1- Entropía histórica:

La entropía es una medida de la distribución de la energía en un sistema dado. Por lo tanto, esta es una propiedad intrínseca de la materia que tiende a incrementarse, es decir, que la energía tiende a dispersarse cada vez más.

Esta definición de entropía tiene utilidad para el estudio de las propiedades de máquinas térmicas y a vapor. Por ejemplo, si en un sistema aislado se deja caer un un objeto a determinada altura sobre una placa, parte de su energía potencial inicial se convierte en calor en el impacto final, lo que provoca una degradación menos eficaz. El estudio de esta propiedad se puede aplicar para centrales de vapor y motores de combustión interna, para analizar de forma cuantitativa el grado de degradación de la energía en dichos dispositivos.

2- Entropía-microestados:

La entropía es una función de distribución, función que describe la probabilidad de que un factor aleatorio adquiera un valor menor o igual a un número dado. Esta define el macroestado que la materia adquiere en función de la mayor cantidad de microestados existentes.

Matemáticamente la entropía se calcula con la siguiente ecuación:

$$S = k \ln W$$

Donde S representa la entropía, k la constante de Boltzmann, con un valor de $1{,}3805\times10^{-23}$ J/K y W es el número de microestados posibles de las partículas elementales del sistema.

Por ejemplo, si se tiene un conjunto de cuatro casillas, en donde cada una de estas tiene la capacidad de contener una pelota y se divide este conjunto en dos (cada mitad tiene dos casillas). Si se coloca en este conjunto dos pelotas de todas las maneras posibles. Se observa que hay seis formas de ordenarlas (microestados) distintas, que corresponden a tres estados (macroestados) diferentes:
1. Las pelotas están en la mitad derecha.
2. Las pelotas están en la mitad izquierda.
3. Hay una pelota en cada mitad.
El primer macroestado tiene solo un microestado compatible, el segundo posee de igual forma un microestado; no obstante, el tercer macroestado tiene cuatro microestados diferentes, por lo tanto, este tiene mayor probabilidad termodinámica de ocurrir.

La entropía es una medida de la incertidumbre o de la cantidad de información promedio que contiene una variable. Su relación con la dimensionalidad varía drásticamente entre el espacio discreto (Se refiere a una variable con un número finito de resultados posibles)y el espacio vectorial continuo (Se refiere a variables que toman valores en $\mathbb{R}^d$).

Teoría de la información:

En su artículo ‘A mathematical theory of communication’ (Shannon 1948), Shannon introdujo los lineamientos fundamentales sobre los que se construiría posteriormente la Teoría de la Información. La información no se mide por la cantidad de palabras o datos, sino por la sorpresa. Un mensaje totalmente predecible, como un pronóstico soleado para un desierto, aporta poca o ninguna información nueva. En cambio, un resultado inesperado, como que una moneda perfectamente equilibrada caiga en cara 100 veces seguidas, contendría una sorpresa enorme y, por tanto, muchísima información. La entropía de Shannon es la forma matemática de cuantificar esta incertidumbre promedio en una fuente de mensajes, como los píxeles de una imagen o las letras de un idioma.
Según Shannon, un sistema de comunicación consta de las siguientes partes: una fuente, la cual genera un mensaje a ser recibido en el destinatario. Un transmisor, que transforma el mensaje generado en la fuente en una señal a ser transmitida. En los casos en los que la información es codificada, el proceso de codificación también es implementado por el transmisor. Un canal es cualquier medio que sirva para que la señal se transmita desde el transmisor al receptor. Este puede ser un cable de cobre, fibra óptica o una señal inalámbrica.

Otro aspecto importante de esta teoría es el concepto de bit. Un bit es la unidad mínima de información que puede tomar valores booleanos (0 o 1). Para organizar información siempre se busca utilizar la menor cantidad de bits posibles, esto se determina mediante un sistema de codificación inteligente que permita establecer que tanto se puede comprimir la información sin perder datos (como el código Huffman) el cual asigna códigos más cortos a datos más frecuentes. En este orden de ideas podemos definir la entropía como la medida directa de la cantidad de bits necesarios para codificar la información de una variable.

Un ejemplo es un dado, el cual tiene una probabilidad de ⅙ de caer en 3, pero si el dado está cargado y el 80% de las veces cae 3, los resultados son menos sorpresivos y por ende hay menos entropía. Del mismo modo para almacenar esta información se requerirá menos bits que para los demás números de dicho dado, dando así un código más largo.

Entropia de Shannon:

Mide el nivel promedio de incertidumbre o sorpresa presente en los posibles resultados de una variable aleatoria. Cuanto más impredecible sea un evento, mayor será su entropía.Se mide comúnmente en bits y es crucial para la compresión de datos y la comunicación.

$$H(X) = -\sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x)$$

Donde:

- Logaritmo en base 2 para unidades en bits (puede también ser en base e para nats)
- P(x) es la probabilidad del evento
- H(X) es la entropía de la variable X

Ejercicios:
Para una moneda justa la probabilidad de sacar cara o cruz es ½ por lo tanto su entropia seria de:

$$H(X) = -\left[\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}\right] = 1$$

significa que cada lanzamiento lleva un bit de información y su entropía es baja

Para un dado justo la probabilidad de sacar un numero en especifico es de ⅙ por lo tanto su entropía se define como:

$$H(X) = -\left[\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}\right] = 2{,}5849$$

significa que cada lanzamiento tiene 2,5849 bits de información y su entropía es mayor al de el lanzamiento de una moneda por lo que tiene más incertidumbre

Entrelazamiento de información:

Para los sistemas macroscópicos las bases termodinámicas como lo son la temperatura y la entropía estan bien definidas, pero en un sistema mesoscópico no siempre es el caso. Un sistema mesoscópico es aquel que está en un punto medio entre micro y macroscópico.

La entropía de Von Neumann es la extensión natural del concepto de entropía al dominio de la mecánica cuántica. Mientras que la entropía de Shannon mide la información en variables clásicas (como bits 0 o 1), la de Von Neumann mide la información contenida en un estado cuántico, el cual puede estar en superposición (ser 0 y 1 a la vez) o "entrelazado" con otros estados.

En esencia, cuantifica la incertidumbre de un sistema cuántico, es decir que tanto ha interactuado con su entorno. Un sistema cuántico puro y perfectamente conocido tiene una entropía de Von Neumann de cero. En cambio, si el sistema está mezclado (no sabemos exactamente en qué estado está) o se ha entrelazado y perdido coherencia por interactuar con su entorno, su entropía de Von Neumann aumenta. Su utilidad no es describir calor o temperatura, sino medir la cantidad de información cuántica en un sistema o cuantificar el grado de entrelazamiento entre sus partes.

Mientras que la entropía de Shannon mide el contenido de información (más sorpresa = más información potencial), la entropía de Von Neumann mide la pureza y coherencia del estado cuántico.

Si una entropía de Von Neumann es baja indica un estado cuántico puro y bien definido. Es el estado ideal para realizar cálculos cuánticos, criptografía cuántica o cualquier protocolo que aproveche las propiedades únicas de la superposición y el entrelazamiento. Es información cuántica de alta calidad porque está intacta y no se ha degradado; mientras que si es alta indica un estado mezclado . El sistema se ha enredado con su entorno, perdiendo sus propiedades cuánticas especiales y acercándose al comportamiento clásico. Esta es información cuántica de baja calidad o degradada para los fines específicos de la computación cuántica.

Pese a lo poderosa que es este concepto, presenta tres limitaciones:

- **No siempre coincide con la entropía termodinámica**: Sólo coinciden cuando el sistema cuántico está débilmente acoplado a su entorno. En sistemas fuertemente acoplados, sus valores divergen. Por tanto, no son la misma magnitud en todos los escenarios.
- **No define una temperatura:** La entropía de Von Neumann no tiene por qué ser cero en el cero absoluto de temperatura (algo que sí hace la entropía termodinámica). Esto imposibilita usarla para definir de manera consistente una temperatura del sistema, que es un pilar de la termodinámica.
- **No siempre cumple la segunda ley:** Esta es la limitación más crucial que se deriva de las anteriores. La entropía de Von Neumann puede disminuir local o temporalmente en ciertos procesos cuánticos. Esto NO significa que la segunda ley de la termodinámica esté violada; significa que esta entropía en particular no es la magnitud adecuada para verificar dicha ley en todos los contextos cuánticos. La segunda ley se mantiene inviolada cuando se verifica usando la entropía termodinámica apropiadamente definida para estos sistemas.

5 Entropía como función de la dimensionalidad de información:

La entropía es una medida de la incertidumbre o de la cantidad de información promedio que contiene una variable. Su relación con la dimensionalidad varía drásticamente entre el espacio discreto finito (donde la dimensionalidad es la cardinalidad del conjunto de resultados) y el espacio vectorial continuo ($\mathbb{R}^d$), donde la complejidad geométrica y estadística es crucial.[1]

Entropía de Rényi (H_α):

La Entropía de Rényi (H_α) es una familia continua de medidas de entropía que generaliza a las entropías de Hartley y Shannon. Permitiendo un espectro de medidas indexadas por un parámetro α que sintoniza la sensibilidad de la medida a diferentes regiones de probabilidad.

Definición Formal:

Para una variable aleatoria discreta X con probabilidades P_i , la Entropía de Rényi de orden α se define como:

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\log(\sum_{i=1}^{n} P_i^\alpha)$$

Relación con la Dimensionalidad (Dq):

El parámetro α no solo mide la incertidumbre, sino que se utiliza para definir las

Dimensiones Generalizadas de Rényi (D_α) La variación de D_α en función de α es crucial para diagnosticar si un conjunto de datos es un fractal simple o un multifractal (un conjunto con una distribución de probabilidad altamente heterogénea)

Ejemplo Práctico: Unificación y Diagnóstico de Complejidad

La utilidad de Rényi reside en su capacidad para adaptarse al tipo de información que se desea priorizar y establecer un continuo analítico:

- **Caso Límite Hartley ($\alpha \to 0$):** En el límite cuando α tiende a cero, la Entropía de Rényi converge precisamente a la Entropía de Hartley H_0.
- **Caso Límite Shannon ($\alpha \to 1$):** Al aplicar el límite, H_α converge a la clásica Entropía de Shannon (H_1).[7]
- **Diagnóstico de Multifractalidad:** En sistemas complejos, si las dimensiones generalizadas de Rényi son desiguales (ej. $D_0 \neq D_1$), esto indica que la estructura del sistema es un multifractal, lo que revela la complejidad y la distribución no uniforme de la medida probabilística en el espacio dimensional subyacente.[6]

Dimensión de Hausdorff (D_H):

La Dimensión de Hausdorff es un concepto fundamental en la Geometría Fractal y la Teoría de la Medida. A diferencia de la dimensión euclidiana tradicional, que siempre es un número entero, la dimensión de Hausdorff permite asignar valores no enteros a conjuntos complejos o fractales.

Intuitivamente, la dimensión de un conjunto A en $\mathbb{R}^n$ Se entiende como un exponente que expresa cómo escala el "volumen" o la "masa" de ese conjunto en relación con su "tamaño lineal". La Dimensión de Hausdorff mide esta escala de forma rigurosa, proporcionando una herramienta para cuantificar la complejidad y la irregularidad de los conjuntos.

Dimension de Hausdorff, conteo por cajas, dimension de informacion:

El artículo referenciado se centra en la estimación de la dimensión de Hausdorff (dim_H) mediante el uso de otras dos dimensiones que son, a menudo, más sencillas de calcular computacionalmente. Por lo tanto, las tres "definiciones" o conceptos de dimensión clave que se manejan son:

1. Dimensión de Hausdorff $(dim_H(A))$

Es la definición más rigurosa. Se define a partir de la **medida de Hausdorff** s **-dimensional** $H^s(A)$.

- **Definición Fundamental:** Para un conjunto A, la medida de Hausdorff ($H^s(A)$.) es el límite de la suma de los diámetros a la potencia s de cubrimientos de A con bolas de diámetro pequeño (menor a ϵ), cuando tiende a cero.
- **La Dimensión:** La Dimensión de Hausdorff, $dim_H(A)$, es el valor crítico de donde la medida $H^s(A)$ cambia de infinito a cero.

$$dim_H(A) = inf\{s \geq 0 : H^s(A) = 0\} = sup\{s \geq 0 : H^s(A) = \infty\}$$

2. Dimensión de Conteo por Cajas $dim_{BC}(A)$

También conocida como dimensión de Minkowski-Bouligand. Es una medida práctica que estima la dimensión contando cuántas "cajas" de un tamaño específico son necesarias para cubrir el conjunto.

- **Definición:** Si $N_\epsilon(A)$ es el número mínimo de cajas (o bolas) de lado necesarias para cubrir un conjunto A, la Dimensión de Conteo por Cajas se define como:

$$dim_{BC}(A) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon(A)}{\log(\frac{1}{\epsilon})}$$

3. Dimensión de Información $dim_I(A)$

La Dimensión de Información es una dimensión fractal que cuantifica la tasa a la que la información necesaria para localizar un punto en el conjunto aumenta a medida que la precisión de la medición (el tamaño de la caja ϵ)se incrementa.

Es particularmente relevante para conjuntos donde la masa o la probabilidad no se distribuye de manera uniforme, a diferencia de la Dimensión de Conteo por Cajas, que solo considera la existencia de puntos en una región.

- Definición: Si p_i es la probabilidad de que un punto caiga en la i-ésima caja de tamaño ϵ, y N_ϵ es el número de cajas, la Dimensión de Información se define usando la entropía de la distribución:

La Dimensión de Información $dim_i(A)$ se define entonces como el límite de la razón de la entropía de shannon con respecto al logaritmo del factor de escala:

$$dim_i(A) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} p_i \log p_1}{\log(1/\epsilon)}$$