MÉTODOS NÚMERICOS

Método de Trapecio

3°er parcial

Coach: Sergio Castillo

Andrés Gutiérrez Franco - 747425

Monterrey, Nuevo León

20 de Julio de 2025

Metodo del Trapecio.

Es una técnica de integración númerica utilizada para aproximar el valor de una integral definida. Consiste en dividir el área bajo una curva en trapecios en lugar de rectangulos.

Antecedentes y relación con otros metodos.

Es una de las técnicas más antiguas y forma parte de las fórmulas de Newton-Cortes.

- Metodo de Simpson: es más preciso porque aproxima la función con segmentos parabólicos en lugar de lineas rectas.

Fórmula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right]$$

Algoritmo.

Entrada:

Función $f(x)$ a integrar.
Limites de integración a y b
Número de sub intervalos n.

Proseso:

calcular $h = \frac{b-a}{n}$

Inicializar la suma $S = f(a)+f(b)$
Para $i=1$ hasta $n-1$:
calcular $x_i = a+i\cdot h$
sumar $2\cdot f(x_i)$ a S
calcular la aproximación de la integral: $I = \frac{h}{2}\cdot S$

Salida:

Valor aproximado de integral I.

Uso en la vida cotidiana (ITC)

- Procesamiento de señales
- Simulación de sistema fisico
- Machine Learning
- Analisis de datos

Ejemplo. Calcular la integral

define la Función $f(x) = \frac{x}{x^4+1}$

en el intervalo $(1,3)$

$$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1}\,dx$$

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx \qquad u = x^4+1 \qquad du = 4x^3\,dx \qquad \frac{du}{4x^2} = dx$$

$$\int \frac{x}{4}\frac{du}{4x^2}$$

$$= \int \frac{du}{4x^2 u}$$

$a = 1$
$b = 3$
$n = 1$

$f(x) = \frac{x}{x^4+1}$

$$f(x) = f(1) = \frac{(1)}{(1)^4+1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f(b) = f(3) = \frac{(3)}{(3)^4+1} = \frac{3}{82} = 0.0365$$

Trapecio simple

$$\int_a^b f(x)\,dx = [b-a]\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

$$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1}\,dx = \cancel{[3-1]}\left[\frac{0.5+0.0365}{\cancel{2}}\right] = 0.5365$$

Trapecio compuesto

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots 2f(x_n) + f(x_n)\right]$$

$a = x_0 = 1$

$b = x_8 = 3$

$n = 8$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{8} = \frac{2}{8} = 0.25$$

$x_0 = 1$
$x_1 = 1.25$
$x_2 = 1.50$
$x_3 = 1.75$
$x_4 = 2$
$x_5 = 2.25$
$x_6 = 2.50$
$x_7 = 2.75$
$x_8 = 3$

$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{(1)^4+1} = \frac{1}{2} = 0.5$

$f(x_1) = f(1.25)\ \frac{1.25}{(1.25)^4+1} = 0.3632$

$f(x_2) = f(1.50) = \frac{1.50}{(1.50)^4+1} = 0.2474$

$f(x_3) = f(1.75) = \frac{1.75}{(1.75)^4+1} = 0.1686$

$f(x_4) = f(2) = \frac{2}{(2)^4+1} = 0.1176$

$f(x_5) = f(2.25) = \frac{2.25}{(2.25)^4+1} = 0.844$

$f(x_6) = f(2.50) = \frac{2.50}{(2.50)^4+1} = 0.0624$

$f(x_7) = f(2.75) = \frac{2.75}{(2.75)^4+1} = 0.0472$

$f(x_8) = f(3) = \frac{3}{(3)^4+1} = 0.0365$

$$\int_1^3 \frac{x}{x^4+1}\,dx \approx$$

$$\approx \left[\frac{0.25}{2}\right]\left[0.5 + 2(0.3632) + 2(0.2474) + 2(0.1686) + 2(0.1176) + 2(0.844) + 2(0.0624) + 2(0.0472) + 2(0.0365)\right]$$

$$\approx [0.125]\,[2.7181]$$

$$\approx 0.3397$$