COLLECTED WORKS
Vol I. Published works

Mathematical Reflections

by

Alexandre GROTHENDIECK

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

`https://agrothendieck.github.io/`

CONTENTS

SUR LA COMPLÉTION DU DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL LOCALEMENT CONVEXE

Note de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Élie Cartan

Séance du 6 février 1950

C. R. Acad. Sc. Paris 230, 605-606 (1950)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/completion50scan.pdf

QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS À LA DUALITÉ DANS LES ESPACES (F)

Note de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud Denjoy

Séance du 30 octobre 1950

C. R. Acad. Sci. Paris 230, 1561-1563 (1950)[2]

---

[2] https://agrothendieck.github.io/divers/espLF50scan.pdf

CRITÈRES GÉNÉRAUX DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXES. PATHOLOGIES DES ESPACES (LF)

Note de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud Denjoy

Séance du 30 octobre 1950

C. R. Acad. Sci. Paris 231, 940-941 (1950)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/espF50scan.pdf

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

C. R. Acad. Sci. Paris 233, 839-841 (1951)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/quelques51scan.pdf

SUR UNE NOTION DE PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES, ET UNE CLASSE REMARQUABLE D'ESPACES VECTORIELS LIÉE À CETTE NOTION

C. R. Acad. Sci. Paris 233, 1556-1558 (1951)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/remarq51scan.pdf

CRITÈRES DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES FONCTIONNELS GÉNÉRAUX

Amer. J. Math. 74, 168-186 (1952)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/fonctgen52scan.pdf

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS ESSENTIELS DANS LA THÉORIE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET DES ESPACES NUCLÉAIRES

Ann. Inst. Fourier 4, 73-112 (1952)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/resessent52scan.pdf

SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES FAIBLEMENT COMPACTES D'ESPACES DU TYPE $C(K)$

Canadian J. Math. 5, 129-173 (1953)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/linfaib53scan.pdf

SUR LES ESPACES DE SOLUTIONS D'UNE CLASSE GÉNÉRALE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

J. Analyse Math. 2, 243-280 (1953)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/derpart53scan.pdf

SUR CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HOLOMORPHES I

J. reine angew. Math. 192, 35-64 (1953)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/foncthol I53scan.pdf

SUR CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HOLOMORPHES II

J. reine angew. Math. 192, 77-95 (1953)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/foncthol II53scan.pdf

QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Julio 1954, 173-177. Centro de Cooperación Científica de la UNESCO para América Latina, Montevideo, Uruguay, 1954

SUR CERTAINS SOUS-ESPACES VECTORIELS DE L^p

Canadian J. Math. 6, 158-160 (1954)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/certvect54scan.pdf

RÉSULTATS NOUVEAUX DANS LA THÉORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES I

C. R. Acad. Sci. Paris 239, 577-579 (1954)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/oplinI54scan.pdf

RÉSULTATS NOUVEAUX DANS LA THÉORIE DES OPÉRATIONS LINÉAIRES II

C. R. Acad. Sci. Paris 239, 607-609 (1954)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/oplinII54scan.pdf

SUR LES ESPACES (F) ET (DF)

Summa Brazil. Math. 3, 57-123 (1954)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/FDF54scan.pdf

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidad de Sao Paulo, (1954)[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/gpablo54scan.pdf

TOPOLOGICAL VECTOR SPACES

Translated by O. Chaljub. Notes on Math. and its App. Gordon and Breach Science Publishers, New-York-London-Paris, 1973[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/gpablo54en.pdf

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

Mem. Amer. Math. Soc. n° 16, 1955[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/ptten52scan.pdf

ERRATUM AU MÉMOIRE : PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

Ann. Inst. Fourier 6, 117-120 (1955-56)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/pttenscan.pdf

UNE CARACTÉRISATION VECTORIELLE-MÉTRIQUE DES ESPACES L_1

Canad. J. Math. *7*, 552-561 (1955)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/carvectscan.pdf

RÉARRANGEMENTS DE FONCTIONS ET INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ DANS LES ALGÈBRES DE VON NEUMANN MUNIES D'UN TRACE

Sém. N. Bourbaki, 1956, exp. no 113, p. 127-139[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/rearrangscan.pdf

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE MÉTRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8, 1-79 (1956)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/thmet.pdf

THÉORÈMES DE FINITUDE POUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX

Bull.Soc. Math. France 84, 1-7 (1956)[1]

---

[1]https://agrothendieck.github.io/divers/theorfinscan.pdf

LA THÉORIE DE FREDHOLM

Bull. Soc. Math. France 84, 319-384 (1956)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/fred54scan.pdf

SUR LE MÉMOIRE DE WEIL. GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS ABÉLIENNES

Sém. N. Bourbaki, 1958, exp. n 141, p. 57-71[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/memweilscan.pdf

SUR CERTAINES CLASSES DE SUITES DANS LES ESPACES DE BANACH, ET LE THÉORÈME DE DVORETZKY-ROGERS

Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8, 81-110, (1956)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/certclass.pdf

CLASSES DE FAISCEAUX ET THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

notes miméographiées, Princeton 1957. Reproduit dans SGA 6[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/RRRscan.pdf

SUR LA CLASSIFICATION DES FIBRÉS HOLOMORPHES SUR LA SPHÈRE DE RIEMANN

Amer. J. Math. 79, 121-138 (1957)[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/fibholscan.pdf

UN RÉSULTAT SUR LE DUAL D'UNE C^*-ALGÈBRE

J.Math. Pures Appl., 36, 97-108 (1957)

SUR QUELQUES POINTS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

* The main ideas of the text were worked out mostly during a seminar of Homological algebra in Kansas in 1955, under the influence of a correspondence with J. P. Serre and latter considered for a Bourbaki redaction, while the paper was written down when Grothendieck was already back to Paris for some time in the second half of 1956. It was proposed to Tannaka for the Tôhoku as an independent article at the end of 1956 and received for publication on March of 1957.
* This text was published in two parts in: Tôhoku Mathematical Journal. vol 9, n.2, 3, 1957.
* [scan]
* [translation] by M. L. Barr and M. Barr
* [translation] in Russian by Biblioteka Sbornika Matematika, Moskva 1961

SUR LES FAISCEAUX ALGÉBRIQUES ET LES FAISCEAUX ANALYTIQUES COHÉRENTS

Séminaire Henri Cartan, tome 9 (1956-1957), exp. n° 2, p. 1-16[1]

---

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/falgfnalscan.pdf

CLASSIFICATION DES GROUPES ALGÉBRIQUES SEMI-SIMPLES

C. Chevalley avec la collaboration de Pierre Cartier, Alexandre Grothendieck et Michel Lazard.

Texte révisé en 2003 par Pierre Cartier, Springer-Verlag, Berlin, 2004.[2]

---

[2] https://agrothendieck.github.io/divers/chev58.pdf

LA THÉORIE DE CLASSES DE CHERN

Bull. Soc. Math. France 86, 137-154 (1958)[3]

[3] https://agrothendieck.github.io/divers/clchernscan.pdf

TORSION HOMOLOGIQUE ET SECTIONS RATIONNELLES

Sém. Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. no 5, p. 1-29[4]

[4] https://agrothendieck.github.io/divers/torhomscan.pdf

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES EN THÉORIE DES INTERSECTIONS

Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. n° 4, p. 1-36[5]

---

[5] https://agrothendieck.github.io/divers/interscan.pdf

SUR UNE NOTE DE MATTUCK-TATE

J. reine angew. Math. 200, 208-215 (1958)[6]

---

1. Dans un travail récent [4], Mattuck et Tate déduisent l'inégalité fondamentale de A. Weil qui établit l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions [7] comme conséquence facile du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces. En essayant de comprendre la portée exacte du leur méthode, je suis tombé sur l'énoncé suivant, connu en fait depuis 1937 [2] [6] [1] (comme me l'a signalé J. P. Serre), mais apparemment peu connu et utilisé:

[]

2. Nous allons déduire sur X, nous désignerons par $l(D)$ la dimension de l'espace vectoriel des fonctions f sur X telles que $(f) \geq -D$ donc $l(D)$ ne dépend que de la classe de D. Rappelons *l'inégalité de Riemann-Roch*

[]

3. Ce qui précède n'utilisait pas à proprement parler la méthode de Mattuck-Tate (si ce n'est en utilisant l'inegalité de Riemann-Roch sur les surfaces). Nous allons indiquer maintenant comment la méthode de ces auteurs, convenablement généralisée, donne d'autres inégalités que celle de A. Weil. Nous nous appuierons sur le

[]

Remarques. Le corollaire 1 devient faux si on ne fait pas l'hypothèse que

[6] `https://agrothendieck.github.io/divers/NMTatescan.pdf`

$K/2$ est encore une classe de diviseurs. En effet, toutes les hypothèses sauf cette dernière sont vérifiées si X est un surface non singulière *rationnelle*. Or, à partir d'une telle surface, on construit facilement une surface birationnellement équivalente par éclatements successifs, dont l'index τ soit < 0 (contrairement à (3.7 ter)). En effet, on vérifie aisément que lorsqu'on fait éclater un point dans une surface non singulière projective, l'index diminue d'une unité. (Cette remarque, ainsi que l'interprétation de l'inégalité (3.7) a l'aide de l'index, m'a été signalée par J. P Serre).

La disparité des énoncés qu'on déduit du théorème (3.2) est due au fait qu'il n'est pas relatif à un élément arbitraire de l'espace vectoriel E de Néron-Séveri introduit plus haut, mais à un élément du "lattice" provenant des diviseurs sur X. On notera d'ailleurs que dans le cas particulier où X est le produit des deux courbes C et C', le théorème 3.2 ne contient rien de plus que l'inégalité de A. Weil.

THE COHOMOLOGY THEORY OF ABSTRACT ALGEBRAIC VARIETIES

Proc. Int. Congress Math. (Edinburgh, 1958), 103-118. Cambridge Univ. Press, New York, 1960[7]

It is less than four years since cohomological methods (i.e. methods of Homological Algebra) were introduced into Algebraic geometry in Serre's fundamental paper [?], and it seems already certain that they are to overflow this part of mathematics in the coming years, from the foundations up to the most advanced parts. All we can do here is to sketch briefly some of the ideas and results. None of these have been published in their final form, but most of them originated in or were suggested by Serre's paper.

Let us first give an outline of the main topics of cohomological investigation in Algebraic geometry, as they appear at present. The need of a theory of cohomology for 'abstract' algebraic varieties was first emphasized by Weil, in order to be able to give a precise meaning to his celebrated conjectures in Diophantine geometry [?]. Therefore the initial aim was to find the *'Weil cohomology' of an algebraic variety*, which should have as coefficients something 'at least as good' as a field of *characteristic 0*, and have such formal properties (e.g. duality, Künneth formula) as to yield the analogue of Lefschetz's 'fixed-point formula'. Serre's general idea

[7] https://agrothendieck.github.io/divers/cohaavscan.pdf

has been that the usual 'Zariski topology' of a variety (in which the closed sets are the algebraic subset) is a suitable one for applying methods of Algebraic Topology. His first approach was hoped to yield at least the right Betti numbers of a variety, it being evident from the start that it could not be considered as the Weil cohomology itself, as the coefficient field for cohomology was the ground field of a variety, and therefore not in general of characteristic 0. In fact, even the hope of getting the 'true' *Betti numbers* has failed, and so have other attempts of Serre's [?] to get Weil's cohomology by taking the cohomology of the variety with values, not in the sheaf of local rings themselves, but in the sheaves of Witt-vectors constructed on the latter. He gets in this way modules over the ring $W(k)$ of infinite Witt vectors on the ground field k, and $W(k)$ is a ring of characteristic 0 even if k is of characteristic $p \neq 0$. Unfortunately, modules thus obtained over $W(k)$ may be infinitely generated, even when the variety V is an abelian variety [?]. Although interesting relations must certainly exist between these cohomology groups and the 'true ones', it seems certain now that the Weil cohomology has to be defined by a completely different approach. Such an approach was recently suggested to me by the *connections between sheaf-theoretic cohomology and cohomology of Galois groups on the one hand, and the classification of unramified coverings of a variety on the other* (as explained quite unsystematically in Serre's tentative Mexico paper [?]), and by Serre's idea that a 'reasonable' algebraic principal fiber space with structure group G, defined on a variety V, if it is not locally trivial, should become locally trivial on some covering of V *unramified* over a given point of V. This has been the starting point of a definition of the Weil cohomology (involving both 'spatial' and Galois cohomology), which seems to be the right one, and which gives clear suggestions how Weil's conjectures may be attacked by the machinery of Homological algebra. As I have not begun theses investigations seriously as yet,and as moreover this theory has a quite distinct flavor from the one of the theory of algebraic coherent sheaves which we shall now be concerned with, we shall not dwell any longer on Weil's cohomology. Let us merely remark that the definition alluded to has already been the starting-point of a theory of cohomological dimension of fields, developed recently by Tate [?].

The second main topic for cohomological methods is the *cohomology theory of* *algebraic coherent sheaves*, as initiated by Serre. Although inadequate for Weil's purposes, it is at present yielding a wealth of new methods and new notions, and gives the key even for results which were not commonly thought to be concerned with sheaves, still less with cohomology, such as Zariski's theorem on 'holomorphic functions' and his 'main theorem' - which can be stated now in a more satisfactory way, as we shall see, and proved by the same uniform elementary methods. The main parts of the theory, at present, can be listed as follows:

(a) General finiteness and asymptotic behaviour theorems.

(b) Duality theorems, including (respectively identical with) a cohomological theory of residues.

(c) Riemann-Roch theorem, including the theory of Chern classes for algebraic coherent sheaves.

(d) Some special results, concerning mainly abelian varieties.

The third main topic consists in the *application of the cohomological methods to local algebra*. Initiated by Koszul and Cartan-Eilenberg in connection with Hilbert's 'theorem of syzygies', the systematic use of these methods is mainly due again to Serre. The results are the *characterization* of regular local rings as those whose global cohomological dimension is finite, the clarification of *Cohen-Macaulay's equidimensionality theorem* by means of the notion of *cohomological codimension* [**?**], and specially the possibility of giving (for the first time as it seems) a *theory of intersections*, really satisfactory by its algebraic simplicity and its generality. Serre's result just quoted, that regular local rings are the the only ones of finite global cohomological dimension, accounts for the fact that only for such local rings does a satisfactory theory of intersections exist. I cannot give any details here on these subjects, nor on various results I have obtained by means of a *local duality theory*, which seems to be the tool which is to replace differential forms in the case of unequal characteristics, and gives, in the general context of commutative algebra, a clarification of the notion of residue, which as yet was not at all well understood. The motivation of this latter work has been the attempt to get a global theory of duality in cohomology for algebraic varieties admitting arbitrary singularities, in order to be able to develop intersection formulae for cycles with arbitrary singularities, in a non-singular algebraic variety, formulas which contain also a 'Lefschetz formula mod p' [?]. In fact, once a proper local formalism is obtained, the global statements become almost trivial. As a general fact, it appears that, to a great extent, the 'local' results already contain a global one; more precisely, global results on varieties of dimension n can frequently be deduced from corresponding local ones for rings of Krull dimension $n+1$.

We will therefore

[]

EGA I

Le langage des schémas

Publications Mathématiques de l'IHÉS[8]

[8] https://agrothendieck.github.io/divers/ega1.pdf

SGA 1

Revêtements Étales et Groupe Fondamental, 1960-1961[9]

[9] https://arxiv.org/abs/math/0206203

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Séminaire Henri Cartan, tome 13, Faisc. n° 1 et 2 (1960-1961)[10]

---

[10] https://agrothendieck.github.io/divers/tcgascan.pdf

EGA II
Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes

Publications Mathématiques de l'IHÉS[11]

[11] https://agrothendieck.github.io/divers/ega2.pdf

EGA III-1

Étude cohomologique des faisceaux cohérents

Publications Mathématiques de l'IHÉS[12]

[12] https://agrothendieck.github.io/divers/ega31.pdf

SGA 2
Cohomologie Locale et Théorèmes de Lefschetz Locaux et Globaux, 1961-1962[13]

13

FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

(Extraits du Sém. Bourbaki 1957-62), Secrétariat Math. IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris, (1962)[14]

---

[14] https://agrothendieck.github.io/divers/FGAscan.pdf

THE TRACE OF CERTAIN OPERATORS

Studia Math. 20, 141-143 (1961)[15]

---

[15] https://agrothendieck.github.io/divers/tracopscan.pdf

SGA 3

Schémas en groupes, 1962-1964[16]

16

RÉSIDUS ET DUALITÉ, PRÉNOTES POUR UN SÉMINAIRE HARTSHORNE 1963

R. Hartshorne, Residues and Duality, Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1966[17]

---

[17] https://agrothendieck.github.io/divers/resduascan.pdf

EGA III-2

Étude cohomologique des faisceaux cohérents

Publications Mathématiques de l'IHÉS[18]

[18] https://agrothendieck.github.io/divers/ega32.pdf

SGA 4
Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, 1963-1964[19]

19

EGA IV-1

Étude locale des schémas et des morphismes de schémas

Publications Mathématiques de l'IHÉS[20]

[20] https://agrothendieck.github.io/divers/ega41.pdf

FORMULE DE LEFSCHETZ ET RATIONALITÉ DES FONCTIONS *L*

Sém. N. Bourbaki, 1966, exp. no 279, p. 41-55[21]

---

[21] https://agrothendieck.github.io/divers/lefsLscan.pdf

EGA IV-2

Étude locale des schémas et des morphismes de schémas

Publications Mathématiques de l'IHÉS[22]

---

[22] https://agrothendieck.github.io/divers/ega42.pdf

SGA 5
Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, 1965-1966[23]

[23]

LE GROUPE DE BRAUER I : ALGÈBRES D'AZUMAYA ET INTERPRÉTATIONS DIVERSES

Sém. N. Bourbaki, 1966, exp. no 290, p. 199-219[24]

---

[24] https://agrothendieck.github.io/divers/bra1scan.pdf

LE GROUPE DE BRAUER II : THÉORIES COHOMOLOGIQUES

Sém. N. Bourbaki, 1966, exp. no 297, p. 287-307[25]

---

[25] https://agrothendieck.github.io/divers/bra2scan.pdf

EGA IV-3

Étude locale des schémas et des morphismes de schémas

Publications Mathématiques de l'IHÉS[26]

[26] https://agrothendieck.github.io/divers/ega43.pdf

SGA 6
Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch, 1966-1967[27]

[27]

CRYSTALS AND THE DE RHAM COHOMOLOGY OF SCHEMES, NOTES BY J. COATES AND O. JUSSILA

Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 306-358. North Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968[28]

Introduction

These notes are a rough summary of five talks given at I.H.E.S in November and December 1966. The purpose of these talks was to outline a possible definition of a p-adic cohomology theory, via a generalization of the De Rham cohomology which was suggested by work of Monsky-Washnitzer [?] and Manin [?].

The contents of the notes are by no means intended to be a complete theory. Rather, they outline the start of a program of work which has still not been carried out[29].

1. De Rham cohomology

1.1. Differentiable Manifolds. Let X be a differentiable manifold, and $\underline{\Omega}^{\bullet}_{X/\mathbf{C}}$

[28] https://agrothendieck.github.io/divers/CRCSscan.pdf

[29] For a more detailed exposition and progress in this direction, we refer to the work of P. Berthelot, to be developed presumably in SGA 8.

the complex of sheaves of differential forms on X, whose coefficients are complex valued differentiable functions on X.

Theorem **1.1**. (De Rham) — *There is a canonical isomorphism*

$$\mathrm{H}^*(X,\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(\Gamma(X,\underline{\Omega}^\bullet_{X/\mathbf{C}})),$$

where $\mathrm{H}^*(X,\mathbf{C})$ *is the canonical cohomology of* X *with complex coefficients.*

To prove this, one observes that, by Poincaré's lemma, the complex $\underline{\Omega}^\bullet_{X/\mathbf{C}}$ is a *resolution* of the constant sheaf $\underline{C}$ on X, and that the sheaves $\underline{\Omega}^j_{X/\mathbf{C}}$ are *fine* for $J \geq 0$, so that $\mathrm{H}^i(X,\underline{\Omega}^j_{X/\mathbf{C}}) = 0$ for $i > 0$ and $j \geq 0$, whence the assertion.

An analogous result holds for the complex of sheaves of differential forms on X, whose coefficients are real valued differentiable functions on X.

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6. Criticism of the ℓ-adic cohomology. If X is a scheme of finite type over an algebraically closed field k, and ℓ is any prime number *distinct*[30] from the characteristic of k, the ℓ-adic cohomology of X is defined to be

1.7.

1.8. Proposals for a p-adic Cohomology. We only mention two proposals, namely Monsky and Washnitzer's method via special affine liftings (which we discuss in n° 2), and the method using the fppf (faithfully flat and finite presentation) topology.

By analogy with the ℓ-adic cohomology, the essential idea of the fppf topology was to consider the cohomology of X/k, with respect to the fppf topology, with coefficient groups in the category C^ν of finite schemes of $\mathbf{Z}/p^\nu\mathbf{Z}$-modules. Examples of such schemes of modules are

[30] the ℓ-adic cohomology is still defined for ℓ equal to the characteristic of k, but it no longer has too many reasonable properties.

2. The cohomology of Monsky and Wishnitzer

2.1. Approach via liftings.

Suppose X_0 is a scheme on a perfect field k

3. Connections on the De Rham cohomology

For the definition of a *connection* and a *stratification* on a sheaf, see Appendix I of these notes.

4. The infinitesimal topos and stratifying topos

We now turn to the definition of a more general category of coefficients for the De Rham cohomology. To this end we introduce two ringed topos, the *infinitesimal topos* and the *stratifying topos*.

We shall see later that in fact these two topos work well only in characteristic 0

5. Cěch calculations

We now consider the cohomology of the infinitesimal topos and the stratifying topos[31]

6. Comparison of the Infinitesimal and De Rham Cohomologies

6.1. The basic idea. Let X be a scheme above S, and F a quasi-coherent Module on X fortified with a stratification relative to S.

7. The crystalline topos and connecting topos

7.1. Inadequacy of infinitesimal topos. Let X_0 be a scheme above a perfect field k of characteristic $p > 0$. Then, regarding X_0 as being above $S = \operatorname{Spec} W(k)$ instead of k, the infinitesimal cohomology

$$\mathrm{H}^*((X_0/S)_{\mathrm{inf}}, \underline{O}X_0)$$

[31]For a general discussion of the cohomology of a topos, see (SGA 4 V).

is a graded module

Appendix

Let X be a scheme above the base S, and F a Module on X. For each positive integer n,

UN THÉORÈME SUR LES HOMOMORPHISMES DE SCHÉMAS ABÉLIENS

Inventiones Math. 2, 59-78 (1966)[32]

[32] https://agrothendieck.github.io/divers/homschabscan.pdf

EGA IV-4

Étude locale des schémas et des morphismes de schémas

Publications Mathématiques de l'IHÉS[33]

[33] https://agrothendieck.github.io/divers/ega44.pdf

SGA 7

Groupes de monodromie en géométrie algébrique, 1967-1969[34]

[34]

CRITÈRES DIFFÉRENTIELS DE RÉGULARITÉ POUR LES LOCALISÉS DES ALGÈBRES ANALYTIQUES

A. GROTHENDIECK ET J. DIEUDONNÉ

J. Algebra 5, 305-324 (1967)[35]

---

[35] https://agrothendieck.github.io/divers/critdiffscan.pdf

LE GROUPE DE BRAUER III : EXEMPLES ET COMPLÉMENTS

IHES, Mars 1966. Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 88-188. North Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968[36]

---

[36] https://agrothendieck.github.io/divers/GBIII.pdf

CATÉGORIES COFIBRÉES ADDITIVES ET COMPLEXE COTANGENT RELATIF

Lecture Notes in Math. 79, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968[37]

---

[37] https://agrothendieck.github.io/divers/CCACCRscan.pdf

CLASSES DE CHERN ET REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES DISCRETS

Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 215-305. North Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968[38]

[38] https://agrothendieck.github.io/divers/chernrepscan.pdf

HODGE'S GENERAL CONJECTURE IS FALSE FOR TRIVIAL REASONS

A. Grothendieck

(Received 27 October 1968)

Topology Vol. 8, pp. 299-303. Pergamon Press, 1969[39]

---

§1. — The startling title is somewhat misleading, as everybody will think about a part of the Hodge conjecture which is most generally remembered, namely the part concerned with a criterion for a cohomology class (on a projective smooth connected scheme X over $\mathbf{C}$) to be "algebraic", i.e. to come from an algebraic cycle with rational[40] coefficients. This conjecture is plausible enough, and (as long as it is not disproved) should certainly be regarded as the deepest conjecture in the "analytic" theory of algebraic varieties. However in [6, p. 184], Hodge gave a more general formulation of his conjecture in terms of filtrations of cohomology spaces, and the main aim of my note is to show that for a rather trivial reason, this formulation has to be slightly corrected.

Consider on the complex cohomology

$$\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C}) = \mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

[39] https://agrothendieck.github.io/divers/hodgescan.pdf

[40] In fact, Hodge states his conjecture for integral cohomology. That this is too optimistic was proved in [1]

(X^{an} denotes the analytic space associated to the scheme X) the "Hodge filtration"

[]

§2. — This makes clear how the Hodge conjecture should be corrected, to eliminate trivial counterexamples: namely the left hand side of $(*)$ should be the largest sub-space of the right hand side, generating a subspace of $\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C})$ which is a sub-Hodge structure, i.e. stable under decomposition into p, q types. In other words, an element of $\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C})$ should belong to Filt'^{p} if and only if all its bihomogeneous components belong to the $\mathbf{C}$-vector space generated by the right hand side of $(*)$.

This formulation may seem a little too cumbersome to inspire confidence. To make it look better, we may remark that it is equivalent to the conjunction of the usual Hodge conjecture

[]

§3. — It may be of interest to review here the few non trivial instances known to the author where the Hodge conjecture has been checked.

a) The case $p = 1$, $i = 2$, i.e. the characterization of cohomology classes coming from divisors, due to Lefschetz, which has become trivial now through sheaf cohomology and the exact sequence of the exponential.

b) The case $i = \dim X$, any p, provided we make the following two assumptions, where Y denotes a "general" hyperplane section of X: 1°) The Hodge conjecture is true for $\mathrm{H}^{i-2}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$ in filtration p^{-1} (this condition is satisfied if $i \leq 4$). 2°) The part of $\mathrm{H}^{i-1}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$ orthogonal to the image of $\mathrm{H}^{i-1}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$ (the so-called "vanishing cycles" part of $\mathrm{H}^{i-1}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$) is contained in Filt'^{p} (if $i = 3$ and $p = 1$, this amounts to saying that the component of type $(2,0)$ of the vanishing cycles subspace of $\mathrm{H}^2(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$ is zero). For $i = 3$, this case is mentioned in Hodge's exposé [6]. It is not hard to establish, using Leray's spectral sequence for the "fibering" of X by a suitable pencil of hyperplane sections, and resolution of singularities.

c) The case of a product of elliptic curves, $i = 2p$, any p. This case is due to Tate (unpublished), who proves it by observing that the "Hodge classes" in the cohomology of X are sums of products of Hodge classes of degree 2, so that a) applies.

d) The case of a general cubic threefold in P^4, $i = 3$, $p = 1$, due to Gherardelli [2][41]

e) The case of a cubic fourfold in P^5, $i = 2p$, $p = 2$, due to Griffiths, using e) and recent results of his [4].

§4. — In most concrete examples, it seems very hard to *check* the Hodge conjecture, due to the difficulty in explicitly determining the filtration Filt' of the cohomology, and even in determining simply the part of the cohomology coming from algebraic classes. It may be easier, for the time being, to *test* the Hodge conjectures in various non trivial cases, through various consequences of the Hodge conjectures which should be more amenable to direct verification. I would like to mention here two such consequences, which can be seen in act to be consequences already of the *usual* Hodge conjecture.

First, if X is as before, the dimensions of the graded components of the vector space associated to the arithmetic filtration Filt' (and indeed this very filtration itself, if we interpret complex cohomology as the de Rham cohomology, which makes a purely algebraic sense) is clearly invariant if we transform X by any automorphism of the field $\mathbf{C}$, or equivalently, if we change the topology of C by such an automorphism. In other words, if we have a smooth projective scheme X over a field K of char 0, then the invariants we get by different embeddings of K into the field $\mathbf{C}$ are the same. Granting the Hodge conjecture, the same should be true if we replace the Filt' filtration by the filtration described in §2 in terms of the Hodge structure (which is a transcendental description). What if we take for instance for X a "general" abelian variety of given dimension of powers of it, or powers of a "general" curve C of given genus? The case of genus 1 checks by Tate's result recalled in example c) above.

[41] (Added April 1969). This can be viewed also as a particular case of Hodge's result quoted in example b), and Manin has observed that this example extends to any *univational threefold* X. Cf. Manin: Correspondances, motives and monoidal transforms (in Russian), *Mat. Sbornik 77* (1968), 475-507.

Secondly, and more coarsely, if we have a projective and smooth morphism $f : X \longrightarrow S$ of algebraic schemes over $\mathbf{C}$, we can for every $s \in S$ consider the complex cohomology of the fiber X, as a Hodge structure, and look at the filtration "rational over $\mathbf{Q}$" which it defines (and which conjecturally should be the arithmetic filtration). Hodge's conjecture would imply that the set of points $s \in S^{an}$ where the dimensions of the components of the associated graded space have fixed values has a very special structure: it should be the difference of two countable unions of Zariski-closed subsets of S, which in fact should even be definable over a fixed subfield of $\mathbf{C}$, of finite type over the field $\mathbf{Q}$. (A simple application of Baire's theorem, not using Hodge's conjecture, would give us only a considerably weaker structure theorem for the set in question, where Zariski-closed subsets would be reaplced by the images, under the projection of the universal covering $\widetilde{S}$ of S^{an}, of analytic subsets of $\widetilde{S}$[42].)

REFERENCES

1.

[42](Added April 1969) David Lieberman has informed me that he can prove the stronger result obtained by replacing $\widetilde{S}$ by S^{an} itself.

STANDARD CONJECTURES ON ALGEBRAIC CYCLES

Algebraic geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), 193-199. Oxford Univ. Press, London, 1969[43]

1. Introduction

We state two conjectures on algebraic cycles, which arose fro an attempt at understanding the conjectures of Weil on the ζ-functions of algebraic varieties. These are not really new, and they were worked out about three years ago independently by Bombieri and myself.

The first is an existence assertion for algebraic cycles (considerably weaker than the Tate conjectures), and is inspired by and formally analogous to Lefschetz's structure theorem on the cohomology of a smooth projective variety over the complex field.

The second is a statement of positivity, generalising Weil's well-known positivity theorem in the theory of abelian varieties. It is formally analogous to the famous Hodge inequalities, and is in fact a consequence of these in characteristic zero.

WHAT REMAINS TO BE PROVED OF WEIL'S CONJECTURES? Before stating our conjectures, let us recall what remains to be proved in respect of the Weil conjectures, when approached through ℓ-adic cohomology.

[43] https://agrothendieck.github.io/divers/stand.pdf

Let $X/\mathbf{F}_q$ be a smooth irreducible projective variety of dimension n over the finite field $\overline{\mathbf{F}}_q$ with q elements, and ℓ a prime different from the characteristic. It has then been proved by M. Artin and myself that the Z-function of X can be expressed as

$$\begin{aligned} Z(t) &= \frac{L'(t)}{L(t)}, \\ L(t) &= \frac{L_0(t)L_2(t)\dots L_{2n}(t)}{L_1(t)L_3(t)\dots L_{2n-1}(t)}, \\ L_i(t) &= \frac{1}{P_i(t)}, \end{aligned}$$

where $P_i(t) = t^{\dim \mathrm{H}^i(\overline{X})} Q_i(t^{-1})$, Q_i being the characteristic polynomial of the action of the Frobenius endomorphism of X on $\mathrm{H}^i(\overline{X})$ (here H^i stands for the i^{th} ℓ-adic cohomology group and $\overline{X}$ is deduced from X by base extension to the algebraic closure of $\mathbf{F}_q$). But it has not been proved so far that

(a) the $P_i(t)$ have integral coefficients, independent of $\ell (\neq \operatorname{char} \mathbf{F})$;

(b) the eigenvalues of the Forbenius endomorhisms on $\mathrm{H}^i(\overline{X})$, i.e., the reciprocals of the roots of $P_i(t)$, are of absolute value $q^{i/2}$.

Our first conjecture meets question (a). The first and second together would, by an idea essentially due to Serre [**?**], imply (b).

2. A weak form of conjecture 1

From now on, we work with varieties over a ground field k which is algebraically closed and of arbitrary characteristic. Then (a) leads to the following question: If f is an endomorphism of a variety X/k and $\ell \neq \operatorname{char} k$, f induces

$$f^i : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(x),$$

and each of these f^i has a characteristic polynomial. *Are the coefficients of these polynomials rational integers, and are they independent of ℓ?* When X is smooth and proper of dimension n, the same question is meaningful when f is replaced by any cycle of dimension n in $X \times X$, considered as an algebraic correspondence.

In characteristic zero, one sees that this is so by using integral cohomology. If char $k > 0$, one feels certain that this is so, but this has not been proved so far.

Let us fix for simplicity an isomorphism

$$\ell^{\infty k^* \simeq \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell} \qquad \text{(a heresy!).}$$

We than have a map

$$\mathrm{cl} : \mathscr{F}^i(X) \otimes_Z Q \longrightarrow \mathrm{H}^{2i}_\ell(X)$$

which associates to an algebraic cycle its cohomology class. We denote by $C^i_\ell(X)$, and refer to its elements as *algebraic cohomology classes*.

A known result, due to Dwork-Faton, shows that for the integrality question (not to speak of the independence of the characteristic polynomial of ℓ), it suffices to prove that

$$\mathrm{Tr}\, f_i^N \in \frac{1}{m}\mathbf{Z} \quad \text{for every } N \geq 0,$$

where m is a fixed positive integer[44]. Now, the graph Γ_{f^N} in $X \times X$ of f^N defines a cohomology class on $X \times X$, and if the cohomology class Δ of the diagonal in $X \times X$ is written as

$$\Delta = \sum_0^n \pi_i$$

where π_i are the projections of Δ onto $\mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^{n-i}(X)$ for the canonical decomposition $\mathrm{H}^n(X \times X) \simeq \sum_{i=0}^n \mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^{n-i}(X)$, a known calculation shows that

$$\mathrm{Tr}(f^N)_{\mathrm{H}^i} = (-1)^i\, \mathrm{cl}(\Gamma_{f^N})\pi_i \in \mathrm{H}^{4n}(X \times X) \approx \mathbf{Q}_\ell.$$

Assume that the π_i are algebraic. Then $\pi_i = \frac{1}{m}\mathrm{cl}(\prod_i)$, where $\prod_i$ is an algebraic cycle, hence

$$\mathrm{Tr}(f^N)_{\mathrm{H}^i} = (-1)^i \Big(\prod_i \Gamma_{f^N}\Big) \in \frac{1}{m}\mathbf{Z}$$

and we are through.

WEAK FORM OF CONJECTURE 1. ($C(X)$): The elements π_i^ℓ are algebraic, (and come from an element of $\mathscr{F}^i(X) \otimes_Z Q$, which is independent of ℓ).

N.B.

[44]This was pointed out to me by S. Kleimann.

1. The statement in parenthesis is needed to establish the independence of P_i on ℓ.

2. If $C(X)$ and $C(Y)$ hold, $C(X \times Y)$ holds, and more generally, the Künneth components of any algebraic cohomology class on $X \times Y$ are algebraic.

3. The conjecture 1 (of Lefschetz type)

Let X be smooth and projective, and $\xi \in \mathrm{H}^2(X)$ the class of a hyperplane section. Then we have a homomorphism

$$(*) \qquad \cup\xi^{n-i} : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X) \quad (i \leq n).$$

It is expected (and has been established by Lefschetz [?], [?] over the complex field by transcendental methods) that this is an isomorphism for all characteristics. For $i = 2j$, we have the commutative square

[]

Our conjecture is then: $(A(X))$:

(a) (*) is always an isomorphism (the mild form);

(b) if $i = 2j$. (*) induces an isomorphism (or equivalently, an epimorphism) $C^j(X) \longrightarrow C^{n-j}(X)$.

N.B. If $C^j(X)$ is assumed to be finite dimensional, (b) is equivalent to the assertion that $\dim C^{n-j}(X) \leq \dim C^j(X)$ (which in particular implies the equality of these dimensions in view of (a)).

An equivalent formulation of the above conjecture (for all varieties X as above) is the following.

$(B(X))$: *The Λ-operation (c.f. [?]) of Hodge theory is algebraic.*

By this, we mean that there is an algebraic cohomology class λ in $\mathrm{H}^*(X \times X)$ such that the map $\Lambda : \mathrm{H}^*(X) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X)$ is got by lifting a class from X to $X \times X$ by the first projection, cupping with λ and taking the image in $\mathrm{H}^*(X)$ by the Gysin homomorphism associated to the second projection

Note that $B(X) \Rightarrow A(X)$, since the algebricity of λ implies that of λ^{n-i}, and λ^{n-i} provides an inverse to $\cup\xi^{n-i} : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X)$. On the other hand, it is easy to show that $A(X \times X) \Rightarrow B(X)$ and this proves the equivalence of conjectures A and B.

The conjecture seems to be most amenable in the form of B. Note that $B(X)$ is stable for products, hyperplane sections and specialisations. In particular, since it holds for projective spaces, it is also true or smooth varieties which are complete intersections in some projective space. (As a consequence, we deduce for such varieties the wished-for integrality theorem for the Z-function!). It is also verified for Grassmannians, and for abelian varieties (Liebermann [?]).

I have an idea of a possible approach to Conjecture B, which relies in turn on certain unsolved geometric questions, and which should be settled in any case.

Finally, we have the implication $B(X) \Rightarrow C(X)$ (first part), since the π_i can be expressed as polynomials with coefficients in $\mathbf{Q}$ of λ and $L = \cup\xi$. To get the whole of $C(X)$, one should naturally assume further that there is an element of $\mathscr{F}(X \times X) \otimes_Z Q$ which gives λ for every ℓ.

4. Conjecture 2 (of Hodge type)

For any $i \leq n$, let $P^i(X)$ be the "primitive part" of $\mathrm{H}^i(X)$, that is, the kernel of $\cup\xi^{n-i+1} : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i+2}(X)$, and put $C^j_{Pr}(X) = P^{2j} \cap C^j(X)$. On $C^j_{Pr}(X)$, we have a $\mathbf{Q}$-valued symmetric bilinear form given by

$$(x,y) \longrightarrow (-1)^j K(xy\xi^{n-2j})$$

where K stands for the isomorphism $\mathrm{H}^{2n}(X) \simeq \mathbf{Q}_\ell$. Our conjecture is then that

(Hdg(X)): *The above form is positive definite.*

One is easily reduced to the case when $\dim X = 2m$ is even, and $j = m$.

REMARKS.

(1) In characteristic zero, this follows readily from Hodge theory [?].

(2) $B(X)$ and Hdg($X \times X$) imply, by certain arguments of Weil and Serre, the following: if f is an endomorphism of X such that $f^*(\xi) = q\xi$ for some $q \in \mathbf{Q}$ (which is necessarily > 0), then the eigenvalues of $f_{\mathrm{H}^i(X)}$ are algebraic integers of absolute value $q^{i/2}$. Thus, this implies all of Weil's conjectures.

(3) The conjecture $Hdg(X)$ together with $A(X)(a)$ (the Lefschetz conjecture in cohomology) implies that numerical equivalence of cycles is the same as cohomological equivalence for any ℓ-adic cohomology if and only if $A(X)$ holds.

(4) In view of (3), $B(X)$ and $Hdg(X)$ imply that numerical equivalence of cycles coincides wit $\mathbf{Q}_\ell$-equivalence for any ℓ. Further the natural map

$$\mathrm{Z}^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^i_\ell(X)$$

is a monomorphism, and in particular, we have

$$\dim_{\mathbf{Q}} C^i(X) \leq \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i_\ell(X).$$

Note that for the deduction of this, we do not make use of the positivity of the form considered in Hdg(X),but only the fact that it is non-degenerate.

Another consequence of $Hdg(X)$ and $B(X)$ is that the stronger version of $B(X)$, viz. that λ comes from an algebraic cycle with rational coefficients *independent of* ℓ, holds.

Conclusions

The proof of the two standard conjectures would yield results going considerably further than Weil's conjectures. They would form the basis of the so-called "theory of motives" which is a systematic theory of "arithmetic properties" of algebraic varieties, as embodied in their groups of classes of cycles for numerical equivalence. We have at present only a very small part of this theory in dimension one, as contained in the theory of abelian varieties.

Alongside the problem of resolution of singularities, the proof of the standard conjectures seems to me to be the most urgent task in algebraic geometry.

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES ET COMPACTIFICATION PROFINIE DES GROUPES DISCRETS

Manuscripta Math. 2, 375-396 (1970)[45]

[45] https://agrothendieck.github.io/divers/gdisscan.pdf

GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX DE DIEUDONNÉ

Sém. de Math. Sup. 45 (Été 1970). Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Que., 1974[46]

---

[46]https://agrothendieck.github.io/divers/barsdieudscan.pdf

TRAVAUX DE HEISOUKÉ HIRONAKA SUR LA RÉSOLUTION DES SINGULARITÉS

Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 7 à 9.[47]

Le résultat principal de Hironaka est le suivant :

Théorème de Hironaka. — *Soit X une variété algébrique sur un corps k de caractéristique nulle, U un ouvert (de Zariski) de X tel que U soit non singulier et partout dense. Il existe alors une variété algébrique* non singulière X' *et un morphisme* propre $f : X' \longrightarrow X$*, tels que le morphisme $f^{-1}(U) \longrightarrow U$ soit un isomorphisme, et que $D = X' - f^{-1}(U)$ soi un diviseur « à croisements normaux » dans X' (i.e. localement donné par une équation de la forme $f_1 f_2 \dots f_k = 0$, où les f_i font partie d'un système de « coordonnées locales »).*

En fait le théorème complet de Hironaka est plus précis : il donne une information très précise sur la façon d'obtenir une telle « résolution » du couple (X, U) à l'aide d'une suite « d'éclatements » de nature très particulière. Cette précision supplémentaire est inutile dans toutes les applications connues du rapporteur, sauf pour nous dire que si X est projective, on peut choisir X' également projective. Le théorème complet de Hironaka est aussi plus général : il s'applique à tous les « schémas excellents » de caractéristique nulle, et en particulier aux schémas de

[47] `https://agrothendieck.github.io/divers/hirsingscan.pdf`

type fini sur les anneaux de séries formelles ou de séries convergentes (au-dessus d'un corps de caractéristique nulle). Cela implique par exemple facilement que le théorème énoncé reste vrai au voisinage d'un point de X, lorsqu'on suppose maintenant que X est un espace analytique complexe (ou sur un corps valué complet algébriquement clos, plus généralement), et U est le complémentaire d'une partie fermée analytique de X. Il semble que Hironaka ait démontré également la version globale de ce résultat local.

Contrairement à ce qui était l'impression générale chez les géomètres algébristes avant qu'on ne dispose du théorème de Hironaka, celui-ci n'est pas un résultat tout platonique, qui donnerait seulement une sorte de justification après coup d'un point de vue en géométrie algébrique (celui où les variétés sont plongées à tout prix dans l'espace projectif) qui est désormais dépassé. C'est au contraire aujourd'hui un *outil* d'une très grande puissance, sans doute le plus puissant dont nous disposions, pour l'étude des variétés algébriques ou analytiques (en caractéristique zéro pour le moment). Cela est vrai pour l'étude des singularités d'une variété, mais également pour l'étude « globale » des variétés algébriques (ou analytiques) non singulières, notamment pour le cas des variétés non compactes. L'application du théorème de Hironaka pour ces dernières se présente généralement ainsi : X étant supposée quasi projective i.e. immergeable comme sous-variété (en général non fermée) dans l'espace projectif P, l'adhérence $\overline{X}$ de X dans P contient X comme ouvert partout dense non singulier, de sorte qu'on peut appliquer le théorème de Hironaka au couple $(\overline{X}, X)$. On en conclut que X est le complémentaire, dans une variété non singulière *compacte* X', d'un diviseur D à croisements normaux. Un tel théorème de structure pour X, et diverses variantes qu'on prouve de façon analogue, sont extrêmement utiles dans l'étude de X.

Les théorèmes démontrés à l'aide du théorème de Hironaka ne se comptent plus. Pour la plupart, on a l'impression que la résolution des singularités est vraiment au fond du problème, et me pourra être évitée par recours à des méthodes différents. Citons quelques-uns de ces résultats (sur un corps de car. nulle).

a) Si $f : X' \longrightarrow X$ est un morphisme birationnel et propre de variétés algébriques non singulières, alors les faisceaux $\mathrm{R}^i j_*(\mathscr{O}_X)$ sont nuls pour $i > 1$ (Hironaka).

b) Si X est une variété algébrique affine sur le corps des complexes, sa cohomologie complexe peut être calculée à l'aide du « complexe de De Rham algébrique », i.e. le complexe formé des formes différentielles algébriques sur X (Grothendieck ; divers raffinements, inspirés par une question soulevée par Atiyah et Hörmander, ont été développés par P. Deligne).

c) Si X est une variété algébrique sur le corps des complexes, alors ses « groupes de cohomologie étales » à coefficients dans des faisceaux de torsion sont isomorphes aux groupes de cohomologie de l'espace localement compact sous-jacent à X (M. Artin et A. Grothendieck).

d) La construction par P. Deligne d0une théorie de Hodge pour les variétés algébriques complexes quelconques (supposées ni compactes ni non singulières) utilise de façon essentielle la résolution des singularités.

e) Même remarque pour divers théorèmes de P. A. Griffiths et de ses élèves sur la « variation des structures de Hodge », ou pour divers théorèmes de E. Brieskorn sur l'étude locale de certains types de singularités (singularités de Klein des surfaces, points critiques isolés d'un germe de fonction holomorphe…).

Certains des résultats mentionnés dans d) et e) figureront sans doute dans des rapports des auteurs cités dans ce même Congrès.

Du point de vue technique, la démonstration du théorème de Hironaka constitue une prouesse peu commune. Le rapporteur avoue n'en avoir pas fait entièrement le tour. Aboutissement d'années d'efforts concentrés, elle est sans doute l'une des démonstrations les plus « dures » et les plus monumentales qu'on connaisse en mathématiques nouvelles, dont il est trop tôt d'évaluer le rôle dans le développement futur de la géométrie algébrique[48]. Notons d'autre part que Hironaka souligne que plusieurs de ces idées étaient déjà en germe chez son maître, O. Zariski, qui avait beaucoup fait depuis longtemps pour populariser le prob-

[48]Cela est d'autant plus vrai que le développement de la géométrie algébrique s'arrêtera court, comme tout le reste, si notre espèce devait disparaître dans les prochaines décades, — éventualité qui apparaît aujourd'hui de plus en plus probable.

lème de la résolution des singularités parmi un public réticent, et qui avait dans un travail classique traité le cas de la dimension 3.

Pour terminer, il faut souligner que le problème de la résolution des singularités est loin d'être résolu. En effet, seul le cas de la caractéristique nulle est actuellement réglé. La solution de nombreux problèmes de géométrie algébrique, en caractéristique $p > 0$ comme en inégales caractéristiques, dépend de la démonstration d'un théorème analogue pour n'importe quel « schéma excellent », par exemple pour n'importe quelle variété algébrique sur un corps k de caractéristique arbitraire. Le cas de la dimension 2 a été traité par Abhyankar, et a déjà été un outil indispensable dans diverses questions, par exemple dans la théorie de Néon de la dégénérescence des variétés abéliennes ou des courbes algébriques (« théorème de réduction semi-stable »), et ses applications par Deligne-Mumford aux variétés de modules des courbes algébriques, en caractéristique quelconque. Depuis plusieurs années déjà, Hironaka travaille sur le cas de la dimension quelconque. Nul doute que le problème mérite qu'un mathématicien du format de H. Hironaka lui consacre dix ans d'efforts incessants. Nul doute aussi que tous les géomètres lui souhaitent, de tout coeur : Bon succès !

A. GROTHENDIECK
Collège de France
11, Place Marcelin - Berthelot,
Paris 5^e
(France)

H. HIRONAKA
Harvard University
Department of Mathematics,
2 Divinity Avenue
Cambridge, Massachusetts 02138
(U.S.A.)

GROUPES DE BARSOTTI-TATE ET CRISTAUX

Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 431 à 436.
Gauthier-Villars, Paris, 1971[49]

Dans la suite, p désigne un nombre premier fixé. Nous nous proposons d'exposer l'esquisse d'une généralisation de la théorie de Dieudonné [4] des groupes formels sur un corps parfait de car. p, au cas « des groupes de Barsotti-Tate » (« groupes p-divisibles » dans la terminologie de Tate [5]) sur un schéma de base S sur lequel p est nilpotent. Un exposé plus détaillé se trouvera dans des notes développant un cours que j'ai donné sur ce sujet en juillet 1970 au Séminaire de Mathématique Supérieure de l'Université de Montréal, cf. aussi [7].

1. Généralités

Si S est un schéma, on identifie les schémas X sur S aux faisceaux (fppf) [2] qu'ils représentent. Les (faisceaux en) groupes sur S sont supposés commutatifs. Un groupe G sur S est appelé un *groupe de Barsotti-Tate sur S* (ou p-groupe de BT sur S, si on veut spécifier p), s'il satisfait aux conditions suivantes :

a) $p.G = G$, i.e. G est p-divisible.

b) G est de p-torsion, i.e. $G = \varinjlim_n {}_{p^n}G$.

[49] https://agrothendieck.github.io/divers/AGICM70.pdf

c) Les groupes $G(n) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}(p^n.\mathrm{id}_G)$ sont (représentables par des S-schémas) finis localement libres.

En fait, il suffit (moyennant a) et b)) de supposer que $G(1) = {}_pG$ soit fini localement libre, pour que les $G(n)$ le soient comme extensions multiples de groupes isomorphes à $G(1)$. Notons que $G(1)$ est de rang de la forme p^d, où d est une fonction sur S localement constante à valeurs dans les entiers naturels, et que pour tout n, $G(n)$ est alors de rang p^{dn}. L'entier d s'appelle le *rang* ou la *hauteur* de groupe de Barsotti-Tate G. Remarquons qu'une extension de deux groupes de BT est un groupe de BT, et que le rang se comporte additivement pour les extensions. Notons aussi que l'image inverse par un changement de base $S' \longrightarrow S$ d'un groupe de BT est un groupe de BT.

Lorsque p est premier aux caractéristique résiduelles de S, la catégorie des groupes de BT sur S est équivalente à la catégorie des faisceaux p-adiques libres constants tordus sur S [3], en associant à G le faisceau p-adique

$$T_p(G) = « \varprojlim » G(n),$$

le morphisme de transition $G(n') \longrightarrow G(n)$ étant induit par la multiplication par $p^{n'-n}$ (pour $n' \geq n$). Si S est connexe et muni d'un point géométrique s, la catégorie en question est donc équivalente à celle des représentations linéaires continues du groupe fondamental $\pi = \pi_1(S, s)$ dans des $\mathbf{Z}_p$-modules libres de type fini.

Lorsque A est un schéma abélien sur S, son sous-groupe de p-torsion maximal

$${}_{p^\infty}A = \varinjlim_n {}_{p^n}A$$

est un groupe de BT, de rang égal à $2d$, ou d est la dimension relative de A. Les propriétés de A ont tendance à se refléter de façon très fidèle dans celles du groupe de BT associé, ce qui est une des raisons principales de l'intérêt des groupes de BT. Signalons à ce propos le

Théorème de Serre-Tate [6][7]. — *Supposons que p soit localement nilpotent sur S (i.e. les car. résiduelles de S sont égales à p) et soit S' un voisinage infinitésimal de S. Alors, pour tout schéma abélien A sur S, les prolongements A' de A à S' « correspondent exactement » aux prolongements du groupe de BT G associe à A en un groupe de BT G' sur S'.*

En fait, on obtient une équivalence entre la catégorie des schémas abéliens A' sur S', et la catégorie des triples (G', A, φ) d'un groupe de BT G' sur S', d'un schéma abélien A sur S, et d'un isomorphisme $\varphi : G'|S \simeq {}_{p^\infty}A$.

2. Groupe formel associé à un groupe de BT

Si G est un faisceau sur S muni d'une section e, on définit de façon évidente le voisinage infinitésimal d'ordre n de cette section dans G, $\mathrm{Inf}^n(G, e)$, et le voisinage infinitésimal d'ordre infini

$$\overline{G} = \mathrm{Inf}^\infty(G, e) = \varinjlim \mathrm{Inf}^n(G, e)$$

Lorsque G est un groupe de BT sur S et que p est localement nilpotent sur S, on prouve que $\overline{G}$ est un *groupe de Lie formel*, qu'on appelle le *groupe formel associé au groupe de BT* G. Sa formation est fonctorielle en G et commute au changement de base. Lorsque S est réduit à un point, $\overline{G}$ lui-même est un groupe de BT, et G est une extension d'un groupe de BT $G/\overline{G}$ ind-étale par le groupe de BT ind-infinitésimal $\overline{G}$. La catégorie des groupes de BT ind-infinitésimaux n'est alors autre que celle des groupes de Lie formels qui sont p-divisibles, i.e. ou la multiplication par p est une isogénie [5].

3. Théorie de Dieudonné

Nous supposons maintenant p localement nilpotent sur S. Pour la notion de « cristal en modules localement libre » sur S, nous renvoyons à [1] ; nous considérons ici S comme un schéma sur $\mathbf{Z}_p$, l'idéal ${}_p\mathbf{Z}_p$ de $\mathbf{Z}_p$ étant muni de ses structures de puissances divisées. La théorie de Dieudonné généralisée consiste en la définition d'un « *foncteur de Dieudonné* ».

$$\mathbb{D} : \mathrm{BT}(S)^\circ \longrightarrow \mathrm{Crismodloclib}(S),$$

ou $\mathrm{BT}(S)$ désigne la catégorie des groupes de BT sur S. Ce foncteur est compatible avec les changements de base. On peut le construire par deux procédés assez distincts en apparence (méthode de l'exponentielle, et méthode des $\natural$-extensions), dont la description dépasse le cadre de cette note. La première méthode a l'avantage de se prêter directement à la théorie des extensions infinitésimales de groupes de BT du paragraphe suivant ; la deuxième, de permettre une comparaison assez directe de ce foncteur et le foncteur défini classiquement par Dieudonné, dans le cas où S est le spectre d'un corps parfait : dans ce cas, on trouve un isomorphisme canonique entre ce dernier, et le foncteur que nous construisons.

Lorsque S est de caractéristique p, on dispose des morphismes de Frobenius et de Verschiebung (décalage) :

$$G \underset{V_G}{\overset{F_G}{\rightleftarrows}} G^{(p/S)},$$

d'où, en transformant par le foncteur de Dieudonné $\mathbb{D}$, des morphismes

$$M \underset{V_M}{\overset{F_M}{\rightleftarrows}} M^{(p/S)}, \qquad M = D(G),$$

satisfaisant les conditions habituelles

$$F_M V_M = p.\mathrm{id}_M, \quad V_M F_M = p.\mathrm{id}_{M^{(p/S)}}.$$

Un cristal M muni de morphisme F_M, V_M satisfaisant aux conditions précédentes sera appelé un *cristal de Dieudonné*. Ainsi, la théorie de Dieudonné généralisée nous fournit un foncteur contravariant de la catégorie des groupes de Barsotti-Tate sur S dans celle des cristaux de Dieudonné, compatible aux changements de base. Lorsque S est le spectre d'un corps parfait, le théorie de Dieudonné classique nous apprend que c'est une équivalence de catégories. Dans le cas général, on peut espérer que ce foncteur soit pleinement fidèle.

On peut d'ailleurs donner une description conjecturale assez simple de l'image essentielle de ce foncteur, que nous n'expliciterons pas ici.

4. Filtration du cristal de Dieudonné et déformations de groupes de BT

Nous supposons toujours p localement nilpotent. Avec la construction du cristal de Dieudonné $\mathbb{D}(G)$ d'un groupe de BT G, on trouve en même temps une filtration canonique du module localement libre $\mathbb{D}(G)_S$ sur S par un sous-module localement facteur direct $\mathrm{Fil}(\mathbb{D}(G)_S)$. De façon précise, on trouve une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \underline{\omega}_G \longrightarrow \mathbb{D}(G)_S \longrightarrow \underline{\check{\omega}}_{G^*} \longrightarrow 0,$$

où $\underline{\omega}_G$ est le faisceau localement libre sur S des 1-formes différentielles le long de la section unité du groupe de Lie formel $\overline{G}$ associé à G (n° 2), et $G^* = \varinjlim G(n)^*$ désigne le groupe de BT *dual* de G (pour la dualité de Cartier), enfin $^\vee$ désigne le module dual. La suite exacte envisagée est fonctorielle en G, et commute aux changements de base.

Soit maintenant S' un épaississement à puissances divisées de S, et supposons que, ou bien les puissances divisées envisagées sont nilpotentes, ou bien que les fibres de G sont connexes, ou qu'il en soit ainsi de celles de G^* (i.e. $G(1)$ est unipotent). Considérons le module localement libre $\mathbb{D}(G)_{S'}$ sur S'. Pour tout prolongement G' de G en un groupe de BT sur S, $\mathbb{D}(G)_{S'}$ peut s'identifier à $\mathbb{D}(G')_S$, et à ce titre il est muni d'une filtration par un sous-module localement facteur direct $\mathrm{Fil}\,\mathbb{D}(G')$, qui prolonge la filtration $\mathrm{Fil}\,\mathbb{D}(G)$ dont on dispose déjà sur $\mathbb{D}(G)_S$. Ceci dit, on trouve que les prolongements de G en un groupe de BT G' sur S' « correspondent exactement » aux prolongements de la filtration qu'on a sur $\mathbb{D}(G)_S$ en une filtration de $\mathbb{D}(G)_{S'}$ par un sous-module localement facteur direct. Plus précisément, on trouve une équivalence entre la catégorie des groupes de BT G' sur S' (resp. ceux à fibres connexes, resp. ceux à fibres ind-unipotentes) avec la catégorie des couples (G, Fil), où G est un groupe de BT sur G (resp. un groupe de BT à fibres connexes, resp. à fibres und-unipotentes), et où Fil est une filtration de $\mathbb{D}(G)_{S'}$ par un sous-module localement facteur direct, prolongeant la filtration canonique de $\mathbb{D}(G)_S$.

Remarques.

1. Sans hypothèse sur les puissances divisées envisagées ou sur les fibres de G, on a en tous cas un foncteur

   $$G' \mapsto (G, \mathrm{Fil}),$$

   mais même si G est la somme du groupe constant $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et de son groupe de BT dual ${}_{p^\infty}G_m$, il n'est plus vrai (si les puiss. div. ne sont pas nilpotentes) qu'un prolongement de G soit connu quand on connaît le prolongement correspondant d'une filtration. Ceci est lié au fait que le logarithme sur $1+J$ (J l'idéal d'augmentation) n'est plus nécessairement injectif.

2. Soit toujours S un schéma où p soit localement nilpotent, et soit $S_0 \hookrightarrow S$ le sous-schéma (p) défini par l'annulation de p. Alors S est un épaississement à puissances divisées de S, et si $p \neq 2$, il est à puissances divisées (localement) nilpotentes. On peut donc appliquer la théorie de déformations précédentes, pour expliciter les groups de BT sur S en termes de groupes de BT sur le schéma S_0 de car. p, et du prolongement d'un filtration, à condition, si $p = 2$, de se borner aux groupes de BT à fibres connexes ou ind-unipotentes. Si la théorie de Dieudonné du n° 3 fournit une description complète de la catégorie des groupes de BT sur S_0 en termes cristallins (ce qui pour l'instant reste conjectural), on en déduit donc une description de la catégorie des groupes de BT sur S en termes purement « cristallins », avec toutefois le grain de sel habituel pour $p = 2$.

5. Groupes de BT à isogénie près

La catégorie des groupes de BT « à isogénie près » sur S est par définition la catégorie dont les objets sont les groupes de BT sur S, et ou $\mathrm{Hom}_{\mathrm{isog}}(G, G')$ est défini comme $\mathrm{Hom}(G, G') \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. Si p est localement nilpotent sur S, on trouve donc un foncteur de la catégorie des groupes de BT sur S à isogénie près, dans celle des cristaux sur S à isogénie près. Lorsque S' est un voisinage infinitésimal de S, l'idéal d'épaississement étant annulé par une puissance de p, on trouve que le foncteur restriction induit une *équivalence* de la catégorie des groupes de BT à isogénie près sur S', avec la catégorie analogue pour S : ainsi, la théorie des déformations infinitésimales à isogénie près est triviale.

Par un passage à la limite facile, on déduite des résultats du paragraphe précédent le résultat qui suit.

Soit A un anneau séparé et complet pour la topologie p-adique, $A_n = A/p^{n+1}A$.

Pour tout groupe de BT G_0 sur $S_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$, on définit par passage à la limite sur les $D(G_0)_{A_n}$ un A-module de type fini localement libre $M = \mathbb{D}(G_0)$, et si G_0

est prolongé en G sur A, M est muni d'une filtration par un sous-module facteur direct $M' = \mathrm{Fil}\, M \subset M$. Localisant par rapport à p, on trouve un A_p-module localement libre M_p, muni d'un facteur direct $\mathrm{Fil}\, M_p$. On trouve ainsi un foncteur $G_0 \longrightarrow \mathbb{D}(G_0)_p$ de la catégorie des groupes de BT à isogénie près sur A_0, dans la catégorie des modules localement libres sur A_p, et un foncteur $G \mapsto (G_0, \mathrm{Fil})$ de la catégorie des groupes de BT à isogénie près G sur S, dans la catégorie des couples (G_0, Fil) d'un groupe de BT à isogénie près G_0 sur S_0, et d'un sous-module facteur direct $\mathrm{Fil}\, \mathbb{D}(G_0)_p$. Ce *dernier foncteur est pleinement fidèle*.

Considérons notamment le cas où A est un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel k parfait de car. p, et à corps des fractions K de caractéristique nulle. On trouve qu'un groupe de BT G sur A est connu à isogénie près, quand on connaît a) le groupe de BT $G_0 = G \otimes_A k$ sur k à isogénie près, ou ce qui revient au même, son espace de Dieudonné $E = D(G_0)_W \otimes_W L$ (ou L est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt sur k), muni de F_E et V_E, et b) la filtration correspondante de $D(G_0)_p = E \otimes_L K$.

Remarques. — Le résultat qui précède soulève de nombreuses questions auxquelles je ne sais répondre :

1. Quelles sont les filtrations sur $E \otimes_L K$ qu'on peut obtenir par un groupe de BT à isogénie près sur A ? Forment-elles un ouvert de Zariski d'un grassmanienne ?

2. Comment peut-on expliciter G, et plus particulièrement sa fibre générique G_K (qu'on peut interpréter comme un vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ opère), en termes du couple $(E, \mathrm{Fil} \subset E \otimes_L K)$, ou E est un L-vectoriel muni de F_E et V_E ?

3. Quels sont les modules galoisiens qu'on trouve à l'aide de groupes de BT à isogénie près G sur A ? Comment, à l'aide d'un tel module galoisien, peut-on reconstituer plus ou moins algébriquement le couple (E, Fil) ? (Cette question se pose à cause du théorème de Tate [5], qui nous dit que G est connu quand on connaît le module galoisien associé.)

Enfin, pour traiter la cohomologie cristalline et ses relations avec la cohomologie p-adique, il y a lieu de se poser des questions analogues, où les cristaux de

Dieudonné avec filtrations à 2 crans sont remplacés par des cristaux avec un morphisme de Frobenius et des filtrations finies de longueur quelconque (la cohomologie en dimension n donnant lieu à des filtrations à $n+1$ crans). De plus, il y a lieu de ne pas se restreindre au cas des bases de dimension 1, et de revenir au cas des anneaux A supposés simplement séparés et complets pour la topologie p-adique.

Bibliographie

[1] P. BERTHELOT. — Cohomologie cristalline des schémas, *Notes aux C. R.*, du 18-8, 1-9 et 8-9-1968

[2] M . DEMAZURE. — In S. G. A. 3 IV (Springer *Lecture Notes*, No. 151).

[3] P. JOUANOLOU. — In S. G. A. 5 VI (*Institut des Hautes Études Scientifiques*).

[4] U. I. MANIN. — Théorie des groupes commutatifs formels sur des corps de car. finie, *Uspechi Mat. Nauk* (en russe), 18 (1963), pp 3-90.

[5] J. TATE. — p-divisible groups in local fields, *Proceedings of a Conference held at Driebergen* (The Netherlands) in 1966, Springer (Berlin), 1967.

[6] Séminaire de J. TATE au Collège de France en 1968 (écrire à TATE, Dep. of Math., 2 Divinity Avenue, Cambridge, Mass., U. S. A.).

[7] W. MESSING. — The crystals associated to BARSOTTI-TATE groups, thèse, Princeton (1971).

(Collège de France,

11, Place Marcelin-Berthelot

Paris 5^e

France).

THE TAME FUNDAMENTAL GROUP OF A FORMAL NEIGHBOURHOOD OF A DIVISOR WITH NORMAL CROSSINGS ON A SCHEME

A. GROTHENDIECK AND J. MURRE

Lecture Notes in Math. 208, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971[50]

---

[50] https://agrothendieck.github.io/divers/tamefundscan.pdf

PLATITUDE D'UNE ADHÉRENCE SCHÉMATIQUE ET LEMME DE HIRONAKA GÉNÉRALISÉ

Manuscripta Math. 5, 323-339 (1971)[51]

[51] https://agrothendieck.github.io/divers/platadhscan.pdf

PURSUING STACKS
First episode: the modelizing story

- À la poursuite des Champs : histoire de modèles

ESQUISSE D'UN PROGRAMME

- The *"Esquisse d'un Programme"* gives an outline of the main themes of mathematical reflection that Grothendieck pursued over the decade of the 70s and the beginning of the 80s.

  It was written in January of 1984 as a report to support an application for a research position at the CNRS. It was reproduced after "Récoltes et Semailles" as part of a program of *"Réflexions Mathématiques"* where he intended to develop some of these themes in the subsequent years.

- This text was published in: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

- Scan of the original

- Translation. In: *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 242, Cambridge University Press

- The asterisks (*) refer to the footnotes on the same page, the superscripts numbered from ([1]) to ([7]) refer to the notes (added later) collected at the end of this report.

ESQUISSE D'UN PROGRAMME

par Alexandre Grothendieck

1. Envoi

Comme la conjoncture actuelle rend de plus en plus illusoire pour moi les perspectives d'un enseignement de recherche à l'Université, je me suis résolu à demander mon admission au CNRS, pour pouvoir consacrer mon énergie à développer es travaux et perspectives dont il devient clair qu'il ne se trouvera aucun élève (ni même, semble-t-il, aucun congénère mathématicien) pour les développer à ma place.

En guise de document "Titres et Travaux", on trouvera à la suite de ce texte la reproduction intégrale d'une esquisse, par thèmes, de ce que je considérais comme mes principales contributions mathématiques au moment d'écrire ce rapport, en 1972. Il contient également une liste d'articles publiés à cette date. J'ai cessé toute publication d'articles scientifiques depuis 1970. Dans les lignes qui suivent, je me propose de donner un aperçu au moins sur quelques thèmes principaux de mes réflexions mathématiques depuis lors. Ces réflexions se sont matérialisées au cours des années en deux volumineux cartons de notes manuscrites, difficilement déchiffrables sans doute à tout autre qu'à moi-même, et qui, après des stades de décantations successives, attendent leur heure peut-être pour une rédaction d'ensemble tout au moins provisoire, à l'intention de la communauté mathématique. Le terme "rédaction" ici est quelque peu impropre, alors qu'il s'agit bien plus de développer des idées et visions multiples amorcées au cours de ces douze dernières années, en les précisant et les approfondissant, avec tous les rebondissements imprévus qui constamment accompagnent ce genre de travail – un travail de découverte donc, et non de compilation de notes pieusement accumulées. Et je compte bien, dans l'écriture des "Réflexions Mathématiques" commencée depuis février 1983, laisser apparaître clairement au fil des pages la démarche de la pensée qui sonde et qui découvre, en tâtonnant dans la pénombre bien souvent, avec des trouées de lumière subites quand quelque tenace image fausse, ou simplement inadéquate, se trouve enfin débusquée et mise à jour, et que les choses qui semblaient de guingois se mettent en place, dans l'harmonie mutuelle qui leur est propre.

Quoi qu'il en soit, l'esquisse qui suit de quelques thèmes de réflexions des dernières dix ou douze années, tiendra lieu en même temps d'esquisse de programme de travail pour les années qui viennent, que je compte consacrer au développement de ces thèmes, ou au moins de certains d'entre eux. Elle est destinée, d'une part aux collègues du Comité National appelés à statuer sur ma demande, d'autre part à quelques autres collègues, anciens élèves, amis, dans l'éventualité où certaines des idées esquissées ici pourraient intéresser l'un d'entre eux.

2. Un jeu de "Lego-Teichmüller" et le groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$

Les exigences d'un enseignement universitaire, s'adressant donc à des étudiants (y compris les étudiants dits "avancés") au bagage mathématique modeste (et souvent moins que modeste), m'ont amené à renouveler de façon draconienne les thèmes de réflexion à proposer à mes élèves, et de fil en aiguille et de plus en plus, à moi-même également. Il m'avait semblé important de partir d'un bagage intuitif commun, indépendant de tout langage technique censé l'exprimer, bien antérieur à tout tel langage – il s'est avéré que l'intuition géométrique et topologique des formes, et plus particulièrement des formes bidimensionnelles, était un tel terrain commun. Il s'agit donc de thèmes qu'on peut grouper sous l'appellation de "topologie des surfaces" ou "géométrie des surfaces", étant entendu dans cette dernière appellation que l'accent principal se trouve sur les propriétés topologiques des surfaces, ou sur les aspects combinatoires qui en constituent l'expression technique la plus terre-à-terre, et non sur les aspects différentiels, voire conformes, riemaniens, holomorphes et (de là) l'aspect "courbes algébriques complexes". Une fois ce dernier pas franchi cependant, voici soudain la géométrie algébrique (mes anciennes amours!) qui fait irruption à nouveau, et ce par les objets qu'on peut considérer comme les pierres de construction ultimes de toutes les autres variétés algébriques. Alors que dans mes recherches d'avant 1970, mon attention systématiquement était dirigée vers les objets de généralité maximale, afin de dégager un langage d'ensemble adéquat pour le monde de la géométrie algébrique, et que je ne m'attardais sur les courbes algébriques que dans la stricte mesure où cela s'avérait indispensable (notamment en cohomologie étale) pour développer des techniques et énoncés "passe-partout" valables en toute dimension et en tous lieux (j'entends, sur tous schémas de base, voire tous topos annelés de base…), me voici donc ramené, par le truchement d'objets si simples qu'un enfant peut les connaître en jouant, aux débuts et origines de la géométrie algébrique, familiers à Riemann et à ses émules !

Depuis environ 1975, c'est donc la géométrie des surfaces (réelles), et à partir de 1977 les liens entre les questions de géométrie des surfaces et la géométrie algébrique des courbes algébriques définies sur des corps tels que **C**, **R** ou des extensions de type fini de **Q**, qui ont été ma principale source d'inspiration, ainsi que mon fil conducteur constant. C'est avec surprise et avec émerveillement qu'au fil des ans je découvrais (ou plutôt, sans doute, redécouvrais) la richesse prodigieuse, réellement inépuisable, la profondeur insoupçonnée de ce thème, d'apparence si anodine. Je crois y sentir un point névralgique entre tous, un point de convergence privilégié des principaux courants d'idées mathématiques, comme aussi des principales structures et des visions des choses qu'elles expriment, depuis les plus spécifiques, (tels les anneaux **Z**, **Q**, $\overline{\mathbf{Q}}$, **R**, **C** ou le groupe Sl(2) sur l'un de ces anneaux, ou les groupes algébriques réductifs généraux) aux plus "abstraits", telles les "multiplicités" algébriques, analytiques complexes ou analytiques réelles. (Celles-ci s'introduissent naturellement quand il s'agit d'étudier systématiquement des "variétés de modules" pour les objets géométriques envisagés, si on veut dépasser le point de vue notoirement insuffisant des "modules grossiers", qui revient à "tuer" bien malencontreusement les groupes d'automorphismes de ces objets.) Parmi ces multiplicités modulaires, ce sont celles de Mumford-Deligne pour les courbes algébriques "stables" de genre g, à ν points marqués, que je note $\widehat{M}_{g,\nu}$ (compactification de la multiplicité "ouverte" $M_{g,\nu}$ correspondant aux courbes lisses), qui depuis quelques deux ou trois années ont exercé sur moi une fascination particulière, plus forte peut-être qu'aucun autre objet mathématique 'a ce jour. À vrai dire, il s'agit plutôt du système de *toutes* les multiplicités $M_{g,\nu}$ pour g, ν variables, liées entre elles par un certain nombre d'opérations fondamentales (telles les opérations de "bouchage de trous" i.e. de "gommage" de points marqués, celle de "recollement", et les opérations inverses), qui sont le reflet en géométrie algébrique absolue de caractéristique zéro (pour le moment) d'opérations géométriques familières du point de vue de la "chirurgie" topologique ou conforme des surfaces. La principale raison sans doute de cette fascination, c'est que cette structure géométrique très riche sur le système des multiplicités modulaires "ouvertes" $M_{g,\nu}$ se réflète par une structure analogue sur les groupoïdes fondamentaux correspondants, les "groupoïdes de Teichmüller" $\widehat{T}_{g,\nu}$, et que ces opérations au niveau des $\widehat{T}_{g,\nu}$ ont un caractère suffisamment intrinsèque pour que le groupe de Galois Γ de $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$ opère sur toute cette "tour" de groupoïdes de Teichmüller, en respectant toutes ces structures. Chose plus extraordinaire encore, cette opération est *fidèle* – à vrai dire, elle est fidèle déjà sur le premier "étage" non trivial de cette tour, à savoir $\widehat{T}_{0,4}$ – ce qui signifie aussi, essentiellement, que l'action extérieure de Γ sur le groupe fondamental $\hat{\pi}_{0,3}$ de la droite projective standard $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbf{Q}$, privée des trois points 0, 1, ∞, est déjà fidèle. Ainsi *le groupe de Galois* Γ *se réalise comme un groupe d'automorphismes d'un groupe profini des plus concrets*, respectant d'ailleurs certaines structures essentielles de ce groupe. Il s'ensuit qu'un élément de Γ peut être "paramétré" (de diverses façons équivalentes d'ailleurs) par un élément convenable de ce groupe profini $\hat{\pi}_{0,3}$ (un groupe profini libre à deux générateurs), ou par un système de tels éléments, ce ou ces éléments étant d'ailleurs soumis à certaines conditions simples, nécessaires (et sans doute non suffisantes) pour que ce ou ces éléments corresponde(nt) bien à un élément de Γ. Une des tâches les plus fascinantes ici, est justement d'appréhender des conditions nécessaires *et* suffisantes sur un automorphisme extérieur de $\hat{\pi}_{0,3}$ i.e. sur le ou les paramètres correspondants, pour qu'il provienne d'un élément de

Γ – ce qui fournirait une description “purement algébrique”, en termes de groupes profinis et sans référence à la théorie de Galois des corps de nombres, du groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{Q})$!

Peut-être une caractérisation même conjecturale de Γ comme sous-groupe de $\mathrm{Autext}(\hat{\pi}_{0,3})$ est-elle pour le moment hors de portée ([1]) ; je n’ai pas de conjecture à proposer encore. Une autre tâche par contre est abordable immédiatement, c’est celle de décrire l’action de Γ sur toute la tour de Teichmüller, en termes de son action sur le “premier étage” $\hat{\pi}_{0,3}$, i.e. exprimer un automorphisme de cette tour, en termes du “paramètre” dans $\hat{\pi}_{0,3}$, qui repère l’élément courant γ de Γ. Ceci est lié à une représentation de la tour de Teichmüller (en tant que groupoïde muni d’une opération de “recollement”) par générateurs et relations, qui donnera en particulier une présentation par générateurs et relations, au sens ordinaire, de chacun des $\widehat{T}_{g,\nu}$ (en tant que groupoïde profini). Ici, même pour $g = 0$ (donc quand les groupes de Teichmüller correspondants sont des groupes de tresses “bien connus”), les générateurs et relations connus à ce jour dont j’ai eu connaissance, me semblent inutilisables tels quels, car ils ne présentent pas les caractères d’invariance et de symétrie indispensables pour que l’action de Γ soit directement lisible sur cette présentation. Ceci est lié notamment au fait que les gens s’obstinent encore, en calculant avec des groupes fondamentaux, à fixer un seul point base, plutôt que d’en choisir astucieusement tout un paquet qui soit invariant par les symétries de la situation, lesquelles sont donc perdues en route. Dans certaines situations (comme des théorèmes de descente à la Van Kampen pour groupes fondamentaux) il est bien plus élégant, voire indispensable pour y comprendre quelque chose, de travailler avec des groupoïdes fondamentaux par rapport à un paquet de points base convenable, et il en est certainement ainsi pour la tour de Teichmüller. Il semblerait (incroyable, mais vrai !) que la géométrie même du premier étage de la tour de Teichmüller (correspondant donc aux “modules” soit pour des droites projectives avec quatre points marqués, soit pour des courbes elliptiques (!)) n’ait jamais été bien explicitée, par exemple la relation entre le cas de genre 0 avec la géométrie de l’octaèdre, et celle du tétraèdre. A fortiori les multiplicités modulaires $M_{0,5}$ (pour les droites projectives avec cinq points marqués) et $M_{1,2}$ (pour les courbes de genre 1 avec deux points marqués), d’ailleurs quasiment isomorphes entre elles, semblent-elles terre vierge – les groupes de tresses ne vont pas nous éclairer à leur sujet ! J'ai commencé à regarder $M_{0,5}$ à des moments perdus, c'est un véritable joyau, d'une géométrie très riche étroitement liée à celle de l'icosaèdre.

L'intérêt a priori d'une connaissance complète des deux premiers étages de la tour (savoir, les cas où la dimension modulaire $N = 3g - 3 + \nu$ est ≤ 2) réside dans ce principe, que *la tour entière se reconstitue à partir des deux premiers étages*, en ce sens que via l'opération fondamentale de "recollement", l'étage 1 fournit un système complet de générateurs, et l'étage 2 un système complet de relations. Il y a une analogie frappante, et j'en suis persuadé, pas seulement formelle, entre ce principe, et le principe analogue de Demazure pour la structure des groupes algébriques réductifs, si on remplace le terme "étage" ou "dimension modulaire" par "rang semi-simple du groupe réductif". Le lien devient plus frappant encore, si on se rappelle que le groupe de Teichmüller $T_{1,1}$ (dans le contexte discret transcendant maintenant, et non dans le contexte algébrique profini, où on trouve les complétions profinies des premiers) n'est autre que $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$, i.e. le groupe des points entiers du schéma en groupes simple de rang 1 "absolu" $\mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$. Ainsi, *la pierre de construction fondamentale pour la tour de Teichmüller, est essentiellement la même que celle pour "la tour" des groupes réductifs de tous rangs* – un groupe d'ailleurs dont on peut dire sans doute qu'il est présent dans toutes les disciplines essentielles des mathématiques.

Ce principe de construction de la tour de Teichmüller n'est pas démontré à l'heure actuelle – mais je n'ai aucun doute qu'il ne soit valable. Il résulterait (via une théorie de dévissage des structures stratifiées – en l'occurrence les $\widehat{M}_{g,\nu}$ – qui resterait à écrire, cf. par. 5) d'une propriété extrêmement plausible des multiplicités modulaires ouvertes $M_{g,\nu}$ dans le contexte analytique complexe, à savoir que pour une dimension modulaire $N \geq 3$, le groupe fondamental de $M_{g,\nu}$ (i.e. le groupe de Teichmüller habituel $T_{g,\nu}$) est isomorphe au "groupe fondamental à l'infini" i.e. celui d'un "voisinage tubulaire de l'infini". C'est là une chose bien familière (due à Lefschetz essentiellement) pour une variété lisse *affine* de dimension $N \geq 3$. Il est vrai que les multiplicités modulaires ne sont pas affines (sauf pour des petites valeurs de g), mais il suffirait qu'une telle $M_{g,\nu}$ de dimension N (ou plutôt, un revêtement fini convenable) soit réunion de $N - 2$ ouverts affines, donc que $M_{g,\nu}$ ne soit pas "trop proche d'une variété compacte".

N'ayant aucun doute sur ce principe de construction de la tour de Teichmüller, je préfère laisser aux experts de la théorie transcendante, mieux outillés que moi, le soin de prouver le nécessaire (s'il s'en trouve qui soit intéressé), pour expliciter plutôt, avec tout le soin qu'elle mérite, la structure qui en découle pour la tour de Teichmüller par générateurs et relations, dans le cadre discret cette fois et non profini – ce qui revient, essentiellement, à une compréhension complète des quatre multiplicités modulaires $M_{0,4}$, $M_{1,1}$, $M_{0,5}$, $M_{1,2}$, et de leurs groupoïdes fondamentaux par rapport à des "points base" convenablement choisis. Ceux-ci s'offrent tout naturellement, comme les courbes algébriques complexes du type (g,ν) envisagé, qui ont un groupe d'automorphismes (nécessairement fini) plus grand que dans le cas générique[1]. En y incluant la sphère holomorphe à trois points marqués (provenant de $M_{0,3}$ i.e. de l'étage 0), on trouve *douze "pièces de construction" fondamentales* (6 de genre 0, 6 de genre 1) dans un "jeu de Légo-Teichmüller" (grande boîte), où les points marqués sur les surfaces envisagées sont remplacés par des "trous" à bord, de façon à avoir des surfaces à bord, donc des pièces de construction qui peuvent s'assembler par frottement doux comme dans le jeu de Légo ordinaire cher à nos enfants (ou petits-enfants...). Par assemblage on trouve un moyen tout ce qu'il y a de visuel pour construire tout type de surface (ce sont ces assemblages essentiellement qui seront les "points base" pour notre fameuse tour), et aussi de visualiser les *"chemins" élémentaires* par des opérations tout aussi concrètes telles des "twists", ou des automorphismes des pièces du jeu, et d'écrire les *relations fondamentales* entre chemins composés. Suivant la taille (et le prix !) de la boîte de construction utilisée, on trouve d'ailleurs de nombreuses descriptions différentes de la tour de Teichmüller par générateurs et relations. La boîte la plus petite est réduite à des pièces toutes identiques, de type $(0,3)$ – ce sont les "pantalons" de Thurston, et le jeu de Légo-Teichmüller que j'essaie de décrire, issu

[1]Il faut y ajouter de plus les "points-base" provenant par opérations de recollement de "pièces" du même type en dimension modulaire inférieure. D'autre part, en dimension modulaire 2 (cas de $M_{0,5}$ et $M_{1,2}$), il convient d'exclure les points de certaines familles à un paramètre de courbes admettant un automorphisme exceptionnel d'ordre 2. Ces familles constituent d'ailleurs sur les multiplicités envisagées des courbes rationnelles remarquables, qui me paraissent un ingrédient important de la structure de ces multiplicités.

de motivations et de réflexions de géométrie algébrique absolue sur le corps $\mathbf{Q}$, est très proche du jeu de "chirurgie géodésique hyperbolique" de Thurston, dont j'ai appris l'existence l'an dernier par Yves Ladegaillerie. Dans un microséminaire avec Carlos Contou-Carrère et Yves Ladegaillerie, nous avons amorcé une réflexion dont un des objets est de confronter les deux points de vue, qui se complètent mutuellement.

J'ajoute que chacune des douze pièces de construction de la "grande boîte" se trouve munie d'une décomposition cellulaire canonique, stable par toutes les symétries, ayant comme seuls sommets les "points marqués" (ou centres des trous), et comme arêtes certains chemins géodésiques (pour la structure riemanienne canonique sur la sphère ou le tore envisagé) entre certaines paires de sommets (savoir ceux qui se trouvent sur un même "lieu réel", pour une structure réelle convenable de la courbe algébrique complexe envisagée). Par suite, dans ce jeu toutes les surfaces obtenues par assemblage sont munies de structures cellulaires canoniques, qui à leur tour (cf. §3 plus bas) permettent de considérer ces surfaces comme associée à des courbes algébriques complexes (et même sur $\overline{\mathbf{Q}}$) canoniquement déterminées. Il y a là un jeu de chassé-croisé typique entre le combinatoire, et l'algébrique complexe (ou mieux, l'algébrique sur $\overline{\mathbf{Q}}$).

La "petite boîte" aux pièces toutes identiques, qui a le charme de l'économie, donnera sans doute une description relativement compliquée pour les relations (compliquée, mais nullement inextricable !). La grande boîte donnera lieu à des relations plus nombreuses (du fait qu'il y a beaucoup plus de points-bases et de chemins remarquables entre eux), mais à structure plus transparente. Je prévois qu'en dimension modulaire 2, tout comme dans le cas plus ou moins familier de la dimension modulaire 1 (avec notamment la description de $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$ par $(\rho,\sigma|\rho^3=\sigma^2,\sigma^4=\rho^6=1)$), on trouvera un engendrement par les groupes d'automorphismes des trois types de pièces pertinentes, avec des relations simples que je n'ai pas dégagées à l'heure d'écrire ces lignes. Peut-être même trouvera-t-on un principe de ce genre pour tous les $T_{g,\nu}$, ainsi qu'une décomposition cellulaire de $\widehat{M}_{g,\nu}$ généralisant celles qui se présentent spontanément pour $\widehat{M}_{0,4}$ et $\widehat{M}_{1,1}$, et que j'entrevois dès à présent pour la dimension modulaire 2, en utilisant les hypersurfaces correspondant aux diverses *structures réelles* sur les structures complexes envisagées, pour effectuer le découpage cellulaire voulu.

3. Corps de nombres associés à un dessin d'enfant

Plutôt que de suivre (comme prévu) un ordre thématique rigoureux, je me suis laissé emporter par ma prédilection pour un thème particulièrement riche et brûlant, auquel je compte me consacrer d'ailleurs prioritairement pendant quelques temps, à partir de la rentrée 84/85. Je reprends donc l'exposé thématique là où je l'ai laissé, tout au début du paragraphe précédent.

Mon intérêt pour les surfaces topologiques commence à poindre en 1974, où je propose à Yves Ladegaillerie le thème de l'étude isotopique des plongements d'un 1-complexe topologique dans une surface compacte. Dans les deux années qui suivent, cette étude le conduit à un remarquable théorème d'isotopie, donnant une description algébrique complète des classes d'isotopie de plongements de tels 1-complexes, ou de surfaces compactes à bord, dans une surface compacte orientée, en termes de certains invariants combinatoires très simples, et des groupes fondamentaux des protagonistes. Ce théorème, qui doit pouvoir s'étendre sans mal aux plongements d'un espace compact quelconque (triangulable pour simplifier) dans une surface compacte orientée, redonne comme corollaires faciles plusieurs résultats classiques profonds de la théorie des surfaces, et notamment le théorème d'isotopie de Baer. Il va finalement être publié, séparément du reste (et dix ans après, vu la dureté des temps...), dans Topology. Dans le travail de Ladegaillerie figure également une description purement algébrique, en termes de groupoïdes fondamentaux, de la catégorie "isotopique" des surfaces compactes X, munies d'un 1-complexe topologique K plongé dans X. Cette description, qui a eu le malheur d'aller à l'encontre du "goût du jour" et de ce fait semble impubliable, a néanmoins servi (et sert encore) comme un guide précieux dans mes réflexions ultérieures, notamment dans le contexte de la géométrie algébrique absolue de caractéristique nulle.

Le cas où (X,K) est une "carte" 2-dimensionnelle, i.e. où les composantes connexes de X K sont des 2-cellules ouvertes (et où de plus K est muni d'un ensemble fini S de "sommets", tel que les composantes connexes de K§ soient des 1-cellules ouvertes) attire progressivement mon attention dans les années suivantes.

La catégorie isotopique de ces cartes admet une description algébrique particulièrement simple, via l'ensemble des "repères" (ou "drapeaux" ou "biarcs") associés à la carte, qui se trouve naturellement muni d'une structure d'ensemble à groupe d'opérateurs, sous le groupe

$$\underline{C}_2 = < \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 | \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0\sigma_2)^2 = 1 >,$$

que j'appelle le *groupe cartographique* (non orienté) de dimension 2. Il admet comme sous-groupe d'indice 2 le *groupe cartographique orienté* engendré par les produits en nombre pair des générateurs, qui peut aussi se décrire comme

$$\underline{C}_2^+ = < \rho_s, \rho_f, \sigma | \rho_s\rho_f = \sigma, \sigma^2 = 1 >,$$

(avec

$$\rho_s = \sigma_2\sigma_1, \quad \rho_f = \sigma_1\sigma_0, \quad \sigma = \sigma_0\sigma_2 = \sigma_2\sigma_0,$$

opérations de *rotation élémentaire* d'un repère autour d'un sommet, d'une face et d'une arête respectivement). Il y a un dictionnaire parfait entre la situation topologique des cartes compactes, resp. cartes compactes orientées, d'une part, et les ensembles finis à groupe d'opérateurs $\underline{C}_2$ resp. $\underline{C}_2^+$ de l'autre, dictionnaire dont l'existence était d'ailleurs plus ou moins connue, mais jamais énoncée avec la précision nécessaire, ni développée tant soit peu. Ce travail de fondements est fait avec le soin qu'il mérite dans un excellent travail de DEA, fait en commun par Jean Malgoire et Christine Voisin en 1976.

Cette réflexion prend soudain une dimension nouvelle, avec cette remarque simple que le groupe $\underline{C}_2^+$ peut s'interpréter comme un quotient du groupe fondamental d'une sphère orientée privée de trois points, numérotés 0, 1, 2, les opérations ρ_s, σ, ρ_f s'interprétant comme les lacets autour de ces points, satisfaisant la relation familière

$$l_0 l_1 l_2 = 1,$$

alors que la relation supplémentaire $\sigma^2 = 1$ i.e. $l_1^2 = 1$ signifie qu'on s'intéresse au quotient du groupe fondamental correspondant à un indice de ramification imposé 2 au point 1, qui classifie donc les revêtements de la sphère, ramifiés au plus en les points 0, 1, 2, avec une ramification égale à 1 ou 2 en les points au dessus de

1. Ainsi, les cartes orientées compactes forment une catégorie isotopique équivalente à celle de ces revêtements, soumis de plus à la condition supplémentaire d'être des revêtements finis. Prenant maintenant comme sphère de référence la sphère de Riemann, ou droite projective complexe, rigidifiée par les trois points 0, 1 et ∞ (ce dernier remplaçant donc 2), et se rappelant que tout revêtement ramifié fini d'une courbe algébrique complexe hérite lui-même d'une structure de courbe algébrique complexe, on aboutit à cette constatation, qui huit ans après me paraît encore toujours aussi extraordinaire : *toute carte orientée "finie" se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe !* Mieux encore, comme la droite projective complexe est définie sur le corps de base absolue $\mathbf{Q}$, ainsi que les points de ramification admis, les courbes algébriques obtenues sont définies non seulement sur $\mathbf{C}$, mais sur la clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$. Quant à la carte de départ, elle se retrouve sur la courbe algébrique, comme image inverse du segment réel $[0,1]$ (où 0 est considéré comme un sommet, et 1 comme milieu d'une "arête pliée" ayant 1 comme centre), lequel constitue dans la sphère de Riemann la "2-carte orientée universelle"[2]. Les points de la courbe algébrique X au dessus de 0, de 1 et de ∞ ne sont autres que les sommets, et les "centres" des arêtes et des faces respectivement de la carte (X,K), et les ordres des sommets et des faces ne sont autres que les multiplicités des zéros et des pôles de la fonction rationnelle (définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$) sur X, exprimant sa projection structurale vers $\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$.

Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est retrouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable ([2]). Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffonné sur un bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple

[2]Il y a une description analogue des cartes finies non orientées, éventuellement avec bord, en termes de courbes algébriques *réelles*, plus précisément de revêtement de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{R}}$ ramifié seulement en 0, 1, ∞, la surface à bord associée à un tel revêtement étant $X(\mathbf{C})/\tau$, où τ est la conjugaison complexe. La carte non orientée "universelle" est ici le disque, ou hémisphère supérieur de la sphère de Riemann, muni comme précédemment du 1-complexe plongé $K=[0,1]$.

parfaitement explicite. A un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus. S'agissant ici de cartes sphériques, donnant nécessairement naissance à des courbes de genre 0 (qui ne fournissent donc pas des "modules"), on peut dire que la courbe en question est "épinglée" dès qu'on fixe trois de ses points, par exemple trois sommets de la carte, ou plus généralement trois centres de facettes (sommets, arêtes ou faces) – dès lors l'application structurale $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$ peut s'interpréter comme une fonction rationnelle

$$f(z) = P(z)/Q(z) \in \mathbf{C}(z)$$

bien déterminée, quotient de deux polynômes bien déterminés premiers entre eux avec Q unitaire, satisfaisant à des conditions algébriques qui traduisent notamment le fait que f soit non ramifié en dehors des valeurs 0, 1, ∞, et qui impliquent que les coefficients de ces polynômes sont des *nombres algébriques* ; donc leurs zéros sont des nombres algébriques, qui représentent respectivement les sommets et les centres des faces de la carte envisagée.

Revenant au cas général, les cartes finies s'interprétant comme des revêtements sur $\overline{\mathbf{Q}}$ d'une courbe algébrique définie sur le corps premier $\mathbf{Q}$ lui-même, il en résulte que le groupe de Galois Γ de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$ opère sur la catégorie de ces cartes de façon naturelle. Par exemple, l'opération d'un automorphisme $\gamma \in \Gamma$ sur une carte sphérique donnée par la fonction rationnelle ci-dessus, est obtenue en appliquant aux coefficients des polynômes P, Q. Voici donc ce mystérieux groupe Γ intervenir comme agent transformateur sur des formes topologico-combinatoires de la nature la plus élémentaire qui soit, amenant à se poser des questions comme : telles cartes orientées données sont-elles "conjuguées", ou : quelles exactement sont les conjuguées de telle carte orientée donnée ? (il y en a, visiblement, un nombre fini seulement).

J'ai traité quelques cas concrets (pour des revêtements de bas degrés) par des expédients divers, J. Malgoire en a traité quelques autres – je doute qu'il y ait une méthode uniforme permettant d'y répondre à coups d'ordinateurs. Ma réflexion très vite s'est engagée dans une direction plus conceptuelle, pour arriver à appréhender la nature de cette action de Γ. On s'aperçoit d'emblée que grosso modo cette action est exprimée par une certaine action "extérieure" de Γ sur le compactifié profini du groupe cartographique orienté $\underline{C}_2^+$, et cette action à son tour est déduite par passage au quotient de l'action extérieure canonique de Γ sur le groupe fondamental profini $\hat{\pi}_{0,3}$ de $(U_{0,3\overline{\mathbf{Q}}})$, où $U_{0,3}$ désigne la courbe-type de genre 0 sur le corps premier $\mathbf{Q}$, privée de trois points. C'est ainsi que mon attention s'est portée vers ce que j'ai appelé depuis la *"géométrie algébrique anabélienne"*, dont le point de départ est justement une étude (pour le moment limitée à la caractéristique zéro) de l'action de groupes de Galois "absolus" (notamment les groupes $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, où K est une extension de type fini du corps premier) sur des groupes fondamentaux géométriques (profinis) de variétés algébriques (définies sur K), et plus particulièrement (rompant avec une tradition bien enracinée) des groupes fondamentaux qui sont très éloignés des groupes abéliens (et que pour cette raison je nomme *"anabéliens"*). Parmi ces groupes, et très proche du groupe $\hat{\pi}_{0,3}$, il y a le compactifié profini du groupe modulaire $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$, dont le quotient par le centre ± 1 contient le précédent comme sous-groupe de congruence mod 2, et peut s'interpréter d'ailleurs également comme groupe "cartographique" orienté, savoir celui qui classifie les cartes orientées *triangulées* (i.e. celles dont les faces sont des triangles ou des monogones).

Toute carte finie orientée donne lieu à une courbe algébrique projective et lisse définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, et il se pose alors immédiatement la question : quelles sont les courbes algébriques sur $\overline{\mathbf{Q}}$ obtenues ainsi – les obtiendrait-on toutes, qui sait ? En termes plus savants, serait-il vrai que toute courbe algébrique projective et lisse définie sur un corps de nombres interviendrait comme une "courbe modulaire" possible pour paramétriser les courbes elliptiques munies d'une rigidification convenable ? Une telle supposition avait l'air à tel point dingue que j'étais presque gêné de la soumettre aux compétences en la matière. Deligne consulté trouvait la supposition dingue en effet, mais sans avoir un contre-exemple dans ses manches. Moins d'un an après, au Congrès International de Helsinki, le mathématicien soviétique Bielyi annonce justement ce résultat, avec une démonstration d'une simplicité déconcertante tenant en deux petites pages d'une lettre de Deligne – jamais sans doute un résultat profond et déroutant ne fut démontré en si peu de lignes !

Sous la forme où l'énonce Bielyi, son résultat dit essentiellement que *toute courbe algébrique définie sur un corps de nombres peut s'obtenir comme revêtement* *de la droite projective ramifié seulement en les points 0, 1, ∞*. Ce résultat semble être passé plus ou moins inaperçu. Pourtant, il m'apparaît d'une portée considérable. Pour moi, son message essentiel a été qu'*il y a une identité profonde entre la combinatoire des cartes finies d'une part, et la géométrie des courbes algébriques définies sur des corps de nombres, de l'autre*. Ce résultat profond, joint à l'interprétation algébrico-géométrique des cartes finies, ouvre la porte sur un monde nouveau, inexploré – et à portée de main de tous, qui passent sans le voir.

C'est près de trois ans plus tard seulement, voyant que décidément les vastes horizons qui s'ouvrent là ne faisaient rien tressaillir en aucun de mes élèves, ni même chez aucun des trois ou quatre collègues de haut vol auxquels j'ai eu l'occasion d'en parler de façon circonstanciée, que je fais un premier voyage de prospection de ce "monde nouveau", de janvier à juin 1981. Ce premier jet se matérialise en un paquet de quelques 1300 pages manuscrites, baptisées "La Longue Marche 'a travers la théorie de Galois". Il s'agit avant tout d'un effort de compréhension des relations entre groupes de Galois "arithmétiques" et groupes fondamentaux profinis "géométriques". Assez vite, il s'oriente vers un travail de formulation calculatoire de l'opération de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur $\hat{pi}_{0,3}$, et dans un stade ultérieur, sur le groupe légèrement plus gros $\mathrm{Sl}(\hat{2}, \mathbf{Z})$, qui donne lieu à un formalisme plus élégant et plus efficace. C'est au cours de ce travail aussi (mais développé dans des notes distinctes) qu'apparaît le thème central de la géométrie algébrique anabélienne, qui est de reconstituer certaines variétés X dites "anabéliennes" sur un corps absolu K à partir de leur groupe fondamental mixte, extension de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ par $\pi_1(X_{\overline{K}})$; c'est alors que se dégage la "conjecture fondamentale de la géométrie algébrique anabélienne", proche des conjectures de Mordell et de Tate que vient de démontrer Faltings ([3]). C'est là aussi que s'amorcent une première réflexion sur les groupes de Teichmüller, et les premières intuitions sur la structure multiple de la "tour de Teichmüller" – les multiplicités modulaires ouvertes $M_{g,nu}$ apparaissant par ailleurs comme les premiers exemples importants, en dimension > 1, de variétés (ou plutôt, de multiplicités) qui semblent bien mériter l'appellation "anabélienne". Vers la fin de cette période de réflexion, celle-ci m'apparaît comme une réflexion fondamentale sur une théorie alors encore dans les limbes, pour laquelle l'appellation *"Théorie de Galois-Teichmüller"* me semble plus appropriée que "théorie de Galois" que j'avais d'abord donnée à mes notes.

Ce n'est pas le lieu ici de donner un aperçu plus circonstancié de cet ensemble de questions, intuitions, idées – y compris des résultats palpables, certes. Le plus important me semble celui signalé en passant au par. 2, savoir la fidélité de l'action extérieure de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (et de ses sous-groupes ouverts) sur $\hat{\pi}_{0,3}$, et plus généralement (si je me rappelle bien) sur le groupe fondamental de toute courbe algébrique "anabélienne" (i.e. dont le genre g et le "nombre de trous" ν satisfont l'inégalité $2g + \nu \geq 3$, i.e. telle que $\chi(X) < 0$) définie sur une extension finie de $\mathbf{Q}$. Ce résultat peut être considéré comme essentiellement équivalent au théorème de Bielyi – c'est la première manifestation concrète, par un énoncé mathématique précis, du "message" dont il a été question plus haut.

Je voudrais terminer cet aperçu rapide par quelques mots de commentaire sur la richesse vraiment inimaginable d'un groupe anabélien typique comme le groupe $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ – sans doute le groupe discret infini le plus remarquable qu'on ait rencontré, qui apparaît sous une multiplicité d'avatars (dont certains ont été effleurés dans le présent rapport), et qui du point de vue de la théorie de Galois-Teichmüller peut être considéré comme la "pierre de construction" fondamentale de la "tour de Teichmüller". L'élément de structure de $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ qui me fascine avant tout, est bien sûr l'action extérieure du groupe de Galois Γ sur le compactifié profini. Par le théorème de Bielyi, prenant les compactifiés profinis de sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$, et l'action extérieure induite (quitte à passer également à un sous-groupe ouvert de Γ), *on trouve essentiellement les groupes fondamentaux de toutes les courbes algébriques* (pas nécessairement compactes) *définis sur des corps de nombres K, et l'action extérieure de* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *dessus* – du moins est-il vrai que tout tel groupe fondamental apparaît comme quotient d'un des premiers groupes[3]. Tenant compte du "yoga anabélien" (qui reste conjectural), disant qu'une courbe algébrique anabélienne sur un corps de nombres K (extension finie de $\mathbf{Q}$) est connue à isomorphisme près quand on connaît son groupe fondamental mixte (ou ce qui revient au même, l'action extérieure de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur son groupe fondamental profini géométrique), on peut donc dire que *toutes les courbes algébriques définies*

[3]En fait, il s'agit de quotients de nature particulièrement triviale, par des sous-groupes abéliens produits de "modules de Tate" $\hat{\mathbf{Z}}(1)$, correspondant à des "groupes-lacets" autour de points à l'infini.

sur des corps de nombres sont "contenues" dans le compactifié profini $\widehat{\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})}$, *et dans la connaissance d'un certain sous-groupe* Γ *du groupe des automorphismes extérieurs de ce dernier !* Passant aux abélianisés des groupes fondamentaux précédents, on voit notamment que toutes les représentations abéliennes ℓ-adiques chères à Tate et consorts, définies par des jacobiennes et jacobiennes généralisées de courbes algébriques définies sur des corps de nombres, sont contenues dans cette seule action de Γ sur le groupe profini anabélien $\widehat{\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})}$! ([4])

Il en est qui, face à cela, se contentent de hausser les épaules d'un air désabusé et de parier qu'il n'y a rien à tirer de tout cela, sauf des rêves. Ils oublient, ou ignorent, que notre science, et toute science, serait bien peu de chose, si depuis ses origines elle n'avait été nourrie des rêves et des visions de ceux qui s'y adonnent avec passion.

4. Polyèdres réguliers sur les corps finis

Dès le début de ma réflexion sur les cartes bidimensionnelles, je me suis intéressé plus particulièrement aux cartes dites *"régulières"*, c'est-à-dire celles dont le groupe des automorphismes opère transitivement (et de ce fait, de façon simplement transitive) sur l'ensemble des repères. Dans le cas orienté et en termes de l'interprétation algébrico-géométrique du paragraphe précédent, ce sont les cartes qui correspondent ‘a un revêtement *galoisien* de la droite projective. Très vite aussi, et d‘es avant même qu'apparaisse le lien avec la géométrie algébrique, il apparaît nécessaire aussi de ne pas exclure les cartes infinies, qui interviennent notamment de façon naturelle comme revêtements universels des cartes finies. Il apparaît (comme conséquence immédiate du "dictionnaire" des cartes, étendu au cas des cartes pas nécessairement finies) que pour tout couple d'entiers naturels $p, q \geq 1$, il existe à isomorphisme (non unique) près une carte 1-*connexe* et une seule qui soit de type (p, q) i.e. dont tous les sommets soient d'ordre p et toutes les faces d'ordre q, et cette carte est une carte régulière. Elle se trouve épinglée par le choix d'un repère, et son groupe des automorphismes est alors canoniquement isomorphe au quotient du groupe cartographique (resp. du groupe cartographique orienté, dans le cas orienté) par les relations supplémentaires

$$\rho_s^p = \rho_f^q = 1.$$

Le cas où ce groupe est fini est le cas "pythagoricien" des cartes régulières sphériques, le cas où il est infini donne les pavages réguliers du plan euclidien ou du plan hyperbolique[4]. Le lien de la théorie combinatoire avec la théorie "conforme" des pavages réguliers du plan hyperbolique était pressenti, avant qu'apparaisse celui des cartes finies avec les revêtements finis de la droite projective. Une fois ce lien compris, il devient évident qu'il doit s'étendre également aux cartes infinies (régulières ou non) : *toute carte finie ou non, se réalise canoniquement sur une surface conforme* (compacte si et seulement si la carte est finie), *en tant que revêtement ramifié de la droite projective complexe, ramifié seulement en les points 0, 1,* ∞. La seule difficulté ici était de mettre au point le dictionnaire entre cartes topologiques et ensembles à opérateurs, qui posait quelques problèmes conceptuels dans le cas infini, à commencer par la notion même de "carte topologique". Il apparaît nécessaire notamment, tant par raison de cohérence interne du dictionnaire, que pour ne pas laisser échapper certains cas intéressants de cartes infinies, de ne pas exclure des sommets et des faces d'ordre infini. Ce travail de fondements a été fait également par J. Malgoire et C. Voisin, sur la lancée de leur premier travail sur les cartes finies, et leur théorie fournit en effet tout ce qu'on était en droit d'attendre (et même plus...).

C'est en 1977 et 1978, parallèlement à deux cours de C4 sur la géométrie du cube et sur celle de l'icosaèdre, que j'ai commencé à m'intéresser aux polyèdres réguliers, qui m'apparaissent alors comme des "réalisations géométriques" particulièrement concrètes de cartes combinatoires, les sommets, arêtes et faces étant réalisés respectivement comme des points, des droites et des plans dans un espace affine tridimensionnel convenable, avec respect des relations d'incidence. Cette notion de réalisation géométrique d'une carte combinatoire garde un sens sur un corps de base, et même sur un anneau de base arbitraire. Elle garde également un sens pour les polyèdres réguliers de dimension quelconque, en remplaçant le

[4]Dans ces énoncés, il y a lieu de ne pas exclure le cas où p, q peuvent prendre la valeur $+\infty$, qu'on rencontre notamment de façon très naturelle comme pavages associés à certains polyèdres réguliers infinis, cf. plus bas.

groupe cartographique $\underline{C}_2$ par une variante n-dimensionnelle $\underline{C}_n$ convenable. Le cas $n = 1$, i.e. la théorie des polygones réguliers en caractéristique quelconque, fait l'objet d'un cours de DEA en 1977/78, et fait apparaître déjà quelques phénomènes nouveaux, comme aussi l'utilité de travailler non pas dans un espace ambiant affine (ici le plan affine), mais dans un espace *projectif*. Ceci est dû notamment au fait que dans certaines caractéristiques (et notamment en caractéristique 2) le centre d'un polyèdre régulier est rejeté à l'infini. D'autre part, le contexte projectif, contrairement au contexte affine, permet de développer avec aisance un formalisme de dualité pour les polyèdres réguliers, correspondant au formalisme de dualité des cartes combinatoires ou topologiques (où le rôle des sommets et des faces, dans le cas $n = 2$ disons, se trouve interchangé). Il se trouve que pour tout polyèdre régulier projectif, on peut définir un hyperplan canonique associé, qui joue le rôle d'un hyperplan à l'infini canonique, et permet de considérer le polyèdre donné comme un polyèdre régulier affine.

L'extension de la théorie des polyèdres réguliers (et plus généralement, de toutes sortes de configurations géométrico-combinatoires, y compris les systèmes de racines…) du corps de base **R** ou **C** vers un anneau de base général, me semble d'une portée comparable, dans cette partie de la géométrie, à l'extension analogue qui a eu lieu depuis le début du siècle en géométrie algébrique, ou depuis une vingtaine d'années en topologie[5], avec l'introduction du langage des schémas et celui des topos. Ma réflexion sporadique sur cette question, pendant quelques années, s'est bornée à dégager quelques principes de base simples, en attachant d'abord mon attention au cas des polyèdres réguliers épinglés, ce qui réduit à un minimum le bagage conceptuel nécessaire, et élimine pratiquement les questions de rationalité tant soit peu délicates. Pour un tel polyèdre, on trouve une base (ou repère) canonique de l'espace affine ou projectif ambiant, de telle façon que les opérations du groupe cartographique $\underline{C}_n$, engendré par les réflexions fondamentales σ_i $(0 \leq i \leq n)$, s'y écrivent par des formules universelles, en termes de n paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, qui géométriquement s'interprètent comme les doubles des cosinus des "angles fondamentaux" du polyèdre. Le polyèdre se reconstitue 'a partir de cette

[5]En écrivant cela, je suis conscient que rares sont les topologues, encore aujourd'hui, qui se rendent compte de cet élargissement conceptuel et technique de la topologie, et des ressources qu'elle offre.

action, et du drapeau affine ou projectif associé à la base choisie, en transformant ce drapeau par tous les éléments du groupe engendré par les réflexions fondamentales. Ainsi le n-polyèdre épinglé "universel" est-il défini canoniquement sur l'anneau de polynômes à n indéterminées

$$\mathbf{Z}[\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_n],$$

ses spécialisations sur des corps de base arbitraires k (via des valeurs $\alpha_i \in k$ données aux indéterminées $\underline{\alpha}_i$) donnant des polyèdres réguliers correspondant à des types combinatoires divers. Dans ce jeu, il n'est pas question de se borner à des polyèdres réguliers finis, ni même à des polyèdres réguliers dont les facettes soient d'ordre fini, i.e. pour lesquels les param'etres α_i soient des racines d'équations "semicyclotomiques" convenables, exprimant que les "angles fondamentaux" (dans le cas où le corps de base est $\mathbf{R}$) sont commensurables à 2π. Déjà quand $n = 1$, le polygone régulier peut-être le plus intéressant de tous (moralement celui du polygone régulier à un seul côté !) est celui qui correspond à $\alpha = 2$, donnant lieu à une conique circonscrite parabolique, i.e. tangente à la droite à l'infini. Le cas fini est celui où le groupe engendré par les réflexions fondamentales, qui est aussi le groupe des automorphismes du polyèdre régulier envisagé, est fini. Dans le cas du corps de base $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$, ce qui revient au même), et pour $n = 2$, les cas finis sont bien connus depuis l'antiquité – ce qui n'exclut pas que le point de vue schématique y fasse apparaître des charmes nouveaux ; on peut dire cependant qu'en spécialisant l'icosaèdre (par exemple) sur des corps de base finis de caractéristique arbitraire, c'est toujours un icosaèdre, avec sa combinatoire propre et le même groupe d'automorphismes simple d'ordre 60 qu'on obtient. La même remarque s'applique aux polyèdres réguliers finis de dimension supérieure, étudiés de façon systématique dans deux beaux livres de Coxeter. La situation est toute autre si on part d'un polyèdre régulier *infini*, sur un corps tel que $\mathbf{Q}$ disons, et qu'on le "spécialise" sur le corps premier $\mathbf{F}_p$ (opération bien définie pour tout p sauf un nombre fini de nombres premiers). Il est clair que tout polyèdre régulier sur un corps fini est fini – *on trouve donc une infinité de polyèdres réguliers finis pour p variable, dont le type combinatoire*, ou ce qui revient au même, le groupe des automorphismes, *varie de façon "arithmétique"* avec p. Cette situation est particulièrement intrigante dans le cas où $n = 2$, où on dispose de la relation explicitée au paragraphe précédent entre 2-cartes combinatoires, et courbes algébriques définies sur des corps de nombres. Dans ce cas, un polyèdre régulier infini défini sur un corps infini quelconque (et de ce fait sur une sous-**Z**-algèbre à deux générateurs de celui-ci) donne donc naissance à une infinité de courbes algébriques définies sur des corps de nombres, qui sont des revêtements galoisiens ramifiés seulement en 0, 1, ∞ de la droite projective standard. Le cas optimum est bien sûr celui o‘u on part du 2-polyèdre régulier universel, ou plutôt de celui qui s'en déduit par passage au corps des fractions $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ de son anneau de base. Ceci soulève une foule de questions nouvelles, aussi bien des vagues que des précises, dont je n'ai eu le loisir encore d'examiner de plus près aucune – je ne citerai que celle-ci : quelles sont exactement les 2-cartes régulières finies, ou ce qui revient au même, les groupes quotients finis du groupe 2-cartographique qui proviennent de 2-polyèdres réguliers sur des corps finis[6] ? Les obtiendrait-on toutes, et si oui : comment ?

Ces réflexions font apparaître en pleine lumière ce fait, qui pour moi était entièrement inattendu, que la théorie des polyèdres réguliers finis, déjà dans le cas de la dimension $n = 2$, est infiniment plus riche, et notamment donne infiniment plus de formes combinatoires différentes, dans le cas où on admet des corps de base de caractéristique non nulle, que dans le cas considéré jusqu'à présent où les corps de base étaient restreints à **R**, ou à la rigueur **C** (dans le cas de ce que Coxeter appelle des "polyèdres réguliers complexes", et que je préfère appeler "pseudo-polyèdres réguliers définis sur **C**")[7]. De plus, il semble que cet élargissement du point de vue doive aussi jeter un jour nouveau sur les cas déjà connus. Ainsi, examinant l'un après l'autre les polyèdres pythagoriciens, j'ai vu se répéter à chaque fois un même petit miracle, que j'ai appelé le *paradigme combinatoire* du polyèdre envisagé. Vaguement parlant, il peut se décrire en disant que lorsqu'on regarde la

[6]Ce sont les mêmes d'ailleurs que ceux provenant de polyèdres réguliers sur des corps quelconques, ou algébriquement clos, comme on voit par des arguments de spécialisation standard.

[7]Les pseudo-polyèdres épinglés se décrivent de la même façon que les polyèdres épinglés, avec cette seule différence que les réflexions fondamentales σ_i $(0 \leq i \leq n)$ sont remplacées ici par des *pseudo-réflexions* (que Coxeter suppose de plus d'ordre fini, comme il se borne aux structures combinatoires finies). Cela conduit simplement à introduire pour chacun des σ_i un invariant numérique supplémentaire β_i, de sorte que le n-pseudo-polyèdre universel peut se définir encore sur un anneau de polynômes à coefficients entiers, en les $n+(n+1)$ variables $\underline{\alpha}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ et $\underline{\beta}_j$ $(1 \leq j \leq n)$

spécialisation du polyèdre dans la caractéristique, ou l'une des caractéristiques, la (ou les) plus singulière(s) (ce sont les caractéristiques 2 et 5 pour l'icosaèdre, la caractéristique 2 pour l'octaèdre), on lit, sur le polyèdre régulier géométrique sur le corps fini concerné ($\mathbf{F}_2$ et $\mathbf{F}_5$ pour l'icosaèdre, $\mathbf{F}_2$ pour l'octaèdre) une description particulièrement élégante (et inattendue) de la combinatoire du polyèdre. Il m'a semblé même entrevoir là un principe d'une grande généralité, que j'ai cru retrouver notamment dans une réflexion ultérieure sur la combinatoire du système des 27 droites d'une surface cubique, et ses relations avec le système de racines E_7. Qu'un tel principe existe bel et bien et qu'on réussisse même à le dégager de son manteau de brumes, ou qu'il recule au fur et à mesure où on le poursuit et qu'il finisse par s'évanouir comme une Fata Morgana, j'y trouve pour ma part une force de motivation, une fascination peu communes, comme celle du rêve peut-être. Nul doute que de suivre un tel appel de l'informulé, de l'informe qui cherche forme, d'un entrevu élusif qui semble prendre plaisir à la fois à se dérober et à se manifester – ne peut que mener loin, alors que nul ne pourrait prédire, où...

Pourtant, pris par d'autres intérêts et tâches, je n'ai pas jusqu'à présent suivi cet appel, ni rencontré personne d'autre qui ait voulu l'entendre, et encore moins le suivre. Mis à part quelques digressions vers d'autres types de structures géométrico-combinatoires, mon travail ici encore s'est borné à un premier travail de dégrossissage et d'intendance, sur lequel il est inutile de m'étendre plus ici ([5]). Le seul point qui peut-être mérite encore mention, est l'existence et l'unicité de l'hyperquadrique circonscrite à un n-polyèdre régulier donné, dont l'équation peut s'expliciter par des formules simples en termes des paramètres fondamentaux α_i[8]. Le cas qui m'intéresse le plus est celui où $n = 2$, et le temps me semble mûr pour réécrire une version nouvelle, en style moderne, du classique livre de Klein sur l'icosaèdre et les autres polyèdres pythagoriciens. Écrire un tel exposé sur les 2-polyèdres réguliers serait une magnifique occasion pour un jeune chercheur de se familiariser aussi bien avec la géométrie des polyèdres et leurs liens avec les géométries sphérique, euclidienne, hyperbolique, et avec les courbes algébriques,

[8]Un résultat analogue vaut pour les pseudo-polyèdres. Il semblerait que les "caractéristiques exceptionnelles" dont il a été question plus haut, pour les spécialisations d'un polyèdre donné, sont celles pour lesquelles l'hyperquadrique circonscrite est, soit dégénérée, soit tangente à l'hyperplan à l'infini.

qu'avec le langage et les techniques de base de la géométrie algébrique moderne. S'en trouvera-t-il un un jour pour saisir cette occasion ?

5. Haro sur la topologie dite "générale", et réflexions heuristiques vers une topologie dite "modérée"

Je voudrais maintenant dire quelques mots sur certaines réflexions qui m'ont fait comprendre le besoin de fondements nouveaux pour la topologie "géométrique", dans une direction toute différente de la notion de topos, et indépendante même des besoins de la géométrie algébrique dite "abstraite" (sur des corps et anneaux de base généraux). Le problème de départ, qui a commencé à m'intriguer il doit y avoir une quinzaine d'années déjà, était celui de définir une théorie de "dévissage" des structures stratifiées, pour les reconstituer, par un procédé canonique, à partir de "pièces de construction" canoniquement déduites de la structure donnée. Probablement l'exemple principal qui m'avait alors amené à cette question était celui de la stratification canonique d'une variété algébrique singulière (ou d'un espace analytique complexe ou réel singulier) par la suite décroissante de ses "lieux singuliers" successifs. Mais je devais sans doute pressentir déjà l'ubiquité des structures stratifiées dans pratiquement tous les domaines de la géométrie (que d'autres sûrement ont vu clairement bien avant moi). Depuis, j'ai vu apparaître de telles structures, notamment, dans toute situation de "modules" pour des objets géométriques susceptibles non seulement de variation continue, mais en même temps de phénomènes de "dégénérescence" (ou de "spécialisation") – les strates correspondant alors aux divers "niveaux de singularité" (ou aux types combinatoires associés) pour les objets considérés. Les multiplicités modulaires compactifiées $\widehat{M}_{g,\nu}$ de Mumford-Deligne pour les courbes algébriques stables de type (g,ν) en fournissent un exemple typique et particulièrement inspirant, qui a joué un rôle de motivation important dans la reprise de ma réflexion sur les structures stratifiées, de décembre 1981 à janvier 1982. La géométrie bidimensionnelle fournit de nombreux autres exemples de telles structures stratifiées modulaires, qui toutes d'ailleurs (sauf expédients de rigidification), apparaissent comme des "multiplicités" plutôt que comme des espaces ou variétés au sens ordinaire (les points de ces multiplicités pouvant avoir des groupes d'automorphismes non triviaux).

Parmi les objets de géométrie bidimensionnelle donnant lieu à de telles structures modulaires stratifiées de dimension arbitraire, voire de dimension infinie, je citerai les polygones (euclidiens, ou sphériques, ou hyperboliques), les systèmes de droites dans un plan (projectif disons), les systèmes de "pseudodroites" dans un plan projectif topologique, ou les courbes immergées à croisements normaux plus générales, dans une surface (compacte disons) donnée.

L'exemple non trivial le plus simple d'une structure stratifiée s'obtient en considérant une paire (X, Y) d'un espace X et d'un sous-espace fermé Y, en faisant une hypothèse d'équisingularité convenable de X le long de Y, et en supposant de plus (pour fixer les idées) que les deux strates Y et $X \backslash Y$ sont des *variétés* topologiques. L'idée naïve, dans une telle situation, est de prendre "le" voisinage tubulaire T de Y dans X, dont le bord ∂T devrait être une variété lisse également, fibrée à fibres lisses et compactes sur Y, T lui-même s'identifiant au fibré en cônes sur ∂T associé au fibré précédent. Posant

$$U = X \backslash \mathrm{Int}(T),$$

on trouve une variété à bord dont le bord est canoniquement isomorphe à celui de T. Ceci dit, les "pièces de construction" prévues sont la variété à bord U (compacte si X était compact, et qui remplace en la précisant la strate "ouverte" $X \backslash Y$) et la variété (sans bord) Y, avec comme structure supplémentaire les reliant l'application dite de "recollement"

$$f : \partial U \longrightarrow Y$$

qui est une fibration propre et lisse. La situation de départ (X, Y) se reconstitue à partir de $(U, Y, f : \partial U \longrightarrow Y)$ par la formule

$$X \cong U \amalg_{\partial U} Y$$

(somme amalgamée sous ∂U, s'envoyant dans U et Y via l'inclusion resp. l'application de recollement).

Cette vision naïve se heurte immédiatement à des difficultés diverses. La première est la nature un peu vague de la notion même de voisinage tubulaire, qui ne prend un sens tant soit peu précis qu'en présence de structures plus rigides que la seule structure topologique, telles la structure "linéaire par morceaux", ou riemanienne (plus généralement, d'espace avec fonction distance) ; l'ennui ici est que dans aucun des exemples auxquels on pense spontanément, on ne dispose naturellement d'une structure de ce type —- tout au mieux d'une classe d'équivalence de telles structures, permettant de rigidifier un tantinet la situation. Si par ailleurs on admet qu'on a pu trouver un expédient pour trouver un voisinage tubulaire ayant les propriétés voulues, qui de plus soit unique modulo un automorphisme (topologique, disons) de la situation, automorphisme qui de plus respecte la structure fibrée fournie par la fonction de recollement, il reste la difficulté de la non-canonicité des choix faits, l'automorphisme en question n'étant visiblement pas unique, quoi qu'on fasse pour le "normaliser". L'idée ici, pour rendre canonique ce qui ne l'est pas, est de travailler systématiquement dans des *"catégories isotopiques"* associées aux catégories de nature topologique s'introduisant dans ces questions (telle la catégorie des paires admissibles (X,Y) et des homéomorphismes de telles paires, etc.), en gardant les mêmes objets, mais en prenant comme "morphismes" les classes d'isotopie (dans un sens dicté sans ambiguïté par le contexte) d'isomorphismes (voire même, de morphismes plus généraux que des isomorphismes). Cette idée, qui est reprise avec succès dans la thèse de Yves Ladegaillerie notamment (cf. début du par. 3), m'a servi de façon systématique dans toutes mes réflexions ultérieures de topologie combinatoire, quand il s'est agi de formuler avec précision des théorèmes de traduction de situations topologiques, en termes de situations combinatoires. Dans la situation actuelle, mon espoir était d'arriver à formuler (et à prouver !) un théorème d'équivalence entre deux catégories isotopiques convenables, l'une étant la catégorie des "paires admissibles" (X,Y), l'autre celle des "triples admissibles" (U,Y,f) où Y est une variété, U une variété à bord, et $f : \partial U \longrightarrow Y$ une fibration propre et lisse. De plus, bien sûr, j'espérais qu'un tel énoncé, modulo un travail de nature essentiellement algébrique, s'étendrait de lui-même en un énoncé plus sophistiqué, s'appliquant aux structures stratifiées générales.

Très vite, il apparaissait qu'il ne pouvait être question d'obtenir un énoncé aussi ambitieux dans le contexte des espaces topologiques, à cause des sempiternels phénomènes de "sauvagerie". Déjà quand X lui-même est une variété et Y réduit à un point, on se bute à la difficulté que le cône sur un espace compact Z peut être une variété en son sommet, sans que Z soit homéomorphe à une sphère, ni même soit une variété. Il était clair également que les contextes de structures plus rigides qui existaient à l'époque, tel le contexte "linéaire par morceaux", étaient également inadéquats – une des raisons rédhibitoires communes étant qu'ils ne permettaient pas, pour une paire (U, S) d'un "espace" U et d'un sous-espace fermé S, et une application de recollement $f : S \longrightarrow T$, de construire la somme amalgamée correspondante. C'est quelques années plus tard que j'étais informé de la théorie de Hironaka des ensembles qu'il appelle, je crois, "semi-analytiques" (réels), qui satisfont à certaines des conditions de stabilité essentielles (sans doute même à toutes) nécessaires au développement d'un contexte utilisable de "topologie modérée". Du coup cela relance une réflexion sur les fondements d'une telle topologie, dont le besoin m'apparaît de plus en plus clairement.

Avec un recul d'une dizaine d'années, je dirais aujourd'hui, à ce sujet, que la *"topologie générale" a été développée* (dans les années trente et quarante) *par des analystes et pour les besoins de l'analyse*, non pour les besoins de la topologie proprement dite, c'est-à-dire l'étude des *propriétés topologiques de formes géométriques* diverses. Ce caractère inadéquat des fondements de la topologie se manifeste dès les débuts, par des "faux problèmes" (au point de vue au moins de l'intuition topologique des formes) comme celle de "l'invariance du domaine", alors même que la solution de ce dernier par Brouwer l'amène à introduire des idées géométriques nouvelles importantes. Aujourd'hui encore, comme aux temps héroïques où on voyait pour la première fois et avec inquiétude des courbes remplir allègrement des carrés et des cubes, quand on se propose de faire de la géométrie topologique dans le contexte technique des espaces topologiques, on se heurte à chaque pas à des difficultés parasites tenant aux phénomènes sauvages. Ainsi, en dehors de cas de (très) basse dimension, il ne peut guère être possible, pour un espace donné X (une variété compacte disons), d'étudier le type d'homotopie (disons) du groupe des automorphismes de X, ou de l'espace des plongements, ou immersions etc. de X dans quelque autre espace Y – alors qu'on sent que ces invariants devraient faire partie de l'arsenal des invariants essentiels associés à X, ou au couple (X, Y), etc., au même titre que l'espace fonctionnel $\mathrm{Hom}(X, Y)$ familier en topologie homotopique. Les topologues éludent la difficulté, sans l'affronter, en se rabattant sur des contextes voisins du contexte topologique et moins marqués de sauvagerie que lui, comme les variétés différentiables, les espaces PL (linéaires par morceaux), etc., dont visiblement aucun n'est "bon", i.e. n'est stable par les opérations topologiques les plus évidentes, telles les opérations de contraction-recollement (sans même passer à des opérations du type $X \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ qui font quitter le paradis des "espaces" de dimension finie). C'est là une façon de tourner autour du pot ! Cette situation, comme tant de fois déjà dans l'histoire de notre science, met simplement en évidence cette inertie quasi-insurmontable de l'esprit, alourdi par des conditionnements d'un poids considérable, pour porter un regard sur une question de fondements, donc sur le contexte même dans lequel on vit, respire, travaille – plutôt que de l'accepter comme un donné immuable. C'est à cause de cette inertie sûrement qu'il a fallu des millénaires pour qu'une idée ou une réalité aussi enfantine que le zéro, un groupe, ou une forme topologique, trouve droit de cité en mathématiques. C'est par elle aussi, sûrement, que le carcan de la topologie générale continue à être traîné patiemment par des générations de topologues, la "sauvagerie" étant portée comme une fatalité inéluctable qui serait enracinée dans la nature même des choses.

Mon approche vers des fondements possibles d'une topologie modérée a été une approche axiomatique. Plutôt que de déclarer (chose qui serait parfaitement raisonnable certes) que les "espaces modérés" cherchés ne sont autres (disons) que les espaces semianalytiques de Hironaka, et de développer dès lors dans ce contexte l'arsenal des constructions et notions familières en topologie, plus celles certes qui jusqu'à présent n'avaient pu être développées et pour cause, j'ai préféré m'attacher à dégager ce qui, parmi les propriétés géométriques de la notion d'ensemble semianalytique dans un espace $\mathbf{R}^n$, permet d'utiliser ceux-ci comme "modèles" locaux d'une notion *"d'espace modéré"* (en l'occurrence, semianalytique), et ce qui (on l'espère !) rend cette notion d'espace modéré suffisamment souple pour pouvoir bel et bien servir de notion de base pour *une* "topologie modérée" propre à exprimer avec aisance l'intuition topologique des formes. Ainsi, une fois le travail de fondements qui s'impose accompli, il apparaîtra non *une* "théorie modérée", mais une vaste infinité, allant de la plus stricte de toutes, celle des "espaces $\overline{\mathbf{Q}}_r$-algébriques par morceaux" (où $\overline{\mathbf{Q}}_r = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$), vers celle qui (à tort ou à raison) m'apparaît comme probablement la plus vaste, savoir celle des "espaces analytiques réels par morceaux" (ou semianalytiques dans la terminologie de Hironaka). Parmi les théorèmes de fondements envisagés dans mon programme, il y a un *théorème de comparaison* qui, vaguement parlant, dira qu'on *trouvera essentiellement les mêmes catégories isotopiques* (ou même ∞-isotopiques), quelle que soit la théorie modérée avec laquelle on travaille ([6]). De façon plus précise, il s'agit de mettre le doigt sur un système d'axiomes suffisamment riche, pour impliquer (entre bien autres choses !) que si on a deux théories modérées T , T' avec T plus fine que T' (dans un sens évident), et si X, Y sont deux espaces T'-modérés, qui définissent aussi des espaces T-modérés correspondants, l'application canonique

$$\underline{\mathrm{Isom}}_T(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_{T'}(X,Y)$$

induit une bijection sur l'ensemble des composantes connexes (ce qui impliquera que la catégorie isotopique des T-espaces est équivalente à celle des T'-espaces), et même, est une équivalence d'homotopie (ce qui signifie qu'on a même une équivalence pour les catégories "∞-isotopiques", plus fines que les catégories isotopiques où on ne retient que le π_0 des espaces d'isomorphismes). Ici les Isom peuvent être définis de façon évidente comme ensembles semisimpliciaux par exemple, pour pouvoir donner un sens précis à l'énoncé précédent. Des énoncés analogues devraient être vrais, en remplaçant les "espaces" Isom par d'autres espaces d'applications, soumises à des conditions géométriques standard, comme celle d'être des plongements, des immersions, lisses, étales, des fibrations etc. Également, on s'attend à avoir des énoncés analogues, où X, Y sont remplacés par des systèmes d'espaces modérés, tels ceux qui interviennent dans une théorie de dévissage des structures stratifiées – de telle sorte que dans un sens technique précis, cette théorie de dévissage sera, elle aussi, essentiellement indépendante de la théorie modérée choisie pour l'exprimer.

Le premier test décisif pour un bon système d'axiomes sur une notion de "partie modérée de $\mathbf{R}^n$" me semble la possibilité de prouver de tels théorèmes de comparaison. Je me suis contenté jusqu'à présent de dégager un système d'axiomes plausible provisoire, sans avoir aucune assurance qu'il ne faudra y rajouter d'autres axiomes, que seul un "travail sur pièces" sans doute permettra de faire apparaître. Le plus fort des axiomes que j'ai introduits, et celui sans doute dont la vérification dans les cas d'espèce est (ou sera) la plus délicate, est un *axiome de triangulabilité* (modérée, il va sans dire) d'une partie modérée de $\mathbf{R}^n$. Je ne me suis pas essayé à prouver en termes de ces seuls axiomes le théorème de comparaison, j'ai eu l'impression néanmoins (à tort ou à raison encore !) que cette démonstration, qu'elle nécessite ou non l'introduction de quelque axiome supplémentaire, ne présentera pas de grosse difficulté technique. Il est bien possible que les difficultés au niveau technique, pour le développement de fondements satisfaisants de la topologie modérée, y inclus une théorie de dévissage des structures modérées stratifiées, soient déjà pour l'essentiel concentrées dans les axiomes, et par suite essentiellement surmontées dès à présent par des théorèmes de triangulabilité à la Lojasiewicz et Hironaka. Ce qui fait défaut, encore une fois, n'est nullement la virtuosité technique des mathématiciens, parfois impressionnante, mais l'audace (ou simplement l'innocence…) pour s'affranchir d'un contexte familier accepté par un consensus sans failles…

Les avantages d'une approche axiomatique vers des fondements de la topologie modérée me semblent assez évidents. Ainsi, pour considérer une variété algébrique complexe, ou l'ensemble des points réels d'une variété algébrique définie sur $\mathbf{R}$, comme un espace modéré, il semble préférable de travailler dans la théorie "$\mathbf{R}$-algébrique par morceaux", voire même la théorie $\overline{\mathbf{Q}}_r$-algébrique par morceaux (où $\overline{\mathbf{Q}}_r = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$) quand il s'agit de variétés définies sur des corps de nombres, etc. L'introduction d'un sous corps $K \subset \mathbf{R}$ associé à la théorie T (formé des points de R qui sont *T-modérés*, i.e. tels que l'ensemble uniponctuel correspondant le soit) permet d'introduire pour tout point x d'un espace modéré X un corps résiduel $k(x)$, qui est une sous-extension de $\mathbf{R}/K$ algébriquement fermée dans $\mathbf{R}$, et de degré de transcendance fini sur K (majoré par la dimension topologique de X). Quand le degré de transcendance de $\mathbf{R}$ sur K est infini, on trouve une notion de degré de transcendance (ou "dimension") d'un point d'un espace modéré, voisin de la notion familière en géométrie algébrique. De telles notions sont absentes dans la topologie modérée "semianalytique", qui par contre apparaît comme le contexte topologique tout indiqué pour inclure les espaces analytiques réels et complexes.

Parmi les premiers théorèmes auxquels on s'attend dans une topologie modérée comme je l'entrevois, mis à part les théorèmes de comparaison, sont les énoncés qui établissent, dans un sens convenable, l'existence et l'unicité "du" voisinage tubulaire d'un sous-espace modéré fermé dans un espace modéré (compact pour simplifier), les façons concrètes de l'obtenir (par exemple à partir de toute application modérée $X \longrightarrow \mathbf{R}^+$ admettant Y comme ensemble de ses zéros), la description de son "bord" (alors qu'en général ce n'est nullement une variété à bord !) ∂T, qui admet dans T un voisinage isomorphe au produit de T par un segment, etc. Moyennant des hypothèses d'equisingularité convenables, on s'attend à ce que T soit muni, de façon essentiellement unique, d'une structure de fibré localement trivial sur Y, admettant ∂T comme sous-fibré. C'est là un des points les moins clairs dans l'intuition provisoire que j'ai de la situation, alors que la classe d'homotopie de l'application structurale prévue $T \longrightarrow Y$ a un sens évident, indépendamment de toute hypothèse d'équisingularité, comme inverse homotopique de l'application d'inclusion $Y \longrightarrow T$, qui doit être un homotopisme. Une façon d'obtenir a posteriori une telle structure serait via l'hypothétique équivalence de catégories isotopiques envisagée au début, en tenant compte du fait que le foncteur $(U, Y, f) \mapsto (X, Y)$ est défini de façon évidente, indépendamment de toute théorie de voisinages tubulaires.

On dira sans doute, non sans quelque raison, que tout cela n'est peut-être que rêves, qui s'évanouiront en fumée dès qu'on s'essayera à un travail circonstancié, voire même dès avant en face de certains faits connus ou bien évidents qui m'auraient échappé. Certes, seul un travail sur pièces permettra de décanter le juste du faux et de connaître la substance véritable. La seule chose dans tout cela qui ne fait pour moi l'objet d'aucun doute, c'est la nécessité d'un tel travail de fondements, en d'autres termes, la nature artificielle des fondements actuels de la topologie, et des difficultés que ceux-ci soulèvent à chaque pas. Il est bien possible par contre que la formulation que je donne à une théorie de dévissage des structures stratifiées, comme un théorème d'équivalence de catégories isotopiques (voire même ∞-isotopiques) convenables, soit trop optimiste. Je devrais ajouter pourtant que je n'ai guère de doutes non plus que la théorie de ces dévissages que j'ai développée il y a deux ans, alors qu'elle reste partiellement heuristique, exprime bel et bien une réalité tout ce qu'il y a de palpable. Dans une partie de mon travail, faute de pouvoir disposer d'un contexte "modéré" tout fait, et pour avoir néanmoins des énoncés précis et démontrables, j'ai été amené à postuler sur la structure stratifiée de départ des structures supplémentaires tout ce qu'il y a de plausibles, dans la nature de la donnée de rétractions locales notamment, qui d'es lors permettent bel et bien la construction d'un système canonique d'espaces, paramétré par l'ensemble ordonné des "drapeaux" Drap(I) de l'ensemble ordonné I indexant les strates, ces espaces jouant le rôle des espaces (U, Y) de tantôt, reliés entre eux par des applications de plongements et de fibrations propres, qui permettent de reconstituer de façon tout aussi canonique la structure stratifiée de départ, y compris ces "structures supplémentaires" ([7]). Le seul ennui, c'est que ces dernières semblent un élément de structure superfétatoire, qui n'est nullement une donnée dans les situations géométriques courantes, par exemple pour l'espace modulaire compact $\widehat{M}_{g,\nu}$ avec sa "stratification à l'infini" canonique, donnée par le diviseur à croisements normaux de Mumford-Deligne. Une autre difficulté, moins sérieuse sans doute, c'est que le soi-disant "espace" modulaire est en fait une *multiplicité* – techniquement, cela s'exprime surtout par la nécessité de remplacer l'ensemble d'indices I pour les strates par une *catégorie* (essentiellement finie) d'indices, en l'occurrence celle des "graphes MD", qui "paramètrent" les "structures combinatoires" possibles d'une courbe stable de type (g, ν). Ceci dit, je puis affirmer que la théorie de dévissage générale, spécialement développée sous la pression du besoin de *cette* cause, s'est révélée en effet un guide précieux, conduisant à une compréhension progressive, d'une cohérence sans failles, de certains aspects essentiels de la tour de Teichmüller (c'est à dire, essentiellement de la "structure à l'infini" des groupes de Teichmüller ordinaires). C'est cette approche qui m'a conduit finalement, dans les mois suivants, vers le principe d'une construction purement combinatoire de la tour des groupoïdes de Teichmüller, dans l'esprit esquissé plus haut (cf. par. 2).

Un autre test de cohérence satisfaisant provient du point de vue "topossique". En effet, mon intérêt pour les multiplicités modulaires provenant avant tout de leur sens algébrico-géométrique et arithmétique, c'est aux multiplicités modulaires *algébriques*, sur le corps de base absolu $\mathbf{Q}$, que je me suis intéressé prioritairement, et à un "dévissage" à l'infini de leurs groupes fondamentaux géométriques (i.e. des groupes de Teichmüller *profinis*) qui soit compatible avec les opérations naturelles de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Cela semblait exclure d'emblée la possibilité de me référer à une hypothétique théorie de dévissage de structures stratifiées dans un contexte de "topologie modérée" (ou même de topologie ordinaire, cahin-caha), si ce n'est comme fil conducteur entièrement heuristique. Dès lors se posait la question de traduire, dans le contexte des topos (en l'occurrence les topos étales) intervenant dans la situation, la théorie de dévissage à laquelle j'étais parvenu dans un contexte tout différent – avec la tâche supplémentaire, par la suite, de dégager un théorème de comparaison général, sur le modèle des théorèmes bien connus, pour comparer les invariants obtenus (notamment les types d'homotopie de voisinages tubulaires divers) dans le cadre transcendant, et dans le cadre schématique. J'ai pu me convaincre qu'un tel formalisme de dévissage avait bel et bien un sens dans le contexte (dit "abstrait" !) des topos généraux, ou tout au moins des topos noethériens (comme ceux qui s'introduisent ici), via une notion convenable de *voisinage tubulaire canonique d'un sous-topos* dans un topos ambiant. Une fois cette notion acquise, avec certaines propriétés formelles simples, la description du "dévissage" d'un topos stratifié est considérablement plus simple même dans ce cadre, que dans le cadre topologique (modéré). Il est vrai que là aussi il y a un travail de fondements à faire, notamment pour la notion même de voisinage tubulaire d'un sous-topos – et il est étonnant d'ailleurs que ce travail (pour autant que je sache) n'ait toujours pas été fait, c'est-à-dire que personne (depuis plus de vingt ans qu'il existe un contexte de topologie étale) ne semble en avoir eu besoin ; un signe sûrement que la compréhension de la structure topologique des schémas n'a pas tellement progressé depuis le travail d'Artin-Mazur…

Une fois accompli le double travail de dégrossissage (plus ou moins heuristique) autour de la notion de dévissage d'un espace ou d'un topos stratifié, qui a été une étape cruciale dans ma compréhension des multiplicités modulaires, il est d'ailleurs apparu que pour les besoins de ces dernières, on peut sans doute court-circuiter au moins une bonne partie de cette théorie par des arguments géométriques directs. Il n'en reste pas moins que pour moi, le formalisme de dévissage auquel je suis parvenu a fait ses preuves d'utilité et de cohérence, indépendamment de toute question sur les fondements les plus adéquats qui permettent de lui donner tout son sens.

6. "Théories différentielles" (à la Nash) et "théories modérées"

Un des théorèmes de fondements de topologie (modérée) les plus intéressants qu'il faudrait développer, serait un théorème de "dévissage" (encore !) d'une application modérée propre d'espaces modérés,

$$f : X \longrightarrow Y,$$

via une filtration décroissante de Y par des sous-espaces modérés fermés Y^i, tels que au-dessus des "strates ouvertes" Y^i/Y^{i-1} de cette filtration, f induise une fibration localement triviale (du point de vue modéré, il va sans dire). Un tel énoncé devrait encore se généraliser et se préciser de diverses façons, notamment en demandant l'existence d'un dévissage analogue *simultané*, pour X et une famille finie donnée de sous-espaces (modérés) fermés de X. Également la notion même de fibration localement triviale au sens modéré peut se renforcer considérablement, en tenant compte du fait que les strates ouvertes U_i sont *mieux* que des espaces à structure modérée purement locale, du fait qu'elles sont obtenues comme différence de deux espaces modérés, compacts si Y était compact. Entre la notion d'espace modéré compact (qui se réalise comme un des "modèles" de départ dans un $\mathbf{R}^n$) et celle d'espace "localement modéré" (localement compact) qui s'en déduit de façon assez évidente, il y a une notion un peu plus délicate d'*espace "globalement modéré"* X, obtenu comme différence $\hat{X}\backslash Y$ de deux espaces modérés compacts, étant entendu qu'on ne distingue pas entre l'espace défini par une paire $(\hat{X}, Y)$, et celui défini par une paire $(\hat{X}', Y')$ qui s'en déduit par une application modérée (nécessairement propre)

$$g : \hat{X}' \longrightarrow \hat{X}$$

induisant une bijection $g^{-1}(X) \xrightarrow{\sim} X$, en prenant $Y' = g^{-1}(Y)$. L'exemple naturel le plus intéressant peut-être est celui où on part d'un schéma séparé de type fini sur $\mathbf{C}$ ou sur $\mathbf{R}$, en prenant pour X l'ensemble de ses points complexes ou réels, qui hérite d'une structure modérée globale à l'aide des compactifications schématiques (qui existent d'après Nagata) du schéma de départ. Cette notion d'espace globalement modéré est associée à une notion d'*application globalement modérée*, qui permet à son tour de renforcer en conséquence la notion de fibration localement triviale, dans l'énoncé d'un théorème de dévissage pour une application $f : X \longrightarrow Y$ (pas nécessairement propre maintenant) dans le contexte des espaces globalement modérés.

J'ai été informé l'été dernier par Zoghman Mebkhout qu'un théorème de dévissage dans cet esprit avait été obtenu récemment dans le contexte des espaces analytiques réels et/ou complexes, avec des Y^i qui, cette fois, sont des sous-espaces analytiques de Y. Ce résultat rend plausible qu'on dispose dès à présent de moyens techniques suffisamment puissants pour démontrer également un théorème de dévissage dans le contexte modéré, plus général en apparence, mais probablement moins ardu.

C'est le contexte d'une topologie modérée également qui devrait permettre, il me semble, de formuler avec précision un principe général très sûr que j'utilise depuis longtemps dans un grand nombre de situations géométriques, que j'appelle le *"principe des choix anodins"* – aussi utile que vague d'apparence ! Il dit, lorsque pour les besoins d'une construction quelconque d'un objet géométrique en termes d'autres, on est amené à faire un certain nombre de choix arbitraires en cours de route, de façon donc que l'objet obtenu dépend en apparence de ces choix et est donc entâché d'un défaut de canonicité, que ce défaut est sérieux en effet (et pour être levé demande une analyse plus soigneuse de la situation, des notions utilisées, des données introduites etc.) chaque fois que l'un au moins de ces choix s'effectue dans un "espace" qui n'est pas "contractile" i.e. dont le π_0 *ou* un des invariants supérieurs π_i est non trivial ; que ce défaut est par contre apparent seulement, que la construction est "essentiellement canonique" et n'entraînera pas vraiment d'ennuis, chaque fois que les choix faits sont tous "anodins", i.e. s'effectuent dans des espaces *contractiles*. Quand on essaye dans les cas d'espèce de cerner de plus près ce principe, il semble qu'on tombe à chaque fois sur la notion de "catégories ∞-isotopiques" exprimant une situation donnée, plus fines que les catégories isotopiques (= 0-isotopiques) plus naïves, obtenues en ne retenant que les π_0 des espaces d'isomorphismes qui s'introduisent dans la situation, alors que le point de vue ∞-isotopique retient tout leur type d'homotopie. Par exemple, le point de vue isotopique naïf pour les surfaces compactes à bord orientées de type (g,ν) est "bon" (sans boomerang caché !) exactement dans les cas que j'appelle "anabéliens" (et que Thurston appelle "hyperboliques") i.e. distincts de (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0) – qui sont aussi les cas justement ou le groupe des automorphismes de la surface a une composante neutre *contractile*. Dans les autres cas, sauf le cas (0, 0) de la sphère sans trou, il suffit de travailler avec les catégories 1-isotopiques pour exprimer de façon satisfaisante par voie algébrique les faits géométrico-topologiques essentiels, vu que ladite composante connexe est alors un $K(\pi,1)$. Travailler dans une catégorie 1-isotopique revient d'ailleurs à travailler dans une bicatégorie, i.e. avec des $\mathrm{Hom}(X,Y)$ qui sont (non plus des ensembles discrets comme dans le point de vue 0-isotopique, mais) des groupoïdes (dont les π_0 ne sont autres que les Hom 0-isotopiques). C'est la description en termes purement algébriques de cette bicatégorie qui est faite dans la dernière partie de la thèse de Yves Ladegaillerie (cf. par. 3).

Si je me suis étendu ici plus longuement sur le thème des fondements de la topologie modérée, qui n'est nullement un de ceux auxquels je compte me consacrer prioritairement dans les années qui viennent, c'est sans doute justement que je sens qu'il y a là d'autant plus une cause qui a besoin d'être plaidée, ou plutôt : un travail d'une grande actualité qui a besoin de bras ! Comme naguère pour de nouveaux fondements de la géométrie algébrique, ce ne sont pas des plaidoyers qui surmontent l'inertie des habitudes acquises, mais un travail tenace, méticuleux, sans doute de longue haleine, et porteur au jour le jour de moissons éloquentes.

Je voudrais encore dire quelques mots sur une réflexion plus ancienne (fin des années 60 ?), très proche de celle dont il vient d'être question, inspirée par les idées de Nash, qui m'avaient beaucoup frappé. Au lieu ici de définir axiomatiquement une notion de "théorie modérée" via la donnée de "partie modérée de $\mathbf{R}^n$" satisfaisant à certaines conditions (de stabilité surtout), c'est à une axiomatisation de la notion de "variété lisse" et du formalisme différentiable sur de telles variétés que j'en avais, via la donnée, pour chaque entier naturel n, d'un sous-anneau A_n de l'anneau des germes de fonctions réelles à l'origine dans $\mathbf{R}^n$. Ce sont les fonctions qui seront admises pour exprimer les "changements de carte" pour la notion de A-variété correspondante, et il s'est agi de dégager tout d'abord un système d'axiomes sur le système $A=(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui assure à cette notion de variété une souplesse comparable à celle de variété C^∞, ou analytique réelle (ou de Nash). Suivant le type de constructions familières qu'on tient à pouvoir effectuer dans le contexte des A-variétés, le système d'axiomes pertinent est plus ou moins réduit, ou riche. Très peu suffit s'il s'agit seulement de développer le formalisme différentiel, avec la construction de fibrés de jets, les complexes de De Rham etc. Si on veut un énoncé du type "quasi-fini implique fini" (pour une application au voisinage d'un point), qui est apparu comme un énoncé-clef dans la théorie locale des espaces analytiques, il faut un axiome de stabilité de nature plus délicate, dans le "Vorbereitungssatz" de Weierstrass[9]. Dans d'autres questions, un axiome de stabilité par prolongement analytique (dans $\mathbf{C}^n$) apparaît nécessaire. L'axiome le plus draconien que j'ai été amené à introduire, lui aussi un axiome de stabilité, concerne l'intégration des systèmes de Pfaff, assurant que certains groupes de Lie, voire tous, sont des A-variétés. Dans tout ceci, *j'ai pris soin de ne pas supposer que les A_n soient des* $\mathbf{R}$*-algèbres*, donc une fonction constante sur une A-variété n'est "admissible" que si sa valeur appartient à un certain sous-corps K de $\mathbf{R}$ (c'est, si on veut, A_0). Ce sous-corps peut fort bien être $\mathbf{Q}$, ou sa fermeture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_r$ dans $\mathbf{R}$, ou toute autre sous-extension de $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$, de préférence même de degré de transcendance fini, ou du moins dénombrable, sur $\mathbf{Q}$. Cela permet par exemple, comme tantôt pour les espaces modérés, de faire correspondre à tout point x d'une variété (de type A) un corps résiduel $k(x)$, qui est une sous-extension de $\mathbf{R}/K$. Un fait qui me semble important ici, c'est que même sous sa forme la plus forte, le système d'axiomes n'implique *pas* qu'on doive avoir $K = \mathbf{R}$. Plus précisément, du fait que *tous* les axiomes sont des axiomes de stabilité, il résulte que pour un ensemble S donné de germes de fonctions analytiques réelles à l'origine (dans divers espaces $\mathbf{R}^n$), il existe une plus petite théorie A pour laquelle ces germes sont admissibles, et que celle-ci est "dénombrable" i.e. les A_n sont dénombrables, dès que S l'est. A fortiori, K est alors dénombrable, i.e. de degré de transcendance dénombrable sur $\mathbf{Q}$.

L'idée est ici d'introduire, par le biais de cette axiomatique, une notion de fonction (analytique réelle) *"élémentaire"*, ou plutôt, toute une hiérarchie de telles notions. Pour une fonction de 0 variables, i.e. une constante, cette notion donne celle de "constante élémentaire", incluant notamment (dans le cas de l'axiomatique la plus forte) des constantes telles que π, e et une multitude d'autres, en prenant des valeurs de fonctions admissibles (telles l'exponentielle, le logarithme etc.) pour des systèmes de valeurs "admissibles" de l'argument. On sent que la relation en-

[9]Il peut paraître plus simple de dire que les anneaux (locaux) A_n sont *henséliens*, ce qui est équivalent. Mais il n'est nullement clair a priori sous cette dernière forme que la condition en question est dans la nature d'une condition de stabilité, circonstance importante comme il apparaîtra dans les réflexions qui suivent.

tre le système $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et le corps de rationalité K correspondant doit être très étroite, du moins pour des A qui peuvent être engendrés par un "système de générateurs" S fini – mais il est 'a craindre que la moindre question intéressante qu'on pourrait se poser sur cette situation soit actuellement hors de portée ([1]).

Ces réflexions anciennes ont repris quelque actualité pour moi avec ma réflexion ultérieure sur les théories modérées. Il me semble en effet qu'il est possible d'associer de façon naturelle à une "théorie différentiable" A une théorie modérée T (ayant sans doute même corps de constantes), de telle façon que toute A-variété soit automatiquement munie d'une structure T -modérée, et inversement que pour tout espace T-modéré compact X, on puisse trouver une partie fermée modérée rare Y dans X, telle que $X \backslash Y$ provienne d'une A-variété, et que de plus cette structure de A-variété soit unique tout au moins dans le sens suivant : deux telles structures coïncident dans le complémentaire d'une partie modérée rare $Y' \supset Y$ de X. La théorie de dévissage des structures modérées stratifiées (dont il a été question au par. précédent), dans le cas des strates lisses, devrait d'ailleurs soulever des questions beaucoup plus précises encore de comparaison des structures modérées avec des structures de type différentiable (ou plutôt, $\mathbf{R}$-analytique). Je soupçonne que le type d'axiomatisation proposé ici pour la notion de "théorie différentiable" fournirait un cadre naturel pour formuler de telles questions avec toute la précision et la généralité souhaitables.

7. À la Poursuite des Champs

Depuis le mois de mars de l'an dernier, donc depuis près d'un an, la plus grande partie de mon énergie a été consacrée à un travail de réflexion sur les *fondements de l'algèbre (co)homologique non commutative*, ou ce qui revient au même, finalement, de *l'algèbre homotopique*. Ces réflexions se sont concrétisées par un volumineux paquet de notes dactylographiées, destinées à former le premier volume (actuellement en cours d'achèvement) d'un ouvrage en deux volumes à paraître chez Hermann, sous le titre commun *"À la Poursuite des Champs"*. Je prévois actuellement (après des élargissements successifs du propos initial) que le manuscrit de l'ensemble des deux volumes, que j'espère achever en cours d'année pour ne plus avoir à y revenir, fera dans les 1500 pages dactylographiées. Ces deux volumes d'ailleurs sont pour moi les premiers d'une série plus vaste, sous le titre commun *"Réflexions Mathématiques"*, où je compte développer tant soit peu certains des thèmes esquissés dans le présent rapport.

Vu qu'il s'agit d'un travail en cours de rédaction, et même d'achèvement, dont le premier volume sans doute paraîtra cette année et contiendra une introduction circonstanciée, il est sans doute moins intéressant que je m'étende ici sur ce thème de réflexion, et je me contenterai donc d'en parler très brièvement. Ce travail me semble quelque peu marginal par rapport aux thèmes que je viens d'esquisser, et ne représente pas (il me semble) un véritable renouvellement d'optique ou d'approche par rapport à mes intérêts et ma vision mathématiques d'avant 1970. Si je m'y suis résolu soudain, c'est presque en désespoir de cause, alors que près de vingt ans se sont écoulés depuis que se sont posées en termes bien clairs un certain nombre de questions visiblement fondamentales, et mûres pour être menées à leur terme, sans que personne ne les voie, ou prenne la peine de les sonder. Aujourd'hui encore, les structures de base qui interviennent dans le point de vue homotopique en topologie, y compris même en algèbre homologique commutative, ne sont pas comprises, et à ma connaissance, après les travaux de Verdier, de Giraud et d'Illusie, sur ce thème (qui constituent autant de "coups d'envoi" attendant toujours une suite…) il n'y a pas eu d'effort dans ce sens. Je devrais faire exception sans doute pour le travail d'axiomatisation fait par Quillen sur la notion de catégorie de modèles, à la fin des années 60, et repris sous des variantes diverses par divers auteurs. Ce travail à l'époque, et maintenant encore, m'a beaucoup séduit et appris, tout en allant dans une direction assez différente de celle qui me tenait et tient à coeur. Il introduit certes des catégories dérivées dans divers contextes non commutatifs, mais sans entrer dans la question des structures internes essentielles d'une telle catégorie, laissée ouverte également dans le cas commutatif par Verdier, et après lui par Illusie. De même, la question de mettre le doigt sur les "coefficients" naturels pour un formalisme cohomologique non commutatif, au-delà des champs (qu'on devrait appeler 1-champs) étudiés dans le livre de Giraud, restait ouverte – ou plutôt, les intuitions riches et précises qui y répondent, puisées dans des exemples nombreux provenant de la géométrie algébrique notamment, attendent toujours un langage précis et souple pour leur donner forme.

Je reviens sur certains aspects de ces questions de fondements en 1975, à l'occasion (je crois me souvenir) d'une correspondance avec Larry Breen (trois lettres de cette correspondance seront reproduites en appendice au Chap. I du volume 1, "Histoires de Modèles", de la Poursuite des Champs). A ce moment apparaît l'intuition que les ∞-groupoïdes doivent constituer des modèles, particulièrement adéquats, pour les types d'homotopie, les n-groupoïdes correspondant aux types d'homotopie *tronqués* (avec $\pi_i = 0$ pour $i > n$). Cette même intuition, par des voies très différentes, a été retrouvée par Ronnie Brown à Bangor et certains de ses élèves, mais en utilisant une notion de ∞-groupoïde assez restrictive (qui, parmi les types d'homotopie 1-connexes, ne modélise que les produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane). C'est stimulé par une correspondance à bâtons rompus avec Ronnie Brown, que j'ai finalement repris une réflexion, commençant par un essai de définition d'une notion de ∞-groupoïde plus large (rebaptisé par la suite "champ en ∞-groupoïdes" ou simplement "champ", sous-entendu : sur le topos ponctuel), et qui de fil en aiguille m'a amené à la Poursuite des Champs. Le volume "Histoire de Modèles" y constitue d'ailleurs une digression entièrement imprévue par rapport au propos initial (les fameux champs étant provisoirement oubliés, et n'étant prévus réapparaître que vers les pages 1000 environ...).

Ce travail n'est pas entièrement isolé par rapport à mes intérêts plus récents. Par exemple, ma réflexion sur les multiplicités modulaires $\widehat{M}g, \nu$ et leur structure stratifiée a relancé une réflexion sur un théorème de Van Kampen de dimension > 1 (un des thèmes de prédilection également du groupe de Bangor), et a peut-être contribué à préparer le terrain pour le travail de plus grande envergure l'année d'après. Celui-ci rejoint également par moments une réflexion datant de la même année 1975 (ou l'année d'après) sur un "complexe de De Rham à puissances divisées", qui a fait l'objet de ma dernière conférence publique, à l'IHES en 1976, et dont le manuscrit, confié je ne me rappelle plus à qui après l'exposé, est d'ailleurs perdu. C'est au moment de cette réflexion que germe aussi l'intuition d'une "schématisation" des types d'homotopie, que sept ans après j'essaye de préciser dans un chapitre (particulièrement hypothétique) de l'Histoire de Modèles.

Le travail de réflexion entrepris dans la Poursuite des Champs est un peu comme une dette dont je m'acquitterais, vis-à-vis d'un passé scientifique où, pendant une quinzaine d'années (entre 1955 et 1970), le développement d'outils cohomologiques a été le Leitmotiv constant, dans mon travail de fondements de la géométrie algébrique. Si la reprise actuelle de ce thème-là a pris des dimensions inattendues, ce n'est pas cependant par piété pour un passé, mais à cause des nombreux imprévus faisant irruption sans cesse, en bousculant sans ménagement les plans et propos prévus – un peu comme dans un conte des mille et une nuits, où l'attention se trouve maintenue en haleine à travers vingt autres contes avant de connaître le fin mot du premier.

8. Digressions de géométrie bidimensionnelle

J'ai très peu parlé encore des réflexions plus terre-à-terre de géométrie topologique bidimensionelle, associées notamment à mes activités d'enseignant et celles dites de "direction de recherches". A plusieurs reprises, j'ai vu s'ouvrir devant moi de vastes et riches champs mûrs pour la moisson, sans que jamais je réussisse à communiquer cette vision, et l'étincelle qui l'accompagne, à un (ou une) de mes élèves, et à la faire déboucher sur une exploration commune, de plus ou moins longue haleine. A chaque fois jusqu'à aujourd'hui même, après une prospection de quelques jours ou quelques semaines, où je découvrais en éclaireur des richesses insoupçonnées au départ, le voyage tournait court, quand il devenait clair que je serais seul à le poursuivre. Des intérêts plus forts prenaient le pas alors sur un voyage qui, dès lors, apparaissait comme une digression, voire une dispersion, plutôt qu'une aventure poursuivie en commun.

Un de ces thèmes a été celui des polygones plans, centré autour des variétés modulaires qu'on peut leur associer. Une des surprises ici a été l'irruption de la géométrie algébrique dans un contexte qui m'en avait semblé bien éloigné. Ce genre de surprise, lié à l'ubiquité de la géométrie algébrique dans la géométrie tout court, s'est d'ailleurs répété à plusieurs reprises.

Un autre thème a été celui des courbes (notamment des cercles) immergés dans une surface, avec une attention particulière pour le cas "stable" où les points singuliers sont des points doubles ordinaires (et aussi celui, plus général, où les différentes branches en un point se croisent mutuellement), avec souvent l'hypothèse supplémentaire que l'immersion soit "cellulaire", i.e. donne naissance à une carte.

Une variante de situations de ce type est celle des immersions d'une surface à bord non vide, et en tout premier lieu d'un disque (qui m'avait été signalé par A'Campo il y a une dizaine d'années). Au delà de la question de diverses formulations combinatoires de telles situations, qui ne représente plus guère qu'un exercice de syntaxe, je me suis intéressé surtout à une vision dynamique des configurations possibles, avec le passage de l'une à l'autre par déformations continues, qui peuvent se décomposer en composées de deux types d'*opérations élémentaires* et leurs inverses, à savoir le *"balayage"* d'une branche de courbe par dessus un point double, et l'*effacement* ou *la création d'un bigône*. (La première de ces opérations joue également un rôle-clef dans une théorie "dynamique" des systèmes de pseudo-droites dans un plan projectif réel.) Une des premières questions qui se posent ici est celle de déterminer les différentes *classes d'immersions* d'un cercle ou d'un disque (disons) modulo ces opérations élémentaires; une autre, celle de voir quelles sont les immersions du bord du disque qui proviennent d'une immersion du disque, et dans quelle mesure les premières déterminent les secondes. Ici encore, il m'a semblé que c'est une étude systématique des variétés modulaires pertinentes (de dimension infinie en l'occurrence, à moins d'arriver à en donner une version purement combinatoire) qui devrait fournir le "focus" le plus efficace, nous forçant en quelque sorte à nous poser les questions les plus pertinentes. Malheureusement, la réflexion sur les questions même les plus évidentes et les plus terre-à-terre est restée à l'état embryonnaire. Comme seul résultat tangible, je peux signaler une théorie de "dévissage" canonique d'une immersion cellulaire stable du cercle dans une surface, en immersions "indécomposables", par "télescopage" de telles immersions. Je n'ai pas réussi malheureusement à voir se transformer mes lumières sur la question en un travail de stage de DEA, ni d'autres lumières (sur une description théorique complète, en termes de groupes fondamentaux de 1-complexes topologiques, des immersions d'une surface à bord qui prolongent une immersion donnée de son bord) en le démarrage d'une thèse de doctorat d'état…

Un troisième thème, poursuivi simultanément depuis trois ans à divers niveaux d'enseignement (depuis l'option pour étudiants de première année, jusqu'à trois thèses de troisième cycle actuellement poursuivies sur ce thème) porte sur la classification topologique-combinatoire des systèmes de droites ou pseudo-droites. Dans l'ensemble, la participation de mes élèves ici a été moins décevante qu'ailleurs, et j'ai eu le plaisir parfois d'apprendre par eux des choses intéressantes auxquelles je n'aurais pas songé. La réflexion commune, par la force des choses, s'est limitée cependant à un niveau très élémentaire. Dernièrement, j'ai finalement consacré un mois de réflexion intensive au développement d'une construction purement combinatoire d'une sorte de "surface modulaire" associée à un système de n pseudo-droites, qui classifie les différentes "positions relatives" possibles (stables ou non) d'une $(n+1)$-ième pseudo-droite par rapport au système donné, ou encore : les différentes "affinisations" possibles de ce système, par les différents choix possibles d'une "pseudo-droite à l'infini". J'ai l'impression d'avoir mis le doigt sur un objet remarquable, faisant apparaître un ordre imprévu dans des questions de classification qui jusqu'à présent apparaissaient assez chaotiques! Mais ce n'est pas le lieu dans le présent rapport de m'étendre plus à ce sujet.

Depuis 1977, dans toutes les questions (comme dans ces deux derniers thèmes que je viens d'évoquer) où interviennent des cartes bidimensionelles, la possibilité de les réaliser canoniquement sur une surface conforme, donc sur une courbe algébrique complexe dans le cas orienté compact, reste en filigrane constant dans ma réflexion. Dans pratiquement tous les cas (en fait, tous les cas sauf celui de certaines cartes sphériques avec "peu d'automorphismes") une telle réalisation conforme implique en fait une *métrique riemanienne canonique*, ou du moins, canonique à une constante multiplicative près. Ces nouveaux éléments de structure (sans même prendre en compte l'élément arithmétique, dont il a été question au par. 3) sont de nature à transformer profondément l'aspect initial des questions abordées, et les méthodes d'approche. Un début de familiarisation avec les belles idées de Thurston sur la construction de l'espace de Teichmüller, en termes d'un jeu très simple de chirurgie riemanienne hyperbolique, me confirme dans ce pressentiment. Malheureusement, le niveau de culture très modeste de presque tous les élèves qui ont travaillé avec moi pendant ces dix dernières années ne me permet pas d'aborder avec eux, ne serait-ce que par allusion, de telles possibilités, alors que l'assimilation d'un langage combinatoire minimum se heurte déjà, bien souvent, à des obstacles psychiques considérables. C'est pourquoi, à certains égards et de plus en plus ces dernières années, mes activités d'enseignant ont souvent agi comme un poids, plutôt que comme un stimulant pour le déploiement d'une réflexion géométrique tant soit peu avancée, ou seulement délicate.

9. Bilan d'une activité enseignante

L'occasion me semble propice ici de faire un bref bilan de mon activité enseignante depuis 1970, c'est-à-dire depuis que celle-ci s'effectue dans un cadre universitaire. Ce contact avec une réalité très différente a été pour moi riche en enseignements, d'une portée d'un tout autre ordre d'ailleurs que simplement pédagogique ou scientifique. Ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur ce sujet. J'ai dit aussi au début de ce rapport le rôle qu'a joué ce changement de milieu professionnel dans le renouvellement de mon approche des mathématiques, et celui de mes centres d'intérêt en mathématique. Si par contre je fais le bilan de mon activité enseignante au niveau de la recherche proprement dite, j'aboutis à un constat d'échec clair et net. Depuis plus de dix ans que cette activité se poursuit an par an au sein d'une même institution universitaire, je n'ai pas su, à aucun moment, y susciter un lieu où "il se passe quelque chose" – où quelque chose "passe", parmi un groupe si réduit soit-il de personnes, reliées par une aventure commune. A deux reprises, il est vrai, vers les années 74 à 76, j'ai eu le plaisir et le privilège de susciter chez un élève un travail d'envergure, poursuivi avec élan: chez Yves Ladegaillerie le travail signalé précédemment (par. 3) sur les questions d'isotopie en dimension 2, et chez Carlos Contou-Carrère (dont la passion mathématique n'avait pas attendu la rencontre avec moi pour éclore) un travail non publié sur les jacobiennes locales et globales sur des schémas de bases généraux (dont une partie a été annoncée dans une note aux CR). Ces deux cas mis à part, mon rôle s'est borné, au cours de ces dix ans, à transmettre tant bien que mal des rudiments du métier de mathématicien [49] à quelques vingt élèves au niveau de la recherche, ou tout au moins à ceux parmi eux qui ont persévéré suffisamment avec moi, réputé plus exigeant que d'autres, pour aboutir à un premier travail noir sur blanc acceptable (certaines fois aussi à un travail mieux qu'acceptable et plus qu'un seul travail, fait avec goût et jusqu'au bout). Vu la conjoncture, même parmi les rares qui ont persévéré, plus rares encore seront ceux qui auront l'occasion d'exercer ce métier, et par là, tout en gagnant leur pain, de l'approfondir.

10. Épilogue

Depuis l'an dernier, je sens qu'au cours de mon activité d'enseignant universitaire, j'ai appris tout ce que j'avais à en apprendre et enseigné tout ce que je peux y enseigner, et qu'elle a cessé d'être vraiment utile, à moi-même comme aux autres. M'obstiner sous ces conditions à la poursuivre encore me paraîtrait un gaspillage, tant de ressources humaines que de deniers publics. C'est pourquoi j'ai demandé mon détachement au CNRS (que j'avais quitté en 1959 comme directeur de recherches frais émoulu, pour entrer à l'IHES). Je sais d'ailleurs que la situation de l'emploi est serrée au CNRS comme ailleurs, que l'issue de ma demande est douteuse, et que si un poste m'y était attribué, ce serait au dépens d'un chercheur plus jeune qui resterait sans poste. Mais il est vrai aussi que cela libérerait mon poste à l'USTL au bénéfice d'un autre. C'est pourquoi je n'ai pas de scrupule à faire cette demande, et s'il le faut à revenir à la charge si elle n'est pas acceptée cette année.

En tout état de cause, cette demande aura été pour moi l'occasion d'écrire cette esquisse de programme, qui autrement sans doute n'aurait jamais vu le jour. J'ai essayée d'être bref sans être sybillin et aussi, après coup, d'en faciliter la lecture et de la rendre plus attrayante, en y adjoignant un sommaire. Si malgré cela elle peut paraître longue pour la circonstance, je m'en excuse. Elle me paraît courte pour son contenu, sachant que dix ans de travail ne seraient pas de trop pour aller jusqu'au bout du moindre des thèmes esquissés (à supposer qu'il y ait un "bout"...), et cent ans seraient peu pour le plus riche d'entre eux !

Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Celle-ci se manifeste notamment par une source d'inspiration commune, la géométrie des surfaces, présente dans tous ces thèmes, au premier plan le plus souvent. Cette source, par rapport à mon "passé" mathématique, représente un renouvellement, mais nullement une rupture. Plutôt, elle montre le chemin d'une approche nouvelle vers cette réalité encore mystérieuse, celle des *"motifs"*, qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé[10]. Cette fascination ne s'est nullement évanouie, elle

[10] Voir à ce sujet mes commentaires dans l'"Esquisse Thématique" de 1972 jointe au présent rapport, dans la rubrique terminale "divagations motiviques" (loc. cit. pages 17-18).

fait partie plutôt de celle du plus brûlant pour moi de tous les thèmes évoqués précédemment. Mais aujourd'hui je ne suis plus, comme naguère, le prisonnier volontaire de tâches interminables, qui si souvent m'avaient interdit de m'élancer dans l'inconnu, mathématique ou non. Le temps des *tâches* pour moi est révolu. Si l'âge m'a apporté quelque chose, c'est d'être plus léger.

Janvier 1984

Notes

1. L'expression "hors de porté" ici (et encore plus loin pour une question toute différente), que j'ai laissée passer en allant à l'encontre d'une réticence, me paraît décidément hâtive et sans fondement. J'ai pu constater déjà en d'autres occasions que lorsque des augures (ici moi-même !) déclarent d'un air entendu (ou dubitatif) que tel problème est "hors de portée", c'est là au fond une affirmation entièrement subjective. Elle signifie simplement, à part le fait que le problème est censé ne pas être résolu encore, que celui qui parle est à court d'idées sur la question, ou de façon plus précise sans doute, qu'il est devant elle sans sentiment ni entrain, qu'elle "ne lui fait rien" et qu'il n'a aucune envie de faire quelque chose avec elle – ce qui souvent est une raison suffisante pour vouloir en décourager autrui. Cela n'a pas empêché qu'à l'instar de M. de la Palisse, et au moment même de succomber, les belles et regrettées conjectures de Mordell, de Tate, de Chafarévitch étaient toujours réputées "hors de portée", les pauvres ! – D'ailleurs, dans les jours déjà qui ont suivi la rédaction du présent rapport, qui m'a remis en contact avec des questions dont je m'étais quelque peu éloigné au cours de l'année écoulée, je me suis aperçu d'une nouvelle propriété remarquable de l'action extérieure d'un groupe de Galois absolu sur le groupe fondamental d'une courbe algébrique, qui m'avait échappé jusqu'à présent et qui sans doute constitue pour le moins un nouveau pas en avant vers la formulation d'une caractérisation algébrique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Celle-ci, avec la "conjecture fondamentale" (mentionnée au par. 3 ci-dessous) apparaît à présent comme la principale question ouverte pour les fondements d'une "géométrie algébrique anabéli-

enne", laquelle depuis quelques années, représente (et de loin) mon plus fort centre d'intérêt en mathématiques.

2. Je puis faire exception pourtant d'un autre "fait", du temps où, vers l'âge de douze ans, j'étais interné au camp de concentration de Rieucros (près de Mende). C'est là que j'ai appris, par une détenue, Maria, qui me donnait des leçons particulières bénévoles, la définition du cercle. Celle-ci m'avait impressionné par sa simplicité et son évidence, alors que la propriété de "rotondité parfaite" du cercle m'apparaissait auparavant comme une réalité mystérieuse au-delà des mots. C'est à ce moment, je crois, que j'ai entrevu pour la première fois (sans bien sûr me le formuler en ces termes) la puissance créatrice d'une "bonne" définition mathématique, d'une *formulation* qui décrit l'essence. Aujourd'hui encore, il semble que la fascination qu'a exercé sur moi cette puissance-là n'a rien perdu de sa force.

3. Plus généralement, au-delà des variétés dites "anabéliennes" sur des corps de type fini, la géométrie algébrique anabélienne (telle qu'elle s'est dégagée il y a quelques années) amène à une description, en termes de groupes profinis uniquement, de la catégorie des schémas de type fini sur la base absolue $\mathbf{Q}$ (voire même $\mathbf{Q}$), et par là même, en principe, de la catégorie des schémas quelconques (par des passages à la limite convenables). Il s'agit donc d'une construction "qui fait semblant" d'ignorer les anneaux (tels que $\mathbf{Q}$, les algèbres de type fini sur $\mathbf{Q}$ etc.) et les équations algébriques qui servent traditionnellement à décrire les schémas, en travaillant directement avec leurs topos étales, exprimables en termes de systèmes de groupes profinis. Un grain de sel cependant : pour pouvoir espérer reconstituer un schéma (de type fini sur $\mathbf{Q}$ disons) à partir de son topos étale, qui est un invariant purement topologique, il convient de se placer, non dans la catégorie des schémas (de type fini sur $\mathbf{Q}$ en l'occurrence), mais dans celle qui s'en déduit par "localisation", en rendant inversibles les morphismes qui sont des "homéomorphismes universels", i.e. qui sont finis, radiciels et surjectifs. Le développement d'une telle traduction d'un "monde géométrique" (savoir celui des schémas, multiplicités schématiques etc.) en termes de "monde algébrique" (celui des groupes profinis, et systèmes de groupes profinis décrivant des

topos (dits "étales") convenables) peut être considéré comme un aboutissement ultime de la théorie de Galois, sans doute dans l'esprit même de Galois. La sempiternelle question "et pourquoi tout ça ?" me paraît avoir ni plus, ni moins de sens dans le cas de la géométrie algébrique anabélienne en train de naître, que pour la théorie de Galois au temps de Galois (ou même aujourd'hui, quand la question est posée par un étudiant accablé...) et de même pour le commentaire qui va généralement avec : "c'est bien général tout ça !".

4. On conçoit donc aisément qu'un groupe comme $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$, avec sa structure "arithmétique", soit une véritable machine à construire des représentations "motiviques" de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et de ses sous-groupes ouverts, et qu'on obtient ainsi, au moins en principe, toutes les représentations motiviques qui sont de poids 1, ou contenues dans un produit tensoriel de telles représentations (ce qui en fait déjà un bon paquet !). J'avais commencé en 1981 à expérimenter avec cette machine dans quelques cas d'espèce, obtenant diverses représentations remarquables de Γ dans des groupes $G(\hat{\mathbf{Z}})$, où G est un schéma en groupes (pas nécessairement réductif) sur $\mathbf{Z}$, en partant d'homomorphismes convenables

$$\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z}) \longrightarrow G_0(\mathbf{Z}),$$

où G_0 est un schéma en groupes sur $\mathbf{Z}$, et G étant construit à partir de là comme extension de G_0 par un schéma en groupes convenable. Dans le cas "tautologique" $G_0 = \mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$, on trouve pour G une extension remarquable de $\mathrm{Gl}(2)_{\mathbf{Z}}$ par un tore de dimension 2, avec une représentation motivique qui "coiffe" celles associées aux corps de classes des extensions $\mathbf{Q}(i)$ et $\mathbf{Q}(j)$ (comme par hasard, les "corps de multiplication complexe" des deux courbes elliptiques "anharmoniques"). Il y a là un principe de construction qui m'a semblé très général et très efficace, mais je n'ai pas eu (ou pris) le loisir de le dévisser et le suivre jusqu'au bout – c'est là un des nombreux "points chauds" dans le programme de fondements de géométrie algébrique anabélienne (ou de "théorie de Galois", version élargie) que je me propose de développer. A l'heure actuelle, et dans un ordre de priorité sans doute très provisoire, ces points sont:

a) Construction combinatoire de la Tour de Teichmüller.

b) Description du groupe des automorphismes de la compactification profinie de cette tour, et réflexion sur une caractérisation de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ comme sous-groupe de ce dernier.

c) La "machine à motifs" $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$ et ses variantes.

d) Le dictionnaire anabélien, et la conjecture fondamentale (qui n'est peut-être pas si "hors de portée" que ça !). Parmi les points cruciaux de ce dictionnaire, je prévois le "paradigme profini" pour les corps $\mathbf{Q}$ (cf. b)), $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, dont une formulation plausible reste à dégager, ainsi qu'une description des sous-groupes d'inertie de Γ, par où s'amorce le passage de la caractéristique zéro à la caractéristique $p > 0$, et à l'anneau absolu $\mathbf{Z}$.

e) Problème de Fermat.

5. Je signalerai cependant un travail plus délicat (mis à part le travail signalé en passant sur les complexes cubiques), sur l'interprétation combinatoire des cartes régulières associées aux sous-groupes de congruence de $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{Z})$. Ce travail a été développé surtout en vue d'exprimer l'opération "arithmétique" de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur ces *"cartes de congruences"*, laquelle se fait, essentiellement, par l'intermédiaire du caractère cyclotomique de Γ. Un point de départ a été la théorie combinatoire du "bi-icosaèdre" développée dans un cours C4 à partir de motivations purement géométriques, et qui (il s'est avéré par la suite) permet d'exprimer commodément l'opération de Γ sur la catégorie des cartes icosaédrales (i.e. des cartes de congruence d'indice 5).

6. Signalons à ce propos que les classes d'isomorphie d'espaces modérés compacts sont les mêmes que dans la théorie "linéaire par morceaux" (qui n'est *pas*, je le rappelle, une théorie modérée). C'est là, en un sens, une réhabilitation de la "Hauptvermutung", qui n'est "fausse" que parce que, pour des raisons historiques qu'il serait sans doute intéressant de cerner de plus près, les fondements de topologie utilisés pour la formuler n'excluaient pas les phénomènes de sauvagerie. Il va (je l'espère) sans dire que la nécessité de développer de nouveaux fondements pour la topologie "géométrique"

n'exclut nullement que les phénomènes en question, comme toute chose sous le ciel, ont leur raison d'être et leur propre beauté. Des fondements plus adéquats ne supprimeront pas ces phénomènes, mais nous permettront de les situer à leur juste place, comme des "cas limites" de phénomènes de "vraie" topologie.

7. En fait, pour reconstituer ce système d'espaces

$$(i_0, \ldots i_n) \mapsto X_{i_0, \ldots, i_n}$$

contravariant sur Drap(I) (pour l'inclusion des drapeaux), il suffit de connaître les X_i (ou *"strates déployées"*) et les X_{ij} (ou *"tubes de raccord"*) pour $i, j \in I$, $i < j$, et les morphismes $X_{ij} \longrightarrow X_i$ (qui sont des inclusions "bordantes") et $X_{ij} \longrightarrow X_j$ (qui sont des fibrations propres, dont les fibres F_{ij} sont appelées *"fibres de raccord"* pour les strates d'indices i et j). Dans le cas d'une multiplicité modérée cependant, il faut connaître de plus les *"espaces de jonction"* X_{ijk} ($i < j < k$) et ses morphismes dans X_{ij}, X_{jk}, et surtout X_{ik}, s'insérant dans le diagramme commutatif hexagonal suivant, où les deux carrés de droites sont cartésiens, les flèches $\hookrightarrow$ sont des immersions (pas nécessairement des plongements ici), et les autres flèches sont des fibrations propres :

$$\begin{tikzcd}
 & X_{ik} \arrow[dl] \arrow[r, hook] & X_k & \\
X_i & & X_{ijk} \arrow[ul, hook] \arrow[dl] \arrow[r, hook] & X_{jk} \arrow[ul, hook] \arrow[dl] \\
 & X_{ij} \arrow[ul] \arrow[r, hook] & X_j &
\end{tikzcd}$$

(NB. Ce diagramme définit X_{ijk} en termes de X_{ij} et X_{jk} sur X_j, mais non la flèche $X_{ijk} \longrightarrow X_{ik}$, car $X_{ik} \longrightarrow X_k$ n'est pas nécessairement un plongement.)

Dans le cas des espaces modérés stratifiés proprement dits (qui ne sont pas des multiplicités à proprement parler) on peut exprimer de façon commode le "déploiement" de cette structure, i.e. le système des espaces $X_{i_0 \ldots i_n}$, en termes de l'espace modéré X_* somme des X_i, qui est muni d'une *structure d'objet ordonné* (dans la catégorie des espaces modérés) ayant comme graphe X_{**} de la relation d'ordre la somme des X_{ij} et des X_i (ces derniers constituant la diagonale). Parmi les propriétés essentielles de cette structure ordonnée, relevons seulement ici que $\mathrm{pr}_1 : X_{**} \longrightarrow X_*$ est une fibration (localement triviale) propre, et $\mathrm{pr}_2 : X_{**} \longrightarrow X_*$ est un plongement "bordant". On a une interprétation analogue du déploiement d'une multiplicité modérée stratifiée, en termes d'une *structure de catégorie* (remplaçant une simple structure ordonnée) "au sens multiplicités modérées", dont l'application de composition est donnée par les morphismes $X_{ijk} \longrightarrow X_{ik}$ ci-dessus.

RÉCOLTES ET SEMAILLES

Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien

- Edition by Mateo Carmona
- This text was published in: *Récoltes et Semailles: I, II. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*. Paris: Éditions Gallimard, 2022, 439.

Les conjectures de Weil

Les fameuses "conjectures de Weil", pour une variété algébrique X définie sur un corps fini k, concernent la "fonction L" (dite "de Artin-Weil") associée à X. Celle-ci est définie comme une certaine série formelle a coefficients rationnels, dont la connaissance équivaut a celle du nombre de points de X rationnels sur le corps k et sur toutes ses extensions finies. La première assertion parmi ces conjectures, c'est que cette série formelle (à terme constant 1) est le développement en série d'une *fonction rationnelle* sur $\mathbf{Q}$. Toutes les autres affirmations concernent la forme particulière et les propriétés de cette fonction rationnelle, dans le cas particulier où X est connexe projective et non singulière — Au cœur de ces conjectures est une certaine formule, présumée canonique, présentant cette fonction rationnelle sous la forme

$$(L) \qquad L(t) = \frac{P_0(t)P_2(t)...P_{2n}(t)}{P_1(t)...P_{2n-1}(t)},$$

où les P_i ($0 \leq i \leq 2n$, avec $n = \dim X$) sont des polynômes à coefficients entiers à terme constant 1. Le degré b_i de P_i est censé jouer le rôle d'un "i.ème nombre de Betti" pour X (ou plus précisément, pour la variété correspondante $\overline{X}$ sur la clôture algébrique $\overline{k}$ du corps k). Ainsi, quand X provient par "réduction en car. $p > 0$" d'une variété projective non singulière X_K définie sur un corps K de caractéristique nulle, alors b_i doit être égal au i.ème nombre de Betti (défini par voie transcendante) de la variété algébrique *complexe*, obtenue à partir de X_K par un plongement quelconque de K dans $\mathbf{C}$[1]. La fonction rationnelle doit satisfaire une *équation fonctionnelle*, qui équivaut à dire que les racines de P_{2n-1} sont exactement les q^n/ξ_α, où $q = p^f$ est le cardinal du corps de base k, et où ξ_α parcourt les racines de P_i. (Moralement, cela devait "provenir" de l'existence d'une "dualité de Poincaré" pour la "cohomologie", non nommée et non définie, de la variété $\overline{X}$.) Je crois que Weil devait conjecturer également que pour $i \neq n$, les zéros de P_{2n-i} étaient exactement les $q^{n-i}\xi_\alpha$, où ξ_α parcourt encore les zéros de P_i

[1]Au moment où Weil faisait ses conjectures, il n'était pas même connu que les b_i définis ainsi étaient *indépendants* du plongement choisi de K dans $\mathbf{Q}$. Quelques années plus tard, cela allait résulter de la théorie de Serre de la cohomologie des faisceaux cohérents, qui donnait un sens "purement algébrique" aux invariants plus fins $h^{i,j}$ de la théorie de Hodge.

(ou, ce qui revient au même au vu de la condition de dualité, que les zéros de P_i se groupent par paires, de produit égal à q^i pour chacune). La "raison" heuristique ici est une autre propriété importante de la cohomologie des variétés projectives non singulières complexes, exprimée cette fois par le "théorème de Lefschetz" (version dite "vache"). Enfin, la dernière des conjectures de Weil, analogue "géométrique" de la conjecture de Riemann, est que les valeurs absolues des inverses des zéros de P_i sont toutes égales a $q^{i/2}$ (assertion qui conduit à des estimations d'une grande précision sur des nombres de points de X[2]).

La rationalité de la fonction L d'une variété X générale avait été établie par Dwork en 1960, par des méthodes "p-adiques" non cohomologiques. Cette méthode avait donc l'inconvénient de ne pas fournir d'interprétation cohomologique de la fonction L, et par suite ne se prête pas à une approche des autres conjectures, pour X projective non singulière. Dans ce dernier cas, l'existence d'un formalisme de cohomologie (sur un "corps de coefficients" $\mathbf{R}$ de caractéristique nulle), incluant la dualité de Poincaré pour les variétés projectives non singulières, et un formalisme des classes de cohomologie associées aux cycles (transformant intersections en cup-produits), permet de façon essentiellement "formelle" de transcrire la classique "formule des points fixes de Lefschetz". En appliquant cette formule à l'endomorphisme de Frobenius de $\overline{X}$ et à ses itérés, on allait obtenir une expression (1) comme exigée par Weil, ou les P_i, sont des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. cela devait être clair pour Weil dès le moment où il avait énoncé ces conjectures (1949), et ça l'était en tous cas pour Serre comme pour moi dans les années cinquante — d'où justement la motivation initiale pour développer un tel formalisme. C'était là chose faite dès le mois de mars 1963, avec $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\ell$, $\ell \neq p$. Il y avait simplement deux grains de sel :

a) Il n'était pas clair a priori (bien qu'on était persuadé que ce devait être vrai) que les polynômes $P_i(t)$, qui a priori étaient à coefficients dans l'anneau $\mathbf{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques, étaient en fait des *entiers ordinaires*, et de plus, indépendants du nombre premier envisagé ℓ ($\ell \neq p = \text{car. } k$).

b) De la rationalité de la fonction L pour une X projective non singulière, on ne

[2]De cette dernière des conjectures de Weil, résulte en même temps que l'écriture (L) de la fonction L est *unique*.

pouvait déduire celle pour un X général, que si on disposait de la résolution des singularités.

Les problèmes soulevés par a) ont joué un rôle crucial, bien sur, pour l'éclosion et le développement du yoga *des motifs*, et dans la formulation ultérieure des *conjectures standard*, étroitement liées à ce yoga. Ils ont aussi stimulé la réflexion pour trouver également une théorie *cohomologique p-adique* (réalisée par la suite par la théorie *"cristalline"*), comme une approche possible pour prouver l'intégralité des coefficients des P_i, une fois qu'on saurait (p. ex. via une solution affirmative aux conjectures standard) qu'ils sont rationnels et indépendants de ℓ (*y compris* pour $\ell = p$).

Quoi qu'il en soit, on avait donc dès 1963 l'expression (L) de la fonction L (mais qui a priori dépendait du choix de ℓ), l'équation fonctionnelle, et le bon comportement des nombres de Betti par spécialisation. Il restait donc à résoudre la question a), à prouver l'assertion pour les valeurs absolues des racines de P_i, et enfin (pour faire bon poids) la relation "à la Lefschetz" sur les zéros de P_i. C'est ce qui a été fait dix ans plus tard dans l'article de Deligne "La conjecture de Weil I", Pub. Math, de l'IHES n° 43 (1973) p. 273–308.

Comme ingrédients de cette démonstration de Deligne, on n'avait donc aucunement besoin d'une formule des points fixes plus sophistiquée que la formule "ordinaire", qui était disponible (sans rien de "conjectural") dès les débuts de 1963. Le seul autre ingrédient cohomologique dans l'article de Deligne, si je ne me trompe, est la théorie cohomologique des pinceaux de Lefschetz (version étale) que j'avais développée vers l'année 1967 ou 68, complété par la formule de Picard-Lefschetz (prouvée dans le cadre étale par Deligne), l'un et l'autre exposés dans le volume SGA 7 II dont il a été question (et dont mon nom, comme par hasard, a quasiment disparu...).

La formule "plus sophistiquée" de points fixes, dite *"de Lefschetz-Verdier"*, a par contre joué un *rôle psychologique* important, pour m'encourager à dégager l'interprétation cohomologique (L) des fonctions L, valable pour toute variété X (pas nécessairement projective non singulière). Cette formule de Verdier me rappelait qu'il doit y avoir des formules de points fixes sans conditions de non-singularité sur X (comme il était bien connu déjà dans le cas de la formule de

Lefschetz ordinaire), mais surtout, elle attirait mon attention sur le fait qu'il y a des formules de points fixes concernant la cohomologie à *coefficients dans un faisceau* ("constructible") *quelconque*, interprétant une somme alternée de traces (dans des espaces de cohomologie à coefficients dans un tel faisceau) comme une somme de "termes locaux" correspondant aux points fixes d'un endomorphisme $f : X \longrightarrow X$ (quand ceux-ci sont isolés). Dans cette motivation heuristique, le fait que cette formule de Lefschetz-Verdier "restait conjecturale", en car. $p > 0$ (faute de disposer de la résolution des singularités, et par là, du "théorème de bidualité"), *était entièrement irrelevant*[3].

Comme si souvent, le pas essentiel ici a été de trouver *"la" bonne formulation* (en l'occurrence pour une "formule cohomologique des fonctions L"). La formule de Verdier me suggérait de faire intervenir un faisceau ℓ-adique (constructible) arbitraire, en lieu et place du faisceau de coefficients habituel (qui jusque là était resté implicite), savoir le faisceau constant $\mathbf{Q}_\ell$. Il fallait donc, en calquant la définition de Weil de la fonction L "ordinaire", en définir une "à coefficients dans F". Une fois qu'on songe à le faire, la définition s'impose d'elle-même : c'est celle donnée dans mon exposé Bourbaki de décembre 1964 (Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Sém. Bourbaki 279), qu'il est inutile de répéter ici. De plus, les "termes locaux" plausibles de la formule de Lefschetz-Verdier (en termes du faisceau de coefficients donné, et de la correspondance de Frobenius) s'imposaient également. Enfin (on est culotté ou on ne l'est pas !), pourquoi ne pas écrire la formule, ici, en abandonnant mime l'hypothèse de propreté de la formule de Lefschetz-Verdier "orthodoxe", mais en travaillant avec la cohomologie à *support propre* ? !

Ainsi, le pas essentiel, cette fois encore, avait été de dégager le "bon énoncé" (en l'occurrence, *1a* "bonne formule"), *suffisamment générale* et par là-même, suffisamment *souple* pour se prêter à une démonstration, en "passant" sans problèmes à travers récurrences et "dévissages". Je n'aurais su (et personne à ce jour ne saurait) démontrer directement "la" formule des fonctions L "ordinaires", pour une X

[3](20 mars) Ça l'était à tel point que l'an dernier, j'avais entièrement et depuis longtemps oublié ce fait, et suis tombé des nues en lisant (sous la plume de Deligne) que la formule de Lefschetz-Verdier "n'était établie que conjecturalement dans la version originale de SGA 5". Je reviens sur ce point dans la réflexion du lendemain et du surlendemain (les 18 et 19 mars). (Dans les sousnotes n° 169_6 et 169_7.)

quelconque (ou même lisse, mais pas propre, ou inversement), en termes de cohomologie ℓ-adique (à supports propres) à coefficients dans le faisceau ℓ-adique *constant* $\mathbf{Q}_\ell$, sans passer par la généralisation faisceautique. (Pas plus que je n'aurais su, en car. $p > 0$, démontrer la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch *ordinaire*, si je ne l'avais d'abord généralisée comme une formule faisceautique pour une *application* propre de variétés algébriques lisses — et personne, à ma connaissance, ne saurait le faire aujourd'hui encore…)

Dans l'exposé Bourbaki en question, je me borne à donner l'énoncé général de la formule des fonctions L "à coefficients" dans un faisceau ℓ-adique ordinaire, et je montre comment, par des dévissages très simples, on se ramène au cas où X est une courbe projective lisse et projective. Je savais bien qu'une fois arrivé là, c'*était gagné* — car on "tient en mains" suffisamment la dimension un, pour que la démonstration de la formule en question devienne une question de routine[4]. Je ne me suis pas occupé à ce moment de dégager une bonne formule de points fixes en dimension un et de la prouver, il me semblait que ce serait plutôt à Verdier de jouer. Il a donné une formule de points fixes, dite "de Woodshole", l'année d'après, qui suffisait pour coiffer Frobenius et l'application aux fonctions L. J'ai pris connaissance de son énoncé, qui ne m'a pas vraiment satisfait, car il me semblait que les conditions qu'il imposait à sa correspondance cohomologique (pour les besoins d'une démonstration dont je n'ai pas pris connaissance) étaient un peu artificielles — j'aurais aimé une formule qui s'applique à tout endomorphisme d'une courbe algébrique. Le séminaire SGA 5 a été la première bonne occasion, pour développer une telle formule qui soit à mon goût. (C'est, sauf erreur, celle qui figure bel et bien dans l'exposé XII de l'édition-Illusie, ayant miraculeusement survécu aux vicissitudes qui ont frappé ce malheureux séminaire.) Les conjectures de Weil avaient été une motivation initiale, et un fil conducteur précieux, pour me

[4]Si je parle ici de "travail de routine", ce n'est nullement dans un sens péjoratif. Les neuf dixièmes, si ce n'est même beaucoup plus, du travail mathématique est de ce type, aussi bien chez moi que chez tout autre mathématicien à qui il arrive de passer par des moments qui, justement, sont *autre chose*, des moments créateurs. Après Verdier, j'ai moi-même passé du temps à tourner la manivelle des techniques disponibles, délicates et bien huilées, pour trouver et prouver une formule de points fixes en dimension un qui me satisfasse (provisoirement du moins). C'était là du travail "de routine" tout comme l'avait été celui de Verdier.

"lancer" sur le développement d'un formalisme complet de cohomologie étale (et d'autres). Mais je sentais bien que le thème cohomologique, qui était au centre de mes efforts depuis huit ou neuf ans déjà et qui devait le rester encore pendant les années à venir jusqu'à mon départ en 1970, avait une portée plus vaste encore que les conjectures de Weil qui m'y avaient amené. Pour moi, l'endomorphisme de Frobenius n'était pas un "alpha et oméga" pour le formalisme cohomologique, mais un endomorphisme parmi bien d'autres…

$\mathscr{D}$-modules et cristaux

Le Bi-icosaèdre

[…] Il me faut d'abord donner quelques explications préliminaires purement géométriques, sur la combinatoire de l'icosaèdre gauche et sur la notion de bi-icosaèdre gauche. Comme il semblerait que je sois le seul qui ait jamais pris la peine (et le plaisir) de regarder l'icosaèdre (ordinaire ou "gauche", au choix) du point de vue combinatoire, et qu'il n'y a donc aucune référence dans la littérature sur ces choses (qui devraient être "bien connues" depuis plus de deux mille ans), je me fais un plaisir de développer ici "en forme" le peu dont nous aurons besoin, pour nous y reconnaître[5].

Dans la suite, on se donne un ensemble S à six éléments (S, comme "sommets"). Les éléments de S s'appelleront *"sommets"*, et les parties à deux éléments de S (ou "paires") dans S s'appelleront *"arêtes"*. Enfin, pour abréger, on appellera *"triangles"*

[5] Mes réflexions sur l'icosaèdre, avec un fort accent sur l'aspect combinatoire, datent de 1977, où j'ai fait un cours de DEA d'une année sur ce thème magnifique. Cela a été en même temps ma première grosse frustration dans mon expérience enseignante. Malgré le niveau délibérément très élémentaire et très "visuel" où j'ai placé le cours, avec l'espoir de voir s'y impliquer les auditeurs (étudiants de troisième cycle ou enseignants à mon Université), je n'ai pas réussi à vraiment déclencher une étincelle de vrai intérêt et de participation en aucun. La seule exception a été la mise au point, par un ou deux parmi les auditeurs, de tracés de la projection stéréographique sur le plan de l'icosaèdre (vu comme inscrit sur la sphère unité, avec les arêtes figurées par des arcs de grand cercle), en faisant apparaître en même temps le dodécaèdre dual. Il es vrai que ces tracés stéréographiques (en prenant comme centre de projection soit un sommet, soit le milieu d'une arête, soit le centre d'un face) sont de toute beauté, surtout quand on tient compte du coloriage canonique des arêtes (voire, des faces également) en cinq couleurs…

(de S) les parties de S à trois éléments. Si on désigne par $A(S)$ ou A, et par $T(S)$ ou T l'ensemble des arêtes et l'ensemble des triangles de S, on vérifie aussitôt que l'on a

$$\operatorname{card}(S) = 6, \quad \operatorname{card} A = 15, \quad \operatorname{card} T = 20$$

(où la première relation est mise pour mémoire). (NB si E est un ensemble fini, $\operatorname{car}(E)$ désigne le nombre de ses éléments.)

Définition **1**. — *Une partie F de l'ensemble T des triangles de S est appelée une* structure icosaédrale *(sous-entendu : gauche) sur S, si toute arête de S est contenue dans exactement deux triangles appartenant à F.*

En d'autres termes, si on appelle *"faces"* les triangles éléments de F, la condition envisagée dit que *chaque arête est contenue dans exactement deux faces*. Un ensemble S à six éléments muni d'une structure icosaédrale F est appelé un *icosaèdre combinatoire* (sous entendu : "gauche", pour ne pas confondre avec l'icosaèdre "ordinaire", qui a douze sommets au lieu de six), ou simplement un icosaèdre (gauche). Si $I = (S, F)$ et $I' = (S', F')$ sont deux tels icosaèdres, on appelle *isomorphisme* de l'un avec l'autre toute bijection

$$u : S \xrightarrow{\sim} S'$$

telle que $u(F) = F'$, i.e. telle que les faces de I' soient exactement les images par u des faces de I.

On peut "regarder" un icosaèdre en "centrant" son attention soit sur un sommet, soit sur une arête, soit sur une face, de façon à obtenir trois types de "perspectives" différentes, pour l'étudier. Ce sera la perspective centrée sur une face, qui sera la plus commode pour notre propos actuel. Voici l'énoncé récapitulatif, contenant tout ce qui nous sera nécessaire (et au delà) :

Théorème **1**. —

a) *Deux icosaèdres (combinatoires gauches) sont toujours isomorphes, et plus précisément, il y a exactement* 60 *isomorphismes de l'un avec l'autre.*

b) *Un icosaèdre a exactement dix faces. Si f est une face d'un icosaèdre $I = (S, F)$, f'' une face d'un icosaèdre $I' = (S', F')$, alors pour toute bijection u_0 de f avec*

f', il existe un isomorphisme et un seul u de I avec I', tel que u transforme f en f'' et induise entre f et f' la bijection u_0.

c) Soit $I = (S,F)$ un icosaèdre, et F' le complémentaire de F dans T, i.e. l'ensemble des triangles de S qui ne sont pas *des faces. Alors pour toute face $f \in F$ de I, son complémentaire f' dans S (i.e. l'ensemble des sommets qui n'appartiennent* pas *à la face f) est dans F' (i.e. est un triangle qui n'est* pas *une face de I). L'application*

$$f \mapsto f' : F \longrightarrow F'$$

est une bijection de F avec F'. Enfin, F' est également une structure icosaèdrale sur S (appelée structure icosaèdrale complémentaire *de la structure F).*

d) Soient S un ensemble de sommets à six éléments,

$$\mathrm{Ic}(S) \subset \mathfrak{P}(T(S)) \quad (= \textit{ens. des parties de } T(S))$$

l'ensemble des structures icosaèdrales sur S. Alors $\mathrm{Ic}(S)$ a douze éléments, et l'application

$$F \mapsto F', \quad \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \mathrm{Ic}(S)$$

et une involution sans points fixes de cet ensemble (i.e. on a, pour tout F dans $\mathrm{Ic}(S)$, $(F')' = F$ et $F' \neq F$.)

e) Soient F une structure icosaèdrale sur S, F' la structure complémentaire, $f \in F$ une face de F, $f' \in F'$ la face de F' complémentaire de f. Pour tout sommet $s \in f$, soit s' le "troisième sommet" de l'unique face $f(s)$ de F, distincte de f, contenant l'arête $a_s = f - \{s\}$. On a alors $s' \in f'$, et l'application

$$s \mapsto s' : f \longrightarrow f'$$

est une bijection de f avec f', notée

$$u_f : f \xrightarrow{\sim} f'.$$

On définit de même (en interchangeant les rôles de F et de F') une bijection

$$u_{f'} : f' \xrightarrow{\sim} f.$$

Ses bijections sont inverses l'une de l'autre :

$$u_{f'}u_f = \mathrm{id}_f, \quad u_f u_{f'} = \mathrm{id}_{f'}.$$

f) Soit S un ensemble à six éléments, f un triangle de S, f' le triangle complémentaire, P_f l'ensemble des bijections de f avec f' (c'est un ensemble à six éléments), et $\varepsilon_f = \{f, f'\}$ la partie à deux éléments de $T(S)$ (ensemble des triangles), formée de f et de f'. Pour toute structure icosaèdrale F sur S, soit

$$c(F) = (\alpha(F), u(F)) \in \varepsilon_f \times P_f$$

défini ainsi : $\alpha(F)$ est égal à f ou à f', suivant que $f \in F$ ou $f' \in F$ (i.e. $\alpha(F)$ est l'unique élément de ε_f tel que $\alpha(F) \in (F)$, et $u(F)$ est égal à u_f (notations de d))). On a donc défini une application

$$c : \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cette application est bijective. *En d'autres termes, "il revient au même"* de se *donner une structure icosaèdrale F sur S, ou de se donner un couple d'éléments (φ, u), où φ est l'un des deux éléments f, f' (celui qui doit être face de F), et où u est une bijection $f \xrightarrow{\sim} f'$.*

Démonstration du théorème. La partie a) est conséquence de b), compte tenu qu'il y a exactement 6 bijections de f avec f' et 10 faces de I', et que $60 = 10\ 6$. D'autres part, dans d) le fait que $F \mapsto F'$ soit une involution sans points fixes, est évident sur la définition donnée dans c). Quant au fait que $\mathrm{Ic}(S)$ a douze éléments, cela résulte aussitôt de a) par un argument de "comptage" standard (vu que le groupe de toutes les bijections de S avec lui même a $6! = 654321 = 720$ éléments, et que le sous-groupe stabilisateur de F en a soixante, d'où le nombre

$$12 = 720/60 \quad .)$$

Une autre façon de retrouver 12 (via la "perspective autour d'une face" expliquée dans f)) est par[6]

$$12 = 2 \times 6.$$

[6]Il s'agit ici de la description, utilisant la "perspective" centrée sur une face. Il y a deux autres

Il y a donc à prouver seulement les parties b), c), e), f). Dans b), c), f) on part d'une structure icosaédrale donnée (S,F). Comme chaque arête est contenue dans deux faces, il existe au moins une face, soit f. Sot f' son complémentaire dans S, et considérons l'application

$$u_f : f \longrightarrow f', \quad a \mapsto a'$$

définie dans e). Montrons qu'elle est injective, donc bijective (puisque f et f' ont même nombre d'éléments, savoir trois). Si on avait deux sommets distincts $a \neq b$ dans f, tels que $a' = b'$, alors posant

$$c = a' = b'$$

et désignant par s le troisième sommet de f, on aurait une configuration

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, no head] & & b \arrow[dl, no head] \\
& s \arrow[d, no head] & \\
& c & {,}
\end{tikzcd}$$

avec trois faces $\{s,b,c\}$, $\{s,c,a\}$, $\{s,a,b\}$ se rajustant cycliquement autour de s, le long d'arêtes communes $\{s,a\}$, $\{s,b\}$, $\{s,c\}$. Je dis que ce n'est pas possible.

---

descriptions toutes aussi instructives de l'ensemble $\mathrm{Ic}(S)$, obtenues par la perspective centrée soit sur une arête, soit sur un sommet. Enfin, je signale aussi la bijection canonique suivante

$$\mathrm{Ic}(S)\,\mathrm{Bic}(S) \times \omega(S),$$

où $\mathrm{Bic}(S)$ désigne l'ensemble des structures biicosaédrales sur S, et $\omega(S)$ l'ensemble à deux éléments formé des "orientations" de S (i.e. l'ensemble quotient de l'ensemble des "repères" de S i.e. des numérations de ses éléments de 1 à 6, par l'action du sous-groupe alterné du groupe symétrique $\mathfrak{S}_6$). L'application est obtenue en associant à toute structure icosaédrale F, d'une part la structure biicosaédrale associée $\{F,F'\}$, et d'autre part une certaine orientation $\mathrm{or}(F)$ de S canoniquement associée à F, que je me dispense de décrire ici. Il se trouve que l'on a

$$\mathrm{or}(F) \neq \mathrm{or}(F'),$$

de sorte que les deux structures icosaédrales correspondant à une même structure biicosaédrale $\{F,F'\}$ sont "repérées" par les deux orientations possibles de S.

Soient en effet u et v les deux points de S distincts des points précédents s, a, b, c, considérons l'arête $\{s, u\}$, et soit h une face qui la contienne. Alors le troisième sommet de h (distinct de s et u par définition) ne peut pas être égale à un des trois points a, b, c, disons a, car l'arête $\{s, a\}$ serait contenue dans trois faces de l'icosaèdre. Donc le troisième sommet est v, et l'arête $\{s, u\}$ ne serait contenue que dans le seul triangle $\{s, u, v\}$, absurde.

Nous avons maintenant qui si a, b, c sont les trois sommets de la face f, alors les sommets a', b', c' dans f' sont distincts, donc les six sommets de l'icosaèdre sont a, b, c, a', b', c'. Nous pouvons maintenant écrire la liste de l'ensemble de toutes les faces de l'icosaèdre, via la "perspective par rapport à f". Pour bien visualiser cette liste, il est pratique de faire un dessin, où les sommets sont figurés par des points du plan, les arêtes par des segments joignant ces points, et les faces par des aires triangulaires délimitées par les trois arêtes contenues dan la face. De plus, pour une bonne visibilité du graphisme, on va faire figurer chacun des points a', b', c' (mais non a, b, c) en *deux* exemplaires, dont le deuxième sera désigné (en tant que point du plan) par a'', b'', c'' respectivement. Ainsi, a' et a'' sont des points différents du plan, mais qui désignent le même élément de l'ensemble "abstrait" S.

On trouve la figure suivante, qui peut aussi être interprétée comme une vue "en perspective" de l'icosaèdre régulier ordinaire dans l'espace, vue "centrée" sur une face (nommée $\{a, b, c\}$)

Sur cette figure apparaissent dix figures (triangulaires), parmi lesquelles les quatre faces de départ

(1) $$f = \{a, b, c\}, \quad f_a = \{b, c, a'\}, \quad f_b = \{c, a, b'\}, \quad f_c = \{a, b, c'\}$$

plus les six faces "externes", se raccordant par paires le long des trois arêtes $\{a, a''\} = \{a, a'\}$, $\{b, b''\} = \{b, b'\}$, $\{c, c''\} = \{c, c'\}$. Donc, en toutes lettres

(2) $$f_{a,b} = \{a, a'', b'\} = \{a, a', b'\},$$

et les cinq triangles similaires $f_{a,c}$, $f_{b,c}$, $f_{b,a}$, $f_{c,a}$, $f_{c,b}$. Pour montrer que $f_{a,b}$ (par exemple) est bien une face, on note que l'arête $\{a, a''\} = \{a, a'\}$ doit appartenir à deux faces, dont le troisième sommet ne peut être ni b ni c (car chacune des arêtes a, b et a, c sont déjà contenues dans deux parmi les quatre faces (1)), donc il ne reste comme possibilité que b' et c', d'où les faces $f_{a,b}$ et $f_{a,c}$.

Je dis que l'ensemble de ces dix faces épuise l'ensemble F de toutes les faces. Pour ceci, comptons le nombre d'arêtes figurant dans notre graphisme représentatif. Trois pour f, deux supplémentaires pour chacun des trois triangles f_a, f_b, f_c (ça fait neuf), trois arêtes de la forme $\{a,a''\} = \{a,a'\}$ (fait douze), et six qui forment le contour de la figure (arêtes de la forme $\{a',b''\}$ etc), ça fait dix-huit, alors qu'il n'y en a que quinze arêtes en tout ! Mais on note que les arêtes telles que $\{a',b''\}$ et $\{a'',b'\} = \{b',a''\}$, symétriques par rapport au centre de la figure, représentant une seule et même arête de S (savoir $\{a',b'\}$ en l'occurrence), ce qui fait que le compte est bon : toutes les arêtes de S figurent sur notre tracé, et une seule fois sauf celles de triangle $\{a',b',c'\}$, lesquelles y figurent deux fois.

Ceci dit, un rapide coup d'oeil sur la figure nous convainc que chacune des arêtes qui y figurent, appartient bien à exactement deux parmi les dix faces précédentes et une seule. Si donc il existait une face h qui ne faisant pas partie de ce paquet de dix, alors une arête contenue dans h appartiendrait à au moins trois faces, absurde.

Ainsi, on est arrivé expliciter le "tracé" d'un icosaèdre quelconque, à partir d'une de ses faces, comme une "figure standard". La partie b) du théorème 1 est une conséquence immédiat de cette détermination.

Ainsi, b) donc aussi a) sont prouvés, prouvons c). Le fait que pour une face f (que nous pouvons prendre comme notre face centrale), le triangle complémentaire ne soit pas une face, est immédiat sur notre tracé, puisque $f' = (a',b',c')$ ne figure pas parmi nos dix faces. Comme l'ensemble T des triangles à 20 éléments et que F en a dix, F' en a dix, et comme l'application $f \mapsto f'$ de F dans F' est évidement injective, elle est bijective. En d'autres termes, pour qu'un triangle f de S soit une face, il faut *et il suffit* que le triangle complémentaire ne le soit pas.

Pour terminer de prouver c), il reste à prouver que F' est une structure icosaédrale, donc que pour toute arête L de S, il y a exactement deux triangles éléments de F' qui la contiennent. Passant aux complémentaires dans S, cela revient à dire que toute partie "carrée" de S (i.e. une partie ayant quatre éléments), contient exactement deux faces (pour la structure icosaédrale F). Or les faces non contenues dans cette partie $S-L$ sont exactement celles qui rencontrent son complémentaire $L = \{a,b\}$, i.e. celles qui contiennent soit a, soit b. Or l'ensemble F_a des faces contenant le sommet a a exactement cinq éléments (voir le tracé, où on peut bien sûr supposer que a est bien un sommet de la face de départ f utilisée pour faire le tracé), et de même pour F_b, d'autre part l'intersection $F_a \cap F_b$ est formée des faces qui contiennent l'arête $\{a, b\}$, donc a exactement deux éléments. Il s'ensuit que $F_a \cup F_b$ a $5+5-2=8$ éléments. Comme F en a dix, il reste bien deux éléments de F pour être contenus dans $S-L$.

Il reste à prouver e) et f). Dans e), il ne reste plus qu'à prouver la relation

$$u_{f'} u_f = \mathrm{id}_f,$$

et la relation symétrique (qui s'en déduira en échangeant les rôles de F et de F'). Utilisant encore f pour faire le tracé plus haut, cette relation se lit sur la figure : l'appliquant à a par exemple (ce sera pareil pour b et c) cette relation $(a')' = a$ équivaut simplement à dire que le triangle $\{b', c', a\}$ est une face pour F', c'est à dire, n'est *pas* une face pour la structure de départ, ce qui est bien le cas.

Reste à prouver f), i.e. la bijectivité de l'application

$$c : F \mapsto (\alpha(F), u(F)) : \mathrm{Ic}(S) \longrightarrow \varepsilon_f \times P_f.$$

Cela signifie que pour tout couple (φ, u), où φ est un des triangles f, f' et où u est une bijection $u : f \xrightarrow{\sim} f'$, il existe une unique structure icosaédrale F dont il provienne. Si $\varphi = f$, cela revient à dire qu'il existe une unique structure icosaédrale admettant f comme face, et donnant lieu à la bijection u - et c'est bien ce que nous avons vu dans la construction explicite de tantôt. Si $\varphi = f''$, cela signifie qu'il existe une unique structure F tel que $f' \in F$, et que $u_f = u$. Désignant par F' la structure icosaédrale complémentaire, cela signifie aussi qu'il existe une unique structure icosaédrale F' telle que $f \in F'$ et $u_f = u$, ce qui (au changement de notation près) est ce qu'on vient de voir.

Cela achève la démonstration du théorème 1.

Définition **2**. — *Soit S un ensemble à six éléments. On appelle* structure biicosaédrale *(combinatoire gauche) sur S, une paire formée de deux structures icosaédrales complémentaires l'une de l'autre.*

En vertu de la partie d) du théorème, il y a donc sur S exactement $12/2 = 6$ structures biicosaédrales. D'après la partie f), si f est un triangle de S et f' le triangle complémentaire, l'ensemble S^* de ces six structures icosaédrales est en correspondance biunivoque canonique avec $P_f =$ ensemble des bijections de f avec f'. De façon plus précise, si on identifie l'ensemble $\mathrm{Ic}(S)$ des structures icosaédrales sur S avec l'ensemble produit $\varepsilon_f \times P_f$ comme dans f), alors l'opération $F \mapsto F'$ de passage à la structure icosaédrale complémentaire s'interprète comme l'opération

$$(\varphi, u) \mapsto (\varphi', u),$$

où pour tout φ dans l'ensemble à deux éléments $\varepsilon_f = \{f, f''\}$, φ' désigne l'autre élément de ε_f.

On appelle *biicosaèdre combinatoire gauche*" (ou simplement *biicosaèdre*) un couple $(S, \{F, F'\})$ formé d'un ensemble S à six éléments, et 'une structure biicosaédrale $\{F, F'\}$ sur S, formée de deux structures icosaédrales F, F' complémentaires l'une de l'autre.

On définit les *isomorphismes* de tels objets de la façon habituelle. On notera que deux biicosaèdres sont isomorphes, et l'ensemble des isomorphismes de l'un sur l'autre a exactement 120 éléments. Par exemple, si on regarde les automorphismes d'un biicosaèdre $(S, \{F, F'\})$, ceux-ci forment un "groupe" (au sens technique mathématique du terme : stabilité par composition et par passage à l'inverse), lequel se décompose en deux sous-ensembles disjoints, ayant chacun 60 éléments (faisant donc bine un total de 120) : le premier est formé des bijection de S avec lui-même (ou "permutations" de S) qui transforment F en lui-même, ou ce qui revient au même, F' en lui-même - en d'autres termes, ce sont les automorphismes de l'icosaèdre (S, F) (ou (S, F')). Le deuxième est formé des permutations qui transforment F en F', ou ce qui revient au même, F' en F, c'est à dire encore les isomorphismes de l'icosaèdre (S, F) avec (S, F'). Par la partie a du théorème 1, il y en a bien 60 également.

Là je me suis laissé entraîner à en dire nettement plus que ce qu'il faut pour mon propos "philosophique"[7]. La chose essentielle, c'est de bien voir la structure de l'icosaèdre (gauche), mise en évidence sur le tracé de la page PU 119, la

[7](14 avril) Par contre, c'est peu pour mon ardeur de mathématicien, laquelle s'est à nouveau réveillée ces jours derniers - et voilà repartie ma réflexion sur l'icosaèdre, cet amour mathématique de mon âge mûr ! Je vais donc peut-être rajouter à ces notes (en appendice ?) quelques compléments sur la combinatoire de l'icosaèdre et sur la géométrie des ensembles à six éléments…

notion d'icosaèdre complémentaire (donnant lieu à la notion de biicosaèdre), et enfin la description de structures icosaédrales ou biicosaédrales sur S, en termes de l'ensemble P_f des six bijection d'une triangle préalablement donné f de S, avec son complémentaire f'. Enfin, du point de vue de l'intuition géométrique spatiale de la structure combinatoire, il est fort utile, pour s'y reconnaître, d'avoir chez soi un modèle en carton de l'icosaèdre régulier ordinaire[8], lequel a douze sommets, trente arêtes et vingt faces, et de "visualiser" un icosaèdre combinatoire gauche, comme décrit (de façon essentiellement canonique, en un sens qu'il serait facile à expliciter[9]), en termes d'un icosaèdre "ordinaire" ou "pythagoricien" (vu comme un solide dans l'espace), en prenant comme sommets, arêtes et faces de l'icosaèdre gauche, les *paires* de sommets, arêtes ou faces diamétralement opposées du solide pythagoricien. C'est bien dans cet esprit qu'a été fait le tracé de la page PU 119, où les paires $\{a', a''\}$, $\{b', b''\}$ et $\{c', c''\}$ désignent justement des paires de sommets opposés de l'icosaèdre-solide, et de même pour les paires d'arêtes ($\{a', b''\}, \{a'', b'\}$) etc, qu'il nous avait fallu justement identifier à une seule arête.

[8]J'en ai un chez moi, et de toute beauté, qui représente la "copie" d'un élément de première année de Fac, pour un examen de fin d'année d'un "cours d'option" (en collaboration avec Christine Voisin) sur l'icosaèdre (en 1976, je crois). Contrairement à mon cours de DEA l'année suivante sur le même thème, ce cours adressé à des étudiants frais émoulus du lycée avait rencontré une participation chaleureuse. Les résultats à l'examen étaient si brillants que mes collègues professeurs ont cru à un canular que j'aurais monté pour discréditer le fonction enseignante, et ils ont diminué d'office toutes les notes d'un tiers (les 18 sur 20 devenant 12 sur 20). C'est à cette occasion que j'ai appris avec stupéfaction que la plupart de mes collègues considéraient comme choquante l'idée qu'un étudiant puisse prendre du plaisir à étudier et à préparer un examen. Eux-mêmes s'étaient bien assez emmerdés pour faire les études et arriver à leur belle situation de prof. de Fac, il n'y avait vraiment aucune raison que les autres à présent ne s'emmerdent à leur tour…

[9]Si on a deux telles "réalisations" par des icosaèdres-solides (ou "pythagoriciens"), alors il existe une *unique* similitude directe de l'un avec l'autre, compatible avec ces réalisations i.e. avec les "marquages" des paires de sommets opposés par les points de S. Si les deux icosaèdres ont même "taille" i.e. même longueurs d'arêtes, alors la similitude en question sera même un "déplacement".

GROTHENDIECK-MUMFORD CORRESPONDANCE

D. Mumford. Selected Papers, Volume II[10]

---

[10] https://agrothendieck.github.io/divers/GMCorr.pdf

GROTHENDIECK-SERRE CORRESPONDANCE

Pierre Colmez - Jean-Pierre Serre (Eds.), Société Mathématique de France, 2001.[1]

[1] https://agrothendieck.github.io/divers/GSCorr.pdf