M2

Matemàtiques 2 (FIB)

APUNTS EXAMEN FINAL (80%)

Profe: MARC
Autor: MARC

Teoria

SUCCESSIONS

SUCCESSIONS FITADES	DIFICULTAT ★★☆☆☆

Successions fitades inferiorment

Una successió a_n està fitada inferiorment si tots els seus termes són majors o iguals que un cert nombre K, que anomenem cota inferior de la successió.

$a_n \geq K$ *per a tota n natural*

La cota inferior més gran és l'extrem inferior o ínfim.

Successions fitades superiorment

Una successió a_n està fitada superiorment si tots els seus termes són menors o iguals que un cert nombre K', que anomenem cota superior de la successió.

$a_n \leq K'$ *per a tota n natural*

A cota superior més petita se l'anomena extrem superior o suprem.

Exemple

Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = -2/3$ i $3\,a_{n+1} = 2 + a_n^3$ si $n \geq 1$.

a) Proveu que $-2 \leq a_n \leq 1$, per a tot $n \geq 1$.

Ho demostrem per inducció:

Pas base (comprovem per a n = 1): $-2 \leq -2/3 \leq 1$

Pas inductiu:

Assumim $-2 \leq a_n \leq 1$ *per a alguna* $n \geq 1$ *(H.I.) i volem demostrar el cas n+1:* $-2 \leq a_{n+1} \leq 1$

Partim de la H.I:

$$-2 \leq a_n \leq 1$$

$$\frac{2-2^3}{3} \leq \frac{2+a_n^3}{3} \leq \frac{2+1^3}{3}$$

Elevem al cub, sumem 2 i dividim per 3 a tot arreu

$$-2 \leq a_{n+1} \leq 1$$

Operem i substituïm, hem arribat on volíem q.e.d.

SUCCESSIÓ MONÒTONA (CREIXENT/DECREIXENT)	DIFICULTAT ★★☆☆☆

Donada una successió $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diem que és creixent si tot element de la successió és menor que els següents, és a dir, si $a_n \le a_{n+1}$ per a tot n.

Anàlogament diem que és decreixent si tot element de la successió és més gran que els següents, $a_n \ge a_{n+1}$ per a tot n.

Exemple

Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = -2/3$ i $3\,a_{n+1} = 2 + a_n^3$ si $n \ge 1$.

b) Proveu que $\{a_n\}$ és creixent.

Hem de demostrar que $a_n \le a_{n+1}$ per a tota n. Ho fem per inducció:

<u>Pas base (comprovem per a n = 1):</u> $a_1 \le a_2$

<u>Pas inductiu:</u>

Assumim $a_n \le a_{n+1}$ per a alguna n ≥ 1 (H.I.) i volem demostrar el cas n+1: $a_{n+1} \le a_{n+2}$

Partim de la H.I.:

$$a_n \le a_{n+1}$$

$$\frac{2+a_n^3}{3} \le \frac{2+a_{n+1}^3}{3}$$

Elevem al cub, sumem 2 i dividim per 3 a tot arreu

$$a_{n+1} \le a_{n+2}$$

<u>Substituïm per la fórmula de la successió, q.e.d.</u>

TEOREMA DE LA CONVERGÈNCIA MONÒTONA	DIFICULTAT ★☆☆☆☆

Tota successió successió monòtona decreixent i fitada inferiorment és convergent i el seu límit és igual a l'ínfim de la successió.

Tota successió successió monòtona creixent i fitada superiorment és convergent i el seu límit és igual al suprem de la successió.

Exemple

La successió dels dos exemples anteriors és creixent i fitada superiorment, per tant és convergent.

LÍMIT DE SUCCESSIONS MONÒTONES	DIFICULTAT ★★☆☆☆

Sigui a_n una successió monòtona (creixent o decreixent)

$$Sigui\ L = \lim_{n \to +\infty} a_n,\ llavors$$

$$L = \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} a_{n+1}$$

Exemple

Calculem el límit de la successió següent (assumim que és monòtona decreixent, fitada inferiorment per 1/2)

$$a_1 = 10$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}$$

Com que a_n és monòtona

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = l$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{l} \Rightarrow l^2 = l \Rightarrow l^2 - l = 0$$

$$\Rightarrow l(l-1) = 0 \Rightarrow l = 0 \vee l = 1$$

Com que a_n és decreixent i està fitada inferiorment per 1/2, el límit no pot ser 0. Per tant el límit és 1

CRITERI DEL SÀNDVITX	DIFICULTAT ★★★★★

a) *Criteri del sandvitx. Siguin* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tres successions de nombres reals tals que:*

$$\left.\begin{array}{l} \triangleright\ \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq b_n \leq c_n\,, \\ \triangleright\ a_n \text{ convergent i } \ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n\,, \\ \triangleright\ c_n \text{ convergent i } \ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} c_n\,, \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textbf{si} \text{ la successió } b_n \text{ és convergent} \\ \text{el seu límit compleix} \\ \ell_1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq \ell_2\,. \end{array}\right.$$

En particular, si $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, *resulta que* b_n *és convergent i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Exemple

Volem calcular el límit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, que és una indeterminació del tipus $\dfrac{0}{0}$.

Prenem la relació $\cos x \sin x \leq x \leq \tan x$

Mitjançant càlculs successius esdevé en $\cos x \leq \dfrac{x}{\sin x} \leq \dfrac{1}{\cos x}$

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

Sabem que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$ i que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

per la qual cosa, pel teorema del sandvitx, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

REGLA DE L'HÔPITAL	DIFICULTAT ★★☆☆☆

Si *f* i *g* són dues funcions derivables, i a més

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l, \text{ on } l\in\mathbb{R} \text{ o bé } l=-\infty \text{ o } l=+\infty$$

Aleshores:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

Indeterminacions que s'acostumen a resoldre amb l'hôpital

- 0 entre 0
- infinit entre infinit

Exemple 1

Exemple de resolució d'una indeterminació $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

Exemple 2

Exemple de resolució d'una indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/(2\sqrt{x})}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}=\infty.$$

CRITERI DEL QUOCIENT	DIFICULTAT ★★★☆☆

Sigui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$Si\ \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \Longrightarrow \begin{cases} si \quad l<1 & \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ si \quad l>1 & \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \end{cases}$$

$(a_n \neq 0,\ \forall\, n \geq n_0 \in \mathbb{N})$

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{4^n n!}$$

$a_n = \dfrac{n^n}{4^n n!}$ *y* $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!}$. *Por lo tanto*

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!} \Big/ \frac{n^n}{4^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1} 4^n\, n!}{4^{n+1}(n+1)!\, n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{4\,(n+1)\, n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{4\, n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{4} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{4}$$

Como $l = \dfrac{e}{4} < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{4^n n!} = 0.$

INDETERMINACIÓ 1^{∞}	DIFICULTAT ★ ★ ★ ☆ ☆

Quan tenim una indeterminació tipus 1 elevat a infinit, apliquem la fórmula:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$$

Exemple

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{2x+1}{x+2}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{2x+1-x-2}{x+2}\right)} = e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+2}\right)} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

CRITERI DE L'ARREL–QUOCIENT	DIFICULTAT ★★★☆☆

Sigui a_n una successió, el límit de l'arrel n-éssima d'aquesta successió es pot calcular amb la fórmula següent:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Exemple

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{n!}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{n!}{(2n)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!(n+1)!}{(2n+2)!n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

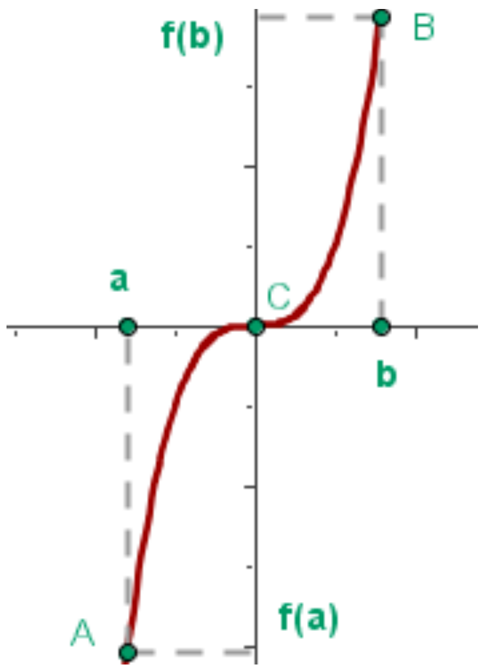
TEOREMA DE BOLZANO	DIFICULTAT ★☆☆☆☆

Si:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua en un interval tancat $[a,b]$
- u és un nombre real tal que $f(a) < u < f(b)$ o $f(a) > u > f(b)$

Aleshores:

- Existeix alguna $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = u$



Exemple

Comproveu que l'equació $x^2 + x - 1 = 0$ té almenys una solució real en l'interval [0,1].

És contínua en [0,1] per ser polinòmica.

$f(0) = 0^2 + 0 - 1 = -1 < 0$

$f(1) = 1^2 + 1 - 1 = 1 > 0$

Pel teorema de Bolzano, existeix un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

TEOREMA DE ROLLE	DIFICULTAT ★★☆☆☆

Si:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua en un interval tancat $[a,b]$
- f és derivable en l'interval obert (a,b)
- $f(a) = f(b)$

Aleshores:

- Existeix algun nombre $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

Exemple

Comproveu que l'equació $x^2 + x - 1 = 0$ té exactament UNA solució real en l'interval [0,1].

Reducció a l'absurd: Suposem que té 2 solucions a, b en l'interval [0,1], amb això es verifiquen les 3 hipòtesis del teorema de Rolle.

Per tant, l'equació $f'(x) = 0$ ha de tenir solució per algun $c \in (a,b)$.

La derivada és $f'(x) = 2x + 1$, que només té una solució: $x = -1/2$. Però $-1/2$ no está dins l'interval [0,1]. Contradicció.

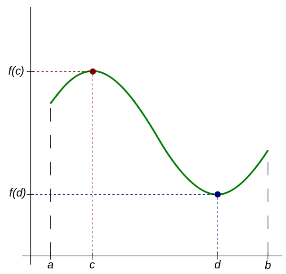
TEOREMA DE WEIERSTRASS	DIFICULTAT ★☆☆☆☆

Si:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua en un interval tancat $[a,b]$

Llavors:

- f és fitada
- f té un màxim i un mínim absoluts



Teoria

APROXIMACIÓ

MÈTODE DE LA BISECCIÓ	DIFICULTAT ★☆☆☆☆

Donada una funció f(x) contínua en un intèrval tancat [a,b]

Per trobar una aproximació d'un valor x demanat, realitzem n vegades:

$$c = \frac{(a+b)}{2}$$

Si f(c) < 0, aleshores a = c;

Si f(c) > 0, aleshores b = c;

La iteració n-èssima és una aproximació amb error E.

Fórmula de l'error

Donada una funció f(x) contínua en un intèrval tancat [a,b] i un error E, podem calcular les n iteracions necessàries amb la fórmula següent:

$$\frac{|b-a|}{2^n} < E$$

MÈTODE DE NEWTON O DE LA TANGENT	DIFICULTAT ★★☆☆☆

Donada una funció f(x) contínua en un intèrval tancat [a,b] i un error E

Prenem x_0 = a i calculem

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

fins que $|x_{n+1} - x_n| < E$ i $f(x_{n+1}) < E$

MÈTODE DE LA SECANT	DIFICULTAT ★★☆☆☆

Prenem $x_0 = a$ i $x_1 = b$ i calculem

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

fins que $|x_{n+1} - x_n| < E$ i $f(x_{n+1}) < E$

POLINOMI DE TAYLOR	DIFICULTAT ★★★☆☆

Si f(x) és una funció que és derivable **n** vegades en l'interval tancat *[a, x]* i **n+1** en l'interval obert *(a, x)*, aleshores podem aproximar f amb **grau n** del polinomi de **centrat en a** amb la següent fórmula:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Fórmula de la fita superior de l'error (Residu de Lagrange)

$$\mathrm{E} < \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(amb $x < \xi < a$)

Provem ξ=x i ξ=a. El valor que faci que E sigui més gran és el "bo".

D'aquesta manera es troba "l'error més gran possible", és a dir, la fita superior de l'error.

REGLA DE BARROW	DIFICULTAT ★★★☆☆
Si:	

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua en un interval tancat $[a,b]$
- $F(x)$ és qualsevol funció primitiva de f, és a dir $F'(x) = f(x)$

Aleshores:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Utilitat

Es fa servir per calcular l'àrea del recinte limitat entre funcions

Exemple

$$\int_{-1}^{1}(x+1)\cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1^2}{2}+1\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right) =$$

$$=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}-1\right)=2\ u^2$$

TEOREMA FONAMENTAL DEL CÀLCUL	DIFICULTAT ★★★★☆

Si:

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua en un interval tancat $[a,b]$

Aleshores:

- La funció $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ és contínua i derivable.

- La funció derivada és $F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$

En general, si $F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$, amb $u(x)$ i $v(x)$ funcions derivables, fent ús de la regla de la cadena i el teorema fonamental es té $F'(x) = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$ per a tot x de $[a,b]$.

Utilitat

Serveix per derivar integrals definides

Exemple

Sigui $F(x) = \int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt$, *la funció* $\sin\sqrt{t}$ *és contínua per a tot real* $t > 0$, *llavors pel teorema del fonamental del càlcul, la funció* $F(x)$ *és derivable i la seva derivada és* $F'(x) = 2x\sin\sqrt{x^2} = 2x\sin x$ *per a* $x > 0$.

REGLA DELS TRAPEZIS (APROXIMACIÓ INTEGRAL)	DIFICULTAT ★★★☆☆

Amb n trapezis:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \text{ per } k = 0, 1, \ldots, n$$

Utilitat

Serveix per aproximar integrals definides

Fórmula de l'error

$$\mathrm{E} < \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

on ξ és algún nombre entre *a* i *b* i *n* el nombre de trapezis

Exemple

Aproximació de $\int_0^2 3x\,dx$ amb 6 trapezis

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + f(b)]$$

$$\int_0^2 3x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}[3(0) + 2[3(0+1\cdot\frac{1}{3})] + 2[3(0+2\cdot\frac{1}{3})] + 2[3(0+3\cdot\frac{1}{3})] + 2[3(0+4\cdot\frac{1}{3})] + 2[3(0+5\cdot\frac{1}{3})] + 3(2)] = 6$$

REGLA DE SIMPSON (APROXIMACIÓ INTEGRAL)	DIFICULTAT ★★★☆☆

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]$$

$$h=(b-a)/n.$$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \text{ per } k=0,1,\dots,n$$

Fórmula de l'error

$$E < \frac{h^4}{180}(b-a)\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

$$h=(b-a)/n.$$

Exemple

Fita superior de l'error comès en aproximar per Simpson amb 4 iteracions

$$\int_1^3 e^x dx$$

Substituïm a la fórmula de l'error:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$$

Com que $f^{IV}(x)=e^x$, substituïm $\xi=3$, ja que és el valor que maximitza

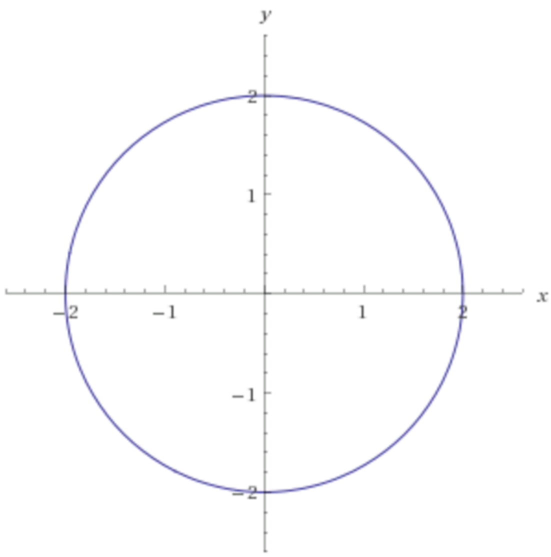
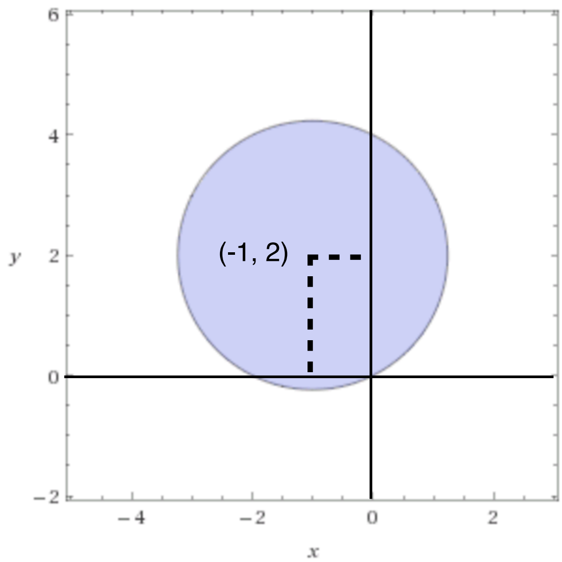
$$\frac{(\frac{1}{2})^4}{180}(2)(e^3)=0.0139482895299914$$

FÓRMULA DEL CERCLE	DIFICULTAT ★☆☆☆☆

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Centre de la circumferència: (a, b)

Radi: r

Exemple 1	***Exemple 2***
$x^2+y^2=4$  Centre: (0, 0) Radi: 2	$(x+1)^2+(y-2)^2\leq 5$  Centre: (-1, 2) Radi: $\sqrt{5}$

FRONTERA/INTERIOR/ADHÈRENCIA	DIFICULTAT ★ ☆ ☆ ☆ ☆
Exemple	
$(x+1)^2+(y-2)^2 \leq 5$ *Els punts de la frontera són $(x+1)^2 + (y-2)^2$ **=** 5* *Els punts de l'interior són $(x+1)^2 + (y-2)^2$ **<** 5* *Els punts de l'adherència són $(x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$*	

CONJUNT OBERT/TANCAT	DIFICULTAT ★ ☆ ☆ ☆ ☆
Un conjunt $(A \subseteq \Re^n)$ es obert si no conte cap punt de la seva frontera. Es a dir, si $(x \in Fr(A) \Rightarrow x \notin A)$	
Exemple	
$(x+1)^2+(y-2)^2 \leq 5$ *És un conjunt tancat, tots els punts de la frontera pertanyen al conjunt*	
Nota	
Pot ser que un conjunt no sigui ni obert ni tancat.	

CONJUNT COMPACTE	DIFICULTAT ★ ☆ ☆ ☆ ☆
Un conjunt és compacte si i només si és tancat i fitat	
Exemple	
$(x+1)^2+(y-2)^2 \leq 5$ - *És tancat (exemple anterior)* - *És fitat, ja que una bola de centre (-1, 2) de radi $\sqrt{5}$ el conté* *Per tant, el conjut és un recinte compacte*	

Teoria

DERIVADES. VECTOR GRADIENT

PLA TANGENT	DIFICULTAT ★★★☆☆

L'equació del pla tangent a la superfície $z = \varphi(x, y)$ en el punt $(a, b, \varphi(a, b))$ és:

$$z = \varphi(a,b) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) \cdot (x-a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) \cdot (y-b).$$

RECTA NORMAL	DIFICULTAT ★★★☆☆

La equació contínua de la recta normal a superfície $z = \varphi(x, y)$ en el punt $(a, b, \varphi(a, b))$ és:

$$\frac{x-a}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b)} = \frac{y-b}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b)} = \frac{z-\varphi(a,b)}{-1}$$

FUNCIONS DE CLASSE C^n	DIFICULTAT ★★☆☆☆

*Una funció és de classe **C^1** si les seves derivadas parcials són contínues.*

*Si les derivadas parcials n-èssimes també són contínues és de classe **C^n***

*Les funcions polinòmiques son de classe **C^∞** en tot R^2*

DERIVADES PARCIALS

DIFICULTAT
★★☆☆☆

La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ d'una funció de diverses variables és la derivada respecte la variable x. La resta de variables es consideren constansts

Exemple

$$z = x^2 y - 3xy + 5y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 3y + 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 3y$$

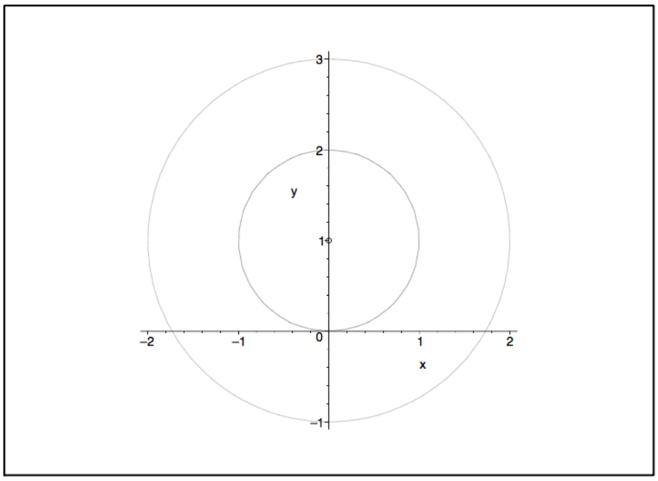
CORBES DE NIVELL

DIFICULTAT
★☆☆☆☆

Considereu la la funció $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$.

a) Feu un esboç de les corbes de nivell de $z = f(x,y)$ corresponents als nivells $z = -2, -1, 0, 3$.

La corba de nivell $f(x,y) = 3$ és un cercle de radi 2 centrat en $(0,1)$ d'equació $x^2+(y-1)^2 = 4$; la corba de nivell $f(x,y) = 0$ és un cercle de radi 1 centrat en $(0,1)$ d'equació $x^2+(y-1)^2 = 1$; la corba de nivell $f(x,y) = -1$ és el punt $(0,1)$ d'equació $x^2 + (y-1)^2 = 0$ i la corba de nivell $f(x,y) = -2$ no té cap punt.



VECTOR DIRECTOR	DIFICULTAT ★ ☆ ☆ ☆ ☆
Donats dos punts A = (1,1) i B = (4,2)	

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-1, 2-1) \Rightarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (3,1)}$$

MÒDUL D'UN VECTOR	DIFICULTAT ★ ☆ ☆ ☆ ☆

$$\text{Si } \vec{v} = (v_1, v_2); \ \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

NORMALITZACIÓ DE VECTOR (Vector unitari)	DIFICULTAT ★ ☆ ☆ ☆ ☆

El **vector normalitzat** o **versor** $\hat{\boldsymbol{u}}$ d'un vector diferent de zero $\boldsymbol{u}$ és el vector unitari codireccional amb $\boldsymbol{u}$, és a dir

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}.$$

Utilitat

Pel càlcul de derivades direccionals, cal un vector direcció normalizat

VECTOR GRADIENT	DIFICULTAT ★★★☆☆
Donada una funció *f(x,y)* de 2 variables, i un punt P. El gradient de *f* en el punt P s'obté de la fórmula: $$\nabla f(P) = (\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(P), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(P))$$	
Utilitat	
El gradient és la direcció de creixement màxim de la funció des d'un punt	

DERIVADA DIRECCIONAL	DIFICULTAT ★★☆☆☆
$D_{\vec{v}} f(P) = \vec{\bigtriangledown} f(P) \cdot \vec{v}'.$	

DERIVADA DIRECCIONAL MÀXIMA EN UN PUNT	DIFICULTAT ★★☆☆☆
El valor de la derivada direccional màxima de f en un punt és el mòdul del vector gradient $\|\|\vec{\bigtriangledown} f(P)\|\|$	

Teoria

OPTIMITZACIÓ

PUNTS CRÍTICS	DIFICULTAT ★★☆☆☆

Suposem que volem determinar els extrems relatius d'una funció de dues variables f(x, y) amb derivades parcials contínues fins a ordre 2.

En aquest cas, els possibles extrems es produeixen en els anomenats punts crítics, que són punts que anul·len simultàniament les derivades parcials primeres de f (x, y).

Exemple

Considerem la funció:

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

Les seves derivades parcials són:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y, \qquad f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

Muntem el sistema i el resolem:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

$$x^4 - x = 0.$$

$$x\left(x^3 - 1\right) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 1.$$

Substituïnt, trobem que els punts crítics són (0,0) i (1,1)

EXTREMS CONDICIONATS SOBRE UNA CORBA **MULTIPLICADORS DE LAGRANGE**	DIFICULTAT ★★★★☆

Exemple

Es vol trobar els valors màxims de

$$f(x, y) = x^2 y$$

amb la condició que les coordenades *x* i *y* romanguin dins el cercle de radi √3 centrat a l'origen, és a dir

$$x^2 + y^2 = 3.$$

Com que només hi ha una condició, s'utilitza només un multiplicador, λ.

A partir de la restricció, es defineix la funció *g*(*x*, *y*):

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 3.$$

La funció *g* és idènticament zero sobre el cercle de radi 3. Així, es pot sumar qualsevol múltiple de *g*(*x*, *y*) a *f*(*x*, *y*) deixant inalterada *f*(*x*, *y*) a la regió d'interès (damunt el cercle on se satisfà la restricció original). Siguin

$$\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 y + \lambda(x^2 + y^2 - 3).$$

Els valors crítics de Λ tenen lloc on el seu gradient és zero. Les derivades parcials són

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda}{\partial x} &= 2xy + 2\lambda x &&= 0, \qquad \text{(i)}\\
\frac{\partial \Lambda}{\partial y} &= x^2 + 2\lambda y &&= 0, \qquad \text{(ii)}\\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 3 &&= 0. \qquad \text{(iii)}
\end{aligned}$$

MATRIU HESSIANA I CLASSIFICACIÓ PUNTS CRÍTICS	DIFICULTAT ★★★☆☆

Considerem les derivadas parcials segones de f:

$$D_{11}\,f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y),\qquad D_{12}\,f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y),$$

$$D_{21}\,f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y),\qquad D_{22}\,f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y).$$

La matriu Hessiana es defineix per:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} D_{11}\,f(x,y) & D_{12}\,f(x,y) \\ D_{21}\,f(x,y) & D_{22}\,f(x,y)\end{pmatrix}.$$

Exemple

Considerem la funció

$$f(x,y)=4+x^3+y^3-3xy.$$

La matriu hessiana és:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y\end{pmatrix}.$$

MATRIU HESSIANA I CLASSIFICACIÓ PUNTS CRÍTICS	DIFICULTAT ★★★☆☆

- *Si D11 f(x_c, y_c) > 0 yidet [H(x_c, y_c)] > 0, aleshores f té un **mínim relatiu** en (x_c, y_c).*
- *Si D11 f(x_c, y_c) < 0 i det [H(x_c, y_c)] > 0, aleshores f té un **màxim relatiu** en (x_c, y_c).*
- *Si det [H(x_c, y_c)] ≠ 0 i no estem en cap del casos anteriors, aleshores f té un **punt de sella** en (x_c, y_c).*
- *Si det [H(x_c, y_c)] = 0, és a dir, quan la matriu Hessiana H(x_c, y_c) és singular, el criteri no aplica.*

Exemple

Considerem la funció

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

La matriu hessiana és:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Sabem de l'exemple anterior que els punts crítics són P1=(0,0) i P2=(1,1)

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det[H(0,0)] = -9 \neq 0, \quad D_{11}\, f(0,0) = 0,$$

Per tant, (0,0) és un punt de sella de f

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D_{11} f(1,1) = 6 > 0, \quad \det[H(1,1)] = 27 > 0.$$

Per tant, (1,1) és un mínim relatiu de f

Acadèmia ASES

www.asesacademia.com

C/ González Tablas, 7

93 204 62 56