# Lettre de A. Grothendieck à L. Breen ([1])

Villecun le 17.2.75

Cher Larry,

Encore un "afterthought" à une lettre-fleuve sur le yoga homotopique. Comme tu sais sans doute, à un topos $X$ on associe canoniquement un pro-ensemble simplicial, donc un "pro-type d'homotopie" en un sens convenable. Dans le cas où $X$ est "localement homotopiquement trivial", le pro-objet associé est essentiellement constant en tant que pro-objet dans la catégorie homotopique, donc $X$ définit un objet de la catégorie homotopique usuelle, qui est son "type d'homotopie". De même, si $X$ est "localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$", il définit un type d'homotopie ordinaire "tronqué en dim $\leq n$" - construction familière pour $i = 0$ ou 1, même à des gens comme moi qui ne connaissent guère l'homotopie !

Ces constructions sont fonctorielles en $X$. D'ailleurs, si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de topos, Artin-Mazur ont donné une condition nécéssaire et suffisante *cohomologique* pour que ce soit une "équivalence d'homotopie en dim $\leq n$" : c'est que $\mathrm{H}^i(Y,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(X, f^*(F))$ pour $i \leq n$, et tout faisceau de groupes *localement constant* $F$ sur $Y$, en se restreignant de plus à $i \leq 1$ dans le cas non commutatif. Ce critère, en termes de $n$-gerbes "localement constantes" $F$ sur $Y$, s'interprète par la condition que $F(Y) \longrightarrow F(X)$ est une $n$-équivalence pour tout tel $F$ et $i \leq n$. Il est certainement vrai que ceci équivaut encore au critère suivant

(A) Pour tout $n$-champ "localement contant" $F$ sur $Y$, le $n$-foncteur $F(Y) \longrightarrow f^*(F)(X)$ est une $n$-équivalence;

[1] Ce texte a été transcrit par Mateo Carmona

ou encore à

(B) Le $n$-foncteur $F \longrightarrow f^*(F)$ allant de la $n$-catégorie des $(n-1)$-champs localement constants sur $Y$ dans celle des $(n-1)$-champs localement constants sur $X$, est une $n$-équivalence.

En d'autres termes, les constructions sur un topos $X$ qu'on peut faire en termes de $(n-1)$-champs *localement* contants ne dépendent que de son "(pro)-type d'homotopie $n$-tronquée", et le définissent. Dans le cas où $X$ est localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, donc définit un type d'homotopie $n$-tronqué ordinaire, on peut interpréter ce dernier comme un $n$-groupoïde $C_n$, (défini à $n$-équivalence près). En termes de $C_n$, les $(n-1)$-champs localement constants sur $X$ doivent s'identifier aux $n$-foncteurs de la $n$-catégorie $C_n$ dans la $n$-catégorie $(n-1)-\mathrm{Cat}$ de toutes les $(n-1)$-catégories. Dans le cas $n=1$ ceci n'est autre que la théorie de Poincaré de la classification des revêtements de $X$ en termes du "groupoïde fondamental" $C_1$ de $X$. Par extension, $C_n$ mérite le nom de *$n$-groupoïde fondamental de $X$*, que je propose de noter $\Pi_n(X)$. Sa connaissance induite donc celle des $\pi_i(X)$ $(0 \geq i \geq n)$ et des invariants de Postnikoff de tous les ordres jusqu'à $\mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n-1}(X), \pi_n)$.

Dans le cas d'un topos $X$ quelconque, pas nécéssairement localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, on espère pouvoir interpréter les $(n-1)$-champs localement constants sur $X$ en termes d'un $\Pi_n(X)$ qui sera un pro-n-groupoïde. Ça a été fait en tous cas, plus ou moins, pour $n=1$ (du moins pour $X$ connexe); le cas où $X$ est le topos étale d'un schéma est traité in extenso dans SGA 3, à propos de la classification des tores sur une base quelconque.

Dans le cas $n=1$, on sait qu'on récupère (à équivalence près) le 1-groupoïde $C_1$ à partir de la 1-catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(C_1, \mathrm{Ens})$ de ces foncteurs dans $\mathrm{Ens} = 0-\mathrm{Cat}$ (i.e. des "systèmes locaux" sur $C_1$ qui est un topos, dit "multigaloisien") comme la catégorie des "foncteurs fibres" sur le dit topos, i.e. la catégorie opposée à la catégorie des points de ce topos (lequel n'est autre que le *topos classifiant* de $C_1$). Pour préciser pour $n$ quelconque la façon dont le $n$-type d'homotopie d'un topos $X$ (supposé localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, pour simplifier), i.e. son $n$-groupoïde fondamental $C_n$, s'exprime en termes de la $n$-catégorie des "$(n-1)$-systèmes locaux sur $X$" i.e. des $(n-1)$-champs localement constants sur

$X$, et par là élucider complètement l'énoncé hypothétique $(B)$ ci-dessus, il faudrait donc expliciter comment un $n$-groupoïde $C_n$ se récupère, à $n$-équivalence près, par la connaissance de la $n$-catégorie $C_n = n - \underline{\mathrm{Hom}}(C_n, (n-1) - \mathrm{Cat})$ des $(n-1)$-systèmes locaux sur $C_n$. On aurait envie de dire que $C_n$ est la catégorie des "$n$-foncteurs fibres" sur $C_n$, i.e. des $n$-foncteurs $C_n \longrightarrow (n-1) - \mathrm{Cat}$ ayant certaines propriétés d'exactitude (pour $n = 1$, c'était la condition d'être les foncteurs image inverse pour un morphisme de topos, i.e. de commuter aux $\varprojlim$ quelconques et aux $\varinjlim$ finies ...) C'est ici que se matérialise la peur, exprimée dans ma précédente lettre, qu'on finisse par tomber sur la notion de $n$-topos et morphismes de tels ! $C_n$ serait un topos (appelé le "$n$-topos classifiant du $n$-groupoïde $C_n$), $(n-1) - \mathrm{Cat}$ serait le $n$-topos "ponctuel" type, et $C_n$ d'interprète mod $n$-équivalence comme la $n$-catégorie des "$n$-points" du $n$-topos classifiant $C_n$. Brr !

Si on espère encore pouvoir définir un bon vieux 1-topos classifiant pour un $n$-groupoïde $C_n$, comme solution d'un problème universel, je ne vois guère que le problème universel suivant : pour tout topos $T$, considérons $\underline{\mathrm{Hom}}(\Pi_n(T), C_n)$. C'est une $n$-catégorie, mais prenons en la 1-catégorie tronquée $\tau_1 \underline{\mathrm{Hom}}(\Pi_n(T), C_n)$. Pour $T$ variable, on voudrait 2-représenter le 2-foncteur contravariant $\mathrm{Top}^\circ \longrightarrow 1 - \mathrm{Cat}$ par un topos classifiant $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{C_n}$, donc trouver un $\Pi_n(\mathrm{B}) \xrightarrow{\varphi} C_n$ 2-universel en le sens que pour tout $T$, le foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Top}}(T, \mathrm{B}) \xrightarrow{u \mapsto \varphi \circ \Pi_n(u)} \tau_1 \underline{\mathrm{Hom}}(\Pi_n(T), C_n)$$

soit une équivalence. Pour $n = 1$ on sait que le topos classifiant de $C_1$ au sens usuel fait l'affaire, mais pour $n = 2$ déjà, je doute que ce problème universel ait une solution. C'est peut-être lié au fait que le “théorème de Van Kampen”, qu'on peut exprimer en disant que le 2-foncteur $T \longrightarrow \Pi_1(T)$ des topos localement 1-connexes vers les groupoïdes transforme (à 1-équivalence près) sommes amalgamées (et plus généralement commute aux 2-limites inductives), n'est sans doute plus vrai pour le $\Pi_2(T)$. Ainsi, si $T$ est un espace topologique réunion de deux fermés $T_1$ et $T_2$, il n'est sans doute plus vrai que la donnée d'un 1-champ localement constant sur $T$ “équivaut à” la donnée d'un 1-champ localement constant $F_i$ sur $T_i$ $(i = 1, 2)$ et d'une équivalence entre les restrictions de $F_1$ et $F_2$ à $T_1 \cup T_2$ (alors que l'énoncé analogue en termes de 0-champs, i.e. de revêtements, est évidemment correct).

L'énoncé (B) plus haut rend clair comment expliciter la cohomologie d'un $n$-groupoïde $C_n$. Si $C_n = \Pi_n(X)$, et si $F$ est un $(n-1)$-champ localement constant sur $X$, $e^X_{n-1}$ est le $(n-1)$-champ "final", on a une $(n-1)$-équivalence de $(n-1)$-catégories

$$\Gamma_X(F) = F(X) \simeq \mathrm{Hom}(e^X_{n-1}, F)$$

qui montre que le foncteur $\Gamma_X$ "integration sur $X$" sur les $(n-1)$-champs localement constants, qui inclut la cohomologie (non commutative) localement constante de $X$ en dim $\leq n-1$, s'interprète en termes de "$(n-1)$-systèmes locaux" sur le groupoïde fondamental comme un $\underline{\mathrm{Hom}}(e^{C_n}_{n-1}, F)$ où maintenant $F$ est interprété comme un $n$-foncteur

$$C_n \xrightarrow{F} (n-1)-\mathrm{Cat}$$

et $e^{C_n}_{n-1}$ est le $n$-foncteur constant sur $C_n$, de valeur la $(n-1)$-catégorie finale.

Pour interpréter ceci en notation cohomologique, il faut que j'ajoute, comme "remords" à la lettre précédente, l'interprétation explicite de la cohomologie non commutative sur un topos $X$, en termes d'intégration de $n$-champs sur $X$. Soit $F$ un $n$-champ de Picard strict sur $X$, il est donc défini par un complexe de cochaines $L^\prime$ sur $X$

$$0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow L^n \longrightarrow 0$$

concentré en degrés $0 \leq i \leq n$ (défini à isomorphisme unique près dans la catégorie dérivée de $\mathrm{Ab}(X)$). Ceci dit, les $\mathrm{H}^i(X, L^\prime)$ (hypercohomologie) *pour* $0 \leq i \leq n$ s'interprètent comme $\mathrm{H}^i(X, L^\prime) = \pi_{n-i}\Gamma_X(F)$.

Si on s'intéresse à tous les $\mathrm{H}^i$ (pas seulement pour $i \leq n$) on doit, pour tout $N \geq n$, regarder $L^\prime$ comme un complexe concentré en degrés $0 \leq i \leq N$ (en prolongeant $L^\prime$ par des $0$ à droite).Le $N$-champ de Picard strict correspondant n'est plus $F$ mais $C^{N-n}F$, où $C$ est le foncteur "espace classifiant", s'interprétant sur les $n$-catégories de Picard strictes comme l'opération consistant à "translater" les $i$-objets en des $(i+1)$-objets, et à rajouter un unique $0$-objet; il se prolonge aux $n$-champs de Picard "de façon évidente", on espère, de façon à commuter aux opérations d'image inverse de $n$-champs. On aura donc pour $i \leq N$

$$\mathrm{H}^i(X, L^\prime) = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad i \leq N.$$

Ceci posé, il s'impose, pour tout $n$-champ de Picard strict $F$ sur $X$, de poser

$$\mathrm{H}^i(X,F)=\pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad \text{si} \quad N\geq i,n$$

ce qui ne dépend pas du choix de l'entier $N\geq Sup(i,n)$ [**NB** On a un morphisme canonique de $(n-1)$-groupoïdes,

$$C(\Gamma_X F)\longrightarrow \Gamma_X(CF),$$

comme le montrent les constructions évidentes en termes de complexes de cochaines, et on voit de même que celui-ci induit des isomorphismes pour les $\pi_i$ pour $1\leq i\leq n+1$.]

**NB** On voit en passant que pour un $n$-champ en groupoïdes $F$ sur $X$, si on se borne à vouloir définir les $\mathrm{H}^i(X,F)$ pour $0\leq i\leq n$, on n'a pas besoin sur $F$ d'une structure de Picard, car il suffit de poser

$$\mathrm{H}^i(X,F)=\pi_{n-i}(\Gamma_X(F)) \quad 0\leq i\leq n.$$

Si d'autre part $F$ est un $n$-Gr-champ (i.e. muni d'une loi de composition $F\times F\longrightarrow F$ ayant les propriétés formelles d'une loi de groupe) le $(n+1)$-"champ classifiant" est défini, et on peut définir $\mathrm{H}^i(X,F)$ pour $i\leq n+1$ par

$$\mathrm{H}^i(X,F)=\pi_{n+1-i}(\Gamma_X(CF))$$

en particulier

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F)=\pi_0(\Gamma_X(CF))= \text{ sections de } CF \text{ à équivalence près.}$$

Mais on ne peut former $CCF=C^2F$ et définir $\mathrm{H}^{n+2}(X,F)$, semble-t-il *que* si $CF$ est lui-même un Gr-$(n+1)$-champ, ce qui ne sera sans doute le cas que si $F$ est un $n$-champ de Picard strict...

Venons en maintenant au cas où $F$ est un $n$-champ *localement constant* sur $X$, donc défini par un $(n+1)$-foncteur

$$C_{n+1}\xrightarrow{F} n-\mathrm{Cat}.\text{ de Picard strictes.}$$

Alors, posant pour $0\leq i\leq n$

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F)=\pi_{n-1}(\underline{\mathrm{Hom}}(e_n^{C_{n+1}},F)),$$

"on a fait ce qu'il fallait" pour que l'on ait un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1}, F) \simeq \mathrm{H}^i(X, F),$$

(valable en fait sans structure de Picard sur $F$...). Il s'impose, pour tout $\infty$-groupoïde $C$ et tout $(n+1)$-foncteur

$$C \xrightarrow{F} n-\mathrm{Cat}. \text{ de Picard strictes.}$$

de définir les $\mathrm{H}^i(C, F)$, pour tout $i$, par

$$\mathrm{H}^i(C, F) = \pi_{N-i}\underline{\mathrm{Hom}}(e_N^C, C^{N-n}F)$$

où on choisit $N \geq Sup(i, n)$. Si $F$ n'a qu'une Gr-structure (pas nécéssairement de Picard) on peut définir encore les $\mathrm{H}^i(C, F)$ pour $i \leq n+1$ par

$$\mathrm{H}^i(C, F) = \pi_{n+1-i}\underline{\mathrm{Hom}}(e_{n+1}^C, CF).$$

Dans le cas $C = C_{n+1} = \Pi_{n+1}(X)$, il doit être vrai encore (en vertu de (A) plus haut), que cet ensemble est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}^{n+1}(X, F) = \pi_0\Gamma_X(CF)$ (c'est vrai et bien facile pour $n = 0$). Décrire la flèche canonique entre les deux membres de

$$\mathrm{H}^{n+1}(X, F) \simeq \mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n+1}X, F) \quad ?$$

Si on veut réexpliciter (A) et (B), en termes du yoga (C), on arrive à la situation suivante:

On a un $(n+1)$-foncteur entre $(n+1)$-groupoïdes

$$f_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow D_{n+1}$$

induisant par troncature un $n$-foncteur

$$f_n : C_n \longrightarrow D_n$$

On doit avoir alors:

(A') $f_n$ est une $n$-équivalence si et seule si le $n$-foncteur $\varphi \longrightarrow \varphi \circ f_n$

$$f_n^* : \underline{\mathrm{Hom}}(D_n, (n-1)-\mathrm{Cat}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C_n, (n-1)-\mathrm{Cat})$$

allant des $(n-1)$.systèmes locaux sur $D_n$ (ou $D_{n+1}$, c'est pareil) vers les $(n-1)$-systèmes locaux sur $C_n$, est une $n$-équivalence.

(B') $f_n$ est une $n$-équivalence si et seule si pour tout $n$-système local $F$ sur $D_{n+1}$,

$$F : D_{n+1} \longrightarrow n - \mathrm{Cat},$$

le $n$-foncteur induit par $f_{n+1}$

$$\underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(e_n^{D_{n+1}}, F)}_{\Gamma_{D_{n+1}(F)}} \longrightarrow \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(e_n^{D_{n+1}}, f_{n+1}^* F)}_{\Gamma_{C_{n+1}(F)}}$$

est une $n$-équivalence.

La construction de la cohomologie d'un topos en termes d'intégration des champs ne fait aucun appel à la notion de complexe de faisceaux abéliens, encore moins à la technique des résolutions injectives. On a l'impression que dans son esprit, via la définition (qui reste à expliciter !) des $n$-champs, elle s'apparenterait plutôt aux calculs "Cechistes" en termes d'hyperrecouvrements. Or ces derniers se décrivent à l'aide d'une petite dose d'algèbre semi-simpliciale. Si oui, cela ferait essentiellement trois approches distinctes pour construire la cohomologie d'un topos :

a) point de vue des complexes de faisceaux, des résolutions injectives, des catégories dérivées (*algèbre homologique commutative*);

b) point de vue Cechiste ou semi-simplicial (*algèbre homotopique*);

c) point de vue des $n$-champs (algèbre catégorique, ou *algèbre homologique non-commutative*).

Dans a) on "résoud" les coefficients, dans b) on résoud l'espace (ou topos) de base, et dans c) en apparence on ne résoud ni l'un ni l'autre.

Bien cordialement,

Alexandre

# Letter of A. Grothendieck to L. Breen

Villecun 17.2.75

Dear Larry,

Here is an afterthought to "une lettre-fleuve" on the yoga of homotopy. As you doubtless know, to a topos $X$ one associates canonically a pro-simplicial set, and so in a convenient sense a "pro-homotopy type". When $X$ is "locally homotopically trivial", the associated pro-object is essentially constant as a pro-object in the homotopy category, and so $X$ defines, in the usual homotopy category, an object which is the "homotopy type". Similarly, if $X$ is "locally homotopically trivial in dim $\leq n$", it defines an ordinary homotopy type, but "truncated in dim $\leq n$" - this is a familiar construction for $n = 0$ or 1, even among those like me who know hardly any homotopy theory!

These constructions are functorial in $X$. Moreover, if $f : X \longrightarrow Y$ is a morphism of topoi, Artin-Mazur have given a *cohomological* condition which is necessary and sufficient for $f$ to be a "homotopy equivalence in dim $\leq n$": it is that $\mathrm{H}^i(Y,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(X, f^*(F))$ for $i \leq n$, and all *locally constant* sheaves of groups $F$ on $Y$, allowing for $i \leq 1$ that $F$ be non-commutative. This criterion, in terms of "locally constant" $n$-gerbes $F$ on $Y$, can be interpreted as the condition that $F(Y) \longrightarrow F(X)$ is an $n$-equivalence for all such $F$ and $i \leq n$. It is certainly true that this is equivalent to the following criterion:

(A) For every "locally constant" $n$-stack $F$ on $Y$, the $n$-functor $F(Y) \longrightarrow f^*(F)(X)$ is an $n$-equivalence;

or again

(B) The $n$-functor $F \longrightarrow f^*(F)$ which sends the $n$-category of locally constant $(n-1)$-stacks in $Y$ to that of locally constant $(n-1)$-stacks on $X$, is an $n$-equivalence.

In other terms, the construction on a topos $X$ which one can make in terms of $(n-1)$-stacks which are *locally* constant, depend only on its "$n$-truncated pro-homotopy type", and define it. In the case where $X$ is locally homotopically trivial in dim $\leq n$, and so defines a $n$-truncated ordinary homotopy type, one can interpret these last as an $n$-groupoid $C_n$, (defined up to $n$-equivalence). In terms of these

(C) The $(n-1)$-stacks on $X$ should be able to be identified with the $n$-functors from the category $C_n$ $n$-category $(n-1)-\mathrm{Cat}$ of all $(n-1)$-categories.

In the case $n = 1$, this is nothing other than the Poincaré theory of the classification of coverings of $X$ in terms of the "fundamental groupoid" $C_1$ of $X$. By extension, $C_n$ merits the name *fundamental n-groupoid* of $X$, which I propose to write $\Pi_n(X)$. Knowledge of this includes knowledge of the $\pi_i(X)$ $(0 \geq i \geq n)$ and the Postnikoff invariants of all orders up to $\mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n-1}(X), \pi_n)$.

In the case of an arbitrary topos $X$, not necessarily locally homotopically trivial in dim $\leq n$, one hopes to be able to interpret the $(n-1)$-stacks which are locally constant on $X$ in terms of a $\Pi_n(X)$ which will be a pro-$n$-groupoid. This has been done, more or less, for $n = 1$ (at least for connected $X$); the case where $X$ is the étale topos of a scheme is treated extensively in SGA 3, in relation to the classification of tori on an arbitrary base.

In the case $n = 1$, one knows that one can recover (up to equivalence) the 1-groupoid $C_1$ from the 1-category $\underline{\mathrm{Hom}}(C_1, \mathrm{Set})$ of the functors into $\mathrm{Set} = 0-\mathrm{Cat}$ (i.e. the "local systems" on $C_1$ which is a topos, called "multigaloisian") - like the category of "fibred functors" on the above topos, i.e. the opposite category to the category of points of this topos (which is none other than the *classifying topos* of $C_1$). To make precise for arbitrary $n$ the way in which the homotopy $n$-type of a topos $X$ (supposed for simplicity to be locally homotopically trivial in dim $\leq n$) i.e. its fundamental $n$-groupoid $C_n$, can be expressed in terms of the $n$-category of "local $(n-1)$-systems on $X$" i.e. of the locally constant $(n-1)$-stacks on $X$, and to elucidate completely the hypothetical statement (B) above, it is necessary to make explicit how an $n$-groupoid $C_n$ can be recovered, up $n$-equivalence, from the knowledge of the $n$-category

$$\underline{C}_n = n - \underline{\mathrm{Hom}}(C_n, (n-1) - \mathrm{Cat})$$

of local $(n-1)$-systems on $C_n$. One would like to say that $C_n$ is the category of "fibred $n$-functors" on $\underline{C}_n$, i.e. of $n$-functors $\underline{C}_n \longrightarrow (n-1) - \mathrm{Cat}$ having certain exactness properties (for $n = 1$, this is the condition of being the inverse image functor for a morphism of topoi, i.e. to commute with arbitrary $\varprojlim$ and with finite $\varinjlim$...). It is this which makes real the fear, expressed in my preceding letter, that one ends by falling upon the notion of $n$-topos and of morphisms of these! $\underline{C}_n$ will be an $n$-topos, (called the "classifying $n$-topos" of the $n$-groupoid $C_n$), $(n-1) - \mathrm{Cat}$ will be the $n$-topos of points, and $C_n$ will be interpreted modulo $n$-equivalence as the $n$-category of "$n$-points" of the classifying $n$-topos $\underline{C}_n$. Brr !

If one hopes to be able to define a good old classifying 1-topos for an $n$-groupoid $C_n$, as solution of a universal problem, I can see only how to recover the following universal problem: for every topos $T$, consider $\underline{\mathrm{Hom}}(\Pi_n(T), C_n)$. This is an $n$-category, but take from it the truncated 1-category $\tau_1\underline{\mathrm{Hom}}(\Pi_n(T), C_n)$. For variable $T$, one wants to 2-represent the contravariant 2-functor $\mathrm{Top}^\circ \longrightarrow 1 - \mathrm{Cat}$ by a classifying topos $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{C_n}$, and then to find a 2-universal $\Pi_n(\mathrm{B}) \xrightarrow{\varphi} C_n$ in the sense that for all $T$, the functor

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Top}}(T, \mathrm{B}) \xrightarrow{u \mapsto \varphi \circ \Pi_n(u)} \tau_1\underline{\mathrm{Hom}}(\Pi_n(T), C_n)$$

is an equivalence. For $n = 1$ one knows that the usual classifying topos of $C_1$ does the job, but for $n = 2$ already, I doubt that this universal problem has a solution. This is perhaps related to the fact that the "Van Kampen Theorem", which one can express by saying that the 2-functor $T \longrightarrow \Pi_1(T)$ of locally 1-connected topoi to groupoids transforms (up to 1-equivalence) amalgamated sums to amalgamated sums (and more generally commutes with inductive 2-limits), is doubtless no longer true for $\Pi_2(T)$. Thus, if $T$ is a topological space which is the union of two closed sets, $T_1$ and $T_2$, it is doubtless not true that giving a locally constant 1-stack on $T$ " is equivalent to" giving a locally constant 1-stack $F_i$ on

$T_i$ ($i = 1,2$) and an equivalence between the restrictions of $F_1$ and $F_2$ to $T_1 \cup T_2$ (while the analogous statement in terms of 0-stacks, i.e. for coverings, is evidently correct).

The statement (B) above makes it clear how to give explicitly the cohomology of an $n$-groupoid $C_n$. If $C_n = \Pi_n(X)$, and if $F$ is a locally constant $(n-1)$-stack on $X$, and $e^X_{n-1}$ is the "final" $(n-1)$-stack, one has an $(n-1)$-equivalence of $(n-1)$-categories

$$\Gamma_X(F) = F(X) \simeq \mathrm{Hom}(e^X_{n-1}, F)$$

which shows that the functor $\Gamma_X$ "integration on $X$" for locally constant $(n-1)$-stacks, which includes the (non-commutative) locally constant cohomology of $X$ in dim $\leq n-1$, can be interpreted in terms of "local $(n-1)$-systems" on the fundamental groupoid as an $\underline{\mathrm{Hom}}(e^{C_n}_{n-1}, F)$ where now $F$ is interpreted as an $n$-functor

$$C_n \xrightarrow{F} (n-1)-\mathrm{Cat}$$

and $e^{C_n}_{n-1}$ is the constant $n$-functor on $C_n$, with value the final $(n-1)$-category.

To interpret this in cohomology notation, it is necessary for me to add, as "apology" to the preceding letter, the explicit interpretation of the non-commutative cohomology on a topos $X$, in terms of integration of $n$-stacks on $X$. If $F$ is a strict Picard $n$-stack on $X$, then it is defined by a complex $L^\circ$ on $X$

$$0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow L^n \longrightarrow 0$$

concentrated in degrees $0 \leq i \leq n$ (defined uniquely up to isomorphism in the derived category of $\mathrm{Ab}(X)$). That said, the $\mathrm{H}^i(X, L')$ (hypercohomology) for $0 \leq i \leq n$ can be interpreted as $\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{n-i}\Gamma_X(F)$. If one is interested in all the $\mathrm{H}^i$ (not just for $i \leq n$) one must, for all $N \geq n$, regard $L^\circ$ as a complex concentrated in degrees $0 \leq i \leq N$ by prolongation of $L^\circ$ by 0 to the right). The corresponding strict Picard $n$-stack is no longer $F$ but $\underline{C}^{N-n}F$, where $\underline{C}$ is the "classfying space" functor, interpreted on strict Picard $n$-categories as the operation consisting of "translating" the $i$-objects to $(i+1)$-objects, and adjoining a unique 0-object; this extends one hopes, in "an obvious way", to $n$-stacks, so as to commute with the operation of taking the inverse image of an $n$-stack. One has then for $i \leq N$

$$\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad i \leq N.$$

Given this, it is necessary to put, for all strict Picard $n$-stacks $F$ on $X$,

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad \text{if} \quad N \geq i,n$$

which does nor depend on the choice of integer $N \geq Sup(i,n)$ [**N.B.** One has a canonical morphism of $(n-1)$-groupoids,

$$C(\Gamma_X F) \longrightarrow \Gamma_X(CF),$$

as the obvious constructions in terms of cochains show, and one sees in the same way that this induces isomorphisms on $\pi_i$ for $1 \leq i \leq n+1$.]

**N.B.** One sees by the way that for $F$ and $n$-stack of groupoids on $X$, if one restricts to defining the $\mathrm{H}^i(X,F)$ for $0 \leq i \leq n$, one has no need of a Picard structure on $F$, as it is sufficient to put

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n-i}(\Gamma_X(F)) \quad 0 \leq i \leq n.$$

If on the other hand $F$ is an $n$-Gr-stack (i.e. $F$ has the structure of a composition law $F \times F \longrightarrow F$ with the usual formal properties of a group) the "classifying $(n+1)$-stack" is defined, and one can define $\mathrm{H}^i(X,F)$ for $i \leq n+1$ by

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n+1-i}(\Gamma_X(CF))$$

in particular

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0(\Gamma_X(CF)) = \text{ equivalence classes of sections } \underline{C}F.$$

But one can form $C\underline{C}F = \underline{C}^2F$ and define $\mathrm{H}^{n+2}(X,F)$, it seems *only* if $\underline{C}F$ is itself a Gr-$(n+1)$-stack, which is without doubt the case only if $F$ is a strict Picard $n$-stack...

Let us now come to the case where $F$ is a *locally constant* $n$-stack on $X$, and so is defined by an $(n+1)$-functor

$$C_{n+1} \xrightarrow{F} \text{strict Picard } n - \mathrm{Cat}.$$

Then, putting for $0 \leq i \leq n$

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) = \pi_{n-1}(\underline{\mathrm{Hom}}(e_n^{C_{n+1}},F)),$$

"one knows it fails", as one has a canonical isomorphism

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1}, F) \simeq \mathrm{H}^i(X, F),$$

valid in effect without Picard structure on $F$... It is thus necessary for all $i$ and for every $\infty$-groupoid $C$ and every $(n+1)$-functor

$$C \xrightarrow{F} \text{strict Picard } n-\mathrm{Cat},$$

to define

$$\mathrm{H}^i(C, F) = \pi_{N-i}\underline{\mathrm{Hom}}(e_N^C, C^{N-n}F)$$

where one chooses $N \geq Sup(i, n)$. If $F$ has only a Gr-structure (not necessarily Picard) one can define the $\mathrm{H}^i(C, F)$ for $i \leq n+1$ by

$$\mathrm{H}^i(C, F) = \pi_{n+1-i}\underline{\mathrm{Hom}}(e_{n+1}^C, CF).$$

In the case $C = C_{n+1} = \Pi_{n+1}(X)$, it must still be true (by virtue of (A) above), that this set is canonically isomorphic to $\mathrm{H}^{n+1}(X, F) = \pi_0\Gamma_X(CF)$ (this is true and very easy for $n = 0$). Can one describe the arrow between the two sides of

$$\mathrm{H}^{n+1}(X, F) \simeq \mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n+1}X, F) \quad ?$$

If one wishes to make (A) and (B) explicit again, in terms of the yoga (C), one comes to the following situation:

One has an $(n+1)$-functor between $(n+1)$-groupoids

$$f_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow D_{n+1}$$

which induces by truncation an $n$-functor

$$f_n : C_n \longrightarrow D_n$$

One must than have:

(A') $f_n$ is an $n$-equivalence if and only if the $n$-functor

$$f_n^* : \underline{\mathrm{Hom}}(D_n, (n-1)-\mathrm{Cat}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C_n, (n-1)-\mathrm{Cat})$$

which sends the local $(n-1)$-systems on $D_n$ (or, equally, on $D_{n+1}$) to the local $(n-1)$-systems on $C_n$, is an $n$-equivalence.

(B') $f_n$ is an $n$-equivalence if and only if for every local $n$-system $F$ on $D_{n+1}$,

$$F : D_{n+1} \longrightarrow n - \mathrm{Cat},$$

the $n$-functor induced by $f_{n+1}$

$$\underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(e_n^{D_{n+1}}, F)}_{\Gamma_{D_{n+1}(F)}} \longrightarrow \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(e_n^{D_{n+1}}, f_{n+1}^* F)}_{\Gamma_{C_{n+1}(F)}}$$

is an $n$-equivalence.

The construction of the cohomology of a topos in terms of integration of stacks makes no appeal at all to complexes of abelian sheaves and still less to the technique of injective resolutions. One has the impression that in this spirit, *via* the definition (which remains to be made explicit!) of $n$-stacks, it is all related above all to the "Cechist" calculations in terms of hypercoverings. Now these last are written with the help of a small dose of semi-simplicial algebra. I do not know if a theory of stacks and of operations on them can be written *without* ever using semi-simplicial algebra. If yes, there would be essentially three distinct approaches for constructing the cohomology of a topos:

a) viewpoint of complexes of sheaves, injective resolutions, derived categories (*commutative homological algebra*)

b) viewpoint Cechist or semi-simplicial (*homotopical algebra*)

c) viewpoint of $n$-stacks (categorical algebra, or *non-commutative homological algebra*).

In (a) one "resolves" the coefficients, in (b) one resolves the base space (or topos), and in (c) it appears one resolves neither the one nor the other.

Very cordially,

Alexandre