

TENSIONES Y CORRIENTES POLIARMÓNICAS

7.1 Introducción

En los análisis anteriores, hemos trabajado con generación de tensiones alternas del tipo senoidal, y circuitos con características lineales, lo cual se veía reflejado en circulación de corrientes también del tipo senoidal.

En circuitos en los cuales tenemos componentes electrónicos, variadores de velocidad, circuitos magnéticos, estos dejan de ser lineales y por lo tanto las corrientes que circulan dejan de ser senoidales, presentando una forma de onda periódica deformada, que a su vez originan caídas de tensión también deformadas.

El estudio de este tipo de ondas no senoidales, se encara mediante el desarrollo en serie de Fourier, mediante el cual una onda periódica deformada se puede obtener como la suma infinita de funciones senos .

En las figuras 7.1 se observa la curva resultante de sumar la onda fundamental con una de 3º armónica y en la 7.2 la suma de una fundamental con 3º, 5º y 7º armónica.

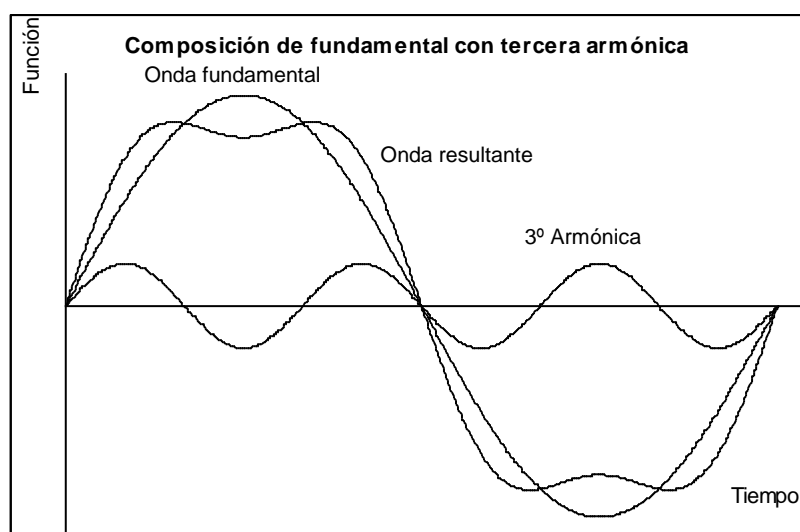


Figura 7.1 Composición de una onda fundamental con otra de 3º armónica

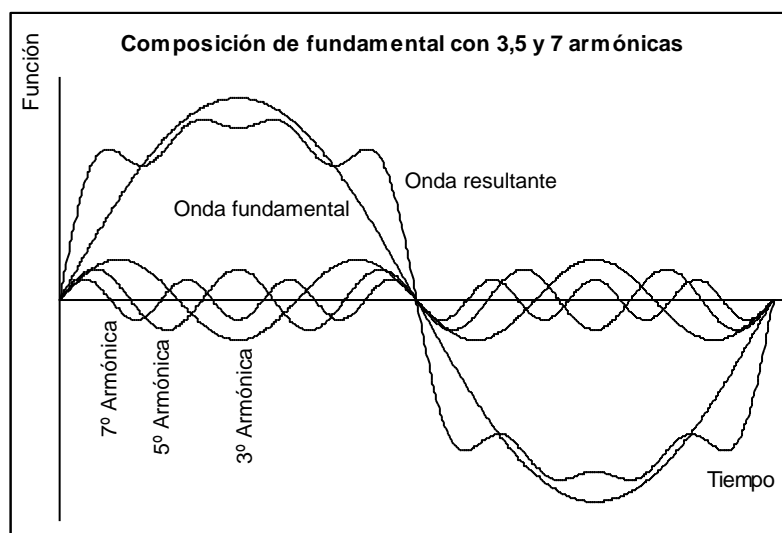


Figura 2.2 Composición de una onda fundamental con 3º, 5º y 7º armónica

Si tenemos una función:

$$f(t) = f(t+n.T) \quad \text{Donde "T" es el período de la función y "n" un número entero}$$

Si se tiene una función periódica cuya pulsación está dada por: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Esta función se puede desarrollar de acuerdo a la siguiente expresión:

$$f(\omega t) = B_0 + C_1 \sin(\omega t + \Theta_1) + C_2 \sin(2\omega t + \Theta_2) + C_3 \sin(3\omega t + \Theta_3) + \dots + C_n \sin(n\omega t + \Theta_n)$$

$$f(\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(n\omega t + \Theta_n)$$

$$\text{Siendo para } n=0 \quad C_n = B_0 \quad \text{y} \quad \Theta_n = \Theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{sen } 90^\circ = 1$$

El coeficiente B_0 representa la componente constante ó continua de la función, el segundo término $C_1 \sin(\omega t + \Theta_1)$, representa la fundamental o primera armónica, siendo Θ_1 el ángulo inicial, mientras que los términos $A_n \sin(n\omega t + \Theta_n)$, los armónicos de la función.

Reemplazando de acuerdo a la expresión: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\begin{aligned} C_n \sin(n\omega t + \Theta_n) &= C_n (\sin n\omega t \cos \Theta_n + \cos n\omega t \sin \Theta_n) \\ &= C_n \sin n\omega t \cos \Theta_n + C_n \cos n\omega t \sin \Theta_n \end{aligned}$$

De acuerdo al esquema de la figura 7.3 se cumple:

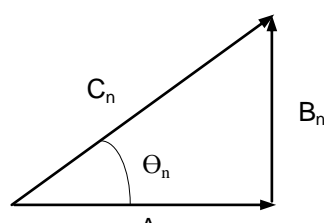


Figura 7.3 Esquema de componentes

$$A_n = C_n \cos \Theta_n \quad B_n = C_n \sin \Theta_n$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\Theta_n = \text{Arc tg } \frac{B_n}{A_n}$$

$$f(\omega t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t)$$

$$f(\omega t) = B_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t +$$

$$B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \dots + B_n \cos n\omega t$$

7.1.1 Condiciones de simetría

Las señales eléctricas que nos ocupan, son periódicas y simétricas de medio período, quiere decir que repiten sus valores a intervalos iguales, llamando a ese intervalo "T" (período), y además cada medio período repiten su valor pero con signo cambiado, lo cual observamos en la figura 7.4.

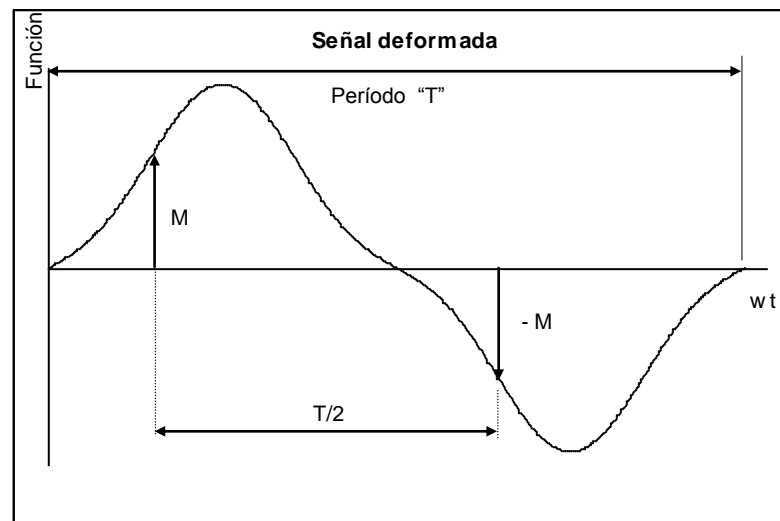


Figura 7.4 Señal periódica y simétrica de medio período

En este tipo de señales se cumple:

$$f(\omega t) = -f\left(\omega t + \frac{T}{2}\right)$$

En estos casos, no existen componentes de orden par, y por lo general tampoco la componente continua, con lo cual las señales tendrán las siguientes formas:

$$u = U_{1\text{Max}} \cdot \text{sen}(\omega t + \psi_1) + U_{3\text{Max}} \cdot \text{sen}(3\omega t + \psi_3) + \dots + U_{n\text{Max}} \cdot \text{sen}(n\omega t + \psi_n) \quad [1]$$

Para el caso de una tensión, siendo ψ_n el ángulo inicial de la armónica correspondiente.

En forma análoga para una corriente:

$$i = I_{1\text{Max}} \cdot \text{sen}(\omega t + \xi_1) + I_{3\text{Max}} \cdot \text{sen}(3\omega t + \xi_3) + \dots + I_{n\text{Max}} \cdot \text{sen}(n\omega t + \xi_n) \quad [2]$$

siendo ξ_n el ángulo inicial de la armónica correspondiente.

7.2 Circuito con poliarmónicas

Analicemos un circuito serie, como el de la figura 7.5, cuya fuente genera una tensión poliarmónica, con lo cual en dicho circuito tendremos una corriente del mismo tipo.

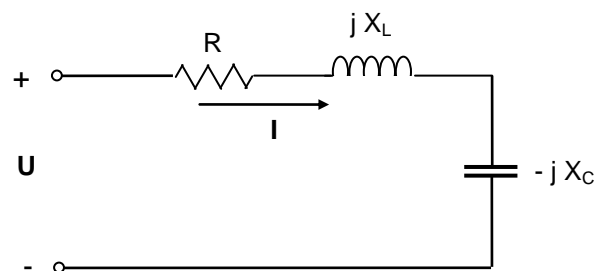


Figura 7.5 Circuito serie

La expresión generalizada de la impedancia es la siguiente:

$$Z_n = R + j n \omega L - j \frac{1}{n \omega C}$$

De la cual resulta que su valor va a depender de la armónica en consideración. El valor eficaz de la corriente va a estar dada por:

$$I_n = \frac{U_n}{\sqrt{R^2 + \left(n \omega L - \frac{1}{n \omega C}\right)^2}} \quad \text{Con lo cual nos queda:}$$

$$i = \sqrt{2} I_1 \text{sen}(\omega t + \xi_1) + \sqrt{2} I_3 \text{sen}(3\omega t + \xi_3) + \dots + \sqrt{2} I_n \text{sen}(n\omega t + \xi_n)$$

Siendo n: Impar

Se define como valor eficaz de una corriente senoidal, al valor de una corriente equivalente constante, que circulando por una resistencia, disipa el mismo valor de potencia que una corriente de intensidad $i(t)$.

Para una onda senoidal dicho valor surge de la siguiente expresión:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_{Max}}{\sqrt{2}}$$

El valor eficaz de una poliarmónica, puede calcularse como el valor cuadrático medio de la onda, o a partir de los coeficientes del desarrollo de la serie de Fourier, con lo cual nos queda:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2}$$

El valor eficaz de una poliarmónica es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de cada una de las armónicas.

7.2.1 Potencia activa en poliarmónicas

Por definición la potencia activa está dada por la siguiente expresión:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt$$

Si reemplazamos los valores de u e i por las expresiones [1] y [2] nos queda:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_{1Max} \cdot I_{1Max} \cdot \text{sen}(\omega t + \psi_1) \cdot \text{sen}(\omega t + \xi_1) dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T U_{3Max} \cdot I_{3Max} \cdot \text{sen}(3\omega t + \psi_3) \cdot \text{sen}(3\omega t + \xi_3) dt + \dots + \frac{1}{T} \int_0^T U_{1Max} \cdot I_{3Max} \cdot \text{sen} \omega t + \psi_1) \cdot \text{sen}(3\omega t + \xi_3) dt + \\ &+ \dots + \frac{1}{T} \int_0^T U_{3Max} \cdot I_{1Max} \cdot \text{sen}(\omega t + \psi_3) \cdot \text{sen}(\omega t + \xi_1) dt + \dots \end{aligned}$$

Vemos que aparecen términos en los cuales la tensión y la corriente tienen el mismo subíndice y otros que son diferentes, o sea que integrales de productos de tensión y corriente con la misma frecuencia y otros con distinta frecuencia-

Dado que la sumatoria de las integrales que tienen distinto subíndice son nulas (Una de las propiedades de las integrales trigonométricas), nos queda:

$$P = \frac{1}{T} \sum_n \int_0^T U_{nMax} \cdot I_{nMax} \cdot \text{sen}(n\omega t + \psi_n) \cdot \text{sen}(n\omega t + \xi_n) dt$$

Resolviendo nos queda:

$$P = \sum_n \frac{\sqrt{2} U_{nMax} \cdot \sqrt{2} I_{nMax}}{2} \cos(\psi_n - \xi_n)$$

Siendo: $(\psi_n - \xi_n)$, la diferencia de ángulo entre la tensión y la corriente de cada poliarmónica al que llamaremos φ_n , con lo cual nos queda:

$$P = \sum_n U_n \cdot I_n \cos \varphi_n$$

Esto nos indica que la potencia activa de una poliarmónica, es la suma de las potencias activas de cada una de las armónicas, que la integran.

En forma análoga la potencia reactiva estará dada por:

$$Q = \sum_n U_n \cdot I_n \cdot \sin \varphi_n$$

7.2.2. Potencia aparente en poliarmónicas

La potencia aparente está dada por la siguiente expresión:

$$S = \sqrt{\sum_n U_n^2} \cdot \sqrt{\sum_n I_n^2}$$

7.2.3. Factor de potencia

Se define el factor de potencia como la relación entre la potencia activa y la aparente, llamando al mismo:

$$\cos \lambda = \frac{\sum_n U_n \cdot I_n \cdot \cos \varphi_n}{\sqrt{\sum_n U_n^2} \cdot \sqrt{\sum_n I_n^2}}$$

7.2.4. Tensiones senoidales - Factor de contracción

En la práctica las tensiones que suministran las fuentes, prácticamente son de tipo senoidal, y debido a las impedancias de las cargas que no son lineales, aparecen corrientes deformadas, con lo cual las expresiones anteriores, en estos casos nos quedan de la siguiente manera:

$$U = U_1$$

$$P = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1$$

Siendo la potencia activa para el resto de los armónicos igual a cero, debido a que el valor de la tensión para esos armónicos es cero.

En forma análoga: $Q = U_1 \cdot I_1 \cdot \sin \varphi_1$, mientras que la potencia aparente es:

$$S = U_1 \cdot \sqrt{\sum_n I_n^2} \text{ y el factor de potencia:}$$

$$\cos \lambda = \frac{U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1}{U_1 \cdot \sqrt{\sum_n I_n^2}} = \frac{I_1 \cdot \cos \varphi_1}{\sqrt{\sum_n I_n^2}}$$

Llamando factor de contracción a:

$$k = \frac{I_1}{\sqrt{\sum_n I_n^2}}$$

Co lo cual el factor de potencia nos queda:

$$\cos \lambda = k \cdot \cos \varphi_1$$

$$\text{Con } k < 1$$

7.2.5. Potencia de deformación

Si las tensiones y corrientes en un circuito son senoidales, la potencia aparente se obtiene de la siguiente expresión:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ en cambio si la corriente es deformada:}$$

$$S > \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Se demuestra a través del teorema de Bodeman, que:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

Llamando a "D" potencia de deformación

7.3. Poliarmónicas en sistemas trifásicos

7.3.1. Corrientes poliarmónicas

Si tenemos un sistema trifásico conectado en estrella con neutro tal como se muestra en la figura 7.6.

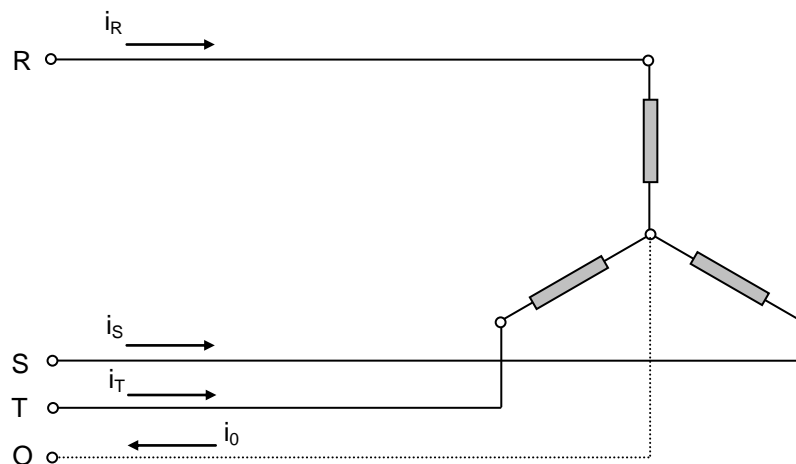


Figura 7: Sistema trifásico conectado en estrella

Las corrientes están defasadas 120° entre sí, o sea que las corrientes poliarmónicas, adoptando un sistema equilibrado, serán las siguientes:

$$i_R = \sqrt{2} I_1 \sin \omega t + \sqrt{2} I_3 \sin 3\omega t + \dots + \sqrt{2} I_n \sin n\omega t$$

$$i_S = \sqrt{2} I_1 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \sqrt{2} I_3 \sin 3 \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \dots + \sqrt{2} I_n \sin n \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$i_T = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t - \frac{4.\pi}{3}) + \sqrt{2} I_3 \sin 3(\omega t - \frac{4.\pi}{3}) + \dots + \sqrt{2} I_n \sin n(\omega t - \frac{4.\pi}{3})$$

La corriente por el conductor neutro es la suma de las 3 corrientes de fase:

$$i_O = i_R + i_S + i_T \quad \text{y si reemplazamos las ecuaciones anteriores nos queda:}$$

$$i_O = 3\sqrt{2} I_3 \sin 3\omega t + 3\sqrt{2} I_9 \sin 9\omega t + 3\sqrt{2} I_{15} \sin 15\omega t + \dots$$

Con lo cual aunque el sistema sea equilibrado, cuando las corrientes son poliarmónicas, la corriente por el conductor neutro no es cero. Por el mismo circulan las armónicas múltiplos de 3.

Esta corriente de neutro puede provocar perturbaciones en redes telefónicas, o de datos, dado que las frecuencias pueden ser del mismo orden que las de esos sistemas.

La corriente de neutro será:

$$I_O = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots}$$

7.3.2. Tensiones poliarmónicas

En los sistemas trifásicos simétricos, las curvas de tensión de la 2° y 3° fase se reproducen con un defasaje de 120°.

$$u_{RO} = \sqrt{2} U_1 \sin \omega t + \sqrt{2} U_3 \sin 3\omega t + \dots + \sqrt{2} U_n \sin n\omega t$$

$$u_{SO} = \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t - \frac{2.\pi}{3}) + \sqrt{2} U_3 \sin 3(\omega t - \frac{2.\pi}{3}) + \dots + \sqrt{2} U_n \sin n(\omega t - \frac{2.\pi}{3})$$

$$u_{TO} = \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t - \frac{4.\pi}{3}) + \sqrt{2} U_3 \sin 3(\omega t - \frac{4.\pi}{3}) + \dots + \sqrt{2} U_n \sin n(\omega t - \frac{4.\pi}{3})$$

Fases del generador conectadas en estrella

Si las tensiones de fase no son sinusoidales, las tensiones de línea, que son la diferencia entre las tensiones de fase sucesivas, no van a contener armónicas múltiplos de 3.

$$U_F = 3\sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}$$

$$U_L = \sqrt{3}\sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_{11}^2 + \dots}$$

$$U_L < \sqrt{3} U_F$$

Con una carga simétrica, las corrientes de fase de frecuencia fundamental y todas las armónicas superiores, a excepción de las de orden múltiplo de "3", al sumarlas se anulan, siendo estas últimas que sumadas circulan por el neutro.

De no existir neutro las armónicas de orden múltiplo de “3” no pueden circular por las fases, pero entre los centros de estrella del generador y de la carga una tensión que solo contiene armónicas de ese orden-

Fases del generador conectadas en triángulo

En este caso, la suma de las tensiones de las tres fases no será cero, sino que será igual al triple de las armónicas de orden múltiplo de “3”, lo cual provoca una circulación de corriente interna, aún sin que el generador suministre potencia. La magnitud de esta corriente va a depender de la impedancia interna del generador.

En esta situación la tensión en borne de la fase, no contiene armónicos de orden “3”, ya que las mismas son compensadas por la caída de tensión en la impedancia de cada una de las fases. O sea:

$$U_F = \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_{11}^2 + \dots}$$

Si abrimos el triángulo tal cual se muestra en la figura 7.7, la tensión que aparece en sus bornes está compuesta por armónicas de orden “3”

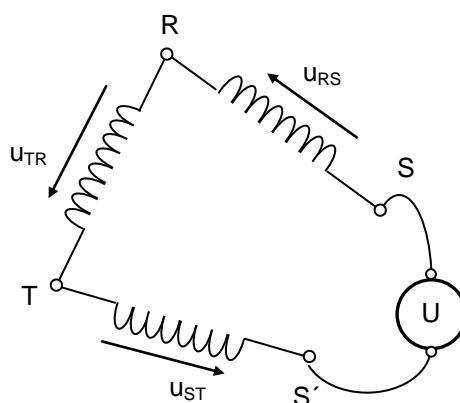


Figura 7.7 Triángulo abierto

La tensión indicada por el voltímetro está dada por:

$$U = 3 \sqrt{U_3^2 + U_9^2 + U_{15}^2 + \dots}$$

Si al generador se le conecta una carga en triángulo equilibrada, las corrientes en cada una de las fases va a estar dada por:

$$I_F = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots}$$

Las corrientes que circularán por el circuito externo, o sea las corrientes de línea son:

$$I_L = \sqrt{3} \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots}$$

O sea que:

$$I_L < \sqrt{3} I_F$$

7-4 Forma de onda de la corriente de vacío en un transformador

Si a una bobina con núcleo de aire se la alimentan con una tensión senoidal, la corriente que circula también es senoidal, ya que la misma se comporta como un elemento lineal. En cambio si el núcleo es de hierro tal cual se presenta en los transformadores, la corriente por el primario, estando el secundario sin carga deja de ser senoidal, debido a que la permeabilidad del núcleo no es constante, lo cual puede observarse en la figura 7.8, en la cual están representadas las curvas de imanación típicas de este tipo de materiales (B-H).

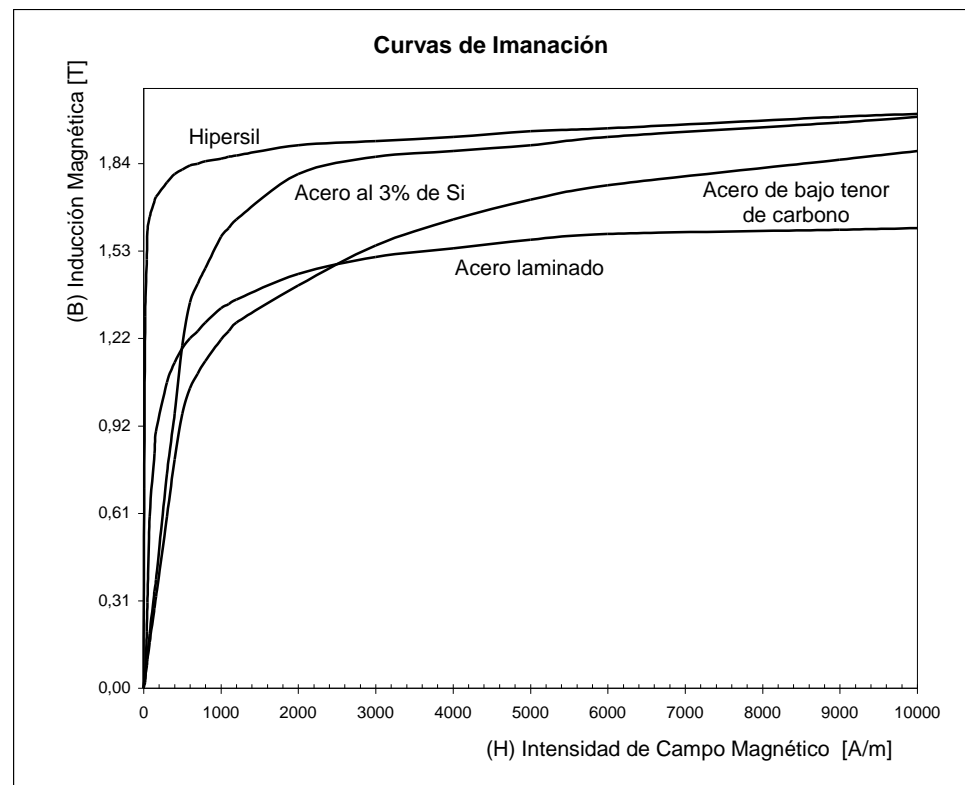


Figura 7.8 Curvas de imanación de materiales magnéticos

Dado que hay una relación directa entre la tensión aplicada y el flujo magnético, a través de la siguiente expresión ya utilizada:

$$U = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot \Phi \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{B \cdot S}{\mu_0 \mu_r}$$

De aquí surge que la corriente que está representada por H ya que: $H \cdot L = N \cdot I$, no va a ser senoidal debido a que la relación entre B y H no es lineal tal cual se observa de la curva mencionada,

En la figura 7.9 se puede ver la curva de la tensión aplicada y la forma de la corriente que circularía por la bobina-

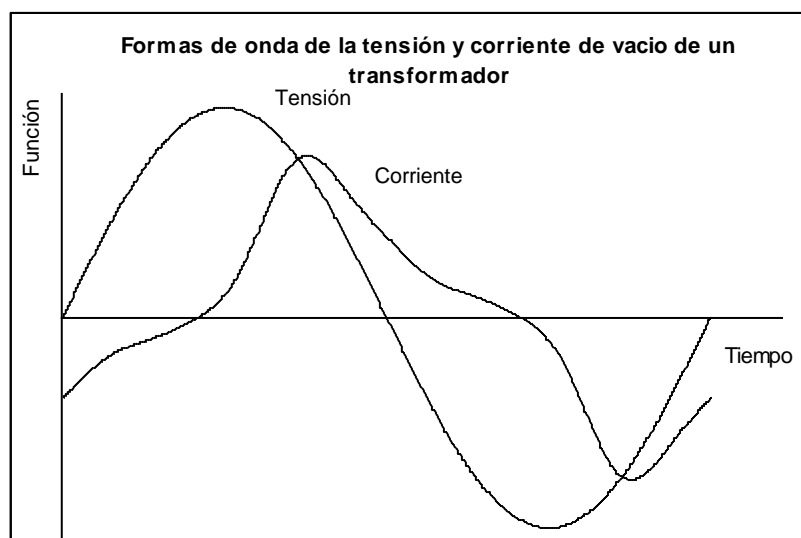


Figura 7-9 Forma de onda de la corriente de vacío de un transformador