Lettre de A. Grothendieck à J. Tate ([1])

Pise, Mai 1966

Cher John,

J'ai réfléchi aux groupes formels et à la cohomologie de De Rham,et suis arrivé à un projet de théorie, ou plutôt de début de théorie, que j'ai envie de t'exposer, pour me clarifier les idées.

Chapitre 1. — La notion de cristal

Commentaire terminologique : Un cristal possède deux propriétés caractéristiques : la *rigidité*, et la faculté de *croître*, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de souffre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs etc.

1.0. — Soit S un préschéma, au dessus d'un autre R; dans le cas qui nous intéressera le plus, on aura $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. soit C la catégorie des R-préschémas T sous S, (i.e. munis d'un R-morphisme $S \longrightarrow T$,) tels que $S \longrightarrow T$ soit une immersion fermée définie par un idéal localement nilpotent. On a le foncteur "oubli" de C dans Sch, et la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur des préschémas variables induit donc une catégorie fibrée sur C, associant à tout T la catégorie des Modules quasi-cohérents sur T.

Définition (**1.1**). — *On appelle cristal de modules (sous-entendu: quasi-cohérents) sur S, relativement à R, une section cartésienne de la catégorie fibrée précédente au dessus de C. Plus généralement, pour toute catégorie fibrée F sur* $\mathrm{Sch}_{/R}$, *on définit la notion de "F-cristal" sur S, ou "cristal en objets de F", de la façon correspondante.*

[1] Ce texte a été transcrit par Mateo Carmona

Ceci donne un sens aux expressions: cristal en algèbres, en algèbres commutatives, en préschémas relatifs etc, sur S relativement à R. Quand $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, on parlera de "cristal absolu" sur S, de l'espèce considérée.

1.2. — Les F-cristaux sur S forment une catégorie, qui dépend fonctoriellement de F. Ceci permet, en particulier, de définir sur la catégorie des cristaux de modules sur S les opérations tensorielles habituelles: produit tensoriel de deux cristaux de modules etc, satisfaisant aux propriétés habituelles.

1.3. — Regardons de même ce qui se passe quand on fixe F et fait varier R, S. Tout d'abord, si $R \longrightarrow R' \longrightarrow R$, alors tout cristal sur S relativement à R en définit un relativement à R', par simple restriction. En particulier, un cristal absolu définit un cristal relatif, pour tout préschéma de base R de S.

Fixons maintenant R, S, et soit $S' \longrightarrow S$ un morphisme. On définit alors de façon naturelle un foncteur "image inverse" allant des cristaux de type $\underline{F}$ sur S vers les cristaux de type $\underline{F}$ sur S vers les cristaux de même type sur S' (tout relatif à R). Pour s'en assurer, il suffit de définit un foncteur $C \longrightarrow C'$ (ou C' est défini en termes de S' comme C en termes de S), compatible avec les foncteurs "oubli". Or si $S' \longrightarrow T'$ est un objet de C', il y a une construction évidente de somme amalgamée dans la catégorie des préschémas, qui donne un $T = [\,]$ et un morphisme $S \longrightarrow T$, qui fait de T un objet de C, ce qui définit le foncteur cherché.

On peut donc dire que pour un S variable sur R, les cristaux de type $\underline{F}$ sur S forment une *catégorie fibrée* sur $\mathrm{Sch}_{/R}$, grâce à la notion d'image inverse précédente.

Les deux variantes (en R, et en S) sont compatibles dans un sens évident, et peuvent être régardées comme provenant d'une variance en (R, S) directement.

1.4. — On a un foncteur naturel et évident qui va des cristaux de modules (disons) sur S (rel à R) dans des Modules quasi-cohérents sur S: c'est le foncteur "valeurs en S". On fera attention que ce foncteur n'est en général pas même fidèle (cf exemple **1.5.** plus bas). Il est donc un peu dangereux de vouloir considérer un cristal de modules sur S comme étant un Module quasi-coherent $\underline{M}$ sur S, *muni* d'une structure supplémentaire, sa "structure cristalline". Dans certains cas cependant (cf **1.8.**), le foncteur cristaux de modules $\longrightarrow$ Modules est fidèle et le point de vue précédent devient plus raisonnable.

1.5. Exemple 1: relations avec les vecteurs de Witt. — Supposons que S soit le spectre d'un corps *parfait* k, et $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Soit W l'anneau de Cohen de corps résiduel k: si car$k \leq 0$, c'est l'anneau des vecteurs de Witt défini par k, si car$k = 0$, c'est k lui-même; dans ce dernier cas, supposons k *algébrique* sur $\mathbf{Q}$. Alors il est bien connu que la catégorie C de **1.0.** est équivalente à celle des W-algèbres locales, annulées par une puissance de l'idéal maximal de W, à extension résiduelle triviale. Écrivant $W = \varprojlim W_n$ comme à l'accoutumé, dans le cas $p \leq 0$, on trouve que la donnée d'un cristal de modules (absolu) sur k équivaut à celle d'un système projectif (M_n) "p-adique" de modules M_n sur les W_n ; donc les cristaux de modules de présentation finie sur k forment une catégorie équivalent à celle des modules de type fini sur W. Si $p = 0$, alors la catégorie des cristaux de modules sur k est équivalente à celle des vectoriels sur $k = W$. Ces descriptions sont compatibles avec les notions de changement de base pour k variable. Elles se formulent évidemment pour toute autre espèce de cristaux, défini par une catégorie fibrée $\underline{F}$.

Dans le cas envisagé, le foncteur "valeur en S", sur la catégorie des cristaux de présentation finie sur k, s'identifie au foncteur $\otimes_W k$ sur la catégorie des modules de type fini sur W, foncteur qui (si $p \leq 0$) n'est pas fidèle.

1.6. Exemple 2. S **étale sur** R. — Si $S = R$, la catégorie C admet R lui-même comme objet final, donc le foncteur "valeur en R" est une équivalence de la catégorie des cristaux sur R, de type F donné, avec la catégorie F_R. En particulier, un cristal de modules sur $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ est essentiellement la même chose qu'un $\mathbf{Z}$-module.

De façon un peu plus général, si S est étale sur R, alors S est un objet final de C, et les cristaux de modules (disons) sur S, relativement à R, s'identifient aux Modules quasi-cohérents sur S.

1.7. Exemple 3 : S **un sous-préschéma de** R. — Comme la notion de cristal relatif sur S ne change pas si on remplace R par un ouvert par lequel se factorise S, on peut supposer S fermé dans R, défini par un idéal quasi-cohérent J. Soit $S_n = V(J^{n+1})$ le n-ème voisinage infinitésimal de R dans S. Alors la famille des objets S_n de C est finale dans C, d'où on conclut facilement qu'un cristal de type F sur S s'identifie à une suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'objets des F_{S_n} qui se recollent. En particulier, si R est localement noethérien, un cristal de modules sur S relativement à R, de présentation finie, s'identifie à un Module cohérent sur le complété formel de R le long de S.

Cet exemple contient le cas de car $p \geq 0$ de l'exemple 1, si on note qu'au priori, grâce à Cohen, un cristal absolu sur k, c'est pareil qu'un cristal relativement à W.

On peut aussi donner un énoncé commun aux exemples 2 et 3, en partant du cas où on se donne un $S \longrightarrow R$ non *ramifié*, ce qui permet en effet de construire encore des "voisinages infinitésimaux" S_n.

1.8. Relation avec la notion de stratification. — Les données R, S, F étant comme d'habitude, considérons pour chaque entier $n \leq 0$ le voisinage infinitésimal Δ_n de la diagonale de $S \times_R S$, qui s'envoie dans S par les deux projections pr_1 et pr_2. Si E est un objet de F_S, une *n-connexion* sur E (relativement à R) est la donnée d'un isomorphisme $pr_1^*(E) \simeq pr_2^*(E)$ qui induit l'identité sur la diagonale. Une ∞-*connexion* ou *pseudo-stratification* de E, est la donnée pour tout n d'une n-connexion, de telle façon que ces n-connexions se recollent. Enfin, une *stratification* sur E est la donnée d'une pseudo-stratification qui satisfait aux conditions formelles d'une donnée de descente, quand on fait intervenir les voisinages infinitésimaux de tous ordres de la diagonale de $S \times_R S \times_R S$. Ces notions donnent lieu à des sortes analogues à ceux de 1.2 et 1.3. Notons que lorsque S est "formellement non ramifié sur R" i.e. $\Omega^1_{S/R} = 0$, alors toutes ces notions deviennent triviales: un objet E admet alors toujours exactement une connexion de tout ordre, donc une seule pseudo-stratification, et celle-ci est une stratification: donc la catégorie des objets de F_S *munis* d'une stratification relativement à R est alors équivalente, par le foncteur "valeur en S", à la catégorie F_R elle même. (Dans tous les cas, le foncteur "valeur en S" est fidèle).

Ceci défini, on voit que pour tout cristal M sur S de type F (relativement à R), sa valeur $M(S) = M$ est un objet de F_S muni d'une *stratification canonique* relativement à R, d'où un foncteur: cristaux relatifs de type $F[\,]$ objets de F munis d'une stratification. La remarque de 1.4. montre d'ailleurs que ce foncteur n'est pas toujours fidèle. Il y a cependant des cas intéressants où ce foncteur est une *équivalence de catégories*: il en est en tous cas ainsi si $S \longrightarrow R$ est *"formellement lisse"*, par exemple si c'est un morphisme lisse, ou si S et R sont des spectres de corps k_0, k, avec k une extension *séparable* de k_0. (Quand d'ailleurs $S \longrightarrow R$ est même formellement étale, alors les deux catégories: celle des cristaux et celle des objets à stratification, deviennent équivalentes, par le foncteur "valeur en S", à F_S lui-même, ce qui nous redonne l'exemple à la noix de 1.5 ou k est de car. nulle). Sauf erreur, on a encore une équivalence de catégories si $S \longrightarrow R$ est *plat et localement de présentation finie*, [ ] mais je n'ai pas écrit le démonstration.

1.9. Une digression sur la notion de stratification en caractéristique nulle. — Quand S est lisse sur R (en fait, il suffit que S soit différentiellement lisse sur R, i.e. le morphisme diagonal $S \longrightarrow S \times_R S$ une immersion régulière), et si R est de caractéristique nulle, alors une stratification d'un Module M sur S (relativement à R) est connue quand on connaît la 1-connexion qu'elle définit, et on peut se donner celle-ci arbitrairement, soumise à la seule condition que le "tenseur courbure", qui est une certaine section de $\Omega^2_{S/R} \otimes \mathrm{End}(M)$, soit nul. (Cela peut aussi s'exprimer en disant qu'on fait opérer le faisceau $\mathrm{Der}_{S/R}$ des dérivations relatives de S sur R, sur M, de façon à satisfaire aux relations habituelles, y compris celle de transformer crochet en crochet). J'ignore dans quelle mesure l'hypothèse de lissité est nécessaire pour cet énoncé, ou si (dans le cas lisse disons) on peut formuler un énoncé analogue pour toute catégorie fibrée F sur $\mathrm{Sch}_{/R}$. Mais bien entendu, l'hypothèse de caractéristique nulle faite sur R est tout à fait essentielle. Si R est de caractéristique $p \leq 0$, l'énoncé qui remplace le précédent (et qui sauf erreur est dû à Cartier) est que dans ce cas, la donnée d'une "connexion sans torsion" sur M équivaut à une "donnée de descente" sur M relativement à frobenius $S \longrightarrow S^{(p/R)}$. Il y a loin de là à une stratification !

1.10. La notion de p-cristal et ses variantes. — Nous supposons maintenant que S est de caractéristique $p \leq 0$, et $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ (ou $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)$, spectre des entiers p-adiques, cela reviendrait au même). Si $\underline{M}$ est un cristal de modules sur S, de présentation finie, alors en vertu de 1.5., pour tout $s \in S$, si s' est le spectre d'une clôture parfaite de $k(s)$, l'image inverse $\underline{M}(s')$ de $\underline{M}$ en s' peut être interprétée comme un module de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k(s'))$. Ainsi, la notion de cristal de modules sur S (au sens absolu) semble convenable pour formaliser la notion de *"famille algébrique de modules sur les anneaux de vecteurs de Witt aux différents points parfaits au dessus de S*. Bien entendu, la notion de cristal est plus fine que ça encore, et doit donner, j'espère, la bonne notion de "famille" lorsque, disons, S est le spectre d'un corps de fonctions (donc pas nécessairement parfait). Je vais maintenant introduire une structure supplémentaire, qui devrait permettre de formuler, de même, la notion de "famille algébrique de modules de Dieudonné", paramétrée par S,

Considérons le morphisme "puissance p-ème"

$$S[]S,$$

il permet d'associer, à tout cristal (absolu) sur S, d'espèce quelconque, un cristal image inverse:

$$\underline{M}^{(p)} = \mathrm{frob}_S(\underline{M}).$$

On appelle *p-crsital* sur S un cristal $\underline{M}$ sur S, muni d'un morphisme de cristaux

$$\underline{M}^{(p)} \longrightarrow \underline{M}.$$

Evidemment, les p-cristaux sur S d'espèce $\underline{F}$ donnée forment encore une catégorie, dépendant fonctoriellement de $\underline{F}$ (pour les foncteurs *covariants* cartésiens de catégories fibrées), ce qui permet par exemple, pour les p-cristaux de modules sur S, d'introduire toutes les opérations tensorielles habituelles covariantes (produits tensoriels, puissances alternées et symétriques etc.) Pour définir le *dual* d'un p-cristal de modules, il y a lieu d'introduire une notion duale de celle de p-cristal d'espèce $\underline{F}$, c'est celle de *p^{-1}-cristal* d'espèce $\underline{F}$: c'est un cristal d'espèce $\underline{F}$, avec un morphisme de cristaux en sens inverse:

$$V : \underline{M} \longrightarrow \underline{M}^{(p)}.$$

Ainsi un contrafoncteur cartésien entre catégories fibrées sur Sch transforme p-cirtaux en p^{-1}-cristaux, et inversement. Les p^{-1}-cristaux de modules se multiplient tensoriellement entre eux comme les p-cristaux de modules.

Pour obtenir une notion "autoduale", il y a lieu d'introduire la notion de *bicristal de poids 1* sur S, qu'on pourrait aussi appeler un *cristal de Dieudonné* sur S, lorsque $\underline{F}$ est fibré en catégories additives: c'est un cristal muni à la fois d'une p-structure et d'une p^{-1}-structure, satisfaisant aux relations

$$FV = pId_M, \quad VF = Id_{M^{(p)}}.$$

Cette notion semble tout à fait adéquate à l'étude des groupes formels, ou ce qui revient moralement au même, à l'étude de la cohomologie de De Rham en dimension 1. En dimension supérieure i, il y a lieu d'introduire la notion de *bicristal de poids i*, qui est un cristal muni de F et V satisfaisant aux relations

$$FV = p^i Id_M, \quad VF = p^i Id_{M^{(p)}}.$$

Par exemple, on définit le *bicristal de Tate de poids* $2i$, qui est défini par le cristal de modules unité (associant à tout T sous S le module $\underline{O}_T$ lui-même), et les morphismes de cristaux

$$F = p^i Id_{T^i}, \quad V = p^i Id_{T^i}.$$

Ainsi le bicristal de Tate de poids $2i$ est la puissance tensorielle i-ème du bicristal de Tate de poids 1. (**NB** les bicristaux de poids quelconques se multiplient tensoriellement, de façon que les poids s'ajoutent).

1.11. — Si on veut "rendre inversible" le bicristal de Tate T^1, on est obligé, qu'on le veuille ou non, de passer à une catégorie de fractions de la catégorie des cristaux de modules sur S, (qui entre parenthèses est une catégorie $\mathbf{Z}_p$-linéaire, (i.e. les Hom sont des $\mathbf{Z}_p$-modules...), tout comme les catégories de p-cristaux etc qu'on en déduit). Il revient donc au même de passer à une catégorie de fractions, en déclarant qu'on veut rendre notre catégorie abélienne $\mathbf{Q}$-linéaire, ou en déclarant qu'on la veut rendre $\mathbf{Q}$-linéaire : il faut faire le quotient par la sous-catégorie abélienne épaisse formée des objets de torsion, qui sont aussi des objets de p-torsion, et cela revient simplement à garder les mêmes objets, et à prendre comme nouveaux Hom les $Hom \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. On trouve la catégorie des *"cristaux de modules à isogénie près", ou isocristaux*, sur S. Utilisant cette nouvelle notion, on définit comme ci-dessus la notion de p-isocristal, comme étant la donnée d'un isocristal $\underline{M}$ muni d'un homomorphisme $F : \underline{M}^{(p)} \longrightarrow \underline{M}$. La notion de bi-isocristal de poids i, qui serait calquée de celle de bicristal de poids i, n'est pas très raisonnable alors, car V doit être alors donné en termes de F comme $p^i F^{-1}$. Il y a lieu plutôt d'appeler *bi-isocristal* (sans précision de poids) un p-isocristal pour lequel F est uhn *isomorphisme*, et de ne pas choisir entre les différents $p^i F^{-1}$ possibles; il vaut mieux également ne pas parler ici de p^{-1}-isocristal, la notion intéressante étant celle de bi-isocristal, qui est manifestement *autoduale* quand on se restreint aux objets de type fini: le dual de $(\underline{M}, F)$ est $(\underline{M}, {}^t F^{-1})$, où $\underline{M}$ est le iso-cristal dual de M.

On peut également, bien sûr, localiser par rapport à p en partant déjà de la catégorie des bi-isocristaux de poids i, on trouve les *bicristaux de poids i à isogénie* *près*, qui forment une catégorie abélienne (S, i), et un foncteur exact "oubli de V"

$$(S,i) \longrightarrow Isbicr(S),$$

à valeurs dans la catégorie (S) des iso-bicristaux sur S. Ce foncteur est *pleinement fidèle*, de sorte que *les bi-isocristaux forment une généralisation commune des bicristaux de poids i à isogénie près*. Pour préciser ce point, désignant par (S, i) la catégorie des bicristaux de poids i sur S, il y a lieu d'introduire des foncteurs canoniques

$$(S,i) \longrightarrow Bicr(S, i+1) \longrightarrow ...,$$

donnés par $(\underline{M}, F, V)[](\underline{M}, F, pV)$. Quand on localise ces foncteurs par p, on trouve des foncteurs

$$(S,i) \longrightarrow Isbicr(S, i+1) \longrightarrow ....$$

qui se trouvent être *pleinement fidèles* : on peut donc considérer que, pour i croissant, la notion de "bicristal de poids i, à isogéne près" constitue une généralisation de plus en plus large de celle de "cristal de Dieudonné". La notion de "bi-isocristal" est à ce titre une généralisation qui englobe toutes les précédentes, et qui de plus a la louable vertu d'être stable par produit tensoriel, *et* passage au dual. Cela semble donc une catégorie toute indiquée comme catégorie des valeurs pour un foncteur "cohomologie de De Rham" convenable, lorsqu'on se décide à travailler à isogénie près.

1.12. Exemple 1 : Cas où S est le spectre d'un corps parfait k. — Alors la donnée d'un cristal de modules de type fini sur k équivaut à la donnée d'un module de type fini M sur W, la formation du motif $\underline{M}^{(p)}$ correspond à la formation

$$M^{(p)} = M \otimes_W (W, f_W),$$

où f_W est l'endomorphisme de frobenius de W, et (W, f_W) est la W-algèbre définie par f_W. Par suite un structure de p-cristal sur M revient à la donnée d'un homomorphisme de W-modules $M^{(p)} \longrightarrow M$, ou si on préfère, à la donnée d'un homomorphisme f_W-semi-linéaire

$$F_M : M \longrightarrow M.$$

Comme l'application $x[]$ de M dans $M \otimes_W (W, f_W)$ est bijective, f_W étant un automorphisme de W, on peut considérer la bijection inverse, qui est f_W^{-1}-semi-linéaire. Par suite, la donnée d'une p^{-1}-structure sur M revient à la donnée d'un homomorphisme f_W^{-1}-linéaire:

$$V_M : M \longrightarrow M.$$

la donnée d'un couple (F, V) définit sur M une structure de bi-cristal de poids i si et seulement si on a

$$FV = VF = p^i Id_M.$$

En particulier, pour $i = 1$, on retrouve la notion de *module de Dieudonné*: la catégorie des cristaux de Dieudonné sur k est canoniquement équivalente à celle des modules de Dieudonné relativement à k.

La catégorie des isocristaux de type fini sur k est équivalente à la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps des fractions K de W. Donc un biisocristal (de type fini) sur k s'identifie à un tel vectoriel, muni d'un f_K-endomorphisme bijectif.

Toutes ces descriptions sont compatibles avec les opérations tesorielles, et la formation d'images inverses pour k variable.

On peut se demander, avec la description précédente des bi-isocristaux, quels sont ceux qui sont les couples (E, F), E un vectoriel sur K et F un automorphisme semi-linéaire, tels que, si on pose $V = p^i F^{-1}$, pout out $x \in E$, l'ensemble de ses transformés par les différents monômes non commutatifs en F, V soit une partie *bornée* de E: c'est une pure tautologie. Pour qu'il existe un i ayant cette propriété, il faut et il suffit que pour tout $x \in E$, l'ensemble des $F^n x$ soir borné.Bien entendu, c'est là une propriété qui est stable par changement de F en pF (correspondant à la tensorisation par le bi-isocristal de Tate de poids 2), mais non par le changement de F en $p^{-1}F$ (correspondant à la tensorisations par l'inverse T^{-1} du bi-isocristal précédent). Comme on tient beaucoup à inverser Tate, on voit qu'il n'est pas naturel, en ffet, de poser une condition de croissance sur l'ensemble des itérés de F. De façon précise, appelant *effectis* les bi-isocristaux qui proviennent d'un objet d'un (S, i), on voit que tout bi-isocristal est de la forme $T^{-i} \otimes_{\underline{N}}$, avec $\underline{N}$ effectif: on n'a pas ajouté plus de nouveaux objets qu'il n'était absolument nécessaire !

1.13. Exemple 2 : S lisse sur un corps parfait k. — Déterminons d'abord dans ce cas les cristaux sur S, sans plus. Wout d'abord, sans condition de lissité, on voit à l'aide de la propriété caractéristique de W que la catégorie C introduite dans 1.0. ne change pas, essentiellement, quand on remplace $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ par $R = \mathrm{Spec}(W)$. D'autre part, il résulte aussitôt des définitions que la donnée d'un cristal sur S, relativement à W, revient à la donnée d'un système cohérent de cristaux sur S, relatifs aux $W_n = W/p^{n+1}W$. (**NB** On n'a pas formulé avec la généralité qui convenait l'exemple 3 de 1.7.!) Théoriquement, on est donc ramené à déterminer, pour chaque n, la catégorie des cristaux sur S relatifs à W_n, et les foncteurs restrictions entre ces catégories. D'ailleurs, il est inoffensif de se localiser sur S, par exemple de supposer au besoin S affine. Utilisant maintenant la lissité de S, on peut donc supposer que pour tout n, S se remonte en un S_n lisse sur W_n, de façon que ces choix se recollent (il suffit pour ceci S lisse et affine). Or, il résulte encore facilement des définitions, utilisant seulement que $S = S_0 \longrightarrow S_n$ est une immersion fermée définie par un Ideal nilpotent, que le foncteur restriction des cristaux sur S_n (relativement à une base quelconque - ici on prendra W_n) vers les cristaux sur S_0, est une équivalence de catégories, donc un cristal sur S relativement à W_n s'identifie à un cristal sur S_n relativement à W_n. Comme $S_n b$ est lisse sur W_n, il résulte de ce qui a été dit dans 1.8. que les cristaux en question s'identifient aux objets (de l'espace $\underline{F}$ considérée) sur S_n, *munis d'une stratification relativement à* $R_n = \mathrm{Spec}(W_n)$. Les foncteurs restrictions sur les cristaux s'expriment alors par les foncteurs restrictions correspondants pour objets stratifiés. En résumé: *un cristal* $\underline{M}$ *sur* S *s'identifie à un système cohérent* $(\underline{M}_n)$ *d'objets à stratification sur les différents* S_n *sur* $R_n = \mathrm{Spec}(W_n)$. Pour relier ceci à des objets

[]

1.14. —

1.15. Bicristaux et biisocristaux sur une base quelconque. —

1.16. Un retour en arrière. —

1.17. — On est donc dans une situation où on peut faire marcher la machine cohomologique. Étant loin de mes bases, je n'ai pas tenté sérieusement de tirer au clair si les images directes supérieures qu'on définit ainsi, et en particulier les groupes de cohomologie du site cristallogéne, donnent ce qu'on voudrait.

Le test-clef est le suivant: *si* R *est le spectre d'un corps, et si* S *est lisse sur* R, *et propre sur R dans le cas de la caractéristique $p > 0$, on voudrait trouver, comme cohomologie à coéfficients dans $\underline{O}_C$ lui-même, la cohomologie de De Rham de S relativement à* R. Plus généralement, sans condition sur R, si $f : S' \longrightarrow S$ est propre et lisse, on voudrait trouver comme "valeur en S'" $\mathbb{R}^1 f_{cris*}(\underline{O_{C'}})$ (cf 1.4.) le faisceau de cohomologie de De Rham $\mathbb{R}^i f_*(\Omega^*_{S'/S})$, et on voudrait [2] que la connexion canonique à la Gauss-Manin sur ce dernier soit celle associée à la stratification canonique provenant de la structure cristalline (cf 1.8.).

L'existence d'une connexion de Gauss-Manin en cohomologie de De Rham (que j'ai vérifié pour n'importe quel morphisme lisse), et le tapis de Washnitzer-Monsky, sont en tous cas des indications assez fortes pour conduire à penser qu'il doivent exister une théorie cohomologique, en termes de cristaux, donnant de telles valeurs pour l'argument $\underline{O}_C$. Au cas où la cohomologie du site cristallogène ne donnerait pas les résultats qu'il faut, on pourrait essayer (au lieu de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie de *tous* les Modules sur le site annelé cristallogène) de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie des seuls Modules quasi-cohérents sur le site cristallogène, i.e. dans la catégorie des cristaux de modules.

Chapitre 2. — La cohomologie de De Rham est un cristal

2.1. — L'affirmation du titre n'est pour l'instant qu'une hypothèse ou un voeux pieux mais je suis convaincu qu'elle est essentiellement correcte. Comme je l'ai dit dans 1.17., il y a pour le moment deux indications dans cette directions

a) Le travail de Washnitzer-Monsky. Deux grosses imperfections dans leur tapis:

b)

c) La nécessité d'une interprétation cristallographique de la cohomologie de De Rham est également suggérée par le problème que

2.2. — Je vais préciser l'affirmation du titre, en me plaçant

2.3. La cohomologie de De Rham comme biisocristal —

[2]

2.4. Cas d'un schéma abélien — Il semble que ce ne soit guère que dans ce cas-là où il soit bien raisonnable de parler de bi-cristaux et non seulement de bi-iso-cristaux. De façon précise, $\mathrm{DR}^1(f)$ a dans ce cas une structure de bicristal, défini par les F_p précédents, et des V_p qui se définissent encore, par fonctorialité de DR, à l'aide de l'homomorphisme "Verschiebung" $A_p^{(p/S_p)} \longrightarrow A_p$ (défini avec la généralité qui convient dans les notes de Gabriel dans SGAD). Comme $\mathrm{DR}^1(A/S)$ est un foncteur multiplicatif en A, grâce à Kunneth postulé dans 2.2., et que l'on a $FV = VF = pId$ sur les schémas abéliens en car p, on en conclut les mêmes relations dans DR^1. Cela montre donc que $\mathrm{DR}^1(A)$ est un bicristal de poids 1, i.e. un *cristal de Dieudonné*. Lorsque S est le spectre d'un corps parfait de caractéristique $p[\,]0$, un tel cristal s'identifie simplement, d'après 1.12, à un module de Dieudonné sur $W = W(k)$. Bien sûr, *on doit trouver que ce module n'est autre que le module de Dieudonné du groupe formel* (ou plutôt, du groupe p-divisible) *défini par la variété abélienne A*. Débarrasser de l'hyperstructure axiomatico-conjectural de 2.2., on peut exprimer ainsi la construction obtenue du module de Dieudonné:

2.5. —

2.6. —

2.7. —

2.8. —

Chapitre 3. — Remarques sur les groupes p-divisibles

3.1. — Bien sûr, en même temps que pour les variétés abéliennes, je dois en rabattre sur les groupes formels. Je veux simplement signaler que la construction de $G(A)$ dans **2.6.** doit pouvoir se paraphraser sans difficulté pour un groupe p-divisible $\varnothing$ sur un préschéma S à caractéristiques résiduelles égales au même p. En effet les homomorphismes de ce groupe dans le groupe formel associé à G_a sont triviales (en particulier, $\varnothing$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux), d'autre part (sauf erreur) le faisceau en modules des H^2 de $\varnothing$ à valeurs dans le groupe formel associé à G_a (au sens du complexe du groupe $\varnothing$, variante formelle), est un Module localement libre de rang g^*, où g^* est la dimension du groupe dual de $\varnothing$, soit $\varnothing^*$; plus précisément, ce Module doit être canoniquement isomorphe à $\mathrm{Lie}(\varnothing^*) = t_{\varnothing^*}$. (Tout ceci est suggéré par les résultats de Tate et Lubin sur les modules de groupes formels; je dois avouer d'ailleurs que je n'ai pas essayé de tirer au clair ce qu'il faut entendre, dans ce contexte, par "le groupe formel associé à G_a", et s'il y a lieu de prendre le groupe formel purement infinitésimal). Il s'impose alors de paraphraser la construction de Serre, en regardant l'extension universelle de $\varnothing$ par un groupe formel vectoriel, qui sera ici le groupe formel (covariant) de $t_{\varnothing^*}$. Désignant par $G(\varnothing)$ cette extension, son algèbre de Lie $\mathrm{H}(\varnothing)$ sers une extension

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow t_{\varnothing^*}^{v} \longrightarrow \mathrm{H}(\varnothing) \longrightarrow t_{\varnothing} \longrightarrow 0.$$

Bien entendu, $G(\varnothing)$ et par suite $\mathrm{H}(\varnothing)$ seront fonctoriels en $\varnothing$, et compatibles avec changement de base. Alors qu'il est certainement vrai, dans un sens qu'il conviendrait de préciser, que $G(\varnothing)$ varie "moins que $\varnothing$", quand on fait varier $\varnothing$ infinitésimalement dans une famille, il n'est pas vrai pour autant que $G(\varnothing)$ soit indépendant de telles variations (à l'exception, probablement, de celles du premier ordre), i.e. puisse être considéré comme provenant d'un cristal en groupes plus ou moins formels. Cela sera le cas seulement, sans doute, quand $\varnothing$ sera extension d'un groupe ind-étale par un groupe p-divisible torique, et S réduit à un point (?). Dans le cas général, il semble intéressant d'étudier les variations infitésimales de $\varnothing$, quand on se fixe celles de $G(\varnothing)$ à l'aide d'un cristal en groupes $\underline{G}$.

3.2. — En tous cas, l'extension $(*)$ semble un invariant intéressant du groupe p-divisible envisagé. Il subsiste, par passage à la limite, en passant au cas où S est par exemple le spectre d'un anneau A noethérien j-adique séparé et complet, où J est un idéal tel que A/J soit à caractéristiques résiduelles égales à p. On trouve par exemple un bon invariant quand A est un anneau de valuation discrète complet, éventuellement d'inégales caractéristiques, à caractéristique résiduelle p. Dans le cas où le groupe formel réduit a la structure triviale mentionnée plus haut dans **3.1.**, que la donnée d'un relèvement du groupe p-divisible qu'on a sur k en un groupe p-divisible sur A, soit entièrement équivalente à la donnée d'un relèvement de la filtration de $M \otimes_W k$ donnée par $(*)$, en une filtration de type (g, g^*) de $M \otimes_W A$. Il serait bien intéressant d'essayer de déterminer, en termes d'une telle donnée, quel est le module de Tate correspondant à la fibre générique de $\varnothing$! On aimerait préciser également, pour des groupes p-divisibles plus généraux, quelle quantité d'information est liée à l'extension $(*)$, qui remplace ici le H^1 de De Rham.