Inventiones math. 2, 59—78 (1966)

Un Theoreme sur les Homomorphismes de Schemas Abeliens

A. GROTHENDIECK (Bures-sur-Yvettes)

À ANDRÉ WEIL, pour son anniversaire

Introduction

Soit S un préschéma, et A un *préschéma abélien* sur S, i.e. un S-préschéma en groupes propre et lisse sur S, à fibres connexes [*10*, Ch. 6]. Pour tout entier $n>0$, il est bien connu (et dû à WEIL) que l'endomorphisme $n\,\mathrm{id}_A$ de multiplication par n est une isogénie fibre par fibre, donc [*3*, VI_B, 2.2(i)] est plat fibre à fibre, ce qui implique [EGA VI 11.3.10] que $n\,\mathrm{id}_A$ est un morphisme plat, donc que son noyau ${}_nA$ est plat sur S; comme il est de plus propre et de présentation finie sur S, et à fibres finies, il s'ensuit [EGA IV 8.11.1] que c'est un schéma en groupes sur S qui, comme S-préschéma, est «fini localement libre» i.e. défini par une Algèbre sur $\mathcal{O}_S$ qui est localement libre de type fini comme $\mathcal{O}_S$-Module. Si A est de dimension relative g sur S, alors le rang de ${}_nA$ sur S est n^{2g}, comme il est bien connu [*8*, p. 109]. Lorsque n croît multiplicativement, les ${}_nA$ forment un système inductif de schémas en groupes sur S. Il est parfois plus commode, avec WEIL et TATE, de considérer les ${}_nA$ comme les termes d'un système projectif, en convenant pour $n|n'$ d'envoyer ${}_{n'}A$ dans ${}_nA$ par la multiplication par $m=n'/n$, qui est un morphisme fidèlement plat de noyau ${}_mA$. Le système projectif obtenu ainsi, lorsqu'on fait parcourir à n les puissances d'un nombre premier fixé l, se dénote souvent par $T_l(A)$. Il dépend fonctoriellement de A et sa formation est compatible avec tout changement de base. Lorsque l est distinct des caractéristiques résiduelles de S, les ${}_nA$ envisagés, $n=l^\nu$, sont des groupes étales finis sur S, et il est licite de les regarder comme des faisceaux étales [*1*, VII] localement constants sur S, qui ont d'ailleurs l'interprétation cohomologique qu'on devine. Si alors S est connexe et muni d'un point géométrique ξ, alors par la théorie de Galois [SGA V] la connaissance de $T_l(A)$ équivaut à celle du groupe

$$T_l(A(\xi))=\varprojlim_{\nu}\,{}_{l^\nu}A(\xi)$$

associé au groupe des points de A à valeurs dans ξ, (groupe qui est un module libre de rang $2g$ sur l'anneau $\mathbb{Z}_l$ des entiers l-adiques), *muni* des opérations naturelles de $\pi_1(S,\xi)$ sur ce module, définissant un homomorphisme continu

$$\pi_1(S,\xi)\to Gl(T_l(A(\xi)))=Gl(M),$$

où le premier terme est muni de sa topologie profinie habituelle, et le deuxième de la topologie l-adique naturelle (qui en fait également un groupe profini). Lorsque S est normal, on prendra par exemple pour ξ le spectre d'une clôture algébrique $\overline{K}$ du corps des fonctions K de S, de sorte que $\pi_1(S, \xi)$ s'interprète comme le groupe de Galois de la plus grande sous-extension de $\overline{K}/K$ non ramifiée sur S.

Lorsque l n'est pas premier aux caractéristiques résiduelles de S, il n'existe plus d'interprétation aussi simple de l'objet $T_l(A)$, qui n'a été étudié systématiquement que depuis peu, par SERRE-TATE [*13*, *14*] et par TATE [*16*]. Nous aurons à faire un usage essentiel de certains de leurs résultats, qui seront «rappelés» en temps utile.

Le présent travail donne un résultat dans la direction de la conjecture suivante:

Conjecture. *Soient S un préschéma réduit connexe, localement de type fini sur* Spec($\mathbb{Z}$) *ou sur un corps k, A et B deux préschémas abéliens sur S, l un nombre premier, u_l: $T_l(A) \to T_l(B)$ un homomorphisme, supposons qu'il existe un point $s \in S$ tel que u_{ls} provienne d'un homomorphisme de u_s: $A_s \to B_s$ de schémas abéliens sur $k(s)$. Alors il existe un entier $n > 0$ et un homomorphisme v: $A \to B$ tel que $T_l(v) = n\, u_l$.*

Notons d'ailleurs que, n étant fixé, v est nécessairement unique (sans hypothèse sur S, d'ailleurs): en effet, il résulte aisément de (EGA IV 11.10.9) que les ${}_{l^\nu}A$ sont schématiquement denses dans A, d'où le résultat.

Lorsque l est distinct des caractéristiques résiduelles de S, la conjecture envisagée est une conséquence très particulière des conjectures de TATE [*15*] sur les cycles algébriques sur les variétés projectives non singulières définies sur des corps de type fini — tout au moins lorsqu'on suppose S régulier, resp. lisse sur le corps de base envisagé. Par des arguments de descente standards (cf. proposition 1.2. plus bas), une fois que ce résultat serait acquis, on pourrait prouver qu'il reste valable sans hypothèse de régularité ni de lissité sur S. Utilisant de plus le résultat de SERRE-TATE auquel il a été déjà fait allusion, on en conclurait également la validité de la conjecture sans hypothèse sur l: en fait, comme le montrera le théorème (1.1.) ci-dessous, c'est précisément le cas où S contient assez de points s de caractéristique l qui peut être traité dès maintenant, sans recours aux conjectures de TATE.

Notre but dans le présent travail est de donner une démonstration d'une variante de la conjecture précédente, à savoir du

Théorème. *Soit S un préschéma connexe réduit, localement de type fini sur un corps k de caractéristique nulle. Les données A, B, l, u_l, u_s étant comme dans l'énoncé de la conjecture plus haut, il existe un homomorphisme u: $A \to B$ tel que $T_l(u) = u_l$ (ou, ce qui revient au même, tel que u prolonge u_s).*

On notera que la conclusion dans le théorème est légèrement plus précise que dans la conjecture qui précède, où on a dû remplacer u_l par un multiple nu_l; comme me l'a fait observer SERRE, on ne peut se dispenser dans l'énoncé de la conjecture de faire intervenir un tel n, comme il ressort d'exemples tirés de la théorie de la multiplication complexe pour des courbes elliptiques définies sur des corps de nombres [*4*][1].

Signalons que la démonstration du théorème utilise à la fois des méthodes transcendantes, par réduction au cas où le corps de base est le corps des complexes, cas où on peut utiliser le groupe fondamental de la théorie transcendante, et des méthodes proprement «arithmétiques» i.e. de caractéristique $p>0$, qui s'introduiront en remplaçant le corps de base k par un sous-anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$, qu'on «spécialisera» en un point de caractéristique $p>0$. Le rôle de la première réduction est de nous permettre de passer, d'une hypothèse sur l, à l'hypothêse correspondante sur les autres nombres premiers (c'est faute de pouvoir faire ce passage sous les conditions plus générales de la conjecture ci-dessus, que celle-ci ne peut être démontrée par la méthode du présent travail). Le rôle de la seconde réduction est de nous mettre en mesure d'utiliser les résultats de SERRE et de TATE, sous la forme du théorème (1.1) énoncé plus bas.

Comme corollaire immédiat du théorème énoncé, on trouve une propriété remarquable pour les variétés modulaires de variétés abéliennes polarisées rigidifiées, sur un corps de caractéristique nulle. Considérons un tel schéma modulaire M sur k [*10*], correspondant à la classification des schémas abèliens polarisés, de dimension relative et degré de polarisation donnés, munis d'une rigidification de Jacobi d'échelon $n \geqq 3$ donné.

Corollaire. *Le schéma modulaire M sur le corps k de caractéristique nulle étant précisé comme dessus, soit S un préschéma connexe, réduit, localement de type fini sur k, muni d'un point géométrique ξ. Alors tout k-morphisme $f: S \to M$ est déterminé quand on connait le point géométrique $f(\xi)$ de M, et l'homomorphisme induit $\pi_1(S, \xi) \to \pi_1(M, f(\xi))$.*

En effet, si f et g sont deux k-morphismes pour lesquels ces invariants sont les mêmes, alors f et g correspondent à des schémas abéliens A et B sur S, pour lesquels les fibres A_ξ et B_ξ sont munis d'un isomorphisme u_s qui est compatible avec un isomorphisme u_l: $T_l(A) \to T_l(B)$, de sorte

[1] Notons que lorsque dans la conjecture, on suppose par exemple S irréductible, ou S localement de type fini sur un corps, alors on peut supposer à priori dans l'énoncé de cette conjecture que n est une puissance de l'exposant caractéristique p de $k(s)$. Cela provient du fait facile suivant: si $m>0$ est premier à p, et si v: $A \to B$ est un homomorphisme de préschémas abéliens tel que v_s: $A_s \to B_s$ soit «divisible par m» i.e. nul sur ${}_m(A_s) = ({}_mA)_s$, alors v lui-même est divisible par m i.e. nul sur ${}_mA$. Ceci montre que le théorème ci-dessus est bien un cas particulier de la conjecture.

que u_s s'étend en un homomorphisme de A dans B. Ce dernier est nécessairement un isomorphisme et compatible avec les polarisations et les rigidifications d'échelon n (puis-qu'il en est ainsi en ξ), ce qui signifie que $f=g$.

En fait, la propriété exprimée dans le corollaire précédent est une propriété purement géométrique de M, ce qui permet sans perte de généralité essentielle de se borner à l'énoncer lorsque k est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Mais il n'existe pas à ma connaissance de démonstration de ce fait par voie transcendante. Les conjectures de TATE générales [*15*], et les liens qu'on suspecte entre la théorie des cycles algébriques et la théorie des sous-groupes discrets de type arithmétique dans les groupes algébriques semi-simples définis sur le corps $\mathbb{Q}$, m'amènent à prévoir que la propriété exprimée dans le corollaire est partagée par les variétés algébriques non singulières qu'on construit par passage au quotient, dans des espaces homogènes convenables des groupes algébriques réels correspondants, par de tels groupes discrets opérant librement, tels ceux construits par BAILY et BOREL [*2*]. Comme autres exemples de variétés M ayant la propriété énoncée dans le corollaire, existant en toute caractéristique, citons les variétés abéliennes, les courbes algébriques connexes lisses de genre $\geqq 1$, la droite rationnelle privée de deux points ou plus, et les produits de telles variétés.

1. Résultats préliminaires

Enonçons d'abord les deux résultats-clefs auxquels il a été fait allusion dans l'Introduction:

Théorème A (SERRE-TATE). *Soient S un schéma artinien local, dont l'unique point s est tel que $k(s)$ soit de caractéristique $p>0$. Soit C la catégorie des schémas abéliens sur S, et C' la catégorie des triples (A_0, M, φ), où A_0 est un schéma abélien sur $k(s)$, $M=(M_\nu)$ un système projectif de schémas en groupes commutatifs finis et plats sur S, avec M_ν annulé par p^ν, et φ un isomorphisme $M_s=(M_{\nu s})\simeq T_p(A_0)$. (On définit de façon évidente les morphismes de tels objects, et la composition des morphismes.) Considérons le foncteur naturel*

$$T: C \to C'$$

qui associe au schéma abélien A sur S le triple $(A_s, T_p(A), id)$. Ce foncteur est une équivalence de catégories.

En termes imagées, pour une variété abélienne A_0 donnée sur $k(s)$, il revient donc au même de «remonter» A_0 à S, ou de «remonter» le pro-groupe $T_p(A_0)$. Nous n'aurons à nous servir que du fait que le foncteur T est *pleinement fidèle*, ce qui s'énonce aussi ainsi:

Corollaire 1. *Soint A et B deux schémas abéliens sur S, $u_p: T_p(A) \to T_p(B)$ un homomorphisme, supposons qu'il existe un homomorphisme $u_s: A_s \to B_s$ de schémas abéliens sur $k(s)$, tel que $T_p(u_s) = (u_p)_s$. Alors il existe un homomorphisme $u: A \to B$ tel que $T_p(u) = u_p$.*

Utilisant l'unicité de cet u, et un résultat bien connu sur le passage de la géométrie formelle à la géométrie algébrique [EGA III 5.4.1.], on en déduit ceci:

Corollaire 2. *L'énoncé du corollaire 1 reste valable si, au lieu de supposer S local artinien, on suppose que S est le spectre d'un anneau local noethérien complet, de point fermé s.*

La parenté de ce résultat avec les énoncés envisagés dans l'Introduction est évidente. Pour pouvoir l'utiliser, il nous faudra de plus une méthode pour construire un homomorphisme $u_p: T_p(A) \to T_p(B)$ comme dans l'hypothèse du corollaire précédent, quand on le connait seulement au point générique de S. On a à ce sujet le

Théorème B (TATE). *Soit S un préschéma localement noethérien, normal, irréductible, de point générique t, et soient A, B deux préschémas abeliens sur S, p un nombre premier. Si $k(t)$ est de caractéristique nulle, alors tout homomorphisme $u_{pt}: T_p(A_t) \to T_p(B_t)$ se prolonge (de façon unique) en un homomorphisme $u_p: T_p(A) \to T_p(B)$.*

En fait, TATE énonce et prouve ce théorème pour ses «groupes p-divisibles», plus généraux que les T_p de schémas abéliens, mais l'énoncé tel que nous le formulons ici nous suffira. Signalons également qu'il est plausible que la restriction sur la caractéristique de $k(t)$ est superflue (seul le cas où car $k(t) = p$ offrant d'ailleurs un problème).

Pour la démonstration des théorèmes A et B, nous nous contentons de renvoyer aux travaux des auteurs cités [*14*] et [*16*].

Nous aurons besoin d'une généralisation du corollaire 2 au théorème A, que nous déduirons de ce corollaire par des arguments de nature standard. Nous l'énonçons avec plus de généralité qu'il ne serait nécessaire pour l'application que nous aurons à en faire:

Théorème 1.1. *Soient S un préschéma localement noethérien, A et B deux préschémas abéliens sur S, p un nombre premier, $u_p: T_p(A) \to T_p(B)$ un homomorphisme. Supposons que pour tout point $s \in S$ associé à $\mathcal{O}_S$ (i.e. tout point maximal de S, lorsque S est réduit), il existe une spécialisation s' de s, tel que $k(s')$ soit de caractéristique p, et un homomorphisme $u_{s'}: A_{s'} \to B_{s'}$ tel que $T_p(u_{s'}) = (u_p)_{s'}$. Alors il existe un (unique) homomorphisme $u: A \to B$ tel que $T_p(u) = u_p$.*

Donnons d'abord la démonstration de 1.1. lorsque S est régulier (cas qui suffirait pour notre propos). On peut alors supposer S irréductible, de point générique s, et comme il est bien connu que tout homomorphisme $u_s\colon A_s \to B_s$ se prolonge en un homomorphisme $u\colon A \to B$, S étant régulier [7, B, no 5], il suffit de trouver u_s tel que $T_p(u_s)=(u_p)_s$. Or soit s' comme dans l'hypothèse de 1.1., et appliquons le corollaire 2 ci-dessus au spectre du complété de l'anneau local de S en s'; comme celcui-ci contient un point t audessus de s, on conclut aussitôt qu'il existe une extension $K'=k(t)$ de $K=k(s)$, et un homomorphisme $u_{K'}\colon A_{K'} \to B_{K'}$ tel que $T_p(u_{K'})=(u_p)_{K'}$. Mais le résultat d'unicité déjà signalé dans l'Introduction, et qui reste valable sur une base non nécessairement noethérienne (comme $\operatorname{Spec} K' \otimes_K K'$), jointe à la théorie de la descente fidèlement plate [SGA VIII], nous montre que $u_{K'}$ provient nécessairement d'un homomorphisme $u_K\colon A_K \to B_K$, qui satisfait alors à la condition voulue.

Pour prouver 1.1. en général, il suffira comme ci-dessus d'appliquer le corollaire 2 aux spectres des complétés des $\mathcal{O}_{S,s'}$, et d'utiliser le résultat suivant, qui nous sera encore utile plus bas:

Proposition 1.2. *Soient S un préschéma localement noethérien, A et B deux préschémas abéliens sur S, p un nombre premier, $u_p\colon T_p(A) \to T_p(B)$ un homomorphisme. Supposons que pour tout point $s \in S$ associé à $\mathcal{O}_S$, il existe une spécialisation s' de s, un morphisme fidèlement plat $S' \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,s'}$, et un homomorphisme $u_{S'}\colon A_{S'} \to B_{S'}$ tel que $T_p(u_{S'})=(u_p)_{S'}$. Alors il existe un (unique) homomorphisme $u\colon A \to B$ tel que $T_p(u)=u_p$.*

La démonstration, un peu technique, se simplifie assez considérablement lorsqu'on admet le fait (assez délicat, mais néanmoins démontré [*11*, no 3, C]) que le foncteur $\mathit{Hom}_{S\text{-}gr}(A, B)=H$, défini par

$$H(S')=\operatorname{Hom}_{S'\text{-}gr}(A_{S'}, B_{S'}),$$

est *représentable* par un préschéma (encore noté H) sur S qui est séparé et non ramifié sur S; de plus, sans être de type fini sur S en général, H est «essentiellement propre» sur S [EGA IV 18.10.20] i.e. satisfait au «critère valuatif de propreté» [EGA II 7.3.8], comme il résulte du résultat déjà cité de [7, B, no 5]. L'homomorphisme u cherché peut donc être considéré comme une section de H sur S, qu'il s'agit de construire.

Tout d'abord, l'argument de descente déjà utilisé nous montre que pour s' comme dans l'énoncé de l'hypothèse de 1.2, posant $S'_0=\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,s'})$, il existe un homomorphisme $u_{S'_0}\colon A_{S'_0} \to B_{S'_0}$ tel que $T_p(u_{S'_0})=(u_p)_{S'}$. Cet homomorphisme provient d'un homomorphisme $u_U\colon A_U \to B_U$, où U est un voisinage ouvert convenable de s', en vertu du sorite de [EGA IV 8], et prenant U assez petit pour qu'il ne rencontre pas d'élément de $\operatorname{Ass}\mathcal{O}_S$ qui ne soit pas générisation de s' (ce qui est loisible, puisque $\operatorname{Ass}\mathcal{O}_S$ est une partie localement finie de S) on trouve aisément que $T_p(u_U)=(u_p)_U$. Par raison d'unicité, les u_U associés aux différents s' se recollent, d'où un ouvert U, schématiquement dense dans S (car contenant les s' donc

Ass$\mathcal{O}_X$) et un homomorphisme $u_U\colon A_U \to B_U$ tel que $T_p(u_U)=(u_p)_U$. Il reste à prouver que u_U se prolonge en $u\colon A \to B$, qui sera nécessairement unique et satisfera à $T_p(u)=u_p$. L'existence de u résulte maintenant aussitôt de la considération de H introduit plus haut, et du lemme suivant:

Lemme 1.2.1. *Soient S un préschéma noethérien, H un S-préschéma non ramifié essentiellement propre sur S i.e. satisfaisant au critère valuatif de propreté* [*EGA II* 7.3.8], *U un ouvert schématiquement dense de S, v une section de $H|U$ sur U. Pour que v provienne d'une section u de H sur S, il faut et il suffit que pour tout S' fini sur S, qu'on peut supposer réduit si on veut, tel que $U'=S'|U$ soit dense dans S', et tout S-morphisme $u'\colon S' \to H$ dont la restriction à U' soit égale au composé*

$$U' \dashrightarrow U \overset{v}{\dashrightarrow} H,$$

les deux composés

$$S' \times_S S' \rightrightarrows S' \xrightarrow{u'} H$$

soient égaux.

En effet, l'hypothèse que H est essentiellement propre et localement quasi-fini sur S fournit aisément l'existence d'un S' réduit, fini sur S, avec $S' \to S$ surjectif, toute composante de S dominant une composante de S, et d'un S-morphisme $u'\colon S' \to H$ compatible avec la donnée de v: on constate qu'on peut prendre pour S' l'adhérence de $v(U)$, muni de la structure réduite induite. Ceci dit, un peu de descente finie non plate, s'appuyant sur [7, A, no 2, b)], et utilisant maintenant l'hypothèse que H est non ramifié sur S, nous montre que u' provient d'une section u_0 de H sur $S_0=S_{\text{réd}}$. D'ailleurs, H étant non ramifié sur S, $u_0(S)$ est nécessairement une partie ouverte de H, soit T, qu'on munit de la structure induite par H. Alors le morphisme $T \to S$ induit par $H \to S$ est une immersion fermée (étant propre, radiciel, et non ramifié) surjective, dont l'image est un sous-préschéma fermé de S majorant U, donc égal à S puisque U est schématiquement dense. Par suite $T \to S$ est un isomorphisme, et l'isomorphisme réciproque nous fournit la section u cherchée. Cela achève la démonstration de 1.2.1., donc de 1.2. et par suite de 1.1.

La démonstration de 1.1. n'utilisait que le théorème A ci-dessus, à l'exclusion du théorème B de TATE. Utilisant également le théorème B, nous allons prouver une variante du théorème 1.1. qui, à la différence de ce dernier, peut s'exprimer (mais non se démontrer!) en ne faisant intervenir l'invariant $T_p(A)$ que dans le cas où p est premier aux caractéristiques résiduelles du préschéma de base (et où $T_p(A)$ peut donc être considéré comme un «système local» sur S dans un sens tout-à-fait analogue à celui de la théorie transcendante):

Théorème 1.3. *Soient S un préschéma localement noethérien normal, irréductible, A et B deux préschémas abéliens sur S, p un nombre premier, $U=S-V(p)$ l'ouvert de S formé des points de S à caractéristique résiduelle distincte de p, $u_{pU}: T_p(A\,|\,U) \to T_p(B\,|\,U)$ un homomorphisme. On suppose qu'il existe un point $s \in U$ tel que $\overline{\{s\}} \cap V(p) \neq \emptyset$ (i.e. admettant une spécialisation t à caractéristique résiduelle p), et tel que $(u_{pU})_s: T_p(A_s) \to T_p(B_s)$ provienne d'un homomorphisme $u_s: A_s \dashrightarrow B_s$. Alors il existe un homomorphisme $u: A \dashrightarrow B$ tel que $u_{pU} = T_p(u\,|\,U)$.*

Utilisant le théorème B, on voit en effet que u_{pU} provient d'un homomorphisme $u_p: T_p(A) \dashrightarrow T_p(B)$, et il suffit de prouver qu'il existe un homomorphisme $u: A \dashrightarrow B$ tel que $u_p = T_p(u)$. Appliquant 1.1., on est ramené à prouver que $u_{pt}: T_p(A_t) \to T_p(B_t)$ provient d'un homomorphisme $u_t: A_t \dashrightarrow B_t$. Or soit T l'adhérence de s, muni de la structure réduite induite, et considérons les préschémas abéliens A_T, B_T induits par A, B sur T, et l'homomorphisme $u_{pT}: T_p(A_T) \dashrightarrow T_p(B_T)$ induit par u_p. Comme la restriction u_{ps} de u_{pT} au point générique s de T provient d'un homomorphisme $A_{Ts} \to B_{Ts}$, on trouve, en appliquant 1.2., que u_{pT} provient d'un homomorphisme $u_T: A_T \dashrightarrow B_T$, a fortiori u_{pt} provient d'un homomorphisme $u_t = u_{Tt}: A_t \to B_t$, ce qui achève la démonstration de 1.3.

C'est via 1.3. que nous utiliserons les résultats de SERRE et de TATE, rappelés dans ce numéro, dans la démonstration de notre théorème principal au numéro suivant. Indiquons, pour terminer le présent numéro, une conjecture suggérée par le résultat 1.3:.

Conjecture 1.4. *Soient $f: X \dashrightarrow S$ un morphisme propre et lisse, avec S localement noethérien, régulier et irréductible, p un nombre premier, $U=S-V(p)$ l'ouvert des points de S à caractéristique résiduelle distincte de p, considérons sur U le faisceau p-adique «constant tordu» $R^2 f_{U*}(\mathbb{Z}_p(1))$, système local de la cohomologie p-adique en dimension 2 des fibres géométriques de $X\,|\,U$ sur U, tordu par le système local de Tate $\mathbb{Z}_p(1) = T_p(G_{mU})$ ([1, XVI] et SGA 65, VII), et soit φ une section de ce faisceau p-adique. Supposons qu'il existe un point $s \in U$, tel que $\overline{\{s\}} \cap V(p) \neq \emptyset$ (i.e. admettant une spécialisation de caractéristique résiduelle p), tel que $\varphi(\bar{s}) \in H^2(X_{\bar{s}}, \mathbb{Z}_p(1))$ soit «algébrique», i.e. soit la classe de cohomologie p-adique associée à un diviseur convenable $D_{\bar{s}}$ sur $X_{\bar{s}}$ (où $\bar{s}$ désigne le spectre d'une clôture algébrique de $k(s)$). Alors il existe un entier $n \geqq 1$ tel que $n\varphi$ soit défini par un diviseur D sur X (ou ce qui revient au même, tel que pour tout point x de S, ou encore, pour le point générique x de S, la classe $n\varphi(\bar{x}) \in H^2(X_{\bar{x}}, \mathbb{Z}_p(1))$ est algébrique).*

Cette conjecture est vraie en tous cas lorsque X est un préschéma abélien sur X, et dans ce cas est essentiellement équivalente à 1.3. On peut espérer qu'elle pourra être démontrée par des méthodes analogues, utilisant des variantes convenables du théorème A (de nature infinitésimale), et du théorème B. Pour y parvenir, il faudra manifestement développer une théorie de la *cohomologie p-adique* qui permette d'analyser le comportement de la cohomologie, par spécialisation de la caractéristique nulle à la caractéristique p. On peut évidemment énoncer aussi une généralisation de la conjecture 1.4. pour les cycles algébriques de codimension d quelconque (en y remplaçant les H^2 par des H^{2d}), que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter.

2. Démonstration du théorème principal

2.1. Nous allons prouver maintenant le théorème annoncé dans l'Introduction. On peut énoncer ce théorème de façon équivalente en disant que, si S est réduit et localement de type fini sur un corps k de caractéristique nulle, et si A, B, u_l sont comme dans l'énoncé du théorème, alors l'ensemble U des points $s \in S$ tels que $(u_l)_s$: $A_s \to B_s$ provienne d'un homomorphisme u_s: $A_s \to B_s$ est une partie à la fois ouverte et fermée de S, et que lorsque $U = S$, alors il existe un homomorphisme u: $A \to B$ tel que $T_l(u) = u_l$. Or la dernière assertion résulte aussitôt de 1.2., qui implique également que U est stable par spécialisation. Il reste donc à prouver que S est stable par générisation, ce qui nous ramène au cas où S est intègre et affine, que s en est un point fermé, et à prouver que si t est le point générique de S, il existe un homomorphisme u_t: $A_t \to B_t$ tel que $T_l(u_t) = (u_l)_t$. Quitte à passer au normalisé de S, on peut de plus supposer S normal. On peut même, si on veut, se réduire au cas S régulier, en prenant (lorsque dim $S \geqq 2$) une courbe irréductible S' sur S passant par s, non contenue dans le lieu singulier de S, dont le normalisé sera alors régulier, de sorte qu'on pourra appliquer à S' le théorème supposé démontré dans ce cas, ce qui nous permet de trouver un $s' \in S'$, contenu dans l'ouvert U des points réguliers de S, satisfaisant à la même hypothèse que s. On peut alors remplacer S par U, ce qui donne la réduction annoncée. Signalons également que lorsque l'on suppose déjà S régulier, alors dans la démonstration du théorème, le résultat un peu technique 1.2. devient inutile, étant donné qu'alors tout homomorphisme u_t: $A_t \to B_t$ se prolonge en un homomorphisme u: $A \to B$, comme nous avons déjà signalé dans la démonstration du cas particulier correspondant de 1.1.

2.2. Nous poserons $T = \mathrm{Spec}(k)$, $R = \mathrm{Spec}(k(s))$, qui est donc fini et lisse sur T. D'après le sorite général de [EGA IV 8], on peut alors trouver un schéma T_0, spectre d'un sous-anneau de k de type fini sur $\mathbb{Z}$, un schéma affine S_0 de type fini sur T_0, un sous-schéma R_0 de S_0 fini sur T_0, deux schémas abéliens A_0, B_0 sur S_0, un homomorphisme u_{R_0}: $A_{0\,R_0} \to B_{0\,R_0}$, de telle façon que la donnée $(S, A, B, T', u_s = u_R)$ sur T soit isomorphe à celle déduite de $(S_0, A_0, B_0, R_0, u_{R_0})$ par le changement de base naturel $T \to T_0$. De plus, on peut supposer S_0 irréductible et *normal*: on peut le voir en utilisant le théorème de NAGATA [EGA 0_{IV} 23.1.5.] qui implique que l'ensemble des points de S_0 en lesquels S_0 est normal est ouvert; comme cet ensemble contient évidemment la fibre générique de S_0 sur T_0 (qui donne en effet le schéma normal S par extension du corps de base à k), il suffira de remplacer T_0 par un ouvert convenable pour que S_0 devienne normal. Si on suppose faite la réduction préliminaire au cas S régulier, donc S lisse sur k (puisque k est de caractéristique nulle, donc parfait), on peut également invoquer le bon comportement de la notion de lissité par «passage à la limite», (déjà implicitement utilisé pour pouvoir affirmer que A et B proviennent de schémas abéliens (donc lisses) A_0, B_0), qui implique alors que l'on peut supposer également S_0 lisse sur T_0, et de même d'ailleurs R_0 lisse (et même étale) sur T_0.

Soit T' le spectre du corps résiduel k' du point générique de T_0, et distinguons par un $'$ les objets sur T' se déduisant des objets correspondants $S_0, A_0, B_0, R_0, u_{R_0}$ par le changement de base $T' \to T_0$. Alors (S, A, B, R, u_R) se déduit de $(S', A', B', R', u_{R'})$ par changement de corps de base $k' \to k$. Comme $T_l(u_R)$ se prolonge en un homomorphisme u_l: $T_l(A) \to T_l(B)$, on en conclut aisément par descente que de même $T_l(u_{R'})$ se prolonge en un homomorphisme u_l': $T_l(A') \to T_l(B')$. Il suffit donc de prouver l'existence d'un u': $A' \to B'$ tel que $T_l(u') = u_l'$. En d'autres termes, il suffit de démontrer notre théorème dans la situation particulière $(T', S', A', B', R', u_{R'}, u_l')$.

2.3. *Supposons d'abord que R_0 contienne un point x tel que $k(x)$ soit de caractéristique égale au nombre premier l qui intervient dans nos données.* En vertu de 1.3., il existe alors un homomorphisme u_0: $A_0 \to B_0$ tel que $T_l(u_0 | U) = u_{0_l}$, où $U = S_0 - V(l)$ est l'ensemble ouvert des points de S_0 de caractéristique résiduelle $\neq p$, et où u_{0_l}: $T_l(A_0 | U) \to T_l(B_0 | U)$ est le prolongement canonique de u_l': $T_l(A') \to T_l(B')$. Prenant alors $u' = (u_0)_{S'}$, cela prouve notre théorème dans le cas particulier envisagé.

Pour passer de ce cas au cas général, on note que, puisque R_0 est non vide et de type fini sur $\mathbb{Z}$, il contient certainement un point x de caractéristique $l' \neq 0$. Il suffira alors de prouver le

Lemme 2.4. *Soient S un préschéma localement de type fini sur un corps k de caractéristique nulle, A et B deux préschémas abéliens sur S, s un point de S, u_s: $A_s \to B_s$ un homomorphisme. Supposons qu'il existe un nombre premier l tel que l'homomorphisme $T_l(u_s)$ se prolonge en un homomorphisme u_l: $T_l(A) \to T_l(B)$. Alors la même propriété est valable pour tout nombre premier l'.*

Comme de toute façon ce lemme est trivialement contenu dans le théorème que nous nous proposons de démontrer, il nous suffira de le prouver dans le cas où nous en avons besoin, où donc k est de type fini sur $\mathbb{Q}$, donc est isomorphe à un sous-corps du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Un argument de descente déjà invoqué dans 2.2 nous ramène alors au cas où le corps de base est $\mathbb{C}$. On peut de plus supposer évidemment que x est rationnel sur $\mathbb{C}$. Désignant par S^{an}, A^{an}, B^{an} les espaces analytiques associés à S, A, B [*12*], et utilisant le résultat facile disant que le foncteur $S' \rightsquigarrow S'^{an}$ de la catégorie des revêtements étales de S dans la catégorie des revêtements étales de S'^{an} est pleinement fidèle, on est ramené à prouver l'analogue de 2.4 dans la situation correspondante pour les espaces analytiques. Soient alors a, b les points unités de A_s, B_s,

$$M = \pi_1(A_s^{an}, a), \qquad N = \pi_1(B_s^{an}, b).$$

Ce sont des $\mathbb{Z}$-Modules libres de type fini, sur lequel le groupe

$$\pi = \pi_1(S^{an}, s)$$

opère de façon évidente. De plus, pour tout nombre premier l, on a des isomorphismes canoniques

$$(*) \qquad T_l(A_s) \simeq M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l, \qquad T_l(B_s) \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l,$$

enfin, l'homomorphisme $u_s\colon A_s \to B_s$ induit un homomorphisme

$$u_0 = \pi_1(u_s^{an})\colon\ M \to N,$$

et les homomorphismes $T_l(u_s)$ ne sont autres, moyennant l'identification $(*)$, que ceux déduits de u_0 par tensorisation par $\mathbb{Z}_l$. Ceci posé, la théorie de Galois nous apprend que l'hypothèse faite dans 2.4. signifie simplement que $u_0 \otimes_{\mathbb{Z}} Z_l$ commute aux opérations de π. Compte tenu que M, N sont libres de type fini, on voit que cela équivaut à l'hypothèse que u_0 lui-même commute aux opérations de π, condition qui est bien indépendante de l, comme annoncé.

Cela achève la démonstration de 2.4, et par là celle de notre théorème principal.

3. Variantes du théorème principal

Signalons d'abord qu'un simple exercice de traduction, utilisant les relations bien connues entre homomorphismes de A dans B d'une part, et les classes de correspondance divisorielles sur $A x_S B'$ d'autre part (B' le préschéma abélien dual de B), ou si on veut, l'interprétation des sections du préschéma $NS_{A/S}$ de Néron-Sévéri de A sur S en termes d'homomorphismes de A dans A', permet de donner de notre théorème principal la formulation équivalente suivante:

Théorème 3.1. *Soient A un préschéma abélien sur le préschéma S, S réduit, connexe et localement de type fini sur le corps k de caractéristique nulle, l un nombre premier, φ une forme bilinéaire alternée sur*

$T_l(A)$ à valeurs dans $T_l(G_{m\,S})$, (ou, ce qui revient au même, une section du systéme local $R^2 f_*(\mathbb{Z}_l)\otimes T_l(G_{m\,S})$ des groupes H^2 des fibres géométriques de $f\colon A \to S$, à coefficients l-adiques, tordu par le système local de Tate $T_l(G_{m\,S})$). Pour qu'il existe une section D du préschéma de Néron-Sévéri $NS_{A/S}$ sur S, telle que φ soit la forme de polarisation l-adique associée (ou, si on veut, telle que pour tout point géométrique s de S, la classe de 2-cohomologie l-adique définie par la classe de diviseurs $D(s)$ sur A_s soit $\varphi(s)$), (il faut et) il suffit qu'on puisse trouver un point s de S, tel que $\varphi(s)$ soit une classe de cohomologie l-adique «algébrique» i.e. provienne d'une classe de diviseurs D_s sur A_s.

3.2. On notera que sous cette forme, utilisant la cohomologie l– adique, l'énoncé garde un sens si A/S est un S-préschéma propre et lisse quelconque, pas nécessairement un préschéma abélien. Nos arguments ne s'appliquent pas tels quels à ce cas plus général, puisque les résultats de SERRE et de TATE invoqués concernent essentiellement des systèmes locaux de cohomologie l-adique *en dimension* 1, et non en dimension 2. La généralisation envisagée[2] est en tous cas conséquence de la conjecture 1.4., comme on voit en suivant la méthode du no 2 (où 1.4. remplace alors la référence à 1.3.), et il est donc permis d'espérer qu'elle pourra être démontrée dans un avenir pas trop éloigné. Notons enfin que, lorsque S est lisse sur k, i.e. régulier, alors on peut conjecturer un énoncé analogue à 3.1., relatif à la donnée d'une section de $R^{2i} f_*(\mathbb{Z}_l(i))$, système local des groupes de cohomologie l-adiques tordus des fibres de A sur S en dimension $2i$, donnant un critère pour que cette section (ou du moins un multiple) provienne d'un cycle algébrique de codimension i sur A. C'est cette cojecture d'ailleurs, qui est une conséquence directe des conjectures de TATE, qui m'a amené à la formulation de la conjecture énoncée au no 1.

3.3. Pour terminer, je voudrais signaler comment les résultats et conjectures précédents peuvent se reprendre à peu près mot pour mot, en remplaçant partout la cohomologie l-adique par la *cohomologie de* DE RHAM. De façon précise, lorsque $f\colon X \to S$ est un morphisme lisse, introduisons le complexe de faisceaux $\boldsymbol{\Omega}^{\cdot}_{X/S}$ des formes différentielles relatives de X sur S, l'opérateur cobord étant la différentielle extérieure, et posons

$$H^i_{DR}(X/S) = H^i_{DR}(f) = R^i f_*(\boldsymbol{\Omega}^{\cdot}_{X/S}),$$

où le dernier membre désigne une image directe supérieure au sens «hypercohomologie». S'inspirant de MANIN [9], on arrive à munir les

[2] Où il convient cependant, comme dans la conjecture envisagée dans l'Introduction, de remplacer φ par un multiple convenable $n\varphi (n>0)$, (comme il est nécessaire déjà dans le cas trivial où A est de dimension relative 1 sur S).

$H^i_{DR}(f)$ (qui sont des faisceaux de Modules sur S, cohérents lorsque S est localement noethérien et f propre) d'une *connexion intégrable* au sens absolu (i.e. quand S est regardé comme $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$-préschéma), et a fortiori au sens relatif au-dessus de tout préschéma R sur lequel se trouverait S. Lorsque S est localement de type fini sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, et que f est propre, alors les $H^i_{DR}(X/S)$ ont comme fibres en les points fermés s de S, la cohomologie complexe ardinaire $H^i(X^{an}_s, \mathbb{C})$ de l'espace analytique complexe compact X^{an}_s associé à X_s, plus précisément le faisceau cohérent sur S^{an} défini par H^i_{DR} est canoniquement isomorphe au faisceau

$$R^i f^{an}_*(\mathbb{Z}_{X^{an}}) \otimes_{\mathbb{Z}_{S^{an}}} \mathcal{O}_{S^{an}},$$

(où $Z_{X^{an}}$ est le faisceau constant des entiers sur X^{an}), donc est déduit d'un système local sur S de $\mathbb{Z}$-modules de type fini, par simple tensorisation par $\mathcal{O}_{S^{an}}$. Ceci posé, la connexion de $H^{i\,an}_{DR}$ déduite de celle de H^i_{DR} n'est autre que la connexion canonique sur le produit tensoriel envisagé, caractérisée par la condition que les sections horizontales soient celles de

$$R^i f^{an}_*(\mathbb{C}_{X^{an}}) = R^i f^{an}_*(\mathbb{Z}_{X^{an}}) \otimes_{\mathbb{Z}_{S^{an}}} \mathbb{C}_{S^{an}}.$$

Cela donne donc par voie transcendante une interprétation intuitive particulièrement frappante de la connexion canonique des H^i_{DR}. D'autre part, supposant S régulier connexe, f projectif, et revenant par ailleurs à la situation générale du début, des constructions de nature standard permettent d'associer, à tout cycle algébrique de codimension i dans la fibre générique de X sur S, une section de $H^{2i}_{DR}(f)$. On constate alors que cette section est *horizontale* pour la connexion intégrable canonique. Considérant que la structure sur les H^i_{DR} constituée par les connexions intégrables est dans une certaine mesure un substitut pour les opérations du groupe fondamental de S, associées aux systèmes locaux $R^i f_*(\mathbb{Z}_l)$ des cohomologies l-adiques, et que la propriété d'horizontalité qu'on vient de signaler remplace, dans ce point de vue, le fait que la classe de cohomologie l-adique sur X associée à un cycle algébrique sur X est invariante par les opérations du groupe de Galois, on est amené à formuler certaines variantes naturelles des conjectures de TATE sur les classes de cohomologie algébriques, en utilisant la cohomologie de DE RHAM au lieu de la cohomologie l-adique. Sans passer en revue ici les énoncés conjecturaux auxquels on parvient ainsi, je vais me borner à indiquer comment se formule, dans ce contexte, le résultat principal du présent travail:

Théorème 3.4. *Soient S un préschéma réduit, connexe, localement de type fini sur un corps k de caractéristique nulle, A et B deux préschémas abéliens sur S, φ: $H^1_{DR}(A/S) \to H^1_{DR}(B/S)$ un homomorphisme respectant les connexions canoniques relativement à k. Supposons qu'il existe un* *point $s \in S$ tel que l'homomorphisme $\varphi(s)$ induit par φ sur les fibres réduites au point s provienne d'un homomorphisme de A_s dans B_s. Alors il existe un homomorphisme de A dans B (nécessairement unique) dont φ provient.*

En d'autres termes, il faut prouver que u_s: $A_s \to B_s$ se prolonge en un homomorphisme u: $A \to B$, sachant que l'homomorphisme correspondant $H^1_{DR}(A_s) \to H^1_{DR}(B_s)$ se prolonge en un homomorphisme $H^1_{DR}(A) \to H^1_{DR}(B)$ respectant les connexions. Utilisant le résultat principal de ce travail, on voit qu'il suffit pour ceci de prouver que pour tout l, l'homomorphisme $T_l(u_s)$: $T_l(A_s) \to T_l(B_s)$ induit par u_s se prolonge en un homomorphisme u_l: $T_l(A) \to T_l(B)$. Or ceci est évident par voie transcendante lorsque k est le corps des nombres complexes. On se ramène à ce cas par la méthode standard («principe de Lefschetz»), d'où le résultat. Nous laissons au lecteur le soin de reformuler 3.4 à la façon du théorème 3.1.

4. Complément

(Ajouté le 5.8.1966)

Signalons pour terminer une autre propriété du groupe fondamental du schéma modulaire M, allant dans le même sens que le corollaire de l'Introduction:

Théorème 4.1. *Les notations k, M, ayant la même signification que dans le corollaire de l'Introduction, soit S un k-préschéma localement noethérien normal irréductible, et soit U une partie ouverte de S et ξ un point géométrique de U. Soit f: $U \to M$ un k-morphisme. Pour pue f se prolonge en un k-morphisme $S \to M$, il faut et il suffit que l'homomorphisme $\pi_1(f, \xi)$: $\pi_1(U, \xi) \to \pi_1(M, f(\xi))$ induit par f se factorise en un homomorphisme*

$$\pi_1(U, \xi) \to \pi_1(S, \xi) \to \pi_1(M, f(\xi)),$$

où la première flêche est l'homomorphisme canonique surjectif induit par l'injection $U \to S$.

Utilisant la définition axiomatique de M, comme dans la démonstration du corollaire plus haut, notre proposition résulte immédiatement du résultat suivant, légèrement plus précis:

Corollaire 4.2. *Soient S un préschéma localement noethérien normal de caractéristique nulle, U un ouvert dense de S, A un préschéma abélien sur U, l un nombre premier. Pour que A se prolonge en un préschéma abélien sur S (nécessairement unique à isomorphisme unique pres), il faut et il suffit que $T_l(A)$ soit «non ramifié sur S» i.e. que pour tout entier $\nu \geq 0$, ${}_{l^\nu}A$ se prolonge en un revêtement étale de S* [3].

[3] Ce résultat, ainsi que le principe de sa démonstration, sont extraits d'une lettre de l'auteur à J.P. SERRE, du 24.11.1964.

Le «il faut» étant évident, prouvons le «il suffit». Notons d'abord que lorsque S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, le résultat est connu et dû à NERON, sans hypothèse de caractéristique, comme conséquence facile de sa théorie [*17*]. Nous allons montrer ici comment on peut en déduire le cas général. Notons d'abord que *l'unicité* d'un prolongement de A en un préschéma abélien sur S, à isomorphisme unique près, résulte aussitôt par exemple de 1.2 plus haut. On en conclut, par un argument de descente standard, que pour prouver *l'existence* d'un prolongement, il est inoffensif de remplacer S par un revêtement étale surjectif S': en effet, si B' est le préschéma abélien obtenu sur S', on voit que B' sera muni d'une donnée de descente naturelle pour $S' \dashrightarrow S$, donnée nécessairement effective, puisque en vertu de [*11*] B' est projectif sur S' (S' étant normal, puisque étale sur S qui l'est). Ceci nous ramène au cas où le revêtement ${}_{l^2}A$ de U est isomorphe au revêtement constant de valeur $(\mathbb{Z}/l^2\,\mathbb{Z})^{2g}$ (en prenant pour S' un revêtement étale de S qui trivialise le prolongement de ${}_{l^2}A$ en un revêtement étale de U). Choisissons alors un tel isomorphisme, ainsi qu'une polarisation de A (ce qui est possible d'après le résultat de [*11*] qu'on vient d'invoquer). On peut supposer S connexe, d'où un degré d pour cette polarisation, et une dimension relative g de A sur S, d'où un schéma modulaire correspondant M, de telle sorte que A avec les structures supplémentaires qu'on vient d'expliciter (polarisation et rigidification de Jacobi d'échelon l^2) est induit du schéma abélien «universel» sur M, par un morphisme bien déterminé $f\colon U \dashrightarrow M$. Tout revient alors à prouver que ce dernier se prolonge en un morphisme de S dans M, moyennant l'hypothèse faite sur les ${}_{l^\nu}A$. Or soit S' l'adhérence dans $M \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} S$ du graphe de f, de sorte que S' est un S-préschéma réduit de type fini tel que $S' \,|\, U = U$. Le critère valuatif de propreté, joint au résultat de NERON signalé plus haut, implique que S' est *propre* sur S. Soit S'' le normalisé de S', que nous supposerons d'abord fini sur S'. En vertu du «Main Theorem» de ZARISKI, il suffit de prouver que la fibre de S'' en tout point s de S est discrète, et pour ceci (puisque $S'' \rightsquigarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} S$ est fini) il revient au même de prouver que le morphisme $g\colon T = (S''_s)_{\mathrm{red}} \dashrightarrow M$ induit par pr_1 se factorise par le morphisme structural dans $\mathrm{Spec}(k(s))$. Or soit A'' le préschéma abélien sur S'', polarisé à rigidification de Jacobi, induit par le morphisme $S'' \to M$ induit par pr_1. Alors la propriété à prouver sur g équivaut à la suivante: le schéma abélien induit A''_T sur T, avec sa polarisation et sa rigidification, est isomorphe à l'image inverse d'une structure analogue sur $\mathrm{Spec}\,k(s)$. Soit, pour tout entier $\nu \geqq 0$, G_ν le revêtement étale en groupes de S qui prolonge ${}_{l^\nu}A$. Comme ${}_{l^\nu}A''$ est caractérisé, à isomorphisme près, comme le revêtement étale en groupes du préschéma *normal* S'' qui prolonge ${}_{l^\nu}A'' \,|\, U = {}_{l^\nu}A \,|\, U$, on trouve qu'il est isomorphe à $(G_\nu)_{S''}$, donc, ${}_{l^\nu}(A''_T) = ({}_{l^\nu}A'')_T$ est isomorphe à l'image inverse de $(G_\nu)_s$. Notre assertion provient alors, compte tenu du fait que T est géométriquement connexe sur $k(s)$ par le théorème de connexion de ZARISKI, du résultat suivant:

Proposition 4.3. *Soient k un corps de car. nulle, S un préschéma réduit localement de type fini sur k, non vide et géométriquement connexe, A un préschéma abélien sur S, l un nombre premier. Pour que A soit isomorphe à l'image inverse par $S \to \mathrm{Spec}(k)$ d'un schéma abélien A_0 sur* Spec(k), *il faut et il suffit que pour tout entier $\nu \geqq 0$, ${}_{l^\nu}A$ soit un revêtement géométriquement trivial de S, i.e. isomorphe à l'image inverse d'un revêtement étale de* Spec(k).

Plus précisément, comme l'hypothèse de connexité géométrique sur S implique que le foncteur $A_0 \rightsquigarrow A_0 \times_{\mathrm{Spec}\, k} S$ de la catégorie des schémas abéliens sur k dans la catégorie des préschémas abéliens sur S est pleinement fidèle (comme on voit par exemple en utilisant le résultat analogue pour la catégorie des schémas étales sur k, cf. [SGA IX 3.4], et le résultat de [*11*] déjà invoqué dans la démonstration de 1.2.), on voit par 4.3. que le foncteur envisagé induit une *équivalence* de la catégorie des schémas abéliens A_0 sur k, et de la natégorie des préschémas abéliens A sur S satisfaisant la condition de trivialité géométrique des ${}_{l^\nu}A$ énoncée dans 4.3. De ceci, on déduit une variante évidente de 4.3. en termes de structure de préschéma abélien *polarisé* (en interprétant une polarisation de A comme un homomorphisme de A dans le préschéma abélien dual), ou encore polarisée et munie d'une structure de Jacobi d'échelon n donné, — ce qui est précisément l'énoncé nécessaire pour achever la démonstration de 4.2.

Pour prouver 4.3. nous pouvons par exemple, par un argument de descente facile, nous ramener au cas où S contient un point s rationnel sur k, poser $A_0 = A_s$, et appliquer le théorème principal de notre travail (énoncé dans l'Introduction) à A, à $B = A_{0S}$ et à l'isomorphisme (qui existe par hypothèse) $T_l(A) \to T_l(B)$ induisant l'identité en le point s, donc algébrisable en ce point par le morphisme identique $A_s = A_0 \to B_s \simeq A_0$. On trouve donc que ce dernier se prolonge en un morphisme $u\colon A \to B$, qui est évidemment un isomorphisme partout, puisque S est connexe. Nous allons cependant présenter une autre démonstration, indépendante des résultats des numéros précédents, et s'appuyant, non sur les résultats inédits de SERRE et de TATE, mais sur le classique théorème de MORDELL-WEIL. Cela nous permettra d'obtenir un résultat plus général que 4.2., indépendant de toute hypothèse de caractéristique:

Proposition 4.4. *Les notations sont celles de* 4.3., *à cela près qu'au lieu de supposer k de caractéristique nulle, nous supposons S normal et géométriquement intègre sur k. On suppose de plus que l est un nombre premier distinct de la caractéristique de k, et tel que pour tout entier*

$v \geqq 0$, ${}_{l^v}A$ *soit géométriquement trivial. Alors il existe un schéma abélien* A_0 *sur* k, *et une isogénie radicielle de* A_{0S} *sur* A, *(donc de degré une puissance de l'exposant caractéristique* p *de* k*).*

Nous laissons au lecteur le soin facile de s'assurer que 4.4. entraîne bien 4.3., par un argument de descente à partir du normalisé de S, utilisant 1.2. Quant à 4.3., c'est un énoncé qui semble plus ou moins connu, et qui sous une forme pratiquement identique figure dans MANIN [*9*], (qui attribue la démonstration qui suit à CHAFAREVITCH): utilisant 1.2. on est ramené à prouver l'énoncé correspondant à 4.4. en remplaçant S par Spec K, où K est le corps de fonctions de S, qui par hypothèse est une «extension régulière» de k au sens de WEIL. Nous sommes alors sous les conditions de validité de la théorie de CHOW de la «partie fixe» A_0 de A [*8*, Chap. VIII], qui est un schéma abélien sur k muni d'un homomorphisme $A_{0K} \dashrightarrow A$, universel dans un sens évident, et qui de plus est radiciel. Le théorème de MORDELL-WEIL, sous la forme de LANG-NERON [*18*], assure alors que $A(K)/A_0(k)$ est un groupe de type fini; donc un sous-groupe de $A(K)$ isomorphe à un groupe $(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^n$ est nécessairement contenu dans l'image de $A_0(k)$. Lorsque k est algébriquement clos, appliquant ceci au sous-groupe ${}_{l^\infty}A(K)$ de $A(K)$, égal, par l'hypothèse sur A, au groupe analogue pour $A(\bar{K})$ ($\bar{K}$ une clôture algébrique de K), on trouve que les points d'ordre une puissance de l de A à valeurs dans $\bar{K}$ sont dans l'image de A_0, ce qui implique que l'homomorphisme $A_{0K} \dashrightarrow A$ est surjectif, donc une isogénie, ce qui prouve alors 4.3. Le cas où le corps k n'est plus supposé algébriquement clos s'en déduit immédiatement par extension du corps de base de k à $\bar{k}$, en utilisant une propriété connue de compatibilité de la formation de A_0 avec une extension $k \dashrightarrow k'$ du corps de base [*8*, Chap. VIII].

Cela achève la démonstration de 4.3., et par là de 4.1., du moins sous l'hypothèse que S'' est fini sur S'. Dans le cas général, introduisons aussi $Z=(S'_s)_{\mathrm{red}}$, de sorte que nous avons un morphisme naturel $T \dashrightarrow Z$ induit par $S'' \dashrightarrow S'$, qui, comme ce dernier, est, sinon fini, du moins entier et à fibres réduites finies (comme il résulte de NAGATA [EGA 0_{IV} 23.2.6]). D'autre part, désignant par A' le préschéma abélien sur S' induit par le morphisme $S' \dashrightarrow M$ induit par pr_1, de sorte que A'' n'est autre que l'image inverse de A' par $S'' \dashrightarrow S'$, on trouve que A''_T est l'image inverse de $B=A'_Z$ par $T \dashrightarrow Z$. Notons encore que Z est géométriquement connexe, réduit et de type fini sur $k=k(s)$, et que tout revient à prouver que le morphisme $Z \dashrightarrow M$ défini à l'aide de $B=A'_Z$ (et de ses structures de polarisation et de rigidification) se factorise par Spec k; cependant, l'hypothèse dont nous disposons à cet effet est ici la trivialité géométrique (relativement à k) non des ${}_{l^v}B$, mais de leurs images inverses ${}_{l^v}(B_T)$ sur T. Cependant, la conclusion sur $Z \dashrightarrow M$ que nous désirons établir est manifestement inchangée, quand nous remplaçons Z par les composantes irréductibles Z'_i d'un schéma Z' fini sur Z dominant Z, et k par les $k_i = H^0(Z'_i, O_{Z'_i})$. Mais soit, pour tout point maximal z_i de Z, t_i un point de T au-dessus de z_i, T_i son adhérence muni de la structure induite réduite, et T'_i le normalisé de T_i. Comme $k(t_i)$ est fini sur $k(z_i)$, Mlle NOETHER nous apprend que T'_i est fini sur l'adhérence Z_i de z_i dans Z (muni de la structure induite réduite). Nous prendrons alors $Z' = \coprod_i T'_i$, de sorte que nous sommes ramenés à prouver que les morphismes $T'_i \dashrightarrow M$, associés aux $B_{T'_i}$, se factorisent par les Spec k_i, où $k_i = H^0(T'_i, O_{T'_i})$. Mais maintenant T'_i est normal, de type fini sur k donc sur k_i, enfin les ${}_{l^\nu}(B_{T'_i})$ sont géométriquement triviaux. Nous sommes alors directement sous les conditions d'application de 4.4. (la déduction de 4.3. apparaît même inutile), ce qui achève la démonstration de 4.2.

Signalons le corollaire suivant de 4.2.:

Corollaire 4.5. *Soient S un préschéma régulier de caractéristique nulle, U un ouvert de S dont le complémentaire est de codimension $\geqq 2$. Alors le foncteur $A \rightsquigarrow A \mid U$, de la catégorie des préschémas abéliens sur S dans la catégorie des préschémas abéliens sur U, est une équivalence de catégories.*

Le fait que ce foncteur soit pleinement fidèle, vrai plus généralement dès que S est normal et U dense dans S, a déjà été signalé au début de la démonstration de 4.2. Le fait que c'est un foncteur essentiellement surjectif résulte également de 4.2., compte tenu du théorème de pureté de ZARISKI-NAGATA (cf. par exemple SGA 1962, X 3.4).

Remarques **4.6.** Les résultats précédents, à l'exception de 4.4., ne restent plus vrais tels quels sans hypothèse de caractéristique nulle. En effet, si k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p>0$, il est facile de construire, sur le complémentaire U de l'origine du plan affine ou projectif S, un schéma abélien A (de dimension relative 2, si on veut) qui ne se prolonge pas en un schéma abélien sur S. Il suffit de prendre un schéma abélien A_0 sur k, de dimension $\geqq 2$, tel que dans l'algebre de Lie $\mathfrak{t}_0$ de A_0, l'opération de «puissance p.ème» soit nulle (par exemple, en prenant pour A_0 un produit de courbes elliptiques d'invariant de Hasse nul), et d'utiliser la famille de sous-groupes radiciels de hauteur 1 de A_0, paramétrée par la droite projective P^1_k, induite par une droite quelconque dans l'espace projectif des droites homogènes de $\mathfrak{t}_0$. Utilisant la projection $U \dashrightarrow P^1_k$, on trouve un sous-groupe fini et plat N de degré p de $A_{0\,U}$, et on constate aussitôt que $A = A_{0\,U}/N$ ne se prolonge pas en un schéma abélien B sur U (car autrement, l'isogénie $A_{0\,U} \dashrightarrow A$ se prolongerait en une isogénie $A_{0\,S} \dashrightarrow B$, donc B serait de la forme $A_{0\,S}/M$, où M serait un sous-groupe fini et plat de $A_{0\,S}$ prolongeant

N; or on constate aussitôt qu'un tel M n'existe pas). La même construction s'applique, en prenant pour S le cône projetant (affine ou projectif, au choix) de n'importe quel sous-schéma fermé de dimension >0 du schéma projectif des droites de t_0. Le lecteur trouvera les renseignements techniques nécessaires pour une justification détaillée de la construction qui précède dans [*3*, notamment VI_A et VII_A].

4.7. Par contre, lorsqu'on se borne aux *préschémas elliptiques*, i.e. aux préschémas abéliens de dimension relative *l*, l'énoncé 4.2. (et par suite également 4.1. et 4.5.) sont valables sans restriction de caractéristique. Il suffit pour ceci de reprendre la démonstration de 4.1., en notant que (avec les notations de cette dernière) la structure bien connue de M dans ce cas implique que M est *affine*, ce qui implique, puisque T est propre, que le morphisme envisagé $T \dashrightarrow M$ se factorise bien par $\mathrm{Spec}(k)$. Signalons à ce propos une différence importante entre la structure de la variété modulaire pour des schémas abéliens polarisés de dimension 2, dans le cas de la caractéristique nulle et de la caractéristique $p>0$, pour un degré de polarisation donné: dans le premier cas, en effet, les travaux de Igusa montrent que M est toujours *affine* (ce qui restera sans doute valable en caractéristique p, lorsque p est premier au degré de polarisation); en caractéristique $p>0$ par contre, M peut contenir une droite projective.

4.8. La démonstration de 4.2. via 4.4., et la nature très spéciale de l'exemple 4.6., conduisent à se demander si, abandonnant dans 4.2. l'hypothèse de caractéristique nulle sur S et supposant seulement l premier aux caractéristiques résiduelles, il ne resterait pas vrai que tout préschéma abélien A sur U tel que $T_l(A)$ soit non ramifié sur S, est isogène à un préschéma abélien sur U qui se prolonge à S, i.e. est de la forme $(B|U)/N$, où B est un préschéma abélien sur S, et N un sous-groupe fini et plat de $B|U$. J'ignore si la réponse est affirmative, même sous les conditions 4.5. du «théorème de pureté». Elle l'est du moins lorsque $S=P_k^2$ et U sont comme dans l'exemple 4.6., plus généralement lorsque S est simplement connexe et localement de type fini sur un corps k. En effet dans ce cas $T_l(A)$ est géométriquement trivial, cas qui est justiciable de 4.4. Malgré ce résultat positif, une réponse affirmative à la question générale qu'on vient de soulever me semble cependant assez peu plausible.

4.9. Une généralisation de 4.2. qui semble très plausible par contre, et plus conforme à l'esprit du présent travail, serait la suivante: abandonnant l'hypothèse que S est de caractéristique nulle, on suppose par exemple que $S-U$ est de caractéristique $p>0$, et on exige que $T_p(A)$ puisse se prolonger en un groupe p-divisible au sens de TATE [*16*] sur tout S.

Peut-on conclure alors que A se prolonge en un préschéma abélien sur S? Nous espérons revenir sur cette question, qui devrait être justiciable des méthodes du présent travail, une fois élucidé le cas-clef où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète (cas étroitement lié à la théorie de NERON [17]).

Bibliographie

[1] ARTIN, M., et A. GROTHENDIECK: Cohomologie étale des schémas. Séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES, 1963/64.

[2] BAILY, W.L., and A. BOREL: Compactifications of arithmetical quotients of bounded symmetric domains, à paraitre dans Annals of Mathematics.

[3] DEMAZURE, M., et A. GROTHENDIECK: Schémas en groupes. Séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES, 1963 et 1964.

[4] DEURING, M.: Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper. Abh. Math. Sem. Hamburger Univ. **14**, 197—272 (1941).

[5] DIEUDONNE, J., et A. GROTHENDIECK: Eléments de Géométrie Algébrique (cité EGA), Chap. I à IV. Publications Mathématiques, Nos. 4, 8, 11, ...

[6] GROTHENDIECK, A.: Revêtements étales et groupe fondamental. Séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES 1960 et 1961 (cité SGA).

[7] — Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, I, in Fondements de la Géométrie Algébrique (Collection d'exposés au séminaire Bourbaki 1957—1962), Secrétariat Mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris.

[8] LANG, S.: Abelian Varieties. New York: Interscience Publ. 1959.

[9] MANIN, U.I.: Théorie des groupes commutatifs formels sur des corps de caractéristique finie. Uspechi Mat. Nauk **18**, 3—90 (1963) [en russe].

[10] MUMFORD, D.: Geometric invariant theory. Ergebnisse der Mathematik, Bd. 34. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.

[11] MURRE, J.P.: Representation of unramified functors. Applications. Séminaire Bourbaki, No. 294, Mai 1965.

[12] SERRE, J.P.: Géométrie algébrique et Géométrie analytique. Annales Inst. Fourier **6**, 1—42 (1955/56).

[13] LUBIN, J., and J. TATE: Elliptic curves and formal groups, No. 6, Summer Institute on Algebraic Geometry, Whitney Estate, Woods Hole (1964).

[14] SERRE, J.P., et J. TATE: Travail en préparation sur les groupes formels.

[15] TATE, J.: Algebraic cycles and poles of zeta functions, in Arithmetical Algebraic Geometry, Harpers Series in Modern Mathematics.

[16] — Travail en préparation sur les groupes formels.

[17] NERON, A.: Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux. Pub. Math. No. 21, 261—359 (1964).

[18] LANG, S., and A. NERON: Rational points of abelian varieties over function fields. Am. J. Math. **80**, 659—684 (1958).

Istituto de Matematica, Pise
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
Bures-sur-Yvette

(Manuscrit reçu le 17 Juin 1966)