

J. Grothendieck
645 Kentucky Street
Lawrence (Kansas)
USA

Lawrence 24.1.1955

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre. Bien que je ne doutais qu'une partie
des notions introduites dans mon papier (bien toutes) devraient
être connues, je ne connaissais aucune bibliographie, et ne
savais pas, en effet, que les $\Delta_A(t)$ avaient été considérés
par Kadison. A-t-il aussi le "principe fondamental"

$$\Delta_{|AB|} \leq \Delta_{|A|} \Delta_{|B|} ?$$

Je n't'ai jamais demandé si une forme linéaire
hermitienne ultra-faiblement continue sur un C^* -alg.
à dimension infinie se factorise, avec $\varphi_1, \varphi_2 \gg 0$ et
 φ_1 et φ_2 disjointes. Si je me rappelle bien, je n't'ai
contraire donné la démonstration dans la dernière
lettre de Dio P. (mais l'as-tu reçue? C'était une
lettre fort longue, écrite à la machine, où je posai
un tas de conjectures). Je n'ai jamais eu de réponse.

Mais peut-être n'en tu pas par déchiffrer une
dans une lettre antérieure,
écriture(?). En fait, une preuve

a) Tout φ hermitien continu sur un C^* -algèbre A
s'écrit $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, avec " φ " = " φ_1 " + " φ_2 ", $\varphi_1, \varphi_2 \gg 0$
(Halm - Berc - ...)

b) Cette décomposition est unique. La condition
" φ " = " φ_1 " + " φ_2 " implique aussi on fait que φ_1 et φ_2
sont disjointes

c) Si φ est ultra-faiblement continue (sur A muni
de sa norme ...), φ_1 et φ_2 le sont.

P Je t'y demandais aussi la démonstration explicite que si
 A est une C^* -algèbre commutative φ -positive pour une forme linéaire
hermitienne continue sur A est diff. de deux formes
positives, alors (par décomposition de von Neumann) A est isomorphe à un C^* -algèbre

c) est immédiat, car il suffit de prouver l'existence
 d'un unique une décomposition $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, φ_1 et φ_2
 $\in A_*$, " φ " = " φ_1 " + " φ_2 ". Par Hahn-Banach, on est
 ramené au cas où $A = L(H)$. Mon. sur $A_* = L'(H)$
 (opérateurs de Fredholm), et le diagramme
 d'un opérateur de Fredholm hermitien on se
 partit positive et négative dans le résultat
 cherché.

Quant à la preuve de b, je n'ai pas les
 papiers sous le bras (ils sont dans une grosse
 valise qui se arrivera dans quelques semaines).
 Aussi il vaut mieux que je t'ele dans une grande
 j'aurai les papiers. J'ai une rédaction
 complète de ce fourbi, (il n'y a donc pas
 de conseil invasion à craindre, je pense!).

As-tu l'intention de regarder les questions
 que je pose dans mon papier sur les inégalités
 de convexité. Et si oui, penses-tu que le
 fourbi mérite une rédaction soignée dans
 un "joint paper"? En ce cas, il vrait sans doute
 préférable que tu écrives la rédaction, pour le
 bien de l'auteur!

Je suis un train de passer une semaine en Italie
 de trav. alg. et un dilute dans des directions
 variées. J'ai beaucoup de temps à moi, et suis en
 train : fait bien.

Amitiés

Aposthénos