C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 1246-1248 (20 décembre 1971) Série A

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Polarisations des catégories tannakiennes : cas gradué.* Note (*) de M. **Neantro Saavedra Rivano**, transmise par M. Henri Cartan.

Introduction. — On développe ici la variante graduée de la notion de polarisation introduite dans une Note précédente ([1]). C'est sous cette forme que cette structure se présente dans les exemples qui ont motivé la définition et l'étude des polarisations [*voir* ([2]), 1.5, 5.11 et le chapitre des exemples dans ([3])].

On se donne une catégorie tannakienne algébrique C sur $\mathbf{R}$; le lien de C sera noté L, la L-gerbe correspondant à C sera notée $\mathcal{G}$ [*voir* ([4]) pour les généralités concernant les catégories tannakiennes], et le centre de L sera noté Z

$$\mathrm{Z} = Aut^{\otimes}(\mathrm{id}_C) = Aut(\mathrm{id}_{\mathcal{G}}).$$

On remarque que la donnée d'une $\otimes$-graduation de type $\mathbf{Z}$ de C (ou plus précisément, du $\otimes$-foncteur id_C) revient à celle d'un morphisme de $\mathbf{R}$-groupes $w : \mathbf{G}_m \to \mathrm{Z}$. De façon analogue, la donnée d'un objet inversible T de C revient à celle d'un morphisme de gerbes $t : \mathcal{G} \to \mathrm{TORS}(\mathrm{G}_m)$; elle détermine un morphisme, noté encore t, $t : \mathrm{Z} \to \mathbf{G}_m$. Si on dispose de deux telles données w, T, le *poids* de T pour la graduation w est l'entier n tel que $t \circ w(\lambda) = \lambda^n$ pour $\lambda \in \mathbf{G}_m$.

1. Triples de Tate.

Définition 1.1. — Un *triple de Tate* T est un triple $T = (C, w, \mathrm{T})$ constitué d'une catégorie tannakienne C sur $\mathbf{R}$, une $\otimes$-graduation $w : \mathbf{G}_m \to \mathrm{Z}$ de type $\mathbf{Z}$ de id_C et d'un objet inversible T de C qui soit de poids -2.

1.2. Si T est un triple de Tate, notons $\mathcal{G}_0$ la gerbe noyau du morphisme $t : \mathcal{G} \to \mathrm{TORS}(\mathrm{G}_m)$; ses objets sont les couples (P, ξ) d'un objet P de $\mathcal{G}$ et d'une trivialisation ξ du torseur $t(\mathrm{P})$ sous G_m

$$\xi : \mathrm{P} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_m.$$

La gerbe $\mathcal{G}_0$ munie de $\mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}$, correspond à une catégorie tannakienne C_0 munie d'un morphisme de catégories tannakiennes

$$\mathrm{Q} : C \to C_0;$$

l'image de T par ce morphisme est un objet unité de C_0 et ce morphisme est universel pour cette propriété. Si Z_0 est le centre de C_0

$$\mathrm{Z}_0 = Aut^{\otimes}(\mathrm{id}_{C_0}) = Aut(\mathrm{id}_{\mathcal{G}_0}),$$

65

on a $Z_0 = \mathrm{Ker}\,(t : Z \to \mathbf{G}_m)$ et on voit aussitôt que $\varepsilon = w(-1) \in Z(\mathbf{R})$ se trouve dans le sous-groupe $Z_0(\mathbf{R})$. On peut aussi regarder ε comme un morphisme de $\mathbf{R}$-groupes

$$\varepsilon : \mu_2 \to Z_0.$$

Proposition 1.3. — *La correspondance $T \to (C_0, \varepsilon)$ établit une 2-équivalence de la 2-catégorie des triples de Tate avec celle des couples (C_0, ε) d'une catégorie tannakienne C_0 (sur $\mathbf{R}$) et d'un morphisme $\varepsilon : \mu_2 \to Z_0$.*

1.4. On dit qu'un triple de Tate (C, w, T) est *neutre* si C l'est, i. e. s'il existe un foncteur fibre $\omega : C \to \mathit{Mod}\,f(\mathbf{R})$. On prouve que C est neutre si et seulement si C_0 l'est. La donnée d'un triple de Tate *neutralisé* (i. e. muni d'un foncteur fibre) revient à celle d'un triple (G, w, t) d'un $\mathbf{R}$-groupe algébrique affine G, et des morphismes

$$\mathbf{G}_m \xrightarrow{w} G \xrightarrow{t} \mathbf{G}_m$$

vérifiant $t \circ w = -2$ et w central. La catégorie tannakienne C_0 est la catégorie $\mathit{Rep}_0\,(G_0)$ des représentations linéaires de rang fini de $G_0 = \mathrm{Ker}\,(t)$. Le triple de Tate neutralisé se récupère à partir de (G_0, ε) $(\varepsilon = w(-1))$ par

$$G = \mathrm{Coker}\,(\tilde{\varepsilon} : \mu_2 \to G_0 \times \mathbf{G}_m),$$

où

$$\tilde{\varepsilon}(-1) = (\varepsilon, -1),$$

la définition de w, t étant évidente.

2. Polarisations.

Définition 2.1. — Soit $T = (C, w, \mathrm{T})$ un triple de Tate. Une *polarisation* (graduée) π de T consiste en la donnée pour chaque objet V de C, homogène de poids n, d'une classe d'équivalence $\pi(\mathrm{V})$ de formes de Weil $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V} \to \mathrm{T}^{\otimes -n}$ [(1), 1.2, 1.5] de parité $(-1)^n$ vérifiant les conditions suivantes :

PG 1. Soient V, W des objets homogènes de C, $\varphi \in \pi(\mathrm{V})$, $\psi \in \pi(\mathrm{W})$. Alors, $\varphi \otimes \psi \in \pi(\mathrm{V} \otimes \mathrm{W})$ et si V, W sont de même poids, $\varphi \oplus \psi \in \pi(\mathrm{V} \oplus \mathrm{W})$.

PG 2. Le morphisme identité $\mathrm{T} \otimes \mathrm{T} \to \mathrm{T}^{\otimes 2}$ appartient à $\pi(\mathrm{T})$.

L'ensemble des polarisations du triple (C, w, T) sera noté $\mathrm{Pol}\,(C, w, \mathrm{T})$.

Proposition 2.2. — *Il y a une bijection canonique*

$$\mathrm{Q} : \quad \mathrm{Pol}\,(C, w, \mathrm{T}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}_\varepsilon\,(C_0),$$

où $\varepsilon = w(-1)$, obtenue en associant à $\pi \in \mathrm{Pol}\,(C, w, \mathrm{T})$ l'unique ε-polarisation sur C_0 telle que si $\mathrm{V} \in \mathrm{ob}\, C$ est de degré n, et si $\varphi \in \pi(\mathrm{V})$, $\mathrm{Q}(\varphi) \in \mathrm{Q}(\pi)(\mathrm{Q}(\mathrm{V}))$.

66

Exemple 2.3. — Soit (G, w, t) un triple de Tate neutralisé (*voir* 1.4), et soit $C \in G_0(\mathbf{R})$ vérifiant

$$C^2 = \varepsilon = w(-1).$$

Si V est un G-module homogène de poids n une forme $\varphi : V \otimes V \to T^{\otimes -n}$ est appelée *de C-polarisation* si la forme bilinéaire φ_C sur le $\mathbf{R}$-vectoriel V

$$\varphi_C(x, y) = \varphi(x, C y)$$

est symétrique définie positive. Si pour chaque V il existe une forme de C-polarisation, l'ensemble de ces formes définit une polarisation π_C du triple (G, w, t); ont dit alors que C est un élément hodgien de $G(\mathbf{R})$ et les polarisations obtenues ainsi sont appelées *hodgiennes*. Le triple (G, w, t) est dit *hodgien* s'il existe $C \in G(\mathbf{R})$ hodgien. On déduit facilement de 2.2 et de [(1), 2.5] que C est hodgien si et seulement si le $\mathbf{R}$-groupe $(G_0)_C$ (voir *loc. cit.*) est compact et que (G, w, t) est hodgien si et seulement si G_0 est réductif, est une forme tordue intérieure de sa forme compacte, et si l'invariant ε_{C_0} ($C_0 = Rep_0(G_0)$, *voir* [(1), 3.2]) est égal à ε modulo $Z_0(\mathbf{R})^2$.

On déduit de 1.3, 2.2 et de (1) le résultat suivant, qui résume la théorie des polarisations dans le cas gradué :

Théorème 2.4. — *Soient* L *un lien algébrique affine sur* $\mathbf{R}$ *de centre* Z, $t : L \to \mathbf{G}_m$, $w : \mathbf{G}_m \to Z$ *des morphismes vérifiant* $t \circ w = -2$. *Alors :*

(*a*) *Si* (C, w, T) *est un triple de Tate lié par* (L, w, T), $\mathrm{Pol}(C, w, T)$ *est un pseudo-torseur sous* ${}_2Z_0(\mathbf{R})$;

(*b*) Si (C, w, T), (C', w, T') *sont des triples de Tate liés par* (L, w, t) *munis de polarisations* π, π' *il existe une équivalence* $(C, w, T) \simeq (C', w, T')$ *unique à isomorphisme* (non unique) *près respectant les polarisations données.*

(*c*) *Supposons que* L *soit connexe ou abélien. Alors* (L, w, t) *est polarisable* [i. e. il existe (C, w, T) lié par (L, w, t) avec $\mathrm{Pol}(C, w, T) \neq \emptyset$] *si et seulement si* $L_0 = \mathrm{Ker}(L \to G_m)$ (on peut prouver l'existence de ce noyau) *est le lien d'un* $\mathbf{R}$-*groupe compact. S'il en est ainsi, le triple* (C, w, T) *est neutre si et seulement si* $\varepsilon = w(-1)$ *est un carré dans* $Z_0(\mathbf{R})$ *et, dans ce cas, toute polarisation de* (C, w, T) *est hodgienne.*

(*) Séance du 8 décembre 1971.

(1) N. Saavedra, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 1114.

(2) P. Deligne. *Travaux de Griffiths*, Séminaire Bourbaki, 376 (mai-juin 1970).

(3) Travail en cours de préparation sur les catégories tannakiennes (à paraître dans les *Lectures Notes in Mathematics*, Springer-Verlag).

(4) N. Saavedra, *Comptes rendus*, 272, série A, 1971, p. 389.

Institut des Hautes Études Scientifiques,
35, *route de Chartres,*
91-*Bures-sur-Yvette,*
Essonne.

67