Gr-catégories

Hoàng Xuân Sính

Institut pédagogique n°2 de Hanoi

Département de mathématiques

Ce texte a été édité et transcrit par Mateo Carmona et David Michael Roberts

https://agrothendieck.github.io/

TABLE DE MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce travail se compose de trois chapitres. Le premier ressemble un certain nombre de définitions et résultats nécessaires pour les chapitres qui suivent sur les catégories munis d'une loi $\otimes$ qu'on peut trouver dans [2], [6], [11], [14], [15], la terminologie employée dans ce chapitre étant de Neantro Saavedra Rivano [14]. Une $\otimes$-*catégorie* est une catégorie munie d'une loi $\otimes$. Une $\otimes$-catégorie *associative* est une $\otimes$-catégorie munie d'un isomorphisme de trifoncteurs appelé *constrainte d'associativité*

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z, \quad X$$

vérifiant un condition dite *l'axiome du pentagone*. Une $\otimes$-catégorie *commutative* est une $\otimes$-catégorie munie d'un isomorphisme de bifoncteurs appelé *contrainte de commutativité*

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

vérifiant la relation

$$c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = Id_{X \otimes Y}$$

Une contrainte de commutativité est *stricte* si $c_{X,X} = Id_{X\otimes}$ pour tout X. Enfin une $\otimes$-catégorie est dite *unifier* s'il [] un objet $\underline{1}$ et des isomorphismes fonctoriels

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X$$

$$d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}$$

tels que

$$g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$$

le triple $(\underline{1}, g, d)$ constitue une *contrainte d'unité*.

Une $\otimes$*-catégorie AC* (resp. *AU*) est une $\otimes$-catégorie associative et commutative (resp. associative et unifère) vérifiant une contrainte condition de compatibilité. Une $\otimes$*-catégorie ACU* est une $\otimes$-catégorie AC et AU.

Un $\otimes$*-foncteur* d'une $\otimes$-category $\mathscr{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}'$ est un couple $(F, \breve{F})$ où F est un foncteur de $\mathscr{C} \longrightarrow cC'$ et $\breve{F}$ un isomorphisme de bifoncteurs

$$\breve{F}_{X,Y} : FX \otimes FY \longrightarrow F(X \otimes Y) \quad X, Y \in Ob(\mathscr{C})$$

Un $\otimes$*-foncteur associatif* (resp. *commutatif, unifère*) est un $\otimes$-foncteur d'une $\otimes$-catégorie associative (resp. commutative, unifère) dans une $\otimes$-catégorie associative (resp. commutative, unifère) vérifiant une condition dite condition de *compatibilité* avec les contraintes d'associativité (resp. de commutativité, d'unité). Un $\otimes$*-foncteur AC* est un $\otimes$-foncteur associatif et commutatif, un $\otimes$*-foncteur ACU* est $\otimes$-foncteur associatif, commutatif et unifère.

Pour deux $\otimes$-foncteurs $(F, \breve{F})$, $(G, \breve{G})$ d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ dans une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}'$, un $\otimes$*-morphism* de $(F, \breve{F})$ dans $(G, \breve{G})$ est un morphisme fonctoriel $X : F \longrightarrow G$ rendant commutatif le carré

[]

Le deuxième chapitre est réservé à l'étude des Gr-catégories et des Pic-catégories. Une Gr-*catégorie* est une $\otimes$-catégorie AU, dont tous les objets sont inversibles, et dont la catégorie sous-jacente est une groupoïde (i.e. toutes les flèches sont des isomorphismes). Une Gr-catégorie ressemble donc a un groupe. On tire de cette définition que si $\mathscr{P}$ est une Gr-catégorie, l'ensemble $\pi_0(\mathscr{P})$ des classes à isomorphisme près d'objets de $\mathscr{P}$, muni de la loi de composition à droite par l'opération $\otimes$, est un groupe ; le groupe $\mathrm{Aut}(\underline{1}) = \pi_1(\mathscr{P})$ est un groupe commutatif ; et pour tout $X \in Ob(\mathscr{P})$

$$\gamma_X : u \mapsto u \otimes Id_X = \mathrm{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X)$$

$$\delta_X : u \mapsto Id_X \otimes u = \mathrm{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X)$$

On attache ainsi à une Gr-catégorie $\mathscr{P}$, des groupes $\pi_0(\mathscr{P})$, $\pi_1(\mathscr{P})$ où $\pi_1(\mathscr{P})$ est commutatif. On peut définir au plus, une action de $\pi_0(\mathscr{P})$ dans $\pi_1(\mathscr{P})$ de la façon suivante : si $s \in \pi_0(\mathscr{P})$ est représenté par $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})$, et $u \in \pi_1(\mathscr{P})$ on pose

$$su = \delta_X^{-1} \gamma_X(u)$$

$\pi_1(\mathscr{P})$ en devient en $\pi_0(\mathscr{P})$-module à gauche.

Soient M un groupe, N un M-module (abélien à gauche). Un *préépinglage* de type (M,N) pour une Gr-catégorie $\mathscr{P}$ est un couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

compatibles avec les actions de M sur N, $\pi_0(\mathscr{P})$ sur $\pi_1(\mathscr{P})$. Une Gr-catégorie *préépinglage de type* (M,N) est une Gr-catégorie munie d'une préépinglage. Enfin, un *morphisme* de Gr-catégorie préépinglees de type (M,N) : $(\mathscr{P},\varepsilon) \longrightarrow (\mathscr{P}',\varepsilon')$ est un $\otimes$-foncteur associatif tel que les triangles

[]

soient commutatifs. On en déduit que tout tel morphisme est une $\otimes$-équivalence, donc l'ensemble des classes d'équivalence de Gr-catégories préépingleés de type (M,N)

SUMMARY

The purpose of these notes is to study the Gr-categories and give some applications of them. Below is a brief description of the organisation of the work.

Chapter I gives some definitions and results, which are used continually in the sequel, on $\otimes$-categories one can find in [2], [6], [11], [14], [15], the terminology employed in this chapter being of Neantro Saavedra Rivano [14]. A $\otimes$-*category* is a category $\mathscr{C}$ together with a *law* $\otimes$, i.e. a covariant bifunctor

$$\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$$

$$(X, Y) \mapsto X \otimes Y$$

An *associativity constraint* for a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ is an isomorphism of bifunctors

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z, \quad X, Y, Z \in Ob(\mathscr{C})$$

satisfying the *pentagon axiom*, i.e. all the pentagonal diagrams

[]

are commutative. A $\otimes$-category together with an associativity constraint is called a $\otimes$-*associativity category*.

A *commutativity constraint* for a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ is an isomorphism of bifunctors

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X, \quad X, Y \in Ob(\mathscr{C})$$

verifying the relation

$$c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = Id_{X \otimes Y}$$

The commutativity constraint c is said to be *strict* if $c_{X,X} = Id_{X\otimes}$ for all $X \in Ob(\mathscr{C})$. A $\otimes$-category together with a commutativity constraint is a *$\otimes$-commutative category*. A $\otimes$-commutative category is *strict* if its commutativity constraint is strict.

An *unity constraint* for a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ is a triple $(\underline{1}, g, d)$ where $\underline{1}$ is an object of $\mathscr{C}$, g and d natural isomorphisms

$$g_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{1} \otimes X, \quad d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes \underline{1}, \quad X \in Ob(\mathscr{C})$$

such that $g_{\underline{1}} = d_{\underline{1}}$. A $\otimes$-category together with an unity constraint is a *$\otimes$-unifer category*.

A $\otimes$-category $\mathscr{C}$ together with an associativity constraint a and a commutaivity constraint c is a *$\otimes$-AC category* if the *hexagonal axiom* is fulfilled, i.e. all the hexagonal diagram commutes

[]

A $\otimes$-category $\mathscr{C}$ together with a associativity constraint a and an unity contraint $(\underline{1}, g, d)$ is a *$\otimes$-AU category* if all the following triangles commute

[]

A *$\otimes$-ACU category* is a $\otimes$-AC and AU category. An object X of a $\otimes$-ACU category $\mathscr{C}$ is *invertible* if there are two objects $X', X'' \in Ob(\mathscr{C})$ such that $X' \otimes X \simeq X \otimes X'' \simeq \underline{1}$.

A *$\otimes$-functor* from a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ to a $\otimes$-category $\mathscr{C}'$ is a pair $(F, \breve{F})$ where F is a functor $\mathscr{C} \longrightarrow cC'$ and $\breve{F}$ an isomorphism of bifunctors

$$\breve{F}_{X,Y} : FX \otimes FY \longrightarrow F(X \otimes Y) \quad X, Y \in Ob(\mathscr{C})$$

A $\otimes$-functor $(F, \breve{F})$ from a $\otimes$-associative category $\mathscr{C}$ to a $\otimes$-associative category $\mathscr{C}'$ is *associative* if the following diagram commutes:

[]

where a is the associativity constraint of $\mathscr{C}$ and a' of $\mathscr{C}'$.

A $\otimes$-functor $(F, \breve{F})$ from a $\otimes$-commutative category $\mathscr{C}$ to a $\otimes$-commutative category $\mathscr{C}'$ is *commutative* if the following diagram commutes :

[]

c and c' being the commutativity constraints of $\mathscr{C}$ and $\mathscr{C}'$ respectively.

A $\otimes$-functor $(F, \breve{F})$ from a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ with an unity constraint $(\underline{1}, g, d)$ to a $\otimes$-category $\mathscr{C}'$ with an unity constraint $(\underline{1}', g', d')$ is a*$\otimes$-unifer functor* if there exists an isomorphism $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$ such that the following diagrams commute:

[]

It follows from the definition that the isomorphism $\hat{F} : \underline{1}' \xrightarrow{\sim} F\underline{1}$, it it exists, is unique.

A $\otimes$-*AC functor* is an $\otimes$-associative and commutative functor.

A $\otimes$-*ACU functor* is a $\otimes$-associative, commutative and unifer functor.

Let $(F, \breve{F})$ and $(G, \breve{G})$ be $\otimes$-functors from a $\otimes$-category $\mathscr{C}$ to a $\otimes$-category $\mathscr{C}'$. A $\otimes$-*morphism* from the $\otimes$-functor $(F, \breve{F})$ to the $\otimes$-functor $(G, \breve{G})$ is a morphism of functors $\lambda : F \longrightarrow G$ such that the following diagram commutes

[]

Chapter II is a study of Gr-categories and Pic-categories. A Gr-*category* is a $\otimes$-AU category, the objects of which are all invertible, and the base category a groupoid (i.e. all arrows are isomorphisms). Thus a Gr-category is like a group. We obtain from this definition that if $\mathscr{P}$ is a Gr-category, the set $\pi_0(\mathscr{P})$ of the classes up to isomorphism of objects of $\mathscr{P}$, together with the operation induced by the law $\otimes$ of $\mathscr{P}$, is a group; the group $\mathrm{Aut}(\underline{1}) = \pi_1(\mathscr{P})$ is a commutative group; and for all $X \in Ob(\mathscr{P})$

$$\gamma_X : u \mapsto u \otimes Id_X = \mathrm{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X)$$

$$\delta_X : u \mapsto Id_X \otimes u = \mathrm{Aut}(\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X)$$

We attribute thus to a Gr-category $\mathscr{P}$ two groups $\pi_0(\mathscr{P})$ and $\pi_1(\mathscr{P})$ where $\pi_1(\mathscr{P})$ is commutative. Furthermore we can define an action of $\pi_0(\mathscr{P})$ on $\pi_1(\mathscr{P})$ by the formula

$$su = \delta_X^{-1}\gamma_X(u)$$

for $s \in \pi_0(\mathscr{P})$ represents d by X and $u \in \pi_1(\mathscr{P})$. The commutative group $\pi_1(\mathscr{P})$ together with this action is a left $\pi_0(\mathscr{P})$-module.

Let M be a group, N a left M-module. A *preepinglage* of type (M, N) for a Gr-category $\mathscr{P}$ is a pair $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ of isomorphisms

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

compatible wit the action of M on N, $\pi_0(\mathscr{P})$ on $\pi_1(\mathscr{P})$. A Gr-category *preeplingled* of type (M, N) is a Gr-category $\mathscr{P}$ together with preepinglage. Finally, an *arrow* of Gr-categories preepingled of type (M, N) $(\mathscr{P}, \varepsilon) \longrightarrow (\mathscr{P}', \varepsilon')$ is a $\otimes$-associative functor such that the following triangles commute:

[]

It follows from this definition that a such arrow is a $\otimes$-equivalence. Thus the set of the equivalence classes of Gr-categories preepingled of type (M,N) is equal to the set of connected components of the category of Gr-categories preepingled of type (M,N).

If we consider the cohomology group $\mathrm{H}^3(M,N)$ of the group M with coefficients N (in the sense of the group cohomology [12]) we obtain a canonical bijection between the set $\mathrm{H}^3(M,N)$ and the set of the equivalence classes of Gr-categories preepingled of type (M,N).

A Pic-*category* is a Gr-category together with a commutativity constraint which is compatible with its associativity constraint, i.e. the hexagon axiom is satisfied. Thus a Pic-category is like a commutative group. We verify immediately that a necessary condition for the existence of a Pic-category structure on a Gr-category is that $\pi_0(\mathscr{P})$ must be commutative and act trivially on $\pi_1(\mathscr{P})$. A Pic-category is *strict* if its commutativity constraint is strict.

Let M, N be abelian groups. A *preepinglage* of type (M,N) for a Pic-category $\mathscr{P}$ is a pair $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ of isomorphisms

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P})$$

A Pic-category *preepingled* of type (M,N) is a Pic-category together with a preepinglage. We define the *arrow* of such objects in the same way as for Gr-categories.

For next propositions, let us consider two complexes of free abelian groups

[]

where

[]

so that $L_\bullet(M)$ is a truncated resolution of M. One obtains a canonical bijection between the set of the equivalence classes of Pic-categories preepingled of type (M,N) and the set $\mathrm{H}^2(Hom('L_\bullet(M),N))$. The exactitude of the complex $L(M)$ gives us e triviality of the classification of Pic-categories preepingled of type (M,N) which are strict, i.e. all Pic-categories preepingled of type (M,N) which are strict, are equivalent.

Finally chapter III gives us the construction of the solution of two universal problems: *problem of making objects "unity objects"* and *problem of reversing objects*.

Let $\mathscr{A}$ be a $\otimes$-AC category, $\mathscr{A}'$ another $\otimes$-AC category whose base category is a groupoid, and $(T,\breve{T}) : \mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{A}$ a $\otimes$-AC functors. We try to make the objects TA' of

$\mathscr{A}$, $A' \in Ob(\mathscr{A}')$, "unity object", i.e. we try to get:

1°) A $\otimes$-ACU category $\mathscr{P}$

2°) A $\otimes$-AC functor $(D,\breve{D}) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{P}$

3°) A $\otimes$-isomorphism

$$\lambda : (,\breve{D}) \circ (T,\breve{T}) \xrightarrow{\sim} (I_{\mathscr{P}}, \breve{I}_{\mathscr{P}})$$

where $(I_{\mathscr{P}}, \breve{I}_{\mathscr{P}})$ is the $\otimes$-constant functors $\underline{1}_{\mathscr{P}}$ from $\mathscr{A}'$ to $\mathscr{P}$. The triple $(\mathscr{P},(D,\breve{D}),\lambda))$ must be universal for triples $(\mathscr{Q},(E,\breve{E}),\mu)$ satisfying 1°, 2°, 3°.

For the description of the triple $(\mathscr{P},(D,\breve{D}),\lambda)$, we introduce a quotient category of a $\otimes$-AC category as follows:

Let $\mathscr{A}$ be a $\otimes$-AC category, Y a *multiplicative subset* of $\mathscr{A}$ (that means a subset of the set of all endomorphisms of $\mathscr{A}$ such that $Id_X \in Y$ for all $X \in Ob(\mathscr{A})$ and the tensor product of two arrows of Y belongs to Y). The *$\otimes$-AC category quotient* A^Y of $\mathscr{A}$ with respect to Y is the solution of the universal problem

$$(K,\breve{K}) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}, \quad K(u) = Id \text{ for all } u \in Y$$

where B is a $\otimes$-AC category and $(K,\breve{K})$ a $\otimes$-AC functor.

Now let us give an idea of the construction of the triple

Let $\mathscr{C}$ be a $\otimes$-ACU category, Z an arbitrary object of $\mathscr{C}$ different from the unity object $\underline{1}$, S the functor from $\mathscr{C}$ to $\mathscr{C}$ defined by

$$X \mapsto X \otimes Z.$$

The *suspension category* of the $\otimes$-ACU category $\mathscr{C}$ defined by the object Z is the triple $(\mathscr{P}, i, p)$ which solves the universal problem for triples $(\mathscr{Q}, j, q)$ where $\mathscr{Q}$ is a category, j a functor from $\mathscr{C}$ to $\mathscr{Q}$, and q an equivalence of categories from $\mathscr{Q}$ to $\mathscr{Q}$, so that the following diagram commutes

[]

up to natural isomorphism. In the case where $\mathscr{C}$ is the homotopy category of pointed topological spaces $\underline{\text{Htp}}_*$ together with the smash []

Let $\mathscr{C}'$ be the $\otimes$-stable subcategory of $\mathscr{C}$ generated by Z and $\mathscr{P}$ the $\otimes$-category of fractions of $\mathscr{C}$ with respect to $(\mathscr{C}',(F,Id))$ where $F : \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ is the inclusion functor. One obtains a functor $G : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ from the suspension category to the $\otimes$-category of fractions of $\mathscr{P}$. If G is not faithful, that is the case of the homotopy category of pointed topological spaces $\underline{\mathrm{Htp}}_*$ together with the smash $\wedge$ and the 1-sphere S^1; then it is impossible to construct in $\mathscr{P}$ a law $\otimes$ such that $\mathscr{P}$ together with this law is a $\otimes$-ACU category, iZ invertible in $\mathscr{P}$, and i embedded in a pair $(i, \breve{i})$ which is a $\otimes$-ACU functor from $\mathscr{C}$ to $\mathscr{P}$.

§ I. — $\otimes$-CATÉGORIES ET $\otimes$-FONCTEURS

1. $\otimes$-catégories

1. Définition des $\otimes$-catégories

Définition **(1)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie; un foncteur $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ est appelé une* $\otimes$-structure *sur $\mathscr{C}$, ou encore une* loi $\otimes$ *sur $\mathscr{C}$. Une* $\otimes$-catégorie *est une catégorie $\mathscr{C}$ munie d'une $\otimes$-structure qu'on note $\otimes_{\mathscr{C}}$, ou simplement $\otimes$, si aucune confusion n'est possible; a des objets X, Y de $\mathscr{C}$, on associe donc un objet $X \otimes Y$ de $\mathscr{C}$ appelé* produit tensoriel des objets *X et Y, qui dépend fonctoriellement de (X, Y), i.e. à des flèches $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$ de $\mathscr{C}$, on a une flèche $f \otimes g : X \otimes Y \longrightarrow X' \otimes Y'$ de $\mathscr{C}$ appelé* produit tensoriel des flèches *f et g, vérifiant les relations $\mathrm{Id}_X \otimes \mathrm{Id}_Y = \mathrm{Id}_{X \otimes Y'}$ $f'f \otimes g'g = (f' \otimes g')(f \otimes g)$ au cas où f, f' et g, g' sont composables.*

Définition **(2)**. — *Soit X un objet d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$. On dit que X est* régulier *si les foncteurs, définis pour les applications*

$$Y \mapsto Y \otimes X, \quad f : Y \longrightarrow Z \mapsto f \otimes \mathrm{Id}_X : Y \otimes X \longrightarrow Z \otimes X$$

et

$$Y \mapsto X \otimes Y, \quad f : Y \longrightarrow Z \mapsto \mathrm{Id}_X \otimes f : X \otimes Y \longrightarrow X \otimes Z$$

de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ sont des équivalences de catégories. On vérifie aisément que si X est régulier et si $X' \simeq X$ i.e. X' est isomorphique a X, alors X' est aussi régulier.

2. Exemples des $\otimes$-catégories

1) Soit $\mathscr{C}$ une catégorie dans laquelle le produit des couples d'objets existe. Pour tout couple (X, Y), choisissons un produit $(X \times Y, p_X, p_Y)$. On définit alors une $\otimes$-structure sur $\mathscr{C}$ en posant pour des objets X, Y

$$X \otimes Y = X \times Y,$$

pour des flèches $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$,

$$f \otimes g = f \times g.$$

On vérifie sans difficulté que, dans cette $\otimes$-catégorie, les objets réguliers sont les objets finaux.

2) Soit $\mathscr{C}$ la catégorie Mod(A) des modules sur un anneau commutatif unitaire A. Le produit tensoriel de A-modules définit une loi $\otimes$ sur $\mathscr{C}$. Ici les objets réguliers sont les A-modules projectifs de rang 1 [4].

3) Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On définit une catégorie $\mathscr{C}$ de la façon suivante: les objets de $\mathscr{C}$ sont les lacets de X localisés en x_0; si w_1, w_2 sont des lacets, $Hom_{\mathscr{C}}(w_1, w_2)$ est l'ensemble d'homotopies $w_1 \longrightarrow w_2$ modulo la relation d'homotopie. La composition des lacets définit une $\otimes$-structure sur $\mathscr{C}$. Dans cette $\otimes$-catégorie tous les objets sont réguliers.

4) Soient $\mathscr{C}$ une catégorie additive, $\mathscr{E}$ une catégorie cofibré sur $\mathscr{C}$ [10]. Pour tout objet A de $\mathscr{C}$, la fibre de $\mathscr{E}$ en A est notée $\mathscr{E}(A)$. L'homomorphisme [] dans $\mathscr{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\mathscr{E}(A) \times \mathscr{E}(A) \longrightarrow \mathscr{E}(A)$$

qui fait de $\mathscr{E}(A)$ une $\otimes$-catégorie.

5) Soient M un groupe, N un M-module abélien à gauche. On construit une catégorie $\mathscr{C}$ dont les objets sont les éléments de M, les morphismes sont des automorphismes. Pour $S \in M$, on définit

$$Aut_{\mathscr{C}}(S) = \{S\} \times N$$

La composition des flèches dans $\mathscr{C}$ provient de l'addition dans N. On définit sur $\mathscr{C}$ une loi $\otimes$ de la façon suivante: si S_1, $S_2 \in M$, on pose

$$S_1 \otimes S_2 = S_1 S_2;$$

Si (S_1, u_1), (S_2, u_2) sont des morphismes ($u_1, u_2 \in N$), on pose

$$(S_1, u_1) \otimes (S_2, u_2) = (S_1 S_2, u_1 + S_1 u_2).$$

Ici tous les objets de la $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ sont réguliers en vertu du fait que M est un groupe et l'ensemble des flèches de $\mathscr{C}$ muni de la loi $\otimes$ est aussi un groupe, à savoir le produit semi-direct $M.N$.

Dans le cas où N est un M-module abélien à droite, on définit la loi $\otimes$ dans $\mathscr{C}$ par

$$S_1 \otimes S_2 = S_1 S_2$$

$$(S_1, u_1) \otimes (S_2, u_2) = (S_1 S_2, u_1 S_2 + u_2).$$

2. Contraintes pour une loi $\otimes$

1. Contraintes d'associativité

Définition **(1)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie.* Une contrainte d'associativité *pour $\mathscr{C}$ est un isomorphisme fonctoriel a*

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z$$

*tel que pour des objets X, Y, Z, T de $\mathscr{C}$ le diagramme suivant soit commutatif (*axiome du pentagone*)*

[]

Définition **(2)**. — *On appelle* $\otimes$-catégorie associative une $\otimes$-catégorie *munie d'une contrainte d'associativité.*

Définition **(3)**. — *Deux contraintes d'associativité a et a′ d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ sont dites* cohomologues *s'il existe un automorphisme fontoriel φ du foncteur $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif*

[]

pour des objets X, Y, Z de $\mathscr{C}$.

[]

2. Contraintes de commutativité

Définition **(6)**. — *Soit $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie. Une* contrainte de commutativité *pour $\mathscr{C}$ est un isomorphisme fonctoriel c*

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

tel qu'on ait

$$c_{X,Y} \circ c_{Y,X} = \mathrm{Id}_{Y \otimes X}$$

Une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité est appelé une $\otimes$-catégorie commutative.

Définition **(7)**. — *Deux contraintes de commutativité c et c′ d'une $\otimes$-catégorie $\mathscr{C}$ sont dites* cohomologues *s'il existe une automorphisme fonctoriel φ du foncteurs $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ tel que le diagramme suivante soit commutatif*

[]

Définition **(8)**. — *Si $\mathscr{C}$ est une $\otimes$-catégorie munie d'une contrainte de commutativité c, X un objet de $\mathscr{C}$, on appelé* symétrie canonique *de $X \otimes X$ l'automorphisme*

$$c_X = c_{X,X} : X \otimes X \xrightarrow{\sim} X \otimes X.$$

On dit que la contrainte de commutativité c est stricte *si les symétries canoniques sont des identités; $\mathscr{C}$ est alors appelé une* $\otimes$-catégorie strictement commutative.

Exemple. — Dans l'exemple 5) de ($\S 1, n°2$), on vérifie aussitôt qu'il existe des contraintes de commutativité si te seulement si M est commutatif et opère trivialement sur N. Se donner une contrainte de commutativité c revient dans ce cas à se donner une fonction antisymétrique $k : M^2 \longrightarrow N$, la relation entre k et c étant

$$c_{S_1,S_2} = (S_1S_2, k(S_1,S_2)).$$

Ici le groupe des contraintes de commutativité, sous-groupe du groupe des automorphismes du foncteurs $(S_1,S_2) \mapsto S_1S_2$, est isomorphe canoniquement au groupe $\mathrm{Aut}^2(M,N)$ des fonctions antisymétriques $M^2 \longrightarrow N$. Quand on écrit la commutativité de diagramme

[ ]

Il en résulte que le groupe des classes de cohomologie de contraintes de commutativité dans ce cas s'identifie à [ ]

3. Contraintes d'unité

3. Compatibilités entre contraintes

1. Associativité et commutativité

2. Associativité et unité

3. Commutativité et unité

4. Associativité, commutativité et unité

5. Objets invertibles

4. ⊗-foncteurs

1. Définition de ⊗-foncteurs

2. Compatibilités avec des contraintes

5. ⊗-équivalences

1. Définition de ⊗-équivalences

2. Transport de structure

§ II. — Gr-CATÉGORIES ET Pic-CATÉGORIES

1. Gr-catégories

1. Définition des Gr-catégories

Définition 1. — *Une* Gr-catégorie $\mathscr{P}$ *est une* $\otimes$*-catégorie AU (Chap I, § 3, n°2, Déf 5) dont tous les objets sont inversibles (Chap I, § 3, n°5, Déf 9), et dont la catégorie sous-jacente est un groupoïde, i.e. tous les flèches sont des isomorphismes. Il résulte de la définition que tous les objets de* $\mathscr{P}$ *sont réguliers (Chap I, § 3, n°5, Déf 18).*

Proposition 1. — *Soient* $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ *des* Gr*-catégories et* $(F, \breve{F}) : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}'$ *un* $\otimes$*-foncteur associatif. Alors* $(F, \breve{F})$ *est unifère.*

Démonstration. On a aussitôt la proposition en remarquant que $F(1)$ est régulier, 1 étant l'objet unité de $\mathscr{P}$, et en appliquant la proposition 8 du (Chap I, § 4, n°2).

Proposition 2. — *Soient* $\mathscr{P}$ *une* Gr*-catégorie,* $\mathscr{P}'$ *une* $\otimes$*-catégorie AU,* 1 *et* $1'$ *les objets unités de* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *respectivement. Soit* $(F, \breve{F}) : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}'$ *une* $\otimes$*-équivalence telle qu'on ait* $F : 1 \simeq 1'$. *Alors* $\mathscr{P}'$ *est une* Gr*-catégorie.*

Démonstration. D'abord toutes les flèches de $\mathscr{P}'$ sont des isomorphismes en vertu du fait que toutes les flèches de $\mathscr{P}$ sont des isomorphismes et F est une équivalence.

Montrons maintenant que tous les objets de $\mathscr{P}'$ sont inversibles. Soit Y un objet de $\mathscr{P}'$. Puisque F est une équivalence, il existe $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})$ tel que $Y \simeq FX$, $\mathscr{P}$ est une Gr-catégorie, ses objets sont donc inversibles, pour conséquent il existe $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P})$ tel que $X' \otimes X \simeq X \otimes X' \simeq 1$ (Chap I, § 3, n° 5, Cor de la Prop 17). Vous avons

[]

Ce qui preuve bien que Y est inversible.

2. Premières invariants d'une Gr**-catégories**

Définition 2. — *Soit $\mathscr{P}$ une* Gr*-catégorie. Nous poserons par le suite:*

$$\pi_0(\mathscr{P}) = \textit{ ensemble des classes à isomorphisme près d'objets de } \mathscr{P},$$

$$\pi_1(\mathscr{P}) = \mathrm{Aut}(1).$$

$\pi_0(\mathscr{P})$ muni de la loi de composition, qu'on note multiplicativement, induite par l'opération $\otimes$, est un groupe, l'élément unite 1 étant la classe des objets isomorphes à 1. Ainsi, on revient d'attacher à une Gr-catégorie $\mathscr{P}$, des groupes $\pi_0(\mathscr{P})$, $\pi_1(\mathscr{P})$, où $\pi_1(\mathscr{P})$ est commutatif (Chap I, S2, n°3, Prop 7). La loi de composition de $\pi_1(\mathscr{P})$ est noté [] additivement.

Exemple. Soit G un groupoïde, et posons $\mathscr{P} = (G)$. Alors $\mathscr{P}$ est de façon naturelle une Gr-catégorie, la loi $\otimes$ étant donnée par la composition des foncteurs. On pourrait appeler $\pi_0(\mathscr{P})$ le groupe des *automorphismes extérieures* de G, et $\pi_1(\mathscr{P})$ le centre de G.

On a les propositions suivantes pour une Gr-catégorie $\mathscr{P}$.

Proposition 3. — *Les homomorphismes γ_X et δ_X définis dans (Chap I, §2, n°3, Prop. 8) sont des isomorphismes.*

Démonstration. Résultat immédiat de ce que X est régulier.

Proposition 4. — *Soit $\mathscr{Q}$ une composante connexe de $\mathscr{P}$. Les applications*

(1) $$\mathrm{Aut}(1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathscr{Q}})$$

$$u \mapsto (\gamma_X u)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{Q})}$$

et

(1) $$\mathrm{Aut}(1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Id}_{\mathscr{Q}})$$

$$u \mapsto (\delta_X u)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Q})}$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. []

3. Structure des Gr**-catégories**

Définition 3. — *Soient $\mathcal{P}$ une* Gr*-catégorie, $(a,(1,g,d))$ la contrainte AU de $\mathcal{P}$, $\pi_0(\mathcal{P})$ et $\pi_1(\mathcal{P})$ les groupes attachés a $\mathcal{P}$ dans (n°2, Déf. 2). On construit une catégorie dont les objets sont les éléments de $\pi_0(\mathcal{P})$, les morphismes sont des automorphismes. On pose pour chaque $s \in \pi_0(\mathcal{P})$*

$$\mathrm{Aut}(s) = \{s\} \times \pi_1(\mathcal{P})$$

la composition des flèches étant l'addition de $\pi_1(\mathcal{P})$. Pour chaque classe $s = cl X \in \pi_0(\mathcal{P})$, on choisit une représentant noté X_s; et pour chaque $X \in s$, on choisit une isomorphisme $i_X : X_s \xrightarrow{\sim} X$, tel que

$$i_{X_s} = \mathrm{Id}_{X_s}.$$

[]

Définition 6. — *Soit M un groupe, N un M-module abélien à gauche. Un* préépinglage de type (M,N) *pour une* Gr*-catégorie $\mathcal{P}$ est une couple $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ d'isomorphismes*

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathcal{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{P})$$

compatibles avec les actions de M sur N et de $\pi_0(\mathcal{P})$ []

2. Pic-catégories

1. Définition des Pic-catégories

Définition 1. — *Une* Pic-catégorie *est une* Gr*-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité. Une* Pic*-catégorie est dite* stricte *si sa contrainte de commutativité est stricte (Chap I, §2, n°2, Déf. 8).*

Exemples.

[]

2. Structure des Pic-catégories

Définition 2. — *Soient M, N des groupes abéliens. Un* préépinglage de type (M,N) *pour une* Pic-*catégorie* $\mathscr{P}$ *est un couple* $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ *d'isomorphismes*

$$\varepsilon_0 : M \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathscr{P}), \quad \varepsilon_1 : N \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathscr{P}).$$

Une Pic-*catégorie préépinglé de type* (M,N) est une Pic-catégorie munie d'un préépinglage.
[]

§ III. — Pic-ENVELOPPE D'UNE ⊗-CATÉGORIE ACU

Dans ce chapitre nous nous occuperons de deux problèmes universels, celui de rendre des objets "objets unité" et celui d'inversion des objets.

1. Le problème de rendre des objets "objets unité"

Pour pouvoir résoudre le problème, occupons-nous de problème suivant.

1. Le problème de rendre des endomorphismes des identité

Proposition 1. — *Soient* $\mathscr{A}$ *une catégorie,* φ *une partie de* $\mathrm{Fl}(A)$

Démonstration. Soient A, B des objets de

2. Le problème de rendre des objets "objets unité"

Tout d'abord, introduisons un ⊗-foncteur

2. Le problème d'inverses des objets

1. Construction de la ⊗-catégorie des fractions d'une ⊗-catégorie ACU

Dans tout ce n°, $\mathscr{C}$ est une ⊗-catégorie munie d'une constrainte

2. Pic-enveloppe d'une ⊗-catégorie ACU

3. Applications

1. Groupe de Grothendieck et groupe de Whitehead

R étant un anneau constante, on rappelle les définitions suivantes [1].

2. Catégorie de suspension

Soient $\mathscr{C}$ une $\otimes$-catégorie ACU,

APPENDICE

Nous donnons un résumé de quelques résultats sur les Gr-catégories, faisant l'objet d'un travail détaillé

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS, H — *K-theory and stable algebra*. Publ. maths de L'IHES, n°22

[2] BÉNABOU, J — *Thèse*, Paris 1966

[3] BOURBAKI, N — *Théorie des ensembles*

[4] — *Algèbre commutative*

[5] — *Algèbre multilinéaire*

[6] DELIGNE, P — *Champs de Picard strictement commutatifs*, SGA 4 XVIII

[7] EILENBERG, S ET KELLY, G M — *Closed category*, Proceedings of the conference on categorical algebra (421.561). Springer Verlag 1965

[8] FREYD, P — *Stable homotopy*, Proceedings of the conferece on categorical agebra (121.176). Springer Verlag 1965

[9] GROTHENDIECK, A — *Biextensions de faisceaux de groupes*, SGA 7, VII

[10] — *Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif*, Lecture notes in mathematics n°79. Springer Verlag 1968

[11] MACLANE, S — *Categorical algebra*, Bull. Amer. Mat. Soc. 71 (1965)

[12] — *Homology*, Springer Verlag 1967

[13] MITCHELL, B — *Theory of categories*, Academic Press 1965

[14] NEANTRO SAAVEDRA RIVANO — *Thèse*, Paris (1970?)

[15] — *Catégories tannakiennes*, Lecture notes in mathematics n°265. Springer Verlag 1972

[16] SPANIER, E — *Algebraic topology*, McGraw-Hill, 1966