

- 538 -

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS	
INTRODUCTION.....	
CHAPITRE 0 .- Préliminaires.....	
§ 1. Foncteurs représentables.....	
1.1. Foncteurs représentables.....	
1.2. Produits fibrés dans une catégorie.....	
1.3. Changement de base.....	
1.4. Noyaux ; morphisme diagonal.....	
1.5. Foncteurs adjoints.....	
1.6. Structures algébriques dans les catégories.....	
1.7. Morphismes fonctoriels représentables.....	
§ 2. Compléments de topologie.....	
2.1. Espaces irréductibles.....	
2.2. Espaces localement noethériens.....	
2.3. Ensembles quasi-constructibles et ensembles constructibles.....	
2.4. Fonctions constructibles.....	
2.5. Fonctions constructibles.....	
2.4. Ensembles constructibles dans les espaces noethériens	
2.5? Fonctions constructibles.....	
2.6. Parties très denses d'un espace topologique.....	
2.7. Quasi-homéomorphismes.....	
2.8. Espaces de Jacobson.....	
2.9. Espace sobre associé à un espace topologique.....	
2.10. Applications ouvertes en un point	
§ 3. Compléments sur les faisceaux.....	
3.1. Faisceaux à valeurs dans une catégorie.....	
3.2. Préfaisceaux sur une base d'ouverts.....	
3.3. Recollement de faisceaux.....	
3.4. Images directes de préfaisceaux.....	
3.5. Images réciproques de préfaisceaux.....	
3.6. Faisceaux simples et faisceaux localement simples...	
3.7. Images réciproques de faisceaux de groupes ou d'anneaux.....	

84

- 541 -

3.8.	Morphismes universellement ouverts , universellement fermés , universellement bicontinus.....
3.9.	Morphismes générissants.....
3.10.	Morphismes submersifs et universellement submersifs
§ 4.	Sous-schémas et morphismes d'immersion . Schémas réduits.....
4.1.	Sous-schémas.....
4.2.	Morphismes d'immersion.....
4.3.	Image réciproque d'un sous-schéma.....
4.4.	Immersions locales et isomorphismes locaux.....
4.5.	Schémas réduits.....
4.6.	Existence d'un sous-schéma d'espace sous-jacent donné.....
§ 5.	Morphismes séparés . Critères valuatifs.....
5.1.	Diagonale d'un S-schéma.....
5.2.	Morphismes et schémas séparés.....
5.3.	Critères de séparation.....
5.4.	Morphismes schématiquement dominants et sous-schémas schématiquement denses.....
5.5.	Critères valuatifs.....
§ 6.	Conditions de finitude relatives.....
6.1.	Morphismes quasi-compacts et morphismes quasi-séparés.....
6.2.	Morphismes localement de type fini et morphismes localement de présentation finie.....
6.3.	Morphismes de type fini et morphismes de présentation finie.....
6.4.	Schémas de Jacobson et anneaux de Jacobson.....
6.5.	Schémas algébriques et localement algébriques.....
6.6.	Détermination locale d'un morphisme.....
6.7.	Image directe d'un faisceau quasi-cohérent.....
6.8.	Prolongement de sections de faisceaux quasi-cohérents
6.9.	Prolongement des faisceaux quasi-cohérents.....
6.10.	Image schématique d'un schéma. Adhérence schématique d'un sous-schéma.....
6.11.	Morphismes quasi-finis.....

85

- 539 -

3.8.	Quasi-homéomorphismes et images réciproques de faisceaux.....
3.9.	Faisceaux d'espaces pseudo-discrets.....
§ 4.	Espaces annelés.....
4.1.	Espaces annelés, A-Modules, A-Algèbres.....
4.2.	Image directe d'un A-Module.....
4.3.	Image réciproque d'un B-Module.....
4.4.	Relations entre images directes et images réciproques.....
4.5.	Immersiones ouvertes et morphismes représentables par des immersiones ouvertes
§ 5.	Faisceaux quasi-cohérents et faisceaux cohérents.....
5.1.	Faisceaux quasi-cohérents.....
5.2.	Faisceaux de type fini.....
5.3.	Faisceaux cohérents.....
5.4.	Faisceaux localement libres.....
5.5.	Modules localement libres sur un espace localement annelé.....
5.6.	Groupe de Picard.....
5.7.	Morphismes plats d'espaces annelés.....
§ 6.	Compléments d'algèbre commutative .
6.1.	Limites inductives d'anneaux.....
6.2.	Identification du module M_F à une limite XXXXXX inductive.....
6.3.	Propriétés de finitude.....
6.4.	Critères pour qu'un anneau soit noethérien.....
6.5.	Anneaux normaux et fermeture intégrale.....
6.6.	Compléments sur la platitude.....
6.7.	Compléments sur les modules projectifs.....
6.8.	Existence d'extensions plates d'anneaux locaux.....
§	XXXX
§ 7.	Compléments d'algèbre topologique.....
7.1.	Anneaux admissibles.....
7.2.	Anneaux adiques et limites projectives.....
7.3.	Anneaux préadiques noethériens.....
7.4.	Modules quasi-finis sur les anneaux locaux.....
7.5.	7.5. Anneaux de séries formelles restreintes.....
7.6.	Anneaux complets de fractions.....

86

- 540 -

7.7. Produits tensoriels complétés.....	
7.8. Topologies sur les modules d'homomorphismes.....	
CHAPITRE I .- Le langage des schémas.....	
Sommaire.....	
§ 1. Schémas affines.....	
1.1. Le spectre premier d'un anneau.....	
1.2. Propriétés fonctorielles des spectres premiers d'anneaux.....	
1.3. Faisceau associé à un module.....	
1.4. Faisceaux quasi-cohérents sur un spectre premier...	
1.5. Faisceaux cohérents sur un spectre premier.....	
1.6. Schémas affines et morphismes d'espaces localement annelés dans des schémas affines.....	
1.7. Images directes et images réciproques de faisceaux quasi-cohérents par des morphismes de schémas affines.....	
§ 2. Schémas et morphismes de schémas.....	
2.1. Définition des schémas.....	
2.2. Faisceaux quasi-cohérents sur un schéma.....	
2.3. Morphismes de schémas.....	
2.4. Recollement de schémas.....	
2.5. Schémas locaux.....	
2.6. Schémas au-dessus d'un schéma.....	
2.7. Schémas noethériens et schémas localement noethériens.....	
2.8. Schémas artiniens.....	
§ 3. Produit et somme de schémas. Changement de base.....	
3.1. Somme de schémas.....	
3.2. Produit de schémas.....	
3.3. Produit tensoriel de Modules quasi-cohérents sur un produit de schémas.....	
3.4. Changements de base ; fibres.....	
3.5. Points d'un schéma à valeurs dans un schéma ; points géométriques.....	
3.6. Morphismes surjectifs.....	
3.7. Morphismes radiciels.....	

87

- 542 X -

§ 7. Ensembles constructibles dans les schémas.....	
7.1. Morphismes de présentation finie et ensembles constructibles.....	
7.2. Ensembles pro-constructibles et ind-constructibles.	
7.3. Application aux morphismes générants.....	
§ 8. Applications rationnelles	
8.1. Applications rationnelles et fonctions rationnelles	
8.2. Domaine de définition d'une application rationnelle	
8.3. Faisceau des fonctions rationnelles.....	
8.4. Faisceaux de torsion et faisceaux sans torsion.....	
8.5. Critères de séparation d'un schéma intègre.....	
§ 9. Foncteurs représentables élémentaires dans la théorie des schémas : Schémas relativement affines , fibrés vectoriels , fibrés projectifs et grassmanniennes..	
9.1. Morphismes affines et spectres d'Algèbres quasi-cohérentes.....	
9.2. Faisceaux quasi-cohérents sur un S-schéma affine sur S.....	
9.3. Application aux changelents de base pour les images directes de Modules quasi-cohérents.....	
9.4. Fibré vectoriel associé à un faisceau de modules...	
9.5. Schémas en ensembles algébriques.....	
9.6. Schémas en groupes linéaires.....	
9.7. Grassmanniennes d'un Module.....	
9.8. Morphismes de Plücker et de Segre.....	
9.9. Fibrés en drapeaux.....	
9.10. Fibrés en variétés de Stiefel.....	
§ 10. Schémas formels.....	
10.1. Schémas formels affines.....	
10.2. Morphismes de schémas formels affines.....	
10.3. Idéaux de définition d'un schéma formel affine....	
10.4. Schémas formels et morphismes de schémas formels..	
10.5. Idéaux de définition des schémas formels.....	
10.6. Schémas formels comme limite inductives de schémas	
10.7. Produit de schémas formels.....	
10.8. Complété formel d'un schéma le long d'un sous- schéma.....	

88

Spectre formel d'un anneau admissible : I,10.1.2 .
 Spectre d'une O_S -Algèbre : I,9.1.8.
 Stabilisateur d'une section d'un Module localement libre de rang fini : I,9.6.6.
 Support d'un faisceau de groupes : ~~XXXX~~ 0,3.1.6 .
 Support d'une section d'un faisceau de groupes : 0,3.1.6 .
 Système fondamental d'idéaux (de sous-modules) ouverts : 0,7.1.1.
 Système fondamental d'Idéaux de définition : I,10.3.6 et 10.5.1.
 Système inductif dans une catégorie : 0,1.1.12 .
 Système inductif adique de schémas : I,10.12.2 .
 Système projectif dans une catégorie : 0,1.1.9 .

 Topologie canonique d'un anneau semi-local : 0,7.3.1.
 Topologie constructible sur un schéma : ~~IXE~~ I,7.2.11 .
 Topologie déduite de celle de A sur un A-module : 0,7.1.1.
 Topologie J-adique , topologie J-préadique : 0,7.1.9 et 7.2.3 .
 Topologie spectrale : I,1.1.2 .
 Topologie produit tensoriel : 0,7.7.2 .
 Trait : I,5.5.1 .
 Très dense (partie) : 0,2.6.3 .
 Trivial (O_X -Module inversible) : I,2.5.7 .
 Type fini (O_X -Module de) : 0,5.2.1.

 Ultra-schéma : I,App.1.5 .

 Valeur ~~XXXXXXXXXXXX~~ en un point d'une section d'un O_X -Module sur un espace localement annelé : 0,4.1.9 .

- 543 -

10.9.	Prolongement d'un morphisme aux complétés.....	
10.10.	Modules de présentation finie sur les schémas formels affines adiques.....	
10.11.	Modules de présentation finie sur les schémas formels adiques.....	
10.12.	Morphismes adiques de schémas formels.....	<i>Morphismes finis</i>
10.13.	Morphismes de type fini.....	
10.14.	Sous-schémas fermés des schémas formels.....	
10.15.	Schémas formels séparés.....	
APPENDICE .- Ultraschémas et espaces algébriques de Serre...		
App.1.	Spectres maximaux et ultraschémas.....	
App.2.	Espaces algébriques de Serre.....	
BIBLIOGRAPHIE.....		
INDEX DES NOTATIONS.....		
INDEX TERMINOLOGIQUE.....		

S-schéma localement quasi-fini sur S : I,6.11.3 .
 - quasi-compact sur S : I,6.1.1 .
 - quasi-séparé sur S : I,6.1.3 .
 - quasi-fini sur S : ~~XX~~ I,6.11.3 .
 - séparé sur S : I,5.2.1 .
~~XXXXXXXXXXXX~~ Schéma formel : I,10.4.2 .
 - adique : I,10.4.2 .
 - affine : I,10.1.2 .
 - localement noethérien : I,10.4.2 .
 - noethérien : I,10.4.2 .
 - séparé : I,10.15.1 .
 A-schéma formel , schéma formel sur A (A anneau admissible) : I,10.4.7
 S-schéma formel , schéma formel sur S (S schéma formel) : I,10.4.7.
 S-schéma formel de type fini sur S : I,10.13.3 .
 S-schéma formel séparé sur S : I,10.15.1 .
 Section d'un faisceau au-dessus d'un ouvert : 0,3.1.6 .
 Section unité de \mathcal{O}_X : 0,4.1.1 .
 S-section d'un S-objet : 0,1.1.11 .
 S-sections d'un S-schéma : I,2.6.5 et 5.1.4 .
 S-section universelle d'un S-objet : 0,1.4.9 .
 S-section rationnelle d'un S-schéma : I,8.1.2 .
 Série formelle restreinte : 0,7.5.1 .
 Somme de schémas : ~~XXXXXX~~ I,3.1.
 Somme amalgamée d'objets de \underline{C} : 0,1.2.16 .
 Sous- \mathcal{O}_X -Algèbre engendrée par un sous-Module : 0,4.1.3 .
 Sous-catégorie , sous-catégorie ~~XX~~ pleine : 0,1.1.5 .
 Sous-espace annelé d'un espace annelé : I,4.2.5 .
~~XXXXX~~ Sous-foncteur : 0,1.7.1 .
 Sous-schéma : I,4.1.2 .
 Sous-schéma associé à une immersion : I,4.2.1 .
 Sous-schéma fermé : I,4.2.2 .
 Sous-schéma fermé défini par un Idéal quasi-cohérent : I,4.1.1.
 Sous-schéma des coïncidences de deux morphismes : I,5.1.5 .
 Sous-schéma majoré par un sous-schéma : I,4.3.8 .
 Sous-schéma schématiquement dense : I,5.4.2 .
 Sous-schéma formel fermé : I,10.14.2 .
 Spécialisation : 0,2.1.1 .
 Spectre (ou spectre premier) d'un anneau : I,1.1.1.
 Spectre maximal d'un anneau de Jacobson : I,App.1.3 .

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES

10.12. St-Louis pour l'in (en m.?)

94