

Metoda Elementów Skończonych:

Sprawozdanie z projektu

Wstęp teoretyczny

Metoda Elementów Skończonych to podstawowe narzędzie inżynierskie służące do rozwiązywania zadań obliczeniowych. Główną ideą MES jest zamiana dowolnej wielkości ciągłej (w przypadku niniejszego projektu - temperatury) na jej model dyskretny, oparty na ograniczonej liczbie węzłów definiujących ograniczoną liczbę elementów skończonych.

Algorytm MES użyty w projekcie

1. Podział siatki (klasa Grid) na elementy skończone (klasa Elmnt), z których każdy posiada 4 węzły (klasa Node). Jest to tak zwana *dyskretyzacja*.
2. Przydzielenie funkcji kształtu (klasa ShapeFunctions) zapewniających ciągłość szukanej wartości na granicach elementów.
3. Dobór wartości temperatury dla poszczególnych węzłów za pomocą minimalizacji funkcjonału, który odpowiada równaniu Fouriera. Dokonuje się tego za pomocą układu równań algebraicznych, których liczba równa jest liczbie niewiadomych temperatur, a co za tym idzie - liczbie węzłów.

$$\operatorname{div}(k(t)\operatorname{grad}(t)) + Q = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau},$$

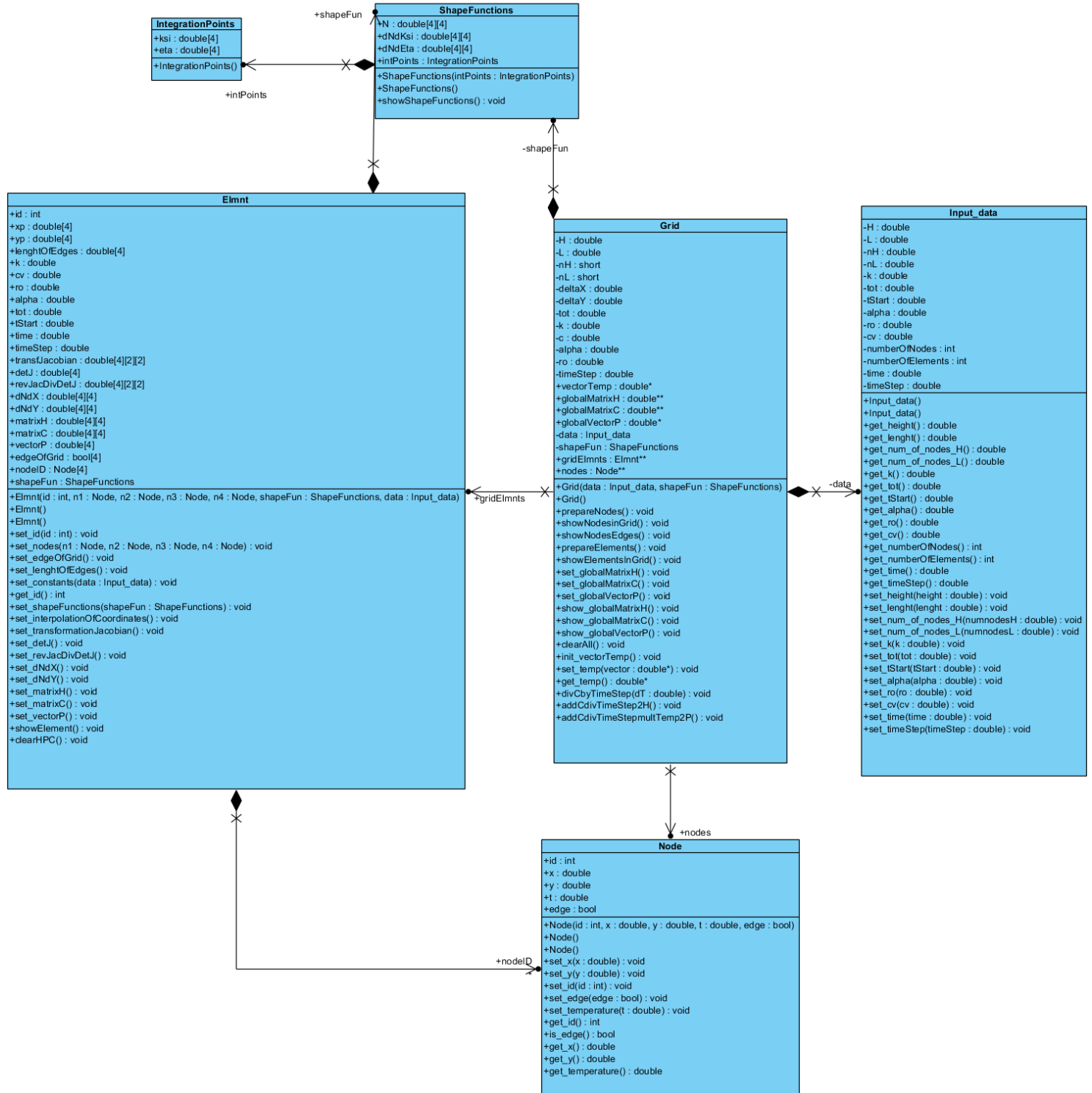
rys.1: równanie Fouriera dla procesu nieustalonego.

Realizacja projektu

Do realizacji projektu wybrałam język C++ oraz środowisko Microsoft Visual Studio 2017.

Strukturę programu przedstawia diagram klas.

Visual Paradigm Standard (Agata Grzanka/AGH University of Science and Technology)



rys.2: diagram klas projektu MES

klasa *Input_data*:

odpowiedzialna za pobranie danych wejściowych (początkowych).

Projekt testowany był dla następujących danych wejściowych:

Test case 2d transient solution - initial data

- 100 – initial temperature
- 500 – simulation time [s],
- 50 – simulation step time [s],
- 1200 – ambient temperature [C],
- 300 – alfa [W/m²K],
- 0.100 – H [m],
- 0.100 – B [m],
- 4 – N_H,
- 4 – N_B,
- 700 – specific heat [J/(kg°C)],
- 25 – conductivity [W/(m°C)],
- 7800 – density [kg/m³].

rys.3: test case

klasa *IntegrationPoints*:

przechowuje współrzędne lokalne (ksi, eta) punktów całkowania.

klasa *ShapeFunctions*:

przechowuje funkcje kształtu dla poszczególnych węzłów (we współrzędnych lokalnych).

klasa *Node*:

reprezentuje pojedynczy węzeł.

Przechowuje:

- indywidualne ID węzła,
- informację, czy węzeł znajduje się na krawędzi siatki,
- informacje o współrzędnych globalnych węzła,
- informację o temperaturze w danym węźle.

klasa *Elmnt*:

reprezentuje pojedynczy element siatki.

Przechowuje:

- indywidualne ID elementu,
- informacje o stałych użytych do obliczeń (temperatura otoczenia (tot), współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła (alpha), pojemność cieplna właściwa (cv), współczynnik przewodzenia ciepła (k), gęstość masy (ro), temperatura początkowa (tStart), czas procesu (time), krok czasowy (timeStep)),
- tablicę 4 węzłów, które tworzą dany element (nodeID[]),
- informację, czy dany element znajduje się na krawędzi siatki (aby określić, czy konieczne jest uwzględnianie warunków brzegowych),
- informację o długości poszczególnych krawędzi,
- funkcje kształtu,
- interpolację współrzędnych (zamianę współrzędnych lokalnych na globalne i vice versa),
- macierz Jacobiego (macierz przekształcenia) (transfJacobian) tablica 3D, pierwszy wymiar odpowiada punktowi całkowania, drugi - współrzędnym lokalnym, trzeci - współrzędnym globalnym,
- wyznacznik macierzy Jacobiego - tablica detJ[4], każdy element tablicy odpowiada jednemu punktowi całkowania,

- macierz odwrotną do macierzy Jacobiego podzieloną przez jej wyznacznik (revJacDivDetJ),
- pochodne funkcji kształtu po współrzędnych globalnych,
- macierz H:

$$[H] = \int_V k(t) \left(\left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T \right) dV$$

rys.4: użyty w projekcie wzór macierzy H

całkowanie macierzy H następuje przy użyciu pochodnych funkcji kształtu, a także wyznaczników macierzy Jacobiego dla każdego z 4 punktów całkowania (suma).

W przypadku, gdy element znajduje się na krawędzi siatki, do macierzy H dodawane są warunki brzegowe (boundaryConditions)

$$+ \int_S \alpha \{N\} \{N\}^T dS,$$

rys.5: wzór na warunki brzegowe dodawane do macierzy H

- macierz C:

$$[C] = \int_V c \rho \{N\} \{N\}^T dV$$

rys.6: wzór na macierz C

całkowanie macierzy C za pomocą sumy $\{N\} \{N\}^T \cdot \text{detJ} \cdot \text{cv} \cdot \text{ro}$ dla wszystkich 4 punktów całkowania.

- wektor P:

$$\{P\} = - \int_S \alpha \{N\} t_\infty dS - \int_V Q \{N\} dV + \int_S q \{N\} dS$$

rys.7: wzór na wektor P

Klasa Grid:

reprezentuje całą siatkę elementów.

Przechowuje:

- dane z Input_data,
- rozmiar poszczególnych elementów (deltaX, deltaY),
- wektor temperatur (przechowujący temperatury ze wszystkich węzłów w siatce),
- funkcję pozwalającą na aktualizację temperatur w poszczególnych węzłach,
- globalną macierz H - macierz odpowiadającą wielkością ilości wszystkich węzłów w siatce, będącą złożeniem wszystkich lokalnych macierzy H (z każdego elementu). Powstaje w wyniku *agregacji*.
- globalną macierz C - macierz odpowiadającą wielkością ilości wszystkich węzłów w siatce, będącą złożeniem wszystkich lokalnych macierzy C (z każdego elementu). Powstaje w wyniku *agregacji*.
- globalny wektor P - wektor odpowiadający wielkością ilości wszystkich węzłów w siatce, będący złożeniem wszystkich lokalnych wektorów P (z każdego elementu). Powstaje w wyniku *agregacji*.

main:

w mainie tworzona jest siatka (na podstawie danych wejściowych).

Liczba iteracji odpowiada ilości pomiarów (time/timeStep) w czasie procesu.

Po każdym kroku czasowym aktualizowane są globalne macierze H, C, globalny wektor P oraz, co najważniejsze - wektor temperatur. Wektor temperatur aktualizowany jest na podstawie wyników po rozwiązaniu układu równań (metoda Gaussa).

$$[H]\{t\} + [C]\frac{\partial}{\partial \tau}\{t\} + \{P\} = 0,$$

rys.8: układ równań

Na podstawie otrzymanego wektora temperatur aktualizowane są następnie temperatury w poszczególnych węzłach siatki.

Analiza działania programu

dane początkowe:

```
iterations: 10
H: 0.1  L: 0.1
nH: 4  nL: 4
wspolczynnik k: 25alfa: 300
gestosc: 7800cieplo wlasciwe: 700
temperatura otoczenia: 1200
temperatura poczatkowa: 100
czas: 500
krok czasowy: 50

liczba wezlow w siatce: 16
liczba elementow w siatce: 9
delta X: 0.0333333
deltaY: 0.0333333
3 temp: 100    7 temp: 100    11 temp: 100   15 temp: 100
2 temp: 100    6 temp: 100    10 temp: 100   14 temp: 100
1 temp: 100    5 temp: 100    9 temp: 100    13 temp: 100
0 temp: 100    4 temp: 100    8 temp: 100    12 temp: 100
```

elementy w siatce:

```
Interpolation of coordinates in 0 element:
xp 0: 0.00704416      yp 0: 0.00704416
xp 1: 0.0262892      yp 1: 0.00704416
xp 2: 0.0262892      yp 2: 0.0262892
xp 3: 0.00704416      yp 3: 0.0262892

EDGES:
1      0      0      1
Interpolation of coordinates in 1 element:
xp 0: 0.00704416      yp 0: 0.0403775
xp 1: 0.0262892      yp 1: 0.0403775
xp 2: 0.0262892      yp 2: 0.0596225
xp 3: 0.00704416      yp 3: 0.0596225

EDGES:
0      0      0      1
Interpolation of coordinates in 2 element:
xp 0: 0.00704416      yp 0: 0.0737108
xp 1: 0.0262892      yp 1: 0.0737108
xp 2: 0.0262892      yp 2: 0.0929558
xp 3: 0.00704416      yp 3: 0.0929558

EDGES:
0      0      1      1
Interpolation of coordinates in 3 element:
xp 0: 0.0403775      yp 0: 0.00704416
xp 1: 0.0596225      yp 1: 0.00704416
xp 2: 0.0596225      yp 2: 0.0262892
xp 3: 0.0403775      yp 3: 0.0262892

EDGES:
1      0      0      0
Interpolation of coordinates in 4 element:
xp 0: 0.0403775      yp 0: 0.0403775
xp 1: 0.0596225      yp 1: 0.0403775
xp 2: 0.0596225      yp 2: 0.0596225
xp 3: 0.0403775      yp 3: 0.0596225
```

```

EDGES:
0      0      0      0
Interpolation of coordinates in 5 element:
xp 0: 0.0403775      yp 0: 0.0737108
xp 1: 0.0596225      yp 1: 0.0737108
xp 2: 0.0596225      yp 2: 0.0929558
xp 3: 0.0403775      yp 3: 0.0929558

```

```

EDGES:
0      0      1      0
Interpolation of coordinates in 6 element:
xp 0: 0.0737108      yp 0: 0.00704416
xp 1: 0.0929558      yp 1: 0.00704416
xp 2: 0.0929558      yp 2: 0.0262892
xp 3: 0.0737108      yp 3: 0.0262892

```

```

EDGES:
1      1      0      0
Interpolation of coordinates in 7 element:
xp 0: 0.0737108      yp 0: 0.0403775
xp 1: 0.0929558      yp 1: 0.0403775
xp 2: 0.0929558      yp 2: 0.0596225
xp 3: 0.0737108      yp 3: 0.0596225

```

```

EDGES:
0      1      0      0
Interpolation of coordinates in 8 element:
xp 0: 0.0737108      yp 0: 0.0737108
xp 1: 0.0929558      yp 1: 0.0737108
xp 2: 0.0929558      yp 2: 0.0929558
xp 3: 0.0737108      yp 3: 0.0929558

```

```

EDGES:
0      1      1      0

```

wektor $\{P\} = \{P\} + \{[C]/dT\} * \{T0\}$ dla zerowej iteracji:

```

{P}+{[C]/dT}*{T0}
15033.3 18066.7 18066.7 15033.3 18066.7 12133.3 12133.3 18066.7 18066.7 12133.3
12133.3 18066.7 15033.3 18066.7 18066.7 15033.3

```

dane z test case:

```

_____ Vector ({P}+{[C]/dT}*{T0})
15033.3 18066.7 18066.7 15033.3 18066.7 12133.3 12133.3 18066.7 18066.7 12133.3 12133.3 18066.7 15033.3 18066.7 15033.350

```


[H]+[C]/dT									
36.8148	4.24074	0	0	4.24074	-4.96296	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0			
4.24074	66.963	4.24074	0	-4.96296	5.14815	-4.96296		0	
0	0	0	0	0	0	0			
0	4.24074	66.963	4.24074	0	-4.96296	5.14815	-4.96296		
0	0	0	0	0	0	0			
0	0	4.24074	36.8148	0	0	-4.96296	4.24074	0	
0	0	0	0	0	0	0			
4.24074	-4.96296	0	0	0	66.963	5.14815	0	0	4.24074
-4.96296	0	0	0	0	0	0			
-4.96296	5.14815	-4.96296	0	0	5.14815	120.593	5.14815	0	
-4.96296	5.14815	-4.96296	0	0	0	0	0	0	
0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	5.14815	120.593	5.14815		
0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	0	0	0		
0	0	-4.96296	4.24074	0	0	5.14815	66.963	0	
0	-4.96296	4.24074	0	0	0	0			
0	0	0	4.24074	-4.96296	0	0	0	66.963	
5.14815	0	4.24074	-4.96296	0	0				
0	0	0	-4.96296	5.14815	-4.96296			0	
5.14815	120.593	5.14815	-4.96296	5.14815	-4.96296			0	
0	0	0	0	-4.96296	5.14815	-4.96296			
0	5.14815	120.593	5.14815	-4.96296	5.14815	-4.96296			
0	0	0	0	0	-4.96296	4.24074	0		
0	5.14815	66.963	0	0	-4.96296	4.24074			
0	0	0	0	0	0	0	4.24074	-4.96296	
0	0	0	36.8148	4.24074	0	0			
0	0	0	0	0	0	0	-4.96296		
5.14815	-4.96296	0	4.24074	66.963	4.24074	0			
0	0	0	0	0	0	0	0	-4.96296	
0	5.14815	-4.96296	0	4.24074	66.963	4.24074			
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
-4.96296	4.24074	0	0	4.24074	36.8148				

```

Iteration 0
Matrix ([H]+[C])/dT
36.8148 4.24074 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4.24074 66.963 4.24074 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0
0 4.24074 66.963 4.24074 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0
0 0 4.24074 36.8148 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 0 0 0 0 0
4.24074 -4.96296 0 0 66.963 5.14815 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 0 0 0
-4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0
0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0
0 0 -4.96296 4.24074 0 0 5.14815 66.963 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 0
0 0 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 66.963 5.14815 0 0 4.24074 -4.96296 0
0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296
0 0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296
0 0 0 0 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 5.14815 66.963 0 0 -4.96296 4.24074
0 0 0 0 0 0 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 36.8148 4.24074 0
0 0 0 0 0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 4.24074 66.963 4.24074
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 4.24074 66.963 4.24074
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 4.24074 36.8148

```


wyniki:

RESULT:		
iteration number: 0	Temp min: 100	Temp max: 100
iteration number: 1	Temp min: 110.038	Temp max: 365.815
iteration number: 2	Temp min: 168.837	Temp max: 502.592
iteration number: 3	Temp min: 242.801	Temp max: 587.373
iteration number: 4	Temp min: 318.615	Temp max: 649.387
iteration number: 5	Temp min: 391.256	Temp max: 700.068
iteration number: 6	Temp min: 459.037	Temp max: 744.063
iteration number: 7	Temp min: 521.586	Temp max: 783.383
iteration number: 8	Temp min: 579.034	Temp max: 818.992
iteration number: 9	Temp min: 631.689	Temp max: 851.431
iteration number: 10	Temp min: 679.908	Temp max: 881.058

dane z test case:

Max and min temperature in each step

Time[s]	MinTemp[s]	MaxTemp[s]
50	110.038	365.815
100	168.837	502.592
150	242.801	587.373
200	318.615	649.387
250	391.256	700.068
300	459.037	744.063
350	521.586	783.383
400	579.034	818.992
450	631.689	851.431
500	679.908	881.058

Wnioski

Zastosowane rozwiązanie pozwoliło na poprawne zrealizowanie zadania. Program oblicza temperaturę w siatce z odpowiednią dokładnością.