

Física II (62.03 – 82.02)

Magnetostática en el vacío Ley de Biot-Savart

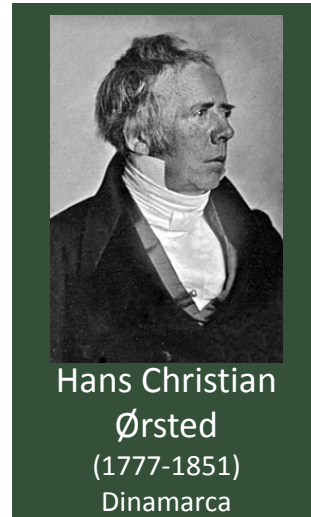
Josefina M. Silveyra

Repaso

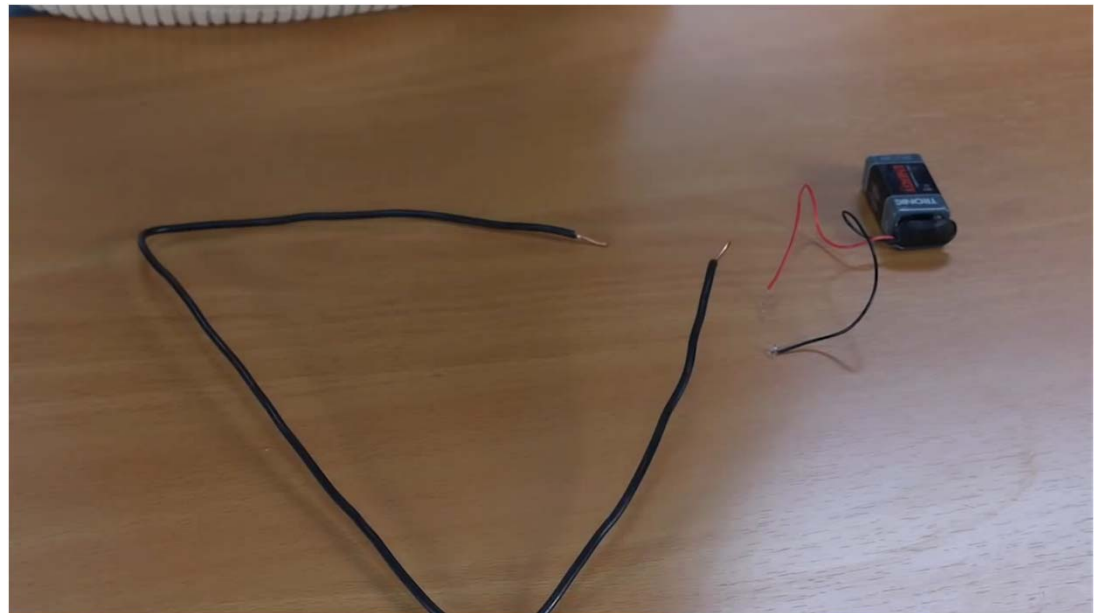
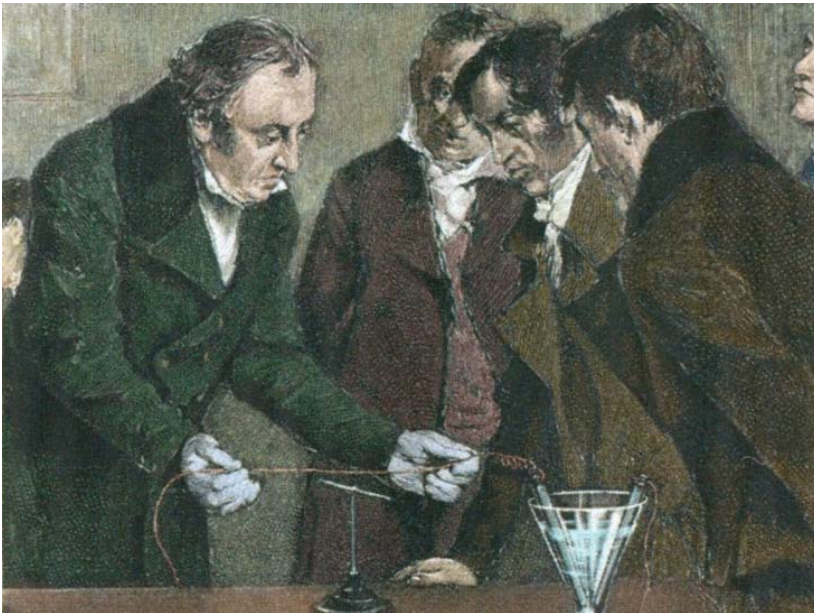
- Magnetismo
- Ley de Gauss para campo magnético, otra de las ecuaciones de Maxwell: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0; \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- Valores de referencia de magnitudes de campo magnético B
- Fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$
- Ejemplo: Movimiento de carga libre con $\vec{v} \perp \vec{B}$ (Movimiento circular uniforme)
- Ejemplo: Movimiento de carga libre con $\vec{v} \perp \vec{B} + \vec{v} \parallel \vec{B}$ (Movimiento helicoidal: MCU+MRU)
- Ejemplo: Movimiento de carga libre con $\vec{v} \perp \vec{B} + \vec{E}$
- Fuerza magnética sobre conductor con corriente: $\vec{F}_m = \int_C id\vec{l} \times \vec{B}$
- Torque sobre espira de corriente: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}; \vec{\mu} = I\vec{A}$
- Aplicaciones de la Fuerza de Lorentz:
 - Galvanómetro, motor eléctrico, otras
 - Efecto Hall
- Relación entre campos eléctricos y magnéticos desde marcos de referencia en movimiento
- Ejemplo: Fuerzas en una barra conductora en movimiento

Introducción

Una carga en reposo	Genera un campo electrostático
Un campo electrostático	Ejerce una fuerza sobre una carga en reposo
Un campo magnético	Ejerce una fuerza sobre una carga en movimiento
Una carga en movimiento	¿¿Genera un campo magnético??



- En 1820 Oersted demostró experimentalmente la relación física entre la electricidad y el magnetismo



Ley de Biot-Savart

Repaso: Campo eléctrico generado por una distribución de cargas en reposo en el vacío.

(a partir de la Ley de Coulomb)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

$$\epsilon_0 = 8,8541 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}: \textbf{Permitividad del vacío}$$

\vec{r} : **Punto campo:** donde quiero calcular el campo

\vec{r}' : **Punto fuente:** donde está la carga en reposo dq'

- Campo magnético generado por una corriente continua (cte.) de cargas en el vacío (para $v \ll c$)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$[B] = \frac{N}{Am} = T$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}: \textbf{Permeabilidad magnética del vacío}$$

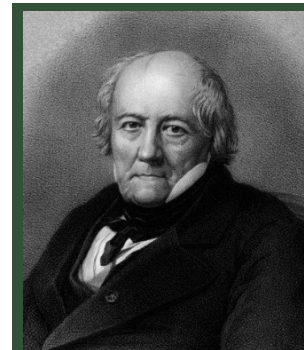
\vec{r} : **Punto campo:** donde queremos calcular el campo

\vec{r}' : **Punto fuente:** donde está la carga en movimiento $id\vec{l}'$

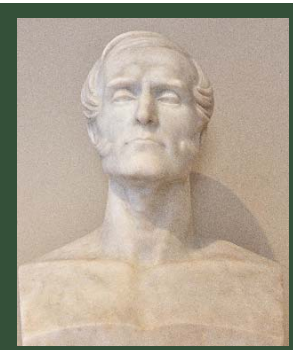
$d\vec{l}'$: dirección y sentido de $q\vec{v}_a$

Observación: Se puede ver el análisis de la Ley de Biot-Savart para una carga en movimiento en página 7-4 del apunte (opcional).

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



Jean Baptiste Biot
(1774-1862)
Francia

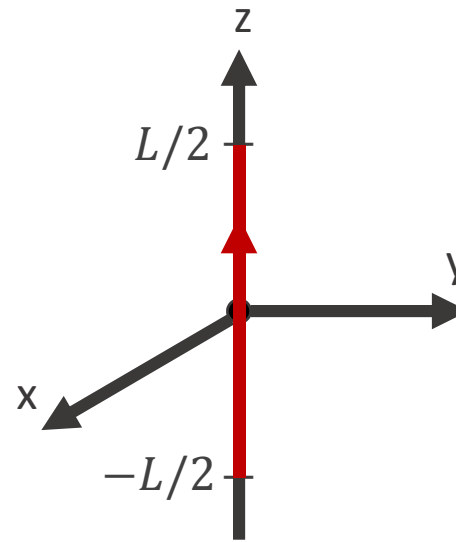


Félix Savart
(1791-1841)
Francia

Ejemplo: Hilo recto corto de corriente

- Hallaremos el campo magnético generado en todo el espacio por una corriente continua lineal, recta y de longitud finita L (porción de un circuito más complejo).

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



Observación: Hay simetría de rotación en φ (me muevo en φ y veo lo mismo).
Por lo tanto, el campo solo dependerá de ρ y de z :

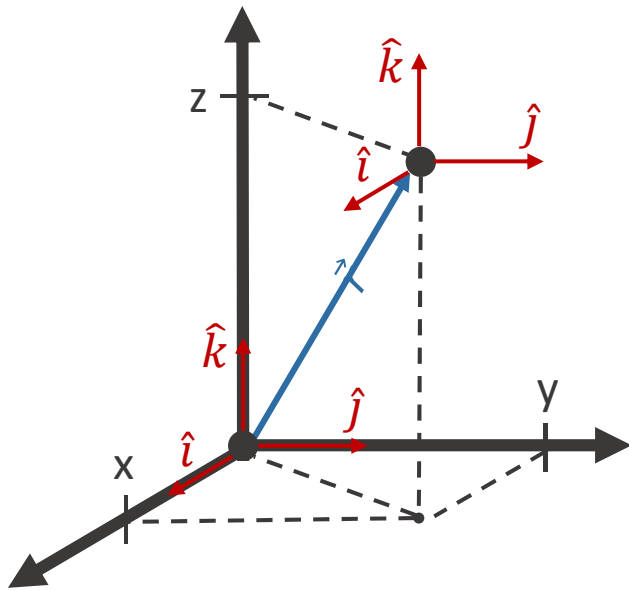
$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho, \cancel{\varphi}, z) = \vec{B}(\rho, z)$$

- Queremos calcular el campo en todo el espacio:

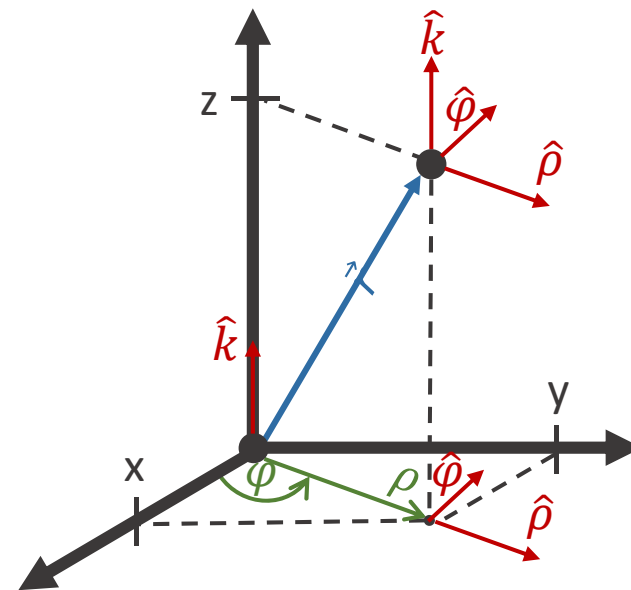
Punto campo $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$

O bien: $\vec{r} = \rho \cos\varphi \hat{i} + \rho \sin\varphi \hat{j} + z \hat{k}$

O bien: $\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{k}$



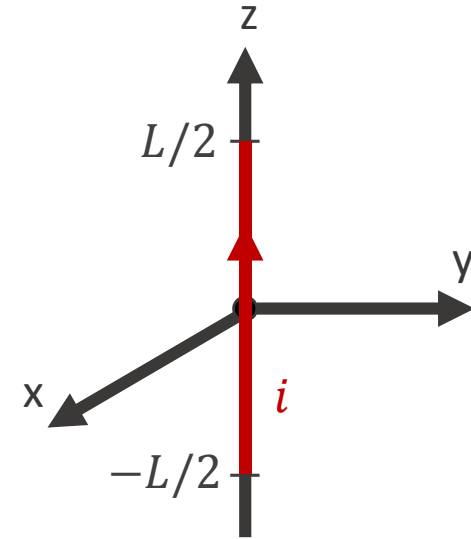
Variables y versores cartesianos



Variables y versores cilíndricos

- La corriente de cargas está ubicada en el eje z:

Punto fuente $\vec{r}' = z' \hat{k}$



- Luego calculamos:
$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}') &= x\hat{i} + y\hat{j} + (z - z')\hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} \end{aligned}$$

O bien:

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}') &= \rho \cos\varphi \hat{i} + \rho \sin\varphi \hat{j} + (z - z')\hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi + (z - z')^2} = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \end{aligned}$$

O bien:

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}') &= \rho \hat{\rho} + (z - z')\hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \end{aligned}$$

- Corriente lineal: $id\vec{l}'$ Obs.: La corriente lineal siempre será uniforme.

- Parametrizamos $d\vec{l}'$ y definimos los límites de integración: $d\vec{l}' = dz' \hat{k} \quad -\frac{L}{2} \leq z' \leq \frac{L}{2}$

Obs.: Definimos el sentido de circulación con el versor, **O BIEN**, con los límites de integración (“yo” prefiero con los límites...)

- Calculamos $d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$:

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = dz' \hat{k} \times [\rho \cos\varphi \hat{i} + \rho \sin\varphi \hat{j} + (z - z')\hat{k}]$$

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & dz' \\ \rho \cos\varphi & \rho \sin\varphi & (z - z') \end{vmatrix}$$

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = -\rho \sin\varphi dz' \hat{i} + \rho \cos\varphi dz' \hat{j} + 0\hat{k}$$

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \rho dz' (-\sin\varphi \hat{i} + \cos\varphi \hat{j})$$

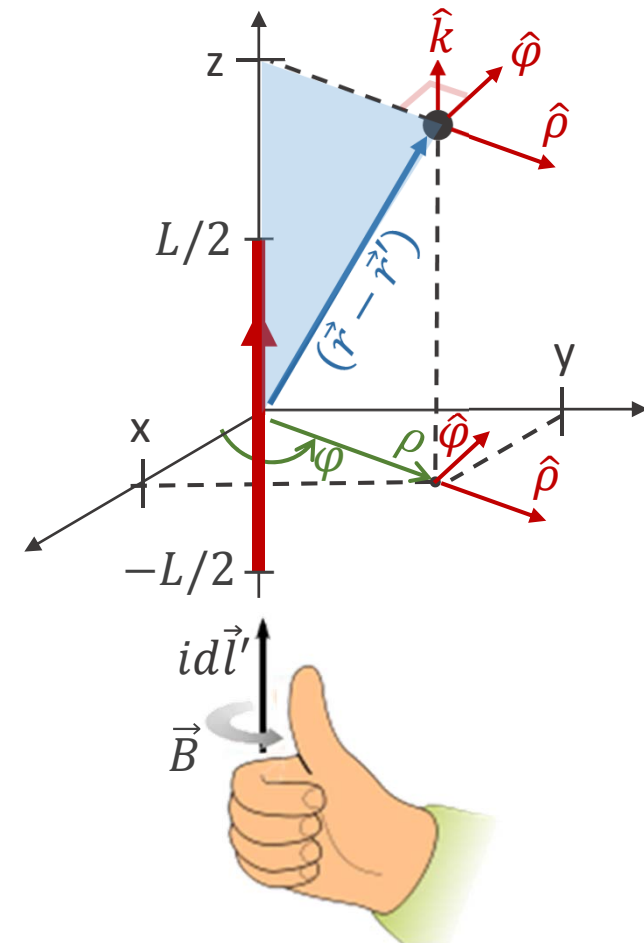
$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \rho dz' \hat{\varphi}$$

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = dz' \hat{k} \times [\rho \hat{\rho} + (z - z')\hat{k}]$$

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{k} \\ 0 & 0 & dz' \\ \rho & 0 & (z - z') \end{vmatrix}$$

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = 0\hat{\rho} + \rho dz' \hat{\varphi} + 0\hat{k}$$

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \rho dz' \hat{\varphi}$$



Obs.: ¿Qué dirección tiene el campo en el semiplano YZ con $y > 0$?

No hace falta transformar analíticamente $\hat{\varphi}$ a versores cartesianos como en la Guía 0. Lo determinamos “a ojo”: $-\hat{i}$

- Por lo tanto:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho dz' \hat{\phi}}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

- Tenemos una integral por cada componente:

$$B_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\rho dz'}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i \rho}{4\pi} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dz'}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Por sustitución:

$$u = z - z'$$

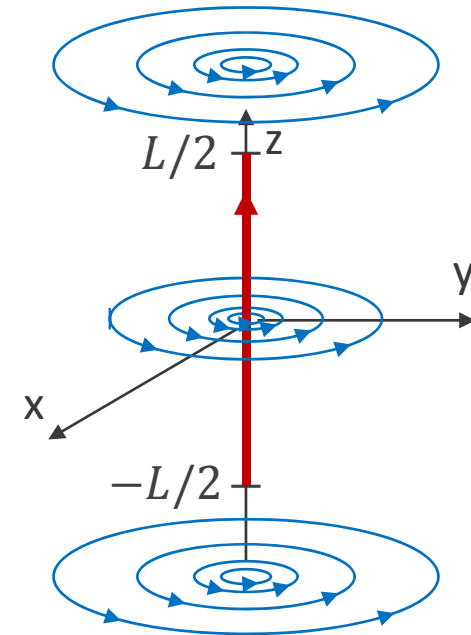
$$du = -dz' \Rightarrow dz' = -du$$

Por tabla de integrales:

$$\int \frac{du}{(\rho^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + u^2}} + C$$

$$B_\phi(\rho, z) = -\frac{\mu_0 i \rho}{4\pi} \int_{z+L/2}^{z-L/2} \frac{du}{(\rho^2 + u^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 i \rho}{4\pi} \left(\frac{(z - L/2)}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{(z + L/2)}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2}} \right)$$

$$\boxed{\vec{B}(\rho, z) = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \left(\frac{(L/2 - z)}{\sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}} + \frac{(L/2 + z)}{\sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2}} \right) \hat{\phi}}$$



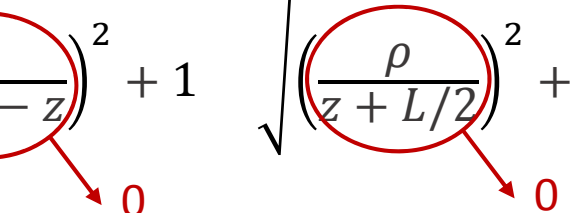
Observación: En la mayoría de los libros se utiliza una parametrización más “rara” del espacio para resolver este problema, que logra que las cuentas sean menos engorrosas.

Ejemplo: Hilo recto infinito de corriente

- Hacemos tender L a infinito (o bien, nos alejamos de los bordes: $|z| \ll L$):

$$B_\phi = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi\rho} \left(\frac{(L/2 - z)}{\sqrt{\rho^2 + (L/2 - z)^2}} + \frac{(L/2 + z)}{\sqrt{\rho^2 + (L/2 + z)^2}} \right) \right)$$

$$B_\phi = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{L/2 - z}\right)^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{z + L/2}\right)^2 + 1}} \right) \right)$$



$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 i}{4\pi\rho} 2\hat{\phi}$$

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

Ejemplo: Espira circular de corriente

- Hallaremos el campo magnético generado por una espira circular corriente continua, en su eje.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Punto campo $\vec{r} = z \hat{k}$

¡Ojo! No dejar como ρ' ni z' variable

Punto fuente $\vec{r}' = \cancel{R} \cos\varphi' \hat{i} + R \sin\varphi' \hat{j} + \cancel{0} \hat{k} = R\hat{\rho}$

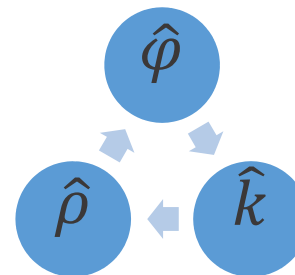
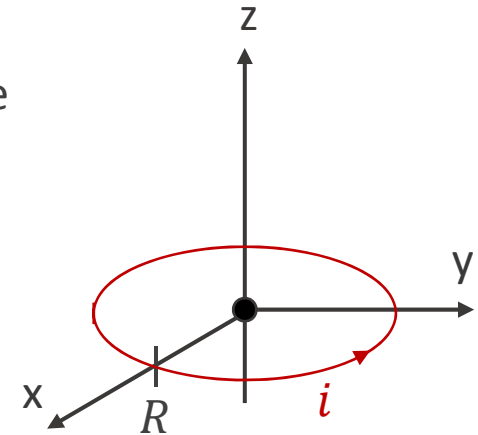
$$(\vec{r} - \vec{r}') = -R \cos\varphi' \hat{i} - R \sin\varphi' \hat{j} + z \hat{k} = -R\hat{\rho} + z\hat{k}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$d\vec{l}' = R d\varphi' \hat{\phi} \quad 0 \leq \varphi' \leq 2\pi$$

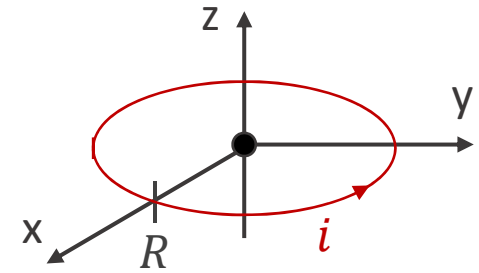
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{iR d\varphi' \hat{\phi} \times (-R\hat{\rho} + z\hat{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R\hat{k} + z\hat{\rho})}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi' = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R\hat{k} + z\cos\varphi' \hat{i} + z\sin\varphi' \hat{j})}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi'$$



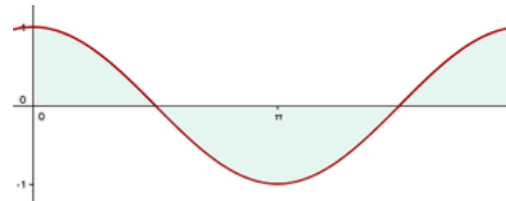
Obs.: Si hubiera dejado el vector $(\vec{r} - \vec{r}')$ en cartesianas, tendría que haber transformado el vector $d\vec{l}'$ de versores cilíndricos a cartesianas (ver Guía 0)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z \cos \varphi' \hat{i} + z \sin \varphi' \hat{j} + R \hat{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi'$$

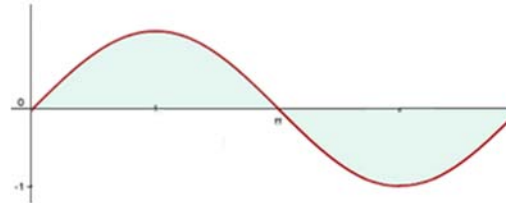


- Tenemos una integral por cada componente:

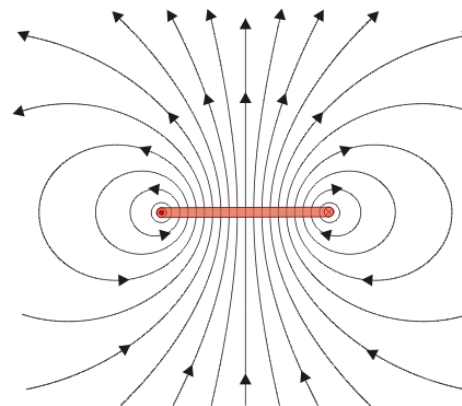
$$B_x(z) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = 0$$



$$B_y(z) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi' d\varphi' = 0$$



$$B_z(z) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{\mu_0 i R}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

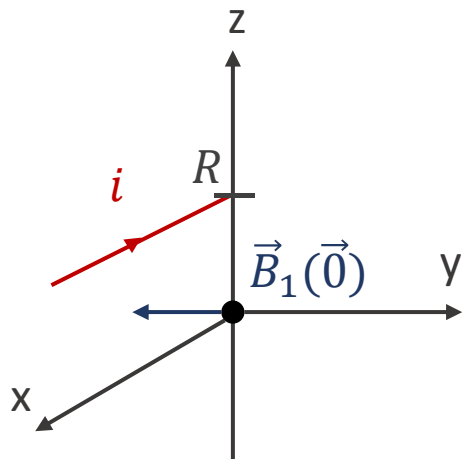


$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

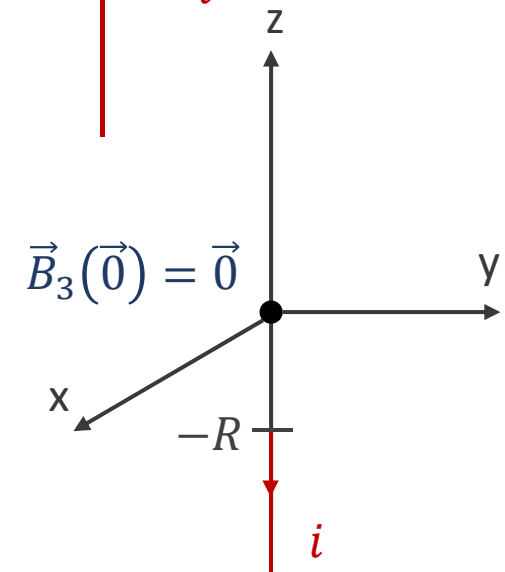
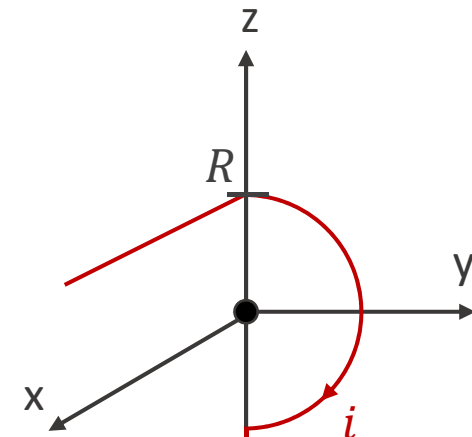
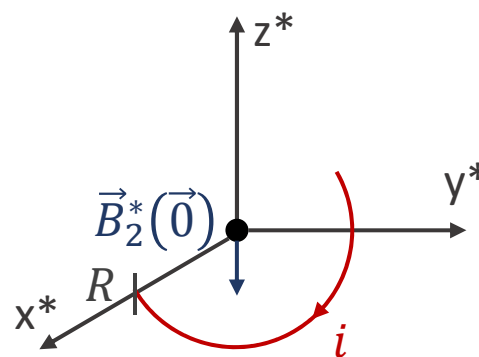
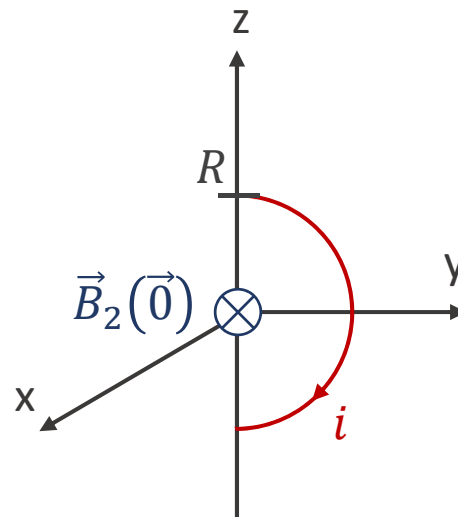
Ejemplo: Línea de corriente “compuesta”

- Para hallar el campo magnético en el origen, usar el **Principio de Superposición** y la **Regla de la mano derecha**

$$\vec{B}(\vec{0}) = \vec{B}_1(\vec{0}) + \vec{B}_2(\vec{0}) + \vec{B}_3(\vec{0})$$



Obs.: Tenemos que parametrizar el tramo 1 en cartesianas. Si queremos parametrizarlo en cilíndricas, tenemos que usar un sistema de referencia auxiliar como en el tramo 2, en donde el hilo esté sobre el eje z. Lo resolvemos como el caso del hilo corto entre $L_1 \rightarrow -\infty$ y $L_2 = 0$ (en lugar de entre $-L/2$ y $+L/2$).

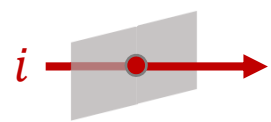


Obs.: En el sistema de referencia original y con la ayuda de la regla de la mano derecha, obtenemos la dirección y sentido del campo. En el sistema de referencia auxiliar, obtenemos el módulo.

Distribuciones de corriente

Corriente lineal: 1 hilo

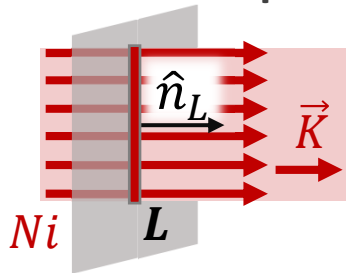
Corriente (carga por unidad de tiempo) que pasa por un punto



$$i[A] = \frac{dq}{dt} \left[\frac{C}{s} \right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Corriente superficial o laminar: N hilos muy próximos formando una superficie



$$i_{total}^{sup} [A] = Ni = \int_L \vec{K}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \hat{n}_L$$

Para el ej.: $Ni = KL$

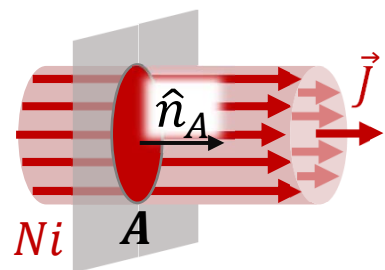
Densidad de corriente superficial (\vec{K}) [A/m]:
Corriente que pasa por una línea (L)
Tiene la dirección y sentido de la velocidad de arrastre de los portadores de cargas positivos.

Nº de hilos de corriente por unidad de longitud $\frac{N}{L} = n$

$$K = \frac{Ni}{L} = ni$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \iint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{K}(\vec{r}) ds' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Corriente volumétrica: N hilos muy próximos formando un volumen



$$i_{total}^{vol} [A] = Ni = \iint_A \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} \hat{n}_A$$

Para el ej.: $Ni = JA$

Densidad de corriente volumétrica (\vec{J}) [A/m²]:
Corriente que pasa por una superficie (A)
Tiene la dirección y sentido de la velocidad de arrastre de los portadores de cargas positivos.

$$J = \frac{Ni}{A}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}) dv' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$