27.8.65

Mon Cher Serre,

Je continue à retourner dans tous les sens les questions de cycles algébriques; techniquement parlant je vois la question plus clairement, mais cependant il manque toujours le pas décisif. Comme je te connais allergique à la cohomologie, j'ai envie de t'énoncer les deux conjectures-clef, qu'il s'agit de démontrer, de façon purement géométrique i.e. sans parler de cohomologie. X désigne une variété projective lisse connexe sur le corps algébriquement clos k, de dimension n, Y une section hyperplane lisse. Par $C^i(X)$ je désigne le groupe des classes de cycles de codimension i mod équivalence algébrique, tensorisé par $\underline{Q}$, par $\xi \in C^1(X)$ la classe de Y

<u>Conjecture</u> A Pour tout entier i tel que $2i \leqslant n$, le produit par ξ^{n-2i} induit un isomorphisme $C^i(X) \xrightarrow{\sim} C^{n-i}(X)$.

Modulo vérification que je n'ai pas écrite en détail, il suffit même dans cette conjecture de vérifier la surjectivité, et de le faire pour $n = 2i+1$. Le premier cas qui échappe pour le moment est $i=1, n=3$. Cette conjecture implique l'analogue, pour les C^i, des théorèmes connus de Lefschetz sur la comparaison de la cohomologie de X et de Y par les homomorphismes d'image directe et d'image inverse (pour la formulation correcte, se rappeler seulement que C^i devient H^{2i}), en même temps qu'il implique les théorèmes de Lefschetz cohomologiques eux-mêmes, dont la forme formellement la plus forte consiste à affirmer que ξ^{n-i} induit un isomorphisme de H^i et H^{2n-i} pour la cohomologie à coefficients $\underline{Q}_\ell$; je te signale que ce théorème purement cohomologique n'est pas même démontré pour le moment ! N'est démontré que le théorème de Lefschetz "faible" affirmant que la dimension cohomologique d'une variété affine de dimension n est majorée par n, ce qui pour la variété affine $U=X-Y$ prend la forme : $H^i(X) \longrightarrow H^i(Y)$ est bijectif pour $i \leqslant n-2$, injectif pour $i=n-1$, ou encore : $H^i(Y) \longrightarrow H^{i+2}(X)$ est bijectif pour

.../...

43

$i \geq n$, surjectif pour $i=n-1$. En fait, sauf erreur je sais prouver la conj.A à partir de la forme plus faible suivante (dans la nature d'un théorème de Lefschetz "faible") :

Conjecture A'. Pour tout entier i tel que $2i \geq n-1$, l'application image directe $C^i(Y) \longrightarrow C^{i+1}(X)$ est surjective, i.e. tout cycle algébrique de dimension $j < n/2$ sur X est τ-équivalent à l'image d'un cycle algébrique à coeff. rationnels de Y.

Ici encore il suffit sauf erreur de faire $n=2i+1$. D'ailleurs, dans l'argument utilisé pour ramener A à A', il semble qu'il faille démontrer A' sur un corps de base pas nécessairement algébriquement clos, et pour des classes de cycles rationnelles sur ce dernier, ou se borner à énoncer A pour l'équivalence cohomologique (mais alors A perd le caractère "purement géométrique" que je t'avais promis !).

Comme je te l'avais dit, A implique "la formule de Künneth pour les cycles" (j'avais d'ailleurs charrié en prétendant que les deux énoncés sont équivalents). Par là, il implique tous les théorèmes d'entiers qu'on peut désirer (par exemple pour des coefficients de polynômes caractéristiques), à cela près qu'il semble possible qu'il y ait des puissances de $p=$ car k en dénominateur. Cela implique donc les conjectures de Weil, à la seule exception de la question des valeurs absolues des valeurs propres, qui sera justiciable de B . Je te signale aussi que c'est la conjecture A qui semble le minimum minimorum pour donner une définition en forme utilisable de la notion de motif sur un corps.

Conjecture B Supposons $n=2m$, et soit $P^m(X)$ le noyau de l'homomorphisme de multiplication par ξ de $C^m(X)$ dans $C^{m+1}(X)$. Alors la forme $(-1)^m \varepsilon(xx')$ sur $P^m(X)$ est définie positive.

Pour les conjectures de Weil, il suffirait d'ailleurs de prouver que cette forme est positive. Mais la forme forte implique aussi d'autres résultats agréables, comme le fait que τ-équivalence = équivalence numérique (= équivalence homologique à coeff $\mathbb{Q}_\ell$, cette dernière étant coincée entre les deux) et le fait que les $C^m(X)$ sont de dimension finie,

44

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

en fait, que les groupes de classes de cycles pour la τ-équivalence sont de type fini. (De là, on déduit d'ailleurs formellement que $C^m(X)\otimes_{\underline{Q}}\underline{Q}_\ell \longrightarrow H^{2m}(X)(m)$ est injectif, donc que le rang de $C^m(X)$ est majoré par $b_{2m}(X)$). D'autre part, A et B impliquent également que la catégorie des motifs construits par des variétés projectives non singulières est semi-simple, et de façon plus terre à terre, que l'anneau des classes de correspondance algébriques (mod τ-équivalence et tensorisé par $\underline{Q}$) de X est une algèbre finie semi-simple sur $\underline{Q}$, qu'on peut d'ailleurs munir d'une involution et d'une trace satisfaisant les conditions habituelles. On en conclut aussi le résultat suivant, qui peut être considéré dans une certaine mesure comme une généralisation de A (lorsqu'on admet que la variante cohomologique de A est déjà acquise) : Soit $H^{2i}(X) \longrightarrow H^{2i+2r}(X')$ un homomorphisme défini par une classe de correspondance algébrique, et $C^i(X) \longrightarrow C^{i+r}(X')$ l'homomorphisme qu'elle définit sur les cycles. Alors un élément de $C^{i+r}(X')$ est dans l'image de $C^i(X)$ si et seulement si son image dans H^{2i+2r} est dans celle de H^{2i}. - Notes aussi que le résultat de semi-simplicité signalé plus haut impliquerait le résultat de semi-simplicité analogue pour les opérations du groupe de Galois, dans les conjectures de Tate. Enfin, je me suis à peu près convaincu que A et B impliquent également une théorie raisonnable des variétés abéliennes qui interviennent comme variétés de paramètres pour les familles continues de cycles algébriques, et notamment permettent d'obtenir les relations qu'il faut entre ces "jacobiennes intermédiaires" (qui peuvent être conçues comme les "morceaux de nature algébrique" des jacobiennes de Weil) et la cohomologie de dimension impaire. Mais il est fort possible que la démonstration de B soit déjà liée à l'introduction de ces variétés abéliennes.

En tous cas, A et A' me semblent, dans un sens, préliminaires à B, et il semble raisonnable de commencer par elles. Je te signale la forme équivalente assez suggestive de A' :

<u>Conjecture</u> A". Soit U l'ouvert affine (de dimension n) X-Y, alors $C^i(U)=0$ pour tout i tel que $2i > n$.

45

En fait, il est possible que ceci soit vrai pour toute variété affine lisse, et même que pour toute variété (affine ou non) lisse, tout cycle cohomologiquement équivalent à 0 soit τ-équivalent à 0 (pour les variétés projectives, cela résulterait, comme j'ai dit, de A et B).

Ce qu'il faut pour le moment, c'est inventer un procédé pour déformer un cycle de dimension pas trop grande, pour le pousser à l'infini. Peut-être aurais-tu envie d'y réfléchir de ton côté ? Je viens seulement de m'y mettre, aujourd'hui même, et t'écris faute de trouver une idée.

Bien à toi

A. GROTHENDIECK

N.B. $H^i(X)$ désigne la cohomologie à coefficients $\mathbb{Q}_\ell$, éventuellement tordus par une puissance tensorielle de $T_\ell(\mathbb{G}_m)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$, qui est omise dans les notations pour simplifier.

46

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France