

Física II (62.03 – 82.02)

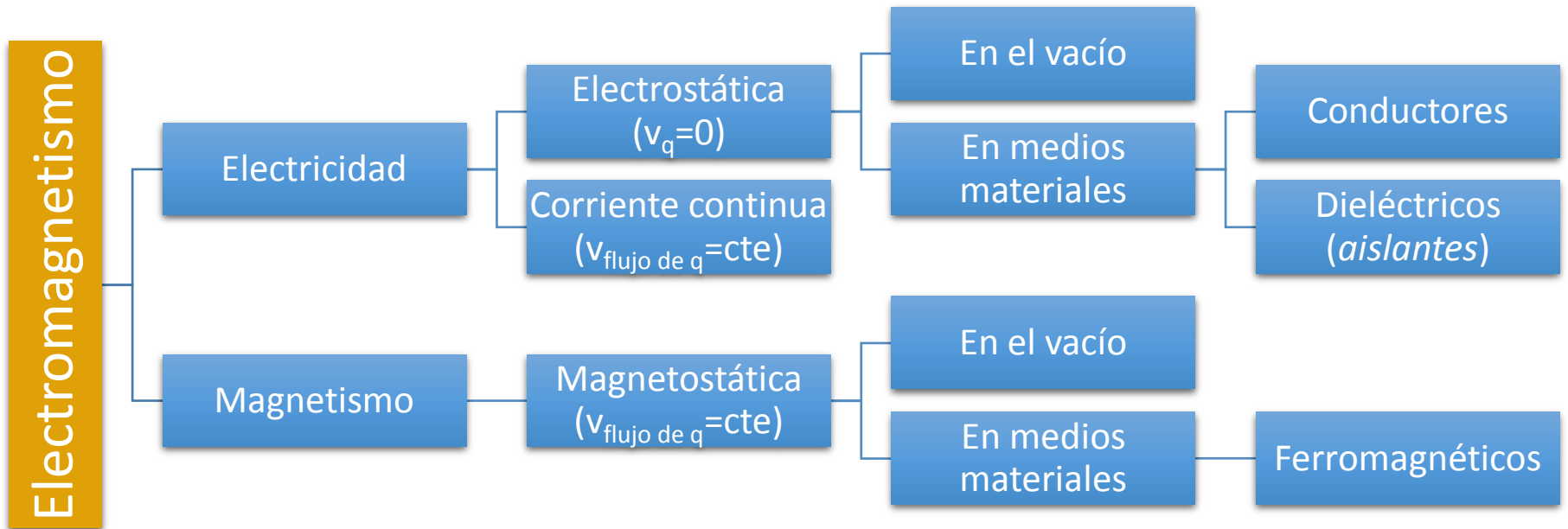
Electromagnetismo Inducción electromagnética

Josefina M. Silveyra

Repaso

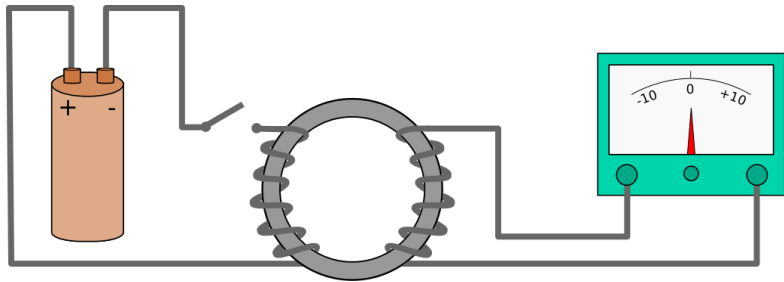
- Electrostática vs Magnetostática (tabla comparativa)
- Circuitos magnéticos:
- Toroide en vacío vs con núcleo ferromagnético blando lineal, con devanado simétrico o asimétrico
- Aproximación de núcleo delgado
- Ley de Hopkinson
- Circuito magnético con cambios de medio y/o sección (reluctancias en serie). Ej.: entrehierro
- Circuito magnético con distintos materiales contiguos (reluctancias en paralelo)
- Circuito magnético de núcleo con histéresis y entrehierro





Inducción electromagnética

- Fenómeno descubierto en 1831 por Faraday:

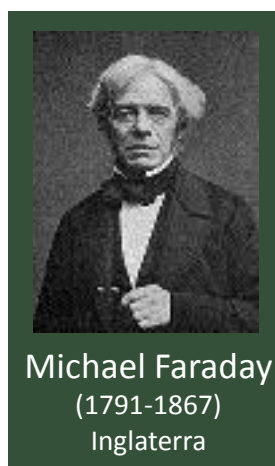


Batería Núcleo de hierro Galvanómetro

Al cerrar y al abrir la llave, observó una corriente transitoria por el galvanómetro

“Coil A was capable of being connected to a trough and coil B was connected to a Galvanometer. When all was ready, connected the ends of one of the pieces on A side with battery; immediately a sensible effect on the needle. It oscillated and settled at last in the original position. On breaking connection of A side with battery again a disturbance of the needle wave apparently short and sudden.”

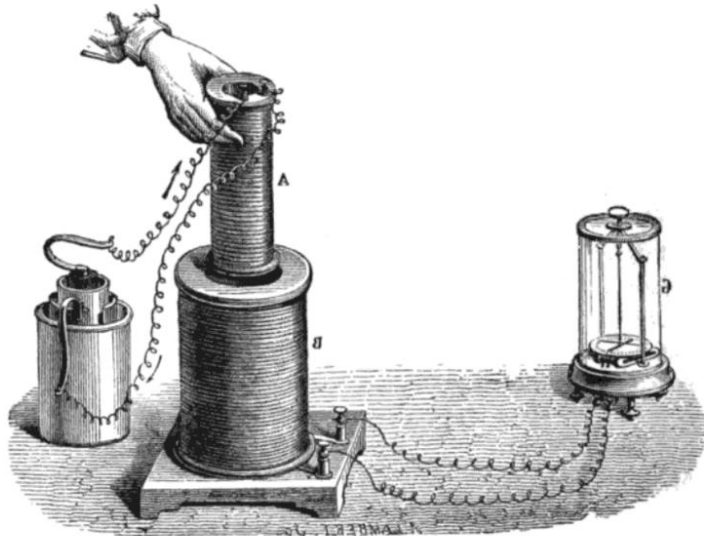
Faraday, 1831.



Michael Faraday
(1791-1867)
Inglaterra



- Otro de los experimentos realizados por Faraday:



Batería Solenoides Galvanómetro

Al introducir (y al retirar) el solenoide A en el (fuera del) solenoide B, observó una corriente transitoria por el galvanómetro

Obs.: Notar que en ambos experimentos, los dos circuitos están desconectados eléctricamente entre sí.

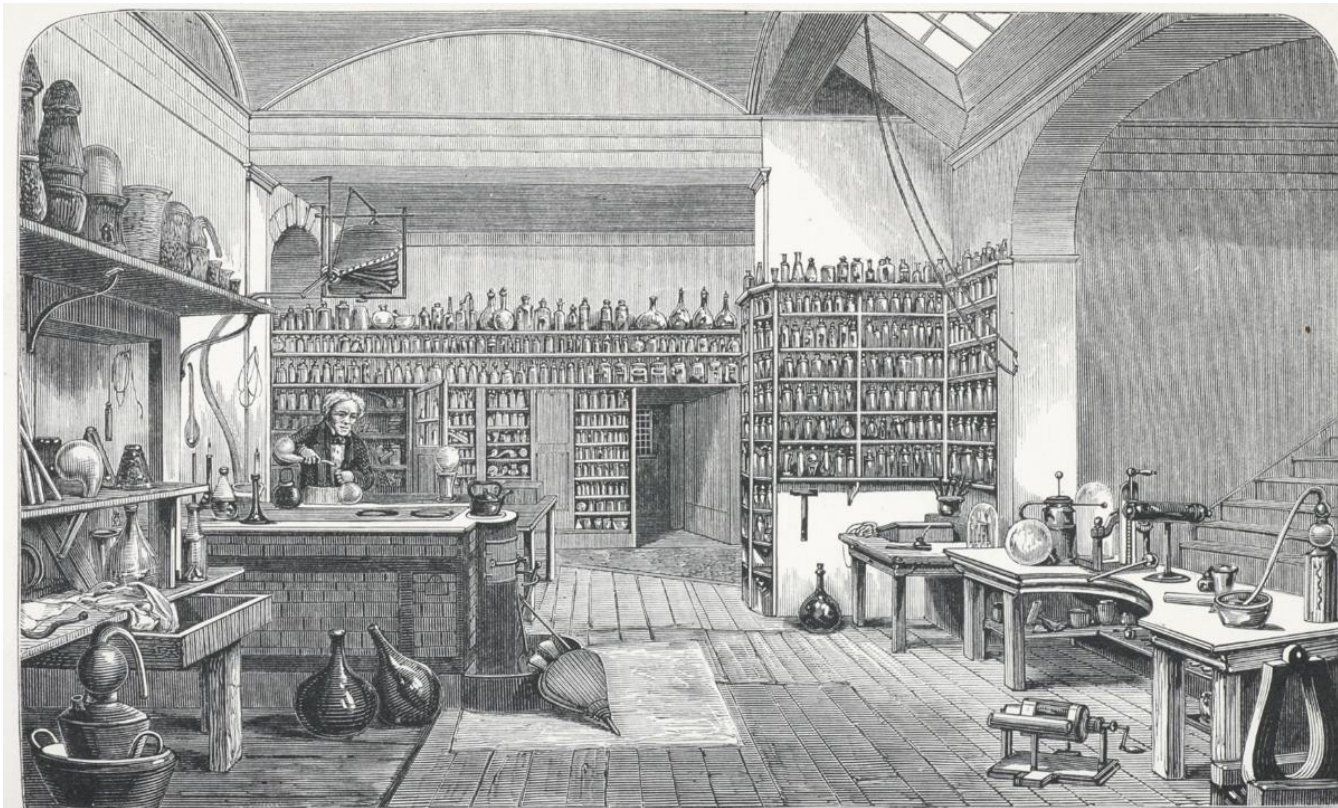
Ley de Faraday

En un camino “cerrado, conductor y filiforme” se induce una fuerza electromotriz (*fem*) proporcional a la variación de flujo magnético concatenado por el camino.

$$\varepsilon_{ind} = k \frac{d\phi_B}{dt}$$

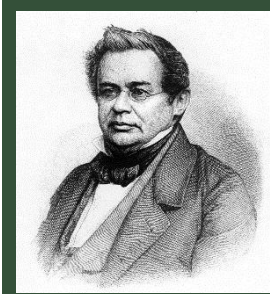
Obs: Después extenderemos la definición de *fem inducida* para caminos no necesariamente cerrados ni conductores.

Repaso: *fem* (ε) [volts]: trabajo por unidad de carga, realizado sobre una carga a lo largo de un camino cerrado. Ejemplos de agentes que realizan dicho trabajo: batería electroquímica, luz (en celda fotovoltaica), inducción electromagnética.



FARADAY'S LABORATORY AT THE ROYAL INSTITUTION.

Ley de Lenz

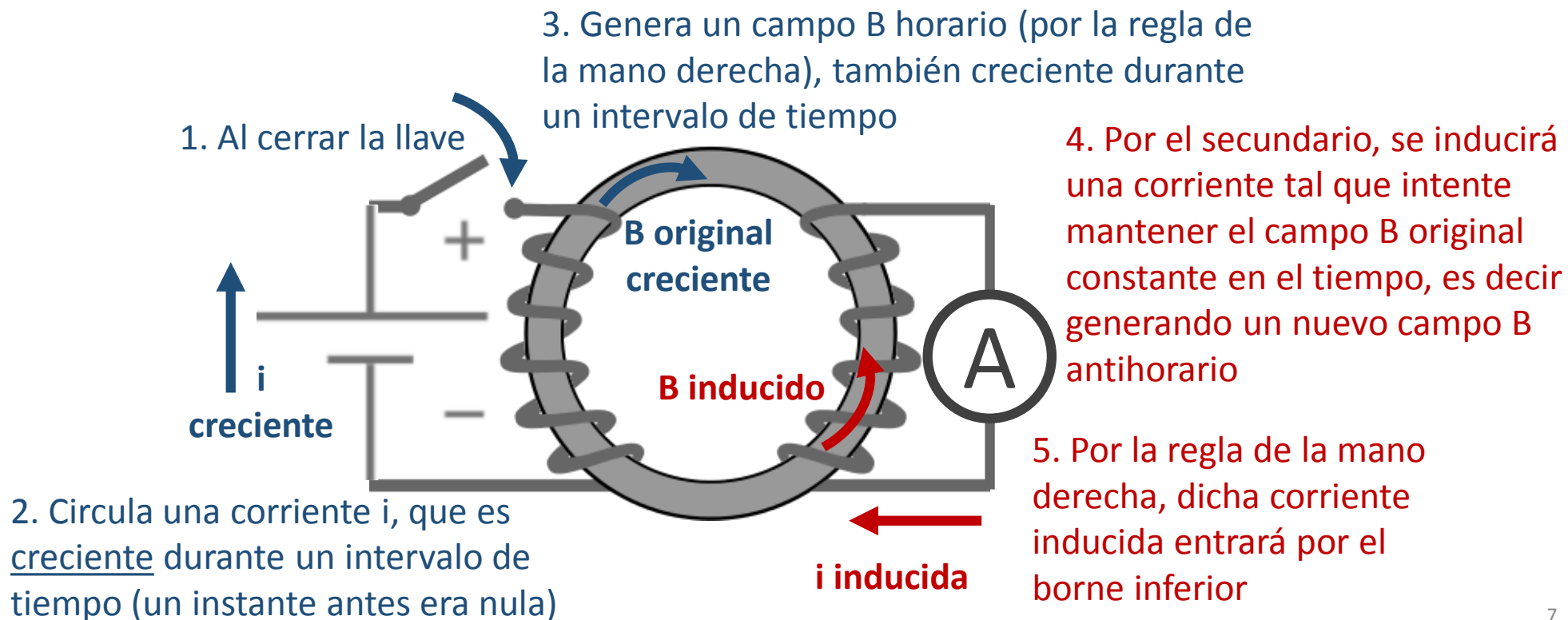


Emil Lenz
(1804-1865)
Rusia

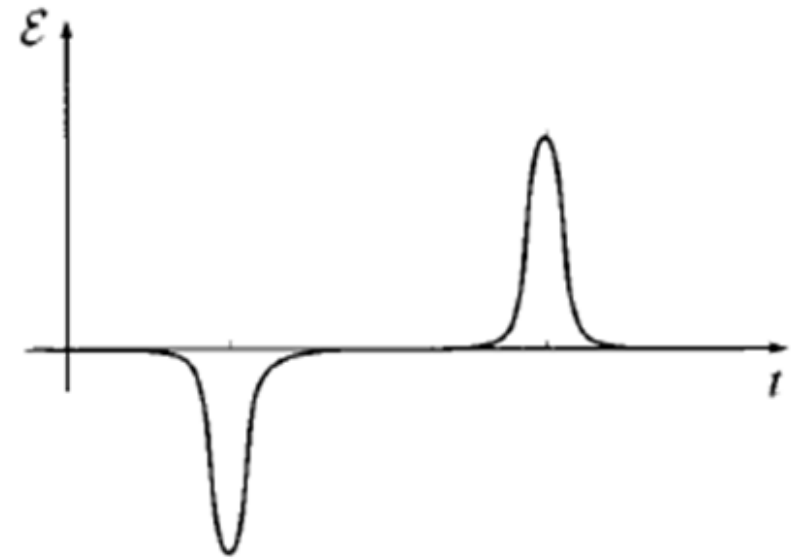
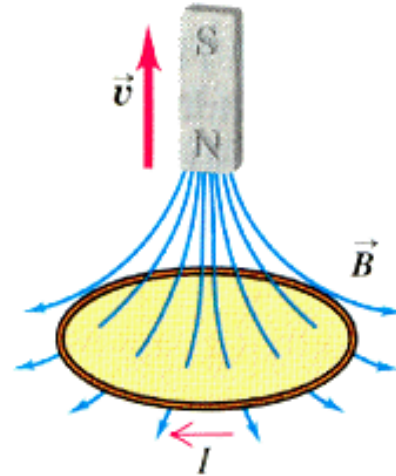
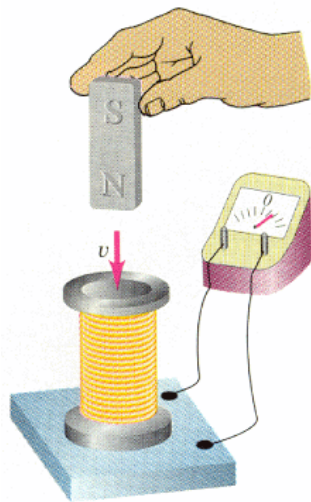
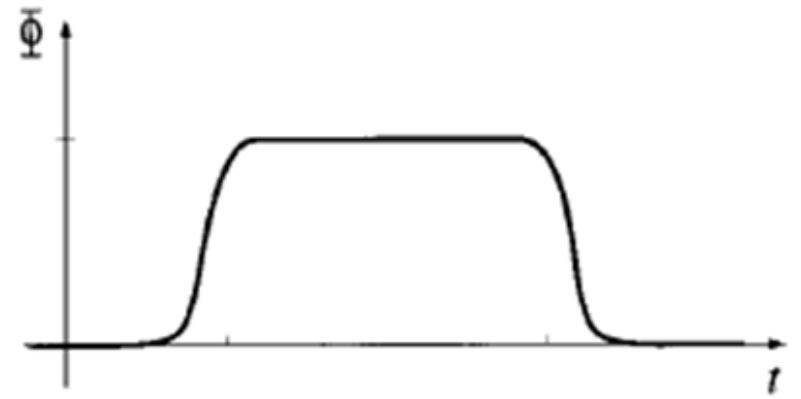
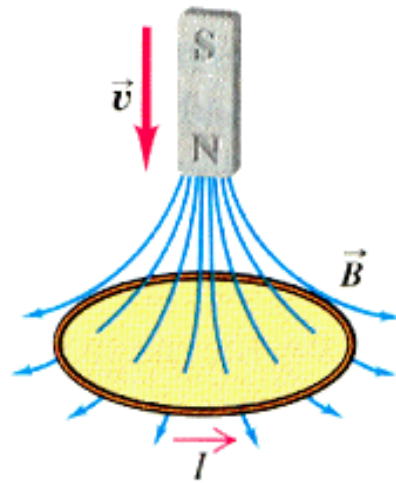
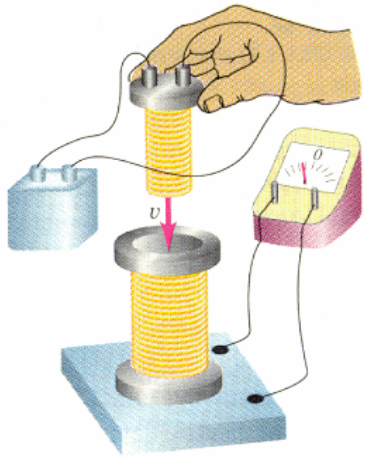
- Desarrollada en 1834.

El sentido de la corriente eléctrica inducida en un conductor por inducción electromagnética debido a la Ley de Faraday, es tal que creará un campo magnético que se oponga al cambio que la produjo (es decir, que se oponga a la variación del flujo magnético concatenado por el camino conductor).

- Vamos a analizar los dos experimentos de Faraday que vimos en función de la Ley de Lenz para conocer el sentido de la corriente inducida en el circuito secundario:



Obs.: Pensar qué sucede al abrir la llave, o al dar vuelta la pila y/o los bobinados



Ley de Faraday-Lenz

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$|k| = 1$ en el Sistema Internacional (de unidades)

ϕ_B es el flujo de B a través de una superficie S definida por el camino cerrado sobre el que se genera la *fem*.

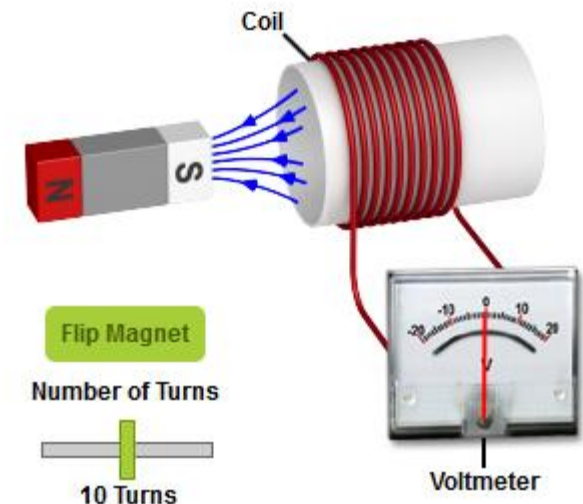
ϕ_B puede variar porque varía el integrando y/o los límites de integración, es decir, porque varía el campo \vec{B} (en módulo y/o dirección) y/o porque el camino conductor se mueve o deforma.

- **Para una bobina de N vueltas**
(idénticas y “juntitas”: donde cada una de las espiras concatena el mismo ϕ_B).

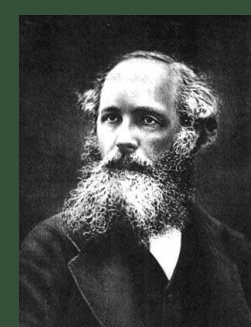
$$\varepsilon_{ind} = -N \frac{d\phi_B}{dt} = -N \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

- **Applet interactivo de la Ley de Faraday-Lenz**
Se puede variar el número de espiras, la orientación del imán y la velocidad al meterlo y sacarlo del bobinado y ver cómo varía la *fem* inducida en el bobinado medida con el voltímetro (en lugar de ver la corriente inducida como Faraday con su galvanómetro).

<https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/watch-play/interactive/electromagnetic-induction>



Ley de Maxwell-Faraday, una de las leyes de Maxwell



James Clerk
Maxwell
(1831 – 1879)
Escocia

- Modificación y generalización de la Ley de Faraday-Lenz.
- Maxwell se independiza del circuito experimental, de la *fem* inducida (sobre algún camino) y del flujo concatenado (por algún camino). En vez, establece una relación entre los campos eléctrico y magnético (que pueden estar presentes incluso en vacío, sin cargas, sin conductores con corrientes y sin imanes permanentes).
- Establece que un campo \vec{B} variable en el tiempo en una región siempre va a estar acompañado por un campo \vec{E} no conservativo variable en todo espacio.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Obs.: Los campos \vec{E} y \vec{B} pueden ser funciones dependientes de la posición \vec{r} y del tiempo t

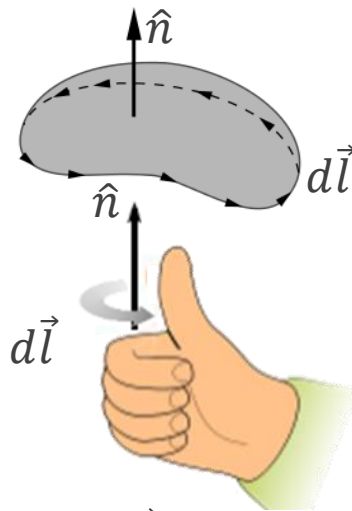
- Aplicando el **Teorema del rotor (o de Stokes)**

$$\iint_{S(C)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\iint_{S(C)} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Obs.: La ambigüedad en el signo de $d\vec{l}$ y $d\vec{s}$ se resuelve por la regla de la mano derecha.



Obs.: La circulación cerrada del campo \vec{E} generado por cargas eléctricas es nulo, ya que dicho \vec{E} (llamado electrostático o coulombiano) es irrotacional/conservativo (y podemos definir la función escalar potencial eléctrico –ver clase 4).

En cambio, el campo \vec{E} inducido por un \vec{B} variable en el tiempo no es irrotacional/conservativo (y no se puede definir más la función potencial escalar).

- Resumiendo,

Ley de Maxwell-Faraday

Forma integral

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Forma diferencial (local)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Para el caso particular en el que camino C no varía con el tiempo (como en el caso de una espira rígida en reposo):

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

- Analicemos la naturaleza del fenómeno descrito por Faraday y Lenz: $\varepsilon_{ind} = - \frac{d\phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

- En espiras rígidas en reposo, podrá inducirse una *fem* debido a fuerzas eléctricas no conservativas (asociadas a un campo eléctrico no conservativo generado, no por cargas eléctricas en el espacio, sino por campos magnéticos variables en el tiempo).

$$\varepsilon_{ind} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Pero el flujo concatenado por una espira, también puede variar incluso con campo magnético constante en el tiempo si varía el área de la espira. En este caso de espira “no rígida” (que puede deformarse), la *fem* se inducirá, no debido a fuerzas eléctricas (si B es constante, no se induce un campo eléctrico no conservativo), sino por fuerzas magnéticas (que podemos hallar mediante la Ley de Lorentz).

$$\varepsilon_{ind} = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F}_m \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_{ind} = \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Ejemplo 1: Campo E no conservativo inducido por campo B(t)

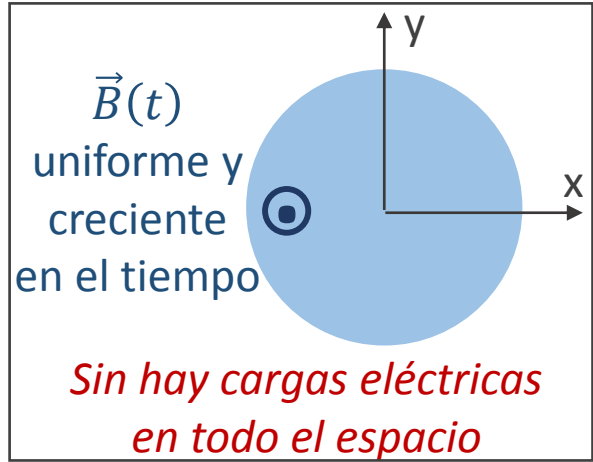
- Hallaremos el campo \vec{E} (o más bien su intensidad) en todo el espacio a partir de la forma integral de Ley de Faraday-Maxwell (de forma análoga a cómo obteníamos el campo electrostático a partir de la forma integral de la Ley de Gauss, y el campo magnetostático a partir de la forma integral de la Ley de Ampere):

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

- Primero debemos determinar la dirección de \vec{E} :

- Por la forma diferencial de la Ley de Maxwell-Faraday: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- Quiere decir que \vec{E} y $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ tienen que ser perpendiculares entre sí.
- $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ tiene la misma dirección que el campo \vec{B} : \hat{k}
- Así que el campo \vec{E} tiene que estar sobre el plano perpendicular a \hat{k} , es decir que, en cilíndricas, solo puede tener dirección $\hat{\phi}$ y/o $-\hat{\phi}$.
- Por la forma diferencial de la Ley de Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- Pero en este problema no hay cargas eléctricas en ningún lugar del espacio: $\rho = 0$
- Así que: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ Obs.: Un campo cuya divergencia es nula en todo el espacio se llama “solenoidal”
- Quiere decir que las líneas de campo \vec{E} tienen que ser cerradas (porque no hay fuentes ni sumideros de campo si no hay cargas), es decir que \vec{E} no puede tener componente en $\hat{\rho}$.
- Obs.: El campo puede ser horario o antihorario. Lo tomamos (arbitrariamente) como antihorario, si nos da positivo, será efectivamente así, y si nos da negativo, será horario.
- Por lo tanto:

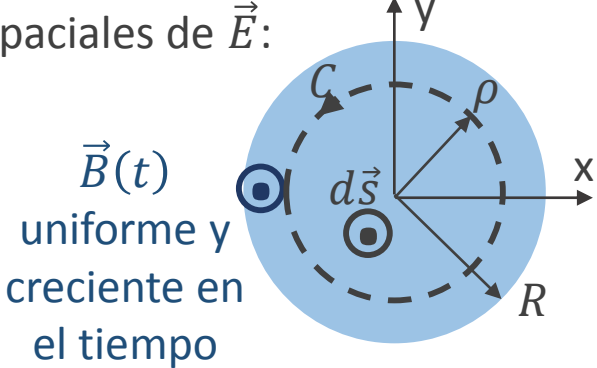
$\vec{E} = E \hat{\phi}$



- Después debemos determinar la dependencia con las coordenadas espaciales de \vec{E} :
 - Por simetría de rotación en φ y de traslación en z :

$$E(\vec{r}) = E(\rho, \varphi, z) = E(\rho)$$

- Ahora sí aplicamos la forma integral de la Ley de Maxwell-Faraday para una curva C concéntrica de radio ρ (y elegimos, arbitrariamente, recorrerla en sentido antihorario) :



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C E(\rho) dl = - \iint_{S(C)} \frac{\partial B}{\partial t} ds$$

$$E(\rho) \oint_C dl = - \iint_{S(C)} \frac{\partial B}{\partial t} ds$$

Obs.: E sale de la integral porque es uniforme a lo largo de la curva C (no depende de la variable de integración)

- Calculamos el campo en las dos regiones del espacio:

$$\rho < R \quad E(\rho) 2\pi\rho = - \frac{\partial B}{\partial t} \pi\rho^2$$

$$E(\rho) = - \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\rho}{2}$$

$$\rho > R \quad E(\rho) 2\pi\rho = - \frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2$$

$$E(\rho) = - \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\rho}{2} (-\hat{\phi}) & \rho < R \\ \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} (-\hat{\phi}) & \rho > R \end{cases}$$

- Finalmente, el resultado, que incluye al módulo, a la dirección y al sentido del campo en cada región del espacio:

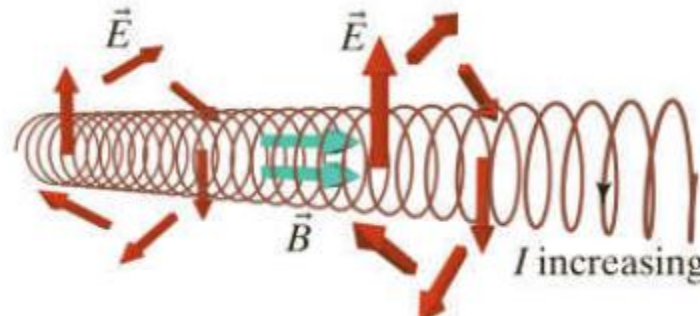
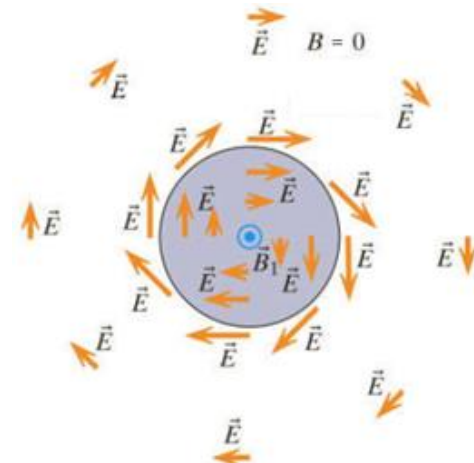
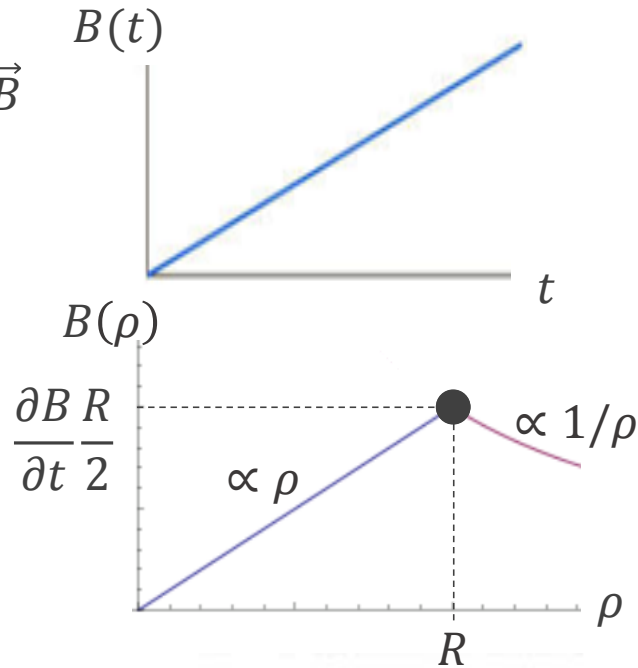
Obs.: Incluso en ausencia de cargas eléctricas hay campo \vec{E} en todo el espacio, debido al campo \vec{B} variable en el tiempo en una región. Se induce campo \vec{E} en todo el espacio, no solo donde hay campo \vec{B} .

- Para el caso particular en el que el campo \vec{B} crece linealmente en el tiempo:

$\frac{\partial B}{\partial t}$ es una constante positiva.

- Por lo tanto, para este caso particular:

- Este problema puede ser realizado experimentalmente con una corriente creciente linealmente que circule por un solenoide muy largo:



Demostración de la Ley de Faraday-Lenz

- Las cuatro Leyes de Maxwell, junto con la Ley de Lorentz, son suficientes para explicar todos los comportamientos electromagnéticos clásicos.
- Por lo tanto, demostraremos la Ley de Faraday-Lenz, obtenida experimentalmente, a partir de la Ley de Maxwell-Faraday, la Ley de Gauss para magnetismo, y un poco de cálculo vectorial.
- Partimos de la definición de derivada en el tiempo del flujo magnético a través de una superficie $S(t)$ arbitraria en el espacio (que puede estar moviéndose y/o deformándose con el tiempo):

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$

- La integral puede variar en el tiempo por dos razones: porque varía el integrando o porque varía la región de integración. Por lo tanto, para un instante de tiempo fijo t_0 :

$$\left. \frac{d\phi_B}{dt} \right|_{t=t_0} = \left(\iint_{S(t_0)} \left. \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \cdot d\vec{s} \right) + \left(\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \vec{B}(t_0) \cdot d\vec{s} \right)$$

Obs.: La *fem* inducida puede pensarse como la suma de dos *fem*, asociadas a los dos términos del miembro derecho, respectivamente:

- debida a la variación temporal del campo \vec{B} que induce la creación de un campo \vec{E} no conservativo (en inglés, *transformer EMF*)
- debida al movimiento (con o sin deformación) del camino (en inglés, *motional EMF*)

$$\left. \frac{d\phi_B}{dt} \right|_{t=t_0} = \left(\iint_{S(t_0)} \left. \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \cdot d\vec{s} \right) + \left(\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \vec{B}(t_0) \cdot d\vec{s} \right)$$

- Podemos reescribir el primer término del miembro derecho utilizando la Ley de Maxwell-Faraday:

$$\iint_{S(t_0)} \left. \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \cdot d\vec{s} = - \oint_{C(t_0)} \vec{E}(t_0) \cdot d\vec{l}$$

- Analizamos el segundo término del miembro derecho (la parte más difícil de la demostración –existen demostraciones alternativas de esta parte, como en la página 9-22 del Apunte en el apartado 9.10):

A medida que la curva cerrada C avanza y/o deforma,

barre una superficie (ver figura): un diferencial de longitud $d\vec{l}$ de la curva C se mueve con velocidad \vec{v}_C durante un diferencial de tiempo dt , barriendo una superficie $d\vec{s} = \vec{v}_C dt \times d\vec{l}$.

El flujo del campo $\vec{B}(t_0)$ a través de esta superficie barrida es igual a la variación del flujo de $\vec{B}(t_0)$ a través de la superficie $S(C)$.

(Este paso utiliza implícitamente la Ley de Gauss para magnetismo:

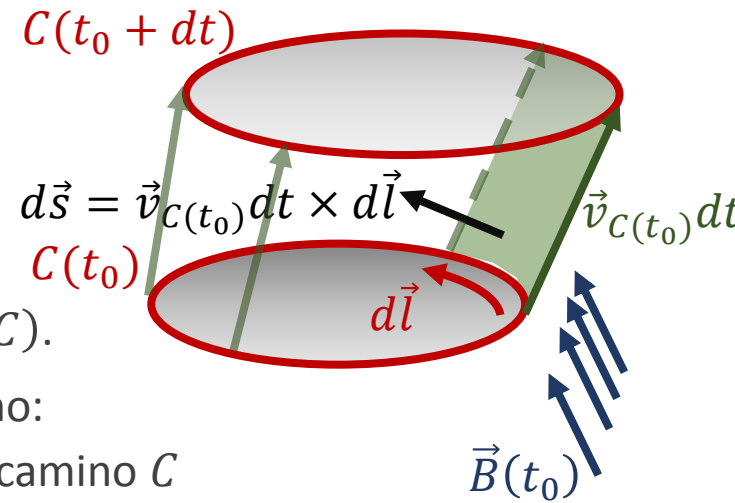
como las líneas de campo \vec{B} son cerradas, solo pueden entrar al camino C si atraviesan la superficie barrida).

Por lo tanto, la variación del flujo de $\vec{B}(t_0)$ a través de la superficie $S(C)$ es:

$$\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \vec{B}(t_0) \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \oint_{C(t_0)} \vec{B}(t_0) \cdot (\vec{v}_{C(t_0)} dt \times d\vec{l}) = \frac{d}{dt} \oint_{C(t_0)} -d\vec{l} \cdot (\vec{v}_{C(t_0)} dt \times \vec{B}(t_0)) =$$

$$= \frac{d}{dt} \oint_{C(t_0)} -dt (\vec{v}_{C(t_0)} \times \vec{B}(t_0)) \cdot d\vec{l} = - \oint_{C(t_0)} (\vec{v}_{C(t_0)} \times \vec{B}(t_0)) \cdot d\vec{l}$$

donde $\vec{v}_{C(t_0)}$ es la velocidad del elemento $d\vec{l}$ de la curva $C(t_0)$



- Reemplazando las equivalencias halladas:

$$\left. \frac{d\phi_B}{dt} \right|_{t=t_0} = \left(\iint_{S(t_0)} \left. \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \cdot d\vec{s} \right) + \left(\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \vec{B}(t_0) \cdot d\vec{s} \right)$$

$$\left. \frac{d\phi_B}{dt} \right|_{t=t_0} = \left(- \oint_{C(t_0)} \vec{E}(t_0) \cdot d\vec{l} \right) + \left(- \oint_{C(t_0)} (\vec{v}_{C(t_0)} \times \vec{B}(t_0)) \cdot d\vec{l} \right)$$

$$\left. \frac{d\phi_B}{dt} \right|_{t=t_0} = - \oint_{C(t_0)} (\vec{E}(t_0) + \vec{v}_{C(t_0)} \times \vec{B}(t_0)) \cdot d\vec{l}$$

$$\frac{d\phi_B}{dt} = - \oint_C (\vec{E} + \vec{v}_C \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

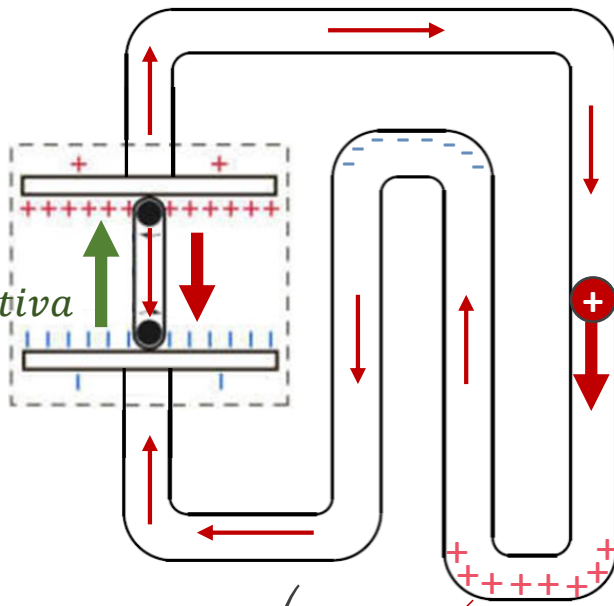
Variación temporal del flujo del campo \vec{B} a través de una superficie S cualquiera definida por la curva cerrada C , donde \vec{v}_C es la velocidad de cada elemento $d\vec{l}$ de la curva C .

- Repaso: Definición de *fem* (trabajo por unidad de carga, realizado sobre una carga a lo largo de un camino cerrado):

$$\varepsilon = \frac{1}{q} \oint_C \delta W = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F}_{total} \cdot d\vec{l}$$

Generada por el agente externo dentro de la batería (ej.: cinta transportadora del generador de Van der Graaff)

\vec{F} externa
No Conservativa



\vec{E} eléctrico conservativo
Generada por la distribución de cargas eléctricas a lo largo de todo el circuito

\vec{F} eléctrica = $q\vec{E}$ eléctrica conservativa

$$\varepsilon = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F}_{total} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \oint_C (\vec{F}_C + \vec{F}_{NC}) \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \left(\oint_C \vec{F}_C \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{l} \right) = \frac{1}{q} \oint_{batería} \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{l}$$

Término nulo por ser la integral cerrada de una función conservativa

Solo hay \vec{F}_{NC} dentro de la batería en este problema

Obs.: Podemos definir también la *fem* para caminos abiertos en lugar de cerrados, pero entonces en lugar de integrar la fuerza total ejercida sobre una carga, integramos únicamente la fuerza total no conservativa (es decir, no incluimos a la fuerza electrostática):

$$\varepsilon = \frac{1}{q} \int \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{l}$$

- Si sobre las cargas no actúan agentes electroquímicos u otros (es decir, tenemos un circuito sin ningún tipo de batería, ni electroquímica, ni de Van der Graaff, ni nada), sino sólo actúan fuerzas eléctricas y magnéticas, la fuerza total que actúa sobre las cargas surge de la Ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- Por lo tanto:

$$\varepsilon = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F}_{total} \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{q} \oint_C q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Obs.: Si usamos la definición de *fem* para caminos abiertos, entonces el campo eléctrico es únicamente el no conservativo (el originado por campos magnéticos variables en el tiempo y no el originado por cargas eléctricas):

$$\varepsilon = \frac{1}{q} \int \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \int q(\vec{E}_{NC} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = \oint_C (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = \int (\vec{E}_{NC} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Obs.: Si usamos la definición de *fem* para caminos cerrados, da igual si el campo \vec{E} es \vec{E}_{NC} o el total $\vec{E}_C + \vec{E}_{NC}$ porque la circulación cerrada de \vec{E}_C es nula

- A esta *fem*, originada por fuerzas no conservativas eléctricas y/o magnéticas, la llamamos “***fem* inducida**”

- Por lo tanto, por la igualdad hallada dos diapositivas atrás:

$$\varepsilon = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

y queda demostrada la ley experimental de Faraday y Lenz.

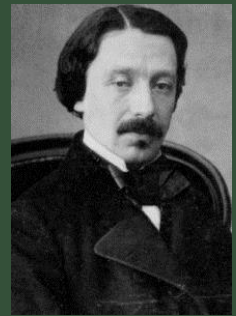
Obs.: En general podremos hallar la *fem* inducida de dos maneras:

- 1) Por la Ley de Faraday-Lenz
- 2) Por la expresión que surge de la Ley de Lorentz

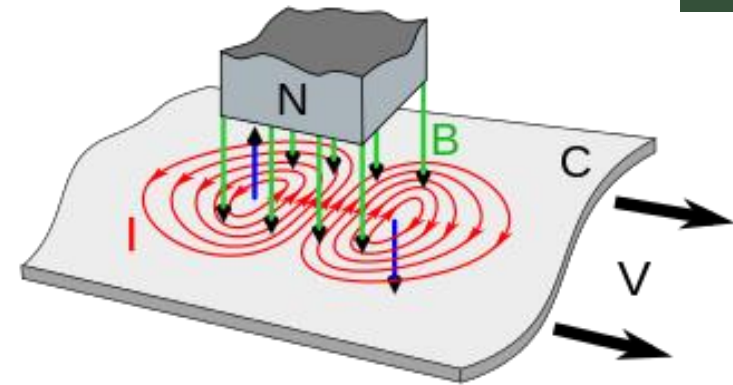
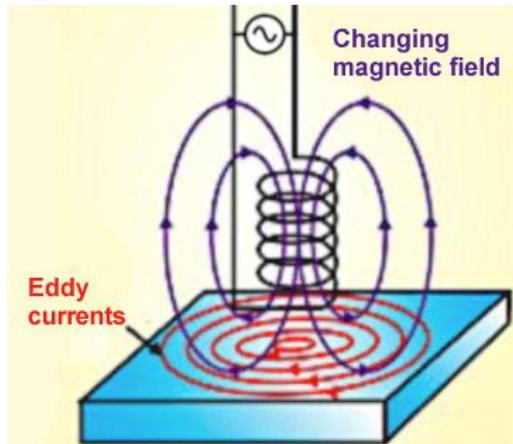
Ambas son equivalentes, aunque para algunos problemas será más sencillo usar una más que la otra

Corrientes de Foucault = corrientes parásitas = *eddy currents* (corrientes torbellino)

- Descubiertas en 1851 por Foucault.
- Caminos cerrados de corriente que se producen por inducción electromagnética de acuerdo a la Ley de Faraday-Lenz (debido a la variación temporal del flujo magnético a través de las superficies que encierran los caminos conductores).

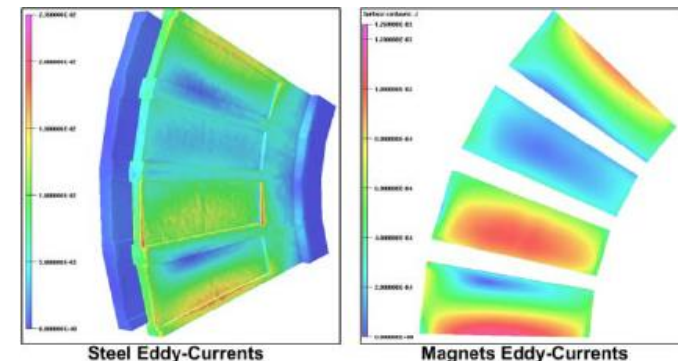
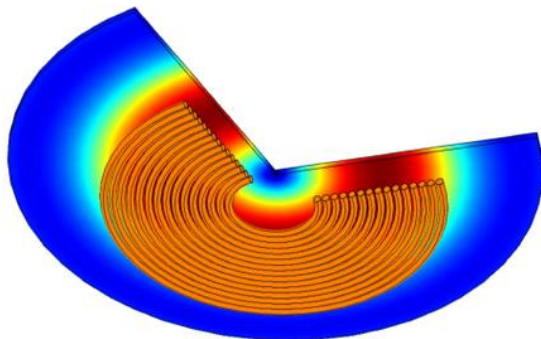


Léon Foucault
(1819 – 1868)
Francia



- Es complejo calcularlas analíticamente: dependen de las propiedades del material (permeabilidad μ y conductividad σ) y de su geometría. Se calculan numéricamente por el método de elementos finitos.

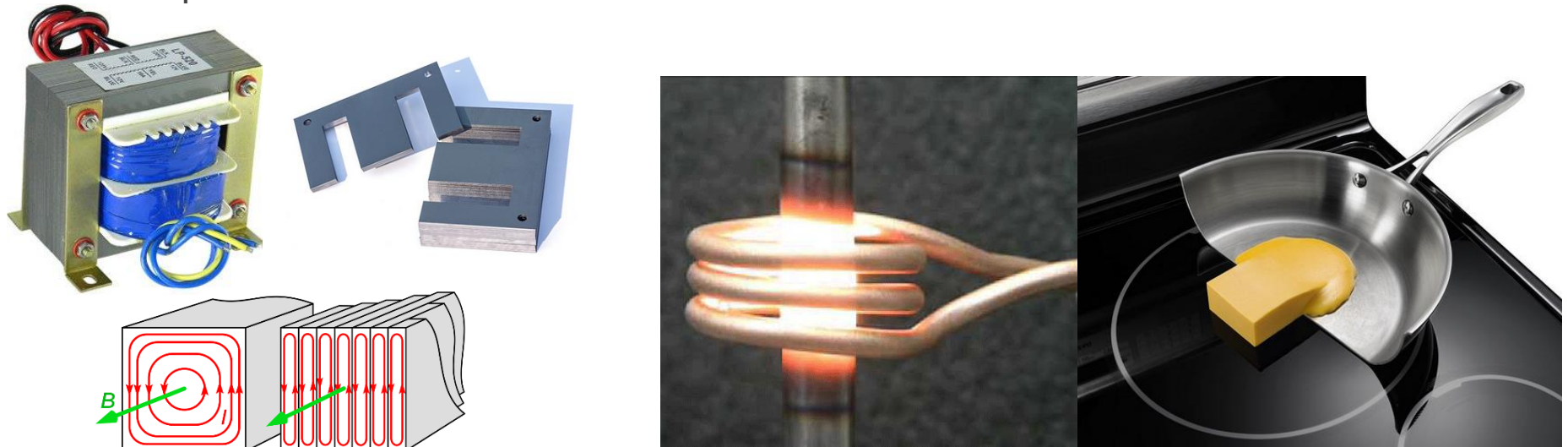
Ej.: en una sartén (con un anafe de inducción): Ej.: En el estator y en los imanes de un motor eléctrico:



- Algunas de las consecuencias de las corrientes de Foucault:
 - **Frenado electromagnético:** desaceleran el movimiento relativo entre un imán y un conductor.



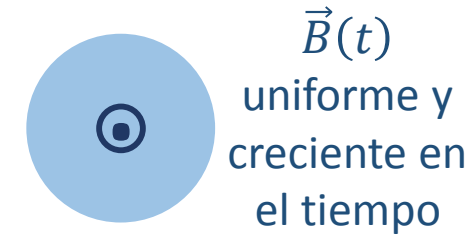
- **Disipación de energía:** disipan potencia por efecto Joule ($P = i^2 R$), lo que en aplicaciones tales como transformadores o motores eléctricos es nocivo (corrientes parásitas) y en otras como calentamiento por inducción es el efecto buscado.



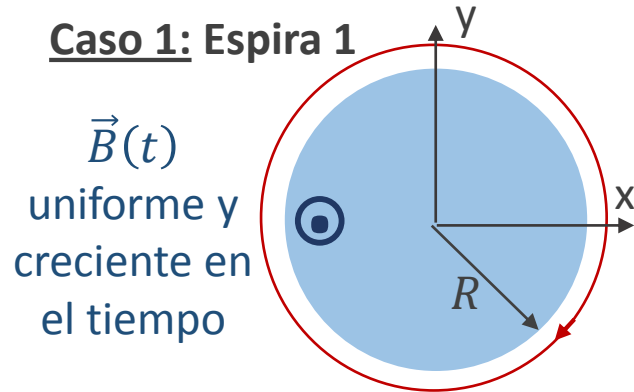
Se puede ver el cálculo analítico de ambos efectos para el caso de una espira entrando en una región de campo B uniforme en la página 9-15 del Apunte en el apartado 9.6.

Ejemplo 2: Fem inducida en caminos conductores rígidos y en reposo debido a $B(t)$

- Hallaremos la *fem* inducida y el sentido de la corriente en diversos caminos conductores en reposo.
 - Podremos usar:
 - la Ley de Faraday y Lenz: $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$
 - o bien: $\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$
- La espira está en reposo
- Obs.: Conocemos $\vec{E}(\vec{r})$ en todo el espacio del “Ejemplo 1”.



Caso 1: Espira 1



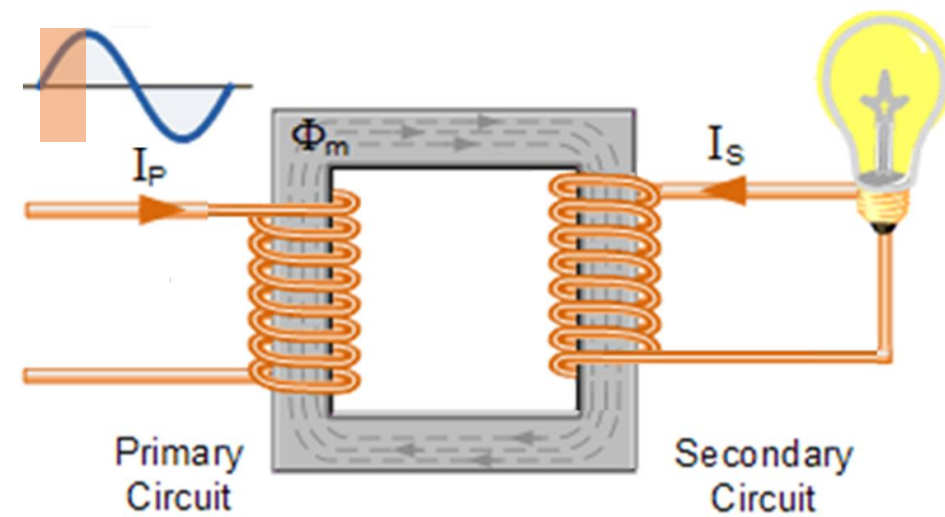
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} (B\pi R^2) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} (-\hat{\phi}) \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} 2\pi\rho = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

Obs.: Para que el producto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ diera positivo, implícitamente elegimos como normal positiva de S la dirección \hat{k} , por lo que el sentido positivo de circulación del camino conductor sobre el que calculamos la *fem* es antihorario. Por lo tanto, como la *fem* dio negativa ($\frac{dB}{dt}$ es una magnitud positiva pues el campo es creciente), el sentido de circulación de la corriente inducida es horario (contrarrestando el cambio que la generó como dice Lenz).

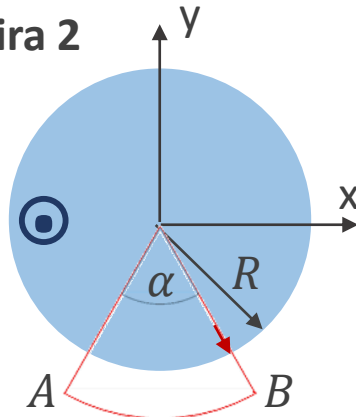
Obs.: Una aplicación del caso 1 es el del transformador (que estudiaremos en detalle más adelante). En un transformador típico, la corriente del circuito primario es sinusoidal).

En el circuito de la figura, para los intervalos de tiempo en los que la corriente del primario es creciente y entrante por el borne superior, en el secundario se inducirá una corriente con el sentido indicado.



Caso 2: Espira 2

$\vec{B}(t)$
uniforme y
creciente en
el tiempo

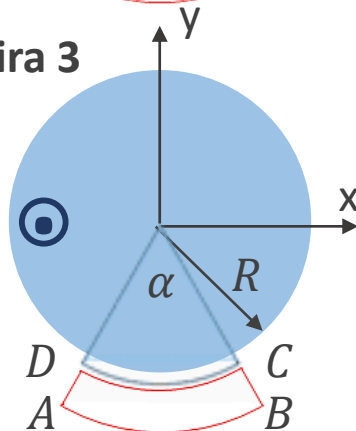


$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \left(B \pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} \right) = -\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dB}{dt}$$

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} (-\hat{\phi}) \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} 2\pi\rho \frac{\alpha}{2\pi} = -\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dB}{dt}$$

Caso 3: Espira 3

$\vec{B}(t)$
uniforme y
creciente en
el tiempo



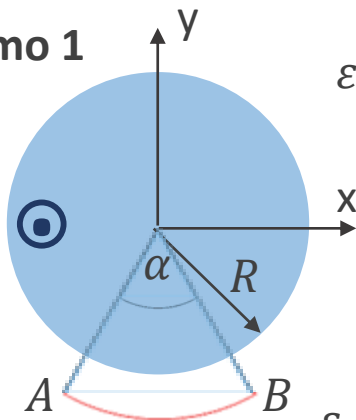
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} (-\hat{\phi}) \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} (-\hat{\phi}) \cdot d\vec{l} \\ &= -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} 2\pi\rho \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} 2\pi\rho \frac{\alpha}{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Caso 4: Tramo 1

$\vec{B}(t)$

uniforme y
creciente en
el tiempo



$$\varepsilon = \int_{AB} \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} (-\hat{\phi}) \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{2\rho} 2\pi\rho \frac{\alpha}{2\pi} = -\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dB}{dt}$$

- Si tuviéramos este problema y no tuviéramos calculado el campo \vec{E} , podríamos hallar ε con este otro enfoque:

- Por Faraday-Lenz podemos hallar la *fem* sobre el camino cerrado OAB:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \left(B\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} \right) = -\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dB}{dt}$$

- Además, sabemos que:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{OA} \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l} + \int_{AB} \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l} + \int_{BO} \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l}$$

El camino cerrado
está en reposo

Aunque no sepamos cuánto es \vec{E} , por la regla
de la mano derecha sabemos que es en $(-\hat{\phi})$,
es decir, perpendicular a $d\vec{l}$

- Por lo tanto:

$$\varepsilon = \int_{AB} \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l} = -\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dB}{dt}$$

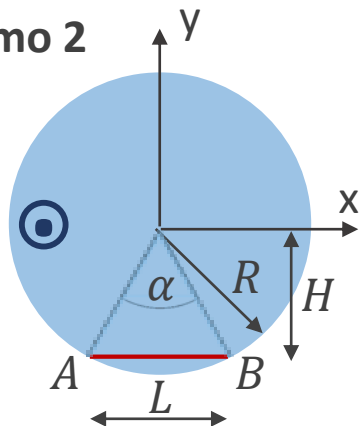
Obs.: Como el camino conductor no es cerrado, no se inducen corrientes. Pero por un breve intervalo de tiempo sí se mueven y acumulan cargas, hasta llegar al equilibrio: las cargas generarán un campo \vec{E} electrostático (conservativo) que será igual y contrario al campo \vec{E} inducido (no conservativo). Se alcanzará el equilibrio cuando la resultante de ambos campos dentro del conductor sea nula.

Obs.: La acumulación de cargas no será solo en los extremos del conductor, ya que deben contrarrestar un campo \vec{E} en $(-\hat{\phi})$.

Caso 5: Tramo 2

$\vec{B}(t)$

uniforme y
creciente en
el tiempo



$$\varepsilon = \int_{AB} \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{\rho}{2} (-\hat{\phi}) \cdot d\vec{x}$$

Obs.: No es tan trivial hacer este producto escalar ni la integral: hay que pasar el versor $(-\hat{\phi})$ a cartesianas.

- Pero, nuevamente, podemos hallar la *fem* con la estrategia del caso anterior:

- Por Faraday-Lenz podemos hallar la *fem* sobre el camino cerrado OAB:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \left(B \frac{LH}{2} \right) = -\frac{LH}{2} \frac{dB}{dt}$$

- Además, sabemos que:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{OA} \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l} + \int_{AB} \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l} + \int_{BO} \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l}$$

El camino cerrado está en reposo Aunque no sepamos cuánto es \vec{E} , por la regla de la mano derecha sabemos que es en $(-\hat{\phi})$

- Por lo tanto:

$$\varepsilon = \int_{AB} \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l} = -\frac{LH}{2} \frac{dB}{dt}$$

Ejemplo 3: Fem inducida en espiras debido a α(t)

- La forma más sencilla de hallar la *fem* inducida en esta espira que gira en una región con campo B uniforme y constante, es mediante la Ley de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon = - \frac{d\phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\varepsilon = - \frac{d}{dt} \iint_S B ds \cos(\alpha)$$

$$\varepsilon = - \frac{d(BS \cos(\alpha))}{dt}$$

$$\varepsilon = -BS \frac{d(\cos(\omega t))}{dt}$$

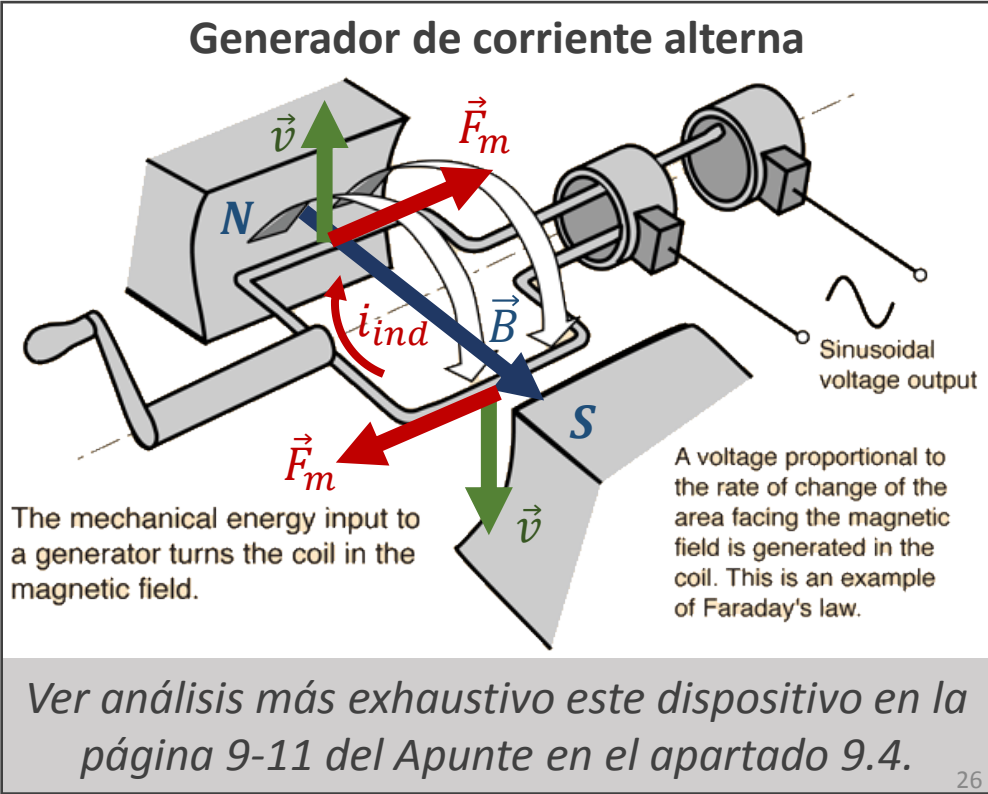
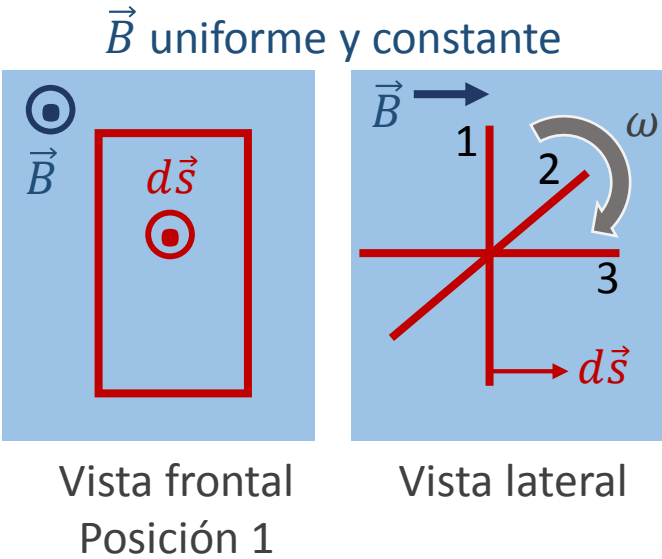
$$\varepsilon = -BS(-\omega \operatorname{sen}(\omega t))$$

$$\varepsilon = +BS\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

Obs.: Como la *fem* es inducida sobre un camino conductor cerrado, se induce una corriente. El sentido de la corriente un instante después de estar en la posición 1, es antihorario (pues la *fem* dio positiva, y debe ser consistente con la dirección de *d***s** tomada)

Obs.: El producto escalar da positivo porque, implícitamente, asumimos un *d***s** saliente a la diapositiva en la vista frontal de la Posición 1.

Obs.: α = ω*t* es el ángulo entre **B** y *d***s**, que es variable en el tiempo.

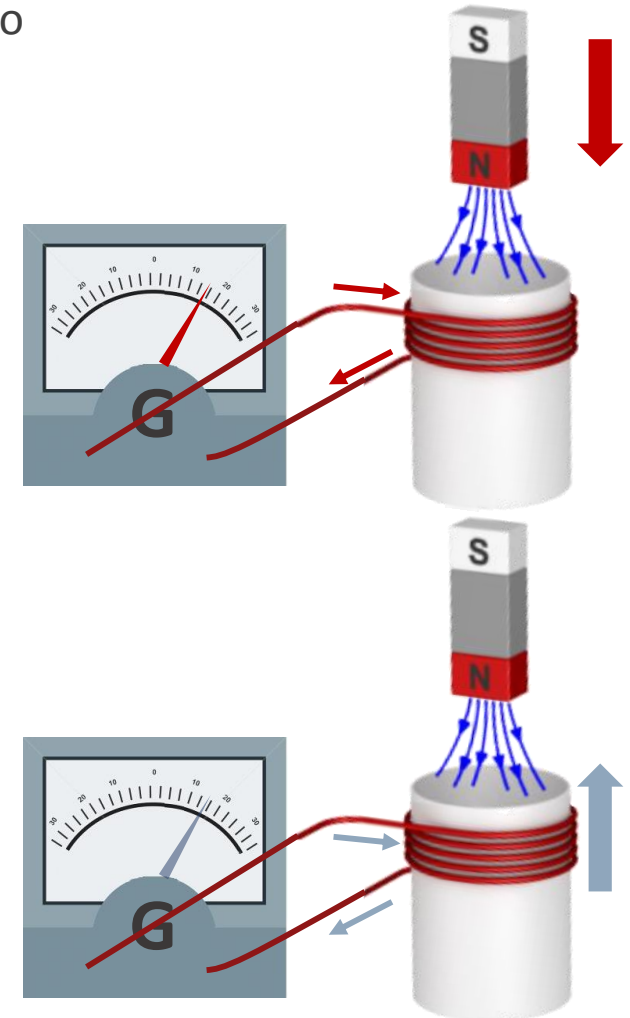


La Ley de Faraday-Lenz y la relatividad

- Las interacciones eléctricas y magnéticas son manifestaciones de un mismo fenómeno, y queda en evidencia al analizar cuerpos en movimiento.

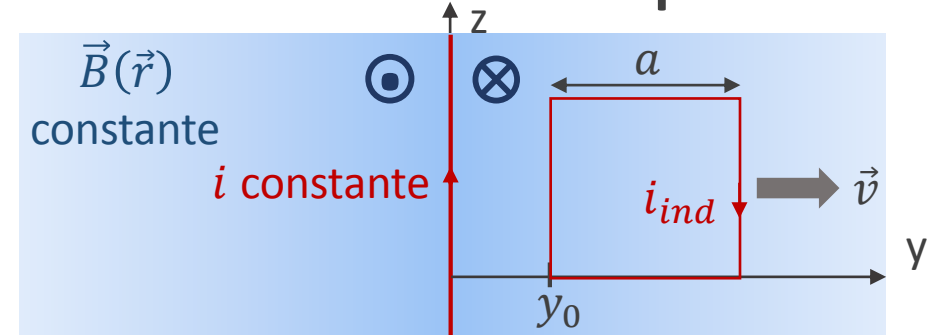
Ejemplo: Se tiene un imán y una espira. El fenómeno observado es que se induce una corriente en la espira, que depende del movimiento relativo entre el imán y el conductor.

- Si se mueve el imán, con la espira en reposo, se genera un campo \vec{E} alrededor del imán debido a la variación temporal de \vec{B} (Ley de Maxwell-Faraday), el cual ejerce una fuerza eléctrica sobre las cargas del conductor, generando una corriente.
- Si se mueve la espira, con el imán en reposo, no se genera ningún campo \vec{E} alrededor del imán. Pero aparece una fuerza magnética en las cargas del conductor debido a su movimiento en presencia de un campo \vec{B} (Ley de Lorentz), generando una corriente (la misma que en el caso anterior).



Ejemplo 4: Fem inducida en espira a velocidad constante en campo B const. en el tiempo y variable en el espacio

- Calcularemos la *fem* en la espira tomando un sistema de referencia en el hilo.



- Por la Ley de Ampère:

$$\vec{B}(\vec{r})_{\text{generado por el hilo}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

- Que, sobre la espira de corriente, equivale a:

$$\vec{B}(y)_{\text{generado por el hilo sobre la espira}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi y} (-\hat{i})$$

Obs.: Como no hay variación en el tiempo de \vec{B} en ningún punto del espacio, no hay \vec{E} inducido.

- Por la Ley de Faraday-Lenz (eligiendo $d\vec{s} = ds(-\hat{i})$):

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{y_0+vt}^{y_0+a+vt} \int_0^a \frac{\mu_0 i}{2\pi y} dz dy = -\frac{d}{dt} a \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \left(\frac{y_0 + a + vt}{y_0 + vt} \right)$$

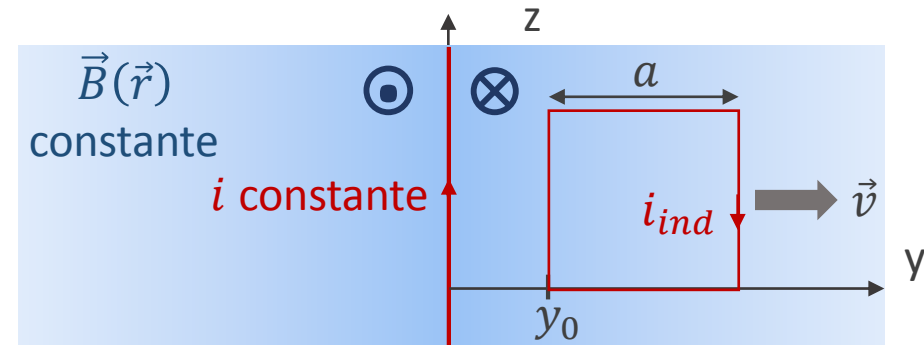
$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 i a}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{y_0 + a + vt}{y_0 + vt} \right)$$

Obs.: La corriente inducida en la espira circula en sentido horario.

- Queda demostrar el mismo resultado para el cálculo por: $\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$
 $= 0$ pues no hay campo \vec{E}_{NC}

Obs.: La espira se aleja del hilo a una velocidad \vec{v} , mantenida constante por un agente externo (ej.: la mano de una persona).

Para que \vec{v} se mantenga constante, el agente externo ejerce una fuerza sobre la espira, de igual intensidad y dirección, y sentido contrario que la fuerza neta que actúa sobre la espira.



La fuerza neta que actúa sobre la espira se puede calcular a partir de Fuerza de Lorentz para hilos de corriente:

$$\vec{F}_{\substack{\text{mag} \\ \text{sobre cada} \\ \text{tramo de la espira}}} = \int_{\text{tramo}} i_{\text{ind}} d\vec{l} \times \vec{B}_{\substack{\text{generado por} \\ \text{el hilo} \\ \text{sobre el tramo}}}$$

El trabajo por unidad de tiempo, es decir, la potencia **que realiza el agente externo** (la fuerza magnética NO realiza trabajo), se puede calcular a partir de la fuerza magnética neta sobre la espira, o bien, a partir de la potencia disipada en la espira:

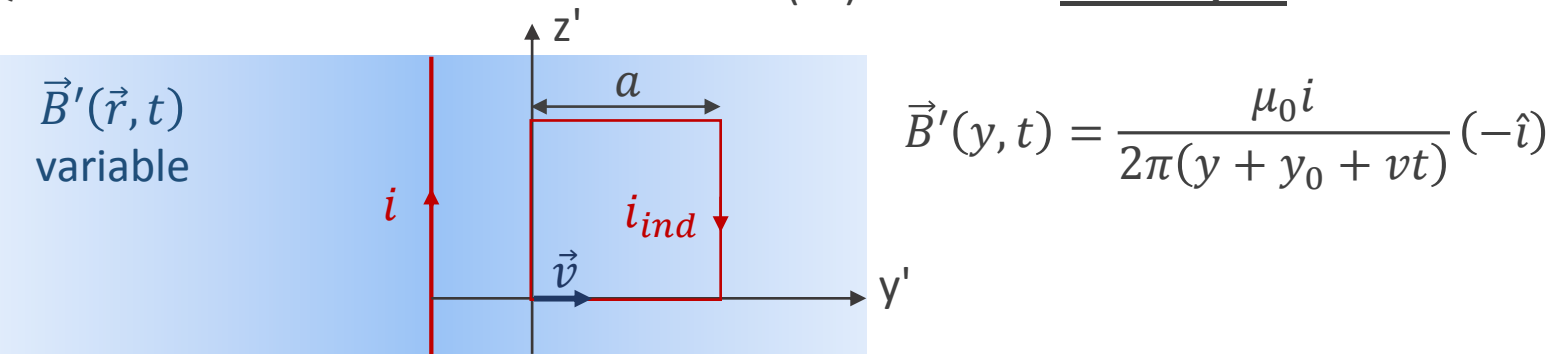
$$P_{\text{agente externo}} = \frac{\delta W_{\text{externo}}}{dt} = \frac{\vec{F}_{\substack{\text{ext.neta} \\ \text{sobre espira}}} \cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F}_{\substack{\text{externa} \\ \text{neta} \\ \text{sobre la} \\ \text{espira}}} \vec{v} = -\vec{F}_{\substack{\text{mag} \\ \text{neta} \\ \text{sobre la} \\ \text{espira}}} \vec{v}$$

$$P_{\text{agente externo}} = -P_{\text{disipada}} = -\left(i_{\text{ind}}^2 R = \frac{\varepsilon^2}{R}\right)$$

Ver análisis de las fuerzas (magnética neta y externa) y de las potencias (disipada y del agente externo) para el caso de una espira entrando en una región de campo B uniforme el apartado 9.6 del Apunte (pg. 9-15) 29

Ejemplo 5: Ejemplo 4 con el sistema de referencia en la espira

- ¿Qué sucedería si el sistema de referencia (O') estuviera en la espira?



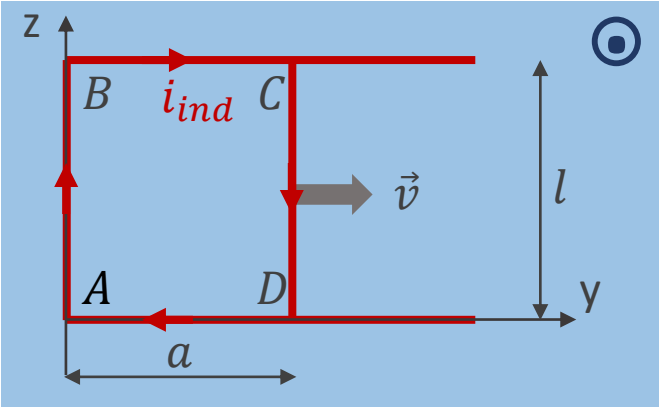
- Obs.: Ahora el campo \vec{B}' varía en el tiempo, por lo que hay campo \vec{E}' inducido (el primado indica que se refiere a los campos observados desde el sistema de referencia O' que se mueve a una velocidad \vec{v} respecto del anterior O, fijo en el hilo de corriente).
- Queda calcular por ambos métodos (que en este caso de la espira en reposo resultan iguales):
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{B'}}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}' \cdot d\vec{s} \qquad \varepsilon = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{v}' \times \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \iint_{S(C)} \left(-\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}\right) \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}' \cdot d\vec{s}$$

$= 0$ pues la espira está en reposo por la Ley de Faraday-Maxwell por ser espira rígida en reposo
 - Se obtiene la misma *fem* que para el sistema de referencia anterior, puesto que son sistemas inerciales y debe observarse el mismo fenómeno. En O es “*fem* de movimiento” y en O' “*fem* transformadora”.
 - La equivalencia entre ambos resultados está dada por la Transformación de Galileo o Transformación de Lorentz para $v \ll c$ (ver clase 11, en donde observamos que “¡Los campos vistos por O son distintos que los vistos por O'!”). **Excede los contenidos de Física II.**

Ejemplo 6: Barra a velocidad constante sobre rieles

\vec{B} uniforme y constante

- Calcularemos la *fem* en la espira ABCD por ambos métodos (Nota: solo la barra CD se mueve a velocidad \vec{v} , el resto del circuito está en reposo).
- Tomamos como sistema de referencia a un observador en la barra AB



$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oplus vBl$$

$\varepsilon = 0$ pues no hay \vec{E} inducido

Obs.: $\vec{v} \times \vec{B}$ apunta para abajo y elegimos $d\vec{l}$ también para abajo en el tramo CD.

Obs.: El tramo CD es el único en el que se mueve el material, por lo que las integrales de línea entre AB, BC y DA son nulas.

- La corriente circula en sentido horario (igual al sentido elegido de $d\vec{l}$ porque dio positivo).

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_0^{a+vt} \int_0^l B \, dz \, dy = -\frac{d}{dt} [Bl(a + vt)] = \ominus vBl$$

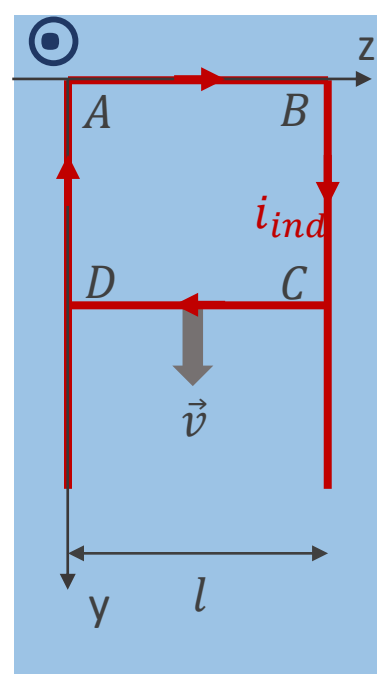
Obs.: tomando un $d\vec{s}$ saliente al igual que \vec{B} , el producto escalar da positivo

Obs.: El sentido de circulación de la corriente es contrario al asociado al $d\vec{s}$ elegido

Obs.: La Ley de Faraday-Lenz nos permite hallar la *fem* sobre un camino cerrado, pero no nos dice dónde está localizada: si está distribuida a lo largo de todo el camino o solo en una parte. Por el otro método sí podemos ver la contribución a la *fem* de cada parte del camino.

Ejemplo 7: Barra sobre rieles cayendo por gravedad

\vec{B} uniforme
y constante



- Solo la barra AB se mueve a velocidad \vec{v} , el resto del circuito está en reposo.
- La barra tiene una resistencia R , mientras que el resto del circuito tiene una resistencia despreciable.
- Ya conocemos la *fem* inducida en la barra y que circula una i_{ind} horaria:
- Por la Ley de Kirchhoff, la *fem* inducida debe ser igual a la tensión sobre la resistencia:

$$\varepsilon = vBl$$

$$+\varepsilon - i_{ind}R = 0$$

- Por lo tanto:

$$vBl = i_{ind}R \Rightarrow i_{ind} = vBl/R$$

- Por otro lado, se debe cumplir la 2da. Ley de Newton, actuando sobre la barra 2 fuerzas: el peso (para abajo, $+\hat{j}$) y la fuerza magnética (para arriba $-\hat{j}$):

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_m$$

$$+m \frac{dv}{dt} = +P - F_m = mg - i_{ind}lB$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \left(\frac{vBl}{R} \right) lB$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \left(\frac{B^2 l^2}{mR} \right) v$$

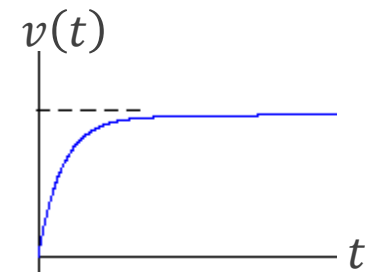
$$k = \frac{B^2 l^2}{mR}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

$$\int_{v(t=0)=0}^{v(t)} \frac{dv}{g - kv} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{k} \ln \left(\frac{g - kv(t)}{g - k0} \right) = t$$

$$v(t) = \frac{g}{k} (1 - ge^{-kt})$$



Obs.: La barra alcanza una velocidad constante
(cuando la fuerza magnética equipara a la gravitatoria)

$$v(t \rightarrow \infty) = \frac{g}{k} = \frac{gmR}{B^2 l^2}$$

Ejemplo 8: Otra variante del Ejemplo 6

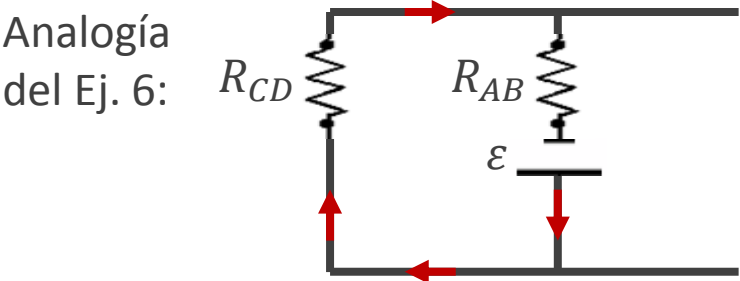
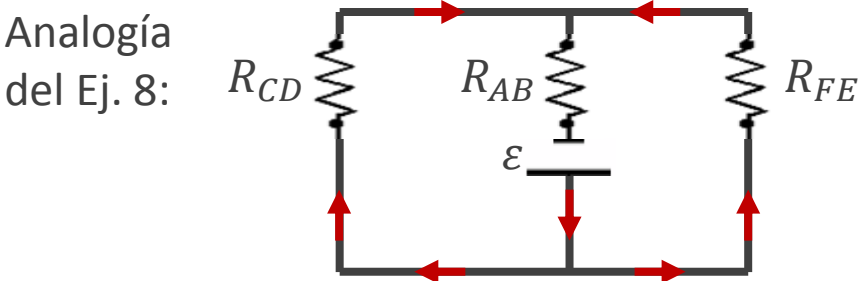
- Este problema es equivalente al Ejemplo 6, por más de que las barras deslizantes se cierran con un conductor fijo.
- La diferencia es que la *fem* en la barra inducirá una corriente, no solo por la malla de la izquierda, sino que también por la de la derecha.
- La forma más sencilla de hallar la *fem* inducida en la barra sin cometer errores, es (con el observador en el tramo CD):

\vec{B} uniforme y constante

$$\varepsilon = \int_A^B \vec{E}_{NC} + \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$= 0$ pues no hay \vec{E} inducido
- También se puede hallar utilizando la Ley de Faraday y Lenz, hallando la variación del flujo magnético a través de la superficie de malla izquierda, **O BIEN** a través de la malla derecha. En cualquiera de los dos casos, la *fem* hallada corresponderá a la *fem* inducida en la barra, que es el único tramo del circuito en movimiento, es decir, con fuerza magnética.

¡OJO! No sumar la *fem* hallada en ambas mallas.
- Si tuviéramos la resistencia de los tramos AB, CD y EF (suponiendo al resto con resistencia despreciable), una vez conocida la *fem* inducida, podríamos hallar la corriente en cada rama:



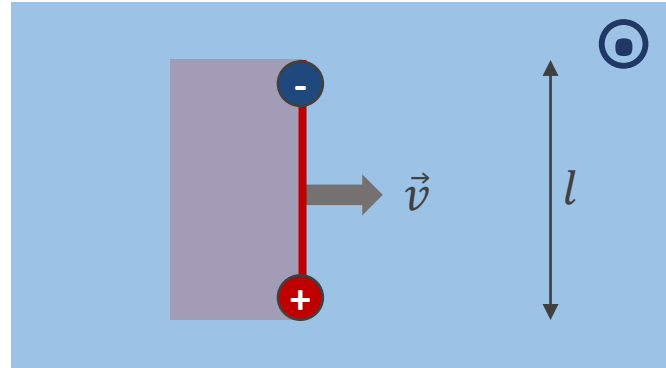
Ejemplo 9: Otra variante del Ejemplo 6

- Este problema también es equivalente al Ejemplo 6, por más de que no haya barras deslizantes conductoras.
- La diferencia es que ahora, por más de haber una *fem* inducida en la barra, no habrá corrientes inducidas (ya que no hay ningún camino cerrado conductor).
- Una manera de hallar la *fem* inducida en la barra, es: $\varepsilon = \int_A^B \vec{E}_{NC} + \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$ donde uno de los términos podrá ser nulo dependiendo del sistema de referencia elegido (ver Clase 11).

Obs.: Si la barra es conductora, durante un breve intervalo de tiempo se moverán cargas, y se acumularán principalmente en los extremos de la barra.
 Si la barra es dieléctrica (ej.: madera), solo habrá una polarización del material.

- La otra manera es aplicar la Ley de Faraday y Lenz hallando $\frac{d\phi_B}{dt}$ a través de la “superficie barrida” en el tiempo por la barra.

\vec{B} uniforme y constante



Ejemplo: Fuerzas en una barra conductora en movimiento

Sistema de referencia fijo en el laboratorio

Sistema de referencia fijo en la barra

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$$

$$\vec{F}' = q[\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}']$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}'$$

$$\vec{B}' = \vec{B}$$

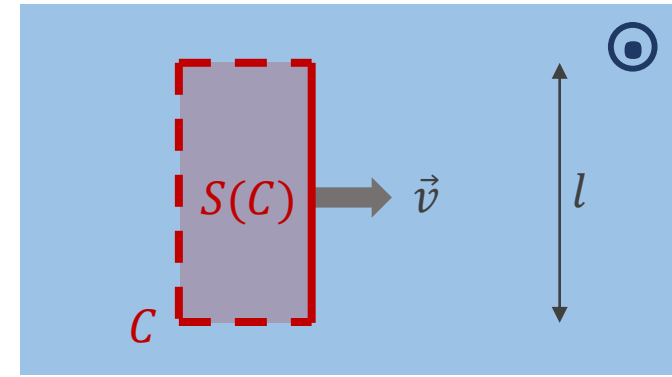
$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}' = \vec{0}$$

$$\vec{v}' = \vec{0}$$

- Justificación de por qué es válido hallar la *fem* inducida en la barra como $-\frac{d\phi_B}{dt}$ a través de la “superficie barrida” en el tiempo por la barra:

- Tomamos un sistema de referencia fijo en el laboratorio (vemos moverse a la barra a velocidad \vec{v}).
- Podemos calcular la *fem* inducida en el camino cerrado C que resulta del perímetro de la superficie S(C) barrida en el tiempo por la barra tanto por i) la Ley de Faraday-Lenz, como por ii) la expresión deducida a partir de la Fuerza de Lorentz:

\vec{B} uniforme y constante



$$\varepsilon_{\text{camino cerrado } C} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\substack{\text{área} \\ \text{barrida} \\ S(C)}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}_{NC} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{barra}} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

si no hay ninguna región del espacio con \vec{B} variable en el tiempo, entonces no se inducirá campo eléctrico en ninguna región del espacio, es decir: $\vec{E}_{NC} = \vec{0}$

el único tramo del circuito en movimiento es la barra

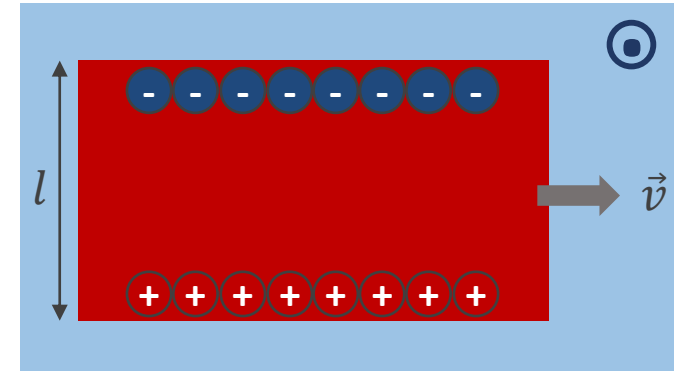
- Resumiendo:

$$\varepsilon_{\text{camino cerrado } C} = -\frac{d\phi_B \left(\begin{smallmatrix} \text{área} \\ \text{barrida} \\ S(C) \end{smallmatrix} \right)}{dt} = \int_{\text{barra}} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_{\text{barra}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{\text{barra}} = -\frac{d\phi_B \left(\begin{smallmatrix} \text{área} \\ \text{barrida} \\ S(C) \end{smallmatrix} \right)}{dt}}$$

Ejemplo 10: Variante del Ejemplo 9

- Si en lugar de una barra, tenemos una chapa bien ancha que se mueve a velocidad constante (gracias a un agente externo) en una región con campo magnético, también habrá una distribución de cargas que generará la misma diferencia de potencial entre arriba y abajo que en el Ej. 9
- Al igual que en el Ej. 9, una vez alcanzado el equilibrio, las cargas no seguirán en movimiento, es decir, no habrá corrientes inducidas (sí estará la *fem* inducida entre arriba y abajo).

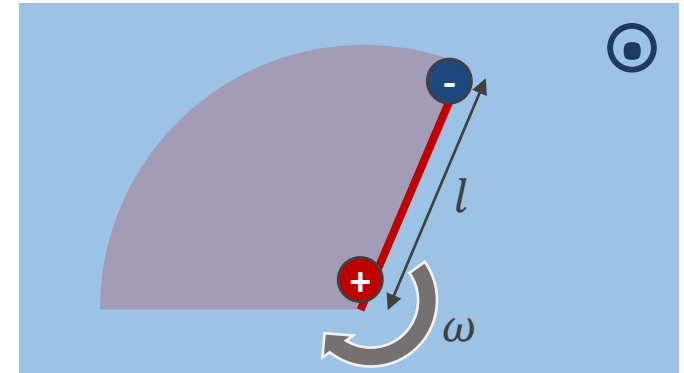
\vec{B} uniforme y constante



Ejemplo 11: Otra variante del Ejemplo 9

- Este problema es análogo al Ejemplo 9, en el que una barra barre una superficie en el tiempo.
- De nuevo, por más de haber una *fem* inducida en la barra, no habrá corrientes inducidas (ya que no hay ningún camino cerrado conductor), pero sí se acumularán cargas positivas y negativas, principalmente en los extremos de la barra.

\vec{B} uniforme y constante



- Una manera de hallar la *fem* inducida en la barra, es:
$$\varepsilon = \int_A^B \cancel{\vec{E}_{NC}} + \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

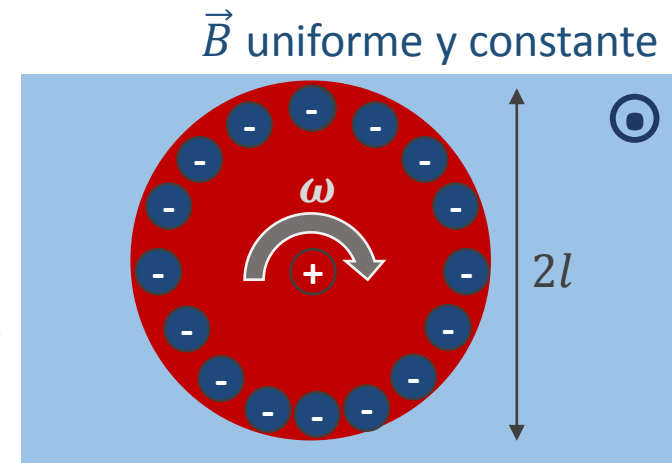
donde el primer término será nulo si se toma como sistema de referencia al de un observador en el laboratorio (viendo la barra girar a velocidad angular ω).

También se podría colocar al observador en la barra girando, aunque complejizando el problema.

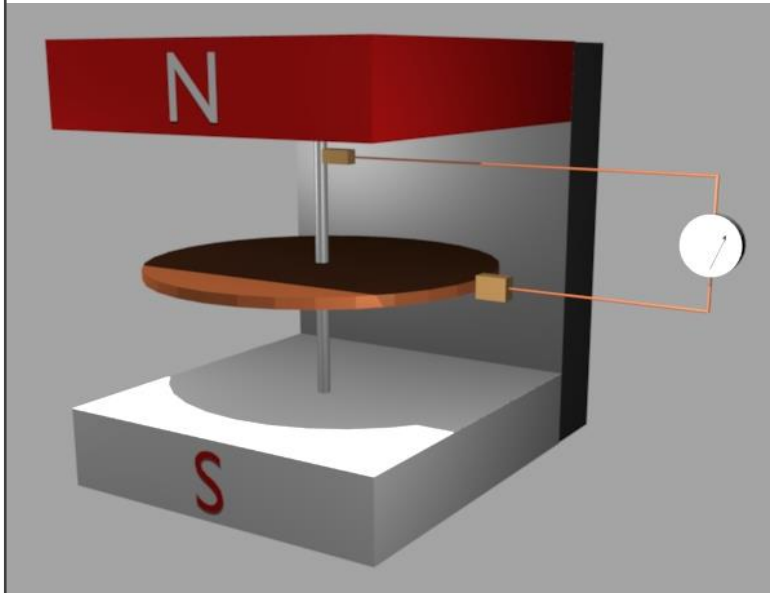
- La otra manera es aplicar la Ley de Faraday y Lenz hallando $\frac{d\phi_B}{dt}$ a través de la “superficie barrida” en el tiempo por la barra.

Ejemplo 12: Variante del Ejemplo 11

- Si en lugar de una barra, tenemos un disco conductor que gira a velocidad constante en una región con campo magnético, también habrá una distribución de cargas que generará la misma diferencia de potencial entre el centro y el radio l que en el Ej. 11.
- Una vez alcanzado el equilibrio, las cargas no seguirán en movimiento, es decir, no habrá corrientes inducidas (sí estará la *fem* inducida entre el centro y el borde).
- Aunque si conectamos el centro con el borde del disco con un conductor, entonces sí tendremos un flujo de cargas, dando lugar a un generador de corriente



**Disco de Faraday o dínamo:
Generador de corriente continua**



Analogía:

