L E T T E R S

(*Collection*)

A. Grothendieck

This edition is a collection of letters of A. Grothendieck reunited by Mateo Carmona. Remarks, comments, and corrections are welcome.
https://agrothendieck.github.io/

Typeset with LaTeX and the fabulous *memoir* class. Composed with Bitstream Charter for the text type and Paul Pichaureau's mathdesign package for the math type. All diagrams and illustrations were made with Till Tantau's Ti*k*Z (Ti*k*Z ist *kein* Zeichenprogramm) and the tikz-cd package.

Contents

1947

Montpellier le 6.3.1947

Lettre, 6.3.1947

1 Je suis né le 28.3.1928 à Berlin (Allemagne). Entré en France en Mai 1939 (mes parents, gens de lettres, étant émigrés en 1933-34).

Mon père fut interné en Octobre 1939, au Vernet, ma mère et moi en Juin 1940, à Rieucros (Lozère) puis à Brens (Tarn). Grâce à l'intervention de la Cimade, je pus quitter le camp en Juin 1942.

Depuis Novembre 1945, je suis étudiant en Sciences à l'Université de Montpellier. En Juin 1946, j'ai obtenu le Certificat d'Études supérieures de Mathématiques Générales avec la mention "Très Bien". Actuellement, je prépare la Licence pour Juin-Octobre de cette année.

En Août 1942, mon père (israëlite) a été déporté; il a disparu. Ma mère, libérée en 44, a passé une année à la Maison de Repos de la Cimade au Chambon. Depuis elle a pris sur elle de gagner notre vie, avec l'appui d'une mensualité (de 2500 frs actuellement) de la part du CIR. Mais maintenant elle se trouve dans un tel état d'épuisement physique qu'elle ne pourra pas de sitôt entreprendre quoi que ce soit.

J'espère, ma licence obtenue en Octobre, trouver un poste dans l'enseignement prié, ce qui me permettrait d'assumer la charge de notre petite famille et de continuer mes études.

Il y a donc, en tout cas, plusieurs mois difficiles à passer, ce qui ne nous serait pas possible sans une aide efficace, et je prie le CIR de m'accorder pour les mois à venir la même allocation qu'à ma mère.

Peut-être est-il nécessaire de souligner que je ne reçois aucune bourse ni autre secours.

1948

Sèvres 15.12.1948

Liebe Tante Dagmar,

2 Da ich weiß, daß Du das Weihnachtsfest anerkennst, möchte ich Dir noch zur rechten Zeit meine Weihnachtsgrüße senden. - Hanka und ich werden zu dieser Weihnacht nicht beisammen sein, und da wir nur ohnehin nichts schenken können, und wir ja keine eigentlichen Christen sind und Weihnachten bisher vor allem deshalb feierten, weil es ein so schönen Fet ist, daß es schade wäre, es nicht zu adoptieren - wird es uns wohl ziemlich unbemerkt vorbeigehen. Hanka schreibt intensiv an ihren Roman, sie fängt an, wieder zu ihren früheren Arbeitskraft zu gelangen. Zu Ende 1949 wird das Buch vielleicht schon erscheinen. Ich bin ob diesen Wiedergeburt froher, als über meine eigene Arbeit, die mir auch viel Freud macht. Meinen Doktor werde ich allerdings dies Jahr wohl nicht machen können, auf jeden Fall keinen sehr ernsthaften: meine paar persönliche Forschungen, als ich in Montpellier war, und die bei der mangelnden Dokumentation dort originell scheinen konnten, und die dann nicht ohne Wichtigkeit gewesen wären, haben sich hier als schon bekannt erwiesen. Und obendrein stellt er sich heraus, daß sogar in der neuen Mathematik meine Kenntnissen noch so lückenhaft sind, daß es wirklich angebracht ist, dies Jahr noch meine allgemeine mathematische Bildung zu vervollkommen. Unter ganz anderen Bedingungen allerdings als in dem stagnierenden Montpellier! Hier habe ich ausgezeichnete Lehrer, mit denen ich mich endlich verwandt fühlen kann. - Ich studiere algebraische Topologie, allgemeine Algebra, Anwendung der Topologie auf funktionale Gleichungen, Theorie des Maßes and der Integration (falls Dir das etwas sagt). Vor allem, sagte mir mein Lehrer, Henri Cartan, sei die algebraische Topologie ein Gebiet, das sehr viele Forschungen noch fordere. *Lieben an D. Heydorn, 15.12.1948*

Ich lebe hier unter ganz günstigen Bedingungen. Hinreichendes Essen, relative Ruhe zum Arbeiten, einige ganz gute Kameraden und sogar Kamaraderinnen. Zwar ist das “Quartier Latin” ziemlich weit, aber ich brauche nur dreimal pro Woche Vorlesungen beiwohnen. Was mir won Wichtigkeit ist: ich habe wieder angefangen, Klavier zu lernen, und hoffe durch regelmäßige Arbeit bald Fortschritte zu machen. Das ist eine außerordentlichen Antidote gegen Mathematik, erfrischend und stimulierend.

Hoffentlich bekomme ich auch Nachricht von Euch. Seit mehreren Monate habe ich nichts mehr von Euch gehört. Ich hoffe, daß euch keinerlei Unglück getroffen hat, oder daß ich Onkel Wilhelm nicht irgendwie unwillentlich gekränkt habe. Etwa durch meinen letzten Brief, da wohl ziemlich gekliert [sic] war oder seinen Inhalt; ich bin ja so schlecht erzogen!

Auch wurmt es mich, daß es uns nicht möglich ist, euch irgend etwas Hübschen zuschicken. Es ist peinlich, es immer bei ein paar Briefen bewenden zu lassen. Aber jede Kleinigkeit, und auch das Porto, sind derart teuer, und sowieso kommen wir auch nur soeben-und-eben durch !

Grüße herzlich Onkel Wilhelm von mir; ich bitte ihn, mir etwas Ungezogenheiten zu verzeihen. Und Volker grüße auch. Und verbringe recht fröhlichen Festtage.

Dein Schurik

1949

1950

Nancy le 20.11.1950

Cher Monsieur Dixmier,

3 *Lettre à J. Dixmier, 20.11.1950*

Nancy le 10.12.1950

Cher Monsieur Dixmier,

4 Merci pour votre lettre et votre tirage à part. – Malheureusement, la suggestion que vous me faites ne m'apporte rien de neuf, car les minimisations dont vous parlez sont à fortiori incluses dans le fait de prendre un flot compact convexe *minimal* (ce qui est possible grâce au théorème de Zorn). *Lettre à J. Dixmier, 10.12.1950*

Il est bien vrai que dans un espace complet quelconque,

[ ]

Nancy le 16.12.1950

Cher Monsieur Dixmier,

5 Merci pour votre lettre *Lettre à J. Dixmier, 16.12.1950*

1951

A. Grothendieck
3 chemin du Grand Moulin
Nancy

Nancy le 7.6.1951

Cher Dixmier,

6 Pouvez-vous m'envoyer votre article sur la trace dans les anneaux de type fini, et votre papier aux Annals sur les “fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs...”? *Lettre à J. Dixmier, 7.6.1951*

Je vous signale une réponse (quasi-triviale) à une question que vous posez dans ce dernier papier (vous en connaissez probablement la réponse aujourd'hui): vous demandez si dans T', convergence faible (i.e.: pour $\sigma(T', B)$) implique convergence forte, pour les suites. La réponse est non, car soit $a \in H, a \neq 0$, l'application $x \to a \otimes x$ de H dans T' est évidemment un isomorphisme dans; mais si la propriété envisagé était vraie pour T', elle le serait pour ses sous-espaces, donc pour H, ce qui est faux.

Je vous envoie mes meilleures salutations

1952

Sèvres 15.12.1948

1953

1954

Sèvres 15.12.1948

Sèvres 15.12.1948

Sèvres 15.12.1948

1955

Sèvres 15.12.1948

1956

1957

1958

1959

1960

Paris le 9.10.1960

Monsieur et cher Maître,

7 Je Vous remercie pour votre lettre, empreinte à la fois de sagesse et de mansuétude. Il semble vain en effet qu'un différend personnel puisse être l'occasion du départ d'une disciple. Je reconnais qu'il était vain que j'attende du Maître qu'il arbitre une quérelle qui ne le concerne pas, et qu'un tel arbitrage ne pouvais résoudre rien.

Lettre à N. Bourbaki, 9.10.1960

Je me suis interrogé plusieurs fois pendant les annés de ma collaboration avec le Maître si mes habitudes peu sociables, mon caractère passioné et ma répugnance à vainore les répugnances d'autruix, ne me rendaient inapte à une collaboration fertile pendant les congrès. Sans plus vouloir chercher la cause ailleurs qu'en moi-même, je pense maintenant qu'il en est bien ainsi, et que j'ai atteint avant l'âge traditionnel le moment où je servirai mieux le Maître par mon départ, qu'en restant sur Ses amicales instances.

Je m'efforcerai de rester digne des enseignements que Vous m'avez prodigués pendant si longtemps et de ne pas trahir l'exprit du Maître, qui, je l'espère, restera visible dans mon travail comme par le passé.

Votre très dévoué élève et serviteur,

Dear Sir and my dear Master,

I thank You for your letter, marked by both wisdom and clemency. Indeed it seems pointless that a personal disagreement could be the occasion for the departure of a disciple. I recognize that it was pointless for me to wait for the Master to arbitrate a quarrel that did not concern him and that such arbitration would resolve nothing.

I have asked myself many times over the years of my collaboration with the Master whether my lack of social skill, my impassioned character, and my repugnance for overcoming the repugnance of others, did not render me unsuitable for a productive collaboration during the meetings. No longer wanting to search for the cause anywhere except in myself, I now think that it is better this way and that I reached earlier than the traditional age the moment when I would better serve the Master by my departure, rather than remaining as a result of His kind insistence.

I will endeavor to remain worthy of the teachings that You for so long lavished upon me and not to betray the spirit of the Master who, I hope, will remain visible in my work as it has been in the past.

Your very devoted pupil and servant,

1961

1962

1963

1964

1965

1966

6.1.1966

Dear Coates,

8 Here a few more comments to my talk on the conjectures. The following proposition shows that the conjecture $C_\ell(X)$ is independent of the chosen polarisation, and has also some extra interest, in showing the part played by the fact that $\mathrm{H}^i(X)$ should be "motive-theoretically" isomorphic to its natural dual $\mathrm{H}^{2n-i}(X)$ (as usual, I drop the twist for simplicity). *Letter to J. Coates, 6.1.1966*

Proposition. — *The condition $C_\ell(X)$ is equivalent also to each of the following conditions:*

a) *$D_\ell(X)$ holds, and for every $i < n$, there exists an isomorphism $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \to \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic (i.e. induced by an algebraic correspondence class; we do not make any assertion on what it induces in degrees different from $2n-i$).*

b) *For every endomorphism $\mathrm{H}^i(X) \to \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic, the coefficients of the characteristic polynomial are rational, and for every $i < n$, there exists an isomorphism $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \to \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic.*

Proof. — I sketched already how $D_\ell(X)$ implies the fact that for an algebraic endomorphism of $\mathrm{H}^i(X)$, the coefficients of the characteristic polynomial are rational numbers, therefore we know that a) implies b), and of course $C_\ell(X)$ implies a). It remains to prove that b) implies $C_\ell(X)$. Let $u : \mathrm{H}^{2n-i}(X) \to \mathrm{H}^i(X)$ be the given isomorphism which is algebraic, and $v : \mathrm{H}^i(X) \to \mathrm{H}^{2n-i}(X)$ is an algebraic isomorphism in the opposite direction, induced by L_X^{n-i}. Then $uv = w$ is an automorphism of $\mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic, and the Hamilton-Cayley formula $u^h - \sigma_1(w)u^{h-1} + \ldots + (-1)^b \sigma_b(w) = 0$ (where the $\sigma_i(w)$ are the coefficients of the characteristic polynomial of w) such that w^{-1} is a linear combination of the w^i, with coefficients of the type $+/-\sigma_i(w)/\sigma_b(w)$ (N.B. $b = \operatorname{rank} \mathrm{H}^i$). The assumption implies that these coefficients are rational, which implies that w^{-1} is algebraic, and so is $w^{-1}u = v^{-1}$, which was to be proved.

N.B. In characteristic 0, the statement simplifies to: $C(X)$ equivalent to the existence of algebraic isomorphisms $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \to \mathrm{H}^i(X)$, (as the preliminary in b) is then automatically satisfied). Maybe with some extra care this can be proved too in arbitrary characteristics.

Corollary. — *Assume X and X' satisfy condition C_ℓ, and let $u : \mathrm{H}^i(X) \to \mathrm{H}^{i+2D}(X') \to \mathrm{H}^i(X)$ $(D \in \mathbf{Z})$ be an isomorphism which is algebraic. Then u^{-1} is algebraic.*

Indeed, the two spaces can be identified "algebraically" (both directions!) to their dual, so that the transpose of u can be viewed as an isomorphism $u' : \mathrm{H}^{i+2D}(X') \to \mathrm{H}^i(X)$. Thus $u'u$ is an algebraic automorphism w of $\mathrm{H}^i(X)$, and by the previous argument we see that w^{-1} is algebraic, hence so is $u^{-1} = w^{-1}u'$.

As a consequence , we see that if $x \in \mathrm{H}^i(X)$ is such that $u(x)$ is algebraic (i being now assumed to be even), than so is x. The same result should hold in fact if u is a monomorphism, the reason being that in this case there should exists a left-inverse which is algebraic; this exists indeed in a case like $\mathrm{H}^{n-1}(X) \to \mathrm{H}^{n-1}(Y)$ (where we take the left inverse $\Lambda_X \phi_*$). But to get it in general, it seems w need moreover the Hodge index relation. (The complete yoga then being that we have the category of motives which is semi-simple!). Without speaking of motives, and staying down on earth, it would be nice to explain in the notes that $C(X)$ together with the index relation $I(X \times X)$ implies that the ring of correspondences classes for X is semi-simple, and how one deduces from this the existence of left and right inverses as looked for above.

This could be given in an extra paragraph (which I did not really touch upon in the talk), containing also the deduction of the Weil conjectures from the conjectures C and A.

A last and rather trivial remark is the following. Let's introduce variant $A'_\ell(X)$ and $A''_\ell(X)$ as follows:

$A'_\ell(X)$: if $2i \leq n-1$, any element x of $\mathrm{H}^i(X)$ whose image in $\mathrm{H}^i(Y)$ is algebraic, is algebraic.

$A''_\ell(X)$: if $2i \geq n-1$, any algebraic element of $\mathrm{H}^{i+2}(X)$ is the image of an algebraic element of $\mathrm{H}^i(Y)$.

Let us consider also the specifications $A'_\ell(X)^\circ$ and $A''_\ell(X)^\circ$, where we restrict to the [] dimensions $2i = n-1$ if n odd, $2i = n-2$ if n even. All these conditions are in the nature of "weak" Lefschetz relations, and they are trivially implied by $A_\ell(X)$ resp. $C_\ell(X)$ (in the first case, applying ϕ we see that $L_X X$ is algebraic; in the second, we take $y = \Lambda_Y \phi^+(x)$). The remark then is that these pretendently "weak" variants in fact imply the full Lefschetz relations for algebraic cycles, namely:

Proposition. — *$C_\ell(X)$ is equivalent to the conjunction $C_\ell(Y) + A_\ell(X \times X)^\circ + A''_\ell(X \times X)^\circ$, hence (by induction) also to the conjunction of the conditions A'°_ℓ and A''°_ℓ for all of the varieties $X \times X$, $Y \times Y$, $Z \times Z$,... Analogous statement with $X \times Y$, $Y \times Z$ etc instead of $X \times X$, $Y \times Y$ etc.*

This comes from the remark that $A_\ell(X)^\circ$ follows from the conjunction of $A'_\ell(X)^\circ$ and $A''_\ell(X)^\circ$, as one sees by decomposing $L_X^2 : \mathrm{H}^{2m-2}(X) \to \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ into $\mathrm{H}^{2m+2}(X) \xrightarrow{\phi^k} \mathrm{H}^{2m+2}(Y) \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathrm{H}^{2m}(X) \xrightarrow{L_X} \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ if $\dim X = 2m$ is even, and $\mathrm{H}^{2m+1-1}(X) \to \mathrm{H}^{2m+1+1}$ into $\mathrm{H}^{2m}(X) \xrightarrow{\phi^*} \mathrm{H}^{2m}(Y) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ if $\dim X = 2m+1$ is odd.

Sincerely yours

Pise 5.1966

Cher John,

9 J'ai réfléchi aux groupes formels et à la cohomologie de De Rham, et suis arrivé à un projet de théorie, ou plutôt de début de théorie, que j'ai envie de t'exposer, pour me clarifier les idées. *Lettre à J. Tate, 5.1966*

Chapitre 1. — La notion de cristal Commentaire terminologique : Un cristal possède deux propriétés caractéristiques : la *rigidité*, et la faculté de *croître*, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de souffre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs etc.

1.0. — Soit S un préschéma, au dessus d'un autre R; dans le cas qui nous intéressera le plus, on aura $R = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$. Soit C la catégorie des R-préschémas T sous S, (i.e. munis d'un R-morphisme $S \to T$,) tels que $S \to T$ soit une immersion fermée définie par un idéal localement nilpotent. On a le foncteur "oubli" de C dans , et la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur des préschémas variables induit donc une catégorie fibrée sur C, associant à tout T la catégorie des Modules quasi-cohérents sur T.

Définition (1.1). — On appelle cristal de modules (sous-entendu: quasi-cohérents) sur S, relativement à R, une section cartésienne de la catégorie fibrée précédente au dessus de C. Plus généralement, pour toute catégorie fibrée $\mathscr{F}$ sur $_{/R}$, on définit la notion de "$\mathscr{F}$-cristal" sur S, ou "cristal en objets de $\mathscr{F}$", de la façon correspondante. Ceci donne un sens aux expressions: cristal en algèbres, en algèbres commutatives, en préschémas relatifs etc, sur S relativement à R. Quand $R = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$, on parlera de "cristal absolu" sur S, de l'espèce considérée.

1.2. — Les $\mathscr{F}$-cristaux sur S forment une catégorie, qui dépend fonctoriellement de $\mathscr{F}$. Ceci permet, en particulier, de définir sur la catégorie des cristaux de modules sur S les opérations tensorielles habituelles: produit tensoriel de deux cristaux de modules etc, satisfaisant aux propriétés habituelles.

1.3. — Regardons de même ce qui se passe quand on fixe $\mathscr{F}$ et fait varier R, S. Tout d'abord, si $R \to R' \to R$, alors tout cristal sur S relativement à R en définit un relativement à R', par simple restriction. En particulier, un cristal absolu définit un cristal relatif, pour tout préschéma de base R de S.

Fixons maintenant R, S, et soit $S' \to S$ un morphisme. On définit alors de façon naturelle un foncteur "image inverse" allant des cristaux de type $\mathscr{F}$ sur S vers les cristaux de type $\mathscr{F}$ sur S vers les cristaux de même type sur S' (tout relatif à R). Pour s'en assurer, il suffit de définit un foncteur $C' \to C$ (ou C' est défini en termes de S' comme C en termes de S), compatible avec les foncteurs "oubli". Or si $S' \to T'$ est un objet de C', il y a une construction évidente de somme amalgamée dans la catégorie des préschémas, qui donne un $T = S \amalg_{S'} T'$ et un morphisme $S \to T$, qui fait de T un objet de C, ce qui définit le foncteur cherché.

On peut donc dire que pour un S variable sur R, les cristaux de type $\mathscr{F}$ sur S forment une *catégorie fibrée* sur $_{/R}$, grâce à la notion d'image inverse précédente.

Les deux variantes (en R, et en S) sont compatibles dans un sens évident, et peuvent être régardées comme provenant d'une variance en (R,S) directement.

1.4. — On a un foncteur naturel et évident qui va des cristaux de modules (disons) sur S (rel à R) dans des Modules quasi-cohérents sur S: c'est le foncteur "valeurs en S". On fera attention que ce foncteur n'est en général pas même fidèle (cf exemple 1.5. plus bas). Il est donc un peu dangereux de vouloir considérer un cristal de modules sur S comme étant un Module quasi-coherent $\mathscr{M}$ sur S, *muni* d'une structure supplémentaire, sa "structure cristalline". Dans certains cas cependant (cf 1.8.), le foncteur cristaux de modules $\rightsquigarrow$ Modules est fidèle et le point de vue précédent devient plus raisonnable.

1.5. Exemple 1: relations avec les vecteurs de Witt. — Supposons que S soit le spectre d'un corps *parfait* k, et $R = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$. Soit W l'anneau de Cohen de corps résiduel k: si $\operatorname{car} k > 0$, c'est l'anneau des vecteurs de Witt défini par k, si $\operatorname{car} k = 0$, c'est k lui-même; dans ce dernier cas, supposons k *algébrique* sur $\mathbf{Q}$. Alors il est bien connu que la catégorie C de 1.0. est équivalente à celle des W-algèbres locales, annulées par une puissance de l'idéal maximal de W, à extension résiduelle triviale. Écrivant $W = \varprojlim W_n$ comme à l'accoutumé, dans le cas $p > 0$, on trouve que la donnée d'un cristal de modules (absolu) sur k équivaut à celle d'un système projectif (M_n) "p-adique" de modules M_n sur les W_n ; donc les cristaux de modules de présentation finie sur k forment une catégorie équivalent à celle des modules de type fini sur W. Si $p = 0$, alors la catégorie des cristaux de modules sur k est équivalente à celle des vectoriels sur $k = W$. Ces descriptions sont compatibles avec les notions de changement de base pour k variable. Elles se formulent évidemment pour toute autre espèce de cristaux, défini par une catégorie fibrée $\mathscr{F}$.

Dans le cas envisagé, le foncteur "valeur en S", sur la catégorie des cristaux de présentation finie sur k, s'identifie au foncteur $\otimes_W k$ sur la catégorie des modules de type fini sur W, foncteur qui (si $p > 0$) n'est pas fidèle.

1.6. Exemple 2. S étale sur R. — Si $S = R$, la catégorie C admet R lui-même comme objet final, donc le foncteur "valeur en R" est une équivalence de la catégorie des cristaux sur R, de type $\mathscr{F}$ donné, avec la catégorie $\mathscr{F}_R$. En particulier, un cristal de modules sur $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ est essentiellement la même chose qu'un $\mathbf{Z}$-module.

De façon un peu plus général, si S est étale sur R, alors S est un objet final de C, et les cristaux de modules (disons) sur S, relativement à R, s'identifient aux Modules quasi-cohérents sur S.

1.7. Exemple 3 : S un sous-préschéma de R. — Comme la notion de cristal relatif sur S ne change pas si on remplace R par un ouvert par lequel se factorise S, on peut supposer S fermé dans R, défini par un idéal quasi-cohérent J. Soit $S_n = V(J^{n+1})$ le n-ème voisinage infinitésimal de R dans S. Alors la famille des objets S_n de C est finale dans C, d'où on conclut facilement qu'un cristal de type $\mathscr{F}$ sur S s'identifie à une suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'objets des F_{S_n} qui se recollent. En particulier, si R est localement noethérien, un cristal de modules sur S relativement à R, de présentation finie, s'identifie à un Module cohérent sur le complété formel de R le long de S.

Cet exemple contient le cas de car $p > 0$ de l'exemple 1, si on note qu'à priori, grâce à Cohen, un cristal absolu sur k, c'est pareil qu'un cristal relativement à W.

On peut aussi donner un énoncé commun aux exemples 2 et 3, en partant du cas où on se donne un $S \to R$ non *ramifié*, ce qui permet en effet de construire encore des "voisinages infinitésimaux" S_n.

1.8. Relation avec la notion de stratification. — Les données R, S, $\mathscr{F}$ étant comme d'habitude, considérons pour chaque entier $n \geqslant 0$ le voisinage infinitésimal Δ_n de la diagonale de $S \times_R S$, qui s'envoie dans S par les deux projections pr_1 et pr_2. Si E est un objet de $\mathscr{F}_S$, une *n-connexion* sur E (relativement à R) est la donnée d'un isomorphisme $pr_1^*(E) pr_2^*(E)$ qui induit l'identité sur la diagonale. Une ∞*-connexion* ou *pseudo-stratification* de E, est la donnée pour tout n d'une n-connexion, de telle façon que ces n-connexions se recollent. Enfin, une *stratification* sur E est la donnée d'une pseudo-stratification qui satisfait aux conditions formelles d'une donnée de descente, quand on fait intervenir les voisinages infinitésimaux de tous ordres de la diagonale de $S \times_R S \times_R S$. Ces notions donnent lieu à des sorties analogues à ceux de 1.2. et 1.3. Notons que lorsque S est "formellement non ramifié sur R" i.e. $\underline{\Omega}^1_{S/R} = 0$, alors toutes ces notions deviennent triviales: un objet E admet alors toujours exactement une connexion de tout ordre, donc une seule pseudo-stratification, et celle-ci est une stratification: donc la catégorie des objets de F_S *munis* d'une stratification relativement à R est alors équivalente, par le foncteur "valeur en S", à la catégorie $\mathscr{F}_R$ elle même. (Dans tous les cas, le foncteur "valeur en S" est fidèle).

Ceci défini, on voit que pour tout cristal $\mathscr{M}$ sur S de type $\mathscr{F}$ (relativement à R), sa valeur $\mathscr{M}(S) = M$ est un objet de $\mathscr{F}_S$ muni d'une *stratification canonique* relativement à R, d'où un foncteur: cristaux relatifs de type $\mathscr{F} \rightsquigarrow$ objets de $\mathscr{F}$ munis d'une stratification. La remarque de 1.4. montre d'ailleurs que ce foncteur n'est pas toujours fidèle. Il y a cependant des cas intéressants où ce foncteur est une *équivalence de catégories*: il en est en tous cas ainsi si $S \to R$ est *"formellement lisse"*, par exemple si c'est un morphisme lisse, ou si S et R sont des spectres de corps k_0, k, avec k une extension *séparable* de k_0. (Quand d'ailleurs $S \to R$ est même formellement étale, alors les deux catégories: celle des cristaux et celle des objets à stratification, deviennent équivalentes, par le foncteur "valeur en S", à $\mathscr{F}_S$ lui-même, ce qui nous redonne l'exemple à la noix de 1.5 ou k est de car. nulle). Sauf erreur, on a encore une équivalence de catégories si $S \to R$ est *plat et localement de présentation finie*, (du moins si R localement noétherien, et se bornant aux Modules cohérents) mais je n'ai pas écrit le démonstration.

1.9. Une digression sur la notion de stratification en caractéristique nulle. — Quand S est lisse sur R (en fait, il suffit que S soit différentiellement lisse sur R, i.e. le morphisme diagonal $S \to S \times_R S$ une immersion régulière), et si R est de caractéristique nulle, alors une stratification d'un Module M sur S (relativement à R) est connue quand on connaît la 1-connexion qu'elle définit, et on peut se donner celle-ci arbitrairement, soumise à la seule condition que le "tenseur courbure", qui est une certaine section de $\underline{\Omega}^2_{S/R} \otimes \mathrm{End}(M)$, soit nul. (Cela peut aussi s'exprimer en disant qu'on fait opérer le faisceau $_{S/R}$ des dérivations relatives de S sur R, sur M, de façon à satisfaire aux relations habituelles, y compris celle de transformer crochet en crochet). J'ignore dans quelle mesure l'hypothèse de lissité est nécessaire pour cet énoncé, ou si (dans le cas lisse disons) on peut formuler un énoncé analogue pour toute catégorie fibrée $\mathscr{F}$ sur $_{/R}$. Mais bien entendu, l'hypothèse de caractéristique nulle faite sur R est tout à fait essentielle. Si R est de caractéristique $p > 0$, l'énoncé qui remplace le précédent (et qui sauf erreur est dû à Cartier) est que dans ce cas, la donnée d'une "connexion sans torsion" sur M * équivaut à une "donnée de descente" sur M relativement à frobenius $S \to S^{(p/R)}$. Il y a loin de là à une stratification !

*"compatible avec puissances p-émes"

1.10. La notion de p-cristal et ses variantes. — Nous supposons maintenant que S est de caractéristique $p > 0$, et $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ (ou $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)$, spectre des entiers p-adiques, cela reviendrait au même). Si $\mathscr{M}$ est un cristal de modules sur S, de présentation finie, alors en vertu de 1.5., pour tout $s \in S$, si s' est le spectre d'une clôture parfaite de $k(s)$, l'image inverse $\mathscr{M}(s')$ de $\mathscr{M}$ en s' peut être interprétée comme un module de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k(s'))$. Ainsi, la notion de cristal de modules sur S (au sens absolu) semble convenable pour formaliser la notion de *"famille algébrique" de modules sur les anneaux de vecteurs de Witt aux différents points parfaits au dessus de S*. Bien entendu, la notion de cristal est plus fine que ça encore, et doit donner, j'espère, la bonne notion de "famille" lorsque, disons, S est le spectre d'un corps de fonctions (donc pas nécessairement parfait). Je vais maintenant introduire une structure supplémentaire, qui devrait permettre de formuler, de même, la notion de "famille algébrique de modules de Dieudonné", paramétrée par S,

Considérons le morphisme "puissance p-ème"

$$S_S S,$$

il permet d'associer, à tout cristal (absolu) sur S, d'espèce quelconque, un cristal image inverse:

$$\mathscr{M}^{(p)} =_S (\mathscr{M}).$$

On appelle *p-crsital* sur S un cristal $\mathscr{M}$ sur S, muni d'un morphisme de cristaux

$$\mathscr{M}^{(p)} \to \mathscr{M}.$$

Évidemment, les p-cristaux sur S d'espèce $\mathscr{F}$ donnée forment encore une catégorie, dépendant fonctoriellement de $\mathscr{F}$ (pour les foncteurs *covariants* cartésiens de catégories fibrées), ce qui permet par exemple, pour les p-cristaux de modules sur S, d'introduire toutes les opérations tensorielles habituelles covariantes (produits tensoriels, puissances alternées et symétriques etc). Pour définir le *dual* d'un p-cristal de modules, il y a lieu d'introduire une notion duale de celle de p-cristal d'espèce $\mathscr{F}$, c'est celle de *p^{-1}-cristal* d'espèce $\mathscr{F}$: c'est un cristal d'espèce $\mathscr{F}$, avec un morphisme de cristaux en sens inverse:

$$V : \mathscr{M} \to \mathscr{M}^{(p)}.$$

Ainsi un contrafoncteur cartésien entre catégories fibrées sur trans-forme p-cristaux en p^{-1}-cristaux, et inversement. Les p^{-1}-cristaux de modules se multiplient tensoriellement entre eux comme les p-cristaux de modules.

Pour obtenir une notion "autoduale", il y a lieu d'introduire la notion de *bi-cristal de poids 1* sur S, qu'on pourrait aussi appeler un *cristal de Dieudonné* sur S, lorsque $\mathscr{F}$ est fibré en catégories additives: c'est un cristal muni à la fois d'une p-structure et d'une p^{-1}-structure, satisfaisant aux relations

$$FV = p\,\mathrm{Id}_M, \quad VF = \mathrm{Id}_{M^{(p)}}.$$

Cette notion semble tout à fait adéquate à l'étude des groupes formels, ou ce qui revient moralement au même, à l'étude de la cohomologie de De Rham en dimension 1. En dimension supérieure i, il y a lieu d'introduire la notion de *bi-cristal de poids* i, qui est un cristal muni de F et V satisfaisant aux relations

$$FV = p^i\,\mathrm{Id}_M, \quad VF = p^i\,\mathrm{Id}_{M^{(p)}}.$$

Par exemple, on définit le *bicristal de Tate de poids* $2i$, qui est défini par le cristal de modules unité (associant à tout T sous S le module $\underline{O}_T$ lui-même), et les morphismes de cristaux

$$F = p^i\,\mathrm{Id}_{T^i}, \quad V = p^i\,\mathrm{Id}_{T^i}.$$

Ainsi le bicristal de Tate de poids $2i$ est la puissance tensorielle i-ème du bicristal de Tate de poids 1. (N.B. les bicristaux de poids quelconques se multiplient tensoriellement, de façon que les poids s'ajoutent).

1.11. — Si on veut "rendre inversible" le bicristal de Tate T^1, on est obligé, qu'on le veuille ou non, de passer à une catégorie de fractions de la catégorie des cristaux de modules sur S, (qui entre parenthèses est une catégorie $\mathbf{Z}_p$-linéaire, (i.e. les Hom sont des $\mathbf{Z}_p$-modules...), tout comme les catégories de p-cristaux etc qu'on en déduit). Il revient donc au même de passer à une catégorie de fractions, en déclarant qu'on veut rendre notre catégorie abélienne **Q**-linéaire, ou en déclarant qu'on la veut rendre **Q**-linéaire : il faut faire le quotient par la sous-catégorie abélienne épaisse formée des objets de torsion, qui sont aussi des objets de p-torsion †. On trouve la catégorie des *"cristaux de modules à isogénie près"*, ou *isocristaux*, sur S. Utilisant cette nouvelle notion, on définit comme ci-dessus la notion de p-isocristal, comme étant la donnée d'un isocristal $\mathscr{M}$ muni d'un homomorphisme $F : \mathscr{M}^{(p)} \to \mathscr{M}$. La notion de bi-isocristal de poids i, qui serait calquée de celle de bicristal de poids i, n'est pas très raisonnable alors, car V doit être alors donné en termes de F comme p^iF^{-1}. Il y a lieu plutôt d'appeler *bi-isocristal* (sans précision de poids) un p-isocristal pour lequel F est un *isomorphisme*, et de ne pas choisir entre les différents p^iF^{-1} possibles; il vaut mieux également ne pas parler ici de p^{-1}-isocristal, la notion intéressante étant celle de bi-isocristal, qui est manifestement *autoduale* quand on se restreint aux objets de type fini: le dual de $(\mathscr{M}, F)$ est $(\mathscr{M}, {}^tF^{-1})$, où $\mathscr{M}$ est le iso-cristal dual de M.

† et cela revient simplement à garder les mêmes objets, et à prendre comme nouveaux Hom les $Hom \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

On peut également, bien sûr, localiser par rapport à p en partant déjà de la catégorie des bi-isocristaux de poids i, on trouve les *bicristaux de poids i à isogénie près*, qui forment une catégorie abélienne (S, i), et un foncteur exact "oubli de V"

$$(S, i) \to (S),$$

à valeurs dans la catégorie (S) des iso-bicristaux sur S. Ce foncteur est *pleinement fidèle*, de sorte que *les bi-isocristaux forment une généralisation commune des bicristaux de poids i à isogénie près*. Pour préciser ce point, désignant par (S, i) la catégorie des bicristaux de poids i sur S, il y a lieu d'introduire des foncteurs canoniques

$$(S, i) \to (S, i+1) \to \ldots,$$

donnés par $(\mathscr{M}, F, V) \rightsquigarrow (\mathscr{M}, F, pV)$. Quand on localise ces foncteurs par p, on trouve des foncteurs

$$(S, i) \to (S, i+1) \to \ldots.$$

qui se trouvent être *pleinement fidèles* : on peut donc considérer que, pour i croissant, la notion de "bicristal de poids i, à isogéne près" constitue une généralisation de plus en plus large de celle de "cristal de Dieudonné". La notion de "bi-isocristal" est à ce titre une généralisation qui englobe toutes les précédentes, et qui de plus a la louable vertu d'être stable par produit tensoriel, *et* passage au dual. Cela semble donc une catégorie toute indiquée comme catégorie des valeurs pour un foncteur "cohomologie de De Rham" convenable, lorsqu'on se décide à travailler à isogénie près.

1.12. Exemple 1 : Cas où S est le spectre d'un corps parfait k. — Alors la donnée d'un cristal de modules de type fini sur k équivaut à la donnée d'un module de type fini M sur W, la formation du motif $\mathscr{M}^{(p)}$ correspond à la formation

$$M^{(p)} = M \otimes_W (W, f_W),$$

où f_W est l'endomorphisme de frobenius de W, et (W, f_W) est la W-algèbre définie par f_W. Par suite un structure de p-cristal sur M revient à la donnée d'un homomorphisme de W-modules $M^{(p)} \to M$, ou si on préfère, à la donnée d'un homomorphisme f_W-semi-linéaire

$$F_M : M \to M.$$

Comme l'application $x \to x \otimes 1$ de M dans $M \otimes_W (W, f_W)$ est bijective, f_W étant un automorphisme de W, on peut considérer la bijection inverse, qui est f_W^{-1}-semi-linéaire. Par suite, la donnée d'une p^{-1}-structure sur M revient à la donnée d'un homomorphisme f_W^{-1}-linéaire:

$$V_M : M \to M.$$

la donnée d'un couple (F, V) définit sur M une structure de bi-cristal de poids i si et seulement si on a

$$FV = VF = p^i Id_M.$$

En particulier, pour $i = 1$, on retrouve la notion de *module de Dieudonné*: la catégorie des cristaux de Dieudonné sur k est canoniquement équivalente à celle des modules de Dieudonné relativement à k.

La catégorie des isocristaux de type fini sur k est équivalente à la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps des fractions K de W. Donc un biisocristal (de type fini) sur k s'identifie à un tel vectoriel, muni d'un f_K-endomorphisme bijectif.

Toutes ces descriptions sont compatibles avec les opérations tesorielles, et la formation d'images inverses pour k variable.

On peut se demander, avec la description précédente des bi-isocristaux, quels sont ceux qui sont les couples (E, F), E un vectoriel sur K et F un automorphisme semi-linéaire, tels que, si on pose $V = p^i F^{-1}$, pout out $x \in E$, l'ensemble de ses transformés par les différents monômes non commutatifs en F, V soit une partie *bornée* de E: c'est une pure tautologie. Pour qu'il existe un i ayant cette propriété, il faut et il suffit que pour tout $x \in E$, l'ensemble des $F^n x$ soir borné.Bien entendu, c'est là une propriété qui est stable par changement de F en pF (correspondant à la tensorisation par le bi-isocristal de Tate de poids 2), mais non par le changement de F en $p^{-1}F$ (correspondant à la tensorisations par l'inverse T^{-1} du bi-isocristal précédent). Comme on tient beaucoup à inverser Tate, on voit qu'il n'est pas naturel, en ffet, de poser une condition de croissance sur l'ensemble des itérés de F. De façon précise, appelant *effectis* les bi-isocristaux qui proviennent d'un objet d'un (S, i), on voit que tout bi-isocristal est de la forme $T^{-i} \otimes_{\underline{N}}$, avec $\underline{N}$ effectif: on n'a pas ajouté plus de nouveaux objets qu'il n'était absolument nécessaire !

1.13. Exemple 2 : S lisse sur un corps parfait k. — Déterminons d'abord dans ce cas les cristaux sur S, sans plus. Wout d'abord, sans condition de lissité, on voit à l'aide de la propriété caractéristique de W que la catégorie C introduite dans 1.0. ne change pas, essentiellement, quand on remplace $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ par $R = \mathrm{Spec}(W)$. D'autre part, il résulte aussitôt des définitions que la donnée d'un cristal sur S, relativement à W, revient à la donnée d'un système cohérent de cristaux sur S, relatifs aux $W_n = W/p^{n+1}W$. (**NB** On n'a pas formulé avec la généralité qui convenait l'exemple 3 de 1.7.!) Théoriquement, on est donc ramené à déterminer, pour chaque n, la catégorie des cristaux sur S relatifs à W_n, et les foncteurs restrictions entre ces catégories. D'ailleurs, il est inoffensif de se localiser sur S, par exemple de supposer au besoin S affine. Utilisant maintenant la lissité de S, on peut donc supposer que pour tout n, S se remonte en un S_n lisse sur W_n, de façon que ces choix se recollent (il suffit pour ceci S lisse et affine). Or, il résulte encore facilement des définitions, utilisant seulement que $S = S_0 \to S_n$ est une immersion fermée définie par un Ideal nilpotent, que le foncteur restriction des cristaux sur S_n (relativement à une base quelconque - ici on prendra W_n) vers les cristaux sur S_0, est une équivalence de catégories, donc un cristal sur S relativement à W_n s'identifie à un cristal sur S_n relativement à W_n. Comme $S_n b$ est lisse sur W_n, il résulte de ce qui a été dit dans 1.8. que les cristaux en question s'identifient aux objets (de l'espace $\mathscr{F}$ considérée) sur S_n, *munis d'une stratification relativement à* $R_n = \mathrm{Spec}(W_n)$. Les foncteurs restrictions sur les cristaux s'expriment alors par les foncteurs restrictions correspondants pour objets stratifiés. En résumé: *un cristal $\mathscr{M}$ sur S s'identifie à un système cohérent $(\mathscr{M}_n)$ d'objets à stratification sur les différents S_n sur $R_n =$* $\mathrm{Spec}(W_n)$. Pour relier ceci à des objets qui soient plus dans la nature d'objets "définis en caractéristique nulle", supposons d'abord que l'on puisse même relever S en un schéma X *propre sur* $R = \mathrm{Spec}(W)$, hypothèse évidemment bien restrictive. On voit alors, utilisant les théorèmes de comparaison EGA III 4.5 que *dans le cas de cristaux de modules cohérents sur S, la catégorie des dits est canoniquement équivalente à la catégorie des Modules cohérents M sur X, munis d'une stratification relativement à* $R = \mathrm{Spec}(W)$. (N.B. Il se trouve donc, à posteriori, que cette dernière catégorie est essentiellement indépendante du relèvement choisi X de S). Considérant la fibre générique X_K de X sur R, qui est un schéma propre et lisse sur un corps de caractéristique nulle, on trouve donc un foncteur remarquable "restriction" ou "localisation", allant de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S, dans la catégorie des Modules cohérents sur X_K, stratifiés relativement à X_K. Or (oubli de 1.8.) on voit facilement qu'un Module cohérent stratifié sur un préschéma localement de type fini sur un corps est nécessairement localement libre. De plus comme ici K est de caractéristique nulle, et X_K lisse dessus, on a signale dans 1.8. que la notion de stratification s'explicite très simplement comme celle de "connexion intégrable". [Enfin, lorsque S donc X_K est géométriquement connexe, et que K peut se plonger dans le corps des complexes $\mathscr{C}$, alors la notion de module cohérent à action intégrable sur X_K s'interprète en termes de représentations linéaires (complexes) du groupe fondamental transcendant de $X^{an}_{\mathscr{C}}$, de façon bien connu. Si par exemple le groupe fondamental transcendant est le groupe unité, alors on conclût par descente que tout Module cohérent stratifié sur X_K est trivial, ce qui en termes de S s'énonce en disant que tout cristal de modules cohérents sur S est isogène à un cristal "croissant", i.e. à un cristal qui est l'image inverse d'un cristal sur k, (lui-même défini par un module de type fini sur W). De ceci et de la rigidité de la notion de cristal on déduit facilement, par exemple, que tout p-cristal cohérent sur S ou tout bi-cristal de poids i donné (par exemple tout cristal de Dieudonné) est isogène à un fournit de même espèce *trivial*. On voit donc là un principale d'approche transcendante pour l'étude des familles de groupes formels (par exemple) en caractéristique p...] Quand à la notion d'isocristal (de modules cohérents) sur S, on constate aussitôt que le foncteur précédent induit un foncteur *pleinement fidèle* de la catégorie de ces derniers, dans la catégorie des modules cohérents stratifiés sur X_K. Il s'impose évidemment d'en déterminer l'image essentielle, et pour commencer d'examiner si par hasard ce foncteur ne serait pas une équivalence de catégories. Cela me ‡ semble un peu *trop optimiste*, mais je ne suis sûr de rien, faute d'avoir regardé. Tout ce qu'on peut dire à priori, c'est que la condition cherchée sur un Module stratifié doit être de nature locale en les points de X qui sont maximaux dans S.

‡effectivement [ ]

Quand on ne suppose pas S propre et remonté globalement, mais qu'on suppose seulement qu'on a remonté S formellement, en un *schéma formel* X sur R, alors il est vrai (en fait, de façon essentiellement triviale) que *la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S est équivalente à la catégorie des Modules cohérents sur le schéma formel X, munis d'une stratification relativement à* $\mathrm{Spec}(W) = R$ (quand on transcrit de façon évidente toutes les définitions envisagées dans 1.8. dans le cadre formel). Si on veut encore, comme il est légitime, trouver un analogue la restriction à X_K envisagées plus haut, il faut définir X_K comme *l'espace rigide-analytique sur K défini par le schéma formel X*, et considérer sur X_K des Modules cohérents munis de *stratifications au sens rigide-analytique*, ou ce qui revient au même, de connexions intégrables en ce sens. De tels Modules sont encore nécessairement localement libres. On trouve ainsi un foncteur des cristaux de Modules cohérents sur S dans les Modules cohérents stratifiés sur X_K, induisant un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux cohérents sur S, dans la catégorie des Modules cohérents stratifiés sur X_K. Comme tout à l'heure (et même plus, si on peut dire, car c'est vraiment ici la situation "naturelle"), il s'impose de regarder quelle est l'image essentielle. On peut également se demander si les Modules cohérents stratifiés sur un espace rigide-analytique n'admettraient pas une description simple, en termes d'un groupe plus ou moins discret jouant le rôle du groupe fondamental dans la théorie transcendante sur le corps de complexes. La description donnée des cristaux sur S, toute triviale qu'elle soit, a déjà des conséquences intéressantes pour la structure de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S: cette catégorie est noethérienne (si S est noethérien i.e. de type fini sur k), tout objet contient donc un plus grand sous-objet de torsion, de plus objets sans torsion correspondent dans la description ci-dessus aux Modules stratifiés sans torsion sur X, lesquels sont alors automatiquement localement libres. Il est bien probable que des résultats analogues doivent être vrais sans hypothèse du genre lissité sur S.

1.14. — Il faut encore expliciter, dans la description générale précédente, le foncteur [], pour pouvoir décrire de façon générale, si en plus de la donnée de S sur k, on a un S' lisse sur k' parfait, et des automorphismes $S' \to S$ et Spec(k') → Spec(k) donnant lieu à un carré commutatif, et si enfin on peut relever S' formellement en X', et $S' \to S$ en $X' \to X$, donnant un carré commutatif avec Spec(W') → Spec(W), alors la notion d'image inverse de cristaux de modules cohérents, de S à S', s'explicite en termes d'image inverse de Modules cohérents stratifiés, de X à X'. Lorsque $k = k'$, $S = S'$, et que les morphismes envisagés sont les puissances p-èmes, on est donc conduit à chercher à relever ce morphisme à X de façon compatible avec le morphisme Spec(W) → Spec(W) déduit de f_W, ou ce qui revient au même, de relever le morphisme canonique $S \to S^{(p/k)}$ en un morphisme de R-schémas formels $X \to X \times_R (R, f_R)$. C'est en tous cas toujours possible si S est affine, cas auquel on peut se ramener. Ayant donc ainsi un morphisme

$$f_X : X \to X,$$

compatible avec f_R sur $R = \mathrm{Spec}(W)$, et induisant f_S sur S, le foncteur [] s'explicite comme l'image inverse ordinaire de Modules stratifiés sur X relativement à R, resp. (dans le cas de isocristaux) de Modules stratifiés sur l'espace rigide-analytique X_K, pour le "morphisme" $X_K \to X_K$ d'espaces rigide-analytiques (relatif à f_K sur le corps de base !) induit par f_K. Bien que f_K et par suite f_{X_K} loin d'être unique, le foncteur envisagé qu'il définit ne dépend pas, essentiellement, des choix faits.

1.15. Bicristaux et biisocristaux sur une base quelconque. — Ne supposons plus nécessairement S de caractéristique déterminé p. Pour chaque nombre premier p, soit S_p la fibre $V(pl_{\underline{O}_S})$ de S sur le point $p\underline{Z}$ de Spec(Z). Un bicristal de poids i sur S est par définition la donnée d'un cristal de Modules $\mathscr{M}$ sur S, et pour chaque p d'une structure de bi-cristal de poids i sur la restriction $\mathscr{M}_p$ de $\mathscr{M}$ à S_p, définie par la donnée de F_p, V_p. On définit de même la notion de bi-isocristal sur S, étant entendu qu'un isocristal est un objet de la catégorie des isocristaux sur S (comme de juste), définie à partir de la catégorie des cristaux de modules en "localisant" par rapport à des entiers $n > 0$ arbitraires, i.e. en tensorisant les Hom sur $\mathscr{Z}$ par $\mathscr{Q}$. - Lorsque S est de cararactéristique nulle, le supplément de structure impliqué par "bi" est évidemment vide, tandis que si S est de type fini sur $\mathscr{Z}$ et domine Spec($\mathscr{Z}$), alors la notion envisagée est d'une essentiellement arithmétique, les différents F_p jouant le rôle d'homomorphismes de frobenius, comme de bien entendu; dans le cas du poids 1, en particulier, on peut considérer que le cristal avec sa bi-structure supplémentaire permet de relier entre eux les groupes formels en les diverses caractéristiques auxquels il donne naissance...

1.16. Un retour en arrière. — La définition 1.1. et le sortie 1.3. sont un petit peu canulés. Au lieu de prendre dans 1.0. pour C la catégorie des R-flèches $S \to T$ qui..., il faut prendre la catégorie des

R-flèches $U \to T$ qui..., où U est un ouvert induit non précisé de S. De plus, la définition n'est guère raisonnable alors que si la catégorie fibrée envisagée $\mathscr{F}$ est un "champ" pour la topologie de Zariski sur $_{/R}$, i.e. si on peut y recoller flèches et objets. Ceci est nécessaire en tous cas pour pouvoir dans 1.3. définir la notion d'image inverse, la définition que j'y ai donnée n'étant raisonnable que si S, S' sont affines. Dans le cas général, il faut se localiser sur S et S' pour se ramener à cette situation. Autrement on bute sur des canulars idiots de nature globale, comme le fait que sans restrictions sur $S' \to S$, la construction envisagée de somme amalgamée fait sortir de la catégorie des préschémas... Il est probable qu'il y aura bien d'autres canulars de détail dans ces notes, mais, je pense, sans conséquence !

Il est évidemment tentant de vouloir interpréter les cristaux de modules comme faisceaux de modules sur un certain site. C'est possible, en prenant le *"site cristallogène de S sur R"*, qui est précisément le site dont la catégorie sous-jacent C est celle des R-morphismes $U \to T$ (U ouvert de S, $U \to T$ immersion fermée surjective définie par Ideal nilpotent sur T), la topologie est celle de Zariski: on prend comme familles couvrantes "de définition" de $(U \to T)$ les familles définies pr des recouvrements ouverts (T_i) de T, chaque T_i muni de la structure induite, et définissant $(U_i \to T_i)$ par $U_i = U \cap T_i$. Un faisceau d'ensembles sur ce site s'identifie à un système de faisceaux d'ensembles $F_{U\to T}$ sur les objets buts des objets de C, avec, pour tout flèche $(U \to T) \to (U' \to T')$ de C, un homomorphisme de l'image inverse de $F_{U'\to T'}$ [] T, dans $F_{U\to T}$ (homomorphisme qui n'est pas nécessairement un isomorphisme !) et qui sont un isomorphisme si $T \to T'$ est une immersion ouverte. En particulier, associant à tout $(U \to T)$ le faisceau $\mathscr{O}_T$ sur T, on trouve un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_C$ sur C. Ceci posé, les cristaux de modules (quasi-cohérents) sur S s'identifient aux Modules quasi-cohérents (i.e. localement conoyau d'un homomorphisme de Modules libres) sur $\mathscr{O}_C$; les cristaux "de près finie" i.e. les cristaux de Modules de présentation finie, correspondant exactement aux Modules de présentation finie sur $\mathscr{O}_C$.

Quand on a un R-morphisme $S' \to S$, je ne vois pas de morphisme naturel correspondant entre les *sites* cristallogènes correspondants à S, S'. Ce n'est pas bien gênant, car introduisant les *topos cristallogènes* $_{S/R}$ et $_{S'/R}$ définis par les sites en question, on définit par la méthode esquissée dans 1.3. un morphisme

$$_{S'/R} \to _{S/R},$$

correspondant à la notion naturelle de "image inverse de faisceaux" au sens inverse (qui, j'avoue devrait être définie avec le plus grand soin).

1.17. — On est donc dans une situation où on peut faire marcher la machine cohomologique. Étant loin de mes bases, je n'ai pas tenté sérieusement de tirer au clair si les images directes supérieures qu'on définit ainsi, et en particulier les groupes de cohomologie du site cristallogéne, donnent ce qu'on voudrait.

Le test-clef est le suivant: *si R est le spectre d'un corps, et si S est lisse sur R, et propre sur R dans le cas de la caractéristique $p > 0$, on voudrait trouver, comme cohomologie à coéfficients dans $\underline{O}_C$ lui-même, la cohomologie de De Rham de S relativement à R.* Plus généralement, sans condition sur R, si $f : S' \to S$ est propre et lisse, on voudrait trouver comme “valeur en S'” ${}^1 f_{cris*}(\underline{O_{C'}})$ (cf 1.4.) le faisceau de cohomologie de De Rham ${}^i f_*(\Omega^*_{S'/S})$, et on voudrait § que la connexion canonique à la Gauss-Manin sur ce dernier soit celle associée à la stratification canonique provenant de la structure cristalline (cf 1.8.). §

L'existence d'une connexion de Gauss-Manin en cohomologie de De Rham (que j'ai vérifié pour n'importe quel morphisme lisse), et le tapis de Washnitzer-Monsky, sont en tous cas des indications assez fortes pour conduire à penser qu'il doivent exister une théorie cohomologique, en termes de cristaux, donnant de telles valeurs pour l'argument $\underline{O}_C$. Au cas où la cohomologie du site cristallogène ne donnerait pas les résultats qu'il faut, on pourrait essayer (au lieu de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie de *tous* les Modules sur le site annelé cristallogène) de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie des seuls Modules quasi-cohérents sur le site cristallogène, i.e. dans la catégorie des cristaux de modules.

Chapitre 2. — La cohomologie de De Rham est un cristal

2.1. — L'affirmation du titre n'est pour l'instant qu'une hypothèse ou un voeux pieux mais je suis convaincu qu'elle est essentiellement correcte. Comme je l'ai dit dans 1.17., il y a pour le moment deux indications dans cette directions

a) Le travail de Washnitzer-Monsky. Deux grosses imperfections dans leur tapis: 1° ils n'obtiennent que des invariants cohomologiques *locaux* sur leur variété lisse en caractéristique $p > 0$, via leurs relèvements; pour avoir un invariante global, ils doivent se limiter à la dimension 1. On peut penser que cela tient à leur manque de familiarité avec les machines cohomologiques. 2° leurs invariants sont des (faisceaux de) vectoriels sur le corps des fractions de W, et non sur W, i.e. ils n'obtiennent que des invariants “modulo isogénie”. Il semble bien, en effet, que leur démonstration d'invariance fait intervenir de façon essentielle des dénominateurs. Il n'est pas exclu, d'après cette indication, que dans le titre du Chapitre il faille remplacer “cristal” par “isocristal” (et “est” par “définit”). Ce serait bien dommage, mais n'exclurait pas pour autant l'existence d'une bonne théorie cohomologique pour les cristaux, qui pour un morphisme propre et lisse et le “cristal unité” coïnciderait *modulo isogénie* avec ce que donne De Rham. Le est décisif reste celui indiqué dans 1.17, savoir: donnent-il un résultat positif seulement en caractéristique zéro, ou en toute caractéristique ?

b) L'existence des connexions de Gauss-Manin. J'ai vérifié pour tout morphisme lisse $f : X \to S$ l'existence d'une connexion canonique (absolue) sur les ${}^i f$ au sens de De Rham relatif, ou plus correctement, sur le complexe $f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, considéré comme objet de la catégorie dérivée $D(\mathcal{O}_S)$. A vrai dire, je n'ai pas vérifié pour cette connexion une condition de “nullité de la [ ]”; c'est vérifié en tous cas (par voie transcendante !) si S est lisse, sur R r´duit de caractéristique nulle. [Il faut noter d'ailleurs qu'il n'y a pas d'espoir de montrer que la connexion en question provient toujours d'une stratification: c'est *faux* en caractéristique $p > 0$; la raison étant que la cohomologie de De Rham pour une variété algébrique non complète (par exemple affine) n'est plus du tout raisonnable, étant beaucoup trop grosse. Pour pouvoir espérer une stratification sur $f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, sans restriction de caractéristique, il faut donc supposer f *propre*.]

c) La nécessité d'une interprétation cristallographique de la cohomologie de De Rham est également suggérée par le problème que j'avais signalé dans mon papier bleu sur De Rham: si R est le spectre du corps des complexes, S lisse sur R et X lisse et propre sur S, alors la théorie transcendante de la cohomologie fournit une suite spectrale

2.2. — Je vais préciser l'affirmation du titre, en me plaçant dans l'éventualité optimiste bien sûr où on n'aurait pas besoin de s'isogéniser. Comme les cristaux de modules sur un préschéma S forment une catégorie abélienne, on peut prendre la catégorie dérivée; ces objets seront appelés simplement "complexes de cristaux". Un tel animal induit sur S, plus généralement sur tout objet-but T d'un objet $(U \to T)$ du site cristallogène C de S, un complexe de Modules ordinaire (envisagé comme objet de la catégorie dérivée des faisceaux de Modules sur S, resp. T). Un complexe de cristaux est dit pseudo-cohérent (resp. parfait, resp. ...) si pour tout objet $(U \to T)$ de C, le complexe induit sur T est pseudo-cohérent (resp. ...). Ceci posé, voilà la théorie qu'on voudrait: A tout morphisme lisse et propre $f : X \to S$, serait associé un complexe de cristaux (absolu) (f) sur S, appelé cohomologie de De Rham cristalline de f. Ce complexe doit être parfait, sa formation doit être compatible avec tout changement de base sur S (l'image inverse des complexes des cristaux étant entendu, bien entendu, au sens de catégories dérivées...), et bien sûr (f) dépend fonctoriellement (de faoņ contravariant) de X sur S. Tôt ou tard, il faudra expliciter aussi une formule de Künneth $(f \times_S g)(f)[](g)$, et une formulé de dualité, qui pour f partout de dimension relative d s'exprime comme un accouplement, définissant une autodualité, $(f)\times(f) \to T^d[2d]$, où T^d est le cristal de Tate de poids $2d$, et où $[2d]$ indique qu'on translate les degrés de $2d$ (attention au facteur 2 !). Enfin, on veut comme de juste un isomorphisme $(f)(S)f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, fonctoriel en X, compatible avec les changements de base, avec Künneth et la dualité (déjà connus pour la cohomologie de De Rham ordinaire).

Par prudence, je me suis abstenu de dire quoi que ce soit sur le cas f non propre, dont il faudrait parler tout au moins si on voulait faire sérieusement le lien avec Washnitzer-Monsky.

2.3. La cohomologie de De Rham comme biisocristal — A supposer qu'on ait une théorie du type envisagé dans 2.2., on trouve pour chaque entier p un homomorphisme de frobenius

$$F_p : (f)_p^{(p)} \to (f)_p,$$

où l'indice p au complexe de cristaux (f) désigne la restriction à $S_p = V(p.1)$ (au sens des catégories dérivées), qui d'après les conditions de 2.2. n'est autre que (f_p), $f_p : X_p \to S_p$ étant induit par f. Utilisant toujours la même condition de compatibilité avec le changement de base, on constate que $(f_p)^{((p))}$ n'est autre que $(f_p^{(p)})$, où $f_p^{(p)} : X_p^{(p/S_p)} \to S_p$ est le morphisme structural de frobenius relatif de X_p sur S_p. Or on a le morphisme de frobenius $X_p^{(p/S)} \to X$, qu est un S-morphisme, qui par fonctorialité de nous donne $(f_p)^{((p))} \to (f)_p$ comme on voulait. Il faut prouver que cet homomorphisme est en fait une isogénie, donc que l'isocristal défini par (f) devient, à l'aide des F_p, un bi-isocristal. Mais utilisant la relation de dualité écrite dans 2.2. (à vrai dire, l'écriture T^p pour le cristal unité ne prend son sens que lorsque on le regarde comme muni de sa structure de bi-cristal naturelle, qui n'intervient qu'ici), on peut transposer F en un V, tel que $FV = VF = p^{2d}$, ce qui prouve notre assertion.

D'ailleurs, lorsque l'on passe du cristal de De Rham (f) à l'isocristal correspondant, donc des objets de cohomologie ${}^i(f)$ aux isocristaux correspondants, il sera vrai (tout comme pour les ${}^i f_*$ de De Rham en caractéristique nulle) que leur formation commute à tout changement debase, de sorte que chacun des isocristaux ${}^i(f)$ devient à son propre titre un bi-isocristal. Au moment de rédiger 1.10. il m'avait semblé que, sans mettre du iso dans le coup, ${}^i(f)$ devrait être un bi-cristal de poids i, mais je m'étais canulé, il faudrait pour cela une polarisation de X de S qui définisse un isomorphisme (pas seulement une isogénie) de ${}^i(f)$ avec ${}^{2d-i} \otimes T^{-(d-i)}$, ce qui n'existe évidemment que très exceptionnellement; une fois qu'on l'a, on définit V dans ^{i} en transposant F dans ${}^{2d-i}$.

2.4. Cas d'un schéma abélien — Il semble que ce ne soit guère que dans ce cas-là où il soit bien raisonnable de parler de bi-cristaux et non seulement de bi-iso-cristaux. De façon précise, ${}^1(f)$ a dans ce cas une structure de bicristal, défini par les F_p précédents, et des V_p qui se définissent encore, par fonctorialité de , à l'aide de l'homomorphisme "Verschiebung" $A_p^{(p/S_p)} \to A_p$ (défini avec la généralité qui convient dans les notes de Gabriel dans SGAD). Comme ${}^1(A/S)$ est un foncteur multiplicatif en A, grâce à Kunneth postulé dans 2.2., et que l'on a $FV = VF = pId$ sur les schémas abéliens en car p, on en conclut les mêmes relations dans ^{1}. Cela montre donc que ${}^1(A)$ est un bicristal de poids 1, i.e. un *cristal de Dieudonné*. Lorsque S est le spectre d'un corps parfait de caractéristique $p[\,]0$, un tel cristal s'identifie simplement, d'après 1.12, à un module de Dieudonné sur $W = W(k)$. Bien sûr, *on doit trouver que ce module n'est autre que le module de Dieudonné du groupe formel* (ou plutôt, du groupe p-divisible) *défini par la variété abélienne A.* Débarrasser de l'hyperstructure axiomatico-conjectural de 2.2., on peut exprimer ainsi la construction obtenue du module de Dieudonné:

1° Soit A un schéma abélien sur un schéma affine S. On sait que pour tout morphisme $S \to T$ d'immersion fermée surjective, défini par Idéal nilpotent sur T, A se prolonge en un schéma abélien B sur T. On peut regarder la cohomologie de De Rham ordinaire ${}^1 g_*(\Omega^\bullet_{B/T})$, où $g : B \to T$ est le morphisme structural, et on sait que c'est un Module localement libre de rang $2g$

2° Supposons que S soit le spectre d'un corps parfait k de car $p > 0$, alors le cristal précédent s'identifie à un module libre de rang $2g$ sur $W = W(k)$. On y introduit les structures F et V, en utilisant comme ci-dessus les homomorphismes $F : A \to A^{(p)}$ et $V : A^{(p)} \to A$. On trouve ainsi un module de Dieudonné M, et:*Deuxième affirmation :* C'est bien celui défini par Dieudonné. En d'autres termes: si A est n'importe quel anneau local artinien de corps résiduel k, et B un prolongement de A en un schéma abélien sur Λ, alors la cohomologie de De Rham $\mathrm{H}^1(B) = \mathrm{H}^1(B, \Omega^\bullet_{B/\Lambda})$ est canoniquement et fonctoriellement isomorphe à $M \otimes_W \Lambda$, où M est le module de Dieudonné classique de A, et où on tient compte du théorème de Cohen qui munit Λ d'une structure canonique de W-algèbre (N.B. la fonctorialité de l'isomorphisme garantira automatiquement qu'il est compatible avec F et V).

2.5. — Je n'ai pas vérifié, à vrai dire, les deux affirmations, mais n'ai pas le moindre doute qu'elles sont correctes telles quelles. Cette façon de voir le module de Dieudonné permet de plus d'expliciter de façon remarquable les variations infinitésimales de structure de la variété abélienne A donnée, en caractéristique $p > 0$, en termes du module de Dieudonné: les prolongement de A en un schéma abélien B sur Λ doivent correspondre exactement aux modules quotients libres de rang g de $M \otimes_W \Lambda$ qui redonnent, modulo p, le module quotient de rang g canonique de $M \otimes_W k = \mathrm{H}^1(A)$, (correspondant à la filtration canonique de cette cohomologie). Plus généralement et plus précisément :

3° Considérons, pour tout schéma abélien A sur une base S, sur la cohomologie de De Rham ${}^1 f_*(\Omega^\bullet_{A/S}) = \mathrm{H}^1(f)$, la filtration canonique

$$0 \leftarrow^1 f_*(\mathscr{O}_A) \leftarrow \mathrm{H}^1(f) \leftarrow^0 f_*(\Omega^1_{A/S}) \leftarrow 0.$$

Donc pour tout B sur T comme dans 1°, on a sur $\mathscr{M}(T) =^1 (A/S)(T) = \mathrm{H}^1(g)$ une filtration naturelle, ne dépendant que de la classe à isomorphisme près connue de $\mathscr{M}(S) = \mathrm{H}^1(f)$ provenant de A. Ceci dit, *troisième affirmation : on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre classes de prolongements de A à T, et prolongements de la filtration donnée de $\mathscr{M}(S) = \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_T} \mathscr{O}_S$ en une filtration de $\mathscr{M}(T)$.* Plus précisément encore, le foncteur $B[](A, \phi)$, de la catégorie des schémas abéliens B sur T, dans la catégorie des schémas abéliens A sur S, munis d'une filtration ϕ de ${}^1(A/S)(T)$ prolongement celle de ${}^1(A/A)(S)$ (N.B. il ne s'agit que de filtrations à quotients localement libres, bien sûr) est une équivalence de catégories.

Ce énoncé est évidemment fort suggestif aussi pour des généralisations en cohomologie de De Rham de dimension supérieure, pour un morphisme lisse et projectif quelconque, tenant compte de la filtration canonique de celle ci. On voit bien en tous cas que ce dernier élément de structure n'est *pas* de nature cristalline, i.e. donnée par une filtration du cristal de De Rham postulé dans 2.2., mais est au contraire dans la nature d'un élément de structure "continu", dont la variation doit refléter fidèlement les variations de structure de motif donnant naissance au cristal envisagé. Pour arriver à préciser ce dernier point, il faudrait des fondements un peu plus fermes de la théorie des motifs, comme de celle (certainement beaucoup plus élémentaire) des cristaux et de la cohomologie de De Rham. Yne autre généralisation, (suggérée par comparaison du 3° avec Serre-Tate, disant que si S est de caractéristique $p > 0$, alors étendre A à T, c'est pareil qu'étendre le groupe p-divisible correspondant), concerne la théorie des groupes formels, dont il sera question au Chapitre 3. Pour préparer le terrain, je vais présenter d'une façon un peu différente le cristal ${}^1(A/S)$ associé à un schéma abélien, en utilisant explicitement la structure de groupe du dit.

2.6. — De façon générale, paraphrasant sur une base quelconque une vieille construction de Serre (c'est de lui que je l'ai apprise, du moins), on trouve que pour tout schéma abélien A sur une base S, il y a une extension naturelle de A par le fibré vectoriel $V({}^1 f_*(\mathscr{O}_A)) = V(\sqcup_A)$, (où A est le schéma abélien dual de A). Attention à la notation, le fibré vectoriel $V(\mathscr{E})$ est contravariant en $\mathscr{E}$, ces sections sont les homomorphismes $\mathscr{E} \to \mathscr{O}_S$! L'extension en question est universelle parmi les extensions de A par des fibrés vectoriels, est fonctorielle en A, et compatible avec changement de base. Appelons la $G(A)$. Ainsi, le faisceau de Lie de $G(A)$ est une extension

$$[\,]$$

qui est duale e la suite exacte envisagée dans 2.5., dont nous avons donc ici une construction indépendante en termes d'extensions de A par des groupes vectoriels. On peut en profiter pour préciser en affirmant que, pour un prolongement B de A, de S à T, le schéma en groupes $G(B/S)$ est déterminé, à isomorphisme canonique (et même unique) près, par le seule donnée de A et de $S \to T$, indépendamment du choix particulier du prolongement B. En d'autres termes, on trouve un *cristal en schémas de groupes lisses* $\mathscr{G}(A/S)$, et pour chaque prolongement infinitésimal B de A à un T, un isomorphisme canonique $\mathscr{G}(A/S)(T)G(B/T)$; tout ça bien sûr fonctoriel en A et compatible avec changements de base. D'autre part, on peut préciser alors 3° en indiquant quel est le foncteur quasi-inverse de celui envisagé dans cet énoncé: l'extension de la filtration de ${}^1(A/S)(S)$ en une filtration du faisceau de Lie ${}^1(A/S)(T)[\,]$ de $\mathscr{G}(A/S)(T)$ revient à étendre le sous-groupe vectoriel canonique de $\mathscr{G}(A/S)(S)$ en un sous-groupe vectoriel de $\mathscr{G}(A/S)(T)$, et l'on trouve B en passant simplement au quotient.

N.B. Je suis tombé sur la connexion canonique de $G(A/S)$ en essayant de simplifier la construction de Manin de l'application $A(S) \to \Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ associée à une équation de Picard-Fuchs sur S, relativement à A. Pour ceci, il suffit de noter que localement sur S toute section de A sur S se remonte en une section de $G = G(A/S)$ sur S ! La donnée de la connexion de G permet alors de prendre la dérivée de cette section, qui est un élément de $\Gamma(S, \sqcup_G \otimes \Omega^1_S)$, déterminé modulo une section de l'image du faisceau [], correspondant à l'indétermination du relèvement d'une section de A en une section de G. Les équations de Picard-Fuchs sont définies tout juste pour arriver, d'une telle section de [] (qui en fait est un *cocyle*, compte tenu de la connexion canonique de $\sqcup_G$ provenant de G), avec l'indétermination qu'on vient de préciser, à tirer une section de $\mathscr{O}_S$... (Du moins en caractéristique nulle, cas dans lequel se place Manin de toutes façons).

Voici les résultats positifs que j'ai vérifiés dans la direction des assertions précédentes :

a) Si S est de caractéristique nulle, les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par l'introduction du schéma en groupes $G(A)$) sont vraies.

b) Sans restriction sur S, il est vrai que $G(A)$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux¶, donc si pour deux relèvements infinitésimaux données B, B' de A, $G(B)$ et $G(B')$ sont isomorphes, l'isomorphisme entre eux est unique. Donc si l'hypothèse précédente est vérifiée quels que soient les relèvements infinitésimaux de A au dessus d'un ouvert U de la base S, alors les $G(B)$ définissent effectivement un cristal en groupes sur S, à fortiori les $H(B)$ définissent un cristal de modules, et $G(A)$ et $\mathrm{H}^1(A/S)$ sont munis de stratifications absolues canoniques, fonctorielle d'ailleurs en A satisfaisant aux conditions envisagées, et compatible avec tout changement de base qui invarie notre hypothèse sur A. ¶faux

c) Les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par $G(A)$) sont vraies por les relèvements infinitésimaux *d'ordre* 1, ou tout au moins lorsque T est de la forme $D(\mathscr{J})$, schémas des nombres duaux d´fini par un $\mathscr{J}$ quasi-cohérent.‖

‖à vérifier, c'est peut-être faux

2.7. — Arrivé à ce point de mes brillantes conjectures, je m'aperçois avec consternation qu'elles sont fausses telles quelles, malgré les indications concordantes militant en leur faveur. De façon précise, soit k un corps de caractéristique $p > 0$. Je dis qu'il *n'est pas possible, pour tout k-schéma S de type fini, de dimension* $leq1$ ***, avec* S_{rg} *régulier, et tout schéma elliptique A sur S, de mettre sur* $\mathrm{H}^1_{DR}(A/S)$ *une stratification relativement à k, qui soit fonctorielle en A et compatible avec les changements de base*. L'ennui, comme d'habitude, provient des courbes elliptiques de Hasse nul. Appliquant en effet les deux fonctorialités postulées, on trouve que l'homomorphisme "frobenius" qui va de $M^{(p)}$ dans M ($M = \mathrm{H}^1(A/S)$) serait compatible avec la stratification. Si alors $S \in S$ est un point correspondant à un A_S de Hasse nul, i.e. tel que frobenius sur $\mathrm{H}^1(A_S)$ soit de carré nul, on en conclurait aisément, grimpant sur les voisinages infinitésimaux de S, que la même propriété serait vraie aux points voisins de S, ce qui est évidement faux p.ex. pour la famille modulaire.

**ou même ≤ 0 !

Ceci montre que décidément, il faut en rabattre, et que dans le titre du Chapitre et les considérations de 2.2., c'est à condition de prendre partout des isocristaux qu'il reste une chance d'un théorie du genre de celle envisagée précédemment. Il est fort possible d'ailleurs que la notion de isocristal que j'ai adoptée est encore trop restrictive, en ce sens que dans la description de 1.13. il faudra peut-être prendre des stratifications en caractéristique nulle qui ne se prolongeraient pas nécessairement sur le schéma formel sur $W =$ vecteurs de Witt tout entier. C'est une analyse soigneuse du calcul-clef de Washnitzer-Monsky qui devrait permettre de tirer cette question au clair.

2.8. — Il se pose la question, d'autre part, pour quels schémas abéliens les énoncés 1° et 3° de 2.4, 2.5. et 2.6. sont valables, en dehors du cas déjà signalé: S de caractéristique nulle.

Il n'est pas exclu entièrement, cependant, que en restant en car. $p > 0$, l'énoncé sur la non-variation infinitésimal de $G(A)$ avec A, A partout ordinaire, soit vrai. Cela impliquerait que sur l'ouvert des valeurs "ordinaires" de l'invariant, le H^1_{DR} a une stratification canonique, mais celle-ci ne se prolongerait pas à la courbe modulaire toute entière. Mais je dois dire que ce drôle de comportement, où on aurait une stratification naturelle en car. p et une autre en car. 0, sans qu'elles veuillent se recoller, semble assez canularesque.

[Les considérations précédentes font bien ressortir la nature "infinite" de la notion de stratification, par contraste avec celle de connexion, malgré les trompeuses apparences de la caractéristique nulle. Ainsi, sur le H^1 de la famille modulaire sur $\mathbf{F}$ de schémas elliptiques, il y a au dessus de la fibre générique $S_{\mathbf{Q}}$ de S une stratification naturelle, mais nous venons de voir (ou presque...) que cette stratification ne s'étend pas en une stratification sur S_U, U un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. (Le "presque" provient du fait qu'il n'est pas absolument clair si la stratification qu'on obtiendrait ainsi en caractéristique p serait respectée par frobenius; il faut absolument tirer au clair cet exemple particulier !). C'est en un sens assez moral, puisque pour nous le module à stratification doit jouer dans une large mesure le rôle d'un faisceau ℓ-adique, dont il partage également les propriétés de rigidité.]

Pour en revenir à l'alinéa précédent, concernant un schéma abélien "ordinaire" en car $p > 0$, s'il n'est pas exclu que le H^1_{DR} admette une stratification canonique fonctorielle, il me semble cependant exclu, malheureusement, que celle-ci provienne d'un cristal de modules sur S, i.e. que ceci reste vrai en remplaçant S par toute extension infinitésimale, pas nécessaire de car p, (tout au moins en admettant que la connexion associée à la stratification en question soit la connexion de Gauss-Manin). En effet, appliquant une telle hypothèse au schéma modulaire S sur $\mathbf{Z}_p$ précédent, dont on enlèverait les points de Hasse nul d'abord d'où S', on conclurait sauf erreur que la stratification qu'on a en caractéristique nulle sur H^1_{DR} se prolongerait à S tout entier, car elle se "recollerait" en un sens évident avec la stratification qu'on aurait au dessus du complété p-adique de S' (ce qui doit impliquer le prolongement sur S de façon assez formelle). Mais alors on aurait en car p une stratification du H^1_{DR} au dessus du schéma modulaire tout entier, Hasse nul inclus, ce qui est absurde comme on l'a déjà remarqué. Il faut en conclure, hélas, que si les isocristaux, et le cas échéant les modules stratifiés même en caractéristique $p > 0$, ont des chances d'être des outils convenables pour l'étude de familles de variétés abéliennes, celle de cristal elle-même semble irrémédiablement trop fine, même en se restreignant à des familles de variétés abéliennes "ordinaires" en car $p > 0$. Elle peut tout au mieux de prêter au cas d'un schéma de base réduit à un point, spectre d'un corps pas nécessairement parfait, et on peut alors espérer les résultats les plus satisfaisants en se bornant aux variétés abéliennes ordinaires ? - Pour que la notion de cristal elle-même puisse être utilisée pour des schémas abéliens sur des bases plus générales, il semble donc qu'il faille imposer aux familles envisagées des restrictions très sérieuses, consistant à imposer la variation infinitésimale du $G(A)$. Cela semble assez proche du point de vue de Serre, qui étudie les variations de variétés abéliennes (éventuellement à multiplication complexe donnée) en imposant à priori l'espace tangent (et l'action de la multiplication complexe dessus)...

Chapitre 3. — Remarques sur les groupes p-divisibles 3.1. — Bien sûr, en même temps que pour les variétés abéliennes, je dois en rabattre sur les groupes formels. Je veux simplement signaler que la construction de $G(A)$ dans 2.6. doit pouvoir se paraphraser sans difficulté pour un groupe p-divisible $\emptyset$ sur un préschéma S à caractéristiques résiduelles égales au même p. En effet les homomorphismes de ce groupe dans le groupe formel associé à G_a sont triviales (en particulier, $\emptyset$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux), d'autre part (sauf erreur) le faisceau en modules des H^2 de $\emptyset$ à valeurs dans le groupe formel associé à G_a (au sens du complexe du groupe $\emptyset$, variante formelle), est un Module localement libre de rang g^*, où g^* est la dimension du groupe dual de $\emptyset$, soit $\emptyset^*$; plus précisément, ce Module doit être canoniquement isomorphe à $\mathrm{Lie}(\emptyset^*) = t_{\emptyset^*}$. (Tout ceci est suggéré par les résultats de Tate et Lubin sur les modules de groupes formels; je dois avouer d'ailleurs que je n'ai pas essayé de tirer au clair ce qu'il faut entendre, dans ce contexte, par "le groupe formel associé à G_a", et s'il y a lieu de prendre le groupe formel purement infinitésimal). Il s'impose alors de paraphraser la construction de Serre, en regardant l'extension universelle de $\emptyset$ par un groupe formel vectoriel, qui sera ici le groupe formel (covariant) de

$t_{\emptyset^*}$. Désignant par $G(\emptyset)$ cette extension, son algèbre de Lie $\mathrm{H}(\emptyset)$ sers une extension

$$(*) \qquad 0 \to t^{\vee}_{\emptyset^*} \to \mathrm{H}(\emptyset) \to t_{\emptyset} \to 0.$$

Bien entendu, $G(\emptyset)$ et par suite $\mathrm{H}(\emptyset)$ seront fonctoriels en $\emptyset$, et compatibles avec changement de base. Alors qu'il est certainement vrai, dans un sens qu'il conviendrait de préciser, que $G(\emptyset)$ varie "moins que $\emptyset$", quand on fait varier $\emptyset$ infinitésimalement dans une famille, il n'est pas vrai pour autant que $G(\emptyset)$ soit indépendant de telles variations (à l'exception, probablement, de celles du premier ordre), i.e. puisse être considéré comme provenant d'un cristal en groupes plus ou moins formels. Cela sera le cas seulement, sans doute, quand $\emptyset$ sera extension d'un groupe ind-étale par un groupe p-divisible torique, et S réduit à un point (?). Dans le cas général, il semble intéressant d'étudier les variations infitésimales de $\emptyset$, quand on se fixe celles de $G(\emptyset)$ à l'aide d'un cristal en groupes $\underline{G}$.

3.2. — En tous cas, l'extension $(*)$ semble un invariant intéressant du groupe p-divisible envisagé. Il subsiste, par passage à la limite, en passant au cas où S est par exemple le spectre d'un anneau A noethérien j-adique séparé et complet, où J est un idéal tel que A/J soit à caractéristiques résiduelles égales à p. On trouve par exemple un bon invariant quand A est un anneau de valuation discrète complet, éventuellement d'inégales caractéristiques, à caractéristique résiduelle p. Dans le cas où le groupe formel réduit a la structure triviale mentionnée plus haut dans 3.1., que la donnée d'un relèvement du groupe p-divisible qu'on a sur k en un groupe p-divisible sur A, soit entièrement équivalente à la donnée d'un relèvement de la filtration de $M \otimes_W k$ donnée par $(*)$, en une filtration de type (g, g^*) de $M \otimes_W A$. Il serait bien intéressant d'essayer de déterminer, en termes d'une telle donnée, quel est le module de Tate correspondant à la fibre générique de $\emptyset$! On aimerait préciser également, pour des groupes p-divisibles plus généraux, quelle quantité d'information est liée à l'extension $(*)$, qui remplace ici le H^1 de De Rham.

1967

4.1.1967

Dear Coates,

10 I want to add a few more comments to the talk on algebraic cycles and to what I told you on the phone. *Letter to J. Coates, 4.1.1967*

I think the best will be to state the index conjecture right after the statement of the main results of Hodge theory, adding that this conjecture will take its whole significance only when coupled with "conjecture A" in the next paragraph. This will give more freedom in the next paragraph to express some extra relationships between various conjectures, such as A + index implies B.

In characteristic zero, state some known extra features: index theorem holds, the properties A_ℓ to D_ℓ are independent of ℓ (because of the existence of Betti cohomology, so that these properties are equivalent to the corresponding one's for rational cohomology), A and C are independent of the chosen polarisation x (for A because it is equivalent with B, for C because it can be expressed in terms of A, $C(X) = (A(X \times X) + A(Y \times Y) + \ldots))$

Thus the conditions without ambiguity can be called $A(X)$ to $D(X)$, without subscript ℓ and without indication of polarisation. Say too that it is known that $C(X)$ is of finite dimension over $\mathbf{Q}$, (so that A can also be expressed in terms of an equality of dimensions of C^i and C^{n-1}, which again proves it is independent of ℓ), but that this is not known in characteristic $p > 0$. Contrarily to what I hastily stated in my talk (influenced from my recollections of the characteristic 0 case) it is not clear to me if in characteristic $p > 0$ the conditions $A_\ell(X, \xi)$ and $C_\ell(X, \xi)$ are independent of the polarisation ξ; if you do not find some proof of this independence, then the possible dependence should be pointed out, as well as the fact that we do not have a proof that A to D are independent of ℓ. Of course, if the index theorem is proved for X, then $A_\ell(X, \xi) = B_\ell(X)$ is again independent of the polarisation, and analogous remark for $C_\ell(X, \xi)$.

When speaking about condition $C_\ell(X, \xi)$, emphasise at once its stability properties by products (the proof I suggested works indeed) specialisation (with possible change of characteristics), hyperplane or more generally linear sections. Give an extra proposition for the relations with the property A, via a formal proposition as follows:

Proposition. — Conditions équivalentes sur X (variété *polarisée*) :

(i) $C_\ell(X)$

(ii) $C_\ell(Y) et A_\ell(X \times X)$

(ii bis) $C_\ell(Y)$ et $A_\ell(X \times X)^\circ$, où l'exposant $^\circ$ signifie qu'on se borne à exprimer la condition A pour l'homomorphisme en dimension critique $\mathrm{H}^{2n-2} \to \mathrm{H}^{2n+2}$.

(iii) $C_\ell(Y)$ et $A_\ell(X \times Y)$.

(iii bis) $C_\ell(Y)$ et $A_\ell(X \times X)^\circ$, où l'exposant $^\circ$ signifie qu'on se borne à exprimer la condition A en dimension critique $\mathrm{H}^{(2n-1)-1} \to \mathrm{H}^{(2n-1)+1}$.

(iv) $C_\ell(Y)$, et pour tout $i \le n-1$, l'homomorphisme naturel $\mathrm{H}^i(Y) \to \mathrm{H}^i(X)$ inverse à gauche de $\phi^i : \mathrm{H}^i(X) \to \mathrm{H}^i(Y)$ (induit par $\Lambda_X \phi_*$) est induit par une classe de correspondance algébrique (induisant ce qu'elle veut sur les autres $\mathrm{H}^j(Y)$).

(iv bis) $C_\ell(Y)$, et pour $j \ge n+1$, l'homomorphisme naturel $\mathrm{H}^j(X) \to \mathrm{H}^{j-2}(Y)$ inverse à droite de $\phi_{j-2} : \mathrm{H}^{j-2}(Y) \to \mathrm{H}^j(X)$ (induit par $\phi^*\Lambda_X$) est induit par une classe de correspondance algébrique (induisant ce qu'elle veut sur les autres $\mathrm{H}^i(X)$).

Corrollaire. — Ces conditions équivalent aussi à

(v) $A_\ell(X \times X) + A_\ell(Y \times Y)^\circ + A_\ell(Z \times Z) + \ldots$, où $X \supset Y \supset Z$ est une suite décroissante de sections hyperplanes.

(vi) $A_\ell(X \times Y)^\circ + A_\ell(Y \times Z)^\circ + \ldots$, avec les mêmes notations.

Of course, the products and hyperplane sections are endowed with the polarisations stemming from the polarisation on X. The conditions (v) and (iv) have the slight interest that they allow to express the conjecture $A(k) = C(k)$ in terms of $A(T)^\circ$ for every T of even (resp. odd dimension), where the upper $^\circ$ means that it is sufficient to look at what happens in critical dimensions.

For thenproof of the proposition, I told you already the equivalence of (i) and (ii), (ii bis). The equivalence of (iv) and (iv bis) is trivial by transposition, they imply (i) because $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \to \mathrm{H}^i(X)$ is the composition $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \to \mathrm{H}^{2n-i-2}(Y) \to \mathrm{H}^i(Y) \to \mathrm{H}^i(X)$ where the extreme arrows are the ones of (iv bis) and (iv) and the middle one is induced by $\Lambda_Y^{(n-1)-i}$, and they are implied by (iii bis) because of the formula

$$(\Lambda_X \phi_*)L_Y + L_X(\Lambda_X \phi_*) = (\phi_* \Lambda_Y \phi^* + id_X)\phi_*.$$

On the other hand (iii) $\Rightarrow$ (iii bis) is trivial, and so is (i) $\Rightarrow$ (iii) because of the stabilities. N.B. $(\phi^*\Lambda_X)L_X + L_Y(\phi^*\Lambda_X) = \phi^*(\phi_*\Lambda_Y\phi^* + id_X)$.

For the list of the known facts, you can state that:

1) In arbitrary characteristic, $C(X)$ is known if dim $X \le 2$, because more generally, it is known that in arbitrary dimension n, $\mathrm{H}^{2n-1}(X) \to \mathrm{H}^1(X)$ is induced by an algebraic correspondence class; also, in arbitrary dimension, it is known that π_0, π_{2n}, π_1, π_{2n-1} are algebraic (trivial for the first two, not quite trivial for the two next one's). If dim $X = 3$, it is not known however, even in characteristic 0, if $C(X)$ or only $D(X)$ hold, nor $A(X)$ and $B(X)$ in characteristic $p > 0$, also if for 1-cycles, τ-equivalence is the same as numerical equivalence...

By the way, the fact that the π_1 for a surface are algebraic was pointed out (Tate tells me) by Hodge in Algebraic correspondences between surfaces, Proc, London Math. Soc. Series 2, Vol XLIV, 1938, p. 226. It is rather striking that this statement should not have struck the algebraic geometers more, and has fallen into oblivion for nearly thirty years!

2) In characteristic 0, $A(X)$ is known for dim $X \leq 4$. But $A(X)^\circ$ is not known if dim $X = 5$; the first interesting case would be for a variety $X \times X$, X of dimension 3 and Y a hyperplane section, as this would prove $C(X)$, see above.

Thus the main problems arise already for 1-cycles on threefolds, and partially even in characteristic 0. Urged by Kleiman's question, I will look again at my old scribbles on that subject (when I pretend to reduce the "strong" form of Lefschetz to the "week" one). As for the suggestion I made on the phone, to try to get any X as birationally equivalent to a non singular X', which is a specialisation of a non singular X'', itself birationally equivalent to a non singular hypesurface - this cannot work as Serre pointed out, because such an X would have to be simply connected ! Thus if one wants to reduce somehow to the case of hypersurfaces, one will have to work also with singular ones, and see how to reformulate for singular varieties the standard conjectures...

Sincerely yours

1968

1969

1970

Les Aumettes 19.2.1983

Dear Daniel,

[See *Pursuing Stacks* (1983)]

Letter to D. Quillen, 19.2.1983

11

? 1970

Dear Mademoiselle Rolland,

I have received your communication of 19 and 20 August and deeply regret that you persist in giving a deformed version of the facts (who do you think you are fooling? I think neither yourself nor me) and that you do not give an answer to the point in question. That is regrettable. Until today I never doubted your honesty and good faith.

Yours sincerely,

A. Grothendieck

Les Aumettes 19.2.1983

Dear Daniel,

[See *Pursuing Stacks* (1983)]

Letter to D. Quillen, 19.2.1983

12

Massy le 9.6.1970

Monsieur le Directeur,

Suite à ma lettre au Comité Scientifique, je vous confirme par la présente mon départ de l'IHES à partir du 1. Octobre 1970.

Veuillez agréer, Monsieur le Directeur, l'expression de ma considération distinguée

A. Grothendieck

1971

Les Aumettes 19.2.1983

Dear Daniel,

[See *Pursuing Stacks* (1983)]

Letter to D. Quillen, 19.2.1983

13

July 6, 1971

To the organizers and anticipated participants of the NATO-sponsored 1972 Summer School on Modular Functions.

Dear Colleagues,

Soon after I heard about the projected Summer School, I got a copy of Godemont's letter to the organizers, of which copies were sent also to all anticipated participants. I wholeheartedly agree with the stand Godemont takes, and it is pointless therefore to repeat here in my personal style the points he forcefully made in his own. Instead, I now wish to tell you about my decision to attend this Summer School on my own funds, should it take place and be financed by NATO as contemplated. Not, of course, in order to participate in discussions on technicalities on modular functions, but in order to voice in personal and public discussions, and through any civilized means I or others can devise, my disapproval of what I consider as a corruption of science. I hope that some other colleagues sharing our feelings and our concerns will join me; however my decision is not dependent on this. The aim would be to help you personally, and possibly some other colleagues as well, to come to realize that there is something fundamentally wrong in the way most mathematicians (and any other kind of scientist as well) are taking it easy with their social responsibilities, being convinced that whatever pushes Science (or themselves) still a bit further, is Supreme Good in itself and does not need further justification. As there are things infinitely more important and precious on earth than sophisticated knowledge of properties of modular functions - such as the respect for life, and indeed the continuation of life itself - I do hope that my or our presence will have a disrupting effect as far as concentration on mathematical technicalities is concerned - yet a clarifying and constructive one on those more essential matters. As other likewise dissenting scientists, I do of course value such a thing as academic freedom, but not as an absolute, not at the expense of more essential rights of people who may not be academics (such as the right to live, or some forms of freedom that we academics are taking for granted for our own personal selves), which are being suppressed increasingly throughout the world, notably by military organizations such as Nato. Therefore we do believe that

"Academic Freedom" does not include the "right" to give support to military and hence destructive institutions such as Nato, and we hope that an increasing number of people, including yourself, will come to realize this and become instrumental in spreading this knowledge, through various actions such as the one I am contemplating in connection with the Summer School. By the time such scientific meetings as the one you are expected to attend will have to be protected by the police against outraged protesters, hopefully including non-scientists as well, the lesson will be learned by many among us. At least the sides will be clear by then to everyone, which would be an important step indeed.

I would like to add still some more personal comments. Why, among the hundreds of meetings financed by Nato, did I decide to take action just on this particular one? This is because, through the persons of some of the organizers, and also partly through the subject, it very much feels to me like something happening "in my own house" - and certainly we should start sweeping our own house first! Thus, I have been working in nearly constant contact with J.-P. Serre for about twenty years, including many years of collaboration within the Bourbaki group; many of my best recollections of past work are tied up some way or other with our common "master" Bourbaki or with Serre, and at various times I had occasion to acknowledge the influence of one or the other on my work. Deligne has been my student for several years (coming quickly to surpass his master in mathematical insight and technical power), and I used to be particularly enthusiastic about his seemingly unlimited potentialities; he eventually became my colleague at IHES - which made me quite exultant indeed, unfortunately only for a short time, as I left soon after over an issue quite similar to the one causing this letter. This brings me to my own share of responsibility in this sad situation: That even some young people, and very "bright" ones, will not waste a minute's thought on such "pointless" questions as their social responsibilities and the social implications of their overall behaviour as scientists. After all we, the elders, never wasted so much as an hour discussing such matters with them, and thus even those among us who did not consider such questions futile would necessarily propagate the feeling that they indeed are. However, if we are not spiritually dead we should still be able to learn, not merely more mathematics, and come to change our teaching in such a way that it will no longer propagate such deadly errors.

Any comments to these reflections would be welcome. Whatever strong my convictions and my ways of expressing them, they do not imply any hostility towards any particular person. I am just convinced that the kind of attitude that makes it possible to scientists to attend, say, a Nato Summer School, is suicidal in the large, hence condemned to disappear within the next generation or two - whether or not there are any other generations afterwards.

Yours for life, peace and freedom

A. Grothendieck

1972

1973

1974

7.8.74

Cher Deligne,

14 Étant peut-être empêché par mon jambe d'assurer un cours de 1[er] cycle au 1[er] trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les fourbis de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". À ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si M, N sont deux faisceaux abéliens sur un topos X, et $\tau_{\leqslant 2}\,\mathbf{Hom}(M,N) = E(M,N)$ est le complexe ayant les invariants *Lettre à P. Deligne, 7.8.1974*

$$\begin{cases} \mathbf{H}^i = \mathbf{Ext}^i(M,N) & \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant 2 \\ \mathbf{H}^i = 0 & \text{si } i \notin [0,2]\,, \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

$$\text{(T)} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbf{Hom}(M, {}_2N)[-2] \arrow[dl] & \\ E(M,N) \arrow[rr] & & E'(M,N) \arrow[ul] \end{tikzcd}\,,$$

donc $E'(M,N)$ est un complexe dont les invariants $\mathbf{H}^i$ sont ceux de $E(M,N)$ en degré $i \neq 2$, et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to \mathbf{Ext}^2(M,N) \to \overbrace{\mathbf{H}^2(E'(M,N))}^{P(M,N)} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{Hom}(M, {}_2N) \to 0\,.$$

Heuristiquement, $E'(M,N)$ est le complexe qui exprime le " 2-champ de Picard strict" formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) " épinglés" par M, N sur des objets variables de X, en admettant que ta théorie pour les 1-champs de Picard stricts s'étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute) ; de même $E(M,N)$ correspond aux champs de Picard stricts épinglés par M, N. La suite exacte $(*)$ se construit en tous cas canoniquement " à la main", où le terme médian est le faisceau des classes à " équivalence" près des champs de Picard épinglés par M, N, or étant l'invariant qui s'obtient en associant à toute section L d'un champ de Picard la symétrie de $L \otimes L$, interprété comme section de ${}_2N$. Je sais prouver (sauf erreur) que tout homomorphisme $M \to {}_2N$ provient d'un champ de Picard convenable (épinglé par M, N) (a priori l'obstruction est dans $\mathrm{Ext}^3(X; M,N)$, mais un argument "universel" prouve qu'elle est nulle). Cela prouve que l'extension $(*)$ est bien proche d'être splittée : toute section du troisième faisceaux, sur un objet quelconque de X, se remonte – en d'autres termes, l'extension a une section "ensembliste". Bien sûr, il y a mieux en fait : toute section sur un $U \in \mathrm{Ob}X$ "provient" d'un élément de $H^2(U, E'(M,N))$ (hypercohomolo - H^2).

Exemple. Soit A un anneau sur X, soient M, N respectivement les faisceaux K^0, K^1 associés au champ additif des A-Modules projectifs de type fini (p. ex.). Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par M, N, d'où une section canonique du terme médian $P(M,N)$ de $(*)$.

NB. Tout ce qui précède a les fonctorialités évidentes en $M, N, X, \dots$.

Question. Le triangle exact (T) et la suite exacte $(*)$ sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie ...) ? Connaissent-ils des variantes "supérieures" ? (Un principe "géométrique" pour les obtenir pourrait être via des n-champs de Picard non nécessairement stricts ...)

Je profite de l'occasion pour soulever une question sur la "cohomologie relative". Soit $q : X \to Y$ un morphisme de topos. Si F est un faisceau abélien (ou un complexe d'iceux) sur Y, peut-on définir fonctoriellement en F la cohomologie relative $\Gamma(Y \bmod X, F)$ (de la catégorie dérivée de $(\mathrm{Ab})(Y)$ dans celle de (Ab)) ? L'interprétation "géométrique" en termes d'opérations sur des n-champs de Picard (n "grand") suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente " à la main" que dans les deux cas extrêmes :

(a) q est "(-1)-acyclique", i.e. pour tout F sur Y, $F \to q_* q^* F$ est injectif (NB C'est le cas de $Y/P \to Y$ si $P \to e_Y$ est un épimorphisme – c'est donc le cas de $\mathrm{B}_e \to \mathrm{B}_G$ plus haut.)
On prend
$$\Gamma(\mathrm{Coker}(F \to q_*(\underbrace{C(q^*(F))}_{\text{résolution injective}}))[-1]) .$$

(b) $\forall$ F injectif sur Y, $q^*(F)$ est injectif et $F \to q_* q^* F$ est un épimorphisme (exemple : q inclusion d'un ouvert $U \hookrightarrow e_Y$). On prend
$$\Gamma_Y(\mathrm{Ker}(\underbrace{C(F)}_{\text{résolution injective}} \to q_* q^*(C(F)))) .$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d'un morphisme de complexes (tel que
$$F \;\to\; q_*(q^*(F)) \qquad\qquad)$$
n'est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) par rapport à la flèche dont on veut prendre le cône. Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

Question pour Illusie : Dans sa théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des $\mathrm{H}^3(\mathrm{B}_G/X, -)$ resp. des $\mathrm{Ext}^2(X; -, =)$. Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (supposée écrite) des Gr-champs – resp. via ta théorie des champs de Picard ? J'ai [phrase incomplète]

Je te signale que j'ai réfléchi aux Gr-champs sur X. Si G est un Groupe sur X, N un G-Module, les Gr-champs sur X " épinglés par G, N " forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l'opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à 1 échelon à qui lui correspond est le tronqué
$$\tau_{\leqslant 2}(\Gamma(\mathrm{B}_G \bmod X, N)[1]) .$$

(NB la cohomologie de $\Gamma(\mathrm{B}_G \bmod X, N)$ commence en degré 1.) Plus géométriquement, un Gr-champ sur X épinglé par (G,N) est essentiellement "la même chose" qu'une 2-gerbe sur B_G, liée par N, et munie d'une trivialisation au dessus de $X \approx \mathrm{B}_e = (\mathrm{B}_G)/P$ (où P est l'objet de B_G "torseur universel sous G"). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se trouve que dans celle-ci, les 3-flèches sont triviales (i.e. si source = but, ce sont des identités) – cela ne fait qu'exprimer $\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_G/X, N) = 0$ (i.e. $\mathrm{H}^0(\mathrm{B}_G, N) \to \mathrm{H}^0(X,N)$ injectif...). Donc la 3-catégorie peut être regardée comme une 2-catégorie – et "c'est" celle des Gr-champs sur X épinglés par G, N. Si on veut localiser sur X, et décrire le 2-champs de Picard sur X des champs de Picard (sur des objets variables de X) épinglés par G, N, on trouve qu'il est exprimé par le complexe

$$\tau_{\leqslant 2}(p_{G*}\,\mathrm{Coker}(N \to q_{G*}\overbrace{C(q_G^* N)}^{\text{résolution injective}}))\,,$$

où $p_G : \mathrm{B}_G \to X$ et $q_G : \mathrm{B}_e \approx X \simeq (\mathrm{B}_G)_P \to \mathrm{B}_G$. Toutes ces descriptions étant compatibles avec des variations de G, N, X, cela donne en principe une description de la 2-catégorie des Gr-champs, avec X, G, N variables...

1975

Villecun 5.2.1975

Cher Breen ...

15 ...Pour tout le reste de ta lettre, elle mériterait un lecteur plus averti, aussi, pour qu'elle ne soit pas entièrement perdue au monde, je vais l'envoyer à Illusie ! J'ai néanmoins constaté, avec intérêt, ton intérêt â demi refoulé pour des 2-catégories de Picard, n-catégories et autre faune de ce genre, et ton espoir que je te prouverai peut-être que ces animaux sont tout à fait indispensables pour faire des maths sérieuses dans telle circonstance. J'ai bien peur que cet espoir ne soit déçu, je crois que jusqu'à maintenant on a toujours pu d'en tirer en éludant de tels objets et l'engrenage dans lequel ils pourraient nous entraîner. Est-ce nécessairement une raison pour continuer à les éluder ? Les situations où on a l'impression "d'éluder" en effet me semblent en tous cas devenir toujours plus nombreuses - et si on s'abstenait de tirer une situation complexe et chargée de mystère au clair, chaque fois qu'on ne serait pas *forcé* de le faire pour des raisons techniques provenant de la math déjà faite, - il y aurait sans doute beaucoup de parties des maths aujourd'hui reputées "sérieusses" qui n'auraient jamais été developpées (Il n'est pas dit non plus que le mode s'en trouverait plus mal...). Ton commentaire (que j'ai également entendu chez Deligne) que la classification d'objets géométriques relativement merdiques se réduit finalement à des invariants cohomologiques essentiellement "bien connus" et relativement simples n'est pas non plus convainquant; n'est ce pas négliger la différence entre la *compréhension d'un objet géométrique*, et la détermination de sa "classe à isomorphisme (ou équivalence) près" ?

Lettre à L. Breen 5.2.1975.

Tu me demandes des exemples "convainquants" de 2-catégories de Picard. Voici quelques exemples, en vrac (je ne sais s'ils seraient convainquants !):

1) Si L est un lien* de centre Z sur le topos X, les *gerbes liées par* Z forment une 2-catégorie de Picard stricte, représentée par le complexe $\mathrm{R}\Gamma_X(Z)$ tronqué en degré 2, dont les objets de cohomologie non triviaux sont les $\mathrm{H}^i(X,Z)$, $0 \le i \le 2$. Les gerbes liées par L forment un *pseudo-2-torseur* sous le gerbe précédente, qui est un 2-torseur (i.e. non vide) si et seule si une certaine obstruction dans $\mathrm{H}^3(X,Z)$ est nulle. Pour comprendre cette classe de notre point de vue, il y a lieu de passer aux 2-champs correspondants: le 2-champs de Picard strict des Z-gerbes sur des objets variables de X, et le 2-champ des L-gerbes sur des objets variables. Ce dernier est bel et bien un 2-torseur sous le champ précédent, or la classification de ces 2-torseurs (à 2-équivalence près) se fait

*For the notion of a "lien" (or "tie"), which is one of the main ingredients of the non-commutative cohomology panoply of Giraud's theory, I refer to his books (Springer, Grundlehren 179, 1971). A *Picard category* is a groupoid endowed with an operation ⊗ together with associativity, unity and commutativity data for this operation, which make it resemble to a commutative group. A *"Champ de Picard"* (or "Picard stack") is defined accordingly, by relativizing over an arbitrary space or topos (replacing the groupoid by a stack of groupoids over this topos). The necessary "general nonsense" on these notions is developed rather carefully in an exposé of Deligne in SGA 4 (SGA 4 XVIII 1.4). In this letter to Larry Breen, I am asuming "known" the notion of an n-stack (for $n = 3$ at any rate), and the corresponding notion of (strict) *Picard n-stack*, which should be describable (as was explained in Deligne's notes in the case $n = 1$) by an n-truncated chain complex in the category of abelian sheaves on X (viewed mainly as an object of the relevant derived category). The "strictness" condition on usual Picard stacks refers to the restriction that the commutativity isomorphism within an par le $\mathrm{H}^3(X, Z)$, (tout comme les Z-L-gerbes peuvent être interprétées comme des torseurs sous la Z-L-champ de Picard strict des Z-torseurs, et sont classifiées par le $\mathrm{H}^2(X, Z)$). On voit déjà, bien sûr, poindre ici l'oreille de la 3-catégorie de Picard stricte des 2-gerbes liées par Z, ou (de façon équivalente) des 2-torseurs sous le 2-champ de Picard strict des Z-L-gerbes; cette 3-catégorie de Picard stricte étant décrite par $\mathrm{R}\Gamma_X(Z)$ tronqué en dimension 3, ayant comme invariants de cohomologie non triviaux les $\mathrm{H}^i(X, Z)$ $(0 \le i \le 3)$. Quant au 3-champ de Picard correspondant, il est décrit par une résolution injective de Z tronqué en degré 3, alors que le 2-champ de Picard précédent se décrivait en tronquant en degré 2.

2) Si M et N sont deux faisceaux abéliens sur X, les *champs de Picard* (N.B. 1-champs !) *d'invariants M et N* forment eux-même une 2-catégorie de Picard stricte, représentée sans doute par le complexe $\mathrm{RHom}(X(M), N)$[†] tronqué en degré 2, dont les invariants de cohomologie non triviaux sont donc "le drôle de Ext^2" de ma lettre à Deligne, et les honnêtes $\mathrm{Ext}^i(M, N)$ $(0 \le i \le 2)$. Les champs de Picard stricts forment une sous-2-catégorie de Picard pleine, représentée par $\mathrm{RHom}(M, N)$ tronqué en degré 2, d'invariants les $\mathrm{Ext}^i(M; N)$ $(0 \le i \le 2)$. Bien sûr, Ext^2 donne les 0-objets à équivalence près, Ext^1 les automorphismes à isomorphisme près de l'objet nul, Ext^0 les automorphismes de l'automorphisme identique audit... Je n'ai pas réfléchi à une bonne interprétation géométrique de la n-catégorie de Picard associée à $\mathrm{RHom}(M, N)$ tronqué en degré n, et encore moins bien sûr pour $\mathrm{RHom}(X(M), N)$, mais sans doute il faut regarder dans la direction des n-champs de Picard.

3) Soit G un Groupe sur X, opérant sur un faisceau abélien N. Les *champs en* Gr-*catégories sur X liés par* (G, N) forment une 2-catégorie de Picard, dont les invariants sont $\mathrm{H}^3(\mathrm{B}_G\, mod X, N)$, $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}_G\, mod X, N)$ et $Z^1(G, N)$ (groupe des 1-cocycles de G à coefficients dans N) - je te laisse le soin de deviner quel est le complexe qui le décrit ! J'ai écrit il y a quelques mois à Deligne à ce sujet, et l'ai prié de t'envoyer une copie de la lettre.

[cf. Künzer (1974)]

4) Soit X un topos localement annelé, on peut considérer les *Algèbres d'Azumaya sur X* (i.e. les Algèbres localement isomorphes à une algèbre de matrices d'ordre n, $n \ge 1$) comme les objets d'une 2-catégorie de Picard, où la catégorie $\mathbf{Hom}(A, B)$, pour A et B des Algèbres d'Azumaya, est la catégorie des "trivialisations" de $A^\circ \otimes B$, i.e. des couples $(E, \emptyset)$, E un Module localement libre et $\emptyset$ un isomorphisme $\mathbf{End}(E) \simeq A^\circ \otimes B$. Il faut travailler un peu pour définir les accouplements $\mathbf{Hom}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C) \to \mathbf{Hom}(A, C)$; l'opération $\otimes$ dans la 2-catégorie de Picard à construire est bien sûr le produit tensoriel d'Algèbres, et l'opération "puissance -1" est le passage à l'algèbre opposée. On vérifie qu'en associant à toute Algèbre d'Azumaya la 1-gerbe de ses trivialisations, on trouve un 2-$\otimes$-foncteur de la 2-catégorie de Picard (dite "de Brauer") dans celle des 1-gerbes liées par $\mathbf{G}_m$, qui est 2-fidèle. Les invariants de la première sont donc les groupes $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{G}_m)_{\mathrm{Br}}$, $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G}_m)$ et $\mathrm{H}^0(X, \mathbf{G}_m)$, où dans le premier terme l'indice Br désigne le sous-groupe du H^2 formé des classes de cohomologie provenant

[†] When M is any abelian sheaf on a topos, the "MacLane resolution" $X(M)$ is a certain canonical left resolution of M by sheaves of $\mathbf{Z}$-modules which are "free", and more specifically, which are finite direct sums of sheaves of the type $\mathbf{Z}^{(T)}$, where T is any sheaf of the type M^n (finite product of copies of M). This canonical construction was introduced by MacLane (for abelian groups), and gained new popularity in the French school of algebraic geometry and homological algebra in the late sixties, because it gives a very handy way to relate the $\mathrm{Ext}^i(M, N)$ invariants (when N is another abelian sheaf on X) to the "spacial" cohomology of M (i.e. of the induced topos $X_{/M}$) with coefficients in N.

> d'Algèbres d'Azumaya. On aurait envie de parler du 2-champ de Picard des Algèbres d'Azumaya sur des objets variables de X, mais c'est bien une 2-catégorie de Picard fibrée sur X, mais pas tout à fait un 2-champ (whatever that means), san doute - la condition de 2-recollement (whatever that means) ne doit pas être satisfaite - sinon il n'y aurait pas d'indice Br au H^2...

La considération des n-catégories de Picard strictes (qui s'imposent à nous pas à pas dans un contexte essentiellement "commutatif") me semblent la clef du passage de l'algèbre homologique ordinaire ("commutative"), en termes de complexes, à une algèbre homologique non commutative, du fait qu'elles donnent une interprétation géométrique correcte des "complexes tronqués à l'ordre n" (en tant qui objets de catégories dérivées), donc, essentiellement (par passage à la limite sur n) des complexes tout courts. L'idée naïve qui se présente est alors que les "complexes non commutatifs" (qui seraient les objets-fantômes d'une algèbre homologique non commutative) sont peut-être ce qui reste des n-catégories de Picard (strictes) quand on oublie leur caractère additif, i.e. leur structure de Picard - c'est à dire qu'on ne retient que la n-catégorie ! (Quand on se place sur un topos X, on s'intéresse donc aux n-champs sur X...) A vrai dire, cette idée est venue d'abord d'une autre direction, quand il s'est agi en géométrie algébrique de démontrer des *théorèmes de Lefschetz* à coefficients discrets en cohomologie étale, dans le cas d'une variété projective disons et de toute section hyperplane, ou d'une variété quasi-projective et de presque toute section hyperplane (pour ne mentionner que le cas global le plus simple), sous les hypothèses de profondeur cohomologique "le plus naturelles" (en fait, essentiellement des conditions nécessaires et suffisantes de validité du dit théorème). Dans le cas commutatif, les techniques de dualité nous suggèrent très clairement quels sont les meilleurs énoncés possibles, cf. l'exposé de Mme Raynaud dans SGA 2. Mais ces techniques ne valent qu'en se restreignant à des coefficients premiers aux caractéristiques, alors que des démonstrations directes plus géométriques (développées dans SGA 2 avant le développement du formalisme de la cohomologie étale) donnaient des résultats très voisins pour le H^0 et le H^1 (ou le π_0 et le π_1, si on préfère) sans telles restrictions, du moins dans le cas propre (i.e. projectif, au lien de quasi-projectif). En fait, ce sont les "résultats les meilleurs possibles" eux-mêmes, énoncés comme conjectures dans SGA 2 dans l'exposé cité de Mme Raynaud, qui sont démontres ultérieurement par elle dans sa thèse. Ce qui est remarquable de notre point de vue, c'est que les énoncés les plus forts se présentent le plus naturellement sous forme d'énoncés sur des *1-champs* sur le site étale de la variété algébrique considérée - la notion de "profondeur $\geq i$ (pour $i = 1, 2, 3$) s'énonçant aussi le plus naturellement en termes de champs. Non seulement cela, mais alors même qu'on voudrait ignorer la notion technique de champ et travailler exclusivement en termes de H^0 et H^1 en utilisant à bloc le formalisme cohomologique non commutatif de Giraud, pour démontrer disons un théorème de bijectivité $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ (ce qui est le résultat le plus profond établi dans la thèse de Mme Raynaud), il semble bien qu'on n'y arrive pas, faute à ce formalisme d'avoir la souplesse nécessaire. En fait, il faut utiliser comme ingrédients techniques, de façon essentielle, les trois théorèmes suivantes directement pour les 1-champs "de torsion" (i.e.

[SGA 2]

[Raynaud (1975)]

où les faisceaux en groupes d'automorphismes sont de ind-torsion): a) théorème de changement de base pour une morphisme propre, b) théorème de changement de base par un morphisme lisse c) théorème de "propreté cohomologique générique" pour un morphisme de type fini $f : X \to S$, S intègre (disant que l'on peut trouver dans S un ouvert $U \neq \emptyset$ tel que pour *tout* changement de base $S' \to S$ se factorisant par u, la formule de changement de base est vraie). (Pour b) et c), il faut faire des hypothèses que les faisceaux d'automorphismes sont premiers aux charactéristiques, et dans c) ne servent que dans la version "générique" du théorème de Lefschetz). C'est avec en vue de telles applications que Giraud a pris la peine dans son bouquin (si je ne me trompe) de démontrer a), b) (et c) ?) dans le contexte des 1-champs et de leurs images directes et inverses. Mais du même coup il dévient clair que le contexte "naturel" des théorèmes de changement de base en cohomologie étale, des théorèmes du type de Lefschetz (dits "faibles") sur les "sections hyperplanes", tout comme de la notion de profondeur qui y joue un rôle crucial, doit être celui des n-champs. Et que le développement hypothétique de ce contexte ne risque pas de se réduire à une jonglerie purement formelle et absolument bordélique avec du "general nonsense", mais qu'on se trouvera aussitôt confronté à des tests "d'utilisabilité" aussi sérieux que la démonstration des théorèmes de changement de base et ceux du type de Lefschetz (qui même dans le contexte commutatif ne sont pas piqués de vers...). [ ] pour variantes analytiques complexes etc.

Je ne sais si ces commentaires te "passent par dessus la tête" à ton tour, ni si elles te donnent l'impression qu'il aurait peut-être des choses intéressantes à tirer au clair. Si cela t'intéresse, je pourrais expliciter sous forme un peu plus systématique quelques ingrédients d'une hypothétique algèbre homologique non commutative et les liens de celle-ci à l'algèbre homologique commutative. Plus mystérieux pour moi (et pour cause, vu mon ignorance en homotopie) seraient les relations entre celle-là et l'algèbre homotopique, i.e. les structures semi-simpliciales, et je n'ai que des commentaires assez vagues à faire en ce sens (*). Par ailleurs, je te rappelle que même l'algèbre homologique commutative n'est pas, il s'en faut, dans un état satisfaisant, pour autant que je sache, vu qu'on ne sait[‡] toujours pas quelle est la "bonne" notion de catégorie triangulée. Or il me semble bien clair que ce n'est pas une question purement académique - même si on a pu se passer de le savoir jusqu'ici (en se bornant comme Monsieur Jourdain à "faire de la prose sans le savoir" - en travaillant sur des catégories de complexes, éventuellement filtrés, sans trop se demander quelles structures il y a sur ces catégories...).

Bien cordialement à toi

(*) P.S. Réflexion faite, j'ai quand même envie de te mettre un peu en appétit, en faisant ces "quelques commentaires assez vagues". Il s'agit du yoga qu'une (petite) n-catégorie ou groupoïdes (à n-équivalence près) "est essentiellement la même chose" qu'une ensemble semi-simplicial pris à homotopie près et où on néglige les π_i pour $n+1 \geq i$ (où, si tu préfères, "où on a tué les groupes d'homotopie en dimension $\geq n+1$). Voici des éléments heuristiques pour ce yoga. Si $K_\bullet$ est un ensemble simplicial (il peut être prudent de le prendre de Kan) on lui associe une n-catégorie $C_n(K_\bullet)$, dont les 0-objets sont les 0-simplexes, les 1-objets sont les chemins (ou homotopies) entre 0-simplexes, les 2-objets sont les homotopies entre chemins (à extrémités fixées) etc. Pour les n-objets, cependant, on ne prend pas les homotopies entre homotopies

[‡]Reflecting on the "right" version of the provisional Verdier notion of a triangulated category (which was supposed to describe adequately the relevant internal structure of the derived categories of abelian categories) is part of my present program for the notes on Pursuing stacks, and will be the main task in one of the chapters of volume two. For some indications along these lines, see also section 69 (sketching the basic notion of a "*derivator*").

de fourbis, mais classes d'équivalence de homotopies (modulo la relation d'homotopie) entre homotopies. La composition des i-objets ($i \geq 1$) se définit de façon évidente, on notera qu'elle n'est pas strictement associative, mais associative modulo homotopie. Donc la n-catégorie qu'on obtient n'est pas "stricte" - et on prévoit pas mal d'emmerdement pour définir de façon raisonnable une n-catégorie pas stricte (dans la description des compatibilités pour les "données d'associativité). La mise sur pied du yoga qui suit pourrait constituer un fil d'Ariadne pour la définition en forme des n-catégories (pas strictes), les n-foncteurs entre elles (pas non plus stricts, et pour cause), les n-équivalences etc, au même titre que le yoga initial "une n-catégorie est une catégorie ou les Hom et leurs accouplements de composition sont des $(n-1)$-catégories et des accouplements entre telles". Cette n-catégorie $C_n(K_\bullet)$ dépend fonctoriellement de $K_\bullet$, tout morphisme simplicial $K_\bullet \to K'_\bullet$ définit un n-foncteur $C_n(K_\bullet \to C_n(K'_\bullet))$; en fait, cela doit en dépendre même n-fonctoriellement, vu qu'on voit (en s'inspirant de ce qui précède et l'application à des ensembles semi-simpliciaux de la forme $\mathrm{Hom}_\bullet(K_\bullet, K'_\bullet)$) que les ensembles semi-simpliciaux forment eux-mêmes les 0-objets d'une n-catégorie, quel que soit $n\ldots$

En fait, $C_n(K_\bullet)$ est un n-groupoïde, i.e. une n-catégorie où toute i-flèche ($1 \leq i \leq n$) ($= i$-objet) est une "équivalence" i.e. admet un quasi-inverse (donc un inverse si la n-catégorie est "réduite"). Si C est une telle n-catégorie i.e. un n-groupoïde, et X un 0-objet de C, il s'impose de désigner par $\pi_i(C,x)$ ($0 \leq i \leq n$) successivement : l'ensemble des classes de 0-objets à équivalence près de 1-objets (ou 1-flèches) $x \to x$ (c'est un groupe, pas nécessairement commutatif), l'ensemble des classes modulo équivalence des 2-flèches $1_x \to 1_x$, où 1_x est la 1-flèche identique de x (c'est un groupe commutatif $\pi_2(C,x)$, ainsi que les groupes qui vont suivre), l'ensemble des classes modulo équivalence de 3-flèches $1_{1_x} \to 1_{1_x}$, etc. Ces groupes forment, comme de juste, des "systèmes locaux" sur l'ensemble des 0-objets de C, et modulo le grain de sel habituel, les $\pi_i(C,x)$ ne dépendent que de la "composante connexe" du 0-objet x i.e. de sa classe modulo équivalence de 0-objets. Ceci dit, si C est de la forme $C_n(K_\bullet)$, il résulte pratiquement des définitions que l'on a des isomorphismes canoniques $\pi_i(K_\bullet,x) \simeq \pi_i(C_n(K_\bullet))$ pour $0 \leq i \leq n$, qui pour x variable peuvent s'interpréter comme des isomorphismes de systèmes locaux. Il s'ensuit que pour une application semi-simplicial $f : K_\bullet \to K'_\bullet$, le n-foncteur correspondant $C_n(K_\bullet) \to C_n(K'_\bullet)$ est une n-équivalence si et seule si f induit un isomorphisme sur les π_0 et sur les π_i en tout point ($1 \leq i \leq n$). On serait plus heureux de pouvoir dire à la place "et de plus un homomorphisme surjectif pour $i = n+1$, car c'est, il me semble, cela qu'il faudrait pour espérer pouvoir conclure que la catégorie localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, obtenue en inversant les flèches "qui induisent des isomorphismes sur les π_i pour $0 \leq i \leq n$ (ou encore, "en négligeant" les ensembles semi-simpliciaux n-connexes), est équivalente à la catégorie localisée de la catégorie des n-catégories, où on rend inversibles les n-équivalences ? Quoi qu'il en soit, ces petites bavures devraient disparaître lorsqu'on "stabilise" en faisant augmenter n. A ce propos, on voit que le foncteur "troncature en dimension n" de la théorie homotopique (consistant à tuer les groupes d'homotopie à partir de la dimension $n+1$) s'interprète dans la langage des n-catégories par l'opération faisant passer d'une N-catégorie ($N > n$) à une n-catégorie, en conservant tels quels les i-objets

$(0 \leq i \leq n-1)$ et leur composition $(1 \leq i \leq n-1)$, et en remplaçant les n-objets par les classes de n-objets "à équivalence près", avec la composition obtenue par passage au quotient. De même, le foncteur d'inclusion évident en théorie homotopique, consistant à regarder un ensemble semi-simplicial "où on a négligé les π_i pour $i \geq n+1$" comme un ensemble semi-simplicial (dans la catégorie homotopique) qui se trouve avoir des π_i nuls pour $i \geq n+1$, se traduit par le foncteur allant des n-catégories vers les N-catégories, obtenue en ajoutant à une n-catégorie des i-flèches $(n+1 \leq i \leq N)$ identiques exclusivement. (Ainsi, un ensemble est regardé comme une catégorie "discrète", une catégorie comme une 2-catégorie où les $\mathbf{Hom}(A, B)$, A et B des 0-objets, sont des catégories discrètes, etc...).

Bien entendu, rien n'empêche de considérer aussi la notion de ∞-catégorie, à laquelle celle de n-catégorie est comme la notion d'ensemble semi-simplicial tronqué à celle d'ensemble semi-simplicial. Sauf erreur, la localisée de la catégorie des ∞-catégories, pour les flèches de ∞-équivalence, est équivalente à "la catégorie homotopique", localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, ou du moins une sorte de complétée de celle-là. Dans cette optique, le tapis consistant à interpréter une ∞-catégorie de Picard stricte (i.e. quelque chose qui ressemble à un groupe abélien de la catégorie des ∞-catégories) comme donnée (à ∞.équivalence près) par un complexe de chaînes regardé comme un objet d'une catégorie dérivée, est à relier au tapis de Dold-Puppe, interprétant ces derniers comme des groupes abéliens semi-simpliciaux.

Pour se donner confiance dans ce yoga général, on peut essayer d'interpréter en termes de n-catégories ou ∞-catégories des constructions familières en homotopie. Ainsi, l'espace des lacets $\Omega(K_\bullet, x)$ correspond manifestement à la $(n-1)$-catégorie $\mathbf{Hom}(x, x)$ formée des i-flèches de C $(1 \leq i \leq n)$ dont la 0-origine et la 0-extrémité sont x, réindexées en les appelant $(i-1)$-flèches. Je n'aperçois pas à vue de nez un joli candidat pour la suspension en termes de n-catégories. Par contre le $\mathrm{Hom}_\bullet(K_\bullet, K'_\bullet)$ doit correspondre au $\mathbf{Hom}(C, C')$, qui est une n-catégorie quand C, C' en sont. La "fibre homotopique" d'une application semi-simpliciale $f : K_\bullet \to K'_\bullet$ (transformée d'abord, pour les besoins de la cause, en une fibration de Serre par le procédé bien connu de Serre-Cartan) correspond sans doute à l'opération bien familière de produit $(n+1)$-fibré (du moins les cas $n = 0, 1$ sont bien familiers !) $C \times_{C'} C''$ pour des n-foncteurs $c \to C'$ et $C'' \to C'$, dans le cas où C'' est la n-catégorie ponctuelle, donc la donnée de $C'' \to C'$ correspond à la donnée d'un 0-objet de C'. Les espaces $K(\pi, n)$ ont une interprétation évidente comme n-gerbes liées par π. Enfin, on voit aussi poindre l'analogue du dévissage de Postnikoff d'un ensemble semi-simplicial - mais la façon dont je l'entrevois (vue ma prédilection pour les topos) passe par la notion de topos classifiant d'un n-groupoïde (généralisant de façon évidente le topos classifiant d'un groupe). En termes de cette notion, on peut, il me semble, interpréter un n-groupoïde en termes d'un $(n-1)$-groupoïde (savoir son tronqué), *muni* d'une n-gerbe sur le topos classifiant, liée par π_n ("fordu" bien sûr par l'action du π_1...).

Bien sûr, il faut relativiser encore tout le yoga qu'on vient de décrire, au dessus d'un topos quelconque X. Il s'agirait donc de mettre en relation et d'identifier, dans un certaine mesure, d'une part l'algèbre homotopique sur X, d'autre part l'algèbre catégorique sur X construite en termes de la notion de n-champ en groupoïdes ($n \geq 0$ fini ou infini).

On espère que la notion d'image inverse de faisceau semi-simplicial par un morphisme de topos $f : X \to X'$ (qui est évidente) correspond à la notion évidente d'image directe de n-champs; et inversement, la notion évidente d'image directe de n-champs par f devrait correspondre à une notion plus subtile d'image directe $\mathrm{Lf}_*(K_\bullet)$ d'un faisceau semi-simplicial, construit sansa doute dans l'esprit des foncteurs dérivés à partir de la notion naïve (mais on hésite s'il faut mettre Lf_* ou Rf_*)... Les dévissages à la Postnikoff doivent avoir encore une interprétation remarquablement simple en termes de n-champs. Comparer à la remarque de Giraud qu'un 1-champ en groupoïdes sur X peut s'identifier au couple d'un faisceau π_0 sur X, et d'une 1-gerbe sur le topos induit $X_{/\pi_0}$ (dont le lien, comme de juste, devrait être note π_1 !). D'ailleurs, dans le cas des 1-champs en groupoïdes, la traduction de ces animaux en termes de topos classifiants au dessus de X est, je crois, développé en long et en large dans Giraud (il parle, si je me rappelle bien, d'"extensions" du topos X). L'extension (si j'ose dire) de ce tapis aux n-champs ne devrait pas poser de problème.

Remords : tâchant de préciser heuristiquement la notion de topos classifiant d'un n-champ en groupoïdes (ou plus particulièrement, d'un n-groupoïde) pour $n \geq 2$, je vois que je n'y arrive pas à vue de nez. (Bien sûr, il suffirait (procédant de proche en proche) de savoir définir un topos classifiant raisonnable pour une *n-gerbe*, liée par un faisceau abélien π_n). Donc je ne sais comment décrire le dévissage de Postnikoff en termes de n-champs, sauf pour $n \leq 2$. Ceci est lié à la question d'une description directe des groupes de cohomologie d'un n-groupoïde C (ou d'un n-champ), à coefficients disons dans un système local commutatif, de façon que pour $C = C_n(K_\bullet)$, $K_\bullet$ un ensemble semi-simplicial dont les π_i pour $i \geq n{+}1$ sont nuls, on trouve les groupes de cohomologie correspondants de $K_\bullet$. Peut-on le faire en associant à C, de façon convenable, un ensemble semi-simplicial "nerf" de C ?

Bien entendu, si on réussit à définir un topos classifiant pour C, celui-ci devrait être homotope à $K_\bullet$ ci-dessus, donc avoir les mêmes invariants homotopiques π_i et cohomologiques H^i ; itou pour les champs. La définition habituelle du topos classifiant, dans le cas $n = 1$, a bien cette vertu. Cas particulier typique de problème de la définition du topos classifiant : pour π un groupe commutatif, trouver un topos canonique (fonctoriel en π bien sûr...) ayant le type d'homotopie de $K(\pi, n)$, et qui généralise la définition du topos classifiant pour $n = 1$ (topos des ensembles où π opère). On frémit à l'idée que les topos pourraient ne pas faire l'affaire, et qu'il y faille des "n-topos" !! (J'espère bien que ces animaux n'existent pas...)

La théorie "d'algèbre homologique non commutative" que j'essaie de suggérer pourrait se définir, vaguement, comme l'étude parallèle des notions suivantes et de leurs relations des notions suivantes et de leurs relations multiples: a) espaces topologiques, topos, b) ensembles semi-simpliciaux, faisceaux semi-simpliciaux etc. c) n-catégories (notamment n-groupoïdes), n-champs (notament n-champs en groupoïdes) etc. d) complexes de groupes abéliens, de faisceaux abéliens. (Les "etc" réfèrent surtout aux structures supplémentaires qu'on peut envisager sur les objets du type envisagé...). C'est donc de l'algèbre avec la présence constante de motivations provenant de l'intuition topologique. Si une telle théorie devait voir le jour, il lui faudrait bien un nom, je me demande si "algèbre topologique" ne serait pas le plus adéquat ("algèbre homologique non commutative" ne peut guère aller à la longue, pour des raisons évidentes). Ce qi est aujourd'hui parfois désigné sous ce [ ] n'est guère qu'un bric à brac de notions (telles que anneau topologique, corps topologique, groupe topologique etc) qui ne forment guère un corps de doctrine cohérent - il ne s'impose donc pas que cela accapare un nom qui servirait mieux d'autres usages. (Comparer le nouvel usage du terme “géométrie analytique” introduit par Serre, et qui ne semble guère avoir rencontré de résistance.)

Re-salut, et au plaisir de te lire

Villecun le 17.2.1975

Cher Breen,

16 Encore un “afterthought” à une lettre-fleuve sur le yoga homotopique. Comme tu sais sans doute, à un topos X on associe canoniquement un pro-ensemble simplicial, donc un “pro-type d’homotopie” en un sens convenable. Dans le cas où X est "localement homotopiquement trivial", le pro-objet associé est essentiellement constant en tant que pro-objet dans la catégorie homotopique, donc X définit un objet de la catégorie homotopique usuelle, qui est son "type d’homotopie". De même, si X est “localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$”, il définit un type d’homotopie ordinaire “tronqué en dim $\leq n$” - construction familière pour $i = 0$ ou 1, même à des gens comme moi qui ne connaissent guère l’homotopie ! *Lettre à L. Breen, 17.2.1975.*

Ces constructions sont fonctorielles en X. D’ailleurs, si $f : X \to Y$ est un morphisme de topos, Artin-Mazur ont donné une condition nécéssaire et suffisante *cohomologique* pour que ce soit une "équivalence d’homotopie en dim $\leq n$” : c’est que $\mathrm{H}^i(Y, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(X, f^*(F))$ pour $i \leq n$, et tout faisceau de groupes *localement constant* F sur Y, en se restreignant de plus à $i \leq 1$ dans le cas non commutatif. Ce critère, en termes de n-gerbes “localement constantes” F sur Y, s’interprète par la condition que $F(Y) \to F(X)$ est une n-équivalence pour tout tel F et $i \leq n$. Il est certainement vrai que ceci équivaut encore au critère suivant

(A) Pour tout n-champ “localement contant” F sur Y, le n-foncteur $F(Y) \to f^*(F)(X)$ est une n-équivalence;

ou encore à

(B) Le n-foncteur $F \to f^*(F)$ allant de la n-catégorie des $(n-1)$-champs localement constants sur Y dans celle des $(n-1)$-champs localement constants sur X, est une n-équivalence.

En d’autres termes, les constructions sur un topos X qu’on peut faire en termes de $(n-1)$-champs *localement* constants ne dépendent que de son "(pro)-type d’homotopie n-tronquée", et le définissent. Dans le cas où X est localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, donc définit un type d’homotopie n-tronqué ordinaire, on peut interpréter ce dernier comme un n-groupoïde C_n, (défini à n-équivalence près). En termes de C_n, les $(n-1)$-champs localement constants sur X doivent s’identifier aux n-foncteurs de la n-catégorie C_n dans la n-catégorie $(n-1)-(\mathrm{Cat})$ de toutes les $(n-1)$-catégories. Dans le cas $n = 1$ ceci n’est autre que la théorie de Poincaré de la classification des revêtements de X en termes du “groupoïde fondamental” C_1 de X. Par extension, C_n mérite le nom de *n-groupoïde fondamental de X*, que je propose de noter $\Pi_n(X)$. Sa connaissance induite donc celle des $\pi_i(X)$ $(0 \geq i \geq n)$ et des invariants de Postnikoff de tous les ordres jusqu’à $\mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n-1}(X), \pi_n)$.

Dans le cas d’un topos X quelconque, pas nécessairement localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, on espère pouvoir interpréter les $(n-1)$-champs localement constants sur X en termes d’un $\Pi_n(X)$ qui sera un pro-n-groupoïde. Ça a été fait en tous cas, plus ou moins, pour $n = 1$ (du moins pour X connexe); le cas où X est le topos étale d’un schéma est traité in extenso dans SGA 3, à propos de la classification des tores sur une base quelconque. [SGA3]

Dans le cas $n = 1$, on sait qu'on récupère (à équivalence près) le 1-groupoïde C_1 à partir de la 1-catégorie $\mathbf{Hom}(C_1, \mathrm{Ens})$ de ces foncteurs dans Ens $= 0-(\mathrm{Cat})$ (i.e. des "systèmes locaux" sur C_1 qui est un topos, dit "multigaloisien") comme la catégorie des "foncteurs fibres" sur le dit topos, i.e. la catégorie opposée à la catégorie des points de ce topos (lequel n'est autre que le *topos classifiant* de C_1). Pour préciser pour n quelconque la façon dont le n-type d'homotopie d'un topos X (supposé localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, pour simplifier), i.e. son n-groupoïde fondamental C_n, s'exprime en termes de la n-catégorie des "$(n-1)$-systèmes locaux sur X" i.e. des $(n-1)$-champs localement constants sur X, et par là élucider complètement l'énoncé hypothétique (B) ci-dessus, il faudrait donc expliciter comment un n-groupoïde C_n se récupère, à n-équivalence près, par la connaissance de la n-catégorie $C_n = n-\mathbf{Hom}(C_n, (n-1)-(\mathrm{Cat}))$ des $(n-1)$-systèmes locaux sur C_n. On aurait envie de dire que C_n est la catégorie des "n-foncteurs fibres" sur C_n, i.e. des n-foncteurs $C_n \to (n-1)-(\mathrm{Cat})$ ayant certaines propriétés d'exactitude (pour $n = 1$, c'était la condition d'être les foncteurs image inverse pour un morphisme de topos, i.e. de commuter aux $\varprojlim$ quelconques et aux $\varinjlim$ finies ...) C'est ici que se matérialise la peur, exprimée dans ma précédente lettre, qu'on finisse par tomber sur la notion de n-topos et morphismes de tels ! C_n serait un topos (appelé le "n-topos classifiant du n-groupoïde C_n), $(n-1)-$ (Cat) serait le n-topos "ponctuel" type, et C_n d'interprète modulo n-équivalence comme la n-catégorie des "n-points" du n-topos classifiant C_n. Brr !

Si on espère encore pouvoir définir un bon vieux 1-topos classifiant pour un n-groupoïde C_n, comme solution d'un problème universel, je ne vois guère que le problème universel suivant : pour tout topos T, considérons $\mathbf{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$. C'est une n-catégorie, mais prenons en la 1-catégorie tronquée $\tau_1 \mathbf{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$. Pour T variable, on voudrait 2-représenter le 2-foncteur contravariant $\mathrm{Top}^\circ \to 1-(\mathrm{Cat})$ par un topos classifiant $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{C_n}$, donc trouver un $\Pi_n(\mathrm{B}) \xrightarrow{\phi} C_n$ 2-universel en le sens que pour tout T, le foncteur

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{Top}}(T, \mathrm{B}) \xrightarrow{u \mapsto \phi \circ \Pi_n(u)} \tau_1 \mathbf{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$$

soit une équivalence. Pour $n = 1$ on sait que le topos classifiant de C_1 au sens usuel fait l'affaire, mais pour $n = 2$ déjà, je doute que ce problème universel ait une solution. C'est peut-être lié au fait que le "théorème de Van Kampen", qu'on peut exprimer en disant que le 2-foncteur $T \to \Pi_1(T)$ des topos localement 1-connexes vers les groupoïdes transforme (à 1-équivalence près) sommes amalgamées (et plus généralement commute aux 2-limites inductives), n'est sans doute plus vrai pour le $\Pi_2(T)$. Ainsi, si T est un espace topologique réunion de deux fermés T_1 et T_2, il n'est sans doute plus vrai que la donnée d'un 1-champ localement constant sur T "équivaut à" la donnée d'un 1-champ localement constant F_i sur T_i $(i = 1, 2)$ et d'une équivalence entre les restrictions de F_1 et F_2 à $T_1 \cup T_2$ (alors que l'énoncé analogue en termes de 0-champs, i.e. de revêtements, est évidemment correct).

L'énoncé (B) plus haut rend clair comment expliciter la cohomologie d'un n-groupoïde C_n. Si $C_n = \Pi_n(X)$, et si F est un $(n-1)$-champ localement constant sur X, e^X_{n-1} est le $(n-1)$-champ "final", on a une

$(n-1)$-équivalence de $(n-1)$-catégories

$$\Gamma_X(F) = F(X) \simeq \mathbf{Hom}(e^X_{n-1}, F)$$

qui montre que le foncteur Γ_X “intégration sur X” sur les $(n-1)$-champs localement constants, qui inclut la cohomologie (non commutative) localement constante de X en dim $\leq n-1$, s'interprète en termes de “$(n-1)$-systèmes locaux” sur le groupoïde fondamental comme un $\mathbf{Hom}(e^{C_n}_{n-1}, F)$ où maintenant F est interprété comme un n-foncteur

$$C_n \xrightarrow{F} (n-1) - (\mathrm{Cat})$$

et $e^{C_n}_{n-1}$ est le n-foncteur constant sur C_n, de valeur la $(n-1)$-catégorie finale.

Pour interpréter ceci en notation cohomologique, il faut que j'ajoute, comme “remords” à la lettre précédente, l'interprétation explicite de la cohomologie non commutative sur un topos X, en termes d'intégration de n-champs sur X. Soit F un n-champ de Picard strict sur X, il est donc défini par un complexe de cochaines L' sur X

$$0 \to L^0 \to L^1 \to L^2 \to \ldots \to L^n \to 0$$

concentré en degrés $0 \leq i \leq n$ (défini à isomorphisme unique près dans la catégorie dérivée de $(\mathrm{Ab})(X)$). Ceci dit, les $\mathrm{H}^i(X, L')$ (hypercohomologie) *pour* $0 \leq i \leq n$ s'interprètent comme $\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{n-i}\Gamma_X(F)$.

Si on s'intéresse à tous les H^i (pas seulement pour $i \leq n$) on doit, pour tout $N \geq n$, regarder L' comme un complexe concentré en degrés $0 \leq i \leq N$ (en prolongeant L' par des 0 à droite).Le N-champ de Picard strict correspondant n'est plus F mais $C^{N-n}F$, où C est le foncteur “espace classifiant”, s'interprétant sur les n-catégories de Picard strictes comme l'opération consistant à “translater” les i-objets en des $(i+1)$-objets, et à rajouter un unique 0-objet; il se prolonge aux n-champs de Picard “de façon évidente”, on espère, de façon à commuter aux opérations d'image inverse de n-champs. On aura donc pour $i \leq N$

$$\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad i \leq N.$$

Ceci posé, il s'impose, pour tout n-champ de Picard strict F sur X, de poser

$$\boxed{\mathrm{H}^i(X, F) = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad \text{si} \quad N \geq i, n}$$

ce qui ne dépend pas du choix de l'entier $N \geq Sup(i, n)$ [**NB** On a un morphisme canonique de $(n-1)$-groupoïdes,

$$C(\Gamma_X F) \to \Gamma_X(CF),$$

comme le montrent les constructions évidentes en termes de complexes de cochaines, et on voit de même que celui-ci induit des isomorphismes pour les π_i pour $1 \leq i \leq n+1$.]

NB On voit en passant que pour un n-champ en groupoïdes F sur X, si on se borne à vouloir définir les $\mathrm{H}^i(X, F)$ pour $0 \leq i \leq n$, on n'a pas besoin sur F d'une structure de Picard, car il suffit de poser

$$\mathrm{H}^i(X, F) = \pi_{n-i}(\Gamma_X(F)) \quad 0 \leq i \leq n.$$

Si d'autre part F est un n-Gr-champ (i.e. muni d'une loi de composition $F \times F \to F$ ayant les propriétés formelles d'une loi de groupe) le $(n+1)$-"champ classifiant" est défini, et on peut définir $\mathrm{H}^i(X,F)$ pour $i \leq n+1$ par

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n+1-i}(\Gamma_X(CF))$$

en particulier

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0(\Gamma_X(CF)) = \text{ sections de } CF \text{ à équivalence près.}$$

Mais on ne peut former $CCF = C^2F$ et définir $\mathrm{H}^{n+2}(X,F)$, semble-t-il *que* si CF est lui-même un Gr-$(n+1)$-champ, ce qui ne sera sans doute le cas que si F est un n-champ de Picard strict...

Venons en maintenant au cas où F est un n-champ *localement constant* sur X, donc défini par un $(n+1)$-foncteur

$$C_{n+1} \xrightarrow{F} n-(\mathrm{Cat}). \text{ de Picard strictes.}$$

Alors, posant pour $0 \leq i \leq n$

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) = \pi_{n-1}(\mathbf{Hom}(e_n^{C_{n+1}},F)),$$

"on a fait ce qu'il fallait" pour que l'on ait un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) \simeq \mathrm{H}^i(X,F),$$

(valable en fait sans structure de Picard sur F...). Il s'impose, pour tout ∞-groupoïde C et tout $(n+1)$-foncteur

$$C \xrightarrow{F} n-(\mathrm{Cat}). \text{ de Picard strictes.}$$

de définir les $\mathrm{H}^i(C,F)$, pour tout i, par

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{N-i}\,\mathbf{Hom}(e_N^C, C^{N-n}F)$$

où on choisit $N \geq Sup(i,n)$. Si F n'a qu'une Gr-structure (pas nécessairement de Picard) on peut définir encore les $\mathrm{H}^i(C,F)$ pour $i \leq n+1$ par

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{n+1-i}\,\mathbf{Hom}(e_{n+1}^C, CF).$$

Dans le cas $C = C_{n+1} = \Pi_{n+1}(X)$, il doit être vrai encore (en vertu de (A) plus haut), que cet ensemble est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0\Gamma_X(CF)$ (c'est vrai et bien facile pour $n=0$). Décrire la flèche canonique entre les deux membres de

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) \simeq \mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n+1}X,F) \quad ?$$

Si on veut réexpliciter (A) et (B), en termes du yoga (C), on arrive à la situation suivante:

On a un $(n+1)$-foncteur entre $(n+1)$-groupoïdes

$$f_{n+1} : C_{n+1} \to D_{n+1}$$

induisant par troncature un n-foncteur

$$f_n : C_n \to D_n$$

On doit avoir alors:

(A') f_n est une n-équivalence si et seule si le n-foncteur $\phi \to \phi \circ f_n$

$$f_n^* : \mathbf{Hom}(D_n, (n-1)-(\mathrm{Cat})) \to \mathbf{Hom}(C_n, (n-1)-(\mathrm{Cat}))$$

allant des $(n-1)$.systèmes locaux sur D_n (ou D_{n+1}, c'est pareil) vers les $(n-1)$-systèmes locaux sur C_n, est une n-équivalence.

(B') f_n est une n-équivalence si et seule si pour tout n-système local F sur D_{n+1},

$$F : D_{n+1} \to n-(\mathrm{Cat}),$$

le n-foncteur induit par f_{n+1}

$$\underbrace{\mathbf{Hom}(e_n^{D_{n+1}}, F)}_{\Gamma_{D_{n+1}(F)}} \to \underbrace{\mathbf{Hom}(e_n^{D_{n+1}}, f_{n+1}^* F)}_{\Gamma_{C_{n+1}(F)}}$$

est une n-équivalence.

La construction de la cohomologie d'un topos en termes d'intégration des champs ne fait aucun appel à la notion de complexe de faisceaux abéliens, encore moins à la technique des résolutions injectives. On a l'impression que dans son esprit, via la définition (qui reste à expliciter !) des n-champs, elle s'apparenterait plutôt aux calculs "Cechistes" en termes d'hyperrecouvrements. Or ces derniers se décrivent à l'aide d'une petite dose d'algèbre semi-simpliciale. Si oui, cela ferait essentiellement trois approches distinctes pour construire la cohomologie d'un topos :

a) point de vue des complexes de faisceaux, des résolutions injectives, des catégories dérivées (*algèbre homologique commutative*);

b) point de vue Cechiste ou semi-simplicial (*algèbre homotopique*);

c) point de vue des n-champs (algèbre catégorique, ou *algèbre homologique non-commutative*).

Dans a) on "résoud" les coefficients, dans b) on résoud l'espace (ou topos) de base, et dans c) en apparence on ne résoud ni l'un ni l'autre.

Bien cordialement,

Villecun 17.2.1975

Dear Breen,

Here is an afterthought to "une lettre-fleuve" on the yoga of homotopy. As you doubtless know, to a topos X one associates canonically a pro-simplicial set, and so in a convenient sense a "pro-homotopy type". When X is "locally homotopically trivial", the associated pro-object is essentially constant as a pro-object in the homotopy category, and so X defines, in the usual homotopy category, an object which is the "homotopy type". Similarly, if X is "locally homotopically trivial in dim $\leq n$", it defines an ordinary homotopy type, but "truncated in dim $\leq n$" - this is a familiar construction for $n = 0$ or 1, even among those like me who know hardly any homotopy theory!

These constructions are functorial in X. Moreover, if $f : X \to Y$ is a morphism of topoi, Artin-Mazur have given a *cohomological* condition which is necessary and sufficient for f to be a "homotopy equivalence in dim $\leq n$": it is that $\mathrm{H}^i(Y,F)\mathrm{H}^i(X,f^*(F))$ for $i \leq n$, and all *locally constant* sheaves of groups F on Y, allowing for $i \leq 1$ that F be non-commutative. This criterion, in terms of "locally constant" n-gerbes F on Y, can be interpreted as the condition that $F(Y) \to F(X)$ is an n-equivalence for all such F and $i \leq n$. It is certainly true that this is equivalent to the following criterion:

(A) For every "locally constant" n-stack F on Y, the n-functor $F(Y) \to f^*(F)(X)$ is an n-equivalence;

or again

(B) The n-functor $F \to f^*(F)$ which sends the n-category of locally constant $(n-1)$-stacks in Y to that of locally constant $(n-1)$-stacks on X, is an n-equivalence.

In other terms, the construction on a topos X which one can make in terms of $(n-1)$-stacks which are *locally* constant, depend only on its "n-truncated pro-homotopy type", and define it. In the case where X is locally homotopically trivial in dim $\leq n$, and so defines a n-truncated ordinary homotopy type, one can interpret these last as an n-groupoid C_n, (defined up to n-equivalence). In terms of these

(C) The $(n-1)$-stacks on X should be able to be identified with the n-functors from the category C_n n-category $(n-1)-(\mathrm{Cat})$ of all $(n-1)$-categories.

In the case $n = 1$, this is nothing other than the Poincaré theory of the classification of coverings of X in terms of the "fundamental groupoid" C_1 of X. By extension, C_n merits the name *fundamental n-groupoid* of X, which I propose to write $\Pi_n(X)$. Knowledge of this includes knowledge of the $\pi_i(X)$ $(0 \geq i \geq n)$ and the Postnikoff invariants of all orders up to $\mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n-1}(X), \pi_n)$.

In the case of an arbitrary topos X, not necessarily locally homotopically trivial in dim $\leq n$, one hopes to be able to interpret the $(n-1)$-stacks which are locally constant on X in terms of a $\Pi_n(X)$ which will be a pro-n-groupoid. This has been done, more or less, for $n = 1$ (at least for connected X); the case where X is the étale topos of a scheme is treated extensively in SGA 3, in relation to the classification of tori on an arbitrary base.

In the case $n = 1$, one knows that one can recover (up to equivalence) the 1-groupoid C_1 from the 1-category $\mathbf{Hom}(C_1,)$ of the functors into

$= 0 - (\mathrm{Cat})$ (i.e. the "local systems" on C_1 which is a topos, called "multigaloisian") - like the category of "fibred functors" on the above topos, i.e. the opposite category to the category of points of this topos (which is none other than the *classifying topos* of C_1). To make precise for arbitrary n the way in which the homotopy n-type of a topos X (supposed for simplicity to be locally homotopically trivial in dim $\leq n$) i.e. its fundamental n-groupoid C_n, can be expressed in terms of the n-category of "local $(n-1)$-systems on X" i.e. of the locally constant $(n-1)$-stacks on X, and to elucidate completely the hypothetical statement (B) above, it is necessary to make explicit how an n-groupoid C_n can be recovered, up n-equivalence, from the knowledge of the n-category

$$\underline{C}_n = n - \mathbf{Hom}(C_n, (n-1) - (\mathrm{Cat}))$$

of local $(n-1)$-systems on C_n. One would like to say that C_n is the category of "fibred n-functors" on $\underline{C}_n$, i.e. of n-functors $\underline{C}_n \to (n-1) - (\mathrm{Cat})$ having certain exactness properties (for $n = 1$, this is the condition of being the inverse image functor for a morphism of topoi, i.e. to commute with arbitrary $\varprojlim$ and with finite $\varinjlim$...). It is this which makes real the fear, expressed in my preceding letter, that one ends by falling upon the notion of n-topos and of morphisms of these! $\underline{C}_n$ will be an n-topos, (called the "classifying n-topos" of the n-groupoid C_n), $(n-1) - (\mathrm{Cat})$ will be the n-topos of points, and C_n will be interpreted modulo n-equivalence as the n-category of "n-points" of the classifying n-topos $\underline{C}_n$. Brr !

If one hopes to be able to define a good old classifying 1-topos for an n-groupoid C_n, as solution of a universal problem, I can see only how to recover the following universal problem: for every topos T, consider $\mathbf{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$. This is an n-category, but take from it the truncated 1-category $\tau_1 \mathbf{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$. For variable T, one wants to 2-represent the contravariant 2-functor $\mathrm{Top}^\circ \to 1 - (\mathrm{Cat})$ by a classifying topos $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{C_n}$, and then to find a 2-universal $\Pi_n(\mathrm{B})\phi C_n$ in the sense that for all T, the functor

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{Top}}(T, \mathrm{B})u \mapsto \phi \circ \Pi_n(u)\tau_1 \mathbf{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$$

is an equivalence. For $n = 1$ one knows that the usual classifying topos of C_1 does the job, but for $n = 2$ already, I doubt that this universal problem has a solution. This is perhaps related to the fact that the "Van Kampen Theorem", which one can express by saying that the 2-functor $T \to \Pi_1(T)$ of locally 1-connected topoi to groupoids transforms (up to 1-equivalence) amalgamated sums to amalgamated sums (and more generally commutes with inductive 2-limits), is doubtless no longer true for $\Pi_2(T)$. Thus, if T is a topological space which is the union of two closed sets, T_1 and T_2, it is doubtless not true that giving a locally constant 1-stack on T " is equivalent to" giving a locally constant 1-stack F_i on T_i $(i = 1, 2)$ and an equivalence between the restrictions of F_1 and F_2 to $T_1 \cup T_2$ (while the analogous statement in terms of 0-stacks, i.e. for coverings, is evidently correct).

The statement (B) above makes it clear how to give explicitly the cohomology of an n-groupoid C_n. If $C_n = \Pi_n(X)$, and if F is a locally constant $(n-1)$-stack on X, and e^X_{n-1} is the "final" $(n-1)$-stack, one has an $(n-1)$-equivalence of $(n-1)$-categories

$$\Gamma_X(F) = F(X)\,\mathrm{Hom}(e^X_{n-1}, F)$$

which shows that the functor Γ_X "integration on X" for locally constant $(n-1)$-stacks, which includes the (non-commutative) locally constant cohomology of X in dim $\leq n-1$, can be interpreted in terms of "local $(n-1)$-systems" on the fundamental groupoid as an $\mathbf{Hom}(e_{n-1}^{C_n}, F)$ where now F is interpreted as an n-functor

$$C_n F(n-1) - (\mathrm{Cat})$$

and $e_{n-1}^{C_n}$ is the constant n-functor on C_n, with value the final $(n-1)$-category.

To interpret this in cohomology notation, it is necessary for me to add, as "apology" to the preceding letter, the explicit interpretation of the non-commutative cohomology on a topos X, in terms of integration of n-stacks on X. If F is a strict Picard n-stack on X, then it is defined by a complex L° on X

$$0 \to L^0 \to L^1 \to L^2 \to \ldots \to L^n \to 0$$

concentrated in degrees $0 \leq i \leq n$ (defined uniquely up to isomorphism in the derived category of (Ab)(X)). That said, the $\mathrm{H}^i(X, L')$ (hypercohomology) for $0 \leq i \leq n$ can be interpreted as $\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{n-i}\Gamma_X(F)$. If one is interested in all the H^i (not just for $i \leq n$) one must, for all $N \geq n$, regard L° as a complex concentrated in degrees $0 \leq i \leq N$ by prolongation of L° by 0 to the right). The corresponding strict Picard n-stack is no longer F but $\underline{C}^{N-n}F$, where $\underline{C}$ is the "classfying space" functor, interpreted on strict Picard n-categories as the operation consisting of "translating" the i-objects to $(i+1)$-objects, and adjoining a unique 0-object; this extends one hopes, in "an obvious way", to n-stacks, so as to commute with the operation of taking the inverse image of an n-stack. One has then for $i \leq N$

$$\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad i \leq N.$$

Given this, it is necessary to put, for all strict Picard n-stacks F on X,

$$\mathrm{H}^i(X, F) = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad \text{if} \quad N \geq i, n$$

which does nor depend on the choice of integer $N \geq Sup(i, n)$ [N.B. One has a canonical morphism of $(n-1)$-groupoids,

$$C(\Gamma_X F) \to \Gamma_X(CF),$$

as the obvious constructions in terms of cochains show, and one sees in the same way that this induces isomorphisms on π_i for $1 \leq i \leq n+1$.]

N.B. One sees by the way that for F and n-stack of groupoids on X, if one restricts to defining the $\mathrm{H}^i(X, F)$ for $0 \leq i \leq n$, one has no need of a Picard structure on F, as it is sufficient to put

$$\mathrm{H}^i(X, F) = \pi_{n-i}(\Gamma_X(F)) \quad 0 \leq i \leq n.$$

If on the other hand F is an n-Gr-stack (i.e. F has the structure of a composition law $F \times F \to F$ with the usual formal properties of a group) the "classifying $(n+1)$-stack" is defined, and one can define $\mathrm{H}^i(X, F)$ for $i \leq n+1$ by

$$\mathrm{H}^i(X, F) = \pi_{n+1-i}(\Gamma_X(CF))$$

in particular

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0(\Gamma_X(CF)) = \text{ equivalence classes of sections } \underline{C}F.$$

But one can form $C\underline{C}F = \underline{C}^2F$ and define $\mathrm{H}^{n+2}(X,F)$, it seems *only* if $\underline{C}F$ is itself a Gr-$(n+1)$-stack, which is without doubt the case only if F is a strict Picard n-stack...

Let us now come to the case where F is a *locally constant* n-stack on X, and so is defined by an $(n+1)$-functor

$$C_{n+1}F\text{strict Picard } n-(\mathrm{Cat}).$$

Then, putting for $0 \le i \le n$

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) = \pi_{n-1}(\mathbf{Hom}(e_n^{C_{n+1}},F)),$$

"one knows it fails", as one has a canonical isomorphism

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F)\,\mathrm{H}^i(X,F),$$

valid in effect without Picard structure on F... It is thus necessary for all i and for every ∞-groupoid C and every $(n+1)$-functor

$$CF\text{strict Picard } n-(\mathrm{Cat}),$$

to define

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{N-i}\,\mathbf{Hom}(e_N^C, C^{N-n}F)$$

where one chooses $N \ge Sup(i,n)$. If F has only a Gr-structure (not necessarily Picard) one can define the $\mathrm{H}^i(C,F)$ for $i \le n+1$ by

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{n+1-i}\,\mathbf{Hom}(e_{n+1}^C, CF).$$

In the case $C = C_{n+1} = \Pi_{n+1}(X)$, it must still be true (by virtue of (A) above), that this set is canonically isomorphic to $\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0\Gamma_X(CF)$ (this is true and very easy for $n = 0$). Can one describe the arrow between the two sides of

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F)\,\mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n+1}X,F) \quad ?$$

If one wishes to make (A) and (B) explicit again, in terms of the yoga (C), one comes to the following situation:

One has an $(n+1)$-functor between $(n+1)$-groupoids

$$f_{n+1} : C_{n+1} \to D_{n+1}$$

which induces by truncation an n-functor

$$f_n : C_n \to D_n$$

One must than have:

(A') f_n is an n-equivalence if and only if the n-functor

$$f_n^* : \mathbf{Hom}(D_n,(n-1)-(\mathrm{Cat})) \to \mathbf{Hom}(C_n,(n-1)-(\mathrm{Cat}))$$

which sends the local $(n-1)$-systems on D_n (or, equally, on D_{n+1}) to the local $(n-1)$-systems on C_n, is an n-equivalence.

(B') f_n is an n-equivalence if and only if for every local n-system F on D_{n+1},

$$F : D_{n+1} \to n-(\mathrm{Cat}),$$

the n-functor induced by f_{n+1}

$$\underbrace{\mathbf{Hom}(e_n^{D_{n+1}}, F)}_{\Gamma_{D_{n+1}(F)}} \to \underbrace{\mathbf{Hom}(e_n^{D_{n+1}}, f_{n+1}^* F)}_{\Gamma_{C_{n+1}(F)}}$$

is an n-equivalence.

The construction of the cohomology of a topos in terms of integration of stacks makes no appeal at all to complexes of abelian sheaves and still less to the technique of injective resolutions. One has the impression that in this spirit, *via* the definition (which remains to be made explicit!) of n-stacks, it is all related above all to the "Cechist" calculations in terms of hypercoverings. Now these last are written with the help of a small dose of semi-simplicial algebra. I do not know if a theory of stacks and of operations on them can be written *without* ever using semi-simplicial algebra. If yes, there would be essentially three distinct approaches for constructing the cohomology of a topos:

a) viewpoint of complexes of sheaves, injective resolutions, derived categories (*commutative homological algebra*)
b) viewpoint Cechist or semi-simplicial (*homotopical algebra*)
c) viewpoint of n-stacks (categorical algebra, or *non-commutative homological algebra*).

In (a) one "resolves" the coefficients, in (b) one resolves the base space (or topos), and in (c) it appears one resolves neither the one nor the other.

Very cordially,

Villecun 17/19.7.1975

Dear Larry,

17 I am happy to finish by receiving an echo to my long letter and even a beginning to a constructive approach to a theory of the type I envisaged. The construction which you propose for the notion of a non-strict n-category, and of the nerve of the functor, has certainly the merit of existing, and of being a first precise approach, but otherwise can be subject to some evident criticism: it is very technical, unintuitive (yet at the level of $1-(\mathrm{Cat})$, etc, and even of $2-(\mathrm{Cat})$, everything is so clear "you just follow your nose..."). And finally the absence of a definition of a functor sending (semi-)simplicial sets to n-groupoids. This functor correspond to a geometric intuition so clear that a theory which does not include it seems to me kind of a joke! Perhaps in trying to write down (like a sort of list of Christmas presents!) in a complete and explicit enough way the notions which one would like to have at ones disposal, and the relations (functor, equivalence, etc.) which should link them, one would arrive finally at a kind of axiomatic description sufficiently complete which should either give the key to a explicit *ad hoc* construction, or should permit at least to enunciate and prove a theorem of existence and uniqueness* for a theory of the required type.

Letter to L. Breen, 17/19.7.1975.

Otherwise, not having understood the idea of Segal in your last letter (which I have generously sent to Illusie...), I do not see how you define the Picard n-categories - but this matters little. As far as "strict" Picard n-categories are concerned, all I ask of them is that they finally form an $(n+1)$-category $(n+1)$-equivalent to that of chain complexes of length n. Agreed? I thank you for having rectified in my mind a big blunder, due to my great ignorance of algebraic topology and homotopy - I was in fact of the impression that H-spaces satisfying conditions of associativity and commutativity strict enough (say equivalent to an $\Omega^i X$ with i arbitrarily large) correspond to commutative topological groups (inspired by several analogies...). Thus I am entirely in agreement with your observations on p.5.

On the other hand, I am still intrigued by the following question: is there an analogue of the "tapis" of Dold-Puppe† for semi-simplicial groups (*not necessarily commutative*) and what form should it take? To tell the truth I consider the yoga

$$(*) \qquad \text{simplicial sets} \longleftrightarrow \infty-\text{groupoids}$$

as being essentially the ultimate "set theoretic" version of Dold-Puppe, which I would deduce from (*) by making explicit solely the fact that the abelian groups in $\infty-(\mathrm{Cat})$ are "nothing else" than the chain complexes in (Ab). One should therefore first determine what should be the groups in $\infty-(\mathrm{Cat})$. I can tell you what these are in $1-(\mathrm{Cat})$. this will be discussed at length in the book of Mme. Sinh, I think in the chapter "*strict* Gr-categories" (i.e. the isomorphisms of associativity, for unity and inverse $XX^{-1} \simeq 1$ are *identities*). One can make explicit for example how (*via* the fact that a Gr-category is Gr-equivalent to a strict Gr-category) the calculation with the Gr-categories reduces to a very algebraic calculation with the *strict* Gr-category, by a kind of "calculus of fractions" (by choice, left or right) of the type which is used in giving the construction of derived categories. In any case, here is the

[Sinh (1975)]

*As was seen in section 9, "uniqueness" here has to b understood in a considerably wider sense than I expected, when writing this letter to Larry Breen. It now appears that the whole theory of stacks of groupoids will depend on the choice of a "coherator" $\mathbb{C}$, as seen in section 13.

†Tim Porter pointed out to me that "Dold-Puppe" is an inaccuracy name for this basic theorem, which should be called *Dold-Kan theorem.*

explicit formulation of the structures (groups in $1-(\mathrm{Cat})$) in terms of the theory of groups (1-categories in Gr[‡]). The structure is described by a quadruplet (L_1, L_0, d, θ) with

$$L_1 \xrightarrow{d} L_0$$

a homomorphism of ordinary groups,

$$\theta : L_0 \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Gr}}(L_1)$$

an operation of L_0 on L_1, with the following two axioms:

(a) d commutes with the operation of L_0, when L_0 acts on L_1 via θ and on itself by inner automorphisms:

$$d(\theta(x_0)x_1) = \mathrm{int}(x_0)d(x_1)$$

(b) $\theta(d()x_1) = \mathrm{int}(x_1)$.

These properties imply that $\mathrm{Im} d$ is normal in L_0 (hence $\mathrm{Coker}\, d = \pi_0$ is defined) and $\pi_1 = \mathrm{Ker}\, d$ is central in L_1, and finally that L_0 operates on L_1 leaving π_1 invariant, and it operates *via* π_0. The principal cohomological invariant of this situation is evidently the Postnikoff-Sinh invariant

$$\alpha \in \mathrm{H}^3(\pi_0, \pi_1).$$

I have met these animals - without even looking for them - in many situations, which I will not list now (I came across them recently *a propos* the classification of "ordinary" formal groups over a perfect field, in terms of *affine* algebraic groups, and *commutative* formal groups, related by the strict Gr-structures of this type (except that one has to use this formalism in an arbitrary topos (not merely in (Sets))) - to make explicit the yoga that "the transcendent character of a formal group is concentrated essentially in the commutative formal groups", discovered it seems by Dieudonné...). The question which I wish to raise is the generalisation to groups in $n-(\mathrm{Cat})$, where I expect to find a non-commutative chain complex

$$L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_1 \to L_0 \to 1$$

with supplementary structures doubtless of the type of θ, but what are they? It is understood that the topological significance of such structures is that they express exactly the "truncated homotopy type in dim $\leq n$" of topological groups, or equivalently the homotopy type in dim $\leq n+1$ of pointed connected topological spaces...). Have you candidates to propose ?

* * *

Your reflections on biduality and homology, however formal, tie in with a crowd of developments, of which only some exists at present, and others would demand considerable work still. Here are the reminiscences which your naive questions bring to mind: (A) The formalism of the $\mathrm{Rf}_!$, $\mathrm{Rf}^!$ (combined with Rf_*, Lf^*, $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ and RHom, "the six operations") carries implicitly in itself the definition of homology and the essential identity between homology and cohomology. One now has this formalism for quasi-coherent sheaves on schemes - seminar Hartshorne (Springer L.N.

[‡] AS was pointed out to me by Ronnie Brown, this structure was already well-known to J.H.C. Whitehead, under the name of "crossed module", and extensive use and extensive generalizations of this notion (in quite different directions from those I was having in mind, in terms of Gr-stacks over an arbitrary topos) have been made by him and others. With respect to the question on next page, of generalizing this notion of "non-commutative chain complex" from length one to length two, Ronnie says there is a work in preparation by D. Conduché "Modules croisés généralisés de longueur 2".

20) - for the topological spaces and arbitrary sheaves of coefficients - Verdier, *exposé* Bourbaki (SNLM 300) - and for the étale cohomology of schemes for "discrete" coefficients ("ℓ-adic" or torsion) prime to the residual characteristic (SGA 5), finally, for coherent sheaves on analytic spaces (Verdier-Ruget). (The formalism remains to be developed in the crystalline context, and in the characteristic 0 in the context of stratified modules with singularities, à la Deligne, with perhaps - over the field **C** - the introduction of additional Hodge structures, finally in the context of motives; I am convinced that it exists about anywhere - maybe, wherever there is a formalism of a cohomological nature.)

Working in étale cohomology on a separated scheme of finite type over a field k, say, with a ring of coefficients Λ of torsion prime to the characteristic, the complex of sheaves $f^!(\Lambda_e)$ (where $\hat{f} : X \to \operatorname{Spec} k = e$) plays the role of *complex of singular chains on X with coefficients in* Λ, and $\mathrm{Rf}_!\,(f^!\Lambda_e)$ plays the role of a *homology* $\mathrm{H}_*(X/e)$, *vis a vis* of course, of coefficients on e which are complexes of Λ-modules. You can easily justify this assertion with the help of the "global duality theorems", by one or two tricks which I spare you here.

REMARKS.

(1) There is no need to truncation, it works in all dimensions.

(2) This is related (at least as far as the philosophy is concerned) to he fact that for the various types of coefficients (under conditions of "constructibility") one has a theorem of "biduality", at least if one allows resolution of singularities (but Deligne has told me I believe that he knows a proof without that), with values in a "dualizing complex" K_e (on e), K_X (on X). If for example Λ is "self-dualising" (or Gorenstein) for example $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, one can take $K_e = \Lambda$, therefore the dualising complex $K_X = f^!(K_e)$ is nothing else than the "complex of singular chains with coefficients in Λ.

(3) One can do the same thing for coefficients such as $\mathbf{Z}_\ell$ (Jouanolou, thesis non published, I fear!) [Jouanolou (1969)]

(4) This works also for $f : X \to S$ finitely presented separated if f has the properties of "cohomological local triviality" (properties "local upstairs") for example f *smooth*; one finds that $\mathrm{H}_*(X/S) = \mathrm{Rf}_!\, f^!(\Lambda_S)$.

* * *

(B) Artin-Mazur have studied in a spirit close to yours the *autoduality* of the Jacobian of a relative curve X/S. It is necessary to ask them for precise results, perhaps it works say if X/S is proper and flat or relative dimension 1 - in any case it is OK on a discrete valuation ring with smooth *generic* fibre. The special fibre could be very wild. (I have used their results in SGA 7 to prove, in the case of Jacobians, a duality conjecture on the group of connected components associated to the Neron models of abelian varieties dual one to another...). Towards the end of the 50's (beginning of 60's?), when the grand cohomological stuff ($f^!$, $f^!$, étale cohomology, etc.) just came out from darkness, the course given by Serre on the theory of Rosenlich and Lang on generalised jacobians and the geometric class field theory (see Serre's book) and later the "geometric" theory of *local* class field theory making use of pro-algebraic groups (see his article on this subject), made me reflect on the cohomological formulations of these and other results, which should be of a "geometric" nature, such that the "arithmetic" results over an arbitrary base field (or residue field) k (finite, for example) follow immediately by descent from the "geometric" case of base field $\overline{k}$. I exchanged letters with Serre - I don't know if I can find copies - but I recall that I sketched projects for some ambitious enough theories on generalised residues, generalised local jacobians, etc., in at least three different directions. But I have never, in spite of numerous attempts, succeeded in mobilising someone for developing one of these programmes. Here a few words on them:

* * *

(C) In the situation where X is of finite type over a *field* k, construction of a complex of generalised jacobians $J_{*X/k}$ (of length equal to $\dim X$).

This is a complex of affine commutative pro-algebraic groups on k, with the exception of J_0 if I remember well, (J_0 had as abelian part the abelian part of $\mathrm{Alb}_{X/k}$, the usual generalised jacobian). It's construction, inspired by the residual complex, passes by generalised jacobians (in an appropriate cohomological sense) of the localisation $\mathrm{Spec}_{\mathbf{O}_{X,x}}$ of X at its different point. N.B. $\mathbf{H}_O(J_*)$ was the "generalised Jacobian" of X, i.e. there existed a homeomorphism $X \to \mathbf{H}_0$, which was universal for homomorphisms of X into commutative locally proalgebraic groups. For X connected, $\mathbf{H}_O$ is an extension of $\mathbf{Z}$ by an appropriate proalgebraic group. It is possible that, at first, I restricted to the case of X smooth.

The cohomology role of this complex was that of a complex of *homology*

$$(*) \qquad \mathrm{H}^i(X, G_X) \simeq \mathrm{Ext}^i(J_{*X/k}, G)$$

but for which coefficients? I believe I took arbitrary commutative algebraic groups G but worked with the Zariski topology (malédiction !). Even in the case of discrete G, I considered the Zariskian H^i, this gives slightly stupid cohomology groups, evidently. I realised that one should work ultimately in étale cohomology, and that the construction of the $(J_i)_{X/k}$ will evidently be modified accordingly. As for the significance of the Ext^i (hypercohomology), at a moment where Serre had developed the formalism for proalgebraic groups, one was not too fearful of taking it in the category of such objects - and in the sense of a "derived category" which at that moment had never yet been explicitly defined and studied. (We have, after all, somewhat progressed since those days!). I have the impression, in view of these antique cogitations, heuristic as they were, that it should now be possible to develop at present such a theory of $J_{*X/k}$, in cohomology fppf, giving a formula (*) without limitation on the degree i of the cohomology. (N. B. But J_* evidently no longer stops in $\dim X = n$ but in dim $2n$. It is nevertheless possible that the components J_i might be of dim 0 for $i > n$).

I believe that the construction of the J_* does not commute with base change, but merely does so in the derived category sense.

* * *

(D) Let X/k be a smooth scheme (for simplicity) over a field k, separated and of finite type, or relative dimension d, and n an integer > 0. If n is prime to the characteristic and if F is a sheaf of coefficients on X which is annihilated by n, the global duality tells us that $\mathrm{Rf}_!(F)$ and $\mathrm{Rf}_*(\mathrm{RHom}(F, \mu_n^{\otimes d}))$ (μ_n = sheaf of n-th roots of unity $= \mathrm{Ker}(G_m \xrightarrow{n} G_m)$)

are dual to each other with values in $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_k$, for example $\mathrm{Rf}_!(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ and $\mathrm{Rf}_*(\mu_n^{\otimes d})$, or $\mathrm{Rf}_!(\mu_m^{\otimes})$ and $\mathrm{Rf}_*(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, are dual to each other - at least with a shift of amplitude $2d$ in dimension. (As $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ is injective over itself, this gives in fact perfect duality

$$\mathrm{R}^i f_!(F) \times \mathrm{R}^{2d-i} f_*(\mathrm{RHom}(F, \mu_n^{\otimes d})) \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.\ )$$

If now one no longer assumes n prime to he characteristic, for example n is a power of p = characteristic of $k > 0$), it seems that everything collapses: to start with, one no longer knows (for $d > 1$) by what to replace $\mu_n^{\otimes d}\ldots$ The extraordinary miracle is that for $d = 1$, i.e. X a smooth curve, everything continues to work perfectly, provided one states things with care! The first verifications are made for example with $F = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, μ_p, or α_p, with X complete - one finds it's O.K. by virtue essentially of the autoduality of the jacobian. One can make these examples more sophisticated on taking *twisted* coefficients, and X not complete - one convinces oneself this works always! Simply, it is necessary to note that here the $\mathrm{R}^i f_*(F)$, $\mathrm{R}^i f_!(F)$ have a "continuous" structure (they are essentially poalgebric groups). This corresponds to the well known phenomenon in class field theory that the structure of $\pi_{1\mathrm{ab}}$ of X, when X is not complete, is *continuous* - hence same holds for $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ say.

By the way, I point out for you that Serre once proposed (without ever writing it down, I think) a theory of duality for *commutative unipotent* algebraic groups, *modulo radical isogeny*, duality with values in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (or $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$). He found that if (when k is algebraically closed, say) G is such a group, then $G' = \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ can canonically be given a structure of quasi-algebraic group (i.e. defined modulo radical isogeny), doubtless in a unique manner provided it verifies some functorial properties, and on requiring that for $G = \mathbf{G}_a$ one finds that $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{G_a}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{G}_a$ with the usual structure. Let $\Delta G = G' = \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. One finds $G \simeq \Delta\Delta G$ i.e. Δ is an authentic autoduality! I call Δ *Serre duality*. It surely goes over to ind-progroups on an arbitrary base field (not necessarily algebraically closed) in the case $p > 0$. Moreover, for finite étale groups, it is $\mathrm{Ext}^0(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ (pontrjagin duality) which gives a perfect duality. One could screw together, in an appropriate derived category, Serre duality and Pontrjagin duality, by taking $G \mapsto \Delta G = \mathrm{RHom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$: one calls this ("cohomological") Serre duality. This will be a magnificent autoduality, if one puts oneself in a derived category where the $\mathbf{H}^i$ of the envisaged complexes are (up to passing to the limit) extensions of étale groups by connected unipotent groups. Now one gets only such complexes, by "integrating" finite coefficients F on X by $\mathrm{Rf}_!$ or Rf_*. This being said, by passing to the limit in the initial formulation (or equivalently by replacing the $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_k$, previously considered, by $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_k$ on k, and forming $f^!(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_k = (\mu_\infty)_X$) the duality formula takes the form

$$\Delta(\mathrm{Rf}_!(F)) \simeq \mathrm{Rf}_*(\mathrm{DF}[2]) \quad \text{"shift" of dimension}$$

where D is the "Cartier duality" $\mathrm{RHom}(F, \mu_\infty)$ (or $\mathrm{RHom}(F, \mathbf{G}_m)$ if one prefers?), and Δ is the Serre duality: cohomology with proper supports and with arbitrary supports are exchanged by duality, when one takes upstairs Cartier duality, and downstairs Serre duality.

The validity of the duality formula is not open to doubt - the principal work for establishing it consist certainly in a careful description of the category of coefficients with which one is working, as well on X as on k, and of the functors D and Δ. As the definition of an arrow is immediate, once the building of the machine has been accomplished, the validity of the formula should result without difficulty from the usual "dévissages" which allow one to verify the duality in the particular standard cases $F = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, μ_p, α_p on a smooth, complete X. (N.B. the case of coefficients prime to the characteristic is already known.) Let us make explicit what the formula of duality says for $\mathrm{R}^1 f_*(\mathbf{G}_X)$, where G is a finite group étale on k (the most important case being $G = (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})_k$); one recovers Serre's description of "geometric class field theory" in terms of extensions by G of a generalised jacobian of X. Thus, the duality formula can be understood as a cohomological version, considerably enriched, of geometric class field theory. When the base field k is finite, to retrieve the class field theory in the classical form, one can use "the trick of Lang" (on the relation between the "arithmetic" π_1 of a smooth, connected commutative algebraic group J on k and its $\mathrm{H}^0(k,J) = J(k)$: the $\pi_1^{\mathrm{ar}}(J)$ classifies the isogenies above J with kernel a constant group $\pi_1^{\mathrm{ar}}(J) \simeq \mathrm{H}^0(k,J)$) - i its cohomological form, which may be stated:

$$\Delta_0\, \mathrm{R}\Gamma_K(J^*) \simeq \mathrm{R}\Gamma_K(\Delta J^*[1]),$$

where Δ is Serre duality, Δ_0 Pontrjagin duality for the totally disconnected topological abelian groups (duality with values in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$), J^* a complex of algebraic ind-progroups on k. Taking account of this "Lang duality formula" and applying $\mathrm{R}\Gamma_K$ to the formula of duality for geometric class fields, one gets the "duality formula of arithmetic class field theory":

$$\Delta_0(\mathrm{H}_!(X,F)) \simeq \mathrm{H}^*(X, D(F)[3])$$

(isomorphism of totally disconnected topological groups).

Another remark: when F is not an "étale sheaf", but has a continuous structure such as α_p, one must be careful in the definition of $\mathrm{Rf}_!(F)$, for X non complete, starting from the compactification $\widetilde{X}$; thus, if F comes from an "admissible" sheaf $\widetilde{F}$ on $\widetilde{X}$, one must have an exact triangle

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Rf}_!(\hat{\widetilde{F}}) \arrow[dl] & \\ \mathrm{Rf}_!(F) \arrow[rr] & & \mathrm{R}\widetilde{f}_*(\widetilde{F}), \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

where $\hat{\widetilde{F}}$ is the *formal completion* of $\widetilde{F}$ along $\widetilde{X} - X$ (a finite number of points...). It is here, unless I am mistaken, that appears the link with local class field theory, in its cohomological version, on which I am going now to say a few words.

* * *

(E) **Local class field theory as a duality formula**

Let V be a complete discrete valuation ring with residue field k - assume either that k has been lifted to $k \subset V$ (and therefore $V \simeq k[[T]]$) or that k is perfect of characteristic $p > 0$. In order to fix ideas, and to be sure that I'm on solid ground, I consider at first on K (= the field of fractions of V) *finite* coefficients F (as on X previously) and I consider the objects $\mathrm{H}^1(K,F)$, or $\mathrm{R}\Gamma_K(F)$. The main work to be done consists in defining an adequate category of coefficients over k (perhaps the same one as in (D)) and a functor

$$F \mapsto \mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(F)$$

with values in the category of such coefficients, in such a manner that the following isomorphisms holds.

$$\mathrm{R}\Gamma_K(F) \simeq \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(F)).$$

This correspond to the intuition (acquired directly from elementary examples) according to which for k algebraically closed, say, the $\mathrm{H}^0(K,F)$, $\mathrm{H}^1(K,F)\ldots$ are endowed with a structure of k-algebraic group (ind-pro…). In this construction, the ring scheme of Witt vectors over k (introduced by Serre) and the "Greenberg functor" (associating to a V-scheme a k-prescheme) will play an essential role.

This being done, the duality formula will be formally stated as in (D) above:

$$\Delta\mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(F) \simeq \mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(\mathrm{D}F[1])$$

where D stands for Cartier duality, Δ for Serre duality. When the residue field is finite, it becomes (via "Lang's trick" mentioned previously)

$$\Delta_0\,\mathrm{R}\Gamma_k(F) \simeq \mathrm{R}\Gamma_K(\mathrm{D}F[2])$$

Δ_0 standing for Pontrjagin duality. The formula contains local geometric class field theory à la Serre, and arithmetical local class field theory in its classical form.

Remarks.

(a) If F is prime to the residue characteristic the formula is very easy to prove and well known. It may be considered a very special case of the "induction formula" for a morphism $i : s \mapsto S$, in the duality formalism:

$$i^!(D_S(F)) = D_S(i^*(F))$$

(we take here the inclusion of $p = \mathrm{Spec}(k)$ in $S = \mathrm{Spec}(V)$). Thus the work to be done concerns the p-primary coefficients, for $p =$ characteristic $k > 0$. The most subtle case is that of unequal characteristic.

(b) The functor $\mathrm{R}\Gamma$ may be obtained by composing $\mathrm{R}j_*$ (where $j : U = \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(V) = S$ is the inclusion) with a cohomological version of the "Greenberg functor".

(c) In (D) and (E), I restricted myself to finite coefficients F - it's for those that I am sure of what I assert. But it is certainly true that the duality formula is even richer, that something may still be asserted for example for F a not necessarily finite group scheme, for example an abelian scheme (with a few degenerate fibres in the case of (D)?), but I have never entirely clarified this question, even on a heuristic basis. I vaguely recall a formula which should be contained in the formalism (say if k is algebraically closed): for F an abelian scheme on K, F the dual abelian scheme and G' the pro-algebraic group over k attached "à la Greenberg" to its Néron model, then one has

$$\mathrm{H}^1(K,F) \overset{?}{\simeq} \mathrm{Ext}^1_{k-\mathrm{grp}}(G', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

(N.B. without any guarantee.) In principle, the previously mentioned duality conjecture concerning Néron models of SGA 6 should come out of the local duality machine.

(d) You may ask Deligne if he didn't dive into questions (D) and (E) lately.

(F) **Significance and limitations of the fppf topology**

Since the attempts of Serre to find a "Weil chomology" by using the cohomology of a scheme with coefficients not only discrete $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ $(n \to \infty)$ or μ_{p^n} $(n \to \infty)$, but also continuous (for example W_n, $n \to \infty$), which give good results for recovering a correct H^1, during numerous years I have come upon the impression, which I have tried in vain to make precise, that a correct "p-adic" "Weil cohomology", in the case $p > 0$ and k of characteristic p, should come, in one way or another, from the fppf cohomology, for finite coefficients for example, or more general coefficients, e.g. algebraic groups over k. The construction in (B) of the local jacobian complex was, of course, related to this hope: the homology might reveal what is hidden to us in cohomology! For some time now, one has at ones disposal the formalism of crystalline cohomology, and one knows (Berthelot) that (at least for X projective and smooth) it has the correct properties. If one uses that as a kind of standard by which to "measure" the other cohomologies, one finds that the part of the crystalline cohomology $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cris}}(X)$ which could be described in terms of fppf cohomology of X with coefficients in algebraic k-groups is a small part of H^i only; more precisely, using the very rigid supplementary structure of the H^i (modules of finite type on the ring $W(k)$ of Witt vectors) which comes from the existence of the Frobenius homomorphism (an isogeny), $\mathrm{H}^i \xrightarrow{F} \mathrm{H}^i$ (semi-linear), one finds that one keeps always in the part "of slope ≤ 1 (although the possible slopes vary between 0 and $i\ldots$). This explains why for $i = 1$ one can obtain via fppf a correct H^i, although for H^2 already all the attempts have been unfruitful. In truth, one conjectures that *all* the part of slope ≤ 1 in $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cris}}$ comes from fppf. But I have completely lost contact with these questions - people such as Mazur, Kats, Messing - and of course Deligne - should be knowledgeable as to the present states of these questions.

* * *

Your question 7 seems to indicate that there is a misunderstanding on your part on the significance of the "homotopy type" of X, for X a topos (for example the étale topos of a scheme). Doubtless you must be confusing the homotopical algebra which one can perform on X, using semi-simplicial sheaves, stacks of all kinds, the relations between these - and the other point of view according to which X (with its very rich structure of topos) virtually disappears so as to become no more than a pale element of a "homotopical category" (or pro-homotopical), deduced from the topos by a very thorough process of "localisation". At first sight, all that still remains with poor stripped X, are the π_i - and its cohomology groups with constant coefficients - or at the worst twisted constant coefficients. When one digs more into this definition of "what is left to this poor X" one falls precisely on *the locally constant n-stacks* (as an $f : X \to X'$ which is a homotopy equivalence induces a $(n+1)$-equivalence between the categories of locally constant n-stacks on X and on X') - which of course contain the abelian chain complexes of length n of sheaves with locally constant cohomology sheaves, and the hyper-cohomology of these. It is thus that one arrives at this triangle of objects which mutually determine each other

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}\text{topos (or topological space}\\ \text{or semi-simplical complex)}\\ \textit{modulo } n\text{-homotopy}\end{array} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\begin{array}{l}n\text{-groupoids}\\ \text{(up to } n\text{-equivalence)}\end{array} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \begin{array}{l}\text{“special” } n\text{-categories}\\ \text{(up to } n\text{-equivalence)}\end{array}
\end{tikzcd}$$

One says that an n-category E_n is “special” (or *n-galois*) if it is n-equivalent to the category of locally constant $(n-1)$-stacks on an appropriate topological space (or a topos), or, what should be equivalent, if it is n-equivalent to the category of n-functors $G_n \to n-(\mathrm{Cat})$, where G_n is an n-groupoid. If X, G_n, E_n correspond in this way, one calls G_n *the fundamental n-groupoid* of X, or of E_n, or says that E_n is *the category of local $(n-1)$-systems* on X, or on G_n, or that X is *the geometric realisation* of G_n or of E_n. In analogy with the familiar case $n = 1$, it should be possible to interpret G_n as the full sub-n-category of $\mathrm{Hom}_n(E_n, n-(\mathrm{Cat}))$ formed by the n-functors $E_n \to n-(\mathrm{Cat})$ satisfying certain exactness properties (one feels like saying: which commute with finite $\varprojlim$ and arbitrary $\varinjlim$); but this raises the disquieting vision of n-limits in n-categories. (N. B. The case $n = 2$ begins to become familiar to us...). It is prudent in all of this to suppose that X is “locally homotopically trivial”, which ensures the pro-simplicial set which Artin-Mazur associate to it (with the help of nerves of hyper-coverings) is essentially constant in the ordinary homotopy category - thus X defines a homotopy type in the usual sense. This is surely *not* the case for the étale topos of a scheme. In such case, the fundamental n-groupoid should be conceived as a *pro-n-groupoid* (nothing surprising in that, in view of the familiar theory of π_1), and E_n as an (ind)-n-category (the ind-structure will correspond to the exigencies of local triviality for a variable n-stack, relative to coverings more and more fine on X).

* * *

I nevertheless understand your instinctive resistance to conceive this extreme stripping of a beautiful topos X, to the point of retaining only the meagre homotopy type. Even more, I am persuaded that going to the root of this instinctive resistance, one arrives at a generalisation and deepening of the notion of “homotopy type”, and to bring new grist to the mill of the development of a good homotopical yoga. Here is what I have in mind.

Let us speak first of sheaves (of sets, or of modules, etc.) instead of stacks, for simplicity, and place ourselves in the étale topos of a scheme. The locally constant sheaves - modulo a supplementary condition of finiteness which is sufficiently anodyne - form the easiest of the *constructible* sheaves, for the definition of which they serve as models. Supposing X coherent (= quasi-coherent and quasi-separated), then the general constructible sheaves are those for which there exists a finite partition $X = \cup_{i\in I} X_i$ of X into “cells” or “strata” X_i, each locally closed and constructible, such that the restriction of F to every X_i is locally constant (also a finiteness condition...). Thus the category of constructible sheaves on X (which gives back the category of all sheaves on passing to a category of ind-objects...) may itself be thought of as an inductive limit of categories associated to finer and finer partitions on X. One can then, for such a fixed partition P, set out to study the category of sheaves (or complexes of sheaves, or stacks) which are "P-constructible" (or, more generally, which are "locally constant" on every X_i). These categories will not have truly satisfying structures unless they are stable for the usual operations - such as RHom, or $\mathrm{R}j_*j^*$ where $j : X_i \to X$ is a "cell" of the partition, etc. In fact, if X is excellent and one has resolution of singularities at ones disposal, one knows that the torsion constructible sheaves (under the proviso of being prime to the characteristic) are stable for all these operations - but not for a finite partition of X fixed once and for all. To have such a finer stability, it is necessary to make some very strict hypotheses of *"equi-singularity"* on the given stratifications of X, along the strata. I think nonetheless that a refinement of known techniques will show that X admits arbitrarily fine stratifications having these properties of equi-singularity (and with the X_i regular and connected, but this does not matter for our present purpose).

By way of example, suppose that there are just two strata, the closed one X_0, and $X_1 = X\backslash X_0$. According to Artin's devissage, giving oneself a sheaf F on X is equivalent to giving a sheaf $F_0 = i_0^*(F)$ on X_0, a sheaf $F_1(= i_1^*F)$ on X_1, and a homomorphism $F_0 \to i_0^* i_{1*}^*(F_1) = \varphi(F_1)$, where i_0, i_1 are the inclusions $X_0 \xrightarrow{i_0} X \xleftarrow{i_1} X_1$. In order that F should be P-constructible, it is necessary and sufficient that F_0 and F_1 should be locally constant (plus some accessory finiteness conditions...), on X_0 and X_1 respectively. Then (by virtue of the hypothesis of equi-singularity) the same will be true of $\varphi(F_1)$, and the category of sheaves in which we are interested can be expressed entirely in terms of the category of locally constant sheaves on X_0 and X_1, i.e. of the mere homotopy type of X_0 and X_1, except that we must make explicit the nature of the left exact functor ϕ. I think tht this should be possible, in the context of *schemes* in which I am placed (technically rather sophisticated), on introducing an "étale tubular neighbourhood" of X_0 in X_1 (which is a very interesting topos, but not associated to a scheme). But this technical construction is only a paraphrase of an extraordinary simple topological intuition, which I will make explicit, supposing, to fix the ideas, that the base field is $\mathbf{C}$ and so one may work with locally compact spaces in the usual sense. The topological idea behind the hypothesis of equi-singularity that there exists a *tubular neighbourhood* T of X_0 in X retracting onto X_0 and such that the pair (X_0, T) over X_0 should be a locally trivial bundle, i.e. that $T\backslash X_0$ is locally trivial over X_0. In fact if ∂T is the "boundary" of T, which also should be a locally trivial bundle on X_0, then T over X is the conic bundle (= bundle where fibres are cones) ($\simeq (\partial T \times I) \amalg_{\partial T} X_0$ where $I = [0,1]$, $\partial T \to \partial T \times I$ is defined by $x \mapsto (x, 1)$, and $\partial T \to X_0$ is the projection) then $\mathring{T} = T\backslash X_0 \simeq \partial T \times [0,1[$ is X_0-homotopic to ∂T. If X_0 and X_1 are non singular, then so also will be $\mathring{T}$ and ∂T, which are then topologically smooth fibrations on X_0. Moreover, putting $\widetilde{T}_1 = X_1\backslash \mathring{T}$, the inclusion $\widetilde{X}_1 \to X_1$ is a homotopy equivalence, and X

can be recovered, up to homeomorphism, from the diagram of spaces

$$\begin{tikzcd}(\overset{\circ}{T} = T\backslash X_0 \simeq)\partial T \arrow[r, "j", "\text{inclusion}"'] \arrow[d, "\text{fibration}"', "p"] & \widetilde{X}_1(\simeq X_1) \\ X_0 & \end{tikzcd}$$

as an amalgamated sum. In terms of this diagram of spaces, the above functor ϕ interprets immediately as

$$\phi(F_1) \simeq p_* j^*(\widetilde{F}_1)$$

where $F_1 \to \widetilde{F}_1$ is the restriction from X_1 to $\widetilde{X}_1$ (which is an equivalence of categories for the envisaged (locally constant) sheaves). Giving $F = (F_0, F_1, u : F_0 \to \phi F_1)$ can then also be made explicit as giving

$$F_0, \widetilde{F}_1, \widetilde{u} : p^*(F_0) \to j^*(\widetilde{F}_1)$$

where $F_0(\widetilde{F}_1)$ are locally constant sheaves on X_0 (respectively X_1). It is necessary to recall that here p is a real fibration, and j is an inclusion (in practice, for the case X_0, X_1 smooth, the inclusion of the boundary in a manifold with boundary).

If you prefer, one can also take the diagram which is less pretty (but a little more canonical)

$$\begin{tikzcd}\overset{\circ}{T} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p'"'] & X_1 \\ X_0 & \end{tikzcd}$$

coming essentially to the same thing, as it is formed from spaces homotopic to the preceding one. One can even replace X_0 by T (X_0 being a deformation retract of it) and write

$$\begin{tikzcd}\overset{\circ}{T} \arrow[r] \arrow[d, "p''"'] & X_1 \\ T & \end{tikzcd}$$

where "literally" p'' is now an inclusion, but "morally", it is a *fibration* with very pretty fibres (notably compact of finite dimension, and moreover non-singular varieties - this is much better than that which is given by the yoga of Cartan-Serre "every continuous mapping is equivalent to a fibration"...). This last diagram however has the advantage of being amenable to a purely algebraic, direct construction, in the context of schemes, once one has developed the construction of étale tubular neighbourhoods[§].

The point I wish to come to, is that the consideration f sheaves (or complexes thereof, or n-stacks...) which are P-constructible on an X, where P is a given "equi-singular" stratification, reduces in our particular cases to the knowledge of a diagram of ordinary *homotopy types* (or pro-types, if one comes back to the étale topology)

$$\begin{tikzcd}\Delta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] & X_1 \\ X_0 & \end{tikzcd}$$

[§] Tim Porter pointed out to me that work on étale tubular neighbourhoods was done by D.A. Cox: "Algebraic tubular neighbourhoods I, II", Math. Scand. 42 (1978) 211-228, 229-242. I've not seen yet this work, and can't say therefore whether it meets the rather precise expectations I have for a theory of tubular neighbourhoods, for the needs of a dévissage theory of stratified schemes (or, more generally, stratified topoi) by taking local coefficients systems (or locally constant n-stacks) on the vertices X_0, X_1, which are related to each other by a homomorphism of compatibility of the type $p^*(F_0) \to j^*(F_1)$. It should be an amusing exercise (which I have not yet done) to verify and to make explicit how the "six operations" on sheaves (either on X, or on a subspace which is a union of strata of X) can be expressed in this dictionary, in the case, let us say, of non-singular strata (otherwise, there will be a difficulty with the dualising complexes, which one would prefer to have as objects in our category), and to reestablish the known formulae involving these operations. But it appears probable that, to carry out this transcription well, it would be necessary, rather than considering a diagram of type

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

in the homotopical category formed from the category of semi-simplicial sets, to consider the category of diagrams of semi-simplicial sets, and to pass from these to the homotopical category of fractions¶

¶This is the typical game embodied in the "derivator" associated to the theory (Hot) of usual homotopy types (compare section 69).

I have recently more or less made explicit, while thinking on the foundations of "tame topology", (i.e. where one eliminates from start all wild phenomena) how an equi-singular stratification, say with non singular strata, of a compact "tame space", gives rise canonically to a diagram of space which are manifolds with boundary, the arrows of the diagram being essentially locally trivial fibrations of manifolds with boundary on the others (with fibres which are compact manifolds with boundary), *and* the inclusion of the boundary in these manifolds with boundary (in fact, one finds slightly more general inclusions, certain boundaries which appear being endowed with an "elementary" cellular decomposition, i.e. the closed strata are again manifolds with boundary which are glued together along common parts of the boundary; and it is also necessary to consider the inclusions of these pieces one in another...), and can be reconstituted from this diagram by gluing‖. In other words, one has a canonical devissage description of tame compact spaces X, eventually endowed with equi-singular stratifications with non-singular strata, in terms of finite diagrams of a precise nature made out o manifolds with boundary. When we are interested in sheaves (or complexes of sheaves, or n-stacks) which are P-constructible on X, where P is such a fixed stratification, these may be described in terms of the envisaged diagram, of which only the "homotopy type" is to be retained. One foresees that the six operations on these sheaves can be translated in an ad hoc manner to this homotopical context. Finally, if instead of having only one compact tame space X, one has, let us say, a tame morphism $f : X \to Y$ of such objects, then by choosing equi-singular stratifications on X and Y adapted to f (the strata of X being in particular locally trivial fibrations on those of Y...), one should find a "morphism" from the diagram of manifolds with boundary expressing X int that expressing Y (with natural morphisms which essentially reduce to fibrations of compact manifolds with boundaries on other such objects) in such a way that the four operations Rf_*, $\mathrm{Rf}_!$, $\mathrm{L}g^*$, $g^!$ between P_{X^-} and P_{Y^-} constructible sheaves on X and Y (or on locally closed sub-spaces X', Y' which are union of strata, such that f induces $g : X' \to Y'$) can be expressed in terms of standard operations between

‖Some more details on this program are outlines in *"Esquisse d'un Programme"* (section 5), in *Réflexions Mathématiques 1* the mere homotopy types. Finally, all these constructions, still partially hypothetical (there is work on the foundations to be done!) should be able to be paraphrased in the framework of excellent schemes, by making use of the machinery of étale tubular neighbourhoods. In one or other case, the "fine homotopy type" of a tame space, respectively of an excellent scheme, is defined by passage to the limit from "P-homotopy type" associated to finer and finer equi-singular stratifications P (with non-singular strata).

This "fine" homotopy type would embody the knowledge, not only of sheaves or locally constant n-stacks, but (via a passage to the inductive limit) the knowledge of *all of them*. And it would depend, in a suitable sense, functorially on X. In the case of a scheme of finite type on an algebraically closed field k say, the strongest cohomological and homotopical *finiteness theorem* would be expressed precisely in terms of a fine homotopy type, and would say that *the ordinary homotopy types which are their constituents are essentially "finite polyhedra"* - and even compact manifolds with boundary - or in more precise fashion, their profinite completions (in the sense of Artin-Mazur) prime to the characteristic p of k are those of such polyhedra. One sees clearly how to begin on such programme in characteristic 0, but one foresees supplementary amusement, or even mystery, in the case $p > 0$, for the varieties which, even birationally, resist being lifted to characteristic 0!

* * *

From these essentially geometric thoughts, I could not at this moment draw up a precise programme for developing adequate algebraic structures to express them. I restrict myself to several marginal remarks.

For a long time I have been intrigued by the idea of a "linearisation" of an (ordinary) homotopy type, i.e. questions of the type: if X is a homotopy type, how much cohomological information of the type: cohomology of X with variable coefficients M (constant or twisted constant), multiplicative structure $\mathrm{H}^i(X,M) \times \mathrm{H}^j(X,N) \to \mathrm{H}^{i+j}(X,M \otimes N)$, then eventually other cohomology operations - is it necessary to have to reconstruct entirely the homotopy type? (say, in this preliminary pre-derived category approach, assuming given the fundamental group π_1, and therefore the category of constant twisted coefficients ($= \pi_1$-modules), the functors $\mathrm{H}^i(-,M)$ over these, together with the structure of cohomological functors relative to exact sequences, the structure of cup-product, etc. - related by certain formal properties?) Once one has at one's disposal the language of derived categories: the sub-category of the derived category of abelian complexes on X, formed from complexes the sheaves of cohomology of which are locally constant on X, with its triangulated structure and its multiplicative structure $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ (and eventually RHom...) gives a more satisfying candidate for hoping to recover the homotopy type. I don't really know if this suffices the recovery indeed**, but on the other hand I have no doubt that on pursuing "linearisation" to the end, that is to say by going to the *non-abelian* framework, and working with the $(n+1)$-category (without any supplementary structure on it!) of locally constant n-stacks of constructible sheaves on X, for all n, one manages to reconstruct the homotopy type via its fundamental ∞-groupoid, as explained in my previous letter and recalled in this one. (This signifies in particular that all the possible and imaginable

**I was informed by knowledgeable people soon later that the answer is well known to be negative, by working with "rational homotopy types" (the cohomology of which is made up with vector spaces over $\mathbf{Q}$). It is well known indeed that a 1-connected rational homotopy type is *not* known from its rational cohomology ring alone, which contains already all the information I was contemplating. At last this is so if we assume that $\mathrm{H}^i(X)$ is of finite dimension over $\mathbf{Q}$ for all i. But is there a counterexample still when X is a homotopy type "of finite type"?

cohomology operations are already included in the data furnished by such a system of n-categories…).

Similarly, the more elaborate homotopy type, which are related to certain finite diagrams, which one can associate to certain types of stratification P of tame topological spaces X, let's say, should correspond in as perfect a fashion to the $(n+1)$-category of n-stacks on X which are locally constant on each of the strata of P (say: which are subordinated to P). If the above description of homotopy types by the "locally constant derived category" was valid indeed, one would expect to recover here the mixed homotopy type from the corresponding sub-category of the derived category of abelian sheaves on X, provided by the complexes which have locally constant cohomology on each of the strata - with also the operations $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$, RHom, plus in case of need, the four operations $\mathrm{R}g_!$, $\mathrm{R}g_*$, $\mathrm{L}g^*$, $g^!$ for the induced $g : Z' \to Z''$ of the various locally closed unions of strata…The problem here is that we don't at present even know what is a triangulated category, not any more than what is its non-commutative version, described probably more simple and more fundamentally: a "homotopical category" with operations of taking "fibres" and "cofibres"[††].

[††]This "problem" is met with by the notion of a "derivator", which "was in the air" already by the late sixties, but was never developed (instead even derived categories became tabu in the seventies…).

It is surely time that I finish this "lettre-fleuve", which is becoming more and more vague. Just one question: what is this marvellous formula of Bloch-Quillen to which you allude, of which I have never heard, and which makes my mouth water?

Very cordially yours,

1976

1977

1978

1979

1980

1981

1982

1983

Les Aumettes 19.2.1983

Dear Daniel,

[See *Pursuing Stacks* (1983)]

Letter to D. Quillen, 19.2.1983

18 Last year Ronnie Brown from Bangor sent me a heap of reprints and preprints by him and a group of friends, on various foundational matters of homotopical algebra. I did not really dig through any of this, as I kind of lost contact with the technicalities of this kind (I was never too familiar with the homotopy techniques anyhow, I confess) – but this reminded me of a few letters I had exchanged with Larry Breen in 1975, where I had developed an outline of a program for a kind of "topological algebra", viewed as a synthesis of homotopical and homological algebra, with special emphasis on topoi – most of the basic intuitions in this program arising from various backgrounds in algebraic geometry. Some of those intuitions we discussed, I believe, at IHES eight or nine years before, then, at a time when you had just written up your nice ideas on axiomatic homotopical algebra, published since in Springer's Lecture Notes. I write you under the assumption that you have not entirely lost interest for those foundational questions you were looking at more than fifteen years ago. One thing which strikes me, is that (as far as I know) there has not been any substantial progress since – it looks to me that an understanding of the basic structures underlying homotopy theory, or even homological algebra only, is still lacking – probably because the few people who have a wide enough background and perspective enabling them to feel the main questions, are devoting their energies to things which seem more directly rewarding. Maybe even a wind of disrepute for any foundational matters whatever is blowing nowadays*! In this respect, what seems to me even more striking than the lack of proper foundations for homological and homotopical algebra, is the absence I daresay of proper foundations for topology itself! I am thinking here mainly of the development of a context of "tame" topology, which (I am convinced) would have on the everyday technique of geometric topology (I use this expression in contrast to the topology of use for analysts) a comparable impact or even a greater one, than the introduction of the point of view of schemes had on algebraic geometry†. The psychological drawback here I believe is not anything like messiness, as for homological and homotopical algebra (as for schemes), but merely the inrooted inertia which prevents us so stubbornly from looking innocently, with fresh eyes, upon things, without being dulled and imprisoned by standing habits of thought, going with a familiar context – *too* familiar a context! The task of working out the foundations of tame topology, and a corresponding structure theory for "stratified (tame) spaces", seems to me a lot more

[*Tapis de Quillen* (1968)]

[Quillen (1967)]

*When making this suggestion about there being a "wind of disrepute for any foundational matters whatever", I little suspected that the former friend to whom I was communicating my ponderings as they came, would take care of providing a most unexpected confirmation. As a matter of fact, this letter never got an answer, nor was it even read! Upon my inquiry nearly one year later, this colleague appeared sincerely surprised that I could have expected even for a minute that he might possibly read a letter of mine on mathematical matters, well knowing the kind of "general nonsense" mathematics that was to be expected from me...

†For some particulars about a program of "tame topology", I refer to "Esquisse d'un Programme", sections 5 and 6, which is included in Réflexions Mathématiques 1.

urgent and exciting still than any program of homological, homotopical or topological algebra.

The motivation for this letter was the latter topic however. Ronnie Brown and his friends are competent algebraists and apparently strongly motivated for investing energy in foundational work, on the other hand they visibly are lacking the necessary scope of vision which geometry alone provides[‡]. They seem to me kind of isolated, partly due I guess to the disrepute I mentioned before – I suggested to try and have contact with people such as yourself, Larry Breen, Illusie and others, who have the geometric insight and who moreover, may not think themselves too good for indulging in occasional reflection on foundational matters and in the process help others do the work which should be done.

[‡] I have to apologise for this rash statement, as later correspondence made me realise that "Ronnie Brown and his friends" do have stronger contact with "geometry" than I suspected, even though they are not too familiar with algebraic geometry!

At first sight it has seemed to me that the Bangor group[§] had indeed come to work out (quite independently) one basic intuition of the program I had envisioned in those letters to Larry Breen – namely that the study of n-truncated homotopy types (of semisimplicial sets, or of topological spaces) was essentially equivalent to the study of so-called n-groupoids (where n is any natural integer). This is expected to be achieved by associating to any space (say) X its "fundamental n-groupoid" $\Pi_n(X)$, generalizing the familiar Poincaré fundamental groupoid for $n = 1$. The obvious idea is that 0-objects of $\Pi_n(X)$ should be the points of X, 1-objects should be "homotopies" or paths between points, 2-objects should be homotopies between 1-objects, etc. This $\Pi_n(X)$ should embody the n-truncated homotopy type of X, in much the same way as for $n = 1$ the usual fundamental groupoid embodies the 1-truncated homotopy type. For two spaces X, Y, the set of homotopy-classes of maps $X \to Y$ (more correctly, for general X, Y, the maps of X into Y in the homotopy category) should correspond to n-equivalence classes of n-functors from $\Pi_n(X)$ to $\Pi_n(Y)$ – etc. There are very strong suggestions for a nice formalism including a notion of geometric realization of an n-groupoid, which should imply that any n-groupoid (or more generally of an n-category) is relativized over an arbitrary topos to the notion of an n-gerbe (or more generally, an n-stack), these become the natural "coefficients" for a formalism of non-commutative cohomological algebra, in the spirit of Giraud's thesis.

[§] The "Bangor group" is made up by Ronnie Brown and Tim Porter as the two fixed points, and a number of devoted research students. Moreover Ronnie Brown is working in close contact with J.L. Loday and J. Pradines in France.

But all this kind of thing for the time being is pure heuristics – I never so far sat down to try to make explicit at least a definition of n-categories and n-groupoids, of n-functors between these etc. When I got the Bangor reprints I at once had the feeling that this kind of work had been done and the homotopy category expressed in terms of ∞-groupoids. But finally it appears this is not so, they have been working throughout with a notion of ∞-groupoid too restrictive for the purposes I had in mind (probably because they insist I guess on strict associativity of compositions, rather than associativity up to a (given) isomorphism, or rather, homotopy) – to the effect that the simply connected homotopy types they obtain are merely products of Eilenberg-MacLane spaces, too bad! They do not seem to have realized yet that this makes their set-up wholly inadequate to a sweeping foundational set-up for homotopy. This brings to the fore again to work out the suitable definitions for n-groupoids – if this is not done yet anywhere. I spent the afternoon today trying to figure out a reasonable definition, to get a feeling at least of where the difficulties are, if any. I am guided mainly of course by the topological interpretation. It will be short enough to say how far

I got. The main part of the structure it seems is expressed by the sets F_i ($i \in \mathbb{N}$) of i-objects, the source, target and identity maps

$$\begin{aligned} \mathrm{s}_1^i, \mathrm{t}_1^i : F_i \to F_{i-1} \quad (i \geqslant 1) \\ \mathrm{k}_1^i : F_i \to F_{i+1} \quad (i \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

and the symmetry map (passage to the inverse)

$$\mathrm{inv}_i : F_i \to F_i \quad (i \geqslant 1),$$

satisfying some obvious relations: k_1^i is right inverse to the source and target maps $\mathrm{s}_1^{i+1}, \mathrm{t}_1^{i+1}$, inv_i is an involution and "exchanges" source and target, and moreover for $i \geqslant 2$

notation:
$d_a = \mathrm{k}_1^i(a)$,
$\check{u} = \mathrm{inv}_i(u)$

$$\begin{aligned} \mathrm{s}_1^{i-1}\mathrm{s}_1^i &= \mathrm{s}_1^{i-1}\mathrm{t}_1^i \left(\overset{\text{def}}{=} \mathrm{s}_2^i : F_i \to F_{i-2}\right) \\ \mathrm{t}_1^{i-1}\mathrm{s}_1^i &= \mathrm{t}_1^{i-1}\mathrm{t}_1^i \left(\overset{\text{def}}{=} \mathrm{t}_2^i : F_i \to F_{i-2}\right); \end{aligned}$$

thus the composition of the source and target maps yields, for $0 \leqslant j \leqslant i$, just *two* maps

$$\mathrm{s}_\ell^i, \mathrm{t}_\ell^i : F_i \to F_{i-\ell} = F_j \quad (\ell = i - j).$$

The next basic structure is the composition structure, where the usual compoisition of arrows, more specifically of i-objects ($i \geqslant 1$) $v \circ u$ (defined when $\mathrm{t}_1(u) = \mathrm{s}_1(v)$) must be supplemented by the Godement-type operations $\mu * \lambda$ when μ and λ are "arrows between arrows", etc. Following this line of thought, one gets the composition maps

$$(u, v) \mapsto (v *_\ell u) : (F_i, \mathrm{s}_\ell^i) \times_{F_{i-\ell}} (F_i, \mathrm{s}_\ell^i) \to F_i,$$

the composition of i-objects for $1 \leqslant \ell \leqslant i$, being defined when the ℓ-target of u is equal to the ℓ-source of v, and then we have

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{s}_1^i(v *_\ell u) = \mathrm{s}_1^i(v) *_{\ell-1} \mathrm{s}_1^i(u) \\ \mathrm{t}_1^i(v *_\ell u) = \mathrm{t}_1^i(v) *_{\ell-1} \mathrm{s}_1^i(u) \end{aligned}\right\} \quad \ell \geqslant 2 \text{ i.e. } \ell - 1 \geqslant 1$$

and for $\ell = 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{s}_1(v *_1 u) = s_1(u) \\ \mathrm{t}_1(v *_1 u) = t_1(v) \end{aligned}$$

(NB the operation $v *_1 u$ is just the usual composition $v \circ u$).

One may be tempted to think that the preceding data exhaust the structure of ∞-groupoids, and that they will have to be supplemented only by a handful of suitable *axioms*, one being *associativity* for the operation $\overset{i}{\underset{\ell}{*}}$, which can be expressed essentially by saying that that composition operation turns F_i into the set of arrows of a category having $F_{i-\ell}$ as a set of objects (with the source and target maps s_ℓ^i and t_ℓ^i, and with identity map $\mathrm{k}_\ell^{i-\ell} : F_{i-\ell} \to F_i$ the composition of the identity maps $F_{i-\ell} \to F_{i-\ell+1} \to \cdots \to F_{i-1} \to F_i$), and another being the Godement relation

$$(v' *_\alpha v) *_\nu (u' *_\alpha u) = (v' *_\nu u') *_\alpha (v *_\nu u)$$

(with the assumptions $1 \leqslant \alpha \leqslant \nu$, and $u, u', v, v'' inF_i$ and

$$\begin{cases} \mathrm{t}_\alpha(u) = \mathrm{s}_\alpha(u') \\ \mathrm{t}_\alpha(v) = \mathrm{s}_\alpha(v') \end{cases} \quad \mathrm{t}_\nu(u) = \mathrm{s}_\nu(v) = \mathrm{s}_\nu(v') = \mathrm{t}_\nu(u')$$

implying that both members are defined), plus the two relations concerning the inversion of i-objects ($i \geqslant 1$) $u \mapsto \check{u}$,

$$u *_1 \check{u} \;=\; \mathrm{id}_{\mathrm{t}_1(u)}, \qquad \check{u} *_1 u \;=\; \mathrm{id}_{\mathrm{s}_1(u)}, \qquad (\check{v} *_\ell \check{u}) \;=\; ? \quad (\ell \;\geqslant\; 2)$$

It just occurs to me, by the way, that the previous description of basic (or "primary") data for an ∞-groupoid is already incomplete in some rather obvious respect, namely that the symmetry-operation $\mathrm{inv}_i : u \mapsto \check{u}$ on F_i must be complemented by $i-1$ similar involutions on F_i, which corresponds algebraically to the intuition that when we have an $(i+1)$-arrow λ say between two i-arrows u and v, then we must be able to deduce from it another arrow from $\check{u}$ to $\check{v}$ (namely $u \mapsto \check{u}$ has a "functorial character" for variable u)? This seems a rather anodine modification of the previous set-up, and is irrelevant for the main point I want to make here, namely: that for the notion of ∞-groupoids we are after, all the equalities just envisioned in this paragraph (and those I guess which will ensure naturality by the necessary extension of the basic involution on F_i) should be replaced by "homotopies", namely by $(i+1)$-arrows between the two members. These arrows should be viewed, I believe, as being part of the data, they appear here as a kind of "secondary" structure. The difficulty which appears now is to work out the natural coherence properties concerning this secondary structure. The first thing I could think of is the "pentagon axiom" for the associativity data, which occurs when looking at associativities for the compositum (for $\overset{i}{\underset{\ell}{*}}$ say) of four factors. Here again the first reflex would be to write down, as usual, an *equality* for two compositions of associativity isomorphisms, exhibited in the pentagon diagram. One suspects however that such equality should, again, be replaced by a "homotopy"-arrow, which now appears as a kind of "ternary" structure – before even having exhausted the list of coherence "relations" one could think of with the respect to the secondary structure! Here one seems caught at first sight in an infinite chain of ever "higher", and presumably, messier structures, where one is going to get hopelessly lost, unless one discovers some simple guiding principle for shedding some clarity in the mess.

I thought of writing you mainly because I believe that, if anybody, you should know if the kind of structure I am looking for has been worked out – maybe even *you* did? In this respect, I vaguely remember that you had a description of n-categories in terms of n-semisimplicial sets, satisfying certain exactness conditions, in much the same way as an ordinary category can be interpreted, via its "nerve", as a particular type of semisimplicial set. But I have no idea if your definition applied only for describing n-categories with strict associativities, or not[¶].

[¶]Definitely only for *strict* associativity.

Still some contents in the spirit of your axiomatics of homotopical algebra – in order to make the question I am proposing more seducing maybe to you! One comment is that presumably, the category of ∞-groupoids (which is still to be defined) is a "model category" for the usual homotopy category; this would be at any rate one plausible way to make explicit the intuition referred to before, that a homotopy type is "essentially the same" as an ∞-groupoid up to ∞-equivalence. The other comment: the construction of the fundamental ∞-groupoid of a space, disregarding for the time being the question of working out in full the pertinent structure on this messy object, can be paraphrased in any model category in your sense, and yields a functor from this category to the category of ∞-groupoids, and hence (by geometric realization, or by localization) also to the usual homotopy category‖. Was this functor obvious beforehand? It is of a non-trivial nature only when the model category is *not* pointed – as a matter of fact the whole construction can be carried out canonically, in terms of a "cylinder object" I for the final object e of the model category, playing the role of the unit argument. It's high time to stop this letter – please excuse me if it should come ten or fifteen years too late, or maybe one year too early. If you are not interested for the time being in such general nonsense, maybe you know someone who is ...

‖This idea is taken up again in section 12. The statement made here is a little rash, as for existence and uniqueness (in a suitable sense) of this functor. Compare note ([17]) below.

Very cordially yours

27.6.1983

Dear Mr. Faltings,

[See the original here *Lieben an Faltings* (1983)]

Letter to G. Faltings, 27.6.1983

19 Many thanks for your quick answer and for sending me your reprints! Your comments on the so-called “Theory of Motives” are of the usual kind, and for a large part can be traced to a tradition which is deeply rooted in mathematics.

1984

Les Aumettes 15.4.1984

Dear Lipman Bers,

20 Together with Yves Ladegaillerie (a former student of mine) we are running a microseminar on the Teichmüller spaces and groups, my own motivations coming mainly from algebraic geometry, and Ladegaillerie's from his interest in the topology of surfaces. Lately we have met with a problem which I would like to submit to you, as I understand you are the main expert on Thurston's hyperbolic geometry approach to Teichmüller space. Before stating the specific problem on hyperbolic "pants" (which things boil down to), let me tell you what we are really after.

Letter to L. Bers, 15.4.1984

Assuming given a compact

1985

1986

Les Aumettes 19.2.1983

Dear Daniel,

[See *Pursuing Stacks* (1983)]

21

Letter to D. Quillen, 19.2.1983

Les Annettes July 8, 1987

Dear Piotr Blass,

Thanks for your letter and MS. I am not going even to glance through the manuscript, as I have completely given up mathematics and mathematical involvements. If you complete your book, you may mention on the cover that it is based on my EGA IV (sic) notes, but you are to be the author and find your own title.

I have a foreboding that we'll contact again before very long, but in relation to more inspiring tasks and vistas than mathematical ones.

With my very best wishes

Alexander Grothendieck

1988

Les Aumettes 19.2.1983

Dear Daniel,

[See *Pursuing Stacks* (1983)]

Letter to D. Quillen, 19.2.1983

22

Montpellier, 19 April 1988

Dear Professor Ganelius,

I thank you for your letter of the 13th of April which I received today, and for your telegram. I am touched by the honor given to me by the Royal Academy of Sciences of Sweden awarding this year's Crafoord prize, together with a significant sum of money, jointly to Pierre Deligne (who was my student) and myself. Nevertheless, I regret to inform you that I do not wish to accept this (or any other) prize for the following reasons.

1) My salary as professor, even my pension starting next October, is more than sufficient for my own material needs as well as those of my dependants; hence I have no need for money. As for the distinction given to some of my work on foundations, I am convinced that time is the only decisive test for the fertility of new ideas or views. Fertility is measured by offspring, not by honors.

2) I note moreover that all researchers of high level, to which a prestigious award such as the Crafoord prize adresses itself, have a social standing that provides them with more enough material wealth and scientific prestige, with all the power and privileges these entail. But is it not clear that superabundance for some is only possible at the cost of the needs of others?

3) The work that brought me to the kind attention of the Academy was done twenty-five years ago at a time when I was part of the scientific community and essentially shared its spirit and its values. I left that environment in 1970, and, while keeping my passion for scientific research, inwardly I have retreated more and more from the scientific "milieu". Meanwhile, the ethics of the scientific community (at least among mathematicians) have declined to the point that outright theft among colleagues (especially at the expense of those who are in no position to defend themselves) has nearly become the general rule, and is in any case tolerant by all, even in the most obvious and iniquitous cases. Under these conditions, agreeing to participate in the game of "prizes" and "rewards" would also mean giving my approval to a spirit and trend in the scientific world that I view as being fundamentally

> unhealthy, and moreover condemned to disappear soon, so suicidal are this spirit and trend, spiritually and even intellectually and materially.

This third reason is to me by far the most imperative one. Stating it is in no way meant as a criticism of the Royal Academy's aims in the administration of its funds. I do not doubt that before the end of the century, totally unforeseen events will completely change our notions about "science" and its goals and the spirit in which scientific work is done. No doubt the Royal Academy will then be among the institutions and the people who will have an important role to play in this unprecedented renovation, after an equally unprecedented civilisation collapse.

I regret the inconvenience that my refusal to accept the Crafoord prize may have caused you and the Royal Academy, especially because a certain amount of publicity was already given to the award prior to the acceptance by the chosen laureates. Yet, I have never failed to make my views about the scientific community and the "official science" of today known to this same community and specially to my old friends and young students in the mathematical world. They can be found in a long reflection *Récoltes et Semailles* (*Reaping and Sowing*) on my life as a mathematician, on creativity in general, and on scientific creativity in particular; this essay unexpectedly became a portrait of the morals of the mathematical world from 1950 up to today. While awaiting its publication in book form, a provisional edition of 200 preprints has been sent to mathematical colleagues, especially algebraic geometers (who now do me the honor of remembering me) . Under separate cover, I send you the two introductory parts for your personal information.

Again I thank you and the Royal Academy of Sciences of Sweden and apologise for the unwanted inconvenience. Please accept my best regards.

A. Grothendieck
Department of Mathematics
Univ. Montpellier 2
Pl. Eugène Bataillon
34060 Montpellier Cedex, France

1989

1990

1991

2010

Fait mon domicile le 3 janvier 2010

Déclaration d'intention de non-publication, 3.1.2010

23 Je n'ai pas l'intention de publier, ou de republier, aucune œuvre ou texte dont je suis l'auteur, sous quelque forme que ce soit, imprimée ou électronique, que ce soit sous forme intégrale ou par extraits, textes de nature scientifique, personnelle ou autres, ou lettres adressées à quiconque – ainsi que toute traduction de textes dont je suis l'auteur. Toute édition ou diffusion de tels textes qui aurait été faite par le passé sans mon accord, ou qui serait faite à l'avenir et de mon vivant, à l'encontre de ma volonté expresse précisée ici, est illicite à mes yeux. Dans la mesure où j'en aurai connaissance, je demanderai aux responsables de telles éditions pirates, ou de toute autre publication contenant sans mon accord des textes de ma main (au-delà de citations éventuelles de quelques lignes chacune), de *retirer du commerce* ces ouvrages; et aux responsables des bibliothèques en possession de tels ouvrages, de *retirer ces ouvrages* des dites bibliothèques.

Si mes intentions d'auteur, clairement exprimées ici, devaient rester lettre morte, que la honte de ce mépris retombe sur les responsables des éditions illicites et sur les responsables des bibliothèques concernées (dès lors que les uns et les autres ont été informés de mes intentions).

Alexandre Grothendieck

Bibliography

Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (1968). Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 2), Laszlo, Yves (ed.) Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Jouanolou, Jean-Pierre (1969). *Catégories dérivées et cohomologie ℓ-adique*.

Künzer, Matthias, ed. (1974). *Letter to P Deligne, dated 7.8.74*. URL: https://agrothendieck.github.io/divers/LGD7874.pdf.

Lieben an Faltings (1983). URL: https://agrothendieck.github.io/divers/LGF2783.pdf.

Pursuing Stacks (1983). The modelizing story. URL: https://arxiv.org/abs/2111.01000.

Quillen, Daniel G. (1967). *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, iv+156 pp. (not consecutively paged). DOI: 10.1007/BFb0097438.

Raynaud, Michèle (1975). *Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et en cohomologie étale*. Bull. Soc. Math. France, Mém. No. 41, Supplément au Bull. Soc. Math. France, Tome 103. Société Mathématique de France, Paris, p. 176. EUDML: 94714.

Sinh, Hoang Xuan (1975). Gr-*catégories*. URL: https://agrothendieck.github.io/divers/GCSscan.pdf.

Tapis de Quillen (1968). Transcription in progress. URL: https://agrothendieck.github.io/divers/tapisQscan.pdf.