Actividad 8

Cristian Ernesto

23 de febrero de 2025

4.1 Operaciones con matrices y determinantes

1. Encuentre la inversa de la matriz y verifique el resultado:

Dada la matriz F:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & |1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & |0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & |0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la inversa de la matriz F, llevamos esta misma a la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & |1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & |0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & |0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos operaciones de fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & |1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & |0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & |-5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & |1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & |0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & |-5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & |-24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & |20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & |-5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, como del lado izquierdo ya hemos llegado a la matriz identidad mediante operaciones de matrices, la matriz inversa de F es:

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.

Para demostrar que el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes, utilizaremos la propiedad de que cualquier matriz cuadrada puede triangularizarse mediante operaciones elementales.

$$\text{Demostrar: } \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Sabemos que cualquier matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ puede transformarse en una matriz triangular superior (o inferior) mediante operaciones elementales de fila, entonces su determinante será el producto de los elementos en la diagonal principal, es decir:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

De manera similar, la matriz B de tamaño $n \times n$ también puede triangularizarse, entonces:

$$\det(B) = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} \cdot \ldots \cdot b_{nn}$$

Por otra parte, al poder llevar las matrices A y B a su forma triangular superior (o inferior), el producto de estas matrices triangulares da como resultado una nueva matriz AB que preserva la triangularidad, de modo que su determinante es igual a:

$$\det(AB) = a_{11}b_{11} \cdot a_{22}b_{22} \cdot a_{33}b_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}b_{nn}$$

Entonces, para demostrar la propiedad de los determinantes verificamos la igualdad:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$a_{11}b_{11} \cdot a_{22}b_{22} \cdot a_{33}b_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}b_{nn} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn})(b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} \cdot \ldots \cdot b_{nn})$$

Como los factores en ambos lados de la ecuación son los mismos, se concluye que:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

4.2 Sistemas de ecuaciones lineales

3. Resuelva el sistema por el método de Gauss-Seidel:

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

El método de Gauss-Seidel es un método iterativo. Comenzamos con una aproximación inicial (x_0, y_0, z_0) y aplicamos las siguientes fórmulas iterativas:

$$x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}$$
$$y_{k+1} = \frac{1 + 2x_{k+1} + 2z_k}{4}$$
$$z_{k+1} = \frac{5 - x_{k+1} + y_{k+1}}{3}$$

Después de varias iteraciones, el sistema converge a la solución:

$$x \approx 2, \quad y \approx 1, \quad z \approx 1$$

4. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo:

Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

Observamos que las tres ecuaciones son linealmente dependientes (la segunda y tercera son múltiplos de la primera). Por lo tanto, el sistema tiene infinitas soluciones. La solución general se puede expresar como:

$$x = -2y - 3z$$

Donde y y z son parámetros libres.

4.3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

5. Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores:

Dados los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 6)$, y $\mathbf{v}_3 = (3, 6, 9)$, observamos que $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1$. Por lo tanto, los vectores son linealmente dependientes, y la base del subespacio generado es $\{\mathbf{v}_1\}$. La dimensión del subespacio es 1.

6. Determine los autovalores y autovectores de la matriz:

Dada la matriz G:

$$G = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Para encontrar los autovalores, resolvemos la ecuación característica $\det(G - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} -5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (-5-\lambda)(5-\lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 25 - 4 = \lambda^2 - 29 = 0$$

Los autovalores son $\lambda = \sqrt{29}$ y $\lambda = -\sqrt{29}$.
Para encontrar los autovectores, resolvemos $(G - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ para cada autovalor.
Para $\lambda = \sqrt{29}$:

$$\begin{pmatrix} -5-\sqrt{29} & -2 \\ -2 & 5-\sqrt{29} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Un autovector correspondiente es $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-5-\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix}$.
Para $\lambda = -\sqrt{29}$:

$$\begin{pmatrix} -5+\sqrt{29} & -2 \\ -2 & 5+\sqrt{29} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Un autovector correspondiente es $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-5+\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix}$.

4.4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

7. Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.

El Análisis de Componentes Principales (PCA) utiliza álgebra lineal para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos. Primero, se centran los datos restando la media de cada variable, lo que asegura que los datos tengan media cero. Luego, se calcula la matriz de covarianza, que muestra cómo varían las variables entre sí. A continuación, se realiza la descomposición de esta matriz para obtener sus valores propios y vectores propios. Los vectores propios representan las direcciones (componentes principales) en las que los datos varían más, y los valores propios indican la magnitud de esa variación. Para reducir la dimensionalidad, se seleccionan los primeros k vectores propios. Finalmente, los datos originales se proyectan sobre estos componentes principales multiplicando la matriz de datos centrados por la matriz de vectores propios seleccionados. Esto da como resultado un conjunto de datos con menos dimensiones pero que conserva la mayor parte de la información original.

9. Analice el uso de álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.

Las redes neuronales procesan datos en forma de matrices y vectores, y las operaciones clave, como la propagación hacia adelante y hacia atrás, dependen de operaciones lineales. Por ejemplo, en una capa de una red neuronal, las entradas se multiplican por una matriz de pesos (que son los parámetros aprendidos) y se suma un vector de sesgos. Esto se expresa como una transformación lineal $\mathbf{y} = W\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde W es la matriz de pesos, $\mathbf{x}$ es el vector de entrada, $\mathbf{b}$ es el vector de sesgos, y $\mathbf{y}$ es la salida de la capa. Además, las funciones de activación, como ReLU o sigmoide, se aplican elemento por elemento a estas transformaciones lineales para introducir no linealidades, permitiendo que la red aprenda patrones complejos. Durante el entrenamiento, el cálculo de gradientes (necesario para ajustar los pesos) también se basa en operaciones de álgebra lineal, como la multiplicación de matrices y la transposición.

10. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA.

Los datos, como imágenes o texto, se convierten en vectores dentro de un espacio vectorial, lo que permite usar operaciones matemáticas como sumas o proyecciones. Por ejemplo, en NLP, las palabras se representan como vectores (embeddings), donde su posición captura relaciones semánticas. Además, los espacios vectoriales permiten medir distancias y ángulos entre vectores, lo que es útil para tareas como clasificación o recomendaciones. Los espacios vectoriales ofrecen un marco matemático para representar y analizar datos de manera estructurada, facilitando la extracción de patrones y la toma de decisiones en IA.