

CC-297

Projeto No. 1

Distribuído: 22/02/16

João L. F. Azevedo

Entrega: 28/03/16

1^o Semestre/2016

Escreva um programa para resolver a equação de Laplace em duas dimensões, coordenadas cartesianas,

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 .$$

Fisicamente isto representaria um escoamento potencial, incompressível, em estado estacionário. O programa deve ser construído de forma a resolver o escoamento sobre um aerofólio biconvexo sem sustentação, ou seja, $\alpha = 0$, definido por

$$y = 2 t x (1 - x) ,$$

onde t é a espessura máxima do perfil, e x , y e t são adimensionalizados pela corda do aerofólio. Não há nenhuma preferência maior quanto à linguagem de programação a ser usada, desde que seja uma linguagem científica atual, como Fortran, C ou C⁺⁺. Não é adequado, ou aceitável, o uso de rotinas (ou M-files) MATLAB, por exemplo, porque isto pode esconder do aluno muito do que se quer que ele efetivamente tenha a responsabilidade de programar.

Uma forma bastante utilizada para se resolver uma equação diferencial parcial (ou sistema de equações diferenciais parciais) que descreve(m) uma condição de estado estacionário, ou seja, variáveis não são função do tempo, consiste em se utilizar técnicas conhecidas como métodos de relaxação. Sob um aspecto conceitual, relaxação significa o processo de se determinar a solução iterativa de uma equação ou de um sistema acoplado de equações algébricas. Como o processo é iterativo e a solução exata em geral não é conhecida, caso contrário não haveria sentido em se estar resolvendo o problema, há necessidade de se definir algum teste de convergência desta solução. Em linhas gerais se diz que a solução convergiu quando ela se torna invariante com a continuação das iterações, e a grandeza sobre a qual tipicamente se efetua os testes de convergência é conhecida como *resíduo*. O resíduo é definido como a avaliação da equação diferencial discretizada (ou sistema de equações diferenciais discretizadas) e, desta forma, ele representa uma avaliação de quão bem a forma discreta da equação diferencial está sendo satisfeita pela *solução corrente*, ou seja, a solução no presente nível de iteração.

Existem muitas formas de se criar processos de relaxação, porém uma forma que é particularmente conveniente no presente caso consiste em se escrever o problema discreto na chamada forma padrão de correção, ou *forma delta*. Para o caso da equação de Laplace, esta pode ser expressa como

$$N C_{i,j}^n + L \phi_{i,j}^n = 0 ,$$

onde $L \phi_{i,j}^n$ é a discretização da equação diferencial, também chamado de operador de resíduo, $C_{i,j}^n$ é a correção a ser efetuada no potencial de velocidade no nível de iteração n , e N representa o método de iteração escolhido. Os detalhes necessários para uma melhor compreensão do problema proposto, assim como aqueles necessários para implementação do programa para os diversos métodos desejados, serão apresentados a seguir. Vale mencionar ainda que todos estes conceitos, que estão sendo apresentados aqui, serão também discutidos brevemente em aula no momento oportuno. Com o objetivo de se começar a “colocar a mão na massa”, entretanto, deseja-se que o problema aqui proposto vá, desde agora, sendo resolvido pela classe. As informações aqui contidas são, na realidade, suficientes para que se realizar o trabalho proposto. Além disto, recomenda-se ainda ler o Capítulo 9 do livro do Prof. Lomax, que aborda especificamente o tema de métodos de relaxação.

Condições de Contorno e Condições Iniciais

Considere que a condição de escoamento não perturbado seja dada por

$$\phi_\infty = \mathcal{U}_\infty x .$$

Portanto, utilize ϕ_∞ como condição inicial. Neste caso, \mathcal{U}_∞ é uma constante especificada como “dado de entrada”. Note, ainda, que a condição de escoamento não perturbado pode ser também utilizada nas fronteiras de entrada, de saída, e na fronteira “superior” do domínio de cálculo, para todos os níveis de iteração, ou seja, em qualquer “instante”. Em outras palavras, esta não é apenas uma condição inicial, mas também uma condição de contorno nas fronteiras acima especificadas. A condição de contorno de escoamento tangente na superfície do aerofólio deve ser implementada utilizando a hipótese de pequenas perturbações, ou seja,

$$\phi_y(x, 0) = \mathcal{U}_\infty \frac{dy}{dx} , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Observamos que esta certamente não é a abordagem ideal para implementação da condição de escoamento tangente em uma formulação de potencial completo. Entretanto, é suficiente para os nossos propósitos aqui, e simplifica sobremaneira a geração de uma malha de diferenças finitas para o problema. Ao longo do restante da fronteira $y = 0$, ou seja, “antes” e “após” o perfil, ϕ_y deve ser definido como zero. Isto é simplesmente a condição de simetria do escoamento para $\alpha = 0$. Estas condições de contorno estão resumidas na Fig. 1.

Malha Computacional

O programa deve utilizar uma malha de diferenças finitas cartesiana que possua um certo estiramento de malha, ou “stretching”, em ambas as direções x e y . Uma malha apropriada é definida por

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{1.0}{ITE - ILE} \\ x_i &= (i - ILE) \Delta x , \quad ILE \leq i \leq ITE \\ x_i &= x_{i-1} + (x_{i-1} - x_{i-2}) * XSF , \quad ITE < i \leq IMAX \\ x_i &= x_{i+1} + (x_{i+1} - x_{i+2}) * XSF , \quad 1 \leq i < ILE \\ y_1 &= -\frac{\Delta x}{2} & y_2 &= \frac{\Delta x}{2} \\ y_j &= y_{j-1} + (y_{j-1} - y_{j-2}) * YSF , \quad 3 \leq j \leq JMAX \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} ILE &= \text{índice } i \text{ correspondente ao bordo de ataque do perfil} \\ ITE &= \text{índice } i \text{ correspondente ao bordo de fuga do perfil} \\ IMAX &= \text{número de pontos na direção } x \\ JMAX &= \text{número de pontos na direção } y \\ XSF &= \text{fator de estiramento (“stretching”) da malha para a direção } x \\ YSF &= \text{fator de estiramento (“stretching”) da malha para a direção } y \end{aligned}$$

Esquema de Diferenças Espaciais

O esquema de diferenças espaciais que deve ser utilizado é dado por

$$L\phi_{i,j} = \frac{2}{x_{i+1} - x_{i-1}} \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \right) + \frac{2}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}} \right).$$

A condição de contorno em ϕ_y na posição $y = 0$ pode ser implementada de várias formas no esquema de diferenças espaciais. Para o caso deste trabalho, recomenda-se que o procedimento descrito a seguir seja utilizado. Antes de mais nada, note que, devido à formulação sendo utilizada para a condição de contorno, o perfil está sendo representado por sua corda, com um valor $dy/dx \neq 0$. Assim, a corda do aerofólio está localizada a “meio-caminho” entre duas linhas $y = \text{const}$ na malha, *i.e.*, $j = 1$ e $j = 2$, pela própria construção da malha. Veja a Fig. 2 para maiores detalhes. A linha $j = 1$ representa uma linha de pontos atualizados unicamente por condição de contorno. Portanto, no início de cada iteração, o valor de ϕ para $j = 1$ deve ser atualizado como

$$\phi_{i,1} = \phi_{i,2} - (y_2 - y_1) \phi_{y,\frac{3}{2}}, \quad 1 \leq i \leq IMAX.$$

Observe que o cálculo do resíduo, ou seja, $L\phi_{i,j}$, não é nunca efetuado em quaisquer dos pontos das fronteiras computacionais.

Esquemas de Iteração

O problema deve ser resolvido utilizando 5 esquemas de iteração diferentes. A finalidade de se usar vários esquemas de iteração é poder comparar a razão de convergência destes esquemas. Os esquemas que devem ser utilizados são:

1. Jacobi (ou point-Jacobi);
2. Gauss-Seidel (ou point-Gauss-Seidel);
3. SOR (Successive Overrelaxation);
4. Line-Gauss-Seidel;
5. SLOR (Successive Line Overrelaxation).

No caso dos dois últimos esquemas, line-Gauss-Seidel e SLOR, a idéia é de que a iteração, ou relaxação, deve ser feita utilizando-se linhas verticais, ou seja, o processo iterativo opera na direção x . A solução, nestes casos, dentro de cada linha vertical deve ser efetuada simultaneamente resolvendo-se tridiagonais em y . Para esta solução de tridiagonais, sugere-se utilizar o algoritmo de Thomas que é descrito, entre outras referências, no livro do Prof. Fletcher (Fletcher, Vol. 1, Cap. 6, pp. 183-184). Na Série No. 2, haverá também um exercício muito útil para lhe auxiliar a programar esta rotina de “inversão” de matrizes tridiagonais.

Todos estes esquemas propostos para a solução do projeto podem ser escritos em forma padrão de correção, ou forma delta, como:

$$N C_{i,j}^n + L \phi_{i,j}^n = 0,$$

onde:

- $L \phi_{i,j}^n$ representa o esquema de discretização espacial adotado, que já foi fornecido anteriormente;
- $C_{i,j}^n = \Delta \phi_{i,j}^n = \phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n$, é a correção a ser efetuada no potencial de velocidade no nível de iteração n ;
- e o operador N é discutido abaixo em cada caso.

1. Jacobi:

$$N_{PJ} = -\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2}$$

2. Gauss-Seidel:

$$N_{PGS} = \frac{E_x^{-1} - 2}{\Delta x^2} + \frac{E_y^{-1} - 2}{\Delta y^2}$$

3. SOR:

$$N_{SOR} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(E_x^{-1} - \frac{2}{r} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(E_y^{-1} - \frac{2}{r} \right)$$

4. Line-Gauss-Seidel:

$$N_{LGS} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(E_x^{-1} - 2 \right) + \tilde{\delta}_{yy}$$

5. SLOR:

$$N_{SLOR} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(E_x^{-1} - \frac{2}{r} \right) + \frac{1}{r} \tilde{\delta}_{yy}$$

Nas expressões anteriores temos que

- E_x e E_y são operadores deslocamento nas direções x e y , respectivamente. Por exemplo,

$$E_x^{-1}(\)_{i,j} = (\)_{i-1,j}$$

- r é o parâmetro de relaxação de SOR ou SLOR.
- O operador $\tilde{\delta}_{yy}$ é definido por

$$\tilde{\delta}_{yy}(\)_{i,j} = \frac{2}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left[\frac{(\)_{i,j+1} - (\)_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{(\)_{i,j} - (\)_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}} \right]$$

- E podemos definir os espaçamentos:

$$\Delta x = (\Delta x)_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$$

$$\Delta y = (\Delta y)_j = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2}$$

Como mencionado, recomenda-se ver mais detalhes sobre estes esquemas de iteração no livro do Prof. Lomax. De qualquer forma, quaisquer dúvidas sobre o projeto são sempre bem vindas.

Casos a Serem Estudados

(a) Caso 1:

$$\begin{cases} t &= 0.05 \\ \mathcal{U}_\infty &= 1.0 \end{cases}$$

(b) Caso 2:

$$\begin{cases} t &= 0.10 \\ \mathcal{U}_\infty &= 1.0 \end{cases}$$

Em ambos os casos, utilize a seguinte malha:

$$\begin{aligned}
 ILE &= 11 \\
 ITE &= 31 \\
 IMAX &= 41 \\
 JMAX &= 12 \\
 XSF &= 1.25 \\
 YSF &= 1.25
 \end{aligned}$$

O caso 1 deve ser resolvido utilizando todos os esquemas de iteração anteriormente mencionados. A solução do caso 2 pode ser efetuada utilizando-se apenas os esquemas 4 e 5.

Documentação e Apresentação de Resultados

Basicamente, três tipos de resultados gráficos são desejados. Estes são:

- (a) Curvas de coeficiente de pressão versus x adimensionalizado, ou seja, curvas do tipo Cp vs x/c (ou $-Cp$ vs x/c).
- (b) Curvas indicando a “história” de convergência, ou seja, curvas do tipo $\log_{10} |L\phi_{i,j}^n|_{max}$ vs n , onde n indica o número da iteração.
- (c) Contornos de “iso-propriedades”, ou seja, curvas de nível indicando contornos de pressão ou velocidade constantes no campo todo, permitindo uma visualização de como todo o campo de escoamento está se comportando. Existem diversos programas de visualização de malhas computacionais e de resultados de cálculo disponíveis na internet (a custo zero) ou comercialmente. A sugestão é de que vocês utilizem qualquer um destes programas de visualização que lhes parecer mais conveniente. Observe que a visualização dos escoamentos sendo simulados não tem a função apenas de produzir “figuras bonitas” para incluir em seu relatório de projeto, mas é uma etapa essencial para compreender os resultados obtidos e para se ter certeza de que os mesmos estão corretos.

Obviamente, deseja-se que os resultados obtidos com os diferentes esquemas de iteração sejam comparados entre si. Isto tem por objetivo, por um lado, comparar a eficiência computacional de cada um desses esquemas. Por outro lado, é importante verificar que a solução final, em termos do coeficiente de pressão, por exemplo, é a mesma independentemente do esquema iterativo utilizado. Observe que a solução de estado estacionário depende apenas do lado direito e, portanto, deve ser completamente independente do esquema iterativo.

O coeficiente de pressão (Cp) é definido como

$$Cp = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho_{\infty}U_{\infty}^2}.$$

Para escoamento incompressível, isto pode ser simplificado para

$$Cp = 1 - \frac{U^2}{U_{\infty}^2}.$$

Aqui, U é a magnitude do vetor velocidade local. A solução utilizada para o resultado final de Cp deve estar efetivamente “convergida”. Ou seja, o resíduo máximo no campo deve ser reduzido tanto quanto as características da máquina que você estiver utilizando permitirem. Mostre que, de fato, você chegou neste limite.

Os resultados devem ser acompanhados de um relatório que descreva os métodos utilizados e discuta os resultados obtidos. Seus resultados computacionais devem ser comparados com algum resultado independente, e as discrepâncias devem ser discutidas (incluindo suas causas prováveis). Seria interessante anexar uma listagem do programa fonte em um apêndice no final de seu relatório. O programa deve ser o mais modular que for possível, e deve estar razoavelmente bem comentado.

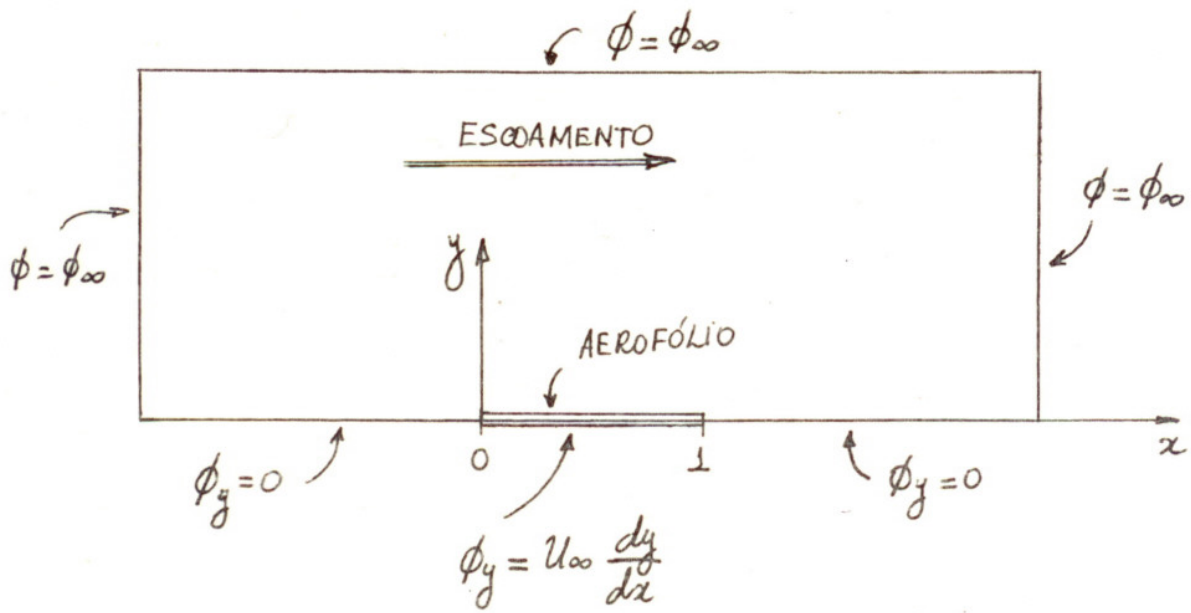
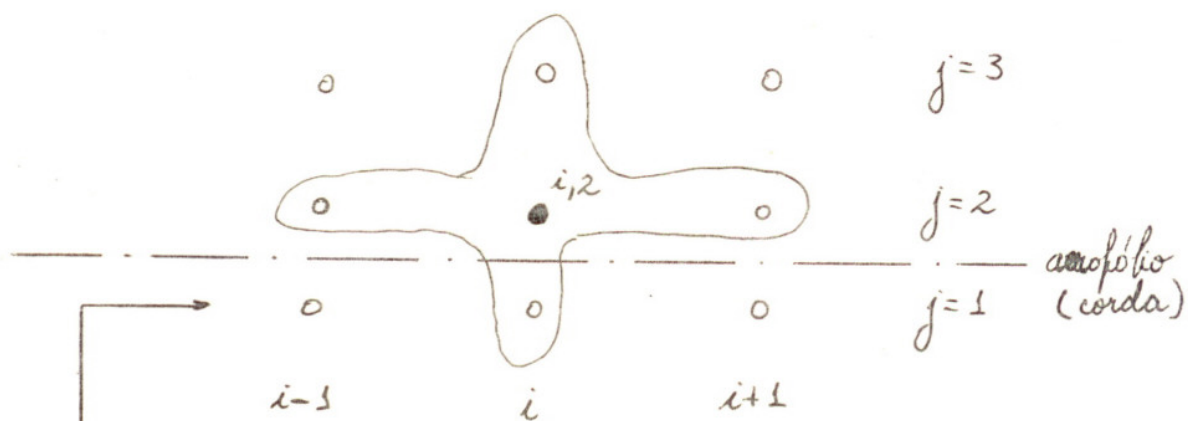


Figura 1



Estes pontos são atualizados via condições de contorno.

Figura 2

FULL-POTENTIAL SOLUTION OF THE FLOW OVER A BICONVEX AIRFOIL

Airfoil thickness ratio: $th = .050$

Free stream velocity: $u_{inf} = 1.00$

Iteration parameters: $\alpha = 2.000$
 $\omega = 1.920$

Convergence criterion: $\epsilon = 0.100E-04$

Grid parameters: $ile = 11$
 $ite = 31$
 $imax = 41$
 $jmax = 12$
 $xsf = 1.250$
 $ysf = 1.250$

Final Results

Total number of iterations = 69
 Total reduction on residue = $0.695E-05$

x/c	$-C_p$
0.00000	-0.11456
0.05000	0.00111
0.10000	0.04022
0.15000	0.06819
0.20000	0.08909
0.25000	0.10500
0.30000	0.11706
0.35000	0.12593
0.40000	0.13203
0.45000	0.13561
0.50000	0.13678
0.55000	0.13561
0.60000	0.13204
0.65000	0.12594
0.70000	0.11706
0.75000	0.10501
0.80000	0.08710
0.85000	0.06819
0.90000	0.04023
0.95000	0.00111
1.00000	-0.11456

$M_{\infty} = 0$

$\mu = 5\%$, $M_{\infty} = 0$

***** SOLUTION AFTER 39 ITERATIONS, RMAX = 0.2226E-10, NSP = 0, CL(CIR) = 0.0000 *****														
I	X/C	Y/C	CP	RHO	M	I	X/C	Y/C	CP	RHO	M	I	X/C	Y/C
1	0.9991-0.0001	0.2350	1.0000	0.0001		51	0.1670-0.0139	-0.0629	1.0000	0.0001		101	0.2249	0.0174
2	0.9972-0.0003	0.2613	1.0000	0.0001		52	0.1506-0.0123	-0.0545	1.0000	0.0001		102	0.2455	0.0185
3	0.9951-0.0005	0.2302	1.0000	0.0001		53	0.1353-0.0117	-0.0459	1.0000	0.0001		103	0.2633	0.0196
4	0.9923-0.0007	0.1934	1.0000	0.0001		54	0.1213-0.0107	-0.0371	1.0000	0.0001		104	0.2923	0.0207
5	0.9902-0.0010	0.1703	1.0000	0.0001		55	0.1083-0.0097	-0.0281	1.0000	0.0001		105	0.3175	0.0217
6	0.9873-0.0013	0.1462	1.0000	0.0001		56	0.0965-0.0087	-0.0190	1.0000	0.0001		106	0.3436	0.0226
7	0.9840-0.0016	0.1255	1.0000	0.0001		57	0.0857-0.0073	-0.0096	1.0000	0.0001		107	0.3707	0.0233
8	0.9804-0.0019	0.1075	1.0000	0.0001		58	0.0753-0.0070	-0.0000	1.0000	0.0001		108	0.3986	0.0240
9	0.9764-0.0023	0.0916	1.0000	0.0001		59	0.0663-0.0062	-0.0000	1.0000	0.0001		109	0.4271	0.0245
10	0.9720-0.0027	0.0774	1.0000	0.0001		60	0.0586-0.0055	-0.0200	1.0000	0.0001		110	0.4551	0.0248
11	0.9673-0.0032	0.0643	1.0000	0.0001		61	0.0512-0.0049	-0.0306	1.0000	0.0001		111	0.4853	0.0250
12	0.9616-0.0037	0.0523	1.0000	0.0001		62	0.0445-0.0043	-0.0417	1.0000	0.0001		112	0.5147	0.0250
13	0.9555-0.0043	0.0409	1.0000	0.0001		63	0.0380-0.0037	-0.0534	1.0000	0.0001		113	0.5439	0.0248
14	0.9488-0.0049	0.0301	1.0000	0.0001		64	0.0330-0.0032	-0.0659	1.0000	0.0001		114	0.5729	0.0245
15	0.9414-0.0055	0.0197	1.0000	0.0001		65	0.0280-0.0027	-0.0794	1.0000	0.0001		115	0.6014	0.0240
16	0.9332-0.0062	0.0097	1.0000	0.0001		66	0.0236-0.0023	-0.0942	1.0000	0.0001		116	0.6293	0.0233
17	0.9242-0.0070	0.0000	1.0000	0.0001		67	0.0196-0.0019	-0.1103	1.0000	0.0001		117	0.6564	0.0226
18	0.9143-0.0078	-0.0095	1.0000	0.0001		68	0.0160-0.0016	-0.1284	1.0000	0.0001		118	0.6825	0.0217
19	0.9035-0.0087	-0.0188	1.0000	0.0001		69	0.0127-0.0013	-0.1485	1.0000	0.0001		119	0.7077	0.0207
20	0.8916-0.0097	-0.0280	1.0000	0.0001		70	0.0098-0.0010	-0.1707	1.0000	0.0001		120	0.7317	0.0196
21	0.8787-0.0107	-0.0369	1.0000	0.0001		71	0.0072-0.0007	-0.1966	1.0000	0.0001		121	0.7545	0.0185
22	0.8647-0.0117	-0.0457	1.0000	0.0001		72	0.0048-0.0005	-0.2231	1.0000	0.0001		122	0.7760	0.0174
23	0.8494-0.0128	-0.0544	1.0000	0.0001		73	0.0028-0.0003	-0.2499	1.0000	0.0001		123	0.7963	0.0162
24	0.8330-0.0139	-0.0628	1.0000	0.0001		74	0.0006-0.0001	-0.2158	1.0000	0.0001		124	0.8153	0.0151
25	0.8153-0.0151	-0.0709	1.0000	0.0001		75	0.0006	0.0001	0.2158	1.0000	0.0001	125	0.8330	0.0139
26	0.7960-0.0162	-0.0788	1.0000	0.0001		76	0.0028	0.0003	0.2499	1.0000	0.0001	126	0.8494	0.0128
27	0.7760-0.0174	-0.0863	1.0000	0.0001		77	0.0034	0.0005	0.2231	1.0000	0.0001	127	0.8647	0.0117
28	0.7545-0.0185	-0.0935	1.0000	0.0001		78	0.0072	0.0007	0.1966	1.0000	0.0001	128	0.8787	0.0107
29	0.7317-0.0196	-0.1001	1.0000	0.0001		79	0.0093	0.0010	0.1707	1.0000	0.0001	129	0.8916	0.0097
30	0.7072-0.0207	-0.1063	1.0000	0.0001		80	0.0127	0.0013	0.1485	1.0000	0.0001	130	0.9035	0.0087
31	0.6825-0.0217	-0.1118	1.0000	0.0001		81	0.0160	0.0016	0.1284	1.0000	0.0001	131	0.9143	0.0078
32	0.6564-0.0226	-0.1167	1.0000	0.0001		82	0.0196	0.0019	0.1103	1.0000	0.0001	132	0.9242	0.0070
33	0.6293-0.0233	-0.1209	1.0000	0.0001		83	0.0236	0.0023	0.0942	1.0000	0.0001	133	0.9332	0.0062
34	0.6014-0.0240	-0.1244	1.0000	0.0001		84	0.0280	0.0027	0.0794	1.0000	0.0001	134	0.9414	0.0055
35	0.5729-0.0245	-0.1270	1.0000	0.0001		85	0.0330	0.0032	0.0659	1.0000	0.0001	135	0.9488	0.0049
36	0.5439-0.0248	-0.1287	1.0000	0.0001		86	0.0380	0.0037	0.0534	1.0000	0.0001	136	0.9555	0.0043
37	0.5147-0.0250	-0.1296	1.0000	0.0001		87	0.0445	0.0043	0.0417	1.0000	0.0001	137	0.9616	0.0037
38	0.4853-0.0250	-0.1296	1.0000	0.0001		88	0.0512	0.0049	0.0306	1.0000	0.0001	138	0.9670	0.0032
39	0.4561-0.0248	-0.1287	1.0000	0.0001		89	0.0586	0.0055	0.0200	1.0000	0.0001	139	0.9720	0.0027
40	0.4271-0.0245	-0.1270	1.0000	0.0001		90	0.0663	0.0062	0.0090	1.0000	0.0001	140	0.9764	0.0023
41	0.3996-0.0240	-0.1244	1.0000	0.0001		91	0.0758	0.0070	0.0000	1.0000	0.0001	141	0.9804	0.0019
42	0.3707-0.0233	-0.1209	1.0000	0.0001		92	0.0857	0.0078	-0.0096	1.0000	0.0001	142	0.9840	0.0016
43	0.3436-0.0226	-0.1167	1.0000	0.0001		93	0.0965	0.0087	-0.0190	1.0000	0.0001	143	0.9873	0.0013
44	0.3175-0.0217	-0.1118	1.0000	0.0001		94	0.1083	0.0097	-0.0281	1.0000	0.0001	144	0.9902	0.0010
45	0.2923-0.0207	-0.1063	1.0000	0.0001		95	0.1213	0.0107	-0.0371	1.0000	0.0001	145	0.9928	0.0007
46	0.2683-0.0196	-0.1002	1.0000	0.0001		96	0.1353	0.0117	-0.0459	1.0000	0.0001	146	0.9951	0.0005
47	0.2455-0.0185	-0.0935	1.0000	0.0001		97	0.1506	0.0128	-0.0545	1.0000	0.0001	147	0.9972	0.0003
48	0.2240-0.0174	-0.0864	1.0000	0.0001		98	0.1670	0.0139	-0.0629	1.0000	0.0001	148	0.9991	0.0001
49	0.2037-0.0162	-0.0789	1.0000	0.0001		99	0.1847	0.0151	-0.0710	1.0000	0.0001	149	0.9991	0.0001
50	0.1847-0.0151	-0.0710	1.0000	0.0001		100	0.2037	0.0162	-0.0789	1.0000	0.0001			

*** LIFT, WAVE DRAG, AND QUARTER-CHORD MOMENT COEFFICIENTS.....CL = 0.0000, CD = 0.0000, CM = 0.0000 ***

**** SOLUTION AFTER 54 ITERATIONS, RMAX=0.4687E-10, NSP = 0, CL(CIR) = 0.0000 ****

I	X/C	Y/C	CP	RHO	M	I	X/C	Y/C	CP	RHO	M	I	X/C	Y/C	CP	RHO	M
1	0.9991-0.0002	0.4294	1.0000	0.0001	51	0.1661-0.0277	-0.1137	1.0000	0.0001	101	0.2230	0.0347	-0.1677	1.0000	0.0001		
2	0.9973-0.0005	0.4246	1.0000	0.0001	52	0.1497-0.0255	-0.0948	1.0000	0.0001	102	0.2446	0.0370	-0.1843	1.0000	0.0001		
3	0.9952-0.0016	0.3038	1.0000	0.0001	53	0.1345-0.0233	-0.0757	1.0000	0.0001	103	0.2674	0.0392	-0.2001	1.0000	0.0001		
4	0.9929-0.0014	0.3436	1.0000	0.0001	54	0.1205-0.0212	-0.0564	1.0000	0.0001	104	0.2915	0.0413	-0.2147	1.0000	0.0001		
5	0.9903-0.0019	0.3069	1.0000	0.0001	55	0.1076-0.0192	-0.0370	1.0000	0.0001	105	0.3167	0.0433	-0.2280	1.0000	0.0001		
6	0.9874-0.0025	0.2738	1.0000	0.0001	56	0.0938-0.0173	-0.0174	1.0000	0.0001	106	0.3429	0.0451	-0.2398	1.0000	0.0001		
7	0.9842-0.0031	0.2438	1.0000	0.0001	57	0.0851-0.0156	0.0022	1.0000	0.0001	107	0.3701	0.0466	-0.2506	1.0000	0.0001		
8	0.9806-0.0038	0.2164	1.0000	0.0001	58	0.0752-0.0139	0.0219	1.0000	0.0001	108	0.3981	0.0479	-0.2503	1.0000	0.0001		
9	0.9766-0.0046	0.1910	1.0000	0.0001	59	0.0663-0.0124	0.0418	1.0000	0.0001	109	0.4267	0.0489	-0.2647	1.0000	0.0001		
10	0.9722-0.0054	0.1673	1.0000	0.0001	60	0.0552-0.0110	0.0618	1.0000	0.0001	110	0.4559	0.0496	-0.2690	1.0000	0.0001		
11	0.9673-0.0063	0.1447	1.0000	0.0001	61	0.0459-0.0096	0.0821	1.0000	0.0001	111	0.4853	0.0500	-0.2712	1.0000	0.0001		
12	0.9619-0.0073	0.1231	1.0000	0.0001	62	0.0441-0.0084	0.1028	1.0000	0.0001	112	0.5147	0.0500	-0.2712	1.0000	0.0001		
13	0.9559-0.0084	0.1021	1.0000	0.0001	63	0.0381-0.0073	0.1240	1.0000	0.0001	113	0.5441	0.0496	-0.2690	1.0000	0.0001		
14	0.9492-0.0096	0.0817	1.0000	0.0001	64	0.0327-0.0063	0.1458	1.0000	0.0001	114	0.5733	0.0489	-0.2647	1.0000	0.0001		
15	0.9418-0.0110	0.0615	1.0000	0.0001	65	0.0278-0.0054	0.1686	1.0000	0.0001	115	0.6019	0.0479	-0.2583	1.0000	0.0001		
16	0.9337-0.0124	0.0416	1.0000	0.0001	66	0.0234-0.0046	0.1925	1.0000	0.0001	116	0.6299	0.0466	-0.2500	1.0000	0.0001		
17	0.9243-0.0139	0.0219	1.0000	0.0001	67	0.0194-0.0038	0.2179	1.0000	0.0001	117	0.6571	0.0451	-0.2398	1.0000	0.0001		
18	0.9149-0.0156	0.0022	1.0000	0.0001	68	0.0153-0.0031	0.2451	1.0000	0.0001	118	0.6833	0.0433	-0.2280	1.0000	0.0001		
19	0.9042-0.0173	-0.0173	1.0000	0.0001	69	0.0126-0.0025	0.2743	1.0000	0.0001	119	0.7085	0.0413	-0.2147	1.0000	0.0001		
20	0.8924-0.0192	-0.0363	1.0000	0.0001	70	0.0097-0.0019	0.3057	1.0000	0.0001	120	0.7326	0.0392	-0.2001	1.0000	0.0001		
21	0.8795-0.0212	-0.0563	1.0000	0.0001	71	0.0071-0.0014	0.3416	1.0000	0.0001	121	0.7554	0.0370	-0.1843	1.0000	0.0001		
22	0.8655-0.0233	-0.0756	1.0000	0.0001	72	0.0048-0.0010	0.3776	1.0000	0.0001	122	0.7770	0.0347	-0.1677	1.0000	0.0001		
23	0.8503-0.0255	-0.0947	1.0000	0.0001	73	0.0026-0.0005	0.4138	1.0000	0.0001	123	0.7972	0.0323	-0.1502	1.0000	0.0001		
24	0.8339-0.0277	-0.1136	1.0000	0.0001	74	0.0006-0.0002	0.4438	1.0000	0.0001	124	0.8162	0.0300	-0.1321	1.0000	0.0001		
25	0.8162-0.0300	-0.1321	1.0000	0.0001	75	0.0000-0.0002	0.4768	1.0000	0.0001	125	0.8339	0.0277	-0.1136	1.0000	0.0001		
26	0.7972-0.0323	-0.1502	1.0000	0.0001	76	0.0028	0.0005	0.4168	1.0000	0.0001	126	0.8503	0.0255	-0.0947	1.0000	0.0001	
27	0.7770-0.0347	-0.1676	1.0000	0.0001	77	0.0048	0.0010	0.3776	1.0000	0.0001	127	0.8655	0.0233	-0.0756	1.0000	0.0001	
28	0.7534-0.0370	-0.1843	1.0000	0.0001	78	0.0071	0.0014	0.3416	1.0000	0.0001	128	0.8795	0.0212	-0.0563	1.0000	0.0001	
29	0.7326-0.0392	-0.2001	1.0000	0.0001	79	0.0097	0.0019	0.3057	1.0000	0.0001	129	0.8924	0.0192	-0.0368	1.0000	0.0001	
30	0.7035-0.0413	-0.2147	1.0000	0.0001	80	0.0126	0.0025	0.2743	1.0000	0.0001	130	0.9042	0.0173	-0.0173	1.0000	0.0001	
31	0.6833-0.0433	-0.2280	1.0000	0.0001	81	0.0158	0.0031	0.2451	1.0000	0.0001	131	0.9149	0.0156	0.0022	1.0000	0.0001	
32	0.6571-0.0451	-0.2538	1.0000	0.0001	82	0.0194	0.0038	0.2179	1.0000	0.0001	132	0.9248	0.0139	0.0219	1.0000	0.0001	
33	0.6299-0.0466	-0.2530	1.0000	0.0001	83	0.0234	0.0046	0.1925	1.0000	0.0001	133	0.9337	0.0124	0.0416	1.0000	0.0001	
34	0.6019-0.0479	-0.2533	1.0000	0.0001	84	0.0278	0.0054	0.1686	1.0000	0.0001	134	0.9418	0.0110	0.0615	1.0000	0.0001	
35	0.5733-0.0489	-0.2647	1.0000	0.0001	85	0.0327	0.0063	0.1458	1.0000	0.0001	135	0.9492	0.0096	0.0817	1.0000	0.0001	
36	0.5441-0.0496	-0.2690	1.0000	0.0001	86	0.0381	0.0073	0.1240	1.0000	0.0001	136	0.9559	0.0084	0.1021	1.0000	0.0001	
37	0.5147-0.0500	-0.2712	1.0000	0.0001	87	0.0441	0.0084	0.1028	1.0000	0.0001	137	0.9619	0.0073	0.1231	1.0000	0.0001	
38	0.4833-0.0500	-0.2712	1.0000	0.0001	88	0.0563	0.0096	0.0821	1.0000	0.0001	138	0.9673	0.0063	0.1447	1.0000	0.0001	
39	0.4559-0.0496	-0.2690	1.0000	0.0001	89	0.0582	0.0110	0.0618	1.0000	0.0001	139	0.9722	0.0054	0.1673	1.0000	0.0001	
40	0.4267-0.0489	-0.2647	1.0000	0.0001	90	0.0663	0.0124	0.0418	1.0000	0.0001	140	0.9766	0.0046	0.1910	1.0000	0.0001	
41	0.3931-0.0479	-0.2533	1.0000	0.0001	91	0.0752	0.0139	0.0219	1.0000	0.0001	141	0.9806	0.0038	0.2164	1.0000	0.0001	
42	0.3701-0.0466	-0.2530	1.0000	0.0001	92	0.0851	0.0156	0.0022	1.0000	0.0001	142	0.9842	0.0031	0.2438	1.0000	0.0001	
43	0.3429-0.0451	-0.2398	1.0000	0.0001	93	0.0938	0.0173	-0.0174	1.0000	0.0001	143	0.9874	0.0025	0.2738	1.0000	0.0001	
44	0.3167-0.0433	-0.2280	1.0000	0.0001	94	0.1076	0.0192	-0.0370	1.0000	0.0001	144	0.9903	0.0019	0.3069	1.0000	0.0001	
45	0.2915-0.0413	-0.2147	1.0000	0.0001	95	0.1205	0.0212	-0.0564	1.0000	0.0001	145	0.9929	0.0014	0.3436	1.0000	0.0001	
46	0.2674-0.0392	-0.2001	1.0000	0.0001	96	0.1345	0.0233	-0.0757	1.0000	0.0001	146	0.9952	0.0010	0.3830	1.0000	0.0001	
47	0.2446-0.0370	-0.1844	1.0000	0.0001	97	0.1497	0.0255	-0.0948	1.0000	0.0001	147	0.9973	0.0005	0.4246	1.0000	0.0001	
48	0.2230-0.0347	-0.1677	1.0000	0.0001	98	0.1661	0.0277	-0.1137	1.0000	0.0001	148	0.9991	0.0002	0.4294	1.0000	0.0001	
49	0.2030-0.0323	-0.1503	1.0000	0.0001	99	0.1838	0.0300	-0.1322	1.0000	0.0001	149	0.9991-0.0002	0.4294	1.0000	0.0001	0.0001	
50	0.1838-0.0300	-0.1322	1.0000	0.0001	100	0.2028	0.0323	-0.1503	1.0000	0.0001							

*** LIFT, WAVE DRAG, AND QUARTER-CHORD MOMENT COEFFICIENTS.....CL = 0.0000, CD = 0.0000, CM = 0.0000 ***

$\gamma/c = 10\%$ $M_\infty = 0$