Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck[1]
Jean-Pierre Serre (1965)[2]

Le présent rapport est limité à trois thèmes: evt, Riemann-Roch, schémas. Pour aller plus vite, j'ai laissé de côté les travaux de géométrie algébrique [[?], [?]- [?]] et d'algèbre homologique [[?]- [?]]; il me faut tout de même mentionner la grande influence qu'a eu [[?]] sur le développement de la théorie.

1. EVT (Espaces Vectoriels Topologiques) – période: 1952-1955

L'une des idées directrices[3] de Grothendieck dans ce domaine a été d'"expliquer" les phénomènes d'evt rencontrés par L. Schwartz en théorie des Distributions. Dans le travail [?], il montre que la catégorie des (LF), introduite par Dieuonné-Schwartz, possède quantité de propriétés pathologiques; parmi les résultats positifs qu'il obtient, on peut citer le théorème disant que le bidual d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet (ce n'est nullement trivial), et l'introduction de deux nouveaux types d'espaces, les espaces (DF) et les espaces "de Schwartz".

C'est dans la thèse [?] que sont faits les progrès décisifs. Il y définit deux produits tensoriels complétés $E\widehat{\otimes}_{\varepsilon}F$ et $E\widehat{\otimes}_{\pi}F$ d'evt E et F. Ces deux produits tensoriels, distincts en général, coïncident lorsque E appartient à une nouvelle caté-

[2]Editor's note (June 1989): Professor Serre was a member of the Fields Committee in 185-1966. The current article is his original report of 1965 to the committee concerning the work of A. Grothendieck.

[3]Cette première partie du rapport a été rédigée avec l'aide de J. Dieudonné.

gorie d'evt, celle des *espaces nucléaires*. Il montre que cette catégorie possède des propriétés de stabilité remarquables. De plus la plupart des espaces fonctionnels que l'on rencontre en théorie des distributions son nucléaires; ce fait constitue une forme particulièrement commode du "théorème des noyaux" de Schwartz.

Parmi les idées nouvelles introduites par Grothendieck en théorie des evt, on peut citer:

(a) La technique des espaces de Banach E_V et E_A associés à un evt E et à un voisinage de 0 convexe V (resp. à une partie bornée convexe A) de E.

(b) L'utilisation des espaces L^p et $C(K)$ dans la théorie générale des evt (notamment pour l'étude des applications intégrales ou nucléaires).

(c) L'application des produits tensoriels complétés à une "formule de Künneth" vectorielle-topologique (cf. séminaire Schwartz 53-54, séminaire consacré d'ailleurs entièrement à la thèse de Grothendieck). Cette formule permet de ramener certains problèmes de dimension > 1 à ceux de dimension 1. Cette technique a été utilisée par Grothendieck lui-même (trivialité de la d''-cohomologie locale) et par R. Bott (Annals, 1957)

(d) Les résultats "fins" de la théorie métrique des produits tensoriels d'espaces de Banach, exposés dans [?].

2. Le théorème de Riemann-Roch – période: 1957

En 1957, on connaissait (depuis déjà quelques années) un "théorème de Riemann-Roch" pour les variétés algébriques complexes: si X est une telle variété, supposée projective et non singulière, et si F est un faisceau analytique localement libre sur X, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X,F)$ de X relativement à F est égale à un certain polynôme en les invariants numériques de F et de X (classes de Chern). La démonstration de ce théorème, due à Hirzebruch, utilisait des moyens essentiellement transcendants, et en particulier la *théorie du cobordisme* de Thom. On se demandait (avec perplexité) comment l'algébriser (ce qui était nécessaire pour la transporter en caractéristique p).

Or, Grothendieck fait bien plus. Il démontre par voie algébrique un énoncé qui, même sur $\mathbf{C}$, va plus loin que l'énonce rappelé plus haut. l introduit tout d'abord la notion, nouvelle à l'époque, de "groupe K" (appelé par d'autres "groupe de Grothendieck"): si X est une variété algébrique, $K(X)$ est le groupe engendré par les classes de faisceaux cohérents sur X, une extension étant identifiée à une somme; en d'autres termes, $K(X)$ est le groupe universel par lequel se factorisent toutes les fonctions additives de faisceaux cohérents. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre de variétés algébriques, on définit (par une somme alternée d'images directes supérieures) une application $f_! : K(X) \longrightarrow K(Y)$. D'autre part, le caractère de Chern $\mathrm{ch} : K(X) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X, \mathbf{Q})$ est défini si X est non singulière (ceci ne vaut que si corps de base est $\mathbf{C}$ - si l'on veut procéder plus algébriquement, il faut remplacer la cohomologie par l'anneau des classes de cycles). Ceci étant, la formule de Riemann-Roch s'écrit maintenant:

$$(RR) \qquad f_*(\mathrm{ch}(X)T(X)) = \mathrm{ch}(f_!(x))T(Y), \quad x \in K(X),$$

où $T(X)$ et $T(Y)$ désignent les "classes de Todd" de$X$ et Y (supposées projectives et non singulières - en fait, Grothendieck a maintenant des cas plus généraux). On retrouve l'énoncé de Hirzebruch en prenant pour Y un espace réduit à un point.

La démonstration[4] de (RR) n'a pas été publiée par Grothendieck lui-même: il la réservait pour le Chapitre XI des "Éléments"... Elle est reproduite dans [**?**]. A côté de difficultés techniques considérables, elle contient deux idées, totalement originales, qui ont eu une grande influence:

(a) La plupart des notions, ou théorèmes, relatifs aux variétés doivent être étendus aux *morphismes*. Ainsi, pour prendre des exemples élémentaires, la notion d'espace compact correspond à celle d'application propre; celle de variété non singulière à celle de morphisme lisse; etc.

(b) La construction de "*groupes K*" permet de concentrer l'essentiel des propriétés d'une catégorie assez compliquée en un objet algébrique, groupe ou anneau, de taille raisonnable. Cette idée a beaucoup frappé topologues et algebristes, qui se sont empressés de l'utiliser pour leurs problèmes; qu'il me

[4]

suffise de mentionner à ce sujet la “K-théorie” de Atiyah-Hirzebruch et les travaux de Swan sur les représentations des groupes finis.

3.

Conclusion

Les travaux de Grothendieck sont certes difficiles à lire; cela tient à le côté systématique, et aussi, tout simplement, à leur ampleur. Mais ils constituent une *oeuvre*, d’une puissance et d’une originalité dont il est peu d’exemples. Chaque année voit s’augmenter le nombre des branches des mathématiques qui subissent son influence; c’étaient d’abord la géométrie algébrique, puis la topologie et aussi la géométrie analytique; maintenant, la théorie des groupes de Lie; bientôt, la théorie des nombres.

La comité Fields doit reconnaître cette oeuvre.

REFERENCES

[1] ARTIN, M., GROTHENDIECK, A., J.L. VERDIER — *Cohomology étale des schémas*, Sém. Géom. Alg. IHES, 1963-64 (SGA 4), à paraître dans North Holland Pub. Cie.