

Jacobienne locale d'une courbe formelle relative

CARLOS CONTOU-CARRÈRE

ABSTRACT - This article is devoted to the proof of a relative duality formula on a noetherian scheme S , giving rise on the spectrum of a field $S = \operatorname{Spec} k$ to local symbols of class field theory. Relative local symbols are obtained in terms of the universal property of a couple (\mathfrak{S}, f) , of a S -group functor \mathfrak{S} , associated to a S -formal curve \mathfrak{X} locally of the form $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} A[[T]]$ ($S = \operatorname{Spec} A$). \mathfrak{S} is a S -group extension of the completion \hat{W} of the universal S -Witt vectors group W , by the group of units $\mathcal{O}_S[[T]]^*$. We associate an S -functor $\mathfrak{S}_{\text{omb}}$ to \mathfrak{S} , and we define an Abel-Jacobi morphism $f : \mathfrak{U} = \operatorname{Spec} A[[T]][[T^{-1}]] \longrightarrow \mathfrak{S}_{\text{omb}}$, setting up a group isomorphism:

$$\operatorname{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{S}, G) \simeq G(\mathfrak{U}),$$

where G denotes a commutative smooth S -group scheme. We define an S -bihomomorphism

$$\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \longrightarrow \mathbb{G}_m,$$

which is a local symbol (The Tame Symbol), identifying \mathfrak{S} to its own Cartier dual group $\hat{\mathfrak{S}} = \underline{\operatorname{Hom}}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{S}, \mathbb{G}_m)$, and inducing the above isomorphism for $G = \mathbb{G}_m$. It follows that \mathfrak{S} may be interpreted as the relative Loop Group:

$$\mathbb{G}_m(\mathfrak{U}) : S' \longrightarrow \mathbb{G}_m(\mathfrak{U}_{\{S'\}}),$$

$S' = \operatorname{Spec} A'$ denotes a S -scheme, and we write $\mathfrak{U}_{\{S'\}} = \operatorname{Spec} A'[[T]][[T^{-1}]]$, and as the A -universal group of Witt-Bivectors.

The couple (\mathfrak{S}, f) may be seen as the local analogue of the relative Rosenlicht Jacobian (Generalized Jacobian) defined by a S -smooth curve X .

MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION (2010). 14L15.

KEYWORDS. Local Symbol(s), Tame Symbol, Contou-Carrere Symbol, Local Abel-Jacobi morphism, Universal Witt Bivectors, Cartier Duality, Local Jacobian, Relative Formal Curve, Witt Residues, Local Relative Class Field Theory, Rosenlicht Jacobian.

(*) Indirizzo dell'A.: Université Montpellier II Laboratoire Charles Coulomb UMR 5221 F-34095 Montpellier France.

E-mail: ccontouc@univ-montp2.fr

Introduction

Le but de ce travail est d'interpréter le symbole local du corps de classes géométrique (cf. [14]) en termes d'une propriété universelle d'un couple (\mathfrak{J}, f) , où \mathfrak{J} est un foncteur en groupes au-dessus d'un schéma noethérien S , associée à une courbe formelle \mathfrak{X} localement de la forme $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf} A[[T]]$, où $S = \mathrm{Spec} A$, et où f désigne un morphisme de type Abel-Jacobi de $\mathfrak{U} = \mathrm{Spec} A[[T]][T^{-1}]$ vers un S -foncteur $\mathfrak{J}_{\mathrm{omb}}$ défini par \mathfrak{J} , et induisant une bijection fonctorielle

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{J}, G) \simeq G(\mathfrak{U}),$$

pour un S -schéma en groupes commutatif lisse et séparé G (cf. (**)) plus bas).

Le cas $G = \mathbb{G}_m$ de cette bijection est particulièrement intéressant et peut-être explicité comme l'autodualité de Cartier de \mathfrak{J} . La formule qui rend cette auto-dualité est désignée par le symbole modéré.

Le symbole modéré intervient depuis plus d'une dizaine d'années dans plusieurs travaux concernant en particulier le corps de classes local et les rapports entre ce dernier et la physique théorique, pour lesquels on confère le lecteur aux références supplémentaires. Une version analytique de ce dernier est donné par P. Deligne dans [D]. G. Anderson et P. Romos ont démontré une formule de reciprocité pour celui-ci (cf. [A-R]), permettant de retrouver plusieurs lois de reciprocité pour une courbe complète au-dessus d'un corps algébriquement clos. P. Romos a démontré la propriété de Steinberg (cf. [PR]). M. Kapranov, et E. Vasserot formulent et prouvent un théorème local de Riemann-Roch pour des gerbes déterminantielles, où la auto-dualité de \mathfrak{J} joue un rôle central (cf. [K-V]). Le symbole modéré intervient dans la définition des algèbres chirales (cf. [Bei-Dr]), ainsi que dans les calculs des ε -facteurs pour les déterminants de Gauss-Manin (cf. [Bei], [B-B-E]).

Le présent article s'insère dans un programme de travail sur les dualités globales et locales à coefficients continus proposés par A. Grothendieck à l'auteur (confer aussi la lettre de A. Grothendieck à J. P. Serre du 10/8/60). Ce programme comporte dans un premier temps l'extension de la formule de dualité de [7], pour une S -courbe propre et lisse, à coefficients dans un S -schéma en groupes G commutatif et plat, au cas d'une S -courbe lisse. Dans [3] et [5] on construit une jacobienne généralisée relative pour une courbe lisse $X - D$, donnée par le complémentaire d'un diviseur relatif fermé D d'une courbe propre X sur une base S , qui vérifie certaines hypothèses, et un morphisme d'Abel-Jacobi $\Phi : X - D \longrightarrow J$ qui permet

d'établir un isomorphisme de groupes

$$(*) \quad \mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(J, G) \simeq G(X - D),$$

pour tout S -schéma en groupes lisse G . (Cette construction constitue l'extension naturelle des jacobienues de Rosenlicht-Serre au cas relatif, et un premier pas vers la démonstration d'une formule de dualité en termes de champs de Picard associés à $X - D$). L'étude des jacobienues généralisées globales mène à l'introduction des symboles locaux à valeurs dans un S -schéma en groupes G . Ces symboles locaux ont été introduits par J. P. Serre dans [14] dans le cas où S est le spectre d'un corps.

La jacobienne généralisée J est une extension de la jacobienne $\mathrm{Pic}_{X/S}$ de la courbe propre X par le S -groupe \mathfrak{J}^0 de nature locale autour de D , défini par

$$\mathfrak{J}^0 : S' \longrightarrow \Gamma\left(D', \mathcal{O}_{\widehat{X}_{/D'}}^*\right),$$

où S' est un S -schéma, $\widehat{X}_{/D'}$ désigne le schéma formel obtenu par changement de base à partir du complété formel $\mathfrak{X} = \widehat{X}_{/D}$ de X le long de D , et $\mathcal{O}_{\widehat{X}_{/D'}}^*$ le faisceau de groupes des unités de $\mathcal{O}_{\widehat{X}_{/D'}}$.

Supposons $S = \mathrm{Spec}(A)$ affine et posons $\mathrm{omb}(\widehat{X}_{/D}) = \mathrm{Spec}\left(\Gamma(\widehat{X}_{/D}, \mathcal{O}_{\widehat{X}_{/D}})\right)$. Par la bijection $(*)$, la donnée d'une section s de G au-dessus de $X - D$ donne lieu à un S -homomorphisme $\psi : J \longrightarrow G$ dont la restriction ψ' à $\mathfrak{J}^0 \subset J$ (symbole local donné par ψ) dépend essentiellement de la restriction de s à $\mathfrak{U} = \mathrm{omb}(\widehat{X}_{/D}) - D$, c.à.d. de la partie singulière de s le long de D . Un des résultats de ce travail (cf. Théorème (1.4.4)) est de montrer que à toute courbe formelle lisse de la forme $\mathfrak{X} \simeq \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_S[[T]]) = \mathrm{Spf}(A[[T]])$, au dessus d'une base affine et noethérienne S , on peut associer un S -groupe \mathfrak{J}^0 et un morphisme

$$\varphi^0 : \mathfrak{U} = \mathrm{Spec}(\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})) - D \longrightarrow \mathfrak{J}^0 \quad (D = V(T))$$

vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout S -schéma en groupes G lisse et séparé on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, G) \simeq G(\mathfrak{U})/G(\mathrm{omb}(\mathfrak{X})),$$

où $\mathrm{omb}(\mathfrak{X}) = \mathrm{Spec}(\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})) = \mathrm{Spec}(A[[T]])$. En plus si $\mathfrak{X} = \widehat{X}_{/D}$, on a alors que Φ et φ^0 coïncident sur $J(\mathfrak{U})$ à une section de $J(\mathrm{omb}(\mathfrak{X}))$ près.

L'énoncé de (1.4.4) a été proposé à titre conjecturel par A. Grothendieck.

Pour se débarrasser de l'hypothèse A noethérien il suffit de montrer

l'énoncé suivant qui permet de ramener la preuve de (1.4.4) au cas noethérien. Etant donné $\bar{\xi} \in G(\mathfrak{U})/G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ il existe une \mathbb{Z} -sous-algèbre $A' \subset A$ de type fini et $\xi \in G(\text{Spec}(A'[[T]][[T^{-1}]])$ tel que sa restriction à

$$G(\mathfrak{U}) = G(\text{Spec}(A[[T]][[T^{-1}]])$$

induit $\bar{\xi}$ par passage au quotient.

Notons par $L_D \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ l'idéal de définition du diviseur $V(T) = D \subset \mathfrak{X}$. On désigne par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[L_D^{-1}]$ le faisceau en anneaux de fractions de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ par rapport aux sections de l'idéal L_D qui sont localement des générateurs, et par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[L_D^{-1}]^*$ le faisceau des unités de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[L_D^{-1}]$. Soit S' un S -schéma. On pose

$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_S S' \text{ et } D' = D \times_S S',$$

et on désigne par $L_{D'}$, l'idéal de définition de D' dans \mathfrak{X}' . On définit le faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[L_{D'}^{-1}]^*$ comme ci-dessus à partir \mathfrak{X}' , D' , et $L_{D'}$, à la place de \mathfrak{X} , D , et L_D . On définit un S -faisceau de Zariski en groupes commutatif par

$$\mathfrak{S} : S' \longrightarrow \Gamma(D', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[L_{D'}^{-1}]^*).$$

Ce S -groupe est le sujet principal de ce travail. On donne une interprétation des sections de \mathfrak{S} en termes d'idéaux fractionnaires inversibles de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ munis d'une trivialisaton, ce qui dans le cas où $\mathfrak{X} = \tilde{X}/_D$ entraîne l'existence d'un morphisme naturel de S -groupes $\mathfrak{S} \longrightarrow J$ reliant \mathfrak{S} et la jacobienne généralisée. Ce S -groupe \mathfrak{S} apparaît naturellement même dans le cas d'un corps de base k . En supposant k algébriquement clos, pour fixer les idées, on a que le groupe des idèles est un sous-groupe du produit des groupes \mathfrak{S} correspondant aux diviseurs x définis par les points de X à valeurs dans $k : \prod_x \mathfrak{S}_x$.

Le S -groupe \mathfrak{S} est une extension du complété formel du groupe des vecteurs de Witt universel \tilde{W} , introduit dans [1] par Cartier, par un S -groupe (pro-lisse) \mathfrak{J} extension de $\underline{\mathbb{Z}}_S$ par \mathfrak{J}^0 . Le théorème principal (cf. Théorème (1.6.6)) de ce travail montre que \mathfrak{S} a la propriété universelle suivante : pour tout S -schéma en groupes commutatif lisse et séparé G on a un isomorphisme de groupes :

$$(**) \quad \text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{S}, G) \simeq G(\mathfrak{U}),$$

qui résulte de la propriété universelle de \tilde{W} vis à vis des morphismes de \mathfrak{X} dans un groupe formel, (cf. [2]), et de celle du couple $(\mathfrak{J}^0, \varphi^0)$ (cf. Théorème (1.4.4)), et peut s'interpréter comme une formule de dualité locale.

Le S -groupe \mathfrak{S} est muni d'un auto-accouplement, anti-symétrique que l'on explicite dans § 6,

$$\langle \dots, \dots \rangle : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS},$$

et qui fait que \mathfrak{S} soit isomorphe à son propre dual de Cartier, c.à.d.

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{S}, \underline{\mathbb{G}}_{mS}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}.$$

Noter d'autre part que $\Gamma(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{G}}_{mS}) = \Gamma(S, \mathfrak{S})$. La flèche induite par $\langle \dots, \dots \rangle$ coïncide alors avec celle donnée par la propriété universelle de \mathfrak{S} si $G = \underline{\mathbb{G}}_{mS}$. On a un isomorphisme

$$\mathfrak{S} \simeq \check{W} \times \underline{\mathbb{Z}}_S \times \underline{\mathbb{G}}_{mS} \times \wedge^0.$$

Le $\langle \dots, \dots \rangle$ induit l'accouplement entre \check{W} et $\wedge^0 = \mathrm{Ker}(\mathfrak{S}^0 \rightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS})$, ou $\mathfrak{S}^0 \rightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS}$ désigne le morphisme naturel, donné dans [1].

La construction de l'isomorphisme $(**)$ passe par celle d'un morphisme d'Abel-Jacobi, version locale du morphisme Φ . Remarquons d'abord que même dans le cas d'un corps de base $S = \mathrm{Spec}(k)$ il n'existe pas de morphisme fonctoriel $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{S}$ induisant l'isomorphisme $(**)$. En effet comme $\mathfrak{U} \simeq \mathrm{Spec}(k[[T]][T^{-1}])$ alors $\check{W}(\mathfrak{U})$ se réduit à la section donnée par l'élément neutre de \check{W} . D'où si un tel morphisme existait on aurait

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\check{W}, G) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{S}, G) \rightarrow G(\mathfrak{U})),$$

où la flèche est induite par composition avec $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{S}$.

On construit alors un objet intermédiaire $\mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}$, qui est un S -foncteur, entre les S -schémas formels et les S -schémas, et un morphisme

$$f : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{omb}},$$

tel que l'on a une inclusion $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}$, et à tout S -homomorphisme $h : \mathfrak{S} \rightarrow G$ dans un S -schéma en groupes G commutatif et lisse, il correspond un unique morphisme $h_{\mathrm{omb}} : \mathfrak{S}_{\mathrm{omb}} \rightarrow G$ dont la restriction à \mathfrak{S} coïncide avec h . On démontre finalement que f induit l'isomorphisme $(**)$. Notons que $\mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}$ n'est pas un S -foncteur en groupes.

Pour poser le problème universel dont \mathfrak{S} est solution dans le cas où l'on se donne un schéma noethérien S de base, et une S -courbe formelle \mathfrak{X} , isomorphe à $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_S[[T]])$, autant que pour donner une interprétation géométrico-fonctorielle de $\mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}$, il est nécessaire de revenir sur la construction de l'ombre d'un schéma formel noethérien, suggérée par A. Grothendieck, qui n'a jamais été traitée systématiquement.

On donne dans § 0 le matériel minimum indispensable à nos besoins. (A la connaissance de l'auteur il n'existe pas de références). Les constructions de (1.5) sont menées en supposant \mathfrak{X} isomorphe à $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_S[[T]])$ et S affine et noethérien. Il est alors immédiat que l'on peut dans le cas général donner un sens à l'énoncé du théorème principal, qui résulte alors d'une

conséquence du cas traité par nous, et étendre la construction de $\mathfrak{S}_{\text{omb}} \dots$ etc, à ce cas. On peut interpréter $\text{omb}(\mathfrak{X})$ comme un “trait relatif” au-dessus de S , \mathfrak{U} comme son point générique, et le S -groupe $\mathfrak{S} = \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}(\mathfrak{U})$ comme “l’espace des lacets relatifs de $\underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}$ ”.

Le S -groupe \tilde{W} n’étant pas un S -schéma formel noethérien, la première difficulté est de définir $\text{omb}(\tilde{W})$. On définit $\text{omb}(\tilde{W})$ comme une limite inductive de la catégorie des S -schémas $\text{Sch}|_S$ si S est affine et noethérien, et comme une limite inductive de la catégorie des S espaces localement anelés $\text{Locann}|_S$ si S est un schéma noethérien. Alors $\mathfrak{S}_{\text{omb}}$ apparaît comme une limite inductive de $\text{Sch}|_S$ (resp. $\text{Locann}|_L$) si S est affine et noethérien (resp. noethérien) muni d’une structure de \mathfrak{S} -torseur au-dessus de $\text{omb}(\tilde{W})$. On donne ensuite une description géométrique du S -foncteur $\mathfrak{S}_{\text{omb}}$, qui entraîne une autre du morphisme d’Abel-Jacobi $f : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\text{omb}}$, et permet d’établir la compatibilité de f avec Φ .

Disons un mot sur la structure de la démonstration du théorème (1.6.6). Elle est ramenée à celle de (1.4.4). On traite d’abord le cas d’un corps de base. On retrouve alors essentiellement les symboles locaux correspondant au groupe multiplicatif $\underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}$ et aux tronqués des groupes additifs des vecteurs de Witt (symbole de Witt). On montre ensuite comment le théorème (1.4.4), dans le cas d’un anneau noethérien réduit de base, entraîne le même pour tout anneau noethérien de base. On introduit à cette fin une catégorie de S -faisceaux fppf en groupes commutatifs, définie à partir des propriétés (A) et (B) (cf. § 3), pour lesquels le théorème (1.4.4) est valable, et ayant certaines propriétés de permanence. Soit $S_0 = \text{Spec}(A/I)$ avec $I^2 = 0$. Si G est un S -groupe comme dans l’hypothèse du théorème (1.4.4) soit $G_0 = G \times_S S_0$ alors l’image directe $G^+ = i_* G_0$ par le morphisme naturel $i : (S_0)_{\text{fppf}} \longrightarrow S_{\text{fppf}}$ appartient à cette catégorie. Finalement en supposant vrai le théorème (1.4.4) pour tout anneau réduit de base et pour S_0 on prouve, à partir de la suite exacte $1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow G^+ \longrightarrow 1$ (cf. (3.3)), que G vérifie les conditions (A) et (B) donc la conclusion du théorème (1.4.4). En combinant ce résultat avec le précédent on obtient (1.4.4) pour le spectre d’un anneau artinien de base. Dans § 5 on voit comment la preuve de (1.4.4) pour une base noethérienne réduite se ramène au cas d’un trait complet de base S , c.à.d. le spectre $S = \text{Spec}(V)$ d’un anneau de valuation discrète complet V . La démonstration de (1.4.4) pour $S = \text{Spec}(V)$ constitue la clé de voute de la preuve de (1.4.4). Au début du § 4 (après (4.1.5) bis) on explique la stratégie de la preuve de (1.4.4) dans ce cas. Elle est basée sur le fait suivant. Soit $\theta_n : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$ le S -morphisme fini et fidèlement plat défini par le V -homomorphisme $V[[T]][[T^{-1}]] \longrightarrow V[[T]][[T^{-1}]]$ donné par $T \mapsto T^n$. On a alors que pour toute section $\alpha \in G(\mathfrak{U})$ il existe un

entier n tel que si $n', n'' > n$ sont des entiers de même parité on a

$$(***) \quad \mathrm{tr}_{\theta_{n'}} \alpha \equiv \mathrm{tr}_{\theta_{n''}} \alpha \pmod{G(\mathrm{omb}(\mathfrak{X}))}.$$

(Il s'agit là d'un avatar local du résultat suivant concernant les jacobiniennes généralisées au-dessus d'un corps k qui résulte de la Proposition 9, pg. 47 de [14] et des constructions suivantes. Soient X, D comme ci-dessus. Soit $h \in G(X - D)$. Il existe un entier n vérifiant les trois propriétés équivalentes suivantes :

– Pour tout morphisme fini et plat $g : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ tel que $g^{-1}(0) = D^{(n)}$ (n -voisinage infinitésimal de D dans X) on a que $\mathrm{tr}_g h : \mathbb{P}_k^1 - \{0\} \rightarrow G$ admet un prolongement à \mathbb{P}_k^1 et il est alors constant.

– Le morphisme h se factorise par $X - D \rightarrow J \rightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X^{(n)}/k}$, où $X^{(n)}$ désigne la somme amalgamée $X \coprod_{D^{(n)}} \mathrm{Spec}(k)$.

– La section h induit un morphisme constant sur chaque $D^{(n)}$ -classe d'équivalence linéaire (cf. loc. cit.). Il est une conséquence immédiate de (1.4.4) pour un corps. On passe au cas général grâce à l'adaptation schématique (cf. 4.1.15) d'un lemme de pureté de Weil (cf. [18]), pour les morphismes rationnels d'une variété dans un groupe algébrique G . Le théorème (1.4.4) pour le spectre d'un anneau artinien de base nous permet de construire une factorisation formelle $\hat{\alpha} = f \circ \hat{\varphi}^0$ (cf. (4.1.4)) de α , où $f : \hat{\mathfrak{J}}^0 \rightarrow G$ désigne un S -homomorphisme du complété formel le long de la fibre spéciale $\hat{\mathfrak{J}}^0$ de $\hat{\mathfrak{J}}^0$ dans G , et $\hat{\alpha} : \hat{\mathfrak{U}} \rightarrow G$ (resp. $\hat{\varphi}^0 : \hat{\mathfrak{U}} \rightarrow \hat{\mathfrak{J}}^0$) le morphisme induit par α (resp. φ^0) par restriction au complété formel $\hat{\mathfrak{U}}$ de \mathfrak{U} le long de la fibre spéciale. Grâce à (***) et à une application du lemme d'algébrisation (cf. (4.2.1)) d'un morphisme de la “fibre géométrique $\mathrm{omb}(\hat{U})_K$ ” du complété formel \hat{U} le long de la fibre spéciale de l'ouvert $U \subset \mathbb{P}_S^1$, complémentaire du diviseur 0 et du diviseur ∞ de \mathbb{P}_S^1 , dans un espace projectif \mathbb{P}_S^N , vérifiant certaines conditions locales d'algébricité on conclut que f provient d'un morphisme algébrique.

Soit $S' \rightarrow S$ une extension fidèlement plate affine du schéma noethérien affine S . Plusieurs fois dans ce travail on utilise le fait que la bijection

$$\mathrm{Hom}_{S'-gr}(\mathfrak{J}_{S'}^0, G_{S'}) \xrightarrow{\sim} G(\mathfrak{U}_{\{S'\}})/G(\mathrm{omb}(\mathfrak{X}_{S'})) \quad (\text{cf. (0.4)})$$

induite par $\varphi_{S'}^0 : \mathfrak{U}_{S'} \rightarrow \mathfrak{J}_{S'}^0$, entraîne le théorème (1.4.4). Ce résultat est un corollaire de l'injectivité de la flèche

$$\mathrm{Hom}_{S-gr}(\mathfrak{J}^0, G) \rightarrow G(\mathfrak{U})/G(\mathrm{omb}(\mathfrak{X}))$$

pour toute base affine S (cf. Proposition (1.4.5)) dont la preuve dépend des propriétés de la jacobienne généralisée de la droite projective \mathbb{P}_S^1 moins le diviseur de l'infini et de l'origine, que l'on calcule explicitement dans (1.3).

Le processus de démonstration du (1.4.4) est constructif (notamment les dévissage concernant les anneaux artiniens qui semblent mener à des symboles de type Kawada-Satake (cf. [18]), ainsi que les constructions pour un anneau de valuation discrète V).

L'isomorphisme $(**)$ entraîne une suite exacte scindée

$$1 \longrightarrow G(\text{omb}(\mathfrak{X}))^+ \longrightarrow G(\mathfrak{U}) \longrightarrow G(\mathfrak{U})/G(\text{omb}(\mathfrak{X}))^+ \longrightarrow 1,$$

où $G(\text{omb}(\mathfrak{X}))^+ = \text{Ker}(G(\text{omb}(\mathfrak{X})) \longrightarrow G(S))$. Noter que $G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ ne dépend que du complété formel \widehat{G} le long de la section unité. Autant la structure de $G(\mathfrak{X})$ comme module au-dessus de l'anneau des endomorphismes de \wedge permet de récupérer \widehat{G} , autant l'action des opérateurs V_n et F_n sur $G(\mathfrak{U})/G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ (cf. [2]) doit permettre de donner une décomposition des symboles locaux et une description de la structure de $G(\mathfrak{U})$ (d'interpréter dans ce contexte les courbes typiques...etc).

Les remarques suivantes indiquent dans quel sens l'étude de ce travail peut être poursuivie. La filtration naturelle de \mathfrak{J}^0 dont les quotients sont les \mathfrak{J}_n^0 doit aussi se retrouver dans $G(\mathfrak{U})/G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ grâce à $(**)$ et au fait essentiel que $\text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, G) = \varinjlim \text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{J}_n^0, G)$ lorsque G est localement de présentation finie. La considération de la structure de cette filtration semble livrer des renseignements intéressants sur G .

D'autre part, vu les arguments de § 3, il est naturel de se demander pour quels S -faisceaux en groupes G les théorèmes (1.4.4) et (1.6.6) sont vrais, ensuite d'étudier pour ces groupes les propriétés de la flèche naturelle

$$\begin{aligned} & \text{Ext}_{S\text{-gr}}^1(\mathfrak{J}^0, G) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U}, G) \\ & \left(\text{resp. } \text{Ext}^1(\mathfrak{J}^0, G) \times H^1(\text{omb}(\mathfrak{X}), G) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U}, G) \right) \end{aligned}$$

déduite de φ_T^0 . Autrement dit, il s'agit d'étudier les liens entre les catégories de Picard $\text{EXT}(\mathfrak{J}^0, G)$, $\text{TORS}(\mathfrak{U}, G)$, et $\text{TORS}(\text{omb}(\mathfrak{X}), G)$ pour arriver plus généralement à comparer les objets $R \text{Hom}(\mathfrak{J}^0, G)$ et $R \Gamma(\mathfrak{U}, G)$.

Il semble que le théorème (1.6.6) joint aux résultats de J. P. Serre (cf. Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos, B.S.M.F., vol. 89, 1961) permettent de prouver, pour les courbes lisses au-dessus d'un corps une formule de dualité qui correspond à celle de [7].

Resterait à établir les rapports entre ce travail et ceux de I. Barsotti sur les propriétés des groupes des bi-vecteurs de Witt en connexion avec les

variétés abéliennes en caractéristique positive (compte tenu des rapports entre les extensions de la jacobienne J d'une courbe propre et lisse X par un groupe affine commutatif avec les jacobiniennes généralisés, et de ces dernières avec \mathfrak{J}).

La possibilité de l'existence de l'extension \mathfrak{J} fut conjecturée par A. Grothendieck.

0. Définitions préliminaires

Soit A un anneau unitaire commutatif. On désigne par $A[[T]]$ la A -algèbre adique des séries formelles à coefficients dans A . Soit B une A -algèbre adique augmentée isomorphe à $A[[T]]$. On note I l'idéal de B donné par le noyau du morphisme canonique $B \rightarrow A$. Étant donnée une A -algèbre A' on désigne par $B \widehat{\otimes}_A A'$ le produit tensoriel complété pour la topologie I -adique. On pose

$$B_{\{A'\}} = B \widehat{\otimes}_A A'$$

et

$$I_{\{A'\}} = I B_{\{A'\}}.$$

Noter que pour $B = A[[T]]$, on a $B_{\{A'\}} \simeq A'[[T]]$ canoniquement.

Il est clair que $B_{\{A\}} = B$ et $I_{\{A\}} = I$. Un générateur T de I donne lieu à un générateur de $I_{\{A'\}}$, que l'on note toujours T . L'anneau des fractions $B_{\{A'\}}[T^{-1}]$ est indépendant du choix de T et on le note $B_{\{A'\}}[I_{\{A'\}}^{-1}]$. Soit n un entier naturel. On pose $B_n = B/I_{n+1}$. On a alors $B_n \otimes_A A' = B_{\{A'\}}/I_{\{A'\}}^{n+1}$. Soit

$$(0.1) \quad \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B) \quad (\text{resp. } \mathfrak{X}_n = \mathrm{Spec}(B_n))$$

Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$. Étant donné un S -schéma S' , on désigne par $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}_{S'} = \mathfrak{X} \times_S S'$ le S' -schéma formel obtenu à partir du S -schéma formel \mathfrak{X} par le changement de base $S \rightarrow S'$. Soit A' une A -algèbre. Posons $S' = \mathrm{Spec}(A')$. On a alors

$$(0.2) \quad \mathfrak{X}_{S'} = \mathrm{Spf}(B_{\{A'\}})$$

que l'on note aussi $\mathfrak{X}_{A'}$. On pose

$$(0.3) \quad \mathrm{omb}(\mathfrak{X}_{S'}) = \mathrm{omb}(\mathfrak{X}_{A'}) = \mathrm{Spec}(B_{\{A'\}})$$

et

$$(0.4) \quad \mathfrak{U} = \mathrm{Spec}(B[I^{-1}]) \quad \left(\text{resp. } \mathfrak{U}_{\{S'\}} = \mathfrak{U}_{\{A'\}} = \mathrm{Spec}\left(B_{\{A'\}}[I_{\{A'\}}^{-1}]\right) \right).$$

Remarquer que $\text{omb}(\mathfrak{X}_{S'})$ (resp. $\mathfrak{U}_{\{S'\}}$) n'a de sens à priori que pour S' affine, et que l'objet $\mathfrak{U}_{\{S'\}}$ dépend de \mathfrak{X} et pas seulement du S -schéma \mathfrak{U} .

Soit S' un S -schéma. Soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$ le faisceau d'anneaux de fractions de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ à dénominateurs dans le sous-faisceau d'ensembles \mathcal{S} , engendré par la section T de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ donnée par un générateur T de I (cf. [11], (20.1.1), pg. 226). Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$ est indépendant du choix de T .

On désigne par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}^*$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]^*$) le faisceau des unités de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$). Soit $\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X})$ (resp. $\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{U})$) le S -foncteur en groupes défini par

$$(0.5) \quad \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X})(S') = \Gamma(\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}^*) \quad (\text{resp. } \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{U})(S') = \Gamma(\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]^*)).$$

Il résulte de la définition que $\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X})$ (resp. $\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{U})$) est un S -faisceau de Zariski sur le grand site. On pose

$$(0.6) \quad \mathfrak{S} = \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{U}) \quad (\text{resp. } \mathfrak{S}^0 = \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X})).$$

Soit A' une A -algèbre. Posons $S' = \text{Spec}(A')$. On a alors

$$\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X})(S') = B_{\{A'\}}^* \left(\text{resp. } \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{U})(S') = B_{\{A'\}} \left[I_{\{A'\}}^{-1} \right]^* \right).$$

Donc si $B = A[[T]]$ on a $\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X})(S') = A'[[T]]^*$ (resp. $\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{U})(S') = A'[[T]][[T^{-1}]]^*$).

Les deux lemmes suivants nous permettent de décrire \mathfrak{S} en termes de S -groupes connus.

LEMME 0.7. *Toute unité u de $A[[T]][[T^{-1}]]$, c'est à dire $u \in A[[T]][[T^{-1}]]^*$, s'écrit d'une façon unique de la forme :*

$$u = T^{\underline{n}} \left(a_{-r} T^{-r} + \dots + a_{-1} T^{-1} + a_0 + \sum_{i \geq 1} a_i T^i \right),$$

avec $\underline{n} \in \Gamma(\text{Spec}(A), \underline{\mathbb{Z}})$ avec a_{-r}, \dots, a_{-1} des nilpotents de A , et a_0 un élément inversible de A , c.à.d. $a_0 \in A^*$.

PREUVE. Écrivons $u = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i T^i$, et posons pour tout $p \in \text{Spec}(A)$:

$$\mu(p) = \inf \{ i \mid b_i \text{ non-nilpotent dans } A_p \},$$

et

$$\nu(p) = \inf \{ i \mid b_i \notin p \}.$$

Voyons que $\mu = \nu$, et que ν est une fonction localement constante sur $\text{Spec}(A)$ (et définit ainsi une section de $\underline{\mathbb{Z}}$).

Montrons que $\mu(p) = \inf v(p)$ ($q \subseteq p$) (le inf pris sur l'ensemble des idéaux premiers $q \subseteq p$). Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ tel que $i < i_0 = \inf v(q)$ ($q \subseteq p$) on a $b_i \in \bigcap q A_p = \text{Nilradical de } A_p$ (Donc b_i est nilpotent). Comme il existe q tel que $i_0 = v(q)$ on a $b_{i_0} \notin q$ d'où b_{i_0} est non-nilpotent dans A_p . Ce qui prouve bien l'égalité.

Noter d'autre part que $q \subseteq p \Rightarrow v(q) \leq v(p)$. Or l'unité u donne lieu à une unité dans $(A/qA)[[T]][[T^{-1}]]$. Comme l'anneau A/qA est intègre on en déduit que la classe $\bar{b}_{v(q)}$ de $b_{v(q)}$ dans A/qA est inversible. La considération de l'homomorphisme $A/qA \rightarrow A/pA$ entraîne que la classe $\bar{b}_{v(q)}$ de $b_{v(q)}$ dans A/pA est un élément inversible de A/pA donc que $b_{v(q)} \notin p$. D'où que $v(q) = v(p)$. Si A est un anneau local d'idéal maximal m les deux égalités précédentes donnent $\mu(m) = v(m)$, ce qui entraîne l'énoncé de la proposition dans le cas où A est local.

Soit $p \in \text{Spec } A$. Si on applique la proposition à l'image u_p de u dans $A_p[[T]][[T^{-1}]]$ on obtient que $b_{v(p)}$ est un élément inversible dans A_p , et que b_i est nilpotent dans A_p si $i < v(p)$. Il existe alors $f \in A$ tel que :

$f \notin p$, a_{-r}, \dots, a_{-1} sont des nilpotents dans A_f , et $a_0 \in A_f^*$. On en déduit la proposition dans le cas général.

LEMME 0.8. Soit C une sous- A -algèbre de $A[[T]]$ contenant T et tel que $A \simeq C/TC$. Alors toute unité u de $C[[T^{-1}]]$ s'écrit de façon unique sous la forme $u = T^{\underline{n}} u' u''$ où $\underline{n} \in \Gamma(\text{Spec } A, \mathbb{Z})$, $u' \in C^*$, et $u'' = a_{-r} T^{-r} + \dots + a_{-1} T^{-1} + 1$ avec a_{-r}, \dots, a_{-1} nilpotents dans A .

PREUVE. Cas où $C = A[[T]]$. Quitte à localiser A , on peut supposer que :

$$u = \left(a_{-r} T^{-r} + \dots + a_{-1} T^{-1} + a_0 + \sum_{i \geq 1} a_i T^i \right)$$

avec a_{-r}, \dots, a_{-1} des nilpotents de A et a_0 une unité de A .

Soit $v \in A[[T]][[T^{-1}]]^*$ de la forme : $v = \alpha_{-p} T^{-p} + \dots + \alpha_{-1} T^{-1} + \alpha_0 + \sum_{i \geq 1} \alpha_i T^i$ avec $\alpha_{-p} \dots \alpha_{-1}$ des nilpotents, et α_0 une unité. On écrit alors $v = v^- + \alpha_0 + v^+$ avec $v^- \in T^{-1} A[[T^{-1}]]$, $v^+ \in T A[[T]]$, et $\alpha_0 \in A^*$. On définit par récurrence une suite d'éléments $u_n = u_n^- + \alpha_0^{(n)} + u_n^+$ de $A[[T]][[T^{-1}]]$ du même type que v ci-dessus en posant :

$$u_0 = u \text{ et } u_{n+1} = u_n / (\alpha_0^{(n)} + u_n^+)^{-1}.$$

Soit I_n^+ (resp. I_n^-) l'idéal engendré par les coefficients de u_n^+ (resp. u_n^-). Il

est immédiat que $I_n^- \subseteq I_0^-$ et que $I_{n+1}^+ \subseteq I_n^- I_n^+$ d'où $I_n^+ \subseteq (I_0^-)^n$. Comme I_0^- est un idéal nilpotent, car il est engendré par un nombre fini de nilpotents, on a $u_n^+ = 0$ pour n assez grand, c.à.d. $u_n = u_n^- + \alpha_0^{(n)}$. Or par construction de la suite il existe $u' \in A[[T]]^*$ tel que $u_n = u u'^{-1} = \alpha_0^{(n)} u''$, avec $u'' \in T^{-1} A[[T^{-1}]]$ à coefficients dans I_0^- et $\alpha_0^{(n)} \in A^*$, d'où $u = u' \cdot \alpha_0^{(n)} \cdot u''$. Ce qui donne le cas $C = A[[T]]$ immédiatement. L'unicité de la décomposition est triviale.

Cas général. L'hypothèse $C/TC \simeq A$ entraîne que $TA[[T]] \cap C = TC$. D'autre part on a $T \in C$. Il en résulte que tout élément $\bar{s} \in M = A[[T]]/C$ est uniquement divisible par T , c.à.d. il existe \bar{s}' unique tel que $\bar{s} = T\bar{s}'$. Donc si $M_T = M \otimes_C C[[T^{-1}]]$ le C -morphisme naturel $M \rightarrow M_T$ est un isomorphisme. On a alors le diagramme commutatif avec les lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A[[T]] & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 2 & & \\ 0 & \longrightarrow & C[[T^{-1}]] & \longrightarrow & A[[T]][[T^{-1}]] & \longrightarrow & M_T & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui permet de prouver que $C[[T^{-1}]] \cap A[[T]] = C$. Soit $u \in C[[T^{-1}]]^* \subseteq A[[T]][[T^{-1}]]^*$.

On écrit $u' = T^n u' u''$. On a alors que $u' \in C[[T^{-1}]]^* \cap A[[T]]$. D'après ce que l'on vient de voir $u' \in C^*$ d'où on a ainsi montré le cas général.

Soit $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{S}$ le S -sous-faisceau en groupes engendré par la section T de \mathfrak{S} donnée par un générateur T de I et par le S -sous-groupe $\mathfrak{J}^0 \subset \mathfrak{S}$. Le S -groupe \mathfrak{J} est indépendant du choix de T .

Par définition de \mathfrak{J} , on a une suite exacte de S -groupes

$$(0.9) \quad 1 \longrightarrow \mathfrak{J}^0 \longrightarrow \mathfrak{J} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \longrightarrow 0.$$

Le choix d'un générateur T de I donne lieu à un scindage de (0.9). D'où il résulte que \mathfrak{J} est isomorphe au produit $\underline{\mathbb{Z}}_S \times \mathfrak{J}^0$.

On définit un S -groupe par

$$(0.10) \quad \check{W} = \mathfrak{S} / \mathfrak{J}.$$

On a donc une suite exacte de S -groupes

$$(0.11) \quad 1 \longrightarrow \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \check{W} \longrightarrow 1.$$

Soient $B = A[[T]]$ et A' une A -algèbre. On définit le S -sous-foncteur en

groupes \check{W}_T de \mathfrak{S} par

$$(0.12) \quad \check{W}_T(A') = \{1 + a'_{-1}T^{-1} + \dots + a'_{-n}T^{-n} \mid a'_{-1}, \dots, a'_{-n} \in \text{Nil}(A')\}.$$

($\text{Nil}(A')$ désigne le nilradical de A' .) Il est facile de voir que \check{W}_T est en fait un S -sous-faisceau de Zariski de \mathfrak{S} . Le lemme (0.8), montre que l'on a un isomorphisme de S -foncteurs

$$(0.13) \quad \mathfrak{S} \simeq \check{W}_T \times \mathfrak{J}$$

qui entraîne que la suite exacte (0.11) est scindée.

On définit un S -foncteur $\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X}_n)$ en posant pour tout S -schéma S'

$$(0.14) \quad \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X}_n)(S') = \Gamma(\mathfrak{X}'_n, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}^*),$$

où $\mathfrak{X}'_n = \mathfrak{X}_n \times_S S'$, et $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}^* \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n}$ désigne le sous-faisceau des unités.

On pose

$$(0.15) \quad \mathfrak{J}_n^0 = \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X}_n).$$

On a alors que \mathfrak{J}^0 (resp. \mathfrak{J}_n^0) est isomorphe au S -groupe des séries formelles inversibles : $S' \rightarrow \mathcal{O}_{S'}[[T]]^*$ (resp. séries formelles inversibles tronquées à l'ordre $n+1$: $S' \rightarrow (\mathcal{O}_{S'}[[T]]/(T^{n+1}))^*$).

On a pour tout entier $n \geq 0$, un S -homomorphisme

$$(0.16) \quad \mathfrak{J}^0 \rightarrow \mathfrak{J}_n^0$$

donné par le S -homomorphisme de restriction $\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X}) \rightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X}_n)$.

Soit

$$(0.17) \quad \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S} / \text{Ker}(\mathfrak{J}^0 \rightarrow \mathfrak{J}_n^0).$$

La suite exacte (0.9) donne lieu à une autre

$$(0.18) \quad 1 \rightarrow \mathfrak{J}_n^0 \rightarrow \mathfrak{J}_n \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \rightarrow 0.$$

Soit

$$(0.19) \quad \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S} / \text{Ker}(\mathfrak{J}^0 \rightarrow \mathfrak{J}_n^0).$$

La donnée d'un isomorphisme $B \simeq A[[T]]$ entraîne celle d'un isomorphisme de S -schémas

$$(0.20) \quad \mathfrak{J}_n^0 \simeq \text{Spec}(A[a_0, \dots, a_n][a_0^{-1}]) \quad (\text{resp. } \mathfrak{J}^0 \simeq \text{Spec}(A[a_i][a_0^{-1}](i \in \mathbb{N}))).$$

Si $m \geq n$, il existe un S -homomorphisme canonique $\mathfrak{J}_m^0 \rightarrow \mathfrak{J}_n^0$. On vérifie que la limite projective $\varprojlim_n \mathfrak{J}_n^0$ s'identifie à \mathfrak{J}^0 . Pour tout $n \geq 0$ le

homomorphisme canonique $\lim_{\leftarrow n} \mathfrak{I}_n^0 \longrightarrow \mathfrak{I}_n^0$ correspond à celui donné par (0.16).

On a alors que \mathfrak{I}^0 est un S -groupe pro-lisse. En composant (0.16) avec le S -homomorphisme canonique

$$\underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}(\mathfrak{X}_n) = \mathfrak{I}_n^0 \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}(\mathfrak{X}_0) = \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}$$

on obtient un S -homomorphisme $\mathfrak{I}^0 \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}$.

Soit

$$(0.21) \quad \wedge^0 = \text{Ker}(\mathfrak{I}^0 \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}) \quad (\text{resp. } \wedge_n^0 = \text{Ker}(\mathfrak{I}_n^0 \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}})).$$

On a alors les décompositions canoniques en produit direct

$$(0.22) \quad \mathfrak{I}^0 = \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}} \times \wedge^0 \quad (\text{resp. } \mathfrak{I}_n^0 = \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}} \times \wedge_n^0).$$

On vérifie facilement que \wedge^0 s'identifie à la limite projective $\lim_{\leftarrow n} \wedge_n^0$.

La suite exacte (0.11) donne la suite exacte

$$(0.23) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{I}_n \longrightarrow \mathfrak{I}_n \longrightarrow \check{W} \longrightarrow 0.$$

D'après (0.8) le choix d'un isomorphisme $B \simeq A[[T]]$ donne lieu à un isomorphisme de S -groupes

$$(0.24) \quad \mathfrak{I} \simeq \check{W} \times \underline{\mathbb{Z}}_S \times \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}} \times \wedge^0 \quad (\text{resp. } \mathfrak{I}_n \simeq \check{W} \times \underline{\mathbb{Z}}_S \times \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}} \times \wedge_n^0, \quad n \in \mathbb{N})$$

On a alors un S -homomorphisme

$$(0.25) \quad \varepsilon : \mathfrak{I} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S$$

tel que si $u \in \mathfrak{I}(A')$ s'écrit $u = T^m u' u''$ ($m \in \mathbb{Z}$), grâce à (0.24), alors $\varepsilon(u) = m$. Il est facile de voir que ε est indépendant du choix d'un isomorphisme $B \simeq A[[T]]$. On pose $\mathfrak{I}^0 = \text{Ker } \varepsilon$, et $\mathfrak{I}_n^0 = \varepsilon^{-1}(\underline{n})$ pour toute section \underline{n} de $\underline{\mathbb{Z}}_S$. On a ainsi une suite exacte de S -groupes

$$(0.26) \quad 1 \longrightarrow \mathfrak{I}^0 \longrightarrow \mathfrak{I} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\mathbb{Z}}_S \longrightarrow 0 \quad \left(\text{resp. } 1 \longrightarrow \mathfrak{I}_n^0 \longrightarrow \mathfrak{I}_n \xrightarrow{\varepsilon_n} \underline{\mathbb{Z}}_S \longrightarrow 0 \right),$$

où $\mathfrak{I}_n^0 = \mathfrak{I}^0 / \text{Ker}(\mathfrak{I}^0 \longrightarrow \mathfrak{I}_n^0)$. L'homomorphisme ε est compatible avec l'homomorphisme $\mathfrak{I} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S$ donné par (0.9).

Il résulte de la définition de \check{W}_T (cf. (0.12)) que \check{W}_T est isomorphe au complété formel du groupe des vecteurs de Witt universel introduit par P. Cartier dans [1], et que si \wedge_T^0 désigne le S -groupe défini comme dans (0.21) à partir de $B = A[[T]]$, alors \check{W}_T s'identifie au dual de Cartier de \wedge_T^0 (cf. loc. cit.). Soit

$$(0.27) \quad E_S^{(\infty)} = \text{Spec}(A[a_{-i}] \quad (i \in \mathbb{N}^+))$$

le S -espace affine restreint. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit un idéal de $A[a_{-i}]$ par

$$(0.28) \quad K^{(n)} = (a_{-1}^n, \dots, a_{-n}^n, a_{-n+1}, \dots).$$

La famille d'idéaux $(K^{(n)})$ ($n \in \mathbb{N}$) est un système fondamental d'idéaux ouverts d'une unique topologie linéaire de $A[a_{-i}]^\wedge$. Soit $A[a_{-i}]^\wedge$ la A -algèbre topologique complétée de $A[a_{-i}]$. Il est clair que l'on a un isomorphisme de S -foncteurs

$$\check{W}_T \simeq \widehat{E}_S^{(\infty)} = \mathrm{Spf}(A[a_{-i}]^\wedge \ (i \in \mathbb{N}^+)).$$

Il résulte de (0.24) que le choix d'un isomorphisme $B \simeq A[[T]]$ entraîne un S -isomorphisme de groupes

$$(0.29) \quad \check{W} \simeq \check{W}_T,$$

donc un isomorphisme de S -foncteurs $\check{W} \simeq \widehat{E}_S^{(\infty)}$.

Soit $I_A \subset B \widehat{\otimes}_A B$ l'idéal de définition de la section diagonale $\Delta: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$. Soit d un générateur de I_A . L'image de d dans $B_{\{B[I^{-1}]\}} = B \widehat{\otimes}_A B[I^{-1}]$, que l'on note toujours d , est un élément inversible. En effet, notons que si $B = A[[T]]$ on a alors $B \widehat{\otimes}_A B[I^{-1}] \simeq A[[t]][t^{-1}][[T]]$ en notant par T (resp. t) l'élément $T \otimes 1$ (resp. $1 \otimes T$) de $A[[T]] \widehat{\otimes}_A A[[T]][T^{-1}]$. De même on a $B \widehat{\otimes}_A B \simeq A[[t, T]]$. Il est facile de voir que

$$I_A = (t - T),$$

d'où il existe $u \in A[[t, T]]^*$ tel que $d = u(t - T)$. On a dans $A[[t]][t^{-1}][[T]]$ la relation

$$(t - T)^{-1} = t^{-1} \left(1 + \sum_{i \geq 1} t^{-i} T^i \right),$$

qui donne que d est inversible dans $A[[t]][t^{-1}][[T]]$ et entraîne l'affirmation en général. Soit d_\circ l'image de d par le A -homomorphisme

$$(0.30) \quad B \widehat{\otimes}_A B \longrightarrow B$$

obtenu par passage au quotient par l'idéal $(1 \otimes I)(B \widehat{\otimes}_A B)$.

NOTATION 0.31. (i) - Soit φ_d^0 la section de $\mathfrak{J}^0 = \underline{\mathbb{G}}_{\mathrm{mS}}(\mathfrak{X})$ au-dessus de $\mathfrak{U} = \mathrm{Spec}(B[I^{-1}])$ donnée par

$$d^{-1} \in (B \widehat{\otimes}_A B[I^{-1}])^* = \underline{\mathbb{G}}_{\mathrm{mS}}(\mathfrak{X})(\mathfrak{U}) = \mathfrak{J}^0(\mathfrak{U}).$$

(ii) - L'élément $(d_\circ \otimes 1)d^{-1}$ donne lieu à une section de $\mathfrak{S} = \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}(\mathfrak{U})$ au-dessus de \mathfrak{U} , qui appartient en fait au S -sous-groupe $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{S}$ (\mathfrak{J} est engendré par la section $d_\circ \otimes 1$ et par \mathfrak{J}^0), que l'on désigne par ϕ_d^1 .

(iii) - Soit ϕ_T^0 la section de \mathfrak{J}^0 au-dessus de \mathfrak{U} donnée par $(t - T)^{-1} \in B \widehat{\otimes}_A B[I^{-1}] = \mathfrak{J}^0(\mathfrak{U})$. Soit ϕ_T^1 la section de \mathfrak{J} au-dessus de \mathfrak{U} donnée par $T(t - T)^{-1}$. Si l'on pose $d = t - T$ on a $\phi_d^0 = \phi_T^0$ et $\phi_d^1 = -\phi_T^1$.

(La considération de ϕ_d^0 (resp. ϕ_d^1) pour un générateur d quelconque de I_A est imposée par les constructions géométriques du § 1.)

LEMME 0.32. Avec les notations de (0.31), on a :

(i) - La classe ϕ^0 de ϕ_d^0 dans $\mathfrak{J}^0(\mathfrak{U}) / \mathfrak{J}^0(\mathfrak{X})$ est indépendante du choix de d et coïncide avec celle de ϕ_T^0 .

(ii) - La classe ϕ^1 de $-\phi_d^1$ dans $\mathfrak{J}(\mathfrak{U}) / \text{Ker}(\mathfrak{J}^0(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{J}^0(S))$ est indépendante du choix de d et coïncide avec celle de ϕ_T^1 .

PREUVE. Soit d' un autre générateur de I_A . Il existe alors $u \in (B \widehat{\otimes}_A B)^*$ tel que $d' = ud$. Notons par d'_\circ (resp. d_\circ , u_\circ) l'image de d' (resp. d , u) par (0.30). On a alors

$$(d'_\circ \widehat{\otimes} 1)d'^{-1} = (u_\circ \otimes 1)u^{-1}(d_\circ \otimes 1)d^{-1}.$$

Il est clair que l'image de $(u_\circ \otimes 1)u^{-1}$ par (0.30) est égale à 1. Il en résulte (ii), compte tenu de (0.30). La preuve de (i) est analogue. C.Q.F.D.

PROPOSITION 0.33. On reprend les notations de (0.31). Soit T un générateur de I . On suppose S noethérien. Soit

$$\prod_{n+2}^{} \phi_T^0 : \prod_{n+2}^{} \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{J}_n^0$$

le S -morphisme obtenu en composant le S -morphisme $\prod_{n+2}^{} \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{J}^0$ faisant correspondre à une section (x_1, \dots, x_{n+2}) de $\prod_{n+2}^{} \mathfrak{U}$ l'élément

$$\phi_T^0(x_1) \dots \phi_T^0(x_{n+2}) \in \mathfrak{J}^0\left(\prod_{n+2}^{} \mathfrak{U}\right)$$

avec le S -morphisme canonique $\mathfrak{J}^0 \longrightarrow \mathfrak{J}_n^0$ (cf. (0.16)).

On a alors que $\prod_{n+2}^{} \phi_T^0$ est un S -morphisme fidèlement plat.

PREUVE. Soit σ_j ($1 \leq j \leq n+2$) la j -ème fonction symétrique de (t_1, \dots, t_{n+2}) , c.à.d.

$$\sigma_j = \sum t_{\alpha_1} \dots t_{\alpha_j} \quad (1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_j \leq n+2)$$

On pose

$$(t_1 - T)(t_2 - T) \dots (t_{n+2} - T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_{n+1} T^{n+1} + (-1)^{n+2} T^{n+2},$$

ce qui donne :

$$(*) \quad a_{n+2-j} = (-1)^{n+2-j} \sigma_j \quad (1 \leq j \leq n+2).$$

Le A -homomorphisme

$$A[a_0, \dots, a_{n+1}] \longrightarrow A[t_1, \dots, t_{n+2}]$$

défini par les équations $(*)$ est fidèlement plat. Ce qui résulte du fait bien connu que $A[t_1, \dots, t_{n+2}]$ est un $A[\sigma_1, \dots, \sigma_{n+2}]$ -module libre de type fini.

Il en résulte que le A -homomorphisme induit

$$(**) \quad A[a_0, \dots, a_{n+1}][a_0^{-1}] \longrightarrow A[t_1, \dots, t_{n+2}][t_1^{-1}, \dots, t_{n+2}^{-1}]$$

est aussi fidèlement plat.

Soit $g = \left(\prod_{i=1}^{n+2} \phi_T^0 \right)^{-1}$. Il est clair que le A -homomorphisme correspondant à g :

$$A[a_0, \dots, a_n][a_0^{-1}] \longrightarrow A[[t^{-1}]] [t_1^{-1}] \otimes_A \dots \otimes_A A[[t_{n+2}]] [t_{n+2}^{-1}]$$

est obtenu en composant $(**)$ avec le A -homomorphisme plat

$$A[a_0, \dots, a_n][a_0^{-1}] \longrightarrow A[a_0, \dots, a_{n+1}][a_0^{-1}]$$

à gauche, et avec le A -homomorphisme plat (c'est ici que l'hypothèse A noethérien intervient).

$$A[t_1][t_1^{-1}] \otimes_A \dots \otimes_A A[t_{n+2}][t_{n+2}^{-1}] \longrightarrow A[[t_1]] [t_1^{-1}] \otimes_A \dots \otimes_A A[[t_{n+2}]] [t_{n+2}^{-1}]$$

à droite. On a ainsi que g est un A -morphisme plat. Montrons que g est surjectif. On est alors ramené à montrer que pour tout corps algébriquement clos k , qui soit une A -algèbre, le k -morphisme fibre g_k de g au-dessus de $\text{Spec}(k)$ est surjectif.

Notons par g'_k le k -morphisme

$$\text{Spec}(k((t_1)) \otimes \dots \otimes_k k((t_{n+2}))) \longrightarrow \text{Spec}(k[a_0, \dots, a_n][a_0^{-1}])$$

défini à partir des équations $(*)$. On voit facilement que g'_k se factorise à travers g_k , et qu'il est un k -morphisme plat. Il nous suffit de montrer que g'_k

est surjectif. Soit g''_k le k -morphisme

$$\mathrm{Spec}(k(t_1) \otimes_k \dots \otimes_k k(t_{n+2})) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k[a_0, \dots, a_n][a_0^{-1}])$$

défini à partir des équations (*). Puisque g'_k se factorise par g''_k et que

$$k(t_1) \otimes_k \dots \otimes_k k(t_{n+2}) \longrightarrow k((t_1)) \otimes_k \dots \otimes_k k((t_{n+2}))$$

est fidèlement plat on est ramené à montrer que g''_k est surjectif.

Il suffit de voir que pour tout $(c_0, \dots, c_n) \in k^{n+1}$ avec $c_0 \neq 0$, le système d'équations

$$(***) \quad (-1)^j \sigma_{n+2-j} - c_j = 0 \quad (0 \leq j \leq n)$$

admet une solution (x_1, \dots, x_{n+2}) dans une extension (finie) K du corps $k(u)$ des fractions rationnelles en l'indéterminée u , dont toute les composantes soient transcendantes sur k .

Soit K une extension finie de $k(u)$ contenant toutes les racines x_1, \dots, x_{n+2} du polynôme

$$P(T) = (c_0 + c_1 T + \dots + c_n T^n + u T^{n+1} + T^{n+2}).$$

Le lemme (0.34) ci-dessus montre bien que le point (x_1, \dots, x_{n+2}) fourni une solution de (***) avec la propriété voulue. On a ainsi que g''_k est un morphisme surjectif. C.Q.F.D.

LEMME 0.34. Soit t un élément algébrique sur k différent de 0. Alors $P(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n + u t^{n+1} + t^{n+1}$ est un élément transcendant sur k .

PREUVE. Quitte à substituer le polynôme $P(T)$ par une puissance $P(T)^{p^i}$ ($i \in \mathbb{N}$) où p est la caractéristique de k , on peut supposer que t est séparable sur k . Soit k' une extension algébrique de k qui contient toutes les racines t_1, \dots, t_d du polynôme minimal de t (de degré d). Supposons que $P(t_1), \dots, P(t_d)$ sont algébriques sur k . Il existe un polynôme $Q(T) \in k[u][T]$ de degré en $T \leq d$ tel que :

$$(a) - Q(t_1) = P(t_1), \dots, Q(t_d) = P(t_d);$$

(b) - les coefficients de $Q(T)$ sont des polynômes en u de degré ≤ 1 , et il existe au moins un coefficient de $Q(T)$ qui n'appartient pas à k .

L'hypothèse de séparabilité de t donne que la matrice $[t_i^j]$ ($1 \leq i \leq d$, $0 \leq j < d$) est de rang d . Il en résulte que l'on peut exprimer u comme une combinaison linéaire dans k des éléments algébriques sur k $P(t_1), \dots, P(t_d)$ ce qui est absurde.

On procède à définir deux sections $\gamma^0 \in \check{W}(\mathfrak{X})$ et $\gamma^1 \in (\check{W} \times \underline{\mathbb{Z}}_S)(\mathfrak{X})$ correspondant respectivement à $\varphi^0 \in \mathfrak{S}^0(\mathfrak{U}) / \mathfrak{S}^0(\mathfrak{X})$ et à $\varphi^1 \in \mathfrak{S}(\mathfrak{U}) / \text{Ker}(\mathfrak{S}^0(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{S}^0(S))$ comme l'on verra dans § 1.

NOTATION 0.35. (i) - Soit $d \in I_A \subset B \hat{\otimes}_A B$ (resp. d_0) un générateur d'idéal de définition I_A de la diagonale de $\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ (resp. défini comme dans (0.30)). Notons par d_n l'image de d dans $B \hat{\otimes}_A B_n$ ($n \geq 0$). On vérifie facilement que d_n (resp. $(d_0 \otimes 1)^{-1} d_n$) est une unité de $B_{\{B_n\}}(I_{\{B_n\}}^{-1})$, c.à.d.

$$d_n \text{ (resp. } (d_0 \otimes 1)^{-1} d_n) \in (B_{\{B_n\}}[I_{\{B_n\}}^{-1}])^*.$$

(ii) - Soit

$$\gamma_{d_n}^0 \text{ (resp. } \gamma_{d_n}^1) \in \Gamma(\mathfrak{X}_n, \underline{\mathbb{G}}_{mS}(\mathfrak{U})) = (B_{\{B_n\}}[I_{\{B_n\}}^{-1}])^*$$

la section donnée par $(d_0 \otimes 1)^{-1} d_n$ (resp. d_n). On a que $\gamma_{d_n}^0$ est en fait une section de $\mathfrak{S}^0 \subset \mathfrak{S} = \underline{\mathbb{G}}_{mS}(\mathfrak{U})$.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ $n \geq m$. On vérifie que la restriction de $\gamma_{d_n}^0$ (resp. $\gamma_{d_n}^1$) à $\mathfrak{X}_m \longrightarrow \mathfrak{X}_n$ est égale $\gamma_{d_m}^0$ (resp. $\gamma_{d_m}^1$). Soit

$$\gamma_d^0 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \text{ (resp. } \gamma_d^1 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{S})$$

le S -morphisme (de S -foncteurs) donné par le système $(\gamma_{d_n}^0)$ (resp. $(\gamma_{d_n}^1)$).

Noter que $\mathfrak{X} = \varinjlim_n \mathfrak{X}_n$.

Si $B = A[[T]]$ alors $B_n \simeq A[[t]]/(t^{n+1})$.

Soit $d = T - t$. On a alors $\gamma_{d_n}^0 = 1 - \frac{t}{T}$ (resp. $T - t \in (A[[t]]/(t^{n+1}))[[T]][T^{-1}]^*$).

Noter que

$$(\gamma_{d_n}^0)^{-1} = 1 + \frac{t}{T} + \dots + \frac{t^n}{T^n} \text{ (resp. } (\gamma_{d_n}^1)^{-1} = T^{-1} \left(1 + \frac{t}{T} + \dots + \frac{t^n}{T^n} \right)).$$

Soit U un générateur de I . On désigne par γ_u^0 (resp. γ_u^1) la section de \mathfrak{S}^0 (resp. \mathfrak{S}) au-dessus de \mathfrak{X} donnée par $1 - u U^{-1}$ (resp. $U - u \in (B \hat{\otimes}_A B)[U^{-1}]^*$, où l'on désigne $U \otimes 1$ par U et $1 \otimes U$ par u). Si $d = U - u$ on a alors $\gamma_d^0 = \gamma_u^0$ (resp. $\gamma_d^1 = \gamma_u^1$).

(iii) - On montre comme dans (0.32) que la classe de γ_d^0 (resp. γ_d^1) dans

$$\mathfrak{S}^0(\mathfrak{X}) / \text{Ker}(\mathfrak{S}^0(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{S}^0(S)) \text{ (resp. } \mathfrak{S}(\mathfrak{X}) / \mathfrak{S}^0(\mathfrak{X}))$$

est indépendante du choix de d . Notons par

$$\gamma^0 : \mathfrak{X} \longrightarrow \check{W} \text{ (resp. } \gamma^1 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{S} / \mathfrak{S}^0 = \underline{\mathbb{Z}}_S \times \check{W})$$

le S -morphisme donné par l'image de γ_d^0 (resp. γ_d^1) dans

$$\mathfrak{S}^0(\mathfrak{X})/\mathfrak{S}^0(\mathfrak{X}) = \check{W}(x) \text{ (resp. } \mathfrak{S}(\mathfrak{X})/\mathfrak{S}^0(\mathfrak{X})).$$

REMARQUE 0.36. Les constructions de $\mathfrak{S}^0, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}, \mathfrak{S}^0$ (resp. $\mathfrak{S}_n^0, \mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n$, \mathfrak{S}_n^0) ainsi que celle de $\phi^0, \phi^1, \gamma^0, \gamma^1$ sont fonctorielles vis à vis des isomorphismes de A -algèbres adiques augmentées isomorphes à $A[[T]]$.

On a plus précisément, avec les notations de (0.31) et de (0.35), le résultat suivant. Soient $B' \simeq B$ un A -isomorphisme et d' un générateur de $I_A \subset B' \hat{\otimes}_A B'$. Alors l'image d de d' par $B' \hat{\otimes}_A B' \simeq B \hat{\otimes}_A B'$ est un générateur de $I_A \subset B \hat{\otimes}_A B$ et la section γ_d^0 (resp. $\phi_d^1, \gamma_d^0, \gamma_d^1$) correspond fonctoriellement à la section $\gamma_{d'}^0$ (resp. $\phi_{d'}^1, \gamma_{d'}^0, \gamma_{d'}^1$).

Soit $B = A[[T]]$. Il résulte du lemme (0.7) l'existence d'un scindage

$$(0.37) \quad \check{W} \longrightarrow \mathfrak{S}^0$$

de la suite exacte

$$(0.38) \quad 1 \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \longrightarrow \check{W} \longrightarrow 1$$

dont l'image est égale à \check{W}_T (cf. (0.12)). On obtient alors un relèvement

$$\bar{\gamma}^0 : \mathfrak{X} \longrightarrow \check{W} \longrightarrow \mathfrak{S}^0$$

de $\gamma^0 : \mathfrak{X} \longrightarrow \check{W}$, qui s'avère être égal à la section γ_T^0 (cf. (0.35),(ii)) de \mathfrak{S} , donnée par $1 - tT^{-1}$. On a ainsi que le morphisme

$$\gamma_T^0 : \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A[[T]]) \longrightarrow \check{W}_T \subset \mathfrak{S}^0$$

de \mathfrak{X} dans le complété formel du groupe des vecteurs de Witt coïncide avec le morphisme noté $[t]$ dans [1]. Il résulte alors de loc. cit. la

PROPOSITION 0.39. Soient $S, \mathfrak{X}, \gamma^0, \check{W}$ définis comme ci-dessus. Soit G un S -schéma en groupes commutatif et lisse. Le couple (\check{W}, γ^0) vérifie la propriété universelle suivante : “La flèche

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\check{W}, G) \longrightarrow \mathrm{Ker}(G(\mathfrak{X}) \longrightarrow G(S))$$

induite par composition avec γ^0 est bijective”.

Soit $\mathrm{Sym}^{(n)}(\mathfrak{X})$ la puissance symétrique n -ème de \mathfrak{X} , i.e. le quotient du produit n -ème $\mathfrak{X} \times_S \dots \times_S \mathfrak{X}$ par l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . On a que $\mathrm{Sym}^{(n)}(\mathfrak{X})$ est représentable par un S -schéma formel isomorphe au spectre formel $\mathrm{Spf}(A[[a_{-1}, \dots, a_{-n}]])$, de l'anneau adique des séries

formelles

$$A[[a_{-1}, \dots, a_{-n}]] \text{ en } a_{-1}, \dots, a_{-n},$$

à coefficients dans A .

La multiplication de \check{W} donne lieu à un S -morphisme

$$(0.40) \quad \text{Sym}^{(n)}(\gamma^0) : \text{Sym}^{(n)}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \check{W},$$

qui est en fait une immersion fermée de S -schémas formels. En effet on vérifie, si $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A[[T]])$, que l'image de $\text{Sym}^{(n)}(\gamma_T^0) : \text{Sym}^{(n)}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \check{W}_T$ est donnée par le sous-foncteur de \check{W}_T dont les sections $1 + a_{-1}T^{-1} + \dots + a_{-m}T^{-m}$ vérifient $a_{-n-1} = \dots = a_{-m} = 0$. Le n -ème $\mathfrak{X}^n = \mathfrak{X} \times_S \dots \times_S \mathfrak{X}$ s'identifie à $\text{Spf}(A[[t_1, \dots, t_n]])$ et le morphisme $\mathfrak{X}^n \longrightarrow \text{Sym}^{(n)}(\mathfrak{X})$ correspond au A -homomorphisme de A -algèbres

$$A[[a_{-1}, \dots, a_{-n}]] \longrightarrow A[[t_1, \dots, t_n]]$$

faisant correspondre $(-1)^{j\sigma_i}$ à a_{-i} , où σ_i désigne la i -ème fonction symétrique de t_1, \dots, t_n .

On identifie $\text{Sym}^{(n)}(\mathfrak{X})$ à son image dans \check{W} et l'on pose

$$(0.41) \quad W_n = \text{Sym}^{(n)}(\mathfrak{X}).$$

Pour tout couple d'entiers $1 \leq m \leq n$, on a un morphisme

$$(0.42) \quad \text{Sym}^{(m)}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \text{Sym}^{(n)}(\mathfrak{X}),$$

qui correspond au A -homomorphisme $A[[a_{-1}, \dots, a_{-n}]] \longrightarrow A[[a_{-1}, \dots, a_{-m}]]$ obtenu par passage au quotient par l'idéal engendré par a_{-m-1}, \dots, a_{-n} . Ce morphisme se déduit par passage au quotient du morphisme $\mathfrak{X}^m \longrightarrow \mathfrak{X}^n$ donné par le A -homomorphisme $A[[t_1, \dots, t_n]] \longrightarrow A[[t_1, \dots, t_m]]$ envoyant t_i sur 0 pour $i > m$.

Étant donnés des entiers $0 \leq m \leq n \leq p$ on a un diagramme commutatif :

$$(0.43) \quad \begin{array}{ccc} \text{Sym}^{(m)}(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{\quad} & \text{Sym}^{(n)}(\mathfrak{X}) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{Sym}^{(p)}(\mathfrak{X}) \end{array}$$

On a ainsi un système inductif (W_n) de S -schémas formels.

Notons par $\varinjlim_n W_n$ la limite inductive prise dans la catégorie des S -faisceaux de Zariski. On a alors

PROPOSITION 0.44. *Avec les notations ci-dessus on a que les inclusions $W_n \longrightarrow \tilde{W}$ induisent un isomorphisme de S -faisceaux de Zariski*

$$\varinjlim_n W_n \simeq \tilde{W}.$$

NOTATION 0.45. *Soient $n, m \geq 0$ des entiers, et \underline{v} une section de $\underline{\mathbb{Z}}_S$ au-dessus d'un S -schéma S' .*

(i) - *La suite exacte (0.11) donne lieu aux suites exactes*

$$1 \longrightarrow \mathfrak{J}^0 \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \longrightarrow \tilde{W} \longrightarrow 1$$

et

$$1 \longrightarrow \mathfrak{J}_n^0 \longrightarrow \mathfrak{S}_n^0 \longrightarrow \tilde{W} \longrightarrow 1 \quad (\text{cf. (0.26) et (0.23)}).$$

Soit ${}^{(m)}\mathfrak{S}^0$ (resp. ${}^{(m)}\mathfrak{S}_n^0$) le \mathfrak{J}^0 -torseur (resp. \mathfrak{J}_n^0 -torseur) au-dessus de W_m obtenu à partir de la première (resp. deuxième) suite exacte ci-dessus et du morphisme $W_m \longrightarrow \tilde{W}$.

(ii) - *Soit ${}^{(m)}\mathfrak{S}$ (resp. ${}^{(m)}\mathfrak{S}_n$) le \mathfrak{J} -torseur (resp. \mathfrak{J}_n -torseur) obtenu à partir de la suite exacte $1 \longrightarrow \mathfrak{J}^0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \tilde{W} \longrightarrow 1$ (cf. (0.11)) et du morphisme $W_m \longrightarrow \tilde{W}$.*

(iii) - *Soit $\mathfrak{S}^v = \varepsilon^{-1}(\underline{v})$ (resp. $\mathfrak{S}_n^v = \varepsilon_n^{-1}(\underline{v})$) (cf. (0.26)). On a un S' -morphisme $\mathfrak{S}^v \longrightarrow \tilde{W}_{S'}$ (resp. $\mathfrak{S}_n^v \longrightarrow \tilde{W}_{S'}$) qui fait de \mathfrak{S}^v (resp. \mathfrak{S}_n^v) un $\mathfrak{J}_{S'}^0$ -torseur (resp. $(\mathfrak{J}_n^0)_{S'}$ -torseur). Notons par ${}^{(m)}\mathfrak{S}^v$ (resp. ${}^{(m)}\mathfrak{S}_n^v$) le \mathfrak{J}^0 (resp. \mathfrak{J}_n^0)-torseur image inverse par $(W_m)_{S'} \longrightarrow \tilde{W}_{S'}$.*

La suite exacte (0.11) (resp. $1 \longrightarrow \mathfrak{J}^0 \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \longrightarrow \tilde{W} \longrightarrow 1$ (cf. (0.45), (i))) nous permet de regarder \mathfrak{S} (resp. \mathfrak{S}^0) comme un \mathfrak{J} -torseur (resp. \mathfrak{J}^0 -torseur) au dessus de \tilde{W} . La donnée d'un générateur U de I entraîne un isomorphisme de A -algèbre adique augmentées $A[[T]] \simeq B$. Par fonctorialité (cf. (0.36)) on en déduit un scindage

$$(0.46) \quad \sigma_U : \tilde{W} \longrightarrow \mathfrak{S}^0$$

de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathfrak{J}^0 \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \longrightarrow \tilde{W} \longrightarrow 1$$

et un relèvement

$$\gamma_U^0 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \text{ de } \gamma^0 : \mathfrak{X} \longrightarrow \tilde{W}$$

à partir de celui de la suite exacte (0.38) tel que

$$\gamma_U^0 = (U \otimes 1 - 1 \otimes U)(U \otimes 1)^{-1} \in \left((B \hat{\otimes}_A B)[(U \otimes 1)^{-1}] \right)^* = \mathfrak{S}(\mathfrak{X}).$$

Soient U et V des générateurs de I . On a alors

$$\gamma_V^0(\gamma_U^0)^{-1} = (V \otimes 1 - 1 \otimes V)(V \otimes 1)^{-1}(U \otimes 1 - 1 \otimes U)^{-1}(U \otimes 1) \in (B \widehat{\otimes}_A B)^* = \mathfrak{J}^0(\mathfrak{X})$$

En fait $\gamma_V^0(\gamma_U^0)^{-1}$ est une section de $\text{Ker}(\mathfrak{J}^0(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{J}^0(S))$.

Noter que l'ensemble des isomorphismes de A -algèbres adiques augmentées $\text{Isom}(A[[T]], B)$ de $A[[T]]$ avec B , s'identifie à l'ensemble des générateurs de I . Notons par $\text{Aut}(B)$ les A -automorphismes de la A -algèbre adique B . On a alors que $\text{Aut}(B)$ opère sur $\text{Isom}(A[[T]], B)$, qui devient alors un $\text{Aut}(B)$ torseur à gauche.

On définit un S -homomorphisme $h(U, V) : \check{W} \longrightarrow \mathfrak{J}^0$ par $h(U, V)\sigma_U = \sigma_V$.

NOTATION 0.47. Notons par ${}^{(m)}\sigma_U$ (resp. ${}^{(m)}\sigma_{U_n}$) le scindage de ${}^{(m)}\mathfrak{J}^0 \longrightarrow W_m$ (resp. ${}^{(m)}\mathfrak{J}_n^0 \longrightarrow W_m$) induit par σ_U . On pose

$${}^{(m)}h(U, V) = {}^{(m)}\sigma_V({}^{(m)}\sigma_U)^{-1} \in \Gamma(W_m, \mathfrak{J}^0) \\ \left(\text{resp. } {}^{(m)}h(U, V)_n = {}^{(m)}\sigma_{V_n}({}^{(m)}\sigma_{U_n})^{-1} \in \Gamma(W_m, \mathfrak{J}_n^0) \right).$$

D'où

$${}^{(1)}h(U, V) = h(U, V) \circ \gamma^0 = \gamma_V^0(\gamma_U^0)^{-1} \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}^0),$$

et en général

$${}^{(m)}h(U, V) = h(U, V) \circ \text{Sym}^{(n)}(\gamma^0).$$

Noter que ${}^{(m)}h(U, V) : \text{Sym}^{(m)}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{J}^0$ s'obtient par passage au quotient à partir de

$$\prod_{i=1}^m {}^{(1)}h(U, V) : \prod_{i=1}^m \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{J}^0,$$

PROPOSITION 0.48. On reprend la notation ci-dessus. Le choix d'un générateur U de $I \subset B$ donne lieu à un scindage $\sigma_U : \check{W} \longrightarrow \mathfrak{J}^0$ de la suite exacte $1 \longrightarrow \mathfrak{J}^0 \longrightarrow \mathfrak{J}^0 \longrightarrow \check{W} \longrightarrow 1$ (resp. un relèvement $\gamma_U^0 : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{J}^0$). Un couple de générateurs U, V de I détermine un homomorphisme $h(U, V) : \check{W} \longrightarrow \mathfrak{J}^0$ tel que : $h(U, V)\sigma_U = \sigma_V$, qui est caractérisé comme l'unique homomorphisme qui vérifie

$$h(U, V) \circ \gamma^0 = \gamma_V^0(\gamma_U^0)^{-1} \quad (\text{cf. (0.42)}).$$

La donnée de $h(U, V)$ équivaut à celle du système inductif $({}^{(m)}h(U, V))$.

(En fait on peut établir plus généralement, grâce à la propriété universelle du couple (\tilde{W}, γ^0) , une correspondance bijective entre relèvements de γ^0 et les scindages de cette suite exacte).

Supposons que A soit un anneau noethérien. Soit $\text{Alg.adm}|_A$ la catégorie des A -algèbres admissibles au sens de [8]. Cette catégorie est la catégorie opposée de celle des S -schémas formels affines $\text{Schf aff}|_S$.

Soit S' un S -schéma formel affine donné par la A -algèbre admissible A' . Soit K un idéal de définition de S' . Alors $\text{Spec}(A'/K)$ est un A -schéma et $S' = \varinjlim_K \text{Spec}(A'/K)$, où K parcourt l'ensemble des idéaux de définition de S' . On exprime ainsi S' comme une limite inductive de S -schémas.

DÉFINITION 0.49. *On définit $\hat{\mathfrak{S}}, \hat{\mathfrak{S}}^0, \hat{\mathfrak{S}}_n, \hat{\mathfrak{S}}_n^0$ ($n \in \mathbb{N}$) comme des foncteurs en groupes de $\text{Schf aff}|_S$ comme suit. Soit $S' = \text{Spf}(A')$. On pose alors*

$$\hat{\mathfrak{S}}(S') = \varinjlim_K \mathfrak{S}(A'/K),$$

$$\hat{\mathfrak{S}}^0(S') = \varinjlim_K \mathfrak{S}^0(A'/K),$$

$$\hat{\mathfrak{S}}_n(S') = \varinjlim_K \mathfrak{S}_n(A'/K),$$

$$\hat{\mathfrak{S}}_n^0(S') = \varinjlim_K \mathfrak{S}_n^0(A'/K),$$

où K parcourt l'ensemble des idéaux de définition de A' .

REMARQUE 0.50. *On peut définir $\hat{\mathfrak{S}}, \hat{\mathfrak{S}}^0, \hat{\mathfrak{S}}_n$, et $\hat{\mathfrak{S}}_n^0$ sur la catégorie des S -schémas formels $\text{Schf}|_S$ à partir de (0.49).*

Un S -schéma formel S' donne lieu à un S -foncteur. Alors $\hat{\mathfrak{S}}(S')$ (resp. $\hat{\mathfrak{S}}^0(S'), \hat{\mathfrak{S}}_n(S'), \hat{\mathfrak{S}}_n^0(S')$) coïncide avec l'ensemble des morphismes de S -foncteurs de S' dans \mathfrak{S} (resp. $\mathfrak{S}^0, \mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n^0$).

Soit U un générateur de I . On a alors un S -isomorphisme $\mathfrak{S} \simeq \tilde{W} \times \mathfrak{I}$ qui induit pour tout S -schéma formel noethérien S' un isomorphisme

$$\hat{\mathfrak{S}}(S') \simeq \tilde{W}(S') \times \mathfrak{I}(S'),$$

où $\tilde{W}(S')$ désigne les points du S -schéma formel \tilde{W} à valeurs dans S' . L'homomorphisme (d'augmentation) (0.25) donne lieu à un homomorphisme

$$\varepsilon : \hat{\mathfrak{S}} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S$$

de foncteurs en groupes de $\text{Schf}|_S$, de manière que la suite de foncteurs en groupes de $\text{Schf}|_S$

$$1 \longrightarrow \hat{\mathfrak{S}}^0 \longrightarrow \hat{\mathfrak{S}} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \longrightarrow 1$$

est exacte.

Soient A' une A -algèbre adique (cf. [8], Déf. (7.1.9)) et K un idéal de définition de A' . Alors (K^n) constitue un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans A' . Soit $B' = B \hat{\otimes}_A A' = B_{\{A'\}}$; $(K^n B')$ est un système fondamental d'idéaux ouverts d'une topologie linéaire de B .

Comme A' est noethérienne, B' est complet pour cette topologie. Cette topologie compacte coïncide avec la topologie KB' -adique de B' . Elle est indépendante de K . Soit $\text{Spec}(B')$ le complété formel du A' -schéma $\text{Spec}(B')$ au-dessus de

$$\text{Spec}(A'/K) \longrightarrow \text{Spec}(A').$$

$\widehat{\text{Spec}(B')}$ est égal au spectre formel de B' muni de la topologie KB' -adique. On pose

$$\widehat{\text{omb}}(\mathfrak{X}') = \widehat{\text{Spec}(B')}.$$

Noter que si $B = A[[T]]$ alors $B' \left[I_{\{A'\}}^{-1} \right]^\wedge = \varprojlim_n A'[[T]][T^{-1}] / K^n A'[[T]][T^{-1}]$, car K^n ($n \in \mathbb{N}$) est un idéal de type fini de A' . Cette dernière limite s'identifie à l'anneau des séries formelles $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n T^n$ où $a_n \longrightarrow 0$ dans A' quand $n \longrightarrow -\infty$. D'autre part par définition on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(A') &= \varprojlim_n (A'/K^n)[[T]][T^{-1}]^* = \varprojlim_n (A'[[T]][T^{-1}] / K^n A'[[T]][T^{-1}])^* \\ (0.51) \quad &= \left(\varprojlim_n A'[[T]][T^{-1}] / K^n A'[[T]][T^{-1}] \right)^* = \left(B' \left[I_{\{A'\}}^{-1} \right]^\wedge \right)^*. \end{aligned}$$

On a finalement la

PROPOSITION 0.52. *Même hypothèse que ci-dessus sur A' . Soit $B' \left[I_{\{A'\}}^{-1} \right]^\wedge$ le complété formel de $B' \left[I_{\{A'\}}^{-1} \right]$ par rapport à la topologie $KB' \left[I_{\{A'\}}^{-1} \right]$ -adique. Alors que $\mathfrak{S}(A')$ s'identifie au groupe des unités $\left[B' \left[I_{\{A'\}}^{-1} \right]^\wedge \right]$, c.à.d. aux sections de $\underline{\mathbb{G}}_{mS}$ au-dessus de $\hat{\mathfrak{U}}' = \text{Spf} \left(B' \left[I_{\{A'\}}^{-1} \right]^\wedge \right) \subset \widehat{\text{omb}}(\mathfrak{X}')$.*

Les définitions et les constructions de §1 sont données à partir d'une courbe formelle $\mathfrak{X} \longrightarrow S$ au dessus d'une base noethérienne et affine S . Les

constructions suivantes doivent permettre de définir ces même objets dans le cas où S est un schéma noethérien et $\mathfrak{X} \longrightarrow S$ une courbe formelle de la forme $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_S[[T]])$. On esquisse la construction d'un foncteur de la catégorie des schémas formels noethériens vers celle des espaces localement annelés

$$(0.53) \quad X \longrightarrow \mathrm{omb}(X)$$

qui associe à tout schéma formel noethérien X un espace localement annelé

$$\mathrm{omb}(X) = (Z, \mathcal{O}_Z)$$

noethérien, sobre (c.à.d. toute partie fermée irréductible a exactement un point générique), et avec \mathcal{O}_Z cohérent. On a d'autre part un homomorphisme fonctoriel

$$(0.54) \quad i_X : X \longrightarrow \mathrm{omb}(X)$$

tel que i_X est un homomorphisme de X sur une partie fermée X' de $\mathrm{omb}(X)$, de manière que l'on retrouve X comme le "complété formel" de $\mathrm{omb}(X)$ le long de X' . Notons respectivement par $\mathrm{Coh}(X)$ et $\mathrm{Coh}(\mathrm{omb}(X))$ la catégorie des modules cohérents sur le schéma formel X et sur l'espace annelé $\mathrm{omb}(X)$. L'on suppose l'une et l'autre munies de la structure de produit tensoriel et des isomorphismes d'associativité et de commutativité. On a alors que i_X induit une équivalence de catégories

$$(0.55) \quad i_X^* : \mathrm{Coh}(\mathrm{omb}(X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}(X).$$

Soit C un anneau adique noethérien. Soit $X = \mathrm{Spf}(C)$. On a alors un isomorphisme canonique

$$(0.56) \quad \mathrm{omb}(X) \simeq \mathrm{Spec}(C).$$

Le morphisme (0.54) correspond alors au morphisme canonique $\mathrm{Spf}(C) \longrightarrow \mathrm{Spec}(C)$.

Donnons la construction de $\mathrm{omb}(X)$ pour un schéma formel noethérien X . Soit $PF(X)$ l'ensemble quotient de l'ensemble des idéaux cohérents I de \mathcal{O}_X par la relation d'équivalence : « $I \sim I'$ » s'il existe un entier $n > 0$ tel que $I^n \subset I'$ et $I'^n \subset I$. On a alors que $PF(X)$ avec sa relation d'ordre réticulé est l'ensemble des parties fermées d'un espace topologique sobre \overline{X} . Les points de \overline{X} correspondent aux éléments irréductibles de l'ensemble ordonné $PF(X)$.

Soit I un idéal cohérent de \mathcal{O}_X . On dénote par $V(I)$ le fermé de \overline{X} défini par I . On définit un \overline{X} -faisceau en anneaux $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ en posant

$$(0.57) \quad \Gamma(\overline{X} - V(I), \mathcal{O}_{\overline{X}}) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(I^n, \mathcal{O}_X).$$

On pose

$$(0.58) \quad \text{omb}(X) = (\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}).$$

On vérifie qu'étant donné un morphisme de schémas formels $f : X \longrightarrow Y$ il existe un unique morphisme d'espaces localement annelés

$$(0.59) \quad \text{omb}(f) : \text{omb}(X) \longrightarrow \text{omb}(Y)$$

tel que $\text{omb}(f) \circ i_X = i_Y \circ f$.

Il résulte de [8], Proposition (6.9.17), pg 323, que si C est un anneau adique noethérien, et si l'on pose $X = \text{Spf}(C)$, la définition de $\text{omb}(X)$ donne lieu à un isomorphisme canonique $\text{omb}(X) \simeq \text{Spec}(C)$.

PROPOSITION 0.60. *Soit A un anneau noethérien. Soit C une A -algèbre adique noethérienne. On pose $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(C)$ et $Y = \text{Spec}(C)$.*

Soit Z un A -schéma séparé de présentation finie. Soit $f : \mathfrak{Y} \longrightarrow Z$ un A -morphisme formel. (On considère Z comme un A -schéma formel en munissant \mathcal{O}_Z de la topologie discrète). Il existe alors un unique A -morphisme

$$\overline{f} : Y \longrightarrow Z$$

redonnant f par restriction à \mathfrak{Y} , c.à.d. tel que

$$f = \overline{f} \circ i_{\mathfrak{Y}}.$$

PREUVE. *Soit $g : \mathfrak{Y} \times_A X$ le \mathfrak{Y} -morphisme formel donné par le graphe de f . Le théorème [6.4.1] de [9] montre qu'il existe un unique Y -morphisme $\overline{g} : Y \longrightarrow Y \times_A X$ redonnant g par restriction à \mathfrak{Y} . Soit \overline{f} le morphisme composé*

$$Y \longrightarrow Y \times_A X \longrightarrow X.$$

On vérifie que \overline{f} satisfait aux conditions de l'énoncé.

C.Q.F.D.

1. Jacobienne locale d'une courbe formelle relative. Énoncé du théorème principal

(1.1) On donne dans ce numéro une interprétation géométrico-fonctorielle des objets introduits dans § 0. On reprend la notation de § 0. Soit T un générateur de I .

DÉFINITION 1.1.1. Soit S' un S -schéma. On pose $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_S S'$. Soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$ le faisceau en $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -algèbres défini comme dans § 0. On entend par idéal fractionnaire inversible (i.f.i) de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ -sous-module K de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$ localement de la forme $u\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$, où u désigne une section de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]^*$, c.à.d. une section inversible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$.

Étant données deux i.f.i. K et K' de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$ on définit de manière évidente leur produit $KK' = K \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} K'$. On a $K = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'} K = K\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$. On vérifie que l'ensemble des i.f.i. K de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$ muni du produit ci-dessus est un groupe abélien. Un S -morphisme $S'' \rightarrow S'$ induit un S -morphisme $f : \mathfrak{X}'' = \mathfrak{X} \times_S S'' \rightarrow \mathfrak{X}'$. L'image inverse $f^*(K)$ d'un i.f.i. K de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$ est un i.f.i. de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}''}[T^{-1}]$.

DÉFINITION 1.1.2. Soit $\text{Pic}_{\mathfrak{X}/S}$ le S -foncteur en groupes abéliens faisant correspondre à S' l'ensemble des i.f.i. K de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$.

Remarquer que l'on a un épimorphisme de faisceaux

$$(1.1.3) \quad \mathfrak{S} \longrightarrow \text{Pic}_{\mathfrak{X}/S}$$

envoyant une section u de \mathfrak{S} sur le i.f.i. $u\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$. On vérifie immédiatement que le noyau de (1.1.3) est égal à \mathfrak{S}^0 . D'autre part la suite exacte (0.11) donne lieu à la suite exacte

$$(1.1.4) \quad 1 \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \times \check{W} \longrightarrow 1,$$

d'où l'isomorphisme

$$(1.1.5) \quad \text{Pic}_{\mathfrak{X}/S} \simeq \underline{\mathbb{Z}}_S \times \check{W}.$$

On a alors un homomorphisme (d'augmentation)

$$\text{Pic}_{\mathfrak{X}/S} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S.$$

Le générateur T de I donne lieu par fonctorialité (cf. (0.36)) à un scindage $\sigma_T : \underline{\mathbb{Z}}_S \rightarrow \mathfrak{S}$ de la suite exacte (1.1.4). Ce qui entraîne, vu (1.1.5), que tout i.f.i. K de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$ est globalement principal, c.à.d. de la forme $K = u\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ avec $u \in \Gamma(\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}])^*$.

Soit, pour tout entier n , $\text{Pic}_{\mathfrak{X}/S}^n \subset \text{Pic}_{\mathfrak{X}/S}$ le sous-foncteur image inverse de la section de $\underline{\mathbb{Z}}_S$ donnée par n . On a alors un isomorphisme

$$\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}/S}^0 \simeq \check{W}.$$

Soit $\mathfrak{X}'_n = \mathfrak{X}_n \times_S S'$ ($n \in \mathbb{N}$). On désigne par $\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}$ le S -foncteur faisant correspondre à S' l'ensemble des couple (K, ξ_n) formés d'un i.f.i. K de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[T^{-1}]$ et d'un isomorphisme $\xi_n : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n} \simeq K \otimes_{\mathfrak{X}'_n} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n} (= K_n)$.

Le morphisme (1.1.3) se relève en un morphisme

$$(1.1.6) \quad \mathfrak{S} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}$$

envoyant u sur $(u \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}, u \bmod T^{n+1})$, où $u \bmod T^{n+1}$ désigne l'isomorphisme ξ_n donné par la restriction à \mathfrak{X}'_n de u . Le noyau de (1.1.6) est celui de $\mathfrak{S}^0 \longrightarrow \mathfrak{S}_n^0$, et ce morphisme est surjectif car $\mathfrak{S}^0 \longrightarrow \mathfrak{S}_n^0$ l'est. On a alors un isomorphisme de S -foncteurs.

$$(1.1.7) \quad \underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S} \simeq \mathfrak{S}_n \quad (\text{cf. (0.19)})$$

La donnée de T donne lieu à un isomorphisme $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{S}_n^0 \times \underline{\mathbb{Z}}_S \times \check{W}$. Le morphisme naturel $\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}/S}$ définit une augmentation $\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S$ par la composition avec l'augmentation de $\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}/S}$.

Pour tout entier v , soit $\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}^v \subset \underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}$ le sous-foncteur image inverse de la section v de $\underline{\mathbb{Z}}_S$ par l'augmentation $\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}$. On a un isomorphisme

$$\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}^0 \simeq \mathfrak{S}_n^0.$$

On pose

$$(1.1.8) \quad B^{(n)} = A + I^{n+1},$$

c.à.d. $B^{(n)} = \{b \in B \mid \text{l'image de } b - \bar{b}.1 \text{ dans } B/I^{n+1} \text{ vaut zéro}\}$, où \bar{b} désigne la classe de b dans $B/I \simeq A$. Il est clair que $B^{(n)} \subset B$ est une A -sous-algèbre que l'on muni de la topologie $B^{(n)} \cap I$ -adique.

Soit

$$(1.1.9) \quad \mathfrak{X}^{(n)} = \text{Spf}(B^{(n)}).$$

On a alors un S -morphisme de schémas formels

$$(1.1.10) \quad \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}^{(n)}$$

qui permet d'identifier $\mathfrak{X}^{(n)}$ à la somme amalgamée $\mathfrak{X} \coprod_{\mathfrak{X}_n} S$.

Posons

$$\mathfrak{X}^{(n)'} = \mathfrak{X}^{(n)} \times_S S'$$

et

$$(1.1.11) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{(n)'}}^+ = \text{Ker}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{(n)'}}^+ \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}^+).$$

Notons par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[T^{-1}]^*/\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{(n)}}^+$ le S -faisceau quotient. On a alors un isomor-

phisme de S -foncteurs

$$(1.1.12) \quad \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[T^{-1}]^* / \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{(n)}}^+.$$

qui justifie la notation $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}$.

Noter que l'on a les isomorphismes suivants :

$$(1.1.13) \quad \lim_{\leftarrow n} \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S} \simeq \mathfrak{S}$$

et

$$(1.1.14) \quad \lim_{\leftarrow n} \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}^0 \simeq \mathfrak{S}^0.$$

Soit $S' = \mathrm{Spf}(A')$ un S -schéma formel affine. Si K est un idéal de définition de A' on pose $S'_K = \mathrm{Spec}(A'/K)$. On a ainsi un système inductif de S -schémas (S'_K) tel que $S' = \varinjlim_n S'_K$. Posons

$$(1.1.15) \quad \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}/S}(S') = \lim_{\leftarrow K} \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}/S}(S'_K)$$

et

$$(1.1.16) \quad \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}(S') = \lim_{\leftarrow K} \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}(S'_K).$$

On peut interpréter l'ensemble $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}/S}(S')$ (resp. $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}(S')$) comme l'ensemble $\mathrm{Hom}_S(S', \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}/S})$ (resp. $\mathrm{Hom}_S(S', \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S})$) de S -morphisms fonctoriels. On peut ainsi définir $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}/S}$ (resp. $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}$) comme un foncteur de $\mathrm{Schf}|_S$. L'isomorphisme (1.1.7) donne lieu à un isomorphisme de foncteurs de $\mathrm{Schf}|_S$

$$(1.1.17) \quad \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S} \simeq \hat{\mathfrak{S}}_n \simeq \mathfrak{I}_n \times \check{W} \text{ (cf. (0.17))}.$$

REMARQUE 1.1.18. Soient $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{I}_\Delta \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}'$ l'idéal de définition de la diagonale $\Delta \subset \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$. Notons par $\mathfrak{I}_{\Delta m}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}_m}$ induit par \mathfrak{I}_Δ . On a alors que $\mathfrak{I}_{\Delta m}$ est un i.f.i. de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}_m}[T^{-1}]$, et le système projectif $(\mathfrak{I}_{\Delta m})$ détermine une section de $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathfrak{X}/S}$ au-dessus de \mathfrak{X} , qui correspond à la section γ^1 (cf. (0.35), (iii)) par l'isomorphisme (1.1.5).

Soient un entier $m > 0$, et un entier $1 < i \leq m+1$. Posons $\mathfrak{Y} = \prod_{j=1}^{m+1} \mathfrak{X}$. Notons par

$$p : \prod_{j=1}^{m+1} \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$$

la première projection, et pour tout $1 < i \leq m + 1$:

$$p_i : \prod_{j=1}^{m+1} \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$$

le morphisme défini par la première et la i -ème projection. Soit $\mathfrak{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ l'idéal donné par $I \subset B$. On vérifie que le $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ -module inversible

$$p_1^*(\mathfrak{I}_A) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}} \dots \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}} p_m^*(\mathfrak{I}_A)$$

provient d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \times_S W_m$ -module inversible $\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)$ par l'image inverse par le morphisme canonique :

$$\mathfrak{Y} = \prod_{j=1}^{m+1} \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X} \times_S \mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{X}).$$

Soit

$$\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)' = p^*(\mathfrak{I})^{\otimes -m} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A).$$

Alors $\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)'$ est un i.f.i. de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times_S W_m}[T^{-1}]$, et définit une section de $\underline{\mathrm{Pic}}_{\mathfrak{X}/S}^0$ au-dessus de W_m , et qui coïncide avec $\mathrm{Sym}^{(m)}(\gamma^0)$.

Soit $\underline{\nu}$ une section de $\underline{\mathbb{Z}}_S$. On définit un i.f.i. de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times_S W_m}[T^{-1}]$ en posant

$$\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)^{\underline{\nu}} = p^*(\mathfrak{I})^{\underline{\nu}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times_S W_m}} \mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)'.$$

Soit $\left(\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)^{\underline{\nu}}\right)^*$ le fibré principal associé. On désigne par $\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)_n^{\underline{\nu}}$ sa restriction à $\mathfrak{X}_n \times W_m$ comme module inversible. Soit $\left(\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)_n^{\underline{\nu}}\right)^*$ le fibré principal associé. Notons par pr (resp. pr^n) la projection de $\mathfrak{X} \times_S W_m$ (resp. $\mathfrak{X}_n \times_S W_m$) sur W_m . Alors le faisceau image directe

$$\begin{aligned} & \mathrm{pr}_* \left(\left(\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)^{\underline{\nu}} \right)^* \right) \\ & \left(\text{resp. } \mathrm{pr}_*^n \left(\left(\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)_n^{\underline{\nu}} \right)^* \right) \right) \end{aligned}$$

est un $\underline{\mathbb{G}}_m(\mathfrak{X})$ -torseur (resp. $\underline{\mathbb{G}}_m(\mathfrak{X}_n)$ -torseur) au-dessus de W_m qui s'identifie canoniquement à ${}^{(m)}\mathfrak{S}^{\underline{\nu}}$ (resp. ${}^{(m)}\mathfrak{S}_n^{\underline{\nu}}$).

Soit $S \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \times_S \tilde{W}$ une section admettant une factorisation à travers $S \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \times_S W_m$.

Soit $\underline{\nu}$ la section de $\underline{\mathbb{Z}}_S$ donnée par $S \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \times \tilde{W}$. Alors il lui correspond le i.f.i. de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_S}[T^{-1}]$ l'image inverse de $\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathfrak{I}_A)^{\underline{\nu}}$ par le morphisme induit $\mathfrak{X}_S \longrightarrow \mathfrak{X}_{W_m}$.

On suppose maintenant A noethérien. Soit A' une A -algèbre adique. Soit K un idéal de définition de A' . Posons $S' = \mathrm{Spf}(A')$ et $S'_m = \mathrm{Spf}(A'/K^m)$ ($m \in \mathbb{N}$). Alors $B' = B \hat{\otimes}_A A'$ est une A' -algèbre com-

plète pour la topologie KB' -adique de manière que le spectre formel de B' muni de cette topologie, s'identifie au complété formel $\widehat{\text{omb}}(\mathfrak{X}')$, où $\mathfrak{X}' = \text{Spf}(B')$, le long de $S'_1 = \text{Spec}(A'/K)$, comme il résulte du fait que A' est noethérien. On a alors

$$\text{omb}(\mathfrak{X} \times_S S'_m) \simeq \text{omb}(\mathfrak{X}') \times_{S'} S'_m.$$

Une section de $\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}/S}$ au-dessus de S'_m correspond à la donnée d'un idéal principal $L_m \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times_S S'_m}[T^{-1}]$ lequel donne lieu à un idéal inversible de $\text{omb}(\mathfrak{X} \times_S S'_m)$. D'où la donnée d'une section de

$$\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}/S}(S') = \varprojlim_m \underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}/S}(S'_m)$$

entraîne celle d'une famille (L_m) de modules inversibles au-dessus du système inductif $(\text{omb}(\mathfrak{X}') \times_{S'} S'_m)$, et à fortiori celle d'un $\mathcal{O}_{\widehat{\text{omb}}(\mathfrak{X}')}$ -module inversible L . Soit $\widehat{\mathfrak{U}}' \subset \widehat{\text{omb}}(\mathfrak{X}')$ l'ouvert défini comme dans (0.52). On vérifie qu'il existe une section

$$u \in \Gamma\left(\widehat{\mathfrak{U}}', \mathcal{O}_{\widehat{\text{omb}}(\mathfrak{X}')}^*\right)$$

telle que

$$K = u \mathcal{O}_{\widehat{\text{omb}}(\mathfrak{X}')}^* \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{U}}'}^*.$$

LEMME 1.1.19. *Avec les notations ci-dessus, la donnée d'une section de $\underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S}$ au-dessus de S' , équivaut à celle d'un couple (L, ξ_n) formé d'un $\mathcal{O}_{\widehat{\text{omb}}(\mathfrak{X}')}^*$ -module inversible L de la forme*

$$L = u \mathcal{O}_{\widehat{\text{omb}}(\mathfrak{X}')}^*, \quad u \in \Gamma\left(\widehat{\mathfrak{U}}', \mathcal{O}_{\widehat{\text{omb}}(\mathfrak{X}')}^*\right)$$

et d'un isomorphisme

$$\xi_n : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n} \simeq L \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_n} \quad (\text{cf. (0.61)}).$$

(1.2). Soit S un schéma. Soit $X \rightarrow S$ une S -courbe projective et lisse muni d'un diviseur de Cartier $D \rightarrow X$ relatif effectif. Notons par $p^{(n)} : D^{(n)} \rightarrow S$ le n -ème voisinage infinitésimal de D dans X . Soit

$$(1.2.1) \quad X^{(n)} = X \coprod_{D^{(n)}} S$$

la somme amalgamée de X avec S le long de $D^{(n)}$ (cf. [3], [5]).

Posons pour tout entier $n > 0$

$$(1.2.2) \quad J_n = \underline{\text{Pic}}_{X^{(n)}/S} \left(\text{resp. } J = \varprojlim_n \underline{\text{Pic}}_{X^{(n)}/S} \right)$$

(cf. loc. cit.). Le S -schéma $X^{(n)}$ admet une section canonique

$$S \longrightarrow X^{(n)} = X \coprod_{D^{(n)}} S$$

et l'on peut donc décrire les sections de J_n au-dessus du S -schéma S' comme étant l'ensemble des classes d'isomorphisme des couples (L, ξ_n) formés d'un $\mathcal{O}_{X_{S'}}$ -module inversible L et d'une trivialisation

$$\xi_n : \mathcal{O}_{D_{S'}^{(n)}} \simeq L \otimes_{\mathcal{O}_{X_{S'}}} \mathcal{O}_{D_{S'}^{(n)}}.$$

Soit $\mathcal{A}' \subset X \times_S (X - D)$ le diviseur de Cartier donné par l'image de la restriction à $X - D$ du morphisme diagonal

$$\mathcal{A} : X \longrightarrow X \times X.$$

On désigne par $\Phi^{(n)}$ la section de J_n au-dessus de $X - D$, donnée par la classe d'isomorphisme du couple $(L_{\mathcal{A}'}, \underline{1})$ formé de l'idéal de définition $L_{\mathcal{A}'}$, et de la trivialisation de $L_{\mathcal{A}'}$ le long de $D^{(n)} \times_S (X - D)$ donnée par la section $\underline{1}$ de $L_{\mathcal{A}'}$. D'après loc. cit., on a pour tout S -schéma en groupes commutatif et lisse G , une bijection

$$(1.2.3) \quad \text{Hom}_{S\text{-gr}}(J, G) \simeq G(X - D)$$

induite par la composition avec la section $\Phi = \varprojlim_n \Phi^{(n)}$ de J au-dessus de $X - D$.

Pour tout entier $n \geq 0$ on a une suite exacte de S -faisceaux fpqc en groupes

$$(1.2.4) \quad 1 \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{m}S} \longrightarrow p_*^{(n)}(\underline{\mathbb{G}}_{mD^{(n)}}) \longrightarrow J_n \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/S} \longrightarrow 1$$

Supposons que le diviseur D soit une réunion disjointe :

$$D = \coprod_{i=1}^v D_i,$$

où D_i désigne l'image d'une section $S \longrightarrow X$. Soit \mathfrak{X}_1 la S -courbe formelle affine obtenue par la complétion formelle de X le long de D_i . On a alors

$$\mathfrak{X}_i = \varinjlim_n D_i^{(n)}.$$

On pose $\mathfrak{X}_{in} = D_i^{(n)}$. On définit $\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X}_i)$ (resp. $\underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X}_{in})$) comme dans §0 avec $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$. On a alors un isomorphisme de S -groupes :

$$(1.2.5) \quad \prod_{i=1}^v \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X}_{in}) \simeq p_*^{(n)}(\underline{\mathbb{G}}_{mD^{(n)}}).$$

Supposons maintenant que $S = \text{Spec}(A)$, où A désigne un anneau noethérien, et que pour tout $i = 1, \dots, v$ on ait un isomorphisme

$$\mathfrak{X}_i \simeq \text{Spf}(A[[T]]).$$

Un tel isomorphisme existe toujours localement sur S . On pose $B_i = \Gamma(\mathfrak{X}_i, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_i})$. On a alors que B_i est une A -algèbre adique augmentée isomorphe à $A[[T]]$. Notons par L_{D_i} l'idéal de définition de D_i dans \mathcal{O}_X . Soit $I_i \subset B_i$ l'idéal correspondant à $L_{D_i} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_i}$. On a alors un isomorphisme

$$D_i \simeq \text{Spec}(B_i/I_i) \quad \left(\text{resp. } D_i^{(n)} = \mathfrak{X}_{in} = \text{Spec}(B_i/I_i^{n+1}) \right),$$

c.à.d. l'espace sous-jacent à \mathfrak{X}_i (resp. \mathfrak{X}_{in}) s'identifie à D_i .

On pose

$$\mathfrak{U}_i = \text{Spec}(B_i[I_i^{-1}]) = \text{omb}(\mathfrak{X}_i) - D_i.$$

et (comme dans § 0)

$${}^i\mathfrak{S} = \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{U}_i) \quad (\text{resp. } {}^i\mathfrak{S}^0 = \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X}_i), {}^i\mathfrak{S}_n^0 = \underline{\mathbb{G}}_{\text{ms}}(\mathfrak{X}_{in})),$$

et l'on définit ${}^i\mathfrak{S} \subset {}^i\mathfrak{S}$ comme le S -groupe engendré par ${}^i\mathfrak{S}^0$ et la section de ${}^i\mathfrak{S}$ donnée par un générateur T_i de I_i , et pour tout entier $n \geq 0$, ${}^i\mathfrak{S}_n$ (resp. ${}^i\mathfrak{S}_n^0$) comme dans (0.17) (resp. (0.19)).

On donne, dans ce paragraphe, quelques rapports existants entre ${}^i\mathfrak{S}$, ${}^i\mathfrak{S}$ et J . Pour tout S -schéma S' on pose $X' = X \times_S S'$, $D_i \times_S S'$, et $L_{D'_i} = L_{D_i} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$. Soit

$${}^i\mathcal{O}_{X'(n)}^+ = \text{Ker}\left(\mathcal{O}_{X'}^* \longrightarrow \left(\mathcal{O}_{X'}/L_{D'_i}^{n+1}\right)^*\right).$$

L'immersion fermée $j_i : D_i \longrightarrow X$ en induit une autre $j'_i : D'_i \longrightarrow X'$. Soit $\mathcal{O}_{X'}[L_{D'_i}^{-1}]$ le faisceau d'anneaux de fractions à dénominateurs dans le sous-faisceau des générateurs de $L_{D'_i}$. Soit ${}^i\overline{\mathfrak{S}}_n$ le S -faisceau de Zariski défini par :

$$S' \longrightarrow \Gamma\left(D'_i, j'^{-1}_i \left(\mathcal{O}_{X'}[L_{D'_i}^{-1}]^* / {}^i\mathcal{O}_{X'(n)}^+ \right)\right).$$

Il est clair que l'on a une bijection :

$${}^i\overline{\mathfrak{S}}_n(S') \xrightarrow{\sim} \Gamma\left(X', \mathcal{O}_{X'}[L_{D'_i}^{-1}]^* / {}^i\mathcal{O}_{X'(n)}^+\right),$$

car le support de $\mathcal{O}_{X'}^*[L_{D'_i}^{-1}]^* / {}^i\mathcal{O}_{X'(n)}^+$ est D'_i . Une section \overline{u} de ce faisceau au-dessus de X' donne lieu à un $\mathcal{O}_{X'}$ -sous-module inversible K de $\mathcal{O}_{X'}[L_{D'_i}^{-1}]$, localement engendré par un représentant u de \overline{u} , muni d'un isomorphisme :

$$\xi_n : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_{in}} \simeq K \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_{in}} \quad (\mathfrak{X}'_{in} = \mathfrak{X}_{in} \times_S S').$$

(Remarquer que pour tout $k = 1, \dots, v, k \neq i$, on a que $K \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_{kn}}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_{kn}}$). En faisant correspondre à \overline{u} la section de J_n au-dessus de S' donnée par le couple (K, ξ_n) on obtient un morphisme de S -groupes

$$(1.2.6) \quad j_i^{-1}\left(\mathcal{O}_X[L_{D_i}^{-1}]^* / {}^i\mathcal{O}_{X(n)}^+\right) \longrightarrow J_n.$$

D'autre part le morphisme $\mathfrak{X}_{in} \longrightarrow X$ donne lieu à un morphisme de S -groupes

$$(1.2.7) \quad {}^i\overline{\mathfrak{S}}_n \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_i}[T^{-1}]^* / \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{in}}^+ \simeq \underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}_i/S}^{(n)}$$

où T est un générateur de I_i . Le lemme (0.8) montre que (1.2.7) est en fait un isomorphisme.

À partir du morphisme (1.2.6) et de l'isomorphisme (1.2.7) on définit un homomorphisme de S -groupes

$$(1.2.8) \quad {}^i\mathfrak{S}_n \simeq \underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}_i^{(n)}/S} \longrightarrow J_n,$$

et on a un diagramme commutatif

$$(1.2.9) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_{\text{mS}}(\mathfrak{X}_{in}) & \longrightarrow & \underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}_i^{(n)}/S} & \longrightarrow & \underline{\text{Pic}}_{\mathfrak{X}_i/S} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \prod_{i=1}^v \mathbb{G}_{\text{mS}}(\mathfrak{X}_{in}) / \mathbb{G}_{\text{mS}} & \longrightarrow & J_n & \longrightarrow & \underline{\text{Pic}}_{\widehat{X}/S} \longrightarrow 1 \end{array}.$$

Notons par

$$\varepsilon_i : {}^i\mathfrak{S} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \quad (\text{resp. } \varepsilon_{im} : {}^i\mathfrak{S}_m \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S)$$

le S -homomorphisme d'augmentation défini comme dans (0.25) (resp. (0.26)).

Soit ε'_{im} (resp. ε'_i) la restriction de ε_{im} (resp. ε_i) à ${}^i\mathfrak{J}_m$ (resp. ${}^i\mathfrak{J}$).

Noter que ε_{im} (resp. ε_i) est compatible avec l'augmentation canonique

$$\underline{\text{Pic}}_{\widehat{X^{(m)}}/S} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \quad \left(\text{resp. } \varprojlim_m \underline{\text{Pic}}_{\widehat{X^{(m)}}/S} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \right).$$

Le morphisme (1.2.8) donne lieu par restriction à un morphisme

$$(1.2.10) \quad {}^i\mathfrak{J}_n \longrightarrow J_n.$$

et finalement à un morphisme

$$(1.2.11) \quad \prod_{i=1}^v {}^i\mathfrak{J}_n \longrightarrow J_n.$$

Par passage à la limite en n on obtient un morphisme de S -groupes

$$(1.2.12) \quad \prod_{i=1}^v {}^i\mathfrak{J} \longrightarrow \varprojlim_n J_n.$$

Soit T_i un générateur de I_i . Soit $\phi_{T_i}^1 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{U}_i)$ la section définie à partir de T_i comme dans (0.31), (iii). Notons par $\Phi_{T_i}^1$ l'image de $\phi_{T_i}^1$ par le S -homomorphisme ${}^i\mathfrak{J} \longrightarrow J$ induit par (1.2.12). Soit $\Phi_{\mathfrak{U}_i}$ la fibre de Φ en $\mathfrak{U}_i \longrightarrow X - D$. Le lemme suivant exprime la compatibilité de la propriété universelle de la jacobienne globale (J, Φ) de $X - D$ avec la propriété universelle de $({}^i\mathfrak{J}, \phi_{T_i}^1)$ (cf. Théorème (1.4.4)).

LEMME 1.2.13. *Avec les notations ci-dessus on a :*

- (i) - $\Phi_{T_i}^1 \equiv \Phi_{\mathfrak{U}_i} \pmod{\text{Ker}(J(\text{omb}(\mathfrak{X}_i)) \longrightarrow J(S))}$;
- (ii) - *Pour tout S -schéma en groupes commutatif et lisse G le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{S\text{-gr}}(J, G) & \longrightarrow & \text{Hom}_{S\text{-gr}}({}^i\mathfrak{J}, G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(X - D) & \longrightarrow & G(\mathfrak{U}_i) / \text{Ker}(G(\text{omb}(\mathfrak{X}_i)) \longrightarrow G(S)), \end{array}$$

où la première (resp. deuxième) flèche verticale est induite par Φ (resp. $\phi_{T_i}^1$), la flèche horizontale supérieure (resp. inférieure) est induite par (1.2.12) (resp. la restriction $G(X - D) \longrightarrow G(\mathfrak{U}_i)$).

PREUVE. *Le (ii) résulte immédiatement de (i), montrons donc (i). Posons pour simplifier la notation $D = D_i$, $\mathfrak{J} = {}^i\mathfrak{J}$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$ et $v = 1$. On a alors $D^{(n)} = \mathfrak{X}_n$ et $\mathfrak{X} = \lim_{\overrightarrow{n}} D^{(n)} = \lim_{\overrightarrow{n}} \mathfrak{X}_n$. Notons par L_Δ l'idéal de définition de la diagonale $\Delta \subset X' = X \times_S X$, et par $L_{\Delta'}$ la restriction de L_Δ à $X \times_S (X - D)$. Par définition Φ est la section de J au-dessus de $X - D$ donnée par le couple $(L_{\Delta'}, \underline{1})$, où*

$$\underline{1} \in \Gamma\left(\mathfrak{X} \times_S (X - D), L_{\Delta'} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S (X - D)}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times_S (X - D)}\right).$$

Notons par $(L_{\Delta_{\mathfrak{U}}}, \underline{1}_{\mathfrak{U}})$ le couple formé par le $\mathcal{O}_{X_{\mathfrak{U}}}$ -module inversible $L_{\Delta_{\mathfrak{U}}}$ obtenu à partir de L_Δ par passage à la fibre $X_{\mathfrak{U}} = X \times_S \mathfrak{U} \subset X \times_S (X - D)$, et par la trivialisaton $\underline{1}_{\mathfrak{U}}$ de $L_{\Delta_{\mathfrak{U}}}$ le long de $\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{U}$, induite par celle de $L_{\Delta'}$ le long de $\mathfrak{X} \times_S (X - D)$. Il est clair que la fibre $\Phi_{\mathfrak{U}}$ de Φ est donnée par la classe de $(L_{\Delta_{\mathfrak{U}}}, \underline{1}_{\mathfrak{U}})$.

Quitte à substituer S par un recouvrement de Zariski $S' \rightarrow S$ on peut supposer :

(1) qu'il existe une fonction méromorphe relative T de X et un voisinage ouvert U de D , contenu dans le domaine de définition de T , tel que :

$$L_D|U = T \cdot \mathcal{O}_U,$$

c.à.d. T donne lieu par restriction à U , à un générateur de $L_D|U$.

(2) Posons $X_U = X \times_S U$, $\Delta_U = \Delta \cap X_U$, et $D_U = D \times_S U$. Notons toujours par T la fonction méromorphe relative de $X \times_S U$ donnée par $T \otimes 1$. Soit $t \in \Gamma(X_U, \mathcal{O}_{X_U})$ la section donnée par $1 \otimes T$. Il existe un voisinage ouvert $W \subset U \times_S U$ de D_U tel que :

$$L_{\Delta}|W = (t - T) \cdot \mathcal{O}_W.$$

On a alors $L_{D_U}|W = T \cdot \mathcal{O}_W$.

On définit une fonction méromorphe relative de X_U en posant :

$$m = T(t - T)^{-1}.$$

Notons par $m(L_{\Delta_U})$ le \mathcal{O}_{X_U} -module inversible fractionnaire de X_U défini par :

$$\Gamma(V, m(L_{\Delta_U})) = \{ms \mid s \in \Gamma(V, L_{\Delta_U})\},$$

où L_{Δ_U} désigne l'idéal de définition de Δ_U dans X_U .

On a ainsi un isomorphisme :

$$(*) \quad m : L_{D_U} \xrightarrow{\sim} m(L_{\Delta_U})$$

donné par la multiplication par m . Posons

$$L = L_{D_U}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_U}} m(L_{A_U}).$$

Il résulte de (2) et de la définition de m (resp. de l'isomorphisme $(*)$) que :

$$L|W = \mathcal{O}_W$$

et que la fibre $(L)_X$ de L en $X = X \times_S D \longrightarrow X_U$ est égale à \mathcal{O}_X . Il est alors clair que le \mathcal{O}_{X_U} -module inversible L est muni de la trivialisatıon évidente $\underline{1}$ au-dessus de W . Soit $(L_{\mathfrak{U}}, \underline{1}_{\mathfrak{U}})$ le couple formé du module donné par la fibre de L en $\mathfrak{U} \longrightarrow U$, et de la trivialisatıon de $L_{\mathfrak{U}}$ le long de $D \times_S \mathfrak{U}$ induite par $\underline{1}$. Soit $m_{\mathfrak{U}}$ la fibre de l'isomorphisme $(*)$ en \mathfrak{U} . On a alors un isomorphisme induit par $m_{\mathfrak{U}}$:

$$(**) \quad (L_{A_{\mathfrak{U}}}, \underline{1}_{\mathfrak{U}}) \simeq (L_{D_{\mathfrak{U}}}, \underline{m}_{\mathfrak{U}}(\underline{1}))(L_{\mathfrak{U}}, \underline{1}_{\mathfrak{U}}),$$

où $L_{D_{\mathfrak{U}}}$ désigne la fibre de L_D en \mathfrak{U} ($=$ idéal de définition de D_U dans $X \times_S \mathfrak{U}$).

Notons que la classe de $(L_{D_{\mathfrak{U}}}, \underline{m}_{\mathfrak{U}}(\underline{1}))$ donne une section J au-dessus de \mathfrak{U} qui coıncide avec l'image de ϕ_T^1 par (1.2.12) (Noter aussi que la fonction méromorphe T donne un générateur de $I \subset B$), où ϕ_T^1 est défini d'après (0.31), (iii). D'autre part on a que la classe de $(L_{\mathfrak{U}}, \underline{1}_{\mathfrak{U}})$ donne lieu, d'après ce qui précède, à une section de

$$\text{Ker}(J(\text{omb}(\mathfrak{X})) \longrightarrow J(S)).$$

L'affirmation (i) résulte alors de l'isomorphisme $(**)$.

C.Q.F.D.

(1.3) Soit

$$(1.3.1) \quad X = \mathbb{P}_S^1 = \text{Proj}(A[T_0, T_1]) \quad (S\text{-droite projective}).$$

On pose

$$(1.3.2) \quad D_{(0)} = V(T_1) \quad (\text{resp. } D_{(\infty)} = V(T_0))$$

et

$$(1.3.3) \quad D = D_{(0)} \coprod D_{(\infty)}.$$

Soit

$$(1.3.4) \quad U_{(\infty)} = \mathbb{P}_S^1 - D_{(0)} = \text{Spec}(A[T_0, T_1]_{(T_1)})$$

$$\left(\text{resp. } U_{(0)} = \mathbb{P}_S^1 - D_{(\infty)} = \text{Spec}(A[T_0, T_1]_{(T_0)}), \right. \\ \left. U = \mathbb{P}_S^1 - D = \text{Spec}(A[T_0, T_1]_{(T_0, T_1)}) \right).$$

Noter que $U_{(0)}$, $U_{(\infty)}$ et U sont des ouverts affines de \mathbb{P}_S^1 . Soit $\mathfrak{X}_{(0)}$ (resp. $\mathfrak{X}_{(\infty)}$) le complété formel de X le long de $D_{(0)}$ (resp. $D_{(\infty)}$). On pose

$$(1.3.5) \quad B_{(0)} = \Gamma(\mathfrak{X}_{(0)}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{(0)}}) \quad (\text{resp. } B_{(\infty)} = \Gamma(\mathfrak{X}_{(\infty)}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{(\infty)}})),$$

et

$$(1.3.6) \quad I_{(0)} = \text{Ker}(B_{(0)} \longrightarrow A) \quad (\text{resp. } I_{(\infty)} = \text{Ker}(B_{(\infty)} \longrightarrow A)).$$

Soit (J, Φ) (resp. $(J_{(0)}, \Phi_{(0)})$, $(J_{(\infty)}, \Phi_{(\infty)})$) la jacobienne relative de $\mathbb{P}_S^1 - D$ (resp. $U_{(\infty)} = \mathbb{P}_S^1 - D_{(0)}$, $U_{(0)} = \mathbb{P}_S^1 - D_{(\infty)}$). (cf. [3], [5]).

Soit ${}^{(0)}\mathfrak{J}$ (resp. ${}^{(\infty)}\mathfrak{J}$) le S -groupe défini à partir de $B_{(0)}$ (resp. $B_{(\infty)}$) comme dans § 0. Le S -homomorphisme (1.2.12) donne lieu à un S -homomorphisme

$$(1.3.7) \quad {}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\mathfrak{J} \longrightarrow J \quad (\text{resp. } {}^{(0)}\mathfrak{J} \longrightarrow J_{(0)}, {}^{(\infty)}\mathfrak{J} \longrightarrow J_{(\infty)}).$$

Dans ce paragraphe on se propose d'expliciter J (resp. $J_{(0)}$, $J_{(\infty)}$) comme un quotient du groupe de nature locale ${}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\mathfrak{J}$ (resp. ${}^{(0)}\mathfrak{J}$, ${}^{(\infty)}\mathfrak{J}$).

On désigne par $L_{(0)} \subset \mathcal{O}_X$ (resp. $L_{(\infty)} \subset \mathcal{O}_X$, $L_D \subset \mathcal{O}_X$) l'idéal de définition de $D_{(0)}$ (resp. $D_{(\infty)}$, D). On a alors que l'idéal $I_{(0)} \subset B_{(0)}$ (resp. $I_{(\infty)} \subset B_{(\infty)}$) est induit par $L_{(0)}$ (resp. $L_{(\infty)}$). On identifie $V(I_{(0)}) \subset \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) = \text{Spec}(B_{(0)})$ (resp. $V(I_{(\infty)}) \subset \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) = \text{Spec}(B_{(\infty)})$) à $D_{(0)}$ (resp. $D_{(\infty)}$).

Soit \mathfrak{T} la fonction méromorphe relative de $X = \mathbb{P}_S^1$ définie par la section

$$T_1 T_0^{-1} \in \Gamma(U_{(0)}, \mathcal{O}_X).$$

Il est clair que $U_{(0)}$ est le domaine de définition de \mathfrak{T} .

Soit S' un S -schéma. On désigne par \mathfrak{T}_S , la fonction méromorphe relative de $X \times_S S' = \mathbb{P}_{S'}^1$, donnée par \mathfrak{T} . On vérifie que \mathfrak{T} (resp. \mathfrak{T}^{-1}) donne lieu à un générateur de $L_{(0)}$ (resp. $L_{(\infty)}$) dans l'ouvert $U_{(0)}$ (resp. $U_{(\infty)}$). On note par T (resp. T') le générateur de $I_{(0)} \subset B_{(0)}$ (resp. $I_{(\infty)} \subset B_{(\infty)}$) induit par \mathfrak{T} (resp. \mathfrak{T}^{-1}).

Posons

$$(1.3.8) \quad \begin{aligned} \mathfrak{U}_{(0)} &= \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) - D_{(0)} = \text{Spec}(B_{(0)}[I_{(0)}^{-1}]) \\ (\text{resp. } \mathfrak{U}_{(\infty)} &= \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) - D_{(\infty)} = \text{Spec}(B_{(\infty)}[I_{(\infty)}^{-1}])). \end{aligned}$$

Soit

$$\varphi_T^1 \in {}^{(0)}\mathfrak{J}(\mathfrak{U}_{(0)}) \quad (\text{resp. } \varphi_{T'}^1 \in {}^{(\infty)}\mathfrak{J}(\mathfrak{U}_{(\infty)})).$$

la section définie comme dans (0.31), (iii), à partir du générateur T (resp. T')

de $I_{(0)}$ (resp. $I_{(\infty)}$), c.à.d. φ_T^1 (resp. $\varphi_{T'}^1$) est donné par la section

$$\begin{aligned} T \otimes 1(1 \otimes T - T \otimes 1)^{-1} &\in B_{(0)} \widehat{\otimes}_A B_{(0)} [I_{(0)}^{-1}] \\ \left(\text{resp. } T' \otimes 1(1 \otimes T' - T' \otimes 1)^{-1} &\in B_{(\infty)} \widehat{\otimes}_A B_{(\infty)} [I_{(\infty)}^{-1}] \right). \end{aligned}$$

Soit $X_U = X \times_S U$. Notons par t la section de \mathcal{O}_{X_U} donnée par l'image inverse par $X \times_S U \rightarrow U$ de la restriction de \mathfrak{T} à $U \subset U_{(0)}$ (= domaine de définition de \mathfrak{T}). On définit une fonction méromorphe relative de X_U en posant

$$m_{(0)} = \mathfrak{T}_U(t - \mathfrak{T}_U)^{-1}.$$

REMARQUE 1.3.9. *On a un morphisme évident*

$$\text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)} \times_S \mathfrak{U}_{(0)}) \rightarrow U_{(0)} \times_S U.$$

L'image $m'_{(0)}$ de $m_{(0)}$ dans

$$\Gamma(\text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)} \times_S \mathfrak{U}_{(0)}), \mathcal{O}_{\text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)} \times_S \mathfrak{U}_{(0)})})$$

donne lieu par restriction à

$$\text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)} \times_S \mathfrak{U}_{(0)}) - D_{(0)} \times_S \mathfrak{U}_{(0)}$$

à une section m''_0 qui est en fait une unité. On a ainsi une section de $\underline{\mathbb{G}}_m(\mathfrak{U}_{(0)})$ au-dessus de $\mathfrak{U}_{(0)}$, et l'on vérifie qu'elle coïncide avec φ_T^1 .

Soit $L_{A'} \subset \mathcal{O}_{X_U}$ l'idéal de définition dans X_U du sous-schéma $A \cap (X \times U)$. Soit $\text{pr}_1 : X \times_S U \rightarrow X$ la première projection. La fonction méromorphe relative $m_{(0)}$ donne lieu à un isomorphisme

$$(1.3.10) \quad L_{A'} \simeq \text{pr}_1^*(L_{(0)})$$

que l'on désigne toujours par $m_{(0)}$.

Soient S' un S -schéma, et $\underline{n} \in \Gamma(S', \underline{\mathbb{Z}}_{S'})$. On désigne par

$$\text{div}_{(0)}(\mathfrak{T}_{S'}^{\underline{n}}) \quad (\text{resp. } \text{div}_{(\infty)}(\mathfrak{T}_{S'}^{\underline{n}}))$$

la section de ${}^{(0)}J \subset \underline{\mathbb{G}}_{\text{m}S}(\mathfrak{U}_{(0)})$ (resp. ${}^{(\infty)}J \subset \underline{\mathbb{G}}_{\text{m}S}(\mathfrak{U}_{(\infty)})$) au-dessus de S' donnée par la restriction de la fonction méromorphe relative $\mathfrak{T}_{S'}^{\underline{n}}$ à

$$\begin{aligned} (\mathfrak{U}_{(0)})_{\{S'\}} &= \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)} \times_X S') - D_{(0)} \times_S S' \\ \left(\text{resp. } (\mathfrak{U}_{(\infty)})_{\{S'\}} &= \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)} \times_X S') - D_{(\infty)} \times_S S' \right). \end{aligned}$$

Remarquer que si l'on désigne par

$$\varepsilon_{(0)} : {}^{(0)}\mathfrak{J} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \quad (\text{resp. } \varepsilon_{(\infty)} : {}^{(\infty)}\mathfrak{J} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S)$$

le S -homomorphisme d'augmentation défini comme dans (0.9), on a alors

$$\varepsilon_{(0)}(\text{div}_{(0)}(\mathfrak{T}_{S'}^n)) = \underline{n} \quad (\text{resp. } \varepsilon_{(\infty)}(\text{div}_{(\infty)}(\mathfrak{T}_{S'}^n) = -\underline{n}).$$

On définit un S -homomorphisme :

$$(1.3.11) \quad \underline{\mathbb{Z}}_S \longrightarrow {}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\mathfrak{J}$$

en faisant correspondre à une section $\underline{n} \in \Gamma(S', \underline{\mathbb{Z}}_{S'})$ la section $(\text{div}_{(0)}(\mathfrak{T}_{S'}^n), \text{div}_{(\infty)}(\mathfrak{T}_{S'}^n))$ de ${}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\mathfrak{J}$ au-dessus de S' . Soit

$$\text{Div. princ}_D(X) \subset {}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\mathfrak{J}.$$

le S -sous-groupe engendré par l'image de (1.3.11) et par celle du morphisme diagonal

$$\underline{\mathbb{G}} \longrightarrow {}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\mathfrak{J}.$$

(Les composantes de ce dernier sont respectivement les S -homomorphismes

$$\underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}(\mathfrak{X}_{(0)}) = {}^{(0)}\mathfrak{J} \text{ et } \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) = {}^{(\infty)}\mathfrak{J}$$

induits respectivement par $\mathfrak{X}_{(0)} \longrightarrow S$ et $\mathfrak{X}_{(\infty)} \longrightarrow S$).

On pose

$$(1.3.12) \quad {}^{(0)}\wedge^0 = \text{Ker}({}^{(0)}\mathfrak{J}^0 \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}) \\ (\text{resp. } {}^{(\infty)}\wedge^0 = \text{Ker}({}^{(\infty)}\mathfrak{J}^0 \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}))$$

et

$$(1.3.13) \quad {}^{(0)}\wedge = {}^{(0)}\mathfrak{J} / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}} \quad (\text{resp. } {}^{(\infty)}\wedge^0 = {}^{(\infty)}\mathfrak{J} / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}})$$

A partir d'un scindage de $\varepsilon_{(0)}$ (resp. $\varepsilon_{(\infty)}$) on construit un S -isomorphisme

$${}^{(0)}\wedge \simeq {}^{(0)}\wedge^0 \times \underline{\mathbb{Z}}_S \quad (\text{resp. } {}^{(\infty)}\wedge \simeq {}^{(\infty)}\wedge^0 \times \underline{\mathbb{Z}}_S).$$

LEMME 1.3.14. *Avec les notations ci-dessus on a une décomposition en produit direct*

$${}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\mathfrak{J} \simeq \text{Div. princ}_D(X) \times ({}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\wedge^0).$$

PREUVE. Soit $u = (u_{(0)}, u_{(\infty)})$ une section de ${}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\mathfrak{J}$ au-dessus de S' . Posons

$$u'_{(\infty)} u''_{(\infty)} = u_{(\infty)} \operatorname{div}_{(\infty)}(\mathfrak{T}_{S'})^{e_{(\infty)}(U_{(\infty)})}$$

avec $u'_{(\infty)} \in \Gamma(S', \underline{\mathbb{G}}_{mS})$, et $u''_{(\infty)} \in \Gamma(S', {}^{(\infty)}\wedge^0)$.

Soit $v = (v_{(0)}, v_{(\infty)})$ défini par :

$$v_{(0)} = u'_{(\infty)} \operatorname{div}_{(0)}(\mathfrak{T}_{S'})^{-e_{(\infty)}(u_{(\infty)})}$$

et

$$v_{(\infty)} = u'_{(\infty)} \operatorname{div}_{(\infty)}(\mathfrak{T}_{S'})^{-e_{(\infty)}(u_{(\infty)})}.$$

Il est clair que l'on a $v \in \Gamma(S', \operatorname{Div. princ}_D(X))$ et que $uv^{-1} \in \Gamma(S', {}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\wedge^0)$. On peut alors écrire

$$u = v(uv^{-1}).$$

On vérifie que l'on définit ainsi une décomposition en produit direct de ${}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\mathfrak{J}$. C.Q.F.D.

Notons par $\underline{1}_0$ (resp. $\underline{1}_\infty$) la trivialisaton du complété formel

$$(L_{\mathcal{A}})_0^\wedge \quad (\text{resp. } (L_{\mathcal{A}})_\infty^\wedge)$$

de $L_{\mathcal{A}}$ le long de $D_{(0)} \times_S U$ (resp. $D_{(\infty)} \times_S U$) donnée par

$$\begin{aligned} \underline{1} &\in \Gamma(\mathfrak{X}_{(0)} \times_S U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{(0)} \times_S U}) = \Gamma(\mathfrak{X}_{(0)} \times_S U, (L_{\mathcal{A}})_0^\wedge) \\ (\text{resp. } \underline{1} &\in \Gamma(\mathfrak{X}_{(\infty)} \times_S U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{(\infty)} \times_S U}) = \Gamma(\mathfrak{X}_{(\infty)} \times_S U, (L_{\mathcal{A}})_\infty^\wedge)). \end{aligned}$$

Le couple $(\underline{1}_0, \underline{1}_\infty)$ correspond à une trivialisaton du complété formel $(L_{\mathcal{A}})_0^\wedge$ de $L_{\mathcal{A}}$ le long de $D_U = D \times_S U$. On a alors que la classe d'isomorphisme de $(L_{\mathcal{A}}, (\underline{1}_0, \underline{1}_\infty))$ donne lieu à une section de J au-dessus de $U = \mathbb{P}_S^1 - D$, qui coïncide avec Φ . En vertu de l'isomorphisme (1.3.10) on a alors que la section de J correspondante au couple

$$(\operatorname{pr}_1^*(L_{(0)}), (m_{(0)}(\underline{1}_0), m_{(0)}(\underline{1}_\infty)))$$

est égale à Φ . On vérifie que

$$\begin{aligned} (1.3.15) \quad m_{(0)}(\underline{1}_0) &= T(t - T)^{-1} \in {}^{(0)}\mathfrak{J}(U) \\ (\text{resp. } m_{(0)}(\underline{1}_\infty) &= (T't - 1)^{-1} \in {}^{(\infty)}\mathfrak{J}^0(U)). \end{aligned}$$

REMARQUE 1.3.16. Par (1.3.9) on a que la restriction de $m_{(0)}(\underline{1}_0)$ à $\text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)} \times_S \mathfrak{U}_{(0)}) - D_0 \times_S \mathfrak{U}_{(0)}$ coïncide avec la section ϕ_T^1 de $(^{(0)}\mathfrak{J}^1$ au-dessus de $\mathfrak{U}_{(0)}$. Ce dernier s'identifiant au $(^{(0)}\mathfrak{J}^0$ -torseur des trivialisations de $L_{(0)}$.

Il est clair que $\text{Div. princ}_D(X)$ est contenu dans le noyau de (1.3.7). On a alors à partir de (1.2.4) et de (1.3.7) un diagramme commutatif aux lignes exactes.

$$(1.3.17) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & (^{(0)}\mathfrak{J}^0 \times (^{(\infty)}\mathfrak{J}^0 / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}})) & \longrightarrow & (^{(0)}\mathfrak{J} \times (^{(\infty)}\mathfrak{J} / \text{Div. princ}_D(X))) & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}}_S \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & (^{(0)}\mathfrak{J}^0 \times (^{(\infty)}\mathfrak{J}^0 / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}})) & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}}_S \longrightarrow 0 \end{array}$$

D'où on a le

LEMME 1.3.18. Le S -homomorphisme (1.3.7) induit, par passage au quotient un S -isomorphisme

$$(^{(0)}\mathfrak{J} \times (^{(\infty)}\mathfrak{J} / \text{Div. princ}_D(X))) \simeq J,$$

et à fortiori un S -isomorphisme

$$(^{(0)}\mathfrak{J} \times (^{(\infty)}\mathfrak{J}^0 / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}})) \simeq J.$$

D'autre part on vérifie que la $(^{(0)}\mathfrak{J} \times (^{(\infty)}\mathfrak{J}^0 / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}))$ -composante de $(m_{(0)}(\underline{1}_0), m_{(0)}(\underline{1}_{\infty}))$ donnée par la décomposition en produit direct (1.3.14) est égale à

$$(-T(t - T)^{-1}, (1 - tT')^{-1}).$$

En résumé on a la

PROPOSITION 1.3.19. Le S -homomorphisme (1.3.7) induit un isomorphisme $(^{(0)}\mathfrak{J} \times (^{(\infty)}\mathfrak{J}^0 / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}})) \simeq J$, faisant correspondre à la section

$$(-T(t - T)^{-1}, (1 - tT')^{-1}) \in (^{(0)}\mathfrak{J} \times (^{(\infty)}\mathfrak{J}^0 / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}))(U)$$

la section $\Phi \in J(U)$.

Le choix d'un générateur T de $I_{(0)}$ (resp. T' de $I_{(\infty)}$) donne lieu à un isomorphisme

$$(^{(0)}\wedge = (^{(0)}\mathfrak{J} / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}) \simeq (^{(0)}\wedge^0 \times \underline{\mathbb{Z}}_S \text{ (resp. } (^{(\infty)}\wedge = (^{(\infty)}\mathfrak{J} / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mS}}) \simeq (^{(\infty)}\wedge^0 \times \underline{\mathbb{Z}}_S)).$$

On a alors la

PROPOSITION 1.3.20. *Le S -homomorphisme (1.3.7) induit un isomorphisme*

$${}^{(0)}\wedge^0 \times \underline{\mathbb{Z}}_S \simeq {}^{(0)}\wedge \simeq J_{(0)} \quad (\text{resp.} \quad {}^{(\infty)}\wedge^0 \times \underline{\mathbb{Z}}_S \simeq {}^{(\infty)}\wedge \simeq J_{(0)})$$

tel que la section $(T(1 - t^{-1}T)^{-1} \in {}^{(0)}\wedge(U)$ (resp. $(T'(1 - t^{-1}T')^{-1} \in {}^{(\infty)}\wedge^0(U))$ correspond à $\Phi_{(0)}$ (resp. $\Phi_{(\infty)}$).

L'inclusion $U \longrightarrow U_{(0)}$ (resp. $U \longrightarrow U_{(\infty)}$) donne lieu à un S -homomorphisme

$$(1.3.21) \quad p_{(\infty)} : J \longrightarrow J_{(\infty)} \quad (\text{resp.} \quad p_{(0)} : J \longrightarrow J_{(0)}),$$

tel que si l'on note par $\Phi'_{(\infty)}$ (resp. $\Phi'_{(0)}$) la restriction de $\Phi_{(\infty)}$ (resp. $\Phi_{(0)}$) à $U \subset U_{(0)}$ (resp. $U \subset U_{(\infty)}$) on a

$$(1.3.22) \quad \Phi'_{(\infty)} = p_{(\infty)} \circ \Phi \quad (\text{resp.} \quad \Phi'_{(0)} = p_{(0)} \circ \Phi).$$

Avec les identifications de (1.3.19) et de (1.3.20) on vérifie que $p_{(\infty)}$ correspond à la projection canonique

$$(1.3.23) \quad {}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\wedge^0 \simeq \underline{\mathbb{Z}}_S \times {}^{(0)}\mathfrak{J}^{(0)} \times {}^{(\infty)}\wedge^0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \times {}^{(\infty)}\wedge^0,$$

et $p_{(0)}$ à la projection canonique

$$(1.3.24) \quad {}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\wedge^0 (\simeq \underline{\mathbb{G}}_{mS} \times {}^{(0)}\wedge \times {}^{(\infty)}\wedge^0) \longrightarrow {}^{(0)}\wedge.$$

NOTATION 1.3.25. *Notons par $\phi_{\mathfrak{T}}^1$ (resp. $\phi_{\mathfrak{T}}^0$) la section de ${}^{(0)}\mathfrak{J}$ (resp. ${}^{(0)}\mathfrak{J}^0$) au-dessus de U donnée par la restriction de la fonction méromorphe relative $m_{(0)}^1 = \mathfrak{T}_U(t - \mathfrak{T}_U)^{-1}$ (resp. $m_{(0)}^0 = (t - \mathfrak{T}_U)^{-1}$) à*

$$(\mathfrak{U}_{(0)})_{\{U\}} = \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)} \times_S U) - D_{(0)} \times_S U.$$

(Cette restriction donne lieu à une section de $\underline{\mathbb{G}}_{mS}(\mathfrak{U}_{(0)})$ au-dessus de U qui appartient en fait à ${}^{(0)}\mathfrak{J}(U)$.)

La propriété universelle de (J, Φ) entraîne l'existence d'un S -homomorphisme unique

$$(1.3.26) \quad q_{(0)} : J \longrightarrow {}^{(0)}\mathfrak{J}$$

vérifiant :

$$(1.3.27) \quad \phi_{\mathfrak{T}}^1 = q_{(0)} \circ \Phi.$$

REMARQUE 1.3.28. (i) - Compte tenu de (1.3.19) on voit que $q_{(0)}$ est le S -homomorphisme ${}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\wedge^0 \longrightarrow {}^{(0)}\mathfrak{J}$ obtenu par composition de la projection canonique

$${}^{(0)}\mathfrak{J} \times {}^{(\infty)}\wedge^0 \longrightarrow {}^{(0)}\mathfrak{J}$$

avec l'automorphisme β de ${}^{(0)}\mathfrak{J}$ faisant correspondre à la section T_u^n de ${}^{(0)}\mathfrak{J}$ la section $T^n(-1)^n u$.

(ii) - Soit G un S -groupe. Soit $\alpha \in G(\mathfrak{U}_{(0)})$ tel qu'il existe un S -homomorphisme

$$f : {}^{(0)}\mathfrak{J} \longrightarrow G \quad (\text{resp. } f : {}^{(0)}\mathfrak{J}^0 \longrightarrow G)$$

vérifiant $\alpha = f \circ \phi_T^1$ (resp. $\alpha = f \circ \phi_T^0$). On a alors une extension $\bar{\alpha}$ de $\alpha : \mathfrak{U}_{(0)} \longrightarrow G$ à U en posant

$$\bar{\alpha} = f \circ \phi_{\mathfrak{T}}^1 \quad (\text{resp. } \bar{\alpha} = f \circ \phi_{\mathfrak{T}}^0) \quad (\text{cf. (1.3.9)}).$$

Soit $q_{(0)}^0 : J^0 \longrightarrow {}^{(0)}\mathfrak{J}^0$ le composé de $q_{(0)}$ avec la projection canonique ${}^{(0)}\mathfrak{J} = \mathbb{Z} \times {}^{(0)}\mathfrak{J}^0 \longrightarrow {}^{(0)}\mathfrak{J}^0$. Compte tenu de (1.3.27) on trouve

$$\bar{\alpha} = (f \circ q_{(0)}) \circ \Phi \quad (\text{resp. } \bar{\alpha} = (f \circ q_{(0)}^0) \circ \Phi).$$

PROPOSITION 1.3.29. Soit A un anneau. On pose $S = \text{Spec}(A)$. Soit G un S -schéma en groupes lisse et séparé. Soit $h \in \text{Hom}_{S\text{-gr}}({}^{(0)}\mathfrak{J}, G)$. Posons $\psi = h \circ \phi_{\mathfrak{T}}^1 \in {}^{(0)}\mathfrak{J}(U)$. On suppose que ψ admet un prolongement $\bar{\psi}$ à $\mathbb{P}_S^1 - D_{(\infty)}$.

Alors le morphisme ψ est constant, c.à.d. il existe une section $\sigma : S \longrightarrow G$ au-dessus de S tel que ψ s'obtient par composition de $\mathbb{P}_S^1 \longrightarrow S$ avec σ .

PREUVE. Le morphisme ψ admet la factorisation suivante

$$\psi = h \circ (q_{(0)} \circ \Phi) \quad (\text{cf. (1.3.27)}).$$

Puisque ψ se prolonge à $\mathbb{P}_S^1 - D_{(\infty)}$ on peut trouver $h' \in \text{Hom}_{S\text{-gr}}(J_{(\infty)}, G)$ tel que

$$\psi = (h' \circ p_{(\infty)}) \circ \Phi \quad (\text{cf. (1.3.22)}).$$

(En fait on a $\bar{\psi} = h' \circ \Phi_{(\infty)}$). L'unicité de la factorisation de la section ψ de G au-dessus de U donne l'égalité

$$h' \circ p_{(\infty)} = h \circ q_{(0)}.$$

Posons $g = h' \circ p_{(\infty)} = h \circ q_{(0)}$. D'autre par d'après (1.3.22) on a que ${}^{(0)}\mathfrak{J}^0 \subset \text{Ker } p_{(\infty)}$, et d'après (1.3.28) (i), on a ${}^{(\infty)}\wedge^0 \subset \text{Ker } q_{(0)}$. D'où il

résulte que

$${}^{(0)}\mathfrak{J}^0 \times {}^{(\infty)}\wedge^0 \subset \text{Ker}(g).$$

Puisque d'après (1.3.19) la section Φ correspond par l'isomorphisme ${}^{(0)}\mathfrak{J}^0 \times \underline{\mathbb{Z}}_S \times {}^{(\infty)}\wedge^0 \simeq J$ à la section

$$\left(-T(t - T)^{-1}, (1 - tT')^{-1} \right),$$

on a que la $\underline{\mathbb{Z}}_S$ -composante de Φ est égale à T . Il en résulte que $\psi = g \circ \Phi$ admet un prolongement $\bar{\psi}$ à \mathbb{P}_S^1 . Donc $\bar{\psi}$ est constant, c.à.d. il existe une section σ de G au-dessus de S tel que $\bar{\psi}$ correspond à l'image inverse de σ par $\mathbb{P}_S^1 \rightarrow S$. C.Q.F.D.

(1.4) On reprend dans ce numéro les notations de § 0.

Soit G un S -groupe. On pose

$$(1.4.1) \quad G(\mathfrak{X})^+ = \text{Ker}(G(\text{omb}(\mathfrak{X})) \rightarrow G(S)),$$

et

$$(1.4.2) \quad F(G) = G(\mathfrak{U})/G(\text{omb}(\mathfrak{X})) \quad (\text{resp. } F^+(G) = G(\mathfrak{U})/G(\mathfrak{X})^+).$$

Soient φ^0 et φ^1 comme dans (0.32). On a alors par composition avec φ^0 (resp. φ^1) un homomorphisme de groupes

$$(1.4.3) \quad \rho : \text{Hom}_{S-\text{gr}}(\mathfrak{J}^0, G) \rightarrow F(G) \quad (\text{resp. } \rho^+ : \text{Hom}_{S-\text{gr}}(\mathfrak{J}, G) \rightarrow F^+(G)).$$

Le couple $(\mathfrak{J}^0, \varphi^0)$ (resp. $(\mathfrak{J}, \varphi^1)$) vérifie la propriété universelle suivante

THÉORÈME 1.4.4. *On reprend les notations ci-dessus. Soit A un anneau noethérien et posons $S = \text{Spec}(A)$. Soit G un S -schéma en groupes commutatif, lisse et séparé. On a alors ρ et ρ^+ sont des isomorphismes.*

La preuve de ce théorème est donnée dans les paragraphes § 2, § 3, § 4 et § 5. Commençons par démontrer la

PROPOSITION 1.4.5. *Soit A un anneau. On pose $S = \text{Spec}(A)$. Soit G un S -schéma en groupes comme dans (1.4.4). Alors les homomorphismes ρ et ρ^+ sont injectifs.*

PREUVE. Reprenons ici les notations de (1.3). Sans perte de généralité on peut supposer que $B = B_{(0)}$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{(0)}$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{(0)}$, $\mathfrak{J}^0 = {}^{(0)}\mathfrak{J}^0$ et $\mathfrak{J} = {}^{(0)}\mathfrak{J}$, et que ρ^+ (resp. ρ) est obtenu par composition avec φ_T^1 (resp. φ_T^0). Pour

montrer que ρ^+ (resp. ρ) est injectif il suffit donc de voir que quel que soit $h \in \text{Hom}_{S\text{-gr}}({}^{(0)}\mathfrak{J}, G)$ (resp. $h \in \text{Hom}_{S\text{-gr}}({}^{(0)}\mathfrak{J}^0, G)$) tel que la section $h \circ \phi_T^1$ de G au-dessus de $\mathfrak{U}_{(0)}$ admet un prolongement à $G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$, et en plus appartient à l'image de

$$\text{Ker}(G(\text{omb}(\mathfrak{X})) \longrightarrow G(S))$$

on a $h = 0$ (resp. tel que la section $h \circ \phi_T^0$ de G au-dessus de $\mathfrak{U}_{(0)}$ admet un prolongement à $G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ alors $h = 0$). Voyons que ρ^+ est injectif. Montrons que pour cela il suffit de prouver que $\psi = h \circ \phi_{\mathfrak{E}}^1$ admet un prolongement $\bar{\psi}$ à $\mathbb{P}_S^1 - D_{(\infty)}$. On reprend ici les notations de la preuve de (1.3.29). On peut écrire $\psi = g \circ \Phi$ avec $g : J \longrightarrow G$ qui se factorise par $J \longrightarrow \underline{Z}_S$. Le prolongement $\bar{\psi}$ de ψ à \mathbb{P}_S^1 s'obtient alors comme le composé de $\mathbb{P}_S^1 \longrightarrow S$, de $S \longrightarrow \underline{Z}_S$ donné par $\underline{1}$, et du homomorphisme $\underline{Z}_S \longrightarrow G$ induit par g . L'hypothèse $h \circ \phi_T^1 \in \text{Ker}(G(\text{omb}(\mathfrak{X})) \longrightarrow G(S))$ entraîne que la restriction de $\bar{\psi}$ à $D_{(0)}$ est donnée par la section élément neutre de G , d'où que $g = 0$ et a fortiori que $h = 0$ vu (1.3.28)(i).

Prouvons que ψ admet un prolongement $\bar{\psi}$ à $\mathbb{P}_S^1 - D_{(\infty)}$. Supposons d'abord que A est noethérien. Dans ce cas on a le morphisme fpqc suivant

$$\text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) \coprod U \longrightarrow \mathbb{P}_S^1 - D_{(\infty)}.$$

Comme la restriction de ψ à $\mathfrak{U}_{(0)}$ est égale à $h \circ \phi_T^1$, et par hypothèse la section $h \circ \phi_T^1$ de G au-dessus de $\mathfrak{U}_{(0)}$ admet un prolongement à $\text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)})$, il en résulte que ψ admet un prolongement $\bar{\psi}$ à $\mathbb{P}_S^1 - D_{(\infty)}$.

Soit A un anneau quelconque. Pour tout $x \in \text{Spec}(A)$ soit $h_{K(x)}$ la fibre en $\text{Spec}(K(x))$ de h , où $K(x)$ désigne le corps résiduel de A en x . L'hypothèse entraîne que $h_{K(x)} \circ \phi_T^1 \in G((\mathfrak{U}_{(0)})_{\{K(x)\}})$ appartient à $\text{Ker}(G(\text{omb}(\mathfrak{X}_{K(x)})) \longrightarrow G(K(x)))$. Le cas noethérien appliqué pour $A = K(x)$ entraîne que $h_{K(x)}$ est le morphisme 0, donc que l'image (ensembliste) de h est la section unité de G . Ainsi quitte à localiser $\text{Spec}(A)$ on peut supposer que h se factorise par un ouvert affine $W \subset G$ voisinage de la section unité. L'hypothèse $h \circ \phi_T^1 \in G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ jointe au fait que $A[[T]] \cap A[T, T^{-1}] = A[T]$ implique qu'il existe un prolongement $\bar{\psi}$ à $\mathbb{P}^1 - D_{(\infty)}$ de ψ . Ce qui achève la preuve de la proposition. C.Q.F.D.

Soit $S' = \text{Spec}(A') \longrightarrow S$ un S -schéma affine.

Soient

$$\rho' : \text{Hom}_{S'\text{-gr}}(\mathfrak{J}_{S'}^0, G_{S'}) \longrightarrow F(G_{S'})$$

et

$$(\rho^+)' : \text{Hom}_{S'\text{-gr}}(\mathfrak{J}_{S'}, G_{S'}) \longrightarrow F^+(G_{S'})$$

définis comme dans (1.4.3).

L'injectivité de ρ et ρ^+ entraîne par descente fidèlement plate la proposition suivante.

PROPOSITION 1.4.6. *On reprend les notations ci-dessus et on suppose que $S' = \text{Spec}(A')$ est un S -schéma fidèlement plat. Soit G un S -schéma en groupes commutatifs, lisse et séparé. On a alors que si ρ' et $(\rho^+)'$ sont des isomorphismes de groupes ρ et ρ^+ le sont aussi.*

(1.5) Dans ce numéro on suppose que S est noethérien. Les constructions suivantes ont pour but d'associer au S -groupe \check{W} un S -foncteur $\text{omb}(\check{W})$, qui s'obtient comme la limite inductive d'un ind-objet de $\text{Sch}|_S$ si S est affine, et en général comme la limite inductive d'un système inductif de S -espaces localement annelés, et au S -groupe \mathfrak{S} un S -foncteur $\mathfrak{S}_{\text{omb}}$ qui est un \mathfrak{S} -torseur de Zariski au-dessus de $\text{omb}(\check{W})$. Pour effectuer ces constructions on supposera que S est affine bien qu'elles gardent un sens en général.

On met à profit que \check{W} est isomorphe à la limite inductive $\varinjlim W_n$ (cf. (0.44)) pour définir $\text{omb}(\check{W})$. Noter que si S est un schéma noethérien (resp. noethérien affine) alors W_n est un S -schéma formel noethérien (resp. noethérien affine). Soit $\text{omb}(W_n)$ l'espace localement annelé au-dessus de S qui lui correspond par (0.53). Si S est affine $\text{omb}(W_n)$ est un S -schéma affine. Pour tout couple d'entiers $0 < m \leq n$ on note par

$$(1.5.1) \quad i_{mn} : \text{omb}(W_m) \longrightarrow \text{omb}(W_n)$$

le morphisme donné par $W_m \longrightarrow W_n$ (cf. (0.42)). Soit $\text{omb}(\check{W})$ le S -faisceau de Zariski défini par le S -foncteur

$$(1.5.2) \quad T \longrightarrow \varinjlim \text{Hom}_S(T, \text{omb}(W_n)),$$

c'est-à-dire $\text{omb}(\check{W})$ est alors la limite inductive du système inductif $(\text{omb}(W_n), (i_{mn}))$. Pour tout entier $n > 0$ on a un S -morphisme d'immersion

$$(1.5.3) \quad i_{W_n} : W_n \longrightarrow \text{omb}(\check{W}).$$

Soit

$$(1.5.4) \quad i_{\check{W}} : \check{W} = \varinjlim W_n \longrightarrow \text{omb}(\check{W})$$

le S -morphisme défini par (i_{W_n}) .

LEMME 1.5.5. (i) Soit Z un S -schéma de présentation finie séparé. Soit

$$h = (h_n)_{n \geq 0} : \check{W} = \varinjlim_n \check{W}_n \longrightarrow Z$$

un S -morphisme, c'est-à-dire un morphisme de S -schémas formels quand on regarde Z comme un S -schéma formel. Il existe alors un unique S -morphisme

$$\text{omb}(h) : \text{omb}(\check{W}) \longrightarrow Z$$

tel que $h = \text{omb}(h) \circ i_{\check{W}}$.

(ii) Soient \mathfrak{Y} un S -schéma formel noethérien et $k : \mathfrak{Y} \longrightarrow \check{W}$ un S -morphisme qui se factorise à travers $i_{W_n} : W_n \longrightarrow \check{W}$ pour n convenable.

Alors il existe un unique morphisme $\text{omb}(k) : \text{omb}(\mathfrak{Y}) \longrightarrow \text{omb}(\check{W})$ tel que $\mathfrak{Y} \longrightarrow \text{omb}(\mathfrak{Y}) \longrightarrow \text{omb}(\check{W})$ soit égal au composé $k \circ i_{\check{W}}$.

REMARQUE 1.5.6. La limite inductive $\varinjlim_n \text{omb}(W_n)$ existe dans la catégorie $\text{Locann}|_S$ des S -espaces localement annelés et on la note par $\text{Omb}(\check{W})$. Soit h_X le S -foncteur défini par un espace localement annelé X . $\text{Omb}(\check{W})$ vérifie la propriété universelle suivante : il existe une bijection

$$\text{Hom}_S(\text{omb}(\check{W}), h_X) \simeq \text{Hom}_{\text{Locann}|_S}(\text{Omb}(\check{W}), X).$$

LEMME 1.5.7. Soit G un S -schéma en groupes séparé de type fini. Soit \mathfrak{Z} un S -schéma formel noethérien. Soit τ un G -torseur trivialisable au-dessus de \mathfrak{Z} . Il existe alors un G -torseur τ_{omb} sur $\text{omb}(\mathfrak{Z})$ et un morphisme de G -torseurs $j_\tau : \tau \longrightarrow \tau_{\text{omb}}$ au-dessus de $i_{\mathfrak{Z}} : \mathfrak{Z} \longrightarrow \text{omb}(\mathfrak{Z})$ tel que :

(i) Pour tout diagramme commutatif de S -foncteurs

$$\begin{array}{ccc} & & \tau \\ & \nearrow \sigma & \downarrow \\ \mathfrak{Y} & \longrightarrow & \mathfrak{Z} \end{array}$$

où \mathfrak{Y} désigne un S -schéma formel affine noethérien, on a un unique diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \tau_{\text{omb}} \\ & \nearrow \bar{\sigma} & \downarrow \\ \text{omb}(\mathfrak{Y}) & \longrightarrow & \text{omb}(\mathfrak{Z}) \end{array}$$

tel que

$$j_\tau \circ \sigma = \bar{\sigma} \circ i_{\mathfrak{Y}}.$$

En particulier on a une bijection

$$\Gamma(\mathfrak{Z}, \tau) \simeq \Gamma(\text{omb}(\mathfrak{Z}), \tau_{\text{omb}}).$$

(ii) Le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} j_\tau : & \tau & \longrightarrow \tau_{\text{omb}} \\ & \downarrow & \downarrow \\ i_{\mathfrak{Z}} : & \mathfrak{Z} & \longrightarrow \text{omb}(\mathfrak{Z}), \end{array}$$

c.à.d. on récupère τ comme le complété formel de τ_{omb} le long du sous-schéma fermé de $\text{omb}(\mathfrak{Z})$ donné par \mathfrak{Z} .

PREUVE. Étant données deux sections σ et σ' de τ au-dessus de \mathfrak{Z} , soit $d(\sigma, \sigma') \in G(\mathfrak{Z})$ défini par :

$$d(\sigma, \sigma')\sigma' = \sigma.$$

Soit $(G \times_S \mathfrak{Z}, (d(\sigma, \sigma')))$ le système inductif de G -torseurs au-dessus de \mathfrak{Z} , qui associe $G \times_S \mathfrak{Z}$ à σ , et dont les morphismes de transition correspondent à la multiplication par $d(\sigma, \sigma')$. Il est clair que l'on a un isomorphisme canonique de G -torseur au-dessus de \mathfrak{Z}

$$\tau \simeq \varinjlim_{\sigma} G \times_S \mathfrak{Z} \quad (\sigma \in \Gamma(\mathfrak{Z}, \tau)).$$

On définit

$$\tau_{\text{omb}} \simeq \varinjlim_{\sigma} G \times_S \text{omb}(\mathfrak{Z}) \quad (\sigma \in \Gamma(\mathfrak{Z}, \tau))$$

où les morphismes de transition sont donnés par

$$(\text{omb}(d(\sigma, \sigma'))) \quad (\sigma, \sigma' \in \Gamma(\mathfrak{Z}, \tau)).$$

Les propriétés (i) et (ii) de τ_{omb} résultent facilement de sa définition.

C.Q.F.D.

Dans le cas où $B \simeq A[[T]]$ on peut appliquer la construction de (1.5.7) au \mathfrak{Z}^0 (resp. $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_n^0, \mathfrak{Z}_n$)-torseur ${}^{(m)}\mathfrak{S}^0$ (resp. ${}^{(m)}\mathfrak{S}, {}^{(m)}\mathfrak{Z}_n^0, {}^{(m)}\mathfrak{Z}_n$) (cf. (0.45)) car il est trivialisable. Avec les notations de (0.47) on pose

$$(1.5.8) \quad ({}^{(m)}\mathfrak{Z}_n^0)_{\text{omb}} = \varinjlim_{\bar{m}} \mathfrak{Z}_n^0 \times \text{omb}(W_{\bar{m}}),$$

où les morphismes de transition sont donnés par $(\text{omb}({}^{(m)}h(U, V)_n))$

(cf. (0.47)). (Noter que la donnée d'un générateur U de I entraîne un scindage, σ_U (cf. (0.46)) et

$$(1.5.9) \quad {}^{(m)}\mathfrak{S}_{\text{omb}}^0 = \varprojlim_n ({}^{(m)}\mathfrak{S}_n^0)_{\text{omb}} ,$$

où les morphisme de transition de la limite projective sont induits par ceux du système projectif (\mathfrak{S}_n^0) . Soit

$$(1.5.10) \quad {}^{(m)}\mathfrak{S}_{\text{omb}} \left(\text{resp. } ({}^{(m)}\mathfrak{S}_n)_{\text{omb}} \right)$$

le \mathfrak{S} -torseur (resp. \mathfrak{S}_n -torseur) défini à partir du \mathfrak{S}^0 -torseur (1.5.9) (resp. \mathfrak{S}_n^0 -torseur (1.5.8)) et du S -homomorphisme $\mathfrak{S}^0 \longrightarrow \mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{S}_n^0 \longrightarrow \mathfrak{S}_n$).

On a alors de manière évidente un système inductif

$$({}^{(m)}\mathfrak{S}_{\text{omb}}^0) \left(\text{resp. } ({}^{(m)}\mathfrak{S}_{\text{omb}}), \left(({}^{(m)}\mathfrak{S}_n^0)_{\text{omb}} \right), \left(({}^{(m)}\mathfrak{S}_n)_{\text{omb}} \right) \right) \quad (m > 0)$$

de \mathfrak{S}^0 (resp. \mathfrak{S} , \mathfrak{S}_n^0 , \mathfrak{S}_n)-torseurs au dessus du système inductif $(\text{omb}(W_m))$.

Notons par

$$(1.5.11) \quad \mathfrak{S}_{\text{omb}}^0 \left(\text{resp. } \mathfrak{S}_{\text{omb}}, (\mathfrak{S}_n^0)_{\text{omb}}, (\mathfrak{S}_n)_{\text{omb}} \right)$$

le S -faisceau limite inductive défini par ce système. On a ainsi un \mathfrak{S}^0 (resp. \mathfrak{S} , \mathfrak{S}_n^0 , \mathfrak{S}_n)-torseur de Zariski au-dessus de $\text{omb}(\check{W})$.

On définit

$$(1.5.12) \quad {}^{(m)}\mathfrak{S}_{\text{omb}}^v \left(\text{resp. } ({}^{(m)}\mathfrak{S}_n^v)_{\text{omb}} \right)$$

à partir de l'augmentation induite par ε (resp. ε_n) (cf. (0.26)). On définit de même $\mathfrak{S}_{\text{omb}}^v$ (resp. $(\mathfrak{S}_n^v)_{\text{omb}}$). On a alors

$$(1.5.13) \quad \mathfrak{S}_{\text{omb}}^v = \varinjlim_{\check{m}} {}^{(m)}\mathfrak{S}_{\text{omb}}^v \left(\text{resp. } (\mathfrak{S}_n^v)_{\text{omb}} = \varinjlim_{\check{m}} ({}^{(m)}\mathfrak{S}_n^v)_{\text{omb}} \right)$$

On donne une interprétation géométrique des objets ci-dessus calqués sur la construction de (1.1.18) dont on reprend les notations. Soient

$$(1.5.14) \quad {}^{(m)}L^v \left(\text{resp. } ({}^{(m)}L_n^v) \right)$$

le module inversible sur $\mathfrak{X} \times_S \text{omb}(W_m)$ (resp. $\mathfrak{X}_n \times_S \text{omb}(W_m)$) donné par $\text{Sym}^{(m)}(\mathcal{I}_A)^v$ (resp. $\text{Sym}^{(m)}(\mathcal{I}_A)_n^v$) (cf. (0.55)), et

$$(1.5.15) \quad ({}^{(m)}L^v)^* \left(\text{resp. } ({}^{(m)}L_n^v)^* \right)$$

le fibré principal associé. Le faisceau image directe

$$(1.5.16) \quad \mathrm{pr}_* \left(\left({}^{(m)}L^\vee \right)^* \right) \quad \left(\text{resp. } \mathrm{pr}_*^n \left(\left({}^{(m)}L_n^\vee \right)^* \right) \right)$$

au-dessus de $\mathrm{omb}(W_m)$ est un $\underline{\mathbb{G}}_m(\mathfrak{X})$ (resp. $\underline{\mathbb{G}}_m(\mathfrak{X}_n)$)-torseur canoniquement isomorphe à

$${}^{(m)}\mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}^\vee \quad \left(\text{resp. } \left({}^{(m)}\mathfrak{S}_n^\vee \right)_{\mathrm{omb}} \right).$$

On définit un système inductif de faisceaux inversibles

$$\left({}^{(m)}L^\vee \right) \quad \left(\text{resp. } \left({}^{(m)}L_n^\vee \right) \right)$$

au-dessus de $(\mathfrak{X} \times \mathrm{omb}(W_m))$ (resp. $(\mathfrak{X}_n \times \mathrm{omb}(W_m))$). Par passage à la limite inductive on a donc un module inversible

$$(1.5.17) \quad L^\vee \quad \left(\text{resp. } L_n^\vee \right)$$

au-dessus de $\mathfrak{X} \times \mathrm{omb}(\check{W})$ (resp. $(\mathfrak{X} \times \mathrm{omb}(\check{W}))$). On désigne par $(L^\vee)^*$ (resp. $\left({}^{(m)}L_n^\vee \right)^*$) le fibré principal associé à L^\vee (resp. L_n^\vee). L'image directe $\mathrm{pr}_* \left((L^\vee)^* \right)$ (resp. $\mathrm{pr}_*^n \left(\left({}^{(m)}L_n^\vee \right)^* \right)$) est un $\underline{\mathbb{G}}_m(\mathfrak{X})$ (resp. $\underline{\mathbb{G}}_m(\mathfrak{X}_n)$)-torseur au-dessus de $\mathrm{omb}(\check{W})$ qui est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}^\vee$ (resp. $\left(\mathfrak{S}_n^\vee \right)_{\mathrm{omb}}$). (Où $\mathrm{pr} : \mathfrak{X} \times \mathrm{omb}(\check{W})$ (resp. $\mathrm{pr}_n : \mathfrak{X}_n \times \mathrm{omb}(\check{W})$) \longrightarrow $\mathrm{omb}(\check{W})$ désigne la projection.)

Le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}}$ -module inversible

$$\mathrm{Sym}^{(1)}(\mathcal{I}_A)^1 = \mathcal{I}_A \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}}$$

donne lieu à un idéal $\mathcal{I}_A^{\mathrm{omb}}$ de $\mathrm{omb}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{X})$ (cf. (0.55)). On obtient ${}^{(1)}L^1$ (resp. ${}^{(1)}L_n^1$) comme la restriction de $\mathcal{I}_A^{\mathrm{omb}}$ à $\mathfrak{X} \times \mathrm{omb}(\mathfrak{X})$ (resp. $\mathfrak{X}_n \times \mathrm{omb}(\mathfrak{X})$).

On vérifie qu'un générateur de \mathcal{I}_A donne lieu à un générateur de $\mathcal{I}_A^{\mathrm{omb}}$ dont la restriction à $\mathfrak{X} \times \mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{X} \times \mathrm{omb}(\mathfrak{X})$ est inversible, donc

$$\underline{1} \in \Gamma(\mathfrak{X} \times \mathfrak{U}, {}^{(1)}L^1) \quad \left(\text{resp. } \underline{1} \in \Gamma(\mathfrak{X}_n \times \mathfrak{U}, {}^{(1)}L_n^1) \right).$$

La section $\underline{1}$ donne lieu alors à une section

$$f' \quad \left(\text{resp. } f'_n \right) \text{ de } \mathrm{pr}_* \left(\left({}^{(1)}L^1 \right)^* \simeq {}^{(1)}\mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}^1 \right) \quad \left(\text{resp. } \mathrm{pr}_*^n \left(\left({}^{(1)}L_n^1 \right)^* \simeq \left({}^{(1)}\mathfrak{S}_n^1 \right)_{\mathrm{omb}} \right) \right).$$

Il est clair que f'_n est égale au composé de f' avec ${}^{(1)}\mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}^1 \longrightarrow \left({}^{(1)}\mathfrak{S}_n^1 \right)_{\mathrm{omb}}$.

DÉFINITION 1.5.18. *On désigne par*

$$f : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}$$

le S -morphisme obtenu en composant f' avec ${}^{(1)}\mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}^1 \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}$, et on l'ap-

pelle le morphisme d'Abel-Jacobi donné par le couple $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S})$. On note par $f_n : \mathfrak{U} \longrightarrow (\mathfrak{S}_n)_{\text{omb}}$ le composé de f (resp. f'_n) avec $\mathfrak{S}_{\text{omb}} \longrightarrow (\mathfrak{S}_n)_{\text{omb}}$ (resp. $\binom{(1)\mathfrak{S}_n^1}{\text{omb}} \longrightarrow (\mathfrak{S}_n)_{\text{omb}}$).

On donne la description suivante du morphisme d'Abel-Jacobi f en termes du choix d'un générateur T de I . On a alors le relèvement suivant du morphisme γ^0

$$\gamma_0 : \mathfrak{X} \longrightarrow \check{W} \quad \begin{array}{c} \nearrow \gamma_T^0 \\ \downarrow \end{array} \mathfrak{S} \quad (\text{cf. (0.35), (ii)}).$$

Par définition du \mathfrak{S} -torseur $\binom{(1)\mathfrak{S}}{\text{omb}}$ on a alors un isomorphisme $\binom{(1)\mathfrak{S}}{\text{omb}} \simeq \mathfrak{X} \times \mathfrak{S}$ de \mathfrak{S} -torseurs au-dessus de \mathfrak{X} qui donne lieu à un isomorphisme de \mathfrak{S} -torseurs

$$(1.5.19) \quad \binom{(1)\mathfrak{S}_{\text{omb}}}{\text{omb}} \xrightarrow{\sim} \text{omb}(\mathfrak{X}) \times \mathfrak{S}$$

par définition de $\binom{(1)\mathfrak{S}_{\text{omb}}}{\text{omb}}$ (cf. (1.5.7)). Le morphisme d'Abel-Jacobi $f \in \Gamma(\mathfrak{U}, \binom{(1)\mathfrak{S}_{\text{omb}}}{\text{omb}})$ correspond par la bijection suivante induite par (1.5.19)

$$\Gamma(\mathfrak{U}, \binom{(1)\mathfrak{S}_{\text{omb}}}{\text{omb}}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}(\mathfrak{U})$$

à la section $-\varphi_T^1 = -T(t - T)^{-1}$. On voit donc que f se définit à l'aide du morphisme $\gamma_T^0 : \mathfrak{X} \longrightarrow \check{W}$ et du morphisme $\varphi_T^1 : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{S}$, le premier vérifie la propriété universelle donnée par (0.39) et le second celle donnée par (1.4.4). Il en résulte que $f : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\text{omb}}$ vérifie aussi une propriété universelle que l'on verra dans le prochain paragraphe.

(1.6) On désigne par G un S -schéma en groupes commutatif et lisse.

Soit G^0 la composante neutre de G . On a alors que G^0 est représentable par un ouvert de G , séparé et de présentation finie au-dessus de S ([7 bis], VI_B, 3.10 et 5.5).

Soit U un générateur de I . On lui associe alors un scindage

$$\binom{(m)}{\sigma_U} : W_m \longrightarrow \binom{(m)}{\mathfrak{S}} \quad (\text{cf. (0.47)}) \quad (\text{resp. } \sigma_U : \check{W} \longrightarrow \mathfrak{S}) \quad ,$$

du \mathfrak{S} -torseur $\binom{(m)}{\mathfrak{S}} \longrightarrow W_m$ (resp. de l'extension $1 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \check{W} \longrightarrow 1$), qui donne lieu, par définition de $\binom{(m)}{\mathfrak{S}_{\text{omb}}}$, à un scindage

$$(1.6.1) \quad \binom{(m)}{\sigma_U}_{\text{omb}} : \text{omb}(W_m) \longrightarrow \binom{(m)}{\mathfrak{S}_{\text{omb}}} \quad ,$$

d'où un scindage de $\mathfrak{S}_{\text{omb}}$ donné par le système inductif $(\binom{(m)}{\sigma_U}_{\text{omb}})$

$$(1.6.2) \quad \sigma_{U \text{ omb}} : \text{omb}(\check{W}) \longrightarrow \mathfrak{S}_{\text{omb}} \quad .$$

Soit

$$h : \mathfrak{S} \longrightarrow G$$

un S -homomorphisme. Soit $h' : \mathfrak{J} \longrightarrow G$ l'homomorphisme obtenu par restriction de h à \mathfrak{J} . D'autre part le morphisme

$$h \circ \sigma_U : \check{W} \longrightarrow G$$

se factorise par $G^0 \longrightarrow G$. On peut alors appliquer (1.5.5) et on trouve ainsi un S -morphisme $(h \circ \sigma_U)_{\text{omb}} : \text{omb}(\check{W}) \longrightarrow G$, tel qui redonne $h \circ \sigma_U$ par restriction à $\check{W} \longrightarrow \text{omb}(\check{W})$. Il existe alors un unique morphisme

$$(1.6.3) \quad h_{\text{omb}} : \mathfrak{S}_{\text{omb}} \longrightarrow G$$

qui rend commutatif le diagramme suivant

$$(1.6.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{J} \times \mathfrak{S}_{\text{omb}} & \xrightarrow{\quad} & G, \\ \downarrow & \nearrow h_{\text{omb}} & \\ \mathfrak{S}_{\text{omb}} & & \end{array}$$

où la flèche horizontale est obtenue à partir de h' , h_{omb} , et la loi de composition de G . On vérifie que h_{omb} est indépendant du choix de U . On a alors une application

$$(1.6.5) \quad \text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{S}, G) \longrightarrow G(\mathfrak{U})$$

qui fait correspondre à un S -homomorphisme $h : \mathfrak{S} \longrightarrow G$ la section $h_{\text{omb}} \circ f$ de G au-dessus de \mathfrak{U} . On peut maintenant énoncer le théorème principal de ce travail.

THÉORÈME 1.6.6. *Soit $S = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et noethérien. Soit G un S -schéma en groupes commutatif, lisse et séparé. Soient B une A -algèbre adique isomorphe à $A[[T]]$, $\mathfrak{X} = \text{Spf}(B)$, \mathfrak{U} et \mathfrak{S} définis à partir de \mathfrak{X} comme dans § 0. On a alors que pour toute section $\sigma \in G(\mathfrak{U})$ il existe un unique S -homomorphisme*

$$h : \mathfrak{S} \longrightarrow G$$

tel que $\sigma = h_{\text{omb}} \circ f$, où $f : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\text{omb}}$ désigne le morphisme d'Abel-Jacobi de $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S})$, c.à.d. la flèche (1.6.5) est bijective.

Montrons d'abord le

LEMME 1.6.7. *Sous les hypothèses de (1.6.6) on a que la flèche (1.6.5) est injective.*

PREUVE. Soient $h, g \in \text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{S}, G)$ tels que $h_{omb} \circ f = g_{omb} \circ f$, montrons que $h = g$. Soient h', g' les restrictions de h et de g à \mathfrak{S} .

Puisque le morphisme h_{omb} (resp. g_{omb}) rend commutatif le diagramme (1.6.4), on a

$$h' \circ (-\phi_T^1) \equiv g' \circ (-\phi_T^1) \pmod{G(\mathfrak{X})^+}.$$

Soit $\beta : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}$ l'automorphisme définit dans (1.3.28). On a alors $\beta(-\phi_T^1) = \phi_T^1$, d'où

$$(h' \circ \beta^{-1}) \circ \phi_T^1 \equiv (g' \circ \beta^{-1}) \circ \phi_T^1 \pmod{G(\mathfrak{X})^+}.$$

On a alors d'après (1.4.5) tel que $h' \circ \beta^{-1} = g' \circ \beta^{-1}$, d'où que $h' = g'$. Donc

$$(h \circ \gamma_T^0)'_{omb} = (g \circ \gamma_T^0)'_{omb},$$

où $(h \circ \gamma_T^0)'_{omb}$ (resp. $(g \circ \gamma_T^0)'_{omb}$) désigne la restriction de $(h \circ \gamma_T^0)_{omb}$ (resp. $(g \circ \gamma_T^0)_{omb}$) à $\mathfrak{U} \subset omb(\mathfrak{X})$. On a alors

$$(h \circ \gamma_T^0)_{omb} = (g \circ \gamma_T^0)_{omb}$$

car G^0 est séparé. On conclut que les restrictions h'' et g'' respectivement de h et g à $\sigma_T(\tilde{W})$ (cf. (0.46)) coïncident (cf. (0.39)). Il en résulte que $h = g$, car $h = h'h''$ et $g = g'g''$.

Réduction de la preuve de (1.6.6) à celle de (1.4.4).

D'après (1.6.7) il suffit de montrer que la flèche (1.6.5) est surjective.

Soit donc $\sigma \in G(\mathfrak{U})$. D'après (1.4.4) il existe un unique S -homomorphisme

$$h' : \mathfrak{S} \longrightarrow G$$

tel que $\bar{\sigma} = \sigma(h' \circ \phi_T^1)^{-1} \in G(\mathfrak{X})^+$. Notons que $\tilde{\sigma}$ la restriction de $\bar{\sigma}$ à \mathfrak{X} .

On a alors $\tilde{\sigma}_{omb} = \bar{\sigma}$ car G est séparé. D'après (0.39) on peut trouver un S -homomorphisme $h'' : \sigma_T(\tilde{W}) \longrightarrow G$ tel que $h'' \circ \gamma_T^0 = \tilde{\sigma}$, d'où

$$(h'' \circ \gamma_T^0)_{omb} = \tilde{\sigma}_{omb} = \bar{\sigma}.$$

Soit $h : \mathfrak{S} \longrightarrow G$ le S -homomorphisme tel que $h|_{\mathfrak{S}} = h'$, et $h|_{\sigma_T(\tilde{W})} = h''$. Par définition de (1.6.5) on a que $h_{omb} \circ f = \sigma$. C.Q.F.D.

(1.7) Soient $X, D, (J, \Phi), \dots$ etc. comme dans (1.2).

Supposons que S est noethérien et que D soit donné par une section de X au-dessus de S , et que le complété formel $\mathfrak{X} = \widehat{X}/_D$ de X le long de D soit isomorphe à $\mathrm{Spf}(A[[T]])$. Soient \mathfrak{S}, f (morphisme d'Abel-Jacobi de $(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}), \dots$ etc. définis à partir de \mathfrak{X} comme dans § 0. On veut expliciter les rapports qui existent entre (\mathfrak{S}, f) et (J, Φ) .

Le morphisme (1.2.8) donne lieu par passage à la limite projective à un S -homomorphisme

$$(1.7.1) \quad \mathfrak{S} \simeq \varprojlim_n \underline{\mathrm{Pic}}_{\mathfrak{X}^{(n)}/S} \longrightarrow J = \varprojlim_n \underline{\mathrm{Pic}}_{X^{(n)}/S},$$

qui donne lieu à partir de la construction de (1.6.3) à un S -homomorphisme

$$(1.7.2) \quad \mathfrak{S}_{\mathrm{omb}} \longrightarrow J,$$

que l'on se propose d'interpréter géométriquement. Soit L_A l'idéal de définition de la diagonale $A \subset X \times_S X$. Soit $\mathrm{Sym}^{(m)}(X)$ la puissance symétrique m -ème de X . Pour toute section $\underline{\nu}$ de \underline{Z}_S on définit le $\mathcal{O}_{X \times_S \mathrm{Sym}^{(m)}(X)}$ -module inversible $\mathrm{Sym}^{(m)}(L_A)^\nu$ en suivant la définition de $\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathcal{I}_A)^\nu$. Le morphisme (1.7.1) est caractérisé par le fait que, l'image du couple $(\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathcal{I}_A)^\nu, \xi)$, formé par le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X} \times_S W_m}$ -module inversible $\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathcal{I}_A)^\nu$, et d'une trivialisation ξ de $\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathcal{I}_A)$ le long de $\mathfrak{X} \times_S W_m$, est égale à la classe du couple $(\mathrm{Sym}^{(m)}(L_A)_{W_m}^\nu, \bar{\xi})$, où $\mathrm{Sym}^{(m)}(L_A)_{W_m}^\nu$ désigne la restriction de $\mathrm{Sym}^{(m)}(L_A)^\nu$ à $X \times_S W_m$, et $\bar{\xi}$ désigne la trivialisation de $\mathrm{Sym}^{(m)}(L_A)_{W_m}^\nu$ donnée par ξ .

Notons par $\mathrm{Sym}^{(m)}(L_A)_{\mathrm{omb}(W_m)}^\nu$ la restriction de $\mathrm{Sym}^{(m)}(L_A)^\nu$ à $X \times_S \mathrm{omb}(W_m)$. On a alors que (1.7.2) fait correspondre au couple $({}^{(m)}L^\nu, \xi)$ où ξ désigne une trivialisation de ${}^{(m)}L^\nu$ le long de $\mathfrak{X} \times_S \mathrm{omb}(W_m)$, la classe du couple $(\mathrm{Sym}^{(m)}(L_A)_{\mathrm{omb}(W_m)}^\nu, \bar{\xi})$, où $\bar{\xi}$ désigne la trivialisation donnée par ξ .

Par définition du morphisme d'Abel-Jacobi $f: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{omb}}$ correspond, d'après (1.5.18), le couple $(\mathcal{I}_A^{\mathrm{omb}}, \underline{1})$, où $\underline{1}$ désigne la trivialisation de $\mathcal{I}_A^{\mathrm{omb}}$ au-dessus de $\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{U}$ donnée par $\underline{1}$. On a alors par ce qui précède que l'image de f par (1.7.2) coïncide avec la classe du couple $((L_A)_{\mathfrak{U}}, \underline{1}_{\mathfrak{U}})$ que l'on note $\Phi_{\mathfrak{U}}$ dans (1.2.13). On a ainsi le

LEMME 1.7.3. *Le diagramma suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} f : \mathfrak{U} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{omb} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi : \widehat{X} - D & \longrightarrow & J \end{array} \quad (cf. (1.2.13)).$$

2. Preuve de (1.4.4) dans le cas d'un corps de base

Le (1.4.6) permet de ramener la preuve de (1.4.4) pour un corps de base k au cas où celui-ci est algébriquement clos. Dans ce numéro on désigne par k un corps algébriquement clos.

Soit G un k -schéma en groupes commutatif et lisse. On a alors une suite exacte

$$(2.1) \quad 1 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 1,$$

où G^0 est le produit d'un k -tore trivial T par un k -groupe lisse unipotent commutatif N , et A est une extension d'un k -groupe étale Γ par une k -variété abélienne A^0 (cf. [15]).

Soit $B = k[[T]]$. Soient \mathfrak{S} , \mathfrak{S}^0 , φ_T^1 , φ_T^0 ... etc construits à partir de B comme dans § 0.

Il est facile de vérifier que ρ^+ est une bijection si et seulement si ρ en est une. Montrons donc que

$$\rho : \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathfrak{S}^0, G) \xrightarrow{\sim} F(G)$$

défini par composition avec φ_T^0 , est bijective. On a le diagramme d'homomorphismes de groupes à lignes exactes :

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & G^0(\text{omb}(\mathfrak{X})) & \longrightarrow & G(\text{omb}(\mathfrak{X})) & \longrightarrow & A(\text{omb}(\mathfrak{X})) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & G^0(\mathfrak{U}) & \longrightarrow & G(\mathfrak{U}) & \longrightarrow & A(\mathfrak{U}) \end{array}.$$

Soit $g \in G(\mathfrak{U})$. L'image de \bar{g} de g dans $A(\mathfrak{U})$ provient d'une section, que l'on note aussi \bar{g} , de $A(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ par la restriction $A(\text{omb}(\mathfrak{X})) \longrightarrow A(\mathfrak{U})$, en vertu du critère valuatif de propreté. (Noter que $B^* = k[[T]][[T^{-1}]]$ est alors un corps valué, et que les composantes connexes de A sont des k -schémas propres). Puisque le G^0 -torseur G , au-dessus de A est Zariskien, il existe

un relèvement $g' \in G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ de $\bar{g} \in A(\text{omb}(\mathfrak{X}))$. (Remarquer que $\text{omb}(\mathfrak{X}) = \text{Spec}(k[[T]])$ est un k -schéma local). On a alors

$$gg'^{-1} \in G^0(\mathfrak{U}),$$

et il en résulte que

$$(2.3) \quad F(G^0) = F(G) \quad .$$

D'autre part

$$(2.4) \quad \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, A) = 0$$

car il n'y a pas de k -homomorphisme non-trivial d'un k -groupe affine connexe dans la k -variété abélienne A^0 , ni dans le k -groupe étale Γ . La suite exacte (2.1) donne alors lieu à un isomorphisme de groupes

$$(2.5) \quad \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, G^0) \simeq \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, G) \quad .$$

On est alors ramené à montrer que ϕ_T^0 induit une bijection $\text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, G^0) \simeq F(G^0)$. Noter que $F(G^0) = F(T) \times F(N)$. Il suffit alors de montrer que ρ est bijective pour $G = T$ et pour $G = N$.

Comme le corps k est algébriquement clos on a que T est un produit d'un nombre fini de copies de $\underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}$. Il suffit alors de montrer que ρ est bijective si $T = \underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}$. Compte tenu que $\mathfrak{J}^0 = \underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}} \times \wedge^0$, que \wedge^0 est un k -groupe pro-unipotent, et qu'il n'y a pas de k -homomorphisme non-trivial d'un k -groupe unipotent N dans $\underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}$ (cf. [6]), la flèche

$$(2.6) \quad \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}, \underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}) \longrightarrow \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, \underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}})$$

induite par la projection $\mathfrak{J}^0 \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}$ est bijective. On écrit

$$(2.7) \quad \phi_T^0 = t(1 - t^{-1}T),$$

avec $t \in \underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}(k[[t]][t^{-1}])$. On a alors $(1 - t^{-1}T) \in \wedge^0(k[[t]][t^{-1}])$. Soit $h \in \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}, \underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}) \simeq \mathbb{Z}$ donné par $x \longrightarrow x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. On a alors que ρ associe à h la classe de t^n dans

$$(2.8) \quad F(\underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}) = \underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}(k[[t]][t^{-1}]) / \underline{\mathbb{G}}_{\text{mk}}[[t]].$$

Or ce dernier est le groupe de la valuation de $k[[t]][t^{-1}]$, qui est isomorphe à \mathbb{Z} , et on a alors $\rho(h) = n$. Ce qui donne que ρ est bijective.

Soit G un k -groupe lisse unipotent commutatif. Il existe alors une suite de composition

$$(2.9) \quad 0 = G_n \subset \dots \subset G_1 \subset G_0 = G$$

tel que pour tout $1 \leq i \leq n-1$ le groupe G_i/G_{i+1} soit isomorphe au groupe additif $\underline{G}_{\text{ak}}$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$ (cf. [6]). On procède à montrer que ρ est bijective par récurrence sur la dimension n de G .

Montrons d'abord que

$$(2.10) \quad \rho : \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, \underline{G}_{\text{ak}}) \longrightarrow F(\underline{G}_{\text{ak}})$$

est une bijection. Notons que

$$(2.11) \quad \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, \underline{G}_{\text{ak}}) = \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\wedge^0, \underline{G}_{\text{ak}})$$

car il n'y a pas de k -homomorphisme non-trivial de $\underline{G}_{\text{mk}}$ dans $\underline{G}_{\text{ak}}$. Étant donné une section $F(T) \in \underline{G}_{\text{ak}}(k[[T]][T^{-1}])$ on lui associe un k -homomorphisme

$$(2.12) \quad h_{F(T)} : \wedge^0 \longrightarrow \underline{G}_{\text{ak}}$$

défini par

$$(2.13) \quad h_{F(T)}(u) = \text{Res}\left(F(T) \frac{du}{u}\right),$$

et $u \in \wedge^0(A)$ où A désigne une k -algèbre. On définit $\text{Res}\left(F(T) \frac{du}{u}\right)$ comme dans [16]. La fonctorialité de l'opération Res montre que $h_{F(T)}$ est un morphisme de k -groupes (cf. loc. cit.).

En vertu de (1.4.5) il suffit de prouver que ρ est surjectif. On a la formule suivante

$$(2.14) \quad \text{Res}\left(F(T) \frac{d\varphi^0}{\varphi^0}\right) \equiv -F(t) \bmod(\underline{G}_{\text{ak}}(k[[T]])),$$

En effet, pour tout entier positif m on a l'identité suivante dans $(k[[t]][t^{-1}][[T]][T^{-1}]dT$:

$$(2.15) \quad T^{-m} \frac{d(1-t^{-1}T)}{1-t^{-1}T} = - \sum_{0 \leq i} \frac{T^{-m+i}}{t^{i+1}} dT,$$

d'où il résulte que le coefficient de $\frac{dT}{T}$ est égal à $-\frac{1}{t^m}$, ce qui montre (2.14).

La suite de composition (2.9) donne pour tout $0 \leq i < n$ la suite exacte suivante

$$(2.16) \quad 1 \longrightarrow G_i/G_{i+1} \longrightarrow G/G_{i+1} \longrightarrow G/G_i \longrightarrow 1 \quad .$$

Pour achever la récurrence il suffit de voir qu'étant donné une suite exacte de k -groupe unipotents et lisses

$$(2.17) \quad 1 \longrightarrow \underline{G}_{\text{ak}} \longrightarrow G \longrightarrow G' \longrightarrow 1$$

tel que $\rho : \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\wedge^0, G') \longrightarrow F(G')$ soit une bijection, on a alors que $\rho : \text{Hom}_{k\text{-gr}}(\wedge^0, G) \longrightarrow F(G)$ est aussi une bijection.

Rappelons d'abord quelques résultats. Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On désigne par $W(k)^+$ le groupe additif des vecteurs de Witt sur k , et par $W_r(k)^+$ son r -ème tronqué, vus comme k -foncteurs en groupes. On a alors :

(a) Le k -groupe \wedge^0 est isomorphe à un produit d'une infinité de copies de $W(k)^+$, une copie pour chaque entier q premier avec p . (Si k est de caractéristique 0 alors \wedge^0 est isomorphe à un produit d'une infinité de copies de $\underline{G}_{\text{ak}}$).

Soit

$$(2.18) \quad F(t) = \prod_{(n,p)=1} (1 - t^n)^{\mu(n)/n},$$

où μ désigne la fonction de Möbius. Soit A une k -algèbre. Soient $h \in T A[[T]]$ et

$$\vec{x} = (x_0, x_1, \dots)$$

un vecteur de Witt à coefficients dans A , c.à.d. $\vec{x} \in W(k)^+(A)$. On pose

$$\vec{h} = (h, 0, \dots) \in W(k)^+(A[[T]]) \quad .$$

On a alors

$$(2.19) \quad \vec{x} \cdot \vec{h} = (x_0, x_1, \dots) \cdot (h, 0, \dots) = (x_0 h, x_1 h^p, \dots, x_n h^{p^n}, \dots) \quad .$$

Soit

$$(2.20) \quad E(\vec{x} \cdot \vec{h}) = F(x_0 h) F(x_1 h^p) \dots F(x_n h^{p^n}) \dots$$

(Exponentielle de Artin-Hasse de $\vec{x} \cdot \vec{h}$).

Etant donnée une section (\vec{a}_i) du k -groupe $(W(k)^+)^{(i)}_{(i,p)=1}$ à valeurs dans la k -algèbre A , on lui associe la série formelle

$$(2.21) \quad g = \prod_{(i,p)=1} E\left(\vec{a}_i; \vec{T}^i\right)$$

de $A[[T]]$. On vérifie que l'on a ainsi un k -isomorphisme de groupes

$$(2.22) \quad \prod_{(i,p)=1} (W(k)^+)^{(i)} \xrightarrow{\sim} \wedge^0$$

(cf. [13], pg. 102). Il en résulte que pour tout entier $n > 1$ on a un k -iso-

morphisme de groupes

$$(2.23) \quad \prod_{(i,p)=1, i \leq n} (W_{r(i)}(k)^+)^{(i)} \xrightarrow{\sim} \wedge_n^0 ,$$

où $r(i)$ dénote un entier dépendant de i (cf. loc. cit., pg. 103, Proposition 9).

Dans le cas où k est un corps de caractéristique 0 on a un k -isomorphisme

$$(2.24) \quad \prod_{1 \leq i} (\underline{G}_{\text{ak}})^{(i)} \xrightarrow{\sim} \wedge^0$$

faisant correspondre à la section (a_i) à valeurs dans une k -algèbre A la série formelle

$$(2.25) \quad g = \exp \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i t^i}{i} \right) .$$

Pour tout entier $n \geq 1$ on a un k -isomorphisme

$$(2.26) \quad \prod_{1 \leq i \leq n} (\underline{G}_{\text{ak}})^{(i)} \xrightarrow{\sim} \wedge_n^0 .$$

REMARQUE 2.26. bis(a) Dans le cas où k est de caractéristique 0 et u est une section \wedge^0 à valeur dans la k -algèbre A tel que $u = \exp \left(\sum_{1 \leq i} \frac{a_i t^i}{i} \right)$. On a pour tout $i \geq 1$

$$a_i = \text{Res}(T^{-i} du/u) .$$

Si k est de caractéristique $p > 0$, on introduit pour tout $i \geq 1$ premier avec p le vecteur de Witt $\vec{T}^{-i} = (T^{-i}, 0, \dots)$ à valeurs dans $k[[T]][T^{-1}]$. Étant donné une section u de \wedge^0 à valeurs dans une k -algèbre A de la forme $u = \prod_{(i,p)=1} E(\vec{a}_i \cdot \vec{T}^i)$, soit $\text{Res}(\vec{T}^{-i} du/u)$ le symbole défini par Witt (cf. [17], pg. 369). On a alors pour tout entier $i > 0$ premier avec p

$$\vec{a}_i = \text{Res}(\vec{T}^{-i} du/u) .$$

(b) Si k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$ on a

$$(2.27) \quad \text{Ext}_k^1(W(k)^+, \underline{G}_{\text{ak}}) = 0 .$$

Si k est de caractéristique 0 on a

$$(2.28) \quad \text{Ext}_k^1(\underline{G}_{\text{ak}}, \underline{G}_{\text{ak}}) = 0 .$$

On note par ${}^u\varphi^0 : \mathfrak{U} \longrightarrow \wedge^0$ le k -morphisme donné par la section $1 - t^{-1}T \in \wedge^0(k[[t]][[t^{-1}]])$, et par ${}^u\varphi_n^0 : \mathfrak{U} \longrightarrow \wedge_n^0$ le composé de ${}^u\varphi^0$ avec $\wedge^0 \longrightarrow \wedge_n^0$.

Soit $g : \mathfrak{U} \longrightarrow G$ un k -morphisme. Par hypothèse (de récurrence) il existe un k -homomorphisme $h : \wedge_n^0 \longrightarrow G'$ tel que

$$s' = (\pi \circ g)(h \circ {}^u\varphi_n^0)^{-1} \in G'(\text{omb}(\mathfrak{X})).$$

Comme le $\underline{G}_{\text{ak}}$ -torseur G au-dessus de G' est de Zariski, on peut relever s' en une section $s \in G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ puisque $\text{omb}(\mathfrak{X})$ est un k -schéma local.

Quitte à substituer g par gs^{-1} on peut supposer que g vérifie :

$$(2.29) \quad \pi \circ g = h \circ {}^u\varphi_n^0.$$

On a alors le diagramme commutatif de k -morphisms :

$$(2.30) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \underline{G}_{\text{ak}} & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\pi} & G' \longrightarrow 1 \\ & & & & \uparrow g & \swarrow \pi \circ g & \uparrow h \\ & & & & \mathfrak{U} & \searrow {}^u\varphi_n^0 & \uparrow h \\ & & & & \downarrow {}^u\varphi^0 & \swarrow {}^u\varphi_n^0 & \downarrow 2 \\ \prod_{(p,i)=1} (W(k)^+)^{(i)} & \xrightarrow{\sim} & \wedge^0 & \longrightarrow & \wedge_n^0 & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & & & & & \\ \prod_{(p,i)=1, i \leq n} (W(k)^+)^{(i)} & \longrightarrow & & & \prod_{(p,i)=1, i \leq n} (W_{r(i)}(k)^+)^{(i)} & , \end{array}$$

où la flèche en pointillé désigne le k -homomorphisme à construire. Soit

$$(2.31) \quad 0 \longrightarrow \underline{G}_{\text{ak}} \longrightarrow H \longrightarrow \prod_{(p,i)=1, i \leq n} (W(k)^+)^{(i)} \longrightarrow 0$$

la suite exacte de k -groupes obtenue à partir de (2.17) et du k -homomorphisme composé

$$(2.32) \quad \prod_{(p,i)=1, i \leq n} (W(k)^+)^{(i)} \longrightarrow \wedge_n^0 \xrightarrow{h} G'$$

obtenu à partir de (2.30). Il résulte de (2.27) que

$$(2.33) \quad \text{Ext}_k^1 \left(\prod_{(p,i)=1, i \leq n} (W(k)^+)^{(i)}, \underline{G}_{\text{ak}} \right) = 0 \quad ,$$

d'où l'extension (2.31) est triviale. Compte tenu que le carré inférieur du diagramme (2.30) commute on a alors qu'il existe un k -homomorphisme

$$(2.34) \quad \bar{f} : \wedge^0 \longrightarrow G$$

qui relève $\wedge^0 \longrightarrow \wedge_n^0 \xrightarrow{h} G'$. On en déduit

$$g(\bar{f} \circ^u \varphi^0)^{-1} \in \underline{G}_{\text{ak}}(\Omega).$$

On conclut qu'il existe un k -homomorphisme $f : \wedge^0 \longrightarrow \underline{G}_{\text{ak}}$ tel que

$$g(\bar{f} \circ^u \varphi^0)^{-1} \equiv f \circ^u \varphi^0 \pmod{\underline{G}_{\text{ak}}(\text{omb}(\mathfrak{X}))},$$

d'où

$$g \equiv (\bar{f}f) \circ^u \varphi^0 \pmod{\underline{G}_{\text{ak}}(\text{omb}(\mathfrak{X}))}.$$

On achève ainsi la preuve que ρ est une bijection dans le cas d'un corps de base k .

REMARQUE 2.35. (a) Soit k un corps parfait. La preuve du fait que ρ est une bijection pour un k -groupe unipotent connexe U peut se faire à partir de : "Tout k -groupe unipotent connexe U est isomorphe à un sous groupe fermé d'un produit fini $\prod (W_{r(i)}(k)^+)^{(i)}$ ". On peut ensuite montrer que ρ est un isomorphisme pour $W_r(k)^+$ à l'aide du symbole de Witt, qui constitue l'extension naturelle de l'opération $\text{Res}(F(T) du/u)$ définie plus haut ce qui donne que ρ est un isomorphisme pour $\prod (W_{r(i)}(k)^+)^{(i)}$, et à fortiori pour tout sous-groupe fermé.

(b) A quelques détails près la preuve que l'on vient de donner permet de montrer que ρ est une bijection pour tout k -schéma en groupes G localement de présentation finie.

3. Reduction de la preuve de (1.4.4) au cas où A est noethérien et réduit

Le but de ce numéro est la démonstration de la proposition suivante, qui ramène la preuve de (1.4.4) au cas d'une base réduite. On reprend les notations de (1.4.4).

PROPOSITION 3.1. Soit A un anneau noethérien. On suppose que :

(i) Pour tout idéal q de A égal à son radical les flèches ρ et ρ^+ de (1.4.4) obtenues à partir de A/q sont des bijections.

(ii) Il existe un idéal I de A de carré nul, c.à.d. $I^2 = 0$, tel que les flèches ρ et ρ^+ de (1.4.4) obtenues à partir de A/I sont des bijections. Alors les flèches ρ et ρ^+ de (1.4.4) obtenues à partir de A sont des bijections.

Montrons d'abord comment (3.1) à partir de la Proposition (3.1) on ramène la preuve de (1.4.4) au cas où A est noethérien et réduit. Soit $N \subset A$

le nilradical de A . Il existe alors un entier $m \geq 0$ tel que $N^{m+1} = 0$, et une chaîne finie

$$(3.2) \quad 0 = N^{m+1} \subset N^m \subset \dots \subset N \subset A.$$

Posons $A^{(j)} = A/N^{j+1}$ pour $0 \leq j \leq m$. L'idéal N^j/N^{j+1} de $A^{(j)}$ est de carré nul. Si l'on suppose (1.4.4) pour tout anneau réduit et noethérien on a la condition (i) de (3.1) assurée pour $A^{(j)}$. (Pour tout idéal $q \subset A^{(j)}$ égal à son radical on a que $A^{(j)}/q$ est réduit). On démontre alors par récurrence sur l'entier m que (3.1) entraîne (1.4.4) pour A noethérien.

Soit $I \subset A$ un idéal de carré nul. Posons $S = \text{Spec}(A)$, $A_0 = A/I$, et $S_0 = \text{Spec}(A_0)$. Étant donné un S -schéma X on note X_0 le produit $X \times_S S_0$. On désigne par S_{fppf} (resp. $(S_0)_{\text{fppf}}$) le grand site fppf au-dessus de S (resp. S_0). Soit $i : (S_0)_{\text{fppf}} \longrightarrow S_{\text{fppf}}$ le morphisme naturel. Soit G un S -schéma en groupes lisse, commutatif, et séparé. Soit $\omega_{G/S}^1$ la restriction du \mathcal{O}_S -module des différentielles $\Omega_{G/S}^1$ à la section unité de G , c.à.d.

$$\omega_{G/S}^1 = e^* \left(\Omega_{G/S}^1 \right),$$

où $e : S \longrightarrow G$ désigne la section unité.

Soit Y un S -schéma. Soit G^+ le S -faisceau (fppf) en groupes défini par

$$(3.2) \quad \text{Hom}_S(Y, G^+) = \text{Hom}_{S_0}(Y_0, G_0).$$

On a alors $G^+ = i_* i^* G$. On définit le S -faisceau en groupes K à partir de la suite exacte de faisceaux :

$$(3.3) \quad 1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow G^+ \longrightarrow 1.$$

Noter que $G \longrightarrow G^+$ est un epimorphisme car G est S -lisse. On a la description suivante du faisceau K . Soit S' un S -schéma affine

$$(3.4) \quad K(S') = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}} \left(\omega_{G/S'}^1, \mathfrak{I} \mathcal{O}_{S'} \right),$$

où l'on désigne par \mathfrak{I} l'idéal de \mathcal{O}_S donné par I .

La preuve de la proposition (3.1) mène à la considération d'une catégorie de S -faisceaux en groupes plus généraux que celle des S -schémas en groupes lisses.

DÉFINITION 3.5. Soit G un S -faisceau en groupes commutatif. On dit que G vérifie la propriété (A) (resp. (B)) si la flèche

$$G(\text{omb}(\mathfrak{X})) \times \text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{I}^0, G) \longrightarrow G(\mathfrak{U})$$

déduite à partir de ϕ_T^0 par composition et de l'opération de G est une bijection

$$\left(\text{resp. } \text{Ext}_{S-gr}^1(\mathfrak{I}^0, G) = 0 \text{ et } H^1(\text{omb}(\mathfrak{X}), G) = 0 \right) .$$

DÉFINITION 3.6. *Un S -faisceau en groupes commutatifs est négligeable si $G(S') = 0$ pour tout S -schéma plat S' .*

PROPOSITION 3.7. *Soit $G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de faisceaux en groupes commutatifs à noyau et conoyau négligeables. Alors pour tout S -schéma plat S' on a :*

(i) *Le morphisme $H^i(S', G) \longrightarrow H^i(S', G')$, pour tout $i = 0, 1$, est un isomorphisme;*

(ii) *Pour tout S -schéma en groupes plat Γ la flèche*

$$\text{Ext}^i(\Gamma, G) \longrightarrow \text{Ext}^i(\Gamma, G'), \text{ pour } i = 0, 1,$$

est un isomorphisme.

PREUVE. *de (i). Il résulte de [7 bis], Exp. IV, 4.10 que le foncteur qui à un faisceau en groupes abélien G de S_{fppf} associe sa restriction au petit site $fppf$ de S est exact. D'où que G et sa restriction au petit site $fppf$ ont la même cohomologie. En particulier, si G est négligeable on a pour tout $i > 0$, $H^i(S, G) = 0$. L'affirmation résulte alors de la suite exacte de cohomologie.*

On déduit formellement (ii) de (i) à partir de la description d'une extension de Γ par G en termes d'un G -torseur sur Γ comme celle donnée dans [5].

C.Q.F.D.

On a les propriétés de permanence suivantes de la condition (A) (resp. (B)).

COROLLAIRE 3.8. *Soit $G \longrightarrow G'$ comme dans (3.7). Alors G vérifie (A) (resp. (B)) si et seulement si G' vérifie (A) (resp. (B)). (Noter que \mathfrak{I}^0 , $\text{omb}(\mathfrak{X})$ et \mathfrak{U} sont des S -schémas plats).*

PROPOSITION 3.9. *Soit $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de S -faisceaux en groupes abéliens. On a alors :*

(i) *Si G' et G'' vérifient (B) alors G vérifie (B).*

(ii) *Si G' vérifie (A) et (B) et G'' vérifie (A) alors G vérifie (A).*

(iii) *Si G' et G'' vérifient (A) et (B) alors G vérifie (A) et (B).*

PREUVE. *de (i). Résulte trivialement de la suite exacte de cohomologie et de la suite exacte des Ext's. L'affirmation (iii) résulte immédiatement de (i) et de (ii). Prouvons alors (ii). On a le diagramme commutatif de suite exactes :*

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G'(\text{omb}(\mathfrak{X})) \times \text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, G') & \longrightarrow & G'(\mathfrak{U}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G(\text{omb}(\mathfrak{X})) \times \text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, G) & \longrightarrow & G(\mathfrak{U}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G''(\text{omb}(\mathfrak{X})) \times \text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, G'') & \longrightarrow & G''(\mathfrak{U}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

L'exactitude de la suite à gauche résulte de (B) pour G' . La première et la troisième flèche horizontales sont des isomorphismes car G' et G'' vérifient (A).

D'autre part $G(\mathfrak{U}) \rightarrow G''(\mathfrak{U})$ est un épimorphisme car G' vérifie (B). D'où la deuxième flèche horizontale est aussi un isomorphisme. C.Q.F.D.

Soit N un \mathcal{O}_S -module. Soit $W(N)$ le S -groupe vectoriel défini par

$$(3.10) \quad W(N)(S') = \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} N)$$

pour tout S -schéma S' .

Il est clair que $W(N)$ est un faisceau fppf.

PROPOSITION 3.11. (i) *Tout faisceau négligeable G' vérifie (A) et (B).*

(ii) *On suppose le théorème (1.4.4) démontré pour S affine et noethérien. Alors \underline{G}_{aS} vérifie (A) et (B).*

(iii) *Soit S' un sous-schéma fermé de S et soit $S' \hookrightarrow S$ l'immersion canonique. On suppose le théorème (1.4.4) démontré pour S' . Alors $W(\mathcal{O}_{S'}) = i_* \underline{G}_{aS'}$ vérifie (A) et (B).*

PREUVE. L'affirmation (i) résulte immédiatement de (3.8). Voyons comment (iii) se démontre à partir de (ii). Notons d'abord que

$$\begin{aligned} \Gamma(\text{omb}(\mathfrak{X}), i_* \underline{G}_{aS'}) &= \Gamma(\text{omb}(\mathfrak{X})_{S'}, \underline{G}_{aS'}) \\ (\text{resp. } H^1(\text{omb}(\mathfrak{X}), i_* \underline{G}_{aS'}) &= H^1(\text{omb}(\mathfrak{X})_{S'}, \underline{G}_{aS'})), \end{aligned}$$

et

$$\text{Hom}_{S-\text{gr}}(\mathfrak{J}^0, i_* \underline{G}_{aS'}) = \text{Hom}_{S'-\text{gr}}(\mathfrak{J}_{S'}^0, \underline{G}_{aS'}).$$

Il en résulte trivialement que (A) pour $\underline{G}_{aS'}$ donne (A) pour $i_* \underline{G}_{aS'}$.

Comme \mathfrak{J}^0 est affine et $i_* \underline{G}_{aS'} = W(\mathcal{O}_{S'})$ alors $\text{Ext}_{S-\text{gr}}(\mathfrak{J}^0, i_* \underline{G}_{aS'})$ est isomorphe à

$$H^2(\mathfrak{J}^0, i_* \underline{G}_{aS'}) \simeq H^2(\mathfrak{J}_{S'}^0, \underline{G}_{aS'}).$$

Or ce dernier groupe est isomorphe à

$$\text{Ext}_{S'-\text{gr}}(\mathfrak{J}_{S'}^0, i_* \underline{G}_{aS'}) = 0,$$

d'où

$$\text{Ext}_{S-\text{gr}}(\mathfrak{J}^0, i_* \underline{G}_{aS'}) = 0.$$

Donc (B) pour $\underline{G}_{aS'}$ donne (B) pour $i_* \underline{G}_{aS'}$. Prouvons maintenant (ii). On a vu que les extensions de \mathfrak{J}^0 par \underline{G}_{aS} sont classées par le groupe $H^2(\mathfrak{J}^0, \underline{G}_{aS})$. Comme \underline{G}_{aS} est un S -schéma de présentation finie et $\mathfrak{J}^0 = \varprojlim_n \mathfrak{J}_n^0$ on a

$$H^2(\mathfrak{J}^0, \underline{G}_{aS}) = \lim_{\rightarrow} H^2(\mathfrak{J}_n^0, \underline{G}_{aS}).$$

Étant donnée une extension

$$0 \longrightarrow \underline{G}_{aS} \longrightarrow E \longrightarrow \mathfrak{J}^0 \longrightarrow 1$$

il existe un entier $n \geq 0$ et une extension

$$0 \longrightarrow \underline{G}_{aS} \longrightarrow E_n \xrightarrow{\pi} \mathfrak{J}_n^0 \longrightarrow 1$$

tel que $E \simeq E_n \times_{\mathfrak{J}_n^0} \mathfrak{J}^0$. Notons par $(\varphi_T^0)_n$ l'image de φ_T^0 par $\mathfrak{J}^0(\mathfrak{U}) \longrightarrow \mathfrak{J}_n^0(\mathfrak{U})$.

D'autre part

$$E_n(\mathfrak{U}) \longrightarrow \mathfrak{J}_n^0(\mathfrak{U})$$

est une surjection car $H^1(\mathfrak{U}, \underline{G}_{aS}) = 0$, \mathfrak{U} étant un schéma affine. Il existe un relèvement $\gamma \in E_n(\mathfrak{U})$ de $(\varphi_T^0)_n$ qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \gamma : \mathfrak{U} & \longrightarrow & E_n \\ & \searrow (\varphi_T^0)_n & \downarrow \pi \\ & & \mathfrak{J}_n^0 \end{array} .$$

Le S -groupe E_n est représentable par un S -schéma lisse et séparé de présentation finie en tant qu'extension de \mathfrak{J}_n^0 par \underline{G}_{aS} . L'hypothèse entraîne qu'il existe un entier $m \geq n$ et un S -homomorphisme

$$h : \mathfrak{J}_m^0 \longrightarrow E_n$$

tel que

$$\gamma \equiv h \circ (\varphi_T^0)_m \pmod{E_n(\text{omb}(\mathfrak{X}))},$$

d'où

$$\pi \circ h : \mathfrak{J}_m^0 \longrightarrow \mathfrak{J}_n^0$$

vérifie :

$$(\varphi_T^0)_n \equiv (\pi \circ h) \circ (\varphi_T^0)_m \pmod{\mathfrak{J}_n^0(\text{omb}(\mathfrak{X}))} .$$

La propriété d'unicité de la factorisation donne que $\pi \circ h$ coïncide avec le morphisme canonique de \mathfrak{J}_m^0 dans \mathfrak{J}_n^0 . On a ainsi le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} E_n & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{J}_n^0 & \longrightarrow & 1 \\ & \nwarrow h & \uparrow & & \\ & & \mathfrak{J}_m^0 & & \end{array}$$

L'extension $E_m = E_n \times_{\mathfrak{J}_n^0} \mathfrak{J}_m^0$ de \mathfrak{J}_m^0 par \underline{G}_{aS} est scindée. En effet on vérifie immédiatement que le couple $(h, \text{Id}_{\mathfrak{J}_m^0})$ est un scindage de E_m . D'autre part $E \simeq E_m \times_{\mathfrak{J}_m^0} \mathfrak{J}^0$ ce qui prouve bien (ii). C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.12. *On suppose vérifié l'hypothèse (i) de (3.1). Soit N un \mathcal{O}_S -module de type fini. Alors $W(N)$ vérifie (A) et (B).*

PREUVE. Comme N est un \mathcal{O}_S -module de type fini et S est noethérien on peut trouver une suite de composition.

$$(*) \quad 0 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_p = N$$

tel que N_{i+1}/N_i ($0 \leq i \leq p-1$) soit isomorphe au \mathcal{O}_S -module donné par un A -module de la forme A/q , où q désigne un idéal premier de A . La démonstration se fait par récurrence sur la longueur de la suite (*). Pour $p = 1$ l'énoncé résulte de (3.11), (iii). Si $p > 1$ on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow W(N_{p-1}) \longrightarrow W(N) \longrightarrow W(A/q) \longrightarrow 0$$

où F est négligeable. Alors $\text{Im}(W(N_{p-1}) \longrightarrow W(N))$ vérifie (A) et (B) d'après (3.8). On conclut par (3.9), (iii). C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.13. *Même hypothèse que dans (3.12). Le S -faisceau en groupes K défini dans (3.3) vérifie (A) et (B).*

PREUVE. Posons $N = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\omega_{G/S}^1, \mathfrak{I})$. On a alors un morphisme naturel de S -faisceaux $W(N) \longrightarrow K$ donné pour tout S -schéma S' par la flèche naturelle

$$\Gamma\left(S', \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\omega_{G/S}^1, \mathfrak{I}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}\right) \longrightarrow \Gamma\left(S', \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_{S'}}(\omega_{G/S'}^1, \mathfrak{I} \mathcal{O}_{S'})\right) \quad (\text{cf. (3.4)})$$

Comme $\omega_{G/S}^1$ est localement libre ce morphisme est surjectif à noyau négligeable. L'affirmation résulte alors de (3.8) et de (3.12). C.Q.F.D.

PREUVE. de (3.1). D'après (ii) $G_0 = G \times_S S_0$ vérifie (A), alors G^+ vérifie (A) comme on le voit immédiatement par définition de G^+ . D'après (3.13) K vérifie (A) et (B). Donc G satisfait (A) d'après (3.9), (ii). C.Q.F.D.

On reprend les notations de (1.4.4).

PROPOSITION 3.14. *Soit A un anneau artinien. Les flèches*

$$\text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{I}^0, G) \xrightarrow{\rho} F(G)$$

et

$$\text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{I}, G) \xrightarrow{\rho^+} F^+(G)$$

sont des isomorphismes.

REMARQUE 3.15. Dans (3.14) le fait que G soit séparé n'intervient pas.

Le dévissage donné par la Proposition (3.1) ramène la preuve de (3.14) au cas d'un corps de base, et l'on sait que tout k -schéma en groupes est séparé.

NOTATION 3.16. Soit A un anneau local complet et m_A son idéal maximal. Si X (resp. $f : X \rightarrow Y$) est un A -schéma (A -morphisme) on désigne par \widehat{X} (resp. \widehat{f}) le complété formel de X le long de $X' = X \times_A (\text{Spec}(A/m_A))$ (resp. le prolongement de f aux complétés). Noter que si G est un A -schéma en groupes alors \widehat{G} est muni d'une structure de groupe.

Le résultat suivant nous sera utilisé par la suite

PROPOSITION 3.17. Soit A un anneau local complet. Soit G un A -schéma en groupes lisse. Soit $\alpha \in G(A[[t]][t^{-1}]) = G(\mathfrak{U})$. Il existe un A -homomorphisme unique

$$f : \widehat{\mathfrak{S}}^0 \rightarrow \widehat{G}$$

et une section δ de G au-dessus de $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A[[t]])$ tel que

$$\widehat{\alpha} = (f \circ \widehat{\varphi}_T)\delta.$$

PREUVE. Posons

$$\mathfrak{U}^{(n)} = \mathfrak{U} \times_A \text{Spec}(A/m_A^{n+1}),$$

$$\alpha^{(n)} = \alpha \times_A \text{Spec}(A/m_A^{n+1}),$$

$$G^{(n)} = G \times_A \text{Spec}(A/m_A^{n+1}), \dots \text{etc.}$$

D'après (3.14) on a pour tout entier $n \geq 0$ un unique A/m_A^{n+1} -homomorphisme

$$f^{(n)} : (\widehat{\mathfrak{S}}^0)^{(n)} \rightarrow G^{(n)}$$

tel que

$$\delta^{(n)} = \alpha^{(n)} \left(f^{(n)} \circ (\varphi_T^0)^{(n)} \right)^{-1} \in G(\mathfrak{X}^{(n)}).$$

On construit ainsi, de proche en proche, un système projectif $f = (f^{(n)})(n \geq 0)$ de A -homomorphismes et un autre $\delta = (\delta^{(n)})(n \geq 0)$ de A -morphisms dans G . Il est clair que f et δ satisfont à la condition de l'énoncé. (Noter que comme $A[[T]]$ est local complet, δ provient d'un élément de $G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$.)

C.Q.F.D.

4. Preuve de (1.4.4) dans le cas d'un trait complet S de base

(4.1). On désigne par V un anneau de valuation discrète complet, par m son idéal maximal, et par K son corps des fractions. On pose

$S = \text{Spec}(V)$ (trait complet). Soit $k = V/m$ le corps résiduel de V que l'on peut supposer algébriquement clos par (1.4.6) et par (6.82) de [8].

Soit G un S -schéma en groupes lisse commutatif et séparé. Soit $G^0 \subset G$ le S -sous-groupe ouvert dont les fibres géométriques sont les composantes connexes de l'indentité (composantes neutre de G^0).

On reprend ici les notations de (1.3). On pose $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{(0)}$ (complété formel de \mathbb{P}_S^1 le long de $D_{(0)}$) et $B = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. On note par T (resp. T') la section de B (resp. $B_{(\infty)}$) donnée par \mathfrak{T} (resp. \mathfrak{T}^{-1}), où \mathfrak{T} désigne la fonction méromorphe de \mathbb{P}_S^1 définie dans (1.3). On a alors $B = V[[T]]$ (resp. $B_{(\infty)} = V[[T']]$),

$$\text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) = \text{omb}(\mathfrak{X}) = \text{Spec}(V[[T]]) \quad (\text{resp. } \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) = \text{Spec}(V[[T']]]),$$

$$\mathfrak{U}_{(0)} = \mathfrak{U} = \text{Spec}(V[[T]][T^{-1}]) \quad (\text{resp. } \mathfrak{U}_{(\infty)} = \text{Spec}(V[[T']][T'^{-1}]]),$$

On pose $\mathfrak{J} = {}^{(0)}\mathfrak{J}$. Avec la notation (1.3.25) on a une section $\phi_{\mathfrak{T}}^1$ (resp. $\phi_{\mathfrak{T}}^0$) de \mathfrak{J} (resp. \mathfrak{J}^0) au-dessus de U tel que la restriction à \mathfrak{U} coïncide avec ϕ_T^1 (resp. ϕ_T^0) (cf. (1.3.9)). On a la décomposition suivante

$$(4.1.1) \quad \phi_{\mathfrak{T}}^0 = \mathfrak{T}^{-1}(1 - \mathfrak{T}^{-1}T)^{-1} \quad \left(\text{resp. } \phi_T^0 = t^{-1}(1 - t^{-1}T)^{-1} \right)$$

qui correspond à la décomposition en produit direct $\mathfrak{J}^0 = \underline{\mathbb{G}}_{mS} \times \wedge^0$. On note par ${}^m\phi_{\mathfrak{T}}^0$ (resp. ${}^m\phi_T^0$) la section de $\underline{\mathbb{G}}_{mS}$ au-dessus de U (resp. \mathfrak{U}) donnée par \mathfrak{T}^{-1} (resp. t^{-1}), et par ${}^u\phi_{\mathfrak{T}}^0$ (resp. ${}^u\phi_T^0$) la section de \wedge^0 au-dessus de U (resp. \mathfrak{U}) donnée par $1 - \mathfrak{T}^{-1}T$ (resp. $1 - t^{-1}T$).

LEMME 4.1.2. *Soit $\alpha \in G(\mathfrak{U})$. Il existe alors $\alpha' \in G^0(\mathfrak{U})$ tel que*

$$\alpha \equiv \alpha' \pmod{G(\text{omb}(\mathfrak{X}))}.$$

PREUVE. *Soit α_k l'image de α dans $G(\mathfrak{U}_{\{k\}})$ ($k = V/m$). Par [6] on a une suite exacte de k -groupes*

$$1 \longrightarrow G_k^0 \longrightarrow G_k \xrightarrow{\rho} \Gamma_k \longrightarrow 1 \quad ,$$

où Γ_k désigne un k -groupe étale constant. La section $p(\alpha_k)$ se prolonge en une section $\bar{p}(\alpha_k)$ de Γ_k au-dessus de $\text{Spec}(k[[T]]) = \text{omb}(\mathfrak{X}_k)$. Il existe alors un relèvement β_k de $\bar{p}(\alpha_k)$ à G_k , G_k^0 étant lisse. Comme G est un S -schéma lisse, la section β_k de G au-dessus de $\text{Spec}((V/m)[[T]])$ se relève en une section β de G au-dessus de \mathfrak{X} et à fortiori au-dessus de $\text{omb}(\mathfrak{X}) = \text{Spec}(V[[T]])$. Puisque $\alpha_k \beta_k^{-1} \in G^0(\mathfrak{U}_k)$ (par construction de β) et comme G^0 est ouvert il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de $\mathfrak{U}_k = \text{Spec}(k[[T]][T^{-1}])$ dans \mathfrak{U} tel que $\alpha \cdot \beta^{-1}(\mathcal{V}) \subset G^0$. Alors $\alpha' = \alpha \cdot \beta^{-1}$ vérifie la condition de l'énoncé. En effet l'ouvert $\alpha'^{-1}(G^0)$ contient la fibre

fermée \mathfrak{U}_k , et induit sur la fibre générique \mathfrak{U}_K un ouvert fermé (car G_K^0 est ouvert et fermé dans G_K) non-vide contenant U_K donc égal à \mathfrak{U}_K ($\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_k \coprod \mathfrak{U}_K$). C.Q.F.D.

REMARQUE 4.1.3. On peut, d'après (4.1.2), supposer par la suite G à fibre connexes, c.à.d. $G = G^0$, et donc qu'il est représentable par un S -schéma de présentation finie.

Notons que si le théorème (1.4.4) est vrai alors la décomposition en produit direct $\mathfrak{J}^0 = \underline{\mathbb{G}}_{mS} \times \wedge^0$ doit nécessairement se refléter dans $G(\mathfrak{U})/G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$.

Soit $\alpha = h \circ \varphi_T^0$, la décomposition

$$\varphi_T^0 = ({}^m\varphi_T^0, {}^u\varphi_T^0) \in \mathbb{G}_{mS}(\mathfrak{U}) \times \wedge^0(\mathfrak{U})$$

donne lieu à deux sections ${}^m\alpha = h \circ {}^m\varphi_T$ et ${}^u\alpha = h \circ {}^u\varphi_T$ de G au-dessus de \mathfrak{U} tel que $\alpha = {}^m\alpha {}^u\alpha$. Ce qui entraîne la décomposition de $G(\mathfrak{U})/G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ en produit direct.

On reprend ici les notations de (3.17) avec $A = V$ et $m_A = m$. Soit $\alpha \in G(\mathfrak{U})$, d'après (3.17) quitte à multiplier α par $\delta \in G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$, on peut supposer que pour tout entier $n \geq 0$ il existe un V/m^{n+1} -homomorphisme

$$f^{(n)} : (\mathfrak{J}^0)^{(n)} \longrightarrow G^{(n)}$$

avec $\alpha^{(n)} = f^{(n)} \circ (\varphi_T^0)^{(n)}$. On pose $(\varphi_T^0)^{(n)} = (({}^m\varphi_T^0)^{(n)}, ({}^u\varphi_T^0)^{(n)})$ et

$$\begin{aligned} {}^m\alpha^{(n)} &= f^{(n)} \circ ({}^m\varphi_T^0)^{(n)} \\ \left(\text{resp. } {}^u\alpha^{(n)} &= f^{(n)} \circ ({}^u\varphi_T^0)^{(n)} \right). \end{aligned}$$

On pose $f = (f^{(n)}) \in \text{Hom}_{S\text{-gr}}(\widehat{\mathfrak{J}}^0, \widehat{G})$. On a alors avec la convention (3.16) :

$$(4.1.4) \quad \widehat{\alpha} = f \circ \widehat{\varphi}_T^0.$$

On pose ${}^m\varphi^0 = {}^m\varphi_T^0$, ${}^u\varphi^0 = {}^u\varphi_T^0$ et on introduit maintenant les S -morphisms formels suivants

$$(4.1.5) \quad {}^m\widehat{\alpha} = f \circ {}^m\widehat{\varphi}^0 : \widehat{\mathfrak{U}} \longrightarrow \widehat{G}$$

et

$$(4.1.5 \text{ bis}) \quad {}^u\widehat{\alpha} = f \circ {}^u\widehat{\varphi}^0 : \widehat{\mathfrak{U}} \longrightarrow \widehat{G}.$$

En fait on a ${}^m\widehat{\alpha} = ({}^m\alpha^{(n)})$ (resp. ${}^u\widehat{\alpha} = ({}^u\alpha^{(n)})$) ($n \geq 0$), et $\widehat{\alpha} = {}^m\widehat{\alpha} {}^u\widehat{\alpha}$.

Terminologie et notation (i). Soit X un S -schéma. On désigne par \widehat{X} le complété formel de X pour la topologie m -adique et on l'appelle la fibre formelle de X . Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de S -schémas. On désigne par $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$ le S -morphisme de schémas formels induit par f et on appelle la fibre formelle de f (cf. (3.16)).

(ii) Soit $n \geq 1$. On désigne toujours par $\varphi_T^0 = \varphi^0$ le morphisme composé

$$\mathfrak{U} \xrightarrow{\varphi_T^0} \mathfrak{J}^0 \rightarrow \mathfrak{J}_n^0.$$

Expliquons la stratégie de la preuve de (1.4.4) pour un trait complet de base S . On introduit à partir du morphisme formel

$$\widehat{\alpha} \text{ (resp. } {}^m\widehat{\alpha}, {}^u\widehat{\alpha}) : \widehat{\mathfrak{U}} \rightarrow G$$

(cf. (4.1.5) et (4.1.5) bis) un S -morphisme formel

$$\overline{\alpha} \text{ (resp. } {}^m\overline{\alpha}, {}^u\overline{\alpha}) : \widehat{U} \rightarrow G$$

redonnant $\widehat{\alpha}$ (resp. ${}^m\widehat{\alpha}, {}^u\widehat{\alpha}$) par composition avec $\widehat{\mathfrak{U}} = \widehat{\mathfrak{U}}_{(0)} \rightarrow \widehat{U}$ (cf. (4.1.19), (ii) et (4.1.24)). Dans (4.1.6) on prouve que ${}^m\widehat{\alpha}$ et ${}^u\widehat{\alpha}$ sont algébrisables. Pour cela il faut considérer la trace $\mathrm{tr}_{\theta_n} \alpha$ (resp. $\mathrm{tr}_{\theta_n} \overline{\alpha}$) de α (resp. $\overline{\alpha}$) par rapport à un certain morphisme fini $\theta_n : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ (resp. $\Theta : U \rightarrow U$) (cf. (4.1.8) et (4.1.9)), et utiliser une propriété de pureté pour les sections d'un S -schéma en groupes à valeur dans $\mathrm{omb}(\mathfrak{X})$ (cf. (4.1.15)). On montre finalement que ${}^m\widehat{\alpha}$ est égal à la fibre formelle de $\mathrm{tr}_{\theta_n} \alpha$ pour n convenable. Au (4.2) on démontre le lemme d'algébrisation (4.2.1) pour un morphisme $\psi : \mathrm{omb}(\widehat{U})_K \rightarrow \mathbb{P}_K^N$ dont la composition avec

$$\mathrm{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)})_K \left(\text{resp. } \mathrm{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(\infty)})_K \right) \rightarrow \mathrm{omb}(\widehat{U})_K$$

provient d'un morphisme

$$\mathfrak{U}_{(0)K} \text{ (resp. } \mathfrak{U}_{(\infty)K}) \rightarrow \mathbb{P}_K^N.$$

A l'aide du lemme cité on prouve que ${}^m\overline{\alpha}$ et ${}^u\overline{\alpha}$ sont algébrisables dans un sens précisé au lemme (4.3.8). A partir de ce fait on prouve que mf et uf sont algébrisables (cf. Propositions (4.3.13) et (4.4.24)).

On démontre d'abord la

PROPOSITION 4.1.6. *Le S -morphisme formel ${}^m\widehat{\alpha} : \widehat{\mathfrak{U}} \rightarrow \widehat{G}$ (resp. ${}^u\widehat{\alpha} : \widehat{\mathfrak{U}} \rightarrow \widehat{G}$) est algébrisable, c.à.d. il existe un S -morphisme*

$${}^m\alpha : \mathfrak{U} \rightarrow G \text{ (resp. } {}^u\alpha : \mathfrak{U} \rightarrow G)$$

qui redonne ${}^m\widehat{\alpha}$ (resp. ${}^u\widehat{\alpha}$) par passage à la fibre formelle. On a $\alpha = {}^m\alpha {}^u\alpha$.

Notons que l'on a :

$$(4.1.7) \quad U = \mathbb{P}_S^1 - D = \operatorname{Spec} (V[\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}]) \text{ (cf. (1.3.4)).}$$

Soit

$$(4.1.8) \quad \theta : U = \mathbb{P}_S^1 - D \longrightarrow \mathbb{P}_S^1 - D$$

le S -morphisme fini correspondant au V -homomorphisme $V[\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}] \longrightarrow V[\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}]$ faisant correspondre \mathfrak{T}^n à \mathfrak{T} . Soit

$$(4.1.9) \quad \theta_n : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

la restriction de θ_n à \mathfrak{U} , c.à.d. le S -morphisme fini qui correspond au V -homomorphisme $V[[T]][T^{-1}] \longrightarrow V[[T]][T^{-1}]$ défini par $T \longrightarrow T^n$. On confère à [7], Ch. XVII, 6.2.3 pour la preuve du résultat suivant

PROPOSITION 4.1.10. *On peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow S$, séparé, plat de présentation finie, et quasi-fini, et tout faisceau abélien F sur S , un morphisme trace*

$$\operatorname{Tr}_f : f_! f^* F \longrightarrow F$$

(On désigne par $f_! F$ le sous-faisceau de $f_* F$ dont les sections sur un U étale sur S sont les sections de F sur $U \times_S X$ dont le support est propre au-dessus de U) redonnant le morphisme trace habituel si S est le spectre d'un corps, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) Tr_f est fonctoriel sur F .
- (ii) Tr_f est compatible à tout changement de base.

LEMME 4.1.11. *On a les égalités suivantes :*

$$\operatorname{tr}_{\theta_n} \phi_T^0 = (-1)^{n+1} (t - T^n)^{-1}$$

et

$$\operatorname{tr}_{\theta_n} \phi_T^1 = (-1)^{n+1} T^n (t - T^n)^{-1}.$$

PREUVE. En vertu de (ii) de (4.1.10) il suffira de montrer l'égalité en se plaçant sur \mathbb{Z} , et comme \mathfrak{J} est séparé au-dessus de \mathbb{Z} , il suffit de la vérifier après le changement de base

$$\operatorname{Spec} (\mathbb{Q}) \longrightarrow \operatorname{Spec} (\mathbb{Z}).$$

Soit \mathbb{Q}' l'extension de \mathbb{Q} engendrée par les racines n -ème de l'unité : $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. Il suffit alors de calculer la trace de la section

$(t - T)^{-1} \in \mathfrak{J}(\mathbb{Q}'[t, t^{-1}])$ par rapport au morphisme étale

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}'[t, t^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}'[t', t'^{-1}]),$$

donné par $t' \longrightarrow t^n$. Or on a l'égalité :

$$(\theta_1 t - T)^{-1} (\theta_2 t - T)^{-1} \dots (\theta_n t - T)^{-1} = (-1)^{n+1} (t' - T^n)^{-1}.$$

Ce qui montre bien la première formule (par (ii) de (4.1.10)). La deuxième en résulte. C.Q.F.D.

LEMME 4.1.12. Soit k un corps et G_k un k -groupe lisse. Soit $\alpha \in G_k(k[[T]][[T^{-1}]])$. Il existe un entier $n > 0$ tel que

$$\mathrm{tr}_{\theta_n} \alpha \equiv \mathrm{tr}_{\theta_{n''}} \alpha \pmod{G_k(k[[T]])}$$

si $n', n'' \geq n$, et si n' et n'' sont impairs.

PREUVE. Puisque l'on a prouvé (1.4.4) pour le cas d'un corps de base (cf. § 2), on peut supposer qu'il existe un entier $n > 0$ et un k -homomorphisme $h : \mathfrak{S}_n^0 \longrightarrow G_k$ tel que $\alpha = h \circ \phi_T^0$. Il suffit alors de vérifier l'affirmation pour α égal au morphisme composé $\mathfrak{U} \xrightarrow{\phi_T^0} \mathfrak{S}^0 \longrightarrow \mathfrak{S}_n^0$ en vertu de (i) de (4.1.10), ce qui immédiat à partir de (4.1.11). C.Q.F.D.

Si $F : X \longrightarrow Y$ est un S -morphisme rationnel du schéma X dans un S -schéma séparé localement de type fini Y . On note par $\mathrm{dom}(F) \subset X$ le plus grand ouvert de définition de F dans X . Soient

$$\mathrm{pr}_1 \text{ (resp. } \mathrm{pr}_2) : \mathrm{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{omb}(\mathfrak{X})$$

la projection sur le premier (resp. deuxième) facteur, et

$$\Delta : \mathrm{omb}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X})$$

le morphisme diagonal. Supposons que G soit un S -schéma en groupes séparé et localement de type fini. Soit $\mathfrak{p} = (m, T) \subset V[[T]]$ l'idéal maximal engendré par m et par T . Notons par $x \in \mathrm{omb}(\mathfrak{X})$ le point qui correspond à \mathfrak{p} . Soit

$$(4.1.13) \quad F : \mathrm{omb}(\mathfrak{X}) - \{x\} \longrightarrow G$$

un S -morphisme. Soit

$$(4.1.14) \quad H : \mathrm{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}) \longrightarrow G$$

le S -morphisme rationnel défini par

$$H = (F \circ \text{pr}_1)(F \circ \text{pr}_2)^{-1}.$$

PROPOSITION 4.1.15. *Avec les notations ci-dessus on a que F admet un unique prolongement*

$$\overline{F} : \text{omb}(\mathfrak{X}) \longrightarrow G.$$

Prouvons d'abord le

LEMME 4.1.16. *Soit H défini comme ci-dessus. On a alors l'égalité suivante entre parties ouvertes de $\text{omb}(\mathfrak{X})$*

$$\text{dom}(F) = \Delta^{-1}(\text{dom}(H)).$$

PREUVE. On a $\text{dom}(F) \subset \Delta^{-1}(\text{dom}(H))$. En effet si $x \in \text{dom}(F) \subset \text{omb}(\mathfrak{X})$ et si l'on pose $y = \Delta(x)$, on a $\text{pr}_1(y) = \text{pr}_2(y) = x$, et par définition de H on a $y \in \text{dom}(H)$.

Prouvons que $\Delta^{-1}(\text{dom}(H)) \subset \text{dom}(F)$. Le S -morphisme $\text{pr}_1 : \text{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}) \longrightarrow \text{omb}(\mathfrak{X})$ étant fidèlement plat, et le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(F \circ \text{pr}_2) : \text{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}) & \xrightarrow{\quad} & G \\ \text{pr}_1 \downarrow & \nearrow F & \\ \text{omb}(\mathfrak{X}) & & \end{array}$$

F admet alors un prolongement à $x \in \text{omb}(\mathfrak{X})$ si et seulement si la fibre de la restriction $\text{pr}_1|_{\text{dom}(H(F \circ \text{pr}_2))}$ en x est non-vide.

Soit $x \in \text{omb}(\mathfrak{X})$ tel que $\Delta(x) \in \text{dom}(H)$. Soit \mathfrak{q} l'idéal premier de $V[[T]]$ correspondant à x . Posons $\overline{\mathfrak{q}} = (\mathfrak{q}V[[T]]) \widehat{\otimes}_V V[[T]]$. Il est clair que $\overline{\mathfrak{q}}$ est premier. Soit y le point de $\text{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X})$ donné par $\overline{\mathfrak{q}}$. On vérifie que $\text{pr}_2(y) \in \text{dom}(F)$ car le point générique d'une fibre de $\text{omb}(\mathfrak{X}) \longrightarrow S$ appartient toujours à $\text{dom}(F)$. D'autre part on a que $y \in \text{dom}(H)$, car y est une généralisation de $\Delta(x)$. Il en résulte qu'au point y les morphismes H et $F \circ \text{pr}_2$ sont définis. Ainsi la fibre de $\text{pr}_1|_{\text{dom}(H(F \circ \text{pr}_2))}$ en x est non-vide, d'où $x \in \text{dom}(F)$. C.Q.F.D.

PREUVE. de (4.1.15). Soit U un ouvert affine de G voisinage de l'image de S par la section identité e_G de G . Cet ouvert existe car S est local. Le S -morphisme rationnel $H : \text{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}) \longrightarrow G$ donne lieu à un

S-morphisme rationnel

$$H' : \text{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}) \longrightarrow U.$$

En plus on a

$$\Delta^{-1}(\text{dom}(H')) = \Delta^{-1}(\text{dom}(H)).$$

En effet si H admet un prolongement à $\Delta(x)$ ($x \in \text{omb}(\mathfrak{X})$) on a nécessairement $H(\Delta(x)) = e_G(x')$, où x' désigne l'image de x par $\text{omb}(\mathfrak{X}) \longrightarrow S$, car G est séparé sur S .

D'autre part $\text{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X})$ est un schéma régulier, donc normal. L'ouvert U étant affine, le complémentaire $\text{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}) - \text{dom}(H')$ de $\text{dom}(H')$ dans $\text{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X})$ est une réunion de composantes irréductibles de codimension 1 dans $\text{omb}(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X})$. Soit Z une telle composante. Il existe $f \in V[[T]] \otimes_V V[[T]]$ tel que $Z = V(f)$. Soit f' l'image de f par

$$V[[T]] \otimes_V V[[T]] \longrightarrow \frac{V[[T]] \otimes_V V[[T]]}{(T \otimes 1 - 1 \otimes T)} \simeq V[[T]] \quad .$$

On a alors

$$\Delta^{-1}(Z) = V(f').$$

Comme $V[[T]]$ est un anneau régulier alors $V(f')$ est soit une réunion de composantes irréductibles de codimension 1 soit vide. Par (4.1.16) on a

$$\text{omb}(\mathfrak{X}) - \Delta^{-1}(\text{dom}(H')) = \text{omb}(\mathfrak{X}) - \Delta^{-1}(\text{dom}(H)) = \text{omb}(\mathfrak{X}) - \text{dom}(F)$$

donc on trouve que $\text{omb}(\mathfrak{X}) - \text{dom}(F)$ est soit une réunion de composantes irréductibles de codimension 1 soit vide. Par hypothèse on a alors $\text{omb}(\mathfrak{X}) - \text{dom}(F) = \emptyset$, c.à.d. F admet un prolongement à $\text{omb}(\mathfrak{X})$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 4.1.17. *Soit $\alpha \in G(\mathfrak{U})$ tel que $\alpha_{\{K\}} \in G(\text{omb}(\mathfrak{X}_K))$. On a alors que $\alpha \in G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$.*

PREUVE. *Comme $\mathfrak{U} \coprod \text{omb}(\mathfrak{X}_K) \longrightarrow \text{omb}(\mathfrak{X})$ donne lieu à un recouvrement fpqc de $\text{omb}(\mathfrak{X}) - \{x\} = \mathfrak{U} \cup \text{omb}(\mathfrak{X}_K)$. On a alors que α admet un prolongement à $\text{omb}(\mathfrak{X}) - \{x\}$, et on conclut par (4.1.15). C.Q.F.D.*

COROLLAIRE 4.1.18. *Soit $\alpha \in G(\mathfrak{U})$. Il existe un entier $n > 0$ tel que :*

$$\text{tr}_{\theta_{n'}} \alpha \equiv \text{tr}_{\theta_{n''}} \alpha \pmod{G(\text{omb}(\mathfrak{X}))}$$

si $n', n'' \geq n$ sont des entiers impairs.

PREUVE. Par (4.1.12) il existe un entier n tel que

$$tr_{\theta_{n'}} \alpha_{\{K\}} \equiv tr_{\theta_{n''}} \alpha_{\{K\}} \pmod{G_K(\text{omb}(\mathfrak{X}_K))}$$

si $n', n'' \geq n$ sont impairs. La restriction de

$$\beta = (tr_{\theta_{n'}} \alpha) (tr_{\theta_{n''}} \alpha)^{-1} \in G(\mathfrak{U})$$

à $\mathfrak{U}_{\{K\}}$ admet un prolongement à $\text{omb}(\mathfrak{X}_K)$ en vertu de (4.1.12).

On conclut que $\beta \in G(\text{omb}(\mathfrak{X}))$ par (4.1.17).

C.Q.F.D.

REMARQUE 4.1.19. (i) - Soit $\phi_{\mathfrak{T}}^0 \in \mathfrak{J}^0(\mathfrak{U})$ la section définie dans (1.3.25). On peut alors écrire

$$\phi_{\mathfrak{T}}^0 = (\mathfrak{T} - T)^{-1}.$$

La démonstration de (4.1.11) donne

$$tr_{\Theta_n} \phi_{\mathfrak{T}}^0 = (-1)^{n+1} (\mathfrak{T} - T^n)^{-1}.$$

(ii) - Soit $\alpha \in G(\mathfrak{U})$ vérifiant la condition (4.1.4), $\hat{\alpha} = f \circ \hat{\phi}_T^0$. Soit $\bar{\alpha} = f \circ \hat{\phi}_{\mathfrak{T}}^0$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathfrak{U}} & \xrightarrow{\quad} & \hat{\mathfrak{U}} \left(= \left(\mathbb{P}_S^1 - D \right)^\wedge \right) \\ \hat{\alpha} \downarrow & \nearrow \bar{\alpha} & \\ \mathfrak{G} & & \end{array} \quad (\text{cf. (1.3.28), (ii)}).$$

LEMME 4.1.20. Soit $\alpha \in G(\mathfrak{U})$ comme dans (ii) ci-dessus. Il existe alors un entier $n > 0$ tel que $tr_{\theta_{n'}} \alpha = tr_{\theta_{n''}} \alpha$, si $n', n'' \geq n$ sont des entiers impairs.

PREUVE. Montrons que l'entier n obtenu à partir de α par (4.1.18) vérifie la condition de l'énoncé. Il résulte de (i), (4.1.9) que pour tout couple d'entiers impairs n', n'' on a

$$(*) \quad (tr_{\theta_{n'}} \phi_{\mathfrak{T}}^0) (tr_{\theta_{n''}} \phi_{\mathfrak{T}}^0)^{-1} = (1 - \mathfrak{T} T^{n'})^{-1} (1 - \mathfrak{T}^{-1} T^{n''}).$$

D'où il résulte que $(tr_{\theta_{n'}} \phi_{\mathfrak{T}}^0) (tr_{\theta_{n''}} \phi_{\mathfrak{T}}^0)^{-1}$ admet un prolongement à $\mathbb{P}_S^1 - D_{(0)}$. Par définition de $\bar{\alpha}$ on a, pour tout entier $v > 0$, l'égalité

suivante

$$(tr_{\theta_{n'}} \bar{\alpha}^{(v)}) (tr_{\theta_{n''}} \bar{\alpha}^{(v)})^{-1} = f^{(v)} \left(\left((tr_{\theta_{n'}} \varphi_{\mathfrak{T}}^0) (tr_{\theta_{n''}} \varphi_{\mathfrak{T}}^0)^{-1} \right)^{(v)} \right) \quad (\text{cf. (4.1.10)})$$

Si $n', n'' > n$ la section

$$\beta^{(v)} = (tr_{\theta_{n'}} \bar{\alpha}^{(v)}) (tr_{\theta_{n''}} \bar{\alpha}^{(v)})^{-1}$$

de $G^{(v)}$ au-dessus de $U^{(v)} = (\mathbb{P}_S^1)^{(v)} - D_{(0)}^{(v)}$, admet un prolongement à $(\mathbb{P}_S^1)^{(v)}$ car la restriction

$$\beta^{(v)}|_{\mathfrak{U}^{(v)}} = (tr_{\theta_{n'}} \alpha^{(v)}) (tr_{\theta_{n''}} \alpha^{(v)})^{-1}$$

admet un prolongement à $\text{omb}(\mathfrak{X})^{(v)}$. On a ainsi un $S^{(v)}$ -morphisme de la droite projective $\mathbb{P}_{S^{(v)}}^1$ dans $G^{(v)}$ qui est alors constant (cf. Exp. XVIII, [7]). D'autre part d'après (*) il résulte que la restriction de $\beta^{(v)}$ à $D_{(\infty)}^{(v)} \subset (\mathbb{P}_S^1)^{(v)}$ coïncide avec la section identité de $G^{(v)}$ au-dessus de $D_{(\infty)}^{(v)}$. On en déduit pour $n', n'' > n$ que pour tout entier $v > 0$ on a

$$tr_{\theta_{n'}} \bar{\alpha}^{(v)} = tr_{\theta_{n''}} \bar{\alpha}^{(v)}$$

et à fortiori

$$tr_{\theta_{n'}} \alpha^{(v)} = tr_{\theta_{n''}} \alpha^{(v)} \quad \text{d'où} \quad tr_{\theta_{n'}} \alpha = tr_{\theta_{n''}} \alpha \quad .$$

C.Q.F.D.

PREUVE. de la Proposition (4.1.6).

Soit n un entier comme dans (4.1.20), et $\ell > n$ un entier impair. Si $v \in \mathbb{N}$ il existe $n(v) \in \mathbb{N}$ pair tel que $n(v) > n$ et $f^{(v)}$ se factorise par $(\mathfrak{S}^0)^{(v)} \longrightarrow (\mathfrak{S}_{n(v)}^0)^{(v)}$. D'après (4.1.20) on a $tr_{\theta_\ell} \alpha = tr_{\theta_{n(v)+1}} \alpha$, d'où $tr_{\theta_\ell} \alpha^{(v)} = tr_{\theta_{n(v)+1}} \alpha^{(v)}$. D'autre part, par (4.1.11), on a, pour tout $v > 0$,

$$tr_{\theta_{n(v)+1}} \alpha^{(v)} = {}^m \alpha^{(v)} \quad ,$$

d'où $(tr_{\theta_\ell} \alpha)^{(v)} = tr_{\theta_\ell} \alpha^{(v)} = {}^m \alpha^{(v)}$, donc ${}^m \hat{\alpha}$ est algébrisable. En fait ${}^m \hat{\alpha}$ est la fibre formelle de ${}^m \alpha = tr_{\theta_\ell} \alpha$. C.Q.F.D.

Posons

$$(4.1.21) \quad \varphi_{\mathfrak{T}}^0 = {}^m \varphi_{\mathfrak{T}}^0 \circ {}^u \varphi_{\mathfrak{T}}^0,$$

où ${}^m \varphi_{\mathfrak{T}}^0 : U \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS}$ (resp. ${}^u \varphi_{\mathfrak{T}}^0 : U \longrightarrow \wedge^0$) est donnée par la section de $\underline{\mathbb{G}}_{mS}$ au-dessus de U , donnée par la restriction de \mathfrak{T}^{-1} à U (resp. de \wedge^0

au-dessus de U donnée par la section $(1 - \mathfrak{T}^{-1}T)^{-1}$ (cf. (4.1.1)). Avec les notations de (1.3) et celles ci-dessus on a le diagramme commutatif suivant

$$(4.1.22) \quad \text{Spec}(V[[T]][T^{-1}]) = \mathfrak{u} \begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{u}_{(0)} & \xrightarrow{\quad} & U & \xrightarrow{\quad m_{\widehat{\varphi}^0_{\mathfrak{T}}} \quad} & \underline{\mathbb{G}}_{mS} \\ & \nearrow \sim & & \searrow m_{\widehat{\varphi}^0} & & & \downarrow \text{inv} \\ & & \mathfrak{u}_{(\infty)} & \xrightarrow{\quad} & U & \xrightarrow{\quad m_{\widehat{\varphi}^0_{\mathfrak{T}}} \quad} & \underline{\mathbb{G}}_{mS} \\ & \searrow \sim & & \nearrow (m_{\widehat{\varphi}^0})^{-1} & & & \end{array} .$$

Le S -morphisme formel

$$\begin{array}{ccccc} & & \widehat{U} & & \\ & \nearrow & & \searrow m_{\widehat{\varphi}^0_{\mathfrak{T}}} & \\ \widehat{\mathfrak{u}} & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\mathfrak{u}}_{(0)} & \xrightarrow{\quad} & \widehat{\underline{\mathbb{G}}}_{mS} \xrightarrow{f} \widehat{G} \end{array}$$

est égal à la fibre formelle ${}^m\widehat{\alpha}$ de ${}^m\alpha$. D'autre part il résulte d'après (4.1.22) que le morphisme composé

$$\begin{array}{ccccc} & & \widehat{U} & & \\ & \nearrow & & \searrow m_{\widehat{\varphi}^0_{\mathfrak{T}}} & \\ \widehat{\mathfrak{u}} & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\mathfrak{u}}_{(\infty)} & \xrightarrow{\quad} & \widehat{\underline{\mathbb{G}}}_{mS} \xrightarrow{f} \widehat{G} \end{array}$$

est égal à

$$(4.1.23) \quad f \circ ({}^m\widehat{\varphi}^0)^{-1} = ({}^m\widehat{\alpha})^{-1} ,$$

d'où il résulte qu'il est égal à la fibre formelle de ${}^m\alpha^{-1}$, donc qu'il est algébrisable.

DÉFINITION 4.1.23. On pose

$${}^m\overline{\alpha} = f \circ {}^m\widehat{\varphi}^0_{\mathfrak{T}} \quad (\text{resp. } {}^u\overline{\alpha} = f \circ {}^u\widehat{\varphi}^0_{\mathfrak{T}}),$$

d'où

$$\overline{\alpha} = {}^m\overline{\alpha} {}^u\overline{\alpha}.$$

On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathfrak{U}} & \longrightarrow & \widehat{U} \\ \downarrow m_{\widehat{\alpha}} & \nearrow m_{\overline{\alpha}} & \\ G & & \end{array} \quad (\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \widehat{\mathfrak{U}} & \longrightarrow & \widehat{U} \\ \downarrow u_{\widehat{\alpha}} & \nearrow u_{\overline{\alpha}} & \\ G & & \end{array}) \quad (\text{cf. (4.1.19) (ii)}).$$

Notons que ${}^u\overline{\alpha} : \widehat{\mathfrak{U}} \rightarrow G$ admet un prolongement à $\widehat{U}_{(\infty)}$, où $U_{(\infty)} = \mathbb{P}_S^1 - D_{(0)}$ (cf. (1.3.4)). En effet ${}^u\overline{\alpha} = f \circ {}^u\widehat{\varphi}_{\mathfrak{C}}^0$, et ${}^u\widehat{\varphi}_{\mathfrak{C}}^0$ est donné par la section $(1 - \mathfrak{C}^{-1}T)$ de \wedge^0 au-dessus de U , qui admet un prolongement évident à $U_{(\infty)}$. Ce qui suffit à prouver que $\text{omb}({}^u\overline{\alpha})$ composé avec $\text{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(\infty)}) \rightarrow \text{omb}(\widehat{U})$ se factorise par un morphisme $\text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) \rightarrow G$, et à fortiori par $\mathfrak{U}_{(\infty)} \rightarrow G$.

On a alors la

PROPOSITION 4.1.25. *Le morphisme*

$${}^m\overline{\alpha} : \widehat{U} \rightarrow \widehat{G}$$

vérifie la condition suivante : la restriction de ${}^m\overline{\alpha}$ à $\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)}$ (resp. $\widehat{U}_{(\infty)}$) s'obtient par passage à la fibre formelle à partir du morphisme

$$\text{tr}_{\theta_n} \alpha : \mathfrak{U} \rightarrow G \quad (\text{resp. } (\text{tr}_{\theta_n} \alpha)^{-1} : \mathfrak{U} \rightarrow G)$$

pour un entier n convenable.

Il s'agit maintenant de montrer, à partir de (4.1.25), que le morphisme ${}^m\overline{\alpha}$ (resp. ${}^u\overline{\alpha}$) provient, par passage à la fibre formelle, d'un S -morphisme $W \rightarrow G$, où W désigne un voisinage ouvert de la fibre spéciale U_k de U .

Le S -schéma G étant séparé et de présentation finie, on a alors un S -morphisme de schémas

$$(4.1.26) \quad \text{omb}({}^m\overline{\alpha}) \text{ (resp. } \text{omb}({}^u\overline{\alpha})) : \text{omb}(\widehat{U}) \rightarrow G$$

induisant ${}^m\widehat{\alpha}$ (resp. ${}^u\widehat{\alpha}$) par restriction à $\widehat{\mathfrak{U}} \rightarrow \text{omb}(\widehat{U})$. D'autre part la fibre générique G_K de G est un K -schéma en groupes lisse et connexe, et l'on sait alors que G_K est une K -variété quasi-projective. Il existe alors une immersion dans un K -espace projectif

$$(4.1.27) \quad i : G_K \rightarrow \mathbb{P}_K^N.$$

COROLLAIRE 4.1.28. *Le K -morphisme*

$$i \circ \text{omb}({}^m\overline{\alpha})_K \text{ (resp. } i \circ \text{omb}({}^u\overline{\alpha})_K) : \text{omb}(\widehat{U})_K \rightarrow \mathbb{P}_K^N$$

obtenu en composant la fibre générique $\text{omb}({}^m\overline{\alpha})_K$ (resp. $\text{omb}({}^u\overline{\alpha})_K$) de (4.1.26) avec i , vérifie les conditions :

a) - La composition de $i \circ \text{omb}({}^m\overline{\alpha})_K$ (resp. $i \circ \text{omb}({}^u\overline{\alpha})_K$) avec $\text{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)})_K \longrightarrow \text{omb}(\widehat{U})_K$ provient d'un K -morphisme $\mathfrak{U}_{(0)K} \longrightarrow \mathbb{P}_K^N$ par composition avec $\text{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)})_K \longrightarrow \mathfrak{U}_{(0)K}$.

b) - La composition de $i \circ \text{omb}({}^m\overline{\alpha})_K$ (resp. $i \circ \text{omb}({}^u\overline{\alpha})_K$) avec $\text{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(\infty)})_K \longrightarrow \text{omb}(\widehat{U})_K$ provient d'un K -morphisme $\mathfrak{U}_{(\infty)K} \longrightarrow \mathbb{P}_K^N$ par composition avec $\text{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(\infty)})_K \longrightarrow \mathfrak{U}_{(\infty)K}$. Notons que ${}^u\overline{\alpha} : \widehat{U} \longrightarrow G$ admet un prolongement à $\widehat{U}_{(\infty)}$, où $U_{(\infty)} = \mathbb{P}_S^1 - D_{(0)}$ (cf. (1.3.4)). En effet ${}^u\overline{\alpha} = f \circ {}^u\widehat{\varphi}_{\mathfrak{T}}^0$ et ${}^u\widehat{\varphi}_{\mathfrak{T}}^0$ est donné par la section $(1 - \mathfrak{T}^{-1}T)^{-1}$ de \wedge^0 au-dessus de U , qui admet un prolongement évident à $U_{(\infty)}$. Ce qui suffit à prouver que $\text{omb}({}^u\overline{\alpha})$ composé avec $\text{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(\infty)}) \longrightarrow \text{omb}(\widehat{U})$ se factorise par un morphisme $\text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) \longrightarrow G$.

(4.2) Le but de ce numéro est de prouver le

LEMME D'ALGÈBRISATION (4.2.1). On reprend les notations du numéro précédent. Soit

$$\psi : \text{omb}(\widehat{U})_K \longrightarrow \mathbb{P}_K^N$$

un K -morphisme tel qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_{(0)K} & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^N \\ \uparrow & & \uparrow \psi \\ \text{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)})_K & \longrightarrow & \text{omb}(\widehat{U})_K \end{array} \quad (\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_{(\infty)K} & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^N \\ \uparrow & & \uparrow \psi \\ \text{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(\infty)})_K & \longrightarrow & \text{omb}(\widehat{U})_K \end{array})$$

Alors il existe un K -morphisme

$$\overline{\psi} : U_K \longrightarrow \mathbb{P}_K^N$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{\psi}_K : U_K & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^N \\ \uparrow & \nearrow \psi & \\ \text{omb}(\widehat{U})_K & & \end{array}$$

Soient $V[T]^\wedge$ (resp. $V[T^{-1}]^\wedge$) le complété formel de $V[T]$ (resp. $V[T^{-1}]$) pour la topologie m -adique, et $V[T, T^{-1}]^\wedge$ le complété formel de $V[T, T^{-1}]$ pour la topologie m -adique. Noter que

$$(4.2.2) \quad \widehat{U} = \mathrm{Spf}(V[T, T^{-1}]^\wedge),$$

d'où

$$(4.2.3) \quad \mathrm{omb}(\widehat{U}) = \mathrm{Spec}(V[T, T^{-1}]^\wedge).$$

D'autre part on a

$$(4.2.4) \quad \widehat{U}_{(0)} = \mathrm{Spf}(V[T]^\wedge) \quad (\text{resp. } \widehat{U}_{(\infty)} = \mathrm{Spf}(V[T^{-1}]^\wedge))$$

et

$$(4.2.5) \quad \mathrm{omb}(\widehat{U}_{(0)}) = \mathrm{Spec}(V[T]^\wedge) \quad (\text{resp. } \mathrm{omb}(\widehat{U}_{(\infty)}) = \mathrm{Spec}(V[T^{-1}]^\wedge))$$

L'anneau $V[T]^\wedge$ est un anneau de Zariski et comme

$$(4.2.6) \quad V[T, T^{-1}]^\wedge = V[T]_{\{T\}}^\wedge \quad (\text{localisé complété de } V[T]^\wedge)$$

il en résulte que le morphisme

$$(4.2.7) \quad \begin{aligned} \mathrm{omb}(\widehat{U}) \coprod \mathrm{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) &\longrightarrow \mathrm{omb}(\widehat{U}_{(0)}) \\ (\text{resp. } \mathrm{omb}(\widehat{U}) \coprod \mathrm{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) &\longrightarrow \mathrm{omb}(\widehat{U}_{(\infty)})) \end{aligned}$$

est fidèlement plat.

L'anneau $V[[T]][T^{-1}]^\wedge$ obtenu comme le complété formel de $V[[T]][T^{-1}]$ pour la topologie m -adique est un anneau de valuation discrète de corps résiduel $k[[T]][T^{-1}]$. Le critère valuatif de propreté donne alors le

LEMME 4.2.8. *Avec les notations de (4.2.1). Il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)})_K & \longrightarrow & \mathrm{omb}(\widehat{U})_K \\ \downarrow & & \searrow \psi \\ \mathrm{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)}) & \longrightarrow & \mathbb{P}_V^N \end{array} \quad \left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(\infty)})_K & \longrightarrow & \mathrm{omb}(\widehat{U})_K \\ \downarrow & & \searrow \psi \\ \mathrm{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(\infty)}) & \longrightarrow & \mathbb{P}_V^N \right)$$

Noter que $\text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)})$ (resp. $\text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)})$) est un schéma local. Soit $x_{(0)} \in \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)})$ (resp. $x_{(\infty)} \in \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)})$) le point fermé. Le S -morphisme

$$(4.2.9) \quad \text{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)}) \coprod \mathfrak{U}_{(0)K} \coprod \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)K}) \longrightarrow \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) - \{x_{(0)}\} \\ \left(\text{resp. } \text{omb}(\widehat{\mathfrak{U}}_{(\infty)}) \coprod \mathfrak{U}_{(\infty)K} \coprod \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)K}) \longrightarrow \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) - \{x_{(\infty)}\} \right)$$

est fidèlement plat. D'autre part le morphisme

$$(4.2.10) \quad \mathfrak{U}_{(0)K} \longrightarrow \mathbb{P}_K^N \quad \left(\text{resp. } \mathfrak{U}_{(\infty)K} \longrightarrow \mathbb{P}_K^N \right),$$

donné par l'hypothèse de (4.2.1), composé avec

$$\mathfrak{U}_{(0)\{K\}} = \text{Spec}(K[[T]][T^{-1}]) \longrightarrow \mathfrak{U}_{(0)K} \\ \left(\text{resp. } \mathfrak{U}_{(\infty)\{K\}} = \text{Spec}(K[[T^{-1}]] [T]) \longrightarrow \mathfrak{U}_{(\infty)K} \right)$$

admet un prolongement

$$(4.2.11) \quad \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)K}) \longrightarrow \mathbb{P}_K^N \quad \left(\text{resp. } \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)K}) \longrightarrow \mathbb{P}_K^N \right)$$

en vertu du critère valuatif de propreté. Grâce au morphisme fidèlement plat (4.2.9) et à partir des morphismes donnés par (4.2.8), (4.2.10) et (4.2.11) on démontre le

LEMME 4.2.12. *Avec les notations de (4.2.1). Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_{(0)K} & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) - \{x_{(0)}\} & \longrightarrow & \mathbb{P}_V^N \end{array} \quad (\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_{(\infty)K} & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) - \{x_{(\infty)}\} & \longrightarrow & \mathbb{P}_V^N \end{array}).$$

Il existe un éclatement (cf. [12])

$$(4.2.13) \quad \mathfrak{Z}_{(0)} \longrightarrow \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) \quad (\text{resp. } \mathfrak{Z}_{(\infty)} \longrightarrow \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}))$$

de centre un sous-schéma fermé $\tau_{(0)}$ (resp. $\tau_{(\infty)}$) de support $x_{(0)}$ (resp. $x_{(\infty)}$), et un diagramme commutatif

$$(4.2.14) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}_{(0)} & \longrightarrow & \mathbb{P}_V^N \\ \uparrow & \nearrow & \\ \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) - \{x_{(0)}\} & & \end{array} \quad (\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}_{(\infty)} & \longrightarrow & \mathbb{P}_V^N \\ \uparrow & \nearrow & \\ \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) - \{x_{(\infty)}\} & & \end{array}).$$

D'autre part il résulte du critère valuatif de propreté qu'il existe un diviseur δ de la fibre spéciale $\text{omb}(\widehat{U})_k = U_k$ et un diagramme commutatif :

$$(4.2.15) \quad \begin{array}{ccc} \psi : \text{omb}(\widehat{U})_K & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{omb}(\widehat{U}) - \delta & \longrightarrow & \mathbb{P}_V^N \end{array} .$$

On peut alors trouver un éclatement

$$(4.2.16) \quad Y \longrightarrow \mathbb{P}_V^1$$

ayant pour centre un sous-schéma fermé T de \mathbb{P}_V^1 de même support que δ , tel que si l'on pose $\text{omb}(\widehat{U})' = \text{omb}(\widehat{U}) \times_{\mathbb{P}_V^1} Y$ on a les diagrammes commutatifs

$$(4.2.17) \quad \begin{array}{ccc} \text{omb}(\widehat{U}) - \delta & \longrightarrow & \mathbb{P}_V^N \\ \downarrow & \nearrow \bar{\psi}' & \\ \text{omb}(\widehat{U})' & & \end{array} \quad (\text{cf. [12]})$$

et

$$(4.2.17 \text{ bis}) \quad \begin{array}{ccc} \text{omb}(\widehat{U}) - \delta & \longrightarrow & \mathbb{P}_V^N \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \bar{\psi}' \\ \text{omb}(\widehat{U})_K & \longrightarrow & \text{omb}(\widehat{U})' , \end{array}$$

où la flèche diagonale est égale au morphisme composé de ψ avec $\mathbb{P}_K^N \hookrightarrow \mathbb{P}_V^N$.

REMARQUE 4.2.18. *Il est clair que $\text{omb}(\widehat{U})'$ s'identifie à l'éclatement de $\text{omb}(\widehat{U})$ de centre le sous-schéma $\text{omb}(\widehat{U}) \times_{\mathbb{P}_V^1} T$. En effet, soient A un anneau, $A \longrightarrow A'$ une extension fidèlement plate, et $q \subset A$ un idéal.*

Posons

$$X = \text{Spec}(A) \text{ (resp. } X' = \text{Spec}(A'), q' = qA',$$

$$\tilde{X} = \text{Proj}(A \oplus q \oplus q^2 \dots), \tilde{X}' = \text{Proj}(A' \oplus q' \oplus q'^2 \oplus \dots)).$$

On a alors

$$\tilde{X}' \simeq \tilde{X} \times_A X'.$$

Il en résulte, si l'on pose $U' = U \times_{\mathbb{P}_V^1} Y$, que le complété formel \widehat{U}' de U' , pour la topologie m -adique, s'identifie canoniquement au complété formel $(\text{omb}(\widehat{U})')^\wedge$, pour la topologie m -adique, de $\text{omb}(\widehat{U})'$. En effet, le morphisme $\text{omb}(\widehat{U}) \longrightarrow U$ est plat, et pour tout entier $v > 0$ il induit un isomorphisme des voisinages v -èmes.

$$\text{omb}(\widehat{U})'_v = \text{omb}(\widehat{U})_v \times_{\mathbb{P}_V^1} Y \longrightarrow U'_v = U_v \times_{\mathbb{P}_V^1} Y.$$

Soit $\overline{T} \subset \mathbb{P}_V^1$ un sous-schéma fermé ayant son support contenu dans $\delta \cup \{x_{(0)}\} \cup \{x_{(\infty)}\}$ tel que :

- (i) $U \times_{\mathbb{P}_V^1} \overline{T} = T$,
- (ii) $\text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) \times_{\mathbb{P}_V^1} \overline{T} = \tau_{(0)}$,
- (iii) $\text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) \times_{\mathbb{P}_V^1} \overline{T} = \tau_{(\infty)}$.

Soit

$$(4.2.19) \quad Z \longrightarrow \mathbb{P}_V^1$$

l'éclatement de \mathbb{P}_V^1 de centre \overline{T} . On a alors

$$Z_U = U \times_{\mathbb{P}_V^1} Z = U \times_{\mathbb{P}_V^1} Y, \quad \mathfrak{Z}_{(0)} = \text{omb}(\mathfrak{X}_{(0)}) \times_{\mathbb{P}_V^1} Z,$$

et

$$\mathfrak{Z}_{(\infty)} = \text{omb}(\mathfrak{X}_{(\infty)}) \times_{\mathbb{P}_V^1} Z.$$

Posons

$$(4.2.20) \quad \begin{aligned} \text{omb}(\widehat{U}_{(0)})' &= \text{omb}(\widehat{U}_{(0)}) \times_{\mathbb{P}_V^1} Z \\ (\text{resp. } \text{omb}(\widehat{U}_{(\infty)})' &= \text{omb}(\widehat{U}_{(\infty)}) \times_{\mathbb{P}_V^1} Z), \end{aligned}$$

et notons par $(\text{omb}(\widehat{U}_{(0)})')^\wedge$ (resp. $(\text{omb}(\widehat{U}_{(\infty)})')^\wedge$) son complété formel.

Comme le morphisme (4.2.7) est fidèlement plat on en déduit à partir de (4.2.18) et (4.2.7) que le morphisme

$$(4.2.21) \quad \begin{aligned} \text{omb}(\widehat{U})' \coprod \mathfrak{Z}_{(0)} &\longrightarrow \text{omb}(\widehat{U}_{(0)})' \\ (\text{resp. } \text{omb}(\widehat{U})' \coprod \mathfrak{Z}_{(\infty)} &\longrightarrow \text{omb}(\widehat{U}_{(\infty)})') \end{aligned}$$

l'est aussi. On définit un V -morphisme

$$(4.2.22) \quad \begin{aligned} \text{omb}(\widehat{U}_{(0)})' &\longrightarrow \mathbb{P}_V^N \\ (\text{resp. } \text{omb}(\widehat{U}_{(\infty)})' &\longrightarrow \mathbb{P}_V^N) \end{aligned}$$

à partir du morphisme $\text{omb}(\widehat{U})' \longrightarrow \mathbb{P}_V^N$ donné par (4.2.17), et du morphisme $\mathfrak{Z}_{(0)} \longrightarrow \mathbb{P}_V^N$ (resp. $\mathfrak{Z}_{(\infty)} \longrightarrow \mathbb{P}_V^N$) donné par (4.2.14), grâce au fait que (4.2.21) est un morphisme fidèlement plat. Soit

$$(4.2.23) \quad U'_{(0)} = U_{(0)} \times_{\mathbb{P}_V^1} Z \quad \left(\text{resp. } U'_{(\infty)} = U_{(\infty)} \times_{\mathbb{P}_V^1} Z \right),$$

et désignons par $\widehat{U}'_{(0)}$ (resp. $\widehat{U}'_{(\infty)}$) le complété formel de $U'_{(0)}$ (resp. $U'_{(\infty)}$) pour la topologie m -adique.

On a alors l'isomorphisme de V -schémas formels

$$(4.2.24) \quad \widehat{U}'_{(0)} \simeq \left(\text{omb}(\widehat{U}_{(0)})' \right)^\wedge$$

$$\left(\text{resp. } \widehat{U}'_{(\infty)} \simeq \left(\text{omb}(\widehat{U}_{(\infty)})' \right)^\wedge \right).$$

Notons que $\widehat{U}'_{(0)}$ et $\widehat{U}'_{(\infty)}$ sont des ouverts du complété formel \widehat{Z} de Z et que

$$(4.2.25) \quad \widehat{Z} = \widehat{U}'_{(0)} \cup \widehat{U}'_{(\infty)} \quad \left(\text{resp. } \widehat{U}' = \widehat{U}'_{(0)} \cap \widehat{U}'_{(\infty)} \right).$$

D'autre part il est facile de vérifier que l'on a un diagramme commutatif

$$(4.2.26) \quad \begin{array}{ccc} \text{omb}(\widehat{U}_{(0)})' & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}_V^N \\ \uparrow & \nearrow \bar{\psi}' & \uparrow \\ \text{omb}(\widehat{U})' & \xrightarrow{\quad} & \text{omb}(\widehat{U}_{(\infty)})' \end{array}$$

(cf. (4.2.22)).

Il résulte de (4.2.24) que la flèche horizontale supérieure (resp. verticale à droite) de (4.2.26) induit, par passage à la fibre formelle, un morphisme

$$(4.2.27) \quad \widehat{U}'_{(0)} \longrightarrow \mathbb{P}_V^N \quad \left(\text{resp. } \widehat{U}'_{(\infty)} \longrightarrow \mathbb{P}_V^N \right),$$

tel que le diagramme suivant :

$$(4.2.28) \quad \begin{array}{ccc} \widehat{U}'_{(0)} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}_V^N \\ \uparrow & \nearrow \widehat{\psi}' & \uparrow \\ \widehat{U}' & \xrightarrow{\quad} & \widehat{U}'_{(\infty)} \end{array}$$

où $\widehat{\psi}'$ désigne le morphisme induit par $\overline{\psi}'$ (cf. (4.2.24)), commute. On définit ainsi à partir de (4.2.28) (cf. (4.2.25)) un V -morphisme formel

$$(4.2.29) \quad \widehat{Z} \longrightarrow \mathbb{P}_V^N.$$

Le V -schéma Z est un V -schéma projectif il existe alors un V -morphisme

$$(4.2.30) \quad Z \longrightarrow \mathbb{P}_V^N$$

redonnant (4.2.29) par passage à la fibre formelle. Notons par $\overline{\psi} : U' \longrightarrow \mathbb{P}_V^N$ la restriction de (4.2.30) à U' . On a alors le diagramme commutatif

$$(4.2.31) \quad \begin{array}{ccc} \text{omb}(\widehat{U})' & \longrightarrow & U' \\ \uparrow & \searrow \overline{\psi}' & \downarrow \overline{\psi} \\ \widehat{\psi}' : \widehat{U}' & \longrightarrow & \mathbb{P}_V^N \end{array}$$

(Le carré commute par définition de $\overline{\psi}$ compte tenu que $\widehat{U}' \longrightarrow U'$ se factorise par $\text{omb}(\widehat{U})' \longrightarrow U'$; le triangle supérieur (resp. inférieur) commute par définition de $\overline{\psi}'$ (resp. comme on le vérifie par restriction de $\overline{\psi}'$ à \widehat{U}')). A partir du triangle supérieur de (4.2.31) et du triangle inférieur de (4.2.17) bis on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{omb}(\widehat{U})_K = \text{omb}(\widehat{U})'_K & \longrightarrow & U'_K = U_K \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \text{omb}(\widehat{U})' & \xrightarrow{\overline{\psi}'} & \mathbb{P}_V^N \end{array},$$

où la flèche diagonale est donnée par la diagonale de (4.2.17) bis, et la flèche verticale droite par le composé de la fibre $\overline{\psi}_K : U_K \longrightarrow \mathbb{P}_K^N$ de $\overline{\psi}$ avec $\mathbb{P}_K^N \longrightarrow \mathbb{P}_V^N$. On achève de démontrer ainsi (4.2.1).

(4.3) Soit $f : \widehat{\mathcal{S}}^0 \longrightarrow \widehat{G}$ défini comme dans (4.1.4). On pose

$$(4.3.1) \quad {}^m f = f|_{\widehat{\mathcal{G}}_{mS}} \quad (\text{resp. } {}^u f = f|_{\widehat{\mathcal{H}}^0}).$$

On a alors à partir de (4.1.24) que

$$(4.3.1\text{bis}) \quad {}^m \overline{\alpha} = {}^m f \circ {}^m \widehat{\varphi}_{\mathfrak{E}}^0 \quad (\text{resp. } {}^m \widehat{\alpha} = {}^m f \circ {}^m \widehat{\varphi}_{\mathfrak{E}}^0, {}^u \overline{\alpha} = {}^u f \circ {}^u \widehat{\varphi}_{\mathfrak{E}}^0, {}^u \widehat{\alpha} = {}^u f \circ {}^u \widehat{\varphi}_{\mathfrak{E}}^0).$$

Le but de ce numéro est de prouver que ${}^m f$ est algébrisable, c'est-à-dire que l'on a un diagramme commutatif de S -groupes

$$\begin{array}{ccc} {}^m f : \widehat{\mathbb{G}}_{mS} & \longrightarrow & G \\ \downarrow & \nearrow {}^m g & \\ \mathbb{G}_{mS} & & \end{array} .$$

Commençons par prouver que ${}^m \bar{\alpha}$ (resp. ${}^u \bar{\alpha}$) est algébrisable. Soit U_{loc} le localisé de l'ouvert U de \mathbb{P}_V^N par rapport à l'idéal premier de définition de la fibre spéciale $p = m V[T, T^{-1}]$, c.à.d.

$$(4.3.2) \quad U_{\text{loc}} = \text{Spec}(V[T, T^{-1}]_p).$$

Noter que le morphisme

$$(4.3.3) \quad \text{omb}(\widehat{U}) = \text{Spec}(V[T, T^{-1}]^\wedge) \longrightarrow U_{\text{loc}}$$

est fidèlement plat. Le lemme d'algébrisation (cf. (4.2.1)) et (4.1.28), appliqué à

$$i \circ \text{omb}({}^m \bar{\alpha})_K \text{ (resp. } i \circ \text{omb}({}^u \bar{\alpha})_K) : \text{omb}(\widehat{U})_K \longrightarrow \mathbb{P}_K^N$$

donne lieu à un K -morphisme $U_K \longrightarrow \mathbb{P}_K^N$ et à un diagramme commutatif

$$(4.3.4) \quad \begin{array}{ccccc} \text{omb}({}^m \bar{\alpha})_K \text{ (resp. } \text{omb}({}^u \bar{\alpha})_K) : & \text{omb}(\widehat{U})_K & \longrightarrow & G_K & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_K^N \\ & \downarrow & \searrow & \nearrow & & \\ & (U_{\text{loc}})_K & \longrightarrow & U_K & & \end{array} .$$

Comme le morphisme $i \circ \text{omb}({}^m \bar{\alpha})_K$ (resp. $i \circ \text{omb}({}^u \bar{\alpha})_K$) se factorise par $i(G_K) \longrightarrow \mathbb{P}_K^N$, et (4.3.3) est fidèlement plat, on en déduit un diagramme commutatif de K -morphisms

$$(4.3.5) \quad \begin{array}{ccc} i(G_K) & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^N \\ \uparrow & \nearrow & \\ (U_{\text{loc}})_K & & \end{array} .$$

Le morphisme horizontal provient alors d'un unique K -morphisme

$(U_{\text{loc}})_K \longrightarrow G_K$, par composition avec i , tel que le diagramme suivant

$$(4.3.6) \quad \begin{array}{ccc} (U_{\text{loc}})_K & \longrightarrow & G_K \\ \uparrow & \nearrow \text{omb}({}^m\bar{\alpha})_K \text{ (resp. } \text{omb}({}^u\bar{\alpha})_K) & \\ \text{omb}(\widehat{U})_K & & \end{array}$$

est commutatif. Puisque (4.3.3) est fidèlement plat et $\text{omb}({}^m\bar{\alpha})_K$ (resp. $\text{omb}({}^u\bar{\alpha})_K$) admet le prolongement $\text{omb}({}^m\bar{\alpha})$ (resp. $\text{omb}({}^u\bar{\alpha})$) à $\text{omb}(\widehat{U})$ il en résulte un diagramme commutatif

$$(4.3.7) \quad \begin{array}{ccc} U_{\text{loc}} & \longrightarrow & G \\ \uparrow & \nearrow \text{omb}({}^m\bar{\alpha}) \text{ (resp. } \text{omb}({}^u\bar{\alpha})) & \\ \text{omb}(\widehat{U}) & & \end{array} .$$

Par un argument de présentation finie on conclut qu'il existe un voisinage ouvert W' (resp. $W'_{(\infty)}$) de la fibre spéciale U_k (resp. $U_{(\infty)k}$), et un S -morphisme $W' \rightarrow G$ (resp. $W'_{(\infty)} \rightarrow G$) redonnant ${}^m\bar{\alpha}$ (resp. ${}^u\bar{\alpha}$) par passage à la fibre formelle. Soient W (resp. $W_{(\infty)}$) le domaine de définition du S -morphisme rationnel donné par $W' \rightarrow G$, et W (resp. $W_{(\infty)}$) $\rightarrow G$ le prolongement de $W' \rightarrow G$ à W (resp. $W_{(\infty)}$). On a alors le

LEMME 4.3.8. *Il existe un ouvert $W \subset U$ (resp. $W_{(\infty)} \subset U_{(\infty)}$) voisinage de la fibre spéciale U_k (resp. $U_{(\infty)k}$), avec $\mathfrak{U}_{(0)}, \mathfrak{U}_{(\infty)} \subset W$ (resp. $W_{(\infty)}$), et un S -morphisme $W \rightarrow G$ (resp. $W_{(\infty)} \rightarrow G$) tel que par passage à la fibre formelle donne ${}^m\bar{\alpha}$ (resp. ${}^u\bar{\alpha}$).*

PREUVE. Soit W (resp. $W_{(\infty)}$) comme ci-dessus. Il suffit de prouver que $\mathfrak{U}_{(0)}, \mathfrak{U}_{(\infty)} \subset W$ (resp. $W_{(\infty)}$). Soient $\mathfrak{p} \subset V[[T]][T^{-1}]$ un idéal premier, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap V[T, T^{-1}]$, $U_{\mathfrak{q}} = \text{Spec}(V[T, T^{-1}]_{\mathfrak{q}})$, et $\mathfrak{U}_{(0)\mathfrak{p}} = \text{Spec}(V[[T]][T^{-1}]_{\mathfrak{p}})$. Voyons que W (resp. $W_{(\infty)}$) $\supset \mathfrak{U}_{(0)}$. Notons que $W \cap U_{\mathfrak{q}} \neq \emptyset$ (resp. $W_{(\infty)} \cap U_{\mathfrak{q}} \neq \emptyset$) car le point générique de $U_{\mathfrak{q}}$ appartient à W (resp. $W_{(\infty)}$).

Soient $R(U)$, $R(U_{\mathfrak{q}})$, $R(\mathfrak{U}_{(0)})$, $R(\mathfrak{U}_{(0)\mathfrak{p}})$ et $R(\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)})$ respectivement le corps de fractions de U , $U_{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{U}_{(0)}$, $\mathfrak{U}_{(0)\mathfrak{p}}$, et $\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)}$. Comme $\mathfrak{U}_{(0)\mathfrak{p}} \rightarrow U_{\mathfrak{q}}$ est fidèlement

plat il suffit de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(R(U)) = \text{Spec}(R(U_q)) & \longrightarrow & G \\
 \uparrow & & \uparrow m_\alpha \text{ (resp. } u_\alpha) \\
 \text{Spec}(R(\mathfrak{U}_{(0)})) = \text{Spec}(R(\mathfrak{U}_{(0)p})) & \longrightarrow & \mathfrak{U}_{(0)}
 \end{array}
 \quad (*)$$

commute, où la flèche horizontale supérieure est induite par W (resp. $W_{(0)} \rightarrow G$). Or la commutativité de $(*)$ découle de la commutativité du diagramme obtenu à partir de $(*)$ en posant $\text{Spec}(R(\widehat{\mathfrak{U}}_{(0)}))$ à la place de $\text{Spec}(R(\mathfrak{U}_{(0)}))$; cette commutativité résultant de (4.3.7), et (4.1.19), (ii), compte tenu que ${}^m\alpha = \text{tr}_{\theta_i} \alpha$ et ${}^u\alpha = \alpha({}^m\alpha)^{-1}$ pour ℓ assez grand (cf. preuve de (4.1.6)). On procède à prouver que $\mathfrak{U}_{(\infty)} \subset W$ comme ci-dessus à partir du fait que $\widehat{\mathfrak{U}}_{(\infty)} \rightarrow U \rightarrow G$ est algébrisable. C.Q.F.D.

Comme ${}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0$ établit un isomorphisme entre U et \underline{G}_{mS} , on définit un S -morphisme

$$(4.3.9) \quad {}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0(W) \longrightarrow G$$

comme étant le seul qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 W & \longrightarrow & G \\
 \downarrow 2 & \nearrow & \\
 {}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0(W) & &
 \end{array}
 \quad (4.3.10)$$

où le morphisme horizontal est donné par (4.3.8). Noter que $\widehat{W} = \widehat{U}$, et $({}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0(W))^{\wedge} = \widehat{\underline{G}}_{mS}$, et que le diagramme (4.3.10) donne par passage à la fibre formelle le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 m_{\bar{\alpha}} : \widehat{U} & \longrightarrow & \widehat{G} \\
 {}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0 \downarrow & \nearrow m_f & \\
 \widehat{\underline{G}}_{mS} & &
 \end{array}
 .$$

Le morphisme $W \times W \rightarrow \underline{G}_{mS}$ composé de ${}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0 \times {}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0$ et la multiplication de \underline{G}_{mS} est fidèlement plat. En effet la platitude est facilement vérifiée et la surjectivité résulte du lemme (0.33), compte tenu que $\mathfrak{U}_{(0)} \subset W$.

Posons $W^{(2)} = W \times W$. Soit $W^{(2) '}$ l'image inverse de ${}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0(W)$ par $W^{(2)} \rightarrow \underline{G}_{mS}$. Il est clair que le complété formel $\widehat{W}^{(2) '}$ de $W^{(2) '}$ s'identifie à

$\widehat{U} \times \widehat{U}$. La commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{W}^{(2)'} = \widehat{U} \times \widehat{U} & \longrightarrow & \widehat{G} \times \widehat{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0(\widehat{W}) = \widehat{\mathbb{G}}_{mS} & \xrightarrow{m_f} & \widehat{G} \end{array},$$

où la flèche horizontale est induite par ${}^m\overline{\alpha} \times {}^m\overline{\alpha}$, et la verticale droite par la multiplication de G , entraîne celle de

$$(4.3.11) \quad \begin{array}{ccc} W^{(2)'} & \longrightarrow & G \times G \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0(\widehat{W}) & \longrightarrow & G \end{array}.$$

Le morphisme composé $W^{(2)'} \rightarrow G$ admet un prolongement $W^{(2)} \rightarrow G$, d'où par descente fidèlement plate il résulte que le morphisme ${}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0(W) \rightarrow G$ admet un prolongement ${}^mg : \widehat{\mathbb{G}}_{mS} \rightarrow G$. (Noter que ${}^m\varphi_{\mathfrak{T}}^0(W)$ est un ouvert schématiquement dense de $\widehat{\mathbb{G}}_{mS}$ et que G est séparé). Comme la fibre formelle ${}^mf : \widehat{\mathbb{G}}_{mS} \rightarrow \widehat{G}$ de ${}^mg : \widehat{\mathbb{G}}_{mS} \rightarrow G$ est un S -homomorphisme, il en résulte que mg est un S -homomorphisme de groupes qui vérifie

$$(4.3.12) \quad {}^m\alpha = {}^mg \circ {}^m\varphi^0.$$

On a alors la

PROPOSITION 4.3.13. *Il existe un S -homomorphisme de groupes ${}^mg : \widehat{\mathbb{G}}_{mS} \rightarrow G$ dont la fibre formelle ${}^m\widehat{g}$ coïncide avec mf et tel que ${}^m\alpha = {}^mg \circ {}^m\varphi^0$.*

(4.4) Montrons que ${}^uf : \widehat{\wedge}^0 \rightarrow \widehat{G}$ provient par passage à la fibre formelle d'un S -homomorphisme ${}^ug : \wedge^0 \rightarrow G$, c.à.d. qu'il existe un diagramme commutatif de S -groupes

$$\begin{array}{ccc} {}^uf : \widehat{\wedge}^0 & \longrightarrow & \widehat{G} \\ \downarrow & \nearrow {}^ug & \\ \wedge^0 & \longrightarrow & G \end{array}.$$

La preuve de ce fait suit les mêmes lignes que celle de (4.3.13). Commençons par prouver la

PROPOSITION 4.4.1. *Il existe un entier n , un S -homomorphisme formel ${}^u f_n : \widehat{\Lambda}_n^0 \longrightarrow \widehat{G}^0$ et un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} {}^u f : \widehat{\Lambda}^0 & \longrightarrow & \widehat{G}^0 \\ \downarrow & \nearrow {}^u f_n & \\ \widehat{\Lambda}_n^0 & & . \end{array}$$

Notons d'abord qu'il résulte de (4.1.11) que

$$(4.4.2) \quad \mathrm{tr}_{\theta_n} {}^u \varphi^0 = (1 - t^{-1} T^n)^{-1},$$

et de la preuve de (4.1.20) qu'il existe n , tel que $n', n'' \geq n$ entraînent que

$$(4.4.3) \quad \mathrm{tr}_{\theta_{n'}} {}^u \alpha = \mathrm{tr}_{\theta_{n''}} {}^u \alpha.$$

LEMME 4.4.4. *On a alors que $\mathrm{tr}_{\theta_{n'}} {}^u \alpha$ coïncide avec la section identité de G pour tout entier $n' \geq n$.*

(La Preuve de (4.4.4) suit celle de (4.1.6).)

REMARQUE 4.4.5. *Posons ${}^u f = ({}^u f^{(\mu)})$ et ${}^u \widehat{\alpha} = ({}^u \alpha^{(\mu)})$ et ${}^u \widehat{\varphi}^0 = (({}^u \varphi^0)^{(\mu)})$. Comme on a ${}^u f^{(\mu)} \circ ({}^u \varphi^0)^{(\mu)} = {}^u \alpha^{(\mu)}$, il en résulte que ${}^u f^{(\mu)} \left((\mathrm{tr}_{\theta_v} {}^u \varphi^0)^{(\mu)} \right)$, pour tout entier $v \geq n$, coïncide avec la section identité de $G^{(\mu)}$ (au-dessus de $\mathfrak{U}^{(\mu)}$).*

Soient $0 \leq n \leq p$ des entiers. On pose

$$(4.4.6) \quad \Lambda_{np}^0 = \mathrm{Ker} \left(\Lambda_p^0 \longrightarrow \Lambda_{n-1}^0 \right),$$

et, pour tout $n \leq v \leq p$, on désigne par $\Lambda_{np}^0[v]$ le sous-groupe de Λ_{np}^0 dont les sections sont de la forme $1 + \sum \alpha_q T^{vq}$ ($1 \leq q \leq [p/v]$). On a un S -homomorphisme

$$(4.4.7) \quad \prod_{n \leq v \leq p} \Lambda_{np}^0[v] \longrightarrow \Lambda_{np}^0$$

donné par la multiplication de Λ_p^0 .

On vérifie facilement que (4.4.7) est un S -épimorphisme. Soit pour tout $n \leq v \leq p$,

$$(4.4.8) \quad \mathfrak{U}[v] = \prod_{k=1}^{[p/v]+2} \mathfrak{U}(k) \text{ (on pose } \mathfrak{U}(k) = \mathfrak{U}_{(0)}).$$

Soit, pour tout $n \leq v \leq p$,

$$(4.4.9) \quad \gamma[v] : \mathfrak{U}[v] \longrightarrow \wedge_{np}^0[v]$$

le morphisme obtenu en composant

$$\prod_{k=1}^{[p/v]+2} \mathrm{tr}_{\theta_v}^u \varphi^0 : \mathfrak{U}[v] \longrightarrow \prod_{k=1}^{[p/v]+2} \wedge_{np}^0, \quad ,$$

(c.à.d. le morphisme produit $([p/v] + 2)$ -fois de $\mathrm{tr}_{\theta_v}^u \varphi^0 : \mathfrak{U}_{(0)} \longrightarrow \wedge_{np}^0$ ($p \geq v \geq n$)) avec le morphisme induit par le produit \wedge_{np}^0 . Il résulte de (0.33) que (4.4.9) est fidèlement plat, et à fortiori que le morphisme

$$(4.4.10) \quad \prod_{n \leq v \leq p} \gamma[v] : \prod_{n \leq v \leq p} \mathfrak{U}[v] \longrightarrow \prod_{n \leq v \leq p} \wedge_{np}^0[v]$$

l'est aussi.

Soit $\mathcal{V} \subset \prod_{n \leq v \leq p} \wedge_{np}^0[v]$ l'ouvert de platitude du morphisme (4.4.7). Soit

$$W \subset \prod_{n \leq v \leq p} \mathfrak{U}[v]$$

l'image inverse de \mathcal{V} par $\prod_{n \leq v \leq p} \gamma[v]$. Soit $\mathcal{V}' \subset \wedge_{np}^0$ l'ouvert image de \mathcal{V} par (4.4.7). Il résulte du théorème de platitude générique (cf. [10], pg. 153) et du théorème de platitude par fibres (compte tenu que (4.4.7) est un morphisme surjectif) que les fibres de \mathcal{V}' sont non-vides. On a alors que le morphisme

$$\mathcal{V}' \times \mathcal{V}' \longrightarrow \wedge_{np}^0$$

induit par le produit est fidèlement plat (encore par le théorème de platitude par fibres). Soit $W \longrightarrow \wedge_{np}^0$ le morphisme composé de la restriction de $\prod_{n \leq v \leq p} \gamma[v]$ à W avec (4.4.7). Il résulte de ce qui précède que le morphisme

$$(4.4.11) \quad W \times W \longrightarrow \wedge_{np}^0, \quad ,$$

obtenu à partir de la multiplication de \wedge_{np}^0 ; est fidèlement plat. Pour tout $n \leq v \leq p$ on a un morphisme

$$(4.4.12) \quad g[v] : \mathfrak{U}[v] \longrightarrow G$$

composé de $\prod_{[p/v]+2} \text{tr}_{\theta_v} {}^u\alpha$ avec le morphisme $\prod_{[p/v]+2} G \longrightarrow G$ donné par la loi de composition de G . Soit

$$(4.4.13) \quad \prod_{n \leq v \leq p} \mathfrak{U}[v] \longrightarrow G$$

le morphisme obtenu à partir de $\prod_{n \leq v \leq p} g[v]$ et la loi de composition de G . Soit

$$(4.4.14) \quad W \longrightarrow G$$

le morphisme donné par la restriction de (4.4.13) à W . Soit

$$(4.4.15) \quad W \times W \longrightarrow G$$

le morphisme induit par la loi de composition de G à partir de (4.4.14).

PREUVE. de la Proposition (4.4.1)

Posons $(\wedge^0)^{(\mu)} = \wedge^0 \times_S S_\mu$, où $S_\mu = \text{Spec}(V/m^{\mu+1}) \dots \text{etc.}$

Soit ${}^u f^{(\mu)} : (\wedge^0)^{(\mu)} \longrightarrow G^{(\mu)}$ la restriction de ${}^u f$. On montre par un argument de présentation finie qu'il existe un entier $p \geq n$ et un S_μ -homomorphisme ${}^u f_p^{(\mu)} : (\wedge_p^0)^{(\mu)} \longrightarrow G^{(\mu)}$ qui permet de factoriser ${}^u f^{(\mu)}$ à travers $(\wedge^0)^{(\mu)} \longrightarrow (\wedge_p^0)^{(\mu)}$. Il suffit alors de prouver que $(\wedge_{np}^0)^{(\mu)} \subset \text{Ker } {}^u f_p^{(\mu)}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (W \times W)^{(\mu)} & \longrightarrow & G^{(\mu)} \\ \downarrow & \nearrow & \\ (\wedge_{np}^0)^{(\mu)} & & \end{array},$$

où la flèche horizontale est induite par (4.4.15), la verticale par (4.4.11), et la diagonale par la restriction de ${}^u f_p^{(\mu)}$ à $(\wedge_{np}^0)^{(\mu)} \subset (\wedge_p^0)^{(\mu)}$. Vu que la flèche verticale est fidèlement plate et la remarque (4.4.5), on en déduit que la restriction de ${}^u f_p^{(\mu)}$ à $(\wedge_{np}^0)^{(\mu)}$ est l'homomorphisme trivial. C.Q.F.D.

Soient $W_{(\infty)} \subset U_{(\infty)}$ le voisinage de la fibre spéciale $U_{(\infty)k}$ et

$$(4.4.16) \quad \beta : W_{(\infty)} \longrightarrow G$$

le S -morphisme donnés par (4.3.8). La fibre formelle $\widehat{\beta}$ de β induit alors ${}^u \overline{\alpha}$.

Le morphisme

$$(4.4.17) \quad \overbrace{U \times \dots \times U}^{(n+1)\text{-fois}} \longrightarrow \mathfrak{Z}_n^0$$

obtenu à partir de $\prod^{n+1} \varphi_{\mathfrak{C}}^0$ et le produit de \mathfrak{S}_n^0 est fini et fidèlement plat. Soit $W_{(\infty)} \subset U_{(\infty)}$ défini comme dans (4.3.8). Soit

$$(4.4.18) \quad \prod^{n+1} (W_{(\infty)} \cap U) \longrightarrow \mathfrak{S}_n^0$$

le morphisme donné par la restriction de (4.4.17) à l'ouvert $\prod^{n+1} W_{(\infty)} \cap U$. Son image est un ouvert de \mathfrak{S}_n^0 voisinage de la fibre spéciale $(\mathfrak{S}_n^0)_k$. (Ceci résulte du fait que $W_{(\infty)} \cap U$ est un voisinage de la fibre spéciale U_k) Soit

$$(4.4.19) \quad \mathfrak{B} = \prod^{n+1} (W_{(\infty)} \cap U) \longrightarrow G$$

le morphisme obtenu par composition de $\prod^{n+1} \beta$ (cf. (4.4.16)) et celui donné par la loi de composition de G

$$\prod^{n+1} G \longrightarrow G.$$

Soit x un point de la fibre spéciale $(\mathfrak{S}_n^0)_k$. Notons par $(\mathfrak{S}_n^0)_x$ le S -schéma localisé en x du S -schéma \mathfrak{S}_n^0 , et par $\left(\prod^{n+1} U\right)_x$ (resp. \mathfrak{B}_x) l'image inverse de $(\mathfrak{S}_n^0)_x$ par (4.4.18) (resp. (4.4.19)). Il est clair que $\left(\prod^{n+1} U\right)_x$ (resp. \mathfrak{B}_x) est un S -schéma semi-local, et que $\left(\prod^{n+1} U\right)_x = \mathfrak{B}_x$.

LEMME 4.4.20. *Le S -morphisme*

$$\left(\prod^{n+1} U\right)_x \longrightarrow G$$

se "descend" en un S -morphisme

$$(\mathfrak{S}_n^0)_x \longrightarrow G.$$

Le (4.4.20) résulte du

LEMME 4.21. *Soit X un S -schéma local noethérien. Soit $Y \longrightarrow X$ un S -morphisme fidèlement plat et fini. Soit Z un S -schéma de présentation finie et séparé*

Notons par \hat{X} (resp. \hat{Y}, \hat{Z}) le complété formel de X (resp. Y, Z) le long de la fibre spéciale X_k (resp. Y_k, Z_k). Soit $f : \hat{X} \longrightarrow \hat{Z}$ un S -morphisme formel tel qu'il existe un S -morphisme $Y \longrightarrow Z$ rendant commutatif le dia-

gramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{Y} & \longrightarrow & \widehat{Z} \\ \downarrow & \nearrow f & \\ \widehat{X} & & \end{array}$$

Alors le S -morphisme $Y \longrightarrow Z$ se descend en un S -morphisme $g : X \longrightarrow Z$ tel que $\widehat{g} = f$.

La preuve de (4.4.21) résulte par descente fidèlement plate à partir des isomorphismes

$$\text{omb}(\widehat{Y}) \simeq \text{omb}(\widehat{X}) \times Y$$

et

$$\text{omb}(Y \times Y)^\wedge \simeq \text{omb}(\widehat{X}) \times (Y \times Y),$$

qui proviennent du fait que $Y \longrightarrow X$ est fini.

Le lemme (4.4.20) résulte de (4.4.21) en posant $Y = \left(\prod_x^{n+1} U \right)_x$, $X = (\mathfrak{I}_n^0)_x$, et $Z = G$. On prend comme f le morphisme induit par ${}^u f_n$ (cf. (4.4.1)) et comme le morphisme $Y \longrightarrow Z$ celui induit par (4.4.19). Il résulte de (4.4.20) l'existence d'un ouvert $W' \subset \mathfrak{I}_n^0$ voisinage de la fibre spéciale $(\mathfrak{I}_n^0)_k$, et d'un S -morphisme

$$W' \longrightarrow G$$

tel que par passage au complété formel $\widehat{W}' = (\mathfrak{I}_n^0)^\wedge$ coïncide avec le S -homomorphisme

$$\widehat{\mathfrak{I}}_n^0 \longrightarrow \widehat{\Lambda}_n^0 \xrightarrow{{}^u f_n} \widehat{G}.$$

D'autre part le diagramme suivant est commutatif

$$(4.4.22) \quad \begin{array}{ccc} \prod^{n+2} \widehat{U} = \left(\prod^{n+2} (W_{(\infty)} \cap U) \right)_{W'}^\wedge & \longrightarrow & \widehat{G} \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow {}^u f_n \\ (\mathfrak{I}_n^0)^\wedge = \widehat{W}' & \longrightarrow & \widehat{\Lambda}_n^0 \end{array}$$

Le morphisme horizontal (resp. vertical) étant donné par $\prod^{n+2} \widehat{\beta} = \prod^{n+2} {}^u \overline{\alpha}$ (resp. $\prod^{n+2} \varphi_{\mathfrak{C}}^0$) suivi de $\prod^{n+2} \widehat{G} \longrightarrow \widehat{G}$ (resp. $\prod^{n+2} \widehat{\mathfrak{I}}_n^0 \longrightarrow \widehat{\mathfrak{I}}_n^0$) induit par la loi de

composition de \widehat{G} (resp. $\widehat{\mathfrak{S}}_n^0$). La commutativité résulte de ${}^u\overline{\alpha} = {}^u f_n \circ \widehat{\varphi}_T^0$. Comme le point générique ξ de $\prod_{n+2} W_{(\infty)} \cap U$ appartient à l'image du morphisme

$$\text{omb} \left(\prod_{n+2} (W_{(\infty)} \cap U)_{W'}^\wedge \right) \rightarrow \prod_{n+2} W_{(\infty)} \cap U ,$$

on démontre que le diagramme suivant

$$(4.4.23) \quad \begin{array}{ccc} \prod_{n+2} (W_{(\infty)} \cap U)_{W'} & \xrightarrow{\quad} & G \\ \downarrow & \nearrow & \\ W' & & \end{array}$$

est commutatif. (Noter que le morphisme horizontal est la restriction à $\prod_{n+2} (W_{(\infty)} \cap U)_{W'}$ de (4.4.19) et que le diagramme (4.4.22) s'obtient par passage à la fibre formelle de (4.4.23)). Comme le morphisme horizontal de (4.4.23) admet un prolongement à $\prod_{n+2} (W_{(\infty)} \cap U)$, compte tenu que $\prod_{n+2} (W_{(\infty)} \cap U) \rightarrow \mathfrak{S}_n^0$ est fidèlement plat (On a d'après (4.3.8) que $\mathfrak{U}_{(0)} \subset W_{(\infty)} \cap U$. Il suffit alors d'appliquer (0.33)), on a alors

LEMME 4.4.24. *Le S -morphisme $W' \rightarrow G$ admet un prolongement $\mathfrak{S}_n^0 \rightarrow G$ qui est en fait un S -homomorphisme. On a aussi un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n^0 & \xrightarrow{\quad} & G \\ \downarrow & \nearrow {}^u g_n & \\ \wedge_n^0 & & \end{array}$$

de S -homomorphismes tel que ${}^u\alpha = {}^u g_n \circ {}^u\varphi_T^0$.

CONCLUSION (4.4.25). D'après (4.1.6) on a $\alpha = {}^m\alpha \circ {}^u\alpha$, avec ${}^m\alpha = {}^m g \circ {}^m\varphi_T^0$ et ${}^u\alpha = {}^u g_n \circ {}^u\varphi_T^0$ (cf. (4.3.13) et (4.4.24)). Soit $g = {}^m g \circ {}^u g_n : \mathfrak{S}_n^0 \rightarrow G$ le S -homomorphisme défini à partir de la décomposition $\mathfrak{S}_n^0 = \mathbb{G}_{m_S} \times \wedge_n^0$. Compte tenu que $\varphi_T^0 = ({}^m\varphi_T^0, {}^u\varphi_T^0)$ on a $\alpha = g \circ \varphi_T^0$. L'unicité de la factorisation formelle (cf. (3.17)) $\widehat{\alpha} = f \circ \widehat{\varphi}_T^0$ entraîne que $\widehat{g} = f$.

On achève ainsi la démonstration du théorème (1.4.4) dans le cas d'un trait complet de base S . En vertu de (1.4.6) ceci entraîne le théorème (1.4.4) pour un trait de base.

5. Preuve du théorème (1.4.4)

Montrons d'abord la

PROPOSITION 5.1. *Soit A un anneau noethérien local réduit. Notons par \hat{A} le complété formel de A pour la topologie m_A -adique. (On pose $\mathfrak{U} = \text{Spec}(A[[T]])$). Soit $\alpha \in G(\mathfrak{U})$ tel qu'il existe un \hat{A} -homomorphisme formel $f : \hat{\mathfrak{J}}^0 \rightarrow \hat{G}$ avec $\hat{\alpha} = f \circ \hat{\varphi}_T^0$. Il existe alors $g \in \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathfrak{J}^0, G)$ tel que $\alpha = g \circ \varphi_T^0$.*

PREUVE. Supposons d'abord que A est intègre. Soit V un anneau de valuation discrète qui majore A . Soit K le corps des fractions de A . Noter que K est aussi le corps des fractions de V . Soit $\mathfrak{U}' = \text{Spec}(V[[T]][T^{-1}])$. Soit α' le morphisme composé suivant

$$\mathfrak{U}' \longrightarrow \mathfrak{U} \xrightarrow{\alpha} G.$$

D'après § 4 il existe un V -homomorphisme $g' : \mathfrak{J}_V^0 \rightarrow G_V$ tel que $\alpha' \equiv g' \circ \varphi_T^0 \pmod{G(V[[T]])}$. L'hypothèse donne $\hat{\alpha}' = \hat{g}' \circ \hat{\varphi}_T^0$, d'où il résulte que $\alpha' = g' \circ \varphi_T^0$. On vérifie ensuite que la fibre générique g'_K de g' est un K -homomorphisme de \mathfrak{J}_K^0 dans G_K , tel que $\alpha_K = g'_K \circ (\varphi_T^0)_K$. On peut même supposer par un argument de locale présentation finie qu'il existe un K -homomorphisme pour n convenable

$$g_K : (\mathfrak{J}_n^0)_K \longrightarrow G_K$$

tel que $\alpha_K = g_K \circ (\varphi_T^0)_K$.

Montrons que g_K admet un prolongement à \mathfrak{J}_n^0 . On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \prod_{n+2} \mathfrak{U}_K & \longrightarrow & G_K \\ \downarrow & \nearrow & \\ (\mathfrak{J}_n^0)_K & & \end{array} .$$

La flèche verticale admet un prolongement $\prod_{n+2}^{n+2} \mathfrak{U} \longrightarrow G$, à savoir, le composé de $\prod_{n+2}^{n+2} \alpha$ avec $\prod_{n+2}^{n+2} G \longrightarrow G$. D'où g_K admet aussi un prolongement g à \mathfrak{Z}_n^0 , qui doit être nécessairement un A -homomorphisme.

Supposons maintenant A réduit. Soit I l'ensemble des composantes irréductibles de $\text{Spec}(A)$. Pour tout $s \in I$ notons par K_s le corps des fractions de la composante irréductible s . Posons $S' = \text{Spec}\left(\prod_{s \in I} K_s\right)$. D'après ce qui précède (en raisonnant composante par composante) on peut trouver un S' -homomorphisme $g_{S'} : \mathfrak{Z}_n^0 \longrightarrow G_{S'}$ tel que $\alpha_{S'} = g_{S'} \circ (\varphi_T^0)_{S'}$. On conclut à l'existence d'un S -homomorphisme g prolongeant $g_{S'}$ par un argument de fidèle platitude calqué sur celui qui précède. C.Q.F.D.

Soit A un anneau noethérien. Montrons (1.4.4) si $S = \text{Spec}(A)$. La proposition (3.1) permet de supposer que A est réduit. Soit s un point de S , et notons par S_s le localisé de S en s . Soit $\alpha \in G(\mathfrak{U})$. Par (5.1) il existe un S_s -homomorphisme $f_s : \mathfrak{Z}_{S_s}^0 \longrightarrow G_{S_s}$ tel que $\alpha_{\{S_s\}} \equiv f_s \circ (\varphi_T^0)_{S_s} \pmod{G(\text{omb}(\mathfrak{X}_{S_s}))}$. Donc $\alpha_{S_s} \equiv f_s \circ (\varphi_T^0)_{S_s}$. On peut alors trouver un ouvert U_s voisinage de s , et un U_s -homomorphisme $f_{U_s} : \mathfrak{Z}_{U_s}^0 \longrightarrow G_{U_s}$ tel que $\alpha_{U_s} \equiv f_{U_s} \circ (\varphi_T^0)_{U_s} \pmod{G(\text{omb}(\mathfrak{X}_{U_s}))}$. On conclut par (1.4.6) qu'il existe un S -homomorphisme $f : \mathfrak{Z}^0 \longrightarrow G$ tel que $\alpha \equiv f \circ \varphi_T^0 \pmod{G(\text{omb}(\mathfrak{X}))}$. Ce qui achève la preuve de (1.4.4).

6. Autodualité de \mathfrak{Z}

Soit A un anneau noethérien. Soit $S = \text{Spec}(A)$. Il résulte alors de (1.6.6) en posant $G = \underline{G}_{mS}$ un isomorphisme

$$\text{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{Z}, \underline{G}_{mS}) \simeq \underline{G}_{mS}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{Z}(S).$$

On a alors l'isomorphisme suivant de foncteurs en groupes sur la catégorie des S -schémas noethériens affines

$$(6.1) \quad \underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr}}(\mathfrak{Z}, \underline{G}_{mS}) \simeq \mathfrak{Z}.$$

En fait (6.1) est la restriction d'un isomorphisme entre les foncteurs corepondants sur la catégorie des schémas affines, qui fait de \mathfrak{Z} propre dual de Cartier. Supposons d'abord que A est une algèbre sur le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} . Pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$ et toute section w de \mathfrak{Z} posons

$$(6.2) \quad \partial_m w = \text{Res}(T^m dw/w).$$

On définit un S -morphisme

$$(6.3) \quad \langle \dots, \dots \rangle : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS}$$

comme suit. Soient

$$u = T^{\varepsilon(u)}(1 + a_{-1}t^{-1} + \dots + a_{-v}t^{-v})(a_0 + a_1t + \dots) =$$

$$t^{\varepsilon(u)}u' a_0 u'' \in \underline{\mathbb{G}}_{mS}(A[[t]][t^{-1}])$$

et

$$v = T^{\varepsilon(v)}(1 + \alpha_{-1}t^{-1} + \dots + \alpha_{-n}t^{-n})(\alpha_0 + \alpha_1t + \dots) =$$

$$t^{\varepsilon(v)}v' \alpha_0 v'' \in \underline{\mathbb{G}}_{mS}(A[[t]][t^{-1}]).$$

On pose :

$$(6.4) \quad \langle u, v \rangle = (-1)^{\varepsilon(u)\varepsilon(v)} \left(\frac{\alpha_0^{\varepsilon(u)}}{a_0^{\varepsilon(v)}} \right) \frac{\exp\left(\sum_{m>0} \partial_m u \partial_{-m} v / m\right)}{\exp\left(\sum_{m>0} \partial_m v \partial_{-m} u / m\right)}.$$

Notons que la somme $\sum_{m>0} \partial_m u \partial_{-m} v / m$ (resp. $\sum_{m>0} \partial_m v \partial_{-m} u / m$) s'étend à un nombre fini de termes non nuls et définit alors un élément nilpotent de A .

Il est clair que $\langle \dots, \dots \rangle$ est un S -bi-homomorphisme qui vérifie la condition d'anti-symétrie

$$(6.5) \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^{-1} \quad \left(\text{resp. } \langle u, u \rangle = (-1)^{\varepsilon(u)} \right).$$

Vérifions qu'étant donné la section v de $\underline{\mathbb{G}}_{mS}$ au-dessus de \mathfrak{U} alors le S -homomorphisme $f : \mathfrak{S} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS}$ qui lui correspond d'après (1.6.6) est donné par

$$(6.6) \quad f(u) = \langle u, v \rangle.$$

Noter que l'on a l'identité suivante

$$(6.7) \quad d(1 - tT^{-1})/(1 - tT^{-1}) = \left(\sum_{m>0} t^m T^{-m-1} \right) dT,$$

qui entraîne pour tout entier $m > 0$

$$(6.8) \quad \text{Res}(T^m d(1 - tT^{-1})/(1 - tT^{-1})) = t^m.$$

D'autre part l'identité (2.15) dans $(A[[t]][t^{-1}][[T]][T^{-1}])dT$ donne pour tout

entier $m > 0$

$$(6.9) \quad \text{Res} \left(T^{-m} d(1 - t^{-1}T)^{-1} / (1 - t^{-1}T)^{-1} \right) = t^{-m}.$$

Notons que pour tout entier $m > 0$ on a les identités suivantes

$$(6.10) \quad \partial_m u = \partial_m u' \text{ et } \partial_m v = \partial_m v' \text{ (resp. } \partial_{-m} u = \partial_{-m} u' \text{ et } \partial_{-m} v = \partial_{-m} v').$$

Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers $m > 0$ tel que $\partial_m u \neq 0$ (resp. $\partial_m v \neq 0$), et d'autre part $\partial_m u$ (resp. $\partial_m v$) est un élément nilpotent de A pour tout m . On a aussi

$$(6.11) \quad v'' = \exp \left(\sum_{m>0} \frac{\partial_{-m} v t^m}{m} \right) \left(\text{resp. } v' = \exp \left(\sum_{m>0} \frac{\partial_m v t^{-m}}{m} \right) \right).$$

Soit $\mathfrak{S} = \mathfrak{J} \times \check{W}$ le scindage de \mathfrak{S} donné par T . Notons par f' (resp. f'') la restriction de f à \mathfrak{J} (resp. \check{W}). Soit $f''_{\text{omb}} : \text{omb}(\check{W}) \rightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS}$ le S -morphisme induit par f'' d'après (1.5.5). Pour vérifier que le S -homomorphisme f donne lieu, selon la construction de (1.6), à la section $v = T^{\varepsilon(v)} v' \alpha_0 v''$ il suffit de voir que :

- (i) - Le S -homomorphisme f' composé avec la section $-T(t - T)^{-1}$ de \mathfrak{J} au-dessus de \mathfrak{U} donne $\alpha_0 v'$;
- (ii) - le composé de la section $(1 - tT^{-1})$ de $\text{omb}(\check{W})$ au-dessus de $\text{omb}(\mathfrak{X})$ avec f''_{omb} donne v'' .

En effet, noter que le morphisme

$$f_{\text{omb}} : \mathfrak{S}_{\text{omb}} \simeq \mathfrak{J} \times \text{omb}(\check{W}) \rightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS} \text{ (cf. (1.6.3))}$$

est obtenu comme le composé de (f', f''_{omb}) avec le morphisme $\underline{\mathbb{G}}_{mS} \times \underline{\mathbb{G}}_{mS} \rightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS}$ donné par la loi de composition $\underline{\mathbb{G}}_{mS}$. Il en résulte, compte tenu de la description du morphisme d'Abel-Jacobi donnée à la suite de la définition (1.5.18), que (i) et (ii) entraînent que v correspond à f selon la construction de (1.6), vu l'unicité du morphisme f qui factorise v .

Soit $u = -T(t - T)^{-1}$ on a alors (Noter que $\varepsilon(u) = 1$)

$$(6.12) \quad \langle u, v \rangle = \langle -T(t - T)^{-1}, v \rangle = \\ = (-1)^{\varepsilon(v)\varepsilon(u)} \left(\alpha_0^{\varepsilon(u)} / (-t^{-1})^{\varepsilon(v)} \right) \exp \left(\sum_{m>0} \frac{\partial_m v \partial_m (1 - t^{-1}T)^{-1}}{m} \right)^{-1} = \alpha_0 v',$$

comme il résulte de (6.9) et de (6.11), ce qui montre (i). D'autre part on a

$$(6.13) \quad \langle 1 - tT^{-1}, v \rangle = \exp \left(\sum_{m>0} \frac{\partial_{-m} v \partial_m (1 - tT^{-1})}{m} \right) = v'',$$

ce qui montre (ii), et finalement que v provient de f .

Détaillons maintenant comment on passe de l'accouplement (6.4) de \mathfrak{S} défini sur le corps des rationnels \mathbb{Q} à un accouplement défini sur \mathbb{Z} .

Soit A^{N^*} le foncteur en anneaux dont les sections au-dessus d'un anneau A est l'ensemble des suites $(a_n)(n \geq 1)$ de A muni de la loi d'addition (resp. de multiplication) produit. Soit $A^{(-N^*)}$ le foncteur en anneaux dont les sections au-dessus d'un anneau A est l'ensemble des suites $(a_{-n})(n \geq 1)$ de A , tel qu'il existe un entier N vérifiant : pour tout $n \geq 1$ on a $a_{-n}^N = 0$, et $a_{-(N+1)} = a_{-(N+2)} = \dots = 0$, muni de la loi d'addition (resp. multiplication) produit. Soit \mathbb{W} (resp. $\check{\mathbb{W}}$) le foncteur en anneaux défini par le foncteur en ensembles sous-jacent à A^{N^*} (resp. $A^{(-N^*)}$), muni de l'unique loi d'addition $+$ et l'unique loi de multiplication $*$ qui rend le morphisme fonctoriel

$$(6.14) \quad w_\infty : \mathbb{W} \longrightarrow A^{N^*} \quad (\text{resp. } w_{-\infty} : \check{\mathbb{W}} \longrightarrow A^{(-N^*)}),$$

défini par

$$(6.15) \quad w_\infty((Y_n)) = \left(\sum_{nd=m} n Y_n^d \right) \quad \left(\text{resp. } w_{-\infty}((X_{-n})) = \left(\sum_{nd=m} n X_{-n}^d \right) \right)$$

un homomorphisme de foncteurs en anneaux.

On a un isomorphisme de groupes

$$(6.17) \quad E_\infty : \mathbb{W} \longrightarrow \wedge^0 \quad (\text{resp. } E_{-\infty} : \check{\mathbb{W}} \longrightarrow \check{\mathbb{W}})$$

défini par

$$(6.17) \quad E_\infty((Y_n)) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - Y_n T^n)^{-1} \quad \left(\text{resp. } E_{-\infty}((X_{-n})) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - X_{-n} T^{-n}) \right).$$

Notons par $\mathbb{W}_{\mathbb{Q}}$, $\check{\mathbb{W}}_{\mathbb{Q}}$, $A_{\mathbb{Q}}^{N^*}$, ...etc. respectivement la fibre du foncteur \mathbb{W} , $\check{\mathbb{W}}$, A^{N^*} , ...etc. au-dessus de \mathbb{Q} . On peut alors caractériser E_∞ (resp. $E_{-\infty}$) comme étant le seul homomorphisme qui rend commutatif le diagramme suivant

$$(6.18) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{W}_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{(w_\infty)_{\mathbb{Q}}} & A_{\mathbb{Q}}^{N^*} \\ & \searrow (E_\infty)_{\mathbb{Q}} & \swarrow \\ & \wedge_{\mathbb{Q}} & \end{array} \quad (\text{resp. } \begin{array}{ccc} \check{\mathbb{W}}_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{(w_{-\infty})_{\mathbb{Q}}} & A_{\mathbb{Q}}^{(-N^*)} \\ & \searrow (E_{-\infty})_{\mathbb{Q}} & \swarrow \\ & \check{\mathbb{W}}_{\mathbb{Q}} & \end{array}),$$

où la flèche oblique droite fait correspondre à la section (a_n) (resp. (a_{-n})) de

A^{N^*} (resp. $A^{(-N^*)}$) la section $\exp\left(\sum_{m>0} \frac{a_m t^m}{m}\right)$ (resp. $\exp\left(-\sum_{m>0} \frac{a_{-m} t^{-m}}{m}\right)$).

La pré-image de $v \in \check{W}_{\mathbb{Q}}$ (resp. $\wedge_{\mathbb{Q}}$) par cette flèche est donnée par la section (v_{-m}) de $A_{\mathbb{Q}}^{(-N^*)}$ où $v_{-m} = \partial_m v$ ($m > 0$) (resp. la section (v_m) de $A_{\mathbb{Q}}^{N^*}$ où $v_m = \partial_{-m} v$ ($m > 0$)) (cf. (6.2)).

On a un morphisme

$$(6.19) \quad A^{N^*} \times A^{(-N^*)} \longrightarrow A^{(-N^*)}$$

défini par $(y_n)(x_{-n}) = (y_n x_{-n})$ qui fait de $A^{(-N^*)}$ un A^{N^*} -module. Soit

$$(6.20) \quad *' : W \times \check{W} \longrightarrow \check{W}$$

le morphisme défini à partir de (6.19), de w_{∞} et de $w_{-\infty}$ qui fait de \check{W} un W -module. Soit

$$(6.21) \quad \check{W} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS}$$

le S -homomorphisme faisant correspondre $1 + \sum_i \alpha_{-i}$ à la section $1 + \alpha_{-1}t^{-1} + \dots + \alpha_{-n}t^{-n}$. Notons par

$$(6.22) \quad \bar{E} : \check{W} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS}$$

le homomorphisme composé de $E_{-\infty}$ avec (6.21).

Soient $v = E_{-\infty}(\underline{x})T^{\varepsilon(v)}\alpha E_{\infty}(\underline{y})$ et $u = E_{-\infty}(\underline{x}')T^{\varepsilon(u)}a E_{\infty}(\underline{y}')$, avec $\underline{x}, \underline{x}' \in \check{W}$, $a, \alpha \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$, $\underline{y}, \underline{y}' \in W$. On redéfinit (6.4), en général, en posant

$$(6.23) \quad \langle u, v \rangle = (-1)^{\varepsilon(u)\varepsilon(v)} \left(\frac{\alpha^{\varepsilon(u)}}{a^{\varepsilon(v)}} \right) \left(\bar{E}(\underline{x}' *' \underline{y}) \right)^{-1} \bar{E}(\underline{x} *' \underline{y}').$$

Il résulte par construction que l'accouplement (6.22) coïncide avec (6.4) sur la catégorie des \mathbb{Q} -algèbres. Soit v comme ci-dessus. Posons $\underline{y} = (y_n)$ et $\underline{x} = (x_{-n})$. On vérifie immédiatement

$$(6.24) \quad (1 - tT^{-1}) *' (y_1, y_2, \dots) = (ty_1, t^2y_2, \dots) \\ (\text{resp. } (1 - t^{-1}T) *' (x_{-1}, x_{-2}, \dots) = (t^{-1}x_{-1}, t^{-2}x_{-2}, \dots)).$$

On a alors

$$(6.25) \quad \langle 1 - tT^{-1}, v \rangle = E_{\infty}(\underline{y}) \quad (\text{resp. } \langle 1 - t^{-1}T, v \rangle = E_{-\infty}(\underline{x})),$$

ce qui nous permet de montrer que l'accouplement $\langle \dots, \dots \rangle$ donne lieu à un homomorphisme $\langle \dots, v \rangle : \mathfrak{X} \longrightarrow \underline{\mathbb{G}}_{mS}$ qui correspond bien à la section v de $\underline{\mathbb{G}}_{mS}$ par (1.6.6).

REFERENCES

- [1] P. CARTIER, *Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés*, CRAS, t 265 (1967), série A-49.
- [2] P. CARTIER, *Modules associés à un groupe formel commutatif*, CRAS, t 265 (1967), série A-129.
- [3] C. CONTOU-CARRÈRE, *La jacobienne généralisée d'une courbe relative ; construction et propriété universelle de factorisation*, CRAS, t 289 (1979).
- [4] C. CONTOU-CARRÈRE, *Corps de classes local géométrie relatif*, CRAS, t. 292 (1981).
- [5] C. CONTOU-CARRÈRE, *Jacobiennes globales relatives*, in: The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math. 87, Birkhauser, Boston 1990, P. Cartier, et al., eds., pp. 69–109.
- [6] M. DEMAZURE - P. GABRIEL, *Groupes algébriques*, North Holland, 1971.
- [7] A. GROTHENDIECK (M. ARTIN - P. DELIGNE - ... etc), *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, SGA IV, vol.3, Exp. XVIII, Springer-Verlag, L. N. n° 305.
- [7 bis] A. GROTHENDIECK - M. DEMAZURE, *Schémas en groupes*, SGA III, Vol. 1, Springer-Verlag, L.N. n° 151.
- [8] A. GROTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ, *Elements de géométrie algébrique*, Springer-Verlag 1971.
- [9] A. GROTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ, *EGA III (première partie), Etude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publications Mathématiques de l'IHES, vol. n° 11.
- [10] A. GROTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ, *E.G.A. IV (deuxième partie), Etude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publications Mathématiques de l'IHES, vol. n° 24.
- [11] A. GROTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ, *EGA IV (quatrième partie), Etude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publications Mathématiques de l'IHES, vol. n° 32.
- [12] J. LIPMAN, *Rational singularities (Appendix)*, Volume dédié au professeur Oscar Zariski, Publications de l'IHES, vol. n° 36, pp. 273.
- [13] D. MUMFORD, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton University Press 1966.
- [14] J. P. SERRE, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann 1959.
- [15] P. SAMUEL, *Séminaire Bourbaki*, Exp. n° 145 (1956-57).
- [16] R. HARTSHORNE, *Residues and Duality*, Springer-Verlag, L. N. n° 20 (1966).
- [17] Y. KAWADA - I. SATAKE, *Class formations II*, Journal of the Faculty of Sciences, University of Tokyo, vol VII, Part 3 (1956).
- [18] A. WEIL, *Variétés Abéliennes*, Hermann 1948.

Références supplémentaires

- [A-R] G. ANDERSON - F. P. ROMO, *Simple proof of classical explicit reciprocity laws on curves using determinant groupoids over an artinian ring*, Comm. in Alg., Vol. 32, n° 1 (2004).

- [Bei] A. BEILINSON, *ε -factors for the period determinants of curves*, in: *Motives and Algebraic Cycles, A Celebration in Honour of Spencer Bloch* (AMS) (2009).
- [Bei-Dr] A. BEILINSON - V. G. DRINFELD, *Chiral algebras*, AMS 2004.
- [B-B-E] A. BEILINSON - S. J. BLOCH - H. ESNAULT, *ε -factors for Gauss-Manin determinants*, *Moscow mathematical journal* (2002), number 3, pp. 432–477.
- [D] P. DELIGNE, *Le symbole modéré*, *Publications Mathématiques de l'IHES*, vol. 73, (1991).
- [E-L-O] A. EFIMOV - V. A. LUNTS - D. ORLOV, *Deformation theory of objects in homotopy and derived categories III: Abelian categories*, arXiv: math/0702840v3 [mathAG], 04/12/2008.
- [KR] K. RULLING, *The generalised De Rham-Witt complex over a field is a complex of zero cycles*, *Journal of Algebraic Geometry*, 16 (2007), n° 1, pp. 109–169.
- [K-V] M. KAPRANOV - E. VASSEROT, *Formal loops II: A local Riemann-Roch theorem for determinantal gerbs*, *AScENS*, t. 40 (2007).
- [Luo] ZHENBIN LUO, *Contou-Carrère symbol via iterated integrals and its reciprocity law*, arXiv:1003-1431v1[math.DG].
- [PA] P. AMBRUS, *On the kernel and the image of the rigid analytic regulator in positive characteristic*, arXiv:0912.3115v1 [mathAG], 16/12/2009.
- [A-N-P] A. N. PARSHIN, *Representations of higher adelic groups and arithmetic*, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume I*, pp. 362–392, Hindustan Book Agency, New Dehli, 2010, ArXiv:1012.0486 [math.NT] .
- [PR] P. ROMO, *A direct proof of the Steinberg property of the Contou-Carrère symbol*, *Journal of Algebra* 319 (2008), pp. 3164–3174.
- [O-Z] D. OSIPOV - X. ZHU, *A categorical proof of the Parshin reciprocity laws on algebraic surfaces*, *Algebra and Number Theory*, vol. 5 (2011), n° 3, 289–337 (ArXiv: 1012.4848 [math.AG]).

Manoscritto pervenuto in redazione 12 Ottobre 2011.