text{Spec } \mathbf{Q}_x$ , on a donc des factorisations d'ailleurs  $\mathbb{G}_n(S)$  n'a pas [], donc

22)

est injectif<sup>29</sup>. Ainsi, quand  $g_i = 0$  i.e. quand (13) admet des scindages "géométriques" (et il suffit []) ceux-ci forment un tore sous  $\mathbb{G}_m(S)$ , qui s'identifie à une sous-torseur des [] de tous les scindages de (13). Pour que la "description profinie de la géométrie algébrique absolu sur  $\mathbf{Q}$  soit complète, il y faudrait également caractériser (en termes de cette description profinie) le sous-ensemble remarquable.

Je voudrais enfin comprendre encore comment une section d'extensions des type (1) peut se "spécialiser" en une section de type (2), donc le cas des courbes relatives. Pour ceci, je reprends la [] situation

Dans la cas [] où  $f$  n'est pas définie sur  $S$ , on trouve une action de  $2^{nde}$  espèce, []  $L_i$  dans  $\pi$ .

À vrai dire

[]

(31)

J'ai l'action extérieure de  $T$  sur  $\pi$  n'est souvent pas triviale (je conjecture qu'elle l'est si et seule si il y a "bonne réduction") - donc le groupe  $E_K$  n'opère pas lui même extérieurement sur  $\pi$ . Mais tout scindage de (30) définit une extension de  $E_K$  par  $\pi$ , donc une action extérieure [] "admissible", définie par une courbe algébrique ? - Sans doute pas [], si ce n'est la courbe "réduit" de type  $(g, v)$  ([]) ? [] ce pourrait être celle ci :

*Conjecture-à-[] — Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a)  $U_\eta$  a bonne réduction sur  $S$  ;

(b) L'action extérieure de  $T$  sur  $\pi$  est triviale (ce qui signifie ainsi que tout [] scindage de (31) - p. ex défini par un point de  $U_\eta$  [] induit un homomorphisme  $T \longrightarrow \pi$ );

---

<sup>29</sup>(cas "[ ]")

(c) L'action de  $T$  sur  $\pi_{ab} = H_1(U_{\overline{\eta}})$  est triviale ;

(d) Iton pour

(e) En termes de une section de (30)

(f) En termes de une section de (30)

On a []

[]

J'ai donc [] un [] général (qui je pourrais à la occasion [] avec la généralité qui lui revient) pour construire des actions extérieures [] de groupes  $E_k$  ( $K$  extension de type fini de  $\mathbf{Q}$ ) sur des  $\pi$  à lacets, qui (sans doute) [] géométriques, par la considération de courbes de type  $(g, v)$  "se réduisent []". Mais je [] pas pour cette vrai à faire des actions effectives, associées à actions extérieures [] géométriques [] - i.e. d'une des deux types 1°, 1° [] de ce n°.

#### IV. Sections d'extensions et anneaux de valuations généraux

D'abord une révision de notations. Si  $X$  est une schéma connexe, je note

$$(1) \quad E_X = \Pi_1(X)$$

son groupe fondamental profini en tant que groupe extérieur, et si  $\tilde{X}$  est un revêtement universel profini de  $E_X$ , par

$$(2) \quad E_X^{(\tilde{X})} = \pi_1(X; \tilde{X}) = \text{Aut}_X(\tilde{X})$$

son groupe fondamental précisé - qu'est un groupe profini. Si  $X = \text{Spec}(A)$ , où  $A$  est un anneau (le plus souvent une corps) je note  $E_A$ , et  $E_A^{\tilde{A}=E_X^{(\tilde{X})}}$ . Si  $A$  est une  $A$ -algèbre telle que  $\text{Spec}(\tilde{A}) = \tilde{Y}$  soit une revêtement universel de  $X$  (ce qui le détermine à isomorphisme non unique près). Bien entendu, si  $\xi$  est une "point géométrique" de  $X$ , on note

$$(3) \quad E_X^\xi = \Pi_1(X_1\xi) = E_X^{\tilde{X}(\xi)},$$

où  $\tilde{X}(\xi)$  est le revêtement universel de  $X$  [] en  $\xi$ . Le choix de  $\xi$  correspond d'une [] [] et d'une extension séparablement close  $\Omega$  de  $k(x)$  (clôture algébrique

de  $k(x)$ ) et on note alors ainsi  $E_X^\Omega$  au lieu de  $E_X^\xi$  ( $\Omega$  sous entendu [] extension de  $k(x)$  donc avec sa structure de  $k(x)$  algèbre) []

$$(4) \quad E_X^\Omega = E_X^{\overline{k(x)}},$$

où  $\overline{k(\alpha)}$  est la clôture algébrique de  $k(\alpha)$  dans  $\Omega$ . Bien sur, si  $X = \text{Spec}(A)$ , on note aussi  $E_A^\Omega$  – notation [] utilisée []  $E_K^{\overline{K}}$ ,  $K$  un corps,  $\overline{K}$  une clôture algébrique [] séparable de  $K$ .

Si  $X$  est un  $Y$ -schéma, 1-connexe, on []

$$(5) \quad E(f) : E_X \longrightarrow E_Y, \quad \text{où } f : X \longrightarrow Y$$

$E_X$  est un foncteur en  $X$

$$(\text{Sch conn}) \longrightarrow \text{Group ext}$$

qui se précise pour l'homomorphisme injectif des groupes profinis

$$(6) \quad E_X^{\tilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\tilde{Y}}$$

où  $\tilde{Y}$  est le revêtement universel de  $Y$  défini par  $\tilde{X} \longrightarrow Y$  ( $\tilde{X}$  [] pouvoir écrire en fait  $E_Y^{\tilde{X}}$ , plus géométriquement  $E_Y^Z$  chaque fois qu'on a un  $Y$ -schéma  $Z$  1-connexe, jouent le rôle de “foncteur fibre” pour le topos  $B_{\pi(X)}$  des revêtements étales de  $Y$ .)

On peut désir que

$$(7) \quad (X, \tilde{X}) \mapsto E_X^{\tilde{X}}$$

est un foncteur, de la catégorie des schémas 0-connexes  $X$  munis d'un revêtement universel (on [] d'un  $Z$  1-connexe s'envoyant dans  $X$ ) vers celle des groupes profinis. Ceci s'applique en particulier en regardons la sous-catégorie des  $(X, \xi)$  munis d'un point géométrique - on a donc

$$(8) \quad E_X^\xi \longrightarrow E_Y^\eta$$

si on a un homomorphisme de schémas “géométriques profinis”  $(X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$ . On note que tout [] géométrique de  $X$  en un  $x \in X$  - i.e. une extension []  $\Omega$  de  $k(\alpha)$  [] - et l'homomorphisme (8) s'identifie ainsi à

$$(9) \quad E_X^{\overline{k(\alpha)}} \longrightarrow E_Y^{\overline{k(\eta)}}$$

où  $\overline{k(\alpha)}, \overline{k(\eta)}$  sont les clôtures séparables *dans*  $\Omega$ .

On posons

$$(10) \quad E_{X/Y}^{\tilde{X}} = \text{Ker}(E_X^{\tilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\tilde{X}} = E_Y^{\tilde{Y}})$$

C'est un foncteur par un triple  $\tilde{X} \longrightarrow X \longrightarrow Y$  avec  $X, Y$  0-connexe,  $\tilde{X}$  un revêtement universel, plus généralement, si  $T \longrightarrow X$  avec 1-connexe, on pose

$$(11) \quad E_{X/Y}^T = \text{Ker}(E_X^T \longrightarrow E_Y^T)$$

<sup>(30)</sup> on a un foncteur  $[]$ . Cas particulière  $E_{X/Y}^\xi$ ,  $\xi$  un point géométrique de  $X$ ,  $E_{X/Y}^\Omega, E_{X/A}^{\tilde{X}}$  (si  $Y = \text{Spec } A$ ),  $E_{B/A}^{\tilde{B}}$ ...

$[]$  on dispose d'une "suite exacte d'homotopie universel" (en dim 2) <sup>(31)</sup> pour  $X \longrightarrow Y$ , alors le donnée (pour  $X \longrightarrow Y$  donné) de  $T \longrightarrow X$ , (avec  $T$  1-connexe) peut s'interpréter par la donnée d'un composé

$$T \longrightarrow Y$$

et d'un relèvement en  $T \longrightarrow X$ , ou ce qui revient au même, d'une section de  $X_T = X \times_Y T$  sur  $T$ . Ceci posé,

$$X$$

on avoir un isomorphisme  $[]$  (avec l'hypothèse de "suite exacte d'homotopie" faut)

$$(12) \quad E_{X/Y}^T \simeq \pi_1(X_T; T) \simeq E_{X_T}^T$$

et on  $[]$

$$(13) \quad 1 \longrightarrow E_{X/Y}^T \longrightarrow E_X^T \longrightarrow E_Y^T \longrightarrow 1$$

(Cette hypothèse  $[]$  satisfait si  $Y = \text{Spec } K$ ,  $K$  un corps, Si  $X$  est géométriquement 0-connexe sur  $K$ ).

Plus généralement, si on a une suite exacte d'homotopie universel, mais pour  $[]$  avec  $E_X^T \longrightarrow E_Y^T$  surjectif,

---

<sup>30</sup>NB.  $E_{X/T}^T []$

<sup>31</sup>Cas où  $E_X^T \longrightarrow E_Y^T$  est [un] épimorphisme



On <sup>(32)</sup> [] une factorisation de  $X \longrightarrow Y$  en

$$(14) \quad X \longrightarrow Y' \longrightarrow Y$$

avec  $Y'$  étale fini ou pro-étales fini sur  $Y$  et  $E'_X \longrightarrow E_Y$ , était maintenant [un] épimorphisme, [] suite exacte universel d'homotopie bien sûr. On avoir donc isomorphismes []

$$(15) \quad E_{X/Y}^T \xrightarrow{\sim} E_{X/Y'}^T$$

qui peut donc se [] comme

$$(16) \quad E_{X \times_{Y'} T}^T \simeq E_{X/Y}^T$$

qu'on peut noter  $E_{X_T}^T$ , mais en faisant attention que []  $X_T$  [] non plus  $X \times_Y T$  (qui va être disconnexe si  $Y' \longrightarrow Y$  pas isomorphisme) mais  $X \times_Y T$ .

Bien sur, à isomorphisme []

s'identifie bel et bien au groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$  de  $\bar{K}/K$ ,  $\bar{K}$  est la clôture séparable de  $K$  telle que  $\text{Spec } \bar{K} \simeq \tilde{Y}$ . Souvent, on notons  $\Gamma$ , ou  $\Gamma_K$ ,  $\Gamma_K^{\bar{K}}$ , au lieu de  $E_Y$  - surtout si  $K$  est algébrique sur le corps premier, et [] donc plus de “partie géométrique” à distinguer d’une “partie arithmétique”...

Soit  $K$  un corps (qui pourrait être algébriquement clos),  $L$  une extension de type fini de  $K$ ,  $X$  un “modèle” propre régulière de  $L$ . Alors  $E_X^{\bar{L}}$  s'identifie à un quotient de  $E_L^{\bar{L}}$ , *qui ne dépend pas de modèle  $X$  défini*, comme il est [] c'est la partie “universelle géométrique” [] qui classifie les schémas (finis) étales sur  $L$  qui sont “non isomorphes” sur *tout* modèle régulière (propre ou non) de  $L/K$ .

Si  $U$  est un modèle quelconque, il se plonge dans un  $X$ , et on a des homomorphismes surjectifs []  $Z$  partie ferme de  $X$

$$E_X^{\bar{L}} = E_L^{\bar{L}} \simeq E_U^{\bar{L}} / \text{sous-groupe fermé []}$$

Notons que  $E_L^{\bar{L}}$  est limite projective de  $E_U^{\bar{L}}$ , pour des modèles réguliers ([]) variables

$$E_L^{\bar{L}} \simeq [] E_U^{\bar{L}}$$

---

<sup>32</sup>Sous l'hypothèse “suite exacte d'homotopie” mais avec fibres []

et de même, bien sûr

$$\pi_{L/K}^{\bar{L}} \simeq [\ ] \pi_{U/K}^{\bar{L}}.$$

[ ]

dont le choix “effectif” dépend de celui d’un revêtement universel ou encore d’un point géométrique [ ] de  $\tilde{K}_n$  - i.e. d’une clôture algébrique de  $\tilde{K}_n$  [ ]

[ ]

est que  $a \in U$ .

Ceci posé,  $E_U^{\bar{L}}$  se récupère à partir de  $E_L^{\bar{L}}$ , comme quotient de ce dernier, en prenant *tous* les  $V$  de  $L$  [ ] un centre sur  $U$  (il suffit même de prendre les  $V = \underline{O}_{U,n}$ , où se est [ ] de codim 1 des  $U$ ), et [ ] correspondants.

On peut regarder

[ ]

Mais il en est [ ] ainsi comme on voit en considérant  $V_1 = V \cap L_1$ , qu’est un anneau de valuations de  $L_1$ , <sup>(33)</sup> dont le corps [ ] fini sur  $K$  si celui de  $V$  l’est (donc  $V_1 \neq L_1$ ) - donc  $V_1$  correspond à une “place” des corps de fonctions d’une variable  $L_1$  sur  $K$ . [ ]  $E_K^\circ$  centralise  $T_{V_1}$

*Conjecture.* — Soient  $K, L$  des extensions de type fini de  $\bar{K}$ ,  $K \subset L$ . Alors

- a) Toute section de  $E_L$  sur  $E_K$  (au guère de tel, se revient au même...) normalise sur  $T_V$  associée à un anneau de valuations  $V$  de  $L$  contenant  $K$ , à corps résiduel algébrique sur  $K$  et  $V$  est uniquement <sup>(34)</sup> [ ] cette condition [ ] au dessus de  $E_K$ .
- b) Soit  $U$  un modèle “élémentaire” de  $L$  sur  $K$ , anabélien. Alors tout section de  $E_U^{\bar{L}}$  sur  $E_K^{\bar{K}}$  se relie [ ] une section de  $E_L^{\bar{L}}$  sur  $E_K^{\bar{K}}$ .

À noter que ce question 2° est [ ] locale [ ] elle doit être essentiellement “triviale”, que [ ] vraie un [ ] - par contre 1°, est une question de [ ] globale sur  $U$ , et sans doute [ ] façons triviale.

La validité des ces énonces, impliquant donc, pour les sections de  $E_U^{\bar{L}}$  sur  $E_K^{\bar{K}}$  associées à un anneau de valuations de  $L/K$  de corps résiduel  $K$ , que l’image de  $E_K^{\bar{L}}$  doit normaliser un sous-groupe [ ] de  $\pi_{L/K}^{\bar{L}}$ , qui est non trivial si la valuation [ ]

---

<sup>33</sup>Il faut [ ]

<sup>34</sup>[ ]

centre sur  $U$ , i.e. si le section n'est pas associé à un point  $K$ -rationnel de  $U$ , ce qui est justifiant [] des conjectures (qui prouvent d'abord [] !) de §2.

Avant de [] vers l'étude des questions 1°) et 2°) et ainsi des questions de normalisation et de centralisations [] précédemment a propos de  $N_V, I_V, \dots$ ),

## STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

---

- Notes for “La Longue Marche à Travers la Théorie de Galois”

## STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

---

### 1. Courbes standard

Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Une “courbe standard” sur  $k$  es une schéma  $X$  sur  $k$  satisfaisant les conditions suivantes :

- a)  $X$  quasi-projectif, toute composante irréductible est de dim 1
- b) Tout point de  $X$  est soit lisse, soit un “point quadratique” (ordinaire) - i.e. isom (loc. ét) à la courbe  $\text{Spec}(k[X, Y]/XY)$  au point 0.

Il est connu qu'on peut trouver une unique  $[\ ] \widehat{X}$  de  $X$ , telle que  $X$  soit un schéma propre, qui  $X$  s'identifie à un ouvert dense de  $\widehat{X}$ , et que  $\widehat{X}$  soit lisse sur les points de  $\widehat{X} \setminus X = I$ . Alors  $\widehat{X}$  est une courbe projective,  $I$  est une partie finie de  $\widehat{X}(k)$  contenant  $[\ ]$  ouvert des points des lissité de  $\widehat{X}$ .  $[\ ] A$  des points singuliers de  $X$  s'identifie à  $[\ ]$

La donnée de  $X$  équivaut à celle des  $(\widehat{X}, I)$ , où  $\widehat{X}$  est un schéma projectif, dont toute composante irréductible est de dim 1, et dont l'ensemble singulier est formé des points  $[\ ]$  ordinaires - et  $I$  est un sous-schéma fini étale de  $\widehat{X}^{\text{lisse}}$ , ou ce qui revient au même, une partie fini de  $\widehat{X}^{\text{lisse}}(k)$ .

Soit

Ainsi, à la courbe standard  $X$  nous avons associé les systèmes de données suivantes :

$[\ ]$

Inversement, [] on construit une courbe standard  $X$  en passant au quotient dans  $\tilde{A}_k Y \setminus I_k$  par l'involution  $\sigma$  - i.e.  $X$  est universel [] pour la donnée  $p$ :

[]

soumise à  $(pi)\sigma = pi$ .

Ainsi la catégorie des courbes standard sur  $k$  [] apparaît comme équivalente à celle des systèmes a) b) c) ci-dessus. (pour les iso)...

**N.B.** On récupère  $\hat{X}$  comme quotient de  $Y$  par  $\sigma$ .

### Généralisation sur une base quelconque.

Une *courbe standard* sur  $S$  (multiplicité schématique, disons) [] défini constructivement en termes d'un système a), b), c) comme ci-dessus, i.e.

[]

On construit alors  $\hat{X} = Y/\sigma$ , contenant  $A = \tilde{A}/\sigma$  et  $I$  comme sous-schémas fermés finis étales sur  $S$ , et []  $X = \hat{X} \setminus I$ . On peut montrer que le foncteur

$$(Y, \tilde{A}, \hat{I}, \sigma_{\tilde{A}}) \mapsto X$$

des systèmes (5) (pour les iso) vers les schémas relatifs [], est *pleinement fidèle* <sup>(1)</sup>.

**N.B.** []

[]

(par abus de langage, puisque c'est non seulement le schéma relatif  $Y$ , mais  $Y$  avec la structure supplémentaire  $\tilde{A}, I, \sigma_{\tilde{A}} \dots$ ).

## 2. Graphe associé à une courbe standard

Revenons au cas d'un corps de base  $k$  algébriquement clos, pour commencer. Soit  $X$  une courbe standard, d'où  $Y, I, \tilde{A}, \sigma_{\tilde{A}}$ .

Posons

$$(7) \quad S = \pi_0(Y) \simeq [] \text{ des corps irréductibles de } X$$

On a alors le diagramme d'application canoniquement entre ensembles finis

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} & & [] \\ \hline & & \end{array}$$

---

<sup>1</sup>faux tel quel

où  $q$  est de degré 2 et définit l'involution  $\sigma_{\tilde{A}}$ . Les applications  $\sigma$  et  $p$  sont induites par les  $[]$  en passant aux  $\pi_o$ .

Le système  $(\tilde{A} \xrightarrow{\sigma} S, \sigma_{\tilde{A}})$  où  $[]$ , peut être considéré comme définissant un *graphe*, dans  $S$  est l'un des sommets, et  $\tilde{A}$  l'un des  $[]$  l'application  $\sigma$  étant l'application "origine d'un  $[]$ ". Ce graphe ne dépend que de  $\widehat{X}$ , pas de  $X$  i.e. des choix de  $I \subset \widehat{X}(k)$ . C'est  $[]$  compte de ce choix que l'on considère,  $[]$  plus de la structure de graphe, le donnée supplémentaire

$$(9) \quad I \longrightarrow S$$

Le graphe indique comment les composantes irréductibles de  $X$  (figurés par les sommets) se récupèrent deux à deux - les points d'intersections, i.e. les points singuliers ("doubles"  $[]$ ) de  $X$ , correspondant aux arêtes. Si une composante irréductible  $X_\alpha$  correspond au sommet  $\alpha$  des graphes, alors les  $[]$  fermés en  $\alpha$  correspondent biunivoquement aux points doubles de  $X_\alpha$  - donc  $[]$   $X_\alpha$  sont lisses  $[]$  l'extrémité.

Il est clair que tout graphe fini peut être obtenue (à iso près) par une  $\widehat{X}$  convenable - et même avec des composantes  $X_\alpha$  de genre  $g_\alpha$  donné (i.e. des  $\tilde{X}_\alpha$  de genre  $g_\alpha \dots$ ). De plus,  $[]$   $I \longrightarrow S$  ( $I$   $[]$  fini), cela peut être réalisé par un  $I \subset \widehat{X}^{lisse}$ , i.e. par une courbe standard  $S$ .

La *maquette* d'une courbe standard  $X$  consiste, pour définition, en les données suivantes

$[]$

Une structure formée d'un graphe fini  $G = (S, \tilde{A}, \sigma)$ , d'un ensemble fini  $I$  au dessus de l'une des sommets de  $G$ , et d'une application "genre":  $S \xrightarrow{g} \mathbf{N}$ ,  $[]$  appelé ici une "maquette".

*Proposition. — Considérons la maquette d'une courbe standard  $X$*

*a) Soient  $\alpha, \beta \in S$ , alors  $\alpha, \beta$  appartiennent à la même composante connexe de graphe  $G$ , si et seule si  $X_\alpha$  et  $X_\beta$  appartiennent à la même composante connexe de  $X$ . Donc on a une bijection canonique*

$$(11) \quad \pi_0(G_X) \simeq \pi_0(X),$$

*en particulier  $X$  est connexe si et seule si  $G_X$  est connexe.*

b) Supposons  $X$  connexe i.e.  $\widehat{X}$  connexe, i.e.  $[\ ]$  on a alors  $[\ ]$  i.e.  $[\ ]$  où  $[\ ]$

.

### 3. Courbes “stables” et $MD$ -graphes

Une courbe standard (sur  $k$  algébriquement clos) est “stable”, si elle satisfait à l’un des conditions équivalentes suivantes

- a)  $\text{Aut } X$  est fini
- b) Pour tout  $\alpha$ ,  $(Y_\alpha, I_\alpha \cup \tilde{A}_\alpha)$  est anabélien i.e.  $2g_\alpha + \widehat{v}_\alpha \geq 3$  i.e.  $2g_\alpha - 2 + \widehat{v}_\alpha \geq 1$ , i.e.
  - 1) Si  $g_\alpha = 1$ , on a  $\widehat{v}_\alpha \geq 1$
  - 2) Si  $g_\alpha = 0$ , on a  $\widehat{v}_\alpha \geq 3$
- c) Tout champ de vecteurs sur  $Y$  nul sur  $I \cup \tilde{A}$  est nul.
- d)  $\underline{\text{Aut}}_{(Y, \tilde{A}_k, I)}$  est un schéma en groupes fini étale sur  $k$ . On voit que cette condition (sous la forme b)) ne dépend que de la *maquette* de la courbe. On dit que  $X$  est une *MD-courbe* (MD, initiale de “Mumford-Deligne” ou de “modulaire”) si elle est stable, et 0-connexe (i.e. connexe non vide).

Les maquettes de telles courbes sont les maquettes 0-connexes et stables (i.e. dont les sommets de guère 1 sont de poids total  $\geq 1$ , et les sommets de guère 0 sont de poids total  $\geq 3$ ), on les appellera les MD-graphes.

**NB.** Une maquette est une MD-graphe si et seule si

- a) elle est 0-connexe (i.e. le graphe  $G$  est connexe  $\neq \emptyset$ )
- b) elle n’est pas réduit à un seul sommet de guère 1, de poids total 0  $[\ ]$
- c) les sommets  $[\ ]$

Proposition. — Si  $(G = (S, \tilde{A}, \sigma), I, \underline{g} : S \longrightarrow \mathbf{N})$  est une MD-graphe, son type  $(g, v)$  est anabélien, i.e.  $2g + v \geq 3$ .



Si on avait  $g = 1$ ,  $\nu = 0$ , alors la relation

$$g = 1 = \sum g_\alpha + h_1$$

montre que ou bien tous les  $g_\alpha$  sont nuls et  $h_1$  [], ou bien tous les  $g_\alpha$  sauf une  $g_{\alpha_0}$  sont nuls, []

[]

Soit  $G$  une maquette. On dit qu'une courbe standard sur un corps algébriquement clos est *de type  $G$* , si sa maquette est isomorphe à  $G$ , on dit qu'elle est  *$G$ -épinglée* si on se donne un isomorphisme entre sa maquette et  $G$  (c'est donc une structure []).

Soit  $(\widehat{X}, \underline{I})$  une courbe standard sur une base  $S$  quelconque, on dit qu'elle est de type  $G$  si ses fibres géométriques sont de type  $G$ . Alors les maquettes des fibres géométriques de  $(\widehat{X}, \underline{I})$  forment les fibres d'un schéma en maquettes (ou un MD-graphe) sur  $S$  ( $\underline{S}, \underline{\tilde{A}}, \sigma_{\tilde{A}}, \underline{I}, \underline{\tilde{A}} \longrightarrow \underline{S}, \underline{I} \longrightarrow \underline{S}, \underline{S} \xrightarrow{g} \mathbf{N}_S$ ) (système de revêtements finis étales de  $S$  et de morphismes entre ceux-ci), localement isomorphe à la maquette  $G$  donnée. On appelle  $G$ -épinglage entre  $(\widehat{X}, \underline{I})$  tout isomorphisme entre  $G_S$  et  $\underline{G}(\widehat{X}, \underline{I})$ . Si

$$(18) \quad \Gamma = \text{Aut } G$$

(groupe fini), les  $G$ -épinglages de  $(\widehat{X}, \underline{I})$  s'identifient aux sections d'un certain  $\Gamma_S$ -torseur, appelé *torseur de  $G$ -épinglages* de  $(\widehat{X}, \underline{I})$ .

Considérons, sur une base  $S$  fixée, la catégorie ([]) des courbes standard  $G$ -épinglées. Pour tout  $\alpha \in S$

**N.B.** Si  $\text{card } J = \nu$ , alors

[] Il en est donc de même dans  $M_{gJ}$ , donc ainsi de  $M_G$  (pour  $G$  semi-stable) et de  $M_{[G]} = (M_G, \Gamma)$ .

## 4. La théorie de Mumford-Deligne

Soient  $S$  une multiplicité schématique,  $X$  un schéma relatif sur  $S$ , propre sur  $S$ ,  $\underline{I}$  un sous-schéma fermé de  $X$ . On dit que  $(X, \underline{I})$  est une MD-courbe relative sur  $S$ , si  $X, \underline{I}$  sont plats de présentation finie sur  $S$ , et si pour tout point géométrique de

$S$ , la fibre  $(X_{\bar{s}}, I_{\bar{s}})$  est une MD-courbe géométrique sur  $k(s)$  i.e.  $X_{\bar{s}}$  est 0-connexe, de dimension 1, [] c'est une fonction localement constant sur  $S$ .

Fixons nous une type numérique  $(g, \nu)$  *anabélien* ( $2g + \nu \geq 1$ ), et considérons, pour  $S$  variable, le groupoïde fibré

$$(24) \quad S \mapsto \widehat{M}_{g,\nu}(S) = \text{MD-courbes relatives sur } S, \text{ de type numérique égal à } (g, \nu)$$

On a alors le vraiment [] théorème suivant :

*Théorème de Mumford-Deligne (<sup>2</sup>). — Le groupoïde fibré  $S \mapsto \widehat{M}_{g,\nu}/S$  sur  $\text{Sch}$  (plus généralement, sur les *multiplicités schématiques...*) est représentable pour une multiplicité schématique  $\widehat{M}_{g,\nu}$ , qui est lisse et propre sur  $\text{Spec } \mathbf{Z}$ , D'autre part  $M_{g,\nu}$  est un ouvert de Zariski de  $\widehat{M}_{g,\nu}$ , schématiquement dense fibre par fibre.*

On en déduit aisément p. ex. la connexité des fibres géométriques

[], Nous allons revenir là dessus maintenant.

## 5. Spécialisation des MD-graphes

Soit

---

<sup>2</sup>On suppose  $2g + \nu \geq 3$  (cas anabélien)

6. Morphismes de  $[\mathcal{M}]$  de graphes et de maquettes
7. Étude des  $[\mathcal{M}]$  de  $\dim \leq 2$   $[\mathcal{M}]$  détermination des graphes correspondantes
8. Structure  $[\mathcal{M}]$
9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ( $[\mathcal{M}]$  MDT-structure) : cas  $[\mathcal{M}]$ ,
10. Structures MDT analytiques :  $[\mathcal{M}]$
11. Digression :  $[\mathcal{M}]$  Structure à l'infini des groupoïdes fondamentaux
12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une  $[\mathcal{M}]$  et leur dévissages en “topos élémentaires”
13. Digression sur stratification “locales”  $[\mathcal{M}]$

Une *stratification globale*

## PURSUING STACKS

### First episode: the modelizing story

---

- À la poursuite des Champs : histoire de modèles
- This text was published in: *Pursuing stacks*. Documents mathématiques, 20. SMF édité par G. Maltsiniotis
- [edition] by M. Carmona with the collaboration of U. Buchholtz.

1984

---

•

## ESQUISSE D'UN PROGRAMME

---

- The “*Esquisse d’un Programme*” gives an outline of the main themes of mathematical reflection that Grothendieck pursued over the decade of the 70s and the beginning of the 80s.

It was written in January of 1984 as a report to support an application for a research position at the CNRS. It was reproduced after “*Récoltes et Semailles*” as part of a program of “*Réflexions Mathématiques*” where he intended to develop some of these themes in the subsequent years.

- This text was published in: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck’s Esquisse d’un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press. [transcription]
- [scan]
- [translation] In: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck’s Esquisse d’un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

## RÉCOLTES ET SEMAILLES

Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien

---

- **Title:** *Récoltes et Semailles*
- **English title:** *Harvests and Sowings*
- **Language:** French
- **Written Date:** February 1984 — May 1986
- **Published in:** Éditions Gallimard, 2022, 439 Paris. With the consent of Grothendieck's family.
- **Edition:** [edition] (1506 pp) by M. Carmona
- **Errata and Addendum:** [errata and addendum]
- **Translations:**

Japanese: [translation] by Yuichi Tsuji with Grothendieck's consent. It was published in three volumes by the publishing house Gendai-Sugakusha (Modern Mathematics Co.), in 1989, 1990, and 1993. A fourth volume was translated but not published. Jun-Ichi Yamashita was responsible for contacting the publishing house.

Spanish: [translation] (1454 pp) by J. A. Navarro and M. Carmona

Russian: Ongoing [translation] by Yulia Fridman and Misha Finkelberg.

English: Ongoing translations by [Sayantan Roy and Amit Kuber], [Tong Zhou], [Roy Lisker], and [Saad Slaoui (with Jackson Van Dyke)]

- **Notes:**

*Récoltes es Semailles* started as an introduction to the new style inaugurated by *Pursuing stacks*. “As a matter of fact, I haven’t worked on the mathematical notes for well over three months now, but am about to resume work on them, and hope to get a final typescript ready for the printer, of volume 1, within the next two months. For the last two weeks I have been involved in writing the “personal part” of the Introduction, in French. This for me is by far the most important thing of Pursuing Stacks. Maybe this reflection, whether published or not, is one main meaning of my resuming “public” mathematical work (for how many years I am wholly unable to foretell...). It just occurred to me that when I am through with this reflection and testimonial of my life as a mathematician among mathematicians, I’ll have it retyped separately and a hundred or so copies made, to send to those former or present friends and colleagues of mine, with whom I had or have closest contact. I’ll then send you a copy in due course, which you are welcome to communicate to whom you like. However, unlike the bulk of the notes, which you were so kind to duplicate and circulate among a number of mathematicians whom you thought were interested (and a few were indeed!), please consider this introduction as somewhat confidential for the time being. According to the echoes I’ll get, I may still drop from the typescript, before giving it to the printer, some too strongly personal references where other people are involved and named.”

**Letter to R. Brown, Feb 18, 1984**

“C’est ainsi qu’est né *Récoltes et Semailles*. J’ai écrit les premières pages de l’introduction prévue au mois de juin 1983, à un moment creux dans l’écriture du volume premier de *La Poursuite des Champs*. Puis j’ai remis ça en février l’an dernier, alors que mon volume était pratiquement terminé



depuis plusieurs mois<sup>1</sup>. Je comptais bien que cette introduction serait une occasion pour m'éclairer sur deux ou trois choses qui restaient un tantinet floues dans mon esprit. Mais je n'avais aucun soupçon que ça allait être, tout comme le volume que je venais d'écrire, un *voyage de découverte*; un voyage dans un monde autrement plus riche encore et de plus vastes dimensions que celui que je m'apprêtais à prospecter, dans le volume écrit et dans ceux qui devaient suivre. C'est au fil des jours, des semaines et des mois, sans trop me rendre compte de ce qui arrivait, que s'est poursuivi ce nouveau voyage, à la découverte d'un certain passé (obstinément éludé pendant plus de trois décennies...), et de moi-même et des liens qui me relient à ce passé; à la découverte aussi de certains de ceux qui furent mes proches dans le monde mathématique, et que j'ai si mal connus; et enfin même, dans la foulée et par surcroît, un voyage de découverte mathématique, alors que pour la première fois depuis quinze ou vingt ans<sup>2</sup>, je prenais loisir de revenir sur certaines des questions que j'avais laissées, brûlantes, au moment de mon départ. Je peux dire, en somme, que ce sont *trois* voyages de découverte, intimement entrelacés, que je poursuis dans les pages de Récoltes et Semailles. Et aucun des trois n'est achevé avec le point final, à la page douze cents et quelques. Les échos, déjà, que va recueillir mon témoignage (et jusques y compris l'écho par le silence...) feront partie de la "suite" du voyage. Quant à son "terme", ce voyage sûrement est de ceux qui ne sont jamais menés à terme — pas même, si ça se trouve, au jour de notre mort..."

### **Récoltes et Semailles**

---

<sup>1</sup>Entretiens j'avais passé un bon mois à réfléchir à la "surface structurale" pour un système de pseudo-droites, obtenue en termes de l'ensemble de toutes les "positions relatives" possibles d'une pseudo-droite par rapport à un tel système. J'ai également écrit "L'Esquisse d'un Programme", qui sera inclus dans le volume 3 des Réflexions.

<sup>2</sup>Dans les années cinquante et soixante, j'avais souvent réprimé mon envie de me lancer à la poursuite de telles questions juteuses et brûlantes, accaparé que j'étais par d'interminables tâches de fondements, que personne n'aurait su ou voulu poursuivre à ma place, et que personne après mon départ n'a eu non plus à cœur de continuer...

## RAPPORT D'ACTIVITÉ

(1.10.1984 — 15.12.1984)

---

- [scan]

## RAPPORT D'ACTIVITÉ

(1.10.1984 — 15.12.1984)

par Alexandre Grothendieck, attaché de recherches au CNRS

---

Les mois écoulés ont été consacrés avant tout à la préparation des volumes 1 et 2 des Réflexions Mathématiques, qui paraîtront sans doute courant 1985, sous les titres *“Récoltes et Semailles”* et *“Pursuing stacks”*, part 1: *“The Modelizing Story”*. Je prévois que cette préparation m’absorbera jusque vers la fin février, après quoi je compte reprendre la réflexion sur les fondements d’une “algèbre topologique” (commencé avec la première partie de “À la Poursuite des Champs”), en reprenant le fil de la réflexion de l’*“Histoire de Modèles”* là où je l’avais laissé. Je donne quelques précisions au sujet de ce programme de travail dans “Esquisse d’un Programme”, par. 7.

Il s’agit ici de refondre, dans une discipline autonome (que je propose d’appeler *“algèbre topologique”*) qui jouerait le rôle un peu du pendant “algébrique” de la topologie générale, un certain nombre de visions parcellaires provenant de l’algèbre (co)homologique (commutative ou non-commutative), l’algèbre homotopique, le formalisme algébrico-géométrique des topos (qui est une sorte de paraphrase dûment généralisée de la topologie générale), y compris le formalisme des champs, gerbes etc développé dans la thèse de Giraud, enfin la théorie des  $n$ -catégories et celle des  $n$ -champs de telles  $n$ -catégories (encore dans les limbes). Le besoin d’une telle discipline nouvelle, et certaines des principales idées-force que je compte développer dans le maître d’oeuvre “À la Poursuite des Champs”, me

sont apparus progressivement entre 1955 et la fin des années soixante, en contrepoint ininterrompu avec le développement d’une “géométrie arithmétique”, synthèse (entièrement imprévue encore jusqu’aux débuts des années soixante) de la géométrie algébrique, de la topologie et de l’arithmétique. Je développe réflexions rétrospectives au sujet de la naissance, l’essor et la fortune (et parfois, infortune) ultérieure de ces disciplines nouvelles, ici et là au cours de la réflexion plus vaste poursuivi dans “Récoltes et Semailles”. Qu’il me suffise ici de dire que dans mes propres motivations, aujourd’hui comme il y a vingt ans, l’algèbre topologique (laissée pour compte après mon “départ” en 1970) est avant tout un des principaux *outils d’appoint* pour le développement de cette “géométrie arithmétique”, dont le développement jusqu’au stade d’une pleine maturité m’apparaît comme une des principales tâches qui se posent à la mathématique de notre temps.

Un des signes principaux d’une telle maturité serait une maîtrise complète des notions et idées autour de la notion de *motif*, que j’ai introduites et développées tout au long des années soixante (tombées dans un oubli soudain dès mon “départ” en 1970 et — à une exhumation partielle près en 1982 — jusqu’à aujourd’hui même...), ainsi qu’une maîtrise des principales notions et idées de *géométrie algébrique anabélienne* que j’ai dégagées depuis 1978. En termes imagés, on peut dire que ces deux courants d’idées, le courant “abélien” incarné par la notion de motif, et le courant “anabélien” exemplifié par la structure géométrique-arithmétique de la “tour de Teichmüller”, sont à la “géométrie arithmétique” dans son enfance, ce que courants “complexes de cochaînes — catégories dérivées commutatives” sont à l’algèbre topologique (encore in utero).

La différence essentielle entre ces deux disciplines ne se situe cependant nullement dans leur état d’avancement relatif, circonstance des plus contingentes, apte à changer radicalement en l’espace de quelques années, ne serait-ce que par la vertu de l’écriture de “Pursuing Stacks”. Elle se situe plutôt dans une différence de profondeur. Comme c’était le cas naguère pour le développement d’une “topologie générale” (faite sur mesure pour l’analyste, bien plus que pour le géomètre), le travail essentiel à accomplir pour la mise sur pied de l’“algèbre topologique” est, avant toute autre chose, le *développement d’un langage*, dont le manque se fait sentir (à moi tout au moins) à tous les pas. La dimension de cette tâche me semble être

du même ordre que celle à laquelle se sont vus confrontés Hausdorff et d'autres, dans l'entre-deux-guerres. Elle n'a pas de commune mesure avec la tâche posée par le développement de la géométrie arithmétique, jusqu'au point d'un sentiment de "maîtrise" des principaux courants d'idées qui y confluent. On mesurera cette différence de "dimensions", en se rappelant que la "maîtrise" du "courant anabélien" impliquerait, notamment, une description "purement algébrique" du groupe de Galois de  $\overline{\mathbf{Q}}$  sur  $\mathbf{Q}$ , et de la famille de ses sous-groupes de décomposition et d'inertie associées aux différents nombres premiers. La structure de ces derniers (correspondants aux cas "locaux" des corps  $p$ -adiques) ont été déterminés récemment par Uwe Jannsen, Kay Wingberg et (dans le cas  $p = 2$ ) Volker Diekert, avec une relation principale rappelant étrangement celle qui décrit le groupe fondamental principal d'une courbe algébrique sur le corps des complexes. Mais on est loin sans doute d'une description analogue dans le cas "global".

Pour terminer ce rapport préliminaire, je me sens en mesure d'apporter quelques précisions pratiques au programme "tous azimuts" exposé dans l'Esquisse d'un Programme (qui sera jointe à "Récoltes et Semailles", ainsi que le présent rapport, l'Esquisse Thématique et quelques autres textes de nature mathématique, pour constituer le volume 1 des Réflexions Mathématiques). Je tiens d'abord, avant toute autre chose, à m'acquitter (comme je le dis dans l'Esquisse d'un Programme, par. 7) "d'une dette vis-à-vis de mon passé scientifique", en esquissant tout au moins dans les grandes lignes des principales visions d'ensemble auxquelles j'étais parvenu entre 1955 et 1970 et qui, sans avoir trouvé alors la forme d'exposés systématiques et publiés, ont été laissés pour compte par mes ex-élèves après mon "départ" en 1970. Il s'agit d'une part de l'ensemble d'intuitions et d'idées en direction de l'"algèbre topologique", à laquelle j'ai fait allusion tantôt, et d'autre part d'un "vaste tableau des motifs" qu'il s'agit de "brosser à grands traits", apte à servir à la fois de maître d'oeuvre pour l'édification d'une théorie qui reste conjecturale, et de fil conducteur très sûr et de fécond instrument de découverte, pour pouvoir prédire "à quoi on est en droit de s'attendre" dans une foule de situations impliquant les propriétés géométrico-arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. (Une version très parcellaire de certaines de mes idées à ce sujet est présentée, sans que mon nom y soit prononcé, dans le volume "Hodge Cy-

cles, Motives, and Shimura Varieties” des Lecture Notes (n° 900), 1982, par Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, Kuang-yen Shih.) Je compte poursuivre cette partie de mon programme, au cours des deux ou trois années qui suivent, dans les deux ou trois volumes des Réflexions Mathématiques faisant suite aux deux volumes dont je suis en train de terminer la préparation. Ceci fait, je prévois de me consacrer prioritairement au programme de géométrie algébrique anabélienne — d’une part, tracer à grands traits les principales idées, conjectures et résultats déjà obtenus, et d’autre part, entreprendre une étude géométrie-arithmétique minutieuse de la “tour de Teichmüller”, et plus particulièrement, de ses deux premiers étages.

Le 10.12.1984

Alexandre Grothendieck

## RAPPORT D'ACTIVITÉ

---

- [scan]

## RAPPORT D'ACTIVITÉ

---

Mon enseignement depuis 1978 a consisté



## BRIEF AN V. DIEKERT

3.4.1984

---

- [scan]

Les Aumettes 3.4.1984

Lieber Volker Diekert,

Ich

BRIEF AN V. DIEKERT  
15.4.1984

---

- [scan]

Dear Lipman Bers,

Together with Yves Ladegaillie (a former student of mine) we are running a microseminar on the Teichmüller spaces and groups, my own motivations coming mainly from algebraic geometry, and Ladegaillie's from his interest in the topology of surfaces. Lately we have met with a problem which I would like to submit to you, as I understand you are the main expert on Thurston's hyperbolic geometry approach to Teichmüller space. Before stating the specific problem on hyperbolic "pants" (which things boil down to), let me tell you what we are really after.

Assuming given a compact oriented surface with boundary  $X_0$  as a reference-surface for constructing the Teichmüller-type spaces, of genus  $g$  and with "holes" (satisfying  $2g - 2 + \nu > 0$ ), my primary interest is in the more "algebraic" version of Teichmüller space, corresponding to the question of classifying algebraic non singular curves over  $\mathbb{C}$ , of genus  $g$ , with a system of points (all distinct) given on  $X$ , together with a "Teichmüller rigidification" of  $(X, S)$  namely a homotopy equivalence between  $X_0$  and  $X \setminus S$ . I'll denote this space, homeomorphic to  $\mathbb{C}^d$  (where  $d = 3g - 3 + \nu$ ), by  $\tilde{M}_{g,\nu}$  (the tilde suggesting that it is the universal covering of a finer object I am still more interested in, namely the algebraic variety (or rather "multiplicity", or "stack" in the terminology of Mumford-Deligne) of moduli for algebraic curves of type  $(g, \nu)$ . Thurston however considers a different modular space, where algebraic curves with a given system of points are replaced by compact conformal oriented surfaces *with boundary*, giving rise to a modular space  $\widetilde{MB}_{g,\nu}$  (where the letter  $B$  recalls that we are classifying structures with boundary) homeomorphic to  $\mathbb{C}^d \times (\mathbb{R}^{*+})^\nu$ , where the extra factor corresponds to the extra parameters introducing through the existence of the boundary, namely the length's of the components of the boundary with respect to the canonical hyperbolic structure on the given surface. Our interest is in pinpointing the precise relationships between the two modular spaces. The obvious idea here is to consider the case of an algebraic curve with  $\nu$  points given as a limit-case of a compact conformal surface with boundary, when all the lengths  $l_i$  of the components of the boundary tend to zero. Therefore, it looks suitable to consider both modular spaces above

as embedded in a larger third one, which corresponds to the same modular problem as in Thurston's theory, except that we allow the "boundary" to have some components reduced to just one point, in the neighbourhood of which  $X$  is just a conformal surface without boundary, but with a given point (viewed as a component of such a "generalized boundary"). We now should get a modular space for "compact conformal oriented surfaces with generalized boundary" (of type  $g, \nu$  and rigidified via  $X_0$ ), call it  $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ , homeomorphic to  $\underline{C}^d \times (\underline{R})^\nu$ , where now the second factor corresponds to the "parameters"  $l_i$ , which are allowed to take also value 0 (which means that the corresponding component of the generalized boundary is just one point). Thus  $\widetilde{MB}_{g,\nu}$  appears as a variety with boundary (in the topological sense - in the real analytic sense, the "boundary" admits "corner-like" points obviously), and  $\widetilde{M}_{g,\nu}$  appears as a part of the boundary.

My interest is in a better geometric understanding of the situation, which should be "intrinsic" namely not depend on any particular choice of a surgical decomposition of the reference surface  $X_0$  into "pants", used in order to describe in a handy way standard "coordinate functions" on the modular space  $\widetilde{M}_{g,\nu}$ . There appears to be a geometrically meaningful retraction of  $\widetilde{MB}_{g,\nu}$  upon  $\widetilde{M}_{g,\nu}$  (commuting to the operations of the Teichmüller modular group), the fibers being homeomorphic to  $(\mathbf{R}^+)^{\nu}$  - more specifically, I expect the semi-group  $(\mathbf{R}^+)^I$  (where  $I$  is the set of indices for the "holes" of  $X_0$ ) to act on  $MB$  in a natural way, with free action of the subgroup  $(\mathbf{R}^+)^{\nu}$  upon  $\widetilde{MB}^{\circ}$ , in such a way that  $\widetilde{M}$  is just the quotient of  $\widetilde{MB}$  by this action (or of  $\widetilde{MB}^{\circ}$  by the action of the corresponding subgroup), and that the fiber  $F$  is isomorphic to  $(\mathbf{R}^+)^I$  by the choice of any "origin" in  $F \cap \widetilde{MB}^{\circ}$ .

Of course, "computationally", in terms of a decomposition of  $X_0$  into pants, the idea of such an operation is pretty obvious - namely letting the components  $\lambda_i$  of  $\lambda \in (\mathbf{R}^+)^I$  act as a "multiplier" on the corresponding coordinate  $\lambda_i$ . However, it is not clear that this operation is intrinsic - and if it were intrinsic, an intrinsic geometric description would still be desired.

Of course, in the description of the situation proposed above, the retraction of  $\widetilde{MB}$  upon  $\widetilde{M}$  is obtained by multiplying with the 0 multiplier (all  $\lambda$  are 0). Now there is a direct geometrical description of a retraction, by hyperbolic surgery. Namely, for any compact conformal surface of type  $g, \nu$  with generalized bound-

ary, let's "fill in" the holes which correspond to ordinary components of the boundary, which are Riemannian oriented circles, by "gluing in" the cones on these circles (which are canonically endowed with a conformal structure, using the Riemannian structure on the given circles). Thus we get a "functor" from compact conformal surfaces with generalized boundary (of type  $g, \nu$ ) to compact conformal surfaces *without boundary*, endowed with a system of  $\nu$  points (making up a "wholly degenerate" generalized boundary). When we throw in the rigidifications and go over to isomorphism classes, this should give the desired retraction. However, the geometric situation is a lot richer still, as the compact surface without boundary obtained through surgery is endowed, not only with a system of  $\nu$  points, but moreover with a system of mutually disjoint *discs* around these points. The shape of these discs is by o means arbitrary - we'll say that a system of discs around  $\nu$  points on a compact conformal surface  $\hat{X}$  without boundary is "admissible", if the situation can be obtained as above (up to isomorphism) from surgery, starting with a compact conformal surface  $X$  with boundary. (NB Among the given "discs", we should allow that some should be reduced to their center - we'll call them "degenerate".) The condition of admissibility can be expressed intrinsically, by stating that for every non-degenerate component  $\Gamma_i$  of the system of boundaries of those discs, the two operations we got of the standard circle group (of complex numbers of module 1) upon  $\Gamma_i$ , by using the fact that it is (on the one hand) the boundary of the disc  $D_i$ , and (on the other hand) that it is a component of the boundary of the hyperbolic surface  $\hat{X} \setminus (\bigcup_j D_j^\circ)$ , should be the same. When  $\hat{X}$  and the points  $s_i$  on  $\hat{X}$  are given, the possible admissible systems of discs around the points  $s_i$  depend on  $\nu$  parameters - and the first idea which flaps to mind to give a more precise meaning to these "parameters", is to view them as being the "radii" of those discs. But then we'll have to define what we mean by these!

The idea here is that, when we have a conformal disc  $D$  and an interior point  $s$  of  $D$ , then  $D$  may be viewed as canonically embedded in the tangent space  $T_s$  to  $D$  at  $s$ , as the "unit disc" at  $s$ . Thus, in the situation above of admissible system of discs  $(D_i)_{i \in I}$  around  $(s_i)_{i \in I}$ , for every  $s_i$  corresponding to a non-degenerate  $D_i$ , we get a canonical disc

$$\Delta_i \subset T_{s_i}$$

in the tangent space - and of course, for degenerate  $D_i$ , we'll take  $\Delta_i$  to be degenerate too. The discs we get in a given  $T_{s_i}$  (for a fixed system  $(s_i)$ , and a variable admissible system of discs around these  $s_i$ ) are ll discs in the strict euclidean sense, given by an inequality

$$|z| \leq r_i,$$

where  $z \mapsto |z|$  denotes some hermitian metric on  $T_{s_i}$  compatible with the conformal structure - this metric being unique  $s_i$  up to a scalar factor. The set  $R_i$  of all those possible discs (the non-degenerate ones say) may be viewed in a natural way as a “torsor” (= principal homogeneous space) under  $\mathbf{R}^+$ , which plays here the role of the parameter space of all possible (non degenerate) “radii” at  $s_i$ . If we admit also radius zero, we accordingly get a parameter space  $\hat{R}_i$ , which may be viewed as a torsor of sorts  $\mathbf{R}^+$ . Thus the set of radii for a given admissible system of discs  $D_i$  around the points  $s_i$  may be viewed as a point of the product-space

$$r = (r_i)_{i \in I} \in \hat{R} = \prod_{i \in I} \hat{R}_i.$$

My expectation is that an admissible set of discs  $(D_i)$  is well determined by the knowledge of the corresponding set  $r$  of radii, and moreover that a given set  $r$  of radii corresponds to an admissible system of discs iff it satisfies a set of inequalities

$$r_i < \rho_i,$$

where

$$\rho = (\rho_i)_{i \in I} \in R = \prod_{i \in I} R_i$$

is some fixed system of radii, corresponding to a fixed system of choices of hermitian metrics in the tangent spaces  $T_{s_i}$ .

I now see that this “expectation” doesn't quite match with the previous one, about a “natural operation” of  $(\underline{P}^+)^I$  upon  $\widetilde{MB}$ , having certain properties - it would match only if all  $\rho_i$  were equal to  $+\infty$  (hence not in  $R_i$  itself strictly speaking). I must confess I didn't look too thoroughly yet at the situation, and moreover I've been busy with rather different kind of things for the last two or three months, and lost contact a little...

What is clear however is that the main key to an understanding of the general situation, is in an understanding of the basic particular case of Thurston's pants. If

we number  $0, 1, \infty$  the three “holes” of such a part, the surface  $\hat{X}$  can be identified canonically to the Riemann sphere, and the basic question then is to understand how the pant is embedded in this sphere  $\Sigma$ , as a complement of the union of (open) discs around the points  $0, 1, \infty$ , these discs forming an “admissible system”. So the main question is about understanding the structure of all possible admissible systems of three discs on  $\Sigma$ .

Puzzling a little about this problem, the following model came to my mind (corresponding to “limiting radii”  $\rho_i$  which are *finite*, not infinite). I view  $\Sigma$  as endowed with its usual euclidean metric, for which the real projective line is a great circle, with  $0, 1, \infty$  at equal distance from each other on this equator. These points may be viewed as the centers of three “orange slices”, making up a cellular subdivision of  $\Sigma$ , where the common boundary of two among the “slices”  $Q_i$  ( $i \in \{0, 1, \infty\}$ ) is a half-great circle passing in between  $s_i$  and  $s_j$  at equal distance from both, these three half-circles joining at the two poles  $P^+$  and  $P^-$ . The “disc”  $Q_i$  around  $s_i$  has a conical structure around  $s_i$  (as has any conformal pointed disc), and we may take the concentric discs  $\lambda_i Q_i$  with

$$0 < \lambda_i < 1.$$

The model I had in mind was that the (non degenerate) admissible systems of discs around the points  $s_i$  ( $i \in \{0, 1, \infty\}$ ) are exactly the systems of discs  $\lambda_i Q_i$ , with  $\lambda_i$  as above. (If we allow some discs to be degenerate, this means that instead of the inequality above we merely demand  $0 \leq \lambda_i < 1$ ,  $0$  not excluded.)

This model, if correct, would give a rather precise description of the inclusion relationships between pants, when these are considered as embedded in the sphere. The intersection of all would be this system of these half circles  $C_i$ , and the two poles  $P^+, P^-$  would play a significant role in the geometry of the pants, from this point of view. But it doesn’t seem that neither those half circles (which need not be geodesical I guess), nor the two poles have ever been described as intrinsically associated to a pant. Of course, this model would give alternative “parameters”  $\lambda_i$  for describing a pant, which are best suited for grasping the pants in terms of spherical geometry. The next question would be an understanding of the relationship between these parameters, and Thurston’s  $\ell_i$ . Maybe it is unreasonable to expect that for given index  $i \in \{0, 1, \infty\}$ , the length  $\ell_i$  depends only on  $\lambda_i$  and not on the



other parameters  $\lambda_j$  - and for this reason, the intuition at the beginning of this letter, using Thurston's coordinate functions and notably the  $\ell_i$ 's to get a fibration structure on  $\widetilde{MB}$  over  $\widetilde{M}$ , in terms of a given decomposition of  $X_0$  into pants, is probably not really relevant, namely it is non intrinsic. Assuming the model I am suggesting is correct, the accurate description of  $\widetilde{MB}$  in terms of  $\widetilde{M}$  would be

$$\widetilde{MB} \simeq \widetilde{M} \times [0, 1]^I,$$

where the second factor on the right hand side refers to the system of multipliers  $\lambda_i$  ( $i \in I$ ), tied to the  $r_i$  above by  $r_i = \lambda_i \rho_i$ .

My question of course is whether you have any information or idea to propose, especially on the basic problem of relying pants to spherical geometry, and more specifically, whether the model above is likely to hold, or is definitely false. Also, one difficulty we found with hyperbolic geometry of conformal surfaces, is that apart from existence and unicity of the hyperbolic structure (compatible with the given conformal cone and for which the boundary is geodesic), there seems to be little hold on more specific properties. As an example, starting with a compact conformal surface with boundary  $X$  (a pant, say), of hyperbolic type, and removing an (open) "collar" around the boundary, we get another surface with boundary  $X'$  - what about the relation between the two corresponding metrics? Assuming the model for pants above is correct, it would be nice to have an explicit expression of the metric of a pant in terms of the parameters  $\lambda_i$ .

With my thanks for your attention, and for whatever comment you will care to make, very sincerely yours

1985

---

•

1986

---

•

# VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES

1986

---

- Foundations on topology

## VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES

---

### I. Vers une géométrie des formes (topologiques)

[Apprendre] vers une construction recouvrante (sur l'action naturelles) d'une "géométrie des formes de dimension  $\leq n$ ".

Une "forme de dim 0" soit pour définition  $[]$  dont les éléments sont appelés les "lieux" de la forme.

**Modèle de dimension 1.** — Une tel modèle

$[]$

- 1) Deux ensembles de  $[] L_\alpha$  (ensemble des *lieux* de modèles) et  $S$  (ensemble des *segments* des modèle)
- 2) Une application  $S \longrightarrow \mathfrak{P}(L), I \longrightarrow \tilde{I}$  (lieux sur un segment) - i.e. une relation entre  $S$  et  $L$ .
- 3) Une application  $S \longrightarrow \mathfrak{P}_2(L) []$

**N.B.** J'ignore s'il faut supposer que  $I$  est connu, quand on connaît

**Modèle d'une forme 1-dimensionnelle**

$L$  ensemble de "lieux"

$S$  ensemble de "segments"

## II. Réalisations topologiques des réseaux

### 1. — $[\ ]$ topologique

Soit  $X$  un espace topologique,  $A \subset X$  partie fermée non vide de  $X$ .  $X_{/A}$  l'espace déduit de  $X$  en  $[\ ] A$  en un point, a le point déduit de  $A$  par  $[\ ]$ . Si  $X'$  est une partie de  $X$  contenant  $A$ , alors  $X'_{/A} \hookrightarrow X_{/A}$  identifié  $X'_{/A}$  à un sous-espace topologique de  $X$ .

Les fermées de  $X'_{/A}$  s'identifient aux fermées de  $X'$  qui on bien contient  $A$

## III. Réseaux via découpages

Je voudrais définir une  $[\ ]$  axiomatique a structure  $[\ ]$  réseaux sur un  $[\ ] L$  ( $[\ ]$  de “lieux”).

$[\ ]$

**Exemple 2** Soit  $L$  un ensemble ordonné, on suppose  $L$  filtrant croissante, filtrant décroissant, sans plus grand  $[\ ]$  plus petit élément, localement filtrant croissante et filtrant décroissante divisible.

On appellera un tel ensemble une  $[\ ]$  ordonnée.

## IV. Analysis situs (première mouture)

## V. Algèbre des figures

## VI. Analysis situs (deuxième mouture)

Avant de décrire ce qu'est une  $[\ ]$ , je vais décrire ce qui sera  $[\ ]$  avec notion de multistrates” - la famille des multistrates choisies jouant un peu le rôle des une famille d'ouverts  $[\ ]$  donc une topologie, ou une famille génératrice d'éléments d'un topos. Je vais donc commencer pas

### I. “Algèbre des figures” ou “Ateliers”.

1. — Une *algèbre des figures* implique avant tout trois types d'objets, les *lieux*, les *multistrates*, les *figures*, formant trois ensembles

$$(1.1) \quad L, M, F$$

liées entre eux par diverses applications, et  $[\ ]$  muni de diverses structures. Ainsi, on a des applications canoniques injectives

$$(1.2) \quad L \xhookrightarrow{b)} M \xhookrightarrow{a)} F$$

que nous utiliserons souvent pour identifier un lieu à une multistrate particulière, et une multistrate à une figure particulière ou  $L$  à une sous-ensemble de  $M$ ,  $M$  à un sous-ensemble de  $F$ .

Il y a d'autre part deux entres paires d'applications, que voici :

$$(1.3) \quad [\ ]$$

où  $\text{Fig}(M)$  désigne la partie de  $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$  formée des figures ensemblistes dans  $M$ . On peut considérer que la première application correspond à une relation entre  $M$  et  $F$ , appelée relation d'incidence. Pour une figure  $F$ ,  $\widehat{T}$  s'appelle l'ensemble des *multistrates incidentes*, ou le *déploiement* de la figure  $F$ . Si  $X \in M$ ,  $F \in \widetilde{F}$ , on dire que le multistrate  $X$  est *incidente* à la figure  $F$  ou encore que c'est une *strate de la figure*  $F$ , si  $X \in \widetilde{F}$ . D'autre part, tout élément  $X$  de  $M$  (i.e. toute multistrate),  $[\ ]$  comme une figure par (1.2), admet un déploiement  $\widetilde{X}$ , et on pose

$$(1.4) \quad [\ ]$$

et il résultera des axiomes que c'est une figure ensembliste des  $M$ ,  $[\ ]$  fidèlement par l'un  $\widetilde{F}$  des strates de  $F$ .

En fait,  $M$  sera muni d'une relation d'ordre  $\leq$ ,  $[\ ]$  plus bas, et  $\widetilde{F} \subset M$  sera une partie fermée de  $M$ , et pour tout  $X \in \widetilde{F}$ , on aura

$$(1.5) \quad \widetilde{X} = \{Y \in M \mid Y \leq X\}$$

À cause de cette interpolation, la passage de  $\widetilde{F} \subset M$  à  $\text{Fig}_M(F)$  est à tout  $[\ ]$ , que cette figure ensembliste des  $M$  un semble revenant important - mais à voir...

## VII. Analysis situs (troisième mouture)

## VIII. Analysis situs (quatrième mouture)

1987

---

•



## LETTER TO P. BLASS

8.7.1987

---

- [scan]

Les Aumettes July 8, 1987

Dear Piotr Blass,

Thanks for your letter and MS. I am not going even to glance through the manuscript, as I have completely given up mathematics and mathematical involvements. If you complete your book, you may mention on the cover that it is based on my EGA IV (sic) notes, but you are to be the author and find your own title.

I have a foreboding that we'll contact again before very long, but in relation to more inspiring tasks and vistas than mathematical ones.

With my very best wishes

Alexander Grothendieck

1988

---

•

1990

---

•

## LES DÉRIVATEURS

---

- Écrit entre octobre 1990 et la première moitié de 1991
- [edition] par M. Künzer, J. Malgoire, G. Maltsiniotis

1991

---

•

LETTRE À R. THOMASON  
2.4.1991

---

- Letter about Derivators.
- [edition] by M. Künzer
- [translation] by Tim Hosgood

Cher Thomason,

Merci pour ta lettre, et excuse-moi d'avoir tant tardé à t'écrire. Une raison en est que depuis peut-être deux mois j'étais occupé par une réflexion venue un peu en diversion, que je pensais régler en quelques jours (refrain familial...), et j'ai repoussé ma lettre de semaine en semaine. Cette réflexion ne concerne pas l'algèbre homotopique proprement dite, mais plutôt les fondements de la théorie des catégories, et j'en ai fait nettement plus que ce dont j'ai un besoin immédiat. Mais dès à présent j'ai la conviction qu'une algèbre homotopique (ou, dans une vision plus vaste, une "algèbre topologique") telle que je l'envisage, ne pourra être développée avec toute l'ampleur qui lui appartient, sans les dits fondements catégoriques. Il s'agit d'une théorie des (grosses) catégories que j'appelle à présent "*accessibles*", et des parties accessibles de celles-ci, en reprenant complètement la théorie provisoire que je présente dans SGA 4 I 9. J'ai tissé un tapis de près de deux cents pages sur ce thème d'apparence anodine, et cela me fera plaisir de t'en présenter les grandes lignes, si cela t'intéresse. Il y a aussi quelques problèmes intrigants qui restent, que je pressens difficiles, peut-être même profonds, et qui peut-être (qui sait) t'inspireront, ou quelqu'un d'autre branché sur les fondements de l'outil catégorique. Mais tout cela m'apparaît comme du domaine de l'outil, et je préfère dans cette première lettre te parler de choses plus névralgiques. Les idées-force sont nées pour la plupart depuis vingt-cinq ans et plus, et j'en vois le germe vivace dans mes réflexions solitaires des années 56, 57, quand s'est dégagé pour moi le besoin de catégories de "coefficients" moins prohibitivement gros que les sempiternels complexes de chaînes ou de cochaînes, et l'idée (après de longues perplexités) de construire de telles catégories par passage à une catégorie de fractions (notion qu'il a fallu inventer sur pièces) en "inversant" les quasi-isomorphismes. Le travail conceptuel principal qui restait à faire, et qui m'apparaît maintenant tout aussi fascinant (tant par sa beauté, que par sa portée évidente pour les fondements d'une algèbre cohomologique dans l'esprit d'une théorie des coefficients cohomologiques) qu'en ces temps de mes premières amours avec la cohomologie – c'était de dégager la structure intrinsèque de ces catégories. Le fait que ce travail, que j'avais confié à Verdier vers 1960 et qui était censé faire l'objet de sa thèse, n'ait toujours pas été fait



à l'heure actuelle, même dans le cas des catégories dérivées ordinaires, abéliennes, lesquelles pourtant (par la force des choses) ont bien fini par devenir d'un usage quotidien tant en géométrie qu'en analyse, en dit long sur l'état des mentalités à l'égard des fondements, dans la communauté mathématique.

Ce vent de mépris à l'égard des indispensables travaux de fondements (et plus généralement, pour tout ce qui ne se conforme pas à la mode du jour), je l'ai évoqué dans ma dernière lettre, et j'y reviens bien des fois aussi dans les pages de Récoltes et Semailles, tant c'est là une chose (parmi bien d'autres) qui tout simplement me dépasse. Ta réponse à ma lettre montre d'ailleurs que tu ne l'as absolument pas comprise. Ce n'était pas une lettre pour "me plaindre" de ceci ou de cela qui me déplaisait. Mais c'était une impossible tentative de partager une douleur. Je savais bien au fond que c'était sans espoir ; car tout le monde fuit la douleur, c'est-à-dire fuit la connaissance (car il n'y a pas de connaissance de l'âme qui soit exempte de douleur). Une très rare tentative, peut-être la seule dans ma vie (je ne m'en rappelle pas d'autre en tous cas), et sans doute la dernière...

Il y a deux directions d'idées, intimement solidaires, dont j'ai envie de te parler, que je me suis surtout attaché à développer depuis fin octobre (quand j'ai repris une réflexion mathématique, pour une durée indéterminée). Elles sont d'ailleurs déjà esquissées ici et là (ainsi qu'un bon nombre d'autres idées maîtresses de l'algèbre topologique) dans Pursuing Stacks. Dans cette réflexion de 1983, qui m'a beaucoup aidé maintenant, je finis par me disperser quelque peu à suivre des avenues latérales, plutôt que de revenir aux idées essentielles de mon propos initial. Comme autre source utile pour quelqu'un intéressé par ces questions de fondements, je te signale deux ou trois lettres à Larry Breen, que je pensais d'ailleurs inclure dans le texte publié de Pursuing Stacks (qui sans doute ne verra jamais le jour). D'une part je voudrais te parler de catégories de modèles et de la notion de "dérivateur" (remplaçant les défunctes "catégories dérivées" de Verdier, décidément inadéquates aux besoins). D'autre part j'ai beaucoup de choses à dire sur Cat en tant que catégorie de modèles pour des "types d'homotopie" en tous genres. Mais ce sera sûrement pour une autre fois (à supposer que ton intérêt survive à la lecture de cette lettre-ci). Donc aujourd'hui ce sera les catégories de modèles et la notion de dérivateur.

# 1. La seule structure essentielle d'une catégorie de modèles est la donnée du "localiseur" $W \subset \text{Fl}(M)$ .

Aussi j'appelle "catégorie de modèles" une catégorie  $M$  munie d'un tel "localiseur" (contenant les isomorphismes, et avec deux parmi trois flèches  $u$ ,  $v$  et  $uv$ , aussi la troisième). Les constructions homotopiques essentielles sont indépendantes de toutes structures supplémentaires, tel un ensemble  $C$  de "cofibrations" ou un ensemble  $F$  de "fibrations" ou les deux à la fois. De telles structures supplémentaires sont utiles, dans la mesure où elles permettent d'explicitier les constructions essentielles, et d'en établir l'existence. Mais elles ne sont pas plus essentielles pour le sens intrinsèque des opérations (qu'elles auraient tendance plutôt à obscurcir, jusqu'à présent) que le choix d'une base plus ou moins arbitraire d'un module, en algèbre linéaire. Comme terminologie, je parlerai de "catégories à cofibrations" (ou à fibrations), ou de "catégories (ou triples) de Quillen", etc., quand de telles structures supplémentaires apparaissent.

Par sa richesse en structures délicatement accordées les unes aux autres, ce sont les *triples de Quillen clos*  $(W, C, F)$  qui m'apparaissent comme la plus belle structure de catégorie de modèles "enrichie" découverte jusqu'à ce jour. J'avais cru pouvoir m'en passer, mais finalement n'y suis pas parvenu, et crois qu'ils resteront utiles (sinon absolument indispensables). En sens opposé, par l'économie des moyens mis en œuvre pour arriver pourtant à avoir l'essentiel, c'est la notion de *catégorie à cofibrations* ou à *fibrations* de K. S. Brown (avec la généralisation assez évidente apportée par Anderson) qui m'apparaît la plus belle. Par contre, je ne suis pas arrivé à comprendre la raison d'être du système d'axiomes que tu me proposes dans ta première lettre, te plaçant plus ou moins à mi-chemin entre Quillen et Brown. Tes axiomes (s'ils veulent élargir ceux de Quillen) me paraissent prohibitivement exigeants, en comparaison avec ceux de Brown-Anderson – à cela près, seulement, que tu ne sembles pas exiger que les ensembles  $C$  et  $F$  soient stables par composition. Mais je ne connais guère d'exemple où cet axiome-là ferait problème. Éclaire-moi s'il te plaît s'il y a quelque chose qui m'échappe.

Un exemple : si une structure à fibrations (de Brown-Anderson) satisfait à la condition familière de "propreté" (ce qui est le cas pour les structures considérées d'abord par Brown, où tous les objets sont fibrants sur l'objet final), on peut rem-

placer cette structure  $(W, F)$  par une autre  $(W, F_W)$  canoniquement associée au localiseur  $W$ , i.e. à la catégorie de modèles envisagée, en prenant pour  $F_W$  l'ensemble des flèches dans  $M$  qui sont ce que j'appelle des *W-fibrations*  $f : X \longrightarrow Y$ , i.e. qui sont quarrables et telles que le foncteur changement de base  $Y' \mapsto X' = X \times Y'$  de  $M/Y$  dans  $M/X$  transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes. Pour tout localiseur, c'est là un ensemble de flèches qui contient les isomorphismes, est stable par composition, par changement de base, par facteurs directs. Dire que  $(W, F_W)$  est une structure de Brown, revient à dire qu'il existe "assez de *W-fibrations*", par quoi j'entends que toute flèche  $u$  se factorise en  $u = fi$ , avec  $i \in W$  et  $f \in F_W$ . Et dualement pour les catégories à cofibrations  $(W, C)$ , se remplaçant (dans le cas propre) par des structures  $(W, C_W)$  canoniquement associées au localiseur, en introduisant l'ensemble des *W-cofibrations*. Ainsi, j'aurais tendance plutôt à regarder une structure à fibrations  $(W, F)$  propre (et non "canonique") comme une recette ou un critère pour caractériser certaines *W-fibrations*, avec lesquelles on pourra se contenter souvent de travailler, parce qu'il y en a "assez". Pourtant, j'ai trouvé dans le cas de  $\text{Cat}$  que le travail avec les *W-fibrations* (beaucoup moins restrictives que les "fibrations" à la Quillen que tu avais introduites) était indispensable. Et je suis persuadé qu'il doit être très utile aussi dans une catégorie de modèles telle que  $\Delta^{\wedge}$  (ensembles semi-simpliciaux), car tout en étant substantiellement moins exigeante que la notion de fibration de Kan, celle de *W-fibration* implique déjà tout ce que je considère (à tort ou à raison) comme les propriétés cohomologiques et homotopiques essentielles de ces dernières (lesquelles, selon moi, ne sont pas dans la nature de propriétés de prolongement-relèvement de morphismes). Ainsi, cela doit permettre (par considération de "chemins" infinis) de construire dans  $\Delta^{\wedge}$  l'analogue des espaces de chemins de Cartan-Serre, sans avoir au préalable à remplacer le complexe  $K$  par une enveloppe de Kan. C'est en tous cas ce que j'ai vérifié dans le cas très voisin de  $\text{Cat}$  (sans jamais avoir à faire de détour par  $\Delta^{\wedge}$ ). Cela fait partie des choses dont je voudrais te parler par la suite.

## 2. Prédérivateurs, dérivateurs

Quand j'ai dit que les structures homotopiques essentielles sont déjà contenues dans le localiseur  $W$ , je pensais notamment aux suites exactes des fibrations et des

cofibrations, qui sont un test décisif. Je reste ébahi que Quillen ne souffle mot à ce sujet dans son brillant (et beau) travail, et je présume qu’il a réussi (comme bien d’autres après lui) à ne pas le voir. (Pour le voir, il aurait fallu sans doute qu’il ne soit pas aveuglé par le mépris *a priori* qu’il exprime pour toute recherche de fondements qui irait au-delà de celle qu’il venait de faire, avec un tel succès...) Mais la chose devient évidente dans l’optique des dérivateurs.

L’idée de base des dérivateurs m’est apparue à l’occasion de SGA 5, quand il s’est avéré (découvert par Ferrand, chargé de rédiger un de mes exposés sur les traces en cohomologie) que la notion de catégorie dérivée de Verdier ne se prêtait pas au formalisme des traces : la trace n’est pas additive pour les “triangles exacts”, car cette notion de triangle (vu comme un diagramme dans la catégorie initiale) n’est pas assez fine. Pour bien faire, il faudrait prendre la catégorie des morphismes de complexes (pour lesquels on a une construction fonctorielle d’un *mapping cone*), et passer à la catégorie dérivée de celle-ci. Cette catégorie s’envoie dans celle des triangles de Verdier par un foncteur essentiellement surjectif, mais qui n’a rien de fidèle, et encore moins pleinement fidèle. C’est là le “péché originel” dans la première approche des catégories dérivées, tentée par Verdier — approche dont en tout état de cause, faute d’expérience, on n’aurait pas pu faire l’économie. C’est alors que j’ai été frappé par ce fait, d’apparence anodine, que chaque fois qu’on construit une catégorie dérivée à l’aide d’une catégorie de complexes d’une catégorie abélienne, cette catégorie dérivée, en un sens, “ne vient jamais seule”. En effet, pour toute catégorie d’indices  $I$  (et je pensais alors surtout au cas où  $I$  est finie), on a la catégorie abélienne  $A(I)$  des diagrammes de type  $I$  dans  $A$ , laquelle donne, elle aussi, naissance à une catégorie dérivée, qu’on pourrait noter  $D(I, A)$ . La catégorie des “vrais” triangles s’obtient en prenant  $I = \Delta^1$ , et les catégories dérivées de complexes filtrés, introduites par Illusie pour sauver la mise à bon compte, correspondent aux cas  $I = \Delta^n$  (simplexe-type de dimension  $n$ ). Les variances d’Illusie proviennent simplement du fait que  $D(I, A)$ , pour  $A$  fixé, est contravariant en  $I$ , de façon tautologique. L’idée tentante alors, et que j’ai proposée ici et là sans qu’elle ne rencontre d’écho, c’est que cette structure de foncteur ou, plus exactement, de *2-foncteur*

$$I \mapsto D(I, A)$$

allant de la catégorie  $\text{Cat}$  ou de quelque sous-catégorie assez fournie comme celle des catégories finies ou celle des ensembles ordonnés finis, devrait suffire à incarner toutes les structures essentielles d’une “catégorie dérivée” (encore dans les limbes) ; quitte bien sûr à imposer les axiomes qu’il faut (et que j’ai fini par dégager enfin l’an dernier). On récupère la catégorie dérivée initiale, “nue”, en faisant  $I = e$  (catégorie ponctuelle). Mais il serait impropre, en toute rigueur, de considérer la structure plus complète (que j’appelle maintenant un “*dérivateur*”) comme une structure supplémentaire sur cette catégorie – laquelle continue cependant, dans le formalisme des dérivateurs, à jouer un rôle important, sous le nom de “*catégorie de base*” du dérivateur. La même idée avait l’air de devoir marcher pour les variantes non commutatives de la notion de catégorie dérivée, et le travail de Quillen m’apparaissait comme une incitation puissante à développer ce point de vue. Mais ce n’est qu’il y a quelques mois que je me suis donné le loisir enfin de vérifier que mon intuition était bel et bien justifiée. (Travail d’intendance, quasiment, comme j’en ai fait des centaines et des milliers de fois !)

Ce point acquis, il est bien clair à présent que la notion de dérivateur (plus encore que celle de catégorie de modèles, qui est à mes yeux un simple intermédiaire, “non intrinsèque”, pour construire des dérivateurs) est une parmi les quatre ou cinq notions les plus fondamentales, dans l’algèbre topologique, qui depuis une trentaine d’années déjà attend d’être développée. Comme notions d’une portée comparable, je ne vois guère que celle de *topos*, et celles de *n-catégories* et de *n-champs* sur un topos (notions qui n’ont pas encore été définies à ce jour, sauf pour  $n \leq 2$ ). D’autre part, pour moi le “paradis originel” pour l’algèbre topologique n’est nullement la sempiternelle catégorie  $\Delta^{\wedge}$  semi-simpliciale, si utile soit-elle, et encore moins celle des espaces topologiques (qui l’une et l’autre s’envoient dans la 2-catégorie des topos, qui en est comme une enveloppe commune), mais bien la catégorie  $\text{Cat}$  des petites catégories, vue avec un œil de géomètre par l’ensemble d’intuitions, étonnamment riche, provenant des topos. En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d’ensembles les  $C^{\wedge}$ , avec  $C$  dans  $\text{Cat}$ , sont de loin les plus simples des topos connus, et c’est pour l’avoir senti que j’insiste tant sur l’exemple de ces topos (“catégoriques”) dans SGA 4 I.

J’en viens maintenant à la définition en forme de ce que j’entends par un

“*prédérivateur*”  $D$  – étant entendu déjà que la notion plus délicate de “*dérivateur*” s’en déduit en imposant quelques axiomes bien naturels, dont je te donnerai la liste si tu me la demandes. Pour développer une algèbre des dérivateurs (et tout d’abord, des prédérivateurs), il faut d’abord se fixer un “*domaine*” commun pour ceux qu’on va envisager, c’est-à-dire, une sous-catégorie pleine  $\text{Diag}$  de  $\text{Cat}$ . Le cas qui a ma préférence maintenant est celui où  $\text{Diag}$  est  $\text{Cat}$  tout entier, auquel cas j’interprète un dérivateur comme étant une sorte de “théorie de coefficients” (homologiques ou cohomologiques ou homotopiques, tout cela est pareil) sur  $\text{Cat}$ , catégorie visualisée comme une catégorie d’objets de nature géométrique et spatiale, comme des “espaces” à proprement parler, bien plus que comme de nature algébrique ; tout comme les anneaux commutatifs (via leurs spectres) et les schémas qu’on construit avec eux, sont pour moi des objets géométrico-topologiques par essence, et nullement algébriques. (L’algèbre étant seulement un intermédiaire pour atteindre à la vision géométrique, qui elle est l’essentiel.) Un cas plus ou moins extrême opposé est celui où  $\text{Diag}$  est la catégorie des ensembles ordonnés finis, voire même (à la rigueur) une catégorie plus restreinte encore. Mais pour être vraiment à l’aise, il faudra supposer tôt ou tard que la catégorie  $\text{Diag}$  (des “catégories d’indices” ou des “types de diagrammes”, pour les dérivateurs considérés) soit stable par les constructions courantes sur les catégories : produits finis, sous-catégories, sommes amalgamées, voire même catégories  $\text{Hom}$  ; et aussi bien sûr par passage à la catégorie opposée, particulièrement fréquent pour passer d’un énoncé à un énoncé dual, notamment. Quand il ne s’agit que d’avoir un prédérivateur, dans tous les cas à ma connaissance on peut prendre comme domaine  $\text{Cat}$  tout entier. C’est quand il s’agit de vérifier les axiomes assez draconiens des dérivateurs, seulement, qu’on peut être forcé à restreindre considérablement le domaine comme j’ai évoqué, ou sinon, tout au moins, les flèches  $u : X \longrightarrow Y$  qu’on envisage dans  $\text{Cat}$ , lorsqu’il s’agit de travailler non seulement avec le foncteur correspondant d’image inverse  $u^*$ , mais aussi avec les images directes  $u_!$  et  $u_*$ . Mais là j’anticipe...

Au sujet du domaine, je voudrais encore ajouter qu’à mes yeux le domaine  $\text{Cat}$  ne représente nullement la portée ultime d’un dérivateur donnée. Celui-ci, et plus généralement un prédérivateur  $D$ , étant défini comme un 2-foncteur entre

2-catégories

$$D : \text{Diag}^\circ \longrightarrow$$

(où  $\text{Diag}^\circ$  désigne la catégorie des  $\mathcal{U}$ -catégories contenues ( $\subset$ ) dans l'univers de référence  $\mathcal{U}$ , toujours sous-entendu, alors que  $\text{Cat}$  désigne la catégorie des “petites” catégories, i.e. de celles qui sont des éléments de  $\mathcal{U}$ ), il résulte (d'ailleurs de façon nullement tautologique) des axiomes des dérivateurs (que je n'explicite pas ici) que la catégorie  $D(X)$  (des “coefficients de type  $D$  sur  $X$ ”) associée à une petite catégorie  $X$ , *ne dépend à équivalence près que du topos défini par  $X$* , donc que de la catégorie  $X^\wedge = \text{Hom}(X^\circ, \text{Ens})$  des préfaisceaux d'ensembles sur  $X$ . Plus précisément, si  $f : X \longrightarrow Y$  est une flèche dans  $\text{Cat}$ , alors le foncteur “image inverse” pour les coefficients de type  $D$

$$f^* : D(Y) \longrightarrow D(X)$$

est une équivalence de catégories, pourvu que le foncteur similaire  $Y^\wedge \longrightarrow X^\wedge$  (qui correspond à un dérivateur particulièrement important sur  $\text{Cat} \dots$ ) soit une équivalence de catégories; c'est-à-dire encore pourvu que  $f$  soit pleinement fidèle et que tout objet de  $Y$  soit facteur direct d'un objet de la forme  $f(x)$  (ou encore, que  $f$  induise une équivalence entre les “enveloppes de Karoubi” de  $X$  et de  $Y$ ). Cela implique aussi, quand  $\text{Diag}^\circ$  est égal à  $\text{Cat}$  tout entier, que l'on peut regarder  $D$  comme provenant d'un 2-foncteur

$$\text{Diag}^\circ \longrightarrow$$

allant de la 2-catégorie des topos “catégoriques” (i.e. équivalentes à un topos provenant d'un  $X$  dans  $\text{Cat}$ ) dans la catégorie  $\text{Top}$ . Ceci vu, on peut espérer étendre le dérivateur, c'est-à-dire la théorie de coefficients envisagée, à la catégorie  $\text{Top}$  des topos tout entière, i.e. en un foncteur (qu'on notera encore  $D$ )

$$D : \text{Top}^\circ \longrightarrow \text{Top}$$

J'ai l'idée que ça doit être toujours possible, et de façon essentiellement unique. Ça l'est en tous cas dans tous les cas concrets que j'ai regardés. Si par exemple  $D$  est le dérivateur (abélien) défini par une catégorie abélienne via la catégorie des complexes et la notion de quasi-isomorphisme, on trouve pour tout topos  $X$  (supposant que la catégorie soit celle des  $k$ -modules, où  $k$  est un anneau quelconque)

la catégorie  $D(X, k)$  dérivée de celle des  $k$ -modules sur  $X$ , et celle  $D(X, k)$  dépend bien de façon contravariante de  $X$ . Il est vrai que quand il s'agit de définir les lois *covariantes*  $f_!$  et  $f_*$ , plus exactement d'en établir l'existence, on bute sur le cas de  $f_!$ , cet  $f_!$  n'existe que moyennant des hypothèses draconiennes sur  $f$ . (De toutes façons, j'escroque un peu ici, faute d'avoir explicité des restrictions sur les degrés des complexes, genre  $D^+(X, k)$  ou  $D^-(X, k)$ , Mais ce n'est par le lieu ici d'entrer dans des technicalités.)

Pour ce qui est des axiomes pour les dérivateurs, le plus essentiel de tous est l'existence, pour toute flèche  $f : X \longrightarrow Y$  dans  $\text{Diag}$ , des foncteurs  $f_!$  et  $f_{!D(X) \longrightarrow D(Y)}$ , adjoints à gauche et à droite de  $f^*$ . Ainsi, pour développer (dans la catégorie de base, disons) la théorie de la *suite exacte de suspension*, c'est de l'existence de  $f_!$  qu'on a besoin, et il suffit pour cela que  $\text{Diag}$  contienne les ensembles ordonnés finis (et même nettement moins, si on y tient). Mais je signale que les suites canoniques qu'on construit ainsi à l'aide du seul foncteur  $f_!$  et sous l'hypothèse que le dérivateur soit "ponctué" (*i.e.* les  $D(X)$  ponctué et les foncteurs  $f$  compatibles avec les objets neutres), ne sont exactes que moyennant un "axiome d'exactitude" (à gauche) convenable, faisant partie de la poignée des axiomes d'un dérivateur ; et dualement pour la suite exacte de cosuspension. Ces constructions sont valables d'ailleurs non seulement dans toute catégorie  $D(e)$ , mais aussi comme de juste dans les  $D(X)$ , pour  $X$  dans  $\text{Diag}$ . (En fait,  $D(X)$  peut être considéré comme la catégorie de base d'un "dérivateur induit"  $D_X : Y \mapsto D(X \times Y)$ , auquel on peut appliquer les résultats généraux. Les axiomes des dérivateurs sont tels qu'ils sont stables par passage d'un dérivateur à un dérivateur induit.) Ceci suggère de dissocier les notions de "dérivateur à gauche" (postulant l'existence des images directes homologiques  $f_!$ , à l'exclusion des images directes cohomologiques  $f$ ), de "dérivateur à droite" incluant l'aspect dual du formalisme homotopique. Mais je signale tout de suite que certaines propriétés des dérivateurs qui me paraissent importantes, et même quand leur énoncé ne fait appel qu'à une des deux structures gauche ou droite, sont établies en utilisant l'existence des deux covariances à la fois.

Pour terminer ces généralités sur la notion de dérivateur, je voudrais souligner qu'il est essentiel, dans la notion de prédérivateur (qui est la donnée de base unique), que  $D : \text{Diag} \longrightarrow$  est bien un 2-foncteur, et non seulement un foncteur ;



en d'autres termes, il faut se donner non seulement les  $D(X)$  pour  $X$  dans  $\text{Diag}$ , et les  $f^* = f_D^* = D(f)$  pour les flèches  $f : X \longrightarrow Y$ , mais pour une flèche  $u : f \longrightarrow f'$  entre deux flèches  $f, f' : X \longrightarrow Y$ , il faut se donner un homomorphisme fonctoriel

$$u^* : f'^* \longrightarrow f^*$$

(avec des indices  $D$  s'il y a risque de confusion). Il faut bien voir que, conceptuellement très simple et évidente (et pour cette raison sans doute, méprisée par le “mathématicien sérieux” comme du “*general nonsense*”), la donnée d'un 2-foncteur entre 2-catégories est une espèce de structure très délicate, d'un genre apparemment nouveau en maths ; et qu'on le veuille ou non, c'est bien cette espèce de structure, et elle seule, qui cerne finement les aspects essentiels, c'est-à-dire intrinsèques (indépendants de la catégorie de modèles particulière choisie, ‘à des fins calculatoires, pour décrire le dérivateur) du formalisme homologico-homotopique ; lequel est dans son essence dernière (si je ne me trompe beaucoup) un formalisme de variance de “coefficients”. Tout comme la dualité de Poincaré classique m'a mené vers le formalisme des six opérations (ou “variances”) valable tant dans le contexte des espaces topologiques, que celui des schémas ou des espaces analytiques (et dans bien d'autres encore, comme  $\text{Cat}$ , j'en suis à présent persuadé), formalisme qui à mon sens (et si je ne fais erreur) en capte l'essence ultime et en quelque sorte universelle, indépendante de toute hypothèse de non-singularité, *etc.*

Pour stimuler l'intuition habituée à des contextes d'homologie ou de cohomologie familiers, j'ai trouvé utiles des notations du type suivant, pour un dérivateur donné  $D$ . Si  $X$  est dans  $\text{Diag}$ , et si  $\xi$  est un  $D$ -coefficient sur  $X$ , i.e. un objet de  $D(X)$ , je dénote par

$$H_\bullet^D(\xi) \quad \text{et} \quad H_D^\bullet(\xi)$$

(“objets d'homologie et de cohomologie de  $X$ , à coefficients dans  $\xi$ ”) les objets  $p_!(\xi)$  et  $p_*(\xi)$  respectivement, objets dans la catégorie de base  $D(e) = A_D$  de  $D$ , où  $p : X \longrightarrow e$  est la flèche structurale canonique. Plus généralement, si  $f : X \longrightarrow Y$  est une flèche dans  $\text{Diag}$ , les images de  $\xi$  par les deux images directes peuvent être notées

$$H_\bullet^D(f, \xi) \quad \text{ou} \quad H_\bullet^D(X/Y, \xi), \quad \text{et} \quad H_D^\bullet(f, \xi) \quad \text{ou} \quad H_D^\bullet(X/Y, \xi),$$

c'est l'*homologie* resp. la *cohomologie relative de  $X$  au-dessus de  $Y$* , à coefficients dans  $\xi$ . On peut laisser tomber l'indice ou l'exposant  $D$ , quand aucune confusion n'est à craindre. Par ailleurs, je me suis laissé guider par les intuitions et les réflexes acquis tout au long du développement des SGA, pour développer dans le contexte de Cat (pour commencer) la panoplie des propriétés "cohomologiques" essentielles d'un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  dans Cat, relativement à un dérivateur, c'est-à-dire à une "théorie de coefficients", donné. Mais c'est là quelque chose dont je te parlerai à propos de Cat une autre fois, si tu es intéressé.

### 3. Prédérivateur défini par une catégorie de modèles, et problème d'existence de $f_!$ , $f_*$ .

La plupart des dérivateurs que je connais sont définis à l'aide de catégories de modèles  $(M, W)$ . Une telle catégorie définit en tous cas un prédérivateur sur Cat tout entier, en posant

$$D_{(M,W)}(X) = M(X)(W(X))^{-1},$$

où je désigne maintenant par

$$M(X) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\text{Hom}}(X^\circ, M)$$

la catégorie des préfaisceaux sur  $X$  à valeurs dans  $M$  (donc celle des "diagrammes de type  $X^\circ$ ", et non de type  $X$ , dans  $M$ ), et  $W(X)$  l'ensemble des flèches dans cette catégorie, qui "sont dans  $W$  argument par argument". La loi de 2-foncteur contravariant de  $D(X)$  en  $X$  est claire. Quand  $W$  est l'ensemble des isomorphismes dans  $M$ , j'écris aussi  $D_M$  au lieu du double indice. C'est un cas qu'on peut considérer comme "trivial", mais qui pour autant ne manque pas d'intérêt. Ainsi,  $D_M$  est un dérivateur (satisfaisant à tous les axiomes), pourvu seulement que  $M$  soit stable par petites limites inductives et projectives (les unes assurant l'existence des  $f_!$ , les autres celle des  $f_*$ ). Dans le cas où  $M = \text{Ens}$ , on trouve  $D(X) = X^\wedge$ , c'est là un dérivateur important à mes yeux (si trivial soit-il), et les propriétés "cohomologiques" des flèches de Cat, relativement à ce dérivateur, ne sont nullement choses triviales. Dans le cas où  $W$  est quelconque, je note aussi  $D_W$  au lieu du double indice, il est rare qu'une confusion soit à craindre. La question principale qui se pose alors, c'est bien sûr celle de l'existence des foncteurs  $f_!$  et  $f_*$ . Contrairement à toi, je n'ai

aucun scrupule ici à supposer la catégorie  $M$  stable par tous les types de limites dont on a besoin, donc (si on veut travailler sur  $\text{Cat}$  tout entier) stable par petites limites inductives et projectives. Je ne serais pas étonné qu'il y ait un théorème qui assure que tout dérivateur sur  $\text{Cat}$  peut se décrire à l'aide d'une telle catégorie de modèles (à équivalence de dérivateurs près), ou du moins comme limite inductive filtrante de tels dérivateurs. J'entrevois dans ces grandes lignes, une "algèbre des dérivateurs" (consistant en un certain nombre d'opérations fondamentales au sein de la 2-catégorie de tous les dérivateurs, sur  $\text{Cat}$  disons comme domaine), laquelle serait le reflet d'opérations algébriques de nature similaire, qui s'effectuent au niveau des catégories de modèles. J'ai comme une impression, par une allusion dans ta lettre du mois de janvier, que tu as quelque idée ou intuition de ce genre de structures, et on pourra en reparler. Mais je souligne tout de suite que pour moi, le véritable objet d'opérations au niveau des catégories de modèles, c'est d'obtenir des opérations sur les dérivateurs (ou les prédérivateurs, pour commencer) associés.

À ce sujet, une remarque au sujet de la fonctorialité du prédérivateur associé à une catégorie de modèles  $(M, W)$ . Il est clair qu'on obtient un 2-foncteur

$$(*) \quad \longrightarrow$$

allant de la 2-catégorie des catégories de modèles (ce n'est d'ailleurs pas une  $\mathcal{U}$ -catégorie, si on ne fait des restrictions sur les catégories envisagées et sur les foncteurs admis, en plus d'être compatibles aux localiseurs). Mais si on a deux catégories de modèles, il y a lieu d'introduire dans la catégorie

$$\underline{\text{Hom}}((M, W), (M', W')) \quad \text{ou} \quad \underline{\text{Hom}}(M, M')$$

(cette dernière notation, si les localiseurs  $W, W'$  sont sous-entendus dans les notations  $M, M'$ ) un localiseur bien naturel  $W_{M, M'}$ , formé des morphismes  $u : F \longrightarrow G$  entre morphismes de catégories de modèles  $F, G$ , tels que  $u(x) : F(x) \longrightarrow G(x)$  soit dans  $W'$ , pour tout  $x$  dans  $M$ . Appelons-les les "*quasi-isomorphismes*" (relatifs aux localiseurs  $W, W'$ ). Il est clair que les quasi-isomorphismes sont transformés en isomorphismes par le 2-foncteur précédent, donc en passant à la catégorie des fractions, on trouve un foncteur (dédit de  $(*)$ )

$$(**) \quad H(M, M') \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(D_M, D_{M'})$$

où dans la notation il est sous-entendu que  $M$  et  $M'$  sont munis de leurs localiseurs  $W$ ,  $W'$ . Ainsi, les catégories de modèles peuvent être regardées à présent comme les 0-objets d'une 2-catégorie, dont les catégories de flèches sont les catégories localisées  $H(M, M')$  précédentes, et on trouve un 2-foncteur canonique de cette 2-catégorie, que j'ai envie d'appeler catégorie dérivée (?) de la catégorie des catégories de modèles, et de noter, dans celle des prédérivateurs, au moyen des foncteurs (\*\*)

$$(***) \quad \longrightarrow .$$

Le point auquel je veux en venir est le suivant : si  $M$  et  $M'$  sont deux catégories de modèles qui sont équivalentes en tant que 0-objets de cette 2-catégorie, alors les prédérivateurs associés sont équivalents, donc à toutes fins pratiques, peuvent être identifiés (du moins, quand l'équivalence initiale est donnée). Ceci (et bien sûr d'innombrables exemples) illustre à quel point une catégorie de modèles est un objet "encombrant" (si j'ose dire), encombré d'aspects inessentiels, en comparaison avec le dérivateur associé, qui à mes yeux représente sa quintessence du point de vue "homotopique" ou "cohomologique". Un peu comme la donnée d'une base pour un espace vectoriel, ou d'un système de générateurs et de relations pour un groupe, ou un système d'équations pour une variété<sup>1</sup>. Il n'y a aucun inconvénient à travailler avec ces "superstructures", et bien souvent on ne peut même s'en passer. Il est cependant important, pour une compréhension en profondeur, de ne pas pour autant laisser brouiller et perdre de vue les objets géométriques essentiels (espace vectoriel, groupe, variété, dérivateur) et leur caractère intrinsèque.

J'ignore s'il est raisonnable de s'attendre, pour le 2-foncteur précédent (), à des propriétés de fidélité, ou de surjectivité essentielle, en limitant au besoin les catégories de modèles envisagées, de façon par exemple à assurer qu'elles donnent

---

<sup>1</sup>Une première comparaison qui m'était venue (elle s'est perdue en route) me paraît plus frappante : la relation entre catégorie de modèles et dérivateur associé, s'apparente pour moi à celle entre un complexe dans une catégorie abélienne, et l'objet correspondant dans la catégorie dérivée. Et l'effort conceptuel qu'il m'avait fallu faire pour parvenir à la notion de catégorie dérivée, s'apparente un peu à celui (plus modeste à mon sens) que les gens devront fournir un jour pour accéder à la notion de dérivateur et au "yoga des dérivateurs" – lequel ne s'acquiert qu'en travaillant avec !

naissance à des dérivateurs, et non seulement des prédérivateurs. Cela fait partie en tous cas des questions qu'on devra bien examiner un jour (dans ce monde-ci, s'il en est temps, ou sinon dans l'autre...). J'avoue que jusqu'à présent, mon intuition des dérivateurs s'est beaucoup appuyée sur le formalisme des catégories de modèles.

Mais il me faut revenir sur le cas où on se donne une catégorie de modèles fixe  $(M, W)$ , et sur la grande perplexité de l'existence des foncteurs  $f_!$  et  $f_*$ . Techniquement parlant, c'est là, visiblement, une des questions les plus cruciales qui se posent pour le développement de l'algèbre topologique, telle que je l'envisage. Or pour cette question fondamentale, je n'ai que des éléments de réponse bien fragmentaires, et manifestement insatisfaisants (et sans doute aussi insuffisants à la longue). Prenant le cas où  $\text{Diag}$  est égal à  $\text{Cat}$  : j'avoue (à ma honte !) que je n'ai pas même construit d'exemple d'une catégorie de modèles, stable par petites limites (inductives et projectives), et telle que les foncteurs  $f_!$  et  $f_*$  n'existent pas pour toute flèche  $f$  dans  $\text{Cat}$ , pour le prédérivateur associé. Je ne m'attends nullement d'ailleurs à ce qu'ils existent toujours, même si on fait des hypothèses du type :  $W$  stable par limites inductives filtrantes, et la catégorie  $M$  accessible et  $W$  une partie accessible de  $\text{Fl}(M)$  (hypothèses qui me paraissent relativement anodines). D'autre part, je n'ai pu prouver l'existence de ces foncteurs que dans des cas extrêmement particuliers, que je renonce à expliciter dans cette lettre (devenue prohibitivement longue). Je ne connais pas un cas où je sache l'établir, sans supposer tout au moins que la catégorie de modèles est associée à un triple de Quillen clos (et plus encore) ! La situation est quand même meilleure si on est moins exigeant et prend comme domaine  $\text{Diag}$  (disons) la catégorie des ensembles ordonnés finis. À ce moment-là, il suffit que  $W$  soit associé à une catégorie à cofibrations (pour avoir  $f_!$ ) ou à fibrations (pour avoir  $f_*$ ), sans qu'il soit nécessaire d'ailleurs (pour avoir bel et bien un dérivateur) que ces deux structures duales soient reliées entre elles autrement que par le localiseur commun  $W$ .

C'est le moment de dire que le travail de Anderson (dont tu m'as envoyé une photocopie), où il prétend donner une esquisse d'un théorème très général en ce sens (qui aurait en effet comblé mes vœux !), est totalement canulé – même déjà dans le cas d'un ensemble ordonné fini  $I$ , et du morphisme structural  $I \longrightarrow e$ , i.e. pour l'existence des dérivateurs ordinaires sur  $I$ . Sa soi-disant idée de démonstration

déconne en deux endroits qui me paraissent essentiels, et je doute fort qu'elle soit récupérable, bien que je n'aie pas de contre-exemple au théorème qu'il énonce, et dont il ne daigne pas même donner une démonstration. Ayant regardé ce travail (si on peut l'appeler ainsi) avec attention, je suis heureux qu'il ne soit pas de toi – il me fait grincer des dents du début à la fin, et plus que ça. Je ne le regrette pas, car si je n'ai guère appris de maths en le lisant, j'y ai appris autre chose de moins facile et de moins réjouissant que les maths, et plus important.

Je suis d'ailleurs ébahi que dix ans se soient passés depuis cet article, sans que personne apparemment ne s'aperçoive qu'il ne tient pas debout. Visiblement, ce théorème, c'était comme une pièce de musée, une prouesse pour rien – personne n'en avait rien à foutre. Même chez des plus "cotés" que lui, les théorèmes souvent, ce n'est plus une porte ouverte sur quelque chose, qu'on n'avait pas vue avant et qu'on voit, ni même un outil pour forcer les portes qu'on n'arrive à ouvrir en douceur – mais un trophée. Peu importe alors qu'il soit vrai ou faux – ça ne fait strictement plus aucune différence...

Sauf si tu as besoin de précisions, je crois inutile que j'entre dans des détails – tu es bien capable de trouver tout seul où ça foire (sur l'air du "il est évident que"...). Et de plus, il est temps que je m'arrête, bien que je ne sois pas parvenu encore à ce qui, techniquement, était prévu comme substance principale de ma lettre : le "théorème de factorisation", et son application à des théorèmes de stabilité pour des structures de Quillen. Ce sera donc sans doute pour ma prochaine lettre, si tu es intéressé à continuer cette correspondance. Auquel cas je serai très heureux de t'avoir comme interlocuteur de mes cogitations !

En attendant, reçois mes amitiés

LETTRE À A. Y.  
24.6.1991

---

- [scan]

Les Aumettes, le 24.6.1991

Cher Monsieur,

Excusez-moi d'avoir mis si longtemps à réagir à votre longue et sympathique lettre (du 25 mai), ayant été très accaparé par des tâches et préoccupations extra-scientifiques. Cela n'a pas empêché que j'ai été sensible au souffle d'un enthousiasme et à la faculté d'émerveillement qui transparaissait derrière les explications  $\pm$  techniques. Je dois vous avouer que vu ma très grande ignorance en physique, ces explications m'ont passé totalement par dessus la tête. Aussi j'ai bien peur que ma réponse vous laissera sur votre faim. Visiblement, il faut des yeux totalement neufs, et un flair consommé pour l'"invention" (en fait, la découverte) de structures mathématiques (au service d'intuitions à la fois physiques et philosophiques) pour dégager les notions de base et forger les outils conceptuels d'une physique nouvelle. Avez-vous ces grands dons, et la foi en votre "voix intérieure", pour démarrer à neuf, à contre-courant de toutes les idées reçues, pour une œuvre de rénovation plus radicale encore, peut-être, que celles qui furent accomplies par Einstein et par Schrödinger?

Avez-vous le courage pour faire un tel pari – voilà la question! Sans autre guide que votre bon sens d'enfant, et votre flair, pour un long voyage sans perspective de compagnons de route... Pour que je puisse être d'un réel secours pour un tel voyage dans l'inconnu, il y faudrait d'une part un investissement que je ne suis plus disposé à fournir – ne serait-ce que pour me mettre au courant dans les grandes lignes au moins des bases conceptuelles de la physique théorique actuelle, de ses cohérences et de ses incohérences. Malheureusement, je ne connais non plus aucun mathématicien que me paraîtrait apte au rôle de coéquipier dans un tandem physico-mathématique pour le genre de travail qu'il y aurait à faire (et auquel j'ai rêvé plus d'une fois!)

Il est vrai qu'au cours des dix dernières années, j'ai réfléchi ici et là à diverses extensions de la notion d'espace, en gardant à l'esprit la remarque pénétrante de Riemann. J'en parle dans quelques lettres à des amis physiciens ou "relativistes". Il ne doit pas être très difficile p. ex. de développer une sorte de calcul différentiel sur des "variétés" qui seraient des ensembles finis (mais à cardinal "très grand"), ou plus généralement discrets, visualisés comme formant une sorte de "réseau" très



serré de points dans une variété  $C^\infty$  (p. ex. une variété riemannienne) – une sorte de géométrie différentielle “floue”, où toutes les notions numériques sont définies seulement “à  $\varepsilon$  près”, pour un ordre d’approximation  $\varepsilon$  donné. Comme prédit par Riemann, une telle géométrie différentielle floue, par la force des choses, serait nettement plus délicate et compliquée que la géométrie différentielle ordinaire. Mais peut-être pas *tellement* plus compliquée ! Dans cette approche, le point faible à présent, c’est qu’il ne semble pas que la physique nous fournisse quelque idée de “quanta” d’espace-temps, qui seraient les “points” d’une telle variété discrète. (Il est vrai que lorsque fut formulée et progressivement admise au siècle dernier, “l’hypothèse atomiste”, on n’en savait guère plus sur ces fameux atomes que qu’ils pourraient peut-être exister...) Je suspecte que les nouvelles structures à dégager seront beaucoup plus subtiles qu’un simple paraphrase de modèles continus connus en termes discrets<sup>1</sup>. *Et surtout, qu’avant toute tentative de dégager des nouveaux modèles, présumés meilleurs que les anciens, il s’impose de poursuivre une réflexion philosophico-mathématique très servie sur la notion même de “modèle mathématique” de quelque aspect de la réalité – sur son rôle, son utilité, et ses limites.*

Je crains que je ne puisse guère vous en dire plus que ces commentaires généraux. S’ils pouvaient pourtant vous être utiles de quelque façon – ne serait-ce que pour vous encourager dans votre aventure solitaire – j’en serais très heureux. Avec mes meilleurs souhaits

Alexandre Grothendieck

---

<sup>1</sup>Il n’est pas exclu pourtant que ce qui pouvait sembler initialement un simple exercice de “paraphrase” de notions bien connues dans un contexte conceptuel nouveau, amène, par la logique intérieure de la recherche, à des concepts totalement nouveaux et inattendus. (C’est là une chose qui n’est pas rare dans le travail de découverte des structures mathématiques.) Il faut des années de tâtonnement, sans doute, avant que des intuitions éparses finissent par s’assembler en une vision d’ensemble

1992 — 2014

---

•

## CATÉGORIES TANNAKIENNES

---

- [scan]

# CATÉGORIES TANNAKIENNES

## à partir de 1958

---

### Catégories tannakiennes définies par des cristaux

1. — Soit  $k$  un corps de car.  $p > 0$ , qu'on regarde comme algèbre sur  $\mathbf{Z}_p$ , dont l'idéal maximal est muni de puissances divisées. Cela donne un sens au site cristallin de  $k$  (sur  $\mathbf{Z}_p$ , qualifié aussi de "absolu"), et aux Modules loc. libres de type fini (resp. de présentation finie), sur ledit, qu'on appellera aussi cristaux en modules (localement libres resp. de présentation finie) sur  $k$ . Ces cristaux forment une  $\otimes$ -catégorie  $\mathbf{Z}_p$ -linéaire. On peut expliciter cette catégorie à l'aide d'un  $p$ -anneau  $W$  de corps résiduel  $k$ , comme la catégorie des modules libres de type fini

2. —

3. —

4.

La catégorie tannakienne  $Fcriso(k)$  est un invariant arithmétique intéressant attaché à  $k$  (fonctoriellement) ; sa connaissance équivaut à celle de la gerbe associée (sur  $\mathbf{Q}_p$ ), soit  $G(k)$  ?

### 5. $F$ -cristaux de pente nulle

On définira plus loin la *pente* d'un  $F$ -cristal "homogène". Ici, nous allons introduire directement les  $F$ -cristaux de pente nulle

**6.**

Considérons maintenant un homomorphisme de corps

$$k \longrightarrow k',$$

d'où un homomorphisme de catégories tannakiennes sur  $\mathbf{Q}_p$

**7.**

**8.**

**9.**

Pour  $k$  quelconque, on trouve un  $\otimes$ -homomorphisme canonique défini à isomorphisme unique près (on utilise un choix d'une clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$ , mais ce choix est inessentiel...)

**10. Cas  $k$  fini**

## FILTRATIONS SUR FONCTEURS FIBRES POUR CATÉGORIES TENSORIELLES

---

- [scan]

FILTRATIONS SUR FONCTEURS FIBRES POUR  
CATÉGORIES TENSORIELLES  
à partir de 1958

---

## QUELQUES EXEMPLES DE CATÉGORIES TENSORIELLES

---

- [scan]



## QUELQUES EXEMPLES DE CATÉGORIES TENSORIELLES

Notes Saavedra

à partir de 1958

- 
- 1) Soit  $M$  un groupe. Soit  $\mathcal{C}_M$  la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps  $k$ , munis d'une graduation de type  $M$ . C'est une catégorie tensorielle sur  $k$ , munie d'un foncteur fibre sur  $k$ , le foncteur "oubli de la graduation". Le groupe algébrique associé est le groupe de type multiplicatif  $D_k(M)$  (SGA 3 I 4.7.3). Par exemple si  $M = \mathbf{Z}^r$ , on trouve  $G = \mathbf{G}_m^r$ .

Application : Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie tensorielle sur  $k$  munie d'un foncteur fibre  $F$  sur  $k$ , donc associée à un schéma en groupes affine  $G$  sur  $k$ . On cherche toutes les façons de mettre, pour chaque  $M \in \text{Ob } \mathcal{C}$ , une graduation de type  $M$  sur  $F(V)$ , de façon fonctorielle en  $M$ , et compatible (dans un sens évident) avec les produits tensoriels. Elles correspondent aux  $\otimes$ -foncteurs de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}_M$  compatibles avec les foncteurs fibres, donc aux homomorphismes de  $D_k(M)$  dans  $G$ . Par exemple, si  $M = \mathbf{Z}^r$ , il faut prendre les homomorphismes de  $\mathbf{G}_m^r$  dans  $G$ .

Dans la situation précédente, on peut se demander quand une  $\otimes$ -graduation de type  $M$  du foncteur  $F$  correspond à une graduation de type  $M$  du foncteur identique de  $\mathcal{C}$ , i.e. pour tout  $V$ , la graduation de  $F(V)$  provient d'une graduation de  $V$ . On trouve qu'il faut et il suffit pour cela que l'homomorphisme correspondant  $D_k(M) \longrightarrow G$  soit central. Par exemple, si  $\mathcal{C}$  est la catégorie des motifs sur  $k$ , et si on dispose d'un foncteur fibre  $F$  de  $\mathcal{C}$  sur  $k$ , alors on trouve un homomorphisme central canonique  $i : \mathbf{G}_m \longrightarrow G$ . D'ailleurs, la donnée du motif de Tate (qui est de

rang 2, et de “poids” 2 pour la graduation naturelle) correspond à la donnée d’un homomorphisme  $j : G \longrightarrow \mathbf{G}_m = \mathrm{Gl}(l)$ . Le fait que  $T$  soit de poids 2 s’exprime par la relation

$$ji(\lambda) = \lambda^2.$$

Lorsque  $k$  est de caractéristique nulle, on a toujours un foncteur fibre naturel : le *foncteur de Hodge*, qui à la cohomologie motivique d’une variété (projective lisse)  $X$  associe le vectoriel bigradué  $\mathrm{III}^q(X, \underline{\Omega}_{X/k}^p)$ . Donc pour le groupe de Galois motivique correspondant  $G$ , on trouve un homomorphisme naturel

$$\mathbf{G}_m^2 \longrightarrow G,$$

i.e. deux homomorphismes commutant l’un à l’autre

$$i_1, i_2 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G.$$

Le fait que la graduation totale dans la cohomologie de Hodge corresponde au poids des motifs s’exprime par la relation

$$i(\lambda) = i_1(\lambda)i_2(\lambda);$$

on fera attention que  $i_1$  et  $i_2$  ne sont pas centraux (car la bigraduation en cohomologie de Hodge ne correspond pas à une bigraduation d’un motif !))

- 2) Prenant toujours pour  $\mathcal{C}$  la catégorie des motifs sur  $k$ , avec  $k$  de car. nulle, on a un autre foncteur fibre canonique, le *foncteur de De Rham* qui associe à la cohomologie motivique d’une variété  $X$  le vectoriel  $H^*(X, \Omega_{X/k}^*)$  (espace d’hypercohomologie). Ce vectoriel n’est plus bigradué mais seulement gradué et filtré, la filtration étant celle associée à la suite spectrale d’hypercohomologie, commençant avec la cohomologie de Hodge. On sait d’ailleurs que cette suite spectrale dégénère (théorie de Hodge), donc  $\mathrm{Gr}(H_{\mathrm{DR}}(V)) \simeq H_{\mathrm{Hdg}}(V)$  (isomorphisme fonctoriel en le motif  $V$ ). On peut se proposer d’analyser à quelle structure supplémentaire, sur le groupe de Galois motivique associé au foncteur fibré  $H_{\mathrm{DR}}$ , correspond la filtration canonique de ce foncteur.

De façon générale, étant donné une catégorie tensorielle  $\mathcal{C}$  sur  $k$  munie d'un foncteur fibre  $F$ , on peut se proposer de déterminer les filtrations sur  $F$  (décroissantes, discrètes, indexées par  $\mathbf{Z}$ ) compatibles avec les produits tensoriels (en utilisant la notion évidente de produit tensoriel de deux espaces vectoriels filtrés). On notera qu'une telle donnée ne pourra plus s'exprimer par un homomorphisme d'un certain groupe algébrique dans  $G$  (le groupe de Galois de  $\mathcal{C}$  en  $F$ ), car la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur  $k$ , munis d'une filtration décroissante discrète indexée par  $\mathbf{Z}$ , n'est pas une catégorie abélienne (les bimorphismes ne sont pas des isomorphismes). Mais à une telle donnée est associée un deuxième foncteur fibre  $F(V) = \text{Gr } F(V)$ , à valeurs cette fois-ci dans les vectoriels gradués (NB  $F$  joue le rôle de la cohomologie de De Rham,  $F'$  celle de la cohomologie de Hodge, muni de la graduation par). La donnée de  $F'$  correspond à un homomorphisme  $i_1 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G'$ . Considérons alors sur  $F'$  la filtration décroissante associée à sa graduation, et soit  $H'_{i_1} = \underline{\text{AutFilt}}^1(F') \subset \underline{\text{Aut}}(F') = G'$  le sous-schéma en groupes de  $G$  qui correspond aux  $\otimes$ -automorphismes de  $F'$  (ou plutôt des  $F'_{k'}$ ,  $k'$  une  $k$ -algèbre quelconque) qui respectent sa filtration et induisant l'identité sur le graduée associée ; il est canoniquement déterminé par  $i$ . On peut aussi regarder le sous-schéma

$$Q = \underline{\text{IsomFilt}}^1(F, F') \subset P = \underline{\text{Isom}}(F, F')$$

du schéma  $P$  des  $\otimes$ -isomorphismes de  $F$  avec  $F'$ , qui correspond aux automorphismes respectant les filtrations de  $F$  et  $F'$  et induisant l'identité sur les graduées associées. C'est à priori un pseudo-foncteur à gauche sous  $H'$ , i.e. il est vide ou un torseur à droite sous  $H'$ . **Il faudrait prouver** que c'est bien un torseur (i.e. que sur une extension convenable  $k'$  de  $k$ , on peut trouver un isomorphisme de  $F_{k'}$  avec  $F'_{k'}$  respectant les filtrations). Donc on trouve une restriction du groupe d'opérateurs (à gauche)  $G'$  de  $P$  au sous-groupe  $H'$ , par un  $H'$ -torseur à gauche  $Q$ .

Moyennant la vérification laissée en suspens à l'instant, on trouve alors que la donnée d'un "foncteur fibre *filtré*"  $F$  de  $\mathcal{C}$  sur  $k$  revient à la donnée

- (i) D'un foncteur fibre  $F'$  (d'où un groupe de Galois  $G' = \underline{\text{Aut}}(F')$ ) ;
- (ii) D'une graduation de type  $\mathbf{Z}$  de  $F'$ , i.e. un homomorphisme

$$i_1 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G',$$

(iii) D'un torseur à gauche  $Q'$  sous  $H'_{i_1}$ .

A ces données, on associe simplement le foncteur fibre tordu

$$F = F' \bigwedge^{H'_{i_1}} Q',$$

$F$  étant filtré par la filtration déduite de celle de  $F'$  (associée à la graduation de  $F'$ ) en tordant par  $Q'$ .

On constate aisément que le groupe  $H'$  est nécessairement une limite projective de groupes algébriques *unipotents*. On en conclut aussitôt que si  $\mathcal{C}$  est à engendrement fini (ou, plus généralement, à engendrement dénombrable, de façon que  $G'$  donc aussi  $H'$  soit limite projective d'une *suite* de groupes algébriques) alors tout torseur sous  $H'$  est trivial ; cela signifie ici que tout foncteur fibre filtré est en fait associé à un foncteur fibre gradué (en prenant la filtration correspondant à la graduation) i.e. que la filtration dudit foncteur admet un splittage compatible avec les produits tensoriels. Mais le choix d'un tel splittage équivaut à celui d'un point sur un certain torseur à droite  $Q = Q'$  sous le schéma en groupes  $H$  des automorphismes de  $F$  respectant la filtration et induisant l'identité sur le gradué associé ; il n'est pas du tout canonique !

- 3) Appelons *pré-structure de Hodge* sur un espace vectoriel  $V$  de dimension finie sur  $\mathbf{Q}$ , la donnée d'une bigraduation sur  $V \otimes_{\mathbf{Q}} C = V_C$ ,  $V_{\mathcal{C}} = \coprod_{p,q} V^{p,q}$ , telle que a) la graduation totale correspondante soit "définie sur  $\mathbf{Q}$ " i.e.  $\coprod_{p+q=n} V^{p,q}$  provienne d'un sous espace  $V_{\mathbf{Q}}^n$  de  $V$ , et b) on a  $\overline{V}^{p,q} = V^{q,p}$ , où  $x \mapsto \overline{x}$  désigne la conjugaison complexe. (NB Généralisation à des corps plus généraux laissée à Saavedra). Les vectoriels  $V$  munis d'une pré-structure de Hodge forment une catégorie tensorielle sur  $\mathbf{Q}$  dans un sens évident, muni d'un foncteur fibre canonique, le foncteur "oubli"  $F$ . On trouve donc un groupe de Galois  $G$ , et plus généralement toute  $\otimes$ -sous-catégorie  $\mathcal{C}$  de la catégorie précédente nous définit un groupe de Galois  $G$ . La bigraduation sur le foncteur  $F_{\mathcal{C}}(V) = V \otimes_{\mathbf{Q}} \mathcal{C}$  correspond, en vertu de 1) (où il convient cependant de se permettre une extension du corps de base sur le foncteur fibre envisagé...) d'un homomorphisme  $\mathcal{G}_{mC}^2 \longrightarrow G_{\mathcal{C}}$ , i.e. de deux homo-

morphismes qui commutent

$$i_1, i_2 : \mathcal{G}_{m\mathbb{C}} \longrightarrow G_{\mathcal{C}}.$$

Les deux conditions a) et b) imposées aux structures envisagées s'interprètent respectivement par les faits que l'homomorphisme

$$i_{\mathcal{C}} = i_1 i_2 : \lambda \mapsto i_1(\lambda) i_2(\lambda)$$

est “défini sur  $\mathbf{Q}$ ” i.e. provient d'un homomorphisme

$$i : G_m \longrightarrow G,$$

(nécessairement central, car les composantes homogènes  $V_{\mathbf{Q}}^n$  d'une pré-structure de Hodge sont évidemment munis d'une pré-structure de Hodge de façon que  $V$  soit la somme directe de  $V_{\mathbf{Q}}^n$  en tant que pré-structure de Hodge), et par la condition que l'on a

$$i_2 = \overline{i_1} \quad \text{i.e.} \quad i_2(\lambda) = \overline{i_1(\overline{\lambda})} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathcal{C}.$$

Si à toute variété projective lisse  $X$  sur  $\mathbf{C}$  on associe sa cohomologie rationnelle  $H^*(X, \mathbf{Q}) = V$ , de sorte que  $V_{\mathbf{C}} = H^*(X, \mathbf{C})$  est isomorphe canoniquement (par la théorie de Hodge) à  $H_{\text{Hdg}}(X) = \coprod H^q(X, \underline{\Omega}_{X/\mathbf{C}}^p)$ , on voit qu'on trouve ainsi une pré-structure de Hodge sur  $H(X, \mathbf{Q})$ , d'où un  $\otimes$ -foncteur naturel de la catégorie des motifs sur  $\mathbf{C}$  dans la catégorie des pré-structures de Hodge. La conjecture de Hodge standard équivaut à dire que ce foncteur est *pleinement fidèle*, i.e. que l'homomorphisme naturel qui va du groupe de Galois de Hodge précédent  $G$  dans le groupe de Galois motivique (associé au  $\otimes$ -foncteur de Betti  $H_{\text{Bet}}$ ) est un épimorphisme. Ou encore que pour toute catégorie  $\mathcal{C}_0$  de motifs de type fini sur  $\mathbf{C}$ , désignant par  $\mathcal{C}$  la  $\otimes$ -catégorie de pré-structures de Hodge engendrée par les  $H_{\text{Bet}}(M)$  pour  $M \in \text{Ob}(\mathcal{C}_0)$ , l'homomorphisme de groupes algébriques  $G \longrightarrow G_0$  associé au foncteur de Betti-Hodge  $\mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C}$  est un épimorphisme (i.e. surjectif sur les points à valeurs complexes, disons).

On appelle *polarisation* d'une pré-structure de Hodge de poids  $n$  la donnée d'un accouplement de pré-structures de Hodge

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbf{Q}(n),$$

où  $\mathbf{Q}(n)$  est l'espace vectoriel trivial de  $\mathbf{Q}$  sur  $\mathbf{Q}$ , avec  $\mathbf{Q}C = C$  muni du bidegré  $(n, n)$ , ayant la propriété que la forme hermitienne correspondant sur  $V_{\mathcal{C}}$ ,

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, \bar{y})(-i)^{p-q} \quad \text{pour } x \text{ de bidegré } (p, q-p)$$

soit définie positive. Une *structure de Hodge* est une pré-structure de Hodge admettant une polarisation. Les structures de Hodge forment une sous- $\otimes$ -catégorie de la catégorie des pré-structures de Hodge. La théorie de Hodge nous assure que le foncteur de Betti-Hodge sur la catégorie des motifs sur  $\mathbf{C}$  prend ses valeurs en fait dans la catégorie des structures de Hodge (une polarisation d'une variété projective lisse  $V$  définit canoniquement une polarisation de la structure de Hodge associée sur la cohomologie de Betti-Hodge). NB. On n'a aucune idée sur ce que pourrait être l'image essentielle du foncteur précédent, par exemple s'il y a lieu d'espérer qu'on trouve toutes les structures de Hodge (donc une équivalence de catégories : motifs sur  $\mathbf{C} \longrightarrow$  structures de Hodge) ; cela semble peu probable, mais on n'a aucune indication sérieuse dans un sens ou l'autre.

La catégorie des structures de Hodge est semi-simple. Si  $G$  est le groupe de Galois d'une  $\otimes$ -catégorie  $\mathcal{C}$  de pré-structures de Hodge, à engendrement fini si on veut (pour simplifier), alors on peut expliciter en termes du groupe de Galois associé et de sa structure  $i_1$  ci-dessus la condition pour que les objets de  $\mathcal{C}$  soient en fait des structures de Hodge. Ceci est un exercice plaisant et délectable, qui devrait figurer dans un travail systématique sur les  $\otimes$ -catégories, dans le chapitre des exemples. On trouve des restrictions très sérieuses sur le groupe  $G$  muni de  $i_1$  (en plus du fait que  $G$  soit réductif).

- 4) Je laisse le soin à Saavedra de déterminer quelle structure supplémentaire on obtient sur la structure de Hodge "complexe" associée à une variété projective lisse complexe  $X$ , lorsqu'on se donne cette dernière comme déduite d'une variété projective réelle  $X_{\mathbf{R}} = X_0$ . On trouve une notion de "structure de Hodge réelle", donnant naissance à une  $\otimes$ -catégorie correspondante. Dans le groupe de Galois motivique de celui-ci, en plus de la structure  $i_1$ , on trouve un élément  $f_{\infty}$  de  $G(\mathbf{Q})$ , d'ordre 2 (jouant le rôle d'un "élément de Frobenius à l'infini"), qui correspond à l'automorphisme du foncteur de Betti  $X_0 \mapsto H(X_0(\mathcal{C}), \mathbf{Q})$  déduit de l'homéomorphisme  $x \mapsto \bar{x}$  de  $X_0(\mathcal{C})$ . Il faut expliciter les relations entre cet élément et  $i_1, i_2$  !

- 5) Soit  $\mathcal{C}$  une  $\otimes$ -catégorie tensorielle, munie d'un foncteur fibre sur  $k$  de caractéristique nulle. A prouver que, pour que le groupe de Galois  $G$  correspondant soit profini, il faut et il suffit que pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{C}$ , la  $\otimes$ -catégorie engendrée soit semi-simple et n'ait qu'un nombre fini d'objets simples non isomorphes. Si  $\mathcal{C}$  est quelconque, la sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}_0$  de  $\mathcal{C}$  qui correspond au pro-groupe quotient de  $G$  formé des  $G_i/G_i^\circ$  (où  $G = \varprojlim G_i$ , et  $G_i^\circ$  est la composante neutre de  $G_i$ ) est formée exactement des objets  $M$  ayant la propriété précédente.

Il serait intéressant de trouver des énoncés correspondants en caractéristique quelconque.

- 6) La notion de polarisation d'un motif sur un corps (elle-même déduite de celle de polarisation d'une variété algébrique) donne une structure supplémentaire remarquable dans la catégorie des motifs : si  $M$  est un motif de poids  $n$ , on sait parmi les formes symétriques ( $n$  pair) resp. alternées ( $n$  impair)  $M \otimes M \longrightarrow T(n)$  (où  $T$  est le motif de Tate) distinguer celles qui sont "définies positives" ou encore des "polarisations". Cette notion se reflète par exemple par des structures supplémentaires sur les groupes de Galois motiviques. Il y a lieu de faire une étude axiomatique abstraite d'une telle notion de polarisation sur une  $\otimes$ -catégorie générale au dessus d'un sous-corps du corps des réels. On pourra en rediscuter à l'occasion.

## MOTIFS À COEFFICIENTS SUR UN CORPS DE $\mathbb{F}$

---

- [scan]



MOTIFS À COEFFICIENTS SUR UN CORPS DE  $[]$   
à partir de 1958

---

MOTIFS  
1965 1970

- 
- [transcription] par Elbaz-Vincent et J. Malgoire

## LETTER TO J. MURRE

---

- [scan]

Dear Murre,

I am glad to hear that you are still willing to give the talk on unramified functors. Here what I can say to your questions.

1. The theorem about passage to quotient I alluded to is the following:

*Theorem. — Let  $f : X \longrightarrow Y$  be a morphism of  $S$ -preschemes, assume either  $X$  and  $Y$  locally of finite presentation over  $S$ , or  $Y$  locally noetherian and  $X$  locally of finite type over  $Y$ . Assume that the equivalence relation  $R = X \times_Y X$  defined by  $f$  is flat over  $X$  i.e.  $\text{pr}_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$  is flat. Then the quotient  $X/R$  exists in the strongest reasonable sense, i.e. one can factor  $f$  into a compositum  $X \longrightarrow Z \longrightarrow Y$ , with  $X \longrightarrow Z$  faithfully flat locally of finite presentation,  $Z$  locally of finite presentation over  $X$  (in fact of finite presentation over  $S$  if  $X$  is so) and  $Z \longrightarrow Y$  a monomorphism.*

Of course the factorization is unique, and the theorem can be expressed by saying that the quotient sheaf (for the fpqc topology)  $X/R$  is representable. That is in fact how the theorem is proved.

Raynaud has recently made a very nice (and non trivial) application of this theorem, by proving the following: if  $S$  is the spectrum of a discrete valuation ring,  $G$  a group prescheme of finite type over  $S$ ,  $H$  a closed and flat sub-group scheme, such that  $G_t/H_t$  is quasi-affine (where  $t$  is the generic point of  $S$ ) then  $G/H$  is representable as a quasi-affine and flat  $S$ -scheme, which is even affine if  $H$  is invariant (i.e. if  $G$  is a flat group scheme of finite type with affine generic fibre, then  $G$  is affine). This extends immediately to a base which is regular of dimension one. Raynaud is now trying to extend his construction to the case when he drops the quasi-affineness assumption, namely to construct still  $G/H$  as a quasi-projective scheme over  $S$ .

2. Theorem of the cube.

I believe we discussed about it time ago, but maybe the proof I told you was valid only if one assumes the Pic functor of one of the factors involved representable. To prove unramifiedness of the functor  $\underline{\text{Corr}}$  however you need only a weak infinitesimal form of the theorem of the square, for which you will find a proof in

the manuscript notes I am joining on correspondence classes, containing also the proof of the statements you were recalling in your question 4. I hope you will be able to read them, I agree the handwriting is wretched and the notes moreover very sketchy. - On the other hand, I recall you that the theorem of the cube follows rather formally once one knows separatedness of  $\underline{\text{Corr}}_S(X, Y)$  for two of the three factors involved, and using the usual formal properties of the Picard functor (among which commutation with inverse limits of Artin rings is the less trivial).

3. As for the separatedness of  $\underline{\text{Corr}}_S(X, Y)$ , this is about trivial whenever the Pic functor of one of the factors  $X, Y$  is separated? Now this is certainly the case if for  $X$  if its geometric fibers are integral, (a fortiori if  $X$  is an abelian scheme over  $S$ !).

To show this, one may assume  $S$  the spectrum of a discrete valuation ring, and one is reduced to show that if  $\underline{L}$  is an invertible sheaf on  $X$  whose restriction to the general fiber  $X_t$  is trivial, then  $\underline{L}$  is trivial. Now  $X_1$  is an open subset of  $X$ , and the assumption on  $\underline{L}$  can be expressed by saying that  $\underline{L}$  is defined by a Cartier divisor whose support is contained in the special fiber  $X_0$ . Now  $X_0$  itself is already a Cartier divisor (defined by a global equation  $f = 0$ ) and moreover is an integral subscheme of  $X$ , from this follows that the divisor  $D$  is a multiple of  $X_0$  (assume for simplicity the fibers of  $X$  geometrically normal, and hence  $X$  normal!), hence  $D$  is linearly equivalent to 0, what we wanted to prove.

I am convinced however that  $\underline{\text{Corr}}$  is always separated (with the usual assumptions of properness, flatness, and direct image of the structure sheaf, for both functors, of course). This is easily seen to be true if the Pic functor of either factor is representable, by a simple use of dimension theory (namely, we have a morphism  $X \rightarrow \underline{\text{Pic}}_{Y/S}$  whose image has a general fiber of dimension zero, hence the same holds for the special fiber...). But it is true also, by an immediate adaptation of the same argument, if we suppose only that  $\underline{\text{Pic}}_{Y/S}$  is pre-ét-représentable say, i.e. is a quotient of a representable functor  $Q$  by an étale equivalence relation (in fact, quasi-finite and flat would do as well), with  $Q$  locally of finite type over  $S$ . Now this assumption is certainly satisfied if  $Y$  is *projective* over  $S$ , as one sees by using the representation of  $\underline{\text{Pic}}_{Y/S}$  (or rather big open pieces of it) as the quotient of a suitable scheme of immersions of  $Y$  into some  $p^r$ , by the action of the projective

group operating freely, and taking a quasi-section of the corresponding equivalence relation... On the other hand, if one does not assume  $X$  not  $Y$  projective over  $S$ , one may think of using Chow's lemma; as  $S$  is the spectrum of a discrete valuation ring, one does not lose flatness in using Chow's lemma, unfortunately one will lose however, I am afraid, the assumption  $H^0(X_0, \underline{O}_{X_0}) \simeq k(s)$ , and I am afraid that this will make serious technical trouble. Another interesting approach, via topology, is to try to prove that under the usual assumptions on  $X$ , the "specialization morphism" from the fundamental group of the general geometric fiber to the one of the special fiber has an image of finite index - or at least that this is so after making the groups abelian. It seems to me that the latter statement can be proved via the Picard functor, when  $X$  is assumed projective over  $S$ .

I am sending you some notes, including a sketch of the proof of the theorem of representability of unramified functors, although I do not think they latter can be of any use to you, as I have a hard time myself to read them. I think the notes you took when we discussed the matter a few months ago should be much more detailed; anyhow, there are certainly no simplifications in my notes relative to yours, the inverse is more plausible.

Sincerely yours

## LETTER TO J. MURRE

---

- [scan]

Dear Murre,

I am very sorry I did not succeed to convey the intuitive idea behind the general nonsense of my notes. It seems to me that the basic example in order to understand the idea is example 1, where you can take  $Z$  to be a standard Kummer covering for definiteness,  $Z = Z_a^n$ , and  $S$  normal. Intuitively, when look at (normal, say)  $S'$  coverings of  $S$  whose ramification type is not worse than the one of  $Z$  over  $S$ , you mean that the normalized inverse image  $Z'$  of  $S'$  over  $Z$  is étale. From the birational point of view, assuming  $S'$  connected and therefore corresponding to a field extension  $K'$  of the field of functions  $K$  of  $S$ , this means simply that  $K'$  of the field of functions  $K$  of  $S$ , this means simply that  $K'$  is isomorphic to a subextension of an extension of the function field  $L$  of  $Z$ , unramified with respect to the model  $Z$ ; when  $S$

[]

Your interpretation of the Kummer case in the final formulation of example 3 is indeed the one I had in mind. Also, when I wrote  $n'/n$ , I meant of course the order relation of divisibility (it may be convenient to introduce this order relation explicitly, for simplicity of notations).

I realize that all the indications I have given you so far are extremely sketchy, and as a consequence that I am charging you with a considerable amount of work to put some sense and order into all that. Thus it is I, not you, who should apologize for causing a lot of trouble! I look forward with great pleasure meeting you in Bures. As I am having some russian and chinese on friday's, I will probably drop by on June 2.

With best regards



## LETTER TO J. MURRE

---

- [scan]

Dear Murre,

Thank you very much for your notes on the tame fundamental group, which I at least finished reading. I see you wrote them with much care, and I am all the more sorry that my own fault, there is a number of misstatements which, I am afraid, will force you to do a serious recasting of the whole exposition. My notes definitely were too sketchy, and my oral explanations, I am afraid, partly wrong, which induced you into error a few times. Here the most serious drawbacks.

1.16 is false already when  $H$  is the unit group and when there is a single  $a$ , say  $a = b^n$ ,  $Y' = YT/(T^n - a)$ . Then  $Y = S$ , and a morphism of  $Y$  into  $Y'$  compatible with  $H = e$   $H'$  is just a section of  $Y'$ , which exists indeed; however  $H \rightarrow H'$  is not surjective. 3.6. is equally false, as you see by the previous example, using the given section to define an  $H'$ -morphism  $H' \rightarrow Y'$  which is not an isomorphism. As a consequence, the proof in your notes of 3.7. breaks down (as it uses 1.16) and so does the proof of 3.8. (I did not try to check 3.8. by some different proof).

I am afraid 6.4. is false as stated, and that the statement is correct only if the  $D_i$  are regular. Indeed, the end of the proof seemed to me very dubious; be careful that the inertia groups are determined only up to interior automorphism! There is however a (tautological) generalization of the theorem for regular  $D_i$ , corresponding to the data of a single divisor  $D$  with normal crossings, and a variant of the notion of tame ramification for such a divisor, by demanding that the coverings should be tamely ramified locally for the étale topology for the family of local irreducible components of  $D$ ; it is this notion of tameness which should seem more adapted to the situation of par. 9.

The proof of 7.1. is not correct, when you contend on line -9: there remains to be proven the following... Already when  $D = 0$ , the proof here would have to introduce connected étale coverings which are *not Galois*! This very strongly suggests that a notion of tame ramification should be introduced also for non Galois coverings. The same remark applies to the proof of 10.1. Maybe you could get along some way in 7.1. using the normality assumptions, but I am convinced that these assumptions are anyhow artificial, as well as the assumption that the  $D_i$  should be reduced somewhere. You do not seem to make any use of these facts, really.

Also, one feels that 7.5. should be generalized to the case of a tamely ramified covering, and that it should come out trivially once the generalities have been dealt with properly.

I hope that the theory will come out more clearly and correctly by devoting some care to generalities on ramification data (not necessarily of Kummer type). I will try to write something up within the next days. Please excuse me for the trouble I caused you by not learning my lesson well enough before I put you to work!

It will be very nice indeed to have an appendix on Lefschetz theorem for the fundamental group, and it should not be hard to write it. However, it would be safer to wait till the general theory of tame ramification is written up!

Sincerely yours