

GEOMETRY

(Unpublished)

A. Grothendieck

This edition is a collection of A. Grothendieck's unpublished works on geometry reunited by Mateo Carmona. Remarks, comments, and corrections are welcome.

<https://agrothendieck.github.io/>

Typeset with \LaTeX and the *memoir* class. Composed with Bitstream Charter for the text type and Paul Pichaureau's `mathdesign` package for the math type. All diagrams and illustrations were made with Till Tantau's TikZ (TikZ ist *kein* Zeichenprogramm) and the `tikz-cd` package.

Contents

1968 1

Tapis de Quillen 1

- 1 Relation entre catégories et ensembles
semi-simpliciaux 1
- 2 n -catégories, catégories n -uples, et Gr-catégories 2
- 3 Point de vue “motivique” en théorie du cobordisme 2

Tapis de Quillen

- 1 A toute catégorie C , on associe un ensemble semi-simplicial $S(C)$, trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle

Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux

$$S : (\text{Cat}) \rightarrow \text{Ssimpl.}$$

Les systèmes locaux d'ensemble sur SC correspondent aux foncteurs sur C qui transforment toute flèche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à C). Les H^i sur SC d'un tel système local (H^0 pour ensembles, H^1 pour groupes, H^i quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs $\varprojlim^{(i)}$ dérivés de \varprojlim , ou si on préfère, des H^i (du topos C). On voit ainsi à quelle condition un foncteur $C \rightarrow C'$ induit un homotopisme $SC \rightarrow SC'$: en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il f et s que pour tout système de coefficients F' sur C' , l'homomorphisme naturel $\varprojlim^{(i)}_{C'} F' \rightarrow \varprojlim^{(i)}_C F$ soit un isomorphisme (pour les i pour lesquels cela a un sens).

A C on peut associer le topos \tilde{C} , qui varie de façon covariante avec C . (NB le foncteur $C \mapsto \tilde{C}$ n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??).

Les systèmes de coefficients ensemblistes sur C (les foncteurs $C^\circ \rightarrow \text{Ens}$ transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux localement constants i.e. les objets localement constants de \tilde{C} , définis intrinsèquement en termes de \tilde{C} . Ainsi, le fait pour un foncteur $F : C \rightarrow C'$ d'induire une homotopisme $S(C) \rightarrow S(C')$ ne dépend que du morphisme de topos $\tilde{F} : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}'$ induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant F' sur C' i.e. sur \tilde{C}' , les applications induites $H^i(\tilde{C}', F') \rightarrow H^i(\tilde{C}, \tilde{F}^*(F'))$ sont des isomorphismes (pour les i pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T : \text{Ssimpl} \rightarrow (\text{Cat}),$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial X la catégorie $T(X) = \Delta_{/X}$ des simplexes sur X , dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des $X_n \dots$ (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie Δ des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les X_n). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout X , $ST(X)$ est isomorphe canoniquement à X dans la catégorie homotopique construite avec Ssimpl , et que pour toute C , la catégorie $TS(C)$ est canoniquement "homotopiquement équivalente à C " i.e. canoniquement isomorphe à C dans la catégorie quotient de (Cat) obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. Ces isomorphismes sont fonctoriels en X . Il en résulte formellement qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans Ssimpl est un homotopisme si et seulement si en est ainsi de $T(f) : T(X) \rightarrow T(Y)$, d'où

des foncteurs $S' : (\text{Cat})' \rightarrow \text{Ssimpl}'$ et $T' : \text{Ssimpl}' \rightarrow (\text{Cat})'$ entre les catégories “homotopiques”, construites avec (Cat) resp Ssimpl , qui sont quasi-inverses l'un de l'autre.

De plus, Quillen construit un isomorphisme canonique et fonctoriel dans $(\text{Cat})'$ entre C et la catégorie opposée C° , ou ce qui revient au même, un isomorphisme canonique et fonctoriel dans Ssimpl' entre $S(C)$ et $S(C^\circ)$. La définition est telle que le foncteur induit sur les systèmes locaux sur C transforme le foncteur contravariant F sur C , transformant toute flèche en flèche inversible, en le foncteur covariant (i.e. contravariant sur C°) ayant mêmes valeurs sur les objets, et obtenu sur les flèches en remplaçant $F(u)$ par $F(u)^{-1}$; en d'autres termes, l'effet de l'homotopisme de Quillen sur les groupoïdes fondamentaux est l'isomorphisme évident entre les groupoïdes fondamentaux de C et de C° , compte tenu que le deuxième est l'opposé du premier. Comme application, Quillen obtient une interprétation faisceautique de la cohomologie d'un ensemble semi-simplicial à coefficients dans un système local covariant F (défini classiquement par le complexe cosimplicial des $C^n(F) = \prod_{x \in X_n} F(x)$): on considère le système local contravariant défini par F , on l'interprète comme un faisceau sur $T(X)$ i.e. objet de $\text{Ssimpl}/_X$, et on prend sa cohomologie. - Cependant, quand F est un système de coefficients covariant pas nécessairement local, on n'a toujours pas d'interprétation de ses groupes de cohomologie classiques en termes faisceautiques; ni, lorsque F est contravariant, de son homologie, ou inversement de sa cohomologie faisceautique en termes classiques.

A propos de la notion de foncteur qui est un homotopisme. Quillen montre qu'un tel foncteur $F : C \rightarrow C'$ induit une équivalence entre la sous-catégorie triangulée $D_{lc}^b(C')$ de la catégorie dérivée bornée de celle des faisceaux abéliens sur C' , dont les faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux, et la catégorie analogue pour C ; et réciproquement. On peut dans cet énoncé introduire aussi n'importe quel anneau de base (à condition de le supposer $\neq 0$ dans le cas de la réciproque); la partie dire vaut aussi avec un anneau de coefficients par nécessairement constant, mais constant tordu. Je pense que ce résultat (facile) doit pouvoir se généraliser ainsi.

Soit $f : X \rightarrow X'$ un morphisme de topes qui soit tel que pour tout faisceau localement constant sur X' , f induise un isomorphisme sur les cohomologies (avec cas non commutatif inclus). Supposons que X et X' soit *localement homotopiquement trivial*, i.e. que pour tout entier $n \geq 1$, tout objet U ait un recouvrement par des $U_i \rightarrow U$, tels que a) tout système local sur U devient constant sur U_i , et toute section sur U devient constant sur U_i et b) pour tout groupe abélien G , les $H^j(U, G) \rightarrow H^j(U_i, G)$ sont nuls pour $1 \leq j \leq n$ *. Alors le foncteur $D_{lc}^b(X') \rightarrow D_{lc}^b(X)$ induit par f est une équivalence. Même énoncé si on met dans le coup un système local d'anneaux sur X' . Enfin, f induit une équivalence entre la catégorie des coefficients locaux sur C et celle des coefficients locaux sur C' .

* Attention, cette condition n'est typiquement pas satisfaite par les schémas sur \mathbb{Z}