

# SUR LES ESPACES DE SOLUTIONS D'UNE CLASSE GÉNÉRALE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Par

A. Grothendieck

à Nancy, France

## Introduction <sup>(1)</sup>.

Ce travail généralise aux espaces de solutions de certaines équations aux dérivées partielles, une idée de J. Silva relative à la détermination des formes linéaires continues sur les espaces de fonctions holomorphes (voir [7]). Dans les premiers paragraphes de [2], j'ai donné en langage moderne une généralisation <sup>(2)</sup> du résultat de J. Silva, en restant dans le cadre familier des fonctions holomorphes, mais en considérant des espaces  $H$  de fonctions holomorphes sur un ouvert du plan complexe, prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel localement convexe à peu près quelconque. Le reste de ce travail donnait des résultats sur la structure topologique des espaces  $H$  envisagés, avec une généralité dépassant en fait de beaucoup le cadre des espaces de fonctions holomorphes, et même des espaces de solutions indéfiniment différentiables des systèmes d'équations aux dérivées partielles les plus généraux. Il ne serait pas utile de répéter ici, pour les espaces que nous allons rencontrer maintenant, les mêmes développements, ni de considérer des espaces de fonctions ou de formes différentielles à valeurs vectorielles, ces généralisations résultant sans changement essentiel des techniques exposées dans [2], une fois mis au point le formalisme qui doit remplacer l'intégrale de Cauchy. Nous nous bornons donc ici à une généralisation dans une direction différente. La lecture de [2] n'est pas requise pour la compréhension de ce qui suit, ni même une bonne connaissance des espaces vectoriels topologiques (citons pourtant pour mémoire l'article [1], dont nous suivons les notations). En revanche, nous nous appuyons de façon essentielle sur la partie élémentaire de la théorie des formes différentielles-distributions

---

1. Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

2. M. G. Köthe donne une généralisation analogue dans [5].

sur une variété indéfiniment différentiable quelconque  $V$ , et de la théorie des noyaux distributions (théories dues à L. Schwartz), qui forment manifestement le cadre naturel de la théorie de J. Silva. Nous donnons au §1 un sommaire du strict indispensable (ne serait-ce que pour fixer les notations); on trouvera dans [4] un exposé un peu plus détaillé de la théorie des formes différentielles-distributions sur une variété, généralisation naturelle des notions introduites en détail pour  $\mathbf{R}^n$  dans [6].

Le §2 donne quelques compléments sur les équations aux dérivées partielles admettant un noyau inverse régulier  $E^{(3)}$ . Nous y introduisons des accouplements généralisant les intégrales de Cauchy ou de Green. On définit les solutions "régulières à l'infini" de l'équation  $D.T = 0$  dans un ouvert  $U$  par une propriété d'orthogonalité. Il apparaît que ce sont les "potentiels" (par rapport au noyau inverse  $E$ ) de distributions à support compact (th. 1), et que l'espace de toutes les solutions dans l'ouvert  $U$  (supposé voisinage de l'infini) de l'équation  $D.T = 0$  est somme directe du sous-espace formé des solutions régulières à l'infini, et du sous-espace formé des solutions qui se prolongent en une solution définie sur toute la variété  $V$  — ce qui généralise des résultats bien familiers dans les cas classiques.

Grâce au formalisme ainsi introduit, l'exposé au §3 de la théorie de dualité proprement dite se fait très facilement: on obtient par exemple une dualité entre l'espace des solutions indéfiniment différentiables dans l'ouvert  $U$  de l'équation  $D.S = 0$ , et des solutions-distributions au voisinage de  $\complement U$  (le complémentaire de  $U$ ) de l'équation  ${}^tD.T = 0$  ( ${}^tD$  étant l'opérateur transposé de  $D$ ), dualité qui a, lorsque l'opérateur différentiel  $D$  admet un noyau inverse à gauche régulier (resp. un noyau inverse bilatère très régulier) les propriétés les plus importantes (resp. toutes les propriétés) qu'on pouvait raisonnablement espérer (voir théorèmes 4 et 5 pour plus de détails).

Enfin, un appendice est destiné à donner une systématisation algébrique des accouplements envisagés dans les §§ 2 et 3. Comme cette

---

3. Voir définition au §1. Signalons qu'en pratique, l'existence d'un noyau inverse bilatère régulier ne semble pas très restrictive pour un opérateur différentiel (du moins localement). Ainsi, il semble très vraisemblable que tout opérateur différentiel ordinaire à coefficients constants dans  $\mathbf{R}^n$  ait un noyau inverse du type de composition.

systématisation utilise la définition de l'homologie et le théorème de De Rham, contrairement aux paragraphes antérieurs, nous ne l'avons pas donnée au cours du texte, qui reste essentiellement élémentaire.

Pour simplifier, nous nous plaçons dans toute la suite sur une variété indéfiniment différentiable orientée, bien que la notion de forme différentielle paire ou impaire (voir [4]) aurait pu nous en dispenser. De plus, nous nous plaçons dans le cas d'un opérateur différentiel  $D$  dans l'espace des formes différentielles sur  $V$ , bien qu'un formalisme identique vaudrait pour un opérateur différentiel  $D$  défini dans un espace de champs de tenseurs de type quelconque (à condition d'introduire les champs de tenseurs "de type dual", et l'opérateur transposé  ${}^tD$  défini sur ces derniers).

Pour ne pas allonger cet article, nous nous dispensons de multiplier les exemples d'applications de la théorie à des cas concrets.

## 1. Rappels et notations relatifs aux distributions et aux noyaux-distributions sur une variété indéfiniment différentiable.

1. **Espaces de formes différentielles-distributions.** Soit  $V$  une variété indéfiniment différentiable orientée de dimension  $n$ . Pour tout entier  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$ ,  $\mathbf{E}_p(V)$  désigne l'espace des formes différentielles indéfiniment différentiables de degré  $p$  sur  $V$ ,  $\mathbf{D}_p(V)$  le sous-espace formé des formes différentielles à support compact.  $\mathbf{D}'_p(V)$  désigne l'espace des "formes différentielles-distributions" de degré  $p$  sur  $V$  (ou simplement, des "distributions de degré  $p$ " sur  $V$ ) qui généralisent les formes différentielles ordinaires de degré  $p$ ,  $\mathbf{E}'_p(V)$  le sous-espace formé des distributions à support compact. On a  $\mathbf{E}_p(V) \subset \mathbf{D}'_p(V)$ , et  $\mathbf{D}_p(V) \subset \mathbf{E}'_p(V)$ . Le degré d'une distribution est mis en évidence, le cas échéant, par un indice placé en dessous du symbole qui représente cette distribution, comme dans  $T_p$ .

On peut faire le "produit extérieur"  $S \wedge T$  de deux distributions de degré  $p$  et  $q$  respectivement, lorsque l'une d'elles est une forme différentielle indéfiniment différentiable; on obtient une distribution de degré  $p+q$  (nulle si  $p+q > n$ ), dont le support est contenu dans l'intersection des supports de  $S$  et  $T$ . D'autre part, on peut intégrer toute distribution  $T$  de degré  $n$ .

$n$  à support compact, l'intégrale est notée  $\int_n T$ . Cela permet de définir un accouplement entre  $\mathbf{D}_p(V)$  et  $\mathbf{D}'_{n-p}(V)$  (resp. entre  $\mathbf{E}_p(V)$  et  $\mathbf{E}'_{n-p}(V)$ ) par la formule

$$(1) \quad \left\langle \varphi_p, T_{n-p} \right\rangle = \int \varphi_p \wedge T_{n-p}.$$

Bien entendu, on peut aussi poser

$$(2) \quad \left\langle T_{n-p}, \varphi_p \right\rangle = \int T_{n-p} \wedge \varphi_p = (-1)^{p(n-p)} \left\langle \varphi_p, T_{n-p} \right\rangle.$$

Grâce à cet accouplement, chacun des espaces  $\mathbf{D}_p(V)$  et  $\mathbf{D}'_{n-p}(V)$  (resp.  $\mathbf{E}_p(V)$  et  $\mathbf{E}'_{n-p}(V)$ ) peut être considéré comme dual de l'autre;  $\mathbf{E}_p(V)$  est un espace du type  $(F)$  (et même du type  $(M)$  — voir [1]).

Parmi les distributions de degré  $n-p$ , signalons pour mémoire les "chaines continûment différentiables" de dimension  $p$ ; pour une telle chaîne  $\overset{p}{C}$ , on a

$$\left\langle \varphi_p, \overset{p}{C} \right\rangle = \int_{\overset{p}{C}} \varphi_p$$

(intégrale ordinaire de la forme différentielle  $\varphi_p$  sur la chaîne  $\overset{p}{C}$ ); ou les multivecteurs  $\overset{p}{X}$  de dimension  $p$  tangents à la variété en un point  $\xi_0$ , on aura

$$\left\langle \varphi_p, \overset{p}{X} \right\rangle = (-1)^{p(n-p)} \left\langle \overset{p}{X}, \varphi_p(\xi_0) \right\rangle,$$

le deuxième membre désignant le produit scalaire entre les algèbres extérieures  $\overset{p}{\wedge} V_{\xi_0}$  et  $\overset{p}{\wedge} V'_{\xi_0}$ , où  $V_{\xi_0}$  est la variété tangente à  $V$  en  $\xi_0$ . Ces deux exemples conduisent à appeler dimension d'une distribution de degré  $p$  sur la variété  $V$  de dimension  $n$ , le nombre  $n-p$ ; par la suite, ce sera toujours le degré, et jamais la dimension, que nous mettrons en évidence dans les notations.

$\mathbf{E}(V)$  désigne la somme directe des espaces  $\mathbf{E}(V)$ ; et définition analogue pour  $\mathbf{D}(V)$ ,  $\mathbf{D}'(V)$ ,  $\mathbf{E}'(V)$ .  $\mathbf{D}(V)$  et  $\mathbf{D}'(V)$  (resp.  $\mathbf{E}(V)$  et  $\mathbf{E}'(V)$ ) sont encore duals l'un de l'autre de façon évidente par la formule (1), où on aurait supprimé l'indication des degrés.

2. Opérateurs différentiels. On appelle "opérateur différentiel

à coefficients indéfiniment différentiables" sur  $V$ , toute application linéaire continue  $D$  de  $\mathbf{D}(V)$  dans lui-même qui est de "caractère local", c'est-à-dire telle que pour toute  $\varphi \in \mathbf{D}(V)$ ,  $D\varphi$  ait un support contenu dans celui de  $\varphi$ . On peut montrer (L. Schwartz) que ce sont les opérateurs qui, sur chaque "carte indéfiniment différentiable", s'expriment par un système  $(D_{H,K})$  d'opérateurs différentiels à coefficients indéfiniment différentiables au sens usuel, dans un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  —  $H$  et  $K$  parcourant l'ensemble des parties de l'ensemble des indices  $(1, 2, \dots, n)$  — par la formule

$$D\left(\sum_K f_K E_K\right) = \sum_H \left(\sum_K D_{H,K} f_K\right) E_H,$$

où  $E_H = E_{i_1} \wedge E_{i_2} \wedge \dots \wedge E_{i_p}$  pour  $H = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ , les  $E_i$  étant les champs de vecteurs parallèles respectivement aux vecteurs de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ . Cette expression permet de définir de façon évidente l'ordre d'un opérateur différentiel  $D$  à coefficients indéfiniment différentiables. Elle permet aussi de vérifier que l'opérateur  $D$  se prolonge par continuité en des opérateurs de type local dans  $\mathbf{E}(V)$ ,  $\mathbf{D}'(V)$  et  $\mathbf{E}'(V)$ . Sauf indication expresse du contraire, nous supposons tous les opérateurs différentiels que nous considérons à coefficients indéfiniment différentiables, sans plus le spécifier chaque fois.

Les opérateurs différentiels dans  $\mathbf{D}(V)$  forment une algèbre (car la somme et le produit de deux tels opérateurs est encore de type local).

Il arrive qu'on ait à considérer aussi une application linéaire continue de  $\mathbf{D}_p(V)$  dans  $\mathbf{D}_q(V)$ , de caractère local; on l'appelle alors un  $(p \rightarrow q)$ -opérateur différentiel, et on le désigne par une notation telle que  $D_{p \rightarrow q}$ . Il peut toujours être considéré comme restriction à  $\mathbf{D}_p(V)$  d'un opérateur différentiel défini sur tout  $\mathbf{D}(V)$ .

A tout opérateur différentiel  $D$  est associé un opérateur différentiel  ${}^tD$ , appelé transposé de  $D$ , défini de façon unique par la condition

$$(3) \quad \langle D\varphi, T \rangle = \langle \varphi, {}^tDT \rangle \quad (\varphi \in \mathbf{D}(V), T \in \mathbf{D}'(V)).$$

Alors cette formule reste valable si  $\varphi \in \mathbf{E}(V)$ ,  $T \in \mathbf{E}'(V)$ . Plus généralement, on aura

$$(4) \quad \langle DS, T \rangle = \langle S, {}^tDT \rangle$$

chaque fois que  $S$  ou  $T$  est indéfiniment différentiable et que l'intersection de leurs supports est compacte.

Si  $D$  est un  $(p \rightarrow q)$ -opérateur différentiel, on définit son opérateur transposé comme ci-dessus, ce sera un  $(n-q) \rightarrow (n-p)$ -opérateur différentiel, et on aura

$$(5) \quad \left\langle \underset{p \rightarrow q}{D} \underset{p}{S}, \underset{n-q}{T} \right\rangle = \left\langle \underset{p}{S}, \underset{p \rightarrow q}{{}^t D} \underset{n-q}{T} \right\rangle$$

pourvu que  $\underset{p}{S}$  ou  $\underset{n-q}{T}$  soit indéfiniment différentiable, et l'intersection de leurs supports compacte.

On fera attention qu'on n'a pas toujours  $\underset{p \rightarrow q}{({}^t D)} = \underset{p \rightarrow q}{D}$ , mais seulement  $\underset{p \rightarrow q}{({}^t D)} = (-1)^\varepsilon \underset{p \rightarrow q}{D}$ , avec  $\varepsilon = p(n-p) + q(n-q)$ .

Exemples d'opérateurs différentiels. — Les opérateurs différentiels les plus courants sont les opérations  $\varphi \rightarrow \varphi \wedge \omega$  et  $\varphi \rightarrow \omega \wedge \varphi$  de multiplication extérieure, à droite ou à gauche, par une  $\omega \in E(V)$ ; les opérations  $\varphi \rightarrow X \lrcorner \varphi$  de multiplication intérieure par un champ de vecteurs indéfiniment différentiable  $X$  (opération diminuant les degrés d'une unité); la "transformation infinitésimale"  $\Theta_X$  attachée à un champ de vecteurs indéfiniment différentiable  $X$  (opération qui conserve les degrés); l'opérateur de différentiation extérieure  $d$  (qui augmente les degrés d'une unité). Les opérateurs des deux premiers exemples étaient d'ordre 0, les deux suivants d'ordre 1. Les opérateurs transposés de tous ces opérateurs différentiels se calculent par des règles simples classiques, ce qui permet de calculer l'opérateur transposé d'un opérateur, qui est combinaison linéaire d'opérateurs, composés d'opérateurs du type précédent (on applique alors les formules évidentes:  $\underset{p \rightarrow q}{({}^t(D_1 + D_2))} = \underset{p \rightarrow q}{({}^t D_1)} + \underset{p \rightarrow q}{({}^t D_2)}$ ,  $\underset{p \rightarrow q}{({}^t(D_1 D_2))} = \underset{p \rightarrow q}{({}^t D_2)} \underset{p \rightarrow q}{({}^t D_1)}$ ).

3. Applications linéaires définies par des noyaux. <sup>(3 bis)</sup>  
Soient  $V$  et  $W$  deux variétés indéfiniment différentiables orientées. Pour éviter des confusions de notations par la suite, où on aura  $V = W$ , on choisira un symbole spécifique pour l'élément générique de  $V$  resp.  $W$ , par exemple  $\xi$  et  $\eta$  respectivement, et mettra le cas échéant ce symbole en indice dans la notation d'une distribution, cet indice jouant le rôle d'une variable indépendante. Le cas échéant, le degré de la distribution sera indiqué par un

3 bis. A vrai dire ce  $N^0$  n'est pas essentiel pour la suite, car il importera peu que les applications linéaires continues dont l'existence sera postulée par la suite ( $N^0$ s 5 et 6, et §§2 et 3), soient définies par les noyaux, i.e. des distributions sur  $V \times W$ .

indice placé en dessous de la "variable", comme dans  $T_p \eta$  (distribution en  $\eta$ , de degré  $p$ ).

Il existe une application bilinéaire naturelle de  $\mathbf{D}(V) \times \mathbf{D}(W)$  dans  $\mathbf{D}(V \times W)$ , notée  $(\varphi, \psi) \rightarrow \varphi \otimes \psi$ , et définie par la règle

$$[f_0(\xi) df_1(\xi) \wedge \dots \wedge df_p(\xi)] \otimes [g_0(\eta) dg_1(\eta) \wedge \dots \wedge dg_q(\eta)] \\ = f_0(\xi) g_0(\eta) df_1(\xi) \wedge \dots \wedge df_p(\xi) \wedge dg_1(\eta) \wedge \dots \wedge dg_q(\eta)$$

où les  $f_i$  (resp.  $g_i$ ) sont des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur  $V$  (resp.  $W$ ), considérées dans le second membre comme des fonctions indéfiniment différentiables sur la variété produit  $V \times W$ . Bien entendu, cette application bilinéaire est continue par rapport à chaque variable, et peut aussi se prolonger par continuité resp. en des applications

$$\mathbf{E}(V) \times \mathbf{E}(W) \rightarrow \mathbf{E}(V \times W) \text{ etc.}$$

On appelle noyau-distribution sur  $V \times W$ , toute distribution  $E$  sur  $V \times W$ . C'est donc aussi une forme linéaire continue sur  $\mathbf{D}(V \times W)$ , et définit de ce fait une application bilinéaire sur  $\mathbf{D}(V) \times \mathbf{D}(W)$ , continue par rapport à chaque variable, savoir

$$E(\varphi, \psi) = \langle \varphi \otimes \psi, E \rangle.$$

Cette forme bilinéaire s'identifie aussi de la façon usuelle à une application linéaire faiblement continue de  $\mathbf{D}(W)$  dans le dual de  $\mathbf{D}(V)$  identifié à  $\mathbf{D}'(V)$ , notée par le même symbole  $E$ . Pour  $\psi \in \mathbf{D}(W)$ ,  $E \cdot \psi$  est donc une distribution sur  $V$  définie par

$$(6) \quad \langle E \cdot \psi, \varphi \rangle_V = E(\varphi, \psi) = \langle \varphi \otimes \psi, E \rangle_{V \times W}$$

(les indices  $V, V \times W$  dans le produit scalaire indiquant que l'on intègre sur  $V$  resp.  $V \times W$ ). Il existe aussi une application linéaire continue de  $\mathbf{D}(V)$  dans  $\mathbf{D}'(W)$ , notée  ${}^tE$ , telle que  $E(\varphi, \psi) = \langle \psi, {}^tE \cdot \varphi \rangle$ . Il est facile de voir que cette application est encore définie par un noyau sur la variété  $W \times V$ , noyau noté encore  ${}^tE$ ; quand  $E_{\xi, \eta}$  est "homogène en chaque variable séparément", alors le noyau  ${}^tE$  est, au signe près, le noyau "symétrique" de  $E$  (i.e. le noyau  ${}^sE$  déduit de  $E$  par l'isomorphisme canonique de  $V \times W$  sur  $W \times V$ ). On a donc

$$(7) \quad \langle E \cdot \psi, \varphi \rangle_V = \langle \psi, {}^tE \cdot \varphi \rangle_W = E(\varphi, \psi) = \langle \varphi \otimes \psi, E \rangle_{V \times W}.$$

Si  $E_{\xi, \eta}$  est un noyau homogène de degré  $p$  en  $\xi$ , et homogène de

degré  $q$  en  $\eta$  (et noté alors  $E_{\xi, \eta}$ ), alors  $\phi \rightarrow E \cdot \phi$  transforme  $\mathbf{D}(W)$  en  $\mathbf{D}'(V)$ , et est nul sur  $\mathbf{D}(W)$  pour  $r \neq n - q$ .

4. Noyau semi-régulier, régulier, très régulier. Un noyau  $E_{\xi, \eta}$  sur  $V \times W$  est dit semi-régulier en  $\eta$ , si l'application  $\phi \rightarrow E \cdot \phi$  de  $\mathbf{D}(W)$  dans  $\mathbf{D}'(V)$  qu'il définit se prolonge en une application continue  $T \rightarrow E \cdot T$  de  $\mathbf{E}'(W)$  dans  $\mathbf{D}'(V)$ . Il revient au même de dire que l'application linéaire de  $\mathbf{D}(V)$  définie par le noyau transposé  ${}^tE_{\xi, \eta}$ , applique  $\mathbf{D}(V)$  dans  $\mathbf{E}(W)$ . De même,  $E_{\xi, \eta}$  est dit semi-régulier en  $\xi$ , si l'application  $\phi \rightarrow E \cdot \phi$  applique  $\mathbf{D}(W)$  dans  $\mathbf{E}(V)$ , où, ce qui revient au même, si l'application  $\phi \rightarrow {}^tE \cdot \phi$  se prolonge par continuité en une application  $S \rightarrow {}^tE \cdot S$  de  $\mathbf{E}'(V)$  dans  $\mathbf{D}'(W)$ . Si  $E_{\xi, \eta}$  est semi-régulier en  $\eta$  (resp. en  $\xi$ ) la formule (7) reste valable quand  $\phi$  (resp.  $\varphi$ ) est une distribution à support compact quelconque.  $E_{\xi, \eta}$  est dit noyau régulier, s'il est semi-régulier à la fois en  $\xi$  et en  $\eta$  (L. Schwartz donne de ces catégories une autre interprétation fonctionnelle remarquable, mais dont nous n'aurons pas besoin par la suite).

Supposons maintenant  $V = W$ . Alors le noyau  $E_{\xi, \eta}$  est dit très régulier, s'il est semi-régulier en  $\eta$ , et s'il n'augmente pas "l'ensemble des singularités" des  $T_\eta \in \mathbf{E}'(V_\eta)$ , i.e. si  $E \cdot T$  est indéfiniment différentiable dans tout ouvert où  $T$  l'est. Il faut et il suffit pour cela que  $E$  soit régulier, et soit indéfiniment différentiable dans le complémentaire de la diagonale de  $V \times V$ . Si  $E$  est un noyau très régulier, alors la formule (7) reste valable lorsque  $\varphi$  et  $\phi$  sont des distributions à support compact dont les "ensembles de singularités" ne se rencontrent pas.

5. Noyaux inverses des équations différentielles. Équations elliptiques. Par la suite, nous supposons  $V = W$ , et nous ne considérons plus que des noyaux homogènes en chaque variable,  $E_{\xi, \eta}$ , considérés comme applications linéaires de  $\mathbf{D}(V_\eta)$  dans  $\mathbf{D}'(V_\xi)$ . Considérons un opérateur différentiel  $D$  de  $\mathbf{D}(V)$  dans  $\mathbf{D}(V)$  (son opérateur transposé  ${}^tD$  transforme donc  $\mathbf{D}'(V)$  en  $\mathbf{D}'(V)$ ,  $\mathbf{D}(V)$  en  $\mathbf{D}(V)$  etc.). On dira que le noyau  $E_{\xi, \eta}$  est noyau inverse à gauche (resp. à droite) de  $D$ , si l'opération composée  $E \circ D$  (resp.  $D \circ E$ ) est l'identité (dans  $E \circ D$ ,  $D$  est considéré



comme opérateur de  $\mathbf{D}_p(V)$  dans  $\mathbf{D}_q(V)$ , et dans  $D \circ E$ , il est considéré comme opérateur de  $\mathbf{D}'_p(V)$  dans  $\mathbf{D}'_q(V)$ , ce qui donne un sens aux notations employées ;  $E \circ D$  est une application linéaire continue de  $\mathbf{D}_p(V)$  dans  $\mathbf{D}'_p(V)$ , et  $D \circ E$  est une application linéaire continue de  $\mathbf{D}_q(V)$  dans  $\mathbf{D}'_q(V)$ . Dire que  $E$  est noyau inverse à droite de  $D$  signifie donc qu'on a

$$(8) \quad D_{p \rightarrow q}(E_q \cdot \phi_q) = \phi_q$$

pour toute  $\phi \in \mathbf{D}_q(V)$ . Cela implique en particulier que  $T = E_q \cdot \phi_q$  est solution de l'équation  $D_p T = 0$  dans le complémentaire du support de  $\phi_q$ . Si  $E_{\xi, \eta}$  est noyau semi-régulier en  $\eta$ , alors la relation (8) est valable pour toute  $\phi \in \mathbf{E}'_q(V)$  (en particulier, en prenant pour  $\phi_q$  un  $(n-q)$ -multivecteur tangent  $Y$  à  $V$ , on obtient une "solution élémentaire" de l'équation  $D_{p \rightarrow q} T = 0$ , relative au multivecteur  $Y$ ).

Dire que  $E$  est noyau inverse à gauche de  $D$ , signifie que  $E \circ D = \text{Identité}$ , soit encore  ${}^t D \circ {}^t E = \text{Identité}$ , donc que  ${}^t E$  est noyau inverse à droite de  ${}^t D$ , donc aussi

$$(9) \quad {}^t D_{p \rightarrow q}({}^t E_{n-p} \cdot \varphi_{n-p}) = \varphi_{n-p}$$

pour toute  $\varphi \in \mathbf{D}_{n-p}(V)$ . Si  $E_{\xi, \eta}$  est semi-régulier en  $\xi$ , alors cette relation sera encore vraie pour toute  $\varphi \in \mathbf{E}'_{n-p}(V)$ .

Enfin,  $E$  sera dit noyau inverse bilatère de  $D$ , s'il est à la fois noyau inverse à gauche et à droite, c'est à dire si l'on a à la fois les relations (8) et (9).

Supposons  $E_{\xi, \eta}$  noyau inverse à gauche semi-régulier en  $\eta$ , et soit  $T$  une distribution dans une partie ouverte  $U$  de  $V$ , solution de l'équation  $D_p T = 0$ . Alors on peut obtenir la valeur de  $T$  dans une partie ouverte relativement compacte  $O$  dans  $U$  de la façon suivante. On prend une fonction indéfiniment différentiable  $\omega$  sur  $U$ , égale à 1 sur  $O$ , et à zéro dans le complémentaire d'un voisinage  $O_2$  de  $\bar{O}$  relativement compact dans  $U$  ( $O_2$  pouvant être choisi arbitraire par ailleurs). Alors  $\omega T$  est distribution à

support compact sur  $U$ , et en vertu de  $E \circ D = \text{Identité}$ , et du fait que  $E_{\xi, \eta}$  est semi-régulier en  $\eta$ , on aura

$$(10) \quad \omega T = E \cdot [D(\omega T)] \quad (\text{formule de Green-Schwartz}),$$

$p \qquad p \rightarrow q$

formule qui donne  $T$  dans  $O$  (puisque  $\omega$  est égale à 1 sur  $O$ ) au moyen de la valeur de  $T$  dans un voisinage arbitraire de la frontière de  $O$ . Quand  $T$  est une forme différentielle indéfiniment différentiable  $f$ , cette formule reste valable quand  $E$  n'est pas supposé semi-régulier en  $\eta$ , ou quand on ne suppose plus  $\omega$  indéfiniment différentiable, mais seulement une distribution à support compact dans  $U$ . On peut alors prendre en particulier pour  $\omega$  la fonction caractéristique de l'ouvert  $O$  envisagé plus haut (fonction qu'il sera commode de noter par le même symbole  $O$ ), on obtient alors

$$(11) \quad Of = E \cdot [D(Of)].$$

$p \qquad p \rightarrow q \quad p$

Ici, le deuxième membre ne dépend que des valeurs de  $f$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m-1$  ( $m$ , ordre de  $D$ ) sur la frontière de  $O$ . Quand cette frontière est une variété différentiable  $S$ , orientée de la façon usuelle à l'aide de l'orientation de la variété ambiante  $V$ , le deuxième membre s'exprime explicitement par une "intégrale de surface" sur  $S$ , généralisant les intégrales qui interviennent dans la formule de Cauchy (fonctions holomorphes) ou la formule de Green (fonctions harmoniques).

L'opérateur  $D$  est dit opérateur elliptique, s'il admet un noyau inverse à gauche très régulier (voir No. 4)<sup>(4)</sup>. Alors toute solution de l'équation en  $T$  avec second membre,  $D T = S$  ( $S \in \mathbf{D}'(V)$ ), est indéfiniment différentiable dans tout ouvert où  $S$  l'est; en particulier, toute solution de l'équation homogène  $D T = 0$  (dans un ouvert  $U$ ) y est indéfiniment différentiable. De plus, dans l'espace de ces solutions, soit  $H_D(U)$ , la topologie induite par la topologie forte de  $\mathbf{D}'(V)$  est identique à la topologie induite par  $\mathbf{E}(V)$ .

4. Ce sera cette notion d'ellipticité qui nous sera utile dans la suite. Noter qu'elle n'est pas "de nature locale". En fait, la définition d'ellipticité donnée par L. Schwartz donne une classe plus vaste d'opérateurs.

## 2. Compléments sur les opérateurs différentiels à noyaux inverses réguliers. Solutions régulières à l'infini.

Soit  $D$  un opérateur différentiel sur  $V$ ,  $U$  une partie ouverte de  $V$ . On désigne par  $H_D(U)$  l'espace des  $S \in \mathbf{D}'(U)$  telles que  $DS = 0$ , par  $h_D(U)$  le sous-espace des  $f \in \mathbf{E}(U)$  telles que  $Df = 0$ ; en remplaçant  $D$  par  ${}^tD$ , on définit de même les espaces  $H_{{}^tD}(U)$  et  $h_{{}^tD}(U)$ .  $H_D(U)$  et  $H_{{}^tD}(U)$  sont des sous-espaces vectoriels fermés de  $\mathbf{D}'(U)$  et seront munis de la topologie induite,  $h_D(U)$  et  $h_{{}^tD}(U)$  sont des sous-espaces vectoriels fermés de  $\mathbf{E}(U)$ , et seront aussi munis de la topologie induite, qui en fait des espaces du type  $(F)$  (et même du type  $(M)$ ). Quand  $D$  est opérateur elliptique, on aura  $H_D(U) = h_D(U)$ .

Soit  $\omega$  une fonction indéfiniment différentiable sur  $U$ , telle que l'ensemble des points où elle n'est ni nulle, ni égale à 1, soit relativement compact dans  $U$ , et soit  $S \in H_D(U)$ ,  $T \in H_{{}^tD}(U)$ .  $D(\omega S)$  est une distribution à support compact sur  $U$ , et si  $S$  ou  $T$  est indéfiniment différentiable (alors  $D(\omega S)$  ou  $T$  le sera) on pourra considérer le produit scalaire

$$(12) \quad \langle D(\omega S), T \rangle_U$$

(l'indice  $U$  indiquant que l'on considère une intégrale sur la variété  $U$ ).

On a alors la

**Proposition 1.** a) Pour  $\omega$  donné comme ci-dessus, la formule (12) définit une forme bilinéaire séparément continue sur  $H_D(U) \times h_{{}^tD}(U)$  et sur  $h_D(U) \times H_{{}^tD}(U)$ . b) Ces formes bilinéaires ne changent pas quand on remplace  $\omega$  par une fonction indéfiniment différentiable  $\omega'$ , telle que  $\omega - \omega'$  soit fonction à support compact sur  $U$ . c) Quand on prend  $S$  et  $T$  indéfiniment différentiables tous deux, ce qui précède reste valable si on ne suppose plus  $\omega$  et  $\omega'$  indéfiniment différentiables, mais seulement une distribution quelconque, égale à 0 ou 1 dans l'ouvert complémentaire d'une partie compacte de  $U$ .

**Démonstration.** a) est immédiat. b) signifie que sous les conditions de l'énoncé, on a  $\langle D(\omega S), T \rangle - \langle D(\omega' S), T \rangle = 0$ , mais le premier membre est égal à  $\langle D(\omega - \omega') S, T \rangle$ , et comme  $(\omega - \omega') S$  est distribution à support compact sur  $U$ , on peut appliquer la formule de transposition (5), et on

obtient  $\langle (\omega - \omega') S, {}^tDT \rangle = 0$ , puisque  ${}^tDT = 0$ . Enfin, c) se démontre de la même façon, en notant que si  $S$  et  $T$  sont indéfiniment différentiables, (12) garde un sens même si on ne fait que les hypothèses de c) sur  $\omega$ .

Les accouplements du type (12) jouent un rôle prépondérant dans ce travail, et d'ailleurs dans les équations aux dérivées partielles en général. Quand  $S$  et  $T$  sont des formes indéfiniment différentiables  $f$  et  $g$ , la proposition 1 montre qu'on peut remplacer  $\omega$  par la fonction caractéristique d'une partie ouverte  $O$  de  $U$  ayant une frontière compacte dans  $U$ . Identifiant  $O$  à sa fonction caractéristique, (12) s'écrit

$$(13) \quad \langle D(Of), g \rangle.$$

Lorsque la frontière de  $O$  est une variété différentiable, on trouve, en explicitant (13) — essentiellement par application de la formule de Leibnitz pour  $D(Of)$ , voir [6] — une "intégrale d'hyper-surface" sur la frontière (orientée)  $\partial O$  de  $O$ , intégrale faisant intervenir les dérivées de  $f$  et  $g$  jusqu'à l'ordre  $m - 1$  ( $m$  étant l'ordre de  $D$ ) sur  $\partial O$  (comparer §1 formule (11)). Dans le cas où  $D$  est l'opérateur Laplacien dans  $\mathbf{R}^n$ , où  $f$  est de degré zéro (donc une fonction harmonique ordinaire) et  $g$  de degré  $n$  est identifié à une fonction harmonique grâce à l'élément de volume privilégié sur  $\mathbf{R}^n$ , un calcul immédiat montre que l'intégrale (13) n'est autre que l'intégrale

de Green  $\int_{\partial O} (f \overrightarrow{\text{grad}} g - g \overrightarrow{\text{grad}} f) dS$ . Lorsque  $D$  est l'opérateur

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$  dans le plan complexe  $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ , et qu'on suppose encore  $f$  et  $g$  de degré 0 et 2 respectivement,  $g$  étant identifié à une forme de degré zéro grâce à l'élément de volume privilégié de  $\mathbf{R}^2$  ( $f$  et  $g$  étant donc des fonctions holomorphes ordinaires), l'intégrale (13) n'est autre que l'intégrale de Cauchy  $\int_{\Gamma} f(z)g(z) dz$  ( $\Gamma = \partial O$  étant ici une courbe fermée du plan complexe).

On peut donner une forme plus générale et frappante de l'accouplement (15), montrant que la valeur de (12) ne dépend, pour  $S$  et  $T$  donnés, que de la classe d'homologie compacte de la différentielle extérieure  $d\omega$  (voir Appendice). Mais nous n'en aurons pas besoin par la suite, la forme (12) étant suffisamment simple et maniable pour notre propos.

En remplaçant l'opérateur  $D$  par son transposé  ${}^tD$ , on est amené à considérer aussi des accouplements  $\langle S, {}^tD(\omega T) \rangle$ , où  $\omega$  est toujours une fonction indéfiniment différentiable sur  $U$  égale à 0 ou à 1 dans le complémentaire d'une partie compacte de  $U$ . Or,

**Proposition 2.** On a, pour  $S \in H_D(U)$ ,  $T \in H_{t_D}(U)$ , et  $S$  ou  $T$  indéfiniment différentiable :

$$(14) \quad \langle S, {}^tD(\omega T) \rangle = - \langle D(\omega S), T \rangle.$$

**Démonstration.** Soit  $O_1$  (resp.  $O_2$ ) l'ouvert formé des points de  $U$  au voisinage desquels  $\omega$  est nulle (resp. égale à 1). Par hypothèse,  $K = \overline{C_U(O_1 \cup O_2)}$  est compact. Soit  $\omega'$  une fonction indéfiniment différentiable sur  $U$ , telle que  $\omega - \omega'$  soit à support compact, et que, en appelant  $O'_1$  (resp.  $O'_2$ ) l'ensemble des points de  $U$  au voisinage desquels  $\omega'$  est nulle (resp. égale à 1), et en posant  $K' = \overline{C_U(O'_1 \cup O'_2)}$ , on ait

$$K \subset O'_2, \quad K' \subset O_1.$$

(On se convainc facilement de l'existence d'une telle  $\omega'$  : on prend un voisinage compact  $W_0$  de  $K$  dans  $U$ , et un voisinage ouvert  $W$  de  $W_0$ , relativement compact dans  $U$ . Alors  $\overline{O_1} \cap CW$  et  $\overline{O_2} \cup W_0$  sont deux parties fermées disjointes de  $U$ , il existe donc bien une fonction indéfiniment différentiable  $\omega'$  sur  $U$  qui prenne sur ces fermés resp. la valeur 0 ou 1, et cette  $\omega'$  satisfait manifestement aux conditions voulues). Comme  ${}^tD(\omega T)$  a son support dans  $K$ , et que  $\omega'$  est égale à 1 au voisinage de  $K$ , on a  $\langle S, {}^tD(\omega T) \rangle = \langle \omega' S, {}^tD(\omega T) \rangle$ , or en vertu de  ${}^tD(\omega T) = - {}^tD[(1 - \omega)T]$ , le deuxième membre s'écrit  $-\langle \omega' S, {}^tD[(1 - \omega)T] \rangle$ . Or le support de  $(1 - \omega)T$  est contenu dans  $CO_2 = O_1 \cup K$ , et celui de  $\omega' S$  est contenu dans la réunion d'un compact  $K_1$  et de  $CO_1 = O_2 \cup K$ . L'intersection des supports de ces deux distributions est donc contenue dans le compact  $K_1 \cup K$ . Par suite, la formule de transposition (5) est valable, et on obtient

$$\langle S, {}^tD(\omega T) \rangle = - \langle D(\omega' S), (1 - \omega)T \rangle.$$

Or, le support de  $D(\omega' S)$  est contenu dans  $K'$ , donc dans  $O_1$ , donc  $(1 - \omega)$  est égal à 1 au voisinage du support de  $D(\omega' S)$ . On peut donc dans le deuxième membre omettre le facteur  $(1 - \omega)$ , et on obtient  $-\langle D(\omega' S), T \rangle$ . Mais comme  $\omega - \omega'$  est à support compact dans  $U$ , cette dernière intégrale est égale à  $-\langle D(\omega S), T \rangle$  (proposition 1), d'où résulte bien la formule (14).

**Remarque.** Si  $D$  est un  $(p \rightarrow q)$ -opérateur différentiel (§1, No. 1) il y a lieu de le considérer comme un opérateur différentiel défini sur tout  $\mathbf{D}(V)$ , nul dans  $\mathbf{D}(V)$  pour  $r \neq p$ . Bien entendu, pour appliquer alors ce qui précède, il y a lieu de considérer l'accouplement (12) plus spécialement sur le produit  $H_p(D)(U) \times h_{n-q}(U)$  (resp. sur  $h_p(D)(U) \times H_{n-q}(U)$ ), en se restreignant aux solutions de  $DS=0$  qui sont de degré  $p$ , et aux solutions de  ${}^tDT=0$  qui sont de degré  $n-q$ . Cette situation sera la plus fréquente en pratique, mais comme elle se ramène au cas général envisagé d'abord, nous préférons éviter dans ce qui suit l'encombrante spécification des degrés, tout à fait inessentielle. Bien entendu, les considérations développées au §1, No. 5, pour les noyaux homogènes inverses d'un  $(p \rightarrow q)$ -opérateur différentiel  $D$ , sont valables pour les noyaux inverses d'opérateurs différentiels généraux. Ces noyaux inverses vont maintenant intervenir.

Par la suite, nous supposons pour fixer les idées les noyaux envisagés tous réguliers. Posons la définition suivante :

**Définition 1.** Soit  $D$  un opérateur différentiel sur  $V$ , ayant un noyau inverse à gauche régulier  $E$ . Une solution de l'équation  $DS=0$  définie dans le complémentaire  $U=CK$  d'un compact  $K$ , est dite régulière à l'infini relativement au noyau inverse  $E$ , si on a, pour toute  $\phi \in \mathbf{D}(V)$  et toute fonction  $\omega$  indéfiniment différentiable à support compact sur  $V$ , égale à 1 au voisinage de  $K \cup \text{supp. } \phi$  :

$$(15) \quad \langle D(\omega S), {}^tE.\phi \rangle_U = 0.$$

On fera attention que cette notion dépend essentiellement du noyau inverse à gauche choisi  $E$ . Bien entendu, lorsque  $S$  est indéfiniment différentiable, la formule (15) restera vraie quand  $\phi$  est une distribution à support compact quelconque, ou quand on remplace  $\omega$  par exemple par la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert relativement compact contenant  $K \cup \text{supp. } \phi$  (l'intégrale du premier membre devenant alors une intégrale d'hypersurface sur la frontière de  $O$ ). Du fait que  ${}^tE.\phi$  est solution de l'équation  ${}^tD.T=0$  dans l'ouvert  $U'$  complémentaire de  $K \cup \text{supp. } \phi$ , et que l'intégrale du premier membre de (15) peut manifestement se calculer aussi sur  $U'$  ( $D(\omega S)$  étant nulle sur  $U \cap \text{supp. } \phi$ ), il suit (proposition 1)

que le premier membre de (17) ne dépend pas du choix particulier de  $\omega$ , que l'on peut donc choisir égale à 1 sur un compact aussi grand que l'on veut; il suit que si  $S$  est régulière à l'infini, sa restriction à tout ouvert contenu dans  $U$  et dont le complémentaire est compact, est encore régulière à l'infini, de sorte qu'il s'agit bien d'une propriété de régularité "à l'infini". D'ailleurs, si  $V$  est compacte, alors toute solution dans un ouvert  $U \subset V$  de l'équation  $DS = 0$  est régulière à l'infini (prendre dans (15) pour  $\omega$  la fonction identique à 1 sur  $V$ ).

Notons enfin que si on considère le premier membre de (15) comme une intégrale sur  $U' = U \cap C \text{ supp. } \phi$ , il est égal, quelle que soit la solution  $S$  de l'équation  $DS = 0$ , à  $-\langle S, {}^tD(\omega {}^tE \cdot \phi) \rangle_{U'}$ , (prop. 2). La formule (15) est donc équivalente à

$$(15 \text{ bis}) \quad \langle S, {}^tD(\omega {}^tE \cdot \phi) \rangle_{U'} = 0, \quad (U' = U \cap C \text{ supp. } \phi).$$

Si on suppose maintenant  $E$  noyau inverse à droite régulier, la définition 1, appliquée à l'opérateur  ${}^tD$  et son noyau inverse à gauche  ${}^tE$ , donne la définition des solutions régulières à l'infini (relativement à  ${}^tE$ ) de l'équation  ${}^tD T = 0$  dans un ouvert  $U$  complémentaire d'un compact: elles sont caractérisées indifféremment par l'une des conditions suivantes

$$(16) \quad \langle E \cdot \varphi, {}^tD(\omega T) \rangle_U = 0,$$

$$(16 \text{ bis}) \quad \langle D(\omega E \cdot \varphi), T \rangle_{U'} = 0,$$

pour toute  $\varphi \in \mathbf{D}(V) - \omega$  ayant la signification usuelle, et  $U' = U \cap C \text{ supp. } \varphi$ .

**Théorème 1.** Soit  $D$  un opérateur différentiel ayant un noyau inverse à gauche régulier  $E_{\xi, \eta}$ .

a) Soit  $S$  une distribution sur  $V$  qui, dans un ouvert  $U'$  complémentaire d'un compact convenable, est solution de l'équation  $DS = 0$ .  $S$  est régulière à l'infini (dans  $U'$ ) si et seulement si on a:

$$(17) \quad S = E \cdot (DS)$$

(le deuxième membre a bien un sens, puisque  $DS$  est à support compact).

b) En particulier, si  $S$  est une distribution définie sur un ouvert  $U$  complémentaire d'un compact  $K$ , solution régulière à l'infini de l'équation  $DS = 0$ , alors pour toute fonction  $\omega$  indéfiniment différentiable sur  $V$ , nulle au

voisinage de  $K$  et égale à 1 au voisinage de l'infini, on a (en considérant  $\omega S$  comme distribution définiesur tout  $V$ ):

$$(18) \quad \omega S = E.[D(\omega S)]$$

(formule de Green-Schwartz pour solutions régulières à l'infini).

Quand  $S$  est indéfiniment différentiable, il est inutile que  $\omega$  le soit (il suffit que  $\omega$  soit une distribution sur  $V$ ).

**Corollaire 1.** Si  $E$  est noyau inverse bilatère régulier de  $D$ ,  $S$  une solution de l'équation  $DS=0$  définie dans un ouvert  $U$  complémentaire d'un compact, alors  $S$  est régulière à l'infini si et seulement si elle coïncide dans le complémentaire d'un compact convenable avec une distribution  $E.\varphi$ , où  $\varphi \in \mathbf{E}'(V)$ .

En effet, la nécessité résulte du théorème 1b) lorsqu'on pose  $\varphi = D(\omega S)$ ; la suffisance est conséquence immédiate du théorème 1a), car on aura  $D(E.\varphi) = \varphi$ , d'où, en posant  $S' = E.\varphi$ ,  $E.DS' = E\varphi = S'$ , d'où résulte que  $S'$  est régulière à l'infini.

**Corollaire 2.** Une solution de l'équation  $DS=0$ , définie dans tout  $V$  et régulière à l'infini, est forcément nulle; (appliquer la formule (17)).

**Démonstration du théorème 1.** b) est manifestement un cas particulier de a), lorsqu'on y remplace  $S$  par  $\omega S$ . Évidemment, a) ne résulte pas de l'application brutale de la formule  $E \circ D = \text{Identité}$ , car cette dernière est valable seulement quand  $D$  est considéré comme application de  $\mathbf{E}'(V)$  dans  $\mathbf{E}'(V)$ , or  $S$  n'est pas en général à support compact. — (17) signifie que pour toute  $\phi \in \mathbf{D}(V)$ , on a

$$(19) \quad \langle E(DS), \phi \rangle = \langle S, \phi \rangle.$$

Le premier membre s'écrit  $\langle DS, {}^tE.\phi \rangle$ ; soit  $\omega$  une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur  $V$ , égale à 1 au voisinage de  $(CU) \cup \text{supp.}\phi$ , le deuxième membre de (19) s'écrit aussi

$$\langle \omega S, \phi \rangle = \langle E.D(\omega S), \phi \rangle = \langle D(\omega S), {}^tE.\phi \rangle,$$

de sorte que (19) équivaut à  $\langle DS - D(\omega S), {}^tE.\phi \rangle = 0$ . Or  $DS - D(\omega S)$  est distribution à support compact contenu dans  $U$ , et coïncide dans cet ouvert avec  $-D(\omega S)$ , de sorte que l'on est ramené à  $-\langle D(\omega S), {}^tE.\phi \rangle_U = 0$ .



Mais cette égalité pour toute  $\phi$  signifie précisément que  $S$  est régulière à l'infini, c.q.f.d.

**Théorème 2.** Soit  $D$  un opérateur différentiel sur  $V$  ayant un noyau inverse bilatère régulier  $E_{\xi, \eta}$ , soit  $U$  une partie ouverte de  $V$  ayant un complémentaire compact  $K$ . Alors l'espace vectoriel topologique  $H_D(U)$  des solutions-distributions dans  $U$  de l'équation  $DS=0$ , est somme directe topologique du sous-espace  $P_D(\widehat{U})^{(5)}$  formé des solutions régulières à l'infini, et du sous-espace  $N_D(\widehat{U})$  formé des solutions qui sont restrictions à  $U$  d'une solution définie sur toute la variété  $V$ . La composante de  $S \in H_D(U)$  suivant  $N_D(\widehat{U})$  est la restriction à  $U$  de la distribution  $T$  sur  $V$ , solution de  $DT=0$  dans  $V$ , donnée dans tout ouvert relativement compact  $O$  par

$$(20) \quad T = E[D(\omega S)],$$

où  $\omega$  est une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur  $V$ , égale à 1 au voisinage de  $\overline{O \cup K}$ .

Énoncé analogue pour l'espace  $h_D(U)$  des solutions indéfiniment différentiables dans  $U$  de l'équation  $Df=0$ , cet espace est somme directe topologique des sous-espaces  $p_D(\widehat{U})$  et  $n_D(\widehat{U})$  analogues aux précédents. Dans ce cas, il n'est plus nécessaire que  $\omega$  soit indéfiniment différentiable dans la formule (20) (il suffit que ce soit une distribution de degré 0 à support compact égale à 1 au voisinage de  $\overline{O \cup K}$ ).

**Démonstration.** Remarquons d'abord que la distribution  $T$  sur  $O$  exprimée par (20) a un sens ( $D(\omega S)$  peut en effet être considéré comme une distribution à support compact définie sur tout  $V$ ) et ne dépend pas du choix particulier de  $\omega$ : on a en effet pour  $\phi \in \mathbf{D}(O)$ ,

$$\langle T, \phi \rangle_U = \langle D(\omega S), {}^tE \cdot \phi \rangle,$$

et il suffit alors d'appliquer la proposition 1. Il en résulte aussi que les

---

5. L'opportunité de la notation  $P_D(\widehat{U})$ ,  $N_D(\widehat{U})$  etc. au lieu de  $P_D(U)$ ,  $N_D(U)$  etc. va apparaître plus bas (§3) ( $\widehat{U}$  désigne l'ensemble obtenu en adjoignant à  $U$  le "point à l'infini" de  $V$ ).

distributions ainsi définies dans les divers ouverts  $O$  sont "compatibles", par suite qu'il existe bien une unique distribution  $T$  sur  $V$ , donnée dans tout ouvert relativement compact  $O$  par la formule (20). On a  $DT = 0$ , car il suffit de le vérifier dans tout ouvert  $O$  relativement compact, or cela résulte alors de la formule (20) et du fait que  $E$  est noyau inverse à droite de  $D$  (la distribution  $DT = D(\omega S)$  — dans  $O$  — est bien nulle dans  $O$ ). Montrons maintenant que la distribution  $S - T$  sur  $U$  est bien régulière à l'infini, d'où suivra que toute  $S \in H_D(U)$ ,  $S = (S - T) + T$ , est somme d'un élément de  $N_D(\hat{U})$  et d'un élément de  $P_D(\hat{U})$ , i.e. que

$$H_D(U) = N_D(\hat{U}) + P_D(\hat{U}).$$

Il faut donc montrer que pour toute  $\phi \in \mathbf{D}(V)$ , et toute fonction indéfiniment différentiable à support compact  $\omega$  sur  $V$ , égale à 1 au voisinage de  $K \cup \text{supp } \phi$ , on a  $\langle D[\omega(S - T)], {}^tE \cdot \phi \rangle_U = 0$  i.e.

$$(21) \quad \langle D(\omega S), {}^tE \cdot \phi \rangle_U = \langle D(\omega T), {}^tE \cdot \phi \rangle_U.$$

Mais  $\omega T$  étant distribution définie sur toute la variété et  $D(\omega T)$  étant nul au voisinage de  $K$ , on peut faire le produit scalaire du deuxième membre sur tout  $V$ , et appliquer de plus la formule de transposition ( $\omega T$  étant à support compact sur  $V$ ) de sorte que le deuxième membre est égal à  $\langle \omega T, {}^tD({}^tE \cdot \phi) \rangle = \langle \omega T, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle$ , ce qui n'est autre par définition que le premier membre de (21).

D'autre part on a  $N_D(\hat{U}) \cap P_D(\hat{U}) = \{0\}$ , ce qui n'est autre que le corollaire 2 du théorème 1. Donc  $H_D(U)$  est bien somme directe algébrique de  $N_D(\hat{U})$  et  $P_D(\hat{U})$ , et la formule (20) donne en effet cette décomposition.  $H_D(U)$  est même somme directe topologique de ces deux sous-espaces, car cela signifie que la projection de  $H_D(U)$  sur  $N_D(\hat{U})$  donnée par (20) est continue. Mais l'application  $S \rightarrow T$  en question est même continue de  $H_D(U)$  dans  $H_D(V)$ , comme on le vérifie immédiatement.

Enfin, si on remarque que lorsque  $S$  est indéfiniment différentiable la distribution  $T$  sur  $S$  définie par (20) est indéfiniment différentiable, et l'application  $S \rightarrow T$  de  $h_D(U)$  dans  $h_D(V)$  continue, la deuxième partie du théorème 2 suit aussitôt de ce qui précède.

### 3. Le théorème de dualité.

Notations. — Lorsque la variété  $V$  n'est pas compacte, il sera commode pour la suite d'introduire l'espace compactifié d'Alexandroff  $\widehat{V}$  de  $V$ , espace compact obtenu en adjoignant à  $V$  un "point à l'infini", noté  $\infty$ . Si  $V$  est compacte, on posera  $\widehat{V} = V$ . Nous considérons des parties de  $\widehat{V}$ , et sauf avis contraire les notions de théorie des ensembles et de topologie envisagées se rapporteront à l'espace  $\widehat{V}$  (ainsi,  $\bar{A}$  est l'adhérence de  $A$  dans  $\widehat{V}$ ,  $\complement A$  le complémentaire de  $A$  dans  $\widehat{V}$ ; si  $A \subset V$ , le complémentaire de  $A$  dans  $V$  sera noté  $\complement_V A$ ).

Dans toute la suite, nous supposons donné un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiables  $D$  sur  $V$ , quelconque par ailleurs. Si  $U$  est une partie ouverte de  $\widehat{V}$ ,  $H_D(U)$  désigne l'espace de toutes les distributions définies dans l'ouvert  $U' = U \cap V$  qui y sont solutions de l'équation  $DS = 0$ ,  $h_D(U)$  le sous-espace formé des solutions qui sont indéfiniment différentiables. Ces espaces ne dépendent donc en fait que de l'ouvert  $U' = U \cap V$ , et pour  $U \subset V$ , ces notations coïncident avec celles introduites au début du §2. Ces espaces seront munis respectivement de la topologie induite par  $\mathbf{D}'(V)$  et  $\mathbf{E}(V)$ . — Si maintenant  $A$  est une partie quelconque de  $\widehat{V}$ , on désigne par  $H_D(A)$  l'espace des classes de distributions éléments d'espaces  $H_D(U)$ ,  $U$  voisinage ouvert variable de  $A$ , deux telles distributions  $S' \in H_D(U')$  et  $S'' \in H_D(U'')$  étant identifiées si et seulement si elles définissent par "restriction" un même élément de  $H_D(U)$ , où  $U$  est un voisinage ouvert convenable de  $A$  contenu dans  $U' \cap U''$ . Dans cette définition, il est essentiel de savoir si  $\infty$  est élément de  $A$  ou non; si  $\infty \in A$ ,  $H_D(A)$  sera en général différent de  $H_D(A \cap V)$ , comme le lecteur s'en convaincra facilement. Bien entendu,  $H_D(A)$  se munit d'une structure vectorielle naturelle. Quand  $A$  est déjà ouvert, cette définition de  $H_D(A)$  ne diffère pas essentiellement de la définition directe donnée plus haut pour ce cas. On définit de façon analogue  $h_D(A)$ . Enfin, remplaçant  $D$  par  ${}^tD$ , on définit de la même façon les espaces  $H_{tD}(U)$  et  $h_{tD}(U)$ ,  $H_{tD}(A)$  et  $h_{tD}(A)$ .

Soient maintenant  $U_1$  et  $U_2$  deux parties ouvertes de  $\widehat{V}$ , telles que  $U_1 \cup U_2 = \widehat{V}$ ,  $\infty \notin U_1 \cap U_2$ , et soit  $S \in H_D(U_1)$ ,  $T \in H_{tD}(U_2)$ , l'une au moins de ces deux distributions étant indéfiniment différentiable. Soit  $\omega$  une fonction sur  $\widehat{V}$ , indéfiniment différentiable sur  $V$ , égale à 1 dans un voisinage

de  $\mathcal{C}U_2$  et à 0 dans un voisinage de  $\mathcal{C}U_1$ .  $U_1 \cap U_2$  est une partie ouverte de  $V$ , dans laquelle  $S$  et  $T$  sont définies, et  $\omega$  est une fonction indéfiniment différentiable sur  $U_1 \cap U_2$ , égale à 0 ou 1 dans le complémentaire d'une partie compacte de  $U_1 \cap U_2$ . On peut donc comme au §2 considérer le produit scalaire sur  $U_1 \cap U_2$ :

$$(22) \quad \langle S, T \rangle = \langle D(\omega S), T \rangle_{U_1 \cap U_2}.$$

D'après la proposition 1, le deuxième membre ne dépend pas du choix particulier de  $\omega$ , car si on remplace  $\omega$  par une fonction analogue  $\omega'$ ,  $\omega - \omega'$  sera à support compact sur  $U_1 \cap U_2$ . On a donc bien le droit de poser (22). On obtient ainsi une forme bilinéaire séparément continue naturelle sur  $H_D(U_1) \times h_{t_D}(U_2)$  et sur  $h_D(U_1) \times H_{t_D}(U_2)$ . (Si on prend la restriction de cette forme à  $h_D(U_1) \times h_{t_D}(U_2)$ , on peut aussi remplacer  $\omega$  par exemple par la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert dans  $\widehat{V}$  contenant  $\mathcal{C}U_2$ , et dont l'adhérence ne rencontre pas  $\mathcal{C}U_1$ ).

On constate immédiatement sur la formule (22) que le "produit scalaire"  $\langle S, T \rangle$  ne change pas quand on prend les restrictions de  $S$  et  $T$  à des ouverts plus petits  $U'_1$  et  $U'_2$  (pourvu que l'on ait encore  $U'_1 \cup U'_2 = \widehat{V}$ ). Ceci permet de généraliser l'accouplement (22) à un accouplement entre  $H_D(A)$  et  $h_{t_D}(B)$ , et entre  $h_D(A)$  et  $H_{t_D}(B)$ , lorsque  $A$  et  $B$  sont deux parties non vides quelconques de  $\widehat{V}$  telles que  $A \cup B = \widehat{V}$ ,  $\infty \notin A \cap B$ . On posera en effet, pour  $\tilde{S} \in h_D(A)$ ,  $\tilde{T} \in H_{t_D}(B)$ , ou pour  $\tilde{S} \in H_D(A)$ ,  $\tilde{T} \in h_{t_D}(B)$ :

$$(23) \quad \langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle = \langle S, T \rangle = \langle D(\omega S, T) \rangle_{U_1 \cap U_2}$$

où  $S$  et  $T$  sont respectivement des représentants de  $\tilde{S}$  et  $\tilde{T}$ , définis dans des voisinages ouverts  $U_1$  et  $U_2$  de  $A$  et  $B$  tels que  $\infty \notin U_1 \cap U_2$ . L'expression du second membre ne change pas quand on change les représentants  $S, T$  de  $\tilde{S}, \tilde{T}$ . — En particulier, si  $A$  est une partie quelconque non vide de  $\widehat{V}$  différente de  $\widehat{V}$ , on obtient un accouplement naturel entre  $H_D(A)$  et  $h_{t_D}(\mathcal{C}A)$  et entre  $h_D(A)$  et  $H_{t_D}(\mathcal{C}A)$ , ( $\mathcal{C}A$  désignant, rappelons le, le complémentaire de  $A$  par rapport à  $\widehat{V}$ ).

**Remarque.** On peut aussi considérer l'accouplement analogue au précédent, donné par l'intégrale  $\langle S, {}^t D(\overline{\omega} T) \rangle_{U_1 \cap U_2}$ , où  $\overline{\omega}$  est une fonction sur  $\widehat{V}$ , indéfiniment différentiable sur  $V$ , égale à 1 au voisinage de  $\mathcal{C}U_1$ , et à zéro au voisinage de  $\mathcal{C}U_2$ ; c'est, lorsque  $S$  est homogène de degré  $p$ ,

la valeur multipliée par  $(-1)^{p(n-p)}$  du produit scalaire  $\langle \tilde{T}, \tilde{S} \rangle$  défini précédemment, lorsqu'on remplace  $D$  par  ${}^tD$ . Or, ces deux accouplements sont les mêmes i.e. on a :

$$(24) \quad \langle S, D(\bar{\omega}T) \rangle_{U_1 \cap U_2} = \langle D(\omega S), T \rangle_{U_1 \cap U_2},$$

où  $\omega$  est comme dans la formule (22). En effet, on peut prendre  $\omega = 1 - \bar{\omega}$ ; alors le deuxième membre devient égal à  $-\langle D(\bar{\omega}S), T \rangle_{U_1 \cap U_2}$ , et il suffit d'appliquer alors la proposition 2 du §2.

Une question naturelle est de savoir si les dualités précédentes sont séparantes, et dans quelle mesure on peut espérer obtenir toutes les formes linéaires continues sur  $H_D(U)$  et  $h_D(U)$  ( $U$  partie ouverte de  $\hat{V}$ ) par l'accouplement (23) avec  $h_D(CU)$  resp.  $H_D(CU)$ . C'est ce que nous examinons dans la suite de ce paragraphe.

Notons d'abord que l'accouplement (23) entre  $h_D(A)$  et  $H_D(B)$  n'est en général pas séparé, même dans les meilleurs cas. Supposons par exemple  $\infty \in B$ , et prenons une  $\tilde{T} \in H_D(B)$  qui ait un représentant  $T \in H_D(\hat{V})$ , (donc un représentant défini sur toute la variété  $V$ ). Alors dans (23) on pourra prendre  $U_2 = \hat{V}$ , d'où  $U_1 \cap U_2 = U_1$ ; comme  $\omega S$  est à support compact dans  $U_1$ , on pourra dans l'expression  $\langle D(\omega S), T \rangle_{U_1}$ , appliquer la formule de transposition, ce qui donne 0, puisque  ${}^tDT = 0$ . Ainsi, si  $\infty \in B$ , le produit scalaire  $\langle \tilde{S}, \tilde{T} \rangle$  est nul quand  $\tilde{T}$  admet un représentant dans  $H_D(\hat{V})$ . C'est encore vrai si  $\infty \in A$ , et si  $\tilde{S}$  admet un représentant dans  $h_D(\hat{V})$ . (Les réflexions analogues valent aussi sur le produit  $H_D(A) \times h_D(B)$ ). Cela prouve en particulier que si  $U$  est un ouvert contenant  $\infty$ , on ne doit pas espérer en général obtenir toutes les formes linéaires continues sur  $h_D(U)$  (resp. sur  $H_D(U)$ ) à l'aide des éléments  $\tilde{T}$  de  $H_D(CU)$  (resp. de  $h_D(CU)$ ), car les formes définies par ces dernières s'annulent toutes sur le sous-espace  $N_D(U)$  (resp.  $n_D(U)$ ) envisagé dans le théorème 2.

Cela suggère, dans le cas où  $D$  admet un noyau inverse à gauche régulier  $E_{\xi, \eta}$ , de remplacer l'espace  $H_D(U)$  (resp.  $h_D(U)$ ) par le sous-espace  $P_D(U)$  (resp.  $p_D(U)$ ) des solutions régulières à l'infini relativement à  $E$  (espace qui est en effet supplémentaire topologique de  $N_D(U)$  — resp.  $n_D(U)$  — d'après le théorème 2). Dans ce cas, nous introduirons donc les notations suivantes.  $U$  étant une partie ouverte de  $\hat{V}$ , on

désigne par  $P_D(U)$  (resp.  $p_D(U)$ ) l'espace  $H_D(U)$  (resp.  $h_D(U)$ ) si  $\infty \notin U$ , et le sous-espace formé des solutions régulières à l'infini si  $\infty \in U$  (dans ces notations, le noyau  $E_{\xi, \eta}$  est donc sous-entendu). Ces définitions se transposent de façon évidente lorsque  $A$  est une partie quelconque de  $\widehat{V}$ . Si  $E_{\xi, \eta}$  est même noyau inverse bilatère, on définit de même les espaces  $P_{i_D}(A)$  et  $p_{i_D}(A)$ . On a alors :

**Théorème 3.** Si  $D$  admet un noyau inverse à gauche régulier  $E_{\xi, \eta}$ , et si  $U$  est une partie ouverte de  $\widehat{V}$ , alors toute forme linéaire continue sur  $P_D(U)$  (resp.  $p_D(U)$ ) peut être obtenu par une  $\tilde{T} \in h_{i_D}(CU)$  (resp. par une  $\tilde{T} \in H_{i_D}(CU)$ ) par l'accouplement de la formule (23).

On notera que dans l'énoncé, la notion de solution régulière à l'infini n'intervient pas en fait lorsque  $\infty \notin U$ , puisqu'alors  $P_D(U) = H_D(U)$ ,  $p_D(U) = h_D(U)$ . Et que même si  $\infty \in U$ , dans le cas où  $E$  est noyau inverse bilatère, le théorème 2 permet de remplacer cet énoncé par un énoncé plus intrinsèque, ne faisant plus intervenir le choix particulier du noyau inverse  $E$  : Si  $\infty \in U$ , toute forme linéaire continue sur l'espace quotient  $H_D(U)/N_D(U)$  (resp.  $h_D(U)/n_D(U)$ ) provient d'une  $\tilde{T} \in h_{i_D}(CU)$  (resp. d'une  $\tilde{T} \in H_{i_D}(CU)$ ) par l'accouplement déduit de la formule (23) (cet accouplement étant nul sur  $N_D(U)$  resp.  $n_D(U)$ ).

**Démonstration du théorème 3.** Elle est très facile. Nous déterminons pour fixer les idées les formes linéaires continues sur  $P_D(U)$ . Soit  $\Phi$  une telle forme ; posons  $U' = U \cap V$ . Comme  $P_D(U)$  est sous-espace vectoriel topologique de  $\mathbf{D}'(U')$ , il résulte du théorème de H a h n - B a n a c h que  $\Phi$  provient d'une forme linéaire continue définie sur tout l'espace  $\mathbf{D}'(U')$ , donc est de la forme  $S \mapsto \langle S, \phi \rangle$ , où  $\phi \in \mathbf{D}(U')$ . Soit  $K$  le support de  $\phi$ , et soit  $\omega$  une fonction sur  $\widehat{V}$ , indéfiniment différentiable sur  $V$ , égale à 1 au voisinage de  $K$ , et à zéro au voisinage de  $CU$ . On a alors pour toute  $S \in P_D(U)$

$$\omega S = E [D(\omega S)].$$

C'est la formule de Green-Schwartz ordinaire si  $\infty \notin U$ , et c'est la formule de Green-Schwartz pour les solutions régulières à l'infini si  $\infty \in U$  (théorème 1b). On a par suite

$$\Phi(S) = \langle S, \phi \rangle_{U'} = \langle \omega S, \phi \rangle_{U'} = \langle E [D(\omega S)], \phi \rangle_{U'},$$

d'où,  $D(\omega S)$  étant à support compact sur  $U'$

$$(25) \quad \Phi(S) = \langle D(\omega S), {}^tE \cdot \phi \rangle_{U'}.$$

Posons alors

$$(26) \quad T = {}^tE \cdot \phi.$$

Dans  $CK$ ,  $T$  est une solution indéfiniment différentiable de l'équation  $DT = 0$  ( $E$  étant noyau inverse à gauche de  $D$ ); soit alors  $U_2$  l'ouvert  $C_V K$  si  $\infty \in U$ , et l'ouvert  $C_{\hat{V}} K$  si  $\infty \notin U$ , c'est en tous cas un voisinage de  $CU$  dans  $\hat{V}$ . Donc  $T$  définit une  $\tilde{T} \in h_D(CU)$ . Notons maintenant que le support de la distribution  $D(\omega S)$  est contenu dans  $U \cap U_2$ , de sorte qu'on peut considérer le deuxième membre de (25) comme un produit scalaire sur la variété  $U \cap U_2$ . Comparant alors avec la formule de définition (23), on obtient bien  $\Phi(S) = \langle S, \tilde{T} \rangle$  pour toute  $S \in P_D(U)$ , c. q. f. d.

**Remarque 1.** La même démonstration prouve aussi que si on a un ensemble équicontinu  $M$  de formes linéaires sur  $P_D(U)$  (resp.  $p_D(U)$ ) alors il existe un voisinage  $U_2$  de  $CU$  fixe, et une partie bornée  $N$  de  $p_{t_D}(U_2)$  (resp. de  $P_{t_D}(U_2)$ ) tels que  $M$  soit l'ensemble des formes linéaires définies par les éléments de  $N$ . Réciproquement d'ailleurs, il est évident qu'un tel ensemble  $N$  définit un ensemble équicontinu de formes linéaires sur  $P_D(U)$  (resp.  $p_D(U)$ ).

**Remarque 2.** La forme différentielle  $T$  de la formule (26) n'est pas déterminée de façon unique par la donnée de la forme linéaire continue  $\Phi$ . Mais si  $E$  est noyau inverse bilatère, montrons que les valeurs de  $T$  et "de ses dérivées de tous ordres" aux points de l'ensemble  $C_V U'$  sont déterminées par la donnée de  $\Phi$ . En effet, soit alors de façon générale  $\Theta$  un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiables sur  $V$ , et soit  $X$  un multivecteur tangent à  $V$  en un point  $\eta_0 \in C_V U'$ , on aura

$$(27) \quad \langle X, \Theta.T \rangle = \varphi(E.({}^t\Theta.X)),$$

où, au second membre,  $S = E.({}^t\Theta.X)$  (qui est solution dans l'ouvert  $U'$  de l'équation  $DS = 0$ ) est identifié à l'élément de  $P_D(U)$  qu'il définit. Cette formule est en effet valable plus généralement quand  $X$  est une distribution quelconque sur  $V$  à support compact contenu dans  $C_V U'$ , et se démontre immédiatement en remplaçant, dans le premier membre,  $T$  par

sa valeur (26), en appliquant la formule de transposition — ce qui donne  $\langle E(\Theta \cdot X), \phi \rangle$  — et en appliquant la formule  $\Phi(S) = \langle S, \varphi \rangle_{U'}$  pour  $S \in P_D(U)$ .

Supposons maintenant que  $E_{\xi, \eta}$  est noyau inverse bilatère. Alors la formule (26) montre que toute forme linéaire continue sur  $P_D(U)$  provient même d'une  $\tilde{T} \in h_{t_D}(CU)$  qui est régulière à l'infini lorsque  $\infty \in CU$ . On a donc une application linéaire naturelle de  $p_{t_D}(CU)$  sur le dual de  $P_D(U)$  (cela résulte d'ailleurs aussi du théorème 3,  $p_{t_D}(CU)$  étant supplémentaire de l'espace  $n_{t_D}(CU)$ , sur lequel l'accouplement (23) s'annule). On est alors en droit d'espérer que l'on obtienne même un isomorphisme de  $p_{t_D}(CU)$  sur le dual de  $P_D(U)$ . Comme toute  $\tilde{T} \in p_{t_D}(CU)$  provient d'une forme qui est du type  ${}^tE \cdot \phi$  où  $\phi \in \mathbf{D}(U')$  (théorème 1), cela signifierait que pour toute  $\phi \in \mathbf{D}(U')$  qui est "orthogonale" à  $P_D(U)$ , i.e. telle qu'on ait  $\langle S, \phi \rangle_{U'} = 0$  pour toute  $S \in P_D(U)$ ,  ${}^tE \cdot \phi$  doit avoir une classe nulle dans  $h_{t_D}(CU)$ , i.e.  ${}^tE \cdot \phi$  doit s'annuler sur un ouvert, trace sur  $V$  d'un voisinage de  $CU$ . On sait déjà, d'ailleurs, que du moins  ${}^tE \cdot \phi$  sera nulle ainsi que ses dérivées de tous ordres dans  $C_V U'$  (formule (27)). Mais on ne peut pas en déduire en général qu'elle sera nulle dans un voisinage de  $C_V U'$  dans  $V$ , et même dans un voisinage ayant un complémentaire compact si  $\infty \in CU$ . — Ces considérations se transposent évidemment quand on considère les formes linéaires continues sur  $p_D(U)$ .

Pour simplifier, nous supposons maintenant que  $E_{\xi, \eta}$  est un noyau inverse bilatère très régulier. Alors les espaces  $P_D(U)$  et  $p_D(U)$  sont identiques, ainsi que  $P_{t_D}(CU)$  et  $p_{t_D}(CU)$  (§1). Nous allons examiner une condition un peu plus forte que le fait que l'application linéaire naturelle de  $P_{t_D}(CU)$  sur le dual de  $P_D(U)$  soit un isomorphisme :

**Proposition 3.** Soit  $D$  un opérateur différentiel ayant un noyau inverse bilatère très régulier  $E_{\xi, \eta}$ , soit  $U$  une partie ouverte de  $\widehat{V}$ ,  $U' = U \cap V$ . Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes :

1°) Si  $\phi \in \mathbf{D}(U')$  est telle que  $\langle f, \phi \rangle_{U'} = 0$  pour toute  $f \in P_D(U)$ , alors il existe un voisinage  $U_2$  de  $CU$  tel que  ${}^tE \cdot \phi$  soit nul dans  $U'_2 = U_2 \cap V$ . Et ce voisinage peut être choisi indépendant de  $\phi$  quand on assujettit le support de  $\phi$  à être contenu dans un compact fixe  $K \subset U'$ .



2°) Pour toute partie ouverte  $O_0$  de  $U$ , relativement compacte dans  $U$ , il existe une partie ouverte  $O_1$  de  $U$  relativement compacte dans  $U$  et contenant  $O_0$ , et telle que toute  $f \in P_D(O_1)$  ait une restriction à  $O_0$  qui soit adhérente dans  $P_D(O_0)$  à l'espace  $H$  des restrictions à  $O_0$  des éléments de  $P_D(U)$ .

La deuxième condition est à apparenter au lemme du §4 (No. 4) de [2], et peut rendre les mêmes services, notamment pour étendre le théorème de dualité au cas d'espaces de formes différentielles à valeurs vectorielles.

Démonstration de la proposition 3. 2°)  $\Rightarrow$  1°). Il faut montrer, moyennant la condition 2°), que si  $K$  est un compact contenu dans  $U'$  il existe un voisinage  $U_2$  de  $\mathcal{C}U$  tel que  $\phi \in \mathbf{D}(U')$ ,  $\text{supp. } \phi \subset K$ ,  $\phi$  orthogonale à  $P_D(U)$ , impliquent que  ${}^tE \cdot \phi$  est nulle dans  $U'_2 = U_2 \cap V$ . Mais soit  $O_0$  un voisinage ouvert de  $K$ , relativement compact dans  $U'$ ; il existe un voisinage  $O_1$  de  $O_0$ , relativement compact dans  $U$ , et satisfaisant aux conditions de 2°). Soit  $U_2 = \mathcal{C}\overline{O_1}$ , c'est un voisinage de  $\mathcal{C}U$ , je dis qu'il satisfait aux conditions voulues. En effet, soit  $\phi$  comme ci-dessus, on aura  $\langle f, \phi \rangle_{U'} = 0$  pour  $f \in P_D(U)$ , or cette intégrale peut aussi se calculer sur  $O_0$  (car  $\text{supp. } \phi \subset K \subset O_0 \subset U'$ ) et est alors définie pour toute  $f \in P_D(O_0)$ . Par hypothèse, elle est nulle sur l'espace  $H$  des restrictions à  $O_0$  des éléments de  $P_D(U)$ . Par suite, comme elle est continue sur  $P_D(O_0)$ , elle sera aussi nulle sur l'adhérence de cet espace dans  $P_D(O_0)$ , donc sur les restrictions à  $O_0$  d'éléments de  $P_D(O_1)$ . En particulier, si  $\varphi \in \mathbf{D}(U'_2)$ ,  $E \cdot \varphi$  peut dans  $O'_1 = O_1 \cap V$  être considéré comme élément de  $P_D(O_1)$ , on aura donc  $\langle E \cdot \varphi, \phi \rangle = 0$ , soit  $\langle \varphi, {}^tE \cdot \phi \rangle = 0$ . Comme  $\varphi$  était arbitraire dans  $\mathbf{D}(U'_2)$ , il suit bien qu'on a  ${}^tE \cdot \phi = 0$  dans  $U'_2$ .

1°)  $\Rightarrow$  2°). La démonstration est toute analogue. Il suffit d'appliquer la caractérisation de l'adhérence de  $H$  comme l'ensemble des éléments  $f \in P_D(O_0)$  sur lesquels s'annulent toutes les formes linéaires continues sur  $P_D(O_0)$  qui sont nulles sur  $H$ , et tenir compte de la détermination des formes linéaires continues sur  $P_D(O_0)$  donnée par le théorème 3.

Remarque. Il est très facile de vérifier que l'on obtient encore des conditions équivalentes aux précédentes en n'astreignant pas dans 1°) les  $\phi$  considérées à être indéfiniment différentiables, ou en exigeant seulement

dans  $2^0$ ) que soient adhérentes à  $H$  les restrictions à  $O_0$  des  $f$  du type  $E \cdot X$ , où  $X$  est un multivecteur tangent à  $V$  en un point de  $U' \cap CO_1$ .

Nous poserons alors la

**Définition 2.** Nous dirons que l'opérateur  $D$  elliptique satisfait dans l'ouvert  $U \subset \widehat{V}$  à la condition d'approximation, relativement au noyau inverse bilatère très régulier  $E_{\xi, \eta}$ , si les conditions équivalentes de la proposition 3 sont satisfaites.

Les réflexions qui ont précédé la proposition 3 donnent alors le

**Théorème 4.** Si  $D$  est un opérateur différentiel elliptique,  $E_{\xi, \eta}$  un noyau inverse bilatère très régulier, qui satisfont dans l'ouvert  $U \subset \widehat{V}$  à la condition d'approximation (définition 2), alors le dual de  $P_D(U)$  s'identifie à  $P_{t_D}(CU)$  par l'accouplement de la formule (23).

Voici maintenant un cas général où la condition d'approximation est satisfaite :

**Proposition 4.** Si  $V$  est une variété analytique, et si le noyau inverse bilatère très régulier  $E_{\xi, \eta}$  de  $D$  est analytique dans le complémentaire de la diagonale de la variété produit  $V \times V$ , alors  $D$  satisfait à la condition d'approximation dans l'ouvert  $U \subset \widehat{V}$  dans chacun des deux cas suivants :

- a)  $U$  est partie relativement compacte de  $V$ ,
- b)  $\infty \in U$ .

**Démonstration.** Il faut vérifier la condition  $1^0$ ) de la proposition 3. Soit  $K$  une partie compacte de  $U' = U \cap V$ ; si  $\phi \in \mathbf{D}(U')$  est orthogonale à  $P_D(U)$  et a son support dans  $K$ , on a déjà remarqué que  ${}^tE \cdot \phi$  est nulle "ainsi que ses dérivées de tout ordre" dans  $C_V U'$ . Or, ici  ${}^tE \cdot \phi$  est analytique dans le complémentaire du support de  $\phi$ , à fortiori dans  $C_V K$ , elle est donc nulle aussi dans la composante connexe de  $C_V U'$  dans  $C_V K$ . Cette dernière est une partie ouverte  $U'_2$  de  $V$ . Dans le cas a) on pose  $U_2 = U'_2 \cup \{\infty\}$ , dans le cas b),  $U_2 = U'_2$ . Dans les deux cas,  $U_2$  est un voisinage ouvert de  $CU$  dans  $\widehat{V}$ , satisfaisant à la condition  $1^0$ ) de la proposition 3.

Mais on fera attention que même si  $E_{\xi, \eta}$  est analytique en dehors de la diagonale de  $V \times V$ , on ne peut pas affirmer que  $D$  satisfasse à la condition d'approximation dans tout ouvert  $U \subset V$ , quand on ne suppose plus  $U$  relativement compact dans  $V$ . Car rien ne prouve dans la démonstration qui précède que  ${}^tE \cdot \phi$  soit nulle dans un "voisinage de l'infini" et non seulement au voisinage de  $C_V U$  dans  $V$ . Ainsi, pour  $U = V$ , il se pourrait à priori que  $P_D(U)$  soit nul (i. e. qu'il n'existe pas de solution non nulle de l'équation  $Df = 0$  définie dans tout  $V$ ); dans ce cas, la condition d'approximation, ni le théorème 4, ne sera valable dans  $U$ . (5 bis)

Remarquons enfin que dans les deux cas envisagés dans la proposition 4, la formule (27) suffit à elle seule à déterminer la  $\tilde{T} \in P_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}U)$  qui correspond à une forme linéaire continue  $\Phi$  donnée sur  $P_D(U)$ .

**APPENDICE 1.** Sur certains accouplements, définis par un opérateur différentiel et une classe d'homologie de dimension  $n-1$ .

Par la suite, nous considérons des opérateurs différentiels  $\Theta$  (sur la variété indéfiniment différentiable  $V$ ), non plus forcément à coefficients indéfiniment différentiables comme précédemment. Un tel opérateur est par définition une application linéaire continue de  $\mathbf{D}(V)$  dans  $\mathbf{D}'(V)$  "de caractère local", c'est à dire qui n'augmente pas les supports. C'est ce caractère local qui intervient seul comme précédemment, et non le fait que l'on puisse représenter  $\Theta$  sur chaque "carte" par un système d'opérateurs différentiels ordinaires, comme il a été dit au §1. — Un tel opérateur applique en fait  $\mathbf{D}(V)$  dans  $\mathbf{E}'(V)$ , et se prolonge par continuité en une application linéaire continue (de caractère local) de  $\mathbf{E}(V)$  dans  $\mathbf{D}'(V)$ . Soit  $A(V)$  l'espace des opérateurs différentiels quelconques sur  $V$ ,  $a(V)$  le sous-espace formé des opérateurs à coefficients indéfiniment différentiables. Rappelons que  $\Theta \in A(V)$  est à coefficients indéfiniment différentiables si et seulement si il applique  $\mathbf{D}(V)$  dans  $\mathbf{D}(V)$ , ou encore si et seulement si il se prolonge par continuité en une application de  $\mathbf{D}'(V)$  dans  $\mathbf{D}'(V)$ .  $a(V)$  est muni d'une structure d'algèbre, et  $A(V)$  d'une structure de module à gauche et à droite sur  $a(V)$  (si  $\Theta \in a(V)$ ,  $\Theta' \in A(V)$ , on peut prendre l'opérateur composé  $\Theta \circ \Theta'$  et  $\Theta' \circ \Theta$ );  $A(V)$  n'est pas une algèbre.

5 bis. Remarquons que le lemme du §4, N°4 de [2] exprime précisément que pour l'opérateur  $\partial/\partial \bar{z}$  dans le plan complexe, et son noyau inverse bilatère  $1/(\xi - \eta)$ , la condition d'approximation est vérifiée pour tout ouvert  $U \subset \hat{V}$ .

Un opérateur différentiel  $\Theta$  est dit "sans coefficient constant", si on a  $\Theta(1) = 0$ . Ainsi, si  $X$  est un champ de vecteurs continu, les opérateurs  $\Theta_X$  et  $i_X$  (transformation infinitésimale et multiplication intérieure définis par  $X$ ) sont sans terme constant. Nous désignons par  $A_0(V)$  l'espace des opérateurs différentiels sans coefficient constant, par  $a_0(V)$  le sous-espace des opérateurs différentiels à coefficients indéfiniment différentiables sans terme constant.  $A_0(V)$  est un sous-module à gauche de  $A(V)$ , et  $a_0(V)$  est un idéal à gauche dans  $a(V)$ .

Une distribution  $T$  sur  $V$  est dite un cycle, si on a  $dT = 0$  ( $d$  étant l'opérateur de différentiation extérieure). Nous désignons par  $Z_1(V)$  (resp.  $z_1(V)$ ) l'espace des cycles de degré 1 (resp. : et indéfiniment différentiables).

**Lemme.** On peut, et d'une seule manière, à tout ouvert  $U \subset V$ , associer une application linéaire  $\Theta \rightarrow \alpha_\Theta$  de  $A_0(U)$  dans l'espace  $L(z_1(U), \mathbf{D}'_1(U))$  des applications linéaires de  $z_1(U)$  dans  $\mathbf{D}'_1(U)$ , ou de  $a_0(U)$  dans l'espace analogue  $L(Z_1(U), \mathbf{D}'_1(U))$ , de façon à satisfaire aux conditions :

a) (Caractère local) Si  $U' \subset U$  sont deux ouverts dans  $V$ , et si  $T \in z_1(U)$   $\Theta \in A_0(U)$ , alors la restriction de  $\alpha_\Theta(T)$  à  $U'$  est égale à  $\alpha_{\Theta'}(T')$ , où  $\Theta'$  est la restriction de  $\Theta$  à  $U'$ ,  $T'$  la restriction de  $T$  à  $U'$ . — Même énoncé pour  $T \in Z_1(U)$ ,  $\Theta \in a_0(V)$ .

b) On a, pour  $\omega \in \mathbf{E}_0(V)$ ,  $\Theta \in A_0(V)$  ou pour  $\omega \in \mathbf{D}'_0(U)$ ,  $\Theta \in a_0(V)$ , la formule :

$$(1) \quad \alpha_\Theta(d\omega) = \Theta \cdot \omega.$$

Alors, on a aussi la formule

$$(2) \quad \text{supp.}(\alpha_\Theta T) \subset \text{supp.} T.$$

**Démonstration.** — Nous la ferons, pour fixer les idées, pour l'application  $\Theta \rightarrow \alpha_\Theta$  de  $a_0(U)$  dans  $L(Z_1(U), \mathbf{D}'_1(U))$  satisfaisant aux conditions a) et b). Supposons d'abord que  $U$  soit isomorphe à une boule ouverte de  $\mathbf{R}^n$ . Alors l'application  $\omega \rightarrow d\omega$  de  $\mathbf{D}'_0(U)$  dans  $Z_1(U)$  est une application sur. Pour  $\Theta \in A_0(U)$ , et  $T = d\omega$  ( $\omega \in \mathbf{D}'_0(U)$ ), le deuxième membre de (1) ne dépend que de  $T$ , et non de  $\omega$ ; car deux distributions de degré zéro qui ont même différentielle extérieure ne diffèrent que par

une constante. On peut donc poser  $\alpha_\theta T = \Theta \cdot \omega$ ,  $\alpha_\theta$  est bien une application linéaire de  $Z(U)$  dans  $\mathbf{D}'(U)$ , et  $\Theta \rightarrow \alpha_\theta$  est aussi une application linéaire de  $A_0(U)$  dans  $L(Z(U), \mathbf{D}'(U))$ ; la formule (1) est vérifiée par définition; la condition a) se vérifie immédiatement pour des ouverts  $U, U'$  qui sont tous deux isomorphes à une boule de  $\mathbf{R}^n$ ; enfin, la formule (2) en résulte aussitôt ( $\alpha_\theta T$  est nulle dans tout ouvert  $U' \subset U$  où  $T$  l'est, on se ramène en effet au cas où  $U'$  est isomorphe à une boule ouverte de  $\mathbf{R}^n$ ).

Lorsque  $U$  est quelconque, on définit  $\alpha_\theta T$  ( $\Theta \in A_0(U)$ ,  $T \in Z(U)$ ) par le système de ses restrictions aux ouverts  $U'$  contenus dans  $U$  qui sont isomorphes à une boule de  $\mathbf{R}^n$ : tout revient à montrer que le système de distributions ainsi obtenues est "compatible", i. e. que si  $U'$  et  $U''$  sont deux tels ouverts, les distributions  $\alpha_\theta T$ , évaluées sur  $U'$  et  $U''$  respectivement, coïncident dans  $U' \cap U''$ ; ce qui se vérifie immédiatement (on se ramène à considérer une partie ouverte  $U''' \subset U' \cap U''$ , isomorphe elle-même à une boule ouverte de  $\mathbf{R}^n$ ). Enfin, les conditions du lemme se vérifient alors trivialement. — L'unicité du système des applications  $\Theta \rightarrow \alpha_\theta$  est d'ailleurs conséquence immédiate de ce qui précède (on se ramène toujours au cas où  $U$  est isomorphe à une boule).

Remarque 1. Il est immédiat de vérifier que si  $\Theta \in a_0(V)$ ,  $\alpha_\theta$  est application linéaire continue de  $Z(U)$  dans  $\mathbf{D}'(U)$  ainsi que de l'espace  $z(U)$  dans  $\mathbf{E}(U)$ , pour les topologies naturelles de ces espaces. Même remarque si on se restreint aux espaces de distributions à support compact, avec les topologies correspondantes. Si on suppose seulement  $\Theta \in A_0(V)$ , on peut encore dire que  $\alpha_\theta$  est application linéaire continue de  $z(U)$  dans  $\mathbf{D}'(U)$  et du sous-espace de  $\mathbf{E}'(U)$  formé des cycles à support compact, dans  $\mathbf{E}'(U)$ . Bien entendu, dans tout ceci, on pourrait définir  $\alpha_\theta T$  ( $dT = 0$ ) sous des conditions plus générales, en faisant sur  $T$  des hypothèses de régularité locale d'autant plus strictes, que les hypothèses de régularité locale sur  $\Theta$  sont faibles. On aurait des propriétés de continuité correspondantes évidentes.

Remarque 2. Le calcul pratique de  $\alpha_\theta$  se fait facilement dans les cas usuels grâce aux formules suivantes, dont nous n'aurons pas besoin par la suite :

$$(3) \quad \alpha_{\Theta' \circ \Theta} = \Theta \circ \alpha_{\Theta'} \quad (\Theta' \in a(U), \Theta \in A_0(U) \text{ ou } \Theta' \in A(U), \Theta \in a_0(U))$$

$$(4) \quad \alpha_{\Theta_X} = i_X \quad (X \text{ champ de vecteurs continu}).$$

La formule (3) est triviale à partir des définitions; (4) se démontre à l'aide de la formule bien connue  $\Theta_X = di_X + i_X d$ , d'où on tire en effet, pour  $T = d\omega$ :

$$\alpha_{\Theta_X} T = \Theta_X \omega = (di_X + i_X d) \cdot \omega = i_X d\omega = i_X T$$

(car  $i_X \omega = 0$ ,  $\omega$  étant de degré zéro).

Soit maintenant  $D$  un opérateur différentiel quelconque fixé une fois pour toutes. Nous supposons d'abord, pour fixer les idées, que  $D$  est à coefficients indéfiniment différentiables, bien que ce que nous allons dire vaudrait pour  $D$  quelconque, moyennant des restrictions évidentes sur les champs de validité des opérations que nous allons définir.

Pour toute  $S \in H_D(V)$ , considérons l'opérateur différentiel (à coefficients en général non indéfiniment différentiables si  $S$  n'est indéfiniment différentiable)  $D \circ S$  défini par

$$D \circ S \cdot f = D(S \wedge f) \quad (f \in \mathbf{D}(V)).$$

C'est là un opérateur différentiel sans terme constant, puisque

$$D \circ S(1) = D(S) = 0.$$

On peut donc considérer l'opérateur  $\alpha_{D \circ S}$  du lemme précédent, application linéaire de  $z(V)$  dans  $\mathbf{D}'(V)$ , et même de  $Z(V)$  dans  $\mathbf{D}'(V)$  si  $S$  est indéfiniment différentiable. Cet opérateur est défini localement par la formule

$$(5) \quad \alpha_{D \circ S}(d\omega) = D(\omega S);$$

on retrouve dans le deuxième membre la distribution qui intervient dans le produit scalaire de la formule (12) du §2. — Quand  $S$  est indéfiniment différentiable, cette formule peut s'appliquer quand  $\omega$  est une distribution de degré zéro quelconque, par exemple la fonction caractéristique d'un ouvert  $O$ . Alors (5) prend la forme

$$(5 \text{ bis}) \quad \alpha_{D \circ f}(\partial O) = -D(Of)$$

( $\partial O$  étant le "bord" de  $O$ , supposé assez régulier), formule qui est à rapprocher de la formule (13) du §2.

Si maintenant  $z$  est un cycle indéfiniment différentiable à support compact, de degré 1,  $\alpha_{D \circ S} z$  est aussi à support compact (formule (2)).

Par suite, si  $T \in H_{t_D}(V)$ , et si  $S$  ou  $T$  est indéfiniment différentiable, on peut poser

$$(6) \quad \langle S, T \rangle_z = \langle \alpha_D \circ_S z, T \rangle,$$

car le deuxième membre aura un sens. Cet accouplement généralise évidemment celui de la formule (12) du §2. La proposition 1 se généralise ainsi:

**Proposition A.** a) Pour tout cycle  $z$  indéfiniment différentiable à support compact de degré 1, la formule (6) définit une forme bilinéaire séparément continue sur  $H_D(V) \times h_D(V)$  et sur  $h_D(V) \times H_{t_D}(V)$ .

b) Ces formes bilinéaires ne changent pas si on remplace  $z$  par un cycle analogue  $z'$  qui lui est homologue (i.e. tel que  $z - z' = d\omega$ , avec  $\omega \in \mathbf{D}(V) - \omega$  à support compact).

c) Quand on prend  $S$  et  $T$  indéfiniment différentiables, ce qui précède reste valable quand on ne suppose plus  $z$  et  $z'$  indéfiniment différentiables: tout cycle-distribution à support compact  $z$  définit une forme bilinéaire continue sur  $h_D(V) \times h_D(V)$ , ne changeant pas quand on remplace  $z$  par  $z'$  tel que  $z - z' = d\omega$  ( $\omega \in \mathbf{E}'(V)$ ).

**Démonstration.** — a) se vérifie trivialement. On notera qu'en général la forme bilinéaire obtenue sur  $h_D(V) \times H_{t_D}(V)$  n'a pas de raison d'être continue par rapport à l'ensemble des deux variables, car on a ici un accouplement entre un espace du type  $(F)$  et un dual d'espace du type  $(F)$  (accouplements qui sont rarement continus, voir [6]). Dans c) au contraire, il s'agit d'un accouplement entre deux espaces du type  $(F)$ , dont on vérifie immédiatement qu'il est continu en chaque variable; il résulte alors d'un théorème classique qu'il est même continu sur l'espace produit. Reste enfin à vérifier que (6) ne change pas quand on remplace  $z$  par  $z + d\omega$  ( $\omega \in \mathbf{D}(V)$  resp.  $\omega \in \mathbf{E}'(V)$ ). Cela revient aussitôt à montrer que  $\langle \alpha_D \circ_S d\omega, T \rangle = 0$  c'est à dire (formule (5))  $\langle D(\omega S), T \rangle = 0$ , or le premier membre est en effet égal à  $\langle \omega S, {}^tDT \rangle$  qui est nul puisque  ${}^tDT = 0$ .

Soit maintenant  $b_C(V)$  l'espace des formes différentielles indéfiniment différentiables à support compact de degré 1 qui sont "homologues à

zéro", i. e. qui sont de la forme  $d\omega$  ( $\omega$  fonction indéfiniment différentiable à support compact)  $z_C(V)$  l'espace des cycles indéfiniment différentiables à support compact et de degré 1; on a  $b_C(V) \subset z_C(V)$ , et le quotient  $z_C(V)/b_C(V)$  est appelé l'espace d'homologie compacte de degré 1 (ou de dimension  $n-1$ ) de  $V$ , noté  $H_C(V)$ . Le théorème de De Rham affirme que cet espace s'identifie aux autres espaces d'homologie compacte qu'on peut définir de façon analogue avec les autres espaces de distributions à support compact usuels, définis par des conditions de plus ou moins grande régularité locale, p. ex. au quotient  $Z_C(V)/B_C(V)$  des espaces  $Z_C(V)$  et  $B_C(V)$  formés respectivement des distributions-cycles de degré 1 à support compact et de son sous-espace formé des  $d\omega$  (avec  $\omega \in \mathbf{E}'(V)$ , —  $\omega$  à support compact).

La proposition A permet, à tout élément  $r$  de l'espace d'homologie  $H_C(V)$ , de faire correspondre une forme bilinéaire séparément continue sur  $h_D(V) \times H_{t_D}(V)$  et sur  $H_D(V) \times h_{t_D}(V)$ , par la formule

$$(7) \quad \langle S, T \rangle_r = \langle \alpha_D \circ_S z, T \rangle$$

$z \in z_C(V)$  étant un représentant de la classe  $r \in z_C(V)/b_C(V)$ . Quand  $S$  et  $T$  sont indéfiniment différentiables, alors on peut prendre aussi pour  $z$  un cycle-distribution quelconque définissant la classe d'homologie  $r$ , et en particulier (théorème de De Rham) une combinaison linéaire d'hypersurfaces  $\Sigma_i$  orientées compactes indéfiniment différentiables sans bord. Dans ce cas, l'accouplement  $\langle S, T \rangle_r$  s'exprime par une intégrale du type de Green étendue aux surfaces  $\Sigma_i$ , et faisant intervenir les dérivées de  $S$  et  $T$  sur les  $\Sigma_i$  jusqu'à l'ordre  $m-1$ , ( $m$  étant l'ordre de l'opérateur différentiel  $D$ ).

Notons maintenant que l'expression (5) resp. (6) n'est pas seulement linéaire en  $S$  et  $T$ , mais encore en  $z$  resp.  $r$ . D'ailleurs, pour  $S$  et  $T$  fixés, l'expression  $\langle \alpha_D \circ_S z, T \rangle$  est forme linéaire continue sur  $z_C(V)$ , muni de la topologie induite par  $\mathbf{D}(V)$ ; si donc on munit l'espace d'homologie  $H_C(V) = z_C(V)/b_C(V)$  de la topologie quotient de la topologie de  $z_C(V)$ , alors la forme linéaire  $\langle S, T \rangle_r$  sur  $H_C(V)$  est continue. Mais, toujours d'après le théorème de De Rham, l'espace des formes linéaires continues



sur  $H_C(V)$  s'identifie à l'espace de cohomologie de degré  $n-1$   $H(V)$ , pour l'accouplement naturel entre ces deux espaces (rappelons que  $H(V)$  est défini comme l'espace quotient  $z(V)/b(V)$  de l'espace des cycles indéfiniment différentiables de degré  $n-1$  à support quelconque, par le sous-espace formé des éléments  $d\varphi$ , avec  $\varphi \in \mathbf{E}(V)$ ). Si donc on pose

$$(8) \quad \langle S, T \rangle_r = \langle \Gamma(S, T), r \rangle,$$

on a défini par là une application bilinéaire naturelle  $(S, T) \rightarrow \Gamma(S, T)$  de  $h_D(V) \times H_D(V)$  ou de  $H_D(V) \times h_D(V)$  dans l'espace de cohomologie de degré  $n-1$  (ou de dimension 1)  $H(V)$ . Si on munit  $H(V)$  de la topologie induite par  $\mathbf{E}(V)$  et  $H(V)$  de la topologie quotient de  $z(V)$  — topologie qui en fait donc un espace du type  $(F)^{(6)}$  — on sait (théorème de De Rham) que toute forme linéaire continue sur  $H(V)$  provient d'une  $r \in H_C(V)$ . Par suite, les deux applications linéaires précédentes sont séparément faiblement continues, donc séparément continues (car les espaces  $h_D(V)$  etc. qui interviennent ont tous une topologie du type  $\tau(E, E)$  — voir [1]). Bien entendu, ces deux applications bilinéaires induisent sur  $h_D(V) \times h_D(V)$  une même application linéaire continue. D'ailleurs, même si  $D$  n'est pas à coefficients indéfiniment différentiables, ce qui précède reste valable, à condition de se borner à considérer des  $S$  et  $T$  indéfiniment différentiables; en effet, l'expression  $\langle \alpha_D \circ S, T \rangle$  a un sens pourvu que deux au moins parmi les trois tenseurs  $D, S, T$  soient indéfiniment différentiables.

Mais on peut aller encore plus loin. En effet, la donnée d'une application bilinéaire continue  $\Gamma$  de  $h_D(V) \times h_D(V)$  dans  $H(V)$  est équivalente à la donnée d'une application linéaire continue, que nous désignons encore par  $\Gamma$ , du produit tensoriel topologique complété  $\overline{h_D(V) \otimes h_D(V)}$  dans  $H(V)$  (voir [2], §7, No. 1, et [3]). Or le produit tensoriel topologique complété s'interprète ici de façon très simple. En effet,  $h_D(V)$  étant un espace "nucléaire" (voir [2] et [3]) les considérations développées dans [2], §7 No. 1 peuvent se répéter ici et prouvent en particulier que  $\overline{h_D(V) \otimes h_D(V)}$  s'identifie à l'espace  $h_{D, t_D}(V \times V)$  des formes

6. Comme me l'a indiqué M. L. Schwartz, cet espace est toujours isomorphe à un produit topologique de droites.

différentielles indéfiniment différentiables  $\Phi_{\xi, \eta}$  sur  $V \times V$  qui satisfont aux conditions  $D_{\xi} \Phi_{\xi, \eta} = {}^t D_{\eta} \Phi_{\xi, \eta} = 0$ , muni de sa topologie naturelle (topologie induite par  $\mathbf{E}(V \times V)$ ). On peut donc énoncer la

Proposition B.  $D$  étant un opérateur différentiel quelconque sur  $V$  (pas forcément à coefficients indéfiniment différentiables) il existe une application linéaire continue et une seule  $\Gamma$  de  $h_{D, {}^t D}(V \times V)$  dans l'espace de cohomologie  $H(V)$ , telle qu'on ait, pour  $f \in h_D(V)$ ,  $g \in h_{D'}(V)$ :

$$(9) \quad \Gamma(f, g) = \Gamma(f_{\xi} \otimes g_{\eta})$$

(où  $f_{\xi} \otimes g_{\eta}$  désigne le "produit tensoriel" usuel, élément de  $\mathbf{E}(V \times V)$ , des formes différentielles  $f_{\xi}$  et  $g_{\eta}$  — voir §1, No. 3 —). La formule (9) s'écrit, plus explicitement

$$(10) \quad \langle \Gamma(f_{\xi} \otimes g_{\eta}), r \rangle = \langle \alpha_{D \circ f} z, g \rangle \quad (f \in h_D(V), g \in h_{D'}(V), r \in H_C(V))$$

$z$  étant un cycle indéfiniment différentiable à support compact, représentant de la classe  $r$ .

## APPENDICE 2 (*Ajouté pendant la correction des épreuves*).

Ce que nous dirons vaudra pour des opérateurs  $k$ -linéaires différentiels définis sur les espaces de champs de tenseurs de type quelconque. Pour fixer les idées, nous nous bornons à considérer des espaces de formes différentielles indéfiniment différentiables  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{\mathbf{p}_i}(V)$  ( $i = 1, \dots, k$ ).  $V$  est comme toujours une variété indéfiniment différentiable orientée de dimension  $n$ , qui sera sous-entendue dans les notations par la suite (nous écrirons  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}$  pour  $\mathbf{E}(V)$  et  $\mathbf{E}(V)$ ). On sait ce qu'il faut entendre par application  $k$ -linéaire différentielle de  $\Pi \mathbf{E}_i$  dans  $\mathbf{E}$ : C'est une application  $k$ -linéaire continue de  $\Pi \mathbf{E}_i$  dans  $\mathbf{E}$  telle que

$$\text{supp. } u(f_1, \dots, f_k) \subset \bigcap \text{supp. } f_i$$

pour tout système  $(f_1, \dots, f_k) \in \Pi \mathbf{E}_i$ . Le théorème de structure rappelé dans le §1, N°2 pour les opérateurs différentiels s'étend de façon évidente au cas des opérateurs  $k$ -linéaires différentiels. Cela permet en particulier de parler de l'ordre d'un opérateur  $k$ -linéaire différentiel. (D'ailleurs, il serait facile de construire un type  $T$  de tenseurs — "produit tensoriel des types  $T_i$ " correspondants aux  $\mathbf{E}_i$ , — tel que les opérateurs différentiels de l'espace  $\mathbf{E}_T$

correspondant correspondent exactement aux applications  $k$ -linéaires différentielles de  $\Pi\mathbf{E}_i$ , avec conservation de l'ordre).

En composant  $u$  avec un opérateur différentiel de  $\mathbf{E}$ , par exemple avec la différentiation extérieure  $d$ , on trouve une autre application  $k$ -linéaire différentielle  $d \circ u$  de  $\Pi\mathbf{E}_i$ . Pour tout entier  $p$ ,  $0 \leq p \leq n$ , soit  $\Delta_p$  l'espace des opérateurs  $k$ -linéaires différentiels de  $\Pi\mathbf{E}_i$  dans  $\mathbf{E}$ , alors  $u \rightarrow d \circ u$  est une application linéaire  $d_p$  de  $\Delta_p$  dans  $\Delta_{p+1}$ , et comme  $d^2 = 0$ , on a  $d_{p+1} \circ d_p = 0$ . Le théorème qui suit donne la cohomologie du "complexe" ainsi construit:

**Théorème A.** 1. Soit  $0 \leq p < n$ , et soit  $u$  une application  $k$ -linéaire différentielle de  $\Pi\mathbf{E}_i$  dans  $\mathbf{E}$ . Pour que  $u$  puisse se mettre sous la forme  $u = d \circ v$ , où  $v$  est une application  $k$ -linéaire différentielle de  $\Pi\mathbf{E}_i$  dans  $\mathbf{E}$ , il faut et il suffit que  $d \circ u = 0$ .

2. Soit  $u$  une application  $k$ -linéaire différentielle de  $\Pi\mathbf{E}_i$  dans  $\mathbf{E}$ . Pour que  $u$  puisse se mettre sous la forme  $d \circ u$ , il faut et il suffit que  $\int u(f_1, \dots, f_k) = 0$  quand les  $f_i \in \mathbf{E}_i$  sont à supports compacts.

3. Si  $u$  a un ordre différentiel  $m$ , et admet une "primitive"  $v$  (i.e.  $u = d \circ v$ ), alors on peut choisir  $v$  d'ordre  $m - 1$ .

**Corollaire.** Si  $u$  admet deux "primitives"  $v$  et  $v'$ , i.e. si

$$u = d \circ v \quad \text{et} \quad u = d \circ v'$$

où  $v$  et  $v'$  sont deux applications  $k$ -linéaires différentielles de  $\Pi\mathbf{E}_i$  dans  $\mathbf{E}$ , alors on a

$$v' = v + d \circ w,$$

où  $w$  est une application  $k$ -linéaire différentielle de  $\Pi\mathbf{E}_i$  dans  $\mathbf{E}$ .

En effet, il suffit d'appliquer le théorème A, 1° à  $v' - v$ .

Nous nous bornons à indiquer le principe de la démonstration du

théorème A. En premier lieu, si  $(\varphi_i)$  est une "partition indéfiniment différentiable de l'unité" sur  $V$ , les applications  $u \rightarrow u \circ \varphi_i$  dans les  $\Delta_p$  y définissent des décompositions de l'opérateur identique, et permutent aux opérateurs  $d_p$  (car  $(d \circ u) \circ \varphi_i = d \circ (u \circ \varphi_i)$ ). Cela permet facilement de se ramener au local, et en particulier au cas des opérateurs  $k$ -linéaires différentiels d'ordre fini sur  $\mathbf{R}^n$ . Alors il est immédiat qu'on peut supposer de plus  $k=1$ . Soit  $\Delta_p^m$  le sous-espace de  $\Delta_p$  formé des opérateurs différentiels d'ordre  $\leq m$ ; pour un entier  $m_0$  fixé, la suite  $\Delta_0^{m_0}, \Delta_1^{m_0+1}, \dots, \Delta_n^{m_0+n}$  forme encore un complexe, et il suffit de montrer que sa cohomologie est nulle pour les degrés  $p < n$ , et qu'un  $u \in \Delta_n^{m_0+n}$  est un "cobord" si et seulement si il satisfait à la condition du théorème A, 2. Or, la représentation explicite des  $u \in \Delta_p^m$  par

$$u(f) = \sum_{|I| \leq m; I} D^r(A_{r,I} f) e_I$$

(où  $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ ,  $I = (i_1, \dots, i_p)$ , avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ ) identifie  $u$  à un système  $(A_{r,I})$  de fonctions indéfiniment différentiables. Donc  $\Delta_p^{m_0+p}$  s'identifie à l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\mathbf{R}^n$ , à valeurs dans un certain espace vectoriel  $V_p$  de dimension finie, facile à expliciter ( $m_0$  est sous-entendu une fois pour toutes dans la notation). Et on vérifie aussitôt que  $u \rightarrow d \circ u$  s'interprète alors comme  $u \rightarrow \lambda_p \circ u$ , où  $\lambda_p$  est une application linéaire fixe de  $V_p$  dans  $V_{p+1}$ . Les  $V_p$  avec les applications  $\lambda_p$  forment un complexe  $K$ , et le théorème A résulte alors facilement du résultat: la cohomologie de ce complexe est nulle pour les degrés  $p < n$ , et de dimension 1 pour le degré  $n$ . Enfin, ce dernier résultat, de nature purement algébrique, peut par exemple se déduire du fait qu'il est (trivialement) vrai pour  $\mathbf{R}^1$  ( $n=1$ ), et que pour  $n=n_1+n_2$ , le complexe  $K$  précédent s'identifie au "produit tensoriel" des complexes analogues construits sur  $\mathbf{R}^{n_1}$  et  $\mathbf{R}^{n_2}$ . Le "théorème de Künneth" donne alors le résultat annoncé.

Soit maintenant  $D$  un opérateur différentiel quelconque de  $\mathbf{E}_p$  dans  $\mathbf{E}_q$ , considérons l'opérateur  $u$

$$u(f, g) = f \wedge^t Dg - Df \wedge g.$$

C'est une application bilinéaire différentielle de  $\mathbf{E}_p \times \mathbf{E}_{n-q}$  dans  $\mathbf{E}_n$ , qui satisfait

évidemment à la condition du théorème A, 2°, qui s'écrit en effet ici  $\langle Df, g \rangle = \langle f, {}^tDg \rangle$ . Il existe donc une application bilinéaire différentielle  $v(f, g)$  de  $\mathbf{E}_p \times \mathbf{E}_{n-q}$  dans  $\mathbf{E}_n$  telle que

$$(11) \quad u(f, g) = f \wedge {}^tDg - Df \wedge g = dv(f, g) \quad (f \in \mathbf{E}_p, g \in \mathbf{E}_{n-q}).$$

Une telle  $v$  est appelée "primitive de Green" de  $D$ ; il en existe toujours au moins une, et si  $D$  est d'ordre différentiel  $m$ , il existe une primitive de Green d'ordre  $m-1$ . (11) équivaut à la classique formule de Green

$$(11 \text{ bis}) \quad \int_O f \wedge {}^tDg - Df \wedge g = \int_{\partial O} v(f, g)$$

valable p. ex. pour tout ouvert ayant une frontière indéfiniment différentiable, quand  $O \cap \text{supp.} f \cap \text{supp.} g$  est relativement compact (formule de Stokes).—

Si  $v$  et  $v'$  sont deux primitives de Green, alors (théorème A, corollaire)

$v' - v = d \circ w$ , où  $w$  est une application bilinéaire différentielle de  $\mathbf{E}_p \times \mathbf{E}_{n-q}$  dans  $\mathbf{E}_{n-2}$ . Par suite, si  $f \wedge {}^tDg - Df \wedge g = 0$ , i.e. si  $v(f, g)$

est un cocycle, alors la classe de cohomologie de ce dernier ne dépend pas du choix de la primitive de Green

$v$ . Il en est en particulier ainsi si  ${}^tDg = 0$  et  $Df = 0$ . On obtient ainsi une application bilinéaire canonique  $\gamma(f, g)$  de  $h_D(V) \times h_{tD}(V)$  dans l'espace de cohomologie  $H(V)$  de degré  $n-1$ ,  $\gamma(f, g)$  désignant la classe de cohomologie du cocycle  $v(f, g)$  (où  $v$  est une quelconque primitive de Green de  $D$ ).

Montrons que cette application n'est autre, au signe près, que celle donnée par la formule (7) et (8) de l'Appendice 1 :

$$(12) \quad \langle \gamma(f, g), r \rangle = \langle a_{D \circ f_1} z, g \rangle,$$

où  $z$  est un représentant de la classe de homologie compacte  $r$  de degré 1.

Pour le voir, soit pour  $f \in \mathbf{E}_p$ ,  $\Theta_f$  l'opérateur différentiel  $g \rightarrow f \wedge {}^tDg - Df \wedge g$ ,  $\beta_f$  l'opérateur différentiel  $g \rightarrow v(f, g)$ , alors (11) s'écrit  $\Theta_f = d \circ \beta_f$ , soit  ${}^t\Theta_f = {}^t\beta_f \circ {}^td = (-1)^n {}^t\beta_f \circ d$ , i.e. on a, pour toute  $w \in \mathbf{E}_0$

$${}^t\Theta_f w = (-1)^n {}^t\beta_f dw.$$

Cela reste vrai si  $\omega$  est défini seulement sur un ouvert de  $V$ . Il en résulte que  ${}^t\Theta_f$  est "à coefficients constants" (i. e.  ${}^t\Theta_f(1) = 0$ ) et que

$$\alpha_{t_{\theta_f}} z = (-1)^n {}^t\beta_f z$$

pour tout cycle  $z$ . Par suite, si  $g \in \mathbf{E}$ , on a

$$\langle \alpha_{t_{\theta_f}} z, g \rangle = - \langle v(f, g), z \rangle.$$

Si  $Df = 0$ , alors  ${}^t\Theta_f = D \circ f$ , d'où aussitôt (12) quand de plus  $Dg = 0$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

1. J. Dieudonné et L. Schwartz, La dualité dans les espaces  $(F)$  et  $(LF)$  *Annales de Grenoble* t. 1 (1949), p. 61—101.
2. A. Grothendieck, Sur certains espaces de fonctions holomorphes, à paraître *Journal de Crelle*, 1953.
3. A. Grothendieck, Sur une notion de produit tensoriel topologique. *Comptes Rendus*, t. 233 p. 1556—1558, 1951.
4. K. Kodaira et G. de Rham, Harmonic integrals, lectures delivered in a Seminar at the Institute for Advanced Study, Princeton, 1950.
5. G. Köthe, Dualität in der Funktionentheorie, à paraître *Journal de Crelle*, 1953.
6. L. Schwartz, Théorie des distributions, t. 1 et 2, Actualités Scient. et Ind. Paris, Hermann (1950 et 1951).
7. J. Silva, As funções analíticas e a Análise funcional. Tesi di dottorato 1948, *Portugaliae Math.*, 9 (1950) pp. 1—130.

(Reçu le 15.IV.1952)