COLLECTED WORKS
Vol II. Mathematical letters and Unpublished works

Mathematical Reflections

by

Alexandre GROTHENDIECK

Ce texte a été transcrit et édité par Mateo Carmona. La transcription est aussi fidèle que possible au typescript. Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus.

`https://agrothendieck.github.io/`

CONTENTS

Lettre à le Directeur de l'Institut Henri Poincaré, 2.5.1949

Paris le 2.5.1949

Monsieur le Directeur[1] de l'Institut Henri Poincaré.

J'ai l'honneur de solliciter de votre haute bienveillance l'autorisation de travailler à la bibliothèque de l'Institut H. Poincaré.

Je suis licencié ès Sciences.

Recevez, Monsieur le Directeur, mes salutations distinguées.

Alexandre Grothendieck
6 rue du demi-cercle
Montreuil (Seine)[2]

---

[1] **N.d.T** E. Borel

[2] Avis très favorable

Paris, le 2 mai 1949

H. Cartan

Lettre à J. Dixmier, 20.11.1950[3]

A. Grothendieck

33 rue du Maréchal Gérard
Nancy (M et M)

Nancy le 20.11.1950

Cher Monsieur Dixmier,

[3] https://agrothendieck.github.io/divers/LGD201150scan.pdf

Lettre à J. Dixmier, 10.12.1950[4]

A. Grothendieck
33 rue du Maréchal Gérard
Nancy (M et M)

Nancy le 10.12.1950

Cher Monsieur Dixmier,

Merci pour votre lettre et votre tirage à part. – Malheureusement, la suggestion que vous me faites ne m'apporte rien de neuf, car les minimisations dont vous parlez sont à fortiori incluses dans le fait de prendre un flot compact convexe *minimal* (ce qui est possible grâce au théorème de Zorn).

Il est bien vrai que dans un espace complet quelconque, l'enveloppe convexe fermé d'une partie flot compacte est encore flot compacte. Godement nous a donné la démonstration dans le cas où l'espace est séparable ; dans le cas général, on remarque que d'après le théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que toute *suite* extraite de l'enveloppe convexe admet un point faiblement adhérent, ce qui ramène immédiatement au cas séparable. — Notez qu'il existe un assez grand nombre de théorèmes dont l'énoncé ne fait intervenir aucune condition de dénombrabilité, et qui ne peuvent se démontrer sans l'aide du théorème d'Eberlein (j'en connais cinq exemples au moins). Cela tient à ce que l'emploi des suites permet d'appliquer le théorème de Lebesgue sur l'intégrale d'une limite simple de fonctions bornées dans leur ensemble !

Vous me demandez avec raison comment, du théorème sur la moyenne des fonctions flot p.p., on pourrait déduire que tout groupe G borné d'opérateurs dans un Hilbert est semblable à un groupe d'opérateurs unitaries. Si on savait que les fonctions sur G de la forme $\varphi_{x,y}(s) = \langle T^s x, T^s y\rangle$ sont flot p.p., on n'aurait qu'à considérer la forme bilinéaire sur H : $B(x,y) = M_s(\langle T^s x, T^s y\rangle) = M(\varphi_{x,y})$, où M est la moyenne invariante sur l'espace des fonctions flot p.p., et l'affirmation apparaîtrait aisément. J'avais cru voir que ces $\varphi_{x,y}$ sont en effet flot p.p., mais n'en aperçois plus la raison maintenant que je vous écris, de sorte qu'il me semble

[4] https://agrothendieck.github.io/divers/LGD161250scan.pdf

bien possible que je me suis trompé – mais je n'en suis pas convaincu. Comme ces semaines-ci je suis partiellement pris par des soucis matériels de recherche de logement et de déménagement, et ai d'autre part une autre recherche en cours, je ne peux pas avant quelques semaines examiner la question de près, aussi j'ai préféré vous répondre tout de suite. – Il est à noter que la σ-translation à droite de φ_{xy} est $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$, or si σ parcourt le groupe G, $T^\sigma x$ et $T^\sigma y$ y parcourent des parties flot relativement compactes de H. D'autre part $(a,b) \longrightarrow \varphi_{ab}$ est application bilinéaire continue de $H \times H$ dans $C^\infty(G)$. Il n'en suit malheureusement pas pour autant que l'ensemble des $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$ est une partie flot relativement compacte de $C^\infty(G)$, car il est possible de trouver une application bilinéaire continue du produit de deux Hilberts dans un Banach, telle que l'image du produit des deux boules unité ne soit pas flot relativement compacte. – Peut-être m'étais-je trompé sur ce point ?

Je vous joins le tirage à part de ma dernière note.

Recevez mes cordiales salutations

A. Grothendieck

P. S. Les autres résultats de ma précédente lettre, et de celle-ci, ont été regardé par moi avec assez de soin pour être tout à fait certains !

Lettre à J. Dixmier, 7.6.1951

A. Grothendieck
3 chemin du Grand Moulin
Nancy

Nancy le 7.6.1951

Cher Dixmier,

Pouvez-vous m'envoyer votre article sur la trace dans les anneaux de type fini, et votre papier aux Annals sur les "fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs…"?

Je vous signale une réponse (quasi-triviale) à une question que vous posez dans ce dernier papier (vous en connaissez probablement la réponse aujourd'hui): vous demandez si dans T', convergence faible (i.e.: pour $\sigma(T', B)$) implique convergence forte, pour les suites. La réponse est non, car soit $a \in H, a \neq 0$, l'application $x \longrightarrow a \otimes x$ de H dans T' est évidemment un isomorphisme dans; mais si la propriété envisagé était vraie pour T', elle le serait pour ses sous-espaces, donc pour H, ce qui est faux.

Je vous envoie mes meilleures salutations

A. Grothendieck

Lettre à J. Dixmier, 2.5.1952

Nancy le 2.5.1952

Cher Dixmier,

Je n'ai jamais prouvé ni prétendu avoir prouvé le théorème dont tu parles, et qui d'ailleurs est faux. Il est en effet immédiat qu'il équivaudrait à l'énoncé suivant: Si K est un espace compact muni d'une mesure μ, M l'espace des fonctions sur K qui sont mesurables pour μ, muni de la topologie de la convergence *simple*, F un sous-espace de M contenant une suite partout dense, alors il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $K_1 \subset K$ avec $|\mu|(K \cap (??)K_1) < \varepsilon$, les $f \in F$ ayant toutes une restriction à K continue. Or, prends $K = (0, 1)$ avec la mesure de Lebesgue, il est (je pense) connu, et facile à démontrer (excellent exercice Bourbaki) qu'il existe une suite de fonctions mesurables sur K à laquelle toute fonction numérique définie sur K soit adhérente, ce qui prouve en particulier que M lui-même est déjà séparable, or M est loin d'avoir la propriété voulu !

Néanmoins, ton théorème sous sa forme initiale est vrai si F est métrisable, comme tu t'en es sans doute convaincu tout seul, car on se ramène alors au cas où la fonction faiblement mesurable donnée prend ses valeurs dans une partie *équicontinue* de F', cas où l'énoncé est trivial et figure déjà dans une rédaction antérieure. Comme le théorème est vrai encore lorsque F est le dual faible d'un espace métrisable séparable F (puisque alors $t \longrightarrow \lambda_t$ est *fortement* mes.), ou le dual d'un espace de Banach F' (comme par exemple ℓ^∞) pour lequel la boule unité du dual faible F de F' admet une suite partout dense (même méthode que pour F du type (f)), il reste que dans les cas usuels, le théorème envisagé est valable. On pourrait même remarquer (re-exercice ?) que la catégorie d'espaces localement convexes séparables F pour lesquels l'énoncé envisagé est vrai, est stable pour le produit topologique ou la somme directe d'un ensemble dénombrable d'espaces facteurs, et par l'opération de prendre un quotient ou une topologie moins fine – donc aussi pour les limites inductives dénombrables etc – en fait, on attrape tous les espaces raisonnables de l'Analyse.

Bien à toi

A. Grothendieck

Lettre à J. Dixmier, 28.6.1954

A. Grothendieck
1052 rua Oscar Freire
Sao Paulo (Brésil)

Sao Paulo le 28.6.1954

Cher Dixmier,

Connais-tu la réponse à la question suivante. Soit $\underline{A}$ un anneau d'opérateurs dans un Hilbert H, existe-t-il une projection u de norme l de $R(H)$ sur $\underline{A}$, compatible avec l'involution, et telle que $u(ATB) = Au(T)B$ pour $A, B \in \underline{A}$? C'est vrai si H est de dimension finie (et évidemment c'est bien facile dans ce cas), ou si $\underline{A} \supset \underline{A}'$, et de ce dernier cas on déduit facilement que c'est vrai si $\underline{A}$ est commutative (commencer à appliquer le résultat précédent à un anneau commutatif maximal $\underline{B}$ contenant $\underline{A}$, d'autre part on sait qu'il existe une projection de $\underline{B}$ sur $\underline{A}$ qui a les propriétés voulues). Bien entendu, même si $\underline{A}$ est commutatif maximal, il n'y a pas unicité de la projection u. Voici la démonstration du deuxième cas $\underline{A} \subset \underline{A}'$: Soit K le spectre de $\underline{A}'$, Ω l'ensemble des partitions finies de K en ensembles ouverts et fermés, muni de sa relation d'ordre naturelle; pour $\omega = (\omega_i) \in \Omega$ on pose $u_\omega(T) \sum_i T_{\omega_i} T T_{\omega_i}$, on considère un ultrafiltre sur Ω plus fin que le filtre des sections croissantes, et on pose $u(T) = \lim u_\omega(T)$ (limite faible !) – Le problème m'intéresse pour pouvoir ramener les propriétés vectorielles-topologiques d'algèbres autoadjointes uniformément fermées quelconques d'opérateurs, aux propriétés de $R(H)$, d'où facilement aux propriétés de l'algèbre $R_0(H)$ des opérateurs compacts, ce qui ramènera souvent à des propriétés de nature métrique sur les $R(H)$ où H est de dimension finie. De même, les propriétés des espaces duals de C^*-algèbres (et aussi des espaces L^1 qui interviennent en intégration non commutative) se ramèneraient aux propriétés des espaces $H \widehat{\otimes} H$.

À propos, en vue de simplifier l'exposé de Godement sur la transformation de Fourier des groupes loc. comp. unimod., j'ai eu besoin du résultat suivant, qui se démontre assez facilement en se ramenant à $R(H)$: les formes linéaires positives sur une C^*-algèbre engendrent le dual. Cela est-il connu, ou te semble-t-il utile de publier une petite note là-dessus ?

J'espère que cette lettre t'arrivera, et que tu pourras me donner une réponse positive.

Bien à toi

A. Grothendieck

Lettre à J. Dixmier, 18.7.1954

Sao Paulo le 18.7.1954

Cher Dixmier,

Bien merci pour la copie de ton bouquin, que je n'ai reçu qu'il y a quelques jours, et dont j'ai commencé la lecture avec grand intérêt. Je ne suis pas sur de pouvoir faire des remarques très utiles pour la rédaction, mais bien entendu je lis le crayon à la main, et te communiquerai mes observations à l'occasion. Pour l'instant, je m'aperçois que systématiquement tu n'énonces que pour les seules algèbres de von Neumann des définitions et propositions valables souvent pour des C^*-algèbres arbitraires, c'est parfois dommage. Pour l'instant, je te signale des erreurs (?) de détail. Page 7, il me semble que la caractérisation de T dans le lemme 2, 2°, n'est pas correcte. Page 12, fin du No 2 à la ligne 5 de la fin, je pense que "et un seul" est faux, déjà si $A_i = B_i = \underline{C}$ (mais n'ai pas cherché le contre-exemple). Page 22 lignes 9-10 "il suffit" est manifestement faux, tu penses sans doute au cas $B = 0$. D'autres remarques plus tard. Quelques questions: une sous-algèbre autoadjointe uniformément fermée de $L(H)$, stable pour le sup des familles filtrantes croissantes majorées, est-elle faiblement fermée ? Une C^*-algèbre pour laquelle le sup d'une famille filtrante croissante majorée existe toujours, est-elle isomorphe à une algèbre de von Neumann ? Je ne le sais pas même dans le cas commutatif, ce qui prouve que je ferai bien de lire ton article dans "Summa Brasiliensis", as-tu encore des tirages à part ? Je suis aussi bien curieux de la suite du bouquin, et te suis reconnaissant pour tout papier que tu peux me passer là dessus. Feras-tu un Plancherel abstrait pour les C^*-algèbres, qui inclurait la théorie des caractères de Godement ?

La lecture du début de ton bouquin m'a permis aussi de répondre par l'affirmative à la question de ma lettre précédente (je viens de trouver la démonstration aujourd'hui, et ne l'ai pas encore mise par écrit canoniquement, mais je pense qu'il n'y a pas d'erreur). Soit M une sous-algèbre autoadjointe abélienne maximale dans le commutant de A' de l'algèbre de von Neumann A, on sait qu'il existe une projection de $L(H)$ sur M' ayant les propriétés voulues, il suffit donc de trouver une projection analogue de M' sur A. J'arrive à la prouver par un raisonnement direct (grâce au fait que M' est engendré au sens de v.N. par A et la sous-algèbre abélienne M du commutant de A), tout à fait différent du raisonnement du premier cas, calqué plutôt sur la preuve du théorème analogue, bien connu, pour une algèbre Stonienne plongée dans un $C(K)$. Le raisonnement prouve presque qu'il existe même une projection de M' sur A qui est un homomorphisme, et je pense que ça doit en effet pouvoir se prouver (c'est en tous cas vrai dans le cas de la dimension finie, donc il y a de l'espoir!). – En zornifiant sur l'ensemble des sous-C^*-algèbres B de M' contenant A, pour lesquelles une projection $B \longrightarrow A$ du type voulu existe, il faut pouvoir passer de B à son adhérence faible (ce qui est un des deux pas essentiels du raisonnement, inutile dans le cas commutatif rappelé plus haut). Pour ça, on doit introduire le bidual B'' de B, le munir canoniquement d'une structure d'algèbre de von Neumann telle que l'application naturelle $B'' \longrightarrow \overline{B}$ soit un homomorphisme *normal* de B'' sur $\overline{B}$ (*donc se relève*, d'où facilement une application cherchée $\overline{B} \longrightarrow A$ en composant $\overline{B} \longrightarrow B'' \longrightarrow A$). Pour ces histoires de bidual de C^*-algèbre, il faut seulement utiliser le résultat sur le dual que je t'avais signalé dans ma lettre précédente, et qui est presque trivial : *Soit A une C^*-algèbre, u une forme linéaire hermitienne continue sur A, alors on a $u = v - w$, où v et w sont positives, et $\|v\| + \|w\| = \|u\|$.* Démonstration : Soit K la partie de A' formée des formes positives de norme ≤ 1, c'est une partie convexe faiblement compacte contenant 0, et il est trivial que pour $x \in A$, x hermitien, on a $\|x\| = \sup |\langle x, x' \rangle|, x' \in K$. Se bornant aux sous-espaces hermitiens de A et A', le théorème des bipolaires montre que la boule unité de A'_h est l'enveloppe convexe symétrique faiblement fermée de K, i.e. l'ensemble des x (??) $\lambda u - \mu w$, où λ, $\mu \leq 0$, $\lambda + \mu = 1$, v, $w \in K$ (cet ensemble est déjà faiblement compact, car K l'est), ce qui prouve le théorème. Si on ne suppose plus u hermitienne, on aura $u = v + iw$ avec v, w hermitiennes et $\|v\|, \|w\| \leq \|u\|$, et on peut appliquer à v et w le résultat précédent. – De plus, le raisonnement prouve que réciproquement, si A est une algèbre normée complète qui satisfait au théorème précédent (mais où on suppose v et w "bornées" – ce qui est automatiquement vrai si A a une unité), alors (du moins sur sa partie hermitienne) sa norme est la norme polaire de K donc une norme satisfaisant aux identités algébriques qui caractérisent les C^*-algèbres. Si on suppose seulement que les formes positives engendrent algébriquement le dual de A, on peut encore dire (en utilisant Baire) que la norme de A est *équivalente* à la C^*-norme polaire de

K, donc que par un changement de norme A devient une C^*-algèbre. – Enfin, il est probable que dans l'énoncé du théorème plus haut, v et w soient uniques (peut-être en leur imposant d'autres conditions); il en résulterait que si u est centrale, v et w le sont etc. Mais je ne me suis pas amusé à regarder ça de près.

Merci aussi pour ta lettre où tu réponds à mes questions. Je te salue amicalement

A. Grothendieck

Lettre à J. Dixmier, 13.8.1954

1052 rua Oscar Freire
Sao Paulo (Brésil)
USA

Sao Paulo le 13.8.1954

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre détaillée du 28.7. C'est bien dommage que tu penses la théorie des C^*-algèbres trop vaste pour être englobée dans ton bouquin. Mais où serait le mal d'un livre de 400 pages ou plus sur ce sujet, ça serait au contraire bien agréable qu'il en existe un, car ce n'est certes pas amusant de s'orienter à tâtons dans la littérature courante. Je regrette surtout que tu ne fasses pas Plancherel ; car il ne coûte vraiment pas cher, puisqu'on a déjà la bonne technique des algèbres de v.N., et un Plancherel joliment présenté ferait certainement du bien. D'ailleurs, si j'ai bien compris, c'est surtout pour des Plancherels et Cie que sert toute la théorie des C^*-algèbres.

Je précise un point de ma lettre précédente, qui te semblait obscur. Soit A une $*$-algèbre, P l'ensemble des formes positives, unitaires, bornées (au sens algébrique) et normées (i.e. $f(1) = 1$ s'il y a unité) sur A. Soit pour tout $x \in A$: $N(x)^2 = \sup_{f \in P} f(x * x)$, alors on a aussi $N(x) = \sup \|U_x\|$, où U parcourt toutes les représentations unitaires de A. Donc N est une norme sur A telle que l'algèbre complétée de A soit une C^*-algèbre, et les représentations unitaires de A correspondent biunivoquement à celles de cette C^*-algèbre (qui se substitue donc avantageusement à A dans diverses questions, p. ex. Plancherel)[5]. Supposons maintenant que A soit déjà muni d'une norme $\|x\|$ qui en fasse une algèbre normée complète, et pour simplifier supposons qu'il existe une unité. Alors les formes positives unitaires et bornées sont identiques aux formes positives *continues*, les formes normées sont celles telles que $f(1) = 1$, ou encore celles de norme 1. Elles forment une partie convexe faiblement compacte de la partie hermitienne du dual de A. La partie hermitienne de ce dual est le dual de la partie hermitienne de A, il revient

[5]Si $x \in A$ est hermitienne, $N(x) = \sup_{f \in P} |f(x)|$

donc au même de dire que sur A_h, la norme donnée est égale à $N(x) = \sup|f(x)|$, ou que la boule unité de A'_h est l'enveloppe disquée (disquée = convexe symétrique) faiblement fermée de P. Cette dernière par raison de faible compacité n'est autre que l'ensemble des formes $f - g$, f et g positives, $||f|| + ||g|| \leq 1$. S'il en est donc ainsi, la norme donnée est identique à la norme N sur A_h, et par suite *équivalente* à N sur A (car du point de vue réel, une algèbre normée involutive est somme directe topologique de sa partie hermitienne et de sa partie antihermitienne). Donc A est complète pour N, donc à condition de changer $||x||$ par une norme équivalente, A devient une C^*-algèbre. Si on ne veut plus que les deux normes coïncident sur la partie hermitienne, il suffisait même de suppose que toute forme hermitienne sur A est différence de deux formes positives, i.e. que SA'_h est *engendré* par l'enveloppe disquée Q de P. Car A'_h étant tonnelé, il en résulte que Q est un voisinage de O, donc par polarité que les normes $||x||$ et $N(x)$ sur A_h (donc aussi sur A) sont équivalentes.

Soit A une C^*-algèbre. Par bitransposition, toute représentation unitaire de A, soit $x \longrightarrow U(x)$, se prolonge en une application de même norme du bidual A'' dans $L(H)$, et de façon précise sur l'adhérence faible de $U(A)$. Si toute forme positive sur A est de la forme $(U(x)a, a)$ (pour ceci, on prend pour U la somme hilbertienne des représentations unitaires associées aux diverses formes positives normées sur A), la bitransposée U'' est biunivoque, et identifie donc A'' à une algèbre de von Neumann. On voit aussitôt que la topologie ultrafaible de A'' est $\sigma(A'', A')$, en particulier les formes positives normales sur A'' sont les formes positives quelconques sur A. De plus, on constate aussitôt que si V est une représentation unitaire de A, alors V'' est une représentation normale de U'' (ce qui établit une correspondance biunivoque entre les représentations unitaires quelconques de A, et les représentations normales de A''). Cela établit d'ailleurs le fait (facile directement aussi) que la structure d'algèbre de v.N. sur A'' est canonique. Ceci me semble commode dans bien des cas. Ainsi on appellera support d'une forme positive sur A le support de la forme normale sur A'' qu'elle définit (mais gaffe, si A est de v.N. et si la forme donnée est déjà normale, ça fait deux supports différents). Deux formes positives seront dites disjointes si leurs supports sont orthogonaux. Cette fois-ci, il n'y a pas d'ambiguïté quand A est déjà une algèbre de von Neumann et u et v normales, comme il résulte par exemple de la proposition (bien facile): deux formes positives u, v sur la C^*-algèbre A sont disjointes si et seulement si $||u-v|| = ||u|| + ||v||$.

J'en viens à la question d'unicité de la décomposition d'une forme linéaire hermitienne φ comme différence de deux formes positives disjointes u et v. On peut supposer A une algèbre de v.N. et u, v normales. Alors on a un résultat plus général : Soient u, v deux formes positives (finies ou non) normales définies sur A^+, et semi-finies (par quoi on entend qu'il existe un idéal bilatère faiblement dense, sur la partie positive duquel u resp. v est fini). La notion de support est définie de façon évidente; supposons les supports de u et v orthogonaux. Alors je dis que u et v sont uniquement déterminés par la connaissance de la forme $u-v$ (qui est une forme linéaire sur un idéal bilatère faiblement dense convenable de A ; noter que l'ensemble des idéaux bilatères faiblement denses est une base de filtre, ce qui précise le sens de l'énoncé précédent). La démonstration est absolument élémentaire (pas de décompositions spectrales !), on montre directement comment u et v peuvent s'exprimer en termes de $\varphi = u - v$. En fait, on peut encore affaiblir la notion de semi-fini dans cette démonstration. Corollaire: si φ est centrale, u et v sont des traces etc. Mais question: si on ne suppose pas u et v disjointes, peut-on écrire pourtant φ comme différence de deux formes positives normales semi-finies *disjointes* ? C'est bien plausible, mais je n'ai pas encore regardé. – Bien entendu, si on ne suppose plus que A est une algèbre de v.N., on a des mêmes énoncés sans condition de normalité, mais la condition de semi-finitude étant ici remplacée par l'existence d'un idéal bilatère dense (*pour la norme*) sur lequel la forme positive envisagée est finie (ce qui rejoint le point de vue de Godement dans son exposé de Plancherel). On devra passer comme toujours à A'' (mais j'avoue que je n'ai pas fait les vérifications).

Enfin, dans la décomposition canonique $\varphi = u - v$ avec u et v positives, $||\varphi|| = ||u|| + ||v||$, si A est de v.N. et φ ultrafaiblement continue, alors u et v le sont aussi (i.e. sont normales). Il suffit d'exhiber une telle décomposition, avec u et v normales. Mais la topologie ultrafaible de A étant induite par la top. ultrafaible d'un $L(H)$, on peut supposer $A = L(H)$. Mais alors on a une forme bien explicite des formes hermitiennes ultrafaiblement continues, données par des opérateurs à trace hermitiens, dont la décomposition spectrale donne la décomposition voulue.

Malheureusement, je n'ai pas vu de démonstration générale du théorème de commutation suivant (qu'il suffit maintenant d'énoncer pour les formes positives): Soit A alg. de v.N., u une forme positive normale sur A (en fait, il devrait être inutile de suppose u finie, semi- finie devrait suffire), soit B son "commutant" dans A. Alors, B contient son commutant B' dans A. Cela suggère une théorie de la commutation, qui serait la suivante: dis-moi si par hasard tu ne sais pas si elle est fausse. (Mais il me semble que le seul cas présentant des difficultés – i.e. qui ne se réduit pas par des techniques connues de décompositions spectrales – est celui d'une algèbre purement infinie). On prend les commutants dans A (laissant tomber $L(H)$!), notation B', B'' etc. Une sous-algèbre de v.N. de A est dite close, si elle est identique à son bicommutant (question : suffit-il qu'elle contienne le centre ?) Soit P l'ensemble des formes positives normales semi-finies sur A. (Il est cependant possible que la définition donnée plus haut de semi-finie soit trop stricte. Car alors sur un facteur purement infinie, donc simple, une forme semi-finie serait automatiquement finie ; alors ça semble trop beau que la théorie esquissée ci-dessous puisse marcher). On dit que $x \in A$ et $U \in P$ commutent, si $u(xy) = u(yx)$ pour tout y dans un idéal bilatère faiblement dense assez petit (définition sujette à variation, voir ci-dessus). D'où notion de commutant $\gamma(B)$ dans P d'une partie de A, et commutant $\gamma(M)$ dans A d'une partie M de P. Voici ce qui devrait être vrai (et est vrai dans le cas d'une algèbre semi-finie):

Th. 1. — *Les parties de A qui sont des commutants $\gamma(M)$ ($M \subset P$) sont exactement les sous-algèbres closes.*

(Ce théorème serait faux, déjà pour $A = L(H)$, si on restreignait P aux formes finies). Une partie M de P est dite close, si c'est le commutant $\gamma(B)$ d'une partie de A. Une intersection de partie closes est close, d'où partie close engendrée. Si $M \subset P$, soit $\sigma(M) = \gamma(M)'$, $M \longrightarrow \sigma(M)$ établit une correspondance biunivoque entre les parties closes de P et celles de A. On dit que M et N commutent, si $\sigma(M)$ et $\sigma(N)$ commutent. Pour ceci, il faut et il suffit que tout élément de M commute à tout élément de N. Partie commutative de P : qui commute à elle-même. Deuxième conjecture:

Th. 2. — *Tout $u \in P$ commute à lui-même, i.e. la partie close qu'il engendre est* *commutative (ou encore $\gamma(M)$ contient son commutant, ou encore $\sigma(u)$ est commutative). Alors (supposant pour simplifier que supp. $u=1$), la partie close engendrée par u est identique à l'ensemble des bornes supérieures dans P des ensembles de formes ${}^x u = u^x$, où x parcourt la partie positive de $\sigma(u)$. Si u est finie, l'ensemble des formes finies qui sont dans la partie close engendrée par u, est aussi l'adhérence de l'ensemble des ${}^x u = u^x$ (pour la norme du dual de A).*

On pose bien entendu ${}^x u(y) = u(yx)$, $u^x(y) = u(xy)$; si x est positive et $x \in \sigma(u)$, alors ${}^x u = u^x$ est une forme positive (semi-finie). Enfin:

Th. 3. — *Pour qu'une partie close M de P (resp. de la partie P_0 de P formée des formes positives finies) soit commutative, il faut et il suffit que ce soit un lattice (existence du* sup *de deux éléments).*

En vertu du théorème de Kakutani, il s'ensuivra que l'espace vectoriel engendré par M (dans le cas où $M \subset P_0$) est isomorphe avec toutes ces structures à un espace L_1, dont le dual sera alors $\sigma(M)$[6]. – Bien entendu, on dira qu'une partie de P_0 est close si c'est l'intersection de P_0 avec sa clôture dans P.

Dans le cas où A est finie, la théorie se simplifie, car il suggit dans le th. 1 de ne considérer que des formes positives finies ; elle est d'ailleurs à peu près triviale dans ce cas. Dans le cas général, si on est embêté par la considération de formes positives non finies, on peut ignorer l'énoncé 1, et n'envisager que les deux autres énoncés, dans le cas de formes finies.

Dernière question, qui ne devrait pas être très vache : sait-on si toute forme linéaire ultrafaiblement continue u sur l'algèbre de v.N. A admet une décomposition polaire $u =^U v$, avec v forme positive normale, et U partiellement isométrique ? Bien entendu, il y a aussi des questions d'unicité, sous des conditions faciles à préciser.

Pour la démonstration du théorème sur la projection de $L(H)$ sur une sous-algèbre de v.N., je t'enverrai une copie dès que j'aurai rédigé ça. J'écrirai peut-être un petit article à l'occasion.

[6]Ou du moins un quotient de $\sigma(M)$ (car dans le cas du type purement infini, s'introduit une question de supports. Ainsi, $M = \{0\}$ est alors stable, c'est le commutant $\gamma(A)$ de A, donc $\sigma(M) = Z$, or $Z \neq 0$ n0est pas le dual de $\{0\}$!)

J'espère que mes questions ne finissent pas par t'embêter. Meilleures salutations.

A. Grothendieck

P.S. Écris-moi plutôt à mon adresse personnelle, c'est plus sur. – Je sais démontrer qu'en décomposant une distribution centrale de type positif sur un groupe de Lie, on peut se borner à des caractères qui sont des distributions (d'ordre un de plus). Ce n'est pas bien profond d'ailleurs. Est-ce que ça se savait déjà ?

Lettre à J. Dixmier, 24.1.1955

A. Grothendieck
1645 Kentucky Street
Lawrence (Kansas)
USA

Lawrence 24.1.1955

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre. Bien que je me doutais qu'une partie des notions introduites dans mon papier (sinon toutes) devaient être connue, je ne connaissais aucune bibliographie, et ne savais pas, en effet, que les $\Delta_A(t)$ avaient été considérés par [Richard] Kadison. A-t-il aussi la "formule fondamentale" $\Delta_{|AB|} \leq \Delta_{|A|}\Delta_{|B|}$?

Je ne t'ai jamais demandé si une forme linéaire hermitienne ultrafaiblement continue sur une C^*-algèbre se décompose sous la forme $\varphi_1 - \varphi_2$, avec $\varphi_1, \varphi_2 >> 0$ et φ_1 et φ_2 disjointes. Si je me rappelle bien, je t'ai au contraire donné la démonstration dans la dernière lettre de Sao Paulo (mais *l'as-tu reçue ?*) C'était une lettre fort longue, écrite à la machine, où je posais un tas de conjectures[7]. Je n'ai jamais eu de réponse. Mais peut-être n'as-tu pas pu déchiffrer mon écriture dans une lettre antérieure (?!). En effet, on prouve

a) Toute φ hermitienne continue sur une C^*-algèbre A s'écrit $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, avec $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$, $\varphi_1, \varphi_2 >> 0$ (Hahn-Banach) ;

b) Cette décomposition est unique. La condition $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$ équivaut aussi au fait que φ_1 et φ_2 sont disjointes ;

c) Si φ est ultrafaiblement continue (sur A supposé de von Neumann), φ_1 et φ_2 le sont.

[7] Je t'y donnais aussi la démonstration explicite que si A est une *-algèbre normée complète telle que toute forme linéaire hermitienne continue sur A est différence de deux formes positives, alors (par changement de norme) A est équivalente à une C^*-algèbre.

c) est immédiat, car il suffit de prouver l'existence d'au moins une décomposition $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, φ_1 et $\varphi_2 \in A_*$, $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$. Par Hahn-Banach, on est ramené au cas où $A = L(H)$. Mais alors $A_* = L'(H)$ (espace des opérateurs de Fredholm), et la décomposition d'un opérateur de Fredholm hermitien en sa partie positive et négative donne le résultat cherché.

Quant à la preuve de b), je n'ai pas les papiers sous la main (ils sont dans une grosse malle qui va arriver dans quelques semaines). Aussi il vaut mieux que je te la donne quand j'aurai les papiers. J'ai une rédaction complète de ce fourbi (il n'y a donc pas de canular imprévu à craindre, je pense !).

As-tu l'intention de regarder les questions que je pose dans mon papier sur les inégalités de convexité. Et si oui, penses-tu que le fourbi mérite une rédaction soigneuse dans un "joint paper" ? En ce cas, il serait sans doute préférable que tu assumes la rédaction, pour le bien du lecteur !

Je suis en train de passer en revue mes éléments de top. alg. et me délecte dans des diagrammes variés. J'ai beaucoup de temps à moi, et suis ici tout à fait bien.

Amitiés

A. Grothendieck

A GENERAL THEORY OF FIBRE SPACES WITH STRUCTURE SHEAF

University of Kansas, (1955)[8]

Introduction

When one tries to state in a general algebraic formalism the various notions of fibre space: general fibre spaces (without structure group, and maybe not even locally trivial); or fibre bundle with topological structure group G as expounded in the book of Steenrod (The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press); or the "differentiable" and "analytic" (real or complex) variants of theses notions; or the notions of algebraic fibre spaces (over an abstract field k) - one is led in a natural way to the notion of fibre space with a structure sheaf $\mathbf{G}$. This point of view is also suggested a priori by the possibility, now classical, to interpret the (for instance "topological") classes of fibre bundles on a space X, with *abelian* structure group G, as the elements of the first cohomology group of X with coefficients in the sheaf $\mathbf{G}$ of germs of continuous maps of X into G; the word "continuous" being replaced by "analytic" respectively "regular" if G is supposed an analytic re-

[8]National Science Foundation Research Project on Geometry of Function Space. Research Grant NSF - G 1126. Report No. 4. First Edition August, 1955. Second Edition May, 1958

spectively an algebraic group (the space X being of course accordingly an analytic or algebraic variety). The use of cohomological methods in this connection have proved quite useful, and it has become natural, at least as a matter of notation, even when G is not abelian, to denote by $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ the set of classes of fibre spaces on X with structure sheaf $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}$ being as above a sheaf of germs of maps (continuous, or differentiable, or analytic, or algebraic as the case may be) of X into G. Here we develop systematically the notion of fibre space with structure sheaf $\mathbf{G}$, where $\mathbf{G}$ is any sheaf of (not necessarily abelian) groups, and of the first cohomology set $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ of X with coefficients in $\mathbf{G}$. The first four chapters contain merely the first definitions concerning general fibre spaces, sheaves, fibre spaces with composition law (including sheaves of groups) and fibre spaces with structure sheaf. The functor aspect of the notions dealt with has been stressed throughout, and as it now appears should have been stressed even more. As the proofs of most of the facts stated reduce of course to straightforward verifications, they are only sketched or even omitted, the important point being merely a consistent order in the statement of the main facts. In the last chapter, we define the cohomology set $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ of X with coefficients in the sheaf of groups $\mathbf{G}$, so that the expected classification theorem for fibre spaces with structure sheaf $\mathbf{G}$ is valid. We then proceed to a careful study of the exact cohomology sequence associated with an exact sequence of sheaves $e \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{H} \longrightarrow e$. This is the main part, and in fact the origin, of this paper. Here $\mathbf{G}$ is any sheaf of groups, $\mathbf{F}$ a subsheaf of groups, $\mathbf{H} = \mathbf{G}/\mathbf{F}$, and according to various supplementary hypotheses of $\mathbf{F}$ (such as $\mathbf{F}$ normal, or $\mathbf{F}$ normal abelian, or $\mathbf{F}$ in the center) we get an exact cohomology sequence going from $\mathrm{H}^0(X, \mathbf{F})$ (the group of section of $\mathbf{F}$) to $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G})$ respectively $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{H})$ respectively $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{G})$, with more or less additional algebraic structures involved. The formalism thus developed is quite suggestive, and as it seems useful, in particular in dealing with the problem of classification of fibre bundles with a structure group G in which we consider a sub-group F, or the problem of comparing say the topological and analytic classification for a given analytic structure group G. However, in order to keep this exposition in reasonable bounds, no examples have been given. Some complementary facts, examples, and applications for the notions developed will be given in the future. This report has been written mainly in order to serve the author for future reference; it is hoped that it may serve the same purpose, or as an introduction to the subject, to somebody else.

Of course, as this report consist in a fortunately straightforward adaptation of quite well known notions, no real difficulties had to be overcome and there is no claim for originality whatsoever. Besides, at the moment to give this report for mimeography, I hear that results analogous to those of chapter 5 were known for some years to Mr. Frenkel, who did non publish them till now. The author only hopes that this report is more pleasant to read than it was to write, and is convinced that anyhow an exposition of this sort had to be written.

Remark (added for the second edition). It has appeared that the formalism developed in this report, and specifically the results of Chapter V, are valid (and useful) also in other situations than just for sheaves on a given space X. A generalization for instance is obtained by supposing that a fixed group π is given acting on X as a group of homeomorphisms, and that we restrict our attention to the category of fibre spaces over X (and specially sheaves) on which π operates in a manner compatible with its operations on the base X. (See for instance A. Grothendieck, Sur le mémoire de Weil; Généralisations des fonctions abéliennes, Séminaire Bourbaki Décembre 1956). When X is reduced to a point, one gets (instead of sheaves) sets, groups, homogeneous spaces etc. admitting a fixed group π of operators, which leads to the (commutative and non-commutative) cohomology theory of the group π. One can also replace π by a fixed Lie group (operating on differentiable varieties, on Lie groups, and homogeneous Lie spaces). Or X, π are replaced by a fixed ground field k, and one considers algebraic spaces, algebraic groups, homogeneous spaces *defined over* k, which leads to a kind of cohomology theory of k. All this suggests that there should exist a comprehensive theory of non-commutative cohomology in suitable categories, an exposition of which is still lacking. (For the "commutative" theory of cohomology, see A. Grothendieck, Sur quelques points d'Algèbre Homologique, Tohoku Math. Journal, 1958).

I. General fibre spaces

Unless otherwise stated, none of the spaces to occur in this report have to be supposed separated.

1.1 Notion of fibre space

Definition **1.1.1.** — *A* fibre space *over a space X is a triple (X, E, p) of the space X, a space E and a continuous map p of E into X.*

We do not require p to be onto, still less to be open, and if p is onto, we do not require the topology of X to be the quotient topology of E by the map p. For abbreviation, the fibre space (X, E, p) will often be denoted by E only, it being understood that E is provided with the supplementary structure consisting of a continuous map p of E into the space X. X is called the *base space* of the fibre space, p the *projection*, and for any $x \in X$, the subspace $p^{-1}(x)$ of E (which is closed if $\{x\}$ is closed) is the *fibre* of x (in E).

Given two fibre spaces (X, E, p) and (X', E', p'), a *homomorphism* of the first into the second is a pair of continuous maps $f : X \longrightarrow X'$ and $g : E \longrightarrow E'$, such that $p'g = fp$, i.e. commutativity holds in the diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

Then g maps fibres into fibres (but not necessarily *onto*!); furthermore, if p is surjective, then f is uniquely determined by g. The continuous map f of X into X' being given, g will be called also a f-homomorphism of E into E'. If, moreover, E'' is a fibre space over X', f' a continuous map $X' \longrightarrow X''$ and $g' : E' \longrightarrow E''$ a f'-homomorphism, then $g'g$ is a $f'f$-homomorphism. If f is the identity map of X onto X, we say also X-homomorphism instead of f-homomorphism. If we speak of homomorphisms of fibre spaces over X, without further comment, we will always mean X-homomorphisms.

The notion of *isomorphism* of a fibre space (X, E, p) onto a fibre space (X', E', p') is clear: it is a homomorphism (f, g) of the first into the second, such that f and g are onto-homeomorphisms.

1.2 Inverse image of a fibre space, inverse homomorphisms

Let (X, E, p) be a fibre space over the space X, and let f be a continuous map of a space X' into X. Then the *inverse image* of the fibre space E by f is a fibre space E' over X'. E' is defined as the subspace of $X' \times E$ of points (x', y) such that $fx' = py$, the projection p' of E' into the base X' being given by $p'(x', y) = x'$. The map $g(x', y) = y$ of E' into E is then an f-homomorphism, inducing for each $x' \in X'$ a *homeomorphism* of the fibre of E' over x' *onto* the fibre of E over $f'x'$.

[]

1.3 Subspace, quotient, product

Let (X, E, p) be a fibre space, E' any subspace of E, then the restriction p' of p to E', defines E'

[]

1..4 Trivial and locally trivial fibre spaces

Let X and F be two spaces, E the product space, the projection of the product on X defines E as a fibre space over X, called the *trivial fibre space over X with fibre F*.

All fibres are canonically homeomorphic with F.

[]

1.5 Definition of fibre spaces by coordinate transformations

Let X be a space, (U_i) a covering of X, for each

[]

1.6 The case of locally trivial fibre spaces

The method of the preceding section for constructing fibre spaces over X will be used mainly in the case where we are given a fibre space over T over X, and where, given an open covering (U_i) of X, we consider the fibre spaces

[]

1.7 Sections of fibre spaces

Definition **1.7.1**. — *Let* (X,E,p) *b a fibre space; a* section *of this fibre space (or, by pleonasm, a section of* E *over* X*) is a map* x *of* X *into* E *such that* ps *is the the identity map of* X*. The set of* continuous *sections of* E *is noted* $\mathrm{H}^0(X,E)$.

It amounts to the same to say that s is a function the value of which at each $x \in X$ is in the fibre of x in E (which depends on x!).

The existence of a section implies of course that p is onto, and conversely if we do not require continuity. However, we are primarily interested in continuous sections. A *section of* E *over a subset* Y of X is by definition a section of $E|Y$. If Y is open, we write $\mathrm{H}^0(Y,E)$ for the set $\mathrm{H}^0(Y,E|Y)$ of all continuous sections of E over Y.

$\mathrm{H}^0(X,E)$ as a *functor*. Let E, E' be two fibre spaces over X, f an X-homomorphism of E into E'. For any section s of E, the composed map fs is a section of E', continuous if s is continuous. *We get thus a map, noted* f, *of* $\mathrm{H}^0(X,E)$ *into* $\mathrm{H}^0(X,E')$. The usual functor properties are satisfied:

a. If the two fibre spaces are identical and f is the identity, the so is f.

b. If f is an X-homomorphism of E into E' and f' an X-homomorphism of E' into E'' (E, E', E'' fibre spaces over X) then $(f'f) = f'f$.

Let (X,E,p) be a fibre space, f a continuous map of a space X' into X, and E' the inverse image of E under f.

II. Sheaves of sets

Throughout this exposition, we will now use the word *"section"* for *"continuous section"*.

2.1 Sheaves of sets

Definition **2.1.1**. — *Let* X *be a space. A* sheaf of sets *on* X *(or simply a* sheaf*) is a fibre space* (E,X,p) *with base* X, *satisfying the condition: each point* a *of* E *has an open neighbourhood* U *such that* p *induces a homeomorphism of* U *onto an open subset* $p(U)$ *of* X.

This can be expressed by saying that p is an interior map and a local homeomorphism. It should be kept in mind that, even if X is separated, E is not supposed separated (and will in most important instances not be separated).

[]

2.2

2.3 Definition of a sheaf by systems of sets

2.4 Permanence properties

2.5 Subsheaf, quotient sheaf. Homeomorphism of sheaves

2.6 Some examples

a.

b.

c.

d. **Sheaf of germs of subsets**. Let X be a space, for any open set $U \subset X$ let $P(U)$ be the set of subsets of U. If $V \subset U$, consider the map $A \longrightarrow A \cap V$ of $P(U)$ into $P(V)$. Clearly the conditions of transitivity, and of proposition 2.3.1. corollary, are satisfied, so that the sets $P(U)$ appear as the sets $\mathrm{H}^0(U, P(X))$ of sections of a well determined sheaf on X, the elements of which are called *germs of sets in* X. Any condition of a local character on subsets of X defines a subsheaf of $P(X)$, for instance the sheaf of *germs of closed sets* (corresponding to the relatively closed sets in U), or if X is an analytic manifold, the sheaf of germs of analytic sets, etc.

Other important examples of sheaves will be considered in the next chapter.

III. Group bundles and sheaves of groups

IV. Fibre spaces with structure sheaf

V. The classification of fibre spaces with structure sheaf

Lettre à N. Bourbaki, 9.10.1960

Paris le 9.10.1960

Monsieur et cher Maître,

Je Vous remercie pour votre lettre, empreinte à la fois de sagesse et de mansuétude. Il semble vain en effet qu'un différend personnel puisse être l'occasion du départ d'une disciple. Je reconnais qu'il était vain que j'attende du Maître qu'il arbitre une quérelle qui ne le concerne pas, et qu'un tel arbitrage ne pouvais résoudre rien.

Je me suis interrogé plusieurs fois pendant les années de ma collaboration avec le Maître si mes habitudes peu sociables, mon caractère passionné et ma répugnance à vaincre les répugnances d'autrui, ne me rendaient inapte à une collaboration fertile pendant les congrès. Sans plus vouloir chercher la cause ailleurs qu'en moi-même, je pense maintenant qu'il en est bien ainsi, et que j'ai atteint avant l'âge traditionnel le moment où je servirai mieux le Maître par mon départ, qu'en restant sur Ses amicales instances.

Je m'efforcerai de rester digne des enseignements que Vous m'avez prodigués pendant si longtemps et de ne pas trahir l'esprit du Maître, qui, je l'espère, restera visible dans mon travail comme par le passé.

Votre très dévoué élève et serviteur,

A. Grothendieck

Letter to N. Bourbaki, 9.10.1960[9]

Paris 9.10.1960

Dear Sir and my dear Master,

I thank You for your letter, marked by both wisdom and clemency. Indeed it seems pointless that a personal disagreement could be the occasion for the departure of a disciple. I recognize that it was pointless for me to wait for the Master to arbitrate a quarrel that did not concern him and that such arbitration would resolve nothing.

I have asked myself many times over the years of my collaboration with the Master whether my lack of social skill, my impassioned character, and my repugnance for overcoming the repugnance of others, did not render me unsuitable for a productive collaboration during the meetings. No longer wanting to search for the cause anywhere except in myself, I now think that it is better this way and that I reached earlier than the traditional age the moment when I would better serve the Master by my departure, rather than remaining as a result of His kind insistence.

I will endeavor to remain worthy of the teachings that You for so long lavished upon me and not to betray the spirit of the Master who, I hope, will remain visible in my work as it has been in the past.

Your very devoted pupil and servant,

A. Grothendieck

[9] Translated by W. Messing

Letter to J. Murre, 18.7.1962[10]

July 18, 1962

My dear Murre,

I recently had some thought on finiteness conditions for Picard preschemes, and substantially improved on the results stated in the last section of my last Bourbaki talk. The main result stated there for a simple projective morphism with connected geometric fibers (namely that the pieces $\underline{\mathrm{Pic}}^P_{X/S}$ are of finite type over S) has been extended by Mumford to the case where instead of f simple we assume only f flat with integral geometric fibers, (at least if these are normal). Using his result (the proof of which is quite simple and beautiful), I could get rid of the normality assumption, and even (as in theorem 4.1. of my talk) restrict to the consideration of the two first non trivial coefficients of the Hilbert polynomials. The key results for the reduction are the following (the proofs being very technical, and rather different for (i) and (ii), except that (ii) uses (i) to reduce to the normal case; moreover (ii) uses Mumford's result and the equivalence criteria as developed in my last Seminar):

(i) Let X, Y be proper over S noetherian, let $f : X \longrightarrow Y$ be a *surjective* S-morphism, assume for simplicity of the statement that the Picard preschemes exist, then $f : \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ is of finite type (and in fact affine if S is the spectrum of a field), i.e. a subset M of $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ is quasi-compact iff its image in $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ is.

(ii) The same conclusion holds for a canonical immersion $X \longrightarrow Y$, is Y/S is projective with fibers all components of which are of dimension ≥ 3, and if X is the sub-scheme of zeros of a section over Y of an invertible sheaf $\underline{L}$ ample with respect to S.

A connected result is that for any X/S proper, and integer $n \neq 0$, the n-th power homomorphism in the Picard prescheme is of finite type.

[10] https://agrothendieck.github.io/divers/LGM1862scan.pdf

I tell you about this, namely (i), because of the method of proof, involving of course considerations of non flat descent. The fact that I do not have any good effectivity criterion does not hamper, by just recalling what the effectivity of a given descent datum means. Now it turns out that by a slightly more careful analysis of the situation, one can prove the following theorem, of a type very close to the one you have proved recently, and to some you still want to prove as I understand it.

Theorem. — *Let S be an integral noetherian scheme, X and X' proper over S and $f : X' \longrightarrow X$ a surjective S-morphism, look at the corresponding homomorphism for the Picard functors $f^\bullet : \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X'/S}$. Assume:*

a) the existence problems A and B defined below for X/S has always a solution (this is certainly true when X/S is projective).

b) the morphism $f_S : X'_S \longrightarrow X_S$ induced on the generic fiber is a morphism of descent, i.e. $\underline{O}_{X_s} \longrightarrow f(\underline{O}_{X'_s}) = h(\underline{O}_{X''_s})$ is exact. Then, provided we replace S by a suitable non empty open set, the homomorphism $f^\bullet$ is representable by a quasi-affine morphism, more specifically in the factorisation of $f^\bullet$ via the functor representing suitable descent data, $f^\bullet = vu$ with u affine and v a monomorphism (as you well know), v is in fact representable by finite direct sums of immersions.

Corollary **1**. — *Without assuming b), but instead in a) allowing X/S to be replaced by suitable other schemes X_i finite over X, the same conclusion holds, namely $f^\bullet$ is representable by quasi-affine morphisms.*

This follows from the theorem, using a suitable factorisation of f. For instance, using Chow's lemma and the Main existence theorem in my first talk on Picard schemes, one gets:

Corollary **2**. — *Assume X/S proper satisfies the condition*

a') for every X' finite over X, there exists a non empty open subset S_1 of S such that problem A for X' S_1 has always solution (this condition is satisfied if X/S is projective).

Then provided we replace S by a suitable S_1 non empty and open, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ exists, is separated, its connected components are of finite type over S.

N.B. The proof does not give any evidence towards the fact that in the theorem, one could replace "quasi-affine" by "affine". This is true however over a field, because a quasi-affine algebraic group is affine!

It would be interesting to have a counterexample, say, over a ring of dimension 1 such as $k[t]$, X and X' projective and simple over S and $X' \longrightarrow X$ birational, or alternatively, X and X' projective and normal over S, and $f : X' \longrightarrow X$ finite. A counterexample in the latter case would of course provide a counterexample to the effectivity problem for a finite morphism raised in my first talk on descent…

"Problem A" is the following: given X/S and Module F on X, to represent the functor on the category of S-preschemes taking any S'/S into a one-element or into the empty set, according as to whether F' on X'/S' is flat with respect to S' or not, where $X' = X \times_S S'$, $F' = F \times_S S'$.

Given X/S, we say that "Problem A for X/S has always a solution" if for every constant F' on some X'/S', the previous functor on Sch/S' is representable by a S'-scheme of finite type. The main step in my proof of existence of Hilbert schemes shows that this condition is satisfied when X/S is projective. In the proof, essential use is made of the Hilbert polynomial, in fact we get a solution as a disjoint sum of subschemes of S corresponding to various Hilbert polynomials. Still I would expect that the functor is representable as soon as X/S is proper. In view of the application we have in mind here, it would be sufficient (for any integral S) to find in S a non empty open set S_1 such Problem A has always a solution for $X_1 = X \times_S S_1$ over S_1. To prove this weaker existence result, it is well possible that a reduction to the projective case is possible, using Chow's lemma and some induction on the relative dimension perhaps. I also would expect that a proof will be easier when working over a complete noetherian local ring, hence the case of a general noetherian local ring by flat descent. Ans it is well possible that, putting together two such partial results, a proof of the existence in general could be obtained. (I met with such difficulties already time ago in a very analogous non projective existence problem, which beside I did not solve so far!). This problem A has been met also by Hartshorne (A Harvard Student), but I doubt he will work seriously on it. Thus I now wrote you in the hope you may be interested to have a try on this problem. As a general fact, our knowledge of non projective existence theorems is exceedingly poor, and I hope this will change eventually.

Sincerely yours.

A. Grothendieck

Letter to J. Tate, 5.2.1962

Paris Feb 5, 1962

Dear John,

In connection with my Bourbaki talk, I pondered again on Picard schemes. For instance, as I told Mumford, I proved that if X/S is projective and simple, then $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ is of finite type over S. More generally, the decomposition of $\mathrm{Pic}_{X/S}$ according to the Hilbert polynomials (in fact, the first two non trivial coefficients of the polynomial suffice) consists of pieces which are of finite type, hence projective over S. Another way of stating this is to say that a family of divisors D_i on the geometric fibers of X/S is "limited" iff the projective degrees of the D_i and D_i^2 are bounded.

Another result, of interest in connection with your seminar, is a proof of the fact that, for an abelian scheme A/k, k a perfect field, the absolute formal scheme of moduli over $\mathbb{W}_\infty(k)$ is simple over k. This comes from the following general fact: Let X_0/S_0 be simple, X_0'/X_0 étale, S_0 subscheme of S defined by an ideal J of square 0. Let $\xi_0 \in \mathrm{H}^2(X_0, \mathfrak{G}_{X_0/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} J)$ and $\xi_0' \in \mathrm{H}^2(X_0', \mathfrak{G}_{X_0'/S_0} \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} J)$ be the obstruction for lifting. Then ξ_0' is the inverse image of ξ_0 under the obvious map. As a consequence, if X_0/S_0 is abelian, taking $X_0' = X_0$, $X_0' \longrightarrow X_0$ multiplication by n prime to the residue characteristic, we get $\xi_0 = n^*(\xi_0)$. If $S = \operatorname{Spec}\Lambda$, Λ local artin, and $mJ = 0$, then we are reduced to an obstruction in the H^2 of the reduced $X_0 \otimes_{\Lambda_0} k = A$, satisfying $\xi = n^*(\xi)$ for n prime to p. Using the structure

$$\mathrm{H}^*(A, \mathfrak{G}_{A/k}) \simeq \bigwedge^{*} \mathrm{H}^1(A, \mathcal{O}_A) \otimes t_A,$$

we get $n^*(\xi) = n^3\xi$, hence $(n^3 - 1)\xi = 0$. Taking $n = -1$ we get $2\xi = 0$, hence $\xi = 0$, and we win!

I just noticed the proof does not give any information for residue char. $= 2$! Here is a simple proof valid in any char.: Consider the obstruction η_0 for lifting $X_0 \times_{S_0} X_0$, then $\eta_0 = \xi_0 \otimes 1 + 1 \otimes \xi_0$, and η_0 is invariant under the *automorphism* $(x, y) \rightsquigarrow (x, y + x)$ of $X_0 \times_{S_0} X_0$. Thus we get an element $\xi = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i \wedge e_j$ in $\mathrm{H}^2(A, \mathcal{O}_A) = \bigwedge^2 t$, s.th. $\eta = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i' \wedge e_j' + \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i'' \wedge e_j''$ in $\bigwedge^2 (t \oplus t)$ is *invariant* under $(x,y) \rightsquigarrow (x,y+x)$, carrying $e_i' \rightsquigarrow e_i' + e_i''$ and $e_i'' \rightsquigarrow e_i''$, hence trivially $\xi = 0$!

As a consequence, we get that the scheme of moduli for the *polarized* abelian schemes, with polarizations degree d, is simply over $\mathbf{Z}$ at all those primes p which do not divide d. This comes from the fact that the obstruction to polarized lifting lies in a module $\mathrm{H}^2(A,E)$, where E is an extension (the "Atiyah extension") (*)

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_A \longrightarrow E \longrightarrow \mathfrak{G}_{A/k} \longrightarrow 0$$

whose class c in $\mathrm{H}^1(A,\Omega^1_{A/k})$ is just the Chern class $\frac{dL}{L}$ of the invertible sheaf L on A defining the polarization. Now in the exact sequence of cohomology for (*), the map

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^i(\mathfrak{G}_{A/k}) & \xrightarrow{\partial^{(i)}} & \mathrm{H}^{i+1}(\mathscr{O}_A) \\ \simeq\big\downarrow & & \simeq\big\downarrow \\ \bigwedge^i t' \otimes t & & \bigwedge^{i+1} t' \end{array} \qquad t = t_A, \quad t' = t_{\hat{A}}$$

is trivially described in terms of

$$c \in \mathrm{H}^1(A,\Omega^1_{A/k}) \simeq \mathrm{Hom}(t,t'),$$

where the homomorphism $c : t \longrightarrow t'$ is just the tangent map for $\varphi : A \longrightarrow \hat{A}$ defined by the polarization. This map being surjective by assumption, $\partial^{(i)}$ is surjective, hence $\mathrm{H}^i(E) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathfrak{G}_{A/k})$ is injective, in particular

$$\mathrm{H}^2(E) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathfrak{G}_{A/k})$$

is *injective*. As the obstructions obtained in $\mathrm{H}^2(\mathfrak{G}_{A/k})$ are zero, the same holds for the polarized obstructions in $\mathrm{H}^2(E)$, hence the assertion of the simplicity. (If however $p|d$, simplicity *does not hold at any* point of M over p!)

Using the simplicity for the formal scheme of moduli of abelian varieties, I can prove the following:

Let X/Λ be flat, proper, $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X_0,\mathscr{O}_0)$, where Λ is local artin with residue field k. Assume $\mathrm{Pic}_{X_0/k}$ exists, and is *simple* over k, i.e. $\dim \mathrm{Pic}_{X_0/k} = \dim \mathrm{H}^1(X_0,\mathscr{O}_{X_0})$ (always true in char 0). Then

a) $\mathrm{Pic}^0_{X/\Lambda}$ exists and is an *abelian* scheme over Λ.

b) The "base extension property" holds for $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{O}_X)$ in dimension 1, and more generally in any dimension i such that

$$\bigwedge^i \mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{O}_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_0, X_0)$$

is *surjective*, and $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X)$ is free over Λ.

Idea of proof:

a) $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$ is constructed stepwise. Having $\mathrm{Pic}^0_{X_{n-1}/k} = A_{n-1}$, to get A_n we first lift *arbitrarily* A_{n-1} to an abelian scheme A'_n. We then try to construct the can. invertible "Weil sheaf" on $X_n \times_{\Lambda_n} A'_n$, extending the given Weil sheaf on $X_n \times_{\Lambda_{n-1}} A_{n-1}$. The obstruction lies in

$$\mathrm{H}^2(X_0 \times A_0, \mathscr{O}_{X_0 \times A_0}) \simeq \mathrm{H}^2(\mathscr{O}_{X_0}) \times \mathrm{H}^2(\mathscr{O}_{A_0}) \times \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{X_0}) \otimes \mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{A_0})$$

and in fact, as easily seen, in the last factor $\mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{O}_{X_0}) \otimes \mathrm{H}^1(A_0, \mathscr{O}_{A_0}) \simeq t_{A_0} \otimes \mathrm{H}^1(A_0, \mathscr{O}_{A_0}) \simeq \mathrm{H}^1(A_0, \mathfrak{G}_{A_0/k})$. This space is exactly the group operating in a simply transitive way on the set of all extensions of A_{n-1}. Thus we can *correct* A'_n in just one way to get an A_n with a "Weil sheaf" on it!

This does it.

b) Let ω be the conormal sheaf to the unit section of $A = \mathrm{Pic}^0_{X/S}$, thus ω is *free* because A/S is simple, and by definition of $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ we have

$$\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_A) \simeq \mathrm{Hom}(\omega, \mathscr{O}_S)$$

This description holds also after any base extension, hence the fact that $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_S)$ is free over Λ and its formation commutes with base extension. This implies also $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X_0, \mathscr{O}_{\mathscr{X}_l})$ surjective, hence $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_0, \mathscr{O}_{\mathscr{X}_l})$ is surjective for the i's as in the theorem, ok.

Corollary. — *Let A/S be any abelian scheme, then the modules* $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{O}_A)$ *on S are locally free and in fact* $\simeq \bigwedge^i \mathrm{R}^1 f_*(\mathscr{O}_A)$. *If* $\mathrm{Pic}_{A/S}$ *exists, then* $\mathrm{Pic}^0_{A/S}$ *is open and is an abelian scheme over S.*

(Moreover, biduality holds, as follows easily from the statement over a field…)

Corollary. — *Let* $f : X \longrightarrow S$ *be flat, proper,* $k(s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X_s, \mathscr{O}_{X_s})$ *for every* s*, let* $s \in S$ *be such that* $dim \mathrm{H}^1(X_s, \mathscr{O}_{X_s}) = dim \mathrm{Pic}_{X_s/k(s)}$*, (the latter defined, if* $\mathrm{Pic}_{X_s/k(s)}$ *is not known to exist, in terms of the formal Picard scheme). Then* $\mathrm{R}^1 f_*(\mathscr{O}_X)$ *is free at* s.

This is always applicable if char $k = 0$.

I do not know if, in the case considered, the $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{O}_X)$ or even $\mathrm{R}^i f_*(\Omega^j_{X/S})$ are also free at s, even in char 0. It is true for $f_*(\Omega^1_{X/S})$ whenever we know that $\mathrm{dim}\mathrm{H}^1(X_s, \mathscr{O}_{X_s}) = \mathrm{dim}\mathrm{H}^0(X_s, \Omega^1_{X_s})$, for instance if char $k(s) = 0$ and $f : X \longrightarrow S$ is projective and simple. (If *moreover* S is reduced, Hodge theory implies *all* $\mathrm{R}^i f_*(\Omega^j_{X/S})$ are free at s; but if S is artin, I have no idea!)

I now doubt very much that it be true in general that $\mathrm{Pic}^\tau_{X/S}$ is flat over S, or even only universally open over S, when X/S is simply. Here is an idea of an example, inspired by Igusa's surface. Let A/S be an abelian scheme, G a finite group of automorphisms of A. If G operates without fixed points on B/S projective and simple over S, with $\mathscr{O}_S \xrightarrow{\sim} g_*(\mathscr{O}_B)$, we construct $X = B \times_G \hat{A}$ which is an abelian scheme over $Y = B/G$, and one checks

$$\mathrm{Pic}_{X/S} \simeq \mathrm{Pic}_{Y/S} \times_S (\mathrm{Pic}_{\hat{A}/S})^G$$

(where upper G denotes the subscheme of invariants), hence

$$\boxed{\mathrm{Pic}^\tau_{X/S} \simeq \mathrm{Pic}^\tau_{Y/S} \times_S A^G}$$

Hence for getting examples of bad $\mathrm{Pic}^\tau_{X/S}$, we are led to study schemes of the type A^G, with S say spectrum of a discrete valuation ring V. Thus we are led to the questions:

a) Can it occur that there are components of $C = A^G$ which do not dominate S? For instance, A_1^G = unit subgroup (set theoretically, or even scheme-theoretically) and $A_0^G \neq$ unit subgroup set theoretically - where A_0, A_1 are the special and the general fibers.

b) If $C_1 = A_1^G$ is connected (for instance is the unit subgroup), and hence $C^\circ = C_0^\circ \cup C_1^\circ$ is open, can it occur that C° is non flat over S [for instance $C_1 = \{e\}$, $C_0^\circ \neq \{e\}$]?

such that multiplication $p : \mathrm{Pic}_{X/S} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X/S}$ is *not* universally open, i.e. such that there exists an irreducible component C of $\mathrm{Pic}_{X/S}$ not dominating S, but such that pC is contained in a component dominating S. [N.B. if n prime to all residue char., multiplication by n in any $\mathrm{Pic}_{X/S}$ is étale.]

Best regards to Karin, kids etc.

Schurik

P.S. I just proved: If $X \longrightarrow S$ is *simple* and *projective*, then $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ is *projective* over S. Method:

a) From the fact that the fibers of $\mathrm{Pic}^{0}_{X/S}$ are proper, follows that $\mathrm{Pic}^{0}_{X/S}$ is proper over S, hence closed in $\mathrm{Pic}_{X/S}$, hence easily that $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ is *closed* in $\mathrm{Pic}_{X/S}$. It remains to prove it is of *finite type* over S – hence proper over S, and quasi-projective over S, hence projective.

b) For every $n > 0$, the kernel of $\mathrm{Pic}_{X/S} \xrightarrow{n} \mathrm{Pic}_{X/S}$ is of finite type over S [and even more: the multiplication μ by n is of finite type, hence finite]. If n is prime to the residue characteristics, this follows from the fact that μ is *étale* and has finite fibers. This reduces to the case S of char $p > 0$, $n = p$. Then I use a technique of descent involving the "relative p-power scheme" $(X/S)^{(p)}$, following a suggestion of Serre.

c) For variable $s \in S$ (S noetherian), the Néron-Severi torsion group of X_s remains of bounded order. This can be shown using the method of Matsusaka's proof for the finiteness of the "torsion group".

From a), b), c), the theorem follows.

Remark: Using the Picard-Igusa inequality for ρ = rank of Néron-Severi, and Lefschetz type theorems I told you about, one gets also that $\rho(X_s)$ remains bounded for $s \in S$ (S noetherian).

Question: Is $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X/S}$ always of finite type over S, under merely the usual assumptions for existence of $\mathrm{Pic}_{X/S}$? I have no proof even if $X \longrightarrow S$ is normal! Same question for ρ. This seems related to the question of uniform majorization of the Mordell-Weil-Néron-Lang finiteness theorem, for a *variable* abelian variety.

Letter to H. Hironaka, 6.7.1962[11]

Neuilly July 6 1962

Dear Hironaka,

I had a little thought over our conversation last Tuesday, it occurred to me that the type of argument I used yields in fact the following stronger result:

Theorem. — *Let* $f : X \longrightarrow Y$ *be a proper morphism of analytic spaces over* $\mathbf{C}$, *let* $y \in Y$, $Y_n = (\underline{O}_y / \underline{m}_y^{n+1})$, $X_n = X \times_Y Y_n$,

$$\mathrm{Pic}(X_y) = \mathrm{R}^1 f(\underline{O}_X^\bullet)_y = \varinjlim \mathrm{Pic}(f^{-1}(U)) \quad y \in U,$$

$$\mathrm{Pic}(\hat{X}_y) = \varprojlim \mathrm{Pic}(X_n),$$

and consider the canonical homomorphisms

$$\mathrm{Pic}(X_y) \xrightarrow{u} \mathrm{Pic}(\hat{X}_y) \xrightarrow{v_n} \mathrm{Pic}(X_n)$$

Then the following are true:

(i) *The inverse system* $(\mathrm{Pic}(X_n))_{n \in \mathbf{N}}$ *satisfies the condition of Mittag-Leffler (even with Artin-Riesz type of uniformity).*

(ii) $Im v_n = Im v_n u =$ *(in virtue of (i)) set of universal images of* $\mathrm{Pic}(X_n)$ *in the inverse system* $(\mathrm{Pic}(X_m))_{m \in \mathbf{N}}$.

(iii) *In order for u to be an isomorphism, it is nec and suff that* $\mathrm{R}^1 f_*(\underline{O}_X)_y$ *is a module of finite length.*

In fact (i) can be more precise:

(ibis) *In the inverse system* $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/\mathbf{C}})_{n \in \mathbf{N}}$ *of analytic groups, the system of the "Néron-Séveri groups" is constant for n large, whereas for* $m > n$ *and n large, the Kernel and Cokernel of*

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X_m/\mathbf{C}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/\mathbf{C}}$$

are just vector groups.

[11] https://agrothendieck.github.io/divers/LGH662scan.pdf

Parts (i) and (ii) yield the

Corollary **1**. — *The following conditions are equivalent*

(i) There exists an open $U y$ *such that* $X U$ *is projective over* U

(ii) For every n, X_n *is a projective analytic space.*

For instance, if $\dim X_0 \leq 1$, then (ii) and hence (i) holds.

The proof of the theorem only uses Grauerts analogues of the algebraic theorems of finiteness and comparison for direct images (of his blue paper) and the usual exact sequences $0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \underline{O} \longrightarrow \underline{O}^{\bullet} O$, together with some standard use of Mittag-Leffler story and five lemma. It is valid in fact for any $\mathrm{H}^i(\underline{O}^{\circ})$, not only $i = 1$ (which seems the only one however to have geometric significance).

In the case of a formal scheme proper over a complete noeth. local ring with residue field of *characteristic* 0, the analogon of the previous theorem (reducing to statements (i), (i bis)) hold true, and I wrote a purely algebraic proof of this, relying only on the fact that the kernel and Cokernel of $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_{n+1}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X_n}$ are without torsion, and Néron's finiteness theorem; in particular, the analogon of corollary 1 holds true in this case. These results break down of course in car. > 0.

However, using the (as yet unwritten !) Gaga of Serre-Grauert-Remmert-Grothendieck (of Grauert-Remmerts paper, complemented by the method of an old talk of mine in Cartan's Seminar, to recover the case of proper morphisms of schemes from the projective one, via Chow's lemma…), the analytic theorem above yields an interesting intrinsic property of analytic algebras over $\mathbf{C}$, with respect to algebraic geometry over such a local ring:

Theorem. — *Let* A *be an analytic algebra over* $\mathbf{C}$ *(we can suppose* A *to be the ring of convergent power series in* n *variables),* $\hat{A}$ *its completion,* Y *and* $\hat{Y}$ *the spectra,* X *a proper scheme over* Y, $\hat{X} = X \times_Y \hat{Y}$. *Then*

(i) The inverse system $(\mathrm{Pic}(X_n))$ *satisfies MLAR (as stated above, this depends only on the car.* 0 *assumption for the residue field).*

(ii) $\mathrm{Pic}(X)$ *and* $\mathrm{Pic}(\hat{X})$ *have same image in* $\mathrm{Pic}(X_n)$, *– namely the group of "universal images". (NB recall* $\mathrm{Pic}(\hat{X}) \simeq \varprojlim \mathrm{Pic}(X_n)$*).*

(iii) *In order for* $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\hat{X})$ *to be an isomorphism, it is necessary and sufficient that* $\mathrm{supp}\,\mathrm{R}^1 f_*(\underline{O}_X) \subset (y)$, *i.e.* $\mathrm{H}^1(X, \underline{O}_X)$ *of finite length over A. (NB It amounts also to the same to ask that the inverse system of the subgroups* $\mathrm{Pic}'(X_n)$ *of universal images is constant for large n).*

We get for example:

Corollary **1**. — *The following conditions are equivalent:*

(i) X/Y *projective*

(ii) $\hat{X}/\hat{Y}$ *projective*

(iii) *For every* n, X_n/Y_n *projective.*

This applies for instance if $\dim X_0 \leq 1$.

Now applying your theorem of *resolution of singularities*, and Mumford's method of relating the local Picard group of A to the global Picard group of a regular scheme dominating A birationally, one gets from the last statement (iii) of last theorem:

Corollary **2**. — *Let A be as above, assume* $Y' = Y - (y)$ *regular, and let* $\hat{Y}' = \hat{Y} - (\hat{y})$. *Then* $\mathrm{Pic}(Y') \longrightarrow \mathrm{Pic}(\hat{Y}')$ *is an isomorphism.*

This explains "à priori" (when A is normal) why Mumford was able to introduce on the group of divisor-classes of A a structure of an analytic group (which in fact is algebraic...), which from the algebraic point of view should be possible rather for the group of divisors classes of the completion $\hat{A}$; of course Mumford uses directly the same kind of argument I used.

I do no know if in the last statement, the hypothesis that Y' is regular ("y isolated singularity") is essential; we could dispense with it and replace it by "A reduced" if you can prove by your theory of resolution the following: if $f : X \longrightarrow Y$ is proper "birational", X regular, then $\mathrm{R}^1 f_*(\underline{O}_X) = 0$. I understand you prove this if Y also is regular (which is easily checked by your theory), but I wonder if this is really needed. I would not be surprised either if in this statement, Y' can be replaced by any open subset of Y (replacing of course $\hat{Y}'$ by the inverse image of the latter). Moreover, I would expect the analogous statements to hold for π_1, more generally for all "topological" invariants as Weil homology, homotopy groups etc, that can be defined for schemes. This should be related to the fact that all these invariants vanish for the geometric fibers of the morphism $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$. This is easy to check at least for π_0 (and is true in fact for any henselian ring which is a "good" ring); however I do not know if this is true also for π_1.

Besides, I would not be surprised if most of the previous results (namely parts (ii) and (iii) of the second theorem, and the two corollaries, as well as the conjectures of the previous sections) did hold true for any "good" ring which is henselian or at least for the "henselian closures" of the local rings arising from algebras of finite type over a field, or over the integers, - although I do not have any result along these lines (except those stemming from my remark on $\overline{k}_0$). This can be stated of course directly in terms of conjectures for the latter local rings without explicit reference to a henselian closure, for instance corollary 2 would yield the conjectural statement: Let A be a local ring of an algebra of finite type over a field, $\hat{A}$ its completion, Y and $\hat{Y}$ the spectra, Y' and $\hat{Y}'$ the complements of the closed points, then any invertible sheaf on $\hat{Y}'$ can be defined by an invertible sheaf on some Y_1', where Y_1 is local and $Y_1 \longrightarrow Y$ is étale with trivial residue field extension (i.e. inducing an isomorphism for the completions $A \longrightarrow A_1$). I wonder what information is given by Mumford's example in his blue paper, p.16, which I believe yields a case where the invertible sheaf considered does not come from an invertible sheaf on Y'? I was not able to understand his construction.

Anyhow, one should be able to determine whether or not the analytic algebras over $\mathbf{C}$ have any significant intrinsic property which is not shared by all "good" henselian rings with residue field of car. 0 (I recall that by good I mean "quotient of a regular local ring B such that the fibers of $\mathrm{Spec}\,\hat{B} \longrightarrow \mathrm{Spec}(B)$ are universally regular).

Please give my regards to Waka, and also Mireille's; she just got the parcel from Waka, and was extremely pleased, in fact, she slipped into her new bed-shirt on the sopt, and is delighted by it in every respect.

Sincerely yours

Letter to M. Atiyah, 14.10.1963
(On the Rham cohomology of algebraic varieties)
Extract from
Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 29 (1966), p. 95-103[12]

…In connection with Hartshorne's seminar on duality, I had a look recently at your joint paper with Hodge on "Integrals if the second kind"[13]. As Hironaka has proved the resolution of singularites[14], the "Conjecture C" of that paper (p. 81) holds true, and hence the results of that paper which depend on it. Now it occurred to me that in this paper, the whole strength of the "Conjecture C" has not been fully exploited, namely that the theory of "integrals of second kind" is essentially contained in the following very simple

Theorem **1**. — *Let X be an affine algebraic scheme over the field* $\mathbf{C}$ *of complex numbers; assume X regular (i.e. "non singular"). Then the complex cohomology* $\mathrm{H}^*(X, \mathbf{C})$ *can be calculated as the cohomology of the algebraic De Rham complex (i.e. the complex of differential forms on X which are "rational and everywhere defined").*

This theorem had been checked previously by Hochschild and Kostant when X is an affine homogeneous space under an algebraic linear group, and I think they also raised the question as for the general validity of the result stated in theorem 1.

[12]https://agrothendieck.github.io/divers/RCAVscan.pdf

[13]M. F. Atiyah and W. V. D. Hodge, Integrals of the second kind on an algebraic variety, *Annals of Mathematics*, vol. 62 (1955), p. 56-91. This paper is referred to by A-H in the sequel.

[14]H. Hironaka, Resolution of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Annals of Maths.*, vol. 79 (1964), p. 109-326.

Lettre à J.P. Serre, 12.8.1964[15]

Bures le 12.8.1964

Mon cher Serre,

Je commence à avoir de faibles lumières sur la façon de faire des VA avec les cycles algébriques équivalentes à zéro d'une variété projective non singulière X (sur un corps alg clos k). Si X est connexe de dimension n, je sais associer à chaque entier i compris entre 1 et n une VA $J^i(X)$, jouant le rôle d'une "jacobienne intermédiaire" au sens de Weil, correspondant à des classes de cycles de codimension i (pour une relation d'équivalence que je ne sais pas bien identifier pour l'instant, mais qui mérite certainement d'être appelée "équivalence d'Albanese"). Je suis moralement sûr que ce sont "les bonnes", bien que je n'ai pas prouvé grand-chose dessus pour l'instant ; par contre, j'ai des conjectures en pagaille. Je te signale seulement que $J^1 = \mathrm{Pic}^\circ$ et $J^n = \mathrm{Alb}^\circ$, que J^i et J^{n+1-i} sont canoniquement duales l'une de l'autre, que $\dim J^i \leq \frac{1}{2} b_{2i-1}$ (nombre de Betti) - de façon plus précise $T_\ell(J^i)$ est un quotient d'un sous-module de $\mathrm{H}^{2i-1}(X, \mathbf{Z}_\ell(i))$ (et quand on sera plus savant, on saura pruver que c'est même un sous-module dudit), en caractéristique 0 on peut également remplacer la cohomologie de Weil par la cohomologie de Hodge $\mathrm{H}^i(X, \underline{\Omega}_X^{i-1})\ldots$

Moyennant un certain nombre de choses non prouvées (qui risquent d'ailleurs d'être vaches) le théorème de positivité de Hodge se ramène à l'énonce suivant, que je ne sais pas prouver, et que j'ai envie de te communiquer car il est bien terre à terre. Moralement, il s'agit de prouver que dans le cas où $\dim X = 2m-1$, l'autodualité de J^m (qui s'exprime par une classe de correspondance divisorielle sur $J^m \times J^m$ *symétrique*, donc provenant - du moins modulo le facteur 2- d'un élément du groupe de Néron Severi de J^m) est *positive* i.e. l'élément en question de Néron-Severi est ample, i.e. une polarisation. Pratiquement, cela s'explicite ainsi : Soit T une variété de paramètres connexe non singulière munie d'un point marqué a, z une classe de cycles de codimension m sur $T \times X$ (à équivalence linéaire près, mettons), telle que $z(a) = 0$ dans X, soient p et q les deux projections de $T \times T \times X$

[15] https://agrothendieck.github.io/divers/LGS12864scan.pdf

sur $T \times X$, r sa projection sur $T \times T$, considérons

$$D = r_*(p^*(z)q^*(z))$$

qui est une classe de diviseurs sur $T \times T$, que nous considérons comme une classe de correspondance divisorielle sur $T \times T$. Si $A = \mathrm{Alb}^\circ(T)$ (NB si tu veux, tu peux supposer $T = A$ et a l'origine), elle provient donc d'une classe de correspondance sur $A \times A$, évidemment symétrique. Soit N le "noyau" de cette classe (i.e. le noyau de $A \longrightarrow$ (duale de A) qu'elle définit), on obtient alors une classe de correspondance symétrique sur $J \times J$, où $J = A/N$. A prouver que cette dernière est *positive* ! Je me demande si les spécialistes "abéliens" pourraient avoir une idée sur une telle question, peut-être Matsusaka ? Ou toi-même ? Notes d'ailleurs que cette question te dévoile pratiquement le méthode de construction des J^i généraux ; si tu veux, tu peux te borner aussi au cas où te disposes d'une sous-variété de codimension $m-1$ Y de X, non singulière si tu y tiens, où $T = \mathrm{Pic}^\circ(Y)$, considéré comme paramétrant les diviseurs alg équiv à zéro de Y, mais considérés comme classes de cycles de codimension m de X.

Merci pour la copie de la lettre à Ogg !

Bien à toi

CATÉGORIES TANNAKIENNES
à partir de 1958[16]

Catégories tannakiennes définies par des cristaux

1. — Soit k un corps de car. $p > 0$, qu'on regarde comme algèbre sur $\mathbf{Z}_p$, dont l'idéal maximal est muni de puissances divisées. Cela donne un sens au site cristallin de k (sur $\mathbf{Z}_p$, qualifié aussi de "absolu"), et aux Modules loc. libres de type fini (resp. de présentation finie), sur ledit, qu'on appellera aussi cristaux en modules (localement libres resp. de présentation finie) sur k Ces cristaux forment une $\otimes$-catégorie $\mathbf{Z}_p$-linéaire. On peut expliciter cette catégorie à l'aide d'un p-anneau W de corps résiduel k, comme la catégorie des modules libres de type fini

2. —

3. —

4.

La catégorie tannakienne $\mathrm{Fcriso}(k)$ est un invariant arithmétique intéressant attaché à k (fonctoriellement) ; sa connaissance équivaut à celle de la gerbe associée (sur $\mathbf{Q}_p$), soit $\mathbf{G}(k)$?

[16] https://agrothendieck.github.io/divers/tannascan.pdf

5. F-cristaux de pente nulle

On définira plus loin la *pente* d'un F-cristal "homogène". Ici, nous allons introduire directement les F-cristaux de pente nulle

6.

Considérons maintenant un homomorphisme de corps

$$k \longrightarrow k',$$

d'où un homomorphisme de catégories tannakiennes sur $\mathbf{Q}_p$

7.

8.

9.

Pour k quelconque, on trouve un $\otimes$-homomorphisme canonique défini à isomorphisme unique près (on utilise un choix d'une clôture algébrique $\overline{k}$ de k, mais ce choix est inessentiel...)

10. Cas k fini

FILTRATIONS SUR FONCTEURS FIBRES POUR CATÉGORIES TENSORIELLES

à partir de 1958[17]

[17] https://agrothendieck.github.io/divers/tensfibscan.pdf

QUELQUES EXEMPLES DE CATÉGORIES TENSORIELLES[18]
à partir de 1958[19]

---

1) Soit M un groupe. Soit $\mathscr{C}_M$ la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps k, munis d'une graduation de type M. C'est une catégorie tensorielle sur k, munie d'un foncteur fibre sur k, le foncteur "oubli de la graduation". Le groupe algébrique associé est le groupe de type multiplicatif $D_k(M)$ (SGA 3 I 4.7.3). Par exemple si $M = \mathbf{Z}^r$, on trouve $G = \mathbf{G}_m^r$.

Application : Soit $\mathscr{C}$ une catégorie tensorielle sur k munie d'un foncteur fibre F sur k, donc associée à un schéma en groupes affine G sur k. On cherche toutes les façons de mettre, pour chaque $M \in \operatorname{Ob} \mathscr{C}$, une graduation de type M sur $F(V)$, de façon fonctorielle en M, et compatible (dans une sens évident) avec les produits tensoriels. Elles correspondent aux $\otimes$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}_M$ compatibles avec les foncteurs fibres, donc aux homomorphismes de $D_k(M)$ dans G. Par exemple, si $M = \mathbf{Z}^r$, il faut prendre les homomorphismes de $\mathbf{G}_m^r$ dans G.

Dans la situation précédente, on peut se demander quand une $\otimes$-graduation de type M du foncteur F correspond à une graduation de type M du foncteur identique de $\mathscr{C}$, i.e. pour tout V, la graduation de $F(V)$ provient d'une graduation de V. On trouve qu'il faut et il suffit pour cela que l'homomorphisme correspondant $D_k(M) \longrightarrow G$ soit central. Par exemple, si $\mathscr{C}$ est la catégorie des motifs sur k, et si

[19] https://agrothendieck.github.io/divers/notsaascan.pdf

on dispose d'un foncteur fibre F de $\mathscr{C}$ sur k, alors on trouve un homomorphisme central canonique $i : \mathbf{G}_m \longrightarrow G$. D'ailleurs, la donnée du motif de Tate (qui est de rang 2, et de "poids" 2 pour la graduation naturelle) correspond à la donnée d'un homomorphisme $j : G \longrightarrow \mathbf{G}_m = \mathrm{Gl}(l)$. Le fait que T soit de poids 2 s'exprime par la relation

$$ji(\lambda) = \lambda^2.$$

Lorsque k est de caractéristique nulle, on a toujours un foncteur fibre naturel : le *foncteur de Hodge*, qui à la cohomologie motivique d'une variété (projective lisse) X associe le vectoriel bigradué $\amalg \mathrm{H}^q(X, \underline{\Omega}^p_{X/k})$. Donc pour le groupe de Galois motivique correspondant G, on trouve un homomorphisme naturel

$$\mathbf{G}_m^2 \longrightarrow G,$$

i.e. deux homomorphismes commutant l'un à l'autre

$$i_1, i_2 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G.$$

Le fait que la graduation totale dans la cohomologie de Hodge corresponde au poids des motifs s'exprime par la relation

$$i(\lambda) = i_1(\lambda) i_2(\lambda);$$

on fera attention que i_1 et i_2 ne sont pas centraux (car la bigraduation en cohomologie de Hodge ne correspond pas à une bigraduation d'un motif !))

2) Prenant toujours pour $\mathscr{C}$ la catégorie des motifs sur k, avec k de car. nulle, on a un autre foncteur fibre canonique, le *foncteur de De Rham* qui associe à la cohomologie motivique d'une variété X le vectoriel $\mathrm{H}^*(X, \Omega^*_{X/k})$ (espace d'hypercohomologie). Ce vectoriel n'est plus bigradué mais seulement gradué et filtré, la filtration étant celle associée à la suite spectrale d'hypercohomologie, commençant avec la cohomologie de Hodge. On sait d'ailleurs que cette suite spectrale dégénère (théorie de Hodge), donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}(V)) \simeq \mathrm{H}_{\mathrm{Hdg}}(V)$ (isomorphisme fonctoriel en le motif V). On peut se proposer d'analyser à quelle structure supplémentaire, sur le groupe de Galois motivique associé au foncteur fibré H_{DR}, correspond la filtration canonique de ce foncteur.

De façon générale, étant donné une catégorie tensorielle $\mathscr{C}$ sur k munie d'un foncteur fibre F, on peut se proposer de déterminer les filtrations sur F (décroissantes, discrètes, indexées par $\mathbf{Z}$) compatibles avec les produits tensoriels (en utilisant la notion évidente de produit tensoriel de deux espaces vectoriels filtrés). On notera qu'une telle donnée ne pourra plus s'exprimer par un homomorphisme d'un certain groupe algébrique dans G (le groupe de Galois de $\mathscr{C}$ en F), car la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur k, munis d'une filtration décroissante discrète indexée par $\mathbf{Z}$, n'est pas une catégorie abélienne (les bimorphismes ne sont pas des isomorphismes). Mais à une telle donnée est associée un deuxième foncteur fibre $F(V) = \operatorname{Gr} F(V)$, à valeurs cette fois-ci dans les vectoriels gradués (NB F joue le rôle de la cohomologie de De Rham, F' celle de la cohomologie de Hodge, muni de la graduation par). La donné de F' correspond à un homomorphisme $i_1 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G'$. Considérons alors sur F' la filtration décroissante associée à sa graduation, et soit $\mathrm{H}'_{i_1} = \underline{\mathrm{AutFilt}}^!(F') \subset \underline{\mathrm{Aut}}(F') = G'$ le sous-schéma en groupes de G qui correspond aux $\otimes$-automorphismes de F' (ou plutôt des $F'_{k'}$, k' une k-algèbre quelconque) qui respectent sa filtration et induisant l'identité sur le graduée associée ; il est canoniquement déterminé par i. On peut aussi regarder le sous-schéma

$$Q = \underline{\mathrm{IsomFilt}}^!(F, F') \subset P = \underline{\mathrm{Isom}}(F, F')$$

du schéma P des $\otimes$-isomorphismes de F avec F', qui correspond aux automorphismes respectant les filtrations de F et F' et induisant l'identité sur les graduées associées. C'est à priori un pseudo-foncteur à gauche sous H', i.e. il est vide ou un torseur à droite sous H'. **Il faudrait prouver** que c'est bien un torseur (i.e. que sur une extension convenable k' de k, on peut trouver un isomorphisme de $F_{k'}$ avec $F'_{k'}$ *respectant les filtrations*). Donc on trouve une restriction du groupe d'opérateurs (à gauche) G' de P au sous-groupe H', par un H'-torseur à gauche Q.

Moyennant la vérification laissé en suspens à l'instant, on trouve alors que la donné d'un "foncteur fibre *filtré*" F de $\mathscr{C}$ sur k revient à la donnée

(i) D'un foncteur fibre F' (d'où un groupe de Galois $G' = \underline{\mathrm{Aut}}(F')$) ;

(ii) D'une graduation de type $\mathbf{Z}$ de F', i.e. un homomorphisme

$$i_1 : \mathbf{G}_m \longrightarrow G',$$

(iii) D'un torseur à gauche Q' sous H'_{i_1}.

A ces données, on associe simplement le foncteur fibre tordu

$$F = F' \overset{\mathrm{H}'_{i_1}}{\bigwedge} Q',$$

F étant filtré par la filtration déduite de celle de F' (associée à la graduation de F') en tordant par Q'.

On constate aisément que le groupe H' est nécessairement une limite projective de groupes algébriques *unipotents*. On en conclut aussitôt que si $\mathscr{C}$ est à engendrement fini (ou, plus généralement, à engendrement dénombrable, de façon que G' donc aussi H' soit limite projective d'une *suite* de groupes algébriques) alors tout torseur sous H' est trivial ; cela signifie ici que tout foncteur fibre filtré est en fait associé à un foncteur fibre gradué (en prenant la filtration correspondant à la graduation) i.e. que la filtration dudit foncteur admet un splittage compatible avec les produits tensoriels. Mais le choix d'un tel splittage équivaut à celui d'un point sur un certain torseur à droite $Q = Q'$ sous le schéma en groupes H des automorpismes de F respectant la filtration et induisant l'identité sur le gradué associé ; il n'est pas du tout canonique !

3) Appelons *pré-structure de Hodge* sur un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, la donnée d'une bigraduation sur $V \otimes_{\mathbf{Q}} C = V_C$, $V_{\mathscr{C}} = \amalg_{p,q} V^{p,q}$, telle que a) la graduation totale correspondante soit "définie sur $\mathbf{Q}$" i.e. $\amalg_{p+q=n} V^{p,q}$ provienne d'un sous espace $V^n_{\mathbf{Q}}$ de V, et b) on a $\overline{V}^{p,q} = V^{q,p}$, où $x \mapsto \overline{x}$ désigne la conjugaison complexe. (NB Généralisation à des corps plus généraux laissée à Saavedra). Les vectoriels V munis d'une pré-structure de Hodge forment une catégorie tensorielle sur $\mathbf{Q}$ dans un sens évident, muni d'un foncteur fibre canonique, le foncteur 'oubli" F. On trouve donc un groupe de Galois G, et plus généralement toute $\otimes$-sous-catégorie $\mathscr{C}$ d la catégorie précédente nous définit un groupe de Galois G. La bigraduation sur le foncteur $F_{\mathscr{C}}(V) = V \otimes_{\mathrm{Q}} \mathscr{C}$ correspond, en vertu de 1) (où il convient cependant de se permettre une extension du corps de base sur le foncteur fibre envisagé…) d'un homomorphisme $\mathscr{G}^2_{mC} \longrightarrow G_{\mathscr{C}}$, i.e. de deux homo-

morphismes qui commutent

$$i_1, i_2 : \mathcal{G}_{mC} \longrightarrow G_{\mathscr{C}}.$$

Les deux conditions a) et b) imposées aux structures envisagées s'interprètent respectivement par les faits que l'homomorphisme

$$i_{\mathscr{C}} = i_1 i_2 : \lambda \mapsto i_1(\lambda) i_2(\lambda)$$

est "défini sur **Q**" i.e. provient d'un homomorphisme

$$i : \mathbf{G}_m \longrightarrow G,$$

(nécessairement central, car las composantes homogènes $V^n_{\mathbf{Q}}$ d'une pré-structure de Hodge sont évidement munis d'une pré-structure de Hodge de façon que V soit la somme directe de $V^n_{\mathbf{Q}}$ en tant que pré-structure de Hodge), et par la condition que l'on a

$$i_2 = \overline{i_1} \quad \text{i.e.} \quad i_2(\lambda) = \overline{i_1(\overline{\lambda})} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathscr{C}.$$

Si a toute variété projective lisse X sur $\mathbf{C}$ on associe sa cohomologie rationnelle $\mathrm{H}^*(X, \mathbf{Q}) = V$, de sorte que $V_{\mathbf{C}} = \mathrm{H}^*(X, \mathbf{C})$ est isomorphe canoniquement (par la théorie de Hodge) à $\mathrm{H}_{\mathrm{Hdg}}(X) = \amalg \mathrm{H}^q(X, \underline{\Omega}^p_{X/\mathbf{C}})$, on voit qu'on trouve ainsi une pré-structure de Hodge sur $\mathrm{H}(X, \mathbf{Q})$, d'où un $\otimes$-foncteur naturel de la catégorie des motifs sur $\mathbf{C}$ dans la catégorie des pré-structures de Hodge. La conjecture de Hodge standard équivaut à dire que ce foncteur est *pleinement fidèle*, i.e. que l'homomorphisme naturel qui va du groupe de Galois de Hodge précédent G dans le groupe de Galois motivique (associé au $\otimes$-foncteur de Betti $\mathrm{H}_{\mathrm{Bet}}$) est un épimorphisme. Ou encore que pour toute catégorie $\mathscr{C}_0$ de motifs de type fini sur $\mathbf{C}$, désignant par $\mathscr{C}$ la $\otimes$-catégorie de pré-structures de Hodge engendrée par les $\mathrm{H}_{\mathrm{Bet}}(M)$ pour $M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_0)$, l'homomorphisme de groupes algébriques $G \longrightarrow G_0$ associé au foncteur de Betti-Hodge $\mathscr{C}_0 \longrightarrow \mathscr{C}$ est un épimorphisme (i.e. surjectif sur les points à valeurs complexes, disons).

On appelle *polarisation* d'une pré-structure de Hodge de poids n la donnée d'un accouplement de pré-structures de Hodge

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbf{Q}(n),$$

où $\mathbf{Q}(n)$ est l'espace vectoriel trivial de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$, avec $\mathbf{Q}C = C$ muni du bidegré (n,n), ayant la propriété que la forme hermitienne correspondant sur $V_{\mathscr{C}}$,

$$\varphi(x,y) = \varphi(x,\overline{y})(-i)^{p-q} \quad \text{pour } x \text{ de bidegré } (p, q-p)$$

soit définie positive. Une *structure de Hodge* est une pré-structure de Hodge admettant une polarisation. Les structures de Hodge forment une sous-$\otimes$-catégorie de la catégorie des pré-structures de Hodge. La théorie de Hodge nous assure que le foncteur de Betti-Hodge sur la catégorie des motifs sur $\mathbf{C}$ prend ses valeurs en fait dans la catégorie des structures de Hodge (une polarisation d'un variété projective lisse V définit canoniquement une polarisation de la structure de Hodge associée sur la cohomologie de Betti-Hodge). NB. On n'a aucune idée sur ce que pourrait être l'image essentielle du foncteur précédent, par exemple s'il y a lieu d'espérer qu'on trouve toutes les structures de Hodge (donc une équivalence de catégories : motifs sur $\mathbf{C} \longrightarrow$ structures de Hodge) ; cela semble peu probable, mais on n'a aucune indication sérieuse dans un sens ou l'autre.

La catégorie des structures de Hodge est semi-simple. Si G est le groupe de Galois d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ de pré-structures de Hodge, à engendrement fini si on veut (pour simplifier), alors on peut expliciter en termes du groupe de Galois associé et de sa structure i_1 ci-dessus la condition pour que les objets de $\mathscr{C}$ soient en fait des structures de Hodge. Ceci est un exercice plaisant et délectable, qui devrait figurer dans un travail systématique sur les $\otimes$-catégories, dans le chapitre des exemples. On trouve des restrictions très sérieuses sur le groupe G muni de i_1 (en plus du fait que G soit réductif).

4) Je laisse le soin à Saavedra de déterminer quelle structure supplémentaire on obtient sur la structure de Hodge "complexe" associée à une variété projective lisse complexe X, lorsqu'on se donne cette dernière comme déduite d'une variété projective réelle $X_{\mathbf{R}} = X_0$. On trouve une notion de "structure de Hodge réelle", donnant naissance à une $\otimes$-catégorie correspondante. Dans le groupe de Galois motivique de celui-ci, en plus de la structure i_1, on trouve un élément f_∞ de $G(\mathbf{Q})$, d'ordre 2 (jouant le rôle d'un "élément de Frobenius à l'infini"), qui correspond à l'automorphisme du foncteur de Betti $X_0 \mapsto \mathrm{H}(X_0(\mathscr{C}), Q)$ déduit de l'homéomorphisme $x \mapsto \overline{x}$ de $X_0(\mathscr{C})$. Il faut expliciter les relatons entre cet élément et i_1, i_2 !

5) Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie tensorielle, munie d'un foncteur fibre sur k de caractéristique nulle. A prouver que, pour que le groupe de Galois G correspondant soit profini, il faut et il suffit que pour tout objet M de $\mathscr{C}$, la $\otimes$-catégorie engendrée soit semi-simple et n'ait qu'un nombre fini d'objets simples non isomorphes. Si $\mathscr{C}$ est quelconque, la sous-catégorie pleine $\mathscr{C}_0$ de $\mathscr{C}$ qui correspond au pro-groupe quotient de G formé des G_i/G_i° (où $G = \varprojlim G_i$, et G_i° est la composante neutre de G_i) est formée exactement des objets M ayant la propriété précédente.

Il serait intéressant de trouver des énoncés correspondants en caractéristique quelconque.

6) La notion de polarisation d'un motif sur un corps (elle-même déduite de celle de polarisation d'une variété algébrique) donne une structure supplémentaire remarquable dans la catégorie des motifs : si M est un motif de poids n, on sait parmi les formes symétriques (n pair) resp. alternées (n impair) $M \otimes M \longrightarrow T(n)$ (où T est le motif de Tate) distinguer celles qui sont "définies positives" ou encore des "polarisations". Cette notion se reflète par exemple par des structures supplémentaires sur les groupes de Galois motiviques. Il y a lieu de faire une étude axiomatique abstraite d'une telle notion de polarisation sur une $\otimes$-catégorie générale au dessus d'un sous-corps du corps des réels. On pourra en rediscuter à l'occasion.

MOTIFS À COEFFICIENTS SUR UN CORPS DE [ ]
à partir de 1958[20]

[20] https://agrothendieck.github.io/divers/motcoescan.pdf

MOTIFS

1965 1970[21]

---

1. La catégorie $\mathscr{M}^+(X)$

À tout préschéma noethérien (éventuellement de type fini sur un anneau noethérien) X est associé une *catégorie abélienne* $\mathscr{M}^+(X)$, dite catégorie des *motifs effectifs* sur X. C'est une $\mathbf{Q}$-catégorie abélienne, i.e., pour tout $M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^+(X))$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $n1_M$ est un isomorphisme de M. De plus $\mathscr{M}^+(X)$ est muni d'un produit tensoriel commutatif et unitaire[22], exact à droite, l'unité est notée $\mathbb{1}_X$ ou $\mathbf{Q}_X(0)$. On considère aussi la catégorie dérivée bornée $\mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(X))$ de $\mathscr{M}^+(X)$. Le produit tensoriel est étendu en un bifoncteur $M\underline{\otimes}N$ en $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(X)))$.

2. Variances avec X

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préschémas noethériens, il lui est associé un *foncteur exact* $f^* : \mathscr{M}^+(Y) \longrightarrow \mathscr{M}^+(X)$ compatible avec $\otimes$, d'où $\mathrm{Ł}f^* : \mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(Y)) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(X))$. On a transitivité.

Si f est de type fini, et propre *ou* Y excellent, on a même un foncteur $\mathrm{R}f_* : \mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(X)) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(Y))$ satisfaisant aux formules de transitivité, et la for-

[21] Transcription par Elbaz-Vincent et J. Malgoire `https://agrothendieck.github.io/divers/motiscan.pdf`

[22] On peut en termes des données construire des $\bigwedge^i M$ etc…

mule de projection[23]

$$\mathrm{R}f_*(M \otimes \mathrm{Ł}f^*(N)) \simeq \mathrm{R}f_*(M) \otimes N.$$

3. Cas $X = \varprojlim X_i$

Supposons $X = \varprojlim X_i$, système projectif filtrant essentiellement affine. Alors pour les foncteurs images inverses, on a

$$\mathscr{M}^+(X) \simeq \varinjlim \mathscr{M}^+(X_i).$$

En particulier, si X est de type fini sur $S = \mathrm{Spec}(A)$, alors X est limite de préschémas X_i de type fini sur $\mathbf{Z}$, et la détermination de $\mathscr{M}^+(X_i)$ avec ses structures déjà envisagées est ramenée au cas des préschémas de type fini.

De même si (S_i) est un système projectif filtrant essentiellement affine, $S = \varprojlim S_i$, et si X, Y de type fini sur S sont définis par (X_i), (Y_i) de la façon habituelle, si on prend des $M_{i_0} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}^b(\mathscr{M}^+(X_{i_0})))$, d'où M_i, M, on aura pour $f_{i_0} : X_{i_0} \longrightarrow Y_{i_0}$ la relation

$$\mathrm{R}f_*(M) = \varinjlim v_i^*(\mathrm{R}f_{i_*}(M_i))$$

où $v_i : Y \longrightarrow Y_i$ est le morphisme canonique.

4. Foncteurs T_ℓ

Soit ℓ un nombre premier[24] tel que $\ell 1_X \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ soit inversible. Alors on a un foncteur

$$T_\ell = T_\ell^{(X)} : \mathscr{M}^+(X) \longrightarrow \mathscr{M}_\ell^+(X),$$

où $\mathscr{M}_\ell(X)$ est la catégorie formée des "$\mathbf{Q}_\ell$-modules constructubles sur X", i.e., la catégorie déduite de la catégorie des "systèmes ℓ-adiques de faisceaux de ℓ-torsion constructibles" en négligeant précisément les faisceaux de torsion. Le foncteur T_ℓ,

[23] Considérer aussi la formule de dualité entre $\mathrm{R}f_*$, f^*, et les foncteur $f^!$, $\mathrm{R}f_!$ et leurs relations [[…]], enfin le formulaire standard reliant tous ces foncteurs…

[24] N. d. T (note du transcripteur) : Grothendieck note l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$, que nous avons préféré éviter pour ne pas induire de confusions

est **compatible avec** $\otimes$ et **unité, exact** et **fidèle** (mais non pleinement fidèle), **compatible avec le changement de base** f^***, et compatible également avec** $\mathrm{R}f_*$[25]. [**N. B.** T_ℓ s'étend évidemment en un foncteur $\mathrm{D}^b(\mathscr{M}(X)) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathscr{M}_\ell(X))$]. La détermination des T_ℓ est encore ramenée au cas où X est de type fini sur $\mathbf{Z}$. **N. B.** Ceci exclu le choix limite $\mathscr{M}^+(X) = 0$ pour tout X, car il faudrait qu'on ait $\mathrm{R}^* f_*(\mathbf{Z}_\ell) = 0$ pour f, ℓ, ce qui n'est vrai en général…

Signalons aussi la compatibilité de T_ℓ avec l'isomorphisme de Künneth.

5. Les $\mathbf{Q}_\ell(-n)$

Pour tout X, on a un élément canonique $\mathbf{Q}_X(-1)$[26] ou $\mathbb{1}_X(-1) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^+(X))$, dont la formation est compatible avec les changements de base (il suffit donc de le considérer sur Spec($\mathbf{Z}$)), avec des isomorphismes,

$$T_\ell(\mathbf{Q}(-1)) \simeq \mathbf{Q}_\ell(-1) = T_\ell(\mathbb{G}_m)^{-1}$$

et le cas échéant (X sur $\mathbf{Q}$).

On peut définir $\mathbf{Q}(-1)$ comme $\mathrm{R}^2 f_*(1_{\mathbb{P}^1_X})$, où $f : \mathbb{P}^1_X \longrightarrow X$ est la projection canonique. Posant

$$\mathbf{Q}(-n) = \mathbf{Q}(-1)^{\otimes n}, \quad \text{pour} \quad n \geq 0,$$

on peut prouver, à l'aide des axiomes déjà posés, que si $f : X \longrightarrow S$ est lisse projectif à fibres géométriques connexes non vides, partout de dimension relative d, alors

$$\mathrm{R}^{2d} f_*(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbf{Z}_S(-d),$$

et si on enlève l'hypothèse "f projectif" mais seulement f quasiprojectif, on trouve encore

$$\mathrm{R}^{2d} f_!(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbf{Z}_S(-d).$$

On veut de plus, si X/S est lisse et $Y \underset{i}{\hookrightarrow} X$ est lisse sur S, de codimension d dans X, l'isomorphisme

$$\mathrm{R}\, i^!(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbf{Q}_Y(-d),$$

[25] compatibilité avec $f^!$, $\mathrm{R}f_!$, avec hom résidu, etc…

[26] **N.d.T** : Il semble que dans sa première mouture toute la théorie était sur $\mathbf{Z}$, puis après relecture(s), Grothendieck a changé plusieurs $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Q}$. Nous avons donc garder ce qui semble être l'ultime révision.

compatible avec les isomorphismes déjà connus du point de vue ℓ-adique…

6. La catégorie $\mathscr{M}(X)$

Le foncteur

$$M \rightsquigarrow M(-1) = M \otimes \mathbf{Q}(-1),$$

de $\mathscr{M}^+(X)$ dans lui-même est *pleinement fidèle* mais pas une équivalence en général. Il y a donc une façon canonique d'élargir $\mathscr{M}^+(X)$ en $\mathscr{M}(X)$ de telle façon que $-\mathbf{Q}(-1)$ devienne une équivalence, en prenant la pseudo-limite inductive des

$$\mathbf{M}^+(X) \xhookrightarrow{-\otimes\mathbf{Q}(-1)} M^+(X) \xhookrightarrow{-\otimes\mathbf{Q}(-1)} M^+(X).$$

On[27] prolonge à $\mathscr{M}(X)$ la structure $\otimes$, alors $\mathbf{Q}(-1)$ devient inversible, soit $\mathbf{Q}(1)$ son inverse, et tout élément de $\mathscr{M}(X)$ peut s'écrire, pour n assez grand, sous la forme $M_n(n)$, avec $M_n \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^+(X))$. [Pour n fixé, M_n est bien déterminé par M à isomorphisme unique près, et

$$(M_n(n) \simeq M_{n+1}(n+1)) \Leftrightarrow (M_{n+1} \simeq M_n(-1)),$$

on retrouve la description de $\mathscr{M}(X)$ en termes de pseudo-limites inductives].

Les foncteurs T_ℓ s'étendent à $\mathscr{M}(X)$, de façon unique, de façon à rester compatibles avec $\otimes$.

7. Les foncteurs Hom et R Hom

Dans $\mathscr{M}(X)$, on a aussi des foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}$, liés à $\otimes$ par la formule habituelle

$$\mathrm{Hom}(P \otimes Q, R) \simeq \mathrm{Hom}(P, \underline{\mathrm{Hom}}(Q, R)),$$

$$\simeq \mathrm{Hom}(Q, \underline{\mathrm{Hom}}(P, R)),$$

et qui s'étendent en $\mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(P, Q)$, $P, Q \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}^b(\mathscr{M}(X)))$, satisfaisant à la relation analogue relativement à $\underline{\otimes}$. **La formation des $\underline{\mathrm{Hom}}$ et $\mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}$ est compatible avec les T_ℓ. [N. B. On retrouve la formation des $f^!$…]**

[27] $\mathscr{M}^+(X)$ est une *sous-catégorie abélienne épaisse* de $\mathscr{M}(X)$; l'appartenance à $\mathscr{M}^+(X)$ se vérifie fibre par fibre …

8. Motifs constants, tordus et polynômes caractéristiques

Soient ℓ, ℓ' des nombres premiers, premiers aux caractéristiques résiduelles de X. Soit $M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^+(X))$. On veut que

$$\begin{array}{c} T_\ell(M) \quad \text{faisceau constant tordu} \\ \Updownarrow \\ T_{\ell'}(M) \quad \text{faisceau constant tordu} \end{array}$$

et que sous ces conditions, $T_\ell(M)$ et $T_{\ell'}(M)$ doivent avoir même rang en chaque point.

Pour vérifier l'égalité des rangs, on est ramené au cas où X est le spectre d'un corps (fini si on veut, on clôture algébrique d'un tel). Plus généralement, si u est un endomorphisme de M (avec $X = \mathrm{Spec}(k)$, k un corps), on en déduit

$$T_\ell(u) \in \mathrm{End}(T_\ell(M)), \quad T_{\ell'}(u) \in \mathrm{End}(T_{\ell'}(M)),$$

et je dis que l'on a

$$\boxed{\mathrm{Tr}(T_\ell(u)) = \mathrm{Tr}(T_{\ell'}(u)) \in \mathbf{Q},}$$

d'où, remplçant u par $\Lambda^i(u)$, le fait

$$\boxed{P(T_\ell(u), t) = P(T_{\ell'}(u), t) \in \mathbf{Q}[t].}$$

[Ici il s'agit des polynômes caractéristiques].

Pour ceci, notons que

$$u \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_X, \mathrm{Hom}(M, M^2)) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_X, \check{M} \otimes M),$$

et on a un *morphisme contraction*[28]

$$\check{M} \otimes M \longrightarrow \mathbb{1}_X,$$

d'où un $c(u) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_{\mathbb{X}})$, et

$$\mathrm{Tr}(T_\ell(u)) = T_\ell(c(u)) \in \mathbf{Q}_\ell,$$

et il suffit de savoir :

$$\boxed{X \text{ connexe} \Rightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}X) = \mathbf{Q}\,\mathrm{id}_{\mathbb{1}_X}.}$$

[28] *à inclure dans le formalisme tensoriel*

9. Filtration de $\mathscr{M}^+(X)$ et $\mathscr{M}(X)$

9.1 Filtration par le poids.

$$\mathscr{M}^{+0}(X) \subset \mathscr{M}^{+1}(X) \subset \cdots \subset \mathscr{M}^{+i}(X) \subset \ldots$$

filtration exhaustive de $\mathscr{M}(X)$, [L'appartenance à $\mathscr{M}^{+i}(X)$ se vérifie fibre par fibre (géométrique si on veut), et dans le cas X de type fini sur $\mathbf{Z}$, il suffit de vérifier en les points fermés (pour ceux-ci, il y a un critère par Frobenius, cf. plus bas)[29]], compatible avec f^*, et $M|_x \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^{+i}(k(x))) \Rightarrow \exists x \in U$ voisinage de $\overline{x}$, tel que $M|_U \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{M}^{+i}(U)$). Soit $f : X \longrightarrow Y$, alors

$$\mathrm{R}^j f_! : \mathscr{M}^{+i}(X) \longrightarrow \mathscr{M}^{+j}(X);$$

de plus, $\mathscr{M}^{+i}(k)$ (k un corps algébriquement clos) est "engendré" par les sous-espaces $\mathrm{R}^j f_!(\mathbb{1}_X)$ pour X si on veut projectif lisse de dim $\leq j$ sur k.

[au[30] sens que tout $M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^i(k))$ a une filtration dont les facteurs sont isomorphes à de tels sous-espaces].

$$\begin{cases} \mathscr{M}^{+i}(X) \otimes \mathscr{M}^{+j}(X) \subset \mathscr{M}^{+i+j}(X), \\ \mathbf{Z}(-1) \in \mathrm{Ob}(M^{+2}(X)) \end{cases}$$

d'où

$$\mathscr{M}^{+i}(X) \otimes \mathrm{Z}(-j) \subset \mathscr{M}^{+i+2j}(X), \quad \text{pour} \quad j \geq 0.$$

On a mieux :

$$M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^{+i}(X)) \Leftrightarrow M(-j) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^{+i+2j}(X)).$$

De cette façon, la filtration de $\mathscr{M}^+(X)$ par les $\mathscr{M}^{+i}(X)$ ($i \geq 0$) peut se prolonger en une filtration de $\mathscr{M}(X)$ par des $\mathscr{M}^i(X)$ ($i \in \mathbf{Z}$) de telle façon que pour $i \geq 0$, ce soit la filtration déjà envisagée, et pour i quelconque, on définit

$$M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^i(X)) \Leftrightarrow M(-j) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^{i+2j}(X)),$$

[29] généraliser compatibilités avec $\varprojlim$ de préschémas
[30] indice en bas

où on prend j assez grand pour que $M(-j) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^+(X))$. On notera que[31]

$$\mathscr{M}^{+i}(X) = \mathscr{M}^i(X) \cap \mathscr{M}^+(X),$$

si $i \geq 0$, et pour tout i si on définit $\mathscr{M}^{+i}(X) = \{0\}$ si $i < 0$. On aura

$$\otimes \mathscr{Q}(-1) : M^i(X) \cong \mathscr{M}^{i+2}(X),$$

$$\otimes \mathscr{Q}(j) : M^i(X) \cong \mathscr{M}^{i+2j}(X),$$

mais on fait attention que l'inclusion

$$\mathbf{Q}(-1) \otimes M^{+i}(X) \hookrightarrow M^{+i+2}(X),$$

plus généralement

$$\mathbf{Q}(-j) \otimes M^{+i} \hookrightarrow M^{+i+2j}(X),$$

est *stricte* en général, i.e n'est pas une équivalence de catégories.

Noter[32] que $\mathscr{M}^{+i}(X)$ est *épaisse* dans $\mathscr{M}^{+j}(X)$, et de même $\mathscr{M}^i(X)$ épaisse dans $\mathscr{M}^j(X)$ $(i \leq j)$.

Les quotients $G_i^+(X) = \mathrm{Gr}_i(\mathscr{M}^+(X)) \simeq \mathscr{M}_i^+(X)/\mathscr{M}_{i-1}^+(X)$ et $G_i(X) = \mathrm{Gr}_i(\mathscr{M}(X)) \simeq \mathscr{M}_i(X)/\mathscr{M}_{i-1}(X)$ sont fort intéressants. Notons que les $G_i(X)$ sont tous équivalents par twisting $G_i(X) \simeq G_{i+2j}(X)$, en particulier tous équivalents canoniquement à $G_0(X)$. D'ailleurs

$$G_i^+(X) \hookrightarrow G_i(X) \simeq G_0(X),$$

équivalent à une sous-catégorie pleine et *épaisse* de $G_i(X) \simeq G_0(X)$.

9.2 Filtration par le "type dimmensionnel".

On pose pour $i \geq 0$,

$$D_i(\mathscr{M}^+(X)) = \begin{cases} \text{sous-catégorie pleine de } \mathscr{M}^+(X) \\ \text{formée des objets qui se dévissent loc. étale (du moins fibre par fibre)} \\ \text{en objets de la forme} \\ M(-j), \quad \text{avec} \quad M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}^{+i}(X)), j \in \mathscr{Z}, i \geq 0 \end{cases}$$

[31]indices en bas
[32]indices en bas

i.e., on prend (du moins pour $X = \mathrm{Spec}(K)$ d'un corps) la filtration minimum qui majore celle par le poids, qui soit stable par $\otimes\mathbf{Q}(-1)$, et *épaisse*.

Les $D_i(\mathscr{M}^+(X))$ sont stables par image inverse, et pour l'image directe on a

$$\mathrm{R}^j f_!(D_i(\mathscr{M}^+(X))) \subset D_{i+j}(\mathscr{M}^+(Y)),$$

$$\mathrm{R}^j f_*(D_i(\mathscr{M}^+(X))) \subset D_{i+j}(\mathscr{M}^+(Y)).$$

[On a seulement $\mathrm{R}^j f_*(\mathscr{M}^{+i}(X)) \subset \mathscr{M}^{+i+2j}(Y)$!?[33]]

Ici on a

$$M \in \mathrm{Ob}(D_i(\mathscr{M}^+(X))) \Leftrightarrow M(-j) \in \mathrm{Ob}(D_i(\mathscr{M}^+(X))),$$

et la filtration[34] de $\mathscr{M}^+(X)$ par ls $D_i(\mathscr{M}^+(X))$ s'étend en une filtration des $\mathscr{M}(X)$ par des $D_i(\mathscr{M}(X))$ induisant la filtration donnée,

$$M \in \mathrm{Ob}(D_i(\mathscr{M}(X))) \Leftrightarrow M(-j) \in \mathrm{Ob}(D_i(\mathscr{M}(X))) \quad \text{pour } j \text{ grand.}$$

On a

$$D_i(\mathscr{M}(X)) \otimes D_j(\mathscr{M}(X)) \subset D_{i+j}(\mathscr{M}(X)),$$

mais $\mathbf{Z}(j) \in D_0(M(X))$ pour tout j, et de même en mettant des $+$.

Enfin, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i(D_j(\mathscr{M}(X)), D_k(\mathscr{M}(X))) \subset D_{j+k}(\mathscr{M}(X))).$$

(pas de formule aussi simple en termes des $\mathscr{M}_\alpha(X)$!).

10. Motifs constants tordus. Anneaux $\mathscr{M}^+(X)$ et $\mathscr{M}(X)$

11. Interprétation topologique des types dimensionnels (cas "géométrique")

Soit X non singulière sur k alg. clos. Considérons la filtration X par la codimension[35], et la suite spectrale

$$\mathrm{H}^*(X, \mathbf{Q}_\ell) \Leftarrow E_1^{p,q} = \amalg_{x \in X[p]} \mathrm{H}^{q-p}(X, \mathbf{Q}_\ell)(-p)$$

[33] Cela distingue formellement les filtrations $D_i(M)$ et $\mathscr{M}_i$!

[34] toutes formulées en termes de la dim de X

[35] attention terme initial E_1 et non E_2 !!

où on pose

$$\begin{cases} X[p] = \{x \in X \mid \dim(\mathcal{O}_{X,x}) = p\}, \\ \mathrm{H}^*(X, \mathbf{Z}_\ell(-p)) = \varinjlim_{U \text{ ouvert } \neq \varnothing \text{ de } \overline{X}} \mathrm{H}^*(U, \mathbf{Q}_\ell(-p)) \end{cases}$$

On veut que cette suite spectrale d'une suite spectrale de motifs. [du moins à partir de $E_r^{p,q}$ avec $r \geq 2$, sinon il faudrait parler de ind-motifs, ou bien prendre une filtration *finie* convenable de X par des sous-schémas fermés]. Le morceau en dim n[36] de filtration $\geq p$ est visiblement de type dimensionnel $\leq n-2p$. On veut que ce soit *exactement* le morceaux de type dimensionnel $n-p$.

12. L'homomorphisme fondamental $L(K) \longrightarrow M^+(K)$ et invariants birationnels fondamentaux

13. Caractérisation galoisienne des filtrations

14. Invariants de Galois et théorèmes de commutation

15. Cohomologie absolue

16. Relations avec les points rationnels et la cohomologie des variétés abéliennes sur des schémas de type fini…

17. Formes positives

18. Dictionnaire : Fonctions L — Cohomologie à action galoisienne

19. Relation avec la théorie de Hodge[37]

[36]Si X est **projectif** (hypothèse essentielle même si X de dim 1)
[37]N.d.T : semble avoir été reconsidérer et traiter dans le document…

Lettre à J. Dieudonné, 29.9.1965[38]

29.9.1965

Cher Dieudonné,

Merci de ta lettre du 24 et pour la table des matières des par. 16 à 19. Je serais content de recevoir à l'occasion la table des matières provisoire des par. 20 et 21 ; d'accord pour les joindre au fascicule 4 du Chap IV. Mais comment vaux-tu subdiviser mon ancien par.20, et quels seront les titres des deux morceaux ? Comme je commence à me perdre dans le plan, et qu'il est parfois commode de pouvoir référer sans trop déconner à un n° de paragraphe, je te donne ici ce qui me semble être le plan actuel, dis-moi si tu es d'accord :

20. ???

21. ???

22. Systèmes linéaires, compléments sur le groupe de Picard.

23. Grassmaniennes.

24. Formes lisses, singularités quadratiques ordinaires.

25. Sections hyperplanes et bordel.

26. Résultant et discriminant.

27. Extensions infinitésimales.

Le 25. risque d'ailleurs d'être fort long, et je te vois déjà vouloir le subdiviser en deux ! Pourtant, $27 = 3^3$ est un bien joli nombre !

Il n'est pas question que je publie l'ex-Appendice au par.18 sous mon nom ; ta rédaction n'a à peu près plus rien de commun avec les vagues notes manuscrites que je t'avais passées, si même je t'en ai jamais passé, et ne me suis borné à te dire : il n'y a qu'à faire pareil que pour les anneaux complets…Il serait d'autre part dommage que ton travail de mise au point soit perdu pour les éventuels utilisateurs

[38] https://agrothendieck.github.io/divers/LGD29965scan.pdf

(il finit toujours par s'en trouver…). C'est pourquoi je te demande de bien vouloir reconsidérer la question d'en faire un "joint paper".

Pour par. 20, 10.9.1, il faut bien entendu utiliser le fait que l'ensemble des points de Z_λ en lesquels F_λ restreint à la fibre est de prof > 0 donné, est *constructible* (on a même du prouver au par. 12 qu'il est ouvert, avec les hypothèses de platitude et de présentation finie qu'on a faites). Comme son image inverse dans Z est tout, c'est que c'est déjà tout un peu plus loin que λ. C'est vraiment toujours le même argument qui revient !

Bien à toi

A. Grothendieck

Letter to J. Dieudonné, 29.9.1965

29.9.1965

Dear Dieudonné,

Thank you for the letter of the 24th and for the table of contents of par. 16 to 19. I would be happy to receive one day the tentative table of contents for par 20 and 21. It's ok to adjoin them to volume 4 of Ch. IV. But how are you going to subdivide my old par. 20 and what will be the titles of the two parts? Since I am beginning to be lost in the plan and it is often convenient to be able to refer to (without saying too many stupid things) to a number in a paragraph, I give you here what seems to me to be the actual plan, tell me if you agree.

20. ???

21. ???

22. Linear systems complements about the Picard group

23. Grassmanians

24. Smooth forms ordinary quadratic singularities

25. Hyperplane sections et bordel

26. Resultant and discriminant

27. Infinitesimal extensions

The 25th is at risk in addition of being too long and you may wish to subdivide it into two. Still $27 = 3^3$ is a very pretty number!

It is out of the question that I should publish the appendix to para. 18 under my name. Your formulation (writeup) has almost nothing in common with the vague manuscript notes that I sent to you, and limiting myself to saying: Even if I had given you any you just have to do the same as for complete rings…It would be on the other hand a pity if your work about its formal setting should be lost for the possible users (il finit toujours par s'en trouver…) There can always be some to be found. That is why I ask you to reconsider the question of making a "joint paper".

As for par. 20, 10.9.1 it is of course necessary to use the fact that the set of points of Z_λ where F_λ restricted to the fiber is of the depth $> n$ given is *constructible* (we have to prove the same meme in par. 12 that it is open with the assumption of flatness and of finite presentation which we make). Since its inverse image in Z is everything that is already a little further than than λ. This is really always the same argument qui revient!

That repeats itself.

Bien à toi

A. Grothendieck

LETTRE À P. DELIGNE
10.12.1965

- Letter about duality and ℓ-adic cohomologies.
- Scan

10.12.1965

Cher Deligne,

[Je vous propose une simplification pour la démonstration du théorème de dualité, qui permet d'éviter tout recours au théorème de pureté relative. Vous vous rappelez qu'on était réduit au cas où $f : X \longrightarrow Y$ est de dimension relative 1, $F = A_X$ et $G = A_Y$. Le procédé de passage à la limite de Exp VI, par. 6, permet de supposer la base noethérienne, et même si on y tient de dimension finie (car de type fini sur $\mathbf{Z}$). On raisonne par récurrence sur $n = \dim X$. Si $n = 0$, on sait le vérifier. Supposons le théorème démontré en dimension $< n$. Se localisant sur Y, on peut supposer Y strictement local. Alors, si y est son point fermé, on a $\dim(Y - y) = n$, et comme on est réduit à prouver le théorème séparément pour $X \times_Y (Y - y)$ et $X \times_Y y$, on gagne. — Autre remarque : le théorème de dualité peut se démontrer, essentiellement de la même façon et avec le même énoncé, pour un morphisme lisse $f : X \longrightarrow Y$ compactificable, lorsque Y est muni d'un faisceau d'anneaux A quelconque tel que il existe un entier n premier aux caractéristiques résiduelles annulant A, et X d'un faisceau d'anneaux B, et f étant donné comme morphisme de (X, B) dans (Y, A), de sorte qu'on a un homomorphisme de faisceau d'anneaux $f^{-1}(A) \longrightarrow B$. On définit alors

$$f^!(K^\bullet) = \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_{f^{-1}(A)}(B, f^{-1}(K) \otimes T_{X/T} 2d).$$

La définition de l'homomorphisme trace et la démonstration du théorème de dualité se décomposent alors en le cas où $f^{-1}(A) \longrightarrow B$ est un isomorphisme, qui se traite comme le cas $A = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_Y$, et le cas où $f = \mathrm{id}$, qui est trivial. Je pense qu'il vaut le coup d'inclure cette forme générale du théorème de dualité, soit de prime abord, soit à la fin dans un numéro-page. Je n'ai pas regardé si par hasard il pourrait se déduire du cas particulier $A = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_Y$ comme simple corollaire, mais ça m'étonnerait. La même remarque s'applique d'ailleurs également au théorème de dualité local, qui s'énonce pour des faisceaux d'anneaux plus généraux que le faisceau constant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.]

Il me semble que la relation de nature transcendante qui lie la cohomologie de De Rham ou de Hodge aux cohomologies ℓ-adiques, lorsque le corps de base est $\mathbf{C}$, via la cohomologie entière, devrait avoir analogue lorsque le corps de base est algébriquement clos value complet non archimédien, à corps résiduel de caractéristique p, et corps des fractions K de caractéristique zéro, savoir que $\mathrm{H}^*(Z, \mathbf{Z}_p)$ doit s'envoyer alors de façon $\mathbf{Z}_p$-linéaire dans la cohomologie de De Rham $\mathrm{H}^*(X)$, qui serait isomorphe alors à $\mathrm{H}(X, \mathbf{Z}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} K$. Pour définir un tel homomorphisme, on pourrait penser à utiliser l'espace rigide-analytique au sens de Tate défini par X (NB c'est un site qui ne peut être défini par une topologie au sens ordinaire, ce qui explique les difficultés conceptuelles initiales de Tate pour arriver à définir la notion d'espace rigide-analytique), soit X^{an}. On espère que les arguments habituels prouveront que pour des faisceaux de torsion, la cohomologie de $X_{\text{ét}}$ coïncide avec celle de X^{an}, et un excès d'optimisme nous ferait espérer que la cohomologie de X^{an} à coefficients constants $\mathbf{Z}_p$ est bien la limite projective des cohomologies à coefficients dans les $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, donc coïncide avec la cohomologie p-adique $\mathrm{H}(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}_p)$ (définie précisément comme une limite analogue). Si cela était vrai, l'immersion canonique de $\mathbf{Z}_p$ dans les fonctions constantes sur X^{an} semblerait permettre d'envoyer $\mathrm{H}(X^{\mathrm{an}}, \mathbf{Z}_p)$ dans la cohomologie de De Rham de X^{an}, qui par GAGA rigide-analytique n'est autre que celle de X. L'"excès" plus haut serait justifié essentiellement par un "lemme de Poincaré" rigide-analytique, disant que sur X^{an}, le complexe de De Rham est bien une résolution de faisceau des fonctions constantes à valeurs dans le corps de base. Notez bien que c'est certainement trivial pour l'analytique p-adique ordinaire, étant une simple question de séries convergentes dans ce cas, mais que la question pour la topologie rigide-analytique (qui est beaucoup plus grossière) est plus délicate. Je vous avoue d'ailleurs que j'ai de grands doutes que les choses marchent aussi simplement que ça, i.e. que la cohomologie rigide-analytique à coefficients constants tout bêtes donne les "bons" nombres de Betti. Je crois me rappeler que Tate m'avait dit que c'était déjà faux pour le H^1 des courbes elliptiques — il faudrait lui demander quel était son argument ; apparemment, on trouverait un peu plus que pour la cohomologie étale, mais quand même par toute la cohomologie. Il reste plausible néanmoins, quoi qu'il en soit, que la topologie rigide-analytique aura son rôle à jouer dans ces questions.

Noter qu'en caractéristique $p > 0$, on a un homomorphisme évident de $\mathrm{H}^*(X, \mathbf{F}_p)$ dans la cohomologie de De Rham, comme on voit en calculant cette dernière pour la cohomologie étale et non pour la cohomologie de Zariski (ce qui donne la même résultat, puisque les composantes du complexe de De Rham sont quasi-cohérents), et utilisant la suite spectrale en cohomologie étale

$$\mathrm{H}^*(X) \Leftarrow \mathrm{H}^p(X, \underline{\mathrm{H}}^q(\underline{\Omega})).$$

Cet homomorphisme se factorise d'ailleurs à travers $\mathrm{H}^*(X, \mathscr{F}_p) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X, \underline{\mathscr{O}}_X)$, ce dernier s'envoyant dans $\mathrm{H}^*(X)$ grâce à l'homomorphisme de puissance p-ème $f \rightsquigarrow f^p$, induisant un isomorphisme $\underline{\mathscr{O}}_X \simeq \underline{\mathrm{H}}^0(\underline{\Omega})$. Le composé des homomorphismes canoniques $\mathrm{H}^n(X, \underline{\mathscr{O}}_X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X, \underline{\mathscr{O}}_X)$ (ce dernier résultant de l'autre suite spectrale pour la cohomologie de De Rham) ne peut guère être autre chose que l'homomorphisme de Frobenius. Il faut dire que tout ą est bien éculé, et qu'on ne pourra dire des choses vraiment intéressantes et nouvelles qu'en faisant appel à la "vraie" cohomologie p-adique.

Bien cordialement

INTRODUCTION AU LANGAGE FONCTORIEL

- The Algerian war was a major armed conflict between France and Algerians that took place between 1954 to 1962 that leads to its independence. Grothendieck's trip to Algiers, the Algerian capital, probably persuaded by R. Godement, took place in November and December of 1965 with the intention to give a course at the Faculté des Sciences at the University of Algiers. It was motivated by a framework of cooperation of French intellectuals that traveled there for several weeks to give lessons and courses. These contributed to the development of a Department of Mathematics.
- Scan
- The following notes (in French), taken by M. Karoubi, were the result of a series of talks on the functorial language that Grothendieck gave during the month of November 1965 as requested by mathematicians there.

INTRODUCTION AU LANGAGE FONCTORIEL

par Alexandre Grothendieck

Ce fascicule contient une rédaction succincte d'une série d'exposés que Monsieur A. Grothendieck a bien voulu venir faire à Alger au cours du mois de Novembre 1965. Il a pour but de familiariser un débutant avec les éléments du langage fonctoriel, langage qui sera utilisé par la suite dans les divers séminaires : Algèbre Homologique dans las catégories abéliennes, Fondement de la K-théorie…

Les propositions non démontrées sont de deux types : des sorites dont la démonstration tiendra lieu d'exercices, des propositions moins évidentes (signalés par une astérisque) dont on trouvera les démonstrations dans les ouvrages de références.

0. Cadre logique

Lorsque l'on définit une catégorie, il y a des inconvénients à supposer que les forment une classe, au sens de la théorie des ensembles de Gödel-Bernays. En effet, si l'on sait définir les applications d'une classe dans une autre, ces applications ne forment cependant pas elles-mêmes une classe. En particulier on ne saurait parler de la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre. Aussi se placera-on dans le cadre de la théorie des ensembles de Bourbaki pour définir les *Univers*.

Univers :

On appelle *univers* un ensemble $\mathfrak{U}$ vérifiant les axiomes suivants :

(U_1) Si Y appartient à X et si X appartient à $\mathfrak{U}$, alors Y appartient à $\mathfrak{U}$.

(U_2) Si X et Y sont des éléments de $\mathfrak{U}$ alors $\{X, Y\}$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

(U_3) Si X est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des parties de X est un élément de $\mathfrak{U}$.

(U_4) Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles appartenant à $\mathfrak{U}$, et si I est un élément de $\mathfrak{U}$, alors $\bigcup_{i\in I} X_i$ appartient à $\mathfrak{U}$.

On déduit de ces axiomes les propositions suivantes :

(1) Si X est un élément de $\mathfrak{U}$, $\{X\}$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

(2) X et Y sont des éléments de $\mathfrak{U}$ si et seulement si le couple[1] (X, Y) est un élément de $\mathfrak{U}$.

(3) L'ensemble vide est un élément de $\mathfrak{U}$ (puisque c'est un élément de $\mathfrak{P}(X)$ pour tout ensemble X de l'univers $\mathfrak{U}$).

(4) Si Y est contenu dans X et si X appartient à $\mathfrak{U}$ alors Y appartient à $\mathfrak{U}$.

(5) Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles de $\mathfrak{U}$ et si I appartient à $\mathfrak{U}$, alors $\prod_{i\in I} X_i$ appartient à $\mathfrak{U}$.

(6) Si X est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathfrak{U})$.

(7) L'univers $\mathfrak{U}$ n'est pas un élément de $\mathfrak{U}$. En effet si $\mathfrak{U}$ appartient à $\mathfrak{U}$, alors $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$ appartient à $\mathfrak{U}$. Soit E appartenant à $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$ (donc E appartient à $\mathfrak{U}$) défini ainsi:

$E = \{X \in \mathfrak{U} | X \notin X\}$

On aurait alors : E appartient à E si et seulement si E n'appartient pas à E !

(8) L'intersection d'une famille quelconque d'univers est un univers. En particulier si E est un ensemble et s'il existe un univers contenant E, alors il existe un plus petit univers contenant E qu'on appelle l'univers engendré par E.

[1] On rappelle que le couple (X, Y) est l'ensemble $\{X, \{X, Y\}\}$

Si E_0 est un ensemble quelconque, on se propose de chercher s'il existe un plus petit univers $\mathfrak{U}$ contenant E_0. Il apparaît naturel de plonger E_0 dans un ensemble E_1 par le procédé suivant :

Soit G_0 l'ensemble ainsi défini : $X \in G_0 \iff (\exists Y)(Y \in E_0$ et $X \in Y)$ et $F_1 = E_0 \cup G_0$

Soit G_1 : $X \in G_1 \iff (\exists Y)(\exists Z)(Y \in F_1, Z \in F_1$ et $X = \{Y, Z\})$ et $F_2 = F_1 \cup G_1$

Soit $G_2 : X \in G_2 \iff (\exists Y)(Y \in F_2$ et $X = \mathfrak{P}(Y))$ et $F_3 = F_2 \cup G_2$

Soit $G_3 : X \in G \iff (\exists I)(\exists (X_i)_{i \in I})(I \in F_3, \forall i \in I, X_i \in F_3$ et $X = \bigcup_{i \in I} X_i)$ et $F_4 = F_3 \cup G_3$.

On pose alors $E_1 = F_4 \cup \{E_0\}$

En itérant cette opération e¿on forme une suite transfinie d'ensembles :

$$E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_\alpha \subset E_{\alpha+1} \subset \ldots$$

Pour qu'il existe un plus petit univers contenant E_0, il faut et il suffit que cette suite devienne stationnaire 'partir d'un certain rang (c'est-à-dire qu'il existe α tel que $E_{\alpha+1} = E_\alpha$) E_α sera précisément l'univers $\mathfrak{U}$ recherché.

En particulier si l'on prend $E_0 = \varnothing$, on montre que $\mathfrak{U} = E_\omega = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n$. Lorsqu'on part d'un ensemble E_0 infini, on ne peut prouver l'existence d'un univers $\mathfrak{U}$ contenant E_0. Il convient donc d'ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome suivant :

(a_1) **Axiome des univers** :

Pour tout ensemble X, il existe un univers $\mathfrak{U}$, tel que X soit élément de $\mathfrak{U}$.

De plus comme on ne souhaite pas sortir d'un univers $\mathfrak{U}$ par l'usage du symbole τ de Hilbert on introduit l'axiome supplémentaire :

(a_2) Si R est une relation, x une lettre figurant dans R, et s'il existe un élément X d'un univers $\mathfrak{U}$ tel que $(X|x)R$ soit vrai alors l'objet $\tau_x(R(x))$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

I. Généralités sur les catégories

1. Type de diagramme

1.1 Définition

Un *type de diagramme D* est la donnée d'un quadruple $D = (\mathrm{Fl}, \mathrm{Ob}, s, b)$ où :

Fl et Ob sont des ensembles respectivement appelés ensemble des *flèches* (ou des morphismes...), ensemble des *objets* (ou des sommets)

s et b sont des applications de Fl dans Ob respectivement appelés *source*, *but*.

- Un type de diagrammes sera souvent noté :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl} \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "b"] \\ \mathrm{Ob} \end{tikzcd}$$

- *Exemples* : On peut représenter certains types de diagramme :

$\bullet$ 1 seul objet; $\bullet\bullet\bullet$ (pas des flèches)

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} ; \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \end{tikzcd} ; \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

1.2 Morphisme d'un type de diagrammes dans une autre :

Si $D = (\mathrm{Fl}_D, \mathrm{Ob}_D, s_D, b_D)$ et $D' = (\mathrm{Fl}_{D'}, \mathrm{Ob}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$ sont deux types de diagramme, un *morphisme F de D dans D'* est un couple d'applications $F = (F_0, F_1)$: $F_0 : \mathrm{Ob}_D \longrightarrow \mathrm{Ob}_{D'}$, $F_1 : \mathrm{Fl}_D \longrightarrow \mathrm{Fl}_D$, tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl}_D \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "s_D"'] & \mathrm{Fl}_{D'} \arrow[d, "s_{D'}"] \\ \mathrm{Ob}_D \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}_{D'} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Fl}_D \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "b_D"'] & \mathrm{Fl}_{D'} \arrow[d, "b_{D'}"] \\ \mathrm{Ob}_D \arrow[r, "F_0"'] & \mathrm{Ob}_{D'} \end{tikzcd}$$

si D'' est un troisième type de diagrammes et $F' = (F'_0, F'_1)$ un morphisme de D' dans D'', on définit le *composé* des morphismes F et F', c'est le morphisme

$F'' = (F_0'', F_1'')$ de D dans D'' ou $F_0'' = F_0' F_0$, $F_1'' = F_1' F_1$. Le morphisme noté $1_D = (1_{\mathrm{Fl}_D}, 1_{\mathrm{Ob}_D})$ de D sur D est le *morphisme identique de D*.

1.3 Sous-type de diagramme d'un type de diagrammes.

Soit $D = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, s_D, b_D)$ un type de diagrammes. On dit que $D' = (\mathrm{Ob}_{D'}, \mathrm{Fl}_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$ est un *sous-type de diagrammes* de D si $\mathrm{Ob}_{D'}$ est inclus dans Ob_D, $\mathrm{Fl}_{D'}$ est inclus dans Fl_D et si $s_{D'}$ (respectivement $b_{D'}$) est la restriction à $\mathrm{Fl}_{D'}$ de s_D (respectivement b_D).

1.4. Si $D = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, s_D, b_D)$ est un type de diagrammes le type de diagramme noté $D^\circ = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, b_D, s_D)$ est appelé type de *diagrammes opposé de D*.

Un *morphisme contravariant de types de diagrammes* de D dans D' est un morphisme de type de diagramme de D° dans D'

2. Catégorie

Définition **(2.1)**. — Une catégorie C est la donnée :

(i) d'un *type de diagramme* $(\mathrm{Fl}, \mathrm{Ob}, s, b)$ appelé type de diagramme sous-jacent à C, noté $(\mathrm{Fl}_C, \mathrm{Ob}_C, s_C, b_C)$

(ii) d'une *application* du produit fibré $(\mathrm{Fl}_C, b_C) \times_{\mathrm{Ob}_C} (\mathrm{Fl}_C, s_C)$ dans Fl_C, appelé loi de composition des flèches, notée $\mu_C : (f, g) \longrightarrow g \circ f = gf$ et *vérifiant les propriétés* :

   (a) $(gf)h = g(fh)$ pour tous les éléments f, g, h de Fl_C tels que cette écriture ait un sens.

   (aa) pour tout objet X il existe une flèche 1_X telle que $s_C(1_X) = b_C(1_X) = X$, appelée *flèche identique* de X vérifiant $1_X f = f$, $f 1_X = f$ pour toute flèche f telle que cette écriture ait un sens.

On remarque que pour tout objet X, la flèche 1_X est unique.

Notations. Chaque fois que l'on écrit gf, il est entendu que la composition a un sens, c'est-à-dire que $b(f) = s(g)$.

Si X et Y sont deux objets d'un type de diagramme D (resp. d'une catégorie C), l'ensemble des flèches de source X, de but Y est noté $\mathrm{Hom}_D(X,Y)$ ou $\mathrm{Fl}_D(X,Y)$ (resp. $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$...)

Une flèche de source X et de but Y est aussi notée $f : X \longrightarrow Y$.

2.2 Foncteurs.

Soient C et C' deux catégories dont D et D' sont respectivement les types de diagrammes sous-jacents. Un *foncteur* de C dans C' est un *morphisme* $F = (F_0, F_1)$ du type de diagramme D dans le type de diagramme D', *compatible* avec la composition des flèches, c'est-à-dire tel que $F_1(fg) = F_1(f)F_1(g)$.

Pour tout X, $F_1(1_X)$ est alors la flèche identique de $F_0(X)$. Si C'' est une troisième catégorie de type de diagramme D'', F' un foncteur de C' dans C'', le *foncteur composé* des foncteurs F et F', $F'' = F'F$ est le composé des morphismes de type de diagramme sous-jacent **1.2**. On vérifie que F'' est compatible avec la composition des flèches. Pour tout catégorie C, de type de diagramme D, on définie un *foncteur identique* $1_C = 1_D$.

2.3. Soit C une catégorie de type de diagramme sous-jacent D. La *catégorie opposée* de C, notée C°, est la catégorie de type de diagramme D°, et dont la loi de composition des flèches μ_{C° est définie par $\mu_{C^\circ}(f,g) = \mu_C(g,f)$.

On remarque que $C^{\circ\circ} = C$.

Un *foncteur contravariant* de C dans C' on lui associe canoniquement un foncteur F° de C° dans C'°:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & C^\circ \arrow[d, "F^\circ"] \\ C' \arrow[r] & C'^\circ \end{tikzcd}$$

On remarque que $(FG)^\circ = F^\circ G^\circ$, $1_C^\circ = 1_{C^\circ}$, $F^{\circ\circ} = F$

2.4 Monomorphisme - Epimorphisme.

2.4.1. On dit qu'une flèche $f : X \longrightarrow Y$ d'une catégorie C est un *monomorphisme* si pour tout objet T de C l'application naturelle qui à $u : T \longrightarrow X$, fait correspondre fu de $\mathrm{Hom}(T,X)$ dans $\mathrm{Hom}(T,Y)$ est *injective*. Une flèche

$f : X \longrightarrow Y$ d'une catégorie C est un *épimorphisme* si f est un monomorphisme en tant que flèche de C° ou, ce qui est équivalent, si pour tout objet T de C l'application naturelle de $\mathrm{Hom}(Y, T)$ dans $\mathrm{Hom}(X, T)$ est *injective*.

Une flèche est un *bimorphisme* si c'est un monomorphisme et un épimorphisme.

2.4.2. Une flèche f de C est inversible à gauche (ou *rétractable*) s'il existe une flèche $g : b(f) \longrightarrow s(f)$ telle que $gf = 1_{s(f)}$; g est une *rétraction* de f.

Une flèche f de C est *inversible à droite* (ou *sectionnable*) s'il existe une flèche $g : b(f) \longrightarrow s(f)$ telle que $fg = 1_{b(f)}$; g est une *section* de f.

Une flèche rétractable et sectionnable est appelée un *isomorphisme*, il existe alors un $g : b(f) \longrightarrow s(f)$ unique tel que $fg = 1_{b(f)}$ et $gf = 1_{s(f)}$, g est *l'inverse* de f.

2.4.3. Une flèche rétractable est un monomorphisme. Une flèche sectionnable est un épimorphisme. Donc un isomorphisme est un bimorphisme. Les réciproques sont *fausses*.

2.5 Sous-objet, objet quotient.

Soit X un objet quelconque d'une catégorie C, on définit sur l'ensemble des monomorphismes de but X une *relation* de *préordre*: $i \leq i'$ si et seulement si ii' se factorise par i c'est-à-dire si et seulement si il existe un morphisme u tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "i"] & & X \\ & B' \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire tel que $i' = iu$.

On remarque que u est un monomorphisme, et est déterminé de façon unique. On considère la relation d'équivalence associée à cette relation de préordre. Dans chaque classe d'équivalence on choisit (par exemple grâce au symbole τ) un monomorphisme que l'on appelle *sous objet de X*. Par abus du langage on appellera aussi sous-objet de X la source d'un tel monomorphisme. On notera (B, i) un sous objet de X, ou simplement B. La relation de préordre ci-dessus induit donc une relation d'ordre sur l'ensemble des sous objets de X. Si B, B' sont deux sous objets de X, la borné inférieure (resp. la borne supérieure) lorsqu'elle existe, est notée $B \wedge B'$ (resp. $B \vee B'$). Par exemple, dans la catégorie des ensembles, notée Ens, $B \wedge B' = B \cap B'$, $B \vee B' = B \cup B'$.

Dualement on définit les *objets quotients* d'un objet X, et une relation d'ordre sur leur ensemble.

2.6 Sous catégorie d'une catégorie.

Soit C une catégorie de type de diagramme sous-jacent D, on dit que C', de type de diagramme D' est une *sous catégorie* si D' est un sous-type de diagramme de D et si de plus $\mu_{C'}$ (loi de composition des flèches dans C') est la restriction de μ_C au produit fibre $(\mathrm{Fl}_{C'}, b_{C'}) \times_{\mathrm{Ob}_{C'}} (\mathrm{Fl}_{C'}, s_{C'})$.

On remarque que pour tout couple X, Y d'objets de C' on a : $\mathrm{Fl}_{C'}(X,Y) \subset \mathrm{Fl}_C(X,Y)$. Si de plus on a l'égalité on dit que C' est une *sous-catégorie pleine* de C.

3. Exemples de catégories

3.1. Soit une catégorie dont l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, alors l'ensemble des flèches se trouve naturellement muni d'une structure de monoïde unitaire. Soit M une telle catégorie, C une catégorie quelconque, un foncteur $F = (F_0, F_1)$ de M dans C est essentiellement un homomorphisme de monoïde de Fl_M dans $\mathrm{Hom}(X,X)$, où X est l'image par F_0 de l'unique objet de M. On appelle *groupoïde* une catégorie dans laquelle toute flèche est inversible ; si de plus l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, l'ensemble des flèches est muni alors d'une structure de groupe.

3.2. Soit I un ensemble préordonné, on appelle *catégorie associée* à I, la catégorie notée $\mathrm{Cat}(I)$, dont l'ensemble des objets est I, et dont l'ensemble des flèches est le graphe de la relation de préordre ; si (i,j) est une flèche $s(i,j) = j$, $b(i,j) = i$, la composition des flèches se définit évidemment par $(i,j)(j,k) = (i,k)(i,i)$ est la flèche identité de i. Les propriétés (a) et (a a) se vérifient immédiatement.

Inversement, pour toute catégorie C on peut définir sur $\mathrm{Ob}\,C$ une relation de préordre, à savoir : $X \leq Y \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_C(X,Y) \neq \varnothing$. Une catégorie C est isomorphe à une catégorie $\mathrm{Cat}(I)$ si et seulement si toute flèche de $\mathrm{Fl}\,C$ est un monomorphisme. Il suffit de prendre $I = \mathrm{Ob}\,C$ muni de la relation de préordre précédente.

3.3 Catégories de types de diagramme, catégories de catégories

Dans cette section, on choisit une fois pour toute un univers $\mathfrak{U}$, et tous les ensembles utilisés sont des éléments de $\mathfrak{U}$.

Soit l'ensemble des "types de diagramme dans $\mathfrak{U}$", notée $\mathrm{Diag}_{\mathfrak{U}}$, (resp. l'ensemble des "catégories dans $\mathfrak{U}$", noté $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$) c'est-à-dire des types de diagramme D (resp. des catégories C) tels que les ensembles Ob_D, Fl_D (resp. Ob_C, Fl_C) soient des *éléments de* $\mathfrak{U}$. En considérant **1.2** (resp. **2.2**) on définit la *catégorie des types de diagramme* dans $\mathfrak{U}$ notée $\underline{\mathrm{Diag}}_{\mathfrak{U}}$ (resp. *la catégorie des catégories dans* $\mathfrak{U}$ *notée* $\underline{\mathrm{Cat}}_{\mathfrak{U}}$).

Explicitons par exemple $\underline{\mathrm{Cat}}_{\mathfrak{U}}$, le type de diagramme est le suivant : l'ensemble des objets est $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$, l'ensemble des flèches est l'ensemble des triples (F, C, C') où F est un foncteur de la catégorie C dans la catégorie C', $s(F, C, C') = C$, $b(F, C, C') = C'$. La loi de composition des flèches est la compositions des foncteurs définie en **2.2**. On vérifie les propriétés (a) et (aa).

3.4 Catégorie des morphismes de type de diagramme d'un type de diagramme dans une catégorie, catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre

Soient $D = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, s_D, b_D)$ un type de diagramme et C' une catégorie de type de diagramme sous-jacent $(\mathrm{Ob}_{C'}, \mathrm{Fl}_{C'}, s_{C'}, b_{C'})$. Un morphisme de type de diagramme D dans C' est aussi appelé *diagramme de type D dans C'*.

On considère l'ensemble des morphismes de type de diagramme de D dans C' noté $\mathrm{Diag}(D, C')$. Soient $F = (F_0, F_1)$, $G = (G_0, G_1)$ deux morphismes de type de diagramme de D dans C'. Une *flèche* de *source* F de *but* G est une application u de Ob_D dans $\mathrm{Fl}_{C'}$ ($u(x)$ sera souvent noté u_X) telle que pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de D, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_0(X) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "u(X)"'] & F_0(Y) \arrow[d, "u(Y)"] \\ G_0(X) \arrow[r, "G_1(f)"'] & G_0(X) \end{tikzcd}$$

Si u et v sont deux flèches, $u : F \longrightarrow G$, $v : G \longrightarrow H$, *la flèche composée* $vu : F \longrightarrow H$ est définie $vu(X) = v(X)u(X)$ pour tout X de Ob_D.

La flèche identique de F notée 1_F est définie par $1_F(X) = 1_{F_0}(X)$ pour tout X de Ob_D. On vérifie les propriétés (a) et (a a). On a alors défini la *catégorie des morphismes de type de diagramme de D dans C'*, encore appelée catégorie des *diagrammes de type D dans C'* et notée $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$.

Si C et C' sont deux catégories de types de diagrammes sous-jacents D et D', on défini également *la catégorie des foncteurs de C dans C'* notée $\underline{\mathrm{Hom}}(C, C')$.

C'est par définition une *sous-catégorie pleine* de $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$.

3.5 Exemples de catégories de diagramme de type donné dans une catégorie

3.5.1. Si D est tel que Ob_D se réduit à un seul élément et si l'ensemble des flèches est vide, alors $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$ est canoniquement isomorphe à la catégorie C'.

3.5.2. Si D est du type suivant : $\bullet \longrightarrow \bullet$, alors la catégorie $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$ est appelée catégorie des flèches de C', notée $\underline{\mathrm{Fl}}(C')$.

Les objets s'identifient aux éléments de $\mathrm{Fl}\, C'$ et un morphisme de la flèche $f : X \longrightarrow Y$, dans la flèche $f' : X' \longrightarrow Y'$ est défini par un couple de flèche (u, v) tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r] & Y'. \end{tikzcd}$$

3.5.3. Si D est du type suivant :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

les objets de $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$ sont essentiellement les “carrés” (non nécessairement commutatifs) de C' :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T, \end{tikzcd}$$

et un morphisme d'un tel carré dans un autre est défini par un quadruple de flèches (u, v, r, s) tel que tous les côtés latéraux de “cube” suivant, où interviennent ces flèches, soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr] \arrow[dl, "u"'] \arrow[dd] & & Y \arrow[dl, "v"] \arrow[dd] \\
X' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y' \arrow[dd] & \\
& Z \arrow[rr] \arrow[dl, "s"'] & & T \arrow[dl, "r"] \\
Z' \arrow[rr] & & T' &
\end{tikzcd}$$

3.6 Diagramme avec relations de commutation

3.6.1. Soit D un type de diagramme, on appelle *chemin* une suite finie $f_1, f_2, ... f_n$ de flèches de D formellement composable, c'est-à-dire telle que $s(f_{i+1}) = b(f_i)$ pour $i = 1, ..., n-1$. On considère le type de diagramme dont les objets sont ceux de D, dont les flèches sont les chemins $c = (f_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $s(c) = s(f_1)$ et $b(c) = b(f_n)$. Sur ce type de diagramme en définit la composition des chemins, elle consiste à mettre “bout à bout” deux chemins s'ils sont formellement composables. On obtient ainsi une catégorie notée $\hat{D}$, appelée *catégorie libre engendré par le type de diagramme* D.

Soit C une catégorie, pour tout morphisme de type de diagramme $\varphi : D \longrightarrow C$, il existe un foncteur et un seul $\hat{\varphi} : \hat{D} \longrightarrow C$ tel que pour tout chemin $c = (f_i)_{1\leq i<n}$, $\hat{\varphi}_1(c) = \varphi_1(f_1)...\varphi_1(f_{n-1})$.

3.6.2. On appelle *donnée de commutation* sur D, la donnée d'un ensemble R de couples de flèches de $\hat{D}$, (c, c') tels que $s(c) = s(c')$ et $b(c) = b(c')$.

Soit C une catégorie, on dit qu'un diagramme φ de type D dans C vérifie les *relations de commutation* R si pour tout couple (c, c') de R, $\hat{\varphi}_1(c) = \hat{\varphi}_1(c')$. On note $\underline{\mathrm{Diag}}_R(D, C)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C)$ formée par les diagrammes de type D vérifiant R.

3.6.3. Dans $\mathrm{Fl}\,\hat{D}$ on définit la relation d'équivalence R suivante :

$R(c, c')$ si et seulement si $s(c) = s(c')$ et $b(c) = b(c')$, la classe de c sera notée $\overline{c}$.

Soit $\widetilde{D}$ la catégorie telle que $\mathrm{Ob}(\widetilde{D}) = \mathrm{Ob}(\hat{D}) = \mathrm{Ob}(D)$ et $\mathrm{Fl}(\widetilde{D}) = \mathrm{Fl}(D)/R$

avec $s(\overline{c}) = s(c)$ et $b(\overline{c}) = b(c)$. La catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\widetilde{D}, C)$ est appelée catégorie des diagrammes de *type D commutatifs* dans C et notée (D, C).

Exemple

Soit D le type de diagramme représenté par

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_4"'] & \bullet \arrow[d, "f_2"] \\ \bullet \arrow[r, "f_3"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Alors $\mathrm{Ob}\,\hat{D} = \mathrm{Ob}(D)$, $\mathrm{Fl}\,\hat{D} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, (f_2, f_1), (f_3, f_4)\}$ chemin vide, dans $\widetilde{D}$ on identifie (f_2, f_1) et (f_3, f_4) on peut donc représenter $\widetilde{D}$ par

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above left] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[loop above right] \arrow[d] \\ \bullet \arrow[loop below left] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop below right] \end{tikzcd}$$

4. Produit de catégories, somme de catégories

4.1 Produit de catégories

Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de catégories, I un ensemble.

4.1.1. *La catégorie produit* des catégories C_i, notée $C = \prod_{i \in I} C_i$ est ainsi définie:

- $\mathrm{Ob}\, C = \prod_{i \in I} \mathrm{Ob}\, C_i$, $\mathrm{Fl}\, C = \prod_{i \in I} \mathrm{Fl}\, C_i$, $s = \prod_{i \in I} s_i$, $b = \prod_{i \in I} b_i$.
- Si $f = (f_i)_{i \in I}$ et $g = (g_i)_{i \in I})$ sont deux flèches, la flèche composé gf est la flèche $(g_i f_i)_{i \in I}$; la flèche identique sur $\prod_{i \in I}$ est la flèche $\prod_{i \in I} 1X_i$.

On définit une famille de foncteurs notée $(\mathrm{pr}_i)_{i \in I}$, $\mathrm{pr}_i : \prod_{i \in I} C_i \longrightarrow C_i$ est tel que $\mathrm{pr}_i((X_i)_{i \in I}) = X_i$, $\mathrm{pr}_i((f_i)_{i \in I}) = f_i$.

Proposition **4.1.2.** — *Pour tout catégorie T, l'application de* $\mathrm{Hom}(T, \prod_{i \in I} C_i)$ *dans* $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(T, C_i)$ *qui à u fait correspondre* $(\mathrm{pr}_i \circ a)_{i \in I}$ *est bijective.*

4.2 Multifoncteurs

4.2.1. On considère une famille $(C_i)_{i\in I}$ de catégories, deux sous-ensembles J et K de I tels que $I = J \cup K$, $J \cap K \neq \varnothing$. Soit C la catégorie produit de $\prod_{i\in I} C_i$ et de $\prod_{i\in I} C_i^\circ$. Un *multifoncteur* de $\prod_{i\in I} C_i$ dans une catégorie C', *covariant* par rapport aux indices i de J et *contravariant* par rapport aux indices i de K est un foncteur de C dans C'.

4.2.2. Exemples. Si C, C', C'' sont trois catégories on considère le *produit* de catégories $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')\prod\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$ l'application de $\mathrm{Hom}(C,C')\prod\mathrm{Hom}(C',C'')$ dans $\mathrm{Hom}(C,C'')$ qui à (F,G) fait correspondre GF permet de définir un *bifoncteur*, deux fois covariant de $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')\prod\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$ dans $\mathrm{Hom}(C,C'')$. Soient F et F' deux foncteurs de C dans C', G et G' deux foncteurs de C' dans C'', $u : F \longrightarrow F'$ et $v : G \longrightarrow G'$, au couple (u,v) de flèche on fait correspondre la flèche notée $v^*u : GF \longrightarrow G'F'$ définie pour tout objet X de C par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
G_\circ F_\circ(X) \arrow[r, "G_1(u(X))"] \arrow[d, "v(F_\circ(X))"'] \arrow[dr, "v^*u(X)"] & G_\circ F'_\circ(X) \arrow[d, "v(F'_\circ(X))"] \\
G'_\circ F_\circ(X) \arrow[r, "G'_1(u(X))"'] & G'_\circ F'_\circ(X)
\end{tikzcd}$$

On vérifiera que v^*u est bien un morphisme *fonctoriel*, c'est-à-dire que pour toute $f : X \longrightarrow Y$ de C le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G_\circ F_\circ(X) \arrow[r, "v^*u(X)"] \arrow[d, "G_1F_1(f)"'] & G'_\circ F'_\circ(X) \arrow[d, "G'_1F'_1(f)"] \\
G_\circ F_\circ(Y) \arrow[r, "v^*u(Y)"'] & G'_\circ F'_\circ(Y)
\end{tikzcd}$$

et que l'application qui à (u,v) fait correspondre v^*u respecte la composition des flèches.

Si l'on fixe F appartenant à $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$) on obtient un foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C'')$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C'')$) noté F_* (resp. F^*).

4.2.3. Si C' et C'' sont deux catégories, définissons un bifoncteur φ de $C'\prod\underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$ dans C''.

A l'objet (X,G) on fait correspondre $\varphi_\circ(X,G) = G_\circ(X)$.

A la flèche (f,v), où $f : X \longrightarrow Y$, $v : G \longrightarrow G'$ on ait correspondre $\varphi_1(f,v)$ définie par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
G_\circ(X) \arrow[r, "G_1(f)"] \arrow[d, "v(X)"'] \arrow[dr, "\varphi_1(f,v)" description] & G_\circ(Y) \arrow[d, "v(Y)"] \\
G'_\circ(X) \arrow[r, "G'_1(f)"'] & G'_\circ(Y)
\end{tikzcd}$$

Si A est une catégorie ponctuelle ($\mathrm{Ob}A = \{\varnothing\}$, $\mathrm{Fl}_A = 1_{\{\varnothing\}}$), pour toute catégorie C, $\underline{\mathrm{Hom}}(A,C)$ est canoniquement isomorphe à C, et le bifoncteur ci-dessus peut s'interpréter comme un foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}(A,C') \prod \underline{\mathrm{Hom}}(C',C'')$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(A,C'')$; ce n'est autre que celui définie en **4.2.2**.

4.3 Somme de catégories

Rappel. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, $S = \amalg_{i\in I} X_i$ sa somme. Pour tout x élément de S on sait qu'il existe un unique indice noté $i(x)$ et un élément $x_{i(x)}$ dans $X_{i(x)}$ tels que $x = (x_{i(x)}, i(x))$.

4.3.1. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de catégories, I un ensemble. La catégorie *somme de la famille* $(C_i)_{i\in I}$ notée $S = \amalg C_i$ est définie par le *type de diagramme* suivant : $\mathrm{Ob}\, S = \amalg_{i\in I} C_i$, $\mathrm{Fl}\, S = \amalg_{i\in I} \mathrm{Fl}\, C_i$, $s = \amalg_{i\in I} s_i$, $b = \amalg_{i\in I} b_i$, et la *composition des flèches* suivante : deux flèches $f = (f_{i(f)}, i(f))$ et $g = (g_{i(g)}, i(g))$ sont composables si et seulement si $b(f) = s(g)$ si et seulement si $i(f) = i(g) = i$ et $b_i(f_i) = s_i(g_i)$, on a alors $gf = (g_i f_i, i)$, l'identité pour un objet X est la flèche $1_X = (1_{X_{i(x)}, i(x)})$.

On définit une *famille de foncteurs* notée $(\mathrm{inj}_i)_{i\in I}$, $\mathrm{inj}_i : C_i \longrightarrow S$, tel que $\mathrm{inj}_i(X_i) = (X_i, i)$, $\mathrm{inj}_i(f_i) = (f_i, i)$.

Proposition **4.3.2**. — *Pour toute catégorie T, l'application de* $\mathrm{Hom}(\amalg_{i\in I} C_i, T)$ *dans* $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(C_i, T)$, *qui à u fait correspondre* $(u \circ \mathrm{inj}_i)_{i\in I}$, *est* bijective.

4.3.3. Soit $\prod_{i\in I} C_i$ (resp. $\amalg_{i\in I} C_i$) la catégorie produit (resp. somme) d'une famille $(C_i)_{i\in I}$ de catégories, alors pour tout catégorie T, la *bijection* naturelle de $\mathrm{Hom}(T, \prod_{i\in I} C_i)$ dans $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(T, C_i)$ (resp. $\mathrm{Hom}(\amalg_{i\in I} C_i), T$ dans $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(C_i, T)$) est un *isomorphisme* de $\underline{\mathrm{Hom}}(T, \prod_{i\in I} C_i)$ dans $\prod_{i\in I} \underline{\mathrm{Hom}}(T, C_i)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(\amalg_{i\in I} C_i, T)$ dans $\prod_{i\in I} \underline{\mathrm{Hom}}(C_i, T)$).

5. Équivalence de catégories

5.1 Définition. Soit $F=(F_0,F_1)$ un foncteur d'une catégorie C dans une catégorie C'.

5.1.1. Le foncteur est dit *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si pour tout couple d'objets (X,Y), $F_1|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$, restriction de F_1 à $\mathrm{Hom}(X,Y)$, est *injectif* (resp. *bijectif*).

Si F_1 est injectif (resp. bijectif) alors F est fidèle (resp. pleinement fidèle). Les réciproques sont fausses.

5.1.2. Le foncteur F est dit *essentiellement surjectif* si pour tout objet X' de C', il existe un objet X de C tel que $F_0(X)$ soit isomorphe à X'.

5.1.3. Un foncteur F est appelé une *équivalence de catégories* s'il est *pleinement fidèle* et *essentiellement surjectif*.

5.1.4. Ces propriétés se conservent par la composition de foncteurs.

5.1.5. On dit que la catégorie C est *équivalente* à la catégorie C', s'il existe un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ qui soit une équivalence de catégories ; on définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$. En effet la relation est évidemment réflexive, elle est transitive **5.1.4**, elle est symétrique du fait de la proposition suivante :

Proposition **5.1.6**. — *Le foncteur F de C dans C' est une équivalence de catégories si et seulement si il existe un foncteur G de C' dans C, tel que GF soit* isomorphe *à* 1_C *et FG soit* isomorphe *à* $1_{C'}$. *Un tel foncteur G est appelé un* quasi-inverse *de F.*

Alors que l'inverse d'un morphisme lorsqu'il existe est unique, un foncteur peut avoir plusieurs quasi-inverses qui sont isomorphes entre eux.

Démonstration. Supposons que F soit une équivalence de catégories. Puisque F est *essentiellement surjectif*, pour tout objet X' de C', l'ensemble des objets de C tels que l'image par F_0 soit isomorphe à X' est non vide. On en choisit un (grâce au symbole τ !) X et l'on note u_x, un isomorphisme de $F_0(X)$ sur X'.

On pose alors $G_\circ(X')=X$.

Pour toute flèche $f' : X' \longrightarrow Y'$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F_\circ(X) \arrow[r, "u_x"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ F_\circ(Y) \arrow[r, "u_y"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Il existe une unique flèche de $F_0(X)$ dans $F_0(Y)$ rendant le diagramme commutatif $(u_y^{-1} f' u_x)$. Puisque F est *pleinement fidèle*, cette flèche est l'image par F_1 d'une unique flèche $f : X \longrightarrow Y$.

On pose $G_1(f') = f$.

Par construction de $G = (G_0, G_1)$ on a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & G_\circ F_\circ(X) \arrow[d, "G_1F_1(f)"] \\ Y \arrow[r, "\approx"'] & G_\circ F_\circ(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\approx"] \arrow[d] & F_\circ G_\circ(X') \arrow[d, "F_0G_0(f')"] \\ Y' \arrow[r, "\approx"'] & F_\circ G_\circ(Y') \end{tikzcd}$$

ce qui montre que GF est isomorphe à 1_C, et FG isomorphe à $1_{C'}$.

Réciproquement supposons que F possède un quasi-inverse G ; alors F est évidement *essentiellement surjectif*, d'autre part $F_1|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$ est une *bijection* de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ sur $\mathrm{Hom}(F_0(X), F_0(Y))$ pour tout couple d'objets (X,Y). En effet $F_1|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$ est une *surjection* sur $\mathrm{Hom}(F_0(X), F_0(Y))$. C'est aussi une *injection*, soient deux flèches, f et g de X dans Y telles que $F_1(f) = F_1(g)$, alors $G_1F_1(f) = G_1F_1(g)$, comme il y a une seule flèche de X dans Y rendant le diagramme ci-dessus commutatif, on a $f = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & G_0F_0(X) \arrow[d, "G_0F_0(f)=G_0F_0(g)"] \\ Y \arrow[r, "\approx"'] & G_0F_0(Y) \end{tikzcd}$$

5.2

Proposition **5.2.1**. — *Si F est un foncteur d'une catégorie C dans une catégorie C', les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) F est pleinement fidèle ;

(b) *Il existe une sous-catégorie pleine C'_1 de C' telle que F se factorise par C'_1 au moyen d'un foncteur qui est une équivalence de catégories.*

Si F est pleinement fidèle, il suffit de prendre C'_1 l'image par F de C, ou l'image essentielle de F par C (c'est-à-dire l'ensemble des objets de C' isomorphes à $F(X)$ X variant dans Ob_C).

Réciproquement si F se factorise par C'_1 sous-catégorie pleine de C', le foncteur inj : $C'_1 \longrightarrow C$ est pleinement fidèle, et la composition avec une équivalence de catégorie donne un foncteur pleinement fidèle.

Proposition **5.2.2**. — *Soit F un foncteur de C dans C', T une catégorie, F_* le foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}(C', T)$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(C, T)$* **4.2.1** *on a les propriétés suivantes :*

(i) *Si F est fidèle alors F_* est fidèle ;*

(ii) *Si F est pleinement fidèle alors F_* est pleinement fidèle ;*

(iii) *Si F est une équivalence de catégories alors F_* est une équivalence de catégories.*

Si l'on considère F^* le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(T, C)$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(T, C')$, seule le propriété (iii) est vraie.

Proposition **5.2.3**. — *Soit F un foncteur de C dans C' pleinement fidèle ; alors une flèche f de C est inversible si et seulement si $F_1(f)$ est inversible.*

Proposition **5.2.4**. — *Soit dans* $\mathrm{Cat}_{\mathfrak{U}}$ *une famille de foncteurs $(F_i)_{i\in I}$, I élément de $\mathfrak{U}$, $F_i : C_i \longrightarrow C'_i$, et soit $\prod_{i\in I} F_i : \prod_{i\in I} C_i \longrightarrow \prod C'_i$, on a les propriétés suivantes:*

(i) *Si pour tout i élément de I, F_i est fidèle alors $\prod_{i\in I} F_i$ est fidèle.*

(ii) *Si pour tout i élément de I, F_i est pleinement fidèle alors $\prod_{i\in I} F_i$ est pleinement fidèle.*

(iii) *Si pour tout i élément de I, F_i est une équivalence de catégories alors $\prod_{i\in I} F_i$ est une équivalence de catégories.*

On énoncera la proposition duale.

5.3 Exemple

Soient X un espace topologique, connexe par arc, localement simplement connexe par arc, x un élément de X. On note $\mathrm{Rev}(X)$, la catégorie des revêtements de X éléments d'un univers $\mathfrak{U}$ donné, $\Pi = \Pi_1(X, x)$, $\mathrm{Ens}(\Pi)$ la catégorie des ensembles de $\mathfrak{U}$ sur lesquels Π opère.

Proposition. — *Les catégories* $\mathrm{Rev}(X)$ *et* $\mathrm{Ens}(\Pi)$ *sont* équivalentes.

Au revêtement E, X, p on fait correspondre la fibre $F = p^{-1}(x)$, Π opère sur F ; si E', X, p' est un revêtement et $f : E \longrightarrow E'$ un morphisme de revêtement, à f on fait correspondre $f_{|p^{-1}(x)} : F \longrightarrow F'$ qui est compatible avec Π. On a ainsi défini un foncteur $\alpha : \mathrm{Rev}(X) \longrightarrow \mathrm{Ens}(\Pi)$.

Construisons un foncteur quasi-inverse. Soit F un ensemble sur lequel Π opère. La revêtement universel $\widetilde{X}$ de X est un fibré principal de groupe Π, on considère le fibré associé $\widetilde{X} *_{\Pi} F$ de fibre F, c'est un revêtement de X, on défini ainsi un foncteur $\beta : \mathrm{Ens}(\Pi) \longrightarrow \mathrm{Rev}(X)$. On vérifiera que $\beta\alpha \simeq 1_{\mathrm{Rev}(X)}$ et $\alpha\beta \simeq 1_{\mathrm{Ens}(\Pi)}$.

6. Limite projective, limite inductive

6.1. Soit I un type de diagramme, C une catégorie et φ un morphisme de type de diagramme de I dans C (c'est-à-dire un diagramme de type I dans C).

6.1.1. Une famille $(u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ de morphismes de C, de source X, $u_i : X \longrightarrow \varphi_0(i)$ est dite *admissible pour* φ, si pour toute flèche $f : i \longrightarrow j$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \varphi_0(i) \arrow[dd, "\varphi_1(f)"] \\ X \arrow[ur, "u_i"] \arrow[dr, "u_j"'] & \\ & \varphi_0(j) \end{tikzcd}$$

Une telle famille est notée $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$.

6.1.2. On appelle *limite projective* du diagramme φ, une famille admissible pour φ : $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$, qui est "universelle" dans le sens suivant : pour toute famille admissible pour $\varphi : (Y, (v_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$, il existe un unique morphisme $u : Y \longrightarrow X$ tel que pour tout élément i de $\mathrm{Ob}\, I$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \varphi_0(i) & \\ Y \arrow[ur, "v_i"] \arrow[rr, "u"'] & & X \arrow[ul, "u_i"'] \end{tikzcd}$$

Deux limites projectives du diagramme φ sont canoniquement isomorphes. Si l'ensemble des limites projectives d'un diagramme φ n'est pas vide, on en choisit une que l'on note $\varprojlim_I \varphi$ (ou si aucune confusion n'est possible $\varprojlim \varphi$).

Si $\varprojlim_I \varphi = (X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$, par abus de langage on dira que X est *la* limite projective de φ, il est alors sous entendu qu'on s'est donné avec X la famille $(u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ qu'on n'explicite pas sans doute parce qu'elle est évidente.

6.1.3. Si F est un foncteur de la catégorie C de type de diagramme sous-jacent D, dans la catégorie C', la limite projective du foncteur F est la limite projective du morphisme de type de diagramme sous-jacent à F (c'est-à-dire du morphisme $F : D \longrightarrow C'$).

6.1.4 Exemples.

Si C est la catégorie $\mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}}$ des ensembles d'un univers $\mathfrak{U}$, I un type de diagramme, $\varphi : I \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}_{\mathfrak{U}}$, $\varprojlim_I \varphi$ est un *sous ensemble du produit* $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \varphi_0(i)$ défini ainsi :

$$(X_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \in \varprojlim \varphi \Leftrightarrow (\forall f)(f \in \mathrm{Fl}\, I, f : i \longrightarrow j, X_j = \varphi_1(f) X_i)$$

En particulier :

a) Si I est un type de diagramme discret (c'est-à-dire tel que $\mathrm{Fl}_I = \varnothing$) on récupère pour $\varprojlim \varphi$ le produit $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \varphi_0(i)$

b) Si I est la catégorie associé à un ensemble préordonné, un diagramme φ est essentiellement un "système projectif d'ensembles" (Bourbaki, Théorie des Ensembles) et l'on retrouve la notion classique de limite projective.

6.2. Soit C une catégorie, I un type de diagramme et φ un morphisme de I dans C. A tout objet Y de C on associe le morphisme φ^Y de I dans $\underline{\mathrm{Ens}}_{\mathfrak{U}}$ ainsi défini :

Si i appartient à Ob_I, $\varphi_0^Y(i) = \mathrm{Hom}(Y, \varphi_0(i))$

Si α appartient à Fl_I, $\alpha : i \longrightarrow j$, $\varphi_1^Y(\alpha)$ est l'application de $\mathrm{Hom}(Y, \varphi_0(i))$ dans $\mathrm{Hom}(Y, \varphi_0(j))$ qui à f correspondre $\varphi_1(\alpha) f$.

Proposition. — *La famille admissible* $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$ *est limite projective de* φ *si et seulement si pour tout* Y *l'application naturelle* $*_Y$ *de* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *dans* $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \mathrm{Hom}(Y, \varphi_0(i))$ *induit une bijection de* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *sur* $\varprojlim \varphi^Y$.

La famille admissible $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$ *est limite projective de* φ *si et seulement si* $*_Y$ *est une bijection dont l'image est l'ensemble des familles admissibles pour* φ *de source* Y. *Or ce sous-ensemble de* $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} (Y, \varphi(i))$ *est par définition* $\varprojlim_I \varphi^Y$ **6.1.4**.

6.3. Exemples de limites projectives dans une catégorie quelconque.

6.3.1. Soit I un type de diagramme *discret*, et φ un morphisme de I dans C. Si la limite projective de φ existe, $\varprojlim \varphi = (P, (p_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$, on dit que la famille $(p_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ *représente P comme produit* des $X_i = \varphi(i)$, P est noté $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} X_i$.

Le produit vérifie donc la propriété suivante :

Pour tout objet Z l'application de $\mathrm{Hom}(Z, \prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} X_i)$ dans $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \mathrm{Hom}(Z, X_i)$ qui à f fait correspondre $(p_i f)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ est *une bijection*.

La famille de morphisme $(p_i f)_i$ est appelée quelque fois famille des *composantes* du morphisme f.

Considérons par exemple $X \prod X$, il existe un unique morphisme de X dans $X \prod X$ de composantes 1_X, 1_X noté diag_X.

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[rr, "\mathrm{diag}_X"'] \arrow[dr, "1_X"'] & & X \prod X \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Dans le cas particulier où I est le type de diagramme vide $((\varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing)!)$ la limite projective d'un morphisme de I dans C est appelée *objet final* de la catégorie. C'est un objet Ω de C tel que pour tout objet Y de C, il existe un morphisme et un seul de Y dans Ω.

6.3.2. Si I est le type de diagramme suivant: $\bullet \rightrightarrows \bullet$, la limite projective d'un diagramme de type I dans C : $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ s'appelle, lorsqu'elle existe, *noyau du couple* de morphismes (f, g). C'est la donnée d'un objet Z et d'un morphisme $u : Z \longrightarrow X$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $f u = g u$

(ii) pour tout objet Z' et tout morphisme $u' : Z' \longrightarrow X$ tel que $f u' = g u'$, il existe un morphisme unique v de Z' dans Z tel que u factorise u'.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "u"] & & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ & Z' \arrow[ul, "v"] \arrow[ur, "u'"'] & & \end{tikzcd}$$

Le morphisme u (quelque fois aussi l'objet Z) sera noté $\mathrm{Ker}(f, g)$.

Remarque : u est un monomorphisme.

Un diagramme du type $Z \xrightarrow{u} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ est dit *exact* s'il fait de u le noyau du couple (f, g).

Proposition. — *Le diagramme*

$$Z \longrightarrow X \rightrightarrows Y$$

est exact si et seulement si pour tout objet M, le diagramme $\mathrm{Hom}(M, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, X) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}(M, Y)$ *de* $\underline{\mathrm{Ens}}_{\mathfrak{U}}$ *est exact, c'est-à-dire la première flèche est injective et son image est le sous ensemble de* $\mathrm{Hom}(M, X)$ *des coïncidences de α et β.*

6.3.3. Soit le type de diagramme I:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr] & \\ & \bullet \\ \bullet \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

La limite projective d'un diagramme de type I dans C :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] & \\
& Z, \\
Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

si elle existe est appelée *produit fibré* de (X, f) et (Y, g) au dessus de Z ; il est noté $(X, f)\prod_Z(Y, g)$. C'est la donnée d'un *objet* P et de *deux*[2] *morphismes*, $u : P \longrightarrow X$, $v : P \longrightarrow Y$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $fu = gv$

(ii) pour tout objet P' et tout couple de morphismes $u' : P' \longrightarrow X$, $v' : P' \longrightarrow Y$, tels que $fu' = gv'$ il existe un morphisme et un seul w de P' dans P tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dr, "f"] & \\
P' \arrow[r, "w"] \arrow[urr, "u'"] \arrow[drr, "v'"'] & P \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & Z \\
& & Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Remarque : Si f (resp. g) est un monomorphisme, v (resp. u) est un monomorphisme.

6.4. Soit C une catégorie, telle que pour tout couple d'objets (X, Y), $\mathrm{Hom}(X, Y)$ soit élément d'un univers $\mathfrak{U}$.

6.4.1. Soit $(I_\alpha)_\alpha$ une famille de type de diagrammes, I_α appartenant à $\mathfrak{U}$ pour tout α, on dit que dans C les limites *projectives de type* $(I_\alpha)_\alpha$ *existent* si, pour tout α, tout $\varphi : T_\alpha \longrightarrow C$ admet une limite projective.

Cette définition donne un sens aux locutions : *Dans C les limites projectives existent* (la famille $(I_\alpha)_\alpha$ est formée de tous les types de diagrammes appartenant à

[2]Il est inutile de se donner $r : P \longrightarrow Z$ tel que $r = fu = gv$.

$\mathfrak{U}$), les *limites projectives finies existent* (la famille $(I_\alpha)_\alpha$ est formée de tous les types de diagrammes finis, c'est-à-dire tels que l'ensemble $\mathrm{Ob}\, I_\alpha$ soit fini), *les produits existent* (la famille $(I_\alpha)_\alpha$ est formée de tous les types de diagrammes discrets…), les *noyaux existent* ($(I_\alpha)_\alpha$ se réduit au type de diagramme suivant : $\bullet \rightrightarrows \bullet$), etc…

6.4.2. On vérifiera les assertions suivantes :

Dans la catégorie C les *limites projectives finies* existent si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(a) Les produits finis existent

(b) Les produits fibrés existent.

La condition (a) est équivalente à la condition (a') les deux-produits existent et il existe un objet final.

De plus le couple de conditions (a) (b) est équivalente au couple (a) (b') avec (b') les noyaux existent.

Dans la catégories C, les *limites projectives* existent si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a_1) Les produits existent

(b) Les produits fibrés existent.

Le couple de conditions (a_1)(b) est équivalente au couple (a_1)(b').

Évoquons la démonstration de l'équivalence de (a)(b) et (a)(b').

Supposons (a) et (b') vérifiés et considérons deux morphismes $f : X \longrightarrow Z$, $g : Y \longrightarrow Z$. Soient $X \prod Y$ le produit de X et de Y, $p_X : X \prod Y \longrightarrow X$, $p_Y : X \prod Y \longrightarrow Y$, les morphismes canoniques, et $k : K \longrightarrow X \prod Y$ le noyau de couple de morphismes $(p_X f, p_Y g)$; $(K, u = p_X k, v = p_Y k)$ définissent le *produit fibré* de (X, f) et (Y, g) au dessus de Z. En effet :

(i) Par définition du noyau, $fu = gv$.

(ii) Soient un objet K' et deux morphismes, $u' : K' \longrightarrow X$, $v' : K' \longrightarrow Y$ tels que $fu' = gv'$. Par définition du produit il existe un morphisme unique $k' : K' \longleftrightarrow X \prod Y$ tel que $u' = P_X k', v' = p_Y k'$. Puisque $f p_X k' = g p_Y k'$

par définition du noyau il existe un unique morphisme $w : K' \longrightarrow K$ tel que $k' = kw$, donc tel que $u' = uv$ et $v' = vw$.

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[rrr, "u'"] \arrow[dr, "w"] \arrow[drr, "k'"] \arrow[ddr, "v'"'] & & & X \arrow[dd, "f"] \\
& K \arrow[r, "k"'] & X\prod Y \arrow[ur, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] & \\
& Y \arrow[rr, "g"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Réciproquement supposons (a) et (b) vérifiés, et considérons deux morphismes $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$. Soient le morphisme $\varphi : X \longrightarrow Y\prod Y$ de composantes (f, g), et le morphisme $\mathrm{diag} : Y \longrightarrow Y\prod Y$; on considère alors le produit fibré, (K, k, k'), de (X, φ) et (Y, diag) au dessus de $Y\prod Y$ et l'on vérifie que $k : K \longrightarrow X$ possède les propriétés de noyau du couple de morphismes (f, g).

6.4.3. Soient un type de diagramme I, un morphisme de type de diagramme $\varphi : I \longrightarrow C$ et un foncteur F de la catégorie C dans une catégorie C'. Si $(Y, (u_i)_{i\in \mathrm{Ob} I})$ est une famille admissible pour φ alors $(F_0(Y), (F_1(u_i)_{i\in \mathrm{Ob} I}))$ est une famille admissible pour $F\varphi : I \longrightarrow C'$.

Si la limite projective de φ existe, $\varprojlim_I \varphi = (X, (v_i)_i)$ et si la limite projective de $F\varphi$ existe, $\varprojlim_I F\varphi = (X', (v'_i)_i)$ il existe alors un unique morphisme $\hat{\varphi} : F_0(X) \longrightarrow X'$ tel que pour tout élément i de $\mathrm{Ob} I$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F_0(X) \arrow[rr, "F_1(v_i)"] \arrow[dr, "\hat{\varphi}"'] & & F\varphi_0(i) \\
& X' \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

On dit que le foncteur F *commute aux limites projectives de type* I, si pour toute $\varphi : I \longrightarrow C$ admettant une limite projective, et tel que $F\varphi : I \longrightarrow C'$ admettons une limite projective, le morphisme $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme. Ce qui traduit par la formule :

$$F(\varprojlim_I \varphi) \simeq \varprojlim_I F\varphi$$

Soit $(I_\alpha)_\alpha$ une famille de type de diagramme, I_α appartenant à $\mathfrak{U}$ pour tout α, on dit que le foncteur F *commute aux limites projectives de types* $(I_\alpha)_\alpha$ si pour tout α, F commute aux limites projectives de type I_α.

Ces définitions donnent un sens aux locutions : le foncteur F *commute aux limites projectives, commute aux limites projectives finies, commute aux produits, commute aux noyaux,* etc…

Exemple : Si C est une catégorie définie par des espèces de structures algébriques, ou topologiques, ou algébro-topologiques, on définit un foncteur *oubli le structure* noté Oub de C dans Ens, qui à un objet de C associe l'ensemble sous-jacent, et à un morphismes e C associe l'application d'ensembles sous-jacente. Pour ce catégories, le foncteur Oub commute généralement aux limites projectives. Par exemple considérons la catégorie notée $\underline{\mathrm{Top}}$, des espaces topologiques, un type de diagramme I et un morphisme de type de diagramme, φ, de I dans C. On sait que $\varprojlim_I \mathrm{Oub}\,\varphi$ existe, c'est un sous-ensemble de $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \mathrm{Oub}\,\varphi_0(i)$, lequel peut être muni canoniquement d'une structure topologique (topologie initiale). On vérifie alors que le sous-espace topologique $\varprojlim \mathrm{Oub}\,\varphi$ satisfait à la propriété universelle de la limite projective de φ dans $\underline{\mathrm{Top}}$. On en déduit que dans $\underline{\mathrm{Top}}$, les limites projectives existent et que de par leur construction même, le foncteur Oub commute aux limites projectives.

6.4.4. Soient C et C' deux catégories et F un foncteur de C dans C'. Le foncteur F est dit *exact à guache*, s'il *commute aux limites projectives finies*, où ce qui est équivalent lorsque dans C les limites projectives finies existent, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(a) F commute aux produits finis.

(b) F commute aux produits fibrés.

La condition (a) est équivalente à

(a') F commute aux deux-produit et transforme objet final en objet final.

Le couple de condition (a)(b) est équivalente au couple (a)(b') avec

(b') F commute aux noyaux.

De plus si dans C les limites projectives existent, F commute aux limites projectives si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(a_1) F commutes aux produits

(b) F commute aux produits fibrés (ou aux noyaux).

6.5. Limite inductive :

Soit un type de diagramme I, une catégorie C, et un morphisme de type de diagramme $\varphi : I \longrightarrow C$.

6.5.1. Une famille de morphisms de C est dite *coadmissible* pour φ si elle est admissible pour φ°.

6.5.2. On appelle *limite inductive* de φ, une limite projective de φ°. Une limite inductive de φ, $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$, est donc “universelle” au sens suivant ; pour toute famille coadmissible pou φ, $(Y, (v_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$ il existe un morphisme unique $u : X \longrightarrow Y$ tel que pour tout élément i de $\mathrm{Ob}\, I$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \varphi_\circ(i) \arrow[dl, "v_i"'] \arrow[dr, "u_i"] & \\ Y & & X \arrow[ll, "u"] \end{tikzcd}$$

Deux limites inductives de φ étant canoniquement isomorphes, si l'ensemble des limites inductives de φ, n'est pas vide on en choisit une que l'on note $\varinjlim_I \varphi$. On peut alors écrire : $\varinjlim_I \varphi \simeq \varprojlim_I \varphi^\circ$.

6.6. Exemples de limites inductives

6.6.1. Soit I un type de diagramme *discret*, et $\varphi : I \longrightarrow C$. Si la limite inductive de φ existe, $\varprojlim_I \varphi = (S, (e_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$ on dit que la famille $(e_i)_i$ *représente S comme somme directe des $X_i = (i)$*. On note $S = \amalg_{i \in \mathrm{Ob}\, I} X_i$.

Le somme directe vérifie donc la propriété suivante :

Pour tout objet Z l'application de $\mathrm{Hom}(\amalg_{i \in \mathrm{Ob}\, I} X_i, Z)$ dans $\prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \mathrm{Hom}(X_i, Z)$ qui à f fait correspondre $(f e_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I}$ est une *bijection*.

Dans le cas particulier où le type de diagramme I est *vide*, la limite inductive est appelée *objet initial* de la catégorie C. Donc ε est un objet initial si et seulement si pour tout objet Y de C, $\mathrm{Card}\, \mathrm{Hom}(\varepsilon, Y) = 1$.

Un objet initial et final est appelé un *objet nul* il est souvent noté 0_C.

6.6.2. Si I est le type de diagramme : $\bullet \rightrightarrows \bullet$, la limite inductive d'un diagramme de type I dans C : $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ s'appelle, lorsqu'elle existe, le *conoyau* du couple de morphisme (f, g). C'est la donnée d'un objet Z et d'un morphisme $u : Y \longrightarrow Z$ tel que :

(i) $uf = ug$

(ii) pour tout objet Z' et tout morphisme $u' : Y \longrightarrow Z'$ tel que $u'f = u'g$, il existe un morphisme unique v de Z dans Z' tel que v factorise u' :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & Z \arrow[dl, "v"] \\
& & Z &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme u, (et quelque fois par abus de langage l'objet Z) sera noté $\mathrm{Coker}(f, g)$.

Remarque : u est un épimorphisme.

6.6.3. Soit le type de diagramme I :

$$\begin{tikzcd}
\bullet & \\
& \bullet, \arrow[ul] \arrow[dl] \\
\bullet &
\end{tikzcd}$$

la limite inductive d'un diagramme de type I dans C:

$$\begin{tikzcd}
X & \\
& Z \arrow[ul, "f"'] \arrow[dl, "g"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

si elle existe est appelée somme *amalgamée* de (X, f) et (Y, g) au-dessus de Z, elle est notée $(X, f) \amalg_Z (U, g)$. C'est donc la donnée d'un objet S et de deux morphismes $u : X \longrightarrow S$, $v : Y \longrightarrow S$ vérifiant les propriétés... que le lecteur précisera.

Remarque : Si f (resp. g) est un épimorphise, v (resp. u) est un épimorphisme.

Exemple :

Dans la catégorie des *anneaux commutatifs avec élément unité*, on considère trois annaux X, Y, Z et les morphismes $f : Z \longrightarrow X$, $g : Z \longrightarrow Y$. Grâce à f on munit X d'une structure de Z-module, l'application de $Z \times X$ étant définie par $(xy) \rightsquigarrow f(x)y$.

On procède de même pour Y avec g, et Z avec l'application identique. On montera que le Z-module $X \otimes_Z Y$ muni de la multiplication $(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'$ et les homomorphismes d'anneaux $u : X \longrightarrow X \otimes_Z Y$ tel que $u(x) = x \otimes e_Y$ (où e_Y est l'élément unité de y) et $v : Y \longrightarrow X \otimes_Z Y$ tel que $v(y)e_X \otimes y$, définissent la somme amalgamée $(X, f) \amalg_Z (Y, g)$.

6.6.4. Dans les catégories définies par des espèces de structures algébriques, *les limites inductives existent*, mais l'exemple qui précède montre que leur construction n'est pas aussi simple que dans le cas projectif. Cependant dans le cas particulier de la catégorie $\underline{\text{Top}}$, on constate que le foncteur Oub commute aux limites inductives. Soit $\varphi : I \longrightarrow \underline{\text{Top}}$ un morphisme de type de diagramme, on considère la limite inductive de Oub. $\varphi : I \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$, $(E, (u_i)_{i \in \text{Ob}\, I})$. On munit E de la topologie la plus fine rendant les u_i continues ; il suffit de prendre pour ouverts de E, les éléments U de $\mathfrak{P}(E)$ tels que pour tout i $\varphi_i^{-1}(U)$ soit un ouvert de $\varphi(i)$. On vérifie que l'espace topologique E est bien la limite inductive cherchée. Mais cette construction n'est valable qu'exceptionnellement, on montrera par exemple qu'elle est en échec dans le cas , catégorie des espaces topologiques compacts.

6.7. On énoncera les définitions et propriétés duales de celles développées dans le paragraphe **6.4**. On établira des conditions nécessaires et suffisantes d'existence *des limites inductives* (resp. finies) dans une catégorie C. On définira un foncteur F de C dans C' commutant aux limites inductives de type I...On définira un foncteur exact à droite.

6.7.1. Un *foncteur exact* est un foncteur exact à gauche et exact à droite.

6.7.2. Bien qu'il n'y ait théoriquement rien à ajouter pour un *foncteur contravariant* F de C dans C', il faut cependant remarquer que F commute aux limites projectives (resp. inductives) de type I, si pour tout $\varphi : X \longrightarrow C$ admettant une limite inductive (resp. projective) et tel que $F\varphi$ admette une limite projective (resp. inductive) on a $\varprojlim_I (F\varphi) \simeq F(\varinjlim_I \varphi)$ (resp. $\varinjlim_I (F\varphi) \simeq F(\varprojlim_I \varphi)$).

6.8. Propriétés générales des limites inductives et projectives.

6.8.1. Soit C une catégorie, I un type de diagramme. Les diagrammes de type I dans C qui admettent une limite projective forment une sous catégorie strictement pleine de $\underline{\mathrm{Diag}}(I,C)$, notée $\underline{\mathrm{Diag}p}(I,C)$. L'application qui à φ fait correspondre $\varprojlim_I \varphi$, de $\overline{\mathrm{Diag}\, p(I,C)}$ dans $\overline{\mathrm{Ob}\, C}$, *définit un foncteur* de $\underline{\mathrm{Diag}p}(I,C)$ dans C. En effet si φ et ψ sont deux objets de $\underline{\mathrm{Diag}p}(I,C)$, u une flèche de φ dans ψ, par définition de $\varprojlim \varphi$, $\varprojlim \psi$ et de u, pour tout couple (i,j) d'objets de I et toute flèche $f : i \longrightarrow j$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim \varphi \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "u_j"'] & \varphi_\circ(i) \arrow[r, "u(i)"] \arrow[d, "\varphi_1(f)"'] & \psi_\circ(i) \arrow[d, "\psi_1(f)"'] & \varprojlim \psi \arrow[l, "v_i"'] \arrow[dl, "v_j"] \\
& \varphi_\circ(j) \arrow[r, "v(j)"'] & \psi_\circ(j) &
\end{tikzcd}$$

La famille $(\varprojlim \varphi, (u(i)u_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, I})$ est admissible pour ψ, il existe donc une flèche *unique* de $\varprojlim \varphi$ dans $\varprojlim \psi$, que l'on note $\varprojlim u$, et telle que $v_i \varprojlim u = u(i)u_i$ pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$.

Le foncteur ainsi défini se note $\varprojlim(I,C)$ ou $\varprojlim : \underline{\mathrm{Diag}p}(I,C) \longrightarrow C$.

Proposition. — *Pour tout type de diagramme I, et toute catégorie C, le foncteur $\varprojlim(I,C)$ commute aux limites projectives.*

Dualement on définit un foncteur de $\underline{\mathrm{Diag}i}(I,C)$ dans C, noté $\varinjlim(I,C)$ qui commute aux limites inductives.

Il n'y a aucun énoncé, valable pour toute catégorie, sur la commutativité entre les limites projectives et injectives.

Proposition **6.8.2.** — *Soit I un type de diagramme, C' un catégorie où les limites projectives (resp. injectives) de type I existent. Alors pour tout type de diagramme D, (resp. toute catégorie C) les limites projectives (resp. injectives) de types I existent dans $\underline{\mathrm{Diag}}(D,C')$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(C,C')$).*

Soit φ un diagramme de type I dans $\underline{\mathrm{Diag}}(D,C')$. A tout objet d de D, l'application $i \rightsquigarrow \varphi(i)d$ associe un morphisme $\Phi_d : I \longrightarrow C'$ $(\Phi_d(i) = \varphi(i)(d))$.

Soit $X_d = \varprojlim \Phi_d$ l'application $d \rightsquigarrow X_d$ définit un morphisme Φ de D dans C

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & X_d \arrow[d, "\Phi_1"] \\ d' \arrow[r] & X_{d'} \end{tikzcd} \qquad \delta) = \varprojlim_I \varphi(i)(\delta)$$

Soit une famille admissible $(\Omega, (v_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$ pour le morphisme φ. Pour tout objet d de D, il existe alors un morphisme v_d unique de $\Omega(d)$ dans X_d tel que pour tout i de $\mathrm{Ob}\, I$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega(d) \arrow[rr, "v_i(d)"] \arrow[dr, "v_d"'] & & \varphi(i)(d) = \Phi_d(i) \\ & X_d \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Donc $\Phi = \varprojlim_I \varphi$.

6.8.3. Dans $\underline{\mathrm{Cat}}\mathfrak{U}$, pour tout type de diagramme I élément de $\mathfrak{U}$, les limites projectives (resp. inductives) de type I existent. Si I est discret on retrouve le produit (resp. la somme) de catégories.

7. Catégorie filtrante

7.1 Définitions :

7.1.1. Une catégorie I est *pseudo-filtrante* à gauche si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

a) Pour tout diagramme de I de type

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & Z \\ Y \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

il existe un objet M et deux morphismes, $f : M \longrightarrow X$, $g : M \longrightarrow Y$.

b) Pour tout diagramme de I du type $X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y$ il existe un morphisme $h : T \longrightarrow X$ tel que $uh = vh$.

Une catégorie I est pseudo filtrante à droite si I° est pseudo filtrante à gauche. On écrira les conditions a'), b') correspondantes.

7.1.2. Une catégorie I est connexe si la propriété suivante est vérifiée :

c) Pour tout couple (P,Q) d'objets, il existe une suite finie d'objets : $P_0 = P$, $P_1, \ldots, P_i, P, \ldots P_n = Q$, telle que $\mathrm{Hom}(P_i, P_{i+1}) \neq \varnothing$, où $\mathrm{Hom}(P_{i+1}, P_i) \neq \varnothing$ pour $i = 0, \ldots, n-1$.

7.1.3. Une catégorie I est *filtrante à guache* (resp. à droite) si les conditions a), b), c) (resp. a'), b'), c')) sont vérifiées.

Remarque :

On considère la condition suivante :

α) Pour tout couple d'objets (X,Y) de I, il existe un objet M et deux morphismes $f : M \longrightarrow X$, $g : M \longrightarrow Y$.

La condition α) est équivalente au couple de conditions (a), c)).

Donc une catégorie I est *filtrante à gauche* (resp. à droite) si les conditions α), b) (resp. α') b')) sont vérifiées.

Une catégorie I est *filtrante* si elle est filtrante à gauche et à droite.

7.2 Exemples

7.2.1. Si dans une catégorie C, pour tout couple d'objets le produit (resp. la somme) existe, et si pour tout couple de morphismes le noyau (resp. le conoyau) existe, alors C est filtrante à gauche (resp. filtrante à droite).

7.2.2. La catégorie associée à un ensemble préordonné I est filtrante si et seulement si I est filtrante.

7.2.3. Dans la catégorie des ensembles, des groupoïdes, des modules sur un anneau…, *les limites inductives filtrantes*, c'est-à-dire les limites inductives de foncteurs d'une catégorie filtrante dans la catégorie en question, sont des foncteurs exacts à gauche, donc *exacts*, puisqu'on sait qu'ils sont exacts à droite.

II. Catégorie abélienne

1. Catégorie additive

On peut donner deux versions de la définition d'une catégorie additive, l'une consiste à *se donner* sur les ensembles $\mathrm{Hom}(X, Y)$ une structure de groupe abélien, cette structure supplémentaire étant soumise à certaines conditions ; l'autre consiste à construire canoniquement une loi de groupe sur tout $\mathrm{Hom}(X, Y)$ en termes *d'axiomes* convenables sur la catégorie C.

1.1 Version 1

Une catégorie additive est une catégorie C où pour tout couple d'objets (X, Y) de C est donnée une structure de groupe abélien sur $\mathrm{Hom}(X, Y)$, les axiomes suivants étant vérifiés :

C A_1. pour tout triplet d'objets (X, Y, Z) de C, l'application $(u, v) \rightsquigarrow vu$ de $\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z)$ dans $\mathrm{Hom}(X, Z)$ est *bilinéaire*.

C A_2. Les sommes directes finies existent, ou ce qui est équivalent il existe un objet initial *et* pour tout couple d'objets la somme existe.

L'axiome C A_2 est équivalent à l'axiome C A'_2. Les produits finis existent ou ce qui est équivalent il existe un objet final et pour tout couple d'objets le produit existe.

1.1.1. Tout objet initial est final. En effet si ε est un objet initial, $\mathrm{Hom}(\varepsilon, X)$ se réduit à un seul élément noté 0 (puisque c'est l'élément neutre pour le groupe $\mathrm{Hom}(\varepsilon, X)$ en particulier $\mathrm{Hom}(\varepsilon, \varepsilon) = 1_\varepsilon = 0$, donc pour tout élément f de $\mathrm{Hom}(Y, \varepsilon)$, $f = 1_\varepsilon f = 0$; $\mathrm{Hom}(Y, \varepsilon)$ se réduit, à l'élément 0).

Il y a donc équivalence entre les propositions suivantes :

ε est un objet initial

ε est un objet final

$1_\varepsilon = 0$

Dans une catégorie additive il existe donc un *objet nul*, deux objets nuls étant canoniquement isomorphes, parmi les objets nuls on en choisit un que l'on note aussi 0.

Remarque : Dans une catégorie C à objet nul 0, pour tout couple d'objet (X,Y) on définit un morphisme nul de X dans Y qui est le composé de $X \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow Y$. Dans le cas où C est additive ce morphisme nul est évidemment l'élément neutre du groupe $\mathrm{Hom}(X,Y)$.

1.1.2. Si pour tout couple d'objets (X,Y), la somme $X \amalg Y$ existe, alors le produit existe et $X \amalg Y \simeq X \prod Y$, on peut *choisir* $X \prod Y = X \amalg Y$, on note cet objet $X \oplus Y$. Si (e_X, e_Y) représentent $X \amalg Y$ comme somme de X et Y le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "1_X"] & \\
X \amalg Y \arrow[ur, "e_X"] & & X \\
 & Y \arrow[ul, "e_Y"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

montre qu'il existe un unique morphisme $p_X : X \amalg Y \longrightarrow X$ tel que $p_X e_X = 1_X$ et $p_X e_Y = 0$. De même il existe un unique morphisme $p_X : X \amalg Y \longrightarrow Y$ tel que $p_y e_Y = 1_Y$ et $p_Y e_X = 0$. On vérifie que les applications $e_X p_X + e_Y p_Y$ et $1_{X \amalg Y}$ ont les mêmes composantes donc $e_X p_X + e_Y p_Y = 1_{X \amalg Y}$. Alors p_X et p_Y représentent $X \amalg Y$ comme produit de X et de Y, en effet pour tout objet Z de C et tout couple de morphismes $u : Z \longrightarrow X$, $v : Z \longrightarrow Y$, l'application $e_X u + e_Y v : Z \longrightarrow X \amalg Y$ rend le diagramme suivant commutatif, et c'est la seule.

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
Z \arrow[ur, "u"] \arrow[rr] \arrow[dr, "v"'] & & X \amalg Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

1.2 Version 2

Soit C une catégorie satisfaisant aux axiomes suivants :

CA'_1 Il existe un objet nul

CA'_2 Pour tout couple (X,Y) d'objets de C, le produit et la somme existent.

La catégorie C admettant un objet nul, il existe un unique morphisme $C_{XY} : X \amalg Y \longrightarrow X \prod Y$ tel que les diagrammes suivants soient commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[rr, "f_X"'] \arrow[dr, "0"'] & & X \prod Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"]
\\
& Y &
\end{tikzcd} \quad ; \qquad
\begin{tikzcd}
& X & \\
Y \arrow[ur, "0"] \arrow[rr, "f_Y"'] \arrow[dr, "1_Y"'] & & X \prod Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"]
\\
& Y &
\end{tikzcd} \quad ;$$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_X"'] \arrow[dr, "e_X"] & \\
X \prod Y & & X \amalg Y \\
& Y \arrow[ul, "f_Y"] \arrow[ur, "e_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

CA'_3 Pour tout couple d'objets (X,Y), C_{XY} est un *isomorphisme*.

A tout couple (u,v) de morphismes de X dans Y on fait correspondre alors un morphisme de X dans Y défini par le diagramme suivant :

$$X \xrightarrow{(u,v)} Y \prod X \xrightarrow{C_{XY}^{-1}} X \amalg Y \longrightarrow Y$$

On obtient ainsi sur $\mathrm{Hom}(X,Y)$ une structure de monoïde commutatif avec élément unité. L'application naturelle de $\mathrm{Hom}(X,Y) \times \mathrm{Hom}(Y,Z)$ dans $\mathrm{Hom}(X,Z)$ est bilinéaire.

CA'_4 Pour tout couple d'objets (X,Y), le monoïde $\mathrm{Hom}(X,Y)$ construit ci-dessus est un *groupe*.

On montre le lemme suivant : Soit C une catégorie, il existe au plus une fonction qui à tout couple d'objets (X,Y) de C associe une structure de monoïde associatif sur $\mathrm{Hom}(X,Y)$ tel que la composition des morphismes soit bilinéaire[3]. On en déduit que les définitions **1.1** et **1.2** d'une catégorie additive sont équivalentes.

1.3 Noyau et conoyau d'un morphisme

Dans une *catégorie avec objet nul* on considère un morphisme $f : X \longrightarrow Y$.

1.3.1. Le *noyau* (resp. conoyau) de f est, lorsqu'il existe, le *noyau* (resp. conoyau) *du couple de morphismes* $(f,0)$.

Le noyau de f est donc un morphisme $u : K \longrightarrow X$ tel que :

(i) $f u = 0$

(ii) pour tout morphisme $u' : K' \longrightarrow X$, tel que $f u' = 0$, il existe un morphisme unique $v : K' \longrightarrow K$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "u"] & & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & K' \arrow[ul, "v"] \arrow[ur, "u'"'] & & \end{tikzcd}$$

Le morphisme u (et quelque fois aussi l'objet K) est *noté* $\mathrm{Ker}\, f$. On rappelle que le noyau de f est un *monomorphisme*.

Dualement on écrira la définition du conoyau de f, noté $\mathrm{Coker}\, f$, qui est un *épimorphisme*.

Sous la seule hypothèse de l'existence d'un objet nul dans une catégorie C, tout monomorphisme (resp. épimorphisme) a un noyau (resp. un conoyau) nul.

1.3.2. Dans une *catégorie additive*, la réciproque est vraie, et l'on a la :

Proposition. — *Un morphisme est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si son noyau (resp. conoyau) est nul.*

1.4 Foncteur additif

1.4.1. Soient C et C' deux catégories additives, F un foncteur de C dans C', les conditions suivantes sont équivalentes

[3]Ce lemme est un cas particulier d'une proposition que l'on trouvera dans : Eckmann-Hilton. Group-like structures in general categories. Math. Ann. (62-63)

(a) Pour tout couple d'objets (X,Y) de C, l'application $F_\circ|_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$: $\mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$ est un *morphisme de groupe abélien*.

(b) Le foncteur F commute aux sommes finies.

(c) Le foncteur F commute aux produits finis.

On appelle *foncteur additif* un foncteur vérifiant l'une de ces conditions.

1.4.2. Exemples :

Soit C une catégorie additive ; pour tout objet X de C, le *foncteur* $\mathrm{Hom}(X,.)$ de C dans la catégorie des groupes abéliens $\underline{\mathrm{Ab}}$, défini par $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X,Y)$ et le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}(.,X)$, sont additifs.

Soit $\underline{\mathrm{Mod}}_A^S$ la catégorie des modules à guache sur un anneau A, pour tout module à droite X sur A le foncteur $X \otimes_A .$ de $\underline{\mathrm{Mod}}_A^S$ dans $\underline{\mathrm{Ab}}$ défini par $Y \rightsquigarrow X \otimes_A Y$ et $f \rightsquigarrow 1_X \otimes f$ est additif.

Plus généralement un foncteur exact à droite ou à guache, d'une catégorie additive dans une autre est additif.

1.5 Image, coimage d'un morphisme

Dans une catégorie avec objet nul, soit f un morphisme admettant un noyau et un conoyau. Si le conoyau de $\mathrm{Ker} f$ (resp. le noyau de $\mathrm{Coker} f$) existe, on l'appelle *coimage de* f, on le note $\mathrm{Coim} f$ (resp. *image* de f, $\mathrm{Im} f$). Si $\mathrm{Im} f$, $\mathrm{Coim} f$ existent, soit $\hat{f}$ l'unique morphisme de X dans K' tel que $\mathrm{Im} f\,\hat{f} = f$, $\mathrm{Im} f$ est un mono, donc $\hat{f}\,\mathrm{Ker} f = 0$ et il existe un *unique morphisme* $\overline{f}$ *de* K' *dans* C' tel que $f = \mathrm{Im} f\,\overline{f}\,\mathrm{Coim} f$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\mathrm{Ker} f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Coim} f"'] \arrow[dr, "\hat{f}"] & Y \arrow[r, "\mathrm{Coker} f"] & C \\
 & C' \arrow[r, "\overline{f}"'] & K' \arrow[u, "\mathrm{Im} f"'] &
\end{tikzcd}$$

2. Catégorie abélienne

2.1. Une *catégorie abélienne* est une catégorie additive qui vérifie les axiomes suivants

AB_1 Pour tout morphisme, le noyau et le conoyau existent.

AB_2 Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$, $\overline{f} : C' \longrightarrow K'$ est un isomorphisme.

Une conséquence de ces axiomes est que tout morphisme f se décompose de façon canonique en un monomorphisme et un épimorphisme $f = \mathrm{Im} f \,\mathrm{Coim}\, f$.

On remarque également que pour tout couple (f, g) de morphismes de même but (resp. de même source) A le produit fibré (resp. la somme amalgamée) existe.

On vérifie par exemple que $(X, f) \prod_A (Y, g) = \mathrm{Ker}(f\, p_X \longrightarrow g\, p_Y)$ ou $X = s(f)$, $Y = s(g)$.

2.2 Axiomes supplémentaires dans une catégorie abélienne

Pour une catégorie C appartenant à un univers $\mathfrak{U}$ il est quelque fois utile d'ajouter certains des axiomes suivants :

2.2.1.

$AB_{3\mathfrak{U}}$. Pour tout objet I de $\underline{\mathrm{Diag}_{\mathfrak{U}}}$, les diagrammes de type I dans C possèdent une limite inductive.

Remarque. Pour qu'il en soit ainsi il suffit que les sommes indéxées par tout I appartenant à $\mathfrak{U}$ existent.

2.2.2.

$AB_{4\mathfrak{U}}$. $AB_{3\mathfrak{U}}$ est vérifié et pour tout objet I de $\underline{\mathrm{Diag}_{\mathfrak{U}}}$, la somme $\amalg_{i\in I} u_i$ d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de monomorphismes est un monomorphisme.

Remarque. Cela revient à dire que la somme directe commute aux noyaux, et se trouve donc être un foncteur exact.

2.2.3.

$AB_{5\mathfrak{U}}$ (est strictement plus fort que $AB_{4\mathfrak{U}}$) : $AB_{3\mathfrak{U}}$ est vérifié et pour tout catégorie filtrante I, élément de $\mathfrak{U}$, le foncteur $\varinjlim_I : \underline{\mathrm{Hom}}(I, C) \longrightarrow C$ est exact.

On énonce de façon duale des axiomes notés $AB^*_{3\mathfrak{U}}$, $AB^*_{4\mathfrak{U}}$, $AB^*_{5\mathfrak{U}}$. Il serait déraisonnable de prétendre imposer simultanément à une catégorie les axiomes $AB_{5\mathfrak{U}}$ et $AB^*_{5\mathfrak{U}}$, car alors tout objet de C est nul…

2.2.4. Famille génératrice. Soit C une catégorie. On dit qu'une famille $(Ai)_{i\in I}$ d'objet, de C, est une *famille génératrice* si pour tout objet X de C et tout monomorphisme $f : Y \longrightarrow X$ qui n'est pas un isomorphisme, il *existe* i appartenant à I et *un morphisme* $u : Ai \longrightarrow X$, tels que u ne se factorise pas par f.

Un objet de C est un *générateur* si la famille réduite à ce élément est une famille génératrice.

Proposition. — *Soit* $(Ai)_{i\in I}$, *une famille d'objets de* C *telle que la somme* $A = \amalg_{i\in I} Ai$ *existe. La famille* $(Ai)_{i\in I}$ *est une famille génératrice si et seulement si* A *est un générateur.*

En effet, soient un objet X et un monomorphisme $f : Y \longrightarrow X$; pour qu'un morphisme $u : A \longrightarrow X$ se factorise par f il faut et il suffit que pour tout i élément de I la composante u_i se factorise par f.

Une catégorie C admet toujours une famille génératrice, à savoir la famille de tous les objets. Mais pour une "grosse catégorie", par exemple la catégorie de tous les groupes appartenants à un univers donné $\mathfrak{U}$. Aussi s'imposent-on l'axiome :

$AB_{6\mathfrak{U}}$. Il existe *famille génératrice* $(Ai)_{i\in I'}$ de C avec I élément de $\mathfrak{U}$.

Exemple : Soit A un anneau appartenant à un univers $\mathfrak{U}$, la catégorie Mod_A^S de tous les modules à guache sur A admet A, considéré comme A module à gauche, comme générateur.

On définit dualement les notions de famille cogénératrice, de cogénérateur, on énonce un axiome $AB^*_{6\mathfrak{U}}$ dual de $AB^*_{6\mathfrak{U}}$.

2.2.5. Il sera bon de vérifier que la catégorie $\mathrm{Mod}^S A\mathfrak{U}$ est abélienne et satisfait aux axiomes précédemment énoncés, à ceci près que $AB^*_{5\mathfrak{U}}$ et que $AB^*_{6\mathfrak{U}}$ n'est pas évident…

3. Exactitude dans une catégorie abélienne

3.1 Suite exacte

Une suite de morphismes $(ui)_{i\in[a,b]}$, $[a,b] \subset Z$ telle que $s(ui) = b(u_{i-1})$ est *"nulle"* (resp. *exacte*) si pour tout i, $a < i \leq b$, $u_i u_{i-1} = 0$ (resp. $\mathrm{Ker}\, u_i$ est isomorphe à $\mathrm{Im} u_{i-1}$, ou ce qui est équivalent $\mathrm{Coker}\, u_{i-1}$ est isomorphe à $\mathrm{Coim}\, u_i$.)

On appelle suite *exacte courte* une suite exacte du type $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$. Une telle suite est aussi appelée une *extension* de A' par A''.

Par définition même d'une suite exacte, un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si la suite $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y$ (resp. $X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$) est *exacte*.

3.2 Suite scindée

On dit qu'une suite exacte courte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *se scinde* si elle possède l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(a) f est *rétractable*, c'est-à-dire il existe $r : A \longrightarrow A'$ te que $rf = 1_{A'}$

(b) g est *sectionnable*, c'est-à-dire il existe $s : A'' \longrightarrow A$, tel que $gs = 1_{A''}$

(c) il existe $s : A'' \longrightarrow A$ (resp. $r : A \longrightarrow A'$) tel que (f, s) (resp. (g, r)) représente A comme somme directe (resp. produit direct) de A' et A''.

(d) Il existe $r : A \longrightarrow A'$ et $s : A'' \longrightarrow A$ tels que $fr + sg = 1_A$ on dit aussi que A' ou A'' est *facteur direct* de A.

3.3 Foncteur exact

Proposition **3.3.1**. — *Soient C et C' deux catégories abéliennes T un foncteur de C dans C'. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) T est exact à droite *(resp. à gauche)*

(b) T est additif *et pour toute suite exacte $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$) la suite $T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'') \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A'')$) est exacte.*

Remarque. Si l'on considère un foncteur contravariant T de C dans C', la proposition se traduit ainsi :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(a') T est *exact à droite* (resp. à gauche) (b') T est *additif* et pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$ (resp. $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$) la suite $T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A')$) est exacte.

On en déduit qu'un foncteur T (resp. un foncteur contravariant) est *exact* si et seulement si T est *additif* et pour *toute suite exacte* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$, *la suite* $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A') \longrightarrow 0$ *est exacte*).

3.3.2 Exemples. Si C est une catégorie abélienne, pour tout objet X de C, les foncteurs $\mathrm{Hom}(X, .)$ et $\mathrm{Hom}(., X)$ sont exacts à gauche.

Pour tout module à droite X sur A, le foncteur $X \otimes_A . : \mathrm{Mod}_A^S \longrightarrow \mathrm{Ab}$ est exact droite.

3.3.3. On dit qu'un foncteur T (resp. un foncteur contravariant) est *semi exact* s'il est additif et si pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ la suite $T(A') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A')$ (resp. $T(A'') \longrightarrow T(A) \longrightarrow T(A')$) est exacte.

4. Diagrammes dans une catégorie abélienne

4.1. Deux théorèmes vont nous permettre de transposer certains résultats connus sur les catégories des groupes abéliens, ou de modules, dans une catégorie abélienne quelconque.

Théorème de Freyd **4.1.2**. — *Pour tout catégorie abélienne appartenant à un univers* $\mathfrak{U}$, *il existe un anneau* A *appartenant à* $\mathfrak{U}$ *et un foncteur* exact et pleinement fidèle *de* C *dans* $\mathrm{Mod}_{A\mathfrak{U}}^S$.

Ce résultat implique le théorème précédent.

Lemme **4.1.3**. — *Soit* C *et* C' *des catégories abéliennes et* F *un foncteur exact de* C *dans* C'. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) F *est fidèle*

(b) Pour tout objet X *de* C, $F(X) = 0$ *implique* $X = 0$

(c) F *est* conservatif, *c'est-à-dire pour tout flèche* u *de* C, $F(u)$ *est inversible implique que* u *est inversible.*

(d) *Pour tout flèche u de C, $F(u)$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) implique que u est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).*

4.2 Applications

Lemme des 5 **4.2.1**. — *Dans une catégorie abélienne C, on considère le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes :*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{-2} & \longrightarrow & A_{-1} & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ \downarrow{\scriptstyle f_{-2}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ B_{-2} & \longrightarrow & B_{-1} & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 \end{array}$$

Si f_{-1} et f_1 sont des monomorphismes (resp. des épimorphismes) et si f_{-2} est un épimorphisme (resp. f_2 un monomorphisme), alors f_0 est un monomorphism (resp. un épimorphisme).

On en déduit que si f_{-1} et f_1 sont des isomorphismes, si f_{-2} est un épimorphisme, et f_2 un monomorphisme, alors f_0 est un isomorphisme.

Ce résultat est bien connu dans $\mathrm{Ab}_{\mathfrak{U}}$ et se transpose dans C à l'aide du théorème **4.1.1** et du lemme **4.1.3**.

4.2.2. On appelle *carré cartésien* le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad u \quad} & B \\ {\scriptstyle v'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle v} \\ B' & \xrightarrow[\quad u' \quad]{} & A' \end{array}$$

dans lequel B' est le produit fibré de (A, u) et (A', v) au dessus de B.

Dans une catégorie abélienne si v est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) v' est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), on a la même propriété pour u.

On écrira la propriété duale dans le carré cocartésien.

4.2.3. Par les mêmes méthodes on montrera dans une catégorie abélienne la propriété connue dans $\underline{\mathrm{Mod}_A^S}$ sous le nom de “lemme de serpent”.

4.3. Le résultat suivant sera fort utilisé :

Proposition **4.2.3**. — *Soit C' une catégorie additive (resp. abélienne) pour tout type de diagramme D la catégorie* $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$ *est additive (resp. abélienne). De plus si C' vérifie l'un des axiomes $AB_{1\mathfrak{U}}$ à $AB_{6\mathfrak{U}}$ ou l'un des axiomes duaux $AB^*_{3\mathfrak{U}}$ à $AB^*_{6\mathfrak{U}}$ il en est de même de* $\underline{\mathrm{Diag}}(D, C')$.

5. Objet injectif. Objet projectif

5.1 Soit C une catégorie abélienne.

Proposition **5.1.1**. — *Pour tout objet Q de C les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Le foncteur* $\mathrm{Hom}(., Q)$ *(exact à guache) est* exact.

(b) *Pour tout monomorphisme $f : X \longrightarrow Y$ et pour tout morphisme $u : X \longrightarrow Q$, il existe un monomorphisme $v : Y \longrightarrow Q$ tel que $vf = u$.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[dl, "v"] \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

(c) *Toute suite exacte* $0 \longrightarrow Q \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *se* scinde.

La proposition **3.3.1** montre que les assertions (a) et (b) sont équivalentes.

5.2

Lemme **5.2.1**. — *Soit $(A_k)_{k \in K}$, K appartenant à un univers $\mathfrak{U}$, une famille génératrice d'une catégorie C dans laquelle les produits fibrés existent et telle que pour tout couple d'objets (X, Y),* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *appartient à $\mathfrak{U}$. Alors pour tout objet Y de C les sous-objets de Y forment* un ensemble dont le cardinal est élément de $\mathfrak{U}$.

Si les produits fibrés existent, tout couple (X, i), (X', i') de sous-objets de Y admet une borne inférieure à savoir le sous-objet de Y, $(X, i) \prod_Y (X', i')$.

A tout sous-objet (X, i) de Y on fait correspondre la famille $(H_i^k)_{k \in K}$ où pour tout k, H_i^k est le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(A_k, Y)$ formé par les morphismes qui se factorisent par i. Supposons qu'il existe un autre sous-objet (X', i') de Y tel que pour tout k $H^k_i = H^k_{i'}$. Alors pour tout k et tout morphisme $f_k : A_k \longrightarrow X$, il existe un morphisme g_k tel que $i f_k = i' g_k$, et par définition du produit fibré, il existe un morphisme unique $A_k \longrightarrow XAX'$ grâce auquel f_k (resp. g_k) se factorise par le monomorphisme canonique $XAX' \longrightarrow X$ (resp. $XAX' \longrightarrow X'$). On en déduit que $X = X'$. Il y a donc une correspondance biunivoque entre les sous-objets de Y et un sous-ensemble de $\prod_{k\in K} \mathfrak{P}(\mathrm{Hom}(A_k, Y))$. Or $\mathrm{Hom}(A_k, Y)$ appartient à $\mathfrak{U}$ par hypothèse $\mathfrak{P}(\mathrm{Hom}(A_k, Y))$ appartient à $\mathfrak{U}$ en vertu de l'axiome u_3 des univers, et $\prod_{k\in K} \mathfrak{P}(\mathrm{Hom}(A_k, Y))$ appartient à $\mathfrak{U}$ puisque K est un élément de $\mathfrak{U}$, donc les sous-objets de Y forment un ensemble dont le cardinal appartient à $\mathfrak{U}$.

Soit u, v deux morphismes de même but, on dit que *v prolonge u* si

(i) $s(u) < s(v)$, soit i le morphisme injection canonique de $s(u)$ dan $s(v)$

(ii) $u = vi$.

Théorème **5.2.2**. — *Soit C une catégorie abélienne telle que pour tout couple d'objets (X, Y), Card* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *appartient à $\mathfrak{U}$ et vérifiant $AB_{5\mathfrak{U}}$, $(A_k)_{k\in K}$, K élément de $\mathfrak{U}$, une famille génératrice. Un objet Q de C est* injectif *si et seulement si pour tout k appartient à K, pour tout sous-objet V de A_k, et pour tout morphisme $u : Y \longrightarrow Q$, il existe un* morphisme $v : A_k \longrightarrow Q$ qui prolonge u.

Soit un objet Y de C, un sous-objet X de Y et un morphisme $f : X \longrightarrow Q$. On considère l'ensemble E des morphismes de but Q, dont la source est un sous-objet de Y et qui prolonge f ; cet ensemble ordonné par la relation : $f' < f''$ si et seulement si f'' prolonge f' est *inductif*. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une partie totalement ordonnée de E, I étant un élément de $\mathfrak{U}$ **5.2.1**, $L = \varinjlim_I s(f_i)$ existe et c'est un sous-objet de Y en vertu de $AB_{5\mathfrak{U}}$, de plus il existe un morphisme $l : L \longrightarrow Q$ qui prolonge f_i pour tout i. L'ensemble E admet donc un *élément maximal* $f_0 : X_0 \longrightarrow Q$.

Montrons que $X_0 = Y$. Pour cela supposons que X_0 soit différent de Y et montrons qu'il existe un sous-objet X_1 de Y, $X_0 < X_1$ et un morphisme $l : X_1 \longrightarrow Q$ qui prolonge f.

Si le monomorphisme canonique $i_0 : X_0 \longrightarrow Y$ n'est pas un isomorphisme, il existe k appartenant à K et $\alpha : A_k \longrightarrow Y$ qui ne se factorise par i_0. Soit V

l'image inverse de X_0 par α, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, i_0\alpha)$, il existe un morphisme $\beta : V \longrightarrow X_0$ unique tel que $i_0\beta = \alpha j$ avec $j = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, i_0\alpha)$. On considère X_1, a, b la somme amalgamée de (X_0, β) et (A_k, j) au dessus de V, c'est un sous-objet de Y, en effet X_1 est isomorphe à $X_0 V \mathrm{Im}\alpha$. Comme j est un monomorphisme, a est un monomorphisme et X_0 est un sous-objet de X_1, de plus X_0 est différent de X_1, car α se factoriserait alors par i_0 au moyen de b. Par hypothèse le morphisme $f_0\beta : V \longrightarrow Q$ se prolonge en un morphisme $g : A_k \longrightarrow Q$. Comme $gj = f_0\beta$ il existe un morphisme $f_1 : X_1 \longrightarrow Q$ tel que $f_0 = f_1 a$.

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[rrrr, "i_0"] \arrow[drrr, "a"] \arrow[ddrr, "f_0"'] & & & & Y \\
& & & X_1 \arrow[dl, "f_1"'] & \\
& & Q & & \\
V \arrow[uuu, "\beta"] \arrow[rrrr, "j"'] & & & & A_k \arrow[ull, "g"] \arrow[uul, "b"'] \arrow[uuu, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

On énoncera le théorème dual.

5.2.3. Dans *la catégorie* $\mathrm{Mod}^S_{A\mathfrak{U}}$ un objet Q est injectif si et seulement si pour tout idéal à gauche V de A et tout morphisme $u : V \longrightarrow Q$ il existe un élément x de Q tel que $u(\lambda) = \lambda x$ pour tout λ appartenant à V.

5.3. On dit qu'une catégorie abélienne C possède *assez d'objets injectifs* (resp. assez d'objets projectifs) si pour tout objet X de C il existe un *objet injectif* Q (resp. un objet projectif P) et un *monomorphisme* $X \longrightarrow Q$ (resp. un épimorphisme $P \longrightarrow X$).

Théorème **5.3.1**. — *Soit* C *une catégorie vérifiant* $AB_{5\mathfrak{U}}$ *et telle que pour tout couple d'objets* (X, Y) $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *appartient à* $\mathfrak{U}$. *S'il existe un générateur, la catégorie* C *possède assez d'objets injectifs.*

Soit X un objet quelconque de C, A le générateur, $(B_k)_{k\in K}$ l'ensemble de tous les sous-objets de A, K appartient à $\mathfrak{U}$ en vertu du lemme **5.2.1**, on pose $J(X) = \bigcup_{k\in K} \mathrm{Hom}(B_k, X)$.

Soient $B = \amalg_{k\in K} B_k^{(\mathrm{Hom}(B_i,X))}$[4], le morphisme de B dans X dont les composantes sont tous les morphismes de tous les sous-objets de A dans X, et i le monomorphisme de B dans $A^{J(X)}$ somme directe des monomorphismes canoniques de B_i dans A, i est bien un monomorphisme d'après $AB_{5\mathfrak{U}}$.

On considère $T_1(X) = (x, f) \amalg_B (i, A^{J(X)})$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A^{J(X)} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ X \arrow[r, "j_1"'] & T^1(X) \end{tikzcd}$$

Puisque i est un monomorphisme, j_1 est monomorphisme, mais $T^1(X)$ n'est pas en général injectif. On définit par *récurrence transfinie*, une *suite d'objets* $T^\lambda(X)$ et pour tout couple (λ', λ) tel que $\lambda' < \lambda$ un *monomorphisme* $T^{\lambda'}(X) \longrightarrow T^\lambda(X)$, de la façon suivante :

> Si λ n'est pas un ordinal limite on pose $T^\lambda(X) = T^1(T^{\lambda-1}(X))$
>
> si λ est un ordinal limite on pose $T^\lambda(X) = \varinjlim_{\lambda'<\lambda} T^{\lambda'}(X)$, on remarque qu'on ne sortira pas de l'univers si l'ensemble des $\lambda' < \lambda$ appartient à l'univers.

Pour tout couple (λ', λ), $\lambda' < \lambda$ on obtient par cette construction un monomorphisme canonique $T^{\lambda'}(X) \longrightarrow T^\lambda(X)$.

On pose $T^\circ(X) = X$.

Soit α le plus petit ordinal dont le cardinal est strictement plus grand que Card K. Montrons que $T^\alpha(X)$ est injectif.

Soit (V, i) un sous-objet de A et $u : V \longrightarrow T^\alpha(X)$. Pour tout $\lambda < \alpha$, on note S^λ l'image inverse par u de $T^\lambda(X)$, α est un ordinal limite, $T^\lambda(X) = \varinjlim_{\lambda<\alpha} T^\lambda(X)$ et en vertu de $AB_{5\mathfrak{U}}$ $V = \varinjlim_{\lambda<\alpha} S^\lambda$. Le cardinal de l'ensemble des sous-objets de V est inférieur à Card K et l'ensemble des ordinaux inférieurs à α a un cardinal supérieur à Card K, donc il existe $\lambda_0 < \alpha$ à partir du que la suite S^λ est *stationnaire*. Donc u se factorise par $u_0 : V \longrightarrow T^{\lambda_\circ}(X)$ et par définition de $T_1(T^{\lambda_\circ}(X))$ il existe

[4] Si Y est un objet de C, I un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, on note $Y^{(I)}$ la somme $\amalg_{i\in I} Y_i$ où pour tout i, $Y_i = Y$.

un morphisme $\overline{u} : A \longrightarrow T^{\lambda_0+1}(X)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif. Donc u se prolonge en un morphisme $v : A \longrightarrow T^{\alpha}(X)$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "i"] \arrow[ddl, "u_0"'] \arrow[ddr, "u"] & \\ & A \arrow[d, "\overline{u}_0"] & \\ T^{\lambda_0}(X) \arrow[r] & T^{\lambda_0+1} \arrow[r] & T^{\alpha}(X) \end{tikzcd}$$

On énoncera le théorème dual.

5.3.2. Dans $\mathrm{Mod}^{S}_{A\mathfrak{U}}$, A appartenant à $\mathfrak{U}$, qui vérifie $AB_{5\mathfrak{U}}$ et dont A est un générateur, il existe assez d'injectifs. On déduit de **5.1.1** qu'il existe assez de projectifs.

III. Foncteurs représentables

1. Définition et propriétés

1.1 Définition

Soit $\mathfrak{U}$ un univers, C une catégorie telle que pour tout couple (X, Y) d'objets de C, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ appartient à $\mathfrak{U}$. On rappelle que $\mathrm{Hom}(.,.)$ est un bifoncteur de $C \times C$ dans $\mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}}$ contravariant par rapport à la première variable, covariant par rapport à la seconde.

1.1.1. On appelle *catégorie des préfaisceaux* sur C, la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(C^{o}, \mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}})$, que l'on note $\hat{C}$.

On définit un foncteur ε de C dans $\hat{C}$. A tout objet Y de C, ε fait correspondre le foncteur contravariant de C dans $\mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}} : \mathrm{Hom}(., Y)$, que l'on note h_Y.

Tout morphisme $f : Y \longrightarrow Y'$, ε associe le morphisme fonctoriel naturel de $\mathrm{Hom}(., Y)$ dans $\mathrm{Hom}(., Y')$.

1.1.2. On dit que le foncteur h_Y est le *foncteur représenté* par Y.

On dit qu'un préfaisceau F est *représentable*, s'il existe un *objet* Y de C et un *isomorphisme* φ de h_Y sur F. On dit alors que F est représenté par le couple (Y, φ) ou encore que le couple (Y, φ) est une *donnée de représentation de* F.

1.2 Propriétés

Théorème **1.2.1**. — *Si* F est un préfaisceau *sur* C, Y un objet *de* C, *il* existe une bijection *de* $\mathrm{Hom}(h_Y, F)$ *sur* $F(Y)$, *fonctorielle en* Y, F.

a. *Soit* u *un morphisme de* h_Y *dans* F. *On rappelle (Chap. 1, 3.4) qu'à tout objet* X *de* C u *fait correspondre une application* $u(X)$ *de* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *dans* $F(X)$ *que l'on notera* u_X. *Soit* $\alpha : \mathrm{Hom}(h_Y, F) \longrightarrow F(Y)$ *telle que* $\alpha(u) = u_Y(1_Y)$

b. *Soit* $\beta : F(Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(h_Y, F)$, *qui à tout élément* v *de* $F(Y)$ *fait correspondre le morphisme* $\beta(v) : h_Y \longrightarrow F$, *tel que pour tout objet* X *et tout morphisme* $f : X \longrightarrow Y$ *on ait* $\underline{\beta(v)}_X(f) = F(f)(v)$. *On vérifie en effet que pour tout morphisme* $g : X \longrightarrow X'$ *le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(X', Y) = h_Y(X') & \xrightarrow{h_Y(g)} & \mathrm{Hom}(X, Y) = h_Y(X) \\ {\scriptstyle \underline{\beta(v)}_{X'}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \underline{\beta(v)}_X} \\ F(X') & \xrightarrow[F(g)]{\hspace{4em}} & F(X) \end{array}$$

c. *Pour tout morphisme fonctoriel* u *de* h_Y *dans* F *et tout morphisme* $f : X \longrightarrow Y$ *on a* $u_X h_Y(f) = F(f) u_Y$, *en particulier* $F(f)u_Y(1_Y) = u_X(f)$, *donc* $\beta\alpha(u) = u$. *Inversement pour tout élément* v *de* $F(Y)$, $\alpha\beta(v) = \underline{\beta(v)}_Y(1_Y) = F(1_Y)(v) = 1_F(Y)(v) = v$.

Corollaire **1.2.2**. — *Si* F *est un préfaisceau représentable, représenté par* (X, φ) Y *un objet de* C, *il existe une* bijection *de* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *sur* $\mathrm{Hom}(h_Y, h_X)$.

C'est dire que le foncteur canonique ε est *pleinement fidèle*, ce qui permet de "plonge" canoniquement toute catégorie C dans la catégorie $\hat{C}$ des préfaisceaux sur C.

Aussi nous arrivera-t-il d'*identifier* un objet Y de C à h_Y, un morphisme fonctoriel de h_Y dans F à l'élément de $f(Y)$ correspondant. Une donnée de représentation de F est définie à un isomorphisme unique près : en effet, si (X, φ), (X', φ') sont deux données de représentation de F, h_X et h'_X sont isomorphes, comme ε est pleinement fidèle X et X' sont isomorphes ainsi que φ et φ'.

Proposition **1.2.3**. — *Soit* F *un préfaisceau sur* C.

Le couple (X,α), où X est un objet de C, α un élément de $F(X)$ définit une donnée de représentation de F si et seulement si pour tout couple (Y,β) où Y est un objet de C, β un élément de $F(Y)$, il existe un unique morphisme $v : Y \longrightarrow X$ tel que $\beta = F(v)\alpha$.

Si (X,α) définit une donnée de représentation de F, α s'identifie à un isomorphisme *de h_X sur F, β s'identifie à un morphisme de h_Y dans F, et un morphisme v s'identifie à un morphisme de h_Y dans h_X. Pour tout objet Y, et tout morphisme $\beta : h_Y \longrightarrow F$, il existe bien un unique morphisme $h_Y \longrightarrow h_Y$ tel que $\beta = \alpha u$, à savoir $u = \alpha^{-1}\beta$*

$$\begin{tikzcd}
h_X \arrow[rr, "\approx\alpha"] & & F \\
& h_Y \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Réciproquement si (X,α) jouit d'une telle propriété universelle, pour tout Y il existe une bijection de $\mathrm{Hom}(Y,X) = h_X(Y)$ *sur* $\mathrm{Hom}(h_Y,F) \simeq F(Y)$*, donc α est un isomorphisme fonctoriel, et (X,α) définit une donnée de représentation de F.*

2. Application

De nombreuses notions peuvent s'interpréter avantageusement en langage de foncteurs représentables.

2.1. Soit C une catégorie, D un type de diagramme et $\varphi : D \longrightarrow C$. Pour tout objet Y de C, on définit le diagramme constant C_Y : pour tout objet i de D $C_Y(i) = Y$, pour toute flèche f de D $C_Y(f) = 1_Y$. Pour tout objet Y de C, l'ensemble des systèmes admissibles $(Y,u_i)_{i\in \mathrm{Ob}\, D}$ de φ *est* l'ensemble $\mathrm{Hom}(C_Y,\varphi)$.

Soit F le préfaisceau sur C défini par $F(Y) = \mathrm{Hom}(C_Y,\varphi)$. En appliquant **1.2.3** on obtient la

Proposition **2.1.1**. — *La limite projective de φ existe si et seulement si le foncteur F est représentable.*

Si φ ne possède pas de limite projective dans C, on utilise souvent le procédé suivant on plonge C dans $\hat{C}$ au moyen du foncteur ε et on appelle limite projective de φ la limite projective de $\varepsilon\varphi$, qui existe toujours puisque $\hat{C} = \mathrm{Hom}(C^o, \mathrm{Ens}_{\mathfrak{U}})$.

2.2. On considère la catégorie des modules sur un anneau commutatif A, Mod_A. Soient M et N deux modules, le foncteur de Mod_A dans Ens qui à tout module P fait correspondre l'ensemble $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ des applications bilinéaires de $M \times N$ dans P est *représentable*, et le module qui le représente est le produit tensoriel $M \otimes_A N$.

2.3. On peut définir dualement un foncteur $\varepsilon' : C^o \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C, \mathrm{Ens})$. On définira alors un foncteur représentable et l'on vérifiera que cette notion recouvre celle de limite inductive.

3. Structures algébriques dans les catégories

On se propose de *définir* une structure algébrique par exemple une structure de groupe sur un objet X d'une catégorie C. On peut procéder de deux façons.

3.1. La plus naturelle consiste à généraliser dans la catégorie C, la notion habituelle de structure algébrique sur un ensemble.

Supposons que dans C le produit $X \prod X$ existe, une *loi de composition interne* sur X est la donnée d'un morphisme $m_X : X \prod X \longrightarrow X$.

Les axiomes définissant sur X une *structure de C-groupe* vont s'exprimer en terme de commutativité de diagrammes. Supposons que $X \prod X \prod X$ existe, on a les isomorphismes canoniques : $(X \prod X) \prod X \simeq X \prod X \prod X \simeq X \prod (X \prod X)$.

3.1.1. La loi est *associative* si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \prod X \prod X \arrow[r, "m_X \prod 1_X"] \arrow[d, "1_X \prod m_X"'] & X \prod X \arrow[d, "m_X"] \\
X \prod X \arrow[r, "m_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

Supposons de plus qu'il existe dans C un objet final E, il existe alors un unique morphisme $e : X \longrightarrow E$.

3.1.2. *Il existe un morphisme $w : E \longrightarrow X$* tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$
\begin{tikzcd}
E\coprod X \arrow[rr, "\omega\prod 1_X"] & & X\prod X \arrow[dl, "m_X"] \\
& X \arrow[ul, "(e{,}1_X)", "\simeq"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X\prod E \arrow[rr, "1_X\prod\omega"] & & X\prod X \arrow[dl, "m_X"] \\
& X \arrow[ul, "(1_X{,}e)", "\simeq"'] &
\end{tikzcd}
$$

On montre que w est alors déterminé de façon unique.

3.1.3. Il existe un *morphisme* $s : X \longrightarrow X$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(s{,}1_X)"] \arrow[d, "e"'] & X\prod X \arrow[d] \\
E \arrow[r, "\omega"'] & X
\end{tikzcd}
$$

ainsi que celui obtenu en permettant s et 1_X. On montre que le morphisme s est déterminé de façon unique.

On pourrait de façon duale définir une structure de C-cogroupe.

3.2. *Sans* faire *d'hypothèses* sur la catégorie C, on peut définir une structure sur X en se ramenant au cas *ensembliste*. Les limites projectives existent dans $\hat{C}$, ainsi pour deux éléments F, F' de $\hat{C}$, pour tout objet X de C, $F\prod F'(X) = F(X)\prod F'(X)$.

Une *loi de composition interne* sur X est la donnée d'un *morphisme* M_X : $h_X\prod h_X \longrightarrow h_X$. Cela revient à se donner pour tout objet Y de C, une loi de composition interne sur l'ensemble $h_X(Y)$ qui soit fonctorielle, c'est-à-dire telle que pour tout $u : Y \longrightarrow Y'$, $h_X(u) : h_X(Y') \longrightarrow h_X(Y)$ soit un morphisme au sens de la structure considérée.

3.3. Dans le cas particulier où le produit $X\prod X$ existe dans C, $h_X\prod h_X$ est canoniquement isomorphe à $h_{X\prod X}$, une loi de composition interne sur X peut donc être considérée comme un morphisme $M_X : h_{X\prod X} \longrightarrow h_X$ il lui est donc canoniquement associé **(III, 1.2.2)** un morphisme $m_X : X\prod X \longrightarrow X$ tel que $\varepsilon(m_X) = h_{m_X} = M_X$.

3.3.1. Si l'on suppose que $X \prod X \prod X$ existe, $X \prod X \prod X$ étant canoniquement identifié à $(X \prod X) \prod X$ l'application $M_X(Y) \prod 1_{h_X(Y)}$ s'identifie pour tout objet Y de C à $h_{m_X \prod 1_X}(Y)$. Il est donc *équivalent* de dire que la loi M_X est associative, c'est-à-dire que pour tout Y le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} h_X(Y) \prod h_X(Y) \prod h_X(Y) \arrow[r, "M_X(Y) \prod 1"] \arrow[d, "1 \prod M_X(Y)"'] & h_X(Y) \prod h_X(Y) \arrow[d, "M_X(Y)"] \\ h_X(Y) \prod h_X(Y) \arrow[r, "M_X(Y)"'] & h_X(Y) \end{tikzcd}$$

ou que le diagramme **3.1.1** est commutatif.

3.3.2. S'il existe dans C un objet final…

E, h_E est objet final de $\hat{C}$, le morphisme $\Omega : h_E \longrightarrow h_X$ induit un morphisme $w : E \longrightarrow X$ qui vérifie la propriété **3.1.2**.

3.3.3. Pour tout Y de C il existe un morphisme $S(Y) : h_X(Y) \longrightarrow h_X(Y)$ fonctoriel par rapport à Y, soit $S : h_X \longrightarrow h_X$ est un morphisme auquel est canoniquement associé un morphisme $s : X \longrightarrow X$ tel que $\varepsilon(s) = h_s = S$, et tel que le diagramme **3.1.3** correspondant soit commutatif.

3.4. Il faut remarquer qu'il y a des structures que l'on ne peut définir de cette façon, par exemple si leur définition fait intervenir des limites inductives, car $\varepsilon : C \longrightarrow \hat{C}$ ne commute pas aux limites inductives.

Quelques ouvrages de références

[1] ECKMANN - HILTON — *Group-like structure in general categories.* I. Math. Ann. **145** (1962) 227-255 ; II. Math. Ann. **151** (1963), 150-186 ; III. Math. Ann. **150** (1963) 165-187.

[2] EHRESMANN — *Catégories et structures.* (Dunod 1965).

[3] FREYD — *Abelian categories.* Harter et Row Publishers N-Y 1964.

[4] GABRIEL — *Des catégories abéliennes.* Thèse. Bulletin Société Mathématique de France (1962) 323 - 448.

[5] GROTHENDIECK —
Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. Journal. Vol. 9 p. 119 - 221 (1977).
Éléments de géométrie algébrique. I.H.E.S Publications mathématiques (1961 - 62).

[6] HILTON — *Catégories non abéliennes.* Séminaire d'été de Montreal (1964).

[7] MITCHELL — *Theory of categories.* Academic Press (1965).

Letter to J. Coates, 6.1.1966[5]

6.1.1966

Dear Coates,

Here a few more comments to my talk on the conjectures. The following proposition shows that the conjecture $C_\ell(X)$ is independent of the chosen polarization, and has also some extra interest, in showing the part played by the fact that $\mathrm{H}^i(X)$ should be "motive-theoretically" isomorphic to its natural dual $\mathrm{H}^{2n-i}(X)$ (as usual, I drop the twist for simplicity).

Proposition. — *The condition $C_\ell(X)$ is equivalent also to each of the following conditions:*

a) $D_\ell(X)$ holds, and for every $i < n$, there exists an isomorphism $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic (i.e. induced by an algebraic correspondence class; we do not make any assertion on what it induces in degrees different from $2n-i$).

b) For every endomorphism $\mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic, the coefficients of the characteristic polynomial are rational, and for every $i < n$, there exists an isomorphism $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic.

Proof. — I sketched already how $D_\ell(X)$ implies the fact that for an algebraic endomorphism of $\mathrm{H}^i(X)$, the coefficients of the characteristic polynomial are rational numbers. Therefore we know that a) implies b), and of course $C_\ell(X)$ implies a). It remains to prove that b) implies $C_\ell(X)$. Let $u : \mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ be the given isomorphism which is algebraic, and $v : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i}(X)$ the algebraic isomorphism in the opposite direction, induced by L_X^{n-i}. Then $uv = w$ is an automorphism of $\mathrm{H}^i(X)$ which is algebraic, and the Hamilton-Cayley formula $u^h - \sigma_1(w)u^{h-1} + \ldots + (-1)^h\sigma_h(w) = 0$ (where the $\sigma_i(w)$ are the coefficients of the characteristic polynomial of w) whos that w^{-1} is a linear combination of the w^i, with coefficients of the type $+/-\sigma_i(w)/\sigma_h(w)$ (N.B. $h = \text{rank } \mathrm{H}^i$). The

[5] https://agrothendieck.github.io/divers/LGC6166scan.pdf

assumption implies that these coefficients are rational, which implies that w^{-1} is algebraic, and so is $w^{-1}u = v^{-1}$, which was to be proved.

N.B. In characteristic 0, the statement simplifies to: $C(X)$ equivalent to the existence of algebraic isomorphisms $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$, (as the preliminary in b) is then automatically satisfied). Maybe with some extra care this can be proved too in arbitrary characteristics.

Corollary. — *Assume X and X' satisfy condition C_ℓ, and let $u : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+2D}(X')$ $(D \in \mathbf{Z})$ be an isomorphism which is algebraic. Then u^{-1} is algebraic.*

Indeed, the two spaces can be identified "algebraically" (both directions!) to their dual, so that the transpose of u can be viewed as an isomorphism $u' : \mathrm{H}^{i+2D}(X') \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$. Thus $u'u$ is an algebraic automorphism w of $\mathrm{H}^i(X)$, and by the previous argument we see that w^{-1} is algebraic, hence so is $u^{-1} = w^{-1}u'$.

As a consequence , we see that if $x \in \mathrm{H}^i(X)$ is such that $u(x)$ is algebraic (i being now assumed to be even), than so is x. The same result should hold in fact if u is a monomorphism, the reason being that in this case there should exists a left-inverse which is algebraic; this exists indeed in a case like $\mathrm{H}^{n-1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(Y)$ (where we take the left inverse $\bigwedge_X \varphi_*$). But to get it in general, it seems w need moreover the Hodge index relation. (The complete yoga then being that we have the category of motives which is semi-simple!). Without speaking of motives, and staying down on earth, it would be nice to explain in the notes that $C(X)$ together with the index relation $I(X \times X)$ implies that the ring of correspondences classes for X is semi-simple, and how one deduces from this the existence of left and right inverses as looked for above.

This could be given in an extra paragraph (which I did not really touch upon in the talk), containing also the deduction of the Weil conjectures from the conjectures C and A.

A last and rather trivial remark is the following. Let's introduce variants $A'_\ell(X)$ and $A''_\ell(X)$ as follows:

$A'_\ell(X)$: if $2i \leq n-1$, any element x of $\mathrm{H}^i(X)$ whose image in $\mathrm{H}^i(Y)$ is algebraic, is algebraic.

$A''_\ell(X)$: if $2i \geq n-1$, any algebraic element of $\mathrm{H}^{i+2}(X)$ is the image of an algebraic element of $\mathrm{H}^i(Y)$.

Let us consider also the specifications $A'_\ell(X)^\circ$ and $A''_\ell(X)^\circ$, where we restrict to the critical dimensions $2i = n-1$ if n odd, $2i = n-2$ if n even. All these conditions are in the nature of "weak" Lefschetz relations, and they are trivially implied by $A_\ell(X)$ resp. $C_\ell(X)$ (in the first case, applying φ we see that $L_X X$ is algebraic; in the second, we take $y = \bigwedge_Y \varphi^+(x)$). The remark then is that these pretendently "weak" variants in fact imply the full Lefschetz relations for algebraic cycles, namely:

Proposition. — *$C_\ell(X)$ is equivalent to the conjunction $C_\ell(Y) + A_\ell(X \times X)^\circ + A''_\ell(X \times X)^\circ$, hence (by induction) also to the conjunction of the conditions A'°_ℓ and A''°_ℓ for all of the varieties $X \times X$, $Y \times Y$, $Z \times Z$,... Analogous statement with $X \times Y$, $Y \times Z$ etc instead of $X \times X$, $Y \times Y$ etc.*

This comes from the remark that $A_\ell(X)^\circ$ follows from the conjunction of $A'_\ell(X)^\circ$ and $A''_\ell(X)^\circ$, as one sees by decomposing $L_X^2 : \mathrm{H}^{2m-2}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ into $\mathrm{H}^{2m+2}(X) \xrightarrow{\varphi^k} \mathrm{H}^{2m+2}(Y) \xrightarrow{\varphi_\alpha} \mathrm{H}^{2m}(X) \xrightarrow{L_X} \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ if $\dim X = 2m$ is even, and $\mathrm{H}^{2m+1-1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m+1+1}$ into $\mathrm{H}^{2m}(X) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{H}^{2m}(Y) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{H}^{2m+2}(X)$ if $\dim X = 2m+1$ is odd.

Sincerely yours

Lettre à J. Tate, 5.1966[6]

Pise 5.1966

Cher John,

J'ai réfléchi aux groupes formels et à la cohomologie de De Rham, et suis arrivé à un projet de théorie, ou plutôt de début de théorie, que j'ai envie de t'exposer, pour me clarifier les idées.

Chapitre 1. — La notion de cristal

Commentaire terminologique : Un cristal possède deux propriétés caractéristiques : la *rigidité*, et la faculté de *croître*, dans un voisinage approprié. Il y a des cristaux de toute espèce de substance: des cristaux de soude, de souffre, de modules, d'anneaux, de schémas relatifs etc.

1.0. — Soit S un préschéma, au dessus d'un autre R; dans le cas qui nous intéressera le plus, on aura $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Soit C la catégorie des R-préschémas T sous S, (i.e. munis d'un R-morphisme $S \longrightarrow T$,) tels que $S \longrightarrow T$ soit une immersion fermée définie par un idéal localement nilpotent. On a le foncteur "oubli" de C dans Sch, et la catégorie fibrée des Modules quasi-cohérents sur des préschémas variables induit donc une catégorie fibrée sur C, associant à tout T la catégorie des Modules quasi-cohérents sur T.

Définition (**1.1**). — *On appelle cristal de modules (sous-entendu: quasi-cohérents) sur S, relativement à R, une section cartésienne de la catégorie fibrée précédente au dessus de C. Plus généralement, pour toute catégorie fibrée $\mathscr{F}$ sur* $\mathrm{Sch}_{/R}$, *on définit la notion de "$\mathscr{F}$-cristal" sur S, ou "cristal en objets de $\mathscr{F}$", de la façon correspondante. Ceci donne un sens aux expressions: cristal en algèbres, en algèbres commutatives, en préschémas relatifs etc, sur S relativement à R. Quand $R =$* $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, *on parlera de "cristal absolu" sur S, de l'espèce considérée.*

1.2. — Les $\mathscr{F}$-cristaux sur S forment une catégorie, qui dépend fonctoriellement de $\mathscr{F}$. Ceci permet, en particulier, de définir sur la catégorie des cristaux

[6] https://agrothendieck.github.io/divers/LGT66scan.pdf

de modules sur S les opérations tensorielles habituelles: produit tensoriel de deux cristaux de modules etc, satisfaisant aux propriétés habituelles.

1.3. — Regardons de même ce qui se passe quand on fixe $\mathscr{F}$ et fait varier R, S. Tout d'abord, si $R \longrightarrow R' \longrightarrow R$, alors tout cristal sur S relativement à R en définit un relativement à R', par simple restriction. En particulier, un cristal absolu définit un cristal relatif, pour tout préschéma de base R de S.

Fixons maintenant R, S, et soit $S' \longrightarrow S$ un morphisme. On définit alors de façon naturelle un foncteur "image inverse" allant des cristaux de type $\mathscr{F}$ sur S vers les cristaux de type $\mathscr{F}$ sur S vers les cristaux de même type sur S' (tout relatif à R). Pour s'en assurer, il suffit de définit un foncteur $C' \longrightarrow C$ (ou C' est défini en termes de S' comme C en termes de S), compatible avec les foncteurs "oubli". Or si $S' \longrightarrow T'$ est un objet de C', il y a une construction évidente de somme amalgamée dans la catégorie des préschémas, qui donne un $T = S \amalg_{S'} T'$ et un morphisme $S \longrightarrow T$, qui fait de T un objet de C, ce qui définit le foncteur cherché.

On peut donc dire que pour un S variable sur R, les cristaux de type $\mathscr{F}$ sur S forment une *catégorie fibrée* sur $\mathrm{Sch}_{/R}$, grâce à la notion d'image inverse précédente.

Les deux variantes (en R, et en S) sont compatibles dans un sens évident, et peuvent être régardées comme provenant d'une variance en (R, S) directement.

1.4. — On a un foncteur naturel et évident qui va des cristaux de modules (disons) sur S (rel à R) dans des Modules quasi-cohérents sur S: c'est le foncteur "valeurs en S". On fera attention que ce foncteur n'est en général pas même fidèle (cf exemple **1.5.** plus bas). Il est donc un peu dangereux de vouloir considérer un cristal de modules sur S comme étant un Module quasi-coherent $\mathscr{M}$ sur S, *muni* d'une structure supplémentaire, sa "structure cristalline". Dans certains cas cependant (cf **1.8.**), le foncteur cristaux de modules $\rightsquigarrow$ Modules est fidèle et le point de vue précédent devient plus raisonnable.

1.5. Exemple 1: relations avec les vecteurs de Witt. — Supposons que S soit le spectre d'un corps *parfait* k, et $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Soit W l'anneau de Cohen de corps résiduel k: si $\operatorname{car} k > 0$, c'est l'anneau des vecteurs de Witt défini par k, si $\operatorname{car} k = 0$, c'est k lui-même; dans ce dernier cas, supposons k *algébrique* sur $\mathbf{Q}$. Alors il est bien connu que la catégorie C de **1.0.** est équivalente à celle des W-algèbres locales, annulées par une puissance de l'idéal maximal de W, à extension résiduelle triviale. Écrivant $W = \varprojlim W_n$ comme à l'accoutumé, dans le cas $p > 0$, on trouve que la donnée d'un cristal de modules (absolu) sur k équivaut à celle d'un système projectif (M_n) "p-adique" de modules M_n sur les W_n ; donc les cristaux de modules de présentation finie sur k forment une catégorie équivalent à celle des modules de type fini sur W. Si $p = 0$, alors la catégorie des cristaux de modules sur k est équivalente à celle des vectoriels sur $k = W$. Ces descriptions sont compatibles avec les notions de changement de base pour k variable. Elles se formulent évidemment pour toute autre espèce de cristaux, défini par une catégorie fibrée $\mathscr{F}$.

Dans le cas envisagé, le foncteur "valeur en S", sur la catégorie des cristaux de présentation finie sur k, s'identifie au foncteur $\otimes_W k$ sur la catégorie des modules de type fini sur W, foncteur qui (si $p > 0$) n'est pas fidèle.

1.6. Exemple 2. S **étale sur** R. — Si $S = R$, la catégorie C admet R lui-même comme objet final, donc le foncteur "valeur en R" est une équivalence de la catégorie des cristaux sur R, de type $\mathscr{F}$ donné, avec la catégorie $\mathscr{F}_R$. En particulier, un cristal de modules sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ est essentiellement la même chose qu'un $\mathbf{Z}$-module.

De façon un peu plus général, si S est étale sur R, alors S est un objet final de C, et les cristaux de modules (disons) sur S, relativement à R, s'identifient aux Modules quasi-cohérents sur S.

1.7. Exemple 3 : S **un sous-préschéma de** R. — Comme la notion de cristal relatif sur S ne change pas si on remplace R par un ouvert par lequel se factorise S, on peut supposer S fermé dans R, défini par un idéal quasi-cohérent J. Soit $S_n = V(J^{n+1})$ le n-ème voisinage infinitésimal de R dans S. Alors la famille des objets S_n de C est finale dans C, d'où on conclut facilement qu'un cristal de type $\mathscr{F}$ sur S s'identifie à une suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'objets des F_{S_n} qui se recollent. En particulier, si R est localement noethérien, un cristal de modules sur S relativement à R, de présentation finie, s'identifie à un Module cohérent sur le complété formel de R le long de S.

Cet exemple contient le cas de car $p > 0$ de l'exemple 1, si on note qu'à priori, grâce à Cohen, un cristal absolu sur k, c'est pareil qu'un cristal relativement à W.

On peut aussi donner un énoncé commun aux exemples 2 et 3, en partant du cas où on se donne un $S \longrightarrow R$ non *ramifié*, ce qui permet en effet de construire encore des “voisinages infinitésimaux” S_n.

1.8. Relation avec la notion de stratification. — Les données R, S, $\mathscr{F}$ étant comme d'habitude, considérons pour chaque entier $n \geq 0$ le voisinage infinitésimal Δ_n de la diagonale de $S \times_R S$, qui s'envoie dans S par les deux projections pr_1 et pr_2. Si E est un objet de $\mathscr{F}_S$, une *n-connexion* sur E (relativement à R) est la donnée d'un isomorphisme $pr_1^*(E) \simeq pr_2^*(E)$ qui induit l'identité sur la diagonale. Une ∞-*connexion* ou *pseudo-stratification* de E, est la donnée pour tout n d'une n-connexion, de telle façon que ces n-connexions se recollent. Enfin, une *stratification* sur E est la donnée d'une pseudo-stratification qui satisfait aux conditions formelles d'une donnée de descente, quand on fait intervenir les voisinages infinitésimaux de tous ordres de la diagonale de $S \times_R S \times_R S$. Ces notions donnent lieu à des sorties analogues à ceux de **1.2.** et **1.3**. Notons que lorsque S est “formellement non ramifié sur R” i.e. $\underline{\Omega}^1_{S/R} = 0$, alors toutes ces notions deviennent triviales: un objet E admet alors toujours exactement une connexion de tout ordre, donc une seule pseudo-stratification, et celle-ci est une stratification: donc la catégorie des objets de F_S *munis* d'une stratification relativement à R est alors équivalente, par le foncteur “valeur en S”, à la catégorie $\mathscr{F}_R$ elle même. (Dans tous les cas, le foncteur “valeur en S” est fidèle).

Ceci défini, on voit que pour tout cristal $\mathscr{M}$ sur S de type $\mathscr{F}$ (relativement à R), sa valeur $\mathscr{M}(S) = M$ est un objet de $\mathscr{F}_S$ muni d'une *stratification canonique* relativement à R, d'où un foncteur: cristaux relatifs de type $\mathscr{F} \rightsquigarrow$ objets de $\mathscr{F}$ munis d'une stratification. La remarque de **1.4.** montre d'ailleurs que ce foncteur n'est pas toujours fidèle. Il y a cependant des cas intéressants où ce foncteur est une *équivalence de catégories*: il en est en tous cas ainsi si $S \longrightarrow R$ est *“formellement lisse”*, par exemple si c'est un morphisme lisse, ou si S et R sont des spectres de corps k_0, k, avec k une extension *séparable* de k_0. (Quand d'ailleurs $S \longrightarrow R$ est même formellement étale, alors les deux catégories: celle des cristaux et celle des objets à stratification, deviennent équivalentes, par le foncteur “valeur en S”, à $\mathscr{F}_S$ lui-même, ce qui nous redonne l'exemple à la noix de **1.5** ou k est de car. nulle). Sauf erreur, on a encore une équivalence de catégories si $S \longrightarrow R$ est *plat et localement de présentation finie*, (du moins si R localement noétherien, et se bornant aux Modules cohérents) mais je n'ai pas écrit le démonstration.

1.9. Une digression sur la notion de stratification en caractéristique nulle. — Quand S est lisse sur R (en fait, il suffit que S soit différentiellement lisse sur R, i.e. le morphisme diagonal $S \longrightarrow S \times_R S$ une immersion régulière), et si R est de caractéristique nulle, alors une stratification d'un Module M sur S (relativement à R) est connue quand on connaît la 1-connexion qu'elle définit, et on peut se donner celle-ci arbitrairement, soumise à la seule condition que le "tenseur courbure", qui est une certaine section de $\underline{\Omega}^2_{S/R} \otimes \mathrm{End}(M)$, soit nul. (Cela peut aussi s'exprimer en disant qu'on fait opérer le faisceau $\underline{\mathrm{Der}}_{S/R}$ des dérivations relatives de S sur R, sur M, de façon à satisfaire aux relations habituelles, y compris celle de transformer crochet en crochet). J'ignore dans quelle mesure l'hypothèse de lissité est nécessaire pour cet énoncé, ou si (dans le cas lisse disons) on peut formuler un énoncé analogue pour toute catégorie fibrée $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{Sch}_{/R}$. Mais bien entendu, l'hypothèse de caractéristique nulle faite sur R est tout à fait essentielle. Si R est de caractéristique $p > 0$, l'énoncé qui remplace le précédent (et qui sauf erreur est dû à Cartier) est que dans ce cas, la donnée d'une "connexion sans torsion" sur M [7] équivaut à une "donnée de descente" sur M relativement à frobenius $S \longrightarrow S^{(p/R)}$. Il y a loin de là à une stratification !

1.10. La notion de p-cristal et ses variantes. — Nous supposons maintenant que S est de caractéristique $p > 0$, et $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ (ou $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)$, spectre des entiers p-adiques, cela reviendrait au même). Si $\mathscr{M}$ est un cristal de modules sur S, de présentation finie, alors en vertu de **1.5.**, pour tout $s \in S$, si s' est le spectre d'une clôture parfaite de $k(s)$, l'image inverse $\mathscr{M}(s')$ de $\mathscr{M}$ en s' peut être interprétée comme un module de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k(s'))$. Ainsi, la notion de cristal de modules sur S (au sens absolu) semble convenable pour formaliser la notion de *"famille algébrique" de modules sur les anneaux de vecteurs de Witt aux différents points parfaits au dessus de S*. Bien entendu, la notion de cristal est plus fine que ça encore, et doit donner, j'espère, la bonne notion de "famille" lorsque, disons, S est le spectre d'un corps de fonctions (donc pas nécessairement parfait). Je vais maintenant introduire une structure supplémentaire, qui devrait permettre de formuler, de même, la notion de "famille algébrique de modules de Dieudonné", paramétrée par S,

[7] "compatible avec puissances p-émes"

Considérons le morphisme “puissance p-ème”

$$S \xrightarrow{\mathrm{frob}_S} S,$$

il permet d’associer, à tout cristal (absolu) sur S, d’espèce quelconque, un cristal image inverse:

$$\mathscr{M}^{(p)} = \mathrm{frob}_S(\mathscr{M}).$$

On appelle *p-crsital* sur S un cristal $\mathscr{M}$ sur S, muni d’un morphisme de cristaux

$$\mathscr{M}^{(p)} \longrightarrow \mathscr{M}.$$

Évidemment, les p-cristaux sur S d’espèce $\mathscr{F}$ donnée forment encore une catégorie, dépendant fonctoriellement de $\mathscr{F}$ (pour les foncteurs *covariants* cartésiens de catégories fibrées), ce qui permet par exemple, pour les p-cristaux de modules sur S, d’introduire toutes les opérations tensorielles habituelles covariantes (produits tensoriels, puissances alternées et symétriques etc). Pour définir le *dual* d’un p-cristal de modules, il y a lieu d’introduire une notion duale de celle de p-cristal d’espèce $\mathscr{F}$, c’est celle de *p^{-1}-cristal* d’espèce $\mathscr{F}$: c’est un cristal d’espèce $\mathscr{F}$, avec un morphisme de cristaux en sens inverse:

$$V : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}^{(p)}.$$

Ainsi un contrafoncteur cartésien entre catégories fibrées sur Sch transforme p-cristaux en p^{-1}-cristaux, et inversement. Les p^{-1}-cristaux de modules se multiplient tensoriellement entre eux comme les p-cristaux de modules.

Pour obtenir une notion “autoduale”, il y a lieu d’introduire la notion de *bi-cristal de poids 1* sur S, qu’on pourrait aussi appeler un *cristal de Dieudonné* sur S, lorsque $\mathscr{F}$ est fibré en catégories additives: c’est un cristal muni à la fois d’une p-structure et d’une p^{-1}-structure, satisfaisant aux relations

$$FV = p\,\mathrm{Id}_M, \quad VF = \mathrm{Id}_{M^{(p)}}.$$

Cette notion semble tout à fait adéquate à l’étude des groupes formels, ou ce qui revient moralement au même, à l’étude de la cohomologie de De Rham en dimension 1. En dimension supérieure i, il y a lieu d'introduire la notion de *bicristal de poids i*, qui est un cristal muni de F et V satisfaisant aux relations

$$FV = p^i \operatorname{Id}_M, \quad VF = p^i \operatorname{Id}_{M^{(p)}}.$$

Par exemple, on définit le *bicristal de Tate de poids* $2i$, qui est défini par le cristal de modules unité (associant à tout T sous S le module $\underline{O}_T$ lui-même), et les morphismes de cristaux

$$F = p^i \operatorname{Id}_{T^i}, \quad V = p^i \operatorname{Id}_{T^i}.$$

Ainsi le bicristal de Tate de poids $2i$ est la puissance tensorielle i-ème du bicristal de Tate de poids 1. (**N.B.** les bicristaux de poids quelconques se multiplient tensoriellement, de façon que les poids s'ajoutent).

1.11. — Si on veut "rendre inversible" le bicristal de Tate T^1, on est obligé, qu'on le veuille ou non, de passer à une catégorie de fractions de la catégorie des cristaux de modules sur S, (qui entre parenthèses est une catégorie $\mathbf{Z}_p$-linéaire, (i.e. les Hom sont des $\mathbf{Z}_p$-modules...), tout comme les catégories de p-cristaux etc qu'on en déduit). Il revient donc au même de passer à une catégorie de fractions, en déclarant qu'on veut rendre notre catégorie abélienne $\mathbf{Q}$-linéaire, ou en déclarant qu'on la veut rendre $\mathbf{Q}$-linéaire : il faut faire le quotient par la sous-catégorie abélienne épaisse formée des objets de torsion, qui sont aussi des objets de p-torsion [8]. On trouve la catégorie des *"cristaux de modules à isogénie près"*, ou *isocristaux*, sur S. Utilisant cette nouvelle notion, on définit comme ci-dessus la notion de p-isocristal, comme étant la donnée d'un isocristal $\mathcal{M}$ muni d'un homomorphisme $F : \mathcal{M}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{M}$. La notion de bi-isocristal de poids i, qui serait calquée de celle de bicristal de poids i, n'est pas très raisonnable alors, car V doit être alors donné en termes de F comme $p^i F^{-1}$. Il y a lieu plutôt d'appeler *bi-isocristal* (sans précision de poids) un p-isocristal pour lequel F est un *isomorphisme*, et de ne pas choisir entre les différents $p^i F^{-1}$ possibles; il vaut mieux également ne pas parler ici de p^{-1}-isocristal, la notion intéressante étant celle de bi-isocristal, qui est manifestement *autoduale* quand on se restreint aux objets de type fini: le dual de $(\mathcal{M}, F)$ est $(\mathcal{M}, {}^t F^{-1})$, où $\mathcal{M}$ est le iso-cristal dual de M.

[8] et cela revient simplement à garder les mêmes objets, et à prendre comme nouveaux Hom les $Hom \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

On peut également, bien sûr, localiser par rapport à p en partant déjà de la catégorie des bi-isocristaux de poids i, on trouve les *bicristaux de poids i à isogénie près*, qui forment une catégorie abélienne $\mathrm{Isbicr}(S,i)$, et un foncteur exact "oubli de V"

$$\mathrm{Isbicr}(S,i) \longrightarrow \mathrm{Isbicr}(S),$$

à valeurs dans la catégorie $\mathrm{Isbicr}(S)$ des iso-bicristaux sur S. Ce foncteur est *pleinement fidèle*, de sorte que *les bi-isocristaux forment une généralisation commune des bicristaux de poids i à isogénie près*. Pour préciser ce point, désignant par $\mathrm{Bicr}(S,i)$ la catégorie des bicristaux de poids i sur S, il y a lieu d'introduire des foncteurs canoniques

$$\mathrm{Bicr}(S,i) \longrightarrow \mathrm{Bicr}(S,i+1) \longrightarrow ...,$$

donnés par $(\mathscr{M},F,V) \rightsquigarrow (\mathscr{M},F,pV)$. Quand on localise ces foncteurs par p, on trouve des foncteurs

$$\mathrm{Isbicr}(S,i) \longrightarrow \mathrm{Isbicr}(S,i+1) \longrightarrow ....$$

qui se trouvent être *pleinement fidèles* : on peut donc considérer que, pour i croissant, la notion de "bicristal de poids i, à isogéne près" constitue une généralisation de plus en plus large de celle de "cristal de Dieudonné". La notion de "bi-isocristal" est à ce titre une généralisation qui englobe toutes les précédentes, et qui de plus a la louable vertu d'être stable par produit tensoriel, *et* passage au dual. Cela semble donc une catégorie toute indiquée comme catégorie des valeurs pour un foncteur "cohomologie de De Rham" convenable, lorsqu'on se décide à travailler à isogénie près.

1.12. Exemple 1 : Cas où S est le spectre d'un corps parfait k. — Alors la donnée d'un cristal de modules de type fini sur k équivaut à la donnée d'un module de type fini M sur W, la formation du motif $\mathscr{M}^{(p)}$ correspond à la formation

$$M^{(p)} = M \otimes_W (W, f_W),$$

où f_W est l'endomorphisme de frobenius de W, et (W, f_W) est la W-algèbre définie par f_W. Par suite un structure de p-cristal sur M revient à la donnée d'un homomorphisme de W-modules $M^{(p)} \longrightarrow M$, ou si on préfère, à la donnée d'un homomorphisme f_W-semi-linéaire

$$F_M : M \longrightarrow M.$$

Comme l'application $x \longrightarrow x \otimes 1$ de M dans $M \otimes_W (W, f_W)$ est bijective, f_W étant un automorphisme de W, on peut considérer la bijection inverse, qui est f_W^{-1}-semi-linéaire. Par suite, la donnée d'une p^{-1}-structure sur M revient à la donnée d'un homomorphisme f_W^{-1}-linéaire:

$$V_M : M \longrightarrow M.$$

la donnée d'un couple (F, V) définit sur M une structure de bi-cristal de poids i si et seulement si on a

$$FV = VF = p^i Id_M.$$

En particulier, pour $i = 1$, on retrouve la notion de *module de Dieudonné*: la catégorie des cristaux de Dieudonné sur k est canoniquement équivalente à celle des modules de Dieudonné relativement à k.

La catégorie des isocristaux de type fini sur k est équivalente à la catégorie des vectoriels de dimension finie sur le corps des fractions K de W. Donc un biisocristal (de type fini) sur k s'identifie à un tel vectoriel, muni d'un f_K-endomorphisme bijectif.

Toutes ces descriptions sont compatibles avec les opérations tesorielles, et la formation d'images inverses pour k variable.

On peut se demander, avec la description précédente des bi-isocristaux, quels sont ceux qui sont les couples (E, F), E un vectoriel sur K et F un automorphisme semi-linéaire, tels que, si on pose $V = p^i F^{-1}$, pout out $x \in E$, l'ensemble de ses transformés par les différents monômes non commutatifs en F, V soit une partie *bornée* de E: c'est une pure tautologie. Pour qu'il existe un i ayant cette propriété, il faut et il suffit que pour tout $x \in E$, l'ensemble des $F^n x$ soir borné.Bien entendu, c'est là une propriété qui est stable par changement de F en pF (correspondant à la tensorisation par le bi-isocristal de Tate de poids 2), mais non par le changement de F en $p^{-1}F$ (correspondant à la tensorisations par l'inverse T^{-1} du bi-isocristal précédent). Comme on tient beaucoup à inverser Tate, on voit qu'il n'est pas naturel, en ffet, de poser une condition de croissance sur l'ensemble des itérés de F. De façon précise, appelant *effectis* les bi-isocristaux qui proviennent d'un objet d'un Isbicr(S, i), on voit que tout bi-isocristal est de la forme $T^{-i} \otimes_{\underline{N}}$, avec $\underline{N}$ effectif: on n'a pas ajouté plus de nouveaux objets qu'il n'était absolument nécessaire !

1.13. Exemple 2 : S lisse sur un corps parfait k. — Déterminons d'abord dans ce cas les cristaux sur S, sans plus. Wout d'abord, sans condition de lissité, on voit à l'aide de la propriété caractéristique de W que la catégorie C introduite dans 1.0. ne change pas, essentiellement, quand on remplace $R = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ par $R = \mathrm{Spec}(W)$. D'autre part, il résulte aussitôt des définitions que la donnée d'un cristal sur S, relativement à W, revient à la donnée d'un système cohérent de cristaux sur S, relatifs aux $W_n = W/p^{n+1}W$. (**NB** On n'a pas formulé avec la généralité qui convenait l'exemple 3 de 1.7.!) Théoriquement, on est donc ramené à déterminer, pour chaque n, la catégorie des cristaux sur S relatifs à W_n, et les foncteurs restrictions entre ces catégories. D'ailleurs, il est inoffensif de se localiser sur S, par exemple de supposer au besoin S affine. Utilisant maintenant la lissité de S, on peut donc supposer que pour tout n, S se remonte en un S_n lisse sur W_n, de façon que ces choix se recollent (il suffit pour ceci S lisse et affine). Or, il résulte encore facilement des définitions, utilisant seulement que $S = S_0 \longrightarrow S_n$ est une immersion fermée définie par un Ideal nilpotent, que le foncteur restriction des cristaux sur S_n (relativement à une base quelconque - ici on prendra W_n) vers les cristaux sur S_0, est une équivalence de catégories, donc un cristal sur S relativement à W_n s'identifie à un cristal sur S_n relativement à W_n. Comme $S_n b$ est lisse sur W_n, il résulte de ce qui a été dit dans 1.8. que les cristaux en question s'identifient aux objets (de l'espace $\mathscr{F}$ considérée) sur S_n, *munis d'une stratification relativement à* $R_n = \mathrm{Spec}(W_n)$. Les foncteurs restrictions sur les cristaux s'expriment alors par les foncteurs restrictions correspondants pour objets stratifiés. En résumé: *un cristal $\mathscr{M}$ sur S s'identifie à un système cohérent $(\mathscr{M}_n)$ d'objets à stratification sur les différents S_n sur $R_n =$* $\mathrm{Spec}(W_n)$. Pour relier ceci à des objets qui soient plus dans la nature d'objets "définis en caractéristique nulle", supposons d'abord que l'on puisse même relever S en un schéma X *propre sur* $R = \mathrm{Spec}(W)$, hypothèse évidemment bien restrictive. On voit alors, utilisant les théorèmes de comparaison EGA III 4.5 que *dans le cas de cristaux de modules cohérents sur S, la catégorie des dits est canoniquement équivalente à la catégorie des Modules cohérents M sur X, munis d'une stratification relativement à* $R = \mathrm{Spec}(W)$. (**N.B.** Il se trouve donc, à posteriori, que cette dernière catégorie est essentiellement indépendante du relèvement choisi X de S). Considérant la fibre générique X_K de X sur R, qui est un schéma propre et lisse sur un corps de caractéristique nulle, on trouve donc un foncteur remarquable "restriction" ou "localisation", allant de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S, dans la catégorie des Modules cohérents sur X_K, stratifiés relativement à X_K. Or (oubli de **1.8.**) on voit facilement qu'un Module cohérent stratifié sur un préschéma localement de type fini sur un corps est nécessairement localement libre. De plus comme ici K est de caractéristique nulle, et X_K lisse dessus, on a signale dans **1.8.** que la notion de stratification s'explicite très simplement comme celle de "connexion intégrable". [Enfin, lorsque S donc X_K est géométriquement connexe, et que K peut se plonger dans le corps des complexes $\mathscr{C}$, alors la notion de module cohérent à action intégrable sur X_K s'interprète en termes de représentations linéaires (complexes) du groupe fondamental transcendant de $X_{\mathscr{C}}^{an}$, de façon bien connu. Si par exemple le groupe fondamental transcendant est le groupe unité, alors on conclût par descente que tout Module cohérent stratifié sur X_K est trivial, ce qui en termes de S s'énonce en disant que tout cristal de modules cohérents sur S est isogène à un cristal "croissant", i.e. à un cristal qui est l'image inverse d'un cristal sur k, (lui-même défini par un module de type fini sur W). De ceci et de la rigidité de la notion de cristal on déduit facilement, par exemple, que tout p-cristal cohérent sur S ou tout bi-cristal de poids i donné (par exemple tout cristal de Dieudonné) est isogène à un fournit de même espèce *trivial*. On voit donc là un principale d'approche transcendante pour l'étude des familles de groupes formels (par exemple) en caractéristique p...] Quand à la notion d'isocristal (de modules cohérents) sur S, on constate aussitôt que le foncteur précédent induit un foncteur *pleinement fidèle* de la catégorie de ces derniers, dans la catégorie des modules cohérents stratifiés sur X_K. Il s'impose évidemment d'en déterminer l'image essentielle, et pour commencer d'examiner si par hasard ce foncteur ne serait pas une équivalence de catégories. Cela me [9] semble un peu *trop optimiste*, mais je ne suis sûr de rien, faute d'avoir regardé. Tout ce qu'on peut dire à priori, c'est que la condition cherchée sur un Module stratifié doit être de nature locale en les points de X qui sont maximaux dans S.

Quand on ne suppose pas S propre et remonté globalement, mais qu'on suppose seulement qu'on a remonté S formellement, en un *schéma formel* X sur R,

[9]effectivement []

alors il est vrai (en fait, de façon essentiellement triviale) que *la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S est équivalente à la catégorie des Modules cohérents sur le schéma formel X, munis d'une stratification relativement à* $\mathrm{Spec}(W) = R$ (quand on transcrit de façon évidente toutes les définitions envisagées dans 1.8. dans le cadre formel). Si on veut encore, comme il est légitime, trouver un analogue la restriction à X_K envisagées plus haut, il faut définir X_K comme *l'espace rigide-analytique sur K défini par le schéma formel X*, et considérer sur X_K des Modules cohérents munis de *stratifications au sens rigide-analytique*, ou ce qui revient au même, de connexions intégrables en ce sens. De tels Modules sont encore nécessairement localement libres. On trouve ainsi un foncteur des cristaux de Modules cohérents sur S dans les Modules cohérents stratifiés sur X_K, induisant un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux cohérents sur S, dans la catégorie des Modules cohérents stratifiés sur X_K. Comme tout à l'heure (et même plus, si on peut dire, car c'est vraiment ici la situation "naturelle"), il s'impose de regarder quelle est l'image essentielle. On peut également se demander si les Modules cohérents stratifiés sur un espace rigide-analytique n'admettraient pas une description simple, en termes d'un groupe plus ou moins discret jouant le rôle du groupe fondamental dans la théorie transcendante sur le corps de complexes. La description donnée des cristaux sur S, toute triviale qu'elle soit, a déjà des conséquences intéressantes pour la structure de la catégorie des cristaux de modules cohérents sur S: cette catégorie est noethérienne (si S est noethérien i.e. de type fini sur k), tout objet contient donc un plus grand sous-objet de torsion, de plus objets sans torsion correspondent dans la description ci-dessus aux Modules stratifiés sans torsion sur X, lesquels sont alors automatiquement localement libres. Il est bien probable que des résultats analogues doivent être vrais sans hypothèse du genre lissité sur S.

1.14. — Il faut encore expliciter, dans la description générale précédente, le foncteur $[\,]$, pour pouvoir décrire de façon générale, si en plus de la donnée de S sur k, on a un S' lisse sur k' parfait, et des automorphismes $S' \longrightarrow S$ et $\mathrm{Spec}(k') \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ donnant lieu à un carré commutatif, et si enfin on peut relever S' formellement en X', et $S' \longrightarrow S$ en $X' \longrightarrow X$, donnant un carré commutatif avec $\mathrm{Spec}(W') \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$, alors la notion d'image inverse de cristaux de modules cohérents, de S à S', s'explicite en termes d'image inverse de Modules cohérents stratifiés, de X à X'. Lorsque $k = k'$, $S = S'$, et que les morphismes envisagés sont les puissances p-èmes, on est donc conduit à chercher à relever ce morphisme à X de façon compatible avec le morphisme $\mathrm{Spec}(W) \longrightarrow \mathrm{Spec}(W)$ déduit de f_W, ou ce qui revient au même, de relever le morphisme canonique $S \longrightarrow S^{(p/k)}$ en un morphisme de R-schémas formels $X \longrightarrow X \times_R (R, f_R)$. C'est en tous cas toujours possible si S est affine, cas auquel on peut se ramener. Ayant donc ainsi un morphisme

$$f_X : X \longrightarrow X,$$

compatible avec f_R sur $R = \mathrm{Spec}(W)$, et induisant f_S sur S, le foncteur [] s'explicite comme l'image inverse ordinaire de Modules stratifiés sur X relativement à R, resp. (dans le cas de isocristaux) de Modules stratifiés sur l'espace rigide-analytique X_K, pour le "morphisme" $X_K \longrightarrow X_K$ d'espaces rigide-analytiques (relatif à f_K sur le corps de base !) induit par f_K. Bien que f_K et par suite f_{X_K} loin d'être unique, le foncteur envisagé qu'il définit ne dépend pas, essentiellement, des choix faits.

1.15. Bicristaux et biisocristaux sur une base quelconque. — Ne supposons plus nécessairement S de caractéristique déterminé p. Pour chaque nombre premier p, soit S_p la fibre $V(p l_{\underline{O}_S})$ de S sur le point $p\underline{Z}$ de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Un bicristal de poids i sur S est par définition la donnée d'un cristal de Modules $\mathcal{M}$ sur S, et pour chaque p d'une structure de bi-cristal de poids i sur la restriction $\mathcal{M}_p$ de $\mathcal{M}$ à S_p, définie par la donnée de F_p, V_p. On définit de même la notion de bi-isocristal sur S, étant entendu qu'un isocristal est un objet de la catégorie des isocristaux sur S (comme de juste), définie à partir de la catégorie des cristaux de modules en "localisant" par rapport à des entiers $n > 0$ arbitraires, i.e. en tensorisant les Hom sur $\mathscr{Z}$ par $\mathscr{Q}$. - Lorsque S est de cararactéristique nulle, le supplément de structure impliqué par "bi" est évidemment vide, tandis que si S est de type fini sur $\mathscr{Z}$ et domine $\mathrm{Spec}(\mathscr{Z})$, alors la notion envisagée est d'une essentiellement arithmétique, les différents F_p jouant le rôle d'homomorphismes de frobenius, comme de bien entendu; dans le cas du poids 1, en particulier, on peut considérer que le cristal avec sa bi-structure supplémentaire permet de relier entre eux les groupes formels en les diverses caractéristiques auxquels il donne naissance...

1.16. Un retour en arrière. — La définition 1.1. et le sortie 1.3. sont un petit peu canulés. Au lieu de prendre dans 1.0. pour C la catégorie des R-flèches

$S \longrightarrow T$ qui..., il faut prendre la catégorie des R-flèches $U \longrightarrow T$ qui..., où U est un ouvert induit non précisé de S. De plus, la définition n'est guère raisonnable alors que si la catégorie fibrée envisagée $\mathscr{F}$ est un "champ" pour la topologie de Zariski sur $\mathrm{Sch}_{/R}$, i.e. si on peut y recoller flèches et objets. Ceci est nécessaire en tous cas pour pouvoir dans 1.3. définir la notion d'image inverse, la définition que j'y ai donnée n'étant raisonnable que si S, S' sont affines. Dans le cas général, il faut se localiser sur S et S' pour se ramener à cette situation. Autrement on bute sur des canulars idiots de nature globale, comme le fait que sans restrictions sur $S' \longrightarrow S$, la construction envisagée de somme amalgamée fait sortir de la catégorie des préschémas... Il est probable qu'il y aura bien d'autres canulars de détail dans ces notes, mais, je pense, sans conséquence !

Il est évidemment tentant de vouloir interpréter les cristaux de modules comme faisceaux de modules sur un certain site. C'est possible, en prenant le *"site cristallogène de S sur R"*, qui est précisément le site dont la catégorie sous-jacent C est celle des R-morphismes $U \longrightarrow T$ (U ouvert de S, $U \longrightarrow T$ immersion fermée surjective définie par Ideal nilpotent sur T), la topologie est celle de Zariski: on prend comme familles couvrantes "de définition" de $(U \longrightarrow T)$ les familles définies pr des recouvrements ouverts (T_i) de T, chaque T_i muni de la structure induite, et définissant $(U_i \longrightarrow T_i)$ par $U_i = U \cap T_i$. Un faisceau d'ensembles sur ce site s'identifie à un système de faisceaux d'ensembles $F_{U \longrightarrow T}$ sur les objets buts des objets de C, avec, pour tout flèche $(U \longrightarrow T) \longrightarrow (U' \longrightarrow T')$ de C, un homomorphisme de l'image inverse de $F_{U' \longrightarrow T'}$ [] T, dans $F_{U \longrightarrow T}$ (homomorphisme qui n'est pas nécessairement un isomorphisme !) et qui sont un isomorphisme si $T \longrightarrow T'$ est une immersion ouverte. En particulier, associant à tout $(U \longrightarrow T)$ le faisceau $\mathscr{O}_T$ sur T, on trouve un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_C$ sur C. Ceci posé, les cristaux de modules (quasi-cohérents) sur S s'identifient aux Modules quasi-cohérents (i.e. localement conoyau d'un homomorphisme de Modules libres) sur $\mathscr{O}_C$; les cristaux "de près finie" i.e. les cristaux de Modules de présentation finie, correspondant exactement aux Modules de présentation finie sur $\mathscr{O}_C$.

Quand on a un R-morphisme $S' \longrightarrow S$, je ne vois pas de morphisme naturel correspondant entre les *sites* cristallogènes correspondants à S, S'. Ce n'est pas bien gênant, car introduisant les *topos cristallogènes* $\mathrm{Topcr}_{S/R}$ et $\mathrm{Topcr}_{S'/R}$ définis par les sites en question, on définit par la méthode esquissée dans 1.3. un morphisme

$$\mathrm{Topcr}_{S'/R} \longrightarrow \mathrm{Topcr}_{S/R},$$

correspondant à la notion naturelle de “image inverse de faisceaux” au sens inverse (qui, j’avoue devrait être définie avec le plus grand soin).

1.17. — On est donc dans une situation où on peut faire marcher la machine cohomologique. Étant loin de mes bases, je n’ai pas tenté sérieusement de tirer au clair si les images directes supérieures qu’on définit ainsi, et en particulier les groupes de cohomologie du site cristallogéne, donnent ce qu’on voudrait.

Le test-clef est le suivant: *si R est le spectre d’un corps, et si S est lisse sur R, et propre sur R dans le cas de la caractéristique $p > 0$, on voudrait trouver, comme cohomologie à coéfficients dans $\underline{O}_C$ lui-même, la cohomologie de De Rham de S relativement à R*. Plus généralement, sans condition sur R, si $f : S' \longrightarrow S$ est propre et lisse, on voudrait trouver comme “valeur en S'” $\mathrm{R}^1 f_{cris*}(\underline{O_{C'}})$ (cf 1.4.) le faisceau de cohomologie de De Rham $\mathrm{R}^i f_*(\Omega^*_{S'/S})$, et on voudrait [10] que la connexion canonique à la Gauss-Manin sur ce dernier soit celle associée à la stratification canonique provenant de la structure cristalline (cf 1.8.).

L’existence d’une connexion de Gauss-Manin en cohomologie de De Rham (que j’ai vérifié pour n’importe quel morphisme lisse), et le tapis de Washnitzer-Monsky, sont en tous cas des indications assez fortes pour conduire à penser qu’il doivent exister une théorie cohomologique, en termes de cristaux, donnant de telles valeurs pour l’argument $\underline{O}_C$. Au cas où la cohomologie du site cristallogène ne donnerait pas les résultats qu’il faut, on pourrait essayer (au lieu de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie de *tous* les Modules sur le site annelé cristallogène) de prendre des foncteurs dérivés dans la catégorie des seuls Modules quasi-cohérents sur le site cristallogène, i.e. dans la catégorie des cristaux de modules.

Chapitre 2. — La cohomologie de De Rham est un cristal

2.1. — L’affirmation du titre n’est pour l’instant qu’une hypothèse ou un voeux pieux mais je suis convaincu qu’elle est essentiellement correcte. Comme je l’ai dit dans 1.17., il y a pour le moment deux indications dans cette directions

[10]

a) Le travail de Washnitzer-Monsky. Deux grosses imperfections dans leur tapis: 1° ils n'obtiennent que des invariants cohomologiques *locaux* sur leur variété lisse en caractéristique $p > 0$, via leurs relèvements; pour avoir un invariante global, ils doivent se limiter à la dimension 1. On peut penser que cela tient à leur manque de familiarité avec les machines cohomologiques. 2° leurs invariants sont des (faisceaux de) vectoriels sur le corps des fractions de W, et non sur W, i.e. ils n'obtiennent que des invariants "modulo isogénie". Il semble bien, en effet, que leur démonstration d'invariance fait intervenir de façon essentielle des dénominateurs. Il n'est pas exclu, d'après cette indication, que dans le titre du Chapitre il faille remplacer "cristal" par "isocristal" (et "est" par "définit"). Ce serait bien dommage, mais n'exclurait pas pour autant l'existence d'une bonne théorie cohomologique pour les cristaux, qui pour un morphisme propre et lisse et le "cristal unité" coïnciderait *modulo isogénie* avec ce que donne De Rham. Le est décisif reste celui indiqué dans 1.17, savoir: donnent-il un résultat positif seulement en caractéristique zéro, ou en toute caractéristique ?

b) L'existence des connexions de Gauss-Manin. J'ai vérifié pour tout morphisme lisse $f : X \longrightarrow S$ l'existence d'une connexion canonique (absolue) sur les $\mathrm{R}^i f$ au sens de De Rham relatif, ou plus correctement, sur le complexe $\mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, considéré comme objet de la catégorie dérivée $D(\mathscr{O}_S)$. A vrai dire, je n'ai pas vérifié pour cette connexion une condition de "nullité de la [ ]"; c'est vérifié en tous cas (par voie transcendante !) si S est lisse, sur R r´duit de caractéristique nulle. [Il faut noter d'ailleurs qu'il n'y a pas d'espoir de montrer que la connexion en question provient toujours d'une stratification: c'est *faux* en caractéristique $p > 0$; la raison étant que la cohomologie de De Rham pour une variété algébrique non complète (par exemple affine) n'est plus du tout raisonnable, étant beaucoup trop grosse. Pour pouvoir espérer une stratification sur $\mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, sans restriction de caractéristique, il faut donc supposer f *propre*.]

c) La nécessité d'une interprétation cristallographique de la cohomologie de De Rham est également suggérée par le problème que j'avais signalé dans mon papier bleu sur De Rham: si R est le spectre du corps des complexes, S lisse sur R et X

lisse et propre sur S, alors la théorie transcendante de la cohomologie fournit une suite spectrale

2.2. — Je vais préciser l'affirmation du titre, en me plaçant dans l'éventualité optimiste bien sûr où on n'aurait pas besoin de s'isogéniser. Comme les cristaux de modules sur un préschéma S forment une catégorie abélienne, on peut prendre la catégorie dérivée; ces objets seront appelés simplement "complexes de cristaux". Un tel animal induit sur S, plus généralement sur tout objet-but T d'un objet $(U \longrightarrow T)$ du site cristallogène C de S, un complexe de Modules ordinaire (envisagé comme objet de la catégorie dérivée des faisceaux de Modules sur S, resp. T). Un complexe de cristaux est dit pseudo-cohérent (resp. parfait, resp. ...) si pour tout objet $(U \longrightarrow T)$ de C, le complexe induit sur T est pseudo-cohérent (resp. ...). Ceci posé, voilà la théorie qu'on voudrait: A tout morphisme lisse et propre $f : X \longrightarrow S$, serait associé un complexe de cristaux (absolu) $\mathrm{DR}(f)$ sur S, appelé cohomologie de De Rham cristalline de f. Ce complexe doit être parfait, sa formation doit être compatible avec tout changement de base sur S (l'image inverse des complexes des cristaux étant entendu, bien entendu, au sens de catégories dérivées...), et bien sûr $\mathrm{DR}(f)$ dépend fonctoriellement (de faoņ contravariant) de X sur S. Tôt ou tard, il faudra expliciter aussi une formule de Künneth $\mathrm{DR}(f \times_S g) \simeq \mathrm{DR}(f)[]\mathrm{DR}(g)$, et une formulé de dualité, qui pour f partout de dimension relative d s'exprime comme un accouplement, définissant une autodualité, $\mathrm{DR}(f) \times \mathrm{DR}(f) \longrightarrow T^d[2d]$, où T^d est le cristal de Tate de poids $2d$, et où $[2d]$ indique qu'on translate les degrés de $2d$ (attention au facteur 2 !). Enfin, on veut comme de juste un isomorphisme $\mathrm{DR}(f)(S) \simeq \mathrm{R}f_*(\Omega^\bullet_{X/S})$, fonctoriel en X, compatible avec les changements de base, avec Künneth et la dualité (déjà connus pour la cohomologie de De Rham ordinaire).

Par prudence, je me suis abstenu de dire quoi que ce soit sur le cas f non propre, dont il faudrait parler tout au moins si on voulait faire sérieusement le lien avec Washnitzer-Monsky.

2.3. La cohomologie de De Rham comme biisocristal — A supposer qu'on ait une théorie du type envisagé dans 2.2., on trouve pour chaque entier p un homomorphisme de frobenius

$$F_p : \mathrm{DR}(f)_p^{(p)} \longrightarrow \mathrm{DR}(f)_p,$$

où l'indice p au complexe de cristaux $\mathrm{DR}(f)$ désigne la restriction à $S_p = V(p.1)$ (au sens des catégories dérivées), qui d'après les conditions de 2.2. n'est autre que $\mathrm{DR}(f_p)$, $f_p : X_p \longrightarrow S_p$ étant induit par f. Utilisant toujours la même condition de compatibilité avec le changement de base, on constate que $\mathrm{DR}(f_p)^{((p))}$ n'est autre que $\mathrm{DR}(f_p^{(p)})$, où $f_p^{(p)} : X_p^{(p/S_p)} \longrightarrow S_p$ est le morphisme structural de frobenius relatif de X_p sur S_p. Or on a le morphisme de frobenius $X_p^{(p/S)} \longrightarrow X$, qui est un S-morphisme, qui par fonctorialité de DR nous donne $\mathrm{DR}(f_p)^{((p))} \longrightarrow \mathrm{DR}(f)_p$ comme on voulait. Il faut prouver que cet homomorphisme est en fait une isogénie, donc que l'isocristal défini par $\mathrm{DR}(f)$ devient, à l'aide des F_p, un bi-isocristal. Mais utilisant la relation de dualité écrite dans 2.2. (à vrai dire, l'écriture T^p pour le cristal unité ne prend son sens que lorsque on le regarde comme muni de sa structure de bi-cristal naturelle, qui n'intervient qu'ici), on peut transposer F en un V, tel que $FV = VF = p^{2d}$, ce qui prouve notre assertion.

D'ailleurs, lorsque l'on passe du cristal de De Rham $\mathrm{DR}(f)$ à l'isocristal correspondant, donc des objets de cohomologie $\mathrm{DR}^i(f)$ aux isocristaux correspondants, il sera vrai (tout comme pour les $\mathrm{R}^i f_*$ de De Rham en caractéristique nulle) que leur formation commute à tout changement debase, de sorte que chacun des isocristaux $\mathrm{DR}^i(f)$ devient à son propre titre un bi-isocristal. Au moment de rédiger 1.10. il m'avait semblé que, sans mettre du iso dans le coup, $\mathrm{DR}^i(f)$ devrait être un bi-cristal de poids i, mais je m'étais canulé, il faudrait pour cela une polarisation de X de S qui définisse un isomorphisme (pas seulement une isogénie) de $\mathrm{DR}^i(f)$ avec $\mathrm{DR}^{2d-i} \otimes T^{-(d-i)}$, ce qui n'existe évidemment que très exceptionnellement; une fois qu'on l'a, on définit V dans DR^i en transposant F dans DR^{2d-i}.

2.4. Cas d'un schéma abélien — Il semble que ce ne soit guère que dans ce cas-là où il soit bien raisonnable de parler de bi-cristaux et non seulement de bi-iso-cristaux. De façon précise, $\mathrm{DR}^1(f)$ a dans ce cas une structure de bicristal, défini par les F_p précédents, et des V_p qui se définissent encore, par fonctorialité de DR, à l'aide de l'homomorphisme "Verschiebung" $A_p^{(p/S_p)} \longrightarrow A_p$ (défini avec la généralité qui convient dans les notes de Gabriel dans SGAD). Comme $\mathrm{DR}^1(A/S)$ est un foncteur multiplicatif en A, grâce à Kunneth postulé dans 2.2., et que l'on a $FV = VF = pId$ sur les schémas abéliens en car p, on en conclut les mêmes relations dans DR^1. Cela montre donc que $\mathrm{DR}^1(A)$ est un bicristal de poids 1, i.e. un *cristal de Dieudonné*. Lorsque S est le spectre d'un corps parfait de caractéristique $p[]0$, un tel cristal s'identifie simplement, d'après 1.12, à un module de Dieudonné sur $W = W(k)$. Bien sûr, *on doit trouver que ce module n'est autre que le module de Dieudonné du groupe formel* (ou plutôt, du groupe p-divisible) *défini par la variété abélienne* A. Débarrasser de l'hyperstructure axiomatico-conjectural de 2.2., on peut exprimer ainsi la construction obtenue du module de Dieudonné:

1° Soit A un schéma abélien sur un schéma affine S. On sait que pour tout morphisme $S \longrightarrow T$ d'immersion fermée surjective, défini par Idéal nilpotent sur T, A se prolonge en un schéma abélien B sur T. On peut regarder la cohomologie de De Rham ordinaire $\mathrm{R}^1 g_*(\Omega^\bullet_{B/T})$, où $g : B \longrightarrow T$ est le morphisme structural, et on sait que c'est un Module localement libre de rang $2g$

2° Supposons que S soit le spectre d'un corps parfait k de car $p > 0$, alors le cristal précédent s'identifie à un module libre de rang $2g$ sur $W = W(k)$. On y introduit les structures F et V, en utilisant comme ci-dessus les homomorphismes $F : A \longrightarrow A^{(p)}$ et $V : A^{(p)} \longrightarrow A$. On trouve ainsi un module de Dieudonné M, et:*Deuxième affirmation :* C'est bien celui défini par Dieudonné. En d'autres termes: si A est n'importe quel anneau local artinien de corps résiduel k, et B un prolongement de A en un schéma abélien sur Λ, alors la cohomologie de De Rham $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(B) = \mathrm{H}^1(B, \Omega^\bullet_{B/\Lambda})$ est canoniquement et fonctoriellement isomorphe à $M \otimes_W \Lambda$, où M est le module de Dieudonné classique de A, et où on tient compte du théorème de Cohen qui munit Λ d'une structure canonique de W-algèbre (N.B. la fonctorialité de l'isomorphisme garantira automatiquement qu'il est compatible avec F et V).

2.5. — Je n'ai pas vérifié, à vrai dire, les deux affirmations, mais n'ai pas le moindre doute qu'elles sont correctes telles quelles. Cette façon de voir le module de Dieudonné permet de plus d'expliciter de façon remarquable les variations infinitésimales de structure de la variété abélienne A donnée, en caractéristique $p > 0$, en termes du module de Dieudonné: les prolongement de A en un schéma abélien B sur Λ doivent correspondre exactement aux modules quotients libres de rang g de $M \otimes_W \Lambda$ qui redonnent, modulo p, le module quotient de rang g canonique de $M \otimes_W k = \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A)$, (correspondant à la filtration canonique de cette cohomologie). Plus généralement et plus précisément :

3° Considérons, pour tout schéma abélien A sur une base S, sur la cohomologie de De Rham $\mathrm{R}^1 f_*(\Omega^\bullet_{A/S}) = \mathrm{H}^1(f)$, la filtration canonique

$$0 \leftarrow \mathrm{R}^1 f_*(\mathcal{O}_A) \leftarrow \mathrm{H}^1(f) \leftarrow \mathrm{R}^0 f_*(\Omega^1_{A/S}) \leftarrow 0.$$

Donc pour tout B sur T comme dans 1°, on a sur $\mathcal{M}(T) = \mathrm{DR}^1(A/S)(T) = \mathrm{H}^1(g)$ une filtration naturelle, ne dépendant que de la classe à isomorphisme près connue de $\mathcal{M}(S) = \mathrm{H}^1(f)$ provenant de A. Ceci dit, *troisième affirmation : on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre classes de prolongements de A à T, et prolongements de la filtration donnée de $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_S$ en une filtration de $\mathcal{M}(T)$.* Plus précisément encore, le foncteur $B[\,](A,\varphi)$, de la catégorie des schémas abéliens B sur T, dans la catégorie des schémas abéliens A sur S, munis d'une filtration φ de $\mathrm{DR}^1(A/S)(T)$ prolongement celle de $\mathrm{DR}^1(A/A)(S)$ (N.B. il ne s'agit que de filtrations à quotients localement libres, bien sûr) est une équivalence de catégories.

Ce énoncé est évidemment fort suggestif aussi pour des généralisations en cohomologie de De Rham de dimension supérieure, pour un morphisme lisse et projectif quelconque, tenant compte de la filtration canonique de celle ci. On voit bien en tous cas que ce dernier élément de structure n'est *pas* de nature cristalline, i.e. donnée par une filtration du cristal de De Rham postulé dans 2.2., mais est au contraire dans la nature d'un élément de structure "continu", dont la variation doit refléter fidèlement les variations de structure de motif donnant naissance au cristal envisagé. Pour arriver à préciser ce dernier point, il faudrait des fondements un peu plus fermes de la théorie des motifs, comme de celle (certainement beaucoup plus élémentaire) des cristaux et de la cohomologie de De Rham. Yne autre généralisation, (suggérée par comparaison du 3° avec Serre-Tate, disant que si S est de caractéristique $p > 0$, alors étendre A à T, c'est pareil qu'étendre le groupe p-divisible correspondant), concerne la théorie des groupes formels, dont il sera question au Chapitre 3. Pour préparer le terrain, je vais présenter d'une façon un peu différente le cristal $\mathrm{DR}^1(A/S)$ associé à un schéma abélien, en utilisant explicitement la structure de groupe du dit.

2.6. — De façon générale, paraphrasant sur une base quelconque une vieille construction de Serre (c'est de lui que je l'ai apprise, du moins), on trouve que pour tout schéma abélien A sur une base S, il y a une extension naturelle de A par le fibré vectoriel $V(\mathrm{R}^1 f_*(\mathscr{O}_A)) = V(\sqcup_A)$, (où A est le schéma abélien dual de A). Attention à la notation, le fibré vectoriel $V(\mathscr{E})$ est contravariant en $\mathscr{E}$, ces sections sont les homomorphismes $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{O}_S$! L'extension en question est universelle parmi les extensions de A par des fibrés vectoriels, est fonctorielle en A, et compatible avec changement de base. Appelons la $G(A)$. Ainsi, le faisceau de Lie de $G(A)$ est une extension

$$[]$$

qui est duale e la suite exacte envisagée dans 2.5., dont nous avons donc ici une construction indépendante en termes d'extensions de A par des groupes vectoriels. On peut en profiter pour préciser en affirmant que, pour un prolongement B de A, de S à T, le schéma en groupes $G(B/S)$ est déterminé, à isomorphisme canonique (et même unique) près, par le seule donnée de A et de $S \longrightarrow T$, indépendamment du choix particulier du prolongement B. En d'autres termes, on trouve un *cristal en schémas de groupes lisses* $\mathscr{G}(A/S)$, et pour chaque prolongement infinitésimal B de A à un T, un isomorphisme canonique $\mathscr{G}(A/S)(T) \simeq G(B/T)$; tout ça bien sûr fonctoriel en A et compatible avec changements de base. D'autre part, on peut préciser alors 3° en indiquant quel est le foncteur quasi-inverse de celui envisagé dans cet énoncé: l'extension de la filtration de $\mathrm{DR}^1(A/S)(S)$ en une filtration du faisceau de Lie $\mathrm{DR}^1(A/S)(T)[]$ de $\mathscr{G}(A/S)(T)$ revient à étendre le sous-groupe vectoriel canonique de $\mathscr{G}(A/S)(S)$ en un sous-groupe vectoriel de $\mathscr{G}(A/S)(T)$, et l'on trouve B en passant simplement au quotient.

N.B. Je suis tombé sur la connexion canonique de $G(A/S)$ en essayant de simplifier la construction de Manin de l'application $A(S) \longrightarrow \Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ associée à une équation de Picard-Fuchs sur S, relativement à A. Pour ceci, il suffit de noter que localement sur S toute section de A sur S se remonte en une section de $G = G(A/S)$ sur S ! La donnée de la connexion de G permet alors de prendre la dérivée de cette section, qui est un élément de $\Gamma(S, \sqcup_G \otimes \Omega^1_S)$, déterminé modulo une section de l'image du faisceau [], correspondant à l'indétermination du relèvement d'une section de A en une section de G. Les équations de Picard-Fuchs sont définies tout juste pour arriver, d'une telle section de [] (qui en fait est un *cocyle*, compte tenu de la connexion canonique de $\sqcup_G$ provenant de G), avec l'indétermination qu'on vient de préciser, à tirer une section de $\mathcal{O}_S$... (Du moins en caractéristique nulle, cas dans lequel se place Manin de toutes façons).

Voici les résultats positifs que j'ai vérifiés dans la direction des assertions précédentes :

a) Si S est de caractéristique nulle, les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par l'introduction du schéma en groupes $G(A)$) sont vraies.

b) Sans restriction sur S, il est vrai que $G(A)$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux[11], donc si pour deux relèvements infinitésimaux données B, B' de A, $G(B)$ et $G(B')$ sont isomorphes, l'isomorphisme entre eux est unique. Donc si l'hypothèse précédente est vérifiée quels que soient les relèvements infinitésimaux de A au dessus d'un ouvert U de la base S, alors les $G(B)$ définissent effectivement un cristal en groupes sur S, à fortiori les $H(B)$ définissent un cristal de modules, et $G(A)$ et $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A/S)$ sont munis de stratifications absolues canoniques, fonctorielle d'ailleurs en A satisfaisant aux conditions envisagées, et compatible avec tout changement de base qui invarie notre hypothèse sur A.

c) Les assertions 1° et 3° (sous la forme précisée par $G(A)$) sont vraies por les relèvements infinitésimaux *d'ordre* 1, ou tout au moins lorsque T est de la forme $D(\mathcal{J})$, schémas des nombres duaux d´fini par un $\mathcal{J}$ quasi-cohérent.[12]

2.7. — Arrivé à ce point de mes brillantes conjectures, je m'aperçois avec consternation qu'elles sont fausses telles quelles, malgré les indications concordantes militant en leur faveur. De façon précise, soit k un corps de caractéristique $p > 0$. Je dis qu'il *n'est pas possible, pour tout k-schéma S de type fini, de dimension $leq 1$* [13]*, avec S_{rg} régulier, et tout schéma elliptique A sur S, de mettre sur $\mathrm{H}^1_{DR}(A/S)$ une stratification relativement à k, qui soit fonctorielle en A et compatible avec les changements de base.* L'ennui, comme d'habitude, provient des courbes elliptiques de

[11] faux

[12] à vérifier, c'est peut-être faux

[13] ou même ≤ 0 !

Hasse nul. Appliquant en effet les deux fonctorialités postulées, on trouve que l'homomorphisme "frobenius" qui va de $M^{(p)}$ dans M ($M = \mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A/S)$) serait compatible avec la stratification. Si alors $S \in S$ est un point correspondant à un A_S de Hasse nul, i.e. tel que frobenius sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}(A_S)$ soit de carré nul, on en conclurait aisément, grimpant sur les voisinages infinitésimaux de S, que la même propriété serait vraie aux points voisins de S, ce qui est évidement faux p.ex. pour la famille modulaire.

Ceci montre que décidément, il faut en rabattre, et que dans le titre du Chapitre et les considérations de **2.2.**, c'est à condition de prendre partout des isocristaux qu'il reste une chance d'un théorie du genre de celle envisagée précédemment. Il est fort possible d'ailleurs que la notion de isocristal que j'ai adoptée est encore trop restrictive, en ce sens que dans la description de **1.13**. il faudra peut-être prendre des stratifications en caractéristique nulle qui ne se prolongeraient pas nécessairement sur le schéma formel sur $W =$ vecteurs de Witt tout entier. C'est une analyse soigneuse du calcul-clef de Washnitzer-Monsky qui devrait permettre de tirer cette question au clair.

2.8. — Il se pose la question, d'autre part, pour quels schémas abéliens les énoncés 1° et 3° de 2.4, 2.5. et 2.6. sont valables, en dehors du cas déjà signalé: S de caractéristique nulle.

Il n'est pas exclu entièrement, cependant, que en restant en car. $p > 0$, l'énoncé sur la non-variation infinitésimal de $G(A)$ avec A, A partout ordinaire, soit vrai. Cela impliquerait que sur l'ouvert des valeurs "ordinaires" de l'invariant, le H^1_{DR} a une stratification canonique, mais celle-ci ne se prolongerait pas à la courbe modulaire toute entière. Mais je dois dire que ce drôle de comportement, où on aurait une stratification naturelle en car. p et une autre en car. 0, sans qu'elles veuillent se recoller, semble assez canularesque.

[Les considérations précédentes font bien ressortir la nature "infinite" de la notion de stratification, par contraste avec celle de connexion, malgré les trompeuses apparences de la caractéristique nulle. Ainsi, sur le $\mathrm{H}^1_{\mathrm{DR}}$ de la famille modulaire sur $\mathbf{F}$ de schémas elliptiques, il y a au dessus de la fibre générique $S_{\mathbf{Q}}$ de S une stratification naturelle, mais nous venons de voir (ou presque...) que cette stratification ne s'étend pas en une stratification sur S_U, U un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. (Le "presque" provient du fait qu'il n'est pas absolument clair si la stratification qu'on obtiendrait ainsi en caractéristique p serait respectée par frobenius; il faut absolument tirer au clair cet exemple particulier !). C'est en un sens assez moral, puisque pour nous le module à stratification doit jouer dans une large mesure le rôle d'un faisceau ℓ-adique, dont il partage également les propriétés de rigidité.]

Pour en revenir à l'alinéa précédent, concernant un schéma abélien "ordinaire" en car $p > 0$, s'il n'est pas exclu que le H^1_{DR} admette une stratification canonique fonctorielle, il me semble cependant exclu, malheureusement, que celle-ci provienne d'un cristal de modules sur S, i.e. que ceci reste vrai en remplaçant S par toute extension infinitésimale, pas nécessaire de car p, (tout au moins en admettant que la connexion associée à la stratification en question soit la connexion de Gauss-Manin). En effet, appliquant une telle hypothèse au schéma modulaire S sur $\mathbf{Z}_p$ précédent, dont on enlèverait les points de Hasse nul d'abord d'où S', on conclurait sauf erreur que la stratification qu'on a en caractéristique nulle sur H^1_{DR} se prolongerait à S tout entier, car elle se "recollerait" en un sens évident avec la stratification qu'on aurait au dessus du complété p-adique de S' (ce qui doit impliquer le prolongement sur S de façon assez formelle). Mais alors on aurait en car p une stratification du H^1_{DR} au dessus du schéma modulaire tout entier, Hasse nul inclus, ce qui est absurde comme on l'a déjà remarqué. Il faut en conclure, hélas, que si les isocristaux, et le cas échéant les modules stratifiés même en caractéristique $p > 0$, ont des chances d'être des outils convenables pour l'étude de familles de variétés abéliennes, celle de cristal elle-même semble irrémédiablement trop fine, même en se restreignant à des familles de variétés abéliennes "ordinaires" en car $p > 0$. Elle peut tout au mieux de prêter au cas d'un schéma de base réduit à un point, spectre d'un corps pas nécessairement parfait, et on peut alors espérer les résultats les plus satisfaisants en se bornant aux variétés abéliennes ordinaires ? - Pour que la notion de cristal elle-même puisse être utilisée pour des schémas abéliens sur des bases plus générales, il semble donc qu'il faille imposer aux familles envisagées des restrictions très sérieuses, consistant à imposer la variation infinitésimale du $G(A)$. Cela semble assez proche du point de vue de Serre, qui étudie les variations de variétés abéliennes (éventuellement à multiplication complexe donnée) en imposant à priori l'espace tangent (et l'action de la multiplication complexe dessus)...

Chapitre 3. — Remarques sur les groupes p-divisibles

3.1. — Bien sûr, en même temps que pour les variétés abéliennes, je dois en rabattre sur les groupes formels. Je veux simplement signaler que la construction de $G(A)$ dans **2.6.** doit pouvoir se paraphraser sans difficulté pour un groupe p-divisible $\varnothing$ sur un préschéma S à caractéristiques résiduelles égales au même p. En effet les homomorphismes de ce groupe dans le groupe formel associé à G_a sont triviales (en particulier, $\varnothing$ n'a pas d'automorphismes infinitésimaux), d'autre part (sauf erreur) le faisceau en modules des H^2 de $\varnothing$ à valeurs dans le groupe formel associé à G_a (au sens du complexe du groupe $\varnothing$, variante formelle), est un Module localement libre de rang g^*, où g^* est la dimension du groupe dual de $\varnothing$, soit $\varnothing^*$; plus précisément, ce Module doit être canoniquement isomorphe à $\mathrm{Lie}(\varnothing^*) = t_{\varnothing^*}$. (Tout ceci est suggéré par les résultats de Tate et Lubin sur les modules de groupes formels; je dois avouer d'ailleurs que je n'ai pas essayé de tirer au clair ce qu'il faut entendre, dans ce contexte, par "le groupe formel associé à G_a", et s'il y a lieu de prendre le groupe formel purement infinitésimal). Il s'impose alors de paraphraser la construction de Serre, en regardant l'extension universelle de $\varnothing$ par un groupe formel vectoriel, qui sera ici le groupe formel (covariant) de $t_{\varnothing^*}$. Désignant par $G(\varnothing)$ cette extension, son algèbre de Lie $\mathrm{H}(\varnothing)$ sers une extension

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow t^{v}_{\varnothing^*} \longrightarrow \mathrm{H}(\varnothing) \longrightarrow t_{\varnothing} \longrightarrow 0.$$

Bien entendu, $G(\varnothing)$ et par suite $\mathrm{H}(\varnothing)$ seront fonctoriels en $\varnothing$, et compatibles avec changement de base. Alors qu'il est certainement vrai, dans un sens qu'il conviendrait de préciser, que $G(\varnothing)$ varie "moins que $\varnothing$", quand on fait varier $\varnothing$ infinitésimalement dans une famille, il n'est pas vrai pour autant que $G(\varnothing)$ soit indépendant de telles variations (à l'exception, probablement, de celles du premier ordre), i.e. puisse être considéré comme provenant d'un cristal en groupes plus ou moins formels. Cela sera le cas seulement, sans doute, quand $\varnothing$ sera extension d'un groupe ind-étale par un groupe p-divisible torique, et S réduit à un point (?). Dans le cas général, il semble intéressant d'étudier les variations infitésimales de $\varnothing$, quand on se fixe celles de $G(\varnothing)$ à l'aide d'un cristal en groupes $\underline{G}$.

3.2. — En tous cas, l'extension $(*)$ semble un invariant intéressant du groupe p-divisible envisagé. Il subsiste, par passage à la limite, en passant au cas où S est par exemple le spectre d'un anneau A noethérien j-adique séparé et complet, où J est un idéal tel que A/J soit à caractéristiques résiduelles égales à p. On trouve par exemple un bon invariant quand A est un anneau de valuation discrète complet, éventuellement d'inégales caractéristiques, à caractéristique résiduelle p. Dans le cas où le groupe formel réduit a la structure triviale mentionnée plus haut dans **3.1.**, que la donnée d'un relèvement du groupe p-divisible qu'on a sur k en un groupe p-divisible sur A, soit entièrement équivalente à la donnée d'un relèvement de la filtration de $M \otimes_W k$ donnée par $(*)$, en une filtration de type (g, g^*) de $M \otimes_W A$. Il serait bien intéressant d'essayer de déterminer, en termes d'une telle donnée, quel est le module de Tate correspondant à la fibre générique de $\varnothing$! On aimerait préciser également, pour des groupes p-divisibles plus généraux, quelle quantité d'information est liée à l'extension $(*)$, qui remplace ici le H^1 de De Rham.

Letter to J. Murre[14]

Dear Murre,

I am glad to hear that your are still willing to give the talk on unramified functors. Here what I can say to your questions.

1. The theorem about passage to quotient I alluded to is the following:

Theorem. — *Let $f : X \longrightarrow Y$ be a morphism of S-preschemes, assume either X and Y locally of finite presentation over S, or Y loc noeth and X locally of finite type over Y. Assume that the equivalence relation $R = X \times_Y X$ defined by f is flat over X i.e. $\mathrm{pr}_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$ is flat. Then the quotient X/R exists in the strongest reasonable sense, i.e. one can factor f into a compositum $X \longrightarrow Z \longrightarrow Y$, with $X \longrightarrow Z$ faithfully flat locally of finite presentation, Z locally of finite pres. over X (in fact of finite presentation over S if X is so) and $Z \longrightarrow Y$ a monomorphism.*

Of course the factorization is unique, and the theorem can be expressed by saying that the quotient sheaf (for the fpqc topology) X/R is representable. That is in fact how the theorem is proved.

Raynaud has recently made a very nice (and non trivial) application of this theorem, by proving the following: if S is the spectrum of a discrete valuation ring, G a group prescheme of finite type over S, H a closed and flat sub-group scheme, such that G_t/H_t is quasi-affine (where t is the generic point of S) then G/H is representable as a quasi-affine and flat S-scheme, which is even affine if H is invariant (i.e. if G is a flat group scheme of finite type with affine generic fibre, than G is affine). This extends immediately to a base which is regular of dim one. Raynaud is now trying to extend his construction to the case when he drops the quasi-affinness assumption, namely to construct still G/H as a quasi-projective scheme over S.

2. Theorem of the cube.

[14] https://agrothendieck.github.io/divers/LGM1scan.pdf

I believe we discussed about it time ago, but maybe the proof I told you was valid only if one assumes the Pic functor of one of the factors involved representable. To prove unramifiedness of the functor $\underline{\mathrm{Corr}}$ however you need only a weak infinitesimal form of the theorem of the square, for which you will find a proof in the manuscript notes I am joining on correspondence classes, containing also the proof of the statements you were recalling in your question 4. I hope you will be able to read them, I agree the handwriting is wretched and the notes moreover very sketchy. - On the other hand, I recall you that the theorem of the cube follows rather formally once one knows separatedness of $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X,Y)$ for two of the three factors involved, and using the usual formal properties of the Picard functor (among which commutation with inverse limits of Artin rings is the less trivial).

3. As for the separatedness of $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X,Y)$, this is about trivial whenever the Pic functor of one of the factors X, Y is separated? Now this is certainly the case if for X if its geometric fibers are integral, (a fortiori if X is an abelian scheme over S!).

To show this, one may assume S the spectrum of a discrete valuation ring, and one is reduced to show that if $\underline{L}$ is an invertible sheaf on X whose restriction to the general fiber X_t is trivial, then $\underline{L}$ is trivial. Now X_1 is an open subset of X, and the assumption on $\underline{L}$ can be expressed by saying that $\underline{L}$ is defined by a Cartier divisor whose support is contained in the special fiber X_0. Now X_0 itself is already a Cartier divisor (defined by a global equation $f = 0$) and moreover is an integral subscheme of X, from this follows that the divisor D is a multiple of X_0 (assume for simplicity the fibers of X geometrically normal, and hence X normal!), hence D is linearly equivalent to 0, what we wanted to prove.

I am convinced however that $\underline{\mathrm{Corr}}$ is always separated (with the usual assumptions of properness, flatness, and direct image of the structure sheaf, for both functors, of course). This is easily seen to be true if the Pic functor of either factor is representable, by a simple use of dimension theory (namely, we have a morphism $X \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ whose image has a general fiber of dimension zero, hence the same holds for the special fiber…). But it is true also, by an immediate adaptation of the same argument, if we suppose only that $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ is pre-ét-représentable say, i.e. is a quotient of a representable functor Q by an étale equivalence relation (in fact, quasi-finite and flat would do as well), with Q locally of finite type over S. Now this assumption is certainly satisfied if Y is *projective* over S, as one sees by using the representation of $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/S}$ (or rather big open pieces of it) as the quotient of a suitable scheme of immersions of Y into some p^r, by the action of the projective group operating freely, and taking a quasi-section of the corresponding equivalence relation…On the other hand, if one does not assume X not Y projective over S, one my think of using Chow's lemma; as S is the spectrum of a discrete valuation ring, one does not loose flatness in using Chow's lemma, unfortunately one will loose however, I am afraid, the assumption $\mathrm{H}^0(X_0, \underline{O}_{X_0}) \simeq k(s)$, and I am afraid that this will make serious technical trouble. Another interesting approach, via topology, is to try to prove that under the usual assumptions on X, the "specialization morphism" from the fundamental group of the general geometric fiber to the one of the special fiber has an image of finite index - or at least that this is so after making the groups abelian. It seems to me that the latter statement can be proved via the Picard functor, when X is assumed projective over S.

I am sending you some notes, including a sketch of the proof of the theorem of representability of unramified functors, although I do not think they latter can be of any use to you, as I have a hard time myself to read them. I think the notes you took when we discussed the matter a few months ago should be much more detailed; anyhow, there are certainly no simplifications in my notes relative to yours, the inverse is more plausible.

Sincerely yours

Letter to J. Murre[15]

Dear Murre,

I am very sorry I did not succeed to convey the intuitive idea behind the general nonsense of my notes. It seems to me that the basic example in order to understand the idea is example 1, where you can take Z to be a standard Kummer covering for definiteness, $Z = Z_a^n$, and S normal. Intuitively, when look at (normal, say) S' coverings of S whose ramification type is not worse than the one of Z over S, you mean that the normalized inverse image Z' of S' over Z is étale. From the birational point of view, assuming S' connected and therefore corresponding to a field extension K' of the field of functions K of S, this means simply that K' of the field of functions K of S, this means simply that K' is isomorphic to a subextension of an extension of the function field L of Z, unramified with respect t the model Z; when S

[]

Your interpretation of the Kummer case in the final formulation of example 3 is indeed the one I had in mind. Also, when I wrote $n'n$, I meant of course the order relation of divisibility (it may be convenient to introduce this order relation explicitly, for simplicity of notations).

I realize that all the indications I have given you so far are extremely sketchy, and as a consequence that I am charging you with a considerable amount of work to put some sense and order into all that. Thus it is I, not you, who should apologize for causing a lot of trouble! I look forward with great pleasure meeting you in Bures. As I am having some russian and chinese on friday's, I will probably drop by on June 2.

With best regards

[15] https://agrothendieck.github.io/divers/LGM2scan.pdf

Letter to J. Murre[16]

Dear Murre,

Thank you very much for your notes on the tame fundamental group, which I at least finished reading. I see you wrote them with much care, and I am all the more sorry that my own fault, there is a number of misstatements which, I am afraid, will force you to do a serious recasting of the whole exposition. My notes definitely where too sketchy, and my oral explanations, I am afraid, partly wrong, which induced you into error a few times. Here the most serious drawbacks.

1.16 is false already when H is the unit group and when there is a single a, say $a = b^n$, $Y' = YT/(T^n - a)$. Then $Y = S$, and a morphism of Y into Y' compatible with $H = e\ H'$ is just a section of Y', which exists indeed; however $H \longrightarrow H'$ is not surjective. 3.6. is equally false, as you see by the previous example, using the given section to define an H'-morphism $H' \longrightarrow Y'$ which is not an isomorphism. As a consequence, the proof in your notes of 3.7. breaks down (as it uses 1.16) and so does the proof of 3.8. (I did not try to check 3.8. by some different proof).

I am afraid 6.4. is false as stated, and that the statement is correct only if the D_i are regular. Indeed, the end of the proof seemed to me very dubious; be careful that the inertia groups are determined only up to interior automorphism! There is however a (tautological) generalization of the theorem for regular D_i, corresponding to the data of a single divisor D with normal crossings, and a variant of the notion of tame ramification for such a divisor, by demanding that the coverings should be tamely ramified locally for the étale topology for the family of local irreducible components of D; it is this notion of tameness which should seem more adapted to the situation of par. 9.

The proof of 7.1. is not correct, when you contend on line -9: there remains to be proven the following…Already when $D = 0$, the proof here would have to introduce connected étale coverings which are *not Galois!* This very strongly suggests that a notion of tame ramification should be introduced also for non Galois coverings. The same remark applies t the proof of 10.1. Maybe you could get along some way in 7.1. using the normality assumptions, but I am convinced

[16] https://agrothendieck.github.io/divers/LGM3scan.pdf

that these assumptions are anyhow artificial, as well as the assumption that the D_i should be reduced somewhere. You do not seem to make any use of theses facts, really.

Also, one feels that 7.5. should be generalized to the case of a tamely ramified covering, and that it should come out trivially once the generalities have been dealt with properly.

I hope that the theory will come out more clearly and correctly by devoting some care to generalities on ramification date (not necessarily of Kummer type). I will try to write something up within the next days. Please excuse me for the trouble I caused you by not learning my lesson well enough before I put you to work!

It will be very nice indeed to have an appendix on Lefschetz theorem for the fundamental group, and it should not be hard to write it. However, if would be safer to wait till the general theory of tame ramification is written up!

Sincerely yours

Letter to J. Coates, 4.1.1967[17]

4.1.1967

Dear Coates,

I want to add a few more comments to the talk on algebraic cycles and to what I told you on the phone.

I think the best will be to state the index conjecture right after the statement of the main results of Hodge theory, adding that this conjecture will take its whole significance only when coupled with "conjecture A" in the next paragraph. This will give more freedom in the next paragraph to express some extra relationships between various conjectures, such as A + index implies B.

In characteristic zero, state some known extra features: index theorem holds, the properties A_ℓ to D_ℓ are independent of ℓ (because of the existence of Betti cohomology, so that these properties are equivalent to the corresponding one's for rational cohomology), A and C are independent of the chosen polarisation x (for A because it is equivalent with B, for C because it can be expressed in terms of A, $C(X) = (A(X \times X) + A(Y \times Y) + ...))$

Thus the conditions without ambiguity can be called $A(X)$ to $D(X)$, without subscript ℓ and without indication of polarisation. Say too that it is known that $C(X)$ is of finite dimension over $\mathbf{Q}$, (so that A can also be expressed in terms of an equality of dimensions of C^i and C^{n-1}, which again proves it is independent of ℓ), but that this is not known in characteristic $p > 0$. Contrarily to what I hastily stated in my talk (influenced from my recollections of the characteristic 0 case) it is not clear to me if in characteristic $p > 0$ the conditions $A_\ell(X, \xi)$ and $C_\ell(X, \xi)$ are independent of the polarisation ξ; if you do not find some proof of this independence, then the possible dependence should be pointed out, as well as the fact that we do not have a proof that A to D are independent of ℓ. Of course, if the index theorem is proved for X, then $A_\ell(X, \xi) = B_\ell(X)$ is again independent of the polarisation, and analogous remark for $C_\ell(X, \xi)$.

When speaking about condition $C_\ell(X, \xi)$, emphasise at once its stability properties by products (the proof I suggested works indeed) specialisation (with possi-

[17] https://agrothendieck.github.io/divers/LGC4167.pdf

ble change of characteristics), hyperplane or more generally linear sections. Give an extra proposition for the relations with the property A, via a formal proposition as follows:

Proposition. — *Conditions équivalentes sur X (variété* polarisée*) :*

(i) $C_\ell(X)$

(ii) $C_\ell(Y) e t A_\ell(X \times X)$

(ii bis) $C_\ell(Y)$ *et* $A_\ell(X \times X)^\circ$*, où l'exposant* $^\circ$ *signifie qu'on se borne à exprimer la condition A pour l'homomorphisme en dimension critique* $\mathrm{H}^{2n-2} \longrightarrow \mathrm{H}^{2n+2}$.

(iii) $C_\ell(Y)$ *et* $A_\ell(X \times Y)$*.*

(iii bis) $C_\ell(Y)$ *et* $A_\ell(X \times X)^\circ$*, où l'exposant* $^\circ$ *signifie qu'on se borne à exprimer la condition A en dimension critique* $\mathrm{H}^{(2n-1)-1} \longrightarrow \mathrm{H}^{(2n-1)+1}$.

(iv) $C_\ell(Y)$*, et pour tout* $i \leq n-1$*, l'homomorphisme naturel* $\mathrm{H}^i(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ *inverse à gauche de* $\varphi^i : \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(Y)$ *(induit par* $\Lambda_X \varphi_*$*) est induit par une classe de correspondance algébrique (induisant ce qu'elle veut sur les autres* $\mathrm{H}^j(Y)$*).*

(iv bis) $C_\ell(Y)$*, et pour* $j \geq n+1$*, l'homomorphisme naturel* $\mathrm{H}^j(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{j-2}(Y)$ *inverse à droite de* $\varphi_{j-2} : \mathrm{H}^{j-2}(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^j(X)$ *(induit par* $\varphi^* \Lambda_X$*) est induit par une classe de correspondance algébrique (induisant ce qu'elle veut sur les autres* $\mathrm{H}^i(X)$*).*

Corrollaire. — *Ces conditions équivalent aussi à*

(v) $A_\ell(X \times X) + A_\ell(Y \times Y)^\circ + A_\ell(Z \times Z) + \ldots$*, où* $X \supset Y \supset Z$ *est une suite décroissante de sections hyperplanes.*

(vi) $A_\ell(X \times Y)^\circ + A_\ell(Y \times Z)^\circ + \ldots$*, avec les mêmes notations.*

Of course, the products and hyperplane sections are endowed with the polarisations stemming from the polarisation on X. The conditions (v) and (iv) have the slight interest that they allow to express the conjecture $A(k) = C(k)$ in terms of $A(T)^\circ$ for every T of even (resp. odd dimension), where the upper $^\circ$ means that it is sufficient to look at what happens in critical dimensions.

For thenproof of the proposition, I told you already the equivalence of (i) and (ii), (ii bis). The equivalence of (iv) and (iv bis) is trivial by transposition, they imply (i) because $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ is the composition $\mathrm{H}^{2n-i}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2n-i-2}(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^i(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X)$ where the extreme arrows are the ones of (iv bis) and (iv) and the middle one is induced by $\Lambda_Y^{(n-1)-i}$, and they are implied by (iii bis) because of the formula

$$(\Lambda_X \varphi_*)L_Y + L_X(\Lambda_X \varphi_*) = (\varphi_* \Lambda_Y \varphi^* + id_X)\varphi_*.$$

On the other hand (iii) $\Rightarrow$ (iii bis) is trivial, and so is (i) $\Rightarrow$ (iii) because of the stabilities. N.B. $(\varphi^* \Lambda_X)L_X + L_Y(\varphi^* \Lambda_X) = \varphi^*(\varphi_* \Lambda_Y \varphi^* + id_X)$.

For the list of the known facts, you can state that:

1) In arbitrary characteristic, $C(X)$ is known if $\dim X \leq 2$, because more generally, it is known that in arbitrary dimension n, $\mathrm{H}^{2n-1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X)$ is induced by an algebraic correspondence class; also, in arbitrary dimension, it is known that π_0, π_{2n}, π_1, π_{2n-1} are algebraic (trivial for the first two, not quite trivial for the two next one's). If $\dim X = 3$, it is not known however, even in characteristic 0, if $C(X)$ or only $D(X)$ hold, nor $A(X)$ and $B(X)$ in characteristic $p > 0$, also if for 1-cycles, τ-equivalence is the same as numerical equivalence...

By the way, the fact that the π_1 for a surface are algebraic was pointed out (Tate tells me) by Hodge in Algebraic correspondences between surfaces, Proc, London Math. Soc. Series 2, Vol XLIV, 1938, p. 226. It is rather striking that this statement should not have struck the algebraic geometers more, and has fallen into oblivion for nearly thirty years!

2) In characteristic 0, $A(X)$ is known for $\dim X \leq 4$. But $A(X)^\circ$ is not known if $\dim X = 5$; the first interesting case would be for a variety $X \times X$, X of dimension 3 and Y a hyperplane section, as this would prove $C(X)$, see above.

Thus the main problems arise already for 1-cycles on threefolds, and partially even in characteristic 0. Urged by Kleiman's question, I will look again at my old scribbles on that subject (when I pretend to reduce the "strong" form of Lefschetz to the "week" one). As for the suggestion I made on the phone, to try to get any X as birationally equivalent to a non singular X', which is a specialisation of a non singular X'', itself birationally equivalent to a non singular hypesurface - this cannot work as Serre pointed out, because such an X would have to be simply connected ! Thus if one wants to reduce somehow to the case of hypersurfaces, one will have to work also with singular ones, and see how to reformulate for singular varieties the standard conjectures...

Sincerely yours

Lettre à J. Dieudonné, 27.8.1967[18]

27.8.1967

Cher Dieudonné,

[18] https://agrothendieck.github.io/divers/LGD27867scan.pdf

Lettre à J. Dieudonné, 15.9.1967[19]

15.9.1967

Cher Dieudonné,

Tes objections de ta lettre du 11 Septembre sont encore fondées. D'ailleurs, il ne me semble pas évident que le fait de pouvoir trouver p, q fixes tels qu'on ait des suites exactes $A_n^p \longrightarrow A_n^q \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$, permette de s'en tirer ; tant mieux si tu y arrives. L'existence de ces p et q me semble d'autre part facile, en utilisant le

Lemme. — *Soit A un anneau, M un A-module, $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ des éléments de A engendrant l'idéal unité, supposons que pour tout i, le A_{f_i}-module M_{f_i} soit engendré par m_i générateurs. Alors M est engendré par $m m_i$ générateurs.*

Démonstration. Soient $g_j^i \longrightarrow M_{f_i}$ $(1 j m_i)$ les générateurs de M_{f_i}, on aura donc $g_j^i = h_j^i / f_i^{N_{ij}}$, avec $h_j^i M$. Alors les h_j^i pour j fixes engendrent M sur l'ouvert Spec(A_{f_i}) de Spec(A_f), donc comme pour i variable ces ouverts recouvrent Spec(A), 1 s'ensuit que les h_j^i pour i, j variables engendrent M, donc M, ce qui établit le lemme.

Revenant alors à la situation de 10.10.5, on sait que $M = \lim M_n$ est un A-module de type fini, considérons alors un épimorphisme $u : A^q \longrightarrow M$. Soient $f_i \longrightarrow A$ dont les images dans A_0 engendrent l'idéal unité, et tel que sur les ouverts correspondants X_i de $X = \operatorname{Spec} f(A)$, F admette une présentation finie. Alors u restreint à X_i définit un épimorphisme $A_i^q \longrightarrow M_i$, et comme M_i est de présentation finie, il existe un homomorphisme v_i rendant exacte la suite $A_i^p \longrightarrow A_i^q \longrightarrow M_i \longrightarrow 0$. Tensorisant par A_0, on en déduit une suite exacte $(A_n)_{f_i}^p \longrightarrow (A_n)_{f_i}^q \longrightarrow (M_n)_{f_i} \longrightarrow 0$, ce qui montre que si $R_n = \operatorname{Ker}(A_n^q \longrightarrow M_n)$, alors R_n est sur Spec$((A_n)_{f_i})$ engendré par p éléments. Donc en vertu du lemme R_n est engendré par mp éléments où m est le nombre des f_i, et mp est bien indépendant de n.

La difficulté qui semble rester est de trouver les suites exactes que tu demandes de telle façon qu'elles se recollent, pour n variable. Donc, u étant déjà choisi, de

[19] `https://agrothendieck.github.io/divers/LGD15967scan.pdf`

trouver un homomorphisme $A^p \longrightarrow A^q$ dont l'image soit $\operatorname{Ker} u$...Si tu y arrives, on pourrait présenter encore 10.10.5 sous forme de trois conditions équivalentes, mais en demandant dans b) une "présentation finie uniformément en n". Sinon, il faudrait trouver un contre-exemple à l'implication a) ⇒ c), car il me semble

a) F est localement libre de type fini.

b) F est isomorphe à la limite projective d'une suite (F_n) de $\underline{O}_{X_n}$-Modules loc libres de type fini que se recollent.

c) F est isomorphe à un M, avec M un A-module projectif de type fini.

Pour la démonstration, on procède comme dans 10.10.5 en utilisant EGA IV 18.3.2.1. Ce lemme devrait d'ailleurs venir en corollaire après 0_I 7.2.9.

Pour les modifications que je préconisais pour I 10.11, elles tombent à l'eau si on n'arrive pas à arranger 10.10.5 sans hypothèses noethériennes ; on peut cependant dire que si F sur X est de présentation finie, alors il est limite projective de faisceaux F_n de présentation finie sur les X_n qui se recollent (mais on n'a pas une réciproque), et que F est localement libre sans les F_n le sont. Et les autres énoncés du n° 10.11. restent valables sans hypothèses noethérienne, sauf 10.7.11.2 et la partie "injectivité" dans 10.11.9 (sauf erreur).

Letter to S. Anantharaman, 11.9.1967[20]

11.9.1967

Dear Anantharaman,

Matsumura proved that if X is proper over a field k, then $\underline{\mathrm{Aut}}_{X/k}$ is representable by a group scheme locally of finite type over k. I think I can systematize the key step of his argument in the following way. Consider a scheme S, and a morphism

$$\varphi : Z \longrightarrow X$$

of S-schemes which are proper, flat and of finite presentation. Let Y be locally of finite presentation and separated over S, then φ induces a homomorphism of functors $u \rightsquigarrow u\varphi$:

$$\varphi' : \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Z,Y).$$

Then one can define a subfunctor of $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ where φ' is "unramified" in a rather obvious sense, and this turns out to be an "open subfunctor", say $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y;\varphi)$. Now look at the induced homomorphism

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y;\varphi) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(Z,Y).$$

Using the main result of Murre's talk, one can prove that the latter morphism is representable by unramified separated morphisms locally of finite presentation ; as a consequence, if $\underline{\mathrm{Hom}}_S(Z,Y)$ is representable, so is $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y;\varphi)$.

To get, given X and Y, a representability theorem for $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$, one tries to find morphisms $\varphi_i : Z_i \longrightarrow X$ as above, such that the open subfunctors $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y;\varphi_i)$ cover $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ (as a fpqc sheaf), and such that the functors $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X_i,Y)$ are all representable. If for instance S is the spectrum of a field k, and if X has "enough" points radicial over k (which is always true if k is alg. closed) then we can take for Z_i all finite subschemes of X whose points are radicial over k, and we get that $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ i representable (any Y locally of finite presentation and separated over k); if we do not make any assumptions on X except properness over k, the previous assumption becomes true after finite ground-field extension

[20] https://agrothendieck.github.io/divers/LGA967scan.pdf

k'/k, so that we get that for every Y as above, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)\times_S(k')$ is representable. From this Matsumaras theorem stated at the beginning follows in a standard way by descent arguments. The result holds too for $\underline{\mathrm{Isom}}_k(X,Y)$ instead of $\underline{\mathrm{Aut}}_k(X)$, but as you probably know, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ is not always representable, even if X is a quadratic extension of $S = \operatorname{Spec} k$, Y being proper non projective.

Over an arbitrary base S, one can give a fairly general statement of a representability theorem, the points radicial over k used above being replaced by suitable flat subschemes of X. As particular cases, we get for instance that if X has integral geometric fibers and a section along which X is smooth, then $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ is representable; and if X has reduced geometric fibers, then $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ is representable locally for the étale topology over S. Also, if Y is quasi-projective over $S = \operatorname{Spec} k$, then $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$ is representable.

To fix the ideas, I gave the statements for $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)$, but one has quite analogous results of course for the $\prod_{X/S} P/X$ functors, which I guess will imply rather formally the other ones.

If you are interested, I can send you a photocopy of the statement of the general theorem of representability I alluded to above, and a couple of corollaries (I already listed here the most striking ones).

Sincerely yours

Letter to J. Murre, 24.4.1967[21]

11.9.1967

Dear Murre,

I am sending you enclosed the sketch which I promised on ramification data, as well as your manuscript

[21] https://agrothendieck.github.io/divers/LMG24467scan.pdf

TAPIS DE QUILLEN
6.9.1968

TAPIS DE QUILLEN
10.9.1968[22]

I. Relation entre catégories et ensembles semi-simpliciaux

A toute catégorie C, on associe un ensemble semi-simplicial $S(C)$, trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$S : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Ssimpl}\,.$$

Les systèmes locaux d'ensemble sur SC correspondent aux foncteurs sur C qui transforment toute flèche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à C). Les H^i sur SC d'un tel système local (H^0 pour ensembles, H^1 pour groupes, H^i quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs $\varprojlim^{(i)}$ dérivés de $\varprojlim$, ou si on préfère, des H^i (du *topos* C). On voit ainsi à quelle condition un foncteur $C \longrightarrow C'$ induit un homotopisme $SC \longrightarrow SC'$: en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il f et s que pour tout système de coefficients F' sur C', l'homomorphisme naturel $\varprojlim^{(i)}_{C'} F' \longrightarrow \varprojlim^{(i)}_{C} F$ soit un isomorphisme (pour les i pour lesquels cela a un sens).

A C on peut associer le topos $\widetilde{C}$, qui varie de façon *covariante* avec C. (NB le foncteur $C \mapsto \widetilde{C}$ n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??).

Les systèmes de coefficients ensemblistes sur C ($\overset{\mathrm{def}}{=}$ les foncteurs $C^\circ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux lo-

[22] https://agrothendieck.github.io/divers/tapisQscan.pdf

calement constants i.e. les objets localement constants de $\widetilde{C}$, définis intrinsèquement en termes de $\widetilde{C}$. Ainsi, le fait pour un foncteur $F : C \longrightarrow C'$ d'induire une homotopisme $S(C) \longrightarrow S(C')$ ne dépend que du morphisme de topos $\widetilde{F} : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C'}$ induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant F' sur C' i.e. sur $\widetilde{C'}$, les applications induites $\mathrm{H}^i(\widetilde{C'}, F') \longrightarrow \mathrm{H}^i(\widetilde{C}, \widetilde{F}^*(F'))$ sont des isomorphismes (pour les i pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T : \mathrm{Ssimpl} \longrightarrow \mathrm{Cat},$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial X la catégorie $T(X) = \Delta_{/X}$ des simplexes sur X, dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des X_n... (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie Δ des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les X_n). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout X, $ST(X)$ est isomorphe canoniquement à X dans la catégorie homotopique construite avec Ssimpl, et que pour toute C, la catégorie $TS(C)$ est canoniquement "homotopiquement équivalente à C" i.e. canoniquement isomorphe a C dans la catégorie quotient de Cat obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. Ces isomorphismes sont fonctoriels en X. Il en résulte formellement qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans Ssimpl est un homotopisme si et seulement si en est ainsi de $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$, d'où des foncteurs $S' : \mathrm{Cat}' \longrightarrow \mathrm{Ssimpl}'$ et $T' : \mathrm{Ssimpl}' \longrightarrow \mathrm{Cat}'$ entre les catégories "homotopiques", construites avec Cat resp. Ssimpl, qui sont quasi-inverses l'un de l'autre.

De plus, Quillen construit un isomorphisme canonique et fonctoriel dans Cat' entre C et la catégorie opposée C°, ou ce qui revient au même, un isomorphisme canonique et fonctoriel dans Ssimpl' entre $S(C)$ et $S(C^\circ)$. La définition est telle que le foncteur induit sur les systèmes locaux sur C transforme le foncteur contravariant F sur C, transformant toute flèche en flèche inversible, en le foncteur covariant (i.e. contravariant sur C°) ayant mêmes valeurs sur les objets, et obtenu sur les flèches en remplaçant $F(u)$ par $F(u)^{-1}$; en d'autres termes, l'effet de l'homotopisme de Quillen sur les groupoïdes fondamentaux est l'isomorphisme évident entre les groupoïdes fondamentaux de C et de C°, compte tenu que le deuxième est l'opposé du premier. Comme application, Quillen obtient une interprétation faisceautique de la cohomologie d'un ensemble semi-simplicial à coefficients dans un système local covariant F (défini classiquement par le complexe cosimplicial des $C^n(F) = \amalg_{x \in X_n} F(x)$): on considère le système local contravariant défini par F, on l'interprète comme un faisceau sur $T(X)$ i.e. objet de $\mathrm{Ssimpl}_{/X}$, et on prend sa cohomologie. - Cependant, quand F est un système de coefficients covariant pas nécessairement local, on n'a toujours pas d'interprétation de ses groupes de cohomologie classiques en termes faisceautiques; ni, lorsque F est contravariant, de son homologie, ou inversement de sa cohomologie faisceautique en termes classiques.

A propos de la notion de foncteur qui est un homotopisme. Quillen montre qu'un tel foncteur $F : C \longrightarrow C'$ induit une équivalence entre la sous-catégorie triangulée $\mathrm{D}^b_{lc}(C')$ de la catégorie dérivée bornée de celle des faisceaux abéliens sur C', dont les faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux, et la catégorie analogue pour C; et réciproquement. On peut dans cet énoncé introduire aussi n'importe quel anneau de base (à condition de le supposer $\neq 0$ dans le cas de la réciproque); la partie dire vaut aussi avec un anneau de coefficients par nécessairement constant, mains constant tordu. Je pense que ce résultat (facile) doit pouvoir se généraliser ainsi : Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de topos qui soit tel que pour tout faisceau localement constant sur X', f induise un isomorphisme sur les cohomologies (avec cas non commutatif inclus). Supposons que X et X' soit *localement homotopiquement trivial*, i.e. que pour tout entier $n \geq 1$, tout objet U ait un recouvrement par des $U_i \longrightarrow U$, tels que a) tout système local sur U devient constant sur U_i, et toute section sur U devient constant sur U_i et b) pour tout groupe abélien G, les $\mathrm{H}^j(U, G) \longrightarrow \mathrm{H}^j(U_i, G)$ sont nuls pour $1 \leq j \leq n$ [23]. Alors le foncteur $\mathrm{D}^b_{lc}(X') \longrightarrow \mathrm{D}^b_{lc}(X)$ induit par f est une équivalence. Même énoncé si on met dans le coup un système local d'anneaux sur X'. Enfin, f induit une équivalence entre la catégorie des coefficients locaux sur C et celle des coefficients locaux sur C'.

Principe de démonstration : on commence par prouver ce dernier résultat, en notant que si un topos est localement hom. trivial, il est loc. connexe et loc. simplement connexe, d'où une bonne théorie du π_0 et du π_1 (qui sont ici dis-

[23] Attention, cette condition n'est typiquement *pas* satisfaite par les schémas avec leur topologie étale)mais bien par [] avec top. Zariski).

crets), et on est ramené à un cas particulier du critère d'homotopisme de Artin et Mazur, savoir un critère cohomologique pour qu'un homomorphisme de groupes $G \longrightarrow H$ (ici les groupes π_1 de X, X') soit un isomorphisme : il doit induire des isomorphismes sur les H^0 et H^1 (y inclus dans le cas non commutatif...). On prouve la pleine fidélité en se ramenant par la suite spectrale encore, cela résultera du fait suivant : si X est localement hom. trivial, alors la catégorie des faisceaux abéliens loc. constants est stable par $\underline{\mathrm{Ext}}^i$, et le foncteur $M \mapsto M_X$ de Ab dans X_{ab} commute aux dits Ext^i. En fait, X et X' étant loc. homp. triviaux, les conditions suivantes sur f seront équivalentes :

a) f est un homotopisme, i.e. induit pour tout système local (pas néc. commutatif) sur X' un isomorphisme sur les H^i.

b) f induit une équivalence $\mathrm{D}^b_{lc}(X') \longrightarrow \mathrm{D}^b_{lc}(X)$.

a') f induit une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux abéliens sur X' et X, et des isomorphismes sur les H^i correspondants (donc on ne prend ici que des coefficients commutatifs).

J'ignore si on peut dans a) se borner aux systèmes locaux commutatifs. L'équivalence entre a) et b) fournit une première justification ou motivation pour définir des types d'homotopie via la catégorie $\mathrm{D}^b_{lc}(X)$, éventuellement muni de la sous-catégorie pleine de tous les systèmes locaux sur X, et du foncteur cohomologique sur $\mathrm{D}^b_{lc}(X)$ à valeurs dans le dite catégorie, et bien sur du produit tensoriel (mais alors on sort de D^b pour entrer dans D^-, redactor demerdetur).

2. n-catégories, catégories n-uples, et Gr-catégories

3. Point de vue "motivique" en théorie du cobordisme

Soit C la catégorie des variétés différentiables (pas nécessairement orientables), les morphismes étant les classes d'homotopie d'applications continues. Si B est une catégorie, on s'intéresse aux couples $(F_\bullet, F^\bullet)$ d'un foncteur covariant et d'un foncteur contravariant de C dans B, satisfaisant les conditions que pour tout $X \in$

Ob C, on a $F_\bullet(X) = F^\bullet(X)$, et que si on a un produit fibré ordinaire

$$\begin{tikzcd}
& X' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, "g"] \\
& Y &
\end{tikzcd},$$

avec f et g

RÉSUMÉ DE QUELQUES RÉSULTATS DE KOSTANT
(sous-groupes simples de rang 1)

Letter to Kostant, 22.10.1969[24]

Massy 22.10.1969

Dear Kostant,

I read again through your papers in the Amer. Journ. on "The principal three-dimensional subgroup…" and "Lie group representations on polynomial rings", prompted by some nice work of Brieskorn on Klein singularities. I very much appreciate this work of yours, and would appreciate getting reprints of any latter work you may have available. As I already felt when your work appeared, it cries for careful reconsideration in the framework of Alg. Geometry, and suggests number of interesting problems. I wonder if you know the answer to some of them. For instance, I feel it would be of interest to classify (for a given complex simple adjoint Lie group, say) quadruples (T, B, T', B'), where T and T' are maximal tori "in apposition" (in your terminology), and B and B' Borel subgroups of G containing T resp. T'. The number of conjugacy classes of such animals is equal to $\mathrm{card}(W)^2/hz\varphi(h)$, where W is the Weyl group, h the Coxeter number, z the order of the center of $\widetilde{G}$, and $\varphi(h) = \mathrm{card}(\mathbf{Z}/h\mathbf{Z})^*$ is the Euler indicatrix; if you want to classify such data with moreover a generating element (principal regular in your terminology) given for the finite group of order h $T \cap N(T')$, then we get $\mathrm{card}(W)^2/hz$ choices. One of the reasons I think this question is interesting is that the stability subgroup in G of such a quadruple is $T \cap T' = e$[25], hence such a structure makes G entirely "rigid" up to exterior automorphisms. Among the first questions one may wish to ask in this direction are the following: is it true that for some, or for all such quadruples, B and B' are "in general position" i.e. $B \cap B'$ is a torus (necessarily maximal), so that B and B' are "opposite" to each other with respect to the latter ? Is there in any sense a *distinguished* conjugacy class of such quadruples (which should then be, of course, invariant by action of exterior automorphisms) ? What are the groups of automorphisms of such quadruples (they are isomorphic to subgroups of the group of exterior automorphisms of G) ?

[24] https://agrothendieck.github.io/divers/LGK69scan.pdf

[25] NB. $N(T) \cap N(T')$ is an extension of $(\mathbf{Z}/h\mathbf{Z})^*$ by []

In a different direction, it would be interesting to know more about the canonical morphism $\underline{g} \longrightarrow \underline{h}/W$, where $\underline{g}$ is the Lie algebra of G and $\underline{h}$ a Cartan subalgebra, and of the orbits of G on $\underline{g}$, and the analogous morphism of Steinberg $G \longrightarrow T/W$ and the orbits of G acting on itself. Do you know for instance exactly how varies the rank (= rang of the tangent map) of this map ? There are some reasons to believe that for points of unipotent orbits of dimension $n-r-2$ (just the next lower after the maximal dimension $n-r$), the rank is $r-1$ in case all roots have same length (that is the corresponding diagrams A, D, E_6, E_7, E_8 are those corresponding to Klein singularities), and $< r-1$ in all other cases; in the first case, I would expect that there is just one orbit as stated, by the way, and maybe this property will be characteristic of the "homogeneous" case when all roots have same length. Also, what can be said of the dimension of the set of all Borel subgroups containing a given element $g \in G$, resp. whose Lie algebra contains a given element $x \in \underline{g}$? If $2N = n-r$ is the number of roots and if the dimension of the previous variety to be equal to i; the inequality $\leq i$ would imply, by generalizing a depth argument of Brieskorn, that the singularities of the fibers of your map $\underline{g} \longrightarrow \underline{h}/W$ (resp. Steinberg's $G \longrightarrow T/W$ in case G is simply connected instead of adjoint) are "rational", i.e. if F is such a fiber and $F' \xrightarrow{f} F$ a resolution of singularities of F, then $\mathrm{R}^i f_*(\underline{O}_{F'}) = 0$ for $i > 0$. Maybe the answer to most of the questions I am asking are well known and I am just ignorant; for some of them, it would indeed be scandalous that the experts do not know the answer! In any case, I would be grateful for any comment you would have on any of my questions.

Sincerely yours

A. Grothendieck

Letter to J. Lipman, 21.5.1969[26]

21.5.1969

Dear Lipman,

I got a copy of your nice work on rational singularities. Just one comment to the "main unanswered question" on p. (iv) of your manuscript: the answer is quite evidently [] eventually for the reason you indicate yourself. The simple example would be to start with an elliptic curve E over a field k, such that $E(k) = 0$, a torsor (= princ. hom. space) C under E of order $n \geq 3$, and the projective cone of the natural projective embedding of C [] (or the smallest [] $\mathrm{Pic}^n(C) \neq \emptyset$, if $\mathrm{Br}(k)$ is not zero); [] the completion of the local ring at the origin of that cone.

This example is also an example where A is functorial, but $A[[t]]$ is not: the main reason is that the local Picard scheme (cf SGA 2 XIII p.19) is of dim > 0, although $P(k) = 0$.

Sincerely yours,

A. Grothendieck

[26] https://agrothendieck.github.io/divers/LGL22169scan.pdf

Letter to J. Lipman, 22.8.1969[27]

Massy 22.8.1969

Dear Lipman,

Thank you for your letter.

[27] https://agrothendieck.github.io/divers/LGL82269scan.pdf

Letter to J. Lipman, 16.9.1969[28]

Massy 16.9.1969

Dear Lipman,

Following your letter I am sending you the outline of a program of work for the local Picard schemes,

[28] https://agrothendieck.github.io/divers/LGL1669scan.pdf

Letter to J. Lipman, 12.6.1969[29]

Massy 12.6.1969

Dear Lipman,

Thanks for your letter. The answer to your question whether $\hat{\hat{A}}[[T]]$ factorial implies A has a rational singularity is affirmative, at least in the equal characteristic case. This comes from the construction of the local Picard scheme scheme G over the residue field in this case (cf. SGA 2 XIII 5), as it is easily checked that A has a rational singularity if and only if G is of dimension zero. In the contrary case, as the neutral component G° is smooth of dim > 0, there would exist a non constant formal arc passing through the origin of G°, and it is easily seen that this arc defines a non trivial divisor class of $A[[T]]$. This argument will work in the unequal characteristics case too, provided we can extend to this case the construction of the local Picard scheme (and its universal property). I hope this could be done, at least for a perfect residue field, but never checked this point. (I proposed this to Lichtenbaum seven years ago, but I am afraid he never looked into this!)

As for the question you mention concerning the $\mathrm{H}^1(Z, \underline{O}_Z)$ of the Zariski-Riemann space Z of A, I confess I have not much feeling for that animal, but I guess this is equivalent with the direct limit of the $\mathrm{H}^1(X, \underline{O}_X)$ for all models birational and proper over $\operatorname{Spec} A$ (which, in case we have resolution, would be also the H^1 of any regular such model). The idea that this direct system might be essentially constant, and that this may be used to prove resolution, had been mentioned to me also, five or six years ago, by Artin, but I believe he could not push it through. An analogous problem, whose solution would be needed in order to construct local Picard schemes for noetherian local (excellent ?) rings of higher dimension, is the following: does there exists a birational proper model X of $\operatorname{Spec}(A) = S$, inducing an isomorphism $X|(S-s) \simeq (S-s)$ ($s =$ closed point), such that every invertible sheaf on $S - s = X - X_0$ extend to an invertible sheaf on X? If s is an isolated singularity, this would follow of course from resolution. In case s is not isolated, it seems the answer is not known even for complete local rings of char. 0.

[29] https://agrothendieck.github.io/divers/LGL61269scan.pdf

In any case, I asked Hironaka who does not know.

Sincerely yours,

A. Grothendieck

Comments: 1). Pic of a curve is reduced ($H^2 = 0$) and is smooth.

Lettre à L. Illusie, 2-4 Déc 1969[30]

les 2-4 déc. 1969

Cher Illusie,

Le travail avance, mais avec une lenteur ridicule.

[30] https://agrothendieck.github.io/divers/LGI69scan.pdf

PROGRAMME DE LA THÉORIE DE DIEUDONNÉ SUR UNE BASE S OÙ p EST LOCALEMENT NILPOTENT

Lettre à Michon, 3.11.1970[31]

Massy le 3.11.1970

Chère Madame Michon,

Je m'aperçois que dans les exemplaires SGA d'archives que j'ai emportés de chez vous, il manque les suivants:

SGA 4 $XVII$, SGA 4 VI première partie

D'autre part j'ai besoin de ces exemplaires pour faire l'édition photooffset en préparation. Pourriez vous me les retrouver ?

Bien cordialement

A. Grothendieck

[31] https://agrothendieck.github.io/divers/LGM131170scan.pdf

Letter to I. Barsotti, 5.11.1970[32]

Bures May 11.1970

Dear Barsotti,

I would like to tell you about a result on specialization of Barsotti-Tate groups (the so-called p-divisible groups on Tate's terminology) in characteristic p, which perhaps you know for a long time, and a corresponding conjecture or rather question, whose answer may equally be known to you.

First some terminology. Let k a perfect field of characteristic $p > 0$, W the ring of Witt vectors over k, K its field of fractions. An *F-cristal* over k will mean here a free module of finite type M over W, together with a σ-linear endomorphism $F_M : M \longrightarrow M$ (where $\sigma : W \longrightarrow W$ is the Frobenius automorphism) such that F_M is injective i.e. $F(M)$ contains $p^n M$ for some $n \geq 0$. I am rather interesting in *F-iso*-cristals, namely F-cristals up to isogeny, which can be interpreted as finite dimensional vector spaces E over K, together with a σ-linear automorphism $F_E : E \longrightarrow E$, such that there exists a "lattice" $M \subset E$ mapped into itself by F_E; I will rather call such objects *effective* F-isocristals (and drop the suffix "iso" (and even F) when the context allows it), and consider the larger category of (E, F_E), with no assumption of existence of stable lattice M made, as the category of F-isocristals. It is obtained from the category of effective F-isocristals and its natural internal tensor product, by "inverting" formally the "Tate cristal" $K(-1) = (K, F_{K(-1)} = p)$: the isocristals (E, F_E) such that $(E, p^n F_E)$ is effective (i.e. the set of iterates of $(p^n F_E)$ is bounded for the natural norm structure) can be viewed as those of the form $E_0(n) = E_0 \otimes K(-1)^{\otimes(-n)}$, with E_0 an effective F-(iso)-cristal.

Assume now k algebraic closed. Then by Dieudonné's classification theorem as reported on in Manin's report, the category of F-(iso)cristals over k is semi-simple, and the isomorphism classes of simple elements of this category can be indexed by $\mathbf{Q}$ (the group of rational numbers), or what amounts to the same, by pairs of relative prime integers

$$r, s \in \mathbf{Z}, \quad r \geq 1, \quad (s, r) = 1$$

[32] https://agrothendieck.github.io/divers/LGB1170scan.pdf

to such a pair corresponding the simple object

$$\mathbf{E}_{s/r} = \mathbf{E}_{r,s}$$

whose rank is r, and which for $s \geq 0$ can be described by the cristal over the prime field $\mathbf{F}_p$ as

$$\mathbf{E}_{s/r} = \mathbf{Q}_p[T]/(T^r - p^s), \quad F_{s/r} = \text{ multiplication by T.}$$

For $s \leq 0$, we get $E_{s/r}$ by the formula

$$\mathbf{E}_{\lambda} = (\mathbf{E}_{\lambda})\check{},$$

where $\check{}$ denotes ordinary dual endowed with he contragredient F automorphism. In Manin's report, only effective F-cristals are considered, with the extra restriction that F_E is topologically nilpotent, but by Tate twist this implies the result as I state it now. Indexing by $\mathbf{Q}$ rather than by pairs (s,r) has the advantage that we have the simple formula

$$E_{\lambda} \otimes E_{\lambda'} \simeq \text{ sum of cristals } E_{\lambda+\lambda'}.$$

In other words, if we decompose each cristals in its isotypic component corresponding to the various "slopes" $\lambda \in \mathbf{Q}$, so that we get a natural graduation on it with group $\mathbf{Q}$, we see that this graduation is compatible with the tensor product structure:

$$E(\lambda) \otimes E'(\lambda') \subset (E \otimes E')(\lambda + \lambda').$$

The terminology of "slope" of isotypic cristal, and of the sequence of slopes occurring in any cristal (when decomposing it into its isotypic components) is due, I believe, to you, as discussed on formal groups in Pisa about three years ago; but I did not appreciate then the full appropriateness of the notion and of the terminology. Let's define the sequence of slopes of a cristal (E, F_E) by its isotypic decomposition, repeating each λ a number of times equal to rank $E(\lambda)$ (bearing in mind that if $\lambda = s/r$ with $(s,r) = 1$, then the multiplicity of λ in E i.e. rank $E(\lambda)$ is a multiple of r); moreover it is convenient to order this sequence in increasing order. This definition makes still a good sense if k is not algebraically closed, by passing over to the algebraic closure of k; in fact, the isotypic decomposition over

$\overline{k}$ *descends* to k, so we get much better than just a pale sequence of slopes, but even a canonical "iso-slope" ("isopentique" in french) decomposition over k

$$E = \oplus_{\lambda \in Q} E(\lambda)$$

(NB This is true only because we assumed k perfect ; there is a reasonable notion of F-cristal also if k is not perfect, but then we should get only a *filtration* of a cristal by increasing slopes...). Now if k is a finite field with q elements, of rank a over the prime field, and if (E, F_E) is a cristal over k, then F_E^a is a linear endomorphism of E over K, and it turns out that the slopes of the cristal are just the valuations of the proper values of F_E^a, for a valuation $\overline{\mathbf{Q}}_p$ normalised in such a way that

$$v(q) = 1, \quad \text{i.e.} \quad v(p) = 1/a.$$

(This is essentially the "technical lemma" in Manin's report, the restrictive conditions in Manin being in fact not necessary.) Thus, the sequence of slopes of the cristal, as defined above, is just the sequence of slopes of the *Newton polygon* of the characteristic polynomial of the arithmetic Frobenius endomorphism F_E^a, and their knowledge is equivalent to the knowledge of the p-adic valuations of the proper values of this Frobenius!

Lets come back to a general perfect k. Then the cristals which are effective are those whose slopes are > 0; those which are Dieudonné modules, i.e. which correspond to Barsotti-Tate groups over k (not necessarily connected) are those whose slopes are in the closed interval $[0, 1]$: slope zero corresponds to ind-étale groups, slope one to multiplicative groups. Moreover, an arbitrary cristal decomposes canonically into a direct sum

$$E = \oplus_{i \in \mathbf{Z}} E_i(-i),$$

where $(-i)$ are Tate twists (corresponding to multiplying the F endomorphism by p^i), and the E_i have slopes $0 \leq \lambda < 1$ (or, if we prefer, $0 < \lambda \leq 1$), and hence correspond to Barsotti-Tate groups up to isogeny over k, without multiplicative component (resp. which are connected). The interest of this remark comes from the fact that if X is a proper and smooth scheme over k, then the cristallin cohomology groups $\mathrm{H}^i(X)$ can be viewed as F-cristals, H^i with slopes between 0 and

i[33] and define in this way a whole avalanche of Barsotti-Tate groups over k (up to isogeny), which are quite remarkable invariants whose knowledge should be thought as essentially equivalent with the knowledge of the characteristic polynomials of the "arithmetic" Frobenius acting on (any reasonable) cohomology of X (although the arithmetic Frobenius is not really defined, unless k is finite!).

Now the result about specialization of Barsotti-Tate groups. This is as follows: assume the BT groups G, G' are such that G' is a specialization of G. Let $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ ($h =$ "height") be the slopes of G, and $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_h$ the ones for G'. Then we have the equality

$$\sum \lambda'_i = \sum \lambda'_i \quad (= \dim G = \dim G') \tag{1}$$

and the inequalities

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1, \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda'_1 + \lambda'_2, \ldots, \sum_{i=1}^{j} \lambda_j \leq \sum_{i=1}^{j} \lambda'_j \ldots. \tag{2}$$

In other words, the "Newton polygon" of G (i.e. of the polynomial $\Pi_i(1+(p^{\lambda_i}T)))$ lies below the one of G', and they have the same end-points $(0,0)$ and (h,N).

I get this result through a generalized Dieudonné theory for BT groups over an arbitrary base S of char. p, which allows to associate to such an object an F-cristal over S, which heuristically may be thought of as a *family* of F-cristals in the sense outlined above, parametrized by S. Using this theory, the result just stated is but a particular case of the analogous statement about specialization of arbitrary cristals.

Now this latter statement is not hard to prove at all: passing to $\wedge^h E$ and $\wedge^h E'$, the equality (1) is reduced to the case of a family of rank one cristals, and to the statements that such a family is just a twist of some fixed power of the (constant) Tate cristal. And the general equality (2) is reduced, passing to $\wedge^j E$ and $\wedge^j E'$, to the first inequality $\lambda_1 \leq \lambda'_1$. Raising both E and E' to a tensor-power r.th such that $r\lambda_1$ is an integer, we may assume that $\lambda_1 = 0$, so the statement boils down to the following: if the general member of the family is an *effective* cristal, so are all others. This is really checked in terms of the explicit definition of "cristal over S".

[33]This is not proved now in complete generality, but is proved if X lifts formally to char. zero, and is certainly true in general.

The wishful conjecture I have in mind now is the following: the necessary conditions (1) (2) that G' be a specialization of G are also sufficient. In other words, starting with a BT group $G_0 = G'$, and taking its formal modular deformation in char. p (over a modular formal variety S of dimension dd^*, $d = \dim G_0$, $d^* = \dim G_0^*$), and the BT group G over S thus obtained, we want to know if for every sequence of rational numbers λ_i between 0 and 1, satisfying (1) and (2), theses numbers occur as the sequence of slopes of a fiber of G at some point of S. This does not seem too unreasonable, in view of the fact that the set of all (λ_i) (satisfying the conditions just stated) is indeed finite, as is of course the set of slope-types of all possible fibers of G over S.

I should mention that the inequalities (2) were suggested to me by a beautiful conjecture of Katz, which says the following: if X is smooth and proper over a finite field k, and has in dimension i Hodge numbers $h^0 = h^{0,i}, h^1 = h^{1,i-1}, \ldots, h^i = h^{i,0}$, and if we consider the characteristic polynomial of the arithmetic frobenius F^a operating on some reasonable cohomology group of X (say ℓ-adic for $\ell \neq p$, or cristallin), then the Newton polygon of this polynomial should be *above* the one of the polynomial $\Pi(1+p^i T)^h i$, in a very heuristic and also very suggestive way, this could now be interpreted by stating (without any longer assuming k finite) that the cristallin H^i of X is a specialisation of a cristal whose sequence of slopes is: 0 h^0 times, 1 h^1 times,..., $i h^i$ times. If X lifts formally to char zero, then we can introduce also the Hodge numbers of the lifted variety, which are numbers satisfying

$$h'^0 \leq h^0, \ldots, h'^i \leq h^i,$$

and one should expect a strengthening of Katz's conjecture to hold, with the h'^j replaced by the h^j. Thus the transcendental analogon of a char. p F-cristl seems to be something like a Hodge structure or a Hodge filtration and the sequence of slopes of such a structure should be defined as the sequence in which j enters with multiplicity $h'^j = \operatorname{rank} Gr^j$. (NB. Katz made his conjecture only for global complete intersections, however I would not be as cautious as he!). I have some idea how Katz's conjecture with the h^i's (not the h'^i's for the time being) may be attacked by the machinery of cristalline cohomology, at least the first inequality among (2); on the other hand, the formal argument involving exterior powers, outlined after (2), gives the feeling that it is really the first inequality $\lambda_1 \leq \lambda_1'$ which is essential, the other should follow once we have a good general framework.

I would very much appreciate your comments to this general non-sense, most of which is certainly quite familiar to you under a different terminology.

Very sincerely yours,

A. Grothendieck

Letter to J. Lipman, 3.3.1970[34]

Massy March 3, 1970

Dear Dr. Lipman,

Thanks a lot for your interesting letter. Your method seems the most natural indeed, moreover it seems rather natural to restrict to perfect rings on arguments.

You should not take too seriously my suggestion to prove actual representability, and I would not be surprised if this were actually false. Of course, it would be nice to know the answer, still. I will appreciate hearing about your progress.

I have put you on my permanent mailing list, and given instructions for mailing whatever is still available. Unfortunately a lot has become unavailable, but I hope most of it will come out in Springer's lecture notes during 1970.

Sincerely yours

A. Grothendieck

[34] https://agrothendieck.github.io/divers/LGL3370scan.pdf

Lettre à D Ferrand, 3.11.1970[35]

Massy le 3.11.1970

Cher Ferrand,

J'aimerais savoir si je peux compter sur ton exposé SGA 6 XI dans un avenir assez rapproché (disons d'ici fin décembre). Dans le cas contraire, je pense qu'il serait préférable que je publie SGA 6 sans l'exposé XI. Il serait quand même raisonnable, après le travail que tu t'es tapé, que tu en fasses au moins un article d'exposition, et j'aimerais savoir alors où tu penses le publier, pour que je puisse y référer dans l'introduction à SGA 6.

Bien cordialement

[35] https://agrothendieck.github.io/divers/LGF31170scan.pdf

Lettre à J.L. Verdier, 3.11.1970[36]

Massy le 3.11.1970

Cher Verdier,

Ne m'étant guère occupé de Math depuis trois mois, je suis un peu perdu pour SGA 4. Si je me rappelle bien, tu as rédigé ou es en train de rédiger les parties suivantes, qui sont exactement ce qui manque pour que SGA 4 soit complet :

V

VI par. 5 et suivants

Si je me rappelle bien, VI était en fait terminé d'être rédigé, il fallait seulement y apporter quelques modifications dont on avait discuté avant ton départ. De plus, je pense que tu as avec toi l'exposé

VI B

de Saint Donat, et je t'envoie également l'Appendice à XVII du même, dont j'avais apparemment lu les premières pages. Pourrais tu me le renvoyer (ou le renvoyer à St Donat) avec tes annotations et commentaires ?

Tu dois avoir un exemplaire du tirage de XVII ; le XVIII n'a pas été tapé sur Stencils, mais directement sur papier pour offset ; la frappe est terminée, et Deligne est censé la corriger.

Écris-moi stp où tu en es avec ta part de rédaction, et avec la lecture de VI B. Pour des raisons techniques, ce serait bien agréable mois qui viennent. Dis-moi en tous cas si tu as l'intention de terminer, et si oui, quand tu penses avoir terminé.

Bien cordialement

[36] https://agrothendieck.github.io/divers/LGV31170scan.pdf

Lettre à P. Deligne, 3.11.1970[37]

Massy le 3.11.1970

Cher Deligne,

Pourrais-tu me dire si tu as terminé de regarder l'exposé de Rim SGA 7 VI, et si oui, me l'envoyer avec tes commentaires (sinon, me dire si tu as l'intention de le regarder et quand) ?

J'ai demandé à Mlle Altazin, qui a tapé ton exposé SGA 4 XVIII, de te l'envoyer avec le manuscrit, pour que tu le corriges. Pourrais-tu me dire si tu l'as reųu et si tu as l'intention de faire les corrections ? Quand elles seront faites, ou si tu ne veux pas les faire, envoyés moi le texte au net stp.

As-tu eu des nouvelles de Ferrand pour SGA 6 XI ?

Bien cordialement

[37] https://agrothendieck.github.io/divers/LGD31170scan.pdf

Lettre à J.L. Verdier[38], 23.6.1971[39]

Massy le 23.6.1971

Cher Verdier,

Merci pour ta lettre du 23 Mai. C'est dommage que tu ne m'aies pas envoyé ce malheureux exercise 4.10.6, cela aurait permis d'envoyer enfin à l'imprimeur le fascicule 1 de SGA 4. La personne qui a frappé le texte termine maintenant, elle partira en vacances et Springer rend la machine qu'elle avait en location, faute d'autres manuscripts. Cela remet donc la publication même de ce fascicule sine die.

Bien cordialement

[39]Transcribed with the collaboration of M. Künzer

CURRICULUM VITAE DE ALEXANDRE GROTHENDIECK[40]

Vous trouverez ci-joint l'exposé des titres et travaux des candidats à une direction de recherche

---

Né le 28 mars 1928 à Berlin, de mère allemande et de père apatride, émigré de Russie en 1921, mes parents émigrent d'Allemagne en 1933, participent à la révolution espagnole ; je les rejoins en mai 1939. Mes parents sont internés, d'abord mon père en 1939, puis ma mère en 1940 avec moi. Mon père est déporté du camp de Vernet en août 1942 pour Auschwitz et est resté disparu; ma mère meurt en 1957 des suites d'une tuberculose contractée au camp de concentration. Je reste près de deux ans dans des camps de concentration français, puis suis recueilli par une maison d'enfants du "Secours suisse" au Chambon-sur-Lignon, où je termine mes études de lycée en 1945. Études de licence (mathématiques) à Montpellier 1945-48, auditeur libre à l'École Normale Supérieure à Paris en 1948-49, où je suis le premier séminaire Cartan sur la théorie des faisceaux, et un cours de Leray du Collage de France sur la théorie de Schauder du degré topologique dans les espaces localement convexes. De 1949 à 1953 je poursuis des recherches à Nancy sur les espaces vectoriels topologiques, comme élève de J. Dieudonné et de L. Schwartz, aboutissement à ma thèse de doctorat en 1953, sur la théorie des produits tensoriels topologiques

[40] https://agrothendieck.github.io/divers/CVscan.pdf

et des espaces nucléaires, publiée dans les "Memoirs of the American Mathematical Society". Je passe alors deux ans à l'Université de Sao Paulo (Brésil), où je continue et mène à leur aboutissement naturel certaines recherches liées aux produits tensoriels topologiques [6, 7], mais en même temps, sous l'influence de J. P. Serre, commence à me familiariser avec des questions de topologie algébrique et d'algèbre homologique. Ces dernières continueront à m'occuper jusqu'à aujourd'hui, et son encore très loin d'être menées à leur terme. Ce sont elles qui m'occuperont surtout pendant l'année 1955 passée à l'Université du Kansas (USA) ; j'y développe une théorie commune pour la théorie de Cartan-Eilenberg des foncteurs dérivés des foncteurs de modules et la théorie de Leray-Cartan de la cohomologie des faisceaux [8], et développe des notions de "cohomologie non commutative" dans le contexte des faisceaux et des espaces fibrés à faisceau structural, qui trouveront leur cadre naturel quelques années plus tard avec la théorie des topos (aboutissement naturel du point de vue faisceautique en topologie générale) [16, SGA 4].

À partir de 1956 je suis resté en France, à l'exception de séjours de quelques semaines ou mois dans des universités étrangères. De 1950 à 1958 j'ai été chercheur au CNRS, avec le grade de directeur de recherches en 1958. De 1959 à 1970 j'ai été professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Ayant découvert à la fin de 1959 que l'IHES était subventionné depuis trois ans par le Ministère des Armées, et après des essais infructueux pour inciter mes collègues à une action commune sans équivoque contre la présence de telles subventions, je quitte l'IHES en septembre 1970.

Depuis 1959 je suis marié à une française, et je suis père de quatre enfants. Je suis apatride depuis 1940, et ai déposé une demande de naturalisation française au printemps 1970.

Depuis 1956 jusqu'à une date récente, mon intérêt principal s'est porté sur la géométrie algébrique. Mon intérêt pour la topologie, la géométrie analytique, l'algèbre homologique ou le langage catégorique a été constamment subordonné aux multiples besoins d'un vaste programme de construction de la géométrie algébrique, dont une première vision d'ensemble remonte à 1958. Ce programme est poursuivi systématiquement dans [16, 17], d'abord dans un isolement relatif, mais progressivement avec l'assistance d'un nombre croissante de chercheurs de valeur. Il est loin d'être achevé à l'heure actuelle. L'extraordinaire crise écologique que nous aurons à affronter dans les décades qui viennent, rend peu probable qu'il le sera jamais. Elle nous imposera d'ailleurs une perspective et des critères de valeur entièrement nouveaux, qui réduiront à l'insignifiance ("irrelevance") beaucoup des plus brillants progrès scientifiques de notre siècle, dans la mesure où ceux-ci restent étrangers au grand impératif évolutionniste de notre temps : celui de la survie. Cette optique s'est imposée à moi avec une force croissante au cours de discussions avec de nombreux collègues sur la responsabilité sociale des scientifiques, occasionnées par ma situation à l'IHES depuis la fin de 1969. Elle m'a conduit en juillet 1970 à m'associer à la fondation d'un mouvement international et interprofessionnel "Survivre", et à consacrer aux questions liées à la survie une part importante de mon énergie. Dans cette optique, la seule valeur de mon apport comme mathématicien est de me permettre aujourd'hui, grâce à l'estime professionnelle et personnelle acquise parmi mes collègues, de donner plus de force à mon témoignage et à mon action en faveur d'une stricte subordination de toutes nos activités, y compris nos activités de scientifiques, aux impératifs de la survie, et à la promotion d'un ordre stable et humain sur notre planète, sans lequel la survie de notre espèce ne serait ni possible, ni désirable.

A Grothendieck

Principales publication

Espaces Vectoriels Topologiques

1. *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. 74 (1952), p. 168-186.

2. *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, J. Crelle 192 (1953), p. 35-64 et 77-95.

3. *Espaces Vectoriels Topologiques*, Notes polyc., Sao Paulo (1954), 240 p.

4. *Sur les espaces* (F) *et* (DF), Summa Bras. 3 (1954), p. 57-123.

5. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. AMS, n° 16 (1955), 329 p.

6. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologique*, Bull. Sao Paulo 8 (1953), p. 1-79.

7. *La théorie de Fredholm*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 319-384.

Topologie et algèbre homologique

8. *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku M.j., 9 (1957), p. 119-221.

9. *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux*, Bull. SMF, 84 (1956), p. 1-7.

Géométrie analytique

10. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J., 79 (1957), p. 121-138.

11. *Techniques de construction en géométrie analytique*, Sem. H. Cartan, 13 (1960/61), exposés 7 à 17.

Géométrie algébrique

12. *La théorie des classes de Chern*, Bull. SMF 86 (1958), p. 137-154.

13. *Sur une note de Mattuck-Tate*, J. Crelle 200 (1958), p. 137-154.

14. *The cohomologie theory of abstract algebraic varieties*, Proc. Int Congress, Edinburgh (1958), p. 103-118.

15. *Éléments de Géométrie Algébrique* (rédigés avec la coll. de Jean DIEUDONNÉ), Chap. I-IV, publ. Math. IHES (1960/67), env. 1800 pages.

16. *Séminaires de Géométrie Algébrique* (SGA 1, ... ,7), IHES, 1960/69, env. 4000 pages (en cours de réedition chez Springer, Lecture Notes) :

SGA 1 Théorie du Groupe Fondamental

SGA 2 Cohomologie locale et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux

SGA 3 (en coll. avec M. Demazure) Schémas en Groupes des Topos et Cohomologie étale des Schémas

SGA 5 Cohomologie ℓ-adique et fonctions L

SGA 6 (en coll. avec J. Berthelot et J.L. Illusie) Théorie des Intersections et Théorèmes de Riemann-Roch

SGA 7 Groupe de Monodromie en Géométrie Algébrique

17. *Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens*, Invent. Math. 2 (1966), p. 59-78.

18. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (en coll. avec J. Giraud, S. Kleiman, M. Raynaud, J. Tate), North Holland, 1968.

19. *Catégorie cofibrées additives et complexe cotangent relatif*, LectureNotes in Maths., Springer n° 79 (1968), 167 pages.

ESQUISSE THÉMATIQUE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES DE A. GROTHENDIECK[41]

Les numéros entre crochets renvoient, soit à la bibliographie sommaire jointe à mon Curriculum Vitae (numéros de [1] à [19]), soit au complément à cette bibliographie placée à la fin du présent rapport (numéros entre [1 bis] et [20 bis]). Enfin, nous avons joint en dernière page une liste par ordre alphabétique des auteurs de certains des travaux cités dans les présent rapport qui ont été directement suscités ou influencés par les travaux de A. Grothendieck ; le renvoi à cette dernière bibliographie se fait par le sigle [*] derrière le nom de l'auteur cité, comme pour I. M. Gelfand [*].

1. Analyse Fonctionnelle ([1] à [7], [6 bis])

Mes travaux d'Analyse Fonctionnelle (de 1949 à 1953) ont porté surtout sur la théorie des espaces vectoriels topologiques. Parmi les nombreuses notions introduites et étudiées (produits tensoriels topologiques [5,6], applications nucléaires et applications de Fredholm [5,6,7], applications intégrales et ses variantes diverses [5,6], applications de puissance p-ième sommable [5], espaces nucléaires [5], espaces (DF) [4], etc.), c'est la notion d'*espace nucléaire* qui a connu la meilleure fortune : elle a fait jusqu'à aujourd'hui l'objet de nombreux séminaires et publications. En particulier, un volume du traité de I. Gelfand [*] sur les "Fonctions

[41] https://agrothendieck.github.io/divers/esquithemIscan.pdf, https://agrothendieck.github.io/divers/esquithemIIscan.pdf

Généralisées" lui est consacré. Une des raisons de cette fortune provient sans doute de la théorie des probabilités, car il s'avère que parmi tous les EVT, c'est dans les espaces nucléaires que la théorie de la mesure prend la forme la plus simple (théorème de Minlos). Les résultats de [6], plus profonds, semblent avoir été moins bien assimilés par les développements ultérieurs, mais ils apparaissent comme source d'inspiration dans un certain nombre de travaux délicats assez récents sur des inégalités diverses liées à la théorie des espaces de Banach, notamment ceux de Pelczynski. Signalons également les résultats assez fins de [6] et de [8 bis] sur les propriétés de décroissance de la suite des valeurs propres de certains opérateurs dans les espaces de Hilbert et dans les espaces de Banach généraux.

Références : L. Schwartz, J. Dieudonné, I. Gelfand, P. Cartier, J. L. Lions.

2. Algèbre Homologique ([8], [9], [19], [9 bis])

Depuis 1955, me plaçant au point de vue de "l'usager" et non celui de spécialiste, j'ai été amené continuellement à élargir et à assouplir le langage de l'algèbre homologique, notamment sous la poussée des besoins de la géométrie algébrique (théories de dualité, théories du type Riemann-Roch, cohomologies ℓ-adiques, cohomologies du type de De Rham, cohomologies cristallines...). Deux directions principales à ces réflexions : développement d'une algèbre homologique non commutative (amorcée dans [10 bis] et systématisée dans la thèse de J. Giraud [*]); théorie des catégories dérivées (dévelopée systématiquement par J. L. Verdier, exposée dans Hartshorne [*], Illusie [*] et [16 SGA 4 Exp. XVIII]). Ces deux courants de réflexion sont d'ailleurs loin d'être épuisés, et sont sans doute appelés à se rejoindre, soit au sein d'une "algèbre homotopique" dont une esquisse préliminaire a été faite par Quillen [*], soit dans l'esprit de la théorie des n-catégories, particulièrement bien adaptée à l'interprétation géométrique des invariants cohomologiques (cf. le livre cité de J. Giraud et le travail de Mme. M. Raynaud [*]).

Références : J.L. Verdier, P. Deligne, D. Quillen, P. Gabriel.

3. Topologie ([16, SGA 4], [9])

Jusqu'à présent, c'est surtout le K-invariant des espaces topologiques que j'avais introduit à l'occasion de mes recherches sur le théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique, qui a connu la fortune la plus brillante, étant le point de départ de très nombreuses recherches en topologie homotopique et topologie différentielle. De nombreuses constructions que j'avais introduits pour les besoins de la démonstration algébrique du théorème de Riemann-Roch (telles les opérations λ_i et leurs liens avec les opérations du groupe symétrique) sont devenues pratique courante non seulement en géométrie algébrique et en algèbre, mais également en topologie et en théorie des nombres, notamment dans les travaux de mathématiciens comme Atiyah, Hirzebruch, Adams, Quillen, Bass, Tate, Milnor, Karoubi, Shih, etc...

Plus fondamental me semble néanmoins l'élargissement de la topologie générale, dans l'esprit de la théorie des faisceaux (développée initialement par J. Leray), contenu dans le point de vue des topos ([16, SGA 4]). J'ai introduit ces topos à partir de 1958 en partant du besoin de définir une cohomologie ℓ-adique des variétés algébriques (plus généralement, des schémas), qui convienne à l'interprétation cohomologique des célèbres conjectures de Weil. En effet, la notion traditionnelle d'espace topologique ne suffit pas à traiter le cas des variétés algébriques sur un corps autre que le corps des complexes, la topologie proposée précédemment par Zariski ne donnant pas lieu à des invariants cohomologiques "discrets" raisonnables. A l'heure actuelle, le point de vue des topos, et la notion de "localisation" correspondante, font partie de la pratique quotidienne du géomètre algébriste, et il commence à se répandre également en *théorie des catégories* et en *logique mathématique* (avec la démonstration par B. Lawvere [*] du théorème de Cohen d'indépendance de l'axiome du continu, utilisant une adaptation convenable de la notion de topos). Il n'en est pas encore de même en topologie et en géométrie différentielle et analytique, malgré certains premiers essais dans ce sens (comme la tentative de démonstration par Sullivan d'une conjecture d'Adams en K-théorie, par réduction à une propriété de l'opération de Frobenius sur les variétés algébriques en car. $p > 0$).

Références : M. Atiyah, F. Hirzebruch, H. Bass, J. Leray, M. Artin, D. Quillen,

M. Karoubi…

4. Algèbre ([15], [16], [18])

Comme l'algèbre homologique, l'algèbre a été pour moi un outil à développer, et non un but en soi. J'ai parlé au par. 2 de mes contributions à l'algèbre homologique, et au par. 3 de mes contributions à la K-théorie; celle-ci comprend une partie purement algébrique (qui, une fois étendue en une théorie des K^i supérieurs, finira par devenir une partie de l'algèbre homologique ou homotopique). Ainsi, un certain nombre de mes résultats en géométrie algébrique se spécialisent en des résultats en algèbre pure, comme la relation $K(A[t]) \simeq K(A)$, où A est un anneau. Mises à part ces retombées, on peut signaler les contributions ci-dessous.

a) *Algèbre catégorique* : En fait, de façon continuelle depuis 1953, je me suis senti dans l'obligation, au fur et à mesure des besoins, de développer une panoplie catégorique toujours insuffisante. La plupart des résultats et des notions ainsi introduites se trouvent développés un peu partout dans [15, 16], notamment dans le premier exposé de SGA 4. Il ne peut être question de passer en revue ici même sommairement les notions qui sont ainsi entrées dans l'usage courant. Signalons seulement ici le langage des *univers* (pour éliminer des difficultés logiques dans la manipulation intensive des catégories), et celui de la *descente* (développé de façon systématique par Giraud [*]).

   Références : J. Giraud, P. Gabriel.

b) *Algèbre commutative* : Dans le langage géométrique des "schémas", l'algèbre commutative peut être considérée comme étant, essentiellement, l'étude locale des schémas. C'est ainsi que [15], et notamment le Chap. IV de cet ouvrage, contient de très nombreux résultats nouveaux d'algèbre commutative, dont il ne peut être question ici d'énumérer même les plus couramment utilisés. Notons seulement ici, en algèbre locale, la notion d'anneau *excellent* et ses propriétés de permanence (dont l'absence constituait sans doute la lacune la plus marquante de l'ouvrage de M. Nagata sur les anneaux locaux).

   Références : M. Nagata, P. Samuel, M. Raynaud, O. Zariski.

c) *Théorie du groupe de Brauer* : Mes contributions découlent pour l'essentiel de l'application de la cohomologie étale (développée dans [16, SGA 3]) à la théorie du groupe de Brauer. J'ai fait un exposé d'ensemble sur les résultats connus sur ce groupe dans [18].

Références : M. Artin, J. Tate, J.P. Serre

d) *Théorie des algèbres de Lie* : Comme sous-produit de recherches sur les groupes algébriques en car. $p > 0$, je trouve certains résultats délicats sur les sous-algèbres de Borel ou de Cartan de certaines algèbres de Lie, notamment sur les corps de base imparfaits (cf. [16, SGA 6, Exp. XIII et XIV]).

Références : M. Demazure, J. Tits, J.P. Serre

5. Géométrie Analytique ([10], [11], [16 bis])

Mon influence sur la géométrie analytique est due moins aux résultats nouveaux que j'ai pu y démontrer (la plupart contenus dans les réf. cit.), que par les points de vue directement inspirés par la géométrie algébrique que j'ai pu y introduire, et les nombreuses suggestions d'énoncés que j'ai pu y faire.

Un des plus anciens est le théorème de finitude de Grauert pour les morphismes propres d'espaces analytiques, aboutissant à sa généralisation récente en un théorème qui s'énonce en termes de catégories dérivées (formulation sur laquelle j'avais insisté de longue date, et qui a été prouvée indépendamment par R. Kiehl [*] et O. Forster et K. Knorr [*]). D'autres théorèmes de finitude (de Frisch et Siu) pour les images directes supérieures d'un faisceau cohérent par une immersion ouverte, utilisant la profondeur du faisceau en les points du complémentaire, sont inspirés de théorèmes analogues en géométrie algébrique [16, SGA 2]; remarques analogues pour des théorèmes sur la cohomologie à supports compacts des faisceaux algébriques cohérents, complétés par une théorème d'existence., et leur interprétation en termes de théorèmes du type de Lefschetz pour la cohomologie cohérente (la version algébrique faire partie de la thèse de Mme. Michèle Raynaud (en cours de publication), et la version analytique est due à Trautmann [*]). Parlant en termes de grands thèmes de recherche plutôt qu'en termes de résultats techniques particuliers, je pense qu'outre les thèmes déjà nommés, les thèmes suivants ont été directement suscités ou tout au moins influencés par des idées que j'avais développées en géométrie algébrique:

a) *Techniques de construction d'espaces analytiques*, aboutissant aussi bien à des espaces "modulaires" "globaux" comme les espaces modulaires de Picard, pour certains espaces analytiques compacts comme dans [11] (le cas général ne semble pas encore traité), qu'à des espaces modulaires "locaux" de déformation d'une structure analytique complexe donnée, ou au modèle de la Géométrie Formelle ("th. d'existence des modules formels", cf. [15 bis, Exp. no 195]). Dans certains cas, les énoncés obtenus en géométrie algébrique sont directement applicables (cf. M. Hakim [*]), dans d'autres de nouvelles difficultés surgissent, pas toujours surmontées à l'heure actuelle. Parmi les travaux définitifs dans ce sens, on peut citer la thèse de A. Douady [*].

b) *Théorèmes de dualité locaux et globaux pour les faisceaux cohérents*, développés notamment par J.L. Verdier [*] et J.P. Ramis et G. Ruget [*], inspirés par la théorie que j'avais développée dans le cas des schémas, exposée dans R. Hartshorne [*].

c) *Formulations de théorèmes du type de Riemann-Roch* pour des variétés analytiques compactes ou des morphismes propres de telles variétés, cf. [16, SGA 6, Exp. 0]. Les problèmes essentiels restent toujours ouverts.

d) *Théorèmes de De Rham analytiques complexes [16 bis], cohomologie cristalline complexe*. Certains des résultats et des idées que j'avais développés à ce sujet ont été utilisés dans des développements théoriques divers, comme la théorie de Hodge généralisée de P. Deligne [*].

e) *Espaces rigide-analytiques.* M'inspirant de l'exemple de la "courbe elliptique Tate", et des besoins de la "géométrie formelle" sur un anneau de valuation discrète complet, j'étais parvenu à une formulation partielle de la notion de variété rigide-analytique sur un corps valué complet, qui a joué son rôle dans la première étude systématique de cette notion par J. Tate [*]. Par ailleurs, les "cristaux" que j'introduis sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique > 0 peuvent s'interpréter parfois en termes de fibrés vectoriels à connexion intégrable sur certains types d'espaces rigide-analytiques sur des corps de caractéristique nulle; ceci fait pressentir l'existence de relations profondes entre cohomologie cristalline en car. > 0, et cohomologie de systèmes locaux sur des variétés rigide-analytiques en car. nulle.

Références : J. P Serre, H. Grauert, H. Cartan, P. Deligne, A. Douady, B. Malgrance, K. Knorr, R. Kiehl, J. Tate.

6. Groupes Algébriques ([16 SGA 3 - en trois volumes] [12 bis])

Ce sujet relève à la fois de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes. Le travail cité SGA 3 se place surtout sur des schémas de base généraux, et la part de la géométrie algébrique y est certes considérablement plus large que celle de la théorie des groupes. Néanmoins, grâce à la technique des schémas, nous y obtenons des résultats nouveaux même dans le cas de groupes définis sur un corps de base, les plus intéressants (relatifs surtout au cas d'un corps de base imparfait) étant contenus dans SGA 3, Exp XIV. Ma contribution principale, continuant dans la voie ouverte par A. Borel et C. Chevalley dans le contexte de la géométrie algébrique habituelle, a été de montrer le parti qu'on pouvait tirer d'une application systématique de la théorie des schémas aux groupes algébriques et aux schémas en groupes.

Références : J. Tits, F. Bruhat, M. Demazure, P. Gabriel, A. Borel, D. Mumford.

7. Groupes discrets ([18, Exp VIII], [13 bis])

Dans [18, Exp. VIII] je développe une théorie purement algébrique des classes de Chern des représentations d'un groupe discret sur un corps de base (ou même un anneau de base) quelconque, avec des applications de nature arithmétique sur l'ordre des classes de Chern des représentations complexes. Cette théorie peut être considérée comme cas particulier d'une théorie des classes de Chern des représentations linéaires de schémas en groupes quelconques, elle-même contenue dans la théorie des classes de Chern ℓ-adiques des fibrés vectoriels sur des topos annelés quelconques. Dans [13 bis], j'établis, à peu de choses près, que pour un groupe discret G, la théorie des représentations linéaires de G (sur un anneau de base quelconque) ne dépend que du complété profini $\hat{G}$ de G.

8. Groupes formels ([17] [16 SGA 7] [14 bis])

C'est un sujet qui relève à la fois de la théorie des groupes, de celle des groupes de Lie, de la géométrie algébrique, de l'arithmétique, et (sous la forme voisine des groupes de Barsotti-Tate) de la théorie des systèmes locaux. Ici encore, la théorie des schémas permet une grande aisance, et c'est dans ce contexte par exemple que se place d'emblée I. Manin [*a], dans son exposé classique de la théorie de Dieudonné. Ma principale contribution, en dehors de cette simplification conceptuelle, a été le développement d'une "théorie de Dieudonné" pour les groupes de Barsotti-Tate sur des schémas de base généraux à caractéristiques résiduelles > 0, en termes du "cristal de Dieudonné" associé à un tel groupe. Une esquisse de cette théorie a été exposée dans divers cours et séminaires, y compris dans mon cours au Collège de France en 1970/71 et 71/72; certains énoncés principaux sont esquissés dans les C.R. du Congrès International de Nice en 1970 [14 bis]. Une partie de ces idées est développée dans la thèse de W. Messing [*], et les besoins techniques de la théorie ont été la motivation pour le développement par L. Illusie [*] de sa théorie des déformations des schémas en groupes commutatifs, vérifiant des conjectures suggérées par cette "théorie de Dieudonné cristalline". Par ailleurs, les relations entre schémas abéliens et groupes de Barsotti-Tate associés sont explorées et exploitées également dans [17] et dans [16, SGA 7, Exp. IX].

Références : J. Tate, B. Mazur, A. Néron, L. Illusie, J.N. Katz, W. Messing, I. Manin.

9. Arithmétique ([16 SGA 5, Exp XVI] [18, Exp III])

Ma contribution principale a consisté (en collaboration avec M. Artin) en la démonstration de la rationalité des fonctions L associées à des faisceaux ℓ-adiques généraux sur des variétés algébriques sur des corps finis, comprenant comme cas particulier les fonctions L associées à des caractères de groupes finis opérant sur de telles variétés. S'inspirant des conjectures de Weil, on arrive en effet à exprimer ces fonctions L en termes de produits alternés de polynômes caractéristiques de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la "cohomologie à support propre" de la variété envisagée. Bien au delà d'une simple question de rationalité, ces résultats ouvrent la voie à une approche cohomologique systématique d'invariants arithmétiques subtils comme les fonctions ζ et L des variétés, et l'interprétation en termes arithmétiques de théorèmes tels que les théorèmes de dualité (démontrés à l'heure actuelle) et de Lefschetz pour les sections hyperplanes (non démontrés encore en car. > 0). Il y a là un champ d'étude immense, qui par la nature des choses devrait se trouver, tôt ou tard, centré sur la notion de "motif" (dénominateur commun des divers types de cohomologie qu'on sait attacher à une variété algébrique) – mais qui probablement ne sera jamais exploré jusqu'au bout, l'heure de ce genre d'investigations étant déjà passée (même si rares sont ceux qui en ont pris conscience).

Références : J.P. Serre, A. Weil, B. Dwork, J. Tate, M. Artin, P. Deligne…

10. Géométrie Algébrique ([12] à [19], [15 bis] à [20 bis])

C'est dans cette direction que mon influence a été la plus directe et la plus profonde, puisque c'est dans cette optique que se placent pour l'essentiel mes travaux depuis 1959. Voici les thèmes principaux sous lesquels on peut placer mes contributions:

a) *Travail de fondement* : Il s'agissait de dégager un cadre suffisamment vaste pour servir de fondement commun à la géométrie algébrique habituelle (y compris celle développée par des auteurs comme A. Weil, O. Zariski, C. Chevalley, J.P. Serre sur des corps de base quelconques) et à l'arithmétique. C'est fait pour l'essentiel dans [15, Chap. I,II et des parties des Ch. III et IV], avec l'introduction et l'étude de la *notion de schéma*. Des généralisations ont été développées par la suite, dans le même esprit, avec les schémas formels [15, Chap. I, par. 10], la théorie des "algebraic spaces" de M. Artin (cf. Knutson [*]), les "algebraic stacks" ou "multiplicités algébriques" de P. Deligne et D. Mumford (*), des "schémas relatifs" de la thèse de M. Hakim [*] (en attendant les "multiplicités formelles" et les "multiplicités algébriques relatives" sur des topos annelés généraux, etc). Ces généralisations montrent la part conceptuelle importante qui revient, dans le langage des schémas, à la notion générale de la localisation, c'est à dire à celle de *topos* (dont il a été question au par. 3). Les fondements développés dans [15] et [16] sont aujourd'hui le "pain quotidien" de la grande majorité des géomètres algébristes, et leur importance a été soulignée à de nombreuses occasions par des mathématiciens aussi divers que O. Zariski, J.P. Serre, H. Hironaka, D. Mumford, I. Manin, F. Chafarévitch.

b) *Théorie locale des schémas et des morphismes de schémas* : Dans ce contexte se placent les développements d'algèbre commutative mentionnés au par. 4, et l'étude détaillée de notions comme celles de morphisme lisse, étale, net, plat, etc. Les quatre volumes de [15, Chap. IV] sont consacrés à ces développements, qui ont d'ailleurs inspiré des développements analogues en théorie des espaces analytiques et rigide-analytiques

c) *Techniques de construction de schémas* : Parmi les techniques développées, exposées surtout dans [15 bis] et des séminaires non publiés (par moi-même et d'autres), il y a la *théorie de la descente* (cf. aussi [16, SGA I, Exp. V, VI]), celle des *schémas quotients*, des *schémas de Hilbert*, des *schémas de Picard*, des *"modules" formels*, le *théorème d'existence* des faisceaux de modules algébriques associés à des modules formels ([15, Chap. III, par. 5]). Le point de vue adopté est surtout celui de la construction d'un schéma à partir du foncteur qu'il représente. Dans cette optique, je n'étais pas parvenu à une véritable caractérisation maniable des foncteurs représentables par une schéma relatif (localement de type fini sur un schéma noethérien) – c'est M. Artin qui y est parvenu ultérieurement [*], en remplaçant la notion de schéma par celle, plus générale et plus stable, d'espace algébrique. Parmi d'autres recherches dans la même direction, suscitées par mes travaux, il y a celles de J. Murre sur les schémas de Picard sur un corps [*], celles de D. Mumford et de M. Raynaud [*] sur ces mêmes schémas sur des bases générales, et dans une certaine mesure ceux de D. Mumford [*] et de S. Seshadri sur le passage au quotient, pour n'en citer que quelques-uns.

d) *Théories cohomologiques* :

   1°) *Cohomologie "cohérente"* : résultats de finitude, de comparaison avec la cohomologie formelle, cf. [15, Chap. III]. Théorèmes de dualité et des résidus : un exposé systématique de mes idées et résultats est développé dans le séminaire de R. Hartshorne [*], cf. aussi [18 bis].

2°) *Cohomologie ℓ-adique* : définition de la cohomologie étale, théorèmes de comparaison, de finitude, de dimension cohomologique, de Lefschetz faible, [16 SGA 4]; théorèmes de dualité, formules de Lefschetz et d'Euler-Poincaré, application aux fonctions L, [16, SGA 15].

3°) *Cohomologie de De Rham* : [16 bis], [17 bis].

4°) *Cohomologie cristalline* : quelques idées de départ sont esquissées dans [18, Exp. IX], puis reprises et systématisées dans la thèse de P. Berthelot [*], et dans le travail de P. Berthelot et L. Illusie sur les classes de Chern cristalline [*].

e) *Théorie du groupe fondamental* ([16, SGA 1], SGA 2, SGA 7, Exp. I et II], [15 bis, no 182], [19 bis]) :

D'un point de vue algébrico-géométrique, tout était à faire, depuis la définition du groupe fondamental d'une variété quelconque, en passant par des propriétés "de descente" incluant des résultats assez formels du type de van Kampen, jusqu'au calcul du groupe fondamental dans les premiers cas non triviaux, comme celui d'une courbe algébrique privée de certains points; on peut y adjoindre les théorèmes de génération et de présentation finie du groupe fondamental d'une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Ce programme est accompli pour l'essentiel dans SGA 1, en utilisant à la fois les résultats classiques sur le corps des complexes (établis par voie transcendante) et une panoplie d'outils faits sur mesure (théorie de la descente, étude des morphismes étales, théorème d'existence de faisceaux cohérents...). Les autres références contiennent des résultats plus spéciaux: théorèmes du type de Lefschetz dans SGA 2, action des groupes de monodromie locale sur le groupe fondamental d'une fibre dans SGA 7, Exp. I, calculs de certains groupes fondamentaux locaux dans [19 bis], via les groupes fondamentaux de certains schémas formels. Tous ces résultats ont été utilisés couramment dans de nombreux travaux, et en ont inspiré d'autres comme la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*].

f) *Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* pour les groupes de Picard, le groupe fondamental, la cohomologie étale, la cohomologie cohérente. Il s'agit ici de la comparaison entre les invariants (cohomologiques ou homotopiques) d'une variété algébrique et d'une section hyperplane. Les idées de départ sont développées dans [16, SGA 2]. Cependant, pour des énoncés "définitifs", en termes de conditions nécessaires et suffisantes, se reporter plutôt à la thèse de Mme. Michèle Raynaud [*] déjà citée.

g) *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* :

La principale idée nouvelle, c'est qu'il y a presque identité entre le groupe "de Chow" des classes de cycles sur une variété X, et un certain groupe de "classes de faisceaux cohérents" (tout au moins modulo torsion), à savoir le groupe $K(X)$ (mentionné dans le par. 3). Dans un contexte modeste c'est exposé dans [12] et le travail de A. Borel et J.P. Serre [*], dans un contexte plus ambitieux cela donne l'imposant séminaire [16, SGA 7]. Dans le même esprit, cf. [12 bis].

Par ailleurs, l'idée (que je semble avoir été le premier à introduire avec ma formulation du théorème de Riemann-Roch) de reformuler un théorème sur une variété (dû en l'occurrence à F. Hirzebruch) en un théorème plus général sur un morphisme de variétés, a connu par la suite une grande fortune, non seulement en géométrie algébrique, mais aussi en topologie algébrique et topologie différentielle (à commencer par la "formule de Riemann-Roch différentiable", développée par M.F. Atiyah et F. Hirzebruch sous l'inspiration de ma formulation "relative" du théorème de Riemann-Roch).

h) *Schémas abéliens* :

En termes plus classiques, ce sont les familles de variétés abéliennes, paramétrées par un schéma quelconque. Les résultats les plus importants que j'y ai établis sont le *"théorème de réduction semi-stable"* et ses conséquences et variantes [16, SGA 7, Exp. IX], le théorème d'*existence de morphismes de schémas abéliens* contenu dans [17] et ses variantes (généralisé par P. Deligne [*] en un théorème sur la cohomologie de Hodge-De Rham relative d'une famille de variétés projectives complexes non singulières), enfin une théorie des *déformations infinitésimales des schémas abéliens* (non publiée sur une base quelconque), en termes de la déformation d'une filtration de Hodge sur un H^1 relatif de De Rham (interprété comme une cohomologie cristalline).

i) *Groupes de monodromie* :

Mes principales contributions sont exposées (en partie par P. Deligne) dans le premier volume de [16, SGA 7], donnant des propriétés fondamentales de l'action du groupe de monodromie locale sur la cohomologie comme sur le groupe fondamental d'une fibre. Parmi les principales applications, il y a le théorème de "réduction semi-stable" des schémas abéliens signalé au paragraphe précédent.

j) *Divagations motiviques* :

Nous entrons ici dans le domaine du rêve éveillé mathématique, où on s'essaie à deviner "ce qui pourrait être", en étant aussi insensément optimiste que nous le permettent les connaissances parcellaires que nous avons sur les propriétés arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. La notion de motif peut se définir en toute rigueur avec les moyens du bord (c'est fait par I. Manin [*] et M. Demazure [*]), mais dès qu'on veut aller plus loin et formuler des propriétés fondamentales "naturelles", on bute sur des conjectures actuellement indémontrables, comme celles de Weil ou de Tate, et d'autres analogues que la notion même de motif suggère irrésistiblement. Ces propriétés ont fait l'objet de nombreuses conversations privées et de plusieurs exposés publics, mais n'ont jamais fait l'objet d'une publication, puisqu'il n'est pas d'usage en mathématique (contrairement à la physique) de publier un rêve, si cohérent soit-il, et de suivre jusqu'au bout où ses divers éléments nous peuvent entraîner. Il est évident pourtant, pour quiconque se plonge suffisamment dans la cohomologie des variétés algébriques, "qu'il y a quelque chose" – que "les motifs existent". Il y a quelques années encore, j'ai joué avec l'idée d'écrire contrairement à l'usage, un livre entièrement conjectural sur les motifs – une sorte de science-fiction mathématique. J'en ai été empêché par des tâches plus urgentes que des tâches de mathématicien, et je doute fort actuellement qu'un tel livre soit jamais écrit, ni qu'on arrive jamais (même conjecturalement) à se faire une idée d'ensemble à la fois précise et suffisamment vaste sur le formalisme des motifs. Avant qu'on n'y parvienne, il sera sans doute devenu évident pour tous, sous la poussée des événements, la science spéculative et parcellarisée ne faisant plus vivre son homme, qu'il est des tâches plus urgentes que de mettre sur pied même la plus belle théorie du monde, conjectural ou non.

Complément à la bibliographie sommaire jointe au Curriculum Vitae de A. Grothendieck (travaux non inclus dans la dite bibliographie)

Analyse fonctionnelle

1 bis. *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles*, Journal d'Analyse Math. vol II, pp. 243-280 (1952/53).

2 bis. *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*, Boletim da Soc. Mat. de Sao Paulo, vol. 8°, pp. 85-110 (1953).

3 bis. *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$*, Canadian Journal of Math., Vol. 5, pp. 125-173 (1953).

4 bis. *Sur certains sous-espaces vectoriels de L^p*, Can. J. Math. vol. 6, pp. 158-160 (1953).

5 bis. *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1*, Can. Journ. Math. vol. 7, pp. 552-561 (1955).

6 bis. *Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de Von Neumann munies d'une trace*, Séminaire Bourbaki n° 115 (Mars 1955).

7 bis. *Un résultat sur le dual d'une C^*-algèbre*, Journ. de Math. vol. 36, pp. 97-108 (1957).

8 bis. *The trace of certain operators*, Studia Mathematica t. 20 (1961) pp. 141-143.

Algèbre Homologique

9 bis. *A general theory of fiber spaces with structure sheaf*, University of Kansas, 1955.

10 bis. *Standard conjectures on algebraic cycles*, Proc. Bombay, Coll. on Alg. Geom. 1968, pp. 193-199.

Algèbre

11 bis. (en collaboration avec J. Dieudonné) *Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques*, Journal of Algebra, vol. 5, pp. 305-324 (1967).

Groupes algébriques

12 bis. Exposés 4 (Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections) et 5 (torsion homologique et sections rationnelles), in Anneaux de Chow et applications, Sém. Chevalley à l'ENS, 1958, (36 p + 29 p.).

Groupes discrets

13 bis. *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets*, Manuscripta Math. vol 2, pp. 375-396 (1970).

Groupes Formels

14 bis *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes Congr. Int. math. 1970, t. 1., pp. 431-436.

Géométrie Algébrique

15 bis. *Techniques de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique* (recueil des exposés Bourbaki n° 182, 190, 195, 212, 221, 232, 236), Secrétariat de l'IHP, rue Pierre Curie, Paris (1958-1962).

16 bis. *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES, vol. 29, pp. 95-103 (1966).

17 bis. *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons*, Topology, vol. 8, pp. 299-303 (1969).

18 bis. *Local cohomology* (notes by R. Hartshorne), Lecture Notes in Math. n° 41 (1967), Springer.

19 bis. (en coll. avec J.P. Murre) *The tame fundamental group of a formal neighbourhood…* Lecture Notes in Math. n° 208 (1971), Springer.

20 bis. (avec H. Seydi), *Platitude d'une adhénrece a schématique et lemme de Hironaka généralisé*, Manuscripta Math. 5, pp. 323-339 (1971).

Liste de travaux cités, suscites ou influences par les travaux de A. Grothendieck

M. ARTIN, Algebraization of Formal Moduli, I (in Global Analysis, pp. 21-71, University of Tokyo Press, Princeton University Press, 1968), II Existence of modifications, Annals of Mathematics, Vol. 91, pp. 88-135 (1970).

M.F. ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 65, pp 276-281 (1959).

P. BERTHELOT, Cohomologie cristalline des schémas propres et lisses de caractéristique $p > 0$, Thèse, Université Paris VII, 1971 (paraîtra dans Lecture Notes of Math. chez Springer).

P. BERTHELOT et L. ILLUSIE, Classes de Chern en cohomologie cristalline, C.R. Acad. Sci. Paris t. 270, pp. 1695-1697 (22 juin 1970) et p. 1750-1752 (29 juin 1970).

A. BOREL et J.P. SERRE, Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck), Bull. Soc. Math. France, t. 86, pp. 97-136 (1958).

P. DELIGNE, Théorie de Hodge I (Actes du Congrès International des mathématiciens, Nice 1970) et II, Publications Math. n° 40, pp. 5-57 (1971).

P. DELIGNE et D. MUMFORD, The irreducibility of the space of curves of a given genus, Pub. Math. n° 36, pp. 75-110 (1969).

M. DEMAZURE, Motifs des variétés algébriques, Sém. Bourbaki n° 365, 1969/70.

A. DOUADY, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts…, Ann. Inst. Fourier, vol. 16, pp. 1-98 (1966).

O. FORSTER et K. KNORR, Relativ-analytische Raume und die Koharenz von Bildgarden, Inventions Math. Vol. 16, pp. 113-160 (1972).

I.M. GELFAND et N. Ja. VILENKIN, Les distributions, tome 4, Applications de l'analyse harmonique, Dunod, Paris, 1968 (traduction).

J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne, Grundlehren des Maths. Wiss. Bd. 179, 1971, Springer.

M. HAKIM, Topos annelés et schémas relatifs, Ergebnisse des Math. Bd. 64, 1972, Springer.

R. HARTSHORNE, Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics n° 20 (1966).

L. ILLUSIE, Complexe Cotangent et Déformations I, Lecture Notes in Math. n° 239 (1971), Springer et II, idem, n° 283 (1972).

R. KIEHL, Relativ analytische Raume, Inventiones Math. vol. 16, pp. 40-112 (1972).

D. KNUTSON, Algebraic spaces, Lecture Notes in Math. n° 203 (1971), Springer.

F.N. LAWVERE, Toposes, algebraic geometry and logic, LEcture notes in MAth., n° 274 (1972), Springer.

I. MANIN,

a) Théorie des groupes formels commutatifs sur des corps de caractéristique finie, (en russe) Uspekhi mat. Nauk, 1963, t. 18, pp. 3-90. (Il existe une traduction anglaise de l'Amer. Math. Soc).

b) Correspondances, motifs et transformations monoïdales (en russe), Mat. Sbornik t. 77, pp. 475-507.

W. MESSING, The crystals associated to a Barsotti-Tate group, Lecture Notes in Math. n° 264 (1971) Springer.

D. MUMFORD, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Math. Bd 34, 1965, Springer.

J.P. MURRE, On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups, Pub. Math. n° 23, pp. 5-43 (1964).

D. QUILLEN, Homotopical algebra, Lecture Notes in Math. n° 43 (1967), Springer.

M. RAYNAUD, Spécialisation du Foncteur de Picard, Publications Math. n° 38, pp. 27-76 (1970).

Mme. M. RAYNAUD, Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et cohomologie étale, Thèse Paris 1972 (paraîtra dans Lecture Notes of Math.)

J.P. RAMIS et G. RUGET, Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe, Pub. Math. n° 38, pp. 77 à 91 (1970).

J. TATE, Rigid-analytic spaces, Inventiones Mathematicae, vol. 12, pp. 257-289 (1971).

G. TRAUTMANN, Abgeschlossenheit von Corandmoduln une Fortsetzbarkeit koharenter analytischer Garben, Inventiones Math. vol. 5, pp. 216-230 (1968).

J.L.VERDIER, J.P. RAMIS et G. RUGET, Dualité relative en géométrie analytique complexe, Inventiones MAth., vol. 13, pp. 261-283 (1971).

INTRODUCTION TO FUNCTORIAL ALGEBRAIC GEOMETRY

- At the beginning of 1973, Grothendieck was already preparing for his departure from social and ecological activities. He intended to move to the countryside (at Villecun). But before this, he went for several weeks on a lecture tour in the USA, it was on this occasion that he delivered the following course at SUNY, Buffalo in the summer of 1973. Then he went to Paris in order to take care of the formalities concerning his appointment to the University of Montpellier, where he began his activity at the start of the term.
- The following notes of the course were written by Federico Gaeta, and printed by the university in 1984 in the form of mimeographed notes. These are not based on prenotes by Grothendieck and to some extent represent Gaeta's personal understanding of what was taught. For more on this, see the foreword in the introduction.
- [audio]. The lectures were audio-recorded.
- [scan]

INTRODUCTION

TO

FUNCTORIAL ALGEBRAIC GEOMETRY

After a Summer Course by

A. GROTHENDIECK

Vol. I

AFFINE ALGEBRAIC GEOMETRY

SUNY at Buffalo

0. Introductory material

Bibliography.

Foreword. These notes were primarily written from tape recordings of *Grothendieck*'s lectures during his visit at SUNY in the summer of 1973. However, there recordings were supplemented by exercises, references to classical algebraic geometry, historical comments and concrete quotations of such "Bibles" as SGA, EGA, etc.[1]

Grothendieck himself does not assume any responsibility for the publication of these notes; I believe however that since no adequate "textbooks" exist today and the original publications present considerable difficulties to the beginner, a publication of this kind will help a much wider audience. This is intended as an introduction to the sources SGA, EGA,...: with concrete references to Ch., §and page number, I have completed the bibliography by referring to other introductory publications such as the *Dieudonné* articles, *Mumford*'s lecture notes, etc. Most of them contain sketchy or no proofs at all, or they are addressed to a different type of reader, cf. Macdonald-*Schemes*, addressed to classical algebraic geometers. I hope that these lecture notes, directed primarily to beginning graduate students, will bring the gap, between the previously mentioned lecture notes and the sources. To aid the newcomer, the reader will find many more details than is customary in informal publications of this type. I took advantage of some of the oral repetitions to insert *"summaries"* at the beginning of most paragraphs (mostly using the tape-recorded lectures, or my own initiative if I could not find any better source). There are many complete proofs, and others are almost complete with very few, really trivial details left to the reader.

No knowledge of "old-time" or 'classical" algebraic geometry was assumed although *Grothendieck* himself gave examples involving plane algebraic curves or surfaces, etc. In many points, especially in the introduction for future applied mathematicians and in the Summary of the course, I tried to build some bridges with "old-time" algebraic geometry based on the study of algebraic varieties instead of *schemes*. If this might seem contrary to *Grothendieck*'s mathematical spirit, it is definitively not unfaithful to his current philosophical or sociological worries. In his prior visit to Buffalo, and in many other places as well, *Grothendieck* campaigned against *expert knowledge* and technology. How can we ignore that many

[1]The names or authors and/or titles of books, papers, etc. between " " refer to the Bibliography.

people feel disappointed if they do not see the words algebraic curve or surfaces on page one in an Algebraic Geometry text? Or they complain “a priori”, just by “hearsay” that there is a lot of algebra and categorical language but — where is the geometry? I try to overcome these psychological difficulties or prejudices in order to emphasize the major simplifications introduced by *Grothendieck*. The introduction for applied mathematicians is addressed to any person with a bachelor degree in Mathematics but it should be understood also by theoretical physicist and engineers…

I hope that very soon after a final revision of the whole course the second part dealing with the category of schemes will appear.

I am grateful to many colleagues and students in the audience who helped me in preparing these notes, mainly: J. Duskin, B. Fell, L. Gupta, R. Hamsher, N. Kazarinoff, M. Klun, I. Ozaki, F. C. Schanuel, G. Sicherman, J. Winthrop by correcting all kinds of mistakes, typographical, linguistic, mathematical…, and I am especially grateful first of all to *Grothendieck* who was so kind with everybody and so generous with his time. He lectured several times for periods of almost seven hours, with only a few short breaks. Who can believe that he is not interested in Mathematics anymore?

Last but not least, I am very grateful too to the typist, Mrs. Gail Berti, for her excellent job and her angelic patience, correcting and retyping the manuscript dozens of times and never once protesting.

Buffalo, June 1974
Federico Gaeta

0. Propaganda for applied mathematicians. Not more than one century ago the distinction between pure and applied mathematics was to a large extend artificial and unimportant.

1. Prerequisites. We shall assume familiarity with the

I. Functorial description of the sets of solutions of systems of polynomial equations

1. The isomorphism $\mathrm{Aff}_k \simeq G_k^\circ$

2. Restriction to particular k-algebras ($k' = k$, k' reduced, k' a field)

II. Limits in the category Aff_k of affine algebraic spaces

1. Categorical preparation

2. Limits in the category Aff_k

III. Affine schemes

1. The functor $\mathrm{Spec} : G \longrightarrow I$

2. Sheaves on affine schemes

FONCTIONS HOLOMORPHES

(Théorie de Cauchy)

M. P. II[2]

---

0. Introduction

La théorie présentée dans les fascicules précédent

1. Prélude

2. Intégrales curvilignes

3. Primitives d'une forme différentiable

4. Fonctions holomorphes

5. Développement en série entière d'une fonction holomorphe

6. Homotopie de chemins

[2] https://agrothendieck.github.io/divers/funchol1.pdf

FONCTIONS HOLOMORPHES

(Suite et fin)

M. P. II[3]

[3] https://agrothendieck.github.io/divers/funchol2.pdf

Letter to F. Knudsen, 19.5.1973[4]

Buffalo May 19, 1973

Dear Finn Knudsen,

Mumford sent me your notes on the determinant of perfect complexes, asking me to write you some comments, if I have any. Indeed I do have several - except for the obvious one that it is nice to have written up with details at least *one* full construction of that damn functor! I did not enter into the technicalities of your construction, which perhaps will allow to get a better comprehension of the main result itself. The main trouble with your presentation seems to me that the bare statement of the main result looks rather mysterious and not "natural" at all, despite your claim on page 3b! The mysterious character is of course included in the alambicated sign of definition 1.1. Here two types of criticism come to mind:

1) The sign looks complicated - are there not simpler sign conventions for getting a nice theory of $\det^*$ and its variance? It seems to me that Deligne wrote down a system that really did look natural at every stage - however he never wrote down the explicit construction, as far as I know, and the chap who had undertaken to do so, gave up in disgust after a year or two of letting the question lie around and rot!

2) Even granted that your conventions are as simple or simpler than other ones, the very fact that they are so alambicated and technical calls for an elucidation, somewhat of the type you give on page 3b with those ε_i's. That is one would like to *define* first what any theory of $\det^*$ should be (with conventions of sign as yet unspecified), stating say something like a *uniqueness theorem* for every given system of signs chosen for canonical isomorphisms, and moreover *characterizing* those systems of sign conventions which allow for an existence theorem - which will include the existence of at least one such system of signs. If one has good insight into all of them, it will be a

[4]Editor Note: See Knudsen, Finn F. *Determinant functors on exact categories and their extensions to categories of bounded complexes*. Michigan Math. J., 50 (2): 407-444, 2002

matter of taste and convenience for the individual mathematician (or the situation he has to deal with in any instance) to make his own choice!

A second point is the introduction of such evidently superfluous assumptions like working on Noetherian (!) schemes, whereas the construction is clearly so general as to work, say, over any ringed space and even ringed topos - and of course it will be needed in this generality, for instance on analytic spaces, or on schemes with groups of automorphisms acting, etc. Its just a question of some slight extra care in the writing up. It is clear in any case that the question reduces to defining $\det^*$ for strictly perfect complexes (i.e. which are free of finite type in every degree), and for homotopy classes of homotopy equivalences between such complexes, as well as for short exact sequences of such complexes. (NB! One may wish to deal, more generally, in the Illusie spirit, with strictly perfect complexes filtered - by a filtration which is finite but possibly not of level two - by sub-complexes with strictly perfect quotients.) Now this allows to restate the whole thing in a more general setting, which could make the theory more transparent, namely:

An additive category C (say free (or projective) modules of finite type over a commutative ring A) is given, as well as a category P which is a groupoid, endowed with an operation $\otimes$ together with associativity, unity and commutativity data, satisfying the usual compatibilities (see for instance Saavedra's thesis in Springer's lecture notes) and with all objects "invertible". In the example for C, we take for P invertible $\mathbf{Z}$-graded modules over A, with tensor product, the commutative law $L \otimes L' \simeq L' \otimes L$ involving the Koszul sign $(1)^{dd'}$ where d and d' are the degrees of L and L' respectively. We are interested in functors (or a given functor) $f : (C, \mathrm{isom}) \longrightarrow P$, together with a functorial isomorphism $f(M+N) \simeq f(M) \otimes f(N)$, compatible with the associativity and commutativity data (cf. Saavedra for this notion of a $\otimes$); for instance, in the example chosen, we take $f(M) = \det^*(M)$, the determinant module where $*$ stands for the degree which we put on the determinant module (our convention will be to put the degree equal to the rank of M, which will imply that our functor is indeed compatible with the commutativity data). It can be shown (this was done by a North Vietnamese mathematician, Sinh Hoang Xuan) that given C (indeed any associative and commutative $\otimes$-category would do), there exists a universal way of sending C to P as above - in the case considered, this category can be called the category of "stable" projective modules over A, and its main invariants (isomorphism classes of objects, and automorphisms of the unit object) are just the invariants $K^0(A)$ and $K^1(A)$ of myself and Dieudonné-Bass; but this existence of a universal situation is irrelevant for the technical problem to come. Now consider the category $K = K^b(C)$, of bounded complexes of C, up to homotopy. It is a triangulated category[5], and as such we can define the notion of a $\otimes$-functor from K into P; it's first of all a $\otimes$-functor for the additive structure of K (the internal composition of K being $\otimes$), but with moreover an extra structure consisting giving isomorphisms $g(M) \simeq g(M') \otimes g(M'')$ whenever we have an exact triangle $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow M'$. This should of course satisfy various conditions, such as functoriality with respect to the triangle, case of split exact triangle $M = M' \oplus''$, case of the triangle obtained by completing a quasi-isomorphism $M' \longrightarrow M$, and possibly also a condition of compatibility in the case of an exact triangle of triangles. (I guess Deligne wrote down the reasonable axioms some day; it may be more convenient to work with the filtered K-categories of Illusie, using of course finite filtrations that split in the present context). Of course if we have such a $g : K \longrightarrow P$, taking its "restriction" to C we get an $f : C \longrightarrow P$. The beautiful statement to prove would then be that conversely, every given f extends, uniquely up to isomorphism, to a g, in other terms, that the restriction functor from the category o g's to the category of f's is an equivalence. The whole care, for such a statement, will of course be to give the right set of "sign conventions" for defining admissible g's (that is compatibilities between the two or three structures on the set of $g(M)$'s - which in fact all can be reduced to giving the isomorphisms attached

[5]Be careful that one has to take the term "triangulated category" in a slightly more precise sense than in Verdier's notes, the "category of triangles" being something more precise than a mere category of distinguished diagrams in K. We have a functor from the former to the latter, but it is not even a faithful one. (Illusie's treatment in terms of filtered complexes, in his Springer lecture notes, is a good reference) It is with respect to the category of "true" triangles only that the isomorphism $g(M) \simeq g(M') \otimes g(M'')$ will be functorial. For instance, if we have an *automorphism* of a triangle, inducing u, u', u'' upon M, M' and M'', then functoriality is expressed by the relation $\det u = \det u' \det u''$ (which implies, replacing u by $id + tu$, t an indeterminate, that $\mathrm{Tr}\, u = \mathrm{Tr}\, u' + \mathrm{Tr}\, u''$) but this relation may become *false* if we are not careful to take automorphisms of true triangles, instead of taking mere automorphisms of diagrams.

to exact triangles). In this general context, the group of signs ± 1 is replaced by the subgroup of elements of order 2 of the group $K^1(P) = \mathrm{Aut}(1_P)$ (which is always a commutative group). The "sign map" $n \longrightarrow (1)^n$ from the group of degrees to the group of signs is replaced here by a canonical map $K^0(P)$(= group of isomorphism classes of P) $\longrightarrow K^1(P)$, associating to every L in P the symmetry automorphism of $L \otimes L$ (viewed as coming from an automorphism of the unit object by tensoring with $L \otimes L$). What puzzles me a little is that apparently, you have not been able to define g in terms intrinsic to the triangulated category $K = K^b(C)$ - the signs you introduce in 1.1 do depend on the actual complexes, not only on their homotopy classes. I guess the whole trouble comes from the order in which we write any given tensor product in P, in describing $\det^*(M^\bullet)$ we had to choose such an order rather arbitrarily, and it is passing from one such to another that involves "signs".

If C is an *abelian* category, there should be a variant of the previous theory, putting in relations on the $\otimes$-functors $f : C \longrightarrow P$ together with the extra structure of isomorphisms $f(M) \simeq f(M') \otimes f(M'')$ for all short exact sequences $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ satisfying a few axioms, and $\otimes$-functors $g : D^b(C) \longrightarrow P$. There should also be higher dimensional analogous, involving P's that are n-categories instead of mere 1-categories, and hence involving (implicitly at least) the higher K-invariants $K^i(C)$ ($i \geq 0$). But of course, first of all the case of the relation between C and $K^b(C)$ in the simplest case should be elucidated!

I am finishing this letter at the forum where I have no typewriter. I hope you can read the handwriting!

Best wishes

A. Grothendieck

Lettre à H. Seydi, 13.2.1973[6]

Châtenay le 13.2.1973

Cher Seydi,

Je viens de regarder votre travail sur les ombres, après une lecture plus approfondie par Illusie, dont je vous envoie ci-joint les commentaires détaillés. Comme lui, je pense que la théorie n'est par tout à fait au propre à décourager le lecteur. Une rédaction plus satisfaisante risque de vous demander pas mal de travail et de retarder votre soutenance inutilement. Comme vos résultats d'algèbre commutative sont parfaitement suffisants pour ayant sur ceux-ci. Si vous en avez l'envie, vous rédigerez par la suite sans vous presser un article sur les ombres - peut-être en collaboration avec autre mathématicien, au cas où cela vous inspirerait plus.

Pour qu'un travail sur les ombres soit commodément utilisable, il faudrait d'abord qu'il y ait un résumé des principaux résultats de la théorie, à quoi le lecteur peut se reporter, pour voir clairement de quoi il s'agit sans être troublé par les bizarreries de plan pouvant résulter de certaines nécessités de démonstration. De plus, il en est possible que de poser dès le début quelle théorie on veut obtenir, vous permette de voir plus clair vous-même et de court-circuiter notablement la construction effective de la théorie. En somme, il s'agit de poser d'emblée la question de trouver un foncteur

$$X \mapsto \mathrm{Omb}(X)$$

des schémas formels noethériens vers les espaces localement annelés, et un homomorphisme fonctoriel

$$i_X : X \longrightarrow \mathrm{Omb}(X),$$

satisfaisant à un certain nombre de propriétés naturelles, dont on ferait la liste, et qu'on pourrait espérer caractéristiques (i.e. de nature à définir la théorie à isomorphisme unique près sur le foncteur Omb cherché). Ou encore, on peut dégager d'abord un ensemble de propriétés caractéristiques (caractérisation de la théorie) et énoncer ensuite des propriétés supplémentaires importantes. Pour contribuer à donner de l'ouverture à l'exposé, il faudrait également faire une lise de problèmes

[6] https://agrothendieck.github.io/divers/LGS13273scan.pdf

naturels qui devraient être résolus, et une liste de situations où la théorie développée s'introduit de façon naturelle (cf les exemples indiqués par Illusie ; il y en a d'autres dans le travail d'Artin sur l'existence d'éclatements et de contractions, et dans un travail de Hironaka que j'ai oublié, mais que vous pourriez lui demander).

Propriétés caractéristiques. On peut, pour les formuler, introduire la notion d'espace *annelé géométrique* : c'est un espace annelé qui est noethérien, sobre (toute partie fermée irréductible a exactement un point générique), avec $\underline{O}_S$ cohérent, ses fibres locaux et noethériens, tel que pour tout F constant et tout idéal cohérent J tels que $\operatorname{supp} F \subset \operatorname{supp} \underline{O}_S/J$, il existe un $n \geq 0$ tel que $J^n F = 0$, tel que pour toute partie fermée T de S il existe un idéal cohérent J tel que $T = V(J) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{supp} \underline{O}_S/J$, et tel que pour tout ouvert U de S, toute section f de $\underline{O}_U$ et tout faisceau cohérent F sur S, et toute section h de F sur $U_f = U - V(f)$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $f^n h$ se prolonge en une section de F sur U. Il faudra demander de plus, soit que tout faisceau cohérent sur un ouvert de S se prolonge en un faisceau cohérent sur S (ou serait-ce conséquence du reste), ou du moins que les conditions b) et c) restent valables quand on remplace S par un ouvert quelconque, car on veut que tout ouvert d'un espace géométrique soit géométrique. Le propriété b) implique que $V(J) \subset V(J')$ implique (donc équivaut) à l'existence d'un n tel que $J'^n \subset J$, donc $V(J) = V(J')$ à l'existence d'un n tel que $J'^n \subset J$ et $J^n \subset J'$. Donc l'ensemble des parties fermées de S, avec sa relation d'ordre réticulée, s'identifie grâce à

[]

Propriétés supplémentaires. Il y a d'abord les propriétés qui relient de façon plus géométrique X et $\operatorname{Omb}(X)$, qui n'ont guère été dégagés, sauf le fait que i_X est un homéomorphisme de X sur une partie fermée de $\operatorname{Omb}(X)$, provenant du fait plus précis que pour tout n, i_X induit sur X_n une immersion fermée. D'ailleurs, la connaissance de l'espace annelé S et de sa partie fermée S_0 permet de retrouver X à isomorphisme unique près comme le "complété formel" de S le long de S_0. On peut se demander de trouver les propriétés sur un couple (S, S_0) qui assurent qu'il provient bien d'un schéma formel comme ci-dessus. Il faut évidemment que S soit géométrique, et que si S est défini par l'idéal J, alors $(S_0, \underline{O}_S/J|S_0)$ soit un schéma - mais ce n'est évidemment pas suffisant. Mais définissant alors S de façon évidente, ainsi que $S \xrightarrow{j} S$, une condition néc et suff est évidemment que $j^* : \mathrm{Coh}(S) \longrightarrow \mathrm{Coh}(S)$ soit une équivalence de catégories.

Il devrait être vrai que pour tout espace géométrique

[]

Autres questions à traiter ou à signaler.

1) La catégorie des Algèbres de présentation finie sur X et sur $\mathrm{Omb}(X)$ est "la même": devrait être facile, en termes d'une caractérisation de la catégorie des Alg. de prés. finie sur un Y en termes de $\mathrm{Coh}(Y)$, comme les objets de $\mathrm{Ind}(\mathrm{Coh}(Y))$ munis d'une multiplication $A \otimes A$ ayant certaines propriétés...caractérisation qui devrait être valable pour des Y tels que X (schéma formel noethérien) et S (ombre d'un tel)...(Il faudrait donner bien sûr des conditions générales sympa sur Y qui soient manifestement vérifiées pour X, S).

2) Le foncteur image inverse par i_X allant des schémas relatifs propre sur $S = \mathrm{Omb}(X)$ vers les schémas relatifs propres sur X, est une équivalence de catégories. (NB dans le cas relatif projectif cela devrait se ramener à 1) dans le cas d'Algèbres graduées...) NB si on prend des schémas de présentation finie sans plus, le foncteur n'est même pas fidèle, comme on voit en prenant des schémas relatifs sur $S - X_0$.

3) Un schéma relatif de présentation finie sur X en définit-il un sur $S = \mathrm{Omb}(X)$? D'après 1) et 2) cela devrait être vrai tout au moins dans le cas affine relatif ou propre relatif. Le cas X affine est déjà intéressant à regarder !

4) Pour tout faisceau cohérent F sur $S = \mathrm{Omb}(X)$, l'homomorphisme canonique induit par i_X

$$\mathrm{H}^i(S, F) \quad \mathrm{H}^i(S, i_X(F))$$

est-il un isomorphisme ? (Si oui, cela impliquerait l'énoncé analogue pour les Ext^1 globaux de Modules cohérents) Cela résulterait d'un théorème d'effacement de classes de cohomologie de faisceaux cohérents par immersion dans un cohérent (ou dans un -cohérent), sur des espaces tels que X (schéma formel) et S (ombre d'un tel).

5) Bien entendu, des questions analogues se posent en cohomologie étale - mais ce n'est sans doute pas le lieu dans un premier exposé de fondements !

6) Application de la théorie pour associer fonctoriellement un espace annelé géométrique à tout espace rigide-analytique quasi-cohérent sur le corps des quotients d'un anneau de valuation discrète complet, en utilisant la théorie de Raynaud, de tel façon qu'à la fibre générique d'un schéma formel de type fini sur V soit associé $\mathrm{Omb}(X) - X_0$. C'est évident modulo la théorie de Raynaud - mais il resterait à étudier les propriétés de fidélité du foncteur obtenu. Serait-il pleinement fidèle. (C'est lié à la question suivante : soient X, X' schémas formels de type fini sur X, $S = \mathrm{Omb}(X)$, $S' = \mathrm{Omb}(X')$, $u : S \longrightarrow S'$ un K-morphisme d'espaces localement annelés (K étant le corps des fractions de V), existe-il un éclatement $\overline{X}$ de X le long d'un sous-schéma concentré sur la fibre spéciale, et un morphisme $f : \overline{X} \longrightarrow X'$ qui induise u ?) Relations entre propriétés locales sur l'espace rigide-analytique et sur son ombre…

Lettre à L Illusie, 3.5.1973

Buffalo le 3.5.1973

Cher Illusie,

Je t'envoie quelques afterthoughts de notre conversation mathématique sur les motifs. J'avais dit à tort que les isomotifs n'ont pas de "modules infinitésimaux", c'est-à-dire que si $i : S_0 \longrightarrow S$ est une immersion nilpotente, le foncteur image inverse de motifs est une équivalence de catégories. Cela doit être vrai en car. $p > 0$ (plus généralement si $\mathscr{O}_S$ est annulé par une puissance de p), pour la raison heuristique (qu'on peut expliciter entièrement lorsqu'on travaille dans le contexte bien assis des schémas abéliens, ou des groupes de Barsotti-Tate) que lorsqu'on se ramène par dévissage au cas d'une nilimmersion d'ordre 1 ($J^2 = 0$), on peut définir une obstruction à la déformation sur S d'un homomorphisme (ou isomorphisme) de (pas iso) motif sur S_0, qui sera tué par p^i si p^i tue J, donc qui sera tué lorsqu'on passe aux *iso*motifs. Par contre, en caractéristique nulle, les schémas abéliens à isogénie près ont la même théorie des modules infinitésimaux que les schémas abéliens tout court, et il faut s'attendre à la même chose pour les motifs et isomotifs. En termes des théories de systèmes de coefficients de de Rham ou de Hodge, l'élément de structure "filtration de DR" introduit bel et bien un élément de continuité, qui a pour effet de rendre faux le fait que pour ces coefficients, le foncteur image inverse par nilimmersion soit une équivalence. Il semble que donc qu'il faille bannir cette propriété (hors du cas des schémas de torsion) du yoga des "coefficients discrets". À moins qu'il se trouve que les besoins du formalisme (construction de foncteurs adjoints du type etc.) nous impose de modifier la notion de faisceau de Hodge ou de DR sur un schéma X, en partant du genre de notion que nous avions regardée ensemble, et en passant ensuite au catégories des catégories correspondantes associées à X', où X' est réduit et $X' \longrightarrow X$ est fini radiciel surjectif. Mais j'espère qu'il ne sera pas nécessaire de canuler ces notions ainsi. Une question liée est celle-ci : si X est de car. 0, un motif serein sur X qui est "effectif de poids 1" définit-il bien un schéma abélien à isogénie près, ou seulement un schéma abélien à isogénie près au-dessus d'un X' comme ci-dessus ? Ce dernier devrait être le cas en tout cas en car. $p > 0$, si on veut qu'un morphisme fini surjectif soit un morphisme de descente effective pour les isomotifs (et cela à son tour doit être vrai, étant vrai pour les $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux, si on veut que le foncteur isomotifs $\longrightarrow$ $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux commute aux opérations habituelles et est fidèle – et on le veut à tout prix). Ainsi, en car. $p > 0$, si k est un corps, un isomotif effectif de poids 1 sur k devrait être, non un schéma abélien à isogénie près sur k, mais sur la clôture parfaite de k !

Je n'ai pas le cœur net non plus sur la nécessité de mettre du "iso" partout dans la théorie des motifs. Je ne serais pas tellement étonné qu'il y a en caractéristique nulle une théorie des motifs (et *pas* iso), qui s'envoie dans les théories ℓ-adiques (sur $\mathbf{Z}_\ell$, pas $\mathbf{Q}_\ell$) pour tout ℓ. Pour ce qui est des coefficients de Hodge, il devrait être assez trivial de les définir "pas iso", de telle façon que les $\mathbf{Z}$-faisceau de torsion algébriquement constructibles (sur X de type fini sur $\mathbf{C}$) en forment une sous-catégorie pleine, et avec un foncteur vers les $\mathbf{Z}$-faisceau algébriquement constructibles ("foncteur de Betti"). En caractéristique $p > 0$, j'ai des doutes très sérieux pour l'existence d'une théorie des motifs pas iso du tout, à cause des phénomènes de p-torsion (surtout pour les schémas qui ne sont pas projectifs et lisses). Ainsi, si on admet la description de Deligne des "motifs mixtes" de niveau 1 comme le genre de choses permettant de définir un H^1 motivique d'un schéma pas pas projectif ou pas lisse, on voit que déjà pour une courbe algébrique sur un corps imparfait k, la construction ne peut fournir en général qu'un objet du type voulu sur la clôture parfaite de k. par contre, il pourrait être vrai que seul la p-torsion canule, et qu'il suffise de localiser par tuage de p-torsion, c'est-à-dire moralement de travailler avec des catégories $\mathbf{Z}[1/p]$-linéaires. On aurait alors encore des foncteurs allant des "motifs" (pas iso) vers les $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux (quel que soit $\ell \neq p$) mais pas vers les F-cristaux, mais seulement vers les F-isocristaux. Dans cette théorie, on renoncerait donc simplement à regarder en car. p des phénomènes de p-torsion. Pourtant il est "clair" que ceux-ci existent et sont fort intéressants, tout au moins pour les morphismes propres et lisses, et on a bien l'impression que la cohomologie crystalline (plus fine que DR) pas iso en donne la clef. (Au fait, Berthelot est-il parvenu à des conjectures plausibles à ce sujet ?) On peut donc espérer que pour les motifs sereins et semi-simples fibre par fibre, on a des catégories sur Z, pas seulement sur $\mathbf{Z}[1/p]$, les Hom étant des $\mathbf{Z}$-modules de type fini. Cette impression peut être fondée par exemple sur le joli comportement des schémas abéliens sur les corps des fractions d'un anneau de val. discrète : dans la théorie de spécialisation, il se trouve qu'à aucun moment la p-torsion ne canule.

Bien sûr, alors même qu'on arriverait à travailler avec des catégories de motifs pas iso, dans "l'état actuel de la science", pour en déduire une théorie de groupes de Galois motiviques, étant obligé de s'appuyer sur ce que Saavedra a rédigé, on est obligé à tensoriser tout par $\mathbf{Q}$, et on ne trouve que des groupes algébriques sur $\mathbf{Q}$ ou des extensions de $\mathbf{Q}$. Néanmoins, on a certainement dans l'idée que les "vrais" groupes de Galois motiviques (associés à des foncteurs-fibres comme la cohomologie ℓ-adique, ou la cohomologie de Betti) sont des schémas en groupes sur $\mathbf{Z}_\ell$ et sur $\mathbf{Z}$ plutôt que sur $\mathbf{Q}_\ell$ et sur $\mathbf{Q}$, et par là on devrait rejoindre le point de vue des groupes de type arithmétique de gens comme Borel, Griffiths, etc.

Encore une remarque : alors même qu'on travaille avec des isomotifs, on peut associer à un tel M quelque chose de mieux qu'une suite infinie de $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux (lorsqu'il y a une infinité de ℓ premiers aux car. résiduelles). En fait, on a ce qu'on pourrait appeler un faisceau "adélique", i.e. un faisceau de modules (moralement) sur l'anneau des adèles finis de $\mathbf{Q}$. De façon précise, on peut considérer tous les $T_\ell(M)$ sauf un nombre fini comme étant des $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux (pas seulement des $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux). Éliminant toute métaphysique motivique, on peut dire que la théorie de Jouanolou écrite en fixant un ℓ, pourrait être développée avec des modifications techniques mineures pour avoir une théorie des "A-faisceaux", où A est l'anneau des adèles, ou un facteur direct A' de celui-ci obtenu en ne prenant qu'un paquet de nombres premiers (pas nécessairement tous). On obtient ainsi une théorie de coefficients (au sens technique dont nous avions discuté) ayant comme anneau de coefficients la $\mathbf{Q}$-algèbre A resp. A'. Comme A et A' sont "absolument plats", il n'y a pas introduction de $\underline{\mathrm{Tor}}_i$ gênants et de canulars de degrés infinis dans cette théorie.

Pour en revenir au yoga des coefficients "discrets", où j'avais énoncé une propriété de trop apparemment, par contre il y en a une autre que nous n'avions pas explicitée. Il s'agit de la définition de l'objet de Tate sur S comme l'inverse de l'objet (inversible pour $\otimes$)

$$T(-1) = \mathrm{R}^2 f_*(1_P) = \mathrm{R}^2 g_!(1_E)$$

où $f : P \longrightarrow S$ resp. $g : E \longrightarrow S$ sont les projections de la droite projective resp.

la droite affine sur S. D'autre part, les objets (définis en fait sur le schéma de base S_0 de la théorie de coefficients) interviennent également dans la formulation des théorèmes de pureté relative ou absolue et la définition des classes fondamentales locales (qui, j'espère, doit être possible en termes des données initiales de la théorie de coefficients envisagée, sans constituer une donnée supplémentaire), et dans le calcul de $f^!$ pour f lisse (donc pour f lissifiable), pour ne parler que du démarrage du formalisme cohomologique. En fait, on les retrouve ensuite à chaque pas.

Une dernière remarque. Je crois qu'il vaudrait la peine de formaliser, dans le cadre d'une théorie de coefficients plus ou moins arbitraires, les arguments de dévissage qui ont conduit, dans le cas des coefficients étales, aux théorèmes de finitude pour pour f propre, puis pour f séparé de type fini seulement (moyennant résolution des singularités). Ces dévissages apparaîtraient maintenant comme des pas destinés à prouver *l'existence* de (en même temps, s'il y a lieu, que sa commutation aux changements de base). À vrai dire, il n'est pas clair pour moi que l'on arrivera à des formulations qui s'appliqueraient directement aux $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux, disons; en fait, ce n'est pas ainsi que procède Jouanolou dans ce cas, qui au contraire se ramène aux énoncés déjà connus dans le cas des coefficients de torsion (procédé qui n'a guère de chance de s'axiomatiser dans le cas qui nous intéresse). Par contre, pensant directement au cas des motifs, on peut songer à utiliser un dévissage qui s'appuie entre autres sur les propriétés suivantes (quitte à se tirer par les lacets de souliers pour les établir chemin faisant) : (a) un (iso)motif se dévisse en motifs sereins sur des schémas irréd. normaux (NB on suppose qu'on travaille sur des schémas excellents); (b) un motif serein sur un schéma normal irréductible se dévisse en motifs sereins "simples" – en fait, il suffit de faire le dévissage en le point générique; (c) un motif simple (pourvu qu'on remplace la base S par un voisinage ouvert assez petit du point générique) est un facteur direct d'un $\mathrm{R}^i f_{(1_X)}$, où $f : X \longrightarrow S$ est propre et lisse, tout du moins moyennant tensorisation par un objet de Tate $T(j)$ convenable. Ainsi, moyennant au moins deux gros grains de sel qu'il faudrait essayer d'expliciter un jour, les motifs généraux (toujours iso, bien sûr) se ramènent aux motifs plus ou moins naïfs tels qu'ils sont décrits notamment dans Manin et Demazure. Cela s'applique tout aux moins aux objets–quant aux morphismes, c'est une autre paire de manches – et encore pire pour les Ext^i...

À ce propos, on peut se convaincre que l'application qui va des classes d'extension de deux motifs (dans la catégorie abélienne des motifs) vers le Ext^1 défini comme $\mathrm{Hom}(M,N[1])$ (Hom dans la catégorie triangulée) ne devrait pas être bijective (mais sans doute injective). Plaçons-nous en effet sur une base S spectre d'un corps fini, prenons pour M et N le motif unité $1_S = T_S(0) = T(0)$, de sorte que le Ext^1 n'est autre que $\mathrm{H}^1(S, T(0))$. Les calculs ℓ-adiques du H^1 nous suggèrent fortement que le H^1 absolu motivique est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Q}$. Mais d'autre part les classes d'extension de $T(0)$ par $T(0)$ doivent être nulles (sur tout corps K) si M et N sont des motifs de poids r et s avec $r \neq s$, si on admet le yoga de la filtration d'un motif par poids croissants, avec gradué associé semi-simple. (NB En fait, sur un corps fini, la catégorie des motifs devrait être tout entière semi-simple, i.e. toute extension devrait être triviale, i.e. la filtration croissante précédente devrait splitter canoniquement : cela résulte du fait que l'endomorphisme de Frobenius du motif opère avec des "poids" différents sur les composantes des différents poids–plus un petit exercice de catégories tannakiennes.)

Bien cordialement

Alexandre

ESQUISSE D'UNE THÉORIE DES Gr-CATÉGORIES

par Mme Hoang Xuan Sinh

Nous donnons un résumé de quelques résultats sur les Gr-catégories, faisant l'objet d'un travail détaillé que l'auteur compte présenter prochainement comme thèse de doctorat [1].

1. Structure des Gr-catégories

Notre terminologie est celle de Saavedra [2]. Nous nous intéressons à des catégories C munies d'une opération binaire $(X,Y) \mapsto X \otimes Y$ (foncteur de $C \times C$ dans C) associative et unitaire à isomorphisme donné près (satisfaisant des conditions de compatibilité explicitées dans loc. cit.), appelées aussi $\otimes$-catégorie AU (associatives-unitaires). On dit qu'une telle catégorie est une Gr-catégorie si c'est un groupoïde et si tout objet X de C est "inversible", i.e. admet un objet "inverse" $Y = X^{-1}$ (satisfaisant $X \otimes Y \simeq Y \otimes X \simeq 1_C$, où 1_C désigne l'objet unité de C). Les exemples abondent :

Exemples.

1 . X étant un espace topologique ponctué par $x \in X$, on prend pour C la catégorie des lacets de X en x, avec comme morphismes les classes d'homotopie d'homotopies entre lacets, comme opération $\otimes$ la composition des lacets (qui n'est pas associative, mais associative "à homotopie près").

Variante : G est un espace de Hopf associatif (ou simplement homotopiquement associatif en un sens suffisamment fort), C la catégorie dont les objets sont le points de G, les morphismes les classes d'homotopie de chemins entre points de G, la loi $\otimes$ étant induite par la loi de composition de G. (N.B. Lorsque G admet un espace classifiant X, on retrouve essentiellement l'exemple précédent).

2 . Si F est un faisceau sur un espace topologique (ou plus généralement sur un topos), la catégorie C des torseurs sous F, munie de la composition de Baer, est une Gr-catégorie (et même une catégorie de Picard stricte, cf. plus bas). On peut considérer la catégorie C des Modules inversibles sur un espace (ou topos) localement annelé $(X, \underline{O}_X)$ comme le cas particulier correspondant au cas $F = \underline{O}_X^*$.

3 . Si A est une catégorie, la sous-catégorie pleine C de $\underline{\mathrm{Hom}}(A,A)_{\mathrm{is}}$ formée des équivalences de A avec elle-même, munie de l'opération de composition des foncteurs, est une Gr-catégorie. Au lieu de prendre pour A une catégorie, on peut pas généralement prendre pour A un objet d'une 2-catégorie quelconque. Si p.ex. F est un faisceau en groupes (pas nécessairement commutatif) sur un espace topologique (ou un topos) X, prenant pour A le "champ" sur X formé des F-foncteurs à droite, la Gr-catégorie des auto-équivalences de A avec lui-même s'interprète comme la catégorie des "bitorseurs" sous F, i.e. des faisceaux P sur lesquels F opère à la fois à droite et à guache, ces opérations commutant et chacune d'elles faisant de P un torseur (à droite ou à guache) sous F, — la composition $\otimes$ étant la composition de Baer évidente. Lorsque F est encore de la forme $\underline{O}_X^*$ ($\underline{O}_X$ étant un faisceau d'anneaux, qu'on ne suppose plus nécessairement commutatif) ces bitorseurs s'interprètent aussi en termes de bi-Modules "inversibles" sous $\underline{O}_X$.

Structure. — Soit C une Gr-catégorie, on lui associe

a) le groupe $\pi_0(C)$ des classes d'isomorphisme d'objets de C,

b) le groupe $\pi_1(C)$ des automorphismes de 1_C (objet unité de C)

c) une action de $\pi_0(C)$ sur $\pi_1(C)$, en associant à tout objet X de C

l'automorphisme $p(X)$ de 1_C déduit des deux isomorphismes

$$\mathrm{Aut}(1_C) \rightrightarrows \mathrm{Aut}(X)$$

donnés par $u \mapsto u \otimes \mathrm{id}_X$ et $u \mapsto \mathrm{id}_X \otimes u$.

On prouve que $\pi_1(C)$ est un groupe *commutatif* et que l'on obtient bien par c) une structure de $\pi_0(C)$-module sur celui-ci. Ceci posé, si on choisit pour tout $a \in \pi_0(C)$ un représentant $L_a \in \mathrm{Ob}\, C$ de a, et pour deux a, b un isomorphisme

$$\varphi_{a,b} : L_a \otimes L_b \simeq L_{ab},$$

alors pour trois éléments $a, b, c \in \pi_0(C)$, l'isomorphisme d'associativité

$$(L_a \otimes L_b) \otimes L_c \simeq L_a \otimes (L_b \otimes L_c),$$

compte tenu des isomorphismes $\varphi_{a,b}$, $\varphi_{ab,c}$, $\varphi_{b,c}$ et $\varphi_{a,bc}$, peut s'interpréter comme un isomorphisme

$$L_{abc} \simeq L_{abc},$$

ou encore comme la tensorisation à guache avec un élément bien déterminé

$$f(a, b, c) \in \pi_1(C).$$

Les $\varphi_{a,b}$ étant choisis, on voit donc que la donnée d'un isomorphisme d'associativité fonctoriel $(L \otimes L') \otimes L'' \simeq L \otimes (L' \otimes L'')$ équivaut à la donnée de l'application

$$f : \pi_0 \times \pi_0 \times \pi_0 \longrightarrow \pi_1.$$

On vérifie alors que l'axiome standard d'autocompatibilité d'une donnée d'associativité (axiome du pentagone) s'exprime précisément par la condition que f soit un *3-cocycle* du groupe π_0 à valeurs dans le groupe π_1. D'autre part, l'indétermination dans le choix du système d'isomorphismes $\varphi_{a,b}$ est précisément donnée par une 2-cochaine arbitraire, et on voit que si on change φ par une 2-cochaine g, f est changé en $f + dg$ - donc l'ensemble des f correspondants à des choix différents de φ est exactement une classe de 3-cohomologie

$$k(C) \in \mathrm{H}^3(\pi_0(C), \pi_1(C)).$$

En précisant ces réflexions, on trouve que la classification, à $\otimes$-équivalence près, des Gr-catégories, se fait précisément en termes de un groupe π_0, d'un groupe commutatif π_1 sur lequel π_0 opère, et d'une classe de cohomologie (qui peut être prise arbitraire) dans $H^3(\pi_0, \pi_1)$. La loi de groupe du H^3 admet d'ailleurs une interprétation "géométrique" à la Baer, en termes d'opérations sur les Gr-catégories.

Cas particuliers. — Dans l'exemple

2. Catégories de Picard

3. Catégories de Picard enveloppantes

Bibliographie

[1]. Gr-catégories

[2]. NEANTRO SAAVEDRA RIVANO — *Catégories tannakiennes*, Lecture notes in mathematics n°265. Springer Verlag 1972

Lettre à P. Deligne, J. Giraud et J.-L Verdier 23.6.71974[7]

Villecun le 23.6.71974

Chers Deligne, Giraud, Verdier,

Vous savez peut-être qu'une mathématicienne vietnamienne, Hoang Xuan Sinh

Pour ce qui est des formalités administratives, c'est la frère de Hoan Xuan Man, qui habite à Antony, qui s'en occupera pour elle. À toutes fin utile, je vous passe son adresse :

Hoang Xuan Sinh, 49 rue de Châtenay, Estérel, 92 Antony, Tél BER 63 79.

Dans l'attente d'une réponse prochaine, bien cordialement

Schurik

PS. N'ayant pas l'adresse de Giraud, je demande à Verdier s'il peut bien lui transmettre la lettre et le rapport. Je pense que celui-ci doit pouvoir servir comme rapport de thèse aussi vis à vis de l'administration universitaire en France.

[7] https://agrothendieck.github.io/divers/LGDVG23674scan.pdf

Lettre à P. Deligne[8], 7.8.1974[9]

7.8.1974

Cher Deligne,

Étant peut-être empêché par mon jambe d'assurer un cours de 1er cycle au 1er trimestre, je vais peut-être à la place faire un petit séminaire d'algèbre, et envisage de le faire sur les fourbis de Mme Sinh, éventuellement transposés dans le contexte des "champs". à ce propos, je tombe sur le truc suivant, qui pour l'instant reste heuristique. Si M, N sont deux faisceaux abéliens sur un topos X, et $\tau_{\leq 2}\,\mathrm{R\,Hom}(M,N) = E(M,N)$ est le complexe ayant les invariants

$$\begin{cases} \mathbf{H}^i &= \ ^i(M,N) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq 2 \\ \mathbf{H}^i &= \ 0 \qquad\qquad \text{si } i \notin [0,2], \end{cases}$$

il doit y avoir un triangle distingué canonique

(T)
$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(M, 2N)[-2] \arrow[dl] & \\ E(M,N) \arrow[rr] & & E'(M,N), \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

donc $E'(M,N)$ est un complexe dont les invariants $\mathbf{H}^i$ sont ceux de $E(M,N)$ en degré $i \neq 2$, et qui en degré 2 donne lieu à une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \ ^2(M,N) \longrightarrow \overbrace{\mathbf{H}^2(E'(M,N))}^{P(M,N)} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Hom}(M, 2N) \longrightarrow 0\,.$$

Heuristiquement, $E'(M,N)$ est le complexe qui exprime le " 2-champ de Picard strict" formé des 1-champs de Picard (pas nécessairement stricts) " épinglés" par M, N sur des objets variables de X, en admettant que ta théorie pour les 1-champs de Picard stricts s'étend aux 2-champs de Picard stricts (ce qui pour moi ne fait guère de doute) ; de même $E(M,N)$ correspond aux champs de Picard *stricts* épinglés par M, N. La suite exacte $(*)$ se construit en tous cas canoniquement

[9]Transcribed with the collaboration of M. Künzer

“ à la main”, où le terme médian est le faisceau des classes à “ équivalence” près des champs de Picard épinglés par M, N, or étant l'invariant qui s'obtient en associant à toute section L d'un champ de Picard la symétrie de $L \otimes L$, interprété comme section de $2N$. Je sais prouver (sauf erreur) que tout homomorphisme $M \longrightarrow 2N$ provient d'un champ de Picard convenable (épinglé par M, N) (a priori l'obstruction est dans $\mathrm{Ext}^3(X; M, N)$, mais un argument ‘ùniversel” prouve qu'elle est nulle). Cela prouve que l'extension $(*)$ est bien proche d'être splittée : toute section du troisième faisceaux, sur un objet quelconque de X, se remonte – en d'autres termes, l'extension a une section “ensembliste”. Bien sûr, il y a mieux en fait : toute section sur un $U \in \mathrm{Ob}\, X$ “provient” d'un élément de $H^2(U, E'(M,N))$ (hypercohomolo - H^2).

Exemple. Soit A un anneau sur X, soient M, N respectivement les faisceaux K^0, K^1 associés au champ additif des A-Modules projectifs de type fini (p. ex.). Alors la construction de Mme Sinh nous fournit un champ de Picard épinglé par M, N, d'où une section canonique du terme médian $P(M,N)$ de $(*)$.

NB. Tout ce qui précède a les fonctorialités évidentes en M, N, X, ...

Question. Le triangle exact (T) et la suite exacte $(*)$ sont-ils connus par les compétences (Quillen, Breen, Illusie ...) ? Connaissent-ils des variantes “supérieures” ? (Un principe “géométrique” pour les obtenir pourrait être via des n-champs de Picard non nécessairement stricts ...)

Je profite de l'occasion pour soulever une question sur la “cohomologie relative”. Soit $q : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos. Si F est un faisceau abélien (ou un complexe d'iceux) sur Y, peut-on définir *fonctoriellement* en F la cohomologie relative $\mathrm{R}\Gamma(YX, F)$ (de la catégorie dérivée de $\mathrm{Ab}(Y)$ dans celle de Ab) ? L'interprétation “géométrique” en termes d'opérations sur des n-champs de Picard (n “grand”) suggère que ça doit exister. Mais je ne vois de construction évidente “ à la main” que dans les deux cas extrêmes :

(a) q est “(—1)-acyclique”, i.e. pour tout F sur Y, $F \longrightarrow q_* q^* F$ est injectif (*NB* C'est le cas de $Y/P \longrightarrow Y$ si $P \longrightarrow e_Y$ est un épimorphisme – c'est donc le cas de ${}_e \longrightarrow_G$ plus haut.)

On prend

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Coker}(F \longrightarrow q_*(\underbrace{C(q^*(F))}_{\text{résolution injective}}))[-1])\,.$$

(b) $\forall\, F$ injectif sur Y, $q^*(F)$ est injectif et $F \longrightarrow q_* q^* F$ est un épimorphisme (exemple : q inclusion d'un ouvert $U e_Y$). On prend

$$\mathrm{R}\Gamma_Y(\mathrm{Ker}(\underbrace{C(F)}_{\text{résolution injective}} \longrightarrow q_* q^*(C(F))))\,.$$

Dans le cas général, la difficulté provient du fait que le cône d'un morphisme de complexes (tel que

$$F \longrightarrow q_*(q^*(F)) \qquad\qquad)$$

n'est pas fonctoriel (dans la catégorie dérivée) par rapport à la flèche dont on veut prendre le cône. Et pourtant, dans le cas particulier actuel, il devrait y avoir un choix fonctoriel. Est-ce évident ?

Question pour Illusie : Dans sa théorie des déformations de schémas en groupes plats, il tombe sur des $\mathrm{H}^3({}_G/X,-)$ resp. des $\mathrm{Ext}^2(X;-,=)$. Peut-on court-circuiter sa théorie via la théorie (supposée écrite) des Gr-champs – resp. via ta théorie des champs de Picard ? J'ai `[phrase incomplète]`

Je te signale que j'ai réfléchi aux Gr-champs sur X. Si G est un Groupe sur X, N un G-Module, les Gr-champs sur X " épinglés par G, N " forment a priori une 2-catégorie et même une 2-catégorie de Picard stricte, grâce à l'opération évidente à la Baer. On trouve que le complexe (de cochaînes) tronqué à 1 échelon à qui lui correspond est le tronqué

$$\tau_{\leq 2}(\mathrm{R}\Gamma({}_G X, N)[1])\,.$$

(*NB* la cohomologie de $\mathrm{R}\Gamma({}_G X, N)$ commence en degré 1.) Plus géométriquement, un Gr-champ sur X épinglé par (G,N) est essentiellement "la même chose" qu'une 2-gerbe sur ${}_G$, liée par N, et munie d'une trivialisation au dessus de $X \approx_e = ({}_G)/P$ (où P est l'objet de ${}_G$ "torseur universel sous G"). Ces 2-gerbes forment en fait une 3-catégorie de Picard a priori, mais il se trouve que dans celle-ci, les 3-flèches sont triviales (i.e. si source = but, ce sont des identités) – cela ne fait qu'exprimer $\mathrm{H}^0({}_G/X,N) = 0$ (i.e. $\mathrm{H}^0({}_G,N) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X,N)$ injectif ...). Donc la 3-catégorie peut être regardée comme une 2-catégorie – et “c’est” celle des Gr-champs sur X épinglés par G, N. Si on veut localiser sur X, et décrire le 2-*champs* de Picard sur X des champs de Picard (sur des objets variables de X) épinglés par G, N, on trouve qu’il est exprimé par le complexe

$$\tau_{\leq 2}(\mathrm{R}\, p_{G*}\,\mathrm{Coker}(N \longrightarrow \mathrm{R}\, q_{G*}\overbrace{C(q_G^* N)}^{\text{résolution injective}}))\,,$$

où $p_G : {}_G \longrightarrow X$ et $q_G : {}_e \approx X \simeq ({}_G)_P \longrightarrow {}_G$. Toutes ces descriptions étant compatibles avec des variations de G, N, X, cela donne en principe une description de la 2-catégorie des Gr-champs, avec X, G, N variables…

Lettre à L. Breen 5.2.1975

Villecun 5.2.1975

Cher Breen,

...Pour tout le reste de ta lettre, elle mériterait un lecteur plus averti, aussi, pour qu'elle ne soit pas entièrement perdue au monde, je vais l'envoyer à Illusie ! J'ai néanmoins constaté, avec intérêt, ton intérêt â demi refoulé pour des 2-catégories de Picard, n-catégories et autre faune de ce genre, et ton espoir que je te prouverai peut-être que ces animaux sont tout à fait indispensables pour faire des maths sérieuses dans telle circonstance. J'ai bien peur que cet espoir ne soit déçu, je crois que jusqu'à maintenant on a toujours pu d'en tirer en éludant de tels objets et l'engrenage dans lequel ils pourraient nous entraîner. Est-ce nécessairement une raison pour continuer à les éluder ? Les situations où on a l'impression "d'éluder" en effet me semblent en tous cas devenir toujours plus nombreuses - et si on s'abstenait de tirer une situation complexe et chargée de mystère au clair, chaque fois qu'on ne serait pas *forcé* de le faire pour des raisons techniques provenant de la math déjà faite, - il y aurait sans doute beaucoup de parties des maths aujourd'hui reputées "sérieusses" qui n'auraient jamais été developpées (Il n'est pas dit non plus que le mode s'en trouverait plus mal...). Ton commentaire (que j'ai également entendu chez Deligne) que la classification d'objets géométriques relativement merdiques se réduit finalement à des invariants cohomologiques essentiellement "bien connus" et relativement simples n'est pas non plus convainquant; n'est ce pas négliger la différence entre la *compréhension d'un objet géométrique*, et la détermination de sa "classe à isomorphisme (ou équivalence) près" ?

Tu me demandes des exemples "convainquants" de 2-catégories de Picard. Voici quelques exemples, en vrac (je ne sais s'ils seraient convainquants !):

1) Si L est un lien[10] de centre Z sur le topos X, les *gerbes liées par* Z forment une 2-catégorie de Picard stricte, représentée par le complexe $_X(Z)$ tronqué

[10]For the notion of a "lien" (or "tie"), which is one of the main ingredients of the non-commutative cohomology panoply of Giraud's theory, I refer to his books (Springer, Grundlehren 179, 1971). A *Picard category* is a groupoid endowed with an operation $\otimes$ together with associativity, unity and commutativity data for this operation, which make it resemble to a commutative

en degré 2, dont les objets de cohomologie non triviaux sont les $\mathrm{H}^i(X,Z)$, $0 \le i \le 2$. Les gerbes liées par L forment un *pseudo-2-torseur* sous le gerbe précédente, qui est un 2-torseur (i.e. non vide) si et seule si une certaine obstruction dans $\mathrm{H}^3(X,Z)$ est nulle. Pour comprendre cette classe de notre point de vue, il y a lieu de passer aux 2-champs correspondants: le 2-champs de Picard strict des Z-gerbes sur des objets variables de X, et le 2-champ des L-gerbes sur des objets variables. Ce dernier est bel et bien un 2-torseur sous le champ précédent, or la classification de ces 2-torseurs (à 2-équivalence près) se fait par le $\mathrm{H}^3(X,Z)$, (tout comme les Z-L-gerbes peuvent être interprétées comme des torseurs sous la Z-L-champ de Picard strict des Z-torseurs, et sont classifiées par le $\mathrm{H}^2(X,Z)$). On voit déjà, bien sûr, poindre ici l'oreille de la 3-catégorie de Picard stricte des 2-gerbes liées par Z, ou (de façon équivalente) des 2-torseurs sous le 2-champ de Picard strict des Z-L-gerbes; cette 3-catégorie de Picard stricte étant décrite par $_X(Z)$ tronqué en dimension 3, ayant comme invariants de cohomologie non triviaux les $\mathrm{H}^i(X,Z)$ ($0 \le i \le 3$). Quant au 3-champ de Picard correspondant, il est décrit par une résolution injective de Z tronqué en degré 3, alors que le 2-champ de Picard précédent se décrivait en tronquant en degré 2.

2) Si M et N sont deux faisceaux abéliens sur X, les *champs de Picard* (N.B. 1-champs !) *d'invariants M et N* forment eux-même une 2-catégorie de Picard stricte, représentée sans doute par le complexe $(X(M),N)$[11] tronqué en de-

group. A *"Champ de Picard"* (or "Picard stack") is defined accordingly, by relativizing over an arbitrary space or topos (replacing the groupoid by a stack of groupoids over this topos). The necessary "general nonsense" on these notions is developed rather carefully in an exposé of Deligne in SGA 4 (SGA 4 XVIII 1.4). In this letter to Larry Breen, I am asuming "known" the notion of an n-stack (for $n=3$ at any rate), and the corresponding notion of (strict) *Picard n-stack*, which should be describable (as was explained in Deligne's notes in the case $n=1$) by an n-truncated chain complex in the category of abelian sheaves on X (viewed mainly as an object of the relevant derived category). The "strictness" condition on usual Picard stacks refers to the restriction that the commutativity isomorphism within an object $L \otimes L'$, when $L = L'$, should reduce to the identity. It is assumed (without further explanation) that the condition carries over in a natural way to Picard n-stacks, in such a a way as to allow an interpretation of these by truncated objects in a suitable derived category, as hinted above.

[11] When M is any abelian sheaf on a topos, the "MacLane resolution" $X(M)$ is a certain canonical

gré 2, dont les invariants de cohomologie non triviaux sont donc “le drôle de Ext^2” de ma lettre à Deligne, et les honnêtes $\mathrm{Ext}^i(M,N)$ ($0 \leq i \leq 2$). Les champs de Picard stricts forment une sous-2-catégorie de Picard pleine, représentée par (M,N) tronqué en degré 2, d'invariants les $\mathrm{Ext}^i(M;N)$ ($0 \leq i \leq 2$). Bien sûr, Ext^2 donne les 0-objets à équivalence près, Ext^1 les automorphismes à isomorphisme près de l'objet nul, Ext^0 les automorphismes de l'automorphisme identique audit…Je n'ai pas réfléchi à une bonne interprétation géométrique de la n-catégorie de Picard associée à (M,N) tronqué en degré n, et encore moins bien sûr pour $(X(M),N)$, mais sans doute il faut regarder dans la direction des n-champs de Picard.

3) Soit G un Groupe sur X, opérant sur un faisceau abélien N. Les *champs en* Gr-*catégories sur X liés par* (G,N) forment une 2-catégorie de Picard, dont les invariants sont $\mathrm{H}^3(\mathrm{B}_G\, modX,N)$, $\mathrm{H}^2(\mathrm{B}_G\, modX,N)$ et $Z^1(G,N)$ (groupe des 1-cocycles de G à coefficients dans N) - je te laisse le soin de deviner quel est le complexe qui le décrit ! J'ai écrit il y a quelques mois à Delignecf. LGD7874 à ce sujet, et l'ai prié de t'envoyer une copie de la lettre.

4) Soit X un topos localement annelé, on peut considérer les *Algèbres d'Azumaya sur X* (i.e. les Algèbres localement isomorphes à une algèbre de matrices d'ordre n, $n \geq 1$) comme les objets d'une 2-catégorie de Picard, où la catégorie $\mathrm{Hom}(A,B)$, pour A et B des Algèbres d'Azumaya, est la catégorie des “trivialisations” de $A^\circ \otimes B$, i.e. des couples $(E,\varnothing)$, E un Module localement libre et $\varnothing$ un isomorphisme $(E) \simeq A^\circ \otimes B$. Il faut travailler un peu pour définir les accouplements $\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C)$; l'opération $\otimes$ dans la 2-catégorie de Picard à construire est bien sûr le produit tensoriel d'Algèbres, et l'opération “puissance —1” est le passage à l'algèbre

left resolution of M by sheaves of $\mathbf{Z}$-modules which are “free”, and more specifically, which are finite direct sums of sheaves of the type $\mathbf{Z}^{(T)}$, where T is any sheaf of the type M^n (finite product of copies of M). This canonical construction was introduced by MacLane (for abelian groups), and gained new popularity in the French school of algebraic geometry and homological algebra in the late sixties, because it gives a very handy way to relate the $\mathrm{Ext}^i(M,N)$ invariants (when N is another abelian sheaf on X) to the “spacial” cohomology of M (i.e. of the induced topos $X_{/M}$) with coefficients in N.

opposée. On vérifie qu'en associant à toute Algèbre d'Azumaya la 1-gerbe de ses trivialisations, on trouve un 2-$\otimes$-foncteur de la 2-catégorie de Picard (dite "de Brauer") dans celle des 1-gerbes liées par $\mathbf{G}_m$, qui est 2-fidèle. Les invariants de la première sont donc les groupes $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{G}_m)_{\mathrm{Br}}$, $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{G}_m)$ et $\mathrm{H}^0(X, \mathbf{G}_m)$, où dans le premier terme l'indice Br désigne le sous-groupe du H^2 formé des classes de cohomologie provenant d'Algèbres d'Azumaya. On aurait envie de parler du 2-champ de Picard des Algèbres d'Azumaya sur des objets variables de X, mais c'est bien une 2-catégorie de Picard fibrée sur X, mais pas tout à fait un 2-champ (whatever that means), san doute - la condition de 2-recollement (whatever that means) ne doit pas être satisfaite - sinon il n'y aurait pas d'indice Br au H^2...

La considération des n-catégories de Picard strictes (qui s'imposent à nous pas à pas dans un contexte essentiellement "commutatif") me semblent la clef du passage de l'algèbre homologique ordinaire ("commutative"), en termes de complexes, à une algèbre homologique non commutative, du fait qu'elles donnent une interprétation géométrique correcte des "complexes tronqués à l'ordre n" (en tant qui objets de catégories dérivées), donc, essentiellement (par passage à la limite sur n) des complexes tout courts. L'idée naïve qui se présente est alors que les "complexes non commutatifs" (qui seraient les objets-fantômes d'une algèbre homologique non commutative) sont peut-être ce qui reste des n-catégories de Picard (strictes) quand on oublie leur caractère additif, i.e. leur structure de Picard - c'est à dire qu'on ne retient que la n-catégorie ! (Quand on se place sur un topos X, on s'intéresse donc aux n-champs sur X...) A vrai dire, cette idée est venue d'abord d'une autre direction, quand il s'est agi en géométrie algébrique de démontrer des *théorèmes de Lefschetz* à coefficients discrets en cohomologie étale, dans le cas d'une variété projective disons et de toute section hyperplane, ou d'une variété quasi-projective et de presque toute section hyperplane (pour ne mentionner que le cas global le plus simple), sous les hypothèses de profondeur cohomologique "le plus naturelles" (en fait, essentiellement des conditions nécessaires et suffisantes de validité du dit théorème). Dans le cas commutatif, les techniques de dualité nous suggèrent très clairement quels sont les meilleurs énoncés possibles, cf. l'exposé de Mme Raynaud dans SGA 2SGA2. Mais ces techniques ne valent qu'en se restreignant à des coefficients premiers aux caractéristiques, alors que des démonstrations directes plus géométriques (développées dans SGA 2 avant le développement du formalisme de la cohomologie étale) donnaient des résultats très voisins pour le H^0 et le H^1 (ou le π_0 et le π_1, si on préfère) sans telles restrictions, du moins dans le cas propre (i.e. projectif, au lien de quasi-projectif). En fait, ce sont les "résultats les meilleurs possibles" eux-mêmes, énoncés comme conjectures dans SGA 2 dans l'exposé cité de Mme Raynaud, qui sont démontres ultérieurement par elle dans sa thèseRaynaud1975. Ce qui est remarquable de notre point de vue, c'est que les énoncés les plus forts se présentent le plus naturellement sous forme d'énoncés sur des *1-champs* sur le site étale de la variété algébrique considérée - la notion de "profondeur $\geq i$ (pour $i = 1, 2, 3$) s'énonçant aussi le plus naturellement en termes de champs. Non seulement cela, mais alors même qu'on voudrait ignorer la notion technique de champ et travailler exclusivement en termes de H^0 et H^1 en utilisant à bloc le formalisme cohomologique non commutatif de Giraud, pour démontrer disons un théorème de bijectivité $\pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$ (ce qui est le résultat le plus profond établi dans la thèse de Mme Raynaud), il semble bien qu'on n'y arrive pas, faute à ce formalisme d'avoir la souplesse nécessaire. En fait, il faut utiliser comme ingrédients techniques, de façon essentielle, les trois théorèmes suivantes directement pour les 1-champs "de torsion" (i.e. où les faisceaux en groupes d'automorphismes sont de ind-torsion): a) théorème de changement de base pour une morphisme propre, b) théorème de changement de base par un morphisme lisse c) théorème de "propreté cohomologique générique" pour un morphisme de type fini $f : X \longrightarrow S$, S intègre (disant que l'on peut trouver dans S un ouvert $U \neq \varnothing$ tel que pour *tout* changement de base $S' \longrightarrow S$ se factorisant par u, la formule de changement de base est vraie). (Pour b) et c), il faut faire des hypothèses que les faisceaux d'automorphismes sont premiers aux charactéristiques, et dans c) ne servent que dans la version "générique" du théorème de Lefschetz). C'est avec en vue de telles applications que Giraud a pris la peine dans son bouquin (si je ne me trompe) de démontrer a), b) (et c) ?) dans le contexte des 1-champs et de leurs images directes et inverses. Mais du même coup il dévient clair que le contexte "naturel" des théorèmes de changement de base en cohomologie étale, des théorèmes du type de Lefschetz (dits "faibles") sur les "sections hyperplanes", tout comme de la notion de profondeur qui y joue un rôle crucial, doit être celui des n-champs. Et que le développement hypothétique de ce contexte ne risque pas de se réduire à une jonglerie purement formelle et absolument bordélique avec du "general nonsense", mais qu'on se trouvera aussitôt confronté à des tests "d'utilisabilité" aussi sérieux que la démonstration des théorèmes de changement de base et ceux du type de Lefschetz (qui même dans le contexte commutatif ne sont pas piqués de vers...). [ ] pour variantes analytiques complexes etc.

Je ne sais si ces commentaires te "passent par dessus la tête" à ton tour, ni si elles te donnent l'impression qu'il aurait peut-être des choses intéressantes à tirer au clair. Si cela t'intéresse, je pourrais expliciter sous forme un peu plus systématique quelques ingrédients d'une hypothétique algèbre homologique non commutative et les liens de celle-ci à l'algèbre homologique commutative. Plus mystérieux pour moi (et pour cause, vu mon ignorance en homotopie) seraient les relations entre celle-là et l'algèbre homotopique, i.e. les structures semi-simpliciales, et je n'ai que des commentaires assez vagues à faire en ce sens (*). Par ailleurs, je te rappelle que même l'algèbre homologique commutative n'est pas, il s'en faut, dans un état satisfaisant, pour autant que je sache, vu qu'on ne sait[12] toujours pas quelle est la "bonne" notion de catégorie triangulée. Or il me semble bien clair que ce n'est pas une question purement académique - même si on a pu se passer de le savoir jusqu'ici (en se bornant comme Monsieur Jourdain à "faire de la prose sans le savoir" - en travaillant sur des catégories de complexes, éventuellement filtrés, sans trop se demander quelles structures il y a sur ces catégories...).

Bien cordialement à toi

(*) P.S. Réflexion faite, j'ai quand même envie de te mettre un peu en appétit, en faisant ces "quelques commentaires assez vagues". Il s'agit du yoga qu'une (petite) n-catégorie ou groupoïdes (à n-équivalence près) "est essentiellement la même chose" qu'une ensemble semi-simplicial pris à homotopie près et où on néglige les π_i pour $n+1 \geq i$ (où, si tu préfères, "où on a tué les groupes d'homotopie

[12]Reflecting on the "right" version of the provisional Verdier notion of a triangulated category (which was supposed to describe adequately the relevant internal structure of the derived categories of abelian categories) is part of my present program for the notes on Pursuing stacks, and will be the main task in one of the chapters of volume two. For some indications along these lines, see also section 69 (sketching the basic notion of a "*derivator*").

en dimension $\geq n+1$). Voici des éléments heuristiques pour ce yoga. Si $K_\bullet$ est un ensemble simplicial (il peut être prudent de le prendre de Kan) on lui associe une n-catégorie $C_n(K_\bullet)$, dont les 0-objets sont les 0-simplexes, les 1-objets sont les chemins (ou homotopies) entre 0-simplexes, les 2-objets sont les homotopies entre chemins (à extrémités fixées) etc. Pour les n-objets, cependant, on ne prend pas les homotopies entre homotopies de fourbis, mais classes d'équivalence de homotopies (modulo la relation d'homotopie) entre homotopies. La composition des i-objets ($i \geq 1$) se définit de façon évidente, on notera qu'elle n'est pas strictement associative, mais associative modulo homotopie. Donc la n-catégorie qu'on obtient n'est pas "stricte" - et on prévoit pas mal d'emmerdement pour définir de façon raisonnable une n-catégorie pas stricte (dans la description des compatibilités pour les "données d'associativité). La mise sur pied du yoga qui suit pourrait constituer un fil d'Ariadne pour la définition en forme des n-catégories (pas strictes), les n-foncteurs entre elles (pas non plus stricts, et pour cause), les n-équivalences etc, au même titre que le yoga initial 'ùne n-catégorie est une catégorie ou les Hom et leurs accouplements de composition sont des $(n-1)$-catégories et des accouplements entre telles". Cette n-catégorie $C_n(K_\bullet)$ dépend fonctoriellement de $K_\bullet$, tout morphisme simplicial $K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ définit un n-foncteur $C_n(K_\bullet \longrightarrow C_n(K'_\bullet))$; en fait, cela doit en dépendre même n-fonctoriellement, vu qu'on voit (en s'inspirant de ce qui précède et l'application à des ensembles semi-simpliciaux de la forme $\mathrm{Hom}_\bullet(K_\bullet, K'_\bullet)$) que les ensembles semi-simpliciaux forment eux-mêmes les 0-objets d'une n-catégorie, quel que soit $n\ldots$

En fait, $C_n(K_\bullet)$ est un n-groupoïde, i.e. une n-catégorie où toute i-flèche ($1 \leq i \leq n$) ($= i$-objet) est une "équivalence" i.e. admet un quasi-inverse (donc un inverse si la n-catégorie est "réduite"). Si C est une telle n-catégorie i.e. un n-groupoïde, et X un 0-objet de C, il s'impose de désigner par $\pi_i(C,x)$ ($0 \leq i \leq n$) successivement : l'ensemble des classes de 0-objets à équivalence près de 1-objets (ou 1-flèches) $x \longrightarrow x$ (c'est un groupe, pas nécessairement commutatif), l'ensemble des classes modulo équivalence des 2-flèches $1_x \longrightarrow 1_x$, où 1_x est la 1-flèche identique de x (c'est un groupe commutatif $\pi_2(C,x)$, ainsi que les groupes qui vont suivre), l'ensemble des classes modulo équivalence de 3-flèches $1_{1_x} \longrightarrow 1_{1_x}$, etc. Ces groupes forment, comme de juste, des "systèmes locaux" sur l'ensemble des 0-objets de C, et modulo le grain de sel habituel, les $\pi_i(C,x)$ ne dépendent que de la "composante connexe" du 0-objet x i.e. de sa classe modulo équivalence de 0-objets. Ceci dit, si C est de la forme $C_n(K_\bullet)$, il résulte pratiquement des définitions que l'on a des isomorphismes canoniques $\pi_i(K_\bullet, x) \simeq \pi_i(C_n(K_\bullet))$ pour $0 \leq i \leq n$, qui pour x variable peuvent s'interpréter comme des isomorphismes de systèmes locaux. Il s'ensuit que pour une application semi-simplicial $f : K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$, le n-foncteur correspondant $C_n(K_\bullet) \longrightarrow C_n(K'_\bullet)$ est une n-équivalence si et seule si f induit un isomorphisme sur les π_0 et sur les π_i en tout point ($1 \leq i \leq n$). On serait plus heureux de pouvoir dire à la place "et de plus un homomorphisme surjectif pour $i = n+1$, car c'est, il me semble, cela qu'il faudrait pour espérer pouvoir conclure que la catégorie localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, obtenue en inversant les flèches "qui induisent des isomorphismes sur les π_i pour $0 \leq i \leq n$ (ou encore, "en négligeant" les ensembles semi-simpliciaux n-connexes), est équivalente à la catégorie localisée de la catégorie des n-catégories, où on rend inversibles les n-équivalences ? Quoi qu'il en soit, ces petites bavures devraient disparaître lorsqu'on "stabilise" en faisant augmenter n. A ce propos, on voit que le foncteur "troncature en dimension n" de la théorie homotopique (consistant à tuer les groupes d'homotopie à partir de la dimension $n+1$) s'interprète dans la langage des n-catégories par l'opération faisant passer d'une N-catégorie ($N > n$) à une n-catégorie, en conservant tels quels les i-objets ($0 \leq i \leq n-1$) et leur composition ($1 \leq i \leq n-1$), et en remplaçant les n-objets par les classes de n-objets "'a équivalence près", avec la composition obtenue par passage au quotient. De même, le foncteur d'inclusion évident en théorie homotopique, consistant à regarder un ensemble semi-simplicial "où on a négligé les π_i pour $i \geq n+1$" comme un ensemble semi-simplicial (dans la catégorie homotopique) qui se trouve avoir des π_i nuls pour $i \geq n+1$, se traduit par le foncteur allant des n-catégories vers les N-catégories, obtenue en ajoutant à une n-catégorie des i-flèches ($n+1 \leq i \leq N$) identiques exclusivement. (Ainsi, un ensemble est regardé comme une catégorie "discrète", une catégorie comme une 2-catégorie où les $\mathrm{Hom}(A,B)$, A et B des 0-objets, sont des catégories discrètes, etc...).

Bien entendu, rien n'empêche de considérer aussi la notion de ∞-catégorie, à laquelle celle de n-catégorie est comme la notion d'ensemble semi-simplicial tronqué à celle d'ensemble semi-simplicial. Sauf erreur, la localisée de la catégorie des ∞-catégories, pour les flèches de ∞-équivalence, est équivalente à "la catégorie homotopique", localisée de la catégorie des ensembles semi-simpliciaux, ou du moins une sorte de complétée de celle-là. Dans cette optique, le tapis consistant à interpréter une ∞-catégorie de Picard stricte (i.e. quelque chose qui ressemble à un groupe abélien de la catégorie des ∞-catégories) comme donnée (à ∞.équivalence près) par un complexe de chaînes regardé comme un objet d'une catégorie dérivée, est à relier au tapis de Dold-Puppe, interprétant ces derniers comme des groupes abéliens semi-simpliciaux.

Pour se donner confiance dans ce yoga général, on peut essayer d'interpréter en termes de n-catégories ou ∞-catégories des constructions familières en homotopie. Ainsi, l'espace des lacets $\Omega(K_\bullet, x)$ correspond manifestement à la $(n-1)$-catégorie $\mathrm{Hom}(x,x)$ formée des i-flèches de C $(1 \leq i \leq n)$ dont la 0-origine et la 0-extrémité sont x, réindexées en les appelant $(i-1)$-flèches. Je n'aperçois pas à vue de nez un joli candidat pour la suspension en termes de n-catégories. Par contre le $\mathrm{Hom}_\bullet(K_\bullet, K'_\bullet)$ doit correspondre au $\mathrm{Hom}(C, C')$, qui est une n-catégorie quand C, C' en sont. La "fibre homotopique" d'une application semi-simpliciale $f : K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$ (transformée d'abord, pour les besoins de la cause, en une fibration de Serre par le procédé bien connu de Serre-Cartan) correspond sans doute à l'opération bien familière de produit $(n+1)$-fibré (du moins les cas $n = 0, 1$ sont bien familiers !) $C \times_{C'} C''$ pour des n-foncteurs $c \longrightarrow C'$ et $C'' \longrightarrow C'$, dans le cas où C'' est la n-catégorie ponctuelle, donc la donnée de $C'' \longrightarrow C'$ correspond à la donnée d'un 0-objet de C'. Les espaces $K(\pi, n)$ ont une interprétation évidente comme n-gerbes liées par π. Enfin, on voit aussi poindre l'analogue du dévissage de Postnikoff d'un ensemble semi-simplicial - mais la façon dont je l'entrevois (vue ma prédilection pour les topos) passe par la notion de topos classifiant d'un n-groupoïde (généralisant de façon évidente le topos classifiant d'un groupe). En termes de cette notion, on peut, il me semble, interpréter un n-groupoïde en termes d'un $(n-1)$-groupoïde (savoir son tronqué), *muni* d'une n-gerbe sur le topos classifiant, liée par π_n ("fordu" bien sûr par l'action du π_1...).

Bien sûr, il faut relativiser encore tout le yoga qu'on vient de décrire, au dessus d'un topos quelconque X. Il s'agirait donc de mettre en relation et d'identifier, dans un certaine mesure, d'une part l'algèbre homotopique sur X, d'autre part l'algèbre catégorique sur X construite en termes de la notion de n-champ en groupoïdes ($n \geq 0$ fini ou infini). On espère que la notion d'image inverse de faisceau semi-simplicial par un morphisme de topos $f : X \longrightarrow X'$ (qui est évidente) correspond à la notion évidente d'image directe de n-champs; et inversement, la notion évidente d'image directe de n-champs par f devrait correspondre à une notion plus subtile d'image directe $_*(K_\bullet)$ d'un faisceau semi-simplicial, construit sansa doute dans l'esprit des foncteurs dérivés à partir de la notion naïve (mais on hésite s'il faut mettre Łf_* ou Rf_*)... Les dévissages à la Postnikoff doivent avoir encore une interprétation remarquablement simple en termes de n-champs. Comparer à la remarque de Giraud qu'un 1-champ en groupoïdes sur X peut s'identifier au couple d'un faisceau π_0 sur X, et d'une 1-gerbe sur le topos induit $X_{/\pi_0}$ (dont le lien, comme de juste, devrait être note π_1 !). D'ailleurs, dans le cas des 1-champs en groupoïdes, la traduction de ces animaux en termes de topos classifiants au dessus de X est, je crois, développé en long et en large dans Giraud (il parle, si je me rappelle bien, d'"extensions" du topos X). L'extension (si j'ose dire) de ce tapis aux n-champs ne devrait pas poser de problème.

Remords : tâchant de préciser heuristiquement la notion de topos classifiant d'un n-champ en groupoïdes (ou plus particulièrement, d'un n-groupoïde) pour $n \geq 2$, je vois que je n'y arrive pas à vue de nez. (Bien sûr, il suffirait (procédant de proche en proche) de savoir définir un topos classifiant raisonnable pour une n-*gerbe*, liée par un faisceau abélien π_n). Donc je ne sais comment décrire le dévissage de Postnikoff en termes de n-champs, sauf pour $n \leq 2$. Ceci est lié à la question d'une description directe des groupes de cohomologie d'un n-groupoïde C (ou d'un n-champ), à coefficients disons dans un système local commutatif, de façon que pour $C = C_n(K_\bullet)$, $K_\bullet$ un ensemble semi-simplicial dont les π_i pour $i \geq n+1$ sont nuls, on trouve les groupes de cohomologie correspondants de $K_\bullet$. Peut-on le faire en associant à C, de façon convenable, un ensemble semi-simplicial "nerf" de C ?

Bien entendu, si on réussit à définir un topos classifiant pour C, celui-ci devrait être homotope à $K_\bullet$ ci-dessus, donc avoir les mêmes invariants homotopiques π_i et cohomologiques H^i ; itou pour les champs. La définition habituelle du topos classifiant, dans le cas $n = 1$, a bien cette vertu. Cas particulier typique de problème de la définition du topos classifiant : pour π un groupe commutatif, trouver un topos canonique (fonctoriel en π bien sûr...) ayant le type d'homotopie de $K(\pi, n)$, et qui généralise la définition du topos classifiant pour $n = 1$ (topos des ensembles où π opère). On frémit à l'idée que les topos pourraient ne pas faire l'affaire, et qu'il y faille des "n-topos" !! (J'espère bien que ces animaux n'existent pas...)

La théorie "d'algèbre homologique non commutative" que j'essaie de suggérer pourrait se définir, vaguement, comme l'étude parallèle des notions suivantes et de leurs relations des notions suivantes et de leurs relations multiples: a) espaces topologiques, topos, b) ensembles semi-simpliciaux, faisceaux semi-simpliciaux etc. c) n-catégories (notamment n-groupoïdes), n-champs (notament n-champs en groupoïdes) etc. d) complexes de groupes abéliens, de faisceaux abéliens. (Les "etc" réfèrent surtout aux structures supplémentaires qu'on peut envisager sur les objets du type envisagé...). C'est donc de l'algèbre avec la présence constante de motivations provenant de l'intuition topologique. Si une telle théorie devait voir le jour, il lui faudrait bien un nom, je me demande si "algèbre topologique" ne serait pas le plus adéquat ("algèbre homologique non commutative" ne peut guère aller à la longue, pour des raisons évidentes). Ce qui est aujourd'hui parfois désigné sous ce [] n'est guère qu'un bric à brac de notions (telles que anneau topologique, corps topologique, groupe topologique etc) qui ne forment guère un corps de doctrine cohérent - il ne s'impose donc pas que cela accapare un nom qui servirait mieux d'autres usages. (Comparer le nouvel usage du terme "géométrie analytique" introduit par Serre, et qui ne semble guère avoir rencontré de résistance.)

Re-salut, et au plaisir de te lire

Lettre à L. Breen 17.2.1975

Villecun 17.2.1975

Cher Breen,

Encore un “afterthought” à une lettre-fleuve sur le yoga homotopique. Comme tu sais sans doute, à un topos X on associe canoniquement un pro-ensemble simplicial, donc un “pro-type d’homotopie” en un sens convenable. Dans le cas où X est "localement homotopiquement trivial", le pro-objet associé est essentiellement constant en tant que pro-objet dans la catégorie homotopique, donc X définit un objet de la catégorie homotopique usuelle, qui est son "type d’homotopie". De même, si X est “localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$”, il définit un type d’homotopie ordinaire “tronqué en dim $\leq n$” - construction familière pour $i = 0$ ou 1, même à des gens comme moi qui ne connaissent guère l’homotopie !

Ces constructions sont fonctorielles en X. D’ailleurs, si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de topos, Artin-Mazur ont donné une condition nécéssaire et suffisante *cohomologique* pour que ce soit une "équivalence d’homotopie en dim $\leq n$” : c’est que $\mathrm{H}^i(Y,F)\mathrm{H}^i(X,f^*(F))$ pour $i \leq n$, et tout faisceau de groupes *localement constant* F sur Y, en se restreignant de plus à $i \leq 1$ dans le cas non commutatif. Ce critère, en termes de n-gerbes “localement constantes” F sur Y, s’interprète par la condition que $F(Y) \longrightarrow F(X)$ est une n-équivalence pour tout tel F et $i \leq n$. Il est certainement vrai que ceci équivaut encore au critère suivant

(A) Pour tout n-champ “localement contant” F sur Y, le n-foncteur $F(Y) \longrightarrow f^*(F)(X)$ est une n-équivalence;

ou encore à

(B) Le n-foncteur $F \longrightarrow f^*(F)$ allant de la n-catégorie des $(n-1)$-champs localement constants sur Y dans celle des $(n-1)$-champs localement constants sur X, est une n-équivalence.

En d’autres termes, les constructions sur un topos X qu’on peut faire en termes de $(n-1)$-champs *localement* constants ne dépendent que de son "(pro)-type d'homotopie n-tronquée", et le définissent. Dans le cas où X est localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, donc définit un type d'homotopie n-tronqué ordinaire, on peut interpréter ce dernier comme un n-groupoïde C_n, (défini à n-équivalence près). En termes de C_n, les $(n-1)$-champs localement constants sur X doivent s'identifier aux n-foncteurs de la n-catégorie C_n dans la n-catégorie $(n-1)-\text{Cat}$ de toutes les $(n-1)$-catégories. Dans le cas $n=1$ ceci n'est autre que la théorie de Poincaré de la classification des revêtements de X en termes du "groupoïde fondamental" C_1 de X. Par extension, C_n mérite le nom de *n-groupoïde fondamental de X*, que je propose de noter $\Pi_n(X)$. Sa connaissance induite donc celle des $\pi_i(X)$ $(0 \geq i \geq n)$ et des invariants de Postnikoff de tous les ordres jusqu'à $\mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n-1}(X), \pi_n)$.

Dans le cas d'un topos X quelconque, pas nécessairement localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, on espère pouvoir interpréter les $(n-1)$-champs localement constants sur X en termes d'un $\Pi_n(X)$ qui sera un pro-n-groupoïde. Ça a été fait en tous cas, plus ou moins, pour $n=1$ (du moins pour X connexe); le cas où X est le topos étale d'un schéma est traité in extenso dans SGA 3SGA3, à propos de la classification des tores sur une base quelconque.

Dans le cas $n=1$, on sait qu'on récupère (à équivalence près) le 1-groupoïde C_1 à partir de la 1-catégorie $\text{Hom}(C_1, \text{Ens})$ de ces foncteurs dans $\text{Ens} = 0-\text{Cat}$ (i.e. des "systèmes locaux" sur C_1 qui est un topos, dit "multigaloisien") comme la catégorie des "foncteurs fibres" sur le dit topos, i.e. la catégorie opposée à la catégorie des points de ce topos (lequel n'est autre que le *topos classifiant* de C_1). Pour préciser pour n quelconque la façon dont le n-type d'homotopie d'un topos X (supposé localement homotopiquement trivial en dim $\leq n$, pour simplifier), i.e. son n-groupoïde fondamental C_n, s'exprime en termes de la n-catégorie des "$(n-1)$-systèmes locaux sur X" i.e. des $(n-1)$-champs localement constants sur X, et par là élucider complètement l'énoncé hypothétique (B) ci-dessus, il faudrait donc expliciter comment un n-groupoïde C_n se récupère, à n-équivalence près, par la connaissance de la n-catégorie $C_n = n-\text{Hom}(C_n, (n-1)-\text{Cat})$ des $(n-1)$-systèmes locaux sur C_n. On aurait envie de dire que C_n est la catégorie des "n-foncteurs fibres" sur C_n, i.e. des n-foncteurs $C_n \longrightarrow (n-1)-\text{Cat}$ ayant certaines propriétés d'exactitude (pour $n=1$, c'était la condition d'être les foncteurs image inverse pour un morphisme de topos, i.e. de commuter aux $\varprojlim$ quelconques et aux $\varinjlim$ finies ...) C'est ici que se matérialise la peur, exprimée dans ma précédente lettre, qu'on finisse par tomber sur la notion de n-topos et morphismes de tels ! C_n serait un topos (appelé le "n-topos classifiant du n-groupoïde C_n), $(n-1)-\mathrm{Cat}$ serait le n-topos "ponctuel" type, et C_n d'interprète modulo n-équivalence comme la n-catégorie des "n-points" du n-topos classifiant C_n. Brr !

Si on espère encore pouvoir définir un bon vieux 1-topos classifiant pour un n-groupoïde C_n, comme solution d'un problème universel, je ne vois guère que le problème universel suivant : pour tout topos T, considérons $\mathrm{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$. C'est une n-catégorie, mais prenons en la 1-catégorie tronquée $\tau_1\mathrm{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$. Pour T variable, on voudrait 2-représenter le 2-foncteur contravariant $\mathrm{Top}^\circ \longrightarrow 1-\mathrm{Cat}$ par un topos classifiant $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{C_n}$, donc trouver un $\Pi_n(\mathrm{B}) \xrightarrow{\varphi} C_n$ 2-universel en le sens que pour tout T, le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(T, \mathrm{B}) \xrightarrow{u \mapsto \varphi \circ \Pi_n(u)} \tau_1 \mathrm{Hom}(\Pi_n(T), C_n)$$

soit une équivalence. Pour $n=1$ on sait que le topos classifiant de C_1 au sens usuel fait l'affaire, mais pour $n=2$ déjà, je doute que ce problème universel ait une solution. C'est peut-être lié au fait que le "théorème de Van Kampen", qu'on peut exprimer en disant que le 2-foncteur $T \longrightarrow \Pi_1(T)$ des topos localement 1-connexes vers les groupoïdes transforme (à 1-équivalence près) sommes amalgamées (et plus généralement commute aux 2-limites inductives), n'est sans doute plus vrai pour le $\Pi_2(T)$. Ainsi, si T est un espace topologique réunion de deux fermés T_1 et T_2, il n'est sans doute plus vrai que la donnée d'un 1-champ localement constant sur T "équivaut à" la donnée d'un 1-champ localement constant F_i sur T_i $(i=1,2)$ et d'une équivalence entre les restrictions de F_1 et F_2 à $T_1 \cup T_2$ (alors que l'énoncé analogue en termes de 0-champs, i.e. de revêtements, est évidemment correct).

L'énoncé (B) plus haut rend clair comment expliciter la cohomologie d'un n-groupoïde C_n. Si $C_n = \Pi_n(X)$, et si F est un $(n-1)$-champ localement constant sur X, e^X_{n-1} est le $(n-1)$-champ "final", on a une $(n-1)$-équivalence de $(n-1)$-catégories

$$\Gamma_X(F) = F(X) \simeq \mathrm{Hom}(e^X_{n-1}, F)$$

qui montre que le foncteur Γ_X "intégration sur X" sur les $(n-1)$-champs localement constants, qui inclut la cohomologie (non commutative) localement constante de X en dim $\leq n-1$, s'interprète en termes de "$(n-1)$-systèmes locaux" sur le groupoïde fondamental comme un $\mathrm{Hom}(e_{n-1}^{C_n}, F)$ où maintenant F est interprété comme un n-foncteur

$$C_n \xrightarrow{F} (n-1)-\mathrm{Cat}$$

et $e_{n-1}^{C_n}$ est le n-foncteur constant sur C_n, de valeur la $(n-1)$-catégorie finale.

Pour interpréter ceci en notation cohomologique, il faut que j'ajoute, comme "remords" à la lettre précédente, l'interprétation explicite de la cohomologie non commutative sur un topos X, en termes d'intégration de n-champs sur X. Soit F un n-champ de Picard strict sur X, il est donc défini par un complexe de cochaines L' sur X

$$0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow L^n \longrightarrow 0$$

concentré en degrés $0 \leq i \leq n$ (défini à isomorphisme unique près dans la catégorie dérivée de $\mathrm{Ab}(X)$). Ceci dit, les $\mathrm{H}^i(X, L')$ (hypercohomologie) *pour* $0 \leq i \leq n$ s'interprètent comme $\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{n-i}\Gamma_X(F)$.

Si on s'intéresse à tous les H^i (pas seulement pour $i \leq n$) on doit, pour tout $N \geq n$, regarder L' comme un complexe concentré en degrés $0 \leq i \leq N$ (en prolongeant L' par des 0 à droite).Le N-champ de Picard strict correspondant n'est plus F mais $C^{N-n}F$, où C est le foncteur "espace classifiant", s'interprétant sur les n-catégories de Picard strictes comme l'opération consistant à "translater" les i-objets en des $(i+1)$-objets, et à rajouter un unique 0-objet; il se prolonge aux n-champs de Picard "de façon évidente", on espère, de façon à commuter aux opérations d'image inverse de n-champs. On aura donc pour $i \leq N$

$$\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad i \leq N.$$

Ceci posé, il s'impose, pour tout n-champ de Picard strict F sur X, de poser

$$\boxed{\mathrm{H}^i(X, F) = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad \text{si} \quad N \geq i, n}$$

ce qui ne dépend pas du choix de l'entier $N \geq Sup(i, n)$ [**NB** On a un morphisme canonique de $(n-1)$-groupoïdes,

$$C(\Gamma_X F) \longrightarrow \Gamma_X(CF),$$

comme le montrent les constructions évidentes en termes de complexes de cochaines, et on voit de même que celui-ci induit des isomorphismes pour les π_i pour $1 \leq i \leq n+1$.]

NB On voit en passant que pour un n-champ en groupoïdes F sur X, si on se borne à vouloir définir les $\mathrm{H}^i(X,F)$ pour $0 \leq i \leq n$, on n'a pas besoin sur F d'une structure de Picard, car il suffit de poser

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n-i}(\Gamma_X(F)) \quad 0 \leq i \leq n.$$

Si d'autre part F est un n-Gr-champ (i.e. muni d'une loi de composition $F \times F \longrightarrow F$ ayant les propriétés formelles d'une loi de groupe) le $(n+1)$-"champ classifiant" est défini, et on peut définir $\mathrm{H}^i(X,F)$ pour $i \leq n+1$ par

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n+1-i}(\Gamma_X(CF))$$

en particulier

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0(\Gamma_X(CF)) = \text{ sections de } CF \text{ à équivalence près.}$$

Mais on ne peut former $CCF = C^2F$ et définir $\mathrm{H}^{n+2}(X,F)$, semble-t-il *que* si CF est lui-même un Gr-$(n+1)$-champ, ce qui ne sera sans doute le cas que si F est un n-champ de Picard strict...

Venons en maintenant au cas où F est un n-champ *localement constant* sur X, donc défini par un $(n+1)$-foncteur

$$C_{n+1} \xrightarrow{F} n - \mathrm{Cat}\,.\ \text{de Picard strictes.}$$

Alors, posant pour $0 \leq i \leq n$

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) = \pi_{n-1}(\mathrm{Hom}(e_n^{C_{n+1}},F)),$$

"on a fait ce qu'il fallait" pour que l'on ait un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) \simeq \mathrm{H}^i(X,F),$$

(valable en fait sans structure de Picard sur F...). Il s'impose, pour tout ∞-groupoïde C et tout $(n+1)$-foncteur

$$C \xrightarrow{F} n - \mathrm{Cat}\,.\ \text{de Picard strictes.}$$

de définir les $\mathrm{H}^i(C,F)$, pour tout i, par

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{N-i}\mathrm{Hom}(e_N^C, C^{N-n}F)$$

où on choisit $N \geq Sup(i,n)$. Si F n'a qu'une Gr-structure (pas nécessairement de Picard) on peut définir encore les $\mathrm{H}^i(C,F)$ pour $i \leq n+1$ par

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{n+1-i}\mathrm{Hom}(e_{n+1}^C, CF).$$

Dans le cas $C = C_{n+1} = \Pi_{n+1}(X)$, il doit être vrai encore (en vertu de (A) plus haut), que cet ensemble est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0\Gamma_X(CF)$ (c'est vrai et bien facile pour $n = 0$). Décrire la flèche canonique entre les deux membres de

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) \simeq \mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n+1}X,F) \quad ?$$

Si on veut réexpliciter (A) et (B), en termes du yoga (C), on arrive à la situation suivante:

On a un $(n+1)$-foncteur entre $(n+1)$-groupoïdes

$$f_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow D_{n+1}$$

induisant par troncature un n-foncteur

$$f_n : C_n \longrightarrow D_n$$

On doit avoir alors:

(A') f_n est une n-équivalence si et seule si le n-foncteur $\varphi \longrightarrow \varphi \circ f_n$

$$f_n^* : \mathrm{Hom}(D_n,(n-1)-\mathrm{Cat}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_n,(n-1)-\mathrm{Cat})$$

allant des $(n-1)$.systèmes locaux sur D_n (ou D_{n+1}, c'est pareil) vers les $(n-1)$-systèmes locaux sur C_n, est une n-équivalence.

(B') f_n est une n-équivalence si et seule si pour tout n-système local F sur D_{n+1},

$$F : D_{n+1} \longrightarrow n-\mathrm{Cat},$$

le n-foncteur induit par f_{n+1}

$$\underbrace{\mathrm{Hom}(e_n^{D_{n+1}}, F)}_{\Gamma_{D_{n+1}(F)}} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}(e_n^{D_{n+1}}, f_{n+1}^*F)}_{\Gamma_{C_{n+1}(F)}}$$

est une n-équivalence.

La construction de la cohomologie d'un topos en termes d'intégration des champs ne fait aucun appel à la notion de complexe de faisceaux abéliens, encore moins à la technique des résolutions injectives. On a l'impression que dans son esprit, via la définition (qui reste à expliciter !) des n-champs, elle s'apparenterait plutôt aux calculs "Cechistes" en termes d'hyperrecouvrements. Or ces derniers se décrivent à l'aide d'une petite dose d'algèbre semi-simpliciale. Si oui, cela ferait essentiellement trois approches distinctes pour construire la cohomologie d'un topos :

a) point de vue des complexes de faisceaux, des résolutions injectives, des catégories dérivées (*algèbre homologique commutative*);

b) point de vue Cechiste ou semi-simplicial (*algèbre homotopique*);

c) point de vue des n-champs (algèbre catégorique, ou *algèbre homologique non-commutative*).

Dans a) on "résoud" les coefficients, dans b) on résoud l'espace (ou topos) de base, et dans c) en apparence on ne résoud ni l'un ni l'autre.

Bien cordialement,

Alexandre

Letter to L. Breen 17.2.1975

Villecun 17.2.1975

Dear Larry,

Here is an afterthought to "une lettre-fleuve" on the yoga of homotopy. As you doubtless know, to a topos X one associates canonically a pro-simplicial set, and so in a convenient sense a "pro-homotopy type". When X is "locally homotopically trivial", the associated pro-object is essentially constant as a pro-object in the homotopy category, and so X defines, in the usual homotopy category, an object which is the "homotopy type". Similarly, if X is "locally homotopically trivial in dim $\leq n$", it defines an ordinary homotopy type, but "truncated in dim $\leq n$" - this is a familiar construction for $n = 0$ or 1, even among those like me who know hardly any homotopy theory!

These constructions are functorial in X. Moreover, if $f : X \longrightarrow Y$ is a morphism of topoi, Artin-Mazur have given a *cohomological* condition which is necessary and sufficient for f to be a "homotopy equivalence in dim $\leq n$": it is that $\mathrm{H}^i(Y,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(X, f^*(F))$ for $i \leq n$, and all *locally constant* sheaves of groups F on Y, allowing for $i \leq 1$ that F be non-commutative. This criterion, in terms of "locally constant" n-gerbes F on Y, can be interpreted as the condition that $F(Y) \longrightarrow F(X)$ is an n-equivalence for all such F and $i \leq n$. It is certainly true that this is equivalent to the following criterion:

(A) For every "locally constant" n-stack F on Y, the n-functor $F(Y) \longrightarrow f^*(F)(X)$ is an n-equivalence;

or again

(B) The n-functor $F \longrightarrow f^*(F)$ which sends the n-category of locally constant $(n-1)$-stacks in Y to that of locally constant $(n-1)$-stacks on X, is an n-equivalence.

In other terms, the construction on a topos X which one can make in terms of $(n-1)$-stacks which are *locally* constant, depend only on its "n-truncated pro-homotopy type", and define it. In the case where X is locally homotopically trivial in dim $\leq n$, and so defines a n-truncated ordinary homotopy type, one can interpret these last as an n-groupoid C_n, (defined up to n-equivalence). In terms of these

(C) The $(n-1)$-stacks on X should be able to be identified with the n-functors from the category C_n n-category $(n-1)-\mathrm{Cat}$ of all $(n-1)$-categories.

In the case $n = 1$, this is nothing other than the Poincaré theory of the classification of coverings of X in terms of the "fundamental groupoid" C_1 of X. By extension, C_n merits the name *fundamental n-groupoid* of X, which I propose to write $\Pi_n(X)$. Knowledge of this includes knowledge of the $\pi_i(X)$ $(0 \geq i \geq n)$ and the Postnikoff invariants of all orders up to $\mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n-1}(X), \pi_n)$.

In the case of an arbitrary topos X, not necessarily locally homotopically trivial in dim $\leq n$, one hopes to be able to interpret the $(n-1)$-stacks which are locally constant on X in terms of a $\Pi_n(X)$ which will be a pro-n-groupoid. This has been done, more or less, for $n = 1$ (at least for connected X); the case where X is the étale topos of a scheme is treated extensively in SGA 3, in relation to the classification of tori on an arbitrary base.

In the case $n = 1$, one knows that one can recover (up to equivalence) the 1-groupoid C_1 from the 1-category (C_1, Set) of the functors into $\mathrm{Set} = 0-\mathrm{Cat}$ (i.e. the "local systems" on C_1 which is a topos, called "multigaloisian") - like the category of "fibred functors" on the above topos, i.e. the opposite category to the category of points of this topos (which is none other than the *classifying topos* of C_1). To make precise for arbitrary n the way in which the homotopy n-type of a topos X (supposed for simplicity to be locally homotopically trivial in dim $\leq n$) i.e. its fundamental n-groupoid C_n, can be expressed in terms of the n-category of "local $(n-1)$-systems on X" i.e. of the locally constant $(n-1)$-stacks on X, and to elucidate completely the hypothetical statement (B) above, it is necessary to make explicit how an n-groupoid C_n can be recovered, up n-equivalence, from the knowledge of the n-category

$$\underline{C}_n = n-(C_n, (n-1)-\mathrm{Cat})$$

of local $(n-1)$-systems on C_n. One would like to say that C_n is the category of "fibred n-functors" on $\underline{C}_n$, i.e. of n-functors $\underline{C}_n \longrightarrow (n-1)-\mathrm{Cat}$ having certain exactness properties (for $n = 1$, this is the condition of being the inverse image functor for a morphism of topoi, i.e. to commute with arbitrary $\varprojlim$ and with finite $\varinjlim$...). It is this which makes real the fear, expressed in my preceding letter, that one ends by falling upon the notion of n-topos and of morphisms of these! $\underline{C}_n$ will be an n-topos, (called the "classifying n-topos" of the n-groupoid C_n), $(n-1)-\mathrm{Cat}$ will be the n-topos of points, and C_n will be interpreted modulo n-equivalence as the n-category of "n-points" of the classifying n-topos $\underline{C}_n$. Brr !

If one hopes to be able to define a good old classifying 1-topos for an n-groupoid C_n, as solution of a universal problem, I can see only how to recover the following universal problem: for every topos T, consider $(\Pi_n(T), C_n)$. This is an n-category, but take from it the truncated 1-category $\tau_1(\Pi_n(T), C_n)$. For variable T, one wants to 2-represent the contravariant 2-functor $\mathrm{Top}^\circ \longrightarrow 1-\mathrm{Cat}$ by a classifying topos $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{C_n}$, and then to find a 2-universal $\Pi_n(\mathrm{B}) \xrightarrow{\varphi} C_n$ in the sense that for all T, the functor

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Top}}(T, \mathrm{B}) \xrightarrow{u \mapsto \varphi \circ \Pi_n(u)} \tau_1 \underline{\mathrm{Hom}}(\Pi_n(T), C_n)$$

is an equivalence. For $n = 1$ one knows that the usual classifying topos of C_1 does the job, but for $n = 2$ already, I doubt that this universal problem has a solution. This is perhaps related to the fact that the "Van Kampen Theorem", which one can express by saying that the 2-functor $T \longrightarrow \Pi_1(T)$ of locally 1-connected topoi to groupoids transforms (up to 1-equivalence) amalgamated sums to amalgamated sums (and more generally commutes with inductive 2-limits), is doubtless no longer true for $\Pi_2(T)$. Thus, if T is a topological space which is the union of two closed sets, T_1 and T_2, it is doubtless not true that giving a locally constant 1-stack on T " is equivalent to" giving a locally constant 1-stack F_i on T_i ($i = 1, 2$) and an equivalence between the restrictions of F_1 and F_2 to $T_1 \cup T_2$ (while the analogous statement in terms of 0-stacks, i.e. for coverings, is evidently correct).

The statement (B) above makes it clear how to give explicitly the cohomology of an n-groupoid C_n. If $C_n = \Pi_n(X)$, and if F is a locally constant $(n-1)$-stack on X, and e_{n-1}^X is the "final" $(n-1)$-stack, one has an $(n-1)$-equivalence of $(n-1)$-categories

$$\Gamma_X(F) = F(X) \simeq \mathrm{Hom}(e_{n-1}^X, F)$$

which shows that the functor Γ_X "integration on X" for locally constant $(n-1)$-stacks, which includes the (non-commutative) locally constant cohomology of X in dim $\leq n-1$, can be interpreted in terms of "local $(n-1)$-systems" on the fundamental groupoid as an $(e_{n-1}^{C_n}, F)$ where now F is interpreted as an n-functor

$$C_n \xrightarrow{F} (n-1)-\mathrm{Cat}$$

and $e_{n-1}^{C_n}$ is the constant n-functor on C_n, with value the final $(n-1)$-category.

To interpret this in cohomology notation, it is necessary for me to add, as "apology" to the preceding letter, the explicit interpretation of the non-commutative cohomology on a topos X, in terms of integration of n-stacks on X. If F is a strict Picard n-stack on X, then it is defined by a complex L° on X

$$0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow L^n \longrightarrow 0$$

concentrated in degrees $0 \leq i \leq n$ (defined uniquely up to isomorphism in the derived category of $\mathrm{Ab}(X)$). That said, the $\mathrm{H}^i(X, L')$ (hypercohomology) for $0 \leq i \leq n$ can be interpreted as $\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{n-i}\Gamma_X(F)$. If one is interested in all the H^i (not just for $i \leq n$) one must, for all $N \geq n$, regard L° as a complex concentrated in degrees $0 \leq i \leq N$ by prolongation of L° by 0 to the right). The corresponding strict Picard n-stack is no longer F but $\underline{C}^{N-n}F$, where $\underline{C}$ is the "classfying space" functor, interpreted on strict Picard n-categories as the operation consisting of "translating" the i-objects to $(i+1)$-objects, and adjoining a unique 0-object; this extends one hopes, in "an obvious way", to n-stacks, so as to commute with the operation of taking the inverse image of an n-stack. One has then for $i \leq N$

$$\mathrm{H}^i(X, L') = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad i \leq N.$$

Given this, it is necessary to put, for all strict Picard n-stacks F on X,

$$\mathrm{H}^i(X, F) = \pi_{N-i}\Gamma_X(C^{N-n}F) \quad \text{if} \quad N \geq i, n$$

which does nor depend on the choice of integer $N \geq Sup(i, n)$ [**N.B.** One has a canonical morphism of $(n-1)$-groupoids,

$$C(\Gamma_X F) \longrightarrow \Gamma_X(CF),$$

as the obvious constructions in terms of cochains show, and one sees in the same way that this induces isomorphisms on π_i for $1 \le i \le n+1$.]

N.B. One sees by the way that for F and n-stack of groupoids on X, if one restricts to defining the $\mathrm{H}^i(X,F)$ for $0 \le i \le n$, one has no need of a Picard structure on F, as it is sufficient to put

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n-i}(\Gamma_X(F)) \quad 0 \le i \le n.$$

If on the other hand F is an n-Gr-stack (i.e. F has the structure of a composition law $F \times F \longrightarrow F$ with the usual formal properties of a group) the "classifying $(n+1)$-stack" is defined, and one can define $\mathrm{H}^i(X,F)$ for $i \le n+1$ by

$$\mathrm{H}^i(X,F) = \pi_{n+1-i}(\Gamma_X(CF))$$

in particular

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0(\Gamma_X(CF)) = \text{ equivalence classes of sections } \underline{C}F.$$

But one can form $C\underline{C}F = \underline{C}^2F$ and define $\mathrm{H}^{n+2}(X,F)$, it seems *only* if $\underline{C}F$ is itself a Gr-$(n+1)$-stack, which is without doubt the case only if F is a strict Picard n-stack...

Let us now come to the case where F is a *locally constant* n-stack on X, and so is defined by an $(n+1)$-functor

$$C_{n+1} \xrightarrow{F} \text{strict Picard } n-\text{Cat}.$$

Then, putting for $0 \le i \le n$

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) = \pi_{n-1}(\underline{\mathrm{Hom}}(e_n^{C_{n+1}},F)),$$

"one knows it fails", as one has a canonical isomorphism

$$\mathrm{H}^i(C_{n+1},F) \simeq \mathrm{H}^i(X,F),$$

valid in effect without Picard structure on F... It is thus necessary for all i and for every ∞-groupoid C and every $(n+1)$-functor

$$C \xrightarrow{F} \text{strict Picard } n-\text{Cat},$$

to define

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{N-i}\underline{\mathrm{Hom}}(e_N^C, C^{N-n}F)$$

where one chooses $N \geq Sup(i,n)$. If F has only a Gr-structure (not necessarily Picard) one can define the $\mathrm{H}^i(C,F)$ for $i \leq n+1$ by

$$\mathrm{H}^i(C,F) = \pi_{n+1-i}\underline{\mathrm{Hom}}(e_{n+1}^C, CF).$$

In the case $C = C_{n+1} = \Pi_{n+1}(X)$, it must still be true (by virtue of (A) above), that this set is canonically isomorphic to $\mathrm{H}^{n+1}(X,F) = \pi_0\Gamma_X(CF)$ (this is true and very easy for $n=0$). Can one describe the arrow between the two sides of

$$\mathrm{H}^{n+1}(X,F) \simeq \mathrm{H}^{n+1}(\Pi_{n+1}X,F) \quad ?$$

If one wishes to make (A) and (B) explicit again, in terms of the yoga (C), one comes to the following situation:

One has an $(n+1)$-functor between $(n+1)$-groupoids

$$f_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow D_{n+1}$$

which induces by truncation an n-functor

$$f_n : C_n \longrightarrow D_n$$

One must than have:

(A') f_n is an n-equivalence if and only if the n-functor

$$f_n^* : \underline{\mathrm{Hom}}(D_n, (n-1)-\mathrm{Cat}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C_n, (n-1)-\mathrm{Cat})$$

which sends the local $(n-1)$-systems on D_n (or, equally, on D_{n+1}) to the local $(n-1)$-systems on C_n, is an n-equivalence.

(B') f_n is an n-equivalence if and only if for every local n-system F on D_{n+1},

$$F : D_{n+1} \longrightarrow n-\mathrm{Cat},$$

the n-functor induced by f_{n+1}

$$\underbrace{(e_n^{D_{n+1}}, F)}_{\Gamma_{D_{n+1}(F)}} \longrightarrow \underbrace{(e_n^{D_{n+1}}, f_{n+1}^* F)}_{\Gamma_{C_{n+1}(F)}}$$

is an n-equivalence.

The construction of the cohomology of a topos in terms of integration of stacks makes no appeal at all to complexes of abelian sheaves and still less to the technique of injective resolutions. One has the impression that in this spirit, *via* the definition (which remains to be made explicit!) of n-stacks, it is all related above all to the "Cechist" calculations in terms of hypercoverings. Now these last are written with the help of a small dose of semi-simplicial algebra. I do not know if a theory of stacks and of operations on them can be written *without* ever using semi-simplicial algebra. If yes, there would be essentially three distinct approaches for constructing the cohomology of a topos:

a) viewpoint of complexes of sheaves, injective resolutions, derived categories (*commutative homological algebra*)

b) viewpoint Cechist or semi-simplicial (*homotopical algebra*)

c) viewpoint of n-stacks (categorical algebra, or *non-commutative homological algebra*).

In (a) one "resolves" the coefficients, in (b) one resolves the base space (or topos), and in (c) it appears one resolves neither the one nor the other.

Very cordially,

Alexandre

Letter to L. Breen, 17/19.7.1975

Villecun 17/19 Juillet 1975

Cher Larry,

Tout d'abord félicitations pour la naissance de ta fille,

Letter to L. Breen, 17/19.7.1975

Villecun 17/19.7.1975

Dear Larry,

I am happy to finish by receiving an echo to my long letter and even a beginning to a constructive approach to a theory of the type I envisaged. The construction which you propose for the notion of a non-strict n-category, and of the nerve of the functor, has certainly the merit of existing, and of being a first precise approach, but otherwise can be subject to some evident criticism: it is very technical, unintuitive (yet at the level of $1 - \mathrm{Cat}$, etc, and even of $2 - \mathrm{Cat}$, everything is so clear "you just follow your nose..."). And finally the absence of a definition of a functor sending (semi-)simplicial sets to n-groupoids. This functor correspond to a geometric intuition so clear that a theory which does not include it seems to me kind of a joke! Perhaps in trying to write down (like a sort of list of Christmas presents!) in a complete and explicit enough way the notions which one would like to have at ones disposal, and the relations (functor, equivalence, etc.) which should link them, one would arrive finally at a kind of axiomatic description sufficiently complete which should either give the key to a explicit *ad hoc* construction, or should permit at least to enunciate and prove a theorem of existence and uniqueness[13] for a theory of the required type.

Otherwise, not having understood the idea of Segal in your last letter (which I have generously sent to Illusie…), I do not see how you define the Picard n-categories - but this matters little. As far as "strict" Picard n-categories are concerned, all I ask of them is that they finally form an $(n+1)$-category $(n+1)$-equivalent to that of chain complexes of length n. Agreed? I thank you for having rectified in my mind a big blunder, due to my great ignorance of algebraic topology and homotopy - I was in fact of the impression that H-spaces satisfying conditions of associativity and commutativity strict enough (say equivalent to an $\Omega^i X$ with i

[13]As was seen in section 9, 'ùniqueness" here has to b understood in a considerably wider sense than I expected, when writing this letter to Larry Breen. It now appears that the whole theory of stacks of groupoids will depend on the choice of a "coherator" , as seen in section 13.

arbitrarily large) correspond to commutative topological groups (inspired by several analogies...). Thus I am entirely in agreement with your observations on p.5.

On the other hand, I am still intrigued by the following question: is there an analogue of the "tapis" of Dold-Puppe[14] for semi-simplicial groups (*not necessarily commutative*) and what form should it take? To tell the truth I consider the yoga

$$(*) \qquad \text{simplicial sets} \longleftrightarrow \infty - \text{groupoids}$$

as being essentially the ultimate "set theoretic" version of Dold-Puppe, which I would deduce from (*) by making explicit solely the fact that the abelian groups in $\infty-$Cat are "nothing else" than the chain complexes in Ab. One should therefore first determine what should be the groups in $\infty-$Cat. I can tell you what these are in $1-$Cat . this will be discussed at length in the book of Mme. SinhGCS, I think in the chapter "*strict* Gr-categories" (i.e. the isomorphisms of associativity, for unity and inverse $XX^{-1} \simeq 1$ are *identities*). One can make explicit for example how (*via* the fact that a Gr-category is Gr-equivalent to a strict Gr-category) the calculation with the Gr-categories reduces to a very algebraic calculation with the *strict* Gr-category, by a kind of "calculus of fractions" (by choice, left or right) of the type which is used in giving the construction of derived categories. In any case, here is the explicit formulation of the structures (groups in $1-$Cat) in terms of the theory of groups (1-categories in Gr[15]). The structure is described by a quadruplet (L_1, L_0, d, θ) with

$$L_1 \xrightarrow{d} L_0$$

a homomorphism of ordinary groups,

$$\theta : L_0 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{Gr}}(L_1)$$

[14] Tim Porter pointed out to me that "Dold-Puppe" is an inaccuracy name for this basic theorem, which should be called *Dold-Kan theorem.*

[15] AS was pointed out to me by Ronnie Brown, this structure was already well-known to J.H.C. Whitehead, under the name of "crossed module", and extensive use and extensive generalizations of this notion (in quite different directions from those I was having in mind, in terms of Gr-stacks over an arbitrary topos) have been made by him and others. With respect to the question on next page, of generalizing this notion of "non-commutative chain complex" from length one to length two, Ronnie says there is a work in preparation by D. Conduché "Modules croisés généralisés de longueur 2".

an operation of L_0 on L_1, with the following two axioms:

(a) d commutes with the operation of L_0, when L_0 acts on L_1 via θ and on itself by inner automorphisms:

$$d(\theta(x_0)x_1) = \mathrm{int}(x_0)d(x_1)$$

(b) $\theta(d()x_1) = \mathrm{int}(x_1)$.

These properties imply that $\mathrm{Im}d$ is normal in L_0 (hence $\mathrm{Coker}\,d = \pi_0$ is defined) and $\pi_1 = \mathrm{Ker}\,d$ is central in L_1, and finally that L_0 operates on L_1 leaving π_1 invariant, and it operates *via* π_0. The principal cohomological invariant of this situation is evidently the Postnikoff-Sinh invariant

$$\alpha \in \mathrm{H}^3(\pi_0, \pi_1).$$

I have met these animals - without even looking for them - in many situations, which I will not list now (I came across them recently *a propos* the classification of "ordinary" formal groups over a perfect field, in terms of *affine* algebraic groups, and *commutative* formal groups, related by the strict Gr-structures of this type (except that one has to use this formalism in an arbitrary topos (not merely in)) - to make explicit the yoga that "the transcendent character of a formal group is concentrated essentially in the commutative formal groups", discovered it seems by Dieudonné…). The question which I wish to raise is the generalisation to groups in $n-\mathrm{Cat}$, where I expect to find a non-commutative chain complex

$$L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 1$$

with supplementary structures doubtless of the type of θ, but what are they? It is understood that the topological significance of such structures is that they express exactly the "truncated homotopy type in dim $\leq n$" of topological groups, or equivalently the homotopy type in dim $\leq n+1$ of pointed connected topological spaces…). Have you candidates to propose ?

Your reflections on biduality and homology, however formal, tie in with a crowd of developments, of which only some exists at present, and others would demand considerable work still. Here are the reminiscences which your naive questions bring to mind: (A) The formalism of the $_!$, $^!$ (combined with $_*$, *, and , "the six operations") carries implicitly in itself the definition of homology and the essential identity between homology and cohomology. One now has this formalism for quasi-coherent sheaves on schemes - seminar Hartshorne (Springer L.N. 20) - for the topological spaces and arbitrary sheaves of coefficients - Verdier, *exposé* Bourbaki (SNLM 300) - and for the étale cohomology of schemes for "discrete" coefficients ("ℓ-adic" or torsion) prime to the residual characteristic (SGA 5), finally, for coherent sheaves on analytic spaces (Verdier-Ruget). (The formalism remains to be developed in the crystalline context, and in the characteristic 0 in the context of stratified modules with singularities, à la Deligne, with perhaps - over the field **C** - the introduction of additional Hodge structures, finally in the context of motives; I am convinced that it exists about anywhere - maybe, wherever there is a formalism of a cohomological nature.)

Working in étale cohomology on a separated scheme of finite type over a field k, say, with a ring of coefficients Λ of torsion prime to the characteristic, the complex of sheaves $f^!(\Lambda_e)$ (where $\hat{f} : X \longrightarrow \operatorname{Spec} k = e$) plays the role of *complex of singular chains on X with coefficients in* Λ, and $_!$ $(f^!\Lambda_e)$ plays the role of a *homology* $\mathrm{H}_*(X/e)$, *vis a vis* of course, of coefficients on e which are complexes of Λ-modules. You can easily justify this assertion with the help of the "global duality theorems", by one or two tricks which I spare you here.

REMARKS.

(1) There is no need to truncation, it works in all dimensions.

(2) This is related (at least as far as the philosophy is concerned) to he fact that for the various types of coefficients (under conditions of "constructibility") one has a theorem of "biduality", at least if one allows resolution of singularities (but Deligne has told me I believe that he knows a proof without that), with values in a "dualizing complex" K_e (on e), K_X (on X). If for example Λ is "self-dualising" (or Gorenstein) for example $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, one can take $K_e = \Lambda$, therefore the dualising complex $K_X = f^!(K_e)$ is nothing else than the "complex of singular chains with coefficients in Λ.

(3) One can do the same thing for coefficients such as $\mathbf{Z}_\ell$ (Jouanolou, thesis non

publishedJOU69, I fear!)

(4) This works also for $f : X \longrightarrow S$ finitely presented separated if f has the properties of "cohomological local triviality" (properties "local upstairs") for example f *smooth*; one finds that $\mathrm{H}_*(X/S) =_! f^!(\Lambda_S)$.

(B) Artin-Mazur have studied in a spirit close to yours the *autoduality* of the Jacobian of a relative curve X/S. It is necessary to ask them for precise results, perhaps it works say if X/S is proper and flat or relative dimension 1 - in any case it is OK on a discrete valuation ring with smooth *generic* fibre. The special fibre could be very wild. (I have used their results in SGA 7 to prove, in the case of Jacobians, a duality conjecture on the group of connected components associated to the Neron models of abelian varieties dual one to another...). Towards the end of the 50's (beginning of 60's?), when the grand cohomological stuff ($f^!$, $f^!$, étale cohomology, etc.) just came out from darkness, the course given by Serre on the theory of Rosenlich and Lang on generalised jacobians and the geometric class field theory (see Serre's book) and later the "geometric" theory of *local* class field theory making use of pro-algebraic groups (see his article on this subject), made me reflect on the cohomological formulations of these and other results, which should be of a "geometric" nature, such that the "arithmetic" results over an arbitrary base field (or residue field) k (finite, for example) follow immediately by descent from the "geometric" case of base field $\overline{k}$. I exchanged letters with Serre - I don't know if I can find copies - but I recall that I sketched projects for some ambitious enough theories on generalised residues, generalised local jacobians, etc., in at least three different directions. But I have never, in spite of numerous attempts, succeeded in mobilising someone for developing one of these programmes. Here a few words on them:

(C) In the situation where X is of finite type over a *field* k, construction of a complex of generalised jacobians $J_{*X/k}$ (of length equal to dim X).

This is a complex of affine commutative pro-algebraic groups on k, with the exception of J_0 if I remember well, (J_0 had as abelian part the abelian part of $\mathrm{Alb}_{X/k}$, the usual generalised jacobian). It's construction, inspired by the residual complex, passes by generalised jacobians (in an appropriate cohomological sense) of the localisation $\mathrm{Spec}_{\mathbf{O}_{X,x}}$ of X at its different point. N.B. $\mathbf{H}_O(J_*)$ was the "generalised

Jacobian" of X, i.e. there existed a homeomorphism $X \longrightarrow \mathbf{H}_0$, which was universal for homomorphisms of X into commutative locally proalgebraic groups. For X connected, $\mathbf{H}_O$ is an extension of $\mathbf{Z}$ by an appropriate proalgebraic group. It is possible that, at first, I restricted to the case of X smooth.

The cohomology role of this complex was that of a complex of *homology*

$$(*) \qquad \mathrm{H}^i(X, G_X) \simeq \mathrm{Ext}^i(J_{*X/k}, G)$$

but for which coefficients? I believe I took arbitrary commutative algebraic groups G but worked with the Zariski topology (malédiction !). Even in the case of discrete G, I considered the Zariskian H^i, this gives slightly stupid cohomology groups, evidently. I realised that one should work ultimately in étale cohomology, and that the construction of the $(J_i)_{X/k}$ will evidently be modified accordingly. As for the significance of the Ext^i (hypercohomology), at a moment where Serre had developed the formalism for proalgebraic groups, one was not too fearful of taking it in the category of such objects - and in the sense of a "derived category" which at that moment had never yet been explicitly defined and studied. (We have, after all, somewhat progressed since those days!). I have the impression, in view of these antique cogitations, heuristic as they were, that it should now be possible to develop at present such a theory of $J_{*X/k}$, in cohomology fppf, giving a formula (*) without limitation on the degree i of the cohomology. (N. B. But J_* evidently no longer stops in dim $X = n$ but in dim $2n$. It is nevertheless possible that the components J_i might be of dim 0 for $i > n$).

I believe that the construction of the J_* does not commute with base change, but merely does so in the derived category sense.

(D) Let X/k be a smooth scheme (for simplicity) over a field k, separated and of finite type, or relative dimension d, and n an integer > 0. If n is prime to the characteristic and if F is a sheaf of coefficients on X which is annihilated by n, the global duality tells us that $_!(F)$ and $_*((F, \mu_n^{\otimes d}))$ ($\mu_n =$ sheaf of n-th roots of unity $= \mathrm{Ker}(G_m \xrightarrow{n} G_m)$) are dual to each other with values in $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_k$, for example $_!(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ and $_*(\mu_n^{\otimes d})$, or $_!(\mu_m^{\otimes})$ and $_*(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, are dual to each other - at least with a shift of amplitude $2d$ in dimension. (As $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ is injective over itself, this gives in fact perfect duality

$$\mathrm{R}^i f_!(F) \times \mathrm{R}^{2d-i} f_*((F, \mu_n^{\otimes d})) \longrightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.)$$

If now one no longer assumes n prime to he characteristic, for example n is a power of p = characteristic of $k > 0$), it seems that everything collapses: to start with, one no longer knows (for $d > 1$) by what to replace $\mu_n^{\otimes d}$…The extraordinary miracle is that for $d = 1$, i.e. X a smooth curve, everything continues to work perfectly, provided one states things with care! The first verifications are made for example with $F = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, μ_p, or α_p, with X complete - one finds it's O.K. by virtue essentially of the autoduality of the jacobian. One can make these examples more sophisticated on taking *twisted* coefficients, and X not complete - one convinces oneself this works always! Simply, it is necessary to note that here the $\mathrm{R}^i f_*(F)$, $\mathrm{R}^i f_!(F)$ have a "continuous" structure (they are essentially poalgebric groups). This corresponds to the well known phenomenon in class field theory that the structure of $\pi_{1\mathrm{ab}}$ of X, when X is not complete, is *continuous* - hence same holds for $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ say.

By the way, I point out for you that Serre once proposed (without ever writing it down, I think) a theory of duality for *commutative unipotent* algebraic groups, *modulo radical isogeny*, duality with values in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (or $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$). He found that if (when k is algebraically closed, say) G is such a group, then $G' = \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ can canonically be given a structure of quasi-algebraic group (i.e. defined modulo radical isogeny), doubtless in a unique manner provided it verifies some functorial properties, and on requiring that for $G = \mathbf{G}_a$ one finds that $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{G}_\mathbf{a}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{G}_a$ with the usual structure. Let $\Delta G = G' = \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. One finds $G \simeq \Delta\Delta G$ i.e. Δ is an authentic autoduality! I call Δ *Serre duality*. It surely goes over to ind-progroups on an arbitrary base field (not necessarily algebraically closed) in the case $p > 0$. Moreover, for finite étale groups, it is $\mathrm{Ext}^0(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ (pontrjagin duality) which gives a perfect duality. One could screw together, in an appropriate derived category, Serre duality and Pontrjagin duality, by taking $G \mapsto \Delta G = (G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$: one calls this ("cohomological") Serre duality. This will be a magnificent autoduality, if one puts oneself in a derived category where the $\mathbf{H}^i$ of the envisaged complexes are (up to passing to the limit) extensions of étale groups by connected unipotent groups. Now one gets only such complexes, by "integrating" finite coefficients F on X by $_!$ or $_*$. This being said, by passing to the limit in the initial formulation (or equivalently by replacing the $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_k$, previously considered, by $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_k$ on k, and forming $f^!(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_k = (\mu_\infty)_X)$ the duality formula takes the form

$$\Delta(_!(F)) \simeq_* (\mathrm{DF}[2]) \quad \text{“shift” of dimension}$$

where D is the “Cartier duality” (F, μ_∞) (or $(F, \mathbf{G}_m)$ if one prefers?), and Δ is the Serre duality: cohomology with proper supports and with arbitrary supports are exchanged by duality, when one takes upstairs Cartier duality, and downstairs Serre duality.

The validity of the duality formula is not open to doubt - the principal work for establishing it consist certainly in a careful description of the category of coefficients with which one is working, as well on X as on k, and of the functors D and Δ. As the definition of an arrow is immediate, once the building of the machine has been accomplished, the validity of the formula should result without difficulty from the usual “dévissages” which allow one to verify the duality in the particular standard cases $F = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, μ_p, α_p on a smooth, complete X. (N.B. the case of coefficients prime to the characteristic is already known.) Let us make explicit what the formula of duality says for $\mathrm{R}^1 f_*(\mathbf{G}_X)$, where G is a finite group étale on k (the most important case being $G = (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})_k$); one recovers Serre's description of “geometric class field theory” in terms of extensions by G of a generalised jacobian of X. Thus, the duality formula can be understood as a cohomological version, considerably enriched, of geometric class field theory. When the base field k is finite, to retrieve the class field theory in the classical form, one can use “the trick of Lang” (on the relation between the “arithmetic” π_1 of a smooth, connected commutative algebraic group J on k and its $\mathrm{H}^0(k,J) = J(k)$: the $\pi_1^{\mathrm{ar}}(J)$ classifies the isogenies above J with kernel a constant group $\pi_1^{\mathrm{ar}}(J) \simeq \mathrm{H}^0(k,J)$) - i its cohomological form, which may be stated:

$$\Delta_{0K}(J^*) \simeq_K (\Delta J^*[1]),$$

where Δ is Serre duality, Δ_0 Pontrjagin duality for the totally disconnected topological abelian groups (duality with values in $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$), J^* a complex of algebraic indprogroups on k. Taking account of this “Lang duality formula” and applying $_K$ to the formula of duality for geometric class fields, one gets the “duality formula of arithmetic class field theory”:

$$\Delta_0(\mathrm{H}_!(X,F)) \simeq \mathrm{H}^*(X,D(F)[3])$$

(isomorphism of totally disconnected topological groups).

Another remark: when F is not an “étale sheaf”, but has a continuous structure such as α_p, one must be careful in the definition of ${}_!(F)$, for X non complete, starting from the compactification $\widetilde{X}$; thus, if F comes from an “admissible” sheaf $\widetilde{F}$ on $\widetilde{X}$, one must have an exact triangle

$$\begin{tikzcd} & {}_!(\hat{\widetilde{F}}) \arrow[dl] & \\ {}_!(F) \arrow[rr] & & \mathrm{R}\widetilde{f}_*(\widetilde{F}), \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

where $\hat{\widetilde{F}}$ is the *formal completion* of $\widetilde{F}$ along $\widetilde{X} - X$ (a finite number of points...). It is here, unless I am mistaken, that appears the link with local class field theory, in its cohomological version, on which I am going now to say a few words.

(E) **Local class field theory as a duality formula**

Let V be a complete discrete valuation ring with residue field k - assume either that k has been lifted to $k \subset V$ (and therefore $V \simeq k[[T]]$) or that k is perfect of characteristic $p > 0$. In order to fix ideas, and to be sure that I'm on solid ground, I consider at first on K ($=$ the field of fractions of V) *finite* coefficients F (as on X previously) and I consider the objects $\mathrm{H}^1(K,F)$, or ${}_K(F)$. The main work to be done consists in defining an adequate category of coefficients over k (perhaps the same one as in (D)) and a functor

$$F \mapsto \mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(F)$$

with values in the category of such coefficients, in such a manner that the following isomorphisms holds.

$${}_K(F) \simeq (\mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(F)).$$

This correspond to the intuition (acquired directly from elementary examples) according to which for k algebraically closed, say, the $\mathrm{H}^0(K,F)$, $\mathrm{H}^1(K,F)$... are endowed with a structure of k-algebraic group (ind-pro...). In this construction, the ring scheme of Witt vectors over k (introduced by Serre) and the "Greenberg functor" (associating to a V-scheme a k-prescheme) will play an essential role.

This being done, the duality formula will be formally stated as in (D) above:

$$\Delta \mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(F) \simeq \mathrm{R}\underline{\Gamma}_K(\mathrm{DF}[1])$$

where D stands for Cartier duality, Δ for Serre duality. When the residue field is finite, it becomes (via "Lang's trick" mentioned previously)

$$\Delta_{0k}(F) \simeq_K (\mathrm{DF}[2])$$

Δ_0 standing for Pontrjagin duality. The formula contains local geometric class field theory à la Serre, and arithmetical local class field theory in its classical form.

Remarks.

(a) If F is prime to the residue characteristic the formula is very easy to prove and well known. It may be considered a very special case of the "induction formula" for a morphism $i : s \mapsto S$, in the duality formalism:

$$i^!(D_S(F)) = D_S(i^*(F))$$

(we take here the inclusion of $p = \mathrm{Spec}(k)$ in $S = \mathrm{Spec}(V)$). Thus the work to be done concerns the p-primary coefficients, for $p =$ characteristic $k > 0$. The most subtle case is that of unequal characteristic.

(b) The functor may be obtained by composing $\mathrm{R}j_*$ (where $j : U = \mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(V) = S$ is the inclusion) with a cohomological version of the "Greenberg functor".

(c) In (D) and (E), I restricted myself to finite coefficients F - it's for those that I am sure of what I assert. But it is certainly true that the duality formula is even richer, that something may still be asserted for example for F a not necessarily finite group scheme, for example an abelian scheme (with a few degenerate fibres in the case of (D)?), but I have never entirely clarified this question, even on a heuristic basis. I vaguely recall a formula which should be contained in the formalism (say if k is algebraically closed): for F an abelian scheme on K, F the dual abelian scheme and G' the pro-algebraic group over k attached "'a la Greenberg" to its Néron model, then one has

$$\mathrm{H}^1(K,F) \overset{?}{\simeq} \mathrm{Ext}^1_{k-\mathrm{grp}}(G', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

(N.B. without any guarantee.) In principle, the previously mentioned duality conjecture concerning Néron models of SGA 6 should come out of the local duality machine.

(d) You may ask Deligne if he didn't dive into questions (D) and (E) lately.

(F) **Significance and limitations of the fppf topology**

Since the attempts of Serre to find a "Weil chomology" by using the cohomology of a scheme with coefficients not only discrete $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ ($n \longrightarrow \infty$) or μ_{p^n} ($n \longrightarrow \infty$), but also continuous (for example W_n, $n \longrightarrow \infty$), which give good results for recovering a correct H^1, during numerous years I have come upon the impression, which I have tried in vain to make precise, that a correct "p-adic" "Weil cohomology", in the case $p > 0$ and k of characteristic p, should come, in one way or another, from the fppf cohomology, for finite coefficients for example, or more general coefficients, e.g. algebraic groups over k. The construction in (B) of the local jacobian complex was, of course, related to this hope: the homology might reveal what is hidden to us in cohomology! For some time now, one has at ones disposal the formalism of crystalline cohomology, and one knows (Berthelot) that (at least for X projective and smooth) it has the correct properties. If one uses that as a kind of standard by which to "measure" the other cohomologies, one finds that the part of the crystalline cohomology $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cris}}(X)$ which could be described in terms of fppf cohomology of X with coefficients in algebraic k-groups is a small part of H^i only; more precisely, using the very rigid supplementary structure of the H^i (modules of finite type on the ring $W(k)$ of Witt vectors) which comes from the existence of the Frobenius homomorphism (an isogeny), $\mathrm{H}^i \xrightarrow{F} \mathrm{H}^i$ (semi-linear), one finds that one keeps always in the part "of slope ≤ 1 (although the possible slopes vary between 0 and $i \ldots$). This explains why for $i = 1$ one can obtain via fppf a correct H^i, although for H^2 already all the attempts have been unfruitful. In truth, one conjectures that *all* the part of slope ≤ 1 in $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cris}}$ comes from fppf. But I have completely lost contact with these questions - people such as Mazur, Kats, Messing - and of course Deligne - should be knowledgeable as to the present states of these questions.

Your question 7 seems to indicate that there is a misunderstanding on your part on the significance of the "homotopy type" of X, for X a topos (for example the étale topos of a scheme). Doubtless you must be confusing the homotopical algebra which one can perform on X, using semi-simplicial sheaves, stacks of all kinds, the relations between these - and the other point of view according to which X (with its very rich structure of topos) virtually disappears so as to become no more than a pale element of a "homotopical category" (or pro-homotopical), deduced from the topos by a very thorough process of "localisation". At first sight, all that still remains with poor stripped X, are the π_i - and its cohomology groups with constant coefficients - or at the worst twisted constant coefficients. When one digs more into this definition of "what is left to this poor X" one falls precisely on *the locally constant n-stacks* (as an $f : X \longrightarrow X'$ which is a homotopy equivalence induces a $(n+1)$-equivalence between the categories of locally constant n-stacks on X and on X') - which of course contain the abelian chain complexes of length n of sheaves with locally constant cohomology sheaves, and the hyper-cohomology of these. It is thus that one arrives at this triangle of objects which mutually determine each other

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}\text{topos (or topological space} \\ \text{or semi-simplical complex)} \\ \textit{modulo n-homotopy}\end{array} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\begin{array}{l} n\text{-groupoids} \\ (\text{up to } n\text{-equivalence})\end{array} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \begin{array}{l}\text{“special” } n\text{-categories} \\ (\text{up to } n\text{-equivalence})\end{array}
\end{tikzcd}$$

One says that an n-category E_n is "special" (or *n-galois*) if it is n-equivalent to the category of locally constant $(n-1)$-stacks on an appropriate topological space (or a topos), or, what should be equivalent, if it is n-equivalent to the category of n-functors $G_n \longrightarrow n-\mathrm{Cat}$, where G_n is an n-groupoid. If X, G_n, E_n correspond in this way, one calls G_n *the fundamental n-groupoid* of X, or of E_n, or says that E_n is *the category of local $(n-1)$-systems* on X, or on G_n, or that X is *the geometric realisation* of G_n or of E_n. In analogy with the familiar case $n = 1$, it should be possible to interpret G_n as the full sub-n-category of $\mathrm{Hom}_n(E_n, n-\mathrm{Cat})$ formed by the n-functors $E_n \longrightarrow n-\mathrm{Cat}$ satisfying certain exactness properties (one feels like saying: which commute with finite $\varprojlim$ and arbitrary $\varinjlim$); but this raises the disquieting vision of n-limits in n-categories. (N. B. The case $n = 2$ begins to become familiar to us…). It is prudent in all of this to suppose that X is "locally homotopically trivial", which ensures the pro-simplicial set which Artin-Mazur associate to it (with the help of nerves of hyper-coverings) is essentially constant in the ordinary homotopy category - thus X defines a homotopy type in the usual sense. This is surely *not* the case for the étale topos of a scheme. In such case, the fundamental n-groupoid should be conceived as a *pro-n-groupoid* (nothing surprising in that, in view of the familiar theory of π_1), and E_n as an (ind)-n-category (the ind-structure will correspond to the exigencies of local triviality for a variable n-stack, relative to coverings more and more fine on X).

I nevertheless understand your instinctive resistance to conceive this extreme stripping of a beautiful topos X, to the point of retaining only the meagre homotopy type. Even more, I am persuaded that going to the root of this instinctive resistance, one arrives at a generalisation and deepening of the notion of "homotopy type", and to bring new grist to the mill of the development of a good homotopical yoga. Here is what I have in mind.

Let us speak first of sheaves (of sets, or of modules, etc.) instead of stacks, for simplicity, and place ourselves in the étale topos of a scheme. The locally constant sheaves - modulo a supplementary condition of finiteness which is sufficiently anodyne - form the easiest of the *constructible* sheaves, for the definition of which they serve as models. Supposing X coherent (= quasi-coherent and quasi-separated), then the general constructible sheaves are those for which there exists a finite partition $X = \cup_{i \in I} X_i$ of X into "cells" or "strata" X_i, each locally closed and constructible, such that the restriction of F to every X_i is locally constant (also a finiteness condition…). Thus the category of constructible sheaves on X (which gives back the category of all sheaves on passing to a category of ind-objects…) may itself be thought of as an inductive limit of categories associated to finer and finer partitions on X. One can then, for such a fixed partition P, set out to study the category of sheaves (or complexes of sheaves, or stacks) which are "P-constructible" (or, more generally, which are "locally constant" on every

X_i). These categories will not have truly satisfying structures unless they are stable for the usual operations - such as , or $\mathrm{R}j_*j^*$ where $j : X_i \longrightarrow X$ is a "cell" of the partition, etc. In fact, if X is excellent and one has resolution of singularities at ones disposal, one knows that the torsion constructible sheaves (under the proviso of being prime to the characteristic) are stable for all these operations - but not for a finite partition of X fixed once and for all. To have such a finer stability, it is necessary to make some very strict hypotheses of *"equi-singularity"* on the given stratifications of X, along the strata. I think nonetheless that a refinement of known techniques will show that X admits arbitrarily fine stratifications having these properties of equi-singularity (and with the X_i regular and connected, but this does not matter for our present purpose).

By way of example, suppose that there are just two strata, the closed one X_0, and $X_1 = X \backslash X_0$. According to Artin's devissage, giving oneself a sheaf F on X is equivalent to giving a sheaf $F_0 = i_0^*(F)$ on X_0, a sheaf $F_1 (= i_1^* F)$ on X_1, and a homomorphism $F_0 \longrightarrow i_0^* i_{1*}^*(F_1) = \varphi(F_1)$, where i_0, i_1 are the inclusions $X_0 \xrightarrow{i_0} X \xleftarrow{i_1} X_1$. In order that F should be P-constructible, it is necessary and sufficient that F_0 and F_1 should be locally constant (plus some accessory finiteness conditions...), on X_0 and X_1 respectively. Then (by virtue of the hypothesis of equi-singularity) the same will be true of $\varphi(F_1)$, and the category of sheaves in which we are interested can be expressed entirely in terms of the category of locally constant sheaves on X_0 and X_1, i.e. of the mere homotopy type of X_0 and X_1, except that we must make explicit the nature of the left exact functor φ. I think tht this should be possible, in the context of *schemes* in which I am placed (technically rather sophisticated), on introducing an "étale tubular neighbourhood" of X_0 in X_1 (which is a very interesting topos, but not associated to a scheme). But this technical construction is only a paraphrase of an extraordinary simple topological intuition, which I will make explicit, supposing, to fix the ideas, that the base field is $\mathbf{C}$ and so one may work with locally compact spaces in the usual sense. The topological idea behind the hypothesis of equi-singularity that there exists a *tubular neighbourhood* T of X_0 in X retracting onto X_0 and such that the pair (X_0, T) over X_0 should be a locally trivial bundle, i.e. that $T \backslash X_0$ is locally trivial over X_0. In fact if ∂T is the "boundary" of T, which also should be a locally trivial bundle on X_0, then T over

X is the conic bundle (= bundle where fibres are cones) ($\simeq (\partial T \times I)\amalg_{\partial T} X_0$ where $I = [0,1]$, $\partial T \longrightarrow \partial T \times I$ is defined by $x \mapsto (x,1)$, and $\partial T \longrightarrow X_0$ is the projection) then $\mathring{T} = T\backslash X_0 \simeq \partial T \times [0,1[$ is X_0-homotopic to ∂T. If X_0 and X_1 are non singular, then so also will be $\mathring{T}$ and ∂T, which are then topologically smooth fibrations on X_0. Moreover, putting $\widetilde{T}_1 = X_1\backslash \mathring{T}$, the inclusion $\widetilde{X}_1 \longrightarrow X_1$ is a homotopy equivalence, and X can be recovered, up to homeomorphism, from the diagram of spaces

$$\begin{tikzcd}
(\mathring{T} = T\backslash X_0 \simeq)\partial T \arrow[r, "j", "\text{inclusion}"'] \arrow[d, "\text{fibration}"', "p"] & \widetilde{X}_1(\simeq X_1) \\
X_0 &
\end{tikzcd}$$

as an amalgamated sum. In terms of this diagram of spaces, the above functor φ interprets immediately as

$$\varphi(F_1) \simeq p_* j^*(\widetilde{F}_1)$$

where $F_1 \longrightarrow \widetilde{F}_1$ is the restriction from X_1 to $\widetilde{X}_1$ (which is an equivalence of categories for the envisaged (locally constant) sheaves). Giving $F = (F_0, F_1, u : F_0 \longrightarrow \varphi F_1)$ can then also be made explicit as giving

$$F_0, \widetilde{F}_1, \widetilde{u} : p^*(F_0) \longrightarrow j^*(\widetilde{F}_1)$$

where $F_0(\widetilde{F}_1)$ are locally constant sheaves on X_0 (respectively X_1). It is necessary to recall that here p is a real fibration, and j is an inclusion (in practice, for the case X_0, X_1 smooth, the inclusion of the boundary in a manifold with boundary).

If you prefer, one can also take the diagram which is less pretty (but a little more canonical)

$$\begin{tikzcd}
\mathring{T} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p'"'] & X_1 \\
X_0 &
\end{tikzcd}$$

coming essentially to the same thing, as it is formed from spaces homotopic to the preceding one. One can even replace X_0 by T (X_0 being a deformation retract of it) and write

$$\begin{array}{ccc} \overset{\circ}{T} & \longrightarrow & X_1 \\ {\scriptstyle p''}\big\downarrow & & \\ T & & \end{array}$$

where "literally" p'' is now an inclusion, but "morally", it is a *fibration* with very pretty fibres (notably compact of finite dimension, and moreover non-singular varieties - this is much better than that which is given by the yoga of Cartan-Serre "every continuous mapping is equivalent to a fibration"...). This last diagram however has the advantage of being amenable to a purely algebraic, direct construction, in the context of schemes, once one has developed the construction of étale tubular neighbourhoods[16].

The point I wish to come to, is that the consideration f sheaves (or complexes thereof, or n-stacks...) which are P-constructible on an X, where P is a given "equi-singular" stratification, reduces in our particular cases to the knowledge of a diagram of ordinary *homotopy types* (or pro-types, if one comes back to the étale topology)

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{j} & X_1 \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \\ X_0 & & \end{array}$$

by taking local coefficients systems (or locally constant n-stacks) on the vertices X_0, X_1, which are related to each other by a homomorphism of compatibility of the type $p^*(F_0) \longrightarrow j^*(F_1)$. It should be an amusing exercise (which I have not yet done) to verify and to make explicit how the "six operations" on sheaves (either on X, or on a subspace which is a union of strata of X) can be expressed in this dictionary, in the case, let us say, of non-singular strata (otherwise, there will be a difficulty with the dualising complexes, which one would prefer to have as objects

[16]Tim Porter pointed out to me that work on étale tubular neighbourhoods was done by D.A. Cox: "algebraic tubular neighbourhoods I, II", Math. Scand. 42 (1978) 211-228, 229-242. I've not seen yet this work, and can't say therefore whether it meets the rather precise expectations I have for a theory of tubular neighbourhoods, for the needs of a dévissage theory of stratified schemes (or, more generally, stratified topoi)

in our category), and to reestablish the known formulae involving these operations. But it appears probable that, to carry out this transcription well, it would be necessary, rather than considering a diagram of type

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

in the homotopical category formed from the category of semi-simplicial sets, to consider the category of diagrams of semi-simplicial sets, and to pass from these to the homotopical category of fractions[17]

I have recently more or less made explicit, while thinking on the foundations of "tame topology", (i.e. where one eliminates from start all wild phenomena) how an equi-singular stratification, say with non singular strata, of a compact "tame space", gives rise canonically to a diagram of space which are manifolds with boundary, the arrows of the diagram being essentially locally trivial fibrations of manifolds with boundary on the others (with fibres which are compact manifolds with boundary), *and* the inclusion of the boundary in these manifolds with boundary (in fact, one finds slightly more general inclusions, certain boundaries which appear being endowed with an "elementary" cellular decomposition, i.e. the closed strata are again manifolds with boundary which are glued together along common parts of the boundary; and it is also necessary to consider the inclusions of these pieces one in another...), and can be reconstituted from this diagram by gluing[18]. In other words, one has a canonical devissage description of tame compact spaces X, eventually endowed with equi-singular stratifications with non-singular strata, in terms of finite diagrams of a precise nature made out o manifolds with boundary. When we are interested in sheaves (or complexes of sheaves, or n-stacks) which are P-constructible on X, where P is such a fixed stratification, these may be described in terms of the envisaged diagram, of which only the "homotopy type" is to be retained. One foresees that the six operations on

[17]This is the typical game embodied in the "derivator" associated to the theory Hot of usual homotopy types (compare section 69).

[18]Some more details on this program are outlines in *"esquisse d'un Programme"* (section 5), in *Réflexions Mathématiques 1*

these sheaves can be translated in an ad hoc manner to this homotopical context. Finally, if instead of having only one compact tame space X, one has, let us say, a tame morphism $f : X \longrightarrow Y$ of such objects, then by choosing equi-singular stratifications on X and Y adapted to f (the strata of X being in particular locally trivial fibrations on those of $Y\ldots$), one should find a "morphism" from the diagram of manifolds with boundary expressing X int that expressing Y (with natural morphisms which essentially reduce to fibrations of compact manifolds with boundaries on other such objects) in such a way that the four operations $_*$, $_!$, $\mathrm{L}g^*$, $g^!$ between P_{X-} and P_{Y-} constructible sheaves on X and Y (or on locally closed sub-spaces X', Y' which are union of strata, such that f induces $g : X' \longrightarrow Y'$) can be expressed in terms of standard operations between the mere homotopy types. Finally, all these constructions, still partially hypothetical (there is work on the foundations to be done!) should be able to be paraphrased in the framework of excellent schemes, by making use of the machinery of étale tubular neighbourhoods. In one or other case, the "fine homotopy type" of a tame space, respectively of an excellent scheme, is defined by passage to the limit from "P-homotopy type" associated to finer and finer equi-singular stratifications P (with non-singular strata).

This "fine" homotopy type would embody the knowledge, not only of sheaves or locally constant n-stacks, but (via a passage to the inductive limit) the knowledge of *all of them*. And it would depend, in a suitable sense, functorially on X. In the case of a scheme of finite type on an algebraically closed field k say, the strongest cohomological and homotopical *finiteness theorem* would be expressed precisely in terms of a fine homotopy type, and would say that *the ordinary homotopy types which are their constituents are essentially "finite polyhedra"* - and even compact manifolds with boundary - or in more precise fashion, their profinite completions (in the sense of Artin-Mazur) prime to the characteristic p of k are those of such polyhedra. One sees clearly how to begin on such programme in characteristic 0, but one foresees supplementary amusement, or even mystery, in the case $p > 0$, for the varieties which, even birationally, resist being lifted to characteristic 0!

From these essentially geometric thoughts, I could not at this moment draw up a precise programme for developing adequate algebraic structures to express them. I restrict myself to several marginal remarks.

For a long time I have been intrigued by the idea of a "linearisation" of an (ordinary) homotopy type, i.e. questions of the type: if X is a homotopy type, how much cohomological information of the type: cohomology of X with variable coefficients M (constant or twisted constant), multiplicative structure $\mathrm{H}^i(X,M) \times \mathrm{H}^j(X,N) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+j}(X,M \otimes N)$, then eventually other cohomology operations - is it necessary to have to reconstruct entirely the homotopy type? (say, in this preliminary pre-derived category approach, assuming given the fundamental group π_1, and therefore the category of constant twisted coefficients ($= \pi_1$-modules), the functors $\mathrm{H}^i(-,M)$ over these, together with the structure of cohomological functors relative to exact sequences, the structure of cup-product, etc. - related by certain formal properties?) Once one has at one's disposal the language of derived categories: the sub-category of the derived category of abelian complexes on X, formed from complexes the sheaves of cohomology of which are locally constant on X, with its triangulated structure and its multiplicative structure (and eventually ...) gives a more satisfying candidate for hoping to recover the homotopy type. I don't really know if this suffices the recovery indeed[19], but on the other hand I have no doubt that on pursuing "linearisation" to the end, that is to say by going to the *non-abelian* framework, and working with the $(n+1)$-category (without any supplementary structure on it!) of locally constant n-stacks of constructible sheaves on X, for all n, one manages to reconstruct the homotopy type via its fundamental ∞-groupoid, as explained in my previous letter and recalled in this one. (This signifies in particular that all the possible and imaginable cohomology operations are already included in the data furnished by such a system of n-categories...).

Similarly, the more elaborate homotopy type, which are related to certain finite diagrams, which one can associate to certain types of stratification P of tame

[19] I was informed by knowledgeable people soon later that the answer is well known to be negative, by working with "rational homotopy types" (the cohomology of which is made up with vector spaces over $\mathbf{Q}$). It is well known indeed that a 1-connected rational homotopy type is *not* known from its rational cohomology ring alone, which contains already all the information I was contemplating. At last this is so if we assume that $\mathrm{H}^i(X)$ is of finite dimension over $\mathbf{Q}$ for all i. But is there a counterexample still when X is a homotopy type "of finite type"?

topological spaces X, let's say, should correspond in as perfect a fashion to the $(n+1)$-category of n-stacks on X which are locally constant on each of the strata of P (say: which are subordinated to P). If the above description of homotopy types by the "locally constant derived category" was valid indeed, one would expect to recover here the mixed homotopy type from the corresponding sub-category of the derived category of abelian sheaves on X, provided by the complexes which have locally constant cohomology on each of the strata - with also the operations , , plus in case of need, the four operations $\mathrm{R}g_!$, $\mathrm{R}g_*$, $\mathrm{L}g^*$, $g^!$ for the induced $g : Z' \longrightarrow Z''$ of the various locally closed unions of strata…The problem here is that we don't at present even know what is a triangulated category, not any more than what is its non-commutative version, described probably more simple and more fundamentally: a "homotopical category" with operations of taking "fibres" and "cofibres"[20].

It is surely time that I finish this "lettre-fleuve", which is becoming more and more vague. Just one question: what is this marvellous formula of Bloch-Quillen to which you allude, of which I have never heard, and which makes my mouth water?

Very cordially yours,

[20]This "problem" is met with by the notion of a "derivator", which "was in the air" already by the late sixties, but was never developed (instead even derived categories became tabu in the seventies…).

COMPLEXE DE DE RHAM À PUISSANCES DIVISÉES ET OMBRES DES MODULES

IHÉS. 12 Décembre 1975

---

géométrie	différentielle
—	analytique
—	algébrique
—	arithmétique
topologie algébrique	$\begin{cases}\text{PL}\\ \text{semi-simplicial}\end{cases}$

1) Historique

a) Notion de forme diférentielle (*Poincaré*) et formule de *Stokes*

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \quad (\text{d'où } \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X, \mathbf{C}).)$$

b) Th. de *De Rham* (conjecturé par *E. Cartan*). Mais [-] Maintenant bien compris à th. des faisceaux, lemme de Poincaré

c) Théorie de *Hodge* des intégrales harmoniques (structure supplémentaire bigraduée sur $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(X)$ si X kählérienne compacte.)

d) Théorème de *Cartan-Serre* sur variétés de Stein (car Lemme de Poincaré valable dans l'analytique).

e) Cas des variétés algébriques ou schémas sur corps de base (ou schéma de base général) : *Dwork*, *Washnitzer-Monsky*, plus tard le yoga "cristallin" développé par *Berthelot*, *Illusie*, *Messing*, *Mazur* (cf avec Hartshorne, Herrera, Ogus, Bloch (?)). Ici on trouve des théories cohomologiques qui ne sont plus à "anneau de coefficients" de caractéristique nulle, i.e. contenant $\mathbf{Q}$ — i.e. on perd [?] les phénomènes de torsion [?]. Du point de vue Weil, c'était un défaut irréparable.

f) Th. de *Grothendieck* pour variétés algébriques sur $\mathbf{C}$ (généralise par *Deligne*, *Hartshorne* pour des coefficients plus généraux). Ceci donne confiance (du moins en car. 0) en la signification topologique de la cohomologie de De Rham "algébrique" des schémas algébriques.

g) Complexe de De Rham-Sullivan pour espaces topologiques généraux : *formes différentielles singulières* C^∞ (resp. $\mathbf{C}$-algébriques, resp. $\mathbf{R}$-algébriques, resp. $\mathbf{Q}$-algébriques). Donne la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$, resp. $\mathbf{Q}$) (facile)

$$\begin{array}{ccccc} C^\bullet_{\mathrm{DRS}\,\mathbf{R}-\mathrm{alg.}} & \subset & C^\bullet_{\mathrm{DRS}\,C^\infty} & \subset & C^\bullet_{\mathrm{DRS}} \\ & & \cup & & \\ & & C^\bullet_{\mathrm{DR}} & & \end{array}$$

Sullivan montre mieux que le $\mathbf{Q}$-type d'homotopie de X est récupéré si X est simplement connexe - de façon plus précise, il y a (sauf erreur) une équivalence de catégories donné par $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}$ entre la catégorie homotopique faible des espaces connexes et simplement connexes (du point de vue singulier), et une certaine catégorie dérivée formée avec les $\mathbf{Q}$-algèbres graduées associatives anticommutatives à degrés ≥ 0 telles que $\mathrm{H}^0(A) \xleftarrow{\sim} \mathbf{Q}$, $\mathrm{H}^1(A) \simeq 0$. Il y a une théorie des modèles minimaux pour de telles algèbres, une façon très simple de récupérer les $\pi_i \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ en termes d'un tel modèle... (On renvoie au papier de Sullivan.)

Mais à nouveau, on prend la torsion !

Donc du théorème d'isomorphisme de Sullivan

$$\mathrm{H}^\bullet(C^\bullet_{\mathrm{DRS}/\mathbf{Q}}(X,\mathbf{Q})) \simeq \mathrm{H}^\bullet(X,\mathbf{Q})$$

$\forall n \geq 0$,

$$[n] \quad \text{simplexe type de dimension } n,$$

$$\Delta^{[n]} \quad \text{sa réalisation géométrique}^{21},$$

$E^{[n]}$ l'espace affine qu'il soustend [plutôt engendré] (avec une $\mathbf{Q}-$structure)[22],

$$\mathrm{DRS}^\bullet_{[n]} = \mathrm{C}^\bullet_{\mathrm{DR}}(E^{([n]}) \quad \text{son complexe de De Rham } \mathbf{Q}-\text{algébrique.}$$

C'est contravariant en $[n]$, d'où

$$\mathrm{DRS}^\bullet_* = (\mathrm{DRS}^\bullet_{[n]})_{n\geq 0}.$$

Algèbre différentielle graduée semi-simpliciale (et même simpliciale) - à degrés ≥ 0, anticommutative.

Pour tout espace topologique X, $S_*(X)$ son complexe singulier semi-simplicial. On a

$$C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(X,\mathbf{Q}) \simeq \mathrm{Hom}(S_*(X), \mathrm{DRS}^\bullet_*),$$

i.e.

a) $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(X,\mathbf{Q})$ dépend de X si $S_*(X)$ [plutôt 'ne dépend que']

b) Sur $(\mathrm{Ss}) = (\mathrm{Ens}_*)$, le foncteur $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(-,\mathbf{Q})$ est représentable par $\mathrm{DRS}^\bullet_*$.

Or

a) $\mathrm{DRS}^\bullet_*$ est une résolution de $\mathbf{Q}_*$ (dans la catégorie des groupes semi-simpliciaux). (Lemme de Poincaré algébrique sur l'espace $\mathbf{Q}$-affine $E^{[n]}$).

b) Les composantes DRS^i_* ($i \geq 0$) de $\mathrm{DRS}^\bullet_*$ sont des objets abéliens acycliques du topos (Ss) (ce qui revient à dire que leurs $\pi_j(\mathrm{DRS}^i_*)$ sont nuls, ce qu'on vérifie facilement).

(Il [?] serait [Hom] des formes C^∞ à coefficients dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, ou analytiques réels, ou analytiques complexes…)

On aimerait avoir une $\mathbf{Z}$-algèbre différentielle [graduée] $C^\bullet_{\mathrm{DR}}(X,\mathbf{Z})$ différentielle [?] [?dont tout sur] X [?(ou $S_*(X)$)] dont [?] $\mathbf{Z}$ [?] qu'il y a [?]

Si on prend $C^\bullet_{\mathbf{Z}-\mathrm{DR}}(E^{[n]})$ (où $E_{[n]}$ a même une $\mathbf{Z}$-structure affine), c'est a) qui devient déjà faux : pour intégrer $\int x^n dx$, il faut un dénominateur avec $\frac{x^{n+1}}{n+1}$! Mais en géométrie, on est déjà familiarisé avec une façon de sauter à pieds-joints par dessus le conneau, en introduisant des puissances divisées et de polynômes (ou séries formelles) à puissances divisées. Si $E^{[n]}$ avait son origine sur $\mathbf{Z}$ (i.e. provenant canoniquement d'un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini), on aurait un complexe de De Rham à puissances divisées. Mais pas pour un espace affine ! Notons

$$\begin{aligned}\mathrm{DRS}^\bullet_{[n]} &\simeq C^\bullet_{\mathrm{DR}/\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[(X_i)_{0\le i\le n}]/\Sigma X_i - 1)\\ &\simeq \mathbf{Q}[X_i, dX_i]_{0\le i\le n}/\Sigma X_i - 1, \Sigma dX_i\\ &\simeq \mathbf{Q}[X_0,\dots,X_{n-1}][dX_0,\dots,dX_{n-1}]\end{aligned}$$

Donc on aurait envie de prendre

$$\mathbf{Z}\{X_i\}[dX_i]_{0\le i\le n}/(\Sigma X_i - 1, \Sigma dX_i),$$

où $\{\}$ désigne les polynômes à puissances divisées, mais on n'est plus isomorphe à $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n+1}\}[dX_0,\dots,dX_{n-1}]$ ([?] bien une résolution de $\mathbf{Z}$), car si on [?] de la relation [?] $\Sigma_0^n X_i - 1 = 0$, $X_n = 1 - \Sigma_0^{n-1} X_i$ (et $dX_n = -\Sigma_0^{n-1} dX_i$ de $\Sigma_0^n dX_i = 0$), on a le "bec" [?] que $1 - \Sigma_0^{n-1} X_i$ n'appartient pas à l'idéal à puissances divisées donné dans $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}$ [?] (donc on ne voit pas comment envoyer $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}$ dans $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}$ avec l'élément [?] $\Sigma_0^n X_i - 1$ dans le noyau…).

On s'en tire en prenant un anneau de coefficients différent de $\mathbf{Z}$, soit S, avec un "paramètre" $t\in S$ fixé dont on sache *prendre des puissances divisées* (i.e. $t\in J$, J idéal à puissances divisées [?]), et en remplaçant [?] les équations $\Sigma X_i = 1$ de $E^{[n]}$ par l'équation

$$\Sigma X_i = t \quad \text{dans} \quad S^{n+1}$$

et définissant

$$C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}[n]}(S,J,t) \simeq (S\{X_i\}_{o\leq i\leq n})/(\Sigma X_i - t, \Sigma dX_i).$$

On divise par l'idéal *à puissances divisées* engendré [?] car dans $S\{X_i\}[dX_i]$ [?] l'idéal formé des formes [?] à puissances divisées d'augmentation dans J est à puissances divisées,

$$[C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}[n]}(S,J,t) \simeq] \quad (S\{X_i\}_{0\leq i\leq n}/(\Sigma X_i - t)_{\mathrm{pd}}) \otimes_S \Lambda^*(S^{[n]}/\operatorname{diag} S^{[n]}).$$

C'est une S-algèbre différentielle graduée anticommutative à degrés [?] augmentée vers S/J et à puissances divisées sur l'idéal noyau de l'augmentation

$$C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}[n]}(S,J,t) \longrightarrow S/J^{23};$$

et comme telle isomorphisme à $S\{X_0,\ldots,X_{n-1}\}\,[dX]$, qui *est une résolution de* S. Pour $[n]$ variable, on trouve

$$C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}*}(S,J,t) = (C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}[n]}(S,J,t))_{n\geq 0},$$

qui est une résolution semi-simpliciale (et même simpliciale) de S, avec augmentation vers $S/J = k$, et puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, [?]. Elle dépend fonctoriellement de (S,J,t), et elle peut de [? un] pour $X_* \in \mathrm{Ss}$

$$C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*;S,J,t) = \mathrm{Hom}(X_*, C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(S,J,t)),$$

foncteur contravariant en X_*[24] (et si X espace topologique [?]

$$\begin{aligned} C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X;) &= C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(S_*(X);) \\ &= \mathrm{Hom}(S_*(X), C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}*}() \quad). \end{aligned}$$

[À ne pas confondre : S (anneau de base) et S^* (ensemble simplicial singulier)].

Mais on ne peut dire en général quelle est sa cohomologie (on a seulement $\mathrm{H}^{\mathrm{DR\,pd}(X;S,J,t)\longrightarrow \mathrm{H}^{\bullet}(X,S)}$), et en tous cas [?]

[23] [?] i.e. $d(X^{[n]}) = X^{[n-1]}dx$[?].

[24] à valeurs dans les S-algèbres graduées différentielles S/J-augmentées à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la différentielle.

Alors soit k anneau commutative (associatif unitaire), et T une indéterminée, on prendra dorénavant

$$S = k\{T\}, \quad J = k\{T\}^+ = \mathrm{Ker}(k\{T\}\ddot{k}), \quad t = T.$$

Donc

$$\begin{cases} C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd},[n]}(S,J,t) \simeq \underbrace{k\{T,X_0,\ldots,X_n\}/(\Sigma X_i - T)_{\mathrm{pd}}}_{\simeq k\{X_0,\ldots,X_n\}} \otimes_k \Lambda^\bullet k^{[n]}/k \\ S/J \simeq k \end{cases}$$

Soit

$$\Phi_{k*} = ([n] \mapsto k^{[n]}) \longleftarrow k_* = ([n] \mapsto k[?])$$

immersion diagonale

$$\Psi_{k*} = \Phi_{k*}/k_* = ([n] \mapsto k^{[n]}/\underbrace{k}_{\mathrm{diag}}).$$

On a alors

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}*}(k) \overset{\mathrm{def}}{=} C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}*}(k\{T\}, k\{T\}^+, k) \simeq \Gamma^\bullet_k \Phi_{k*} \otimes_k \Lambda^\bullet \Psi_{k*}[?],$$

$$\boxed{C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}*}(k) \simeq \Gamma^\bullet_k \Phi_{k*} \otimes_k \Lambda^\bullet \Psi_{k*}}.$$

Structure. $k\{T\}$-Algèbre différentielle *bigraduée* (degré complexe [?] *et* degré extérieur, d'où degré total)[25] unitaire associative alternée (anticommutative et carrés des éléments de degré impair nuls), augmentation vers [?] à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, avec [?].

Ces structures sont héritées [?] par les

$$\boxed{\begin{aligned} C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k) &\overset{\mathrm{def}}{=} C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*, k\{T\}, k\{T\}^+, T) \\ &= \mathrm{Hom}(X_*, C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}*}(k)) \end{aligned}}$$

et dépendent de façon contravariant de X_* (covariant de k).

Φ_{k*} est un k-Module semi-simpliciale homotope à 0, donc $\Gamma^p_k(\Phi_{k*}) \otimes \Lambda^q \Psi_{k*}$ est homotope à $\Gamma^p_k(0) \otimes \Lambda^q \Psi_{k*}$, donc homotope à 0 si $p \neq 0$. Donc $C^{p,q}_{\mathrm{DR\,pd}*}(k)$ est

[25] Bigraduation venant de la *graduation* de S, en tant que [?] est hom. (ici de degré 2) [?].

homotope à 0 (donc acyclique) si $p=0$ [plutôt si $p\neq 0$]. En degré total donné n, on a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^{n,0}_{\mathrm{DR\,pd}*} \arrow[r] & C^{n-1,1}_{\mathrm{DR\,pd}*} \arrow[r] & C^{n-2,2}_{\mathrm{DR\,pd}*} \arrow[r] & \cdots & C^{1,n-1}_{\mathrm{DR\,pd}*} \arrow[r] & C^{0,n}_{\mathrm{DR\,pd}*} \\ & k_* \arrow[u] & & & & & \end{tikzcd}$$

i.e. on trouve une résolution de longueur n de k_* par des k-modules semi-simpliciaux qui sont acycliques sauf le dernier - donc on peut la considérer comme un tronqué de degré n d'une résolution flasque de k_* - la cohomologie de ses sections sur un X_* est donc la cohomologie de X_* tronquée en degré n :

$$\mathrm{H}^{p,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)=\begin{cases}\mathrm{H}^q(X_*,k) & \text{si } q\leq p+q, \quad \text{i.e. } p\geq 0\\ [?]. \end{cases}$$

[?] structure [?] de $k\{T\}$-module de $\mathrm{H}^{\bullet,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$? On voit que pour le *degré total* (égal au degré extérieur *p plus q* [pluôt degré extérieur *q plus p* ?]), on trouve $\mathrm{H}^0(X_*,k)\otimes_k k\{T\}$ tronqué en degré $\geq q$, donc

$$\mathrm{H}^{\bullet,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)\simeq \tau_q(\mathrm{H}^0(X_*,k)\otimes_k k\{T\}) \qquad \underbrace{[q]}_{\text{translation [?] de degrés pas } -q} \quad .$$

Si on réindexe le bidegré par le couple (degré total, degré extérieure)

$$\mathrm{H}'^{p,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)=\mathrm{H}^{\overbrace{n-q}^{p},q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$$

(donc la condition de degré $p,q\geq 0$ devient $n\geq q\geq 0$, l'opérateur différentielle est de bidegré $(0,1)$, donc c'est un homomorphisme *(homogène)* de S-modules gradués), or trouve

$$\mathrm{H}'^{\bullet,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)\simeq \tau_q(\mathrm{H}^q(X_*,k)\otimes_k k\{T\}).$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les structures multiplicatives (et bien entendu fonctoriels an X_*, k, ...). Donc *a priori* on en récupère (via $\mathrm{H}'^{\bullet,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ les k-modules $\mathrm{H}^q(X_*,k)$ et leurs cup-accouplements [?] les k-modules gradués

$\tau_q(\mathrm{H}^q(X_*,k)\otimes_k k\{T\}))$. Ce qui donne un espoir que le complexe de De Rham à p.d de X_* à coefficients dans $k=S/J$ disons [?] (comme dans le cas $k=\mathbf{Q}$ qu'il contient) donne une information homotopique précise sur X_*, c'est l'observation qu'en fait, pour un k-module M quelconque, on récupère M à isomorphisme canonique près par la connaissance d'un quelconque des tronqués $\tau_q(M\otimes_k S)$ (quelque grand que soit $p\ldots$), qu'on appelle le q-ième ombre de M, et de même tout accouplement $M\otimes N\longrightarrow P$ est connu quand on connaît, pour q assez grand, l'accouplement correspondant $\tau_q(M_S)\otimes\tau_q(N_S)\longrightarrow\tau_q(P_S)$. Donc une k-algèbre gradué $\mathrm{H}^\bullet$ à degrés ≥ 0 est connu à isomorphisme canonique près quand on connaît la k-algèbre bigraduée dont les composantes de degré "extérieure" q sont les $\tau_q(\mathrm{H}^q\otimes_k S)$... Cette "théorie des ombres" étant supposée acquise, on veut que la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ (en tant que S-algèbre différentielle bigraduée) implique celle de l'algèbre graduée $\mathrm{H}^0()X_*,k$ - et en raffinant un peu, on veut qu'on trouve même $\mathrm{R}\Gamma(X_*,k)$ comme étant [?]

$$\mathrm{R}\Gamma(X_*,k)\otimes^L\mathrm{R}\Gamma(X_*,k)\longrightarrow\mathrm{R}\Gamma(X_*,k).$$

Remarques et Problèmes

a) Si k est une $\mathbf{Q}$-algèbre, de sorte que $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(X_*,k)$ est défini, on le reconstruit à partir de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ par la formule

$$C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(X_*,k)C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)/(T-1).$$

Plus généralement, *quelque soit k*, on a

$$C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(X_*,\underbrace{k\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}}_{k_{\mathbf{Q}}})\simeq C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)/(T-1).$$

(et plus généralement encore, si (S,J,t) comme au début

$$C^\bullet_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*;S,J,t)/(t-1)\simeq C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(X_*,S_{\mathbf{Q}})/(t-1)\quad)$$

[plutôt $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,S,J,t)/(t-1)$].

b) Je suis convaincu que la structre à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation de

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)\longrightarrow\mathrm{H}^0(X_*,k)=\mathrm{Hom}(X_*,k_*)$$

est importante[26]. Il n'est peut-être pas ici [?] de se poser la question pour X_* simplement connexe, si la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ [?] *avec toutes ses structures* (y compris celle des puissances divisés) n'implique pas la connaissance du type d'homotopie de X_* [?] plus précisément appelé *complexe de De Rham à puissances divisées virtuel sur* k, une k-bialgèbre différentielle k-augmentée, associative, unitaire, alternée à différentielles de bigebré $(-1,+1)$ à bidegrés ≥ 0, avec puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la differentielle ($d(x^{[n]}) = x^{[n-1]}dx$), et telle que les $\mathrm{H}^{\bullet,q}(C^{\bullet\bullet})[-q]$ sont des q-ombres (auquel cas on récupère à partir de $C^{\bullet\bullet}$ un élément de $D(k)$ avec structure multiplicative associative unitaire commutative...), passe à une "catégorie dérivée" de ces complexes en inversant les flèches qui sont des quasi-isomorphismes, d'où par $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ un foncteur

$$\underbrace{(\mathrm{Hot})}_{\text{types d'homotopie}} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{DR\,pd})}_{\text{catégorie dérivée des complexes DR pd}} ,$$

et on peut se demander si sa restriction aux espaces connexes et simplement connexes avec des $\mathrm{H}^i(X,\mathbf{Z})$ de type fini (cas $k=\mathbf{Z}$) induit une équivalence avec les complexes de De Rham à puissances divisées sur $\mathbf{Z}$ tels que $\mathrm{H}^0(C^{\bullet\bullet}) \xleftarrow{\sim} k$, $\mathrm{H}^1(C^{\bullet\bullet})$ [?] les $\mathrm{H}^i(C^{\bullet\bullet})$ [?]

c) Je n'ai pas réfléchi si on peut reconstruire les opérations cohomologiques (type Steenrod ou Whitney) dans la catégorie des X_* par la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,-)$, et n'ai que des résultats partiels negatifs qui montrent qu'en dehors [?] des automorphismes multiplicatifs de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(k)$, on ne trouve rien d'intéressant.

d) Il faudrait sans doute chercher [?] des modèles minimaux à la Sullivan, pour essayer entre autres d'exprimer les groupes d'homotopie de X_* en termes de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,\mathbf{Z})$ (cas où X_* simplement connexe avec condition de finitude...). Je n'ai rien fait dans cette direction. Je n'ai même pas développé une formule de Künneth pour $C^{\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}$ d'un produit $X_*\times Y_*$ - il y a des difficultés techniques dues au fait qu'on ne peut sans doute supposer $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*$ ou $Y_*,k)$ [?]

[26] Avec [?] condition de finitude sur X_*, savoir les $\mathrm{H}_i(X_*)$ [?] de type fini.

e) Le complexe de chaînes $C_\bullet(X_*, k)$ permet de reconstruire tous les complexes de cochaînes $C^\bullet(X_*, k')$ pour k' [une] k-algèbre variable, par

$$C^\bullet(X_*, k) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbf{Z}}(C_\bullet(X_*, k), k)$$

[plutôt $C^\bullet(X_*, k') \simeq \mathrm{Hom}^\bullet_k(C_\bullet(X_*, k), k')$]. (L'objet le plus fin est donc $C_\bullet(X_*, \mathbf{Z})$, on a alors $C_\bullet(X_*, k) \simeq C_\bullet(X_*, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} k$ [?]).

Il est possible de même de définir une cobigèbre différentielle $C^{\mathrm{DR\,pd}}_{\bullet\bullet}(X_*, k)$ k-coaugmenté à copuissances divisées telle que l'on ait, pour tout k-algèbre k'

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*, k') \simeq \mathrm{Hom}_k(C^{\mathrm{DR\,pd}}_{\bullet\bullet}(X_*, k), k')$$

(compatible avec toutes les structures).

On aura d'ailleurs

$$C^{\mathrm{DR\,pd}}_{\bullet\bullet}(X_*, k') \simeq C^{\mathrm{DR\,pd}}_{\bullet\bullet}(X_*, k) \otimes_k k'.$$

L'objet le plus fin est $C^{\mathrm{DR\,pd}}_{\bullet\bullet}(X_*, \mathbf{Z})$. C'est lui qu'il conviendrait de considérer (au lieu de son "dual" $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*, \mathbf{Z})$) si on veut aborder b) c) d) sans condition de finitude. Notons que (tout comme $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*, \mathbf{Z})$, pour X_* variable, transforme $\varinjlim$ quelconques en $\varprojlim$) $C^{\mathrm{DR\,pd}}_{\bullet\bullet}(X_*, \mathbf{Z})$ coaugmenté [?] $\varinjlim$ quelconques ([?])

f) [27] **Faisceautisation**. Il y a une définition évidente de complexes de De Rham à puissances divisées sur k si k est un Anneau commutatif dans un topos. On aimerait, p.ex. en comparant un tel complexe à un autre quasi-isomorphisme dont les composantes soient flasques (mais y en a-t-il toujours ?), définir des opérations [?] $\mathrm{R}f_*$ dans des catégories dérivées convenables pour de tels complexes, quand $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de topos (supposé au besoin de dimension cohomologique finie…). Si k est une $\mathbf{Q}$-algèbre, le même problème se rencontre d'ailleurs déjà pour les complexes de type De Rham-Sullivan (et le problème est ouvert - et posé par *Deligne* - quand $X = (\mathrm{Ens})^* =$ topos des ensembles cosimpliciaux, $Y =$ topos ponctuel). Mais sauf erreur (si [mes souvenirs sont exacts]) il y a un topos qui marche pour les espaces topologiques paracompacts…

[27] Voir f) ci-dessus.

f) On peut associer à un espace topologique X ou un ensemble semi-simplicial X_* des invariants algébriques "linéaires" *plus fins* a priori que le $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}$ (et même que $C^{\mathrm{DR\,pd}}_{\bullet\bullet}$, en dualisant…).

P.ex. on peut observer que $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}*}(k) \xrightarrow{\sim} \Gamma^\bullet\Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet\Psi_{\bullet k}$ se déduit de $D^{\bullet\bullet}_*(k) = \Gamma^\bullet\Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet\Phi_{\bullet k}$ (qui est une algèbre k-augmentée à puissances divisées qui est une *résolution de k*) et de $T \in \Gamma(D^{1,0}_{*k})$ comme conoyau de la multiplication par dT (i.e. on divise par l'idéal engendré par dT), ou encore en bidegré donné (p,q),

$$C^{p,q}_{*k} \simeq \mathrm{Ker}(D^{p,q+1}_* \underbrace{\longrightarrow}_{\text{produit par } dT} D^{p,q+2}_*),$$

d'où

$$C^{p,q}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k) \simeq \mathrm{Ker}(D^{p,q+1}(X_*,k) \longrightarrow D^{p,q+2}(X_*,k)),$$

et on peut considérer les structures disons sur $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ comme déduites de certaines structures (à expliciter…) sur $D^{\bullet\bullet}(X_*,k)$. On peut aussi définir "La structure multiplicative à puissance divisées cohomologique du type d'homotopie X'_* en sens convenable, qui permet de reconstituer aussi bien $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DR\,pd}}(X_*,k)$ que $D^{\bullet\bullet}_k(X_*,k)$ (ou les complexes de De De Rham-Sullivan…[?]) complexe de De Rham à puissances divisées (ou sinon $D^{\bullet\bullet}(X_*,\mathbf{Z})$) suffit déjà pour récupérer toute la structure multiplicative à puissances divisées cohomologique de X_* (sous réserve de conditions de finitude bien sûr). Dans le cas contraire, ce serait cette dernière qui serait le candidat algébrique "linéaire" naturel pour exprimer le type d'homotopie X_* (du moins si X_* [est] connexe et simplement connexe, et en passant à une catégorie dérivée convenable bien sûr).

NOTATIONS SEMI-SIMPLICIAUX. CONSTRUCTIONS UNIVERSELLES 1975 ou 1976

$\mathbf{\Delta}$ = catégorie des simplexes Δ^n $(n \geq 0)$, $\Delta^n = [0, n] \subseteq \mathbf{N}$ avec relation d'ordre total.

$\mathbf{\Delta}\hat{} = \mathrm{Ss} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathrm{Ens}) = \mathrm{Ens}_*$.

Plus généralement, si A est une catégorie, on pose

$$A_* = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, A)$$

$$A^* = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, A),$$

donc

$$(A^\circ)^* \simeq (A_*)^\circ, \quad A^* \simeq ((A^\circ)_*)^\circ,$$

où l'exposant $^\circ$ désigne le passage à la catégorie opposée.

Les objets de A_* (resp. A^*) sont considérés comme des structures algébriques de type simple (sur une infinité d'objets de base) dans A, les 'objets semi-simpliciaux' resp. 'semi-cosimpliciaux'. On écrira Ens_* quand on a en vue cet aspect, et $\mathbf{\Delta}\hat{}$ ou Ss quand on a plutôt le point de vue 'objet d'un topos' ou 'faisceau sur un topos'[28]. Tous les développements qui suivent ont pour objet d'étudier ces objets (l'équivalent combinatoire des espaces topologiques) et leurs 'types d'homotopie',

[28]On veut garder [?] à l'aspect [?] la nature algébrique très particulier de ce topos, la notation Ss quand on veut l'oublier, on profite de sa signification topologique.

via des invariants qu'on peut leur associer, qui en dépendent de façon covariante ou contravariante. Nous avons ici en vue une étude systématique, dans l'esprit de l'algèbre universelle, de ces invariants (qui sont donc des foncteurs $\Delta^{\wedge} = \mathrm{Ens}_*$), de leurs structures et des opérations qui peuvent être définies sur elles, permettant d'en déduire certaines complexes à partir d'autres plus simples.

Un objet de A_* sera généralement noté par un symbole de la forme K_*, où K_* désigne la famille des

$$K_*(\Delta^n) = K_{[n]}, \quad K_* \quad = (K_{[n]})_{n\geq 0}, (= \text{ abus de notation})$$

avec les opérations semi-simpliciales entre elles. On fera attention qu'on écrit $K_{[n]}$ et non K_n, pour des raisons qui vont apparaître (impérieuses lorsque A est additive...).

De même, un objet de A^* sera noté

$$K^* = ([n] \mapsto K^{[n]}) \quad = (K^{[n]})_n . (= \text{ abus de notation})$$

Nous aurons à travailler avec la situation où on a deux catégories A et B, et une équivalence (notée $M \mapsto M^\vee$)

$$\vee : A^\circ \xrightarrow{\sim} B, \quad \text{d'où} \quad B^\circ \xrightarrow{\sim} A$$

(le plus souvent $A = B$ et $(M^\vee)^\vee \underbrace{\simeq}_{\text{isomorphisme fonctoriel}} M$, avec compatibilité habituelle d'une autodualité...), on notera alors souvent par la même lettre un objet de A_* (ou A^*) et l'objet de A^* (resp. A_*) qui lui correspond par application de $\vee$, mais en indiquant la variance par la position du signe $*$,

$$K^* = (K_*)^\vee \quad K^{[n]} = (K_{[n]})^\vee$$

$$K_* = (K^*)^\vee \quad K_{[n]} = (K^{[n]})^\vee .$$

On s'intéressera surtout au cas où (k étant un anneau fixé) on a

$$A = k - \text{modules à guache projectifs de type fini}$$

$$B = k - \text{modules à droite projectifs de type fini}$$

(si k est commutatif, on a $A = B$ et [?] autodialité sur [?] A).

On a le foncteur canonique pleinement fidèle

$$(*) \qquad \mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}^{\wedge} = \mathrm{Ss},$$

l'image par ce foncteur de Δ^n est noté Δ^n_*, ou mieux

[]

Yoga : nous nous intéressons surtout (en première étape) aux invariants covariants attachés à X_*, à valeurs dans une catégorie A, qui commutent aux $\varinjlim$ par rapport à X_* — ils sont donc exprimés (si A est "grande" pour contenir les quelconques) par des éléments de A^*, i.e. des objets *cosimpliciaux* de A. Pour les invariants contravariants en X_*, à valeurs dans une catégorie B, nous nous attendons en premier lieu à ceux qui commutent aux $\varprojlim$ en X_*, pour B stable par $\varprojlim$, ils correspondent donc aux objets de B_*, i.e. les objets semi-simpliciaux de B. Si $B = (\mathrm{Ens})$, ils correspondent donc des ensembles semi-simpliciaux [?]

Ce n'est autre que le foncteur représenté par K_*, et on le notera aussi

$$X_* \mapsto K_*(X_*) = \mathrm{Hom}(X_*, K_*).$$

Si $B = \mathrm{Ab}$, K_* sera de même un objet de $\mathrm{Ss}_{\mathrm{ab}}$, et en effet le foncteur qu'il représente est automatiquement muni d'une structure additive. Même remarque pour toute structure algébrique (sur un ou plusieurs objets de base) qui "peuvent s'exprimer en termes de $\varinjlim$ exclusivement" (groupes, anneaux, modules sur tels, etc.).

Remarque. Les invariants ainsi obtenus à coups de foncteurs représentables — plus généralement, d'objets simpliciaux ou cosimpliciaux de catégories B ou A — sont de nature trop "grosses" et "fruste" pour être intéressants directement — en particulier, ce ne sont pas des invariants du type d'homotopie de X_*. On devra en extraire des invariants plus subtils qui soient des invariants du type d'homotopie de X_* — ceux-ci ne seront pas de nature si simples — i.e. "représentés" par des objets simpliciaux ou cosimpliciaux. Notre propos ici de [?] vient [?] de décrire, un maximum de structure supplémentaire remarquable, et dans les catégories de structures de ce type (complexes de chaînes ou de cochaînes, algèbres cosimpliciales etc.) d'inverser les flèches qu'on obtient à partir d'équivalence d'homotopie dans Ss, et de passer à des "catégories de fractions" en inversant ces flèches. L'invariant ainsi obtenu (plus “grossier” bien sûr, mais plus subtil dans sa définition, et moins “redondant”) exprimera alors de façon plus ou moins complète le type d’homotopie, on en saisira de façon adéquate tes ou tels aspects.

[]

Remarques.

a) On trouve assentiellement les mêmes objets (L_* ou $L_\bullet$) pour exprimer des *opérations* sur [des] invariants additifs contravariants, ou sur [des] invariants “additifs” covariants (du type envisagé) — c’était clair a priori, à cause du passage de A à B par passage à la catégorie opposée — mais l’opération définie par L_* dépend de L_* de façon contravariante dans le premier cas, covariante dans le deuxième.

b) On a en principe résolu, et de façon quasi-tautologique, la question initiale de déterminer les constructions possibles sur [des] invariants contravariants ou covariants “additifs” du type envisagé : On trouve même [des] *grosses* catégories, Ab_* ou $\mathrm{Ab}_\bullet$ (par passage [?] de celle-ci à l’opposée). Cela tient au fait que l’on a admis des catégories A de valeurs A° ou B assez spéciales, [?] où on peut effectuer *toutes* les $\varinjlim$, ou toutes les $\varprojlim$ — ce qui a pour effet que ces mêmes opérations peuvent s’effectuer sur les invariants, et opèrent sur les invariants.

[]

(c’est ce qu’on va vérifier directement dans certains cas remarquables, p.ex. celui où $L = \varnothing$ et où on trouve la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ab}_\bullet$ engendré par les $G_0[n]$ [i.e. $G_0(\Delta^{[n]})$]) grâce aux seules sommes finies.

c) On a oublié de noter que dans le cas particulier $B = \mathrm{Ab}$, on trouve les mêmes types d’objets (savoir ceux de Ab_* ou de $\mathrm{Ab}_\bullet$ au choix) pour exprimer les différents *invariants* contravariants F possibles à valeurs dans Ab (commutant aux $\varinjlim$) et les *opérations* Ω qu’on peut faire sur des invariants contravariants opérer [?] (à valeurs dans une catégorie additive à $\varinjlim$).

[]

qui permet se déduire du foncteur universel

$$\mathbf{\Delta}^{\wedge\circ} \xrightarrow{F_0} (\mathrm{Ab}_*)^\circ$$

(défini par $(F_0)^\circ(X_*) = \mathbf{C}_*(X_*)$ en lui appliquant l'opération Ω^* pour $\Omega^* \in U^L$), ou encore qui se déduit du foncteur covariant [?] universel

$$\mathbf{\Delta}^{\wedge} \xrightarrow{F_0^\circ = (X_* \mapsto \mathbf{C}_*(X_*))} (\mathrm{Ab}_*)$$

qui se dénote par $\mathbf{C}_*$, en lui appliquant de tels Ω_*. [?] formulations équivalentes en termes de $\Omega^\bullet$, $\Omega_\bullet$ opérant sur $(\mathrm{Ab}_\bullet)^\bullet$ ($\Omega^\bullet : \mathrm{Ab}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Ab}, \quad \Omega_\bullet : \mathrm{Ab}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Ab}$), en remplaçant $\mathbf{C}_*(X_*)$ par $\mathbf{C}_\bullet(X_*)$[29].

e) Quel est le rôle dans tout ceci de Dold-Puppe ? On voit en travaillant que l'avantage de $A_\bullet$ sur A_*, c'est que la description d'un objet y est nettement plus simple – on se perd facilement dans la description des opérations semi-simpliciales ! — et si on a deux avatars $L_\bullet$, L_*, $L_\bullet$ est aussi nettement "moins gros" que L_* (NB on a toujours $L_n \subset L_{[n]}$ comme facteur direct), L_* apparaît comme une sorte de version pléthorique de $L_\bullet$!

Néanmoins, alors que (dans le cas de $A = \mathrm{Ab}_*$ disons) Ab_{k*} et $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ est leur structure multiplicative - qui ne se correspond *pas* par DP et ND — celle de Ab_{k*} est plus simple à beaucoup d'égards, et s'introduit d'ailleurs de bien des façons par la suite de façon absolument impérieuse, alors que celle de $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ ne s'introduit pratiquement pas. De plus, pour les opérations tensorielles de type $\bigwedge^i$, Γ^i, Sym^i, elles manquent purement et simplement dans $\mathrm{Ab}_{k\bullet}$ (sauf de les [définit] par transport de structure via DP !) alors qu'elles sont évidentes sur Ab_{k*} ! Or ces structures également joueront un rôle essentiel par la suite.

[29]Sous réserve que L soit assez gros pour permettre au moins des noyaux de projecteurs !

FAISCEAUTISATION DU TOPOS DE DE RHAM

1.

Soit X un topos, et

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{u} \Phi$$

une immersion de $\mathbf{Z}$ dans un faisceau Φ, tel que

LA “LONGUE MARCHE” À TRAVERS LA THÉORIE DE GALOIS[30]

[30] https://agrothendieck.github.io/divers/galois.pdf

STRUCTURES STRATIFIÉES

1. La situation la plus élémentaire

En un ses qui apparaître, sera la suivante.

[]

de groupoïdes fondamentaux [] est cocartésien - ou encore, si Y, X, X^* sont connexes, et [] (i.e. par définition, un revêtement universel de []) [] un isomorphisme canonique de groupes fondamentaux [] où [] est isomorphe extérieurement à $\pi_1(Y)$.

Pour expliciter $\pi_1(X)$ en termes de données "élémentaires", dont $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(X^*)$ [] encore à expliciter la structure de [], qui s'envoie dans l'un et dans l'autre, donnant [] [] qui exprime (8). C'est ici que l'hypothèse de *locale []* a un [] (celle de lissité [] comme devant techniquement initiale, [] de notre heuristique...).

On doit se [], dans ce cas, pour démontrer que les [] homotopique de [] sont celles d'une *fibration localement triviale des fibres* []: [] - et c'est []] qui devrait [] le contexte topossique (p. ex. celui des schémas avec le topos étale) de *définition* de la "locale trivialité" [] homotopique [] $Y \hookrightarrow X$. (Bien sûr, dans le contexte schématique, il faudrai de plus travailler avec des types d'homotopie profini, et même sans doute "localiser" ces types d'homotopie en l'un des [] premières qui sont distinctes des caractéristique résiduelle qui interviennent, ou que en n'est que alors ce contexte [] des théorèmes qu'il faut, cf Artin-Mazur...)

On ont en particulière une suite exacte d'homotopie []

Si on suppose par exemple que []

allusion, en devrait [] exprimer alors le *type d'homotopie de* X (et non seulement son π_1) en termes de diagrammes de groupoïdes (8), ou ce qui revient au même, des diagrammes de groupes (10).

En tous cas, il est clair (indépendemment de toutes hypothèses de nullité de [] π_i, ou de []) comment reconstruire en termes du diagramme (8), [] faisceaux sur X, [] tels que l'on ait

(16) $$F|X^* \quad \text{et} \quad F|Y \quad \text{localisation triviaux}$$

Cette catégorie F est équivalent en effet à celle des systèmes

(17) $$(E_{X^*}, E_{Y,X}, \varphi)$$

E_{X^*} est un système locale sur π, X^* (un recouvrement étale de X^*), $E_{Y,X}$ un système locale sur [] un homomorphisme de systèmes locaux sur []

(18) $$\varphi : p^*(E_{Y,X}) \longrightarrow i^*(E_{X^*}).$$

En termes de diagrammes de groupes (10)

2. Stratification globale : [] (sans tubes)

Pour simplifier, je vais en placer sur un espace topologique X - par le suite X [] un topos quelconque. Les constructions qui suivent, relatifs à une "stratification globale", [] de la façon habituelle - ce qui [] alors à imposer des conditions supplémentaires de connexité et de locale connexité, qui pour []. De même [].

Soit I un ensemble ordonné,

$$(X_i)_{i\in I} \quad X_i \subset X$$

une famille de sous-espaces de X. On suppose [] Posant [] on a un morphisme canonique

(3) $$X_{\Delta_0} \longrightarrow X$$

et l'hypothèse a) signifie que ce morphisme est fini - i.e. propre sépare et à fibres finies. C'est aussi une *immersion locale*. On introduit une partie fermé [] On voit alors que les deux projections [] ont respectivement les propriétés suivantes : [] Par ailleurs

3. Stratification globale : introduction au tubes

On [] les notations précédentes.

Pour toute couple $(i \leq j) \in I \times I$, considérons

4. Topos canoniques associées à une stratification globale

On va montrer comment, à une situation stratifiée donnée, on peut en associer d'autres.

A) Image inverse générale.

Rappelons les axiomes utilisés jusqu'à puisant : []

Notons que pour tout X' au dessus de X, le famille des [] satisfait alors aux mêmes conditions.

D'ailleurs le système [] des X_{Δ_r} - comme image inverse le lui des X'_{Δ_r}, défini par les X'_i, [] des isomorphismes []

NB. Nous appliquons ces [] sauf en cas où X' est un ouvert de X. C'est pour [] prendre de telles images inverses [], qu'il [] été commode de supposer les X_i ou les X_i^* non-vides, ou encore par $I \mapsto X_i$ est un *plongement* d'une ordonnée $I \hookrightarrow \mathfrak{P}(X)$.

Lorsque $X' \longrightarrow X$ est une immersion locale propre (mais pas si c'est une immersion ouverte !) alors [] les images inverses de parties [] de X comment à [] des voisinages tubulaires de une telles parties []. Notons d'ailleurs que pour $i < j$, [] (sans hypothèse d'ailleurs que $X' \longrightarrow X$ sont une immersion locale) [] d'où, dans le cas d'une immersion locale propre, des isomorphismes [] et plus généralement [] tout qui à faire.

Ceci montre en particulière que la démonstration du théorème de recollement, [] théorème énoncé p.22, est une [] *locale* sur X[31] - ce qui prenant par exemple de nos [] au cas où I *est fini*.

B) Cas d'un $X_{I'}$.

Soit I' une partie de I telle que

$$i \leq j \in I' \Rightarrow i \in I' \tag{7}$$

[31] *non*, ce n'est pas absolument clair []

et tout

(8) $$X_{I'} = \bigcup_{i \in I'} X_i \quad \text{(partie fermée de } X\text{)}$$

On a bien sûr [] (et aussi []) [] à (11 d). Dans ces formules, I', I'', les I'_α sont des parties de I satisfaisant (7) ([] *cribles* de I).

Si dans A) on prend $X' = X$, il est plus commode de travailler avec le stratification de X' définie par les X_i avec $i \in I'$ - il est clair que les conditions (II) relatives à $X' = X_{I'}$ sont satisfaites. Les "parties cribles" de X' pour cette stratification, ou pour celle induit au sens général des espaces au dessus de X, sont les mêmes - [] sur $X' = X_{I'}$ des parties-cribles de l'espace stratifié X.

Ici, les espaces élémentaires pour la stratification de type I' de $X' = X_{J'}$, sont les espaces []

[] pour une instant à X, et considérons l'un I_0 des $i \in I$ tel que $X_i = \varnothing$. C'est une crible, et on a $X_i^* = \varnothing$, [] si $i \in I_0$. [] on voit que les diagrammes de type $\widetilde{I}$ défini par l'espace stratifié X [] en remplaçant I par $I \backslash I_0$, ou plus guère par $I \backslash I'_0$, où $I'_0 \subset I'$ est une crible, ce qui donne lieu à un diagramme [] qu'est *contenu* dans $\widetilde{I}$ (cela est vrai pour *toute* crible de I).

Si par exemple on a deux cribles

(14) $$I'' \subset I' \subset I$$

d'où

(15)

[] regarder plutôt la stratification de type $I' \backslash I''$, définie par les

(16)

dont les topos élémentaires sont dans les $X_{i'}^*$ ($i' \in I' \backslash I''$) et des [] couples (i', j') avec $i' \in I' \backslash I''$ [] on a

(17)

mais il n'est pas clair en générale que ces soient mêmes semblant équivalences d'homotopie...

Donc il [] il s'agit de [] les constructions sur une $X_{I'}$, et sur un [].

Je vais en [] par C sauf de regarder plus particulièrement ce qui se [] en l'induisant ainsi sur un ouvert $U_{I',I''}$.

C) Les [].

On suppose donnée des cribles

(18)

d'où

(19)

NOTES ANABÉLIENNES

I. Résultats de fidélité

À tout corps K, associons son topos étale B_K, qui est un topos (profini) galoisien. Le groupoïde des points de B_K est noté Π_K, il est anti-équivalent canoniquement à la catégorie des clôtures algébriques séparables de K. Si $\overline{K}$ est un telle clôture, son groupe des K-automorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ ou $E_{\overline{K}/K}$ s'identifie au groupe des automorphismes des points de B_K associé à $\overline{K}/K$ (il vaut peut-être mieux de dire à l'opposé de ce groupe - la variance des clôtures algébriques de K est comme celle des foncteurs fibres, à l'opposée de celles des points ...) Bien entendue, B_K se reconstitue à partir de Π_K, comme le topos des systèmes locaux (continues) sur Π_K - et en termes de $E_{\overline{K}/K}$, comme le topos des ensembles discrets à actions continues de $E_{\overline{K}/K}$.

Pour un homomorphisme de corps $K \longrightarrow K'$, i.e. un homomorphisme de schémas $\mathrm{Spec}\,K' \longrightarrow \mathrm{Spec}\,K$, on a un morphisme de topos correspondant

(1) $$\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K$$

associé à un homomorphisme de groupoïdes fondamentaux

(2) $$\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K.$$

Ceci [s'explicait] en disant qu'un objet [] $\Pi_{K'}$ (i.e. point de $\mathrm{B}_{K'}$, ou revêtement universel de $\mathrm{B}_{K'}$, ou clôture séparable $\overline{K'}$ de K') en définit un des Π_K (ainsi, on prend $\overline{K}$ = clôture algébrique séparable de K' dans $\overline{K'}$) et pour deux points correspondants, on a un homomorphisme de groupes fondamentaux correspondants, qui s'interprète par exemple comme

$$E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K} \tag{3}$$

et qui peuvent de reconstitue l'homomorphisme de topos comme une "restriction des scalaires".

L'image de (3) est le sous-groupe fermé de $E_{\overline{K}/K}$ qui correspond à la sous-extension K_1 de $\overline{K}/K$, clôture algébrique séparable de K dans K', i.e. $K_1 = \overline{K} \cap K'$.

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{K} & \longrightarrow & \overline{K'} \end{array}$$

Quand K' est une extension de type fini de K, K_1 est une extension finie de K, et on en conclut que l'image de (3) est alors un sous-groupe d'indice fini, égale à $E_{\overline{K},K}$ si et seule si $K_1 = K$ i.e. K est séparablement algébrique clos dans K'. D'ailleurs, on montre sans mal que (si K est extension de type fini) l'homomorphisme (3) est injectif si et seule si K' est une extension algébrique de K. Donc il est bijectif si et seule si K' est une extension [radicielle] de K. Dans le suite nous nous bornons (précisément) aux corps de caractéristique 0, et la condition précédente signifie alors que $K \longrightarrow K'$ est un *isomorphisme*.

Ainsi, le foncteur $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K, \overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$, est *conservatif* quand on se limite comme morphismes de corps $K \longrightarrow K'$ (de caractéristique 0) à ceux que fait de K' une extension de type fini de K.

Par exemple il suffit de se limiter aux extensions de type fini des corps fermées **Q** - on trouve un foncteur conservatif de la catégorie de ces corps dans celle de groupoïdes (ou de topos), au sens à un morphisme de corps qui donne une équivalence de groupoïdes (ou de topos) est un *isomorphisme*[32].

Quand on prend des corps quelconques, le 2-foncteur $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou $K \longrightarrow \Pi_K$ ou $(K, \overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$ est cependant loin d'être fidèle. Ainsi, si K est séparablement clos, B_K est le "topos ponctuel", Π_K le groupoïde ponctuel, $E_{\overline{K}/K} \simeq 1$ - il est donc

[32] au cas [ ]

que les morphismes entre corps séparablement clos ne sont pas décrits par les morphismes entre leurs topos étales, ou groupoïdes fondamentaux! Pour cette raison, il y a lieu d'associer à un corps K un objet plus fin que B_K ou Π_K, à savoir le système projectif des B_{K_i}, ou des Π_{K_i}, pour K_i sous-corps de K de type fini sur le corps [], et à un système $(K,\overline{K})$ le système projectif des $E_{\overline{K}_i/K_i}$, où $\overline{K}_i$ est le clôture algébrique séparable de K_i dans $\overline{K}$. On []

$$(4)\qquad \begin{cases} \Pi_K \simeq \varprojlim \Pi_{K_i} \\ \mathrm{B}_K \simeq \varprojlim \mathrm{B}_{K_i} \\ E_{\overline{K}/K} \simeq \varprojlim E_{\overline{K}_i/K} \end{cases}$$

i.e. on reconstitue les objets B_K, Π_K, $E_{\overline{K},K}$ à partir des systèmes projectifs correspondant - mais l'inverse n'est pas vrai. En fait, comme le foncteur

$$\mathrm{Ind(Corps\ type\ fini)} \longrightarrow \mathrm{corps}$$

de la catégorie des systèmes inductifs de corps de type fini, vers celle des corps, est une équivalence de catégories (pour des raisons triviales), il s'ensuit que les foncteurs $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$, ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K,\overline{K}) \longrightarrow E_{\overline{K},K}$, étant des corps vers les propriétés idoines, avoir [] les propriétés de fidélité des foncteurs $K \longrightarrow \mathrm{B}_K$, ou $K \longrightarrow \Pi_K$, ou $(K,\overline{K} \longrightarrow \Gamma_{\overline{K},K})$ [] aux corps absolument de type fini, auxquels nous allons pour la suite nous borner, la plupart des temps. Mais il sera nécessaire au cours de travail, de donner une description purement algébrique, par exemple, de pro-groupes finis associé par exemple à (plus précisément, à (C,C) !).

Le rôle dominant sous joué par le corps premier de caractéristique 0, $\mathbf{Q}$ donc pour $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$ et $\Pi_{\mathbf{Q}}$, qui a un objet canonique, noté $\overline{\mathbf{Q}}_0$ - la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans . On posera[33]

$$(5)\qquad \mathbf{G}_{\mathbf{Q}} = E_{\overline{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$$

Pour tout corps K de caractéristique 0 - en particulière pour les corps K de type fini sur , lequel nous allons nous borner par le suite - on a donc des homomorphismes canoniques

$$(6)\qquad \mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathbf{Q}}\, \mathbf{Q}uad \Pi_K \longrightarrow \Pi_{\mathbf{Q}}$$

[33]et on écrit souvent $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}_0/\mathbf{Q}}$ au limite des $E_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$, pour une clôture algébrique [] $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$

qui l'explicitait, quand on a choisi un objet de Π_K i.e. un $\overline{K}/K$, d'où un $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, pour un homomorphisme de groupes profinis

$$E_{\overline{K}/K} \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}. \tag{7}$$

Par le suit, on regardes toujours B_K, Π_K ou $E_{\overline{K},K}$ comme muni de cette structure supplémentaire - ce sont les morphismes (de topos, de groupoïdes, ou de groupes profinis) "arithmétiques", dominant la situation.

Un intérêt particulier s'attende au noyau de (7), que je note $\pi_{\overline{K},K}$ - on[34] l'appelle "partie géométrique" de groupe de Galois $E_{\overline{K},K}$ par opposition au quotient $E_{\overline{K},K}/\pi_{\overline{K},K} = \Gamma_{\overline{K},K} \hookrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}}$, que j'appelle se partie "arithmétique"- celle-ci est un sous-groupe ouvert de $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}}$, qui son [], correspond au sous-corps $\underline{K}$ de $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, extension finie $/\mathbf{Q}$ de $\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans K, de sorte qu'on a une suite exacte

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_{\overline{K}/K} \arrow[r] & E_{\overline{K}/K} \arrow[r] & \Gamma_{\overline{K}/K} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ & & & \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}} & \end{tikzcd} \tag{8}$$

On[35] va donner une interprétation de ce noyau, et de la suite exacte (8), en écrivant

$$K = \varinjlim_i A_i \tag{9}$$

où les A_i sont les sous-$\mathbf{Q}$-algèbres de type fini de K, correspondant au système projectif des "modèles affines" $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ de $K/$. Parmi les A_i, il y a d'ailleurs un système [] fermé des A_i réguliers, i.e. des U_i lisses/, [] comme morphismes de transition des morphismes de localisation []. On peut même, d'après Mike Artin, prendre comme U_i des schémas "élémentaires" sur K_0, se dévissant en fibrations successives de courbes. Notons que $\mathrm{Spec}\, K = \eta$ est le point générique [] des U_i, qui sont [] sur k (clôture algébrique de dans K).

Le choix de $\overline{K}$ définit un point géométrique $\overline{\eta}$ sur les U_i, d'où des groupes $\pi_1(U_i, \overline{\eta}) = \Gamma_i$, et [] bien connus

$$\mathrm{Spec}\, K = \varprojlim U_i$$

[34]on va noter $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ cette "partie arithmetique"

[35]**NB** $\pi_{\overline{K}/K} = (1)$ si et seule si K algébrique sur $\mathbf{Q}$, i.e. fini sur $\mathbf{Q}$.

$$E_{\overline{K}/K} = \pi_1(\eta, \overline{\eta}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i [\,] \quad (\Gamma_i = \pi_1(U_i, \overline{\eta})) \tag{10}$$

D'autre parte, si on pose

$$\overline{U_i} = U_i \otimes_K \tag{11}$$

on a pour tout i une suite exacte d'homotopie

$$1 \longrightarrow \tag{12}$$

qui forment un système projectif de suite exactes, ou d'extensions ayant toutes même quotient Γ', et dont les noyaux

$$\pi_i = \pi_1(\overline{U_i}, \overline{\eta})$$

sont des groupes fondamentaux “géométriques” - que [ ]] d'ailleurs [ ], en utilisant un plongement de [ ] dans $\mathbb{C}$ (d'où un isomorphisme $\simeq_{\overline{0}}$), comme les [ ] profinis de $\pi_1(U_i(\mathbb{C}), \overline{\eta})$, ou maintenant $\overline{\eta}$ est interprète comme un point [ ] aux variétés complexes $U_i(\mathbb{C})$.

La suite exacte (8) est donc le limite projectif des suites exactes d'homotopie (12) ([36]), ce qui donne en particulière

$$\pi_{\overline{K}/K} \simeq \varprojlim_i \tag{13}$$

Utilisant les fibrations des U_i (dans le cas où on s'astreint prendre de variétés élémentaires d'Artin), on trouve que tout π_i est un groupe extension successive des groupes profinis *fibres* (où [ ]). Ceci redonnes p. ex. que le dimension cohomologique de π_i est [ ], celle de E_i est $\leq n+2$ (pour des coefficients de m-torsion, [ ]) - et par passage à la limite, des [ ] correspondantes pour les dimension cohomologiques de $\pi_{\overline{K}/K}$ et $E_{\overline{K}/K}$

$$\dim \operatorname{coh} + \pi_{\overline{K}/K} \leq n, \quad \dim \operatorname{coh} \Gamma_{\overline{K}/K} \leq n+2 \tag{14}$$

qui sont en fait même des *égalités* (sauf erreur), et donnant donc une description cohomologique simple de degré d [ ] absolu de K.

[36]cette interprétation

Théorème **(1).** — *Soit K un corps extension de type fini de , $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Alors pour tout sous-groupe ouvert E de $E_{\overline{K}/K}$, son centralisateur dans $E_{\overline{K}/K}$ est réduit au groupe unité. Itou pour $\pi_{\overline{K}/K}$.*

Démonstration. — Soit $\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma_{/}$ l'image de E dans $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ qui est donc un sous-groupe ouvert. L'image dans Γ des centralisateurs de E' dans E [] centralisateur de Γ' dans Γ. Je dis qu'il est égale à 1, ce qui équivaut donc au

Corollaire. — *Dans* $\mathbf{G} = \Gamma_{\bar{0}/}$, *le centralisateur de tout sous-groupe ouvert est réduit a (1).*

OPS Ce sous-groupe ouvert Γ' invariant, il est bien connue ([37]) qui son centre est réduit à 1 donc si Z est son centralisateur dans Γ, l'homomorphisme $Z \longrightarrow \Gamma/\Gamma'$ est injectif donc Z est fini. Mais on sait que les seules éléments $\neq 1$ de Γ d'ordre fini sont les conjugués de τ , conjugaison complexe. Mais le centralisateur de τ dans Γ est réduit à [] donc on peut contenir Γ', donc $\tau \notin z$, donc $z = (1)$.

[] à $E \subset E_{\overline{K}/K}$, on voit donc que son centralisateur Z dans $E_{\overline{K}/K}$ est une image dans Γ réduite à $\{1\}$ donc $z \subset \pi_{\overline{K}/K}$. Soit $\pi' \subset \pi = \pi_{\overline{K}/K}$ le [] de z' sur π, c'est un sous-groupe ouvert de π, et on est ramené à voir que $\mathrm{Centr}_{\pi}(\pi') = \{1\}$, i.e. le

Corollaire. — *Soit π un groupe profini, extension successives de groupes profinis libres. Alors le centralisateur z dans π de tout sous-groupe ouvert π' de π est réduit à {1}.*

Par dévissage on est ramené au cas d'un groupe profini *libre*. On sait que π' est donc libre. OPS π' invariant, ([38]) et on admet que le centre d'un groupe profini libre est réduit à 1.

Donc $Z \longrightarrow \pi/\pi'$ est injectif, donc Z est fini, et on admet que dans un groupe profini libre, il n'y a pas d'élément ([39]) d'ordre fini $\neq 1$ - ce qui [] la démonstration.

Scholie. — *Le fait que $E_{\overline{K}/K}$ soit à centre trivial peut s'exploiter en disant que le groupoïde Π_K (ou le topos B_K) [] à équivalence près, définie a isomorphisme unique près, quand on connaît le groupe* extérieure *associé à $E_{\overline{K}/K}$.*

[37] à vérifier
[38] à vérifier
[39] à vérifier

Les homomorphismes $E_{\overline{K'}/K'} \longrightarrow E_{\overline{K}/K}$ associés à des homomorphismes $K \longrightarrow K'$ d'extensions de type fini de , ayant une image ouvert dans un centralisateur réduit à 1, on voit de même que l'homomorphisme de topos $\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K$ ou de groupoïdes $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$, sont détermines à équivalence près (définie a isomorphisme unique près) par l'homomorphisme correspondant de groupes extérieures. Il [] en particulière ainsi de morphisme structurel $\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}$ ou $\Pi_K \longrightarrow \Pi$ qu'on peut interpréter intrinsèquement comme un homomorphisme de groupes profinis extérieures $E_K \longrightarrow E$. Mais nous [] suivre [], en exploitant le fait que $\pi_{\overline{K}/K}$ est lui associé à centre trivial. Cela signifie que l'extension de $\Gamma = \Gamma_{\overline{K}/K}$ par $\pi_{\overline{K}/K}$ est entièrement connue, à isomorphisme près, pour $\pi_{\overline{K}/K}$ et Γ fixés, en termes de *l'action extérieure* correspondant de Γ sur π, comme l'image inverse de l'extension universelle

$$1 \longrightarrow Aut(\pi) \longrightarrow Autext(\pi) \longrightarrow 1$$

Pour K fixé, donc k fixé, [] qu'on fixe un $\Gamma = \Gamma_{/k}$ revient à dire qu'on fixe une clôture algébrique de k, [] qu'on fixe un $\pi_{\overline{K}/K} = \pi_1(K \otimes_K \overline{k})$ signifie [] qu'on fixe une revêtement universel de $\mathrm{Spec}(K \otimes_k \overline{k}) = \eta \otimes_k \overline{k}$, les deux ensembles reviennent à se donner le revêtement universel $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{K})$ de K. Par le suite, nous décrivons (avec une fidélité qui reste à []) les couples $(K, \overline{K})$ d'une extension K de de type fini, et d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, par les triples (π, Γ, φ), où $\pi = \pi_{\overline{K},K}$ et $\Gamma = \Gamma_{\overline{K},K}$ sont des groupes profini, et $\varphi : \Gamma \longrightarrow [](\pi)$ une action extérieur de Γ sur π - ce qui peuvent de reconstituer l'extension $_{\overline{K},K}$ de $\Gamma_{\overline{K},K}$ par $\pi_{\overline{K},K}$. J'ai oublie [] qu'il faut *de plus* se donner Γ comme sous-groupe d'un $\Gamma_{/}$ bien déterminé, i.e. qu'il faut se donner un objet de Π et une [] fidèle de Γ dessus - pour reconstruire [] cas données un homomorphisme de groupoïdes profinis $\Pi_K \longrightarrow \Pi$, plus un objet de Π_K - ou encore, un morphisme de topos progaloisiens $\mathrm{B}_K \longrightarrow \mathrm{B}$, plus un point de B_K. On peut ainsi fixer un objet de Π, i.e. un point de B, i.e. un $\overline{\mathrm{Q}}$, et étudier les K, avec un plongement de k (clôture algébrique de dans K) dans - mais [] donner une clôture algébrique $\overline{K}$ de K qui induise /. Ils sont décrits [?]

On a ainsi plusieurs [] essentiellement équivalentes, pour décrire par voie profinie une extension K de type fini de :

1) Pour le topos étale B_K, en tant que topos progaloisien sur B ;

2) Pour le groupoïde fondamental Π_K de ce topos (groupoïde de ces points, ou de ses revêtement universel) - en tant que groupoïde au dessus de Π ;

3) Pour le groupe extérieur E_K, au dessus de groupe extérieur E ou Γ ([]) ;

4) En termes d'une clôture algébrique $\overline{K}/K$ (i.e. en décrivant le couple $(K,\overline{K})$ plutôt que K), par un objet $\in (\Pi)$ et un homomorphisme de groupes profinis $E \longrightarrow \Gamma_{,}$;

5) En termes d'une clôture algébrique fixe de , et où $\Gamma = \Gamma_{,}$ [] les couples (K, i) où $i : k \longrightarrow$ est un plongement de la clôture algébrique k de dans des : pour le groupes extérieur $\pi_K = \pi_1(K)$, sur lequel un sous-groupe ouvert $\Gamma_K \subset \Gamma$ opère extérieurement par des groupes profinis *extérieures* $\pi_1(K) = \Gamma_K$, sur lesquels un sous-groupe ouvert Γ (non précisé []) de $\Gamma_{,}$ opère *extérieurement* ;

6) En termes d'une / : pour le groupoïde $\Pi_{K\otimes}$ [] .

Un homomorphisme de corps $K \longrightarrow K'$ donne ([40]) [] à un homomorphisme de groupes extérieures, $\pi' \longrightarrow \pi$, où l'image de π' dans π est ouvert [] de centralisateur réduit à (1), ce qui implique [] que le morphisme de topos $B_{K'\otimes_K} \longrightarrow B_{K\otimes_K}$ es déterminé (a isomorphisme unique près) par [] homomorphisme extérieur. De plus on a des actions extérieures de $\Gamma = \Gamma_K \subset \Gamma_{K'}$ sur π' et π, de façon que $\pi' \longrightarrow \pi$ [] et ceci suffit pour reconstitue, d'une part les groupes extérieures E, E' extensions ("extérieures") de Γ [] π, π' (et , a équivalence rigide près, les B_K, $B_{K'}$ et $B_K \longrightarrow B$, $B_{K'} \longrightarrow B$) et de plus l'homomorphisme d'extensions extérieures $E \longrightarrow E'$ de Γ.

Remarque. — Quand $\pi \neq (1)$, i.e. K pas fini sur , le théorème 1 peut se renforcer, sauf erreur, en écrivant que pour tout sous-groupe $\pi' \subset \pi$ ouvert *dans* π, $\mathrm{Centr}_E(\pi') = \{1\}$.

Si z est se centralisateur, on a $z \cap \pi = (1)$ d'après le théorème 1, prouvons que l'image de z dans $\Gamma_{\overline{K},K} \subset \Gamma_{,}$ est finie (ce qui [] alors, que z est d'ordre 1 ou 2, et dans le [] cas que son image des $\Gamma_{,}$ est [] pour un τ de conjugaison complexe).

[] E pour un sous-groupe ouvert assez petit (ce qui revient a poser à une extension finie de K) [] $\pi' = \pi$, alors l'image z' de z dans Γ est contenue dans le noyau

[40] on suppose pour simplifier qui c'est

de l'homomorphisme $\varphi : \Gamma \longrightarrow [\,](\pi)$. [] je sais prouver que cet homomorphisme est injectif (ou est ramené aussitôt ou cas où K est de degré de [] 1, et on est ramené ou cas des π_1 d'une courbe algébrique ...)

Théorème (**2**). ([41]) — *Le foncteur $K \longrightarrow \Pi_K/\Pi$ des extensions de type fini de vers les groupoïdes profinis sur* Π *est* fidèle *i.e. si deux homomorphismes $f, g : K \longrightarrow K'$ définissent des homomorphismes de groupoïdes sur* Π *isomorphes*

$$\begin{tikzcd} \Pi_{K'} \arrow[rr, "f^*, g^*"] \arrow[dr, "p'"'] & & \Pi_K \arrow[dl, "p"] \\ & \Pi & \end{tikzcd}$$

(i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs $\alpha : f^* \longrightarrow g^*$ tel que pour tout objet $\overline{\eta'}$ de $\Pi_{K'}$*, le carré*

$$\begin{tikzcd} pf^*(\overline{\eta'}) \arrow[r, "\sim", "p(\alpha)"'] \arrow[d] & pg^*(\overline{\eta'}) \arrow[d] \\ p(\overline{\eta'}) \arrow[r, "\sim"] & p'(\overline{\eta'}) \end{tikzcd}$$

est commutatif) alors $f = g$.

L'hypothèse sur f, g signifie aussi, en termes d'une clôture algébrique choisie $\overline{K'}$ de K', donnent via f [] g deux clôtures algébriques de [] l'on peut trouver un isomorphisme [] celui-ci ([42]) ([] d'identifier $E_{\overline{K}/K}$ et $E_{\widetilde{K}/K}$) de telle façon que les deux homomorphismes

$$f^*, g^* : E_{\overline{K'},K'} \longrightarrow E_{\overline{K},K}$$

sont égaux. C'est sans doute plus claire en termes d'une clôture algébrique fixée de , en disant que les deux homomorphismes $f^*, g^* : E_{K'} \longrightarrow E_K$ de groupes profinis extérieures (avec opérateurs $\Gamma_{\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}}$) sont égaux.

Écrivons comme [] $K = \varinjlim A_i$, donc $\eta = \mathrm{Spec}(K) = \varprojlim U_i$, on a (en termes d'un point géométrique quelconque $\overline{\eta}$ de $\mathrm{Spec}\, K$ i.e. en termes d'un $\overline{K}$)

$$\pi_K = \varprojlim_i \pi_1(\overline{U}_i, \overline{\eta}), \quad \text{où} \quad \overline{U}_i = U_i \otimes_K$$

[41]En fait, ce théorème n'est pas spécial à - il [] avait sur un corps de [] quelconque est en fait

[42]induisant "l'identité" sur [] clôtures algébriques []

et il suffit de voir que pour tout i, $f|A_i = g|A_i$ [] le fait que $\pi_1(f_i^*) = \pi_1(g_i^*) : \pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(U_i)$ (comme homomorphisme de groupes extérieures. On [] fixé, on a $K' = \varinjlim A_j$, où les A_j contient $f_i(A_i)$ et $g_i(A_i)$, donc

$$\pi_{K'} = \varprojlim_j \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'}), \quad \text{avec} \quad \overline{V}_j = \operatorname{Spec}(A_j) \otimes_K .$$

Notons (prenant les V_j réguliers) que les homomorphismes de transition des le système projectif de $\pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'})$ sont surjectifs - donc $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_1(\overline{V}_j, \overline{\eta'})$ est surjectif, ce qui implique que l'égalité de $f^* \text{et} g^* : \pi_{K'} [] \pi_1(\overline{U}_i)$ (comme homomorphismes extérieures) implique celle de $\pi_1(\overline{V}_j) \longrightarrow \pi_1(\overline{U}_j)$.

Donc l'égalité $f_i = g_i$ (d'où $f = g$) est conséquence de résultat plus général). "[] géométrique"

Corollaire **(1).** — *Soient X, Y des schémas de type fini réduits 0-connexes sur un corps algébriquement close k, et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux morphismes, on suppose que $\pi_1(f), \pi_1(g) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ sont égaux (en fait [] extérieurs) Alors*

a) Si Y se plongue par un $i : Y \longrightarrow G$ un groupe algébrique commutatif extension d'une V.A par un tore, il existe un $u \in Y$ (unique) tel que $g(x) = f(x) + u$ et pour tout $x \in X(h)$, i.e. $(i \circ g) = \tau_u \circ (i \circ f)$ (τ_u [])

b) Si Y est une variété élémentaire d'Artin, avec fibres successives des courbes anbéliennes, et X [] et f ou g est dominant, alors $f = g$.

Démonstration. — a) L'unicité de [] est [] - i.e. il suffit ([43]) d'examiner les actions de $\pi(f)$, $\pi(g)$ sur les groupes abelianisés dans π_1, et même sur leurs composantes l-adiques. Prenant le Jacobienne généralisée de type "extension d'une V.A par une tore" de X, on sait que

1°) Les morphismes $f : X \longrightarrow G$ tel que $f(\alpha) = 0$ se factorisent de façon unique par $X \xrightarrow{can} J \xrightarrow{\varphi} G$ avec φ un homomorphisme de groupes algébriques ;

2°) Un tel homomorphisme φ est connu quand on connaît ses actions sur les $H_1(\ ,\mathbb{Z})$ ce qui [] à la connaissance sur les points d'ordre [] que soit v - on ceux-ci sont denses ...

[43] En fait, dans a) il suffit de supposer que

3°) $H_1(X,\mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H_1(J,\mathbb{Z}_l)$.

De ceci, on conclut (par 3°)) que $H_1(f) = H_1(g)$ implique (si $f = \varphi \circ can$, $g = \psi \circ can$) $H_1(\varphi) = H_1(\psi)$, donc par 2°) que $\varphi = \psi$, donc $f = g$ []

Notons que l'on

b) on va pourtant prouvons l'égalité sans l'hypothèse anabéliennes

[] L'hypothèse que $\pi_1(f) = \pi_1(g)$ signifie donc qu'il existe $\alpha \in \pi_1(Y)$, tel que

$$\pi(f')(\gamma) = []\pi(j)(\gamma)$$

pour tout $\gamma \in Im(\pi_1(X) \xrightarrow{\pi_1(f)} \pi_1(U))$. [] cette image est un sous-groupe *ouvert* de $\pi_1(U)$ ([] dominant !). Donc on est ramené à ceci: Soit U ouvert $\neq \varphi$ de Y, $u \in G$, tels que $\tau_u U \subset Y$ [et tels que (désignant par f, f' les morphismes $y \longrightarrow y$ et $y \mapsto y$ en de U dans Y) $\pi_1(f)$ et $\pi_1(f')$ [] extérieurement en un sous-groupe ouvert de $\pi_1(U)$] *alors* $f = f'$ voie $u =$

Finalement, je [] que [] pas à la prouve par voie géométrique [] *arithmétique*.

Corollaire **(2)**. — *Le condition $f = g$ de corollaire précédent, est valable si on suppose que K est de caractéristique 0, X [] est dans l'une des hypothèses suivantes*

c) l'image de $\pi_1(F)$ est un sous-groupe ouvert de $\pi_1(Y)$, Y est une variété élémentaire d'Artin anabélienne ;

d) l'image de $\pi_1(X)$ par $\pi_1(f)$ a un centralisateur dans $\pi_1(Y)$ réduit à (1), et Y se plonge dans un groupe algébrique extension d'une VA par un tore.

Comme le centralisateur [] de un sous-groupe ouvert de $\pi_1(Y)$ ($\pi_1(Y)$ étant extension successive de groupes profinis *fibres* anabéliennes) est réduit à (1), comme un a un[44] plus haut, le cas c) est un cas particulier de d), [] dans le cas d), [] X pour un ouvert d'Artin []

La situation X, Y, f, g provient, par extension de corps de [] d'une situation analogue sur un corps K extension de type fini de . Soit $\overline{K}$ la clôture algébrique de K dans k [] de K à $\overline{K}$. On a donc [] satisfaisant la condition d) avec [] trivial.

[44] il faut

Mais ces hypothèses impliquent que les extensions $E(X/K) = \pi_1(X)$, $E(Y/K) = \pi_1(Y)$ de $E_{\overline{K},K}$ [], ainsi que les homomorphismes [] induits, sont reconstruite à partir de [] et de l'action extérieure de $E_{\overline{K},K}$ sur ces groupes. On va montrer maintenant le

Corollaire **(3).** — *Soient X, Y deux schémas de type fini sur un corps K extension de type fini de , On suppose que Y se plongue dans une extension d'une V.A. par un tore, X réduit, X, Y [] 0-connexe. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, d'où des extensions "extérieures" $E_{X,K}$, $E_{Y,K}$ de $E_{\overline{K},K} = \mathrm{Gal}(\overline{K},K)$ [] $\pi_1(\overline{X})$, $\pi_1(\overline{Y})$, et pour tout morphisme $f: X \longrightarrow Y$, un morphisme [] de $E_{X,K}$ [] $E_{Y,K}$.*

Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ tels que [] - i.e. [] soient conjugués pour un élément de $\pi_1(Y)$ [] alors $f = g$.

En fait, il suffit même que ls homomorphismes d'*extensions* [] soient égaux, [] $f = g$. (C'est à dire, [] des hypothèses *anabéliennes*, des hypothèses [] géométriques sue les actions de [], [] on peut laisser tomber les aspects anabéliens [] sur les aspects abéliens []) [].

Il suffit de voir que [] à noyau abélien associée - l'hypothèse implique que $f(x)$ et $g(x)$ définissent le même donne de conjugaison de scindages. Donc il suffit maintenant de prouver le

Théorème **(3).** — *Soit X un schéma de type fini sur un corps K, extension de type fini de , on suppose que X est géométriquement 0-connexe et se plongue dans une extension d'une V. A. par un tore (p. ex. X est une variété élémentaire d'Artin, à fibres []).*

Considérons une clôture algébrique $\overline{K}/K$ et l'extension extérieure correspondant $E_{X/K}$ dans $E_{\overline{K}/K} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ par $\pi_1(\overline{X})$ ($\overline{X} = X \otimes_K \overline{K}$) et l'extension déduite de $\widetilde{E}_{X/K}$ de $E_{\overline{K}/K}$ par $\pi_1(\overline{X})_{ab}$. Considérons les applications

$(*)\quad X(K) \longrightarrow$ Classes de $\pi(\overline{X})-$conjugaison de scindages de $E_{X/K}$ sur $E_{\overline{K}/K}$

$(**)\qquad X(K) \longrightarrow$ Classes de conjugaison de scindages

Ces applications sont *injectives*.

Démonstration. — Il suffit de le [] pour le seconde application, et on est ramené au cas où X est lui-même un groupe algébrique G, extension d'une V. A. par une tore. Alors l'application est un homomorphisme de groupes

(16) $$G(K)$$

obtenue ainsi. On considère pour tout [] la suite exacte []

$$0 \longrightarrow [\,] \longrightarrow G[\,] \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

[] suite exacte de cohomologie

[]

et passant à la limite, on trouve

$$0 \longrightarrow$$

le composé de (16) avec l'homomorphisme canonique

[]

compte tenu de

[]

[] que l'homomorphisme induite par

[]

dont le noyau [] est fermé des éléments de $G(K)$ *infiniment divisibles* dans . [] ici K étant un corps [] de type fini le théorème de Mordell-Weil [] que $G(K)$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini - donc $G(K) \longrightarrow \varprojlim G(K)_n$ est injectif. Donc []

Remarque. —

[] x dans le "revêtement universel abélien" $\widetilde{G}$ de G construit comme $\varprojlim$ des revêtements $G(n) \simeq G$ de G, donnée, []. L'énonce dit que si [] est trivial - i.e. si [] mais dans ce cas [] soit [] étales.

est cependant possible que [] ...

[] aux conditions de de Corollaire 1, b), [] avec les groupes fondamentaux [], on trouve que

[]

Complément. — Retour sur une démonstration *géométrique* du Théorème 2, Corollaire 1 b). On peut supposer que ce est le Jacobienne généralisée de Y, et il suffit de montrer le

Lemme. — *Soit Y une variété élémentaire d'Artin anabélienne (sur K algébriquement clos), $Y \hookrightarrow J^1_Y$ son plongement dans sa Jacobienne généralisée, $u \in J^0_Y(k)$ et U un ouvert non [] de Y, tels que $U + u \subset Y$. Alors $u = 1$, ou encore: l'application $x \mapsto x$ [] de U dans Y est l'identité.*

Par dévissage, on es ramené au cas où Y est une courbe. Supposons le d'abord complète, de suite que $U + u \subset Y$ implique $Y + u \subset Y$ - alors la [] est bien connu (et résulte par exemple de la formation des points fixes, qui implique que [] ce qui [] $J^0_Y(k)$ est nulle. Pour que $x + u$ soit de la forme y ($y \in Y$) il faut [] que $u \in \alpha$ et y aient même image dans $J^1_{\hat{y}}$, ce qui [] Je veut mieux, dans le cas général, présenter les choses sous forme homologique. Considérons les deux morphismes $U \hookrightarrow iY$ induisant et $J : U \longrightarrow Y$ induit par lui, je dis que $H_1(i) = H_1(j)$, ou ce qui revient au même, puisque $Y \xrightarrow{\alpha} J'_Y$ induit un isomorphisme $H_1(\alpha) : H_1(Y) \longrightarrow H_1(J'_Y)$, que

Si le genre est 0, on en concluait (puisque []. Dans le cas de genre 1, on en concluait maintenant que l'image de un des $J^0_{\hat{y}}$ est égale à 1, et on [] comme précédemment. []

II. La question de pleine fidélité

Soient K, K' deux extensions de type fini de $\mathbf{Q}$ - est-il vrai que tout $\Pi_{\mathbf{Q}}$-homomorphisme $\Pi_{K'} \longrightarrow \Pi_K$ provient d'un homomorphisme de corps $K' \longrightarrow K$? On est ramené aussitôt au cas où – une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ étant choisie, d'où un $\Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}}$ – K et K' ont des sous-corps k, k' (clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans K resp. K') isomorphes, avec des plongements $k, k' \longrightarrow \mathbf{Q}$ de même image, que E_K et $E_{K'}$ peuvent être considérés comme des extensions d'un même groupe $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$ par π_K resp. $\pi_{K'}$. La question est alors si *tout* homomorphisme de $\pi_{K'}$ dans π_K qui commute à l'action de Γ, est induit par un homomorphisme $K \hookrightarrow K'$. Pour construire ce dernier, il faudrait donc avoir une idée comment reconstruire K, K' à partir des extensions $E_K, E_{K'}$, ou encore à partir des groupes profinis extérieurs avec opération de Γ dessus. Et on pressent que le Théorème 3 du paragraphe précédent (appliqué notamment à $\mathbb{P}^1_K$ convenablement troué ...) pourrait donner la clef d'une telle construction.

Bien sûr, des homomorphismes extérieurs quelconques $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ n'auront pas de sens géométrique - l'idée est que les opérations du groupe $\Gamma = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/k}$ dessus soit si draconienne, qu'il n'est possible de trouver un homomorphisme extérieure qui y commute que par voie géométrique – par des plongements de corps. Donc il est essentiel ici que le corps de base ne soit pas quelconque, mais un corps tel que $\mathbf{Q}$ (ou, ce qui revient manifestement au même, une extension de type fini de $\mathbf{Q}$). Encore faut-il se borner aux homomorphismes $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ dont on décrète d'avance que l'image soit ouverte – sinon, prenant pour $\pi_{K'}$ le groupe unité (i.e. $K' = k$), on trouverait un homomorphisme $K \longrightarrow k$ correspondant! Il faut pour le moins, pour travailler à l'aise à partir d'homomorphismes $\pi_{K'} \longrightarrow \pi_K$ (au lieu de $E_{K'} \longrightarrow E_K$) supposer que le centralisateur dans π_K de l'image de tout sous-groupe ouvert de $\pi_{K'}$ soit réduit à $\{1\}$ – on dira que l'homomorphisme en question est *anabélien* alors – de telle façon qu'à partir de cet homomorphisme (commutant à Γ) on reconstitue l'homomorphisme d'extensions E_K et $E_{K'}$, qui est l'objet vraiment essentiel. Par exemple, si justement $K' = k$, donc $E_{K'} = \Gamma$, ce qui nous intéressera, ce ne seront pas le Γ-homomorphismes de $\pi_{K'} = \{1\}$ (!) dans π_K, mais bien les *sections* de E_K sur Γ.

Question-conjecture. — *Soient K, K' deux corps, extensions de type fini de* $\mathbf{Q}$, *et un morphisme* $\mathrm{B}_{K'} \longrightarrow \mathrm{B}_K$ *de topos sur* $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$.

Les conditions suivantes sont-elles bien équivalentes [?]

(a) L'homomorphisme provient d'un plongement de corps $K \hookrightarrow K'$.

(b) L'image de l'homomorphisme extérieur $E_{K'} \longrightarrow E_K$ a une image ouverte.

(c) L'homomorphisme extérieure $E_{K'} \longrightarrow E_K$ est anabélien[45].

NB. On sait que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) et que (b) équivaut à $\pi_K \longrightarrow \pi_{K'}$ a une image ouverte.

Une réponse affirmative impliquerait que si $\operatorname{degtr} K'/\mathbf{Q} < \operatorname{degtr} K/\mathbf{Q}$, alors il n'y a pas de tel homomorphisme $E_{K'} \longrightarrow E_K$, compatible avec les projections dans

[45] (c) n'est pas assez fort, cf. plus bas…

$E_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, en particulier, il en résulterait que toute section de E_K sur $\Gamma = \mathrm{Im}(E_K \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{Q}})$, ou sur un sous-groupe ouvert Γ' de Γ, a un centralisateur non-trivial dans E_K – et comme son centralisateur dans Γ est réduit à $\{1\}$, cela impliquerait que pour toute telle section, on aurait (si $\pi_K \neq 1$) $\pi_K^{\Gamma'} \neq \{1\}$. Or je m'aperçois que ceci est sans doute faux (cf. plus bas, numéro 3) - il faudrait renforcer (c) ci-dessus en [:]

(c′) L'homomorphisme $E^\circ_{K'} \longrightarrow E_K$ induit par $E_{K'} \longrightarrow E_K$ est anabélien (où $E^\circ_{K'}$ est le noyau de l'homomorphisme composé

$$E_{K'} \longrightarrow \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}} \xrightarrow{\chi \text{ caractère cyclotomique}} \hat{}$$

Z^*).

Mais pour voir que cette condition est *nécessaire* pour que l'homomorphisme soit géométrique, il faudrait vérifier que pour tout sous-groupe ouvert E' d'un E_K, le centralisateur dans E_K (non seulement de E' lui-même, mais même de E'°) est réduit à 1 – ce qui résulte de la démonstration du Théorème 1, et du fait[46] que pour tout sous-groupe ouvert Γ' de $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, le centralisateur (non seulement de Γ', mais même) de Γ'° dans Γ est réduit à $\{1\}$.

Donc, la conjecture initiale revue et corrigée donné la

Conséquence (conjecturale). — *Pour tout section de E_K sur un sous-groupe ouvert Γ' de $\Gamma_{\mathbf{Q}}$, de sorte que Γ' opère (effectivement) sur π_K, on a (si K pas algébrique sur* $\mathbf{Q}$, *i.e.* $\pi_K \neq \{1\}$*)* $\pi_K^{\Gamma'^\circ} \neq \{1\}$.

À vrai dire, à certains égards les Γ_K sont des groupes trop gros pour pouvoir travailler directement avec, il y a lieu de regarder Γ_K comme un $\varprojlim$ de groupes $\Gamma_{U/\mathbf{Q}}$ associés à des modèles affines de K – et on s'intéressera plus particulièrement à des modèles affines qui sont des variétés élémentaires – plus généralement, qui sont des $\mathrm{K}(\pi, 1)$ (au sens profini...). Il est possible qu'il faille d'ailleurs, dans l'énonce de la conjecture de départ, prendre un homomorphisme extérieur $E_{K'} \longrightarrow E_K$ dont on suppose d'avance (en plus de l'hypothèse anabélienne et de la compatibilité avec les homomorphismes dans $\Gamma_{\mathbf{Q}}$) qu'elle est compatible avec les *filtrations* de ces groupes,associés à ces modèles ("filtration modélique" (grossière)).

[46] à vérifier !

Nous allons alors, au même temps que des extension de type fini de $\mathbf{Q}$, les homomorphismes entre tels, et homomorphismes de groupes profinis associés, étudier la situation analogue pour des "modèles" élémentaires anabéliens, voire des modèles $\mathrm{K}(\pi, 1)$ généraux (On peut aussi regarder de tels modèles sur un corps K, extension de type fini de $\mathbf{Q}$ – mais passons pour le moment sur cette situation mixte, un peu bâtarde…) Si U, V sont des tels modèles, tout morphisme $V \longrightarrow U$ définit un morphismes de topos galoisiens sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$, $\mathrm{B}_U \longrightarrow \mathrm{B}_V$, et si U est élémentaire anabélien, ce morphisme et connu quand on connaît seulement $\mathrm{H}_1(\mathrm{B}_{\overline{U}}, \mathbf{Z}_\ell) \longrightarrow \mathrm{H}_1(\mathrm{B}_{\overline{V}}, \mathbf{Z}_\ell)$ – ce qui est beaucoup moins que la classe d'isomorphie d'homomorphismes de $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$-topos. (Œn fait, sans hypothèse anabélienne sur V, dès que V se plonge dans une variété anabélienne, f est connu quand on connaît son action sur les topos étales…). Mais quels sont les homomorphismes $\mathrm{B}_U \longrightarrow \mathrm{B}_V$, ou $E_U \longrightarrow E_V$, qui correspondent à des morphismes de modèles ? Avec un peu de culot, on dirait [:]

Conjecture fondamentale. — *Soient U, V deux schémas de type fini sur $\mathbf{Q}$, V séparé régulier, U une variété élémentaire anabélienne sur une extension finie de $\mathbf{Q}$. Considérons un morphisme $\mathrm{B}_V \longrightarrow \mathrm{B}_U$ des topos étales sur $\mathbf{Q}$ – ou, ce qui revient au même, un homomorphisme de groupes extérieurs*

$$f : E_V = \pi_1(V) \longrightarrow E_U = \pi_1(U),$$

compatible avec les homomorphismes extérieurs dans $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \pi_1(\mathbf{Q})$[47].

Conditions équivalentes [:]

(a) Cet homomorphisme provient (à isomorphisme près) d'un morphisme $V \longrightarrow U$ sur les modèles (qui est donc uniquement déterminé)

(b) $f|E_V^\circ$ est anabélien, i.e. l'image par f de tout sous-groupe ouvert de E_V° a un centralisateur réduit à 1.

Pour la nécessité de (b), on est ramené aussitôt au cas où V est réduit à un point, où cela se réduit à la

[47]**NB** Pour l'unicité, on est ramené aussitôt au cas où V lui-même est un modèle élémentaire anabélien, si ça nous chante.

Conséquence conjecturale. — *Soit* $\Gamma' \subset \mathrm{Im}(E_U \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{Q}})$ *un sous-groupe ouvert, correspondant à un corps k fini sur* $\mathbf{Q}$*, considérons un k-point de* U*, d'où un relèvement* $\Gamma' \longrightarrow E_U$*, de sorte que* Γ' *opère sur* π_U*. Ceci posé, on a* $\pi_U^{\Gamma'^{\circ}} = \{1\}$.

On étudiera par la suite les relations entre cette "conséquence conjecturale", et la précédente (d'apparence opposée !) concernant les E.

La conjecture fondamentale sur les modèles implique la conjecture fondamentale sur les corps, à condition de prendre soin, dans cette dernière, de se limiter aux homomorphismes compatibles aux filtrations modéliques.[48]

Plus généralement, prenant maintenant pour U des schémas qui sont des $\varprojlim$ des modèles élémentaires anabéliens, avec morphismes de transition des immersions ouvertes affines (pour pouvoir passer à la $\varprojlim$ dans la catégorie des schémas), pour V un schéma $\varprojlim$ de schémas séparés réguliers de type fini sur $\mathbf{Q}$ (morphismes de transition immersions ouvertes affines sans plus). Alors les morphismes *dominants* de schémas $V \longrightarrow U$ doivent correspondre aux homomorphismes extérieurs $E_V \longrightarrow E_U$ compatibles avec les projections dans $E_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\mathbf{Q}}$, et telle que l'image soit ouverte. Par exemple, on pourrait prendre pour U, V les spectres d'anneaux locaux réguliers essentiellementde type fini sur $\mathbf{Q}$.

—

Cette conjecture fondamentale (éventuellement revue et corrigée en cours de route !) étant admise, la question qui se pose ensuite est de déterminer les topos (pro)galoisiens sur $\mathrm{B}_{\mathbf{Q}}$ qui proviennent de modèles élémentaires anabéliens – ou encore, les $\pi_U = \pi_1(\overline{U})$ de tels modèles étant connus, de déterminer quelles sont `[les]` actions extérieures possibles de sous-groupes ouverts Γ de $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ sur de tels groupes fondamentaux – et éventuellement question analogue pour d'autres types de groupes profinis, correspondant à des $\mathrm{K}(\pi, 1)$ qui se réaliseraient par des variétés algébriques (sur $\mathbf{C}$, disons), mais pas par des variétés élémentaires. (J'ai en vue autant des variétés modulaires, tels que, notamment, des variétés modulaires pour les courbes algébriques ...) à partir de là, on reconstruirait par recollement, en termes profinis, tous les schémas lisses sur un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$ (ou plutôt la

[48] Et il vaut mieux se borner à l'équivalence de (a) et (b) – la condition (c) avec les centralisateurs risque de passer mal à la $\varprojlim$.

catégorie de ceux-là), ou plus généralement, sur un corps quelconque – puis, sans doute, par "recollement", la catégorie des schémas localement de type fini sur un K – tant `[?]` des `[varier?]` la catégorie des fractions qui s'en déduit en rendant inversibles les homéomorphismes universels…

Les réflexions précédentes suggèrent aussi des énoncés comme le suivant : Pour un schéma de base S localement noethérien donné[49], les foncteurs $X \longrightarrow X_{\text{ét}}$, allant de la catégorie des schémas réduits localement de présentation finis sur S, vers la 2-catégorie des topos au-dessus de $X_{\text{ét}}$, est 1-fidèle (deux homomorphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$ tels que les morphismes de topos $f_{\text{ét}}, g_{\text{ét}} : X_{\text{ét}} \rightrightarrows Y_{\text{ét}}$ au-dessus de Set soient isomorphes, sont égaux) et même peut-être *pleinement fidèle*, quand on passe à la catégorie des fractions de $(\mathrm{Sch}_{\text{l.t.f.}})/S$ obtenue en rendant inversibles les homéomorphismes universels… Exprimant ceci par exemple pour les automorphismes d'une courbe algébrique propre sur une extension fini de $\mathbf{Q}$, on retrouverait le "fait" que tout automorphisme extérieur de E_K (K le corps des fonctions de X) qui respecte la structure à lacets `[?]` et qui commute à l'action de Γ, provient d'un automorphisme de X.

III. Étude des sections de E_U sur Γ

Soit U un schéma connexe lisse de type fini géométriquement 0-connexe sur le corps K, d'où $E_U \longrightarrow E_K$, et ([50]) on se propose d'étudier les sections mod $\pi_{U,K}$-conjugaison - plus généralement, on [] un même topos [] les sections $E'_K \longrightarrow E_U$, où E'_K est un sous-groupe ouvert de E_K (ce qui signifie que [] fait une extension de base finie sur K). Si K de type fini sur le corps $\mathbf{Q}$ et si U se plonge dans une schéma sur un groupe commutatif rigide l'application

$$U(K) \longrightarrow [\,]\ \text{d'isomorphisme section de } \mathrm{B}_U \text{ sur } \mathrm{B}_K[\,]\pi_{U_K}\text{—conjugaison de sections de} E_U \text{sur} E_K$$

est injectif. On va examiner d'entre façons "géométriques" de trouver des sections.

Supposons d'abord que U soit une courbe algébrique, que ne soit pas de type $(0,0)$ ou $(0,1)$, i.e. $\pi_1(\overline{U}) = \pi_{U,K} \neq \{0\}$. On a que pour tout $i \in \widehat{\overline{U}} \backslash \overline{U}$ (point à

[49] S de caractéristique 0 ?

[50] On a choisie un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U pour définir X, et E_U, E_K, et $E_U \longrightarrow E_K$.

l'infini) le groupe de lacets L_i fournit un scindage (des [] i.e. []) en prenant son centralisateur $Z(L_i)$ dans E, d'où

$$1 \longrightarrow L_i \longrightarrow Z(L_i) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1 \tag{2}$$

et en prenant les scindages de cette extension. Il ne existe, p. ex. définis par une [] de $\overline{O}_{\widehat{U},i}$. L'un des donnes de conjugaison des scindages de (2) est un []

(3)

et [] injectivement de l'un des donnes de π-conjugaison de scindages.

Proposition. — *([51]) On suppose $(g,v) \neq (0,0),(0,1)$ i.e. $\pi_{\overline{U}} = \pi_{U,K} \neq (1)$. Alors les classes de π-conjugaison scindage de* (1) *définis pour les scindages de* (2) *sont distinctes de celles associés aux points de $U(K)$. Si de plus $(g,v) \neq (0,2)$, i.e. si [] est dans le cas anabélien, alors les classes de π-conjugaison de scindages de (1), associés à des scindages de (2) pour deux indices $i = i_1$ et $i = i_2$ distincts, soient distincts.*

La première assertion s'obtient en "bordant" le trous i, alors la section envisagé devient la section de $U \cup \{i\} = U'$ associée au point i, et celle est donc distincte de celle associée aux [] points de U', i.e. aux points de U - a fortiori [] pour le sous-groupe [] par L_i. On [] de même pour [] que les [] de scindages associées a un L_{i_1} et un L_{i_2}, $i_1 \neq i_2$, sont distinctes, [] sauf le cas de type $(0,3)$ [] on tombe sur le type $(0,1)$, où [] de résultat d'injectivité. Mais on peut [], à condition d'admettre que pour un scindage de (2), faisant opérer Γ sur π, on a

$$\pi^{\Gamma^\circ} = L_i \tag{3}$$

(donc $\pi^\Gamma = (1)$, d'ailleurs) - résultat que on [] plausible. [] que le [] de conjugaison de sections détermine le [] de conjugaison de L_i, donc i.

Conjecture **(A)**. — *Soit U courbe algébrique anabélienne géométrique* 0*-connexe sur corps K de type fini sur* $\mathbf{Q}$. *Alors toute section de (1) est d'une des deux types précédents, i.e. soit définie par un point de $U(K)$* [52]*, Sont pas une section d'une extension (2), avec $i \in I(\pi)^\Gamma$ i.e. [] un point de $\widehat{U} \backslash U$, rationnel sur K.*

[51] C'est démontré sauf pour le type $(0,3)$ []

[52] Il y a [] plus []

Si on obtient cette conjecture, alors on va conclurait, pour passage à la limite, en considérait le corps de fonctions L de U et $E_L \longrightarrow E_K$ (E_L peut être considéré comme un groupe à lacets "infini" (avec une infinité des classes de sous-groupes lacets L_i...) que tout scindage de cette extension provient d'une scindage d'une extension de type (2), avec $i \in I$ $\Gamma = X(K)$ $(X = \hat{U})$. Les classes conjugués de tels scindages se grouperaient donc pour paquets (en regardent les centralisateurs des sous-groupes image de Γ° par ses sections,) et un [] ensemble des scindages qui est donc [](Γ^0) conjugués (même s'il ne sont eux-mêmes conjugués). Donc on retrouve [] une description de $X(K)$ (donc ainsi de $X(K')$ pour toute extension finie K' de K) en termes de l'extension E_L de E_K par $\pi_{L,K}$, au même temps qu'une [] de reconstitue les $U = X \backslash I$ []

Donc en fait c'est la structure $E_L \longrightarrow E_K$ qui est le plus riche a priori, et de loin plus commode pour le genre 0 et 1, où le considération des U de type (g, v) $(2g + v \geq 3)$ [] le groupe "continue" d'automorphismes... La forme "modélique" de la conjecture précédente revient à la forme "birationalle", quand on y précise cette [] en disant que tout scindage de $E_U \longrightarrow E_K$ se revient au un scindage de $E_L \longrightarrow E_K$ (on ainsi, [] un scindage de $E_V \longrightarrow E_K$, si V est un modèle [] U).

On ne [] les conjectures précédentes (sous forme modèlique, disons) sous une forme plus géométrique, en introduisant, un même topos qu'un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U, [] X' de X [] $\widetilde{U}$ (où $X = \hat{U}$). (NB je m'abstient de le noter $\widetilde{X}$, [] il n'est pas [] sur X). Notons que pour $i \in I = \overline{X} - \overline{U}$, l'un des L_i des $\overline{\pi} = \pi(\overline{U})$ [] en correspondance 1-1 avec [] fibre X'_i de X' au dessus de i.

$$X \longrightarrow \overline{X} \longrightarrow X'$$

Donc X' peut être considéré comme le [] de $\widetilde{U}$, et de $X' \backslash I$ = ensemble des sous-groupes lacets de $\overline{\pi}$, qui apparaissent ainsi comme des "points à l'infini" des revêtements universel $\widetilde{U}$. D'ailleurs E_U s'interprète comme le groupe de [] schéma $\widetilde{U}$ [], et $E_U \longrightarrow E_K$ comme l'homomorphisme de passage au quotient [] (NB. $\overline{K}$ s'identifie a la clôture algébrique de K dans [], donc E_U opère sur Spec$\overline{K}$ de façon []) Une section de E_U sur E_K est donc une action de E_K sur $\widetilde{U}$, compatible avec son action sur $\widetilde{U}$ [] convenable (sans doute [] $\overline{U}_i$ finis sur $\overline{U}$ entre $\overline{U}$ et $\overline{U}$...). Considérons alors la

Conjecture **(B)**. ([53]) — *Toute telle action de* Γ *sur* $\widetilde{U}$ *admet* dans $X' = \widehat{\widetilde{U}}$ *un point fixe et un seul.*

Ceci signifie alors

a) S'il y a un point fixe à distance finie i.e. $\widetilde{X} \in \widetilde{U}^T$, alors

1°) L'image de $\widetilde{X}$ dans U est uniquement déterminée - c'est essentiellement le Théorème 3 dans §1 (des α points distincts de $U(K)$ définissent des classes de conjugaison des scindages distinctes) et

2°) [54] $\pi^\Gamma = (1)$ (i.e. il n'y a pas d'autre point fixe dans $\widetilde{U}$ sur ce même $x \in U(K)$), et [ ]

3°) il n'y a pas au même temps ce point fixe à l'infini - i.e. il n'existe pas de L_i normalisé par Γ, i.e. une scindage des [ ] type n'est pas au même temps des deuxièmes (fait que nous avons et oubli directement, précédemment).

D'autre part, dans le cas de points fixes à l'infini, l'unicité de l'image dans X signifie qu'une même action effective [ ] à la fois un L_i et [ ] $(v \neq J)$ - Fait [ ] établi sauf dans le cas $(g, v) = (0, 3)$ - et l'unicité au dessus d'une $i \in I$ fixé signifie que le L_i (i fixé) normalisé par Γ est unique, ce qui est un affaiblissement de la relation

$$L_i = \mathrm{Cen}\pi^{\Gamma^\circ}$$

pour ces opérations, conjecture plus haut.

En fait, je conjecture que dans la conjecture B, il est même vrai que Γ° agissant sur $X' = \widehat{\widetilde{U}}$ a un point fixe et un seul (ce qui est plus haut, [ ] point fixe [ ] nécessairement fixe pour Γ). Ceci implique dans le cas des points fixes à distance finie, qu'est alors $\pi^{\Gamma^\circ} = (1)$, comme il se devrait en général [ ] et dans le cas de points fixes à l'infini, que

$$\pi^{\Gamma^\circ} \subset \mathrm{Norm}_\pi(L_i) = L_i$$

donc le [ ] $\pi^{\Gamma^\circ} = L_i$ [ ] !

[53] et même l'action induit de Γ° doit avoir un point fixe [ ] plus bas

[54] C'est un cas particulier [ ]

[ ] tous nos beaux énoncés devraient être valables, [ ] un corps de base K de type fini de $\mathbf{Q}$, mais [ ] que K est extension de type fini d'un corps cyclotomique (pas [ ] fini sur $\mathbf{Q}$).

Nous pourrons définir les *courbes de Poincaré* sur un corps algébriquement clos de $\overline{K}$ de caractéristique 0, comme étant les courbes isomorphes à des revêtements universels de courbes algébriques anabéliennes sur K (donc courbes anabéliennes $\overline{U}$, $\overline{V}$ sur $\overline{K}$ définissent des revêtements de Poincaré isomorphes, si et seule si existe un revêtement fini étale de l'un, isomorphes à un revêtement fini étale de l'autre). Étant donné une courbe de Poincaré $\widetilde{\widetilde{U}}$ sur $\overline{K}$, on définit canoniquement sa complétion $\widehat{U}$ [ ] $\widehat{U}$. Ceci posé :

Conjecture **(B')**. — *Soient K un corps de type fini sur* $\mathbf{Q}$ *(ou sur un corps cyclotomique suffise peut-être), $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, U une courbe de Poincaré sur $\overline{K}$, de complétion $\widehat{U} = X$. Considérons une action de* $\Gamma = \Gamma_{\overline{K},K}$ *sur U, compatible avec sous-action sur $\overline{K}$, d'où une action de* Γ *sur X. Ceci posé : Il existe un point fixé et un seul de* Γ° *agissent sur X (*Γ°*, noyau de caractère cyclotomique* $\Gamma \xrightarrow{\chi} \widehat{\mathbf{Z}}^{*}$*).*

La différence avec la conjecture B, pour celle-ci [ ], [ ] d'un groupe profini π, [ ] librement sur U de façon que $U_{/\pi}$ soit une courbe algébrique anabélienne sur $\overline{K}$.

Que donneraient les conjecture précédentes, quand on les applique à une situation ou K est [ ] pour un modèle S de K (disons, élémentaire anabélienne), quand U_K provient d'une courbe relative U_S sur S - de sorte qu'on a un homomorphisme de groupes

$$E_{U_S} \longrightarrow E_S \tag{4}$$

de noyau $\pi_{\overline{U}}$, dont $E_{U_K} \longrightarrow E_K$ est déduit pour changement de base i.e. par produit fibre

$$E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}[\,] \tag{5}$$

Ainsi, les sections de E_{U_K} sur E_K correspondant aux relèvement continus $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ de l'homomorphisme surjectif $E_K \longrightarrow E_S$ et parmi ce relèvement, ceux qui sont triviaux sur le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ correspondants existent aux sections de E_{U_S} sur U_S. Nos conjectures impliquent donc qu'il y a existent deux sortes telles sections : 1°) celles qui correspondent à des points de U_K/K i.e à des sections rationnelles des U_S sur S - mais on va vérifier sans mal, sans doute, qu'une telle section rationnelle ne correspond effectivement à une section de l'extension (4), que si c'est une section régulière (à vérifier tantôt). 2°) Celles correspondant à des $i \in I(U_{\overline{K}})$ rationnels sur K, i.e. à une section de $\widehat{U_S} \backslash U_S = S'$ (étale fini sur S) sur S. Et il faudrait étudier encore à quelle conditions une telle section définit un paquet non vide de scindages de (4) - et comment déterminer exactement tous ces scindages.

Avant d'élucider ces deux points, un peu technique, je voudrais voir dans quelle manière la conjecture **A** (ou **B**) faite des ces §, permet de reconstruire la catégorie des modèles élémentaires anabéliennes sur $\mathbf{Q}$, et celle des extensions de type fini de $\mathbf{Q}$ et des modèles élémentaires anabéliennes sur ceux-ci, en termes des groupes extérieurs (ou topos galoisiens) associés à partir bien sûr de la donnée fondamentale de $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma_{\overline{\mathbf{Q}}, \overline{\mathbf{Q}}_\circ}$, opérant extérieurement sur $\widehat{\pi_{0,3}}$, d'où déjà l'extension $E_{0,3} = E_{U_{0,3}/\mathbf{Q}}$, où $U_{0,3} = \mathbb{P}^1_{\mathbf{Q}} - \{0, 1, \infty\}$.

Prenons les donne de $\widehat{\pi_{0,3}}$ -conjugaison de [] sections de $E_{0,3}$ sur $\Gamma_{\mathbf{Q}} = \Gamma$ i.e. les "points" telles que le centralisateur de Γ^0 soit trivial (sections "admissibles") [] des topos $\mathrm{B}_{\widehat{\pi_{0,3}}, \Gamma_{\mathbf{Q}}}$ [] sur $\mathrm{B}_{\Gamma_{\mathbf{Q}}}$ [] - on trouve un ensemble sur lequel Γ opère (qui n'est autre que $U_{0,3}(\overline{\mathbf{Q}_0})$, à isomorphisme canonique près). Pour tout ensemble fini I des sections, stable par [] la formation "forage de trous" doit nous fournir un groupe extérieur $\pi_{0,3}(I)$, de type [] sur lequel Γ opère (il voit mieux peut-être utiliser le yoga introduit par ailleurs des groupoïdes rigides - donc on peut [] ainsi [] de trous $0, 1, \infty$ - on trouve donc l'équivalent groupoidel de la droit projective $\mathbb{P}^1_{\mathbf{Q}}$, on l'appelle [] - qui correspond à un groupe extérieure à lacets infini sur lequel Γ opère - en fait, ce n'est autre que E_{K_1}, où

$$K_1 = \mathbf{Q}(T_1) \tag{6}$$

est l'extension transcendantal pour type de degré 1 de $\mathbf{Q}$.

Partant de (6), on construit de même l'équivalent groupoïdal de $U_{0,3}$ et on reconstruit comme précédent, pour avoir, sont des courbes de type $(0, \nu_2)$ sur K_1 (ou sur une extension finie de K_1) sont des courbes relatives de tipe $(0, \nu_2)$ sur une courbe sur $\mathbf{Q}$ (ou une extension finie de $\mathbf{Q}$, ou une revêtement étale fini d'une telle $U_{0\nu_1}$).

On procède [] pour construire finalement tous les E_K sur $E_{\mathbf{Q}}$ ([] tout corps extension de typew fini de $\mathbf{Q}$, est extension finie d'une extension transcendantal []) et tous les modèles élémentaires, où [] chaque avec la fibration [] sont une courbe de genre 0, suite un revêtement étale fini d'une telle fibration particulière. Sauf erreur, ça fait assez pour avoir un système fondamental de voisinages de tout point d'une X lisse sur un K et de reconstituer en principe les schémas lisses sur des K, pour recollements de tels morceaux avec des "immersions ouvertes". Mais [] que pour faire un telle description, il en faudrait développer un langage géométrique qui celle mieux à l'intuition géométrique, que les sempiternelles extensions de groupes profinis ... ou actions extérieures, et où les points rigides (à [] alors des clôtures algébriques de corps) jouent un rôle prépondérant. Je me faudra y revenir dessus - et en même temps, expliciter les topos étales (pas seulement le "morceau $K(\pi, 1)$") [] entiers des schémas décrits ici par des extensions.

Reprenons le cas de $U = U_S$ schéma relatif sur S, "élémentaire" sur S - à fibres successives anabéliennes (s'il le faut) ou de moins à π_1 non nul, S étant lui-même (pour fixer les idées) lisse sur $\mathbf{Q}$, irréductible, corps de fonctions K, et reprenons la digression 5. Considérons une section rationnelle f de U sur S, définissant une section de E_{U_K} sur E_K - ou, ce qui revient au même, un relèvement de l'homomorphisme surjectif, $E_K \longrightarrow E_S$ en $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ (composé de la section $E_U \longrightarrow E_{U_K}$ [] $E_{U_K} \longrightarrow E_{U_S}$). Je veux montrer que f est pourtant définie i.e. une section de U_S sur S, si et seule si le section de E_{U_K} sur E_K provient d'une section de E_{U_S} sur E_S, i.e. si et seule si le relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ [] sur le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$.

Notons que cette dernière condition est une condition "de codimension 1 sur S" - de façon plus précis, si Z est un sous-schéma fermé de S de codimension ≥ 2, alors, posant $S' = S \backslash Z$, on a $\pi_1(S') \xrightarrow{\sim} \pi_1(S) = E_S$ pour le "théorème de pureté" - donc le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ est le même que celui de $E_K \longrightarrow E_{S'}$, ou, si [] (comme S' n'est pas un "modèle") que le sous-groupe fermé engendré pour les noyaux des $E_K \longrightarrow E_{S'_i}$, où les S'_i sont des ouvert "modèles" qui recouvrent S'. Si donc le conditions envisagés sont [] relativement aux S'_i (qui pourtant un recouvrement par S, [] S') - ce qui est [] signifie que ce section rationnelle envisagé est [] sur les S'_i, i.e. sur S' - alors celle est vérifié relativement à S - ce qui est [] signifie que le section est [] sur S. Donc, [], il faudrait [] a priori qu'une section de $U_{S'}$ sur S' []

une section de U_S sur S. [] d'une courbe relative $U_S = X_S - T$, X lisse sur S de dimension relative 1, T fini [] sur S, [] T décomposé sur S. Si X [] relatif ≥ 1, on sait ([] Weil) que le section [] une section de X, soit D l'image inverse de T, c'est un diviseur sur S, dont le [] sur $S' = S \backslash Z$ est nul, donc (comme codim $(Z, S) \geq 1$) il est nul, OK.

(9)

(10)

avec des carrés cartésiens, et des flèches horizontales surjectives. L'homomorphisme $E_{U_S} \longrightarrow E_K$ est composé d'un relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$ de $E_K \longrightarrow E_{D_n}$ avec l'homomorphisme canonique $E_{U_{D_n}} \longrightarrow E_{U_S}$. (relèvement $E_K \longrightarrow E_{U_{D_n}}$ correspondant biunivoquement aux sections de E_{U_n} sur E_K, ou aux relèvements de $E_K \longrightarrow E_S$ ou $E_K \longrightarrow E_{U_S} ...$).

Ceci dit [55], j'ai envie de prouver que $\varphi_n : E_K \longrightarrow E_{D_n}$ [] i.e. provient d'une section de E_{O_n} sur O_n si et seule si la section rationnelle correspondant de U_S/S est définie en n. Ceci impliquera l'assertion précédent (que la section phi de E_{U_K} sur E_K provient d'une section de E_{U_S} sur E_S, si t seule si la section rationnelle correspondant isomorphique).

Mais il s'agit ici d'un énoncé en fait [] géométrique, que j'ai envie de reformuler sous forme plus générale :

Théorème. — *Soit T un trait ([]), U un schéma relatif "élémentaire" sur T, anabélienne* [56]*, K le corps des fonctions de T, On [] un revêtement universel $\widetilde{U}$ de U, d'où une clôture algébriquement $\overline{K}$ de K, et on considère l'extension $E_U = \pi_1(U; \widetilde{U})$ de $E_K = \pi_1(K, \overline{K}) \simeq$ Gal$(\overline{K}/K)$ par $\pi = \pi_1(U_{\overline{K}}, \widetilde{U})$. On a donc un carre cartésien des groupes profinis*

[]

[55]**N.B.**

[56]anabélienne [] - il suffit que les fibres de ordre 1 de la fibration élémentaire de U ne soient que de type $(0,0)$ ou $(0,1)$ - i.e. à π_1 nul

où E_S s'identifie au quotient de E_K par le sous-groupe [] engendré par un groupe d'inertie $I_{K'} \simeq T_\infty(\overline{K})$, cf plus haut. Soit f_K, K un point de U_K rel$/K$, d'où une section $\Psi = \Psi_{f_K}$ de E_K sur E_{U_K}. Ceci posé les conditionnes suivantes sont équivalentes

(a) f_K *se prolonge en une section de U sur S ;*

(b) Ψ *provient d'une section de E_U sur E_S ;*

(b') le compose $E_K \xrightarrow{\Psi} E_{U_K} \longrightarrow E_U$ *s'annule sur* $I_{K'}$.

L'équivalence de (b) et (b'), et qu'elles soient impliques par (a), est clair. C'est l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) qui demande une démonstration. On est [] au cas où T est strictement local (donc $E_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est réduit à son sous-groupes d'inertie, et $E_S = (1)$). On est ramené de prendre un [] au cas où $U_{/S}$ est une courbe relative élémentaire, $U = X \backslash T$, X lisse et propre. Alors f se prolonge en une section f au X sur S, et la conclusion [] que $f(S) \subset U$. Donc on est ramené [] au

Lemme. — *Soit X schéma projectif lisse de donne relation 1 connexe sur S trait strictement local, soit $T \subset X$ sous-schéma, fini étale sur S, donc $T \simeq I_S$, I ensemble fini, et soit $U = X \backslash T$ (donc T est défini par une [] $(g_i)_{i \in I}$ des sections disjointes de X sur S) si g est de genre relatif, $\nu = []I$, on suppose $(g, \nu) \neq (0,1)$. Soit $i_0 \in I$, f une section de X/S distinctes des disjoints g_i, et telle que f et g_{i_0} coïncident en s (point fermé de S). Si $\eta = S \backslash s$, on a donc un morphisme $\eta \longrightarrow U$, d'où $\pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$. Je dis que cet homomorphisme n'est pas trivial, et même, si $\nu \geq 2$, que pour la donné [] n'est pas trivial (pour [] distinct de la caractéristique résiduelle).*

Comme la section rationnelle de $J^1_{X/S}$ défini par f est régulière, on voit que le composé de l'homomorphisme envisagé avec $\mathrm{H}_n(J^1_{X/S}, \mathbf{Z}_\ell)$ est nul - i.e. le $\mathrm{H}_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)$ s'envoie dans la partie torique de $\mathrm{H}_1(U, \mathbf{Z}_\ell)$ [], qu'est canoniquement isomorphe à T_ℓ^I / T_ℓ. (**N. B** cette partie est nulle si card $I = i$, et dans ce cas le critère homologique [] insuffisant...) Il faudrait donc calculer cet homomorphisme

$$T_\ell (\simeq \mathrm{H}_1(\eta, \mathbf{Z}_\ell)) \longrightarrow T_\ell^I / T_\ell$$

pour constater qu'il n'est pas nul dans le cas envisage, $\nu \geq 2$ (et traiter [] le cas $\nu = 1$). Je vais dériver le résultat : soit $x = g_{i_0}(s)$, $A = \underline{O}_{X,n}$, V l'anneau de S, J_{i_0}

l'idéal de l'homomorphisme $A \xrightarrow{g_{i_0}^*} V$ associé à [], c'est donc une idéal inversible de A -soit de même J_f l'idéal associé à $f^* = A \longrightarrow V$, et considérons $g_{i_0}^*(J_f)$, c'est une idéal de V engendré par un générateur, et comme $g_{i_0} \neq f$, on voit que cet idéal n'est pas nul. Soit $H = []\nu / g_{i_0}^*(J_f)$, cet entier [] de g_{i_0} et f, ces [] comme une multiplicité d'intersection. Ceci posé, je [] que l'homomorphisme

$$T_\ell \longrightarrow T_\ell^I / T_\ell$$

est le produit [] des l'injections canoniques $T_\ell \longrightarrow T_\ell^I$, correspondant à l'indice i_0. Il faudrait que [].

Reste le cas $\nu = 1$, qui semble demander un traitement séparé [57]. [] à vérifier (pour les groupes fondamentaux premiers à p) c'est que l'homomorphisme extérieur $\pi_1(U_s) \simeq \pi_1(\eta) \longrightarrow \pi_1(U)$ est égal à $K_{i_0} \circ (\mu Id_T)$, où K_{i_0} est l'homomorphisme "local"

[]

associé à l'indice i_0. Je vais admettre à priori, qui une ne peut guère être difficile.

Pour terminer ce numéro, je veux encore étudier, dans la situation d'une U courbe relation sur une S avec $U = X \backslash T$, X lisse et propre sur S, T fini étale, avec sections g_i donnée de T sur S, les "sections de 2^{eme} espèce" de l'extension

$$1 \longrightarrow \pi \longrightarrow E_U \longrightarrow E_S \longrightarrow 1$$

associées [58] à $i = i_0$ - que définit une classe de π-conjugaison de sous-groupes ouverts lacets L_i dans π. (On suppose qu'on a bien une telle suite exact i.e. que $\pi_2(S) \longrightarrow \pi_1(\text{fibre})$ est nul, ce qui [] le cas si $\pi_2(S) = 0$, p. ex []) si on est dans le cas d'une modèle élémentaire au dessus d'un corps de caractéristique 0 (la réconstruction de ces [] étant sans doute [], si on [] aux groupes fondamentaux premiers aux cas résiduelles...) [] L_i dans E_U s'envoie *sur* E_S, on trouve donc des scindages pour cette extension, qu'on peut regarder comme une extension

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow N(L_i) \longrightarrow E_S \longrightarrow 1 \tag{13}$$

[57] Ceci doit être indépendant de la [] de ν !

[58] en tous cas, même sous []

La classe d'isomorphisme est un élément

(14)

que je ne propos d'étudier. On [] si S est un $K(\pi, 1)$

(15)

d'ailleurs on a une suite exacte de Kummer (ou $\mathrm{Pic}(S) = []$)

$$(16) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)[]$$

d'où par passage à la limite

(17)

Dans le cas où S est un schéma élémentaire sur un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$, $\mathrm{Pic}(S)$ est un Z-modèle de type fini (par Mordell-Weil-Néron), donc l'homomorphisme

$$(18) \qquad \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)\hat{} \longrightarrow \mathrm{H}^2(S, T)$$

est *injectif*.

Sous nous [] de cette condition, considérons le cas général - je dis que la classe c (14) est donc l'image de (18), de façon précise que c'est l'image de l'élément

$$g_i \in \mathrm{Pic}(S)$$

classe des faisceaux [] (on []) de X le [] de g_i. Principe d'une vérification : [] la complété formel de X [] de $g_\nu(S)$, [] ou interpréter la suite exacte (13) comme la suite exacte d'homotopie de ce topos [], au dessus de S. On a donc à prouver une historie d'ombres...

Dans le cas "arithmétique", on voit donc que l'extension (13) est scindée si et seule si $g_i = 0$ i.e. [], globalement sur S, []

Quand $g_i = 0$, parmi les scindages, il y a [] provenant [] d'une base de J_i/J_i^2 qui soit [].

L'indétermination des choix d'une telle base [] celle des choix d'une section de (13) est donc

(20)

On a ici des suites exactes de Kummer

[]

d'où par passage à la limite

(21)

Dans le "cas arithmetique" [] on trouve donc

[]

Si le genre est zéro, prenant une de ces sections de T sur S comme section à l'infini, OPS ([] à se localiser) $U_S = \mathbb{E}'_S \backslash T'$, donc f s'identifie à une section de $\mathbb{E}^1_S$ sur S', i.e. de $\underline{O}_S$ sur S, donc (comme codim $(2, S) \geq 2$ []) elle se prolonge en une section de $\mathbb{E}'_S$. Et on [] comme précédemment, OK. Considérons donc les diviseurs irréductibles $D_i$sur S, ou ce qui revient au même, les points x_v de X de codim 1, i.e tels que $\underline{O}_{x_v}$ soit un [] () anneau de valuations discrète). Considérons son [] $\overline{\underline{O}_{x_v}}$ dans $\overline{K}$, [] un idéal maximal [] (ces idéaux correspondent aux points [] $\widetilde{S}$ de S dans $\overline{K}$ au dessus de x) et considérons son stabilisateur N_n dans E_K, qui opère donc dans $k(\widetilde{x}) = \overline{k(x)}$, et s'envoie en fait, on le sait, *sur* $\mathrm{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$.

Soit $I_{\overline{x}}$ le noyau de l'homomorphisme obtenue ([] "géométriques" de []), donc on a une suite exacte

$$(7) \qquad 1 \longrightarrow [\,]\, \mathrm{Gal}(\overline{k(x)}/k(x)) \longrightarrow 1$$

et par Kummer une isomorphisme canonique[59]

(8)

On notera que si x est le [] du diviseurs D, alors $k(x)$ est le corps des fonctions de D. C'est un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$.

Il est immédiat (sans supposer que le corps de base pour S soit $\mathbf{Q}$) que le noyau de $E_K \longrightarrow E_S$ est le sous-groupe [] engendré par les $I_{\widetilde{n}}$. Donc l'hypothèse que $E_K \longrightarrow E_{U_S}$ [] sur le dit noyau, signifie aussi qu'il [] sur [] des $I_{\widetilde{n}}$. Soit alors $U_{\underline{O}_x}$

[59] à corps de [] de car 0 !

induit par U sur Spec $\mathbf{Q}_x$, on a donc des factorisations d'ailleurs $\mathbb{G}_n(S)$ n'a pas [],
donc

22)

est injectif[60]. Ainsi, quand $g_i = 0$ i.e. quand (13) admet des scindages "géométriques" (et il suffit []) ceux-ci forment un torseur sous $\mathbb{G}_m(S)$, qui s'identifie à une sous-torseur des [] de tous les scindages de (13). Pour que la "description profinie de la géométrie algébrique absolu sur $\mathbf{Q}$ soit complète, il y faudrait également caractériser (en termes de cette description profinie) le sous-ensemble remarquable.

Je voudrais enfin comprendre encore comment une section d'extensions des type (1) peut se "spécialiser" en une section de type (2), donc le cas des courbes relatives. Pour ceci, je reprends la [] situation

Dans la cas [] où f n'est pas définie sur S, on trouve une action de 2^{nde} espèce, [] L_i dans π.

À vrai dire

[]

(31)

J'ai l'action extérieure de T sur π n'est souvent pas triviale (je conjecture qu'elle l'est si et seule si il y a "bonne réduction") - donc le groupe E_K n'opère pas lui même extérieurement sur π. Mais tout scindage de (30) définit une extension de E_K par π, donc une action extérieure [] "admissible", définie par une courbe algébrique ? - Sans doute pas [], si ce n'est la courbe "réduit" de type (g, v) ([]) ? [] ce pourrait être celle ci :

Conjecture-à-[]. — Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) U_η a bonne réduction sur S ;

(b) L'action extérieure de T sur π est triviale (ce qui signifie ainsi que tout [] scindage de (31) - p. ex défini par un point de U_η [] induit un homomorphisme $T \longrightarrow \pi$);

[60] (cas "[]")

(c) L'action de T sur $\pi_{ab} = H_1(U_{\overline{\eta}})$ est triviale ;

(d) Itou pour

(e) En termes de une section de (30)

(f) En termes de une section de (30)

On a []
[]
J'ai donc [] un [] général (qui je pourrais à la occasion [] avec la généralité qui lui revient) pour construire des actions extérieures [] de groupes E_k (K extension de type fini de $\mathbf{Q}$) sur des π à lacets, qui (sans doute)] géométriques, par la considération de courbes de type (g, v) "se réduisent []". Mais je [] pas pour cette vrai à faire des actions effectives, associées à actions extérieures [] géométriques [] - i.e. d'une des deux types 1°, 1° [] de ce n°.

IV. Sections d'extensions et anneaux de valuations généraux

D'abord une révision de notations. Si X est une schéma connexe, je note

$$E_X = \Pi_1(X) \tag{1}$$

son groupe fondamental profini en tant que groupe extérieur, et si $\widetilde{X}$ est un revêtement universel profini de E_X, par

$$E_X^{(\widetilde{X})} = \pi_1(X; \widetilde{X}) = Aut_X(\widetilde{X}) \tag{2}$$

son groupe fondamental précisé - qu'est un groupe profini. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau (le plus souvent une corps) je note E_A, et $E_A^{\widetilde{A}=E_X^{(\widetilde{X})}}$. Si A est une A-algèbre telle que $\mathrm{Spec}(\widetilde{A}) = \widetilde{Y}$ soit une revêtement universel de X (ce qui le détermine à isomorphisme non unique près). Bien entendu, si ξ est une "point géométrique" de X, on note

$$E_X^{\xi} = \Pi_1(X_1 \xi) = E_X^{\widetilde{X}(\xi)}, \tag{3}$$

où $\widetilde{X}(\xi)$ est le revêtement universel de X [] en ξ. Le choix de ξ correspond d'une [] [] et d'une extension séparablement close Ω de $k(x)$ ([] clôture algébrique de $k(x)$) et on note alors ainsi E_X^{Ω} au lieu de E_X^{ξ} (Ω sous entendu [] extension de $k(x)$ donc avec sa structure de $k(x)$ algèbre) []

$$E_X^{\Omega} = E_X^{\overline{k(x)}}, \tag{4}$$

où $\overline{k(\alpha)}$ est la clôture algébrique de $k(\alpha)$ dans Ω. Bien sur, si $X = \mathrm{Spec}(A)$, on note aussi E_A^{Ω} – notation [] utilisée [] $E_K^{\overline{K}}$, K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique [] séparable de K.

Si X est un Y-schéma, 1-connexe, on []

$$E(f) : E_X \longrightarrow E_Y, \quad \text{où} \quad f : X \longrightarrow Y \tag{5}$$

E_X est un foncteur en X

$$(\text{Sch conn}) \quad \longrightarrow \quad \text{Group ext}$$

qui se précise pour l'homomorphisme injectif des groupes profinis

$$E_X^{\widetilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\widetilde{Y}} \tag{6}$$

où $\widetilde{Y}$ est le revêtement universel de Y défini par $\widetilde{X} \longrightarrow Y$ ($\widetilde{X}$ [] pouvoir écrire en fait $E_Y^{\widetilde{X}}$, plus géométriquement E_Y^Z chaque fois qu'on a un Y-schéma Z 1-connexe, jouent le rôle de "foncteur fibre" pour le topos $\mathrm{B}_{\pi(X)}$ des revêtements étales de Y.)

On peut désir que

$$(X, \widetilde{X}) \mapsto E_X^{\widetilde{X}} \tag{7}$$

est un foncteur, de la catégorie des schémas 0-connexes X *munis* une revêtement universel (on [] d'un Z 1-connexe s'envoyant dans X) vers celle des groupes profinis. Ceci s'applique en particulier en regardons la sous-catégorie des (X, ξ) munis d'un point géométrique - on a donc

$$E_X^{\xi} \longrightarrow E_Y^{\eta} \tag{8}$$

si on a un homomorphisme de schémas "géométriques profinis" $(X, \xi) \longrightarrow (Y, \eta)$. On note que tout [] géométrique de X en un $x \in X$ - i.e. une extension [] Ω de $k(\alpha)$ [] - et l'homomorphisme (8) s'identifie ainsi a

$$E_X^{\overline{k(\alpha)}} \longrightarrow E_Y^{\overline{k(\eta)}} \tag{9}$$

où $\overline{k(\alpha)}$, $\overline{k(\eta)}$ sont les clôtures séparables *dans* Ω.

On poserons

$$E_{X/Y}^{\widetilde{X}} = \operatorname{Ker}(E_X^{\widetilde{X}} \longrightarrow E_Y^{\widetilde{X}} = E_Y^{\widetilde{Y}}) \tag{10}$$

C'est un foncteur par un triple $\widetilde{X} \longrightarrow X \longrightarrow Y$ avec X, Y 0-connexe, $\widetilde{X}$ un revêtement universel, plus généralement, si $T \longrightarrow X$ avec 1-connexe, on pose

$$E_{X/Y}^{T} = \operatorname{Ker}(E_X^{T} \longrightarrow E_Y^{T}) \tag{11}$$

([61]) on a un foncteur [ ]. Cas particuliere $E_{X/Y}^{\xi}$, ξ un point géométrique de X, $E_{X/Y}^{\Omega}$, $E_{X/A}^{\widetilde{X}}$ (si $Y = \operatorname{Spec} A$), $E_{B/A}^{\widetilde{B}}$...

[ ] on dispose d'une "suite exacte d'homotopie universel" (en dim 2) ([62]) pour $X \longrightarrow Y$, alors le donnée (pour $X \longrightarrow Y$ donné) de $T \longrightarrow X$, (avec T 1-connexe) peut s'interpréter par la donnée d'un composé

$$T \longrightarrow Y$$

et d'un relèvement en $T \longrightarrow X$, ou ce qui revient au même, d'une section de $X_T = X \times_Y T$ sur T. Ceci posé,

$$X$$

on avoir un isomorphisme [ ] (avec l'hypothèse de "suite exacte d'homotopie" faut)

$$E_{X/Y}^{T} \simeq \pi_1(X_T; T) \simeq E_{X_T}^{T} \tag{12}$$

et on [ ]

$$1 \longrightarrow E_{X/Y}^{T} \longrightarrow E_X^{T} \longrightarrow E_Y^{T} \longrightarrow 1 \tag{13}$$

(Cette hypothèse [ ] satisfait si $Y = \operatorname{Spec} K$, K un corps, Si X est géométriquement 0-connexe sur K).

Plus généralement, si on a une suite exacte d'homotopie universel, mais pour [ ] avec $E_X^T \longrightarrow E_Y^T$ surjectif,

[61]**NB**. $E_{X/T}^{T}$ [ ]

[62]Cas où $E_X^T \longrightarrow E_Y^T$ est [un] épimorphisme

On ([63]) [] une factorisation de $X \longrightarrow Y$ en

$$X \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \tag{14}$$

avec Y' étale fini ou pro-étalefini sur Y et $E'_X \longrightarrow E_Y$, était maintenant [un] épimorphisme, [] suite exacte universel d'homotopie bien sûr. On avoir donc isomorphismes []

$$E^T_{X/Y} \xrightarrow{\sim} E^T_{X/Y'} \tag{15}$$

qui peut donc se [] comme

$$E^T_{X\times_{Y'}T} \simeq E^T_{X/Y} \tag{16}$$

qu'on peut noter $E^T_{X_T}$, mais en faisant attention que [] X_T [] non plus $X \times_Y T$ (qui va être disconnexe si $Y' \longrightarrow Y$ pas isomorphisme) mais $X \times_Y T$.

Bien sur, à isomorphisme []

s'identifie bel et bien au groupe de Galois Gal$(\overline{K}, K)$ de $\overline{K}/K$, $\overline{K}$ est la clôture séparable de K telle que Spec$\overline{K} \simeq \widetilde{Y}$. Souvent, on notons Γ, ou Γ_K, $\Gamma^{\overline{K}}_K$, au lieu de E_Y - surtout si K est algébrique sur le corps premier, et [] donc plus de "partie géométrique" à distingue d'une "partie arithmétique"...

Soit K un corps (qui pourrait être algébriquement clos), L une extension de type fini de K, X un "modèle" propre régulière de L. Alors $E^{\overline{L}}_X$ s'identifie a un quotient de $E^{\overline{L}}_L$, *qui ne dépend pas de modèle X défini*, comme il est [] c'est la partie "universelle géométrique" [] qui classifie les schémas (finis) étales sur L qui sont "non isomorphes" sur *tout* modèle régulière (propre ou non) de L/K.

Si U est un modèle quelconque, il se plonge dans un X, et on a des homomorphismes surjectifs [] Z partie ferme de X

$$E^{\overline{L}}_X = E^{\overline{L}}_L \simeq E^{\overline{L}}_U / \text{ sous-groupe fermé } []$$

Notons que $E^{\overline{L}}_L$ es e imite projective de $E^{\overline{L}}_U$, pour des modèles réguliers ([]) variables

$$E^{\overline{L}}_L \simeq [] E^{\overline{L}}_U$$

[63] Sous l'hypothèse "suite exacte d'homotopie" mais avec fibres []

et de même, bien sûr

$$\pi^{\overline{L}}_{L/K} \simeq [\,]\pi^{\overline{L}}_{U/K}.$$

[]

dont le choix "effectif" dépend de celui d'un revêtement universel ou encore d'une point géométrique [] de $\widetilde{K}_n$ - i.e. d'une clôture algébrique de $\widetilde{K}_n$ []

[]

est que $a \in U$.

Ceci posé, $E^{\overline{L}}_U$ se récupère à partir de $E^{\overline{L}}_L$, comme quotient de ce dernier, en prenant *tous* les V de L [] un centre sur U (il suffit même de prendre les $V = \underline{O}_{U,n}$, où se est [] de codim 1 des U), et [] correspondants.

On peut regarder

[]

Mais il en est [] ainsi comme on voit en considérant $V_1 = V \cap L_1$, qu'est un anneau de valuations de L_1, ([64]) dont le corps [] fini sur K si celui de V l'est (donc $V_1 \neq L1$) - donc V_1 correspond à une "place" des corps de fonctions d'une variable L_1 sur K. [] E°_K centralise T_{V_1}

Conjecture. — Soient K, L des extensions de type fini de , $K \subset L$. Alors

a) *Toute section de E_L sur E_K (au guère de tel, se revient au même...) normalise sur T_V associée à un anneau de valuations V de L contenant K, à corps résiduel algébrique sur K et V est uniquement ([65]) [] cette condition [] au dessus de E_K.*

b) *Soit U un modèle "élémentaire" de L sur K, anabélien. Alors tout section de $E^{\overline{L}}_U$ sur $E^{\overline{K}}_K$ se relient [] une section de $E^{\overline{L}}_L$ sur $E^{\overline{K}}_K$.*

À noter que ce question 2° est[] locale [] elle doit être essentiellement "triviale", que [] vraie un [] - par contre 1°, est une question de [] globale sur U, et sans doute [] façons triviale.

La validité des ces énonces, impliquant donc, pour les sections de $E^{\overline{L}}_U$ sur $E^{\overline{L}}_K$ associes a un anneau de valuations de L/K de corps résiduel K, que l'image de $E^{\overline{L}}_K$ doit normaliser un sous-groupe [] de $\pi^{\overline{L}}_{L/K}$, qui est non trivial si le valuation []

[64] Il faut []

[65] []

centre sur U, i.e. si le section n'est pas associé à un point K-rationnel de U, ce qui est justifiant [] des conjectures (qui prouvent d'abord [] !) de §2.

Avant de [] vers l'étude des questions 1°) et 2°) et ainsi des questions de normalisation et de centralisations [] précédemment a propos de N_V, I_V, ...),

STRUCTURE À L'INFINI DES $M_{g,\nu}$

1. Courbes standard

Soit k un corps algébriquement clos. Une "courbe standard" sur k es une schéma X sur k satisfaisant les conditions suivantes :

a) X quasi-projectif, toute composante irréductible est de dim 1

b) Tout point de X est soit lisse, soit un "point quadratique" (ordinaire) - i.e. isom (loc. ét) à la courbe Spec($k[X,Y]/XY$) au point 0.

Il est connu qu'on peut trouver une unique [] $\widehat{X}$ de X, telle que X soit un schéma propre, qui X s'identifie à un ouvert dense de $\widehat{X}$, et que $\widehat{X}$ soit lisse sur les points de $\widehat{X} \backslash X = I$. Alors $\widehat{X}$ est une courbe projective, I est une partie finie de $\widehat{X}(k)$ contenant [] ouvert des points des lissité de $\widehat{X}$. [] A des points singuliers de X s'identifie à []

La donnée de X équivaut à celle des $(\widehat{X}, I)$, où $\widehat{X}$ est un schéma projectif, dont toute composante irréductible est de dim 1, et dont l'ensemble singulier est formé des points [] ordinaires - et I est un sous-schéma fini étale de $\widehat{X}^{\text{lisse}}$, ou ce qui revient au même, une partie fini de $\widehat{X}^{lisse}(k)$.

Soit

Ainsi, à la courbe standard X nous avons associé les systèmes de données suivantes :

[]

Inversement, [] on construit une courbe standard X en passant au quotient dans $\widetilde{A}_k Y \backslash I_k$ par l'involution σ - i.e. X est universel [] pour la donnée p:

[]

soumise à $(pi)\sigma = pi$.

Ainsi la catégorie des courbes standard sur k [] apparaît comme équivalente à celle des systèmes a) b) c) ci-dessus. (pour les iso)...

N.B. On récupère $\widehat{X}$ comme quotient de Y par σ.

Généralisation sur une base quelconque.

Une *courbe standard* sur S (multiplicité schématique, disons) [] défini constructivement en termes d'un système a), b), c) comme ci-dessus, i.e.

[]

On construit alors $\widehat{X} = Y/\sigma$, contenant $A = \widetilde{A}/\sigma$ et I comme sous-schémas fermés finis étales sur S, et [] $X = \widehat{X} \backslash I$. On peut montrer que le foncteur

$$(Y, \widetilde{A}, \widehat{I}, \sigma_{\widetilde{A}}) \mapsto X$$

des systèmes (5) (pour les iso) vers les schémas relatifs [], est *pleinement fidèle* ([66]).

N.B. []

[]

(par abus de langage, puisque c'est non seulement le schéma relatif Y, mais Y avec la structure supplémentaire $\widetilde{A}, I, \sigma_{\widetilde{A}}$...).

2. Graphe associé à une courbe standard

Revenons au cas d'un corps de base k algébriquement clos, pour commencer. Soit X une courbe standard, d'où $Y, I, \widetilde{A}, \sigma_{\widetilde{A}}$.

Posons

(7) $$S = \pi_{\circ}(Y) \simeq \text{ [] des corps irréductibles de } X$$

On a alors le diagramme d'application canoniquement entre ensembles finis

(8) []

[66]faux tel quel

où q est de degré 2 et définit l'involution $\sigma_{\widetilde{A}}$. Les applications σ et p sont induites par les [] en passant aux $\pi_\circ$.

Le système ($\widetilde{A} \xrightarrow{\sigma} S, \sigma_{\widetilde{A}}$) où [], peut être considéré comme définissant un *graphe*, dans S est l'un des sommets, et $\widetilde{A}$ l'un des [] l'application σ étant l'application "origine d'un []". Ce graphe ne dépend que de $\widehat{X}$, pas de X i.e. des choix de $I \subset \widehat{X}(k)$. C'est [] compte de ce choix que l'on considère, [] plus de la structure de graphe, le donnée supplémentaire

$$I \longrightarrow S \tag{9}$$

Le graphe indique comment les composantes irréductibles de X (figurés par les sommets) se récupèrent deux à deux - les points d'intersections, i.e. les points singuliers ("doubles" []) de X, correspondant aux arêtes. Si une composante irréductible X_α correspond au sommet α des graphes, alors les [] fermés en α correspondent bieunivoquement aux points doubles de X_α - donc [] X_α sont lisses [] l'extrémité.

Il est clair que tout graphe fini peut être obtenue (à iso près) par une $\widehat{X}$ convenable - et même avec des composantes X_α de genre g_α donné (i.e. des $\widetilde{X}_\alpha$ de genre g_α...). De plus, [] $I \longrightarrow S$ (I [] fini), cela peut être réalisé par un $I \subset \widehat{X}^{lisse}$, i.e. par une courbe standard S.

La *maquette* d'une courbe standard X consiste, pour définition, en les donnes suivantes

[]

Une structure formée d'une graphe fini $G = (S, \widetilde{A}, \sigma)$, d'une ensemble fini I au dessus de l'une des sommets de G, et d'une application "genre": $S \xrightarrow{g} \mathbf{N}$, [] appelé ici une "maquette".

Proposition. — *Considérons la maquette d'une courbe standard X*

a) Soient $\alpha, \beta \in S$, alors α, β appartiennent à la même composante connexe de graphe G, si et seule si X_α et X_β appartiennent à la même composante connexe de X. Donc on a une bijection canonique

$$\pi_0(G_X) \simeq \pi_0(X), \tag{11}$$

en particulier X est connexe si et seule si G_X est connexe.

b) Supposons X connexe i.e. $\widehat{X}$ connexe, i.e.[] on a alors [] i.e. [] où []

.

3. Courbes "stables" et MD-graphes

Une courbe standard (sur k algébriquement clos) est "stable", si elle satisfait à l'un des conditions équivalentes suivantes

a) $\operatorname{Aut} X$ est fini

b) Pour tout α, $(Y_\alpha, I_\alpha \cup \widetilde{A}_\alpha)$ est anabélien i.e. $2g_\alpha + \widehat{\nu}_\alpha \geq 3$ i.e. $2g_\alpha - 2 + \widehat{\nu}_\alpha \geq 1$, i.e.

   1) Si $g_\alpha = 1$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 1$
   2) Si $g_\alpha = 0$, on a $\widehat{\nu}_\alpha \geq 3$

c) Tout champ de vecteurs sur Y nul sur $I \cup \widetilde{A}$ est nul.

d) $\underline{\operatorname{Aut}}_{(Y, \widetilde{A}_k, I)}$ est un schéma en groupes fini étale sur k. On voit que cette condition (sous la forme b)) ne dépend que de la *maquette* de la courbe. On dit que X est une *MD-courbe* (MD, initiale de "Mumford-Deligne" ou de "modulaire") si elle est stable, et 0-connexe (i.e. connexe non vide).

Les maquettes de telles courbes sont les maquettes 0-connexes et stables (i.e. dont les sommets de guère 1 sont de poids total ≥ 1, et les sommets de guère 0 sont de poids total ≥ 3), on les appellera les MD-graphes.

NB. Une maquette est une MD-graphe si et seule si

a) elle est 0-connexe (i.e. le graphe G est connexe $\neq \varnothing$)

b) elle n'est pas réduit à un seul sommet de guère 1, de poids total 0 []

c) les sommets []

Proposition. — *Si $(G = (S, \widetilde{A}, \sigma), I, \underline{g} : S \longrightarrow \mathbf{N})$ est une MD-graphe, son type (g, ν) est anabélien, i.e. $2g + \nu \geq 3$.*

Si on avait $g=1$, $\nu=0$, alors la relation

$$g=1=\sum g_\alpha+h_1$$

montre que ou bien tous les g_α sont nuls et h_1 [], ou bien tous les g_α sauf une g_{α_0} sont nuls, []

[]

Soit G une maquette. On dit qu'une courbe standard sur un corps algébriquement clos est *de type* G, si sa maquette est isomorphe à G, on dit qu'elle est G-*épinglée* si on se donne un isomorphisme entre se maquette et G (c'est donc une structure []).

Soit $(\widehat{X},\underline{I})$ une courbe standard sur une base S quelconque, on dit qu'elle est de type G si ses fibres géométriques sont de type G. Alors les maquettes des fibres géométriques de $(\widehat{X},\underline{I})$ forment les fibres d'une schéma en maquettes (ou un MD-graphe) sur S ($\underline{S},\underline{\widetilde{A}},\sigma_{\underline{\widetilde{A}}},\underline{I},\underline{\widetilde{A}}\longrightarrow\underline{S},\underline{I}\longrightarrow\underline{S},\underline{S}\xrightarrow{g}\mathbf{N}_S$) (système de revêtements finis étales de S et de morphismes entre ceux-ci), localement isomorphe à la maquette G donnée. On appelle G-épinglage entre $(\widehat{X},\underline{I})$ tout isomorphisme entre G_S et $\underline{G}(\widehat{X},\underline{I})$. Si

$$\Gamma=\operatorname{Aut}G \tag{18}$$

(groupe fini), les G-épinglages de $(\widehat{X},\underline{I})$ s'identifient aux sections d'une certain Γ_S-torseur, appelé *torseur de G-épinglages* de $(\widehat{X},\underline{I})$.

Considérons, sur une base S fixée, le catégorie ([]) des courbes standard G-épinglées. Pour tout $\alpha\in S$

N.B. Si $\operatorname{card}J=\nu$, alors

[] Il en est donc de même dans $M_{g,J}$, donc ainsi de M_G (pour G semi-stable) et de $M_{[G]}=(M_G,\Gamma)$.

4. La théorie de Mumford-Deligne

Soient S une multiplicité schématique, X une schéma relatif sur S, propre sur S, $\underline{I}$ une sous-schéma fermé de X. On dit que $(X,\underline{I})$ est une MD-courbe relative sur S, si X, $\underline{I}$ sont plats de présentation finie sur S, et si pour tout point géométrique de

S, la fibre $(X_{\bar{s}}, \underline{I}_{\bar{s}})$ est une MD-courbe géométrique sur $k(s)$ i.e. $X_{\bar{s}}$ est 0-connexe, de dimension 1, [ ] c'est une fonction localement constant sur S.

Fixons nous une type numérique (g,ν) *anabélien* $(2g+\nu \geq 1)$, et considérons, pour S variable, le groupoïde fibré

$$(24)\quad S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}(S) = \text{ MD-courbes relatives sur } S, \text{ de type numérique égal à } (g,\nu)$$

On a alors le vraiment [ ] théorème suivant :

Théorème de Mumford-Deligne ([67]). — *Le groupoïde fibré $S \mapsto \widehat{M_{g,\nu}}/S$ sur* Sch *(plus généralement, sur les multiplicités schématiques...) est représentable pour une multiplicité schématique $\widehat{M_{g,\nu}}$, qui est* lisse *et* propre *sur* Spec $\mathbf{Z}$, *D'autre part $M_{g,\nu}$ est un ouvert de Zariski de $\widehat{M_{g,\nu}}$, schématiquement dense fibre par fibre.*

On en déduit aisément p. ex. la connexité des fibres géométriques

[ ]. Nous allons revenus là dessus maintenant.

5. Spécialisation des MD-graphes

Soit

[67] On suppose $2g+\nu \geq 3$ (cas anabélien)

6. Morphismes de [] de graphes et de maquettes

7. Étude des [] de dim ≤ 2 [] détermination des graphes correspondantes

8. Structure []

9. Structure groupoïdale des multiplicités modulaires de Teichmüller variables ([] MDT-structure) : cas [],

10. Structures MDT analytiques : []

11. Digression : [] Structure à l'infini des groupoïdes fondamentaux

12. Digression (suite) : topos canoniques associés à une [] et leur dévissages en "topos élémentaires"

13. Digression sur stratification "locales" []

Une *stratification globale*

RAPPORT D'ACTIVITÉ
(1.10.1984 — 15.12.1984)
par Alexandre Grothendieck, attaché de recherches au CNRS

Les mois écoulés ont été consacrés avant tout à la préparation des volumes 1 et 2 des Réflexions Mathématiques, qui paraîtront sans doute courant 1985, sous les titres *"Récoltes et Semailles"* et *"Pursuing stacks"*, part 1: *"The Modelizing Story"*. Je prévois que cette préparation m'absorbera jusque vers la fin février, après quoi je compte reprendre la réflexion sur les fondements d'une "algèbre topologique" (commencé avec la première partie de "À la Poursuite des Champs"), en reprenant le fil de la réflexion de l'"Histoire de Modèles" là où je l'avais laissé. Je donne quelques précisions au sujet de ce programme de travail dans "Esquisse d'un Programme", par. 7.

Il s'agit ici de refondre, dans une discipline autonome (que je propose d'appeler *"algèbre topologique"*) qui jouerait le rôle un peu du pendant "algébrique" de la topologie générale, un certaine nombre de visions parcellaires provenant de l'algèbre (co)homologique (commutative ou non-commutative), l'algèbre homotopique, le formalisme algébrico-géométrique des topos (qui est une sorte de paraphrase dûment généralisée de la topologie générale), y compris le formalisme des champs, gerbes etc développé dans la thèse de Giraud, enfin la théorie des n-catégories et celle des n-champs de telles n-catégories (encore dans les limbes). Le besoin d'une telle discipline nouvelle, et certaines des principales idées-force que je compte développer dans le maître d'oeuvre "À la Poursuite des Champs", me sont apparus progressivement entre 1955 et la fin des années soixante, en contrepoint ininterrompu avec le développement d'une *"géométrie arithmétique"*, synthèse (entièrement imprévue encore jusqu'aux débuts des années soixante) de la géométrie algébrique, de la topologie et de l'arithmétique. Je développe réflexions rétrospectives au sujet de la naissance, l'essor et la fortune (et parfois, infortune) ultérieure de ces disciplines nouvelles, ici et là au cours de la réflexion plus vaste poursuivi dans "Récoltes et Semailles". Qu'il me suffise ici de dire que dans mes propres motivations, aujourd'hui comme il y a vingt ans, l'algèbre topologique (laissée pour compte après mon "départ" en 1970) est avant tout un des principaux *outils d'appoint* pour le développement de cette "géométrie arithmétique", dont le développement jusqu'au stade d'une pleine maturité m'apparaît comme une des principales tâches qui se posent à la mathématique de notre temps.

Un des signes principaux d'une telle maturité serait une maîtrise complète des notions et idées autour de la notion de *motif*, que j'ai introduites et développées tout au long des années soixante (tombées dans un oubli soudain dès mon "départ" en 1970 et —- à une exhumation partielle près en 1982 — jusqu'à aujourd'hui même...), ainsi qu'une maîtrise des principales notions et idées de*géométrie algébrique anabélienne* que j'ai dégagées depuis 1978. En termes imagés, on peut dire que ces deux courants d'idées, le courant "abélien" incarné par la notion de motif, et le courant "anabélien" exemplifié par la structure géométrique-arithmétique de la "tour de Teichmüller", sont à la "géométrie arithmétique" dans son enfance, ce que courants "complexes de cochaînes — catégories dérivées commutatives" sont à l'algèbre topologique (encore in utero).

La différence essentielle entre ces deux disciplines ne se situe cependant nullement dans leur état d'avancement relatif, circonstance des plus contingentes, apte à changer radicalement en l'espace de quelques années, ne serait-ce que par la vertu de l'écriture de "Pursuing Stacks". Elle se situe plutôt dans une différence de profondeur. Comme c'était le cas naguère pour le développement d'une "topologie générale" (faite sur mesure pour l'analyste, bien plus que pour le géomètre), le travail essentiel à accomplir pour la mise sur pied de l'"algèbre topologique" est, avant toute autre chose, le *développement d'un langage*, dont le manque se fait sentir (à moi tout au moins) à tous les pas. La dimension de cette tâche me semble être du même ordre que celle à laquelle se sont vus confrontés Hausdorf et d'autres, dans l'entre-deux-guerres. Elle n'a pas de commune mesure avec la tâche posée par le développement de la géométrie arithmétique, jusqu'au point d'un sentiment de "maîtrise" des principaux courants d'idées qui y confluent. On mesurera cette différence de "dimensions", en se rappelant que la "maîtrise" du "courant anabélien" impliquerait, notamment, une description "purement algébrique" du groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$, et de la famille de ses sous-groupes de décomposition et d'inertie associées aux différents nombres premiers. La structure de ces derniers (correspondants aux cas "locaux" des corps p-adiques) ont été déterminés récemment par Uwe Jannsen, Kay Wingberg et (dans le cas $p = 2$) Volkier Diekert, avec une relation principale rappelant étrangement celle qui décrit le groupe fondamental principale d'une courbe algébrique sur le corps des complexes. Mais on est loin sans doute d'une description analogue dans le cas "global".

Pour terminer ce rapport préliminaire, je me sens en mesure d'apporter quelques précisions pratiques au programme "tous azimuths" exposé dans l'Esquisse d'un Programme (qui sera jointe à "Récoltes et Semailles", ainsi que le présent rapport, l'Esquisse Thématique et quelques autres textes de nature mathématique, pour constituer le volume 1 des Réflexions Mathématiques). Je tiens d'abord, avant toute autre chose, à m'acquitter (comme je le dis dans l'Esquisse d'un Programme, par. 7) "d'une dette vis-à-vis de mon passé scientifique", en esquissant tout au moins dans les grandes lignes des principales visions d'ensemble auxquelles j'étais parvenu entre 1955 et 1970 et qui, sans avoir trouvé alors la forme d'exposés systématiques et publiés, ont été laissés pour compte par mes ex-élèves après mon "départ" en 1970. Il s'agit d'une part de l'ensemble d'intuitions et d'idées en direction de l'"algèbre topologique", à laquelle j'ai fait allusion tantôt, et d'autre part d'un "vaste tableau des motifs" qu'il s'agit de "brosser à grands traits", apte à servir à la fois de maître d'oeuvre pour l'édification d'une théorie qui reste conjecturale, t de fil conducteur très sûr et de fécond instrument de découverte, pour pouvoir prédire "à quoi on est en droit de s'attendre" dans une foule de situations impliquant les propriétés géométrico-arithmétiques de la cohomologie des variétés algébriques. (Une version très parcellaire de certaines de mes idées à de sujet est présentée, sans que mon nom y soit prononcé, dans le volume "Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties" des Lecture Notes (n° 900), 1982, par Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, Kuang-yen Shih.) Je compte poursuivi cette partie de mon programme, au cours des deux ou trois années qui suivent, dans les deux ou trois volumes des Réflexions Mathématiques faisant suite aux deux volumes dont je suis en train de terminer la préparation. Ceci fait, je prévois de me consacrer prioritairement au programme de géométrie algébrique anabélienne — d'une part, tracer à grands traits les principales idées, conjectures et résultats déjà obtenus, et d'autre part, entreprendre une étude géométrie-arithmétique minutieuse de la "tour de Teichmüller", et plus particulièrement, de ses deux premiers étages.

Le 10.12.1984

Alexandre Grothendieck

Brief an V. Diekert, 3.4.1984[68]

Les Aumettes 3.4.1984

Lieber Volker Diekert,

Ich

[68] https://agrothendieck.github.io/divers/BGD3484scan.pdf

Letter to L. Bers, 15.4.1984[69]

Les Aumettes 15.4.1984

Dear Lipman Bers,

Together with Yves Ladegaillerie (a former student of mine) we are running a microseminar on the Teichmüller spaces and groups, my own motivations coming mainly from algebraic geometry, and Ladegaillerie's from his interest in the topology of surfaces. Lately we have met with a problem which I would like to submit to you, as I understand you are the main expert on Thurston's hyperbolic geometry approach to Teichmüller space. Before stating the specific problem on hyperbolic "pants" (which things boil down to), let me tell you what we are really after.

Assuming given a compact oriented surface with boundary X_0 as a reference-surface for constructing the Teichmüller-type spaces, of genus g and with "holes" (satisfying $2g-2+\nu>0$), my primary interest is in the more "algebraic" version of Teichmüller space, corresponding to the question of classifying algebraic non singular curves over $\underline{C}$, of genus g, with a system of points (all distinct) given on X, together with a "Teichmüller rigidification" of (X,S) namely a homotopy equivalence between X_0 and $X\backslash S$. I'll denote this space, homeomorphic to $\underline{C}^d$ (where $d=3g-3+\nu$), by $\widetilde{M}_{g,\nu}$ (the tilde suggesting that it is the universal covering of a finer object I am still more interested in, namely the algebraic variety (or rather "multiplicity", or "stack" in the terminology of Mumford-Deligne) of moduli for algebraic curves of type (g,ν). Thurston however considers a different modular space, where algebraic curves with a given system of points are replaced by compact conformal oriented surfaces *with boundary*, giving rise to a modular space $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ (where the letter B recalls that we are classifying structures with boundary) homeomorphic to $\underline{C}^d\times(\underline{R}^{*+})^\nu$, where the extra factor corresponds to the extra parameters introducing through the existence of the boundary, namely the length's of the components of the boundary with respect to the canonical hyperbolic structure on the given surface. Our interest is in pinpointing the precise relationships between the two modular spaces. The obvious idea here is to consider the case

[69] https://agrothendieck.github.io/divers/LGL15484scan.pdf

of an algebraic curve with ν points given as a limit-case of a compact conformal surface with boundary, when all the lengths l_i of the components of the boundary tend to zero. Therefore, it looks suitable to consider both modular spaces above as embedded in a larger third one, which corresponds to the same modular problem as in Thurston's theory, except that we allow the "boundary" to have some components reduced to just one point, in the neighbourhood of which X is just a conformal surface without boundary, but with a given point (viewed as a component of such a "generalized boundary"). We now should get a modular space for "compact conformal oriented surfaces with generalized boundary" (of type g, ν and rigidified via X_0), call it $\widetilde{MB}_{g,\nu}$, homeomorphic to $\underline{C}^d \times (\underline{R})^\nu$, where now the second factor corresponds to the "parameters" l_i, which are allowed to take also value 0 (which means that the corresponding component of the generalized boundary is just one point). Thus $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ appears as a variety with boundary (in the topological sense - in the real analytic sense, the "boundary" admits "corner-like" points obviously), and $\widetilde{M}_{g,\nu}$ appears as a part of the boundary.

My interest is in a better geometric understanding of the situation, which should be "intrinsic" namely not depend on any particular choice of a surgical decomposition of the reference surface X_0 into "pants", used in order to describe in a handy way standard "coordinate functions" on the modular space $\widetilde{M}_{g,\nu}$. There appears to be a geometrically meaningful retraction of $\widetilde{MB}_{g,\nu}$ upon $\widetilde{M}_{g,\nu}$ (commuting to the operations of the Teichmüller modular group), the fibers being homeomorphic to $(\mathbf{R}^+)^\nu$ - more specifically, I expect the semi-group $(\mathbf{R}^+)^I$ (where I is the set of indices for the "holes" of X_0) to act on MB in a natural way, with free action of the subgroup $(\mathbf{R}^+)^\nu$ upon $\widetilde{MB}^\circ$, in such a way that $\widetilde{M}$ is just the quotient of $\widetilde{MB}$ by this action (or of $\widetilde{MB}^\circ$ by the action of the corresponding subgroup), and that the fiber F is isomorphic to $(\mathbf{R}^+)^I$ by the choice of any "origin" in $F \cap \widetilde{MB}^\circ$.

Of course, "computationally", in terms of a decomposition of X_0 into pants, the idea of such an operation is pretty obvious - namely letting the components λ_i of $\lambda \in (\mathbb{R}^+)^I$ act as a "multiplier" on the corresponding coordinate λ_i. However, it is not clear that this operation is intrinsic - and if it were intrinsic, an intrinsic geometric description would still be desired.

Of course, in the description of the situation proposed above, the retraction of

$\widetilde{MB}$ upon $\widetilde{M}$ is obtained by multiplying with the 0 multiplier (all λ are 0). Now there is a direct geometrical description of a retraction, by hyperbolic surgery. Namely, for any compact conformal surface of type g, ν with generalized boundary, let's "fill in" the holes which correspond to ordinary components of the boundary, which are Riemanian oriented circles, by "gluing in" the cones on these circles (which are canonically endowed with a conformal structure, using the Riemanian structure on the given circles). Thus we get a "functor" from compact conformal surfaces with generalized boundary (of type g, ν) to compact conformal surfaces *without boundary*, endowed with a system of ν points (making up a "wholly degenerate" generalized boundary). When we throw in the rigidifications and go over to isomorphism classes, this should give the desired retraction. However, the geometric situation is a lot richer still, as the compact surface without boundary obtained through surgery is endowed, not only with a system of ν points, but moreover with a system of mutually disjoint *discs* around these points. The shape of these discs is by o means arbitrary - we'll say that a system of discs around ν points on a compact conformal surface $\hat{X}$ without boundary is "admissible", if the situation can be obtained as above (up to isomorphism) from surgery, starting with a compact conformal surface X with boundary. (NB Among the given "discs", we should allow that some should be reduced to their center - we'll call them "degenerate".) The condition of admissibility can be expressed intrinsically, by stating that for every non-degenerate component Γ_i of the system of boundaries of those discs, the two operations we got of the standard circle group (of complex numbers of module 1) upon Γ_i, by using the fact that it is (on the one hand) the boundary of the disc D_i, an (on the other hand) that it is a component of the boundary of the hyperbolic surface $\hat{X} \setminus (\bigcup_j D_j^\circ)$, should be the same. When $\hat{X}$ and the points s_i on $\hat{X}$ are given, the possible admissible systems of discs around the points s_i depend on ν parameters - and the first idea which flips to mind to give a more precise meaning to these "parameters", is to view them as being the "radii" of those discs. But then we'll have to define what we mean by these!

The idea here is that, when we have a conformal disc D and an interior point s of D, then D may be viewed as canonically embedded in the tangent space T_s to D at s, as the "unit disc" at s. Thus, in the situation above of admissible system of discs $(D_i)_{i\in I}$ around $(s_i)_{i\in I}$, for every s_i corresponding to a non-degenerate D_i, we get a canonical disc

$$\Delta_i \subset T_{s_i}$$

in the tangent space - and of course, for degenerate D_i, we'll take Δ_i to be degenerate too. The discs we get in a given T_{s_i} (for a fixed system (s_i), and a variable admissible system of discs around these s_i) are ll discs in the strict euclidean sense, given by an unequality

$$|z| \leq r_i,$$

where $z \mapsto |z|$ denotes some hermitian metric on T_{s_i} compatible with the conformal structure - this metric being unique s_i up to a scalar factor. The set R_i of all those possible discs (the non-degenerate ones say) may be viewed in a natural way as a "torsor" (= principal homogeneous space) under $\mathbf{R}^+$, which plays here the role of the parameter space of all possible (non degenerate) "raddi" at s_i. If we admit also radius zero, we accordingly get a parameter space $\hat{R}_i$, which may be viewed as a torsor of sorts $\mathbf{R}^+$. Thus the set of radii for a given admissible system of discs D_i around the points s_i may be viewed as a point of the product-space

$$r = (r_i)_{i\in I} \in \hat{R} = \prod_{i\in I} \hat{R}_i.$$

My expectation is that an admissible set of discs (D_i) is well determined by the knowledge of the corresponding set r of radii, and moreover that a given set r of radii corresponds to an admissible system of discs iff it satisfies a set of unequalities

$$r_i < \rho_i,$$

where

$$\rho = (\rho_i)_{i\in I} \in R = \prod_{i\in I} R_i$$

is come fixed system of radii, corresponding to a fixed system of choices of hermitian metrics in the tangent spaces T_{s_i}.

I now see that this "expectation" doesn't quite match with the previous one, about a "natural operation" of $(\underline{P^+})^I$ upon $\widetilde{MB}$, having certain properties - it would match only if all ρ_i where equal to $+\infty$ (hence not in R_i itself strictly speaking). I must confess I didn't look too thoroughly yet at the situation, and moreover I've been busy with rather different kind of things for the last two or three months, and lost contact a little…

What is clear however is that the main key to an understanding of the general situation, is in an understanding of the basic particular case of Thurston's pants. If we number 0, 1 ∞ the three "holes" of such a part, the surface $\hat{X}$ can be identified canonically to the Riemann sphere, and the basic question then is to understand how the pant is embedded in this sphere Σ, as a complement of the union of (open) discs around the points 0, 1, ∞, these discs forming an "admissible system". So the main question is about understanding the structure of all possible admissible systems of three discs on Σ.

Puzzling a little about this problem, the following model came to my mind (corresponding to "limiting radii" ρ_i which are *finite*, not infinite). I view Σ as endowed with its usual euclidean metric, for which the real projective line is a great circle, with 0, 1, ∞ at equal distance from each other on this equator. These points may be viewed as the centers of three "orange slices", making up a cellular subdivision of Σ, where the common boundary of two among the "slices" Q_i ($i \in \{0, 1, \infty\}$) is a half-great circle passing in between s_i and s_j at equal distance from both, these three half-circles joining at the two poles P^+ and P^-. The "disc" Q_i around s_i has a conical structure around s_i (as has any conformal pointed disc), and we may take the concentric discs $\lambda_i Q_i$ with

$$0 < \lambda_i < 1.$$

The model I had in mind was that the (non degenerate) admissible systems of discs around the points s_i ($i \in \{0, 1, \infty\}$) are exactly the systems of discs $\lambda_i Q_i$, with λ_i as above. (If we allow some discs to be degenerate, this means that instead of the unequality above we merely demand $0 \leq \lambda_i < 1$, 0 not excluded.)

This model, if correct, would give a rather precise description of the inclusion relationships between pants, when these are considered as embedded in the sphere. The intersection of all would be this system of these half circles C_i, and the two poles P^+, P^- would play a significant role in the geometry of the pants, from this point of view. But it doesn't seem that neither those half circles (which need not be geodesical I guess), nor the two poles have ever been described as intrinsically associated to a pant. Of course, this model would give alternative "parameters" λ_i

for describing a pant, which are best suited for grasping the pants in terms of spherical geometry. The next question would be an understanding of the relationship between these parameters, and Thurston's ℓ_i. Maybe it is unreasonable to expect that for given index $i \in \{0, 1, \infty\}$, the length ℓ_i depends only on λ_i an not on the other parameters λ_j - and for this reason, the intuition at the beginning of this letter, using Thurston's coordinate functions and notably the ℓ_i's to get a fibration structure on $\widetilde{MB}$ over $\widetilde{M}$, in terms of a given decomposition of X_0 into pants, is probably not really relevant, namely it is non intrinsic. Assuming the model I am suggesting is correct, the accurate description of $\widetilde{MB}$ in terms of $\widetilde{M}$ would be

$$\widetilde{MB} \simeq \widetilde{M} \times [0, 1[^I,$$

where the second factor on the right hand sight refers to the system of multipliers λ_i $(i \in I)$, tied to the r_i above by $r_i = \lambda_i \rho_i$.

My question of course is whether you have any information or idea to propose, especially on the basic problem of relying pants to spherical geometry, and more specifically, whether the model above is likely to hold, or is definitely false. Also, one difficulty we found with hyperbolic geometry of conformal surfaces, is that apart from existence and unicity of the hyperbolic structure (compatible with the given conformal cone and for which the boundary is geodesic), there seems to be little hold on more specific properties. As an example, starting with a compact conformal surface with boundary X (a pant, say), of hyperbolic type, and removing an (open) "collar" around the boundary, we get another surface with boundary X' - what about the relation between the two corresponding metrics? Assuming the model for pants above is correct, it would be nice to have an explicit expression of the metric of a pant in terms of the parameters λ_i.

With my thanks for your attention, and for whatever comment you will care to make, very sincerely yours

VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES

I. Vers une géométrie des formes (topologiques)

[Apprendre] vers une construction récouvrante (sur l'action naturelles) d'une "géométrie des formes de dimension $\leq n$".

Une "forme de dim 0" soit pour définition [] dont les éléments sont appelés les "lieux" de la forme.

Modèle de dimension 1. — Une tel modèle

[]

1) Deux ensembles de [] L_α (ensemble des *lieux* de modèles) et S (ensemble des *segments* des modèle)

2) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}(L)$, $I \longrightarrow \widetilde{I}$ (lieux sur un segment) - i.e. une relation entre S et L.

3) Une application $S \longrightarrow \mathfrak{P}_2(L)$ []

N.B. J'ignore s'il faut supposer que I est connu, quand on connaît

Modèle d'une forme 1-dimensionnelle

L ensemble de "lieux"
S ensemble de "segments"

II. Réalisations topologiques des réseaux

1. — [] topologique

Soit X un espace topologique, $A \subset X$ partie fermée non vide de X. $X_{/A}$ l'espace déduit de X en [] A en un point, a le point déduit de A par []. Si X' est une partie de X contenant A, alors $X'_{/A} \hookrightarrow X_{/A}$ identifié $X'_{/A}$ à un sous-espace topologique de X.

Les fermées de $X'_{/A}$ s'identifient aux fermées de X' qui on bien contient A

III. Réseaux via découpages

Je voudrais définir une [] axiomatique a structure [] réseaux sur un [] L ([] de "lieux").

[]

Exemple 2 Soit L un ensemble ordonnée, on suppose L filtrant croissante, filtrant décroissant, sans plus grand [] plus petit élément, localement filtrant croissante et filtrant décroissante divisible.

On appellera un tel ensemble une *[] ordonnée*.

IV. Analysis situs (première mouture)

V. Algèbre des figures

VI. Analysis situs (deuxième mouture)

Avant de décrire ce qu'est une [], je vais décrire ce qui sera [] avec notion de multistrates" - la famille des multistrates choisies jouant un peu le rôle des une famille d'ouverts [] donc une topologie, ou une famille génératrice d'éléments d'un topos. Je vais donc commencer pas

I. "Algèbre des figures" ou "Ateliers".

1. — Une *algèbre des figures* implique avant tout trois types d'objets, les *lieux*, les *multistrates*, les *figures*, formant trois ensembles

(1.1) $$L, M, F$$

liées entre eux par diverses applications, et [] muni de diverses structures. Ainsi, on a des applications canoniques invectives

$$L \overset{b)}{\hookrightarrow} M \overset{a)}{\hookrightarrow} F \tag{1.2}$$

que nous utiliserons souvent pour identifier un lieu à une multistrate particulière, et une multistrate à une figure particulière ou L à une sous-ensemble de M, M à un sous-ensemble de F.

Il y a d'autre part deux entre paires d'applications, que voici :

(1.3) []

où $\mathrm{Fig}(M)$ désigne la partie de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ formée des figures ensemblistes dans M. On peut considérer que le première application correspond à une relation entre M et F, appelée relation d'incidence. Pour une figure F, $\widehat{T}$ s'appelle l'ensemble des *multistrates incidentes*, ou le *déployement* de la figure F. Si $X \in M$, $F \in \widetilde{F}$, on dire que le multistrate X est *incidente* à la figure F ou encore que c'est une *strate de la figure* F, si $X \in \widetilde{F}$. D'autre part, tout élément X de M (i.e. toute multistrate), [] comme une figure par (1.2), admet un déployement $\widetilde{X}$, et on pose

(1.4) []

et il résultera des axiomes que c'est une figure ensembliste des M, [] fidèlement par l'un $\widetilde{F}$ des strates de F.

En fait, M sera muni d'une relation d'ordre $\leq$, [] plus bas, et $\widetilde{F} \subset M$ sera une partie fermée de M, et pour tout $X \in \widetilde{F}$, on aura

$$\widetilde{X} = \{Y \in M \mid Y \leq X\} \tag{1.5}$$

À cause de cette interpolation, la passage de $\widetilde{F} \subset M$ à $\mathrm{Fig}_M(F)$ est à tout [], que cette figure ensembliste des M un semble revenant important - mais à voir...

VII. Analysis situs (troisième mouture)

VIII. Analysis situs (quatrième mouture)

Letter to P. Blass, 8.7.1987

Les Aumettes July 8, 1987

Dear Piotr Blass,

Thanks for your letter and MS. I am not going even to glance through the manuscript, as I have completely given up mathematics and mathematical involvements. If you complete your book, you may mention on the cover that it is based on my EGA IV (sic) notes, but you are to be the author and find your own title.

I have a foreboding that we'll contact again before very long, but in relation to more inspiring tasks and vistas than mathematical ones.

With my very best wishes

Alexander Grothendieck

LES DÉRIVATEURS

Écrit entre octobre 1990 et la première moitié de 1991 [70]

---

[70]Édité par M. Künzer, J. Malgoire, G. Maltsiniotis `https://agrothendieck.github.io/divers/der.pdf`

LETTRE À R. THOMASON
2.4.1991

- Letter about Derivators.
- [edition] by M. Künzer
- [translation] by Tim Hosgood

Les Aumettes le 2.4.1991

Cher Thomason,

Merci pour ta lettre, et excuse-moi d'avoir tant tardé à t'écrire. Une raison en est que depuis peut-être deux mois j'étais occupé par une réflexion venue un peu en diversion, que je pensais régler en quelques jours (refrain familier...), et j'ai repoussé ma lettre de semaine en semaine. Cette réflexion ne concerne pas l'algèbre homotopique proprement dite, mais plutôt les fondements de la théorie des catégories, et j'en ai fait nettement plus que ce dont j'ai un besoin immédiat. Mais dès à présent j'ai la conviction qu'une algèbre homotopique (ou, dans une vision plus vaste, une "algèbre topologique") telle que je l'envisage, ne pourra être développée avec toute l'ampleur qui lui appartient, sans les dits fondements catégoriques. Il s'agit d'une théorie des (grosses) catégories que j'appelle à présent *"accessibles"*, et des parties accessibles de celles-ci, en reprenant complètement la théorie provisoire que je présente dans SGA 4 I 9. J'ai tissé un tapis de près de deux cents pages sur ce thème d'apparence anodine, et cela me fera plaisir de t'en présenter les grandes lignes, si cela t'intéresse. Il y a aussi quelques problèmes intrigants qui restent, que je pressens difficiles, peut-être même profonds, et qui peut-être (qui sait) t'inspireront, ou quelqu'un d'autre branché sur les fondements de l'outil catégorique. Mais tout cela m'apparaît comme du domaine de l'outil, et je préfère dans cette première lettre te parler de choses plus névralgiques. Les idées-force sont nées pour la plupart depuis vingt-cinq ans et plus, et j'en vois le germe vivace dans mes réflexions solitaires des années 56, 57, quand s'est dégagé pour moi le besoin de catégories de "coefficients" moins prohibitivement gros que les sempiternels complexes de chaînes ou de cochaînes, et l'idée (après de longues perplexités) de construire de telles catégories par passage à une catégorie de fractions (notion qu'il a fallu inventer sur pièces) en "inversant" les quasi-isomorphismes. Le travail conceptuel principal qui restait à faire, et qui m'apparaît maintenant tout aussi fascinant (tant par sa beauté, que par sa portée évidente pour les fondements d'une algèbre cohomologique dans l'esprit d'une théorie des coefficients cohomologiques) qu'en ces temps de mes premières amours avec la cohomologie – c'était de dégager la structure intrinsèque de ces catégories. Le fait que ce travail, que j'avais confié à Verdier vers 1960 et qui était censé faire l'objet de sa thèse, n'ait toujours pas été fait à l'heure actuelle, même dans le cas des catégories dérivées ordinaires, abéliennes, lesquelles pourtant (par la force des choses) ont bien fini par devenir d'un usage quotidien tant en géométrie qu'en analyse, en dit long sur l'état des mentalités à l'égard des fondements, dans la communauté mathématique.

Ce vent de mépris à l'égard des indispensables travaux de fondements (et plus généralement, pour tout ce qui ne se conforme pas à la mode du jour), je l'ai évoqué dans ma dernière lettre, et j'y reviens bien des fois aussi dans les pages de Récoltes et Semailles, tant c'est là une chose (parmi bien d'autres) qui tout simplement me dépasse. Ta réponse à ma lettre montre d'ailleurs que tu ne l'as absolument pas comprise. Ce n'était pas une lettre pour "me plaindre" de ceci ou de cela qui me déplaisait. Mais c'était une impossible tentative de partager une douleur. Je savais bien au fond que c'était sans espoir ; car tout le monde fuit la douleur, c'est-à-dire fuit la connaissance (car il n'y a pas de connaissance de l'âme qui soit exempte de douleur). Une très rare tentative, peut-être la seule dans ma vie (je ne m'en rappelle pas d'autre en tous cas), et sans doute la dernière…

Il y a deux directions d'idées, intimement solidaires, dont j'ai envie de te parler, que je me suis surtout attaché à développer depuis fin octobre (quand j'ai repris une réflexion mathématique, pour une durée indéterminée). Elles sont d'ailleurs déjà esquissées ici et là (ainsi qu'un bon nombre d'autres idées maîtresses de l'algèbre topologique) dans Pursuing Stacks. Dans cette réflexion de 1983, qui m'a beaucoup aidé maintenant, je finis par me disperser quelque peu à suivre des avenues latérales, plutôt que de revenir aux idées essentielles de mon propos initial. Comme autre source utile pour quelqu'un intéressé par ces questions de fondements, je te signale deux ou trois lettres à Larry Breen, que je pensais d'ailleurs inclure dans le texte publié de Pursuing Stacks (qui sans doute ne verra jamais le jour). D'une part je voudrais te parler de catégories de modèles et de la notion de "dérivateur" (remplaçant les défuntes "catégories dérivées" de Verdier, décidément inadéquates aux besoins). D'autre part j'ai beaucoup de choses à dire sur Cat en tant que catégorie de modèles pour des "types d'homotopie" en tous genres. Mais ce sera sûrement pour une autre fois (à supposer que ton intérêt survive à la lecture de cette lettre-ci). Donc aujourd'hui ce sera les catégories de modèles et la notion de dérivateur.

1. La seule structure essentielle d'une catégorie de modèles est la donnée du "localiseur" $W \subset \mathrm{Fl}(M)$.

Aussi j'appelle "catégorie de modèles" une catégorie M munie d'un tel "localiseur" (contenant les isomorphismes, et avec deux parmi trois flèches u, v et uv, aussi la troisième). Les constructions homotopiques essentielles sont indépendantes de toutes structures supplémentaires, tel un ensemble C de "cofibrations" ou un ensemble F de "fibrations" ou les deux à la fois. De telles structures supplémentaires sont utiles, dans la mesure où elles permettent d'expliciter les constructions essentielles, et d'en établir l'existence. Mais elles ne sont pas plus essentielles pour le sens intrinsèque des opérations (qu'elles auraient tendance plutôt à obscurcir, jusqu'à présent) que le choix d'une base plus ou moins arbitraire d'un module, en algèbre linéaire. Comme terminologie, je parlerai de "catégories à cofibrations" (ou à fibrations), ou de "catégories (ou triples) de Quillen", etc., quand de telles structures supplémentaires apparaissent.

Par sa richesse en structures délicatement accordées les unes aux autres, ce sont les *triples de Quillen clos* (W, C, F) qui m'apparaissent comme la plus belle structure de catégorie de modèles "enrichie" découverte jusqu'à ce jour. J'avais cru pouvoir m'en passer, mais finalement n'y suis pas parvenu, et crois qu'ils resteront utiles (sinon absolument indispensables). En sens opposé, par l'économie des moyens mis en œuvre pour arriver pourtant à avoir l'essentiel, c'est la notion de *catégorie à cofibrations* ou à *fibrations* de K. S. Brown (avec la généralisation assez évidente apportée par Anderson) qui m'apparaît la plus belle. Par contre, je ne suis pas arrivé à comprendre la raison d'être du système d'axiomes que tu me proposes dans ta première lettre, te plaçant plus ou moins à mi-chemin entre Quillen et Brown. Tes axiomes (s'ils veulent élargir ceux de Quillen) me paraissent prohibitivement exigeants, en comparaison avec ceux de Brown-Anderson – à cela près, seulement, que tu ne sembles pas exiger que les ensembles C et F soient stables par composition. Mais je ne connais guère d'exemple où cet axiome-là ferait problème. Éclaire-moi s'il te plaît s'il y a quelque chose qui m'échappe.

Un exemple : si une structure à fibrations (de Brown-Anderson) satisfait à la condition familière de "propreté" (ce qui est le cas pour les structures considérées d'abord par Brown, où tous les objets sont fibrants sur l'objet final), on peut remplacer cette structure (W, F) par une autre (W, F_W) canoniquement associée au localiseur W, i.e. à la catégorie de modèles envisagée, en prenant pour F_W l'ensemble des flèches dans M qui sont ce que j'appelle des *W-fibrations* $f : X \longrightarrow Y$, *i.e.* qui sont quarrables et telles que le foncteur changement de base $Y' \mapsto X' = X \times Y'$ de M/Y dans M/X transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes. Pour tout localiseur, c'est là un ensemble de flèches qui contient les isomorphismes, est stable par composition, par changement de base, par facteurs directs. Dire que (W, F_W) est une structure de Brown, revient à dire qu'il existe "assez de W -fibrations", par quoi j'entends que toute flèche u se factorise en $u = f\, i$, avec $i \in W$ et $f \in F_W$. Et dualement pour les catégories à cofibrations (W, C), se remplaçant (dans le cas propre) par des structures (W, C_W) canoniquement associées au localiseur, en introduisant l'ensemble des *W-cofibrations*. Ainsi, j'aurais tendance plutôt à regarder une structure à fibrations (W, F) propre (et non "canonique") comme une recette ou un critère pour caractériser certaines W -fibrations, avec lesquelles on pourra se contenter souvent de travailler, parce qu'il y en a "assez". Pourtant, j'ai trouvé dans le cas de Cat que le travail avec les W-fibrations (beaucoup moins restrictives que les "fibrations" à la Quillen que tu avais introduites) était indispensable. Et je suis persuadé qu'il doit être très utile aussi dans une catégorie de modèles telle que $\Delta\hat{}$ (ensembles semi-simpliciaux), car tout en étant substantiellement moins exigeante que la notion de fibration de Kan, celle de W-fibration implique déjà tout ce que je considère (à tort ou à raison) comme les propriétés cohomologiques et homotopiques essentielles de ces dernières (lesquelles, selon moi, ne sont pas dans la nature de propriétés de prolongement-relèvement de morphismes). Ainsi, cela doit permettre (par considération de "chemins" infinis) de construire dans $\Delta\hat{}$ l'analogue des espaces de chemins de Cartan-Serre, sans avoir au préalable à remplacer le complexe K par une enveloppe de Kan. C'est en tous cas ce que j'ai vérifié dans le cas très voisin de Cat (sans jamais avoir à faire de détour par Δ). Cela fait partie des choses dont je voudrais te parler par la suite.

2. Prédérivateurs, dérivateurs

Quand j'ai dit que les structures homotopiques essentielles sont déjà contenues dans le localiseur W, je pensais notamment aux suites exactes des fibrations et des cofibrations, qui sont un test décisif. Je reste ébahi que Quillen ne souffle mot à ce sujet dans son brillant (et beau) travail, et je présume qu'il a réussi (comme bien d'autres après lui) à ne pas le voir. (Pour le voir, il aurait fallu sans doute qu'il ne soit pas aveuglé par le mépris *a priori* qu'il exprime pour toute recherche de fondements qui irait au-delà de celle qu'il venait de faire, avec un tel succès...) Mais la chose devient évidente dans l'optique des dérivateurs.

L'idée de base des dérivateurs m'est apparue à l'occasion de SGA 5, quand il s'est avéré (découvert par Ferrand, chargé de rédiger un de mes exposés sur les traces en cohomologie) que la notion de catégorie dérivée de Verdier ne se prêtait pas au formalisme des traces : la trace n'est pas additive pour les "triangles exacts", car cette notion de triangle (vu comme un diagramme dans la catégorie initiale) n'est pas assez fine. Pour bien faire, il faudrait prendre la catégorie des morphismes de complexes (pour lesquels on a une construction fonctorielle d'un *mapping cone*), et passer à la catégorie dérivée de celle-ci. Cette catégorie s'envoie dans celle des triangles de Verdier par un foncteur essentiellement surjectif, mais qui n'a rien de fidèle, et encore moins pleinement fidèle. C'est là le "péché originel" dans la première approche des catégories dérivées, tentée par Verdier — approche dont en tout état de cause, faute d'expérience, on n'aurait pas pu faire l'économie. C'est alors que j'ai été frappé par ce fait, d'apparence anodine, que chaque fois qu'on construit une catégorie dérivée à l'aide d'une catégorie de complexes d'une catégorie abélienne, cette catégorie dérivée, en un sens, "ne vient jamais seule". En effet, pour toute catégorie d'indices I (et je pensais alors surtout au cas où I est finie), on a la catégorie abélienne $A(I)$ des diagrammes de type I dans A, laquelle donne, elle aussi, naissance à une catégorie dérivée, qu'on pourrait noter $D(I,A)$. La catégorie des "vrais" triangles s'obtient en prenant $I = \Delta^1$, et les catégories dérivées de complexes filtrés, introduites par Illusie pour sauver la mise à bon compte, correspondent aux cas $I = \Delta^n$ (simplexe-type de dimension n). Les variances d'Illusie proviennent simplement du fait que $D(I,A)$, pour A fixé, est contravariant en I, de façon tautologique. L'idée tentante alors, et que j'ai proposée ici et là sans qu'elle ne rencontre d'écho, c'est que cette structure de foncteur ou, plus exactement, de *2-foncteur*

$$I \mapsto \mathrm{D}(I,A)$$

allant de la catégorie Cat ou de quelque sous-catégorie assez fournie comme celle des catégories finies ou celle des ensembles ordonnés finis, devrait suffire à incarner toutes les structures essentielles d'une "catégorie dérivée" (encore dans les limbes) ; quitte bien sûr à imposer les axiomes qu'il faut (et que j'ai fini par dégager enfin l'an dernier). On récupère la catégorie dérivée initiale, "nue", en faisant $I = e$ (catégorie ponctuelle). Mais il serait impropre, en toute rigueur, de considérer la structure plus complète (que j'appelle maintenant un "*dérivateur*") comme une structure supplémentaire sur cette catégorie – laquelle continue cependant, dans le formalisme des dérivateurs, à jouer un rôle important, sous le nom de "*catégorie de base*" du dérivateur. La même idée avait l'air de devoir marcher pour les variantes non commutatives de la notion de catégorie dérivée, et le travail de Quillen m'apparaissait comme une incitation puissante à développer ce point de vue. Mais ce n'est qu'il y a quelques mois que je me suis donné le loisir enfin de vérifier que mon intuition était bel et bien justifiée. (Travail d'intendance, quasiment, comme j'en ai fait des centaines et des milliers de fois !)

Ce point acquis, il est bien clair à présent que la notion de dérivateur (plus encore que celle de catégorie de modèles, qui est à mes yeux un simple intermédiaire, "non intrinsèque", pour construire des dérivateurs) est une parmi les quatre ou cinq notions les plus fondamentales, dans l'algèbre topologique, qui depuis une trentaine d'années déjà attend d'être développée. Comme notions d'une portée comparable, je ne vois guère que celle de *topos*, et celles de *n-catégories* et de *n-champs* sur un topos (notions qui n'ont pas encore été définies à ce jour, sauf pour $n \leq 2$). D'autre part, pour moi le "paradis originel" pour l'algèbre topologique n'est nullement la sempiternelle catégorie $\Delta^\wedge$ semi-simpliciale, si utile soit-elle, et encore moins celle des espaces topologiques (qui l'une et l'autre s'envoient dans la 2-catégorie des topos, qui en est comme une enveloppe commune), mais bien la catégorie Cat des petites catégories, vue avec un œil de géomètre par l'ensemble d'intuitions, étonnamment riche, provenant des topos. En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d'ensembles les $C^\wedge$, avec C dans Cat, sont de loin les plus simples des topos connus, et c'est pour l'avoir senti que j'insiste tant sur l'exemple de ces topos ("catégoriques") dans SGA 4 I.

J'en viens maintenant à la définition en forme de ce que j'entends par un "*prédérivateur*" D – étant entendu déjà que la notion plus délicate de "dérivateur" s'en déduit en imposant quelques axiomes bien naturels, dont je te donnerai la liste si tu me la demandes. Pour développer une algèbre des dérivateurs (et tout d'abord, des prédérivateurs), il faut d'abord se fixer un "*domaine*" commun pour ceux qu'on va envisager, c'est-à-dire, une sous-catégorie pleine Diag de Cat. Le cas qui a ma préférence maintenant est celui ou Diag est Cat tout entier, auquel cas j'interprète un dérivateur comme étant une sorte de "théorie de coefficients" (homologiques ou cohomologiques ou homotopiques, tout cela est pareil) sur Cat, catégorie visualisée comme une catégorie d'objets de nature géométrique et spatiale, comme des "espaces" à proprement parler, bien plus que comme de nature algébrique ; tout comme les anneaux commutatifs (via leurs spectres) et les schémas qu'on construit avec eux, sont pour moi des objets géométrico-topologiques par essence, et nullement algébriques. (L'algèbre étant seulement un intermédiaire pour atteindre à la vision géométrique, qui elle est l'essentiel.) Un cas plus ou moins extrême opposé est celui où Diag est la catégorie des ensembles ordonnés finis, voire même (à la rigueur) une catégorie plus restreinte encore. Mais pour être vraiment à l'aise, il faudra supposer tôt ou tard que la catégorie Diag (des "catégories d'indices" ou des "types de diagrammes", pour les dérivateurs considérés) soit stable par les constructions courantes sur les catégories : produits finis, sous-catégories, sommes amalgamées, voire même catégories Hom ; et aussi bien sûr par passage à la catégorie opposée, particulièrement fréquent pour passer d'un énoncé à un énoncé dual, notamment. Quand il ne s'agit que d'avoir un prédérivateur, dans tous les cas à ma connaissance on peut prendre comme domaine Cat tout entier. C'est quand il s'agit de vérifier les axiomes assez draconiens des dérivateurs, seulement, qu'on peut être forcé à restreindre considérablement le domaine comme j'ai évoqué, ou sinon, tout au moins, les flèches $u : X \longrightarrow Y$ qu'on envisage dans Cat, lorsqu'il s'agit de travailler non seulement avec le foncteur correspondant d'image inverse u^*, mais aussi avec les images directes $u_!$ et u_*. Mais là j'anticipe…

Au sujet du domaine, je voudrais encore ajouter qu'à mes yeux le domaine Cat ne représente nullement la portée ultime d'un dérivateurs donnée. Celui-ci, et plus généralement un prédérivateur D, étant défini comme un 2-foncteur entre

2-catégories

$$D : \mathrm{Diag}^\circ \longrightarrow$$

(où désigne la catégorie des $\mathfrak{U}$-catégories contenues ($\subset$) dans l'univers de référence $\mathfrak{U}$, toujours sous-entendu, alors que Cat désigne la catégorie des "petites" catégories, i.e. de celles qui son éléments de $\mathfrak{U}$), il résulte (d'ailleurs de façon nullement tautologique) des axiomes des dérivateurs (que je n'explicite pas ici) que la catégorie $D(X)$ (des "coefficients de type D sur X") associée à une petite catégorie X, *ne dépend à équivalence près que du topos défini par* X, donc que de la catégorie $X^\wedge = \mathrm{Hom}(X^\circ, \mathrm{Ens})$ des préfaisceaux d'ensembles sur X. Plus précisément, si $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche dans Cat, alors le foncteurs "image inverse" pour les coefficients de type D

$$f^* : D(Y) \longrightarrow D(X)$$

est une équivalence de catégories, pourvu que le foncteur similaire $Y^\wedge \longrightarrow X^\wedge$ (qui correspond à un dérivateurs particulièrement important sur Cat...) soit une équivalence de catégories; c'est-à-dire encore pourvu que f soit pleinement fidèle et que tout objet de Y soit facteur direct d'un objet de la forme $f(x)$ (ou encore, que f induise une équivalence entre les "enveloppes de Karoubi" de X et de Y). Cela implique aussi, quand est égal à Cat tout entier, que l'on peut regarder D comme provenant d'un 2-foncteur

$$^\circ \longrightarrow$$

allant de la 2-catégorie des topos "catégoriques" (i.e. équivalentes à un topos provenant d'un X dans Cat) dans la catégorie . Ceci vu, on peut espérer étendre le dérivateur, c'est-à-dire la théorie de coefficients envisagée, à la catégorie Top des topos tout entière, i.e. en un foncteur (qu'on notera encore D)

$$D : \mathrm{Top}^\circ \longrightarrow .$$

J'ai idée que ça doit être toujours possible, et de façon essentiellement unique. Ça l'est en tous cas dans tous les cas concrets que j'ai regardés. Si par exemple D est le dérivateur (abélien) défini par une catégorie abélienne via la catégorie des complexes et la notion de quasi-isomorphisme, on trouve pour tout topos X (supposant que la catégorie soit celle des k-modules, où k est un anneau quelconque) la catégorie $\mathrm{D}(X,k)$ dérivée de celle des k-modules sur X, et celle $\mathrm{D}(X,k)$ dépend bien de façon contravariante de X. Il est vrai que quand il s'agit de définir les lois *covariantes* $f!$ et f_*, plus exactement d'en établir l'existence, on bute sur le cas de $f_!$, cet $f_!$ n'existe que moyennant des hypothèses draconiennes sur f. (De toutes façons, j'escroque un peu ici, faute d'avoir explicité des restrictions sur les degrés des complexes, genre $\mathrm{D}^+(X,k)$ ou $\mathrm{D}^-(X,k)$, Mais ce n'est par le lieu ici d'entrer dans des technicalités.)

Pour ce qui est des axiomes pour les dérivateurs, le plus essentiel de tous est l'existence, pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans Diag, des foncteurs $f_!$ et $f_{:D(X)\longrightarrow D(Y)}$, adjoints à gauche et à droite de f^*. Ainsi, pour développer (dans la catégorie de base, disons) la théorie de la *suite exacte de suspension*, c'est de l'existence de $f_!$ qu'on a besoin, et il suffit pour cela que Diag contienne les ensembles ordonnés finis (et même nettement moins, si on y tient). Mais je signale que les suites canoniques qu'on construit ainsi à l'aide du seul foncteur $f_!$ et sous l'hypothèse que le dérivateur soit "ponctué" (*i.e.* les $D(X)$ ponctués et les foncteurs f compatibles avec les objets neutres), ne sont exactes que moyennant un "axiome d'exactitude" (à gauche) convenable, faisant partie de la poignée des axiomes d'un dérivateur ; et dualement pour la suite exacte de cosuspension. Ces constructions sont valables d'ailleurs non seulement dans toute catégorie $D(e)$, mais aussi comme de juste dans les $D(X)$, pour X dans Diag. (En fait, $D(X)$ peut être considéré comme la catégorie de base d'un "dérivateur induit" $D_X : Y \mapsto D(X \times Y)$, auquel on peut appliquer les résultats généraux. Les axiomes des dérivateurs sont tels qu'ils sont stables par passage d'un dérivateur à un dérivateur induit.) Ceci suggère de dissocier les notions de "dérivateur à gauche" (postulant l'existence des images directes homologiques $f_!$, à l'exclusion des images directes cohomologiques f), de "dérivateur à droite" incluant l'aspect dual du formalisme homotopique. Mais je signale tout de suite que certaines propriétés des dérivateurs qui me paraissent importantes, et même quand leur énoncé ne fait appel qu'à une des deux structures gauche ou droite, sont établies en utilisant l'existence des deux covariances à la fois.

Pour terminer ces généralités sur la notion de dérivateur, je voudrais souligner qu'il est essentiel, dans la notion de prédérivateur (qui est la donnée de base unique), que $D : \mathrm{Diag} \longrightarrow$ est bien un 2-foncteur, et non seulement un foncteur ;

en d'autres termes, il faut se donner non seulement les $D(X)$ pour X dans Diag, et les $f^* = f_D^* = D(f)$ pour les flèches $f : X \longrightarrow Y$, mais pour une flèche $u : f \longrightarrow f'$ entre deux flèches $f, f' : X \longrightarrow Y$, il faut se donner un homomorphisme fonctoriel

$$u^* : f'^* \longrightarrow f^*$$

(avec des indices D s'il y a risque de confusion). Il faut bien voir que, conceptuellement très simple et évidente (et pour cette raison sans doute, méprisée par le "mathématicien sérieux" comme du "*general nonsense*"), la donnée d'un 2-foncteur entre 2-catégories est une espèce de structure très délicate, d'un genre apparemment nouveau en maths ; et qu'on le veuille ou non, c'est bien cette espèce de structure, et elle seule, qui cerne finement les aspects essentiels, c'est-à-dire intrinsèques (indépendants de la catégorie de modèles particulière choisie, 'à des fins calculatoires, pour décrire le dérivateur) du formalisme homologico-homotopique ; lequel est dans son essence dernière (si je ne me trompe beaucoup) un formalisme de variance de "coefficients". Tout comme la dualité de Poincaré classique m'a mené vers le formalisme des six opérations (ou "variances") valable tant dans le contexte des espaces topologiques, que celui des schémas ou des espaces analytiques (et dans bien d'autres encore, comme Cat, j'en suis à présent persuadé), formalisme qui à mon sens (et si je ne fais erreur) en capte l'essence ultime et en quelque sorte universelle, indépendante de toute hypothèse de non-singularité, *etc*.

Pour stimuler l'intuition habituée à des contextes d'homologie ou de cohomologie familiers, j'ai trouvé utiles des notations du type suivant, pour un dérivateur donné D. Si X est dans Diag, et si ξ est un D-coefficient sur X, i.e. un objet de $D(X)$, je dénote par

$$\mathrm{H}_\bullet^D(\xi) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_D^\bullet(\xi)$$

("*objets d'homologie et de cohomologie de* X*, à coefficients dans* ξ") les objets $p_!(\xi)$ et $p_*(\xi)$ respectivement, objets dans la catégorie de base $D(e) = A_D$ de D, où $p : X \longrightarrow e$ est la flèche structurale canonique. Plus généralement, si $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche dans Diag, les images de ξ par les deux images directes peuvent être notées

$$\mathrm{H}_\bullet^D(f, \xi) \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}_\bullet^D(X/Y, \xi), \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_D^\bullet(f, \xi) \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}_D^\bullet(X/Y, \xi),$$

c'est l'*homologie* resp. la *cohomologie relative de X au-dessus de Y*, à coefficients dans ξ. On peut laisser tomber l'indice ou l'exposant D, quand aucune confusion n'est à craindre. Par ailleurs, je me suis laissé guider par les intuitions et les réflexes acquis tout au long du développement des SGA, pour développer dans le contexte de Cat (pour commencer) la panoplie des propriétés "cohomologiques" essentielles d'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat, relativement à un dérivateur, c'est-à-dire à une "théorie de coefficients", donné. Mais c'est là quelque chose dont je te parlerai à propos de Cat une autre fois, si tu es intéressé.

3. Prédérivateur défini par une catégorie de modèles, et problème d'existence de $f_!$, f_*.

La plupart des dérivateurs que je connais sont définis à l'aide de catégories de modèles (M, W). Une telle catégorie définit en tous cas un prédérivateur sur Cat tout entier, en posant

$$D_{(M,W)}(X) = M(X)(W(X))^{-1},$$

où je désigne maintenant par

$$M(X) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(X^{\circ}, M)$$

la catégorie des préfaisceaux sur X à valeurs dans M (donc celle des "diagrammes de type X°", et non de type X, dans M), et $W(X)$ l'ensemble des flèches dans cette catégorie, qui "sont dans W argument par argument". La loi de 2-foncteur contravariant de $D(X)$ en X est claire. Quand W est l'ensemble des isomorphismes dans M, j'écris aussi D_M au lieu du double indice. C'est un cas qu'on peut considérer comme "trivial", mais qui pour autant ne manque pas d'intérêt. Ainsi, D_M est un dérivateur (satisfaisant à tous les axiomes), pourvu seulement que M soit stable par petites limites inductives et projectives (les unes assurant l'existence des $f_!$, les autres celle des f_*). Dans le cas où $M = \text{Ens}$, on trouve $D(X) = X^{\wedge}$, c'est là un dérivateur important à mes yeux (si trivial soit-il), et les propriétés "cohomologiques" des flèches de Cat, relativement à ce dérivateur, ne sont nullement choses triviales. Dans le cas où W est quelconque, je note aussi D_W au lieu du double indice, il est rare qu'une confusion soit à craindre. La question principale qui se pose alors, c'est bien sûr celle de l'existence des foncteurs $f_!$ et f. Contrairement à toi, je n'ai aucun scrupule ici à supposer la catégorie M stable par tous les types de limites dont on a besoin, donc (si on veut travailler sur Cat tout entier) stable par petites limites inductives et projectives. Je ne serais pas étonné qu'il y ait un théorème qui assure que tout dérivateur sur Cat peut se décrire à l'aide d'une telle catégorie de modèles (à équivalence de dérivateurs près), ou du moins comme limite inductive filtrante de tels dérivateurs. J'entrevois dans ces grandes lignes, une "algèbre des dérivateurs" (consistant en un certain nombre d'opérations fondamentales au sein de la 2-catégorie de tous les dérivateurs, sur Cat disons comme domaine), laquelle serait le reflet d'opérations algébriques de nature similaire, qui s'effectuent au niveau des catégories de modèles. J'ai comme une impression, par une allusion dans ta lettre du mois de janvier, que tu as quelque idée ou intuition de ce genre de structures, et on pourra en reparler. Mais je souligne tout de suite que pour moi, le véritable objet d'opérations au niveau des catégories de modèles, c'est d'obtenir des opérations sur les dérivateurs (ou les prédérivateurs, pour commencer) associés.

À ce sujet, une remarque au sujet de la fonctorialité du prédérivateur associé à une catégorie de modèles (M, W). Il est clair qu'on obtient un 2-foncteur

$$(*) \qquad \longrightarrow$$

allant de la 2-catégorie des catégories de modèles (ce n'est d'ailleurs pas une $\mathfrak{U}$-catégorie, si on ne fait des restrictions sur les catégories envisagées et sur les foncteurs admis, en plus d'être compatibles aux localiseurs). Mais si on a deux catégories de modèles, il y a lieu d'introduire dans la catégorie

$$\underline{\mathrm{Hom}}((M, W), (M', W')) \quad \text{ou} \quad \underline{\mathrm{Hom}}(M, M')$$

(cette dernière notation, si les localiseurs W, W' sont sous-entendus dans les notations M, M') un localiseur bien naturel $W_{M,M'}$, formé des morphismes $u : F \longrightarrow G$ entre morphismes de catégories de modèles F, G, tels que $u(x) : F(x) \longrightarrow G(x)$ soit dans W', pour tout x dans M. Appelons-les les "*quasi-isomorphismes*" (*relatifs aux localiseurs W, W'*). Il est clair que les quasi-isomorphismes sont transformés en isomorphismes par le 2-foncteur précédent, donc en passant à la catégorie des fractions, on trouve un foncteur (déduit de $(*)$)

$$(**) \qquad H(M, M') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(D_M, D_{M'})$$

où dans la notation il est sous-entendu que M et M' sont munis de leurs localiseurs W, W'. Ainsi, les catégories de modèles peuvent être regardées à présent comme les 0-objets d'une 2-catégorie, dont les catégories de flèches sont les catégories localisées $H(M,M')$ précédentes, et on trouve un 2-foncteur canonique de cette 2-catégorie, que j'ai envie d'appeler catégorie dérivée (?) de la catégorie des catégories de modèles, et de noter , dans celle des prédérivateurs, au moyen des foncteurs $(**)$:

$$(***) \qquad \longrightarrow .$$

Le point auquel je veux en venir est le suivant : si M et M' sont deux catégories de modèles qui sont équivalentes en tant que 0-objets de cette 2-catégorie, alors les prédérivateurs associés sont équivalents, donc à toutes fins pratiques, peuvent être identifiés (du moins, quand l'équivalence initiale est donnée). Ceci (et bien sûr d'innombrables exemples) illustre à quel point une catégorie de modèles est un objet "encombrant" (si j'ose dire), encombré d'aspects inessentiels, en comparaison avec le dérivateur associé, qui à mes yeux représente sa quintessence du point de vue "homotopique" ou "cohomologique". Un peu comme la donnée d'une base pour un espace vectoriel, ou d'un système de générateurs et de relations pour un groupe, ou un système d'équations pour une variété[1]. Il n'y a aucun inconvénient à travailler avec ces "superstructures", et bien souvent on ne peut même s'en passer. Il est cependant important, pour une compréhension en profondeur, de ne pas pour autant laisser brouiller et perdre de vue les objets géométriques essentiels (espace vectoriel, groupe, variété, dérivateur) et leur caractère intrinsèque.

J'ignore s'il est raisonnable de s'attendre, pour le 2-foncteur précédent (), à des propriétés de fidélité, ou de surjectivité essentielle, en limitant au besoin les catégories de modèles envisagées, de façon par exemple à assurer qu'elles donnent

[1]Une première comparaison qui m'était venue (elle s'est perdue en route) me paraît plus frappante : la relation entre catégorie de modèles et dérivateur associé, s'apparente pour moi à celle entre un complexe dans une catégorie abélienne, et l'objet correspondant dans la catégorie dérivée. Et l'effort conceptuel qu'il m'avait fallu faire pour parvenir à la notion de catégorie dérivée, s'apparente un peu à celui (plus modeste à mon sens) que les gens devront fournir un jour pour accéder à la notion de dérivateur et au "yoga des dérivateurs" – lequel ne s'acquiert qu'en travaillant avec !

naissance à des dérivateurs, et non seulement des prédérivateurs. Cela fait partie en tous cas des questions qu'on devra bien examiner un jour (dans ce monde-ci, s'il en est temps, ou sinon dans l'autre...). J'avoue que jusqu'à présent, mon intuition des dérivateurs s'est beaucoup appuyée sur le formalisme des catégories de modèles.

Mais il me faut revenir sur le cas où on se donne une catégorie de modèles fixe (M, W), et sur la grande perplexité de l'existence des foncteurs $f_!$ et f_*. Techniquement parlant, c'est là, visiblement, une des questions les plus cruciales qui se posent pour le développement de l'algèbre topologique, telle que je l'envisage. Or pour cette question fondamentale, je n'ai que des éléments de réponse bien fragmentaires, et manifestement insatisfaisants (et sans doute aussi insuffisants à la longue). Prenant le cas où Diag est égal à Cat : j'avoue (à ma honte !) que je n'ai pas même construit d'exemple d'une catégorie de modèles, stable par petites limites (inductives et projectives), et telle que les foncteurs $f_!$ et f n'existent pas pour toute flèche f dans Cat, pour le prédérivateur associé. Je ne m'attends nullement d'ailleurs à ce qu'ils existent toujours, même si on fait des hypothèses du type : W stable par limites inductives filtrantes, et la catégorie M accessible et W une partie accessible de $\mathrm{Fl}(M)$ (hypothèses qui me paraissent relativement anodines). D'autre part, je n'ai pu prouver l'existence de ces foncteurs que dans des cas extrêmement particuliers, que je renonce à expliciter dans cette lettre (devenue prohibitivement longue). Je ne connais pas un cas où je sache l'établir, sans supposer tout au moins que la catégorie de modèles est associée à un triple de Quillen clos (et plus encore) ! La situation est quand même meilleure si on est moins exigeant et prend comme domaine Diag (disons) la catégorie des ensembles ordonnés finis. À ce moment-là, il suffit que W soit associé à une catégorie à cofibrations (pour avoir $f_!$) ou à fibrations (pour avoir f), sans qu'il soit nécessaire d'ailleurs (pour avoir bel et bien un dérivateur) que ces deux structures duales soient reliées entre elles autrement que par le localiseur commun W.

C'est le moment de dire que le travail de Anderson (dont tu m'as envoyé une photocopie), où il prétend donner une esquisse d'un théorème très général en ce sens (qui aurait en effet comblé mes vœux !), est totalement canulé – même déjà dans le cas d'un ensemble ordonné fini I, et du morphisme structural $I \longrightarrow e$, i.e. pour l'existence des ordinaires sur I. Sa soi-disant idée de démonstration déconne en deux endroits qui me paraissent essentiels, et je doute fort qu'elle soit récupérable, bien que je n'aie pas de contre-exemple au théorème qu'il énonce, et dont il ne daigne pas même donner une démonstration. Ayant regardé ce travail (si on peut l'appeler ainsi) avec attention, je suis heureux qu'il ne soit pas de toi – il me fait grincer des dents du début à la fin, et plus que ça. Je ne le regrette pas, car si je n'ai guère appris de maths en le lisant, j'y ai appris autre chose de moins facile et de moins réjouissant que les maths, et plus important.

Je suis d'ailleurs ébahi que dix ans se soient passés depuis cet article, sans que personne apparemment ne s'aperçoive qu'il ne tient pas debout. Visiblement, ce théorème, c'était comme une pièce de musée, une prouesse pour rien – personne n'en avait rien à foutre. Même chez des plus "cotés" que lui, les théorèmes souvent, ce n'est plus une porte ouverte sur quelque chose, qu'on n'avait pas vue avant et qu'on voit, ni même un outil pour forcer les portes qu'on n'arrive à ouvrir en douceur – mais un trophée. Peu importe alors qu'il soit vrai ou faux – ça ne fait strictement plus aucune différence…

Sauf si tu as besoin de précisions, je crois inutile que j'entre dans des détails – tu es bien capable de trouver tout seul où ça foire (sur l'air du "il est évident que"…). Et de plus, il est temps que je m'arrête, bien que je ne sois pas parvenu encore à ce qui, techniquement, était prévu comme substance principale de ma lettre : le "théorème de factorisation", et son application à des théorèmes de stabilité pour des structures de Quillen. Ce sera donc sans doute pour ma prochaine lettre, si tu es intéressé à continuer cette correspondance. Auquel cas je serai très heureux de t'avoir comme interlocuteur de mes cogitations !

En attendant, reçois mes amitiés

Lettre à A Y, 24.6.1991

Les Aumettes, le 24.6.1991

Cher Monsieur,

Excusez-moi d'avoir mis si longtemps à réagir à votre longue et sympathique lettre (du 25 mai), ayant été très accaparé par des tâches et préoccupations extra-scientifiques. Cela n'a pas empêché que j'ai été sensible au souffle d'un enthousiasme et à la faculté d'émerveillement qui transparaissait derrière les explications $\pm$ techniques. Je dois vous avouer que vu ma très grande ignorance en physique, ces explications m'ont passé totalement par dessus la tête. Aussi j'ai bien peur que ma réponse vous laissera sur votre faim. Visiblement, il faut des yeux totalement neufs, et un flair consommé pour l'"invention" (en fait, la découverte) de structures mathématiques (au service d'intuitions à la fois physiques et philosophiques) pour dégager les notions de base et forger les outils conceptuels d'une physique nouvelle. Avez-vous ces grands dons, et la foi en votre "voix intérieure", pour démarrer à neuf, à contre-courant de toutes les idées reçues, pour une œuvre de rénovation plus radicale encore, peut-être, que celles qui furent accomplies par Einstein et par Schrödinger?

Avez-vous le courage pour faire un tel pari – voilà la question! Sans autre guide que votre bon sens d'enfant, et votre flair, pour un long voyage sans perspective de compagnons de route... Pour que je puisse être d'un réel secours pour un tel voyage dans l'inconnu, il y faudrait d'une part un investissement que je ne suis plus disposé à fournir – ne serait-ce que pour me mettre au courant dans les grandes lignes au moins des bases conceptuelles de la physique théorique actuelle, de ses cohérences et de ses incohérences. Malheureusement, je ne connais non plus aucun mathématicien que me paraîtrait apte au rôle de coéquipier dans un tandem physico-mathématique pour le genre de travail qu'il y aurait à faire (et auquel j'ai rêvé plus d'une fois!)

Il est vrai qu'au cours des dix dernières années, j'ai réfléchi ici et là à diverses extensions de la notion d'espace, en gardant à l'esprit la remarque pénétrante de Riemann. J'en parle dans quelques lettres à des amis physiciens ou "relativistes". Il ne doit pas être très difficile p. ex. de développer une sorte de calcul différentiel sur des “variétés” qui seraient des ensembles finis (mais à cardinal “très grand”), ou plus généralement discrets, visualisés comme formant une sorte de “réseau” très serré de points dans une variété C^∞ (p. ex. une variété riemannienne) – une sorte de géométrie différentielle “floue”, où toutes les notions numériques sont définies seulement “‘a ε près”, pour un ordre d'approximation ε donné. Comme prédit par Riemann, une telle géométrie différentielle floue, par la force des choses, serait nettement plus délicate et compliquée que la géométrie différentielle ordinaire. Mais peut-être pas *tellement* plus compliquée ! Dans cette approche, le point faible à présent, c'est qu'il ne semble pas que la physique nous fournisse quelque idée de “quanta” d'espace-temps, qui seraient les “points” d'une telle variété discrète. (Il est vrai que lorsque fut formulée et progressivement admise au siècle dernier, “l'hypothèse atomiste”, on n'en savait guère plus sur ces fameux atomes que qu'ils pourraient peut-être exister…) Je suspecte que les nouvelles structures à dégager seront beaucoup plus subtiles qu'un simple paraphrase de modèles continus connus en termes discrets[2]. *Et surtout, qu'avant toute tentative de dégager des nouveaux modèles, présmés meilleurs que les anciens, il s'impose de poursuivre une réflexion philosophico-mathématique très servie sur la notion même de “modèle mathématique” de quelque aspect de la réalité – sur son rôle, son utilité, et ses limites.*

Je crains que je ne puisse guère vous en dire plus que ces commentaires généraux. S'ils pouvaient pourtant vous être utiles de quelque façon – ne serait-ce que pour vous encourager dans votre aventure solitaire – j'en serais très heureux. Avec mes meilleurs souhaits

Alexandre Grothendieck

[2]l n'est pas exclu pourtant que ce qui pouvait sembler initialement un simple exercice de “paraphrase” de notions bien connues dans un contexte conceptuel nouveau, amène, par la logique intérieure de la recherche, à des concepts totalement nouveaux et inattendus. (C'est là une chose qui n'est pas rare dans le travail de découverte des structures mathématiques.) Il faut des années de tâtonnement, sans doute, avant que des intuitions éparses finissent par s'assembler en une vision d'ensemble

GROTHENDIECK-BROWN CORRESPONDANCE

Éditée par M. Künzer (avec la collaboration de R. Brown et G. Maltsiniotis)[3]

[3] https://agrothendieck.github.io/divers/GBCorr.pdf