Reporte Método Interpolación de Lagrange

2° parcial

Coach: Sergio Castillo

Andrés Gutiérrez Franco - 747425

Monterrey, Nuevo León

29 de junio de 2025

Método Interpolación de Lagrange

Es un algoritmo usado para encontrar un polinomio que pase exactamente por un conjunto dado de puntos (x_i, y_i), donde x_i son valores distintos.

Antecedentes y relación con otros métodos

Desarrollado por Joseph-Louis en el siglo XVIII como parte de sus trabajos en análisis matemático.

Interpolación de Newton: Ambos generan el mismo polinomio interpolado, pero el método de Newton es más eficiente computacionalmente.

Fórmula matemática

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Algoritmo

Entradas: Un conjunto n puntos (x_i, y_i)

Salidas: El polinomio interpolador en forma explícita o evaluado en un punto x.

1- Inicialización
Leer los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots (x_n, y_n)$
Verificar que todos los puntos sean distintos.
2- Construcción de los polinomios base $L_i(x)$
Para cada i desde 0 hasta n.
3- Combinación lineal para $P(x)$
Sumar los términos $y_i \cdot L_i(x)$ para obtener: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x)$

Aplicación en la vida cotidiana (JTC)

Graficación por computadora: Para generar trayectorias suaves en animación
Procesamiento de señales: Reconstrucción de señales discretas muestreadas
Machine Learning: En algoritmos de aproximación de funciones cuando se requieren predicciones exactas

Metodo interpolación

$$\left.\begin{matrix}(0,1)\\(1,3)\\(2,0)\end{matrix}\right\}$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i)\, L_i(x)$$

donde

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$i = 0, 1, 2 \ldots n-1$
$j = 0, 1, 2 \ldots n-1$

$n = 3$
$i = 0, 1, 2$
$j = 0, 1, 2$

$(0,1)$, $(1,3)$, $(2,0)$
$x_0\ y_0$, $x\ y$, $x\ y$

$$\boxed{\begin{matrix}x_0 = 0\\ x_1 = 1\\ x_2 = 2\end{matrix}\left\{\begin{matrix}f(x) = 1\\ f(x_1) = 3\\ f(x_2) = 0\end{matrix}\right.}$$

$y_0 = f(x_0)$

$y_1 = f(x_1)$

$y_2 = f(x_2)$

Iteración 1

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot \frac{(x_1 - x_2)}{(x_0 - x_2)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)}{(0-1)} \cdot \frac{(x-2)}{(0-2)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_0(x) = \frac{x^2 - x - 2x + 2}{2}$$

$$L_0(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

Iteración 2

$i = 1,\ j = 0, 2$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)}{(1-0)} \cdot \frac{(x-2)}{(1-2)}$$

$$L_1(x) = \frac{x(x-2)}{-1}$$

$$\boxed{L_1(x) = -x^2 + 2x}$$

Iteración 3

$i = 2\ ;\ j = 0, 1$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\boxed{L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)}$$

Construir el polimomio

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\, L_i(x)$$

$$P(x) = f(x_0)\, L_0(x) + f(x_1) + \cancel{f(x_2)}\, L_2(x)$$

$$P(x) = 1\left[\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)\right] + (3)(x^2 + 3x) + 0$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 - 3x^2 + 6x$$

$$P(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

x	P(x)
-3	-38
-2	-18
-1	-6
0	1
1	3
2	0
3	-6