Additif Esquisse d'un Programme.

Voisinage tubulaire d'une partie modérée quelconque d'un espace modéré (compact). Cas évident : un point.

I) Sous-espace modéré "bordant" B d'un espace modéré X. Collier autour de B

(~~B×I~~ $B \subset C \subset X$, C vois. de B, $\exists\ C \overset{\varphi}{\simeq} B \times I$, et $\dot{C} = \varphi(B \times \{1\})$.

avec ~~B→B~~

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl] \arrow[dr, "b \mapsto (b,0)"] & \\ C \arrow[rr, "\sim"] & & B \times I \end{tikzcd}$$

Collier ~~strict~~ strict

$I = [0,1]$

~~((B,1) est bordant dans~~

($\dot{C}$ est bordant dans $X \smallsetminus (C \smallsetminus \dot{C})$) Collier rigidifié

se donner ~~C~~ aussi $\dot{C}$ =

Conj ⇒ Soit B bordant dans X

a) ∃ Collier $(C, \dot{C})$ dans ... collier strict

b) "L'espace" des colliers stricts est contractile.

c) L'espace des ~~colliers~~ rigidifiés ~~et stricts~~ ~~A fibrés sur~~ colliers ~~A~~ est contractile, ou encore : l'espace des autom. d'un collier, induisant l'identité de B (et "libres" sur $\dot{C}$) est contractile

i.e. les choix d'un collier strict, ou d'un collier strict rigidifié, i.e. d'une rigidification d'un collier, sont anodins.

147

2

II b) Soit $a \in X$. "Cône" entourant a :

$a \in C \subset X$, $\underbrace{\dot{C} \subset C}_{\simeq\, Y\ \text{[illegible]}}$ telles que

$(C, \dot{C}) \overset{\varphi}{\simeq}$ ~~[illegible]~~ $\mathrm{Cone}(Y)$ (avec $\varphi(a) = o$). Cône

strict : $\dot{C}$ est bordante dans $X \setminus (C \setminus \dot{C})$.

Cône rigidifié.

Conj a) Existe cônes stricts

b) L'espace des cônes stricts est contractile

c) L'espace des rigidifications des cônes est contractile i.e. l'espace des automorph. de $\mathrm{Cone}(Y)$, qui induisent l'identité sur Y et fixent a, est contractile (Alexandroff ?)

Donc le choix d'un cône strict entourant a, ou d'un cône strict rigidifié, ou d'une ~~cône~~ rigidification sur un cône donné, est anodin.

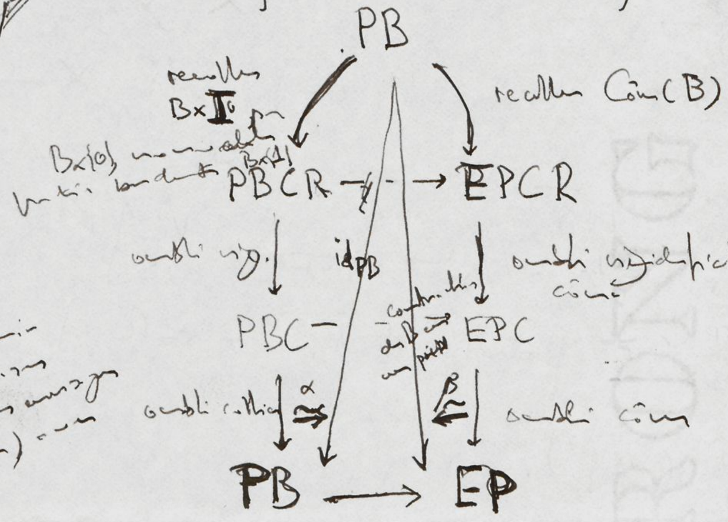
III
Catégorie PB des paires (X, B) B bordante dans X
Catégorie PBCR des ~~paires~~ triples (X, B, C, φ) des paires bordantes avec collier strict rigidifié
Catégorie PBC $(X, B, C, \dot{C})$ (paires bord. avec coll.)
148 Catégorie EP des paires (X, a) X pointé

EPCR 3

Catégorie des triples $(X, x, (C, \varphi))$ (C, φ) cône strict

Catégorie EPC des triples $(X, x, (C, c))$ singularité espaces avec pointés ~~singularité~~ cône strict

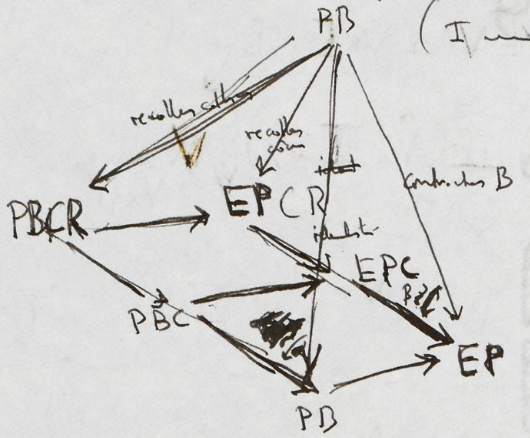
On a une cascade d'équivalences de cat. ~~PB~~ ∞-isotopiques



NB Pour définir α et β, compléter des quasi-homéomorphismes (i : C ...)
PBR

Système des 11 foncteurs qui sont des équivalences ∞-isotopiques

Variante ~~Paires~~ Multipaires bordants $(B = \coprod_{i \in I} B_i)$ espaces multipointés $(I \hookrightarrow X)$ (I ensemble fini variable)



Solution : les rel. de une ∞-isotop, ~~il y a~~ c'est pourrait que de travailler avec l'une d'elles, via catégories équivalentes.

149

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

4

IV Voisinages tubulaires d'une partie modérée Y d'un espace modéré X.

C'est, une définition, un cône obtenu quand on [illegible] de 0 dans X/Y.

Construction : Soit $f : X \to \mathbb{R}^+$ fonction modérée, telle que $f^{-1}(\{0\}) = Y$. On prend $V = f^{-1}([0, \varepsilon])$ ε petit [et admissible], et $\dot V = f^{-1}(\{\varepsilon\})$.

Choix de vois. tubulaires [illegible] rigidification modérée [illegible] $\dot V$ bien déterminé [illegible] à iso. près [illegible]

Rigidification des voisinages tubulaires ($\Longleftrightarrow$ des cônes). Rigidification Y-admissible : s'insère dans des diagrammes

$$V \qquad V - Y = V^* \simeq \dot V \times [0, 1[$$

$$X \simeq \big((X \setminus (\dot V \setminus \dot V)) \amalg (\dot V \times I)\big) \big/ \dot V \times \{1\} \simeq Y,$$

$$Y$$

par $\varphi : \dot V \times \{1\} \to Y$ appl. modérée (déterminée de façon unique par la rigidification).

a) Rigidification Y-admissible existe

b) La classe d'homotopie de $\dot V \to Y$ bien déterminée

150 Mais on voudrait plus précis.

5

1°) Cas où X équisingulier le long de Y.

Je présume qu'on doit pouvoir prendre φ fibrée ("singularités fibrées").

et qu'on a une équivalence de catégories [illegible]

Syst. (X', B, Y, φ) (X', B) paire bordée
$\varphi : B \to Y$ singulière fibrée

$(X', B, Y, \varphi) \mapsto ((X' \amalg_B Y, \varphi), Y)$ $\downarrow \approx$

(X, Y) paires équisingulières.

NB Les X, Y, Y ~~[illegible]~~ singulières

doivent correspondre au cas où

X' variété à bord B, et Y singulière

Y présumé X-Y singulière par [illegible] quand Y singulière (cas [illegible]) $Y \subset \overline{X-Y}$

2°) Cas général (pas nec. équising.).

Il faudrait arriver à imposer des conditions [illegible] sur $\varphi : \dot{V} \to Y$, pour assurer l'unicité [illegible]

Peut-être que dans des [illegible] suivantes : Pour tout $y \in Y$, si $c(y) = \mathrm{codim}_y(Y, X)$ alors $\dim \varphi^{-1}(y) = c(y) - 1$. [illegible] plus précis, lorsque $\dot{V}$ est [illegible] sur Y

151

6

On peut aussi trouver comme une sous-complexe de la catégorie ∞-catégorique des paires (X, Y) ~~propres~~ complètes, une forme d'une catégorie $(X', B, \varphi : B \to Y)$, où φ ~~satisfait~~ serait soumis à certaines conditions (ou plutôt ~~préc.~~ l'exigence dimensionnelle précédente).

Filtrations équidimensionnelles et régulières d'un espace modéré. Je m'y suis pas mis, je pense mais que je commence dans le problème général de toute. [~~Toute~~ Plus précis ~~test~~] filtration d'un espace modéré, il y a une filtration ~~canonique~~ canonique, régulière, équidimensionnelle, compatible [en un sens?] les ensembles de diviseurs de cette filtration sont des invariants de la structure modérée envisagée.