

Annals of Mathematics

Analogues K\'ahlf\'eriens de Certaines Conjectures de Weil

Author(s): Jean-Pierre Serre

Source: *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 71, No. 2 (Mar., 1960), pp. 392-394

Published by: [Annals of Mathematics](#)

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/1970088>

Accessed: 20/11/2014 20:26

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at
<http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp>

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.



Annals of Mathematics is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Annals of Mathematics*.

<http://www.jstor.org>

ANALOGUES KÄHLÉRIENS DE CERTAINES CONJECTURES DE WEIL

PAR JEAN-PIERRE SERRE

(extrait d'une lettre à A. Weil, 9 Nov. 1959)

... Au congrès d'Amsterdam, en 1954, tu as indiqué une démonstration par voie transcendante de la "formule de Castelnuovo" $\sigma(\xi \circ \xi') > 0$. En fait, un procédé analogue, basé sur la théorie de Hodge, s'applique aux variétés de dimension quelconque, et l'on obtient à la fois la positivité de certaines traces, et la détermination des valeurs absolues de certaines valeurs propres, en parfaite analogie avec tes chères conjectures sur les fonctions zêta.

Le résultat sur les valeurs propres est celui qui s'énonce le plus simplement:

THÉOREME 1. *Soit V une variété projective irréductible, non singulière, définie sur le corps C des nombres complexes, et soit $f: V \rightarrow V$ un morphisme de V dans elle-même. Supposons qu'il existe un entier $q > 0$ et une section hyperplane E de V tels que le diviseur $f^{-1}(E)$ soit algébriquement équivalent à $q \cdot E$. Alors, pour tout entier $r \geq 0$, les valeurs propres de l'endomorphisme f_r^* de $H^r(V, C)$ défini par f ont pour valeur absolue $q^{r/2}$.*

(Note que, si l'on remplace C par un corps fini F_q et f par le morphisme de Frobenius correspondant, le diviseur $f^{-1}(E)$ est équivalent à $q \cdot E$; le Théorème 1 est donc bien l'analogue kählérien de "l'hypothèse de Riemann".)

Soit $H(V)$ l'algèbre de cohomologie de V , somme directe des $H^r(V, C)$, $r \geq 0$, et soit $u \in H^2(V, C)$ la classe de cohomologie définie par le diviseur E ; avec les notations de tes *Variétés Kähleriennes* (citées VK dans ce qui suit), la classe u est une classe de type kählérien, et l'on a $f_2^*(u) = q \cdot u$. Pour tout $r \geq 0$, posons:

$$g_r = q^{-r/2} f_r^*,$$

et soit g l'endomorphisme de $H(V)$ défini par les g_r . De même que f^* , l'endomorphisme g est un endomorphisme d'algèbre, compatible avec la structure bigraduée de $H(V)$, et c'est un opérateur réel (VK, Chap. IV, § 5); enfin, on a $g(u) = u$. Si $n = \dim. V$, on a $g(u^n) = u^n$ et puisque la classe fondamentale v de V est un multiple de u^n , on a $g(v) = v$; comme g est un endomorphisme d'algèbre, il s'ensuit que g conserve le produit scalaire $I(a, b)$ de deux classes de cohomologie de dimensions complémen-

taires (VK, Chap. IV, § 7). Munissons alors $H^r(V, \mathbb{C})$ de la forme sesquilinéaire

$$T_r(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, \overline{C\mathbf{b}}),$$

les notations étant celles de VK, p. 77-78. Les formules établies à cet endroit montrent que T_r est une *forme hermitienne positive non dégénérée*; de plus, elle est déterminée de façon unique par la connaissance de l'algèbre bigraduée $H(V)$, munie du produit scalaire $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, et des opérateurs $\mathbf{a} \rightarrow \overline{\mathbf{a}}$ et $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}$. Comme g respecte ces diverses structures, g respecte aussi T_r , autrement dit c'est un opérateur *unitaire*; les valeurs propres de g ont donc une valeur absolue égale à 1, ce qui démontre le Théorème 1.

Observe également que g_r et g_{2n-r} sont transposés l'un de l'autre par rapport à la forme bilinéaire $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; si les valeurs propres de f_r^* sont $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, celles de f_{2n-r}^* sont donc $q^n/\lambda_1, \dots, q^n/\lambda_k$; c'est l'analogie kählerien de "l'équation fonctionnelle" de la fonction zêta.

Je passe maintenant aux correspondances, et à la généralisation de la formule $\sigma(\xi \circ \xi') > 0$. Pour éviter des difficultés inessentielles, je prendrai le terme de "correspondance" en un sens purement homologique: si V et W sont deux variétés kähleriennes compactes connexes, de dimension n , une correspondance X de V dans W est une application \mathbb{C} -linéaire $H(V) \rightarrow H(W)$ qui respecte les bidegrés, et commute à la conjugaison (autrement dit, c'est un opérateur *réel*); un tel X correspond à une classe de cohomologie réelle de type (n, n) de $V \times W$.

Soit $\mathbf{u}_V \in H^2(V, \mathbb{C})$ la classe de cohomologie définie par la structure kählerienne de V , et soit L_V l'endomorphisme $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{u}_V \cdot \mathbf{a}$ de $H(V)$; définition analogue pour L_W . Je dirai que la correspondance X est compatible avec les structures kähleriennes de V et W (dans le cas algébrique, il faudrait parler de *polarisations*) si la condition suivante est vérifiée:

(c) Pour tout couple d'entiers $r, s \geq 0$, X applique $L_V^r(\text{Ker } L_V^s)$ dans $L_W^r(\text{Ker } L_W^s)$.

Il revient au même de dire que X est compatible avec les décompositions de Hodge des espaces $H(V)$ et $H(W)$, cf. VK, p. 76.

Soit maintenant ${}^tX: H(W) \rightarrow H(V)$ la transposée de X par rapport à la dualité de Poincaré; la décomposition de Hodge étant auto-duale, tX vérifie également (c). Pour tout entier r , notons X_r et tX_r les restrictions de X et tX à $H^r(V, \mathbb{C})$ et $H^r(W, \mathbb{C})$; si $r \leq n$, on sait que $L_V^{n-r}: H^r(V, \mathbb{C}) \rightarrow H^{2n-r}(V, \mathbb{C})$ est un isomorphisme; notons L_V^{r-n} l'isomorphisme réciproque. Pour tout entier r , $0 \leq r \leq 2n$, on peut alors définir une application linéaire

$$X'_r: H^r(W, \mathbb{C}) \rightarrow H^r(V, \mathbb{C})$$

par la formule :

$$X'_r = L_V^{r-n} \circ {}^tX_{2n-r} \circ L_W^{n-r}.$$

C'est l'opérateur X'_r qui joue le rôle du ξ' de la formule de Castelnuovo. On a en effet :

THÉOREME 2. *Soient V et W deux variétés kählériennes connexes de même dimension, et soit X une correspondance compatible avec les structures kählériennes de V et de W . Pour tout entier r , on a alors*

$$\mathrm{Tr}(X_r \circ X'_r) \geq 0;$$

de plus, si $\mathrm{Tr}(X_r \circ X'_r) = 0$, on a $X_r = 0$.

Munissons $H^r(V, \mathbb{C})$ de la forme hermitienne $T_V(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ introduite plus haut, et faisons de même pour $H^r(W; \mathbb{C})$. Un calcul simple (où la condition (c) joue un rôle essentiel) montre que les opérateurs $X_r: H^r(V, \mathbb{C}) \rightarrow H^r(W, \mathbb{C})$ et $X'_r: H^r(W, \mathbb{C}) \rightarrow H^r(V, \mathbb{C})$ sont *adjoints* l'un de l'autre par rapport aux formes T_V et T_W . La trace de $X_r \circ X'_r$ n'est donc pas autre chose que le carré de la norme (au sens d'Hilbert-Schmidt) de l'opérateur X_r , et le Théorème 2 résulte évidemment de là.

Bien entendu, le Théorème 2 redonne le Théorème 1: il suffit de l'appliquer aux correspondances de l'anneau engendré par $X = f^*$, en tenant compte des formules $X \circ {}^tX = {}^tX \circ X = q^n$; le raisonnement est identique à celui que tu fais dans tes *Courbes Algébriques* pour déduire "l'hypothèse de Riemann" de la formule $\sigma(\xi \circ \xi') > 0$.

Observe également que, si l'on prend $r = 1$, l'hypothèse (c) est superflue (la décomposition de Hodge de H^1 étant triviale), et l'on obtient ainsi, sans restriction sur X , la positivité de $\mathrm{Tr}(X_1 \circ X'_1)$; c'est là un résultat essentiellement équivalent au Th. 7, p. 137, de VK. Pour $r \geq 2$, l'hypothèse (c) est par contre essentielle.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY