

V. Moulin 18.5.1979

Mon cher Serre,

Tate m'a écrit de son côté ~~meux~~ sur ses histoires de courbes elliptiques, et pour me demander si j'avais des idées sur une définition globale des variétés analytiques sur des corps valués complets. Je dois avouer que je n'ai pas du tout compris pourquoi ses résultats suggéreraient l'existence d'une telle définition, et suis encore sceptique. Je n'ai pas non plus l'impression d'avoir rien compris à son théorème, qui ~~meux~~ ne fait que exhiber par des formules brutales un certain isomorphisme de groupes analytiques; ~~et~~ on conçoit que d'autres formules tout aussi explicites en donneraient un autre pas plus mauvais (sauf preuve du contraire !)

J'ai réfléchi un petit peu à la partie "infinitésimale" du groupe fondamental, juste assez pour me convaincre que ça existe et est raisonnable. Voici un contexte (certainement insuffisant d'ailleurs) où ça marche. On a un schéma S (par exemple un schéma algébrique sur un corps k), une catégorie auxiliaire \mathcal{C} (par exemple la catégorie des schémas algébriques finis sur k), une catégorie \mathcal{G} dont les objets sont des \mathcal{C} -groupes, et les morphismes des morphismes de \mathcal{C} -groupes (par exemple les groupes algébriques finis sur k). On suppose que dans \mathcal{C} les produits ~~finis~~ ^{conux} existent, et que \mathcal{G} satisfait aux conditions suivantes: (i) \mathcal{G} est stable par produits, et si $u, v : G \rightarrow G'$ sont des morphismes dans \mathcal{G} , alors le noyau du couple (u, v) i.e. le sous-groupe ~~max~~ maximum de G où u, v coïncident -qui existe, car s'exprime par un produit fibré- est dans \mathcal{G} . (ii) Si $u : G \rightarrow G'$ est un morphisme dans \mathcal{G} , ~~max~~ le groupe image existe, est isomorphe à un quotient de G comme il se doit, et est dans \mathcal{G} . (iii) Toute suite décroissante de sous-groupes ~~max~~ $G_i \in \mathcal{G}$ d'un $G \in \mathcal{G}$ est stationnaire. On suppose donné de plus un foncteur covariant ~~max~~ F de \mathcal{G} dans les ~~max~~ schémas en groupes sur S (par exemple $G \rightarrow S_{X, k} G$), et on suppose :

(iv) Le foncteur F commute aux produits, ^{aux} noyaux de couples de morphismes, images (on pourra dire que F est "exact"). (v) Si H est ~~max~~ de la forme $F(G)$ ($G \in \mathcal{G}$) alors H ^{est "spéciale" i.e.} admet une suite exacte

124

De ces deux propriétés, résulte formellement qu'on peut trouver un système projectif ^{fini} $(G_i)_{i \in I}$ dans \mathcal{G} , avec des morphismes $G_i \rightarrow G_j$ qui sont des épimorphismes dans \mathcal{G} , "essentiellement unique" dans un sens facile à préciser, tel que ~~l'existence d'un~~ l'on ait un isomorphisme fonctoriel

$$Z(\mathcal{G}) = \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{G}}(G_i, G)$$

C'est ce système projectif (pris modulo une équivalence qui intuitivement signifie qu'on a passé à la limite projective des G_i) qui peut être noté $\pi_1^{\mathcal{G}}(S, a)$ et joue le rôle d'un groupe fondamental de S en a (relativement à la catégorie \mathcal{G} de groupes, munie du foncteur F). Dans le cas ~~xxx~~ d'un corps de base k , \mathcal{G} étant la catégorie des groupes algébriques finis sur k , on pourra écrire $\pi_1(S/k, a)$, c'est le groupe proalgébrique (mais avec partie infinitésimale) fondamental du k -schéma S . Lorsque k est parfait, la décomposition d'un groupe algébrique fini en partie infinitésimale et partie réduite montre que le groupe fondamental est produit semi-direct de sa partie réduite ou séparable ~~xxxxxx~~ (qui correspond à un groupe compact discontinu ordinaire, sur lequel le groupe fondamental ordinaire de k - i.e. le groupe de Galois de \bar{k} sur k - opère), par sa partie infinitésimale, ~~xxxxxxxxxxxxxxxx~~ qui elle ne dépend d'ailleurs plus du choix du point base a de S . Notez que la partie séparable du groupe fondamental peut se reconstituer facilement à l'aide du groupe fondamental ordinaire de S et de son homomorphisme naturel dans $\text{Gal}(\bar{k}/k)$, ^{mais} (il est "plus grand" que le groupe fondamental ordinaire, parce qu'il correspond à la classification de revêtements principaux de groupe structural non seulement un groupe fini ordinaire, mais un groupe ~~xxxxxxxxxxxx~~ fini et séparable sur k (i.e. un groupe fini ordinaire sur lequel on fait opérer $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ de façon non nécessairement triviale). ~~xxxxxx~~ J'avoue que si k n'est pas algébriquement clos, le groupe fondamental ci-dessus n'est ^{sans doute} ~~pas~~ pas le bon; on devrait sans doute prendre le groupe fondamental de $S_{\bar{k}}$, qui est un groupe proalgébrique défini sur \bar{k} , noter qu'il est muni d'une donnée de descente de \bar{k} à k et est par suite défini en réalité sur k ; avec cette définition, si $S = \text{Spec}(k)$, la ~~grande~~ partie séparable du groupe fondamental de S (relativement à la ponctuation de S définie par une ~~extension~~ clôture algébrique \bar{k} de k) n'est autre que

à tout

/longue sur
notamment sur k

126

(9)

$\text{Gal}(\bar{k}/k)$, mais où on fait opérer $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ par automorphismes intérieurs. Ainsi, ~~l'anneau~~ le groupe des points rationnels sur k du groupe fondamental de $\text{Spec}(k)$ s'identifie au centre de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$.

Voici comment on voit l'existence du système projectif (E_i) . Un couple (G, z) , avec $G \in \mathcal{G}$ et $z \in Z(G)$, est dit minimal si on ^{ne} peut trouver un sous-groupe $G' < G$ de G , ~~différent~~ $G' \neq G$, tel que z soit dans de la forme $Z(1)(z')$, avec $z' \in Z(G')$ et $i: G' \rightarrow G$ l'injection. ~~Et~~ On dit qu'un couple (G, z) est majoré par un couple (G', z') si on peut trouver un homomorphisme $G' \rightarrow G$ tel que $z = Z(u)(z')$. Il résulte de (iii) que tout couple (G, z) est majoré par un couple minimal, et de la propriété 2) de Z que si (G', z') est minimal et domine (G, z) , alors il existe un seul $u: G' \rightarrow G$ tel que $z = Z(u)(z')$. De ceci résulte que les couples (G, z) minimaux forment un système projectif pour la relation de domination, d'ailleurs filtrant (car (G, z) et (G', z') sont dominés par $(G \times G', (z, z'))$ lui-même dominé par un (G'', z'') minimal), c'est le système cherché. On peut si on veut choisir un couple (G, z) dans tout système de couples ^(minimaux) isomorphes, de ~~xx~~ telle façon que l'ensemble d'indices ~~xxx~~ I devient ordonné et non seulement préordonné. (N.B. Ce genre de raisonnements formels est aussi celui qui sert en théorie des ~~xxxx~~ modules ...).

Je ne sais encore comment devrait être formulée la suite exacte d'homotopie, pour bien faire l'inclusion dans le groupe fondamental d'une partie infinitésimale devrait donner une théorie satisfaisante du comportement du groupe fondamental par spécialisation. J'espère que si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme propre et séparable à fibres absolument connexes i.e. tel que $f(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$, X étant muni ^{pour simplifier} d'une section sur Y qui détermine des points-base sur les fibres, alors les groupes fondamentaux totaux des fibres de X forment sur Y un pro-schéma en groupes, ^{$\pi_1(X/Y, s)$} de façon précise qu'on peut trouver un système projectif $(G_i)_{i \in I}$ de schémas en groupes G_i 'spéciaux' sur Y , avec des homomorphismes $G_i \rightarrow G_j$ qui soient des épimorphismes de Y -schémas (i.e. correspondant à un homomorphisme injectif de faisceaux cohérents sur Y), de telle façon que les groupes fondamentaux totaux des fibres de X ~~sont~~ déduisent dudit pro-schéma en groupes par simple spécialisation. (C'est en tous cas ce que semble indiquer le cas où X est un schéma abélien sur Y , cf plus bas).

127

Il n'est pas dit que la conjecture envisagée soit plus difficile à démontrer que la partie déjà connue pour les groupes fondamentaux ordinaires. Elle impliquerait que pour des schémas complets X, Y au dessus d'un corps alg clos k , on a $\pi_1(X \times Y/k) = \pi_1(X/k) \times \pi_1(Y/k)$. Utilisant tes raisonnements, on en conclut que si X est une variété abélienne sur k , alors $\pi_1(X/k)$ est abélien, et qu'un revêtement principal minimal X' de X est une variété abélienne isogène à X . On en déduit

où nX est le noyau (avec sa partie infinitésimale aussi, bien sûr) de la multiplication par n , l'homomorphisme de nX dans nX étant induit par la multiplication par n . (Utilisant Cartier, ce groupe fondamental est dual, au sens de Cartier, au groupe ind-algébrique limite inductive des nX^* , où X^* est la variété duale de X). Prenant la p -composante de ce groupe fondamental, on trouve ce qui, pour le nombre premier p , doit jouer le rôle du module de Weil. Il est hors de doute (et Cartier doit l'avoir fait) qu'il est possible d'associer ~~aux~~ fonctoriellement à un groupe proalgébrique infinitésimal abélien un module sur l'anneau de Witt, et ~~montré~~ qu'il ~~est~~ facile de vérifier qu'en l'occurrence ce module se décompose en les trois morceaux que tu connais bien (correspondants aux trois types principaux de groupes algébriques abéliens), ~~qui~~ On trouve ainsi

(6)

pour ton théorème une formulation plus naturelle (qui devrait ~~en~~ fournir une démonstration uniforme, sans distinction du cas $\ell \neq p$ et $\ell = p$), de même qu'on voit en même temps que ta somme abracadabrante se comporte bien quand on fait varier X dans une famille, i.e. si X est ~~un schéma abélien~~ un schéma abélien sur Y (car alors les nX seront d'excellents schémas en groupes finis et plats sur Y , dont on peut prendre formellement la limite projective ...).

J'espère arriver dans l'année prochaine à une théorie satisfaisante du groupe fondamental, ~~maximal~~ et achever la rédaction des Chapitres IV, V, VI, VII (ce dernier étant le groupe fondamental), en même temps que des catégories. Dans deux ans résidus, dualité, intersections, Chern, Riemann-Roch. Dans trois ans cohomologie de Weil, et un peu d'homotopie si Dieu veut. Et entre-temps, je ne sais quand, le grand théorème d'existence avec Picard etc, un peu de ^{les schémas abéliens.} courbes algébriques, [Sauf difficultés imprévues ou enlisement, le multiplodoque devrait être fini d'ici 3 ans, ou 4 au maximum. On pourra commencer à faire de la géométrie algébrique !

Bien à toi

125