Lodève le 7.8.74

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par une jambe d'assurer un cours de 1er cycle au 1er trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les foutoirs de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". À ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si M, N sont deux faisceaux abéliens sur un topos X, et $\tau_{\leq 2}\, \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) = E(M,N)$ est le complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} \underline{H}^i = \underline{\mathrm{Ext}}^i(M,N) & \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ \underline{H}^i = 0 & \text{si } i \notin [0,2] \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

$$(T) \qquad \begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Hom}}(M_2 N)[-2] \arrow[dl] & \\ E(M,N) \arrow[rr] & & E'(M,N) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Je n'ai pas retrouvé la lettre de [illegible] que tu cites

8

donc $E'(M,N)$ est un complexe dont les invariants $\underline{H}^i$ sont ceux de $E(M,N)$ en degré $i+2$, et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to \underline{Ext}^2(M,N) \to \overbrace{\underline{H}^2(E'(M,N))}^{P(M,N)} \xrightarrow{\sigma} \underline{Hom}(M,{}_2N) \to 0$$

Heuristiquement, $E'(M,N)$ est le complexe qui exprime le "2-champ de Picard "strict" formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) "épinglés" par M, N sur des objets variables de X, en admettant que la théorie pour les 1-champs de Picard stricts s'étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute); de même $E(M,N)$ correspond aux champs de Picard stricts épinglés par M, N. La suite exacte $(*)$ se construit en tout cas canoniquement "à la main", où le terme médian est le faisceau des classes à "équivalence" près des

9

~~catégorie~~ champs de Picard épinglés par M, N, α étant l'invariant qui s'obtient en associant à toute section L d'un champ de Picard la symétrie de $L \otimes L$, interprétée comme une section de ${}_2N$. Je sais prouver (sauf erreur) que tout hom. $M \to {}_2N$ provient d'un champ de Picard convenable (épinglé par M, N) (a priori l'obstruction est dans $\mathrm{Ext}^3(X; M, N)$, mais un argument "universel" prouve qu'elle est nulle). Cela prouve que l'extension α, est bien proche d'être splittée : toute section du troisième faisceau, sur un objet quelconque de X, se remonte — en d'autres termes l'extension a une section "ensembliste". Bien sûr, il y a mieux en fait : toute section sur un $U \in \mathrm{Ob}\, X$ "provient" d'un élément de $\mathcal{H}^2(U, E^\cdot(M, N))$ (hypercohomologie $\mathcal{H}^2$).

10

<u>Exemple</u> Soit A un anneau sur X, soient M, N respectivement les faisceaux K^0 et K^1 associés au champ additif des A-Modules projectifs de t.f. (p. ex.) Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par M, N, d'où une section canonique du terme médian $F(M,N)$ de $(*)$.

<u>NB</u> Tout ce qui précède a des fonctorialités évidentes en M, N, X ...

<u>Question</u>: Le triangle exact (T) et la suite exacte $(*)$ sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie...)? Connaissent-ils des variantes "supérieures"? (Un principe "géométrique" pour les obtenir pourrait être via des n-champs de Picard non néc. stricts...)

11

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

Je profite de l'occasion pour soulever une question sur la "cohomologie relative". Soit $g : X \to Y$ un morphisme de topos. Si F est un faisceau abélien (ou un complexe d'iceux) sur Y, peut-on définir fonctoriellement en F la cohomologie relative $R\Gamma(Y \bmod X, F)$ (de la catégorie dérivée de $Ab(Y)$ dans celle de Ab) ? L'interprétation "géométrique" en termes d'extensions, sur des n-champs de Picard (ou "grands") suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente "à la main" que dans deux cas extrêmes :

a) g est "(-1)-acyclique" i.e. pour tout F sur Y, $F \to g_* g^* F$ est injectif (NB c'est le cas de $Y_{/P} \to Y$ si $P \to e_Y$ est un épimorphisme, c'est donc le cas de $B_e \to B_G$ plus haut)

On prend

$$R\Gamma_Y(\mathrm{Coker}(F \to g_*(\underbrace{C(g^*(F))}_{\text{résol. inj.}})))[-1]\,)$$

12

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

b) $\forall F$ injectif sur ?, $q^*(F)$ est injectif
et $F \to q_* q^* F$ est un épimorphisme
(ex: q inclusion d'un ouvert $U \supset Y$).
On prend

$$\mathbb{R}\Gamma_Y(\mathrm{Ker}(\underbrace{C(F)}_{\text{rés. inj.}} \to q_* q^* C(F)))$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d'un morphisme de complexe (tel que

$$F \to q_*(q^* C(F))$$

) n'est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) p.r. à la flèche dont on veut prendre le cône.

Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

<u>Question pour Illusie</u> : Dans la théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des $H^3(B_G/X, \ )$ resp. des $\mathrm{Ext}^2(X, \ )$. Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (à peu près écrite) des Gr-champs — resp. via la théorie des champs de Picard ? J'ai

13

Je te signale que j'ai réfléchi aux Gr-champs sur X. Si G est un Groupe sur X, N un G-Module, les Gr-champs sur X "épinglés par G, N" forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l'opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à l'échelon 2 qui lui correspond est le tronqué

$$\tau_{\leq 2}(\mathbb{R}\Gamma(B_G \bmod X, N)[1])$$

(NB la cohomologie de $\mathbb{R}\Gamma(B_G \bmod X, N)$ commence en degré 1) Plus géométriquement, un Gr-champ sur X épinglé par (G, N) est essentiellement "la même chose" qu'une 2-gerbe sur B_G, liée par N, et ~~épi~~ munie d'une trivialisation au-dessus de $X \simeq B_e = (B_G)_{/P}$ (où P est le "objet de B_G "torseur universel sous G"). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se

14

trouve que dans celle-ci, les
3-flèches sont triviales (i.e. si source = but, ce sont des identités) — cela en fait
qui exprime $H^0(B_G/X, N) = 0$
(i.e. $H^0(B_G, N) \to H^0(X, N)$ injectif ...).
Donc la 3-catégorie peut être regardée
comme une 2-catégorie — et "c'est" celle des Gr-champs sur X épinglés
par G, N. Si on veut localiser sur X, et décrire le 2-champ de Picard sur X des
champs de Picard (sur des objets variables de X) épinglés par G, N,
on trouve qu'il est exprimé par
le complexe

$$\tau_{\le 2}\left(\mathbb{R}p_{G*}\, \operatorname{Coker}\left(N \to \overbrace{\mathbb{R}q_{G*}(q_G^* N)}^{\text{rés. inj.}}\right)\right)$$

où $p_G : B_G \to X$ et $q_G : B_e \simeq X \simeq (B_G)_p \to B_G$
Toutes ces descriptions étant compatibles
avec des variations de G, N, X, cela
donne en principe une description
de la 2-catégorie des Gr-champs,
avec X, G, N variables ...

15