A. Grothendieck, J. A. Diedonné, Elements of algebraic topology, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1972, Volume 27, Issue 2, 135–148

1972 г. март — апрель *т. XXVII, вып. 2 (164)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ[1])

А. Гротендик, Ж. А. Дьёдонне

1. В этом введении мы хотим показать (не вдаваясь в подробности) как в алгебраической геометрии в результате эволюции основных задач, поставленных этой отраслью математики, естественным образом выделилась современная точка зрения. Для удобства изложения мы используем язык современной математики, даже для описания исторических ситуаций, в которых язык и техника авторов, разумеется, сильно отличались от существующих ныне.

2. Можно утверждать, что *решение систем полиномиальных уравнений* послужило, исторически, источником алгебры и что со времен вавилонян, индусов и Диофанта и до наших дней оно остается одной из ее основных целей. Чтобы уточнить эту задачу, рассмотрим коммутативное кольцо k с единицей и кольцо

$$P_I = P = k[(T_i)_{i \in I}] \tag{1}$$

полиномов от произвольного семейства $(T_i)_{i \in I}$ неизвестных с коэффициентами из кольца k. Напомним, что для любого семейства $\mathbf{t} = (t_i)_{i \in I}$ элементов кольца k имеется один и только один k-гомоморфизм кольца P в k, переводящий единицу в единицу, а каждое из T_i в t_i $(i \in I)$; образ полинома $F \in P$ при этом гомоморфизме обозначается символом $F(\mathbf{t})$. Таким образом, для всякого полинома $F \in P$ определяется «полиномиальное отображение» $\mathbf{t} \mapsto F(\mathbf{t})$ из k^I в k.

Теперь рассматриваемая проблема состоит в том, чтобы для заданного семейства $(F_j)_{j \in J}$ полиномов из P найти все системы $\mathbf{t} = (t_i) \in k^I$, для которых

$$F_j(\mathbf{t}) = 0 \quad \text{при любом } j \in J. \tag{2}$$

Говорят, что такая система $\mathbf{t} = (t_i)_{i \in I}$ служит *решением системы полиномиальных уравнений*

$$F_j((T_i)_{i \in I}) = 0, \qquad j \in J. \tag{3}$$

[1]) A. Grothendieck, J. A. Dieudonne, Eléments de Géometrie Algébrique I, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New-York, 1971, Introduction, стр. 4—18. Перевод с французского Ф. В. Широкова.

Чтобы не натыкаться в приложениях (и, в частности, в приводимых ниже построениях) на стеснительные ограничения, не следует делать никаких специальных предположений о множествах индексов I и J; но исторически, в течение очень долгого времени, изучались почти исключительно только те задачи, в которых I и J были *конечными*.

3. После изобретения того, что теперь на протяжении уже долгого времени называют «аналитической геометрией», к чисто «алгебраическому» аспекту описанной задачи добавился ее геометрический аспект, возникающий в случае, когда кольцо k является полем R, а множество I состоит из двух или трех элементов; при этом множества решений некоторых систем вида (3) оказываются «кривыми» или «поверхностями», изучавшимися начиная с античности, как например конические сечения, или квадрики. Приблизительно с середины XIX века вошло мало-по-малу в привычку употреблять язык, подсказанный элементарной геометрией, даже в тех случаях, когда k является произвольным кольцом, а I — произвольным множеством индексов; поэтому-то k^I часто называют «аффинным пространством» над k, а его элементы $\mathbf{t} = (t_i)_{i \in I}$ —«точками».

4. Первые же естественные вопросы, которые ставятся при изучении системы уравнений (3), относятся к множеству ее решений в k^I: Пусто это множество или нет? Конечно оно или нет? Если оно конечно, то нельзя ли указать число решений? Если же оно бесконечно, то нельзя ли дать асимптотическую оценку числа решений, подчиненных добавочным неравенствам с определенными параметрами, когда эти параметры стремятся к некоторым пределам? И т. д. С *арифметической* (в очень широком смысле этого слова) точки зрения такую постановку можно назвать «наивной», поскольку арифметическая природа кольца играет здесь существенную роль: методы и результаты будут весьма различными в зависимости от того, является ли k полем или кольцом, например кольцом $\mathbf{Z}$, или же кольцом целых чисел того или иного поля алгебраических чисел. Но, даже если k — поле, результаты будут весьма различными в зависимости от того, является ли k полем алгебраических чисел, конечным полем, полем, алгебраически замкнутым (например, полем $\mathbf{C}$) или же полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел («вещественная алгебраическая геометрия»).

5. Изучение алгебраических кривых и поверхностей в вещественной области с неизбежностью привело к точкам с «комплексными координатами»: с начала XVIII века, а систематически с работ Монжа и Понселе системе (3), имеющей вещественные коэффициенты, сопоставляют, пользуясь тем, что $\mathbf{R}$ является подполем $\mathbf{C}$, *ту же самую* систему, решения которой ищут, однако, не в $\mathbf{R}^I$, а в соответствующем *комплексном* пространстве $\mathbf{C}^I$. Эта идея оказалась весьма плодотворной, поскольку свойства изучаемых алгебраических объектов значительно упрощались при таком «расширении» основного поля; можно даже сказать, что это «расширение» оказалось в некотором смысле слишком удачным, ибо теория аналитических функций в поле $\mathbf{C}$ давала столь большие дополнительные преимущества, что на протяжении XIX века практически перестали рассматривать иные системы (3), кроме систем с комплексными коэффициентами (или же систем в подполях поля $\mathbf{C}$, например

в полях алгебраических чисел). Фактически это привело к тому, что из поля зрения на долгий период исчезла центральная идея «изменения основного поля» в ее общей форме (единственное исключение относится к теории сравнений, где желание отыскать «мнимые решения» привело к теории конечных полей (Гаусс, Галуа) и к их использованию в теории линейных групп (Жордан, Диксон)).

6. Только начиная с 1940 г., с развитием (главным образом в работах Вейля, Шевалле и Зарисского) «абстрактной» алгебраической геометрии (т. е. алгебраической геометрии над произвольным основным полем k, вообще говоря, характеристики $\neq 0$) идея изменения основного поля обрела значимость в более общем контексте; ибо по существу часто бывает необходимо перейти, например, к алгебраическому замыканию поля k или (если k нормировано) к его пополнению. И все же ни у Шевалле, ни у Зарисского нет систематического изучения этой операции, тогда как у Вейля, который пользуется ею во многих случаях, ее общность маскируется частично тем, что он заранее раз и навсегда ограничивает свои рассмотрения только подполями «достаточно большого» алгебраически замкнутого поля («универсальное поле»), внешне оставаясь тем самым очень близким к классической точке зрения, когда эту роль исполняло поле **C**. И только недавно, сначала в работах Э. Кэлера [1]), а затем в первом издании данного трактата, была осознана полезность «расширений» k' кольца k, являющихся *произвольными* (коммутативными) *k-алгебрами* (даже если само k есть поле), и эти произвольные изменения базы стали одним из самых важных процессов современной алгебраической геометрии. Описанной выше «арифметической» точке зрения противопоставилась, таким образом, новая точка зрения, которую можно назвать собственно «*геометрической*»: отвлекаясь от специальных свойств решений системы (3) в частном пространстве k^I, мы рассматриваем теперь множество решений системы (3) в *пространстве* k'^I для любой k-алгебры k' и изучаем, как *изменяется* это множество при изменении k-алгебры k'; в частности, мы ищем те свойства системы уравнений (3), которые остаются *инвариантными* при изменении k' (т. е., как мы будем говорить, «устойчивы при изменении базы»).

7. Идея изменения основного кольца с легкостью выражается математически на языке теории функторов (отсутствие этого языка, несомненно, объясняет всю скромность прежних попыток). Действительно, в нашем распоряжении имеется ковариантный *функтор*

$$E^I\colon k' \longmapsto k'^I \tag{4}$$

из категории k-алгебр в категорию множеств, сопоставляющий произвольному k-гомоморфизму $\varphi\colon k' \mapsto k''$ отображение $\varphi^I\colon k'^I \to k''^I$ (функтор «аффинное пространство размерности I над k»).

Пусть теперь S — семейство полиномов $(F_j)_{j\in J}$, рассмотренное в п. 2; обозначим через $V_S(k')$ ту часть k'^I, которую образуют решения системы (3); говорят также, что эти решения являются точками со значениями в k'

---

[1]) E. Kähler, Geometria arithmetica, Ann. di Matem. (4) 45 (1958), 1—368.

«многообразия над k», определяемого системой (3). Очевидно, что

$$V_S\colon k' \longmapsto V_S(k') \tag{5}$$

является *подфунктором* функтора E^I (т. е. образ множества $V_S(k')$ при отображении φ^I содержится в образе множества $V_S(k'')$). Поэтому можно сказать, что *изучение системы уравнений* (3) *с точки зрения алгебраической геометрии является в принципе изучением функтора* V_S (из категории k-алгебр в категорию множеств).

Это изучение проводится под двумя аспектами: сначала функтор $k' \longmapsto V_S(k')$ изучают *независимо* от способа, которым он реализуется как подфунктор подходящего функтора «аффинное пространство», а затем, по возможности, изучают свойства вложения $V_S(k') \to k'^I$. В большинстве задач, которые обычно ставятся в алгебраической геометрии, этот второй аспект является полностью привходящим: *важны только внутренние свойства функтора* V_S, *не зависящие от данного афинного вложения*

$$V_S(k') \to k'^I. \tag{6}$$

Вследствие этого оправданно рассматривать два семейства S_1 и S_2 полиномов (от двух возможно даже различных семейств неизвестных) как по существу *эквивалентные*, если отвечающие им функторы V_{S_1} и V_{S_2} *изоморфны*.

8. Чтобы уточнить структуру функтора (5), заметим, что этот функтор не меняется, когда к данным уравнениям (3) добавляют все уравнения $F=0$, где F имеет вид

$$F = \sum_{j\in J} A_j F_j, \tag{7}$$

а коэффициенты A_j суть полиномы из алгебры $k(T_i)_{i\in I}$, равные нулю для всех j, кроме конечного числа. Множество всех таких полиномов F является не чем иным, как *идеалом* $\mathfrak{J}$ алгебры P_I, порожденным семейством $(F_j)_{j\in J}$. Поэтому при изучении функторов V_S всегда можно ограничиться случаем функторов вида $V_{\mathfrak{J}}$, где $\mathfrak{J}$ — некоторый идеал в P_I [1]).

Введем теперь в рассмотрение фактор-алгебру

$$A_{\mathfrak{J}} = P_I/\mathfrak{J}. \tag{8}$$

Ясно, что сопоставив произвольной точке $\mathfrak{t} = (t_i)$ из k'^I гомоморфизм $F \longmapsto F(t)$, мы получим функториальное по k' биективное отображение

$$k'^I \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(P_I, k'). \tag{9}$$

---

[1]) Это показывает, что даже в случае, когда множество I конечно, а k является полем, нецелесообразно ограничиваться конечными системами уравнений, поскольку «наиболее естественными» будут системы, у которых множеством индексов служит идеал в P (а таковые весьма редко оказываются конечными множествами!). Разумеется, когда k есть поле, а I конечно, всякий идеал $\mathfrak{J}$ в $P = k[(T_i)_{i\in I}]$ порождается конечным числом элементов («теорема Гильберта о базисе»), так что в этом случае два возможных определения функтора (5) (с помощью конечной системы S и с помощью идеала в P) совпадают. Тем не менее и в этом случае ограничение конечными системами является априори искусственным и технически стеснительным.

Это биективное отображение переводит множество $V_{\mathfrak{J}}(k')$ в множество гомоморфизмов k-алгебр $P_I \to k'$, *обращающихся в нуль на* $\mathfrak{J}$, т. е. в множество гомоморфизмов k-алгебр $A_{\mathfrak{J}} \to k'$. Это означает, что, ограничивая соответствие (9), мы получаем изоморфизм функторов от k':

$$V_{\mathfrak{J}}(k') \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A_{\mathfrak{J}}, k'). \tag{10}$$

При этом биективные отображения (9) и (10) переводят каноническое вложение (6) в инъективное отображение $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A_{\mathfrak{J}}, k') \to \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(P_I, k')$, отвечающее каноническому надъективному гомоморфизму

$$P_I \to A_{\mathfrak{J}} = P_I/\mathfrak{J}. \tag{11}$$

Учитывая, что *всякую* коммутативную k-алгебру A можно записать в виде $P_I/\mathfrak{J}$ с подходящими I и $\mathfrak{J}$, мы получаем, таким образом, что *функторами V_S являются с точностью до изоморфизма представимые функторы* [1])

$$V_A\colon k' \mapsto \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k') \tag{12}$$

и только они.

Вложение $V_A \to E^I$ такого функтора в аффинное пространство (при подходящем множестве индексов I) является *функториальным по k'* инъективным отображением

$$V_A(k') \to k'^I.$$

Обратно, пусть имеется функториальное по k' отображение

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k') \to \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(P^I, k'). \tag{13}$$

При $k' = A$ это отображение сопоставляет тождественному отображению 1_A алгебры A некоторой k-гомоморфизм

$$\pi\colon P_I \to A, \tag{14}$$

причем в силу функториальности отображение (13) будет не чем иным, как отображением $u \mapsto u \circ \pi$. Если при этом гомоморфизм π *надъективен*, отображение (13), очевидно, инъективно (обратное неверно). Таким образом, любое вложение $V_A \to E^I$, получается с помощью некоторого надъективного гомоморфизма π. При этом задание такого гомоморфизма равносильно заданию образов неизвестных T_i при этом гомоморфизме, т. е. заданию системы образующих $(t_i)_{i\in I}$ k-алгебры A.

---

[1]) В основном тексте книги (гл. 0, Предварительные сведения, § 1, Представимые функторы, стр. 19 и 22) дается следующее определение:

(1.11) Обозначим через **Ens** категорию множеств. Пусть **C** — некоторая категория. Для любых двух объектов X и Y из **C** положим $h_X(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$; для всякого морфизма $u\colon Y \to Y'$ из **C** обозначим через $h_X(u)$ отображение $v \mapsto vu$ множества $\mathrm{Hom}(Y', X)$ в $\mathrm{Hom}(Y, X)$. Из этих определений сразу же следует, что $h_X\colon \mathbf{C}^\circ \to \mathbf{Ens}$ является *контравариантным функтором*, т. е. объектом категории $\mathbf{Hom}(\mathbf{C}^\circ, \mathbf{Ens})$ ковариантных функторов из категории $\mathbf{C}^\circ$, двойственной к категории **C**, в категорию **Ens**.

(1.1.8) Пусть F — контравариантный функтор из **C** в **Ens**; говорят, что функтор F *представим*, если существует такой объект $X \in \mathbf{C}$, что функтор F *изоморфен* функтору h_X. (*Прим. перев.*)

9. Эти соображения показывают (если принять во внимание элементарные свойства представимых функторов), что категория функторов

$$\mathbf{k\text{-}alg} \longrightarrow \mathbf{Ens},$$

отвечающих системам уравнений (3) (т. е. функторов вида V_S), *эквивалентна категории, двойственной к категории k-алгебр* **k-alg**, в этой эквивалентности k-алгебре A отвечает функтор V_A, определяемый соотношением (12) (и зависящий от A контравариантно). Можно поэтому сказать, что изучение свойств функторов V_S, не зависящих от вложения (6), изучение, которое мы представили выше как основную цель алгебраической геометрии над k, в точности равносильно изучению *произвольных k-алгебр A*.

В соответствии $A \longleftrightarrow V_A$ k-алгебрам A конечного типа отвечают подфункторы функторов E^I «конечного ранга», т. е. таких, у которых I конечно. Поэтому (неудачное) ограничение в (3) конечными семействами неизвестных означало бы, что мы ограничиваемся изучением исключительно k-алгебр конечного типа.

Изучение функторов V_S вместе с *данным* вложением (6) означает с этой точки зрения изучение k-алгебр A с *данной* системой образующих $(t_i)_{i \in I}$, или, что равносильно, изучение *идеалов* в кольцах полиномов P_I. В частности, мы видим, что при фиксировании I соответствие

$$\mathfrak{J} \longmapsto V_{\mathfrak{J}}$$

между идеалами в P и подфункторами функтора E^I, имеющими вид V_S, является *инъективным* соответствием: *идеал $\mathfrak{J}$ известен, коль скоро известен подфунктор $V_{\mathfrak{J}}$ функтора E^I, т. е. коль скоро для любой k-алгебры k' известно множество решений системы уравнений* (3), *определяемой идеалом $\mathfrak{J}$*. Действительно, $\mathfrak{J}$ есть идеал всех таких полиномов F, что соответствующая полиномиальная функция $\mathbf{t} \to F(\mathbf{t})$ обращается в *нуль* на $V(k')$ для *любой* k-алгебры k'. Это показывает также, что для любых двух идеалов $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}'$ кольца P_I имеет место эквивалентность

$$(15) \qquad (\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}') \Longleftrightarrow (V_{\mathfrak{J}} \supset V_{\mathfrak{J}'}).$$

10. Следует особенно отметить разницу, весьма важную в вопросе оснований, между результатами, связанными с рассмотрением *произвольных* k-алгебр k', и тем, что происходит, когда ограничиваются рассмотрением k-алгебр k', являющихся полями, или же — более общий случай — являющихся *произведенными алгебрами* (т. е. алгебрами без нильпотентных элементов $\neq 0$). Вообще пусть $\mathbf{C}$ — какая-либо подкатегория категории **k-alg**, состоящая из приведенных k-алгебр (например, категория всех приведенных k-алгебр или всех k-алгебр, являющихся полями, или же категория, имеющая единственный объект, который является либо приведенной, k-алгеброй, либо полем), и пусть $V_{\mathfrak{J},\mathbf{C}}$ — *ограничение* функтора $V_{\mathfrak{J}}$ на $\mathbf{C}$. Непосредственно очевидно, что $V_{\mathfrak{J},\mathbf{C}}$ не изменится, если систему уравнений $F = 0$, где F пробегает идеал $\mathfrak{J}$, заменить системой уравнений $F = 0$, где F пробегает множество всех полиномов, некоторая *степень* которых F^n принадлежит идеалу $\mathfrak{J}$. Множество всех таких полиномов — прообраз в P_I нильрадикала алгебры $A = P_I/\mathfrak{J}$ — называется *радикалом* $\mathfrak{r}(\mathfrak{J})$ идеала $\mathfrak{J}$. Таким образом,

$$V_{\mathfrak{J}, \mathbf{C}} = V_{\mathfrak{r}(\mathfrak{J}), \mathbf{C}}. \tag{16}$$

Поскольку неравенство $\mathfrak{r}(\mathfrak{J}) \neq \mathfrak{J}$ возможно[1]), соответствие $\mathfrak{J} \mapsto V_{\mathfrak{J}, \mathbf{C}}$, вообще говоря, не инъективно. Тем не менее, если $\mathfrak{J} = \mathfrak{r}(\mathfrak{J})$ и если категория $\mathbf{C}$ содержит поля отношений всех целых фактор-алгебр k-алгебры P_I, то $V_{\mathfrak{J}, \mathbf{C}}$ полностью определяет $\mathfrak{J}$. Действительно, идеал $\mathfrak{J} = \mathfrak{r}(\mathfrak{J})$ представляет собой пересечение всех простых идеалов $\mathfrak{p}$ кольца P_I, содержащих идеал $\mathfrak{J}$ (Bourbaki, Alg. comm. chap. II, § 2, n° 6, prop. 13), так что для всякого полинома $F \in P_I$, не лежащего в $\mathfrak{J}$, существует такой простой идеал $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{J}$, что $F \notin \mathfrak{p}$. Следовательно, полиномиальная функция $\mathbf{t} \mapsto F(\mathbf{t})$ в k'^I, где k' — поле отношений целой алгебры $P_I/\mathfrak{p}$, не будет тождественным нулем на $V_{\mathfrak{J}}(k')$, поскольку образ полинома F в алгебре $P_I/\mathfrak{p}$ (и, a fortiori, в алгебре $P_I/\mathfrak{J}$) не равен нулю. Таким образом, при указанном условии на категорию $\mathbf{C}$ *отображение* $\mathfrak{J} \mapsto V_{\mathfrak{J}, \mathbf{C}}$ *ограниченное на множество идеалов, совпадающих со своим радикалом, является инъективным отображением.* Более того, то же самое рассуждение показывает, что при тех же условиях на категорию $\mathbf{C}$ имеет место эквивалентность

$$(\mathfrak{r}(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{J}')) \Leftrightarrow (V_{\mathfrak{J}, \mathbf{C}} \supset V_{\mathfrak{J}', \mathbf{C}})^{2)}. \tag{17}$$

11. *Можно поэтому сказать, что рассмотрение одних только приведенных k-алгебр k' в качестве колец, в которых должны лежать координаты решений полиномиальных систем уравнений* (3), *равносильно построению алгебраической геометрии, в которой не делается различия между идеалом $\mathfrak{J}$ (некоторой алгебры полиномов P_I) и его радикалом $\mathfrak{p}(\mathfrak{J})$; или же, в терминах фактор-колец $A = P_I/\mathfrak{J}$, в которой не делается различия между k-алгеброй A и ее фактор-алгеброй по нильрадикалу.*

Подобная точка зрения не только априори искусственна; опыт показывает, что она недостаточна как для выражения большого числа важных явлений алгебраической геометрии (в частности, явлений инфинитезимальной природы), так и для развития существенных технических приемов (например, техники спуска или техники перехода от формальной геометрии к алгебраической (см. A. Grothendieck, Fondements de la géometrie algebraique. Extraits du Seminaire Bourbaki, Paris, 1957—1962). С развертыванием нашего трактата все более очевидной будет становиться важная роль

---

[1]) Достаточно взять в кольце $P = k[X]$ идеал $\mathfrak{J}$, порожденный элементом X^2. Тогда $\mathfrak{r}(\mathfrak{J}) = (X)$.

[2]) Знаменитая «теорема Гильберта о нулях» (Bourbaki, Alg. comm., chap. V, § 3, n°3, prop. 2) показывает, что эквивалентность (17), а следовательно, и инъективность отображения $\mathfrak{J} \mapsto V_{\mathfrak{J}, \mathbf{C}}$ на множестве радикальных идеалов $\mathfrak{J}$ имеет место также и в случае, когда k является полем, множество I конечно, а категория $\mathbf{C}$ обладает лишь тем свойством, что ей принадлежат все *конечные* расширения поля k (например, если k алгебраически замкнуто, то эта категория может содержать только одно k). Действительно, радикал $\mathfrak{r}(\mathfrak{J})$ является тогда пересечением всех *максимальных* идеалов $\mathfrak{m}$ алгебры P_I, содержащих идеал $\mathfrak{J}$, т. е. идеалов, для которых фактор-алгебра $P_I/\mathfrak{m}$ является конечным расширением поля k.

локальных артиновых колец, которые интуитивно представляют собой «бесконечно малые окрестности» точек на алгебраических многообразиях.

12. В рамках классической точки зрения алгебраической геометрии XIX века, где роль кольца k играет поле $\mathbf{C}$ и где это основное поле не «шевелится», множество $V(k) = V_S(k) \subset k^I$ называется *алгебраическим многообразием*, определяемым системой (3), а интерес концентрируется на его геометрических свойствах (подмногообразия, пересечения с другими многообразиями, погруженными в то же самое аффинное пространство k^I и т. д.). Мы увидим, что и в алгебраической геометрии, понимаемой, как мы это описали в п. 7, можно сопоставить изучаемому функтору V_S (или V_A; см. формулу (12)) некий вполне определенный «геометрический» объект, заменяющий и обобщающий классические «алгебраические многообразия». Поскольку мы изучаем функтор V_S независимо от его возможных вложений (6), мы должны определить этот объект (который будет называться *спектром* алгебры A), *отправляясь только от самой k-алгебры A*.

В классической алгебраической геометрии алгебра A появляется как кольцо *полиномиальных функций на многообразии*: $V(k)$, т. е. функций, являющихся ограничениями полиномиальных функций на аффинном пространстве k^I, а биективное соответствие (10) между многообразием и множеством $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k)$ возникает при сопоставлении произвольной точки $\mathbf{t} \in V(k)$ гомоморфизма $f \longmapsto f(t)$, относящего функции f ее значение в точке $\mathbf{t}$ (идея, принадлежащая Дедекинду и Веберу) [1]).

Та же самая интерпретация соответствия (10) возможна, разумеется, и в общем случае: если $f \in A_{\mathfrak{J}}$, то для любого полинома $F \in P_I$, каноническим образом которого в A служит f, ограничение на $V_{\mathfrak{J}}(k')$ полиномиальной функции $\mathbf{t} \longmapsto F(\mathbf{t})$ на k'^I не зависит от выбора полинома F, так что элемент f однозначно определяет некоторую функцию $f_{k'}$ на $V_{\mathfrak{J}}(k')$ и (при фиксированной алгебре k') отображение

$$f \longmapsto f_{k'}$$

k-алгебры A в k-алгебру $k'^{V(k')}$ отображений $V(k')$ в k' является *гомоморфизмом* (в общем случае не инъективным) k-алгебр. Поэтому произвольной точке $\mathbf{t} \in V(k')$ отвечает некоторый k-гомоморфизм

$$f \longmapsto f_{k'}(t) \tag{18}$$

k-алгебры A в k-алгебру k'. Естественно обозначать этот гомоморфизм просто символом $\mathbf{t}$, писать $f(\mathbf{t})$ или $\mathbf{t}(f)$ вместо $f_{k'}(\mathbf{t})$ и называть элементы $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k')$ «точками V_A со значениями в k'» (или «с координатами в k'»).

13. Тем самым мы вновь вводим «геометрический» язык, однако теперь мы имеем дело уже не с одним вполне определенным «объектом», как в классической алгебраической геометрии, а с «семейством объектов», меняющихся при изменении алгебры k'. Чтобы получить спектр A, мы ограничим наше внимание «геометрическими точками из V_A», т. е. «точками» со значениями

---

[1]) Ввиду теоремы о нулях и того факта, что поле $k = \mathbf{C}$ алгебраически замкнуто, имеется также биективное соответствие между многообразием $V(k)$ и множеством максимальных идеалов («максимальным спектром») алгебры A.

в k-алгебрах k', являющихся *полями*, и установим между этими точками (отвечающими различным полям k') *отношение эквивалентности*. Именно, мы скажем, что две геометрические точки

$$\mathfrak{t}'\colon A \to k', \qquad \mathfrak{t}''\colon A \to k''$$

эквивалентны, если существует такая третья геометрическая точка $s\colon A \to K$ и такие (необходимо инъективные) k-гомоморфизмы

$$f'\colon k' \to K, \qquad f''\colon k'' \to K,$$

что $s = f' \circ \mathfrak{t}' = f'' \circ \mathfrak{t}''$, т. е. такие, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & k' \arrow[dr, "f'"] & \\ A \arrow[ur, "\mathfrak{t}'"] \arrow[dr, "\mathfrak{t}''"'] & & K \\ & k'' \arrow[ur, "f''"'] & \end{tikzcd} \tag{19}$$

Покажем, что это отношение равносильно отношению $\mathfrak{t}'^{-1}(0) = \mathfrak{t}''^{-1}(0)$ (чем и доказывается, что это есть отношение эквивалентности). Действительно, поскольку гомоморфизмы f' и f'' инъективны, из коммутативности диаграммы (19) вытекает, что $t'^{-1}(0) = t''^{-1}(0)$. Обратно, пусть $t'^{-1}(0) = t''^{-1}(0) = \mathfrak{p}$. Поскольку всякое подкольцо произвольного поля является целым кольцом, идеал $\mathfrak{p}$ является *простым идеалом* алгебры A. Следовательно, поля k' и k'' мы можем считать расширениями одного и того же поля $\varkappa(\mathfrak{p})$ — поля отношений фактор-алгебры $A/\mathfrak{p}$. Но, как известно (B o u r b a k i, Alg. comm., chap. V, § 4, n° 2, prop. 2), в этом случае существует поле K и $\varkappa(\mathfrak{p})$-мономорфизмы $f'\colon k' \to K$, $f''\colon k'' \to K$, для которых диаграмма (19) коммутативна.

Классы эквивалентности этого отношения (которые называются *местами* алгебры A)[1]) находятся поэтому в биективном соответствии с простыми идеалами алгебры A и притом со *всеми* простыми идеалами. Действительно, любой простой идеал $\mathfrak{p}$ соответствует классу эквивалентности геометрической точки $A \mapsto A/\mathfrak{p} \mapsto \varkappa(\mathfrak{p})$, где $\varkappa(\mathfrak{p})$ — поле отношений целой алгебры $A/\mathfrak{p}$, а обе стрелки — канонические гомоморфизмы.

Таким образом, имеет место *каноническое биективное соответствие между множеством «мест» k-алгебры A и множеством ее простых идеалов*. На этом основании множество $\operatorname{Spec}(A)$ простых идеалов алгебры A мы можем считать *множеством точек* того «геометрического» объекта, которым должен быть спектр алгебры A. В классическом случае, когда $k = \mathbf{C}$, а A является $\mathbf{C}$-алгеброй конечного типа, это множество *содержит* отвечающее A «алгебраическое многообразие» — множество геометрических точек из V_A со значениями в k.

14. Множество $\operatorname{Spec}(A)$ естественным образом снабжается *топологией*, связанной с обобщением понятия «подмногообразия» алгебраического многообразия. Классически подмногообразие алгебраического многообразия, задаваемого системой уравнений (3), определяется системой уравнений,

---

[1]) Осведомленный читатель распознает под этим названием «общие» или «порождающие» точки алгебраических многообразий, как они определяются, например, у Зарисского или А. Вейля.

содержащей систему (3); иначе говоря, если рассматривать кольцо A как кольцо «полиномиальных функций» на многообразии, то подмногообразие определяется как множество, на котором некоторые из этих функций *обращаются в нуль*. В общем случае мы приходим, таким образом, к рассмотрению некоторого подмножества S k-алгебры A, и — для всякой k-алгебры k' — подмножества множества $V_A(k')$, на котором обращаются в нуль все функции $f_{k'}$, отвечающие (см. п. 12) элементам $f \in S$. Если, как в п. 13, ограничиться геометрическими точками со значениями в *полях*, то мы придем к рассмотрению множества $V(S)$ «мест» тех из этих точек, в которых обращаются в нуль все функции $f_{k'}$, $f \in S$. Из п. 13 вытекает, что это множество находится в биективном соответствии с *множеством простых идеалов алгебры* A, *содержащих подмножество* S. Это подмножество спектра Spec (A) называется «алгебраическим множеством, определяемым подмножеством S». Заметим, что это множество не меняется при замене S радикалом идеала, порожденного S. Поскольку этот радикал совпадает с пересечением простых идеалов алгебры A, содержащих S, мы видим, таким образом, что имеет место биективное соответствие между множеством радикальных идеалов алгебры A и множеством подмножеств множества Spec(A), имеющих вид $V(S)$. Без труда показывается (B o u r b a k i, Alg. comm. chap. II, § 4), что эти множества $V(S)$ могут быть приняты за замкнутые множества некоторой топологии на Spec(A), называемой *спектральной топологией* или *топологией Зарисского*. При этом (loc. cit.) пространство X, получаемое при оснащении Spec(A) этой топологией, квазикомпактно и удовлетворяет аксиоме Колмогорова [1], но содержит, вообще говоря, точки, не являющиеся замкнутыми множествами (и тем более не хаусдорфово). Для любого элемента $f \in A$ множество $D(f) = X \setminus V(f)$ открыто в X, и эти множества $D(f)$ (при всех $f \in A$) образуют *базу* спектральной топологии.

15. Если мы хотим, чтобы по объекту «спектр A», отвечающему кольцу A, можно было восстанавливать это кольцо, то только что построенное топологическое пространство $X = \text{Spec}(A)$ явно слишком «бедно». Например, для *любого поля* K получается пространство, сводящееся к единственной точке. Ясно, что рассмотрение этого пространства не дает ничего нового для изучения поля K.

Последний пример показывает, что бесполезно пытаться описать спектр A в одних только тологогических терминах: надо оснастить топологическое пространство $X = \text{Spec}(A)$ добавочным строением, в котором участвовала бы алгебра A. Образец, которому мы будем следовать, дают нам аналитические многообразия (частным случаем их являются алгебраические многообразия без особенностей в классическом случае $k = \mathbf{C}$). На всяком открытом множестве $U \subset X$ такого многообразия имеет смысл говорить о (комплексных) функциях, *голоморфных* в U. По А. Картану это определяет некоторый *предпучок колец* на X, в котором открытому множеству U сопоставляется кольцо $\mathcal{O}(U)$ всех функций, голоморфных в U. Поскольку в действительности этот предпучок оказывается *пучком* $\mathcal{O}_X$, то тем самым любое

[1]) Аксиоме отделимости T_0. (*Прим. перев.*)

аналитическое многообразие определяется как топологическое пространство, снабженное пучком колец, или, в иных терминах, как *окольцованное пространство*. В своей фундаментальной работе [FAC] Ж. П. Серр [1]) показал, как можно перенести эту конструкцию в алгебраическую геометрию. Ограничимся сначала классическим случаем ($k = \mathrm{C}$) и предположим, что отвечающее «алгебраическому многообразию» X кольцо «полиномиальных функций» A является *целым* кольцом (случай, в котором говорят, что многообразие «неприводимо», и которым часто ограничиваются в классической алгебраической геометрии). В этом случае поле отношений K кольца A называют «полем рациональных функций» на X; элемент g/f поля K — частное двух полиномиальных функций (с $f \neq 0$) — является функцией, *определенной* в тех точках $x \in X$, где $f(x) \neq 0$, но, вообще говоря, не продолжимой по непрерывности в точки, где $f(x) = 0$ («полюсы» или «точки неопределенности»). После Римана эти функции традиционно играют на алгебраическом многообразии ту роль, какую на аналитическом многообразии играют «мероморфные функции». Мы приходим, таким образом, к рассмотрению предпучка $U \mapsto \mathcal{O}(U)$ на X, где $\mathcal{O}(U)$ (для произвольного открытого множества $U \subset X$) — кольцо рациональных функций, определенных на U.

Аналогичное определение можно дать в случае, когда A является *произвольным* целым кольцом, а X — топологическим пространством $\mathrm{Spec}(A)$. Здесь нужно ограничиться открытыми множествами U вида $D(f)$ (где $f \in A$ и $f \neq 0$), т. е. открытыми множествами построенной выше базы спектральной топологии. За кольцо $\mathcal{O}(U)$ принимается в этом случае кольцо A_f всех элементов поля K, имеющих вид g/f^n (n — произвольное целое $\geqslant 0$, а $g \in A$). Оказывается, однако, что фактически не надо делать *никаких* предположений о кольце A, поскольку кольцо A_f определено для *любого* элемента f (являющегося делителем нуля или нет; см. Bourbaki, Alg. comm., chap. II, § 5, n° 1). При этом оказывается, что соответствие $D(f) \mapsto A_f$ определяет *пучок* k-алгебр на X, обозначаемый символом $\widetilde{A}$ или $\mathcal{O}_X$, так что объектом «спектр A», сопоставляемым кольцу A, оказывается в конечном итоге *окольцованное пространство* $(X, \mathcal{O}_X)$. Подробные доказательства даются в гл. I, § 1, где, в частности, показано, что слоями пучка колец $\mathcal{O}_X$ служат *локальные кольца* $A_\mathfrak{p}$ — локализации кольца A на его простых идеалах $\mathfrak{p}$. Таким образом, $(X, \mathcal{O}_X)$ является *локально k-окольцованным пространством*. При этом кольцо A *восстанавливается* (с точностью до изоморфизма) по его спектру, поскольку $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \simeq A$.

В гл. I, § 1 будет также показано, каким образом всякому гомоморфизму

$$\varphi: A \to A' \tag{20}$$

k-алгебр функториально сопоставляется некоторый морфизм локально k-окольцованных пространств

$$\mathrm{Spec}(\varphi): X' = \mathrm{Spec}(A') \to X = \mathrm{Spec}(A), \tag{21}$$

[1]) J. P. Serr, Faisceaux algébriques coherentes, Ann. of Math. 61 (1955), 197—278; русский перевод: Ж. П. Серр, Когерентные алгебраические пучки, в сб. «Расслоенные пространства», М., ИЛ, 1958, стр. 372—450. (*Прим. перев.*)

обладающий тем свойством, что соответствующий гомоморфизм k-алгебр

$$\Gamma(X,\ \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X',\ \mathcal{O}_{X'})$$

совпадает (в силу канонических изоморфизмов $\Gamma(X,\ \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} A$, $\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \xrightarrow{\sim} A'$) с гомоморфизмом (20). Отсюда, в частности, вытекает, что отображение

$$(22)\quad \varphi \mapsto \mathrm{Spec}(\varphi)\colon\ \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}\ (A,\ A') \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(A'),\ \mathrm{Spec}(A))$$

(где последний член представляет собой множество морфизмов локально k-окольцованных пространств) инъективно. Более того, оказывается, что это отображение даже *биективно*. Иными словами, *контравариантный функтор $A \mapsto \mathrm{Spec}(A)$ из категории k-алгебр в категорию локально k-окольцованных пространств является вполне инъективным функтором*. Это позволяет (с учетом обычного «обращения стрелок» при переходе от категории к двойственной категории) отождествлять на практике категорию k-алгебр с некоторой полной подкатегорией категории локально k-окольцованных пространств, а именно с подкатегорией, образованной пространствами, изоморфными спектрам $\mathrm{Spec}(A)$ произвольных k-алгебр A. Эти локально k-окольцованные пространства называются *аффинными схемами* над k. Основная задача алгебраической геометрии над полем k, которую мы выше охарактеризовали как задачу изучения k-алгебр, оказывается, таким образом, равносильной задаче изучения новых алгебраико-топологических объектов — аффинных схем над k. Что же касается исходного функтора V_A, определенного формулой (12), то ввиду биективности соответствия (22), он выражается через $\mathrm{Spec}(A)$ по формуле

$$(23)\qquad V_A(k') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k'),\ \mathrm{Spec}(A)),$$

где правая часть имеет тот же смысл, что и в (22).

16. На первый взгляд может показаться, что переход к спектрам приводит только к замене таких достаточно просто определяемых объектов, как k-алгебры, гораздо более сложными аффинными схемами. В действительности же даже в *локальных* вопросах перевод соответствующих свойств на «геометрический» язык теории аффинных схем часто делает их менее абстрактными и более доступными своеобразной интуиции, существенно облегчающей обращение с ними. Конечно, в окончательном итоге все доказательства должны все же проводиться в этом случае чисто алгебраически. Однако решающее преимущество, которое несет с собой геометрический язык аффинных схем, состоит в том, что он позволяет без особого труда выйти за рамки коммутативной алгебры и перейти на *проективную* точку зрения. Еще в начале XIX века было понято, что теория полиномиальных систем уравнений вида (3), которую можно назвать *аффинной* алгебраической геометрией, приобретает простоту и изящество только после перехода к *проективной* [1]) алгебраической геометрии. Для включения проективной точки зрения в современную алгебраическую геометрию понятие аффинной схемы совершенно неоценимо.

---

[1]) Безусловно, не случайно, что одни и те же люди, Монж и Понселе, стоят у истоков как перехода к проективному пространству, так и перехода к полю комплексных чисел.

Классическое комплексное проективное пространство $P^n_{\mathbf{C}}$ получается «склеиванием» $(n+1)$-го экземпляра аффинного пространства, скажем, гиперплоскостей $x_j = 1$ в пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$ $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$: две точки этих гиперплоскостей отождествляются, если прямая, соединяющая их в пространстве $\mathbf{C}^{n+1}$, проходит через начало координат. Аналогичные процессы «склеивания» встречаются и в других областях математики и притом в гораздо более общем контексте: достаточно указать, например, на топологические, дифференциальные, аналитические и т. д. «многообразия». При всех этих «склеиваниях» критическим моментом является склеивание *топологий*: после того как топологии склеены, дополнительные строения склеиваются уже автоматически. Причину этого впервые выяснил А. Картан, заметивший, что все разнообразные многообразия являются *окольцованными пространствами* того или иного типа, так что во всех этих случаях операция «склеивания» сводится к общей операции *склеивания пучков*.

После того как мы свели коммутативную алгебру к теории некоторых специальных окольцованных пространств, нам достаточно применить общую процедуру склеивания пучков, чтобы получить, наконец, основное понятие современной алгебраической геометрии — понятие *схемы* над k: это попросту *локально k-окольцованное пространство* X, обладающее покрытием (X_α) открытыми множествами, являющимися (по отношению к индуцированному на них строению окольцованного пространства) аффинными *схемами* над k.

Подобный объект X определяет функтор

$$k' \mapsto X(k') \colon \mathbf{k\text{-}alg} \to \mathbf{Ens} \tag{24}$$

посредством формулы (обобщающей формулу (23))

$$X(k') = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k'),\ X) \tag{25}$$

(«точки схемы X со значениями в k'»). Можно показать, что по функтору (24) схема X восстанавливается с точностью до изоморфизма. Более того, функтор $X \mapsto X(\ ,\ )$ из категории схем над k в категорию функторов $\mathbf{k\text{-}alg} \to \mathbf{Ens}$, определяемый формулой (25), оказывается *вполне инъективным* функтором и потому позволяет отождествить[1]) категорию схем с некоторой полной подкатегорией категории функторов

$$\mathbf{k\text{-}alg} \to \mathbf{Ens}.$$

17. Остается указать, что «основное кольцо» k играет во всем предшествующем только вспомогательную роль. Окольцованное пространство $\mathrm{Spec}(A)$ для данной k-алгебры A фактически зависит только от *кольцевого* строения этой алгебры. При этом задание гомоморфизма $k \to A$, определяющего строение k-алгебры, равносильно заданию k-алгебраического строения

---

[1]) С этой точки зрения можно считать, что введение схем является в основном технической уловкой, позволяющей особенно удобным и интуитивным способом описать процесс склейки «аффинных» функторов. Дальнейшие подробности, касающиеся связей между окольцованными пространствами и функторами $\mathbf{k\text{-}alg} \to \mathbf{Ens}$, см. в гл. I книги M. Demazure, P. Gabriel, Groupes algébriques, Amsterdam, North-Holland; Paris, Masson, 1970, которая содержит также превосходное с технической точки зрения изложение понятия схемы.

в пучке колец $\mathcal{O}_X$, т. е. (см. п. 15 при $k = Z$) заданию некоторого морфизма

$$\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k)$$

локально окольцованных пространств.

Поэтому представляет интерес определить сначала понятие схемы в «абсолютном» смысле (т. е. схемы над Z), а затем вводить «схемы над k» (или k-схемы) как схемы X, пучки колец $\mathcal{O}_X$ которых снабжены строением k-алгебры, т. е. для которых задан некоторый гомоморфизм колец $k \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Задание только гомоморфизма равносильно заданию некоторого морфизма локально окольцованных пространств

$$X \to \mathrm{Spec}(k).$$

Последний способ наиболее предпочтителен, поскольку он немедленно может быть обобщен. В этом обобщении вместо кольца k (или лучше вместо аффинной схемы $\mathrm{Spec}(k)$) рассматривается *произвольная схема* Y, и в результате получается понятие *схемы* X *над схемой* Y (или Y-*схемы*). Это понятие, которое будет подробно изучено в нашем трактате, является, интуитивно, полным аналогом понятия расслоенного пространства (или же, более общо́, топологического пространства X *над* топологическим пространством Y, т. е. пространства X рассматриваемых вместе с некоторым непрерывным отображением $f\colon X \to Y$), играющего столь большую роль в современной топологии.

Предметом алгебраической геометрии в том смысле, в каком мы это понимаем в данном трактате, является, таким образом, изучение схем — локально окольцованных пространств специального типа; или же, что равносильно, изучение функторов (24), *которые ими порождаются.*