Filtration des foncteurs fibres

87

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES
BURES-SUR-YVETTE (S.-&-O.)
928-48-53

Filtration sur foncteur fibre pour catégorie tensorielle

Soit ~~E~~ $\mathcal{M}$ une catégorie tensorielle ~~—~~ "rigide ~~abélienne~~" sur corps k, S un schéma sur k, F un foncteur fibre relatif à S

$$\mathcal{M} \longrightarrow \text{faisceaux loc. libres sur } S$$

Une filtration de F par des sous-foncteurs $F^{(p)}$ est dite admissible si elle satisfait aux conditions

(0) Chaque $F^{(p)}(M)$ est loc. fact. direct dans M $(\forall M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M})$

(i) Additivité : $F^{(p)}(M * N) = F^{(p)}(M) * F^{(p)}(N)$

(ii) Multiplicativité $F^{(p)}(M \otimes N) = \sum_{q+r=p} F^{q}(M) \otimes F^{r}(N)$

(iii) $F^{p}(\check{M})$ est l'orthogonal de $F^{-p+1}(M)$

(iv) Pour chaque M, la filtration $F^{(p)}(M)$ est loc. exh. et sép.

Considérons alors le foncteur

$$M \rightsquigarrow \mathrm{gr}\,F(M)$$

En vertu de (0), il est à valeurs dans les modules loc. libres (gradués) sur S, (i) implique qu'il est additif, (ii) qu'il est multiplicatif, et (iii) qu'il commute à $\check{}$.

N.B. ~~Ses conditions impliquent~~ (iii) et (iv) impliquent

$F^{(0)}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, $F^{(1)}(\mathbb{1}) = 0$, d'où $\mathrm{gr}\,F(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ réduit au degré 0.

Supposons $\mathcal{M}$ abélienne, donc $\mathrm{gr}\,F$ exact (mais il faut la vérifier en condition de (i)).

Si [illegible] bien

88

5

$$G = \underline{\mathrm{Aut}}_S(F)$$

(schéma en groupes affine sur S), alors $\mathrm{gr}(F)$, en tant que foncteur-fibre (on utilise la graduation) est défini par un G-torseur P, par $\mathrm{gr}(F) \simeq F^P$, $P = \underline{\mathrm{Isom}}_S(F, \mathrm{gr}\, F)$. De plus, la graduation sur le foncteur sur $\mathrm{gr}(F)$ est définie par un homomorphisme

$$G_{m_S} \xrightarrow{i} \cancel{\mathrm{Aut}}\ G^P = G'.$$

Toutes ces constructions sont compatibles avec changements de base. Parmi les isom. de F sur $\mathrm{gr}(F)$, on distingue ceux qui respectent la filtration et induisent l'identité sur les gradués associés. Ils forment (comme il se voit) un sous-foncteur Q de P, qui est un quasi-torseur à g. sous le sous-groupe H' de G^P des automorphismes respectant la filtration de $F' = \mathrm{gr}\, F$, et induisant l'identité sur les gr, et un quasi-torseur à droite sous le sous-groupe analogue H de G.

Ou supposer H de type fini

Cependant, il faut s'assurer que Q est un torseur, i.e. qu'il a localement une section, donc qu'il existe un isom. respectant les filtrations de F et F' et induisant l'identité sur les gr associés.

89

On peut supposer déjà F et F' isomorphes, s'il est vrai que les deux foncteurs fibres sont isomorphes (fpqc ... Il suffit que ça marche du moins ~~en car~~ si k est de car 0, en supposant deps M semi-simples (Cf. [illegible] comme [illegible] de [illegible] et [illegible] sur S, [illegible])

Déterminons le groupe H', et pour ceci choisissons un pointeur M, alors

Construction un foncteur de $G' \to G'$ (...)

$G' = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathcal{O}_S}(F(M))$, et H' est le sous-groupe de G' formé des g' tels que, $\forall p \in \mathbb{Z}$, :

$$g' x_p^{\#} \equiv x_p^{\#} \ \ (F^{p+1}(M))$$

Les transformations infinitésimales de H' s'obtiennent ainsi : comme [illegible] gradué $\mathfrak{g}'$ [illegible] : [illegible] G', $\mathfrak{g}'$ se décompose suivant les [illegible] de [illegible], et on a

$$\boxed{\mathfrak{h}' = \sum_{n \geq 1} \mathfrak{g}'_n}$$

N.B. H' est connexe (étant unipotent!)

N.B. Le sous-groupe qui normalise la filtration sur [illegible] correspond à l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}' = \sum_{n \geq 0} \mathfrak{g}'_n$ — c'est le produit semi-direct du centralisateur de i dans $\mathfrak{g}$, et de $\mathfrak{h}'$ ... Donc l'algèbre $\mathfrak{g}'$ est unipotente, et correspond d'ailleurs à un [illegible] comme unipotent, tandis que $\mathfrak{b}'$ est parabolique ; le centralisateur de i est un sous-groupe de Levi. NB : étudier les relations entre "ss-groupes 'primitifs'" et sous-groupes paraboliques avec déc. de Levi.

90

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES
BURES-SUR-YVETTE (S.-&-O.)
928-48-53

91

Bien entendu, on n'exige pas davantage la filtration de F connaissant $F' = F^p$, i.e. $G_m \to G' = G^p$ $\left(= \underline{\mathrm{Aut}}_S(F')\right)$

et la sous-H'-torseur à gauche Q de P.

<u>En résumé</u> (lorsque on a M ½ simple), la donnée d'un ~~foncteur~~ fibré filtré admissible sur M, à "valeurs dans S", équivaut à la donnée

(i) d'un foncteur fibré gradué admissible sur M, à valeurs dans S, i.e. d'un foncteur fibré F' sur M, et d'un homomorphisme $i : G_{m\,S} \to G' = \underline{\mathrm{Aut}}_S F'$.

(ii) D'un $G'^{>}$-torseur $F'Q'$ à droite, où $G'^{>}$ est le groupe unipotent de G' défini par i.

À ces données, on associe le foncteur fibré $F = F'Q'$, avec la filtration déduite par descente de la filtration ~~canonique~~ de F' gradué, muni canoniquement d'une graduation. D'ailleurs Q [illegible] trivial sur la filtration du foncteur F "splittée"....

Si M est muni en plus d'une donnée [illegible] des structures unitaires, [illegible] dans [illegible]

$i : G_{m\,S} \to G'$ homomorphisme central, et i_1, il convient de prendre i_2 défini par

$$i_1(\lambda)\, i_2(\bar\lambda) = f(\lambda)$$

Alors i_1, i_2 sont dits <u>complémentaires</u>. Les paraboliques associés sont opposés, ces [illegible] intéressantes [illegible]

92

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES
BURES-SUR-YVETTE (S.-&-O.)
928-48-53

93

S'il y a aussi les structures métriques de Tate, définissant donc

$$\varepsilon : G' \longrightarrow G_m$$

alors $\varepsilon i (\lambda) = \lambda^n$, et l'entier n est le degré du "motif de Tate" "affecté" (motif $T(n)$)").
Dans le cas auquel nous nous intéressons, c'est donc 1 (car c'est qu'il y a compatibilité avec la structure de Tate...) :

$$\varepsilon i (\lambda) = \lambda$$

<u>Exemple</u> Soit S quasi-projective lisse sur $\mathbb{Q}$, et M la catégorie des motifs sur S. Le <u>foncteur de De Rham</u> sur M est dans les modules loc. libres sur S, et est admissible. À ce titre, il définit donc des données F' (ce n'est autre que le <u>foncteur de Hodge</u>) ~~[illegible]~~ G', $i : G_m \longrightarrow G'$, (d'où $B'^{>}$) et un $G'^{>}$-torseur Q. (Étant donné la structure de $G'^{>}$ (pro-unipotent), il s'ensuit d'ailleurs que <u>si S est réduit à un pt</u>, Q est <u>trivial</u>, donc le foncteur de De Rham filtré <u>splitté</u> (mais le splitting des foncteurs n'est pas canonique, en particulier n'est pas stable par les automorphismes de ce foncteur, ou par ceux qui respectent la filtration,

94

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES
BURES-SUR-YVETTE (S.-&-O.)
928-48-53

et induisant l'identité sur le gradué associé...

Supposons maintenant $S = \mathrm{Spec}\, K$, K un corps, et considérons un homom. $i : K \to \mathbb{C}$. Alors le morphisme de i définit le foncteur-fibre de Betti, soit F'', à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

De plus, on a des isom canoniques

$$F''_{\mathbb{C}} \underset{\text{Gaga}}{\simeq} F_{\mathbb{C}} \underset{\text{th. de Hodge des intégrales harmoniques}}{\simeq} F^{*}_{\mathbb{C}}$$

D'ailleurs, l'isom $F^{*}_{\mathbb{C}} \simeq F'_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{gr}(F_{\mathbb{C}})$ est déduit de l'isom $F_{\mathbb{C}} \simeq F''_{\mathbb{C}}$, définissant une structure réelle sur $F_{\mathbb{C}}$, donnant lieu une involution σ, et la filtration (conj) de $F_{\mathbb{C}}$, par $F^{p,q}_{\mathbb{C}} = F^{(p)}_{\mathbb{C}} \cdot \sigma(F^{(q)}_{\mathbb{C}})$ ...

95

Soit G un schéma en gr. affine sur un corps k

$j : \mathbb{G}_{m,k} \to G$ un hom., i.e. une structure de

$\otimes$-graduation sur le foncteur oubli T sur $\mathrm{Rep}(G)$.

Cette $\otimes$-graduation définit une $\otimes$-filtration, et

on peut regarder les k-gr.

$$U \subset P \subset G \qquad P = \underline{\mathrm{Aut}}_{\otimes,\text{filt}}\, T, \quad U = \underline{\mathrm{Aut}}_{\otimes,\text{filt},\text{id sur Gr}} \quad (T)$$

Lorsque G [et réductif sur k de car 0, et que] admet un module fidèle V, ~~alors~~ alors

V est gradué par $\mathrm{Gr}_j^i(V)$, filtré par

$$\mathrm{Fil}^p(V) = \sum_{i \geq p} \mathrm{Gr}_j^i(V)$$

et P est le k-gr de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(V)$ laissant invariante

cette filtration, et U le sous-gr ~~noyau~~ noyau de $P \to \prod_i \underline{\mathrm{Aut}}_k \mathrm{Gr}_j^i(V)$.

Dans le cas général, P et U sont des intersections

de tels groupes P_V, U_V $(V \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Rep}(G))$; si P est de t.f.

il y a V tel que $P_V = P$, $U_V = U$.

~~Prenons~~ Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$, $\xi \in \mathfrak{g}$ ~~défini~~ l'image du

générateur can de $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, \mathbb{G}_m$ par $\mathrm{Lie}\, j : \mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$,

$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^\alpha$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ suivant les car

de $\mathbb{G}_m$ opérant sur $\mathfrak{g}$, $V = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} V^\beta$ de même.

On a donc

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta} \qquad \mathfrak{g}^\alpha . V^\beta \subset V^{\alpha+\beta}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de P_V est formée des

96

$x \in \mathfrak{g}$ tels que

$$x\, \mathfrak{g}^{\beta} \subset \sum_{\beta' \geq \beta} V^{\beta'} \quad \text{pour tout } \beta \in \mathbb{Z}.$$

Il suffit que l'on ait

$$x \in \sum_{\alpha \geq 0} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

et c'est aussi nécessaire si V est un module fidèle, car si $X = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} X^{\alpha}$, et si μ est le plus petit des α tels que $X^{\alpha} \neq 0$, i.e. $X = X^{\mu} + \sum_{\lambda > \mu} X^{\lambda}$, $X^{\mu} \neq 0$,

~~[illegible]~~ $X^{\mu} . V^{\alpha} \neq 0$, donc et comme

$\exists\, \alpha$ tel que

$$X^{\mu} V^{\alpha} \subset V^{\alpha+\mu}$$

il faut qu'on ait $\alpha + \mu \geq \alpha$ i.e. $\mu \geq 0$. Ceci veut dire que si V est fidèle, on a

$\mathfrak{U} = \mathrm{Lie}\, U = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^{\alpha}$. Par passage à la limite, on en conclut aisément, dans tous les cas

$$\mathfrak{p} = \sum_{\alpha \geq 0} \mathfrak{g}^{\alpha}, \quad \mathfrak{U} = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

~~Supposons~~ ~~G~~ ~~[illegible]~~ que G ~~[illegible]~~

~~V tel que fidèle V.~~ $P = P_V$, $U = U_V$, ~~Ceci dit~~. Ceci dit, si

P' est le ~~$P \subset P$~~ parabolique de $P' = \mathrm{Aut}(V)$

qui stabilise la filtration de V, ~~et U' le [illegible]~~

qui induit id sur $\mathrm{Gr}(V)$

$P = G \cap P'$, $U = G \cap U'$

et par suite on a une immersion fermée

$G/P \subset G'/P'$

Proposition Supposons [G connexe de v.f., et] ~~[...]~~ G réductif. Alors

Pour un sous-groupe parabolique, U son radical unipotent, [...] Dans tous les cas, si G [...] de v.f. $\Longrightarrow$ U unipotent...

Supposons d'abord G réductif. En car. 0, l'assertion résulte aisément de la théorie infinitésimale. En car. $p>0$,

~~ou [...] l'un des voisins [...]~~

il faut sans doute travailler un peu....

Corollaire. Toute (*)-fibration d'un [...] fibré sur un [...] parfait [... quelc.] splitte ...

En effet, $H^1(k,U)=0$ par Rosenlicht....

Remarque. Soit $T = \mathrm{Im}\, g$, et soit U' [...] Alors [...] uTu^{-1} $(u\in U')$ [...] le groupe $T.U$ [...] engendré [...]

En effet, [...] la [...] algèbre de Lie $\mathfrak{Q}$ contient les [...] $[u,x]$, [...] $u\in U$, [...] $[\mathfrak{U}^\alpha, x] = \alpha\, \mathfrak{U}^\alpha = \mathfrak{U}^\alpha$], donc $\mathfrak{U}$ [...] les $\mathfrak{U}^\alpha$, $\alpha>0$ [...] représentations V de G, [...]

$$V^{T.U} \left[= \bigcap_{u\in U'} V^{uTu^{-1}} \right]$$

$V^G = V^P$, P étant parabolique,