MATHEMATICS

A. GROTHENDIECK

This text has been transcribed and edited by Mateo Carmona.
Remarks, comments, and corrections are welcome.

https://agrothendieck.github.io/

CONTENTS

SUR LA COMPLÉTION DU DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL LOCALEMENT CONVEXE[1]

Note[2] de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Élie Cartan.

Soient E un espace vectoriel localement convexe, S un ensemble de parties bornées, convexes, symétriques et fermées de E, E'_S (resp. $\widehat{E}'_S$), l'espace des formes linéaires sur E continues (resp. dont les restrictions aux éléments de S sont continues), munis de la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de S. Soit E_0 le sous-espace engendré par $\cup S$

[]

Proposition **1**. — *Si les éléments de S sont précompacts, pour que E'_S soit complet, il faut (et il suffit) que la restriction à E_0 de tout $u \in \widehat{E}'_S$ soit continue.*

On se ramène en effet facilement à la

Proposition **2**. — *Si les éléments de S sont précompacts, E'_S est dense dans $\widehat{E}'_S$.*

[] Comme le dual de E est le même pour la topologie donnée et sa topologie faible, et que les ensembles bornés sont faiblement précompacts, ces propositions seront d'application assez générale. Signalons la

Corollaires. —

1° Si $E_0 = E$ et si les éléments de S sont précompacts, le complété de E'_S s'identifie à $\widehat{E}'_S$.

---

[2]Séance du 6 février 1950.

C. R., 1950, i[er] *Semestre*. (T. 230 N° 7.).

2° *Si E'_S est complet, il en est de même de E'_T pour $T \supset S$ (S, T ensembles de parties bornées de E, sans plus).*

En utilisant le fait que E s'identifie à un dual topologique de son dual faible, on obtient de plus :

3° *Le complété de E s'identifie à l'espace des formes linéaires sur son dual dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, muni de la topologie de la convergence uniforme sur ces parties. (On retrouve en particulier le complété pour la topologie faible.)*

4° *Si E est complet, toute topologie localement convexe plus fine qui a même dual, et plus généralement qui puisse se définir par une famille de seminormes* semi-continues *(soit : par un système fondamental de voisinages convexes fermés) est encore complète. [En particulier la topologie forte de Mackey associée*[3] *et la topologie induite par le bidual fort*[4] *sont encore complétes.]*

5° *Si E est complet, toute forme linéaire sur son dual dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues est faiblement continue. On retrouve ainsi un fait connu pour les espaces de Fréchet et leurs limites inductives*[4].

---

[3] Cf. G. W. MACKEY, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 57, 1945, p. 155-207 et 59, 1946, p. 530-537

[4] Cf. J. DIEUDONNÉ, et L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces* (F) *et* (LF) (à paraitre aux *Annales de Grenoble*, 1950).

QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS À LA DUALITÉ DANS LES ESPACES (F)[5]

Note[6] de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Soient E un espace (F), E' son dual fort, E'' son bidual fort [?][1]. Les résultats suivants répondent partiellement à certaines questions posées dans [?].

Proposition **1**. — *Toute partie bornée dénombrable de E'' est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de E.*

[6]Séance du 30 octobre 1950

[1]J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ, La dualité dasn les espaces (F) et (LF) (à paraître aux *Annales de Grenoble*, 1950). La terminologie est celle de cet article.

CRITÈRES GÉNÉRAUX DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXES. PATHOLOGIES DES ESPACES (LF)[2]

Note[3] de M. Alexandre Grothendieck, présentée par M. Arnaud Denjoy.

La première partie de cette Note

1. —

[3]Séance du 30 octobre 1950

Soit C un espace de Banach

A GENERAL THEORY OF FIBRE SPACES
WITH
STRUCTURE SHEAF

Introduction

When one tries to state in a general algebraic formalism the various notions of fibre space: general fibre spaces (without structure group, and maybe not even locally trivial); or fibre bundle with topological structure group G as expounded in the book of Steenrod ([]); or the "differeniable" and "analytic" (real or complex) variants of theses notions; or the notions of algebraic fibre spaces (over an abstract field k) - one is led in a natural way to the notion of fibre space with a structure sheaf $\mathbf{G}$. This point of view is also suggested a priori by the possibility, now classical, to interpret the (for instance "topological") classes of fibre bundles on a space X, with *abelian* structure group G, as the elements of the first cohomology group of X with coefficients in the sheaf $\mathbf{G}$ of germs of continuous maps of X into G; the word "continuous" being replaced by "analytic" respectively "regular" if G is supposed an analytic respectively an algebraic group (the space X being of course accordingly an analytic or algebraic variety). The use of cohomological methods in this connection have proved quite useful, and it has become natural, at least as a matter of notation, even when G is not abelian, to denote by $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ the set of classes of fibre spaces on X with structure sheaf $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}$ being as above a sheaf of germs of maps (continuous, or differentiable, or analytic, or algebraic as the case may be) of X into G. Here we develop systematically the notion of fibre space with structure sheaf $\mathbf{G}$, where $\mathbf{G}$ is any sheaf of (not necessarily abelian) groups, and of the first cohomology set $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ of X with coefficients in $\mathbf{G}$. The first four chapters contain merely the first definitions concerning general fibre spaces, sheaves, fibre spaces with composition law (including sheaves of groups) and fibre spaces with structure sheaf. The functor aspect of the notions dealt with has been stressed throughout, and as it now appears should have been stressed even more. As the proofs of most of the facts stated reduce of course to straightforward verifications, they are only sketched or even omitted, the important point being merely a consistent order in the statement of the main facts. In the las chapter, we define the cohomology set $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ of X with coefficients in the sheaf of groups $\mathbf{G}$,

[]

I. General fibre spaces

Unless otherwise stated, none of the spaces to occur in this report have to be supposed separated.

1.1 Notion of fibre space

Definition **1.1.1.** — *A* fibre space *over a space X is a triple (X, E, p) of the space X, a space E and a continuous map p of E into X.*

We do not require p to be onto, still less to b open, and if p is onto, we do not require the topology of X to be the quotient topology of E by the map p. For abbreviation, the fibre space (X, E, p) will often be denoted by E only, it being understood that E is provided with the supplementary structure consisting of a continuous map p of E into the space X. X is called the *base space* of the fibre space, p the *projection*, and for any $x \in X$, the subspace $p^{-1}(x)$ of E (which is closed if $\{x\}$ is closed) is the *fibre* of x (in E).

Given two fibre spaces (X, E, p) and (X', E', p'), a *homomorphism* of the first into the second is a pair of continuous maps $f : X \longrightarrow X'$ and $g : E \longrightarrow E'$, such that $p'g = f p$, i.e. commutativity holds in the diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow[f]{} & X' \end{array}$$

Then g maps fibres into fibres (but not necessarily *onto*!); furthermore, if p is surjective, then f is uniquely determined by g. The continuous map f of X into X' being given, g will be called also a f-homomorphism of E into E'. If, moreover, E'' is a fibre space over X', f' a continuous map $X' \longrightarrow X''$ and $g' : E' \longrightarrow E''$ a f'-homomorphism, then $g'g$ is a $f'f$-homomorphism. If f is the identity map of X onto X, we say also X-homomorphism instead of f-homomorphism. If we speak of homomorphisms of fibre spaces over X, without further comment, we will always mean X-homomorphisms.

The notion of *isomorphism* of a fibre space (X,E,p) onto a fibre space (X',E',p') is clear: it is a homomorphism (f,g) of the first into the second, such that f and g are onto-homeomorphisms.

1.2 Inverse image of a fibre space, inverse homomorphisms

Let (X,E,p) be a fibre space over the space X, and let f be a continuous map of a space X' into X. Then the *inverse image* of the fibre space E by f is a fibre space E' over X'. E' is defined as the subspace of $X' \times E$ of points (x',y) such that $f x' = py$, the projection p' of E' into the base X' being given by $p'(x',y) = x'$. The map $g(x',y) = y$ of E' into E is then an f-homomorphism, inducing for each $x' \in X'$ a *homeomorphism* of the fibre of E' over x' *onto* the fibre of E over $f'x'$.

[]

1.3 Subspace, quotient, product

Let (X,E,p) be a fibre space, E' any subspace of E, then the restriction p' of p to E', defines E'

[]

1..4 Trivial and locally trivial fibre spaces

Let X and F be two spaces, E the product space, the projection of the product on X defines E as a fibre space over X, called the *trivial fibre space over X with fibre F*.

All fibres are canonically homeomorphic with F.

[]

1.5 Definition of fibre spaces by coordinate transformations

Let X be a space, (U_i) a covering of X, for each

[]

1.6 The case of locally trivial fibre spaces

The method of the preceding section for constructing fibre spaces over X will be used mainly in the case where we are given a fibre space over T over X, and where, given an open covering (U_i) of X, we consider the fibre spaces

[]

1.7 Sections of fibre spaces

Definition **1.7.1**. — *Let (X, E, p) b a fibre space; a* section *of this fibre space (or, by pleonasm, a section of E over X) is a map x of X into E such that ps is the the identity map of X. The set of* continuous *sections of E is noted* $\mathrm{H}^0(X, E)$.

It amounts to the same to say that s is a function the value of which at each $x \in X$ is in the fibre of x in E (which depends on x!).

The existence of a section implies of course that p is onto, and conversely if we do not require continuity. However, we are primarily interested in continuous sections. A *section of E over a subset Y* of X is by definition a section of $E|Y$. If Y is open, we write $\mathrm{H}^0(Y, E)$ for the set $\mathrm{H}^0(Y, E|Y)$ of all continuous sections of E over Y.

$\mathrm{H}^0(X, E)$ as a *functor*. Let E, E' be two fibre spaces over X, f an X-homomorphism of E into E'. For any section s of E, the composed map fs is a section of E', continuous if s is continuous. *We get thus a map, noted f, of* $\mathrm{H}^0(X, E)$ *into* $\mathrm{H}^0(X, E')$. The usual functor properties are satisfied:

a. If the two fibre spaces are identical and f is the identity, the so is f.

b. If f is an X-homomorphism of E into E' and f' an X-homomorphism of E' into E'' (E, E', E'' fibre spaces over X) then $(f'f) = f'f$.

Let (X, E, p) be a fibre space, f a continuous map of a space X' into X, and E' the inverse image of E under f.

II. Sheaves of sets

Throughout this exposition, we will now use the word *"section"* for *"continuous section"*.

2.1 Sheaves of sets

Definition **2.1.1**. — *Let X be a space. A* sheaf of sets *on X (or simply a* sheaf*) is a fibre space (E, X, p) with base X, satisfying the condition: each point a of E has an open neighbourhood U such that p induces a homeomorphism of U onto an open subset $p(U)$ of X.*

This can be expressed by saying that p is an interior map and a local homeomorphism. It should be kept in mind that, even if X is separated, E is not supposed separated (and will in most important instances not be separated).

[]

2.2

2.3 Definition of a sheaf by systems of sets

2.4 Permanence properties

2.5 Subsheaf, quotient sheaf. Homeomorphism of sheaves

2.6 Some examples

a.

b.

c.

d. **Sheaf of germs of subsets**. Let X be a space, for any open set $U \subset X$ let $P(U)$ be the set of subsets of U. If $V \subset U$, consider the map $A \longrightarrow A \cap V$ of $P(U)$ into $P(V)$. Clearly the conditions of transitivity, and of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, so that the sets $P(U)$ appear as the sets $\mathrm{H}^0(U, P(X))$ of sections of a well determined sheaf on X, the elements of which are called *germs of sets in X*. Any condition of a local character on subsets of X defines a subsheaf of $P(X)$, for instance the sheaf of *germs* *of closed sets* (corresponding to the relatively closed sets in U), or if X is an analytic manifold, the sheaf of germs of analytic sets, etc.

Other important examples of sheaves will be considered in the next chapter.

III. Group bundles and sheaves of groups

IV. Fibre spaces with structure sheaf

V. The classification of fibre spaces with structure sheaf

SOME ASPECTS OF HOMOLOGICAL ALGEBRA[1]

[1]Translation by M. L. Barr and M. Barr

1. Dans un travail récent [?], Mattuck et Tate déduisent l'inégalité fondamentale de A. Weil qui établit l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions [?] comme conséquence facile du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces. En essayant de comprendre la portée exacte du leur méthode, je suis tombé sur l'énoncé suivant, connu en fait depuis 1937 [?] [?] [?] (comme me l'a signalé J. P. Serre), mais apparemment peu connu et utilisé:

[]

2. Nous allons déduire sur X, nous désignerons par $l(D)$ la dimension de l'espace vectoriel des fonctions f sur X telles que $(f) \geq -D$ donc $l(D)$ ne dépend que de la classe de D. Rappelons *l'inégalité de Riemann-Roch*

[]

3. Ce qui précède n'utilisait pas à proprement parler la méthode de Mattuck-Tate (si ce n'est en utilisant l'inegalité de Riemann-Roch sur les surfaces). Nous allons indiquer maintenant comment la méthode de ces auteurs, convenablement généralisée, donne d'autres inégalités que celle de A. Weil. Nous nous appuierons sur le

[]

Remarques. Le corollaire 1 devient faux si on ne fait pas l'hypothèse que $K/2$ est encore une classe de diviseurs. En effet, toutes les hypothèses sauf cette dernière sont vérifiées si X est un surface non singulière *rationnelle*. Or, à partir d'une telle surface, on construit facilement une surface birationnellement équivalente par éclatements successifs, dont l'index τ soit < 0 (contrairement à (3.7 ter)). En effet, on vérifie aisément que lorsqu'on fait éclater un point dans une surface non singulière projective, l'index diminue d'une unité. (Cette remarque, ainsi que l'interprétation de l'inégalité (3.7) a l'aide de l'index, m'a été signalée par J. P Serre).

La disparité des énoncés qu'on déduit du théorème (3.2) est due au fait qu'il n'est pas relatif à un élément arbitraire de l'espace vectoriel E de Néron-Séveri introduit plus haut, mais à un élément du "lattice" provenant des diviseurs sur X. On notera d'ailleurs que dans le cas particulier où X est le produit des deux courbes C et C', le théorème 3.2 ne contient rien de plus que l'inégalité de A. Weil.

THE COHOMOLOGY THEORY OF ABSTRACT ALGEBRAIC VARIETIES

It is less than four years since cohomological methods (i.e. methods of Homological Algebra) were introduced into Algebraic geometry in Serre's fundamental paper [?], and it seems already certain that they are to overflow this part of mathematics in the coming years, from the foundations up to the most advanced parts. All we can do here is to sketch briefly some of the ideas and results. None of these have been published in their final form, but most of them originated in or were suggested by Serre's paper.

Let us first give an outline of the main topics of cohomological investigation in Algebraic geometry, as they appear at present. The need of a theory of cohomology for 'abstract' algebraic varieties was first emphasized by Weil, in order to be able to give a precise meaning to his celebrated conjectures in Diophantine geometry [?]. Therefore the initial aim was to find the *'Weil cohomology' of an algebraic variety*, which should have as coefficients something 'at least as good' as a field of *characteristic 0*, and have such formal properties (e.g. duality, Künneth formula) as to yield the analogue of Lefschetz's 'fixed-point formula'. Serre's general idea has been that the usual 'Zariski topology' of a variety (in which the closed sets are the algebraic subset) is a suitable one for applying methods of Algebraic Topology. His first approach was hoped to yield at least the right Betti numbers of a variety, it being evident from the start that it could not be considered as the Weil cohomology itself, as the coefficient field for cohomology was the ground field of a variety, and therefore not in general of characteristic 0. In fact, even the hope of getting the 'true' *Betti numbers* has failed, and so have other attempts of Serre's [?] to get Weil's cohomology by taking the cohomology of the variety with values, not in the sheaf of local rings themselves, but in the sheaves of Witt-vectors constructed on the latter. He gets in this way modules over the ring $W(k)$ of infinite Witt vectors on the ground field k, and $W(k)$ is a ring of characteristic 0 even if k is of characteristic $p \neq 0$. Unfortunately, modules thus obtained over $W(k)$ may be infinitely generated, even when the variety V is an abelian variety [?]. Although interesting relations must certainly exist between these cohomology groups and the 'true ones', it seems certain now that the Weil cohomology has to be defined by a completely different approach. Such an approach was recently suggested to me by the *connections between sheaf-theoretic cohomology and cohomology of Galois groups on the one hand, and the classification of unramified coverings of a variety on the other* (as explained quite unsystematically in Serre's tentative Mexico paper [?]), and by Serre's idea that a 'reasonable' algebraic principal fiber space with structure group G, defined on a variety V, if it is not locally trivial, should become locally trivial on some covering of V *unramified* over a given point of V. This has been the starting point of a definition of the Weil cohomology (involving both 'spatial' and Galois cohomology), which seems to be the right one, and which gives clear suggestions how Weil's conjectures may be attacked by the machinery of Homological algebra. As I have not begun theses investigations seriously as yet,and as moreover this theory has a quite distinct flavor from the one of the theory of algebraic coherent sheaves which we shall now be concerned with, we shall not dwell any longer on Weil's cohomology. Let us merely remark that the definition alluded to has already been the starting-point of a theory of cohomological dimension of fields, developed recently by Tate [?].

The second main topic for cohomological methods is the *cohomology theory of algebraic coherent sheaves*, as initiated by Serre. Although inadequate for Weil's purposes, it is at present yielding a wealth of new methods and new notions, and gives the key even for results which were not commonly thought to be concerned with sheaves, still less with cohomology, such as Zariski's theorem on 'holomorphic functions' and his 'main theorem' - which can be stated now in a more satisfactory way, as we shall see, and proved by the same uniform elementary methods. The main parts of the theory, at present, can be listed as follows:

(a) General finiteness and asymptotic behaviour theorems.

(b) Duality theorems, including (respectively identical with) a cohomological theory of residues.

(c) Riemann-Roch theorem, including the theory of Chern classes for algebraic coherent sheaves.

(d) Some special results, concerning mainly abelian varieties.

The third main topic consists in the *application of the cohomological methods to local algebra*. Initiated by Koszul and Cartan-Eilenberg in connection with Hilbert's 'theorem of syzygies', the systematic use of these methods is mainly due again to Serre. The results are the *characterization* of regular local rings as those whose global cohomological dimension is finite, the clarification of *Cohen-Macaulay's equidimensionality theorem* by means of the notion of *cohomological codimension* [?], and specially the possibility of giving (for the first time as it seems) a *theory of intersections*, really satisfactory by its algebraic simplicity and its generality. Serre's result just quoted, that regular local rings are the the only ones of finite global cohomological dimension, accounts for the fact that only for such local rings does a satisfactory theory of intersections exist. I cannot give any details here on these subjects, nor on various results I have obtained by means of a *local duality theory*, which seems to be the tool which is to replace differential forms in the case of unequal characteristics, and gives, in the general context of commutative algebra, a clarification of the notion of residue, which as yet was not at all well understood. The motivation of this latter work has been the attempt to get a global theory of duality in cohomology for algebraic varieties admitting arbitrary singularities, in order to be able to develop intersection formulae for cycles with arbitrary singularities, in a non-singular algebraic variety, formulas which contain also a 'Lefschetz formula mod p' [?]. In fact, once a proper local formalism is obtained, the global statements become almost trivial. As a general fact, it appears that, to a great extent, the 'local' results already contain a global one; more precisely, global results on varieties of dimension n can frequently be deduced from corresponding local ones for rings of Krull dimension $n+1$.

We will therefore

[]

TAPIS DE QUILLEN

---

1. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux

A toute catégorie C, on associe un ensemble semi-simplicial $S(C)$, trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$S : \longrightarrow .$$

Les systèmes locaux d'ensemble sur SC correspondent aux foncteurs sur C qui transforment toute flèche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à C). Les H^i sur SC d'un tel système local (H^0 pour ensembles, H^1 pour groupes, H^i quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs $\varprojlim^{(i)}$ dérivés de $\varprojlim$, ou si on préfère, des H^i (du *topos* C). On voit ainsi à quelle condition un foncteur $C \longrightarrow C'$ induit un homotopisme $SC \longrightarrow SC'$: en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il f et s que pour tout système de coefficients F' sur C', l'homomorphisme naturel $\varprojlim^{(i)}_{C'} F' \longrightarrow \varprojlim^{(i)}_{C} F$ soit un isomorphisme (pour les i pour lesquels cela a un sens).

A C on peut associer le topos $\widetilde{C}$, qui varie de façon *covariante* avec C. (NB le foncteur $C \mapsto \widetilde{C}$ n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??).

Les systèmes de coefficients ensemblistes sur C (les foncteurs $C^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux localement constants i.e. les objets localement constants de $\widetilde{C}$, définis intrinsèquement en termes de $\widetilde{C}$. Ainsi, le fait pour un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ d'induire une homotopisme $S(C) \longrightarrow S(C')$ ne dépend que du morphisme de topos $\widetilde{F} : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C'}$ induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant F' sur C' i.e. sur $\widetilde{C'}$, les applications induites $\mathrm{H}^i(\widetilde{C'}, F') \longrightarrow \mathrm{H}^i(\widetilde{C}, \widetilde{F}^*(F'))$ sont des isomorphismes (pour les i pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T :\longrightarrow ,$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial X la catégorie $T(X) = \Delta_{/X}$ des simplexes sur X, dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des X_n... (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie Δ des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les X_n). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout X, $ST(X)$ est isomorphe canoniquement à X dans la catégorie homotopique construite avec , et que pour toute C, la catégorie $TS(C)$ est canoniquement "homotopiquement équivalente à C" i.e. canoniquement isomorphe a C dans la catégorie quotient de obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. Ces isomorphismes sont fonctoriels en X. Il en résulte formellement qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans est un homotopisme si et seulement si en est ainsi de $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$, d'où des foncteurs $S' :' \longrightarrow '$ et $T' :' \longrightarrow '$ entre les catégories "homotopiques", construites avec resp , qui sont quasi-inverses l'un de l'autre.

De plus, Quillen contruit un isomorphisme canonique et fonctoriel dans $'$ entre C et la catégorie opposée C°, ou ce qui revient au même, un isomorphisme canonique et fonctoriel dans $'$ entre $S(C)$ et $S(C^\circ)$. La définition est telle que le foncteur induit sur les systèmes locaux sur C transforme le foncteur contravariant F sur C, transformant toute flèche en flèche inversible, en le foncteur covariant (i.e. contravariant sur C°) ayant mêmes valeurs sur les objets, et obtenu sur les flèches en remplaçant $F(u)$ par $F(u)^{-1}$; en d'autres termes, l'effet de l'homotopisme de Quillen sur les groupoïdes fondamentaux est l'isomorphisme évident entre les groupoïdes fondamentaux de C et de C°, compte tenu que le deuxième est l'opposé du premier. Comme application, Quillen obtient une interprétation faisceautique de la cohomologie d'un ensemble semi-simplicial à coefficients dans un système local covariant F (défini classiquement par le complexe cosimplicial des $C^n(F) = \amalg_{x \in X_n} F(x)$): on considère le système local contravariant défini par F, on l'interprète comme un faisceau sur $T(X)$ i.e. objet de $_{/X}$, et on prend sa cohomologie. - Cependant, quand F est un système de coefficients covariant pas nécessairement local, on n'a toujours pas d'interprétation de ses groupes de cohomologie classiques en termes faisceautiques; ni, lorsque F est contravariant, de son homologie, ou inversement de sa cohomologie faisceautique en termes classiques.

A propos de la notion de foncteur qui est un homotopisme. Quillen montre qu'un tel foncteur $F : C \longrightarrow C'$ induit une équivalence entre la sous-catégorie triangulée $\mathbb{D}^b_{lc}(C')$ de la catégorie dérivée bornée de celle des faisceaux abéliens sur C', dont les faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux, et la catégorie analogue pour C; et réciproquement. On peut dans cet énoncé introduire aussi n'importe quel anneau de base (à condition de le supposer $\neq 0$ dans le cas de la réciproque); la partie dire vaut aussi avec un anneau de coefficients par nécessairement constant, mains constant tordu. Je pense que ce résultat (facile) doit pouvoir se généraliser ainsi.

Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de topos qui soit tel que pour tout faisceau localement constant sur X', f induise un isomorphisme sur les cohomologies (avec cas non commutatif inclus). Supposons que X et X' soit *localement homotopiquement trivial*, i.e. que pour tout entier $n \geq 1$, tout objet U ait un recouvrement par des $U_i \longrightarrow U$, tels que a) tout système local sur U devient constant sur U_i, et toute section sur U devient constant sur U_i et b) pour tout groupe abélien G, les $\mathrm{H}^j(U,G) \longrightarrow \mathrm{H}^j(U_i,G)$ sont nuls pour $1 \leq j \leq n$ [1]. Alors le foncteur $\mathbb{D}^b_{lc}(X') \longrightarrow \mathbb{D}^b_{lc}(X)$ induit par f est une équivalence. Même énoncé si on met dans le coup un système local d'anneaux sur X'. Enfin, f induit une équivalence entre la catégorie des coefficients locaux sur C et celle des coefficients locaux sur C'.

2. n-catégories, catégories n-uples, et Gr-catégories

3. Point de vue “motivique” en théorie du cobordisme

[1] Attention, cette condition n'est typiquement pas satisfaite par les schémas sur []

HODGE'S GENERAL CONJECTURE IS FALSE FOR TRIVIAL REASONS

A. Grothendieck

(Received 27 October 1968)[2]

---

§1. — The startling title is somewhat misleading, as everybody will think about a part of the Hodge conjecture which is most generally remembered, namely the part concerned with a criterion for a cohomology class (on a projective smooth connected scheme X over $\mathbf{C}$) to be "algebraic", i.e. to come from an algebraic cycle with rational[3] coefficients. This conjecture is plausible enough, and (as long as it is not disproved) should certainly be regarded as the deepest conjecture in the "analytic" theory of algebraic varieties. However in [6, p. 184], Hodge gave a more general formulation of his conjecture in terms of filtrations of cohomology spaces, and the main aim of my note is to show that for a rather trivial reason, this formulation has to be slightly corrected.

Consider on the complex cohomology

$$\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C}) = \mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

(X^{an} denotes the analytic space associated to the scheme X) the "Hodge filtration"

[]

§2. — This makes clear how the Hodge conjecture should be corrected, to eliminate

[2] *Topology* Vol. 8, pp. 299-303. Pergamon Press, 1969. Printed in Great Britain

[3] In fact, Hodge states his conjecture for integral cohomology. That this is too optimistic was proved in [1]

trivial counterexamples: namely the left hand side of ($*$) should be the largest sub-space of the right hand side, generating a subspace of $\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C})$ which is a sub-Hodge structure, i.e. stable under decomposition into p, q types. In other words, an element of $\mathrm{H}^i(X^{an}, \mathbf{C})$ should belong to Filt'^p if and only if all its bihomogeneous components belong to the $\mathbf{C}$-vector space generated by the right hand side of ($*$).

This formulation may seem a little too cumbersome to inspire confidence. To make it look better, we may remark that it is equivalent to the conjunction of the usual Hodge conjecture

[]

§3. — It may be of interest to review here the few non trivial instances known to the author where the Hodge conjecture has been checked.

[]

§4. — In most concrete examples, it seems very hard to *check* the Hodge conjecture, due to the difficulty in explicitly determining the filtration Filt' of the cohomology, and even in determining simply the part of the cohomology coming from algebraic classes. It may be easier, for the time being, to *test* the Hodge conjectures in various non trivial cases, through various consequences of the Hodge conjectures which should be more amenable to direct verification. I would like to mention here two such consequences, which can be seen in act to be consequences already of the *usual* Hodge conjecture.

First, if X is as before, the dimensions of the graded components of the vector space associated to the arithmetic filtration Filt' (and indeed this very filtration itself, if we interpret complex cohomology as the de Rham cohomology, which makes a purely algebraic sense) is clearly invariant if we transform X by any automorphism of the field $\mathbf{C}$, or equivalently, if we change the topology of C by such an automorphism. In other words, if we have a smooth projective scheme X over a field K of char 0, then the invariants we get by different embeddings of K into the field $\mathbf{C}$ are the same. Granting the Hodge conjecture, the same should be true if we replace the Filt' filtration by the filtration described in §2 in terms of the Hodge structure (which is a transcendental description). What if we take for instance for X a "general" abelian variety of given dimension of powers of it, or powers of a "general" curve C of given genus? The case of genus 1 checks by Tate's result recalled in example c) above.

Secondly, and more coarsely, if we have a projective and smooth morphism $f : X \longrightarrow S$

of algebraic schemes over **C**, we can for every $s \in S$ consider the complex cohomology of the fiber X, as a Hodge structure, and look at the filtration "rational over **Q**" which it defines (and which conjecturally should be the arithmetic filtration). Hodge's conjecture would imply that the set of points $s \in S^{an}$ where the dimensions of the components of the associated graded space have fixed values has a very special structure: it should be the difference of two countable unions of Zariski-closed subsets of S, which in fact should even be definable over a fixed subfield of **C**, of finite type over the field **Q**. (A simple application of Baire's theorem, not using Hodge's conjecture, would give us only a considerably weaker structure theorem for the set in question, where Zariski-closed subsets would be reaplced by the images, under the projection of the universal covering $\widetilde{S}$ of S^{an}, of analytic subsets of $\widetilde{S}$[4].)

REFERENCES

1.

[4](Added April 1969) David Lieberman has informed me that he can prove the stronger result obtained by replacing $\widetilde{S}$ by S^{an} itself.

STANDARD CONJECTURES ON ALGEBRAIC CYCLES

1. Introduction

We state two conjectures on algebraic cycles, which arose fro an attempt at understanding the conjectures of Weil on the ζ-functions of algebraic varieties. These are not really new, and they were worked out about three years ago independently by Bombieri and myself.

The first is an existence assertion for algebraic cycles (considerably weaker than the Tate conjectures), and is inspired by and formally analogous to Lefschetz's structure theorem on the cohomology of a smooth projective variety over the complex field.

The second is a statement of positivity, generalising Weil's well-known positivity theorem in the theory of abelian varieties. It is formally analogous to the famous Hodge inequalities, and is in fact a consequence of these in characteristic zero.

WHAT REMAINS TO BE PROVED OF WEIL'S CONJECTURES? Before stating our conjectures, let us recall what remains to be proved in respect of the Weil conjectures, when approached through ℓ-adic cohomology.

Let $X/\mathbf{F}_q$ be a smooth irreducible projective variety of dimension n over the finite field $\overline{\mathbf{F}}_q$ with q elements, and ℓ a prime different from the characteristic. It has then been proved by M. Artin and myself that the Z-function of X can be expressed as

$$
\begin{aligned}
Z(t) &= \frac{L'(t)}{L(t)}, \\
L(t) &= \frac{L_0(t)L_2(t)\dots L_{2n}(t)}{L_1(t)L_3(t)\dots L_{2n-1}(t)}, \\
L_i(t) &= \frac{1}{P_i(t)},
\end{aligned}
$$

where $P_i(t) = t^{\dim \mathrm{H}^i(\overline{X})} Q_i(t^{-1})$, Q_i being the characteristic polynomial of the action of the Frobenius endomorphism of X on $\mathrm{H}^i(\overline{X})$ (here H^i stands for the i^{th} ℓ-adic cohomology group and $\overline{X}$ is deduced from X by base extension to the algebraic closure of $\mathbf{F}_q$). But it has not been proved so far that

(a) the $P_i(t)$ have integral coefficients, independent of $\ell (\neq \operatorname{char} \mathbf{F})$;

(b) the eigenvalues of the Forbenius endomorhisms on $\mathrm{H}^i(\overline{X})$, i.e., the reciprocals of the roots of $P_i(t)$, are of absolute value $q^{i/2}$.

Our first conjecture meets question (a). The first and second together would, by an idea essentially due to Serre [?], imply (b).

2. A weak form of conjecture 1

From now on, we work with varieties over a ground field k which is algebraically closed and of arbitrary characteristic. Then (a) leads to the following question: If f is an endomorphism of a variety X/k and $\ell \neq \operatorname{char} k$, f induces

$$
f^i : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(x),
$$

and each of these f^i has a characteristic polynomial. *Are the coefficients of these polynomials rational integers, and are they independent of ℓ?* When X is smooth and proper of dimension n, the same question is meaningful when f is replaced by any cycle of dimension n in $X \times X$, considered as an algebraic correspondence.

In characteristic zero, one sees that this is so by using integral cohomology. If $\operatorname{char} k > 0$, one feels certain that this is so, but this has not been proved so far.

Let us fix for simplicity an isomorphism

$$\ell^{\infty k^* \simeq \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell} \qquad \text{(a heresy!).}$$

We than have a map

$$: F^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \longrightarrow \mathrm{H}_\ell^{2i}(X)$$

which associates to an algebraic cycle its cohomology class. We denote by $C_\ell^i(X)$, and refer to its elements as *algebraic cohomology classes*.

A known result, due to Dwork-Faton, shows that for the integrality question (not to speak of the independence of the characteristic polynomial of ℓ), it suffices to prove that

$$f_i^N \in \frac{1}{m}\mathbf{Z} \quad \text{for every } N \geq 0,$$

where m is a fixed positive integer[5]. Now, the graph Γ_{f^N} in $X \times X$ of f^N defines a cohomology class on $X \times X$, and if the cohomology class Δ of the diagonal in $X \times X$ is written as

$$\Delta = \sum_0^n \pi_i$$

where π_i are the projections of Δ onto $\mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^{n-i}(X)$ for the canonical decomposition $\mathrm{H}^n(X \times X) \simeq \sum_{i=0}^n \mathrm{H}^i(X) \otimes \mathrm{H}^{n-i}(X)$, a known calculation shows that

$$(f^N)_{\mathrm{H}^i} = (-1)^i (\Gamma_{f^N}) \pi_i \in \mathrm{H}^{4n}(X \times X) \approx \mathbf{Q}_\ell.$$

Assume that the π_i are algebraic. Then $\pi_i = \frac{1}{m}(\prod_i)$, where $\prod_i$ is an algebraic cycle, hence

$$(f^N)_{\mathrm{H}^i} = (-1)^i (\prod_i \Gamma_{f^N}) \in \frac{1}{m}\mathbf{Z}$$

and we are through.

WEAK FORM OF CONJECTURE 1. ($C(X)$): The elements π_i^ℓ are algebraic, (and come from an element of $F^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, which is independent of ℓ).

N.B.

1. The statement in parenthesis is needed to establish the independence of P_i on ℓ.

2. If $C(X)$ and $C(Y)$ hold, $C(X \times Y)$ holds, and more generally, the Künneth components of any algebraic cohomology class on $X \times Y$ are algebraic.

[5]This was pointed out to me by S. Kleimann.

3. The conjecture 1 (of Lefschetz type)

Let X be smooth and projective, and $\xi \in \mathrm{H}^2(X)$ the class of a hyperplane section. Then we have a homomorphism

$$(*) \qquad \cup\xi^{n-i} : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X) \quad (i \leq n).$$

It is expected (and has been established by Lefschetz [?], [?] over the complex field by transcendental methods) that this is an isomorphism for all characteristics. For $i = 2j$, we have the commutative square

[]

Our conjecture is then: $(A(X))$:

(a) *(*) is always an isomorphism (the mild form);*

(b) *if $i = 2j$. (*) induces an isomorphism (or equivalently, an epimorphism) $C^j(X) \longrightarrow C^{n-j}(X)$.*

N.B. If $C^j(X)$ is assumed to be finite dimensional, (b) is equivalent to the assertion that $\dim C^{n-j}(X) \leq \dim C^j(X)$ (which in particular implies the equality of these dimensions in view of (a)).

An equivalent formulation of the above conjecture (for all varieties X as above) is the following.

$(B(X))$: *The Λ-operation (c.f. [?]) of Hodge theory is algebraic.*

By this, we mean that there is an algebraic cohomology class λ in $\mathrm{H}^*(X \times X)$ such that the map $\Lambda : \mathrm{H}^*(X) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X)$ is got by lifting a class from X to $X \times X$ by the first projection, cupping with λ and taking the image in $\mathrm{H}^*(X)$ by the Gysin homomorphism associated to the second projection

Note that $B(X) \Rightarrow A(X)$, since the algebricity of λ implies that of λ^{n-i}, and λ^{n-i} provides an inverse to $\cup\xi^{n-i} : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X)$. On the other hand, it is easy to show that $A(X \times X) \Rightarrow B(X)$ and this proves the equivalence of conjectures A and B.

The conjecture seems to be most amenable in the form of B. Note that $B(X)$ is stable for products, hyperplane sections and specialisations. In particular, since it holds for projective spaces, it is also true or smooth varieties which are complete intersections in some projective space. (As a consequence, we deduce for such varieties the wished-for integrality theorem for the Z-function!). It is also verified for Grassmannians, and for abelian varieties (Liebermann [?]).

I have an idea of a possible approach to Conjecture B, which relies in turn on certain unsolved geometric questions, and which should be settled in any case.

Finally, we have the implication $B(X) \Rightarrow C(X)$ (first part), since the π_i can be expressed as polynomials with coefficients in $\mathbf{Q}$ of λ and $L = \cup\xi$. To get the whole of $C(X)$, one should naturally assume further that there is an element of $F(X \times X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ which gives λ for every ℓ.

4. Conjecture 2 (of Hodge type)

For any $i \leq n$, let $P^i(X)$ be the 'primitive part' of $\mathrm{H}^i(X)$, that is, the kernel of $\cup\xi^{n-i+1}$: $\mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i+2}(X)$, and put $C^j_{Pr}(X) = P^{2j} \cap C^j(X)$. On $C\widehat{\Theta}_{Pr}(X)$, we have a $\mathbf{Q}$-valued symmetric bilinear form given by

$$(x, y) \longrightarrow (-1)^j K(xy\xi^{n-2j})$$

where K stands for the isomorphism $\mathrm{H}^{2n}(X) \simeq \mathbf{Q}_\ell$. Our conjecture is then that

(Hdg(X)): *The above form is positive definite.*

One is easily reduced to the case when $\dim X = 2m$ is even, and $j = m$.

REMARKS.

(1) In characteristic zero, this follows readily from Hodge theory [?].

(2) $B(X)$ and Hdg($X \times X$) imply, by certain arguments of Weil and Serre, the following: if f is an endomorphism of X such that $f^*(\xi) = q\xi$ for some $q \in \mathbf{Q}$ (which is necessarily > 0), then the eigenvalues of $f_{\mathrm{H}^i(X)}$ are algebraic integers of absolute value $q^{i/2}$. Thus, this implies all of Weil's conjectures.

(3) The conjecture $Hdg(X)$ together with $A(X)(a)$ (the Lefschetz conjecture in cohomology) implies that numerical equivalence of cycles is the same as cohomological equivalence for any ℓ-adic cohomology if and only if $A(X)$ holds.

(4) In view of (3), $B(X)$ and $Hdg(X)$ imply that numerical equivalence of cycles coincides wit $\mathbf{Q}_\ell$-equivalence for any ℓ. Further the natural map

$$\mathrm{Z}^i(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^i_\ell(X)$$

is a monomorphism, and in particular, we have

$$\dim_{\mathbf{Q}} C^i(X) \leq \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i_\ell(X).$$

Note that for the deduction of this, we do not make use of the positivity of the form considered in $\mathrm{Hdg}(X)$,but only the fact that it is non-degenerate.

Another consequence of $Hdg(X)$ and $B(X)$ is that the stronger version of $B(X)$, viz. that λ comes from an algebraic cycle with rational coefficients *independent of* ℓ, holds.

Conclusions

The proof of the two standard conjectures would yield results going considerably further than Weil's conjectures. They would form the basis of the so-called "theory of motives" which is a systematic theory of "arithmetic properties" of algebraic varieties, as embodied in their groups of classes of cycles for numerical equivalence. We have at present only a very small part of this theory in dimension one, as contained in the theory of abelian varieties.

Alongside the problem of resolution of singularities, the proof of the standard conjectures seems to me to be the most urgent task in algebraic geometry.

CURRICULUM VITAE DE ALEXANDRE GROTHENDIECK

Né le 28 mars 1928 à Berlin, de mère allemande et de père apatride, émigré de Russie en 1921, mes parents émigrent d'Allemagne en 1933, participent à la révolution espagnole; je les rejoins en mai 1939. Mes parents sont internés, d'abord mon père en 1939, puis ma mère en 1940 avec moi. Mon père est déporté du camp de Vernet en août 1942 pour Auschwitz et est resté disparu; ma mère meurt en 1957 des suites d'une tuberculose contractée au camp de concentration. Je reste près de deux ans dans des camps de concentration français, puis suis recueilli par une maison d'enfants du "Secours suisse" au Chambon-sur-Lignon, où je termine mes études de lycée en 1945. Études de licence (mathématiques) à Montpellier 1945-48, auditeur libre à l'École Normale Supérieure à Paris en 1948-49, où je suis le premier séminaire Cartan sur la théorie des faisceaux, et un cours de Leray du Collage de France sur la théorie de Schauder du degré topologique dans les espaces localement convexes. De 1949 à 1953 je poursuis des recherches à Nancy sur les espaces vectoriels topologiques, comme élève de J. Dieudonné et de L. Schwartz, aboutissement à ma thèse de doctorat en 1953, sur la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, publiée dans les "Memoirs of the American Mathematical Society". Je passe alors deux ans à l'Université de Sao Paulo (Brésil), où je continue et mène à leur aboutissement naturel certaines recherches liées aux produits tensoriels topologiques [?], [?], mais en même temps, sous l'influence de J. P. Serre, commence à me familiariser avec des questions de topologie algébrique et d'algèbre homologique. Ces dernières continueront à m'occuper jusqu'à aujourd'hui, et son encore très loin d'être menés à leur terme. Ce sont elles qui m'occuperont surtout pendant l'année 1955 passée à l'Université du Kansas (USA) ; j'y développe une théorie commune pour la théorie de Cartan-Eilenberg des foncteurs dérivés des foncteurs de modules et la théorie de Leray-Cartan de la cohomologie des faisceaux [?], et développe des notions de "cohomologie non commutative" dans le contexte des faisceaux et des espaces fibrés à faisceau structural, qui trouveront leur cadre naturel quelques années plus tard avec la théorie des topos (aboutissement naturel du point de vue faisceautique en topologie générale) [?], [?].

A partir de 1956 je suis resté en France, à l'exception de séjours de quelques semaines ou mois dans des universités étrangères. De 1950 à 1958 j'ai été chercheur au CNRS, avec le grade de directeur de recherches en 1958. De 1959 à 1970 j'ai été professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Ayant découvert à la fin de 1959 que l'IHES était subventionné depuis trois ans par le Ministère des Armées, et après des essais infructueux pour inciter mes collègues à une action commune sans équivoque contre la présence de telles subventions, je quitte l'IHES en septembre 1970.

Depuis 1959 je suis marié à une française, et je suis père de quatre enfants. Je suis apatride depuis 1940, et ai déposé une demande de naturalisation française au printemps 1970.

Depuis 1956 jusqu'à une date récente, mon intérêt principal s'est porté sur la géométrie algébrique. Mon intérêt pour la topologie, la géométrie analytique, l'algèbre homologique ou le langage catégorique a été constamment subordonné aux multiples besoins d'un vaste programme de construction de la géométrie algébrique, dont une première vision d'ensemble remonte à 1958. Ce programme est poursuivi systématiquement dans [?], [?], d'abord dans un isolement relatif, mais progressivement avec l'assistance d'un nombre croissante de chercheurs de valeur. Il est loin d'être achevé à l'heure actuelle. L'extraordinaire crise écologique que nous aurons à affronter dans les décades qui viennent, rend peu probable qu'il le sera jamais. Elle nous imposera d'ailleurs une perspective et des critères de valeur entièrement nouveaux, qui réduiront à l'insignifiance ("irrelevance") beaucoup des plus brillants progrès scientifiques de notre siècle, dans la mesure où ceux-ci restent étrangers au grand impératif évolutionniste de notre temps : celui de la survie. Cette optique s'est imposée à moi avec une force croissante au cours de discussions avec de nombreux collègues sur la responsabilité sociale des scientifiques, occasionnées par ma situation à l'IHES depuis la fin de 1969. Elle m'a conduit en juillet 1970 à m'associer à la fondation d'un mouvement international et interprofessionnel "Survivre", et à consacrer aux questions liées à la survie une part importante de mon énergie. Dans cette optique, la seule valeur de mon apport comme mathématicien est de me permettre aujourd'hui, grâce à l'estime professionnelle et personnelle acquise parmi mes collègues, de donner plus de force à mon témoignage et à mon action en faveur d'une stricte subordination de toutes nos activités, y compris nos activités de scientifiques, aux impératifs de la survie, et à la promotion d'un ordre stable et humain sur notre planète, sans lequel la survie de notre espèce ne serait ni possible, ni désirable.

A Grothendieck

Principales publication

Espaces Vectoriels Topologiques

[?] Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, Amer. J. 74 (1952), p. 168-186

Topologie et algèbre homologique

Géométrie analytique

Géométrie algébrique

ESQUISSE THÉMATIQUE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES

Les numéros entre crochets renvoient, soit à la bibliographie sommaire jointe à mon Curriculum Vitae (numéros de [1] à [9]), soit au complément à cette bibliographie placée à la fin du présent rapport (numéros entre [1 bis] et [20 bis]). Enfin, nous avons joint en dernière page une liste par ordre alphabétique des auteurs de certains des travaux cités dans les présent rapport qui ont été directement suscités ou influencés par les travaux de A. Grothendieck; le renvoi à cette dernière bibliographie se fait par le sigle [*] derrière le nom de l'auteur cité, comme pour I. M. Gelfand [*].

1. Analyse Fonctionnelle ([1] à [7], [6 bis])

Mes travaux d'Analyse Fonctionnelle (de 1949 à 1953) ont porté surtout sur la théorie des espaces vectoriels topologiques. Parmi les nombreuses notions introduites et étudiées (produits tensoriels topologiques [5,6], applications nucléaires et applications de Fredholm [5,6,7], applications intégrales et ses variantes diverses [5,6], applications de puissance p-ième sommable [5], espaces nucléaires [5], espaces (DF) [4], etc.), c'est la notion d'*espace nucléaire* qui a connu la meilleure fortune : elle a fait jusqu'à aujourd'hui l'objet de nombreux séminaires et publications. En particulier, un volume du traité de I. Gelfand [*] sur les "Fonctions Généralisées" lui est consacré. Une des raisons de cette fortune provient sans doute de la théorie des probabilités, car il s'avère que parmi tous les EVT, c'est dans les espaces nucléaires que la théorie de la mesure prend la forme la plus simple (théorème de Minlos).

Les résultats de [6], plus profonds, semblent avoir été moins bien assimilés par les développements ultérieurs, mais ils apparaissent comme source d'inspiration dans un certain nombre de travaux délicats assez récents sur des inégalités diverses liées à la théorie des espaces de Banach, notamment ceux de Pelczynski. Signalons également les résultats assez fins de [6] et de [8 bis] sur les propriétés de décroissance de la suite des valeurs propres de certains opérateurs dans les espaces de Hilbert et dans les espaces de Banach généraux.

Références : L. Schwartz, J. Dieudonné, I. Gelfand, P. Cartier, J. L. Lions.

2. Algèbre Homologique ([8], [9], [19], [9 bis])

Depuis 1955, me plaçant au point de vue de "l'usager" et non celui de spécialiste, j'ai été amené continuellement à élargir et à assouplir le langage de l'algèbre homologique, notamment sous la poussée des besoins de la géométrie algébrique (théories de dualité, théories du type Riemann-Roch, cohomologies ℓ-adiques, cohomologies du type de De Rham, cohomologies cristallines...). Deux directions principales à ces réflexions : développement d'une algèbre homologique non commutative (amorcée dans [10 bis] et systématisée dans la thèse de J. Giraud [*]); théorie des catégories dérivées (dévelopée systématiquement par J. L. Verdier, exposée dans Hartshorne [*], Illusie [*] et [[?] SGA 4 Exp. XVIII]). Ces deux courants de réflexion sont d'ailleurs loin d'être épuisés, et sont sans doute appelés à se rejoindre, soit au sein d'une "algèbre homotopique" dont une esquisse préliminaire a été faite par Quillen [*], soit dans l'esprit de la théorie des n-catégories, particulièrement bien adaptée à l'interprétation géométrique des invariants cohomologiques (cf. le livre cité de J. Giraud et le travail de Mme. M. Raynaud [*]).

Références : J.L. Verdier, P. Deligne, D. Quillen, P. Gabriel.

3. Topologie ([16, SGA 4], [9])

Jusqu'à présent, c'est surtout le K-invariant des espaces topologiques que j'avais introduit à l'occasion de mes recherches sur le théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique, qui a connu la fortune la plus brillante, étant le point de départ de très nombreuses recherches en topologie homotopique et topologie différentielle. De nombreuses constructions que j'avais introduits pour les besoins de la démonstration algèbrqiue du théorème de Riemann-Roch (telles les opérations λ_i et leurs liens avec les opérations du groupe symétrique) sont devenues pratique courante non seulement en géométrie algébrique et en algèbre, mais également en topologie et en théorie des nombres, notamment dans les travaux de mathématiciens commme Atiyah, Hirzebruch, Adams, Quillen, Bass, Tate, Milnor, Karoubi, Shih, etc...

Plus fondamental me semble néanmoins l'élargissement de la topologie générale, dans l'esprit de la théorie des faisceaux (développée initialement par J. Leray), contenu dans le point de vue des topos ([[?], SGA 4]). J'ai introduit ces topos à partir de 1958 en partant du besoin de définir une cohomologie ℓ-adique des variétés algébriques (plus généralement, des schémas), qui convienne à l'interprétation cohomologique des célèbres conjectures de Weil. En effet, la notion traditionnelle d'espace topologique ne suffit pas à traiter le cas des variétés algébriques sur un corps autre que le corps des complexes, la topologie proposée précédemment par Zariski ne donnant pas lieu à des invariants cohomologiques "discrets" raisonnables. A l'heure actuelle, le point de vue des topos, et la notion de "localisation" correspondante, font partie de la pratique quotidienne du géomètre algébriste, et il commence à se répandre également en théorie des catégories et en *logique mathématique* (avec la démonstration par B. Lawvere [*] du théorème de Cohen d'indépendance de l'axiome du continu, utilisant une adaptation convenable de la notion de topos). Il n'en est pas encore de même en topologie et en géométrie différentielle et analytique, malgré certains premiers essais dans ce sens (comme la tentative de démonstration par Sullivan d'une conjecture d'Adams en K-théorie, par réduction à une propriété de l'opération de Frobenius sur les variétés algébriques en car. $p > 0$).

Références : M. Atiyah, F. Hirzebruch, H. Bass, J. Leray, M. Artin, D. Quillen, M. Karoubi...

4. Algèbre ([15], [16], [18])

Comme l'algèbre homologique, l'algèbre a été pour moi un outil à développer, et non un but en soi. J'ai parlé au par. 2 de mes contributions à l'algèbre homologique, et au par. 3 de mes contributions à la K-théorie; celle-ci comprend une partie purement algébrique (qui, une fois étendue en une théorie des K^i supérieurs, finira par devenir une partie de l'algèbre homologique ou homotopique). Ainsi, un certain nombre de mes résultats en géométrie algébrique se spécialisent en des résultats en algèbre pure, comme la relation $K(A[t]) \simeq K(A)$, où A est un anneau. Mises à part ces retombées, on peut signaler les contributions ci-dessous.

a) *Algèbre catégorique* : En fait, de façon continuelle depuis 1953, je me suis senti dans l'obligation, au fur et à mesure des besoins, de développer une panoplie catégorique toujours insuffisante. La plupart des résultats et des notions ainsi introduites se trouvent développés un peu partout dans [?], [?], notamment dans le premier exposé de SGA 4. Il ne peut être question de passer en revue ici même sommairement les notions qui sont ainsi entrées dans l'usage courant. Signalons seulement ici le langage des *univers* (pour éliminer des difficultés logiques dans la manipulation intensive des catégories), et celui de la *descente* (développé de façon systématique par Giraud [*]).

   Références : J. Giraud, P. Gabriel.

b) *Algèbre commutative* : Dans le langage géométrique des "schémas", l'algèbre commutative peut être considérée comme étant, essentiellement, l'étude locale des schémas. C'est ainsi que [?], et notamment le Chap. IV de cet ouvrage, contient de très nombreux résultats nouveaux d'algèbre commutative, dont il ne peut être question ici d'énumérer même les plus couramment utilisés. Notons seulement ici, en algèbre locale, la notion d'anneau excellent et ses propriétés de permanence (dont l'absence constituait sans doute la lacune la plus marquante de l'ouvrage de M. Nagata sur les anneaux locaux).

   Références : M. Nagata, P. Samuel, M. Raynaud, O. Zariski.

c) *Théorie du groupe de Brauer* : Mes contributions découlent pour l'essentiel de l'application de la cohomologie étale (développée dans [[?], SGA 3]) à la théorie du groupe de Brauer. J'ai fait un exposé d'ensemble sur les résultats connus sur ce groupe dans [?].

   Références : M. Artin, J. Tate, J.P. Serre

d) *Théorie des algèbres de Lie* : Comme sous-produit de recherches sur les groupes algébriques en car. $p > 0$, je trouve certains résultats délicats sur les sous-algèbres de Borel ou de Cartan de certaines algèbres de Lie, notamment sur les corps de base imparfaits (cf. [?], SGA 6, Exp. XIII et XIV).

   Références : M. Demazure, J. Tits, J.P. Serre

5. Géométrie Analytique ([10], [11], [16 bis])

Mon influence sur la géométrie analytique est due moins aux résultats nouveaux que j'ai pu y démontrer (la plupart contenus dans les réf. cit.), que par les points de vue directement inspirés par la géométrie algébrique que j'ai pu y introduire, et les nombreuses suggestions d'énoncés que j'ai pu y faire.

Un des plus anciens est le théorème de finitude de Grauert pour les morphismes propres d'espaces analytiques, aboutissant à sa généralisation récente en un théorème qui s'énonce en termes de catégories dérivées (formulation sur laquelle j'avais insisté de longue date, et qui a été prouvée indépendamment par R. Kiehl [*] et O. Forster et K. Knorr [*]). D'autres théorèmes de finitude (de Frisch et Siu) pour les images directes supérieures d'un faisceau cohérent par une immersion ouverte, utilisant la profondeur du faisceau en les points du complémentaire, sont inspirés de théorèmes analogues en géométrie algébrique [16, SGA 2]; remarques analogues pour des théorèmes sur la cohomologie à supports compacts des faisceaux algébriques cohérents, complétés par une théorème d'existence., et leur interprétation en termes de théorèmes du type de Lefschetz pour la cohomologie cohérente (la version algébrique faire partie de la thèse de Mme. Michèle Raynaud (en cours de publication), et la version analytique est due à Trautmann [*]). Parlant en termes de grands thèmes de recherche plutôt qu'en termes de résultats techniques particuliers, je pense qu'outre les thèmes déjà nommés, les thèmes suivants ont été directement suscités ou tout au moins influencés par des idées que j'avais développées en géométrie algébrique:

a) *Techniques de construction d'espaces analytiques*, aboutissant aussi bien à des espaces "modulaires" "globaux" comme les espaces modulaires de Picard, pour certains espaces analytiques compacts comme dans [11] (le cas général ne semble pas encore traité), qu'à des espaces modulaires "locaux" de déformation d'une structure analytique complexe donnée, ou au modèle de la Géométrie Formelle ("th. d'existence des modules formels", cf. [15 bis, Exp. no 195]). Dans certains cas, les énoncés obtenus en géométrie algébrique sont directement applicables (cf. M. Hakim [*]), dans d'autres de nouvelles difficultés surgissent, pas toujours surmontées à l'heure actuelle. Parmi les travaux définitifs dans ce sens, on peut citer la thèse de A. Douady [*].

b) *Théorèmes de dualité locaux et globaux pour les faisceaux cohérents*, développés notamment par J.L. Verdier [*] et J.P. Ramis et G. Ruget [*], inspirés par la théorie que j'avais développée dans le cas des schémas, exposée dans R. Hartshorne [*].

c) *Formulations de théorèmes du type de Riemann-Roch* pour des variétés analytiques compactes ou des morphismes propres de telles variétés, cf. [16, SGA 6, Exp. 0]. Les problèmes essentiels restent toujours ouverts.

d) *Théorèmes de De Rham analytiques complexes [16 bis], cohomologie cristalline complexe*. Certains des résultats et des idées que j'avais développés à ce sujet ont été utilisés dans des développements théoriques divers, comme la théorie de Hodge généralisée de P. Deligne [*].

e) *Espaces rigide-analytiques.* M'inspirant de l'exemple de la "courbe elliptique Tate", et des besoins de la "géométrie formelle" sur un anneau de valuation discrète complet, j'étais parvenu à une formulation partielle de la notion de variété rigide-analytique sur un corps valué complet, qui a joué son rôle dans la première étude systématique de cette notion par J. Tate [*]. Par ailleurs, les "cristaux" que j'introduis sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique > 0 peuvent s'interpréter parfois en termes de fibrés vectoriels à connexion intégrable sur certains types d'espaces rigide-analytiques sur des corps de caractéristique nulle; ceci fait pressentir l'existence de relations profondes entre cohomologie cristalline en car. > 0, et cohomologie de systèmes locaux sur des variétés rigide-analytiques en car. nulle.

Références : J. P Serre, H. Grauert, H. Cartan, P. Deligne, A. Douady, B. Malgrance, K. Knorr, R. Kiehl, J. Tate.

6. Groupes Algébriques ([16 SGA 3 - en trois volumes] [12 bis])

Ce sujet relève à la fois de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes. Le travail cité SGA 3 se place surtout sur des schémas de base généraux, et la part de la géométrie algébrique y est certes considérablement plus large que celle de la théorie des groupes. Néanmoins, grâce à la technique des schémas, nous y obtenons des résultats nouveaux même dans le cas de groupes définis sur un corps de base, les plus intéressants (relatifs surtout au cas d'un corps de base imparfait) étant contenus dans SGA 3, Exp XIV. Ma contribution principale, continuant dans la voie ouverte par A. Borel et C. Chevalley dans le contexte de la géométrie algébrique habituelle, a été de montrer le parti qu'on pouvait tirer d'une application systématique de la théorie des schémas aux groupes algébriques et aux schémas en groupes.

Références : J. Tits, F. Bruhat, M. Demazure, P. Gabriel, A. Borel, D. Mumford.

7. Groupes discrets ([18, Exp VIII], [13 bis])

Dans [18, Exp. VIII] je développe une théorie purement algébrique des classes de Chern des représentations d'un groupe discret sur un corps de base (ou même un anneau de base) quelconque, avec des applications de nature arithmétique sur l'ordre des classes de Chern des représentations complexes. Cette théorie peut être considérée comme cas particulier d'une théorie des classes de Chern des représentations linéaires de schémas en groupes quelconques, elle-même contenue dans la théorie des classes de Chern ℓ-adiques des fibrés vectoriels sur des topos annelés quelconques. Dans [13 bis], j'établis, à peu de choses près, que pour un groupe discret G, la théorie des représentations linéaires de G (sur un anneau de base quelconque) ne dépend que du complété profini $\hat{G}$ de G.

8. Groupes formels ([17] [16 SGA 7] [14 bis])

C'est un sujet qui relève à la fois de la théorie des groupes, de celle des groupes de Lie, de la géométrie algébrique, de l'arithmétique, et (sous la forme voisine des groupes de Barsotti-Tate) de la théorie des systèmes locaux. Ici encore, la théorie des schémas permet une grande aisance, et c'est dans ce contexte par exemple que se place d'emblée I. Manin [*a], dans son exposé classique de la théorie de Dieudonné. Ma principale contribution, en dehors de cette simplification conceptuelle, a été le développement d'une "théorie de Dieudonné" pour les groupes de Barsotti-Tate sur des schémas de base généraux à caractéristiques résiduelles > 0, en termes du "cristal de Dieudonné" associé à un tel groupe. Une esquisse de cette théorie a été exposée dans divers cours et séminaires, y compris dans mon cours au Collège de France en 1970/71 et 71/72; certains énoncés principaux sont esquissés dans les C.R. du Congrès International de Nice en 1970 [14 bis]. Une partie de ces idées est développée dans la thèse de W. Messing [*], et les besoins techniques de la théorie ont été la motivation pour le développement par L. Illusie [*] de sa théorie des déformations des schémas en groupes commutatifs, vérifiant des conjectures suggérées par cette "théorie de Dieudonné cristalline". Par ailleurs, les relations entre schémas abéliens et groupes de Barsotti-Tate associés sont explorées et exploitées également dans [17] et dans [16, SGA 7, Exp. IX].

Références : J. Tate, B. Mazur, A. Néron, L. Illusie, J.N. Katz, W. Messing, I. Manin.

9. Arithmétique ([16 SGA 5, Exp XVI] [18, Exp III])

Ma contribution principale a consisté (en collaboration avec M. Artin) en la démonstration de la rationalité des fonctions L associées à des faisceaux ℓ-adiques généraux sur des variétés algébriques sur des corps finis, comprenant comme cas particulier les fonctions L associées à des caractères de groupes finis opérant sur de telles variétés. S'inspirant des conjectures de Weil, on arrive en effet à exprimer ces fonctions L en termes de produits alternés de polynômes caractéristiques de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la "cohomologie à support propre" de la variété envisagée. Bien au delà d'une simple question de rationalité, ces résultats ouvrent la voie à une approche cohomologique systématique d'invariants arithmétiques subtils comme les fonctions ζ et L des variétés, et l'interprétation en termes arithmétiques de théorèmes tels que les théorèmes de dualité (démontrés à l'heure actuelle) et de Lefschetz pour les sections hyperplanes (non démontrés encore en car. > 0). Il y a là un champ d'étude immense, qui par la nature des choses devrait se trouver, tôt ou tard, centré sur la notion de "motif" (dénominateur commun des divers types de cohomologie qu'on sait attacher à une variété algébrique) – mais qui probablement ne sera jamais exploré jusqu'au bout, l'heure de ce genre d'investigations étant déjà passée (même si rares sont ceux qui en ont pris conscience).

Références : J.P. Serre, A. Weil, B. Dwork, J. Tate, M. Artin, P. Deligne…

10. Géométrie Algébrique ([12] à [19], [15 bis] à [20 bis])

C'est dans cette direction que mon influence a été la plus directe et la plus profonde, puisque c'est dans cette optique que se placent pour l'essentiel mes travaux depuis 1959. Voici les thèmes principaux sous lesquels on peut placer mes contributions:

a) *Travail de fondement* : Il s'agissait de dégager un cadre suffisamment vaste pour servir de fondement commun à la géométrie algébrique habituelle (y compris celle développée par des auteurs comme A. Weil, O. Zariski, C. Chevalley, J.P. Serre sur des corps de base quelconques) et à l'arithmétique. C'est fait pour l'essentiel dans [15, Chap. I,II et des parties des Ch. III et IV], avec l'introduction et l'étude de la *notion de schéma*. Des généralisations ont été développées par la suite, dans le même esprit, avec les schémas formels [15, Chap. I, par. 10], la théorie des "algebraic spaces" de M. Artin (cf. Knutson [*]), les "algebraic stacks" ou "multiplicités algébriques" de P. Deligne et D. Mumford (*), des "schémas relatifs" de la thèse de M. Hakim [*] (en attendant les "multiplicités formelles" et les "multiplicités algébriques relatives" sur des topos annelés généraux, etc). Ces généralisations montrent la part conceptuelle importante qui revient, dans le langage des schémas, à la notion générale de la localisation, c'est à dire à celle de *topos* (dont il a été question au par. 3). Les fondements développés dans [15] et [16] sont aujourd'hui le "pain quotidien" de la grande majorité des géomètres algébristes, et leur importance a été soulignée à de nombreuses occasions par des mathématiciens aussi divers que O. Zariski, J.P. Serre, H. Hironaka, D. Mumford, I. Manin, F. Chafarévitch.

b) *Théorie locale des schémas et des morphismes de schémas* : Dans ce contexte se placent les développements d'algèbre commutative mentionnés au par. 4, et l'étude détaillée de notions comme celles de morphisme lisse, étale, net, plat, etc. Les quatre volumes de [15, Chap. IV] sont consacrés à ces développements, qui ont d'ailleurs inspiré des développements analogues en théorie des espaces analytiques et rigide-analytiques

c) *Techniques de construction de schémas* : Parmi les techniques développées, exposées surtout dans [15 bis] et des séminaires non publiés (par moi-même et d'autres), il y a la *théorie de la descente* (cf. aussi [16, SGA I, Exp. V, VI]), celle des *schémas quotients*, des *schémas de Hilbert*, des *schémas de Picard*, des *"modules" formels*, le *théorème d'existence* des faisceaux de modules algébriques associés à des modules formels ([15, Chap. III, par. 5]). Le point de vue adopté est surtout celui de la construction d'un schéma à partir du foncteur qu'il représente. Dans cette optique, je n'étais pas parvenu à une véritable caractérisation maniable des foncteurs représentables par une schéma relatif (localement de type fini sur un schéma noethérien) – c'est M. Artin qui y est parvenu ultérieurement [*], en remplaçant la notion de schéma par celle, plus générale et plus stable, d'espace algébrique. Parmi d'autres recherches dans la même direction, suscitées par mes travaux, il y a celles de J. Murre sur les schémas de Picard sur un corps

[*], celles de D. Mumford et de M. Raynaud [*] sur ces mêmes schémas sur des bases générales, et dans une certaine mesure ceux de D. Mumford [*] et de S. Seshadri sur le passage au quotient, pour n'en citer que quelques-uns.

d) *Théories cohomologiques* :

1°) *Cohomologie "cohérente"* : résultats de finitude, de comparaison avec la cohomologie formelle, cf. [15, Chap. III]. Théorèmes de dualité et des résidus : un exposé systématique de mes idées et résultats est développé dans le séminaire de R. Hartshorne [*], cf. aussi [18 bis].

2°) *Cohomologie ℓ-adique* : définition de la cohomologie étale, théorèmes de comparaison, de finitude, de dimension cohomologique, de Lefschetz faible, [16 SGA 4]; théorèmes de dualité, formules de Lefschetz et d'Euler-Poincaré, application aux fonctions L, [16, SGA 15].

3°) *Cohomologie de De Rham* : [16 bis], [17 bis].

4°) *Cohomologie cristalline* : quelques idées de départ sont esquissées dans [18, Exp. IX], puis reprises et systématisées dans la thèse de P. Berthelot [*], et dans le travail de P. Berthelot et L. Illusie sur les classes de Chern cristalline [*].

e) *Théorie du groupe fondamental* ([16, SGA 1], SGA 2, SGA 7, Exp. I et II], [15 bis, no 182], [19 bis]) :

D'un point de vue algébrico-géométrique, tout était à faire, depuis la définition du groupe fondamental d'une variété quelconque, en passant par des propriétés "de descente" incluant des résultats assez formels du type de van Kampen, jusqu'au calcul du groupe fondamental dans les premiers cas non triviaux, comme celui d'une courbe algébrique privée de certains points; on peut y adjoindre les théorèmes de génération et de présentation finie du groupe fondamental d'une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Ce programme est accompli pour l'essentiel dans SGA 1, en utilisant à la fois les résultats classiques sur le corps des complexes (établis par voie transcendante) et une panoplie d'outils faits sur mesure (théorie de la descente, étude des morphismes étales, théorème d'existence de faisceaux cohérents…). Les autres références contiennent des résultats plus spéciaux: théorèmes du type de Lefschetz dans SGA 2, action des groupes de monodromie locale sur le groupe fondamental d'une fibre dans SGA 7, Exp. I, calculs de certains groupes fondamentaux locaux dans [19 bis], via les groupes fondamentaux de certains schémas formels. Tous ces résultats ont été utilisés couramment dans de nombreux travaux, et en ont inspiré d'autres comme la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*].

f) *Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* pour les groupes de Picard, le groupe fondamental, la cohomologie étale, la cohomologie cohérente. Il s'agit ici de la comparaison entre les invariants (cohomologiques ou homotopiques) d'une variété algébrique et d'une section hyperplane. Les idées de départ sont développées dans [16, SGA 2]. Cependant, pour des énoncés "définitifs", en termes de conditions nécessaires et suffisantes, se reporter plutôt à la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*] déjà citée.

g) *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* :

La principale idée nouvelle, c'est qu'il y a presque identité entre le groupe "de Chow" des classes de cycles sur une variété X, et un certain groupe de "classes de faisceaux cohérents" (tout au moins modulo torsion), à savoir le groupe $K(X)$ (mentionné dans le par. 3). Dans un contexte modeste c'est exposé dans [12] et le travail de A. Borel et J.P. Serre [*], dans un contexte plus ambitieux cela donne l'imposant séminaire [16, SGA 7]. Dans le même esprit, cf. [12 bis].

Par ailleurs, l'idée (que je semble avoir été le premier à introduire avec ma formulation du théorème de Riemann-Roch) de reformuler un théorème sur une variété (dû en l'occurrence à F. Hirzebruch) en un théorème plus général sur un morphisme de variétés, a connu par la suite une grande fortune, non seulement en géométrie algébrique, mais aussi en topologie algébrique et topologie différentielle (à commencer par la "formule de Riemann-Roch différentiable", développée par M.F. Atiyah et F. Hirzebruch sous l'inspiration de ma formulation "relative" du théorème de Riemann-Roch).

h) *Schémas abéliens* :

En termes plus classiques, ce sont les familles de variétés abéliennes, paramétrées par un schéma quelconque. Les résultats les plus importants que j'y ai établis sont le *"théorème de réduction semi-stable"* et ses conséquences et variantes [16, SGA 7, Exp. IX], le théorème d'*existence de morphismes de schémas abéliens* contenu dans [17] et ses variantes (généralisé par P. Deligne [*] en un théorème sur la cohomologie de Hodge-De Rham relative d'une famille de variétés projectives complexes non singulières), enfin une théorie des *déformations infinitésimales des schémas abéliens* (non publiée sur une base quelconque), en termes de la déformation d'une filtration de Hodge sur un H^1 relatif de De Rham (interprété comme une cohomologie cristalline).

i) *Groupes de monodromie* :

Mes principales contributions sont exposées (en partie par P. Deligne) dans le premier volume de [16, SGA 7], donnant des propriétés fondamentales de l'action du groupe de monodromie locale sur la cohomologie comme sur le groupe fondamental d'une fibre. Parmi les principales applications, il y a le théorème de "réduction semi-stable" des schémas abéliens signalé au paragraphe précédent.

j) *Divagations motiviques* :

Nous entrons ici dans le domaine du rêve éveillé mathématique, où on s'essaie à deviner "ce qui pourrait ^etre", en étant aussi insensément optimiste que nous le permettent les connaissances parcellaires que nous avons sur les propriétés arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. La notion de motif peut se définir en toute rigueur avec les moyens du bord (c'est fait par I. Manin [*] et M. Demazure [*]), mais dès qu'on veut aller plus loin et formuler des propriétés fondamentales "naturelles", on bute sur des conjectures actuellement indémontrables, comme celles de Weil ou de Tate, et d'autres analogues que la notion même de motif suggère irrésistiblement. Ces propriétés ont fait l'objet de nombreuses conversations privées et de plusieurs exposés publics, mais n'ont jamais fait l'objet d'une publication, puisqu'il n'est pas d'usage en mathématique (contrairement à la physique) de publier un rêve, si cohérent soit-il, et de suivre jusqu'au bout où ses divers éléments nous peuvent entraîner. Il est évident pourtant, pour quiconque se plonge suffisamment dans la cohomologie des variétés algébriques, "qu'il y a quelque chose" – que "les motifs existent". Il y a quelques années encore, j'ai joué avec l'idée d'écrire contrairement à l'usage, un livre entièrement conjectural sur les motifs – une sorte de science-fiction mathématique. J'en ai été empêché par des tâches plus urgentes que des tâches de mathématicien, et je doute fort actuellement qu'un tel livre soit jamais écrit, ni qu'on arrive jamais (même conjecturalement) à se faire une idée d'ensemble à la fois précise et suffisamment vaste sur le formalisme des motifs. Avant qu'on n'y parvienne, il sera sans doute devenu évident pour tous, sous la poussée des événements, la science spéculative et parcellarisée ne faisant plus vivre son homme, qu'il est des tâches plus urgentes que de mettre sur pied même la plus belle théorie du monde, conjectural ou non.

Complément à la bibliographie sommaire jointe au Curriculum Vitae de A. Grothendieck (travaux non inclus dans la dite bibliographie)

Analyse fonctionnelle

Algèbre Homologique

Algèbre

Groupes algébriques

Groupes discrets

Groupes Formels

Géométrie Algébrique

Liste de travaux cités, suscites ou influences par les travaux de A. Grothendieck

STRUCTURES STRATIFIÉES

1. La situation la plus élémentaire

En un ses qui apparaître, sera la suivante.

[]

de groupoïdes fondamentaux [] est cocartésien - ou encore, si Y, X, X^* sont connexes, et [] (i.e. par définition, un revêtement universel de []) [] un isomorphisme canonique de groupes fondamentaux [] où [] est isomorphe extérieurement à $\pi_1(Y)$.

Pour expliciter $\pi_1(X)$ en termes de données "élémentaires", dont $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(X^*)$ [] encore à expliciter la structure de [], qui s'envoie dans l'un et dans l'autre, donnant [] [] qui exprime (8). C'est ici que l'hypothèse de *locale []* a un [] (celle de lissité [] comme devant techniquement initiale, [] de notre heuristique...).

On doit se [], dans ce cas, pour démontrer que les [] homotopique de [] sont celles d'une *fibration localement triviale des fibres* []: [] - et c'est []] qui devrait [] le contexte topossique (p. ex. celui des schémas avec le topos étale) de *définition* de la "locale trivialité" [] homotopique [] $Y \hookrightarrow X$. (Bien sûr, dans le contexte schématique, il faudrai de plus travailler avec des types d'homotopie profini, et même sans doute "localiser" ces types d'homotopie en l'un des [] premières qui sont distinctes des caractéristique résiduelle qui interviennent, ou que en n'est que alors ce contexte [] des théorèmes qu'il faut, cf Artin-Mazur...)

On ont en particulière une suite exacte d'homotopie []

Si on suppose par exemple que []

allusion, en devrait [] exprimer alors le *type d'homotopie de X* (et non seulement son π_1)

en termes de diagrammes de groupoïdes (8), ou ce qui revient au même, des diagrammes de groupes (10).

En tous cas, il est clair (indépendemment de toutes hypothèses de nullité de [] π_i, ou de []) comment reconstruire en termes du diagramme (8), [] faisceaux sur X, [] tels que l'on ait

(16) $$F|X^* \quad \text{et} \quad F|Y \quad \text{localisation triviaux}$$

Cette catégorie F est équivalent en effet à celle des systèmes

(17) $$(E_{X^*}, E_{Y,X}, \varphi)$$

E_{X^*} est un système locale sur π, X^* (un recouvrement étale de X^*), $E_{Y,X}$ un système locale sur [] un homomorphisme de systèmes locaux sur []

(18) $$\varphi : p^*(E_{Y,X}) \longrightarrow i^*(E_{X^*}).$$

En termes de diagrammes de groupes (10)

2. Stratification globale : [] (sans tubes)

Pour simplifier, je vais en placer sur un espace topologique X - par le suite X [] un topos quelconque. Les constructions qui suivent, relatifs à une "stratification globale", [] de la façon habituelle - ce qui [] alors à imposer des conditions supplémentaires de connexité et de locale connexité, qui pour []. De même [].

Soit I un ensemble ordonné,

$$(X_i)_{i \in I} \quad X_i \subset X$$

une famille de sous-espaces de X. On suppose [] Posant [] on a un morphisme canonique

(3) $$X_{\Delta_0} \longrightarrow X$$

et l'hypothèse a) signifie que ce morphisme est fini - i.e. propre sépare et à fibres finies. C'est aussi une *immersion locale*. On introduit une partie fermé [] On voit alors que les deux projections [] ont respectivement les propriétés suivantes : [] Par ailleurs

3. Stratification globale : introduction au tubes

On [] les notations précédentes.

Pour toute couple $(i \leq j) \in I \times I$, considérons

4. Topos canoniques associées à une stratification globale

On va montrer comment, à une situation stratifiée donnée, on peut en associer d'autres.

A) Image inverse générale.

Rappelons les axiomes utilisés jusqu'à puisant : []

Notons que pour tout X' au dessus de X, le famille des [] satisfait alors aux mêmes conditions.

D'ailleurs le système [] des X_{Δ_r} - comme image inverse le lui des X'_{Δ_r}, défini par les X'_i, [] des isomorphismes []

NB. Nous appliquons ces [] sauf en cas où X' est un ouvert de X. C'est pour [] prendre de telles images inverses [], qu'il [] été commode de supposer les X_i ou les X_i^* non-vides, ou encore par $I \mapsto X_i$ est un *plongement* d'une ordonnée $I \hookrightarrow \mathfrak{P}(X)$.

Lorsque $X' \longrightarrow X$ est une immersion locale propre (mais pas si c'est une immersion ouverte !) alors [] les images inverses de parties [] de X comment à [] des voisinages tubulaires de une telles parties []. Notons d'ailleurs que pour $i < j$, [] (sans hypothèse d'ailleurs que $X' \longrightarrow X$ sont une immersion locale) [] d'où, dans le cas d'une immersion locale propre, des isomorphismes [] et plus généralement [] tout qui à faire.

Ceci montre en particulière que la démonstration du théorème de recollement, [] théorème énoncé p.22, est une [] *locale* sur X[6] - ce qui prenant par exemple de nos [] au cas où *I est fini*.

B) Cas d'un $X_{I'}$.

Soit I' une partie de I telle que

$$i \leq j \in I' \Rightarrow i \in I' \tag{7}$$

et tout

$$X_{I'} = \bigcup_{i \in I'} X_i \quad \text{(partie fermée de } X) \tag{8}$$

On a bien sûr [] (et aussi []) [] à (11 d). Dans ces formules, I', I'', les I'_α sont des parties de I satisfaisant (7) ([] *cribles* de I).

[6] *non*, ce n'est pas absolument clair []

Si dans A) on prend $X' = X$, il est plus commode de travailler avec le stratification de X' définie par les X_i avec $i \in I'$ - il est clair que les conditions (II) relatives à $X' = X_{I'}$ sont satisfaites. Les "parties cribles" de X' pour cette stratification, ou pour celle induit au sens général des espaces au dessus de X, sont les mêmes - [] sur $X' = X_{I'}$ des parties-cribles de l'espace stratifié X.

Ici, les espaces élémentaires pour la stratification de type I' de $X' = X_{J'}$, sont les espaces []

[] pour une instant à X, et considérons l'un I_0 des $i \in I$ tel que $X_i = \varnothing$. C'est une crible, et on a $X_i^* = \varnothing$, [] si $i \in I_0$. [] on voit que les diagrammes de type $\widetilde{I}$ défini par l'espace stratifié X [] en remplaçant I par $I \backslash I_0$, ou plus guère par $I \backslash I_0'$, où $I_0' \subset I'$ est une crible, ce qui donne lieu à un diagramme [] qu'est *contenu* dans $\widetilde{I}$ (cela est vrai pour *toute* crible de I).

Si par exemple on a deux cribles

$$I'' \subset I' \subset I \tag{14}$$

d'où

(15)

[] regarder plutôt la stratification de type $I' \backslash I''$, définie par les

(16)

dont les topos élémentaires sont dans les $X_{i'}^*$ $(i' \in I' \backslash I'')$ et des [] couples (i', j') avec $i' \in I' \backslash I''$ [] on a

(17)

mais il n'est pas clair en générale que ces soient mêmes semblant équivalences d'homotopie...

Donc il [] il s'agit de [] les constructions sur une $X_{I'}$, et sur un [].

Je vais en [] par C sauf de regarder plus particulièrement ce qui se [] en l'induisant ainsi sur un ouvert $U_{I',I''}$.

C) Les [].

On suppose donnée des cribles

(18)

d'où

(19)

ESQUISSE D'UN PROGRAMME

1. Envoi

Comme la conjoncture actuelle rend de plus en plus illusoire pour moi les perspectives d'un enseignement de recherche à l'Université, je me suis résolu à demander mon admission au CNRS, pour pouvoir consacrer mon énergie à développer es travaux et perspectives dont il devient clair qu'il ne se trouvera aucun élève (ni même, semble-t-il, aucun congénère mathématicien) pour les développer à ma place.

En guise de document "Titres et Travaux", on trouvera à la suite de ce texte la reproduction intégrale d'une esquisse, par thèmes, de ce que je considérais comme mes principales contributions mathématiques au moment d'écrire ce rapport, en 1972. Il contient également une liste d'articles publiés à cette date. J'ai cessé toute publication d'articles scientifiques depuis 1970. Dans les lignes qui suivent, je me propose de donner un aperçu au moins sur quelques thèmes principaux de mes réflexions mathématiques depuis lors. Ces réflexions se sont matérialisées au cours des années en deux volumineux cartons de notes manuscrites, difficilement déchiffrables sans doute à tout autre qu'à moi-même, et qui, après des stades de décantations successives, attendent leur heure peut-être pour une rédaction d'ensemble tout au moins provisoire, à l'intention de la communauté mathématique. Le terme "rédaction" ici est quelque peu impropre, alors qu'il s'agit bien plus de développer des idées et visions multiples amorcées au cours de ces douze dernières années, en les précisant et les approfondissant, avec tous les rebondissements imprévus qui constamment accompagnent ce genre de travail – un travail de découverte donc, et non de compilation de notes pieusement accumulées. Et je compte bien, dans l'écriture des "Réflexions Mathématiques" commencée depuis février 1983, laisser apparaître clairement au fil des pages la démarche de la pensée qui sonde et qui découvre, en tâtonnant dans la pénombre bien souvent, avec des trouées de lumière subites quand quelque tenace image fausse, ou simplement inadéquate, se trouve enfin débusquée et mise à jour, et que les choses qui semblaient de guingois se mettent en place, dans l'harmonie mutuelle qui leur est propre.

Quoi qu'il en soit, l'esquisse qui suit de quelques thèmes de réflexions des dernières dix ou douze années, tiendra lieu en même temps d'esquisse de programme de travail pour les années qui viennent, que je compte consacrer au développement de ces thèmes, ou au moins de certains d'entre eux. Elle est destinée, d'une part aux collègues du Comité National appelés à statuer sur ma demande, d'autre part à quelques autres collègues, anciens élèves, amis, dans l'éventualité où certaines des idées esquissées ici pourraient intéresser l'un d'entre eux.

2. Un jeu de "Lego-Teichmüller" et le groupe de Galois de $\overline{\mathrm{Q}}$ sur Q

3. Corps de nombres associés à un dessin d'enfant

4. Polyèdres réguliers sur les corps finis

5. Haro sur la topologie dite "générale", et réflexions heuristiques vers une topologie dite "modérée"

6. "Théories différentielles" (à la Nash) et "théories modérées"

7. À la Poursuite des Champs

8. Digressions de géométrie bidimensionnelle

9. Bilan d'une activité enseignante

L'occasion me semble propice ici de faire un bref bilan de mon activité enseignante depuis 1970, c'est-à-dire depuis que celle-ci s'effectue dans un cadre universitaire. Ce contact avec une réalité très différente a été pour moi riche en enseignements, d'une portée d'un tout autre ordre d'ailleurs que simplement pédagogique ou scientifique. Ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur ce sujet. J'ai dit aussi au début de ce rapport le rôle qu'a joué ce changement de milieu professionnel dans le renouvellement de mon approche des mathématiques, et celui de mes centres d'intérêt en mathématique. Si par contre je fais le bilan de mon activité enseignante au niveau de la recherche proprement dite, j'aboutis à un constat d'échec clair et net. Depuis plus de dix ans que cette activité se poursuit an par an au sein d'une même institution universitaire, je n'ai pas su, à aucun moment, y susciter un lieu où "il se passe quelque chose" – où quelque chose "passe", parmi un groupe si réduit soit-il de personnes, reliées par une aventure commune. A deux reprises, il est vrai, vers les années 74 à 76, j'ai eu le plaisir et le privilège de susciter chez un élève un travail d'envergure, poursuivi avec élan: chez Yves Ladegaillerie le travail signalé précédemment (par. 3) sur les questions d'isotopie en dimension 2, et chez Carlos Contou-Carrère (dont la passion mathématique n'avait pas attendu la rencontre avec moi pour éclore) un travail non publié sur les jacobiennes locales et globales sur des schémas de bases généraux (dont une partie a été annoncée dans une note aux CR). Ces deux cas mis à part, mon rôle s'est borné, au cours de ces dix ans, à transmettre tant bien que mal des rudiments du métier de mathématicien 49 à quelques vingt élèves au niveau de la recherche, ou tout au moins à ceux parmi eux qui ont persévéré suffisamment avec moi, réputé plus exigeant que d'autres, pour aboutir à un premier travail noir sur blanc acceptable (certaines fois aussi à un travail mieux qu'acceptable et plus qu'un seul travail, fait avec goût et jusqu'au bout). Vu la conjoncture, même parmi les rares qui ont persévéré, plus rares encore seront ceux qui auront l'occasion d'exercer ce métier, et par là, tout en gagnant leur pain, de l'approfondir.

10. Épilogue

Depuis l'an dernier, je sens qu'au cours de mon activité d'enseignant universitaire, j'ai appris tout ce que j'avais à en apprendre et enseigné tout ce que je peux y enseigner, et qu'elle a cessé d'être vraiment utile, à moi-même comme aux autres. M'obstiner sous ces conditions à la poursuivre encore me paraîtrait un gaspillage, tant de ressources humaines que de deniers publics. C'est pourquoi j'ai demandé mon détachement au CNRS (que j'avais quitté en 1959 comme directeur de recherches frais émoulu, pour entrer à l'IHES). Je sais d'ailleurs que la situation de l'emploi est serrée au CNRS comme ailleurs, que l'issue de ma demande est douteuse, et que si un poste m'y était attribué, ce serait au dépens d'un chercheur plus jeune qui resterait sans poste. Mais il est vrai aussi que cela libérerait mon poste à l'USTL au bénéfice d'un autre. C'est pourquoi je n'ai pas de scrupule à faire cette demande, et s'il le faut à revenir à la charge si elle n'est pas acceptée cette année.

En tout état de cause, cette demande aura été pour moi l'occasion d'écrire cette esquisse de programme, qui autrement sans doute n'aurait jamais vu le jour. J'ai essayée d'être bref sans être sybillin et aussi, après coup, d'en faciliter la lecture et de la rendre plus attrayante, en y adjoignant un sommaire. Si malgré cela elle peut paraître longue pour la circonstance, je m'en excuse. Elle me paraît courte pour son contenu, sachant que dix ans de travail ne seraient pas de trop pour aller jusqu'au bout du moindre des thèmes esquissés (à supposer qu'il y ait un "bout"...), et cent ans seraient peu pour le plus riche d'entre eux !

Derrière la disparité apparente des thèmes évoqués ici, un lecteur attentif percevra comme moi une unité profonde. Celle-ci se manifeste notamment par une source d'inspiration commune, la géométrie des surfaces, présente dans tous ces thèmes, au premier plan le plus souvent. Cette source, par rapport à mon "passé" mathématique, représente un renouvellement, mais nullement une rupture. Plutôt, elle montre le chemin d'une approche nouvelle vers cette réalité encore mystérieuse, celle des "motifs", qui me fascinait plus que toute autre dans les dernières années de ce passé[7]. Cette fascination ne s'est nullement évanouie, elle fait partie plutôt de celle du plus brûlant pour moi de tous les thèmes évoqués précédemment. Mais aujourd'hui je ne suis plus, comme naguère, le prisonnier volontaire de tâches interminables, qui si souvent m'avaient interdit de m'élancer dans l'inconnu, mathématique ou non. Le temps des tâches pour moi est révolu. Si l'âge m'a apporté quelque chose, c'est d'être plus léger.

Janvier 1984

[7]Voir à ce sujet mes commentaires dans l'"Esquisse Thématique" de 1972 jointe au présent rapport, dans la rubrique terminale "divagations motiviques" (loc. cit. pages 17-18).

SKETCH OF A PROGRAMME

1. Preface

As the present situation makes the prospect of teaching at the research level at the University seem more and more illusory, I have resolved to apply for admission to the CNRS, in order to devote my energy to the development of projects and perspectives for which it is becoming clear that no student (nor even, it seems, any mathematical colleague) will be found to develop them in my stead.

In the role of the document "Titles and Articles", one can find after this text the complete reproduction of a sketch, by themes, of what I considered to be my principal mathematical contributions at the time of writing that report, in 1972. It also contains a list of articles published at that date. I ceased all publication of scientific articles in 1970. In the following lines, I propose to give a view of at least some of the principal themes of my mathematical reflections since then. These reflections materialised over the years in the form of two voluminous boxes of handwritten notes, doubtless difficult to decipher for anyone but myself, and which, after several successive stages of settling, are perhaps waiting for their moment to be written up together at least in a temporary fashion, for the benefit of the mathematical community. The term "written up" is somewhat incorrect here, since in fact it is much more a question of developing the ideas and the multiple visions begun during these last twelve years, to make them more precise and deeper, with all the unexpected rebounds which constantly accompany this kind of work – a work of discovery, thus, and not of compilation of piously accumulated notes. And in writing the "Mathematical Reflections", begun since

February 1983, I do intend throughout its pages to clearly reveal the process of thought, which feels and discovers, often blindly in the shadows, with sudden flashes of light when some tenacious false or simply inadequate image is finally shown for what it is, and things which seemed all crooked fall into place, with that mutual harmony which is their own.

In any case, the following sketch of some themes of reflection from the last ten or twelve years will also serve as a sketch of my programme of work for the coming years, which I intend to devote to the development of these themes, or at least some of them. It is intended on the one hand for my colleagues of the National Committee whose job it is to decide the fate of my application, and on the other hand for some other colleagues, former students, friends, in the possibility that some of the ideas sketched here might interest one of them.

2. A game of "Lego-Teichmüller" and the Galois group $\overline{\mathbf{Q}}$ over $\mathbf{Q}$

The demands of university teaching, addressed to students (including those said to be "advanced") with a modest (and frequently less than modest) mathematical baggage, led me to a Draconian renewal of the themes of reflection I proposed to my students, and gradually to myself as well. It seemed important to me to start from an intuitive baggage common to everyone, independent of any technical language used to express it, and anterior to any such language – it turned out that the geometric and topological intuition of shapes, particularly two-dimensional shapes, formed such a common ground. This consists of themes which can be grouped under the general name of "topology of surfaces" or "geometry of surfaces", it being understood in this last expression that the main emphasis is on the topological properties of the surfaces, or the combinatorial aspects which form the most down-to-earth technical expression of them, and not on the differential, conformal, Riemannian, holomorphic aspects, and (from there) on to "complex algebraic curves". Once this last step is taken, however, algebraic geometry (my former love!) suddenly bursts forth once again, and this via the objects which we can consider as the basic building blocks for all other algebraic varieties. Whereas in my research before 1970, my attention was systematically directed towards objects of maximal generality, in order to uncover a general language adequate for the world of algebraic geometry, and I never restricted myself to algebraic curves except when strictly necessary (notably in étale cohomology), preferring to develop "pass-key" techniques and statements valid in all dimensions and in every place (I mean, over all base schemes, or even base ringed topoi...), here I was brought back, via objects so simple that a child learns them while playing, to the beginnings and origins of algebraic geometry, familiar to Riemann and his followers!

Since around 1975, it is thus the geometry of (real) surfaces, and starting in 1977 the links between questions of geometry of surfaces and the algebraic geometry of algebraic curves defined over fields such as **C**, **R** or extensions of **Q** of finite type, which were my principal source of inspiration and my constant guiding thread. It is with surprise and wonderment that over the years I discovered (or rather, doubtless, rediscovered) the prodigious, truly inexhaustible richness, the unsuspected depth of this theme, apparently so anodine. I believe I feel a central sensitive point there, a privileged point of convergence of the principal currents of mathematical ideas, and also of the principal structures and visions of things which they express, from the most specific (such as the rings $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\overline{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ or the group Sl(2) over one of these rings, or general reductive algebraic groups) to the most "abstract", such as the algebraic "multiplicities", complex analytic or real analytic. (These are naturally introduced when systematically studying "moduli varieties" for the geometric objects considered, and if we want to go farther than the notoriously insufficient point of view of "coarse moduli" which comes down to most unfortunately killing the automorphism groups of these objects.) Among these modular multiplicities, it is those of Mumford-Deligne for "stable" algebraic curves of genus g with ν marked points, which I denote by $\widehat{M}_{g,\nu}$ (compactification of the "open" multiplicity $M_{g,\nu}$ corresponding to non-singular curves), which for the last two or three years have exercised a particular fascination over me, perhaps even stronger than any other mathematical object to this day. Indeed, it is more the system of all the multiplicities $M_{g,\nu}$ for variable g, ν, linked together by a certain number of fundamental operations (such as the operations of "plugging holes", i.e. "erasing" marked points, and of "glueing", and the inverse operations), which are the reflection in absolute algebraic geometry in characteristic zero (for the moment) of geometric operations familiar from the point of view of topological or conformal "surgery" of surfaces. Doubtless the principal reason of this fascination is that this very rich geometric structure on the system of "open" modular multiplicities $M_{g,\nu}$ is reflected in an analogous structure on the corresponding fundamental groupoids, the "Teichmüller groupoids" $\widehat{T}_{g,\nu}$, and that these operations on the level of the $\widehat{T}_{g,\nu}$ are sufficiently intrinsic for the Galois group $\mathbb{\Gamma}$ of $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$ to act on this whole "tower" of Teichmüller groupoids, respecting all these structures. Even more extraordinary, this action is *faithful* –

indeed, it is already faithful on the first non-trivial "level" of this tower, namely $\widehat{T}_{0,4}$ – which also means, essentially, that the outer action of Γ on the fundamental group $\hat{\pi}_{0,3}$ of the standard projective line $\mathbb{P}^1$ over $\mathbf{Q}$ with the three points 0, 1 and ∞ removed, is already faithful. Thus *the Galois group* Γ *can be realised as an automorphism group of a very concrete profinite group*, and moreover respects certain essential structures of this group. It follows that an element of Γ can be "parametrised" (in various equivalent ways) by a suitable element of this profinite group $\hat{\pi}_{0,3}$ (a free profinite group on two generators), or by a system of such elements, these elements being subject to certain simple necessary (but doubtless not sufficient) conditions for this or these elements to really correspond to an element of Γ. One of the most fascinating tasks here is precisely to discover necessary *and* sufficient conditions on an exterior automorphism of $\hat{\pi}_{0,3}$, i.e. on the corresponding parameter(s), for it to come from an element of Γ – which would give a "purely algebraic" description, in terms of profinite groups and with no reference to the Galois theory of number fields, to the Galois group $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}/\mathbf{Q})$.

Perhaps even a conjectural characterisation of Γ as a subgroup of Autext $\hat{\pi}_{0,3}$ is for the moment out of reach ([1]); I do not yet have any conjecture to propose. On the other hand another task is immediately accessible, which is to describe the action of Γ on all of the Teichmüller tower, in terms of its action on the "first level" $\hat{\pi}_{0,3}$, i.e. to express an automorphism of this tower, in terms of the "parameter" in $\hat{\pi}_{0,3}$ which picks out the element γ running through Γ. This is linked to a representation of the Teichmüller tower (considered as a groupoid equipped with an operation of "glueing") by generators and relations, which will in particular give a presentation by generators and relations in the usual sense of each of the $\widehat{T}_{g,\nu}$ (as a profinite groupoid). Here, even for $g = 0$ (so when the corresponding Teichmüller groups are "well-known" braid groups), the generators and relations known to date which I have heard of appear to me to be unusable as they stand, because they do not present the characteristics of invariance and of symmetry indispensable for the action of Γ to be directly legible on the presentation. This is particularly linked to the fact that people still obstinately persist, when calculating with fundamental groups, in fixing a single base point, instead of cleverly choosing a whole packet of points which is invariant under the symmetries of the situation, which thus get lost on the way. In certain situations (such as descent theorems for fundamental groups à la van Kampen) it is much more elegant, even indispensable for understanding something, to work with fundamental groupoids with respect to a suitable packet of base points, and it is certainly so for the Teichmüller tower. It would seem (incredible, but true!) that even the geometry of the first level of the Teichüller tower (corresponding thus to "moduli" either for projective lines with four marked points, or to elliptic curves(!)) has never been explicitly described, for example the relation between the genus 0 case and the geometry of the octahedron, and that of the tetrahedron. A fortiori the modular multiplicities $M_{0,5}$ (for projective lines with five marked points) and $M_{1,2}$ (for curves of genus 1 with two marked points), which actually are practically isomorphic, appear to be virgin territory – braid groups will not enlighten us on their score! I have begun to look at $M_{0,5}$ at stray moments; it is a real jewel, with a very rich geometry closely related to the geometry of the icosahedron.

The a priori interest of a complete knowledge of the two first levels of the tower (i.e., the cases where the modular dimension $N = 3g3+\nu$ is ≤ 2) is to be found in the principle that *the entire tower can be reconstituted from these two first levels*, in the sense that via the fundamental operation of "glueing", level 1 gives a complete system of generators, and level 2 a complete system of relations. There is a striking analogy, and I am certain it is not merely formal, between this principle and the analogous principle of Demazure for the structure of reductive algebraic groups, if we replace the term "level" or "modular dimension" with "semi-simple rank of the reductive group". The link becomes even more striking, if we recall that the Teichmüller group $T_{1,1}$ (in the discrete, transcendental context now, and not in the profinite algebraic context, where we find the profinite completions of the former) is no other than $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$, i.e. the group of integral points of the simple group scheme of "absolute" rank 1 $\mathrm{Sl}(2)_{\mathbf{Z}}$. Thus, *the fundamental building block for the Teichmüller tower is essentially the same as for the "tower" of reductive groups of all ranks* – a group of which, moreover, we may say that it is doubtless present in all the essential disciplines of mathematics.

This principle of construction of the Teichmüller tower is not proved at this time – but I have no doubt that it is valid. It would be a consequence (via a theory of dévissage of stratified structures – here the $\widehat{M}_{g,\nu}$ – which remains to be written, cf. par. 5) of an extremely plausible property of the open modular multiplicities $M_{g,\nu}$ in the complex analytic context, namely that for modular dimension $N \geq 3$, the fundamental group of $M_{g,\nu}$ (i.e. the usual Teichmüller group $T_{g,\nu}$) is isomorphic to the "fundamental group at infinity", i.e. that of a "tubular neighbourhood of infinity". This is a very familiar thing (essentially due to Lefschetz) for a non-singular *affine* variety of dimension $N \geq 3$. True, the modular multiplicities are not affine (except for small values of g), but it would suffice if such an $M_{g,\nu}$ of dimension N (or rather, a suitable finite covering) were a union of $N2$ affine open sets, making $M_{g,\nu}$ "not too near a compact variety".

Having no doubt about this principle of construction of the Teichmüller tower, I prefer to leave to the experts, better equipped than I am, the task of proving the necessary (if it so happens that any are interested), to rather study, with all the care it deserves, the structure which ensues for the Teichmüller tower by generators and relations, this time in the discrete, not the profinite framework – which essentially comes down to a complete understanding of the four modular multiplicities $M_{0,4}$, $M_{1,1}$, $M_{0,5}$, $M_{1,2}$ and their fundamental groupoids based at suitably chosen "base points". These offer themselves quite naturally, as the complex algebraic curves of the type (g, n) under consideration, having automorphism group (necessarily finite) larger than in the generic case[8]. Including the holomorphic sphere with three marked points (coming from $M_{0,3}$, i.e. from level 0), we find *twelve fundamental "building blocks"* (6 of genus 0, 6 of genus 1) in a "game of Lego-Teichmüller" (large box), where the points marked on the surfaces considered are replaced by "holes" with boundary, so as to have surfaces with boundary, functioning as building blocks which can be assembled by gentle rubbing as in the ordinary game of Lego dear to our children (or grandchildren...). By assembling them we find an entirely visual way to construct every type of surface (it is essentially these constructions which will be the "base points" for our famous tower), and also to visualise the *elementary "paths"* by operations as concrete as "twists", or automorphisms of blocks in the game, and to write the *fundamental relations* between composed paths. According to the size (and the price!) of the construction box used, we can even find numerous different descriptions of the Teichmüller tower by generators and relations. The smallest box is reduced to identical blocks, of type (0, 3) – these are the Thurston "pants", and the game of Lego-Teichmüller which I am trying to describe, springing from motivations and reflections of absolute algebraic geometry over the field $\mathbf{Q}$, is very close to the game of "hyperbolic geodesic surgery" of Thurston, whose existence I learned of last year from Yves Ladegail-

[8] It is also necessary to add the "base points" coming from operations of glueing of "blocks" of the same type in smaller modular dimension. On the other hand, in modular dimension 2 (the cases of $M_{0,5}$ and $M_{1,2}$), it is advisable to exclude the points of certain one-parameter families of curves admitting an exceptional automorphism of order 2. These families actually constitute remarkable rational curves on the multiplicities considered, which appear to me to be an important ingredient in the structure of these multiplicities.

lerie. In a microseminar with Carlos Contou-Carrère and Yves Ladegaillerie, we began a reflection one of whose objects is to confront the two points of view, which are mutually complementary.

I add that each of the twelve building blocks of the "large box" is equipped with a canonical cellular decomposition, stable under all symmetries, having as its only vertices the "marked points" (or centres of the holes), and as edges certain geodesic paths (for the canonical Riemannian structure on the sphere or the torus considered) between certain pairs of vertices (namely those which lie on the same "real locus", for a suitable real structure of the complex algebraic curve considered). Consequently, all the surfaces obtained in this game by assembling are equipped with canonical cellular structures, which in their turn (cf. §3 below) enable us to consider these surfaces as associated to complex algebraic curves (and even over $\mathbf{Q}$) which are canonically determined. There is here a typical game of intertwining of the combinatorial and the complex algebraic (or rather, the algebraic over $\mathbf{Q}$).

The "small box" with identical blocks, which has the charm of economy, will doubtless give rise to a relatively complex description for the relations (complex, but not at all inextricable!). The large box will give rise to more numerous relations (because there are many more base points and remarkable paths between them), but with a more transparent structure. I foresee that in modular dimension 2, just as in the more or less familiar case of modular dimension 1 (in particular with the description of $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$ by $(\rho,\sigma|\rho^3=\sigma^2,\rho^4=\sigma^6=1)$), we will find a generation by the automorphism groups of the three types of relevant blocks, with simple relations which I have not clarified as I write these lines. Perhaps we will even find a principle of this type for all the $T_{g,\nu}$, as well as a cellular decomposition of $\widehat{M}_{g,\nu}$ generalising those which present themselves spontaneously for $\widehat{M}_{0,4}$ and $\widehat{M}_{1,1}$, and which I already perceive for modular dimension 2, using the hypersurfaces corresponding to the various *real structures* on the complex structures considered, to effect the desired cellular decomposition.

3. Number fields associated to a child's drawing

Instead of following (as I meant to) a rigorous thematic order, I let myself be carried away by my predilection for a particularly rich and burning theme, to which I intend to devote myself prioritarily for some time, starting at the beginning of the academic year 84/85. Thus I will take the thematic description up again where I left it, at the very beginning of the preceding paragraph.

My interest in topological surfaces began to appear in 1974, when I proposed to Yves Ladegaillerie the theme of the isotopic study of embeddings of a topological 1-complex into a compact surface. Over the two following years, this study led him to a remarkable isotopy theorem, giving a complete algebraic description of the isotopy classes of embeddings of such 1-complexes, or compact surfaces with boundary, in a compact oriented surface, in terms of certain very simple combinatorial invariants, and the fundamental groups of the protagonists. This theorem, which should be easily generalisable to embeddings of any compact space (triangulable to simplify) in a compact oriented surface, gives as easy corollaries several deep classical results in the theory of surfaces, and in particular Baer's isotopy theorem. It will finally be published, separately from the rest (and ten years later, seeing the difficulty of the times…), in Topology. In the work of Ladegaillerie there is also a purely algebraic description, in terms of fundamental groups, of the "isotopic" category of compact surfaces X, equipped with a topological 1-complex K embedded in X. This description, which had the misfortune to run counter to "today's taste" and because of this appears to be unpublishable, nevertheless served (and still serves) as a precious guide in my later reflections, particularly in the context of absolute algebraic geometry in characteristic zero.

The case where (X,Y) is a 2-dimensional "map", i.e. where the connected components of $X\backslash K$ are open 2-cells (and where moreover K is equipped with a finite set S of "vertices", such that the connected components of $K\backslash S$ are open 1-cells) progressively attracted my attention over the following years. The isotopic category of these maps admits a particularly simple algebraic description, via the set of "markers" (or "flags", or "biarcs") associated to the map, which is naturally equipped with the structure of a set with a group of operators, under the group

$$\underline{C}_2 = < \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 | \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0\sigma_2)^2 = 1 >,$$

which I call the (non-oriented) *cartographic group* of dimension 2. It admits as a subgroup of index 2 the *oriented cartographic group*, generated by the products of an even number of generators, which can also be described by

$$\underline{C}_2^+ = < \rho_s, \rho_f, \sigma | \rho_s\rho_f = \sigma, \sigma^2 = 1 >,$$

(with

$$\rho_s = \sigma_2\sigma_1, \quad \rho_f = \sigma_1\sigma_0, \quad \sigma = \sigma_0\sigma_2 = \sigma_2\sigma_0,$$

operations of *elementary rotation* of a flag around a vertex, a face and an edge respectively). There is a perfect dictionary between the topological situation of compact maps, resp. oriented compact maps, on the one hand, and finite sets with group of operators $\underline{C}_2$ resp. $\underline{C}_2^+$ on the other, a dictionary whose existence was actually more or less known, but never stated with the necessary precision, nor developed at all. This foundational work was done with the care it deserved in an excellent DEA thesis, written jointly by Jean Malgoire and Christine Voisin in 1976.

This reflection suddenly takes on a new dimension, with the simple remark that the group $\underline{C}_2^+$ can be interpreted as a quotient of the fundamental group of an oriented sphere with three points, numbered 0, 1 and 2, removed; the operations ρ_s, σ, ρ_f are interpreted as loops around these points, satisfying the familiar relation

$$\ell_0 \ell_1 \ell_2 = 1,$$

while the additional relation $\sigma^2 = 1$, i.e. $\ell_1^2 = 1$ means that we are interested in the quotient of the fundamental group corresponding to an imposed ramification index of 2 over the point 1, which thus classifies the coverings of the sphere ramified at most over the points 0, 1 and 2 with ramification equal to 1 or 2 at the points over 1. Thus, the compact oriented maps form an isotopic category equivalent to that of these coverings, subject to the additional condition of being finite coverings. Now taking the Riemann sphere, or the projective complex line, as reference sphere, rigidified by the three points 0, 1 and ∞ (this last thus replacing 2), and recalling that every finite ramified covering of a complex algebraic curve itself inherits the structure of a complex algebraic curve, we arrive at this fact, which eight years later still appears to me as extraordinary: *every "finite" oriented map is canonically realised on a complex algebraic curve!* Even better, as the complex projective line is defined over the absolute base field $\mathbf{Q}$, as are the admitted points of ramification, the algebraic curves we obtain are defined not only over $\mathbf{C}$, but over the algebraic closure $\overline{\mathbf{Q}}$ of $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{C}$. As for the map we started with, it can be found on the algebraic curve, as the inverse image of the real segment $[0,1]$ (where 0 is considered as a vertex, and 1 as the middle of a "folded edge" of centre 1), which itself is the "universal oriented 2-map" on the Riemann sphere[9]. The points of the algebraic curve

[9]There is an analogous description of finite non-oriented maps, possibly with boundary, in terms of *real* algebraic curves, more precisely of coverings of $\mathbb{P}^1_{\mathbf{R}}$ ramified only over 0, 1, ∞, the surface with boundary associated to such a covering being $X(\mathbf{C})/\tau$, where τ is complex conjugation. The "universal" non-oriented

X over 0, 1 and ∞ are neither more nor less than the vertices, the "centres" of the edges and those of the faces of the map (X, K), and the orders of the vertices and the faces are exactly the multiplicities of the zeros and the poles of the rational function (defined over $\mathbf{Q}$) on X, which expresses its structural projection to $\mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$.

This discovery, which is technically so simple, made a very strong impression on me, and it represents a decisive turning point in the course of my reflections, a shift in particular of my centre of interest in mathematics, which suddenly found itself strongly focused. I do not believe that a mathematical fact has ever struck me quite so strongly as this one, nor had a comparable psychological impact ([2]). This is surely because of the very familiar, non-technical nature of the objects considered, of which any child's drawing scrawled on a bit of paper (at least if the drawing is made without lifting the pencil) gives a perfectly explicit example. To such a dessin, we find associated subtle arithmetic invariants, which are completely turned topsy-turvy as soon as we add one more stroke. Since these are spherical maps, giving rise to curves of genus 0 (which thus do not lead to "moduli"), we can say that the curve in question is "pinned down" if we fix three of its points, for instance three vertices of the map, or more generally three centres of facets (vertices, edges or faces) – and then the structural map $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbf{C}}$ can be interpreted as a well-determined rational function

$$f(z) = P(z)/Q(z) \in \mathbf{C}(z)$$

quotient of two well-determined relatively prime polynomials, with Q unitary, satisfying algebraic conditions which in particular reflect the fact that f is unramified outside of 0, 1 and ∞, and which imply that the coefficients of these polynomials are *algebraic numbers*; thus their zeros are algebraic numbers, which represent respectively the vertices and the centres of the faces of the map under consideration.

Returning to the general case, since finite maps can be interpreted as coverings over $\overline{\mathbf{Q}}$ of an algebraic curve defined over the prime field $\mathbf{Q}$ itself, it follows that the Galois group $\mathbb{\Gamma}$ of $\overline{\mathbf{Q}}$ over $\mathbf{Q}$ acts on the category of these maps in a natural way. For instance, the operation of an automorphism $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$ on a spherical map given by the rational function above is obtained by applying γ to the coefficients of the polynomials P, Q. Here, then, is that mysterious group $\mathbb{\Gamma}$ intervening as a transforming agent on topologico-combinatorial forms of the most

map is here the disk, or upper hemisphere of the Riemann sphere, equipped as before with the embedded 1-complex $K = [0, 1]$.

elementary possible nature, leading us to ask questions like: are such and such oriented maps "conjugate" or: exactly which are the conjugates of a given oriented map? (Visibly, there is only a finite number of these).

I considered some concrete cases (for coverings of low degree) by various methods, J. Malgoire considered some others – I doubt that there is a uniform method for solving the problem by computer. My reflection quickly took a more conceptual path, attempting to apprehend the nature of this action of $\mathbb{\Gamma}$. One sees immediately that roughly speaking, this action is expressed by a certain "outer" action of $\mathbb{\Gamma}$ on the profinite compactification of the oriented cartographic group $\underline{C}_2^+$, and this action in its turn is deduced by passage to the quotient of the canonical outer action of $\mathbb{\Gamma}$ on the profinite fundamental group $\hat{\pi}_{0,3}$ of $(U_{0,3})_{\overline{\mathbf{Q}}}$, where $U_{0,3}$ denotes the typical curve of genus 0 over the prime field $\mathbf{Q}$, with three points removed. This is how my attention was drawn to what I have since termed "*anabelian algebraic geometry*", whose starting point was exactly a study (limited for the moment to characteristic zero) of the action of "absolute" Galois groups (particularly the groups $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, where K is an extension of finite type of the prime field) on (profinite) geometric fundamental groups of algebraic varieties (defined over K), and more particularly (breaking with a well-established tradition) fundamental groups which are very far from abelian groups (and which for this reason I call "*anabelian*"). Among these groups, and very close to the group $\hat{\pi}_{0,3}$, there is the profinite compactification of the modular group $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$, whose quotient by its centre ± 1 contains the former as congruence subgroup mod 2, and can also be interpreted as an oriented "cartographic" group, namely the one classifying *triangulated* oriented maps (i.e. those whose faces are all triangles or monogons).

Every finite oriented map gives rise to a projective non-singular algebraic curve defined over $\overline{\mathbf{Q}}$, and one immediately asks the question: which are the algebraic curves over $\overline{\mathbf{Q}}$ obtained in this way – do we obtain them all, who knows? In more erudite terms, could it be true that every projective non-singular algebraic curve defined over a number field occurs as a possible "modular curve" parametrising elliptic curves equipped with a suitable rigidification? Such a supposition seemed so crazy that I was almost embarrassed to submit it to the competent people in the domain. Deligne when I consulted him found it crazy indeed, but didn't have any counterexample up his sleeve. Less than a year later, at the International Congress in Helsinki, the Soviet mathematician Bielyi announced exactly that result, with a proof of disconcerting simplicity which fit into two little pages of a letter of Deligne – never, without a doubt, was such a deep and disconcerting result proved in so few lines!

In the form in which Bielyi states it, his result essentially says that *every algebraic curve defined over a number field can be obtained as a covering of the projective line ramified only over the points 0, 1 and* ∞. This result seems to have remained more or less unobserved. Yet it appears to me to have considerable importance. To me, its essential message is that *there is a profound identity between the combinatorics of finite maps on the one hand, and the geometry of algebraic curves defined over number fields on the other*. This deep result, together with the algebraic geometric interpretation of maps, opens the door onto a new, unexplored world – within reach of all, who pass by without seeing it.

It was only close to three years later, seeing that decidedly the vast horizons opening here caused nothing to quiver in any of my students, nor even in any of the three or four high-flying colleagues to whom I had occasion to talk about it in a detailed way, that I made a first scouting voyage into this "new world", from January to June 1981. This first foray materialised into a packet of some 1300 handwritten pages, baptised "The Long March through Galois theory". It is first and foremost an attempt at understanding the relations between "arithmetic" Galois groups and profinite "geometric" fundamental groups. Quite quickly it became oriented towards a work of computational formulation of the action of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ on $\hat{\pi}_{0,3}$, and at a later stage, on the somewhat larger group $\widehat{\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})}$, which gives rise to a more elegant and efficient formalism. Also during the course of this work (but developed in a different set of notes) appeared the central theme of anabelian algebraic geometry, which is to reconstitute certain so-called "anabelian" varieties X over an absolute field K from their mixed fundamental group, the extension of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ by $\pi_1(X_{\overline{K}})$; this is when I discovered the "fundamental conjecture of anabelian algebraic geometry", close to the conjectures of Mordell and Tate recently proved by Faltings ([3]). This period also saw the appearance of the first reflection on the Teichmüller groups, and the first intuitions on the many-faceted structure of the "Teichmüller tower" – the open modular multiplicities $M_{g,\nu}$ also appearing as the first important examples in dimension > 1, of varieties (or rather, multiplicities) seeming to deserve the appellation of "anabelian". Towards the end of this period of reflection, it appeared to me as a fundamental reflection on a theory still completely up in the air, for which the name "Galois-Teichmüller theory" seems to me more appropriate than the name "Galois Theory" which I had at first given to my notes. Here is not the place to give a more detailed description of this set of questions, intuitions, ideas – which even includes some tangible results. The most important thing seems to me to be the one pointed out in par. 2, namely the faithfulness of the outer action of $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (and of its open subgroups) on $\hat{\pi}_{0,3}$, and more generally (if I remember rightly) on the fundamental group of any "anabelian" algebraic curve (i.e. whose genus g and "number of holes" ν satisfy the equality $2g + \nu \geq 3$, i.e. such that $\chi(X) < 0$) defined over a finite extension of $\mathbf{Q}$. This result can be considered to be essentially equivalent to Bielyi's theorem – it is the first concrete manifestation, via a precise mathematical statement, of the "message" which was discussed above.

I would like to conclude this rapid outline with a few words of commentary on the truly unimaginable richness of a typical anabelian group such as $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$ – doubtless the most remarkable discrete infinite group ever encountered, which appears in a multiplicity of avatars (of which certain have been briefly touched on in the present report), and which from the point of view of Galois-Teichmüller theory can be considered as the fundamental "building block" of the "Teichmüller tower". The element of the structure of $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$ which fascinates me above all is of course the outer action of Γ on its profinite compactification. By Bielyi's theorem, taking the profinite compactifications of subgroups of finite index of $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$, and the induced outer action (up to also passing to an open subgroup of Γ), *we essentially find the fundamental groups of all algebraic curves* (not necessarily compact) *defined over number fields K, and the outer action of* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *on them* – at least it is true that every such fundamental group appears as a quotient of one of the first groups[10]. Taking the "anabelian yoga" (which remains conjectural) into account, which says that an anabelian algebraic curve over a number field K (finite extension of $\mathbf{Q}$) is known up to isomorphism when we know its mixed fundamental group (or what comes to the same thing, the outer action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ on its profinite geometric fundamental group), we can thus say that *all algebraic curves defined over number fields are "contained" in the profinite compactification* $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$, *and in the knowledge of a certain subgroup* Γ *of its group of outer automorphisms!* Passing to the abelianisations of the preceding fundamental groups, we see in particular that all the abelian ℓ-adic representations due to Tate and his circle, defined by Jacobians and generalised Jacobians of algebraic curves defined over number fields, are contained in this single action of Γ on the anabelian profinite group $\mathrm{Sl}(2,\mathbf{Z})$! ([4])

There are people who, faced with this, are content to shrug their shoulders with a disil-

[10] In fact, we are considering quotients of a particularly trivial nature, by abelian subgroups which are products of "Tate modules" $\hat{\mathbf{Z}}(1)$, corresponding to "loop-groups" around points at infinity.

lusioned air and to bet that all this will give rise to nothing, except dreams. They forget, or ignore, that our science, and every science, would amount to little if since its very origins it were not nourished with the dreams and visions of those who devoted themselves to it.

4. Regular polyhedra over finite fields

From the very start of my reflection on 2-dimensional maps, I was most particularly interested by the "regular" maps, those whose automorphism group acts transitively (and consequently, simply transitively) on the set of flags. In the oriented case and in terms of the algebraic-geometric interpretation given in the preceding paragraph, it is these maps which correspond to Galois coverings of the projective line.

[]

5. Denunciation of so-called "general" topology, and heuristic reflections towards a so-called "tame" topology

I would like to say a few words now about some topological considerations which have made me understand the necessity of new foundations for "geometric" topology, in a direction quite different from the notion of topos, and actually independent of the needs of so-called "abstract" algebraic geometry (over general base fields and rings). The problem I started from, which already began to intrigue me some fifteen years ago, was that of defining a theory of "dévissage" for stratified structures, in order to rebuild them, via a canonical process, out of "building blocks" canonically deduced from the original structure. Probably the main example which had led me to that question was that of the canonical stratification of a singular algebraic variety (or a complex or real singular space) through the decreasing sequence of its successive singular loci. But I probably had the premonition of the ubiquity of stratified structures in practically all domains of geometry (which surely others had seen clearly a long time before). Since then, I have seen such structures appear, in particular, in any situation where "moduli" are involved for geometric objects which may undergo not only continuous variations, but also "degeneration" (or "specialisation") phenomena – the strata corresponding then to the various "levels of singularity" (or to the associated combinatorial types) for the objects in question. The compactified modular multiplicities $\widehat{M}_{g,\nu}$ of Mumford-Deligne for the stable algebraic curves of type (g, ν) provide a typical and particularly inspiring example, which played an important motivating role when I returned to my reflection about stratified structures, from December 1981 to January 1982. Two-dimensional geometry provides many other examples of such modular stratified structures, which all (if not using rigidification) appear as "multiplicities" rather than as spaces or manifolds in the usual sense (as the points of these multiplicities may have non-trivial automorphism groups). Among the objects of two-dimensional geometry which give rise to such modular stratified structures in arbitrary dimensions, or even infinite dimension, I would list polygons (Euclidean, spherical or hyperbolic), systems of straight lines in a plane (say projective), systems of "pseudo straight lines" in a projective topological plane, or more general immersed curves with normal crossings, in a given (say compact) surface.

[]

6. "Differentiable theories" (à la Nash) and "tame theories"

One of the most interesting foundational theorems of (tame) topology which should be developed would be a theorem of "dévissage" (again!) of a proper tame map of tame spaces

$$f : X \longrightarrow Y,$$

via a

[]

7. Pursuing Stacks

Since the month of March last year, so nearly a year ago, the greater part of my energy has been devoted to a work of reflection on the *foundations of non-commutative (co)homological algebra*, or what is the same, after all, of *homotopical algebra*. These reflections have taken the concrete form of a voluminous stack of typed notes, destined to form the first volume (now being finished) of a work in two volumes to be published by Hermann, under the overall title *"Pursuing Stacks"*. I now foresee (after successive extensions of the initial project) that the manuscript of the whole of the two volumes, which I hope to finish definitively in the course of this year, will be about 1500 typed pages in length. These two volumes are moreover for me the first in a vaster series, under the overall title *"Mathematical Reflections"*, in which I intend to develop some of the themes sketched in the present report.

Since I am speaking here of work which is actually now being written up and is even almost finished, the first volume of which will doubtless appear this year and will contain a detailed introduction, it is undoubtedly less interesting for me to develop this theme of reflection here, and I will content myself with speaking of it only very briefly. This work seems to me to be somewhat marginal with respect to the themes I sketched before, and does not (it seems to me) represent a real renewal of viewpoint or approach with respect to my interests and my mathematical vision of before 1970. If I suddenly resolved to do it, it is almost out of desperation, for nearly twenty years have gone by since certain visibly fundamental questions, which were ripe to be thoroughly investigated, without anyone seeing them or taking the trouble to fathom them. Still today, the basic structures which occur in the homotopical point of view in topology are not understood, and to my knowledge, after the work of Verdier, Giraud and Illusie on this theme (which are so many beginnings still waiting for continuations…) there has been no effort in this direction. I should probably make an exception for the axiomatisation work done by Quillen on the notion of a category of models, at the end of the sixties, and taken up in various forms by various authors. At that time, and still now, this work seduced me and taught me a great deal, even while going in quite a different direction from the one which was and still is close to my heart. Certainly, it introduces derived categories in various non-commutative contexts, but without entering into the question of the essential internal structures of such a category, also left open in the commutative case by Verdier, and after him by Illusie. Similarly, the question of putting one's finger on the natural "coefficients" for a non-commutative cohomological formalism, beyond the stacks (which should be called 1-stacks) studied in the book by Giraud, remained open – or rather, the rich and precise intuitions concerning it, taken from the numerous examples coming in particular from algebraic geometry, are still waiting for a precise and supple language to give them form.

I returned to certain aspects of these foundational questions in 1975, on the occasion (I seem to remember) of a correspondence with Larry Breen (two letters from this correspondence will be reproduced as an appendix to Chap. I of volume 1, "History of Models", of Pursuing Stacks). At that moment the intuition appeared that ∞-groupoids should constitute particularly adequate models for homotopy types, the n-groupoids corresponding to *truncated* homotopy types (with $\pi_i = 0$ pour $i > n$). This same intuition, via very different routes, was discovered by Ronnie Brown and some of his students in Bangor, but using a rather restrictive notion of ∞-groupoid (which, among the 1-connected homotopy types, model only products of Eilenberg-Mac Lane spaces). Stimulated by a rather haphazard correspondence with Ronnie Brown, I finally began this reflection, starting with an attempt to define a wider notion of ∞-groupoid (later rebaptised stack in ∞-groupoids or simply "stack", the implication being: over the 1-point topos), and which, from one thing to another, led me to Pursuing Stacks. The volume "History of Models" is actually a completely unintended digression with respect to the initial project (the famous stacks being temporarily forgotten, and supposed to reappear only around page 1000...).

This work is not completely isolated with respect to my more recent interests. For example, my reflection on the modular multiplicities $\widehat{M}_{g,\nu}$ and their stratified structure renewed the reflection on a theorem of van Kampen in dimension > 1 (also one of the preferred themes of the group in Bangor), and perhaps also contributed to preparing the ground for the more important work of the following year. This also links up from time to time with a reflection dating from the same year 1975 (or the following year) on a "De Rham complex with divided powers", which was the subject of my last public lecture, at the IHES in 1976; I lent the manuscript of it to I don't remember whom after the talk, and it is now lost. It was at the moment of this reflection that the intuition of a "schematisation" of homotopy types germinated, and seven years later I am trying to make it precise in a (particularly hypothetical) chapter of the History of Models.

The work of reflection undertaken in Pursuing Stacks is a little like a debt which I am paying towards a scientific past where, for about fifteen years (from 1955 to 1970), the development of cohomological tools was the constant Leitmotiv in my foundational work on algebraic geometry. If in this renewal of my interest in this theme, it has taken on unexpected dimensions, it is however not out of pity for a past, but because of the numerous unexpected phenomena which ceaselessly appear and unceremoniously shatter the previously laid plans and projects – rather like in the thousand and one nights, where one awaits with bated breath through twenty other tales the final end of the first.

8. Digressions on 2-dimensional geometry

Up to now I have spoken very little of the more down-to-earth reflections on two-dimensional topological geometry, directly associated to my activities of teaching and "directing research". Several times, I saw opening before me vast and rich fields ripe for the harvest, without ever succeeding in communicating this vision, and the spark which accompanies it, to one of my students, and having it open out into a more or less long-term common exploration. Each time up through today, after a few days or weeks of investigating where I, as scout, discovered riches at first unsuspected, the voyage suddenly stopped, upon its becoming clear that I would be pursuing it alone. Stronger interests then took precedence over a voyage which at that point appeared more as a digression or even a dispersion, than a common adventure.

One of these themes was that of planar polygons, centred around the modular varieties which can be associated to them. One of the surprises here was the irruption of algebraic geometry in a context which had seemed to me quite distant. This kind of surprise, linked to the omnipresence of algebraic geometry in plain geometry, occurred several times.

Another theme was that of curves (in particular circles) immersed in a surface, with particular attention devoted to the "stable" case where the singular points are ordinary double points (and also the more general theme where the different branches at a point mutually cross), often with the additional hypothesis that the immersion is "cellular", i.e. gives rise to a map. A variation on the situations of this type is that of immersions of a surface with non-empty boundary, and first of all a disk (which was pointed out to me by A'Campo around ten years ago). Beyond the question of the various combinatorial formulations of such situations, which really represent no more than an exercise of syntax, I was mainly interested in a dynamical vision of the possible configurations, with the passage from one to another via continuous deformations, which can be decomposed into compositions of two types of *elementary operations* and their inverses, namely the "*sweeping*" of a branch of a curve over a double point, and the *erasing* or the *creation* of a bigon. (The first of these operations also plays a key role in the "dynamical" theory of systems of pseudo-lines in a real projective plane.) One of the first questions to be asked here is that of determining the different *classes of immersions* of a circle or a disk (say) modulo these elementary operations; another, that of seeing which are the immersions of the boundary of the disk which come from an immersion of the disk, and to what extent the first determine the second. Here also, it seems to me that it is a systematic study of the relevant modular varieties (of infinite dimension here, unless a purely combinatorial description of them can be given) which should give the most efficient "focus", forcing us in some sense to ask ourselves the most relevant questions. Unfortunately, the reflection on even the most obvious and down-to-earth questions has remained in an embryonic state. As the only tangible result, I can cite a theory of canonical "dévissage" of a stable cellular immersion of a circle in a surface into "undecomposable" immersions, by "telescoping" such immersions. Unfortunately I did not succeed in transforming my lights on the question into a DEA thesis, nor other lights (on a complete theoretical description, in terms of fundamental groups of topological 1-complexes, of the immersions of a surface with boundary which extend a given immersion of its boundary) into the beginnings of a doctoral thesis…

A third theme, pursued simultaneously over the last three years at different levels of teaching (from the option for first year students to the three third-cycle theses now being written on this theme) deals with the topologico-combinatorial classification of systems of lines or pseudo-lines. Altogether, the participation of my students here has been less disappointing than elsewhere, and I have had the pleasure of occasionally learning interesting things from them which I would not have thought of. Things being what they are, however, our common reflection was limited to a very elementary level. Lately, I finally devoted a month of intensive reflection to the development of a purely combinatorial construction of a sort of "modular surface" associated to a system of n pseudo-lines, which classifies the different possible "relative positions" (stable or not) of an $(n+1)$-st pseudo-line with respect to the given system, in other words: the different possible "affinisations" of this system, by the different possible choices of a "pseudo-line at infinity". I have the impression of having put my finger on a remarkable object, causing an unexpected order to appear in questions of classification which up to now appeared fairly chaotic! But the present report is not the place to dwell further on this subject.

Since 1977, in all the questions (such as the two last themes evoked above) where two-dimensional maps occur, the possibility of realising them canonically on a conformal surface, so on a complex algebraic curve in the compact oriented case, remains constantly in filigree throughout my reflection. In practically every case (in fact, in all cases except that of certain spherical maps with "few automorphisms") such a conformal realisation implies in fact a *canonical Riemannian metric*, or at least, canonical up to a multiplicative constant. These new elements of structure (without even taking into account the arithmetic element which was considered in par. 3) are of a nature to deeply transform the initial aspect of the questions considered, and the methods of approaching them. A beginning of familiarisation with the beautiful ideas of Thurston on the construction of Teichmüller space, in terms of a very simple game of hyperbolic Riemannian surgery, confirms me in this presentiment. Unfortunately, the very modest level of culture of almost all the students who have worked with me over these last ten years does not allow me to investigate these possibilities with them even by allusion, since the assimilation of even a minimal combinatorial language already frequently encounters considerable psychical obstacles. This is why, in some respect and more and more in these last years, my teaching activity has often acted like a weight, rather than a stimulus for the unfolding of a somewhat advanced or even merely delicate geometric reflection.

9. Assessment of a teaching activity

The occasion appears to be auspicious for a brief assessment of my teaching activity since 1970, that is, since it has taken place in a university. This contact with a very different reality taught me many things, of a completely different order than simply pedagogic or scientific. Here is not the place to dwell on this subject. I also mentioned at the beginning of this report the role which this change of professional milieu played in the renewal of my approach to mathematics, and that of my centres of interest in mathematics. If I pursue this assessment of my teaching activity on the research level, I come to the conclusion of a clear and solid failure. In the more than ten years that this activity has taken place, year after year in the same university, I was never at any moment able to suscitate a place where "something happened" – where something "passed", even among the smallest group of people, linked together by a common adventure. Twice, it is true, around the years 1974 to 1976, I had the pleasure and the privilege of awakening a student to a work of some consequence, pursued with enthusiasm: Yves Ladegaillerie in the work mentioned earlier (par. 3) on questions of isotopy in dimension 2, and Carlos Contou-Carrére (whose mathematical passion did not await a meeting with myself to blossom) an unpublished work on the local and global Jacobians over general base schemes (of which one part was announced in a note in the CR).

Apart from these two cases, my role has been limited throughout these ten years to somehow or other conveying the rudiments of the mathematician's trade to about twenty students on the research level, or at least to those among them who persevered with me, reputed to be more demanding than others, long enough to arrive at a first acceptable work written black on white (and even, sometimes, at something better than acceptable and more than just one, done with pleasure and worked out through to the end). Given the circumstances, among the rare people who persevered, even rarer are those who will have the chance of carrying on the trade, and thus, while earning their bread, learning it ever more deeply.

10. Epilogue

Since last year, I feel that as regards my teaching activity at the university, I have learned everything I have to learn and taught everything I can teach there, and that it has ceased to be really useful, to myself and to others. To insist on continuing it under these circumstances would appear to me to be a waste both of human resources and of public funds. This is why I have applied for a position in the CNRS (which I left in 1959 as freshly named director of research, to enter the IHES). I know moreover that the employment situation is tight in the CNRS as everywhere else, that the result of my request is doubtful, and that if a position were to be attributed to me, it would be at the expense of a younger researcher who would remain without a position. But it is also true that it would free my position at the USTL to the benefit of someone else. This is why I do not scruple to make this request, and to renew it if is not accepted this year.

In any case, this application will have been the occasion for me to write this sketch of a programme, which otherwise would probably never have seen the light of day. I have tried to be brief without being sibylline and also, afterwards, to make it easier reading by the addition of a summary. If in spite of this it still appears rather long for the circumstances, I beg to be excused. It seems short to me for its content, knowing that ten years of work would not be too much to explore even the least of the themes sketched here through to the end (assuming that there is an "end"…), and one hundred years would be little for the richest among them!

Behind the apparent disparity of the themes evoked here, an attentive reader will perceive as I do a profound unity. This manifests itself particularly by a common source of inspiration, namely the geometry of surfaces, present in all of these themes, and most often front and centre. This source, with respect to my mathematical "past", represents a renewal, but certainly not a rupture. Rather, it indicates the path to a new approach to the still mysterious reality of *"motives"*, which fascinated me more than any other in the last years of this past[11]. This fascination has certainly not vanished, rather it is a part of the fascination with the most burning of all the themes evoked above. But today I am no longer, as I used to be, the voluntary prisoner of interminable tasks, which so often prevented me from springing into the unknown, mathematical or not. The time of tasks is over for me. If age has brought me something, it is lightness.

[11]On this subject, see my commentaries in the "Thematic Sketch" of 1972 attached to the present report, in the last section "motivic disgressions", (loc. cit. pages 17-18)

Les mois écoulés

VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES

I. Vers une géométrie des formes (topologiques)

[Apprendre] vers une construction récouvrante (sur l'action naturelles) d'une "géométrie des formes de dimension $\leq n$".

Une "forme de dim 0" soit pour définition [] dont les éléments sont appelés les "lieux" de la forme.

Modèle de dimension 1. — Une tel modèle
[]

1) Deux ensembles de [] L_α (ensemble des *lieux* de modèles) et S (ensemble des *segments* des modèle)

2) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}(L)$, $I \longrightarrow \widetilde{I}$ (lieux sur un segment) - i.e. une relation entre S et L.

3) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}_2(L)$ []

N.B. J'ignore s'il faut supposer que I est connu, quand on connaît

Modèle d'une forme 1-dimensionnelle

L ensemble de "lieux"
S ensemble de "segments"

II. Réalisations topologiques des réseaux

1. — [] topologique

Soit X un espace topologique, $A \subset X$ partie fermée non vide de X. $X_{/A}$ l'espace déduit de X en [] A en un point, a le point déduit de A par []. Si X' est une partie de X contenant A, alors $X'_{/A} \hookrightarrow X_{/A}$ identifié $X'_{/A}$ à un sous-espace topologique de X.

Les fermées de $X'_{/A}$ s'identifient aux fermées de X' qui on bien contient A

III. Réseaux via découpages

Je voudrais définir une [] axiomatique a structure [] réseaux sur un [] L ([] de "lieux").

[]

Exemple 2 Soit L un ensemble ordonnée, on suppose L filtrant croissante, filtrant décroissant, sans plus grand [] plus petit élément, localement filtrant croissante et filtrant décroissante divisible.

On appellera un tel ensemble une *[] ordonnée*.

IV. Analysis situs (première mouture)

V. Algèbre des figures

VI. Analysis situs (deuxième mouture)

Avant de décrire ce qu'est une [], je vais décrire ce qui sera [] avec notion de multistrates" - la famille des multistrates choisies jouant un peu le rôle des une famille d'ouverts [] donc une topologie, ou une famille génératrice d'éléments d'un topos. Je vais donc commencer pas

I. "Algèbre des figures" ou "Ateliers".

1. — Une *algèbre des figures* implique avant tout trois types d'objets, les *lieux*, les *multistrates*, les *figures*, formant trois ensembles

$$L, M, F \tag{1.1}$$

liées entre eux par diverses applications, et [] muni de diverses structures. Ainsi, on a des applications canoniques invectives

$$L \overset{b)}{\hookrightarrow} M \overset{a)}{\hookrightarrow} F \tag{1.2}$$

que nous utiliserons souvent pour identifier un lieu à une multistrate particulière, et une multistrate à une figure particulière ou L à une sous-ensemble de M, M à un sous-ensemble de F.

Il y a d'autre part deux entre paires d'applications, que voici :

(1.3) []

où $\mathrm{Fig}(M)$ désigne la partie de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ formée des figures ensemblistes dans M. On peut considérer que le première application correspond à une relation entre M et F, appelée relation d'incidence. Pour une figure F, $\widehat{T}$ s'appelle l'ensemble des *multistrates incidentes*, ou le *déployement* de la figure F. Si $X \in M$, $F \in \widetilde{F}$, on dire que le multistrate X est *incidente* à la figure F ou encore que c'est une *strate de la figure* F, si $X \in \widetilde{F}$. D'autre part, tout élément X de M (i.e. toute multistrate), [] comme une figure par (1.2), admet un déployement $\widetilde{X}$, et on pose

(1.4) []

et il résultera des axiomes que c'est une figure ensembliste des M, [] fidèlement par l'un $\widetilde{F}$ des strates de F.

En fait, M sera muni d'une relation d'ordre $\leq$, [] plus bas, et $\widetilde{F} \subset M$ sera une partie fermée de M, et pour tout $X \in \widetilde{F}$, on aura

$$\widetilde{X} = \{Y \in M \mid Y \leq X\} \tag{1.5}$$

À cause de cette interpolation, la passage de $\widetilde{F} \subset M$ à $\mathrm{Fig}_M(F)$ est à tout [], que cette figure ensembliste des M un semble revenant important - mais à voir…

VII. Analysis situs (troisième mouture)

VIII. Analysis situs (quatrième mouture)