Actividad 7

Cristian Ernesto

18 de febrero de 2025

1. Tipos de datos y Medidas de tendencia central

1. Clasifique las variables en cualitativas o cuantitativas.

Cualitativas: Nombre y Área de trabajo
Cuantitativas: Edad

2. Determine la media, mediana y moda de la variable "Edad".

Media: Como no tenemos datos de toda una población entonces usaremos las fórmulas muestrales.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{25+30+40+35+28+50+45+38+33+27}{10} = \frac{351}{10} = 35.1$$

Mediana: Ordenamos los datos de manera ascendente y como el total de datos muestrales es par, la mediana será el promedio de los dos valores centrales.

$$25, 27, 28, 30, 33, 35, 38, 40, 45, 50$$

$$\tilde{x} = \frac{33+35}{2} = 34$$

Moda: La moda se define como el valor que más se repite. En este caso, todos los valores cuentan como la moda.

3. Interprete los resultados obtenidos.

Los resultados obtenidos indican que la edad promedio de los empleados en la empresa es de 35 años aproximadamente, lo que sugiere que el personal tiene una distribución de edades relativamente equilibrada. La mediana, que es de 34 años, refuerza esta idea al mostrar que la mitad de los empleados tiene menos de esta edad y la otra mitad más.

2. Medidas de dispersión

1. Calcule la varianza y la desviación estándar de los datos.

Para obtener la varianza y desviación estándar de los datos hay que tomar en cuenta que los valores pertenecen a una muestra, por lo tanto:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2}{7}$$

Media de los datos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{70+85+90+95+88+92+75+80}{8} = \frac{675}{8} = 84.375$$

$$s^2 = \frac{(70-84.375)^2 + (85-84.375)^2 + \cdots + (75-84.375)^2 + (80-84.375)^2}{7} = 75.69$$

Una vez obtenida la varianza, extraemos la raíz cuadrada de esta misma para calcular la desviación estándar.

$$s = \sqrt{75.69} = 8.7$$

2. Interprete la dispersión de los datos.

La varianza y la desviación estándar nos indican qué tan dispersas están las calificaciones con respecto a la media. En este caso, la desviación estándar de aproximadamente 8.7 significa que, en promedio, las calificaciones se alejan alrededor de 8-9 puntos de la media, que es de 84.375. Esto sugiere una dispersión moderada, ya que las calificaciones no están demasiado concentradas ni demasiado dispersas.

3. Probabilidades y Teorema de Bayes

1. Si se elige un empleado al azar y se sabe que tiene conocimientos de IA, ¿cuál es la probabilidad de que sea programador?

$$P(\text{Programador}) = 0.60$$

$$P(\text{Diseñador}) = 0.40$$

$$P(\text{IA}|\text{Programador}) = 0.70 \quad \text{(prob. de que tenga conocimientos en IA dado que es programador)}$$

$$P(\text{IA}|\text{Diseñador}) = 0.30 \quad \text{(prob. de que tenga conocimientos en IA dado que es diseñador)}$$

$$P(\text{Programador}|\text{IA}) = ?$$

$$P(\text{Programador}|\text{IA}) = \frac{P(\text{IA}|\text{Programador}) \cdot P(\text{Programador})}{P(\text{IA})}$$

$$P(\text{IA}) = P(\text{IA} \cap \text{P}) + P(\text{IA} \cap \text{D}) = P(\text{IA}|\text{P}) \cdot P(\text{P}) + P(\text{IA}|\text{D}) \cdot P(\text{D})$$
$$= (0.70)(0.60) + (0.30)(0.40) = 0.42 + 0.12 = 0.54$$

$$P(\text{Programador}|\text{IA}) = \frac{(0.70)(0.60)}{0.54} = \frac{0.42}{0.54} = 0.778$$

Hay un 77.8% de probabilidades de que al seleccionar aleatoriamente a un empleado que tenga conocimiento en IA también sea programador.

4. Distribuciones de probabilidad

1. Calcule la probabilidad de que un lote tenga exactamente 2 defectos.

La distribución de Poisson está dada de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

donde:

$$\lambda = 3 \quad \text{(media de defectos por lote)}$$
$$x = \text{número de defectos}$$
$$P(x = 2) = ? \quad \text{(Probabilidad de que haya exactamente 2 defectos)}$$

Para encontrar esta probabilidad, sustituimos en la fórmula con $x = 2$ y $\lambda = 3$.

$$P(x = 2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = \frac{9e^{-3}}{2} = 0.2240$$

Hay un 22.4% de probabilidades de que el lote contenga exactamente 2 defectos.

2. Calcule la probabilidad de que un lote tenga al menos 1 defecto.

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = ? \quad \text{(Probabilidad de que haya al menos 1 defecto)}$$

Para esta probabilidad, usamos $x = 0$ y $\lambda = 3$.

$$P(x = 0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = \frac{1e^{-3}}{1} = 0.0498$$

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - 0.0498 = 0.9502$$

Hay un 95.02% de probabilidades de que el lote contenga al menos 1 defecto.

5. Funciones de densidad y distribución acumulativa

1. Determine la probabilidad de que X tome un valor menor que 45.

Como la variable X sigue una distribución normal con media $\mu = 50$ y desviación estándar $\sigma = 10$, entonces:

$$X \sim N(50, 10^2)$$

Para calcular la probabilidad de que X tome un valor en específico, al tener la media y desviación estándar, podemos estandarizar la variable para hacer uso de las tablas de la distribución Normal.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Para calcular la probabilidad de que $X < 45$, convertimos $X = 45$ a su valor Z.

$$Z = \frac{45 - 50}{10} = \frac{-5}{10} = -0.5$$

Una vez que obtuvimos la variable en su forma estandarizada, procedemos a buscar su valor en las tablas de distribución normal, en este caso, buscaremos la probabilidad de que $P(Z < -0.5)$.
Por lo tanto, hay un 30.85% de probabilidades de que X tome un valor menor a 45.

2. Determine la probabilidad de que X esté entre 40 y 60.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Para calcular la probabilidad de que X esté entre 40 y 60, convertimos $X = 40$ y $X = 60$ a su valor Z.

$$Z = \frac{40 - 50}{10} = \frac{-10}{10} = -1 \quad \text{y} \quad Z = \frac{60 - 50}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Para obtener esta probabilidad, nos apoyaremos de las tablas de distribución de probabilidad Normal.

$$P(x < 1) = 0.1587$$

$$P(40 < X < 60) = 1 - 0.1587 - 0.1587 = 0.6826$$

Por lo tanto, hay un 68.26% de probabilidades de que X tome un valor entre 40 y 60.

6. Probabilidad condicional

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento, dado que en el primero salió un número impar?

Como el dado es justo, cada número tiene la misma probabilidad de salir.

$$P(\text{Evento}) = \frac{1}{6}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{Pares} = \{2, 4, 6\} \quad \text{Impares} = \{1, 3, 5\}$$

La probabilidad de que en el primer lanzamiento salga un número impar:

$$P(\text{Impar}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

En el segundo lanzamiento, queremos la probabilidad de obtener un número par. Como el lanzamiento del dado es independiente del primero, la probabilidad de obtener un número par es:

$$P(\text{Par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, hay un 50% de probabilidades de obtener un número par en el segundo lanzamiento, dado que en el primero salió impar.

2. Interprete los resultados obtenidos.

El resultado confirma que, dado que el lanzamiento del dado es independiente en cada tirada, la probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento no se ve afectada por el resultado del primero.
Es decir, aunque en el primer lanzamiento haya salido un número impar, el dado sigue siendo justo y en el segundo lanzamiento la probabilidad de obtener un número par sigue siendo 50%.

7. Distribución binomial

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante acierte exactamente 3 respuestas?

La distribución binomial está dada de la siguiente forma:

$$f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$

donde:

$$n = \text{número de preguntas}$$

$$\theta = \text{probabilidad de éxito en cada pregunta}$$

Para encontrar la probabilidad de que el estudiante acierte exactamente 3 respuestas, sustituimos los valores en la distribución binomial con $x = 3$.

$$P(x=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5-3} = (10)\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.0879$$

Hay un 8.79% de probabilidades de que el estudiante acierte exactamente 3 respuestas.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos una respuesta?

$P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = ?$ (Probabilidad de que acierte al menos una respuesta)

Para calcular esta probabilidad primero sustituimos $x = 0$ en la función de probabilidad.

$$P(x=0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5-0} = (1)\,(1)\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024} = 0.2373$$

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - 0.2373 = 0.7627$$

Hay un 76.27% de probabilidades de que el estudiante acierte al menos una respuesta.

8. Regla de Laplace

1. Determine la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

Como en la urna hay 5 bolas rojas y 7 bolas azules, entonces el total de bolas en la urna es de 12 bolas. Dado que hay 5 bolas rojas, la probabilidad de que la bola extraída sea roja es el total de bolas rojas entre el total de bolas en la urna:

$$P(\text{Roja}) = \frac{\text{bolas rojas}}{\text{total de bolas}} = \frac{5}{12} = 0.4167$$

Hay un 41.67% de probabilidades de extraer una bola roja de la urna.

2. Si se extraen dos bolas sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean azules?

Dado que no hay reemplazo, la probabilidad cambia después de la primera extracción. Primero, debemos calcular la probabilidad de que al extraer una bola de la urna, esta sea de color azul.

$$P(\text{Azul}_1) = \frac{\text{bolas azules}}{\text{total de bolas}} = \frac{7}{12}$$

Al momento de extraer una bola azul, la probabilidad cambia al querer extraer otra bola, ya que nos quedarían 6 bolas azules y un total de 11 bolas. Como estos son eventos dependientes, aplicamos la regla de la multiplicación.

$$P(\text{Azul}_2 \cap \text{Azul}_1) = P(\text{Azul}_2|\text{Azul}_1) \cdot P(\text{Azul}_1) = \left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{6}{11}\right) = \frac{7}{22} = 0.3182$$

Hay un 31.82% de probabilidades de que ambas bolas extraídas sean azules, si estas se extraen sin reemplazo.

9. Esperanza matemática

1. Calcule la esperanza matemática de la ganancia del jugador.

Como la variable es discreta, la esperanza matemática se calcula de la siguiente manera:

$$E(X) = \sum x \cdot P(x)$$

donde x es la ganancia en cada escenario y $P(x)$ su probabilidad.
Para calcular la ganancia del jugador tenemos casos, ganar el premio de 1000 dólares con probabilidad de 0.01 o no ganar con probabilidad de 0.99, entonces el cálculo queda de la siguiente manera:

$$E(X) = (990 \cdot 0.01) + (-10 \cdot 0.99) = 9.9 - 9.9 = 0$$

2. Interprete el resultado obtenido.

El valor esperado de la ganancia es 0, lo que significa que, en promedio, el jugador ni gana ni pierde dinero a largo plazo. Esto implica que, si se juega muchas veces, la cantidad de dinero que un jugador gana en premios compensaría exactamente lo que ha gastado en boletos, en promedio.

10. Ley de los grandes números

1. ¿Cuál es el valor esperado de la frecuencia relativa de obtener cara?

El valor esperado de la frecuencia relativa de obtener cara es 0.5 (50%), ya que al ser muchos lanzamientos, la probabilidad de que salga cara siempre se estabiliza.

2. ¿Cómo se relaciona esto con la Ley de los Grandes Números?

La Ley de los Grandes Números establece que, conforme el número de repeticiones de un experimento aumenta, la frecuencia relativa de un evento se acercará a su probabilidad teórica.
En este caso, si lanzamos la moneda pocas veces , la frecuencia relativa puede variar bastante. Pero si lanzamos la moneda muchas veces (como 1000 veces), la frecuencia relativa de obtener cara se acercará a 0.5 , que es la probabilidad real de obtener cara en una moneda justa.