Notes du 10.9.1968

TAPIS DE QUILLEN[1]
par A GROTHENDIECK

I. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux

A toute catégorie C, on associe un ensemble semi-simplicial $S(C)$, trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$S : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Ssimpl}\,.$$

Les systèmes locaux d'ensemble sur SC correspondent aux foncteurs sur C qui transforment toute flèche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à C). Les H^i sur SC d'un tel système local (H^0 pour ensembles, H^1 pour groupes, H^i quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs $\varprojlim^{(i)}$ dérivés de $\varprojlim$, ou si on préfère, des H^i (du *topos* C). On voit ainsi à quelle condition un foncteur $C \longrightarrow C'$ induit un homotopisme $SC \longrightarrow SC'$: en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il f et s que pour tout système de coefficients F' sur C', l'homomorphisme naturel $\varprojlim^{(i)}_{C'} F' \longrightarrow \varprojlim^{(i)}_{C} F$ soit un isomorphisme (pour les i pour lesquels cela a un sens).

A C on peut associer le topos $\widetilde{C}$, qui varie de façon *covariante* avec C. (NB le foncteur $C \mapsto \widetilde{C}$ n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??).

Les systèmes de coefficients ensemblistes sur C ($\overset{\text{def}}{=}$ les foncteurs $C^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux localement constants i.e. les objets localement constants de $\widetilde{C}$, définis intrinsèquement en termes de $\widetilde{C}$. Ainsi, le fait pour un foncteur $F : C \longrightarrow C'$

[1] Ce texte a été transcrit par Mateo Carmona
https://agrothendieck.github.io/

d'induire une homotopisme $S(C) \longrightarrow S(C')$ ne dépend que du morphisme de topos $\widetilde{F} : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C'}$ induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant F' sur C' i.e. sur $\widetilde{C'}$, les applications induites $\mathrm{H}^i(\widetilde{C'}, F') \longrightarrow \mathrm{H}^i(\widetilde{C}, \widetilde{F}^*(F'))$ sont des isomorphismes (pour les i pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T : \text{Ssimpl} \longrightarrow \text{Cat},$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial X la catégorie $T(X) = \Delta_{/X}$ des simplexes sur X, dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des X_n... (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie Δ des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les X_n). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout X, $ST(X)$ est isomorphe canoniquement à X dans la catégorie homotopique construite avec Ssimpl, et que pour toute C, la catégorie $TS(C)$ est canoniquement "homotopiquement équivalente à C" i.e. canoniquement isomorphe a C dans la catégorie quotient de Cat obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. Ces isomorphismes sont fonctoriels en X. Il en résulte formellement qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans Ssimpl

II. n-catégories, catégories n-uples, et Gr-catégories

III. Point de vue "motivique" en théorie du cobordisme