Física II (62.03 – 82.02)

Magnetostática en el vacío
Ley de Ampère

Josefina M. Silveyra

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Repaso

- Ley de Biot-Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i d\vec{l}\prime \times (\vec{r}-\vec{r}\prime)}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|^3}$
- <u>Ejemplo:</u> Hilo recto corto de corriente
- <u>Ejemplo:</u> Hilo recto infinito de corriente
- <u>Ejemplo:</u> Espira circular de corriente
- <u>Ejemplo:</u> Línea de corriente “compuesta”
- Distribuciones de corriente: lineal, superficial, volumétrica

Fuerza entre conductores con corriente (*"Ampère's force law"*)

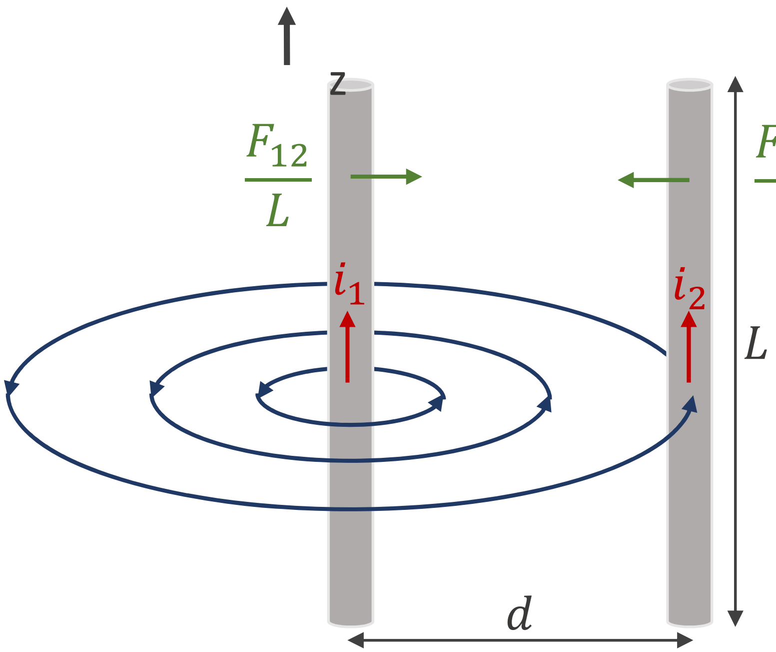
- Fuerza de atracción o de repulsión entre dos hilos de corriente.
- <u>Origen:</u> Cada hilo genera un campo magnético, de acuerdo a la Ley de Biot-Savart, y el otro hilo experimenta una fuerza magnética, de acuerdo a la Fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_m = \int_C i d\vec{l} \times \vec{B}$$

- **<u>Caso particular:</u> Dos hilos paralelos, rectos e infinitos**

André-Marie Ampère
(1775-1836)
Francia

$$B_1(\rho) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi\rho}$$



$$\frac{F_{21}}{L} = i_2 B_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$$

<u>Obs.:</u> Las corrientes paralelas se atraen y las corrientes antiparalelas se repelen

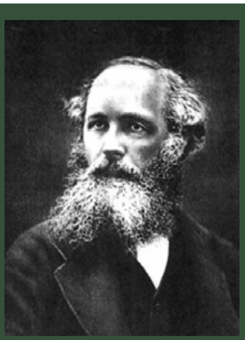
- <u>1 Ampère (1948):</u> Intensidad de corriente constante que, manteniéndose en dos hilos de corriente paralelos, rectos, de longitud infinita, separados entre sí un metro, en el vacío, produce una fuerza de $2.10^{-7}\ N/m$ sobre cada uno.

<u>Obs.:</u> El Ampère fue redefinido el 20/05/2019: https://es.wikipedia.org/wiki/Redefinici%C3%B3n_de_las_unidades_del_SI#Amperio

Teorema de Ampère *("Ampère's circuital law")*

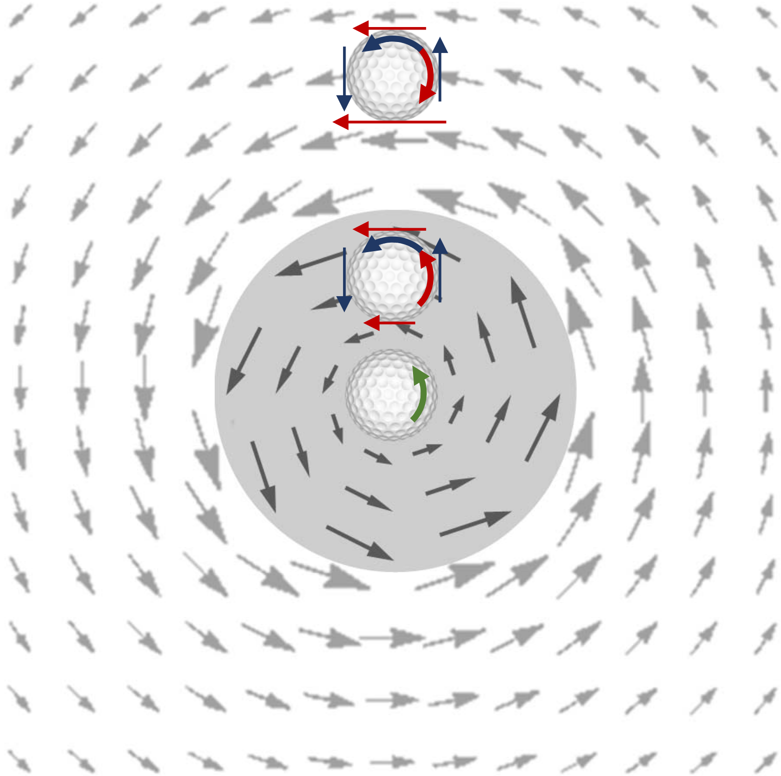
- Fue formulado en 1855 **por Maxwell** (¡20 años después de la muerte de Ampère!), basándose en estudios de Ampère sobre las fuerzas entre elementos de corriente.
- El "Teorema de Ampère" fue demostrado **para corrientes continuas (constantes) en el vacío**, pero se cumple también para medios materiales y es una buena aproximación para variaciones lentas de corriente.
  En estos casos se conoce como "ley" en lugar de "teorema".
- Hallemos el rotor del campo magnetostático generado por un hilo "gordo" de corriente continua (ubicado en la zona gris):

André-Marie Ampère
(1775-1836)
Francia



James Clerk Maxwell
(1831 – 1879)
Escocia

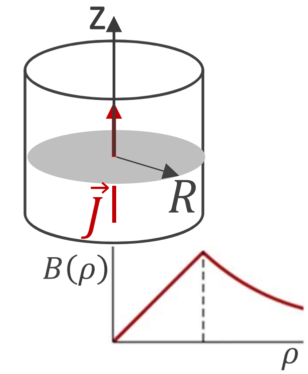
Repaso: El rotor de un campo vectorial muestra la tendencia que tiene el campo a inducir rotación alrededor de un punto.



- El campo magnético de un hilo de corriente posee un rotor no nulo en el hilo (zona gris del esquema).

- Campo magnético generado por una distribución cilíndrica infinita de corriente uniforme (por la Ley de Biot-Savart):

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 J \rho}{2}\hat{\varphi} & \rho < R \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\hat{\varphi} & \rho > R \end{cases}$$



- Rotor de un campo $\vec{B} = B_\rho\hat{\rho} + B_\varphi\hat{\varphi} + B_z\hat{k}$ (en cilíndricas):

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right]\hat{\rho} + \left[\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial\rho}\right]\hat{\varphi} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho B_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial\varphi}\right]\hat{k}$$

$\rho < R$ $$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho\frac{\mu_0 J\rho}{2}\right)}{\partial\rho}\hat{k} = \frac{1}{\rho}\frac{\mu_0 J}{2}\frac{\partial(\rho^2)}{\partial\rho}\hat{k} = \frac{1}{\rho}\frac{\mu_0 J}{2}2\rho\hat{k} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$

$\rho > R$ $$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho\frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\right)}{\partial\rho}\hat{k} = \frac{1}{\rho}\frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{\partial(1)}{\partial\rho}\hat{k} = 0\hat{k} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{0}$$

- El rotor del campo magnetostático es proporcional a la densidad de corriente en el punto: $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}(\vec{r})}$

- Aplicando el **Teorema del rotor (o de Stokes)**

$$\iint_{S(C)} (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$\iint_{S(C)} (\mu_0\vec{J}(\vec{r}))\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{concatenada(S(C))} = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{conc(S(C))}}$$

<u>Observación:</u> En el capítulo 7.8 del Apunte, el Teorema de Ampère está deducido de otra manera.

- **Ley válida para cualquier distribución de corriente**, no necesariamente con simetría azimutal (no lo demostraremos acá), siempre que se verifique la ecuación de continuidad para corriente continua en todo punto del espacio: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

  Obs.: La ecuación de continuidad implica que no puede haber ni fuentes ni sumideros de carga.

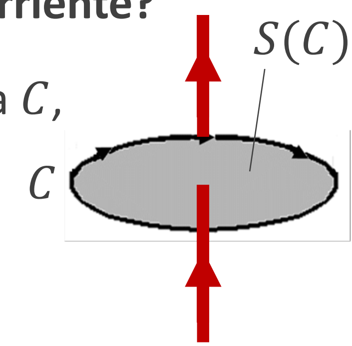
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{conc(S(C))} = \mu_0 \iint_{S(C)} \vec{J}(\vec{r}) \cdot ds\hat{n}_S$$

El sentido de $\hat{n}_S$ está indicado por el sentido de circulación de C (usar la Regla de la mano derecha)

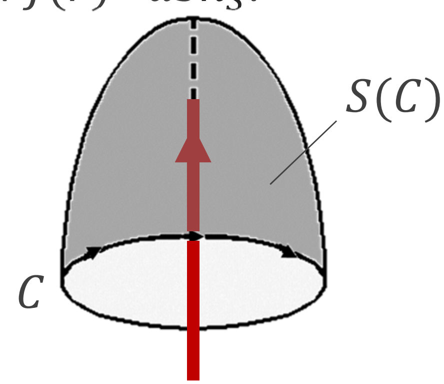
Es decir, no podremos aplicarla para calcular la intensidad del campo magnético generado por tramos de circuitos, no por "inútil" sino por "inválida", como sí podíamos utilizar la Ley de Biot-Savart. Más adelante extenderemos la Ley y será válida también para tramos de corriente.

- **¿Por qué la Ley de Ampère NO es válida para tramos (finitos o semi-infinitos) de corriente?**



- Normalmente, al elegir $S(C)$, elegiremos a la superficie plana definida por la curva C, porque nos permite resolver fácilmente el producto escalar $\vec{J}(\vec{r}) \cdot ds\hat{n}_S$.

- Pero en realidad, somos libres de elegir cualquier superficie definida por C, es decir, no tiene que por qué ser plana. Podría ser, por ej., una bolsa:



- $i_{concatenada(S(C))}$ es toda la corriente que "pincha" la superficie $S(C)$, pero no puede depender de la superficie que elija (plana, con forma de bolsa, o la que sea).

- Podemos resumir las dos propiedades del campo magnetostático en dos ecuaciones o leyes:

Ley de Gauss del campo magnético: una de las leyes de Maxwell

Forma integral

$$\Phi_{B(S)} = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Ley de Ampère: solución particular de otra de las leyes de Maxwell (para corrientes continuas / campos magnetostáticos)

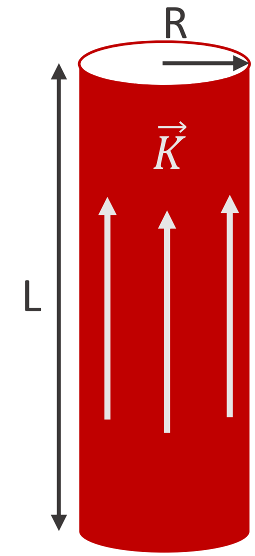
Forma integral

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 i_{conc(S(C))}$$

Forma diferencial

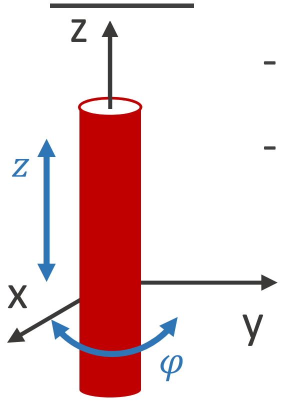
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

<u>Ejemplo:</u> Campo magnético de un cilindro infinito con K axial uniforme



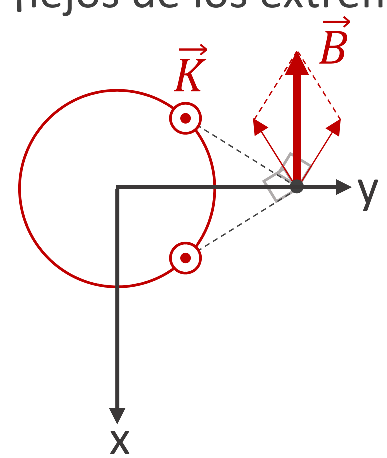
- Dada una distribución de corriente axial, distribuida de uniformemente en forma cilíndrica con radio R y longitud L tendiendo a infinito, vamos a hallar el campo magnético que genera en todo el espacio.
- Podríamos utilizar la ley de Biot-Savart,
  pero utilizando la ley de Ampère va a ser mucho más sencillo matemáticamente.
- Sin embargo, vamos a tener que demostrar previamente otras cuestiones, como la dirección del campo, ya que por la ley de Ampère solo podremos calcular su *intensidad*.

<u>Paso 1:</u> Determinar la dependencia del campo con las coordenadas espaciales



- Hay simetría de rotación en φ (me muevo en φ y veo lo mismo)
- Hay simetría de traslación en z (me muevo en z y veo lo mismo, ¡lejos de los extremos!)

$$\boxed{\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho, \cancel{\varphi}, \cancel{z}) = \vec{B}(\rho)}$$



<u>Paso 2:</u> Determinar la dirección del campo

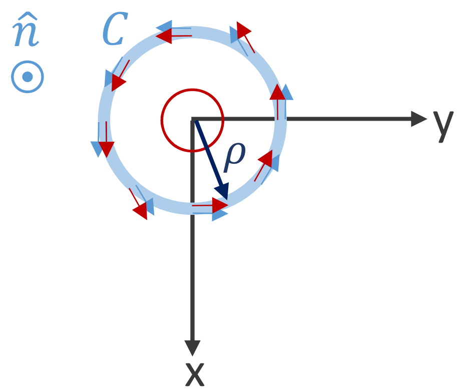
<u>Obs.:</u> Salvo en este caso particular, no demostraremos la dirección del campo magnético de una manera tan rigurosa como con el campo eléctrico, pero sí debemos decir cuál es (aunque la hallemos de forma más intuitiva)

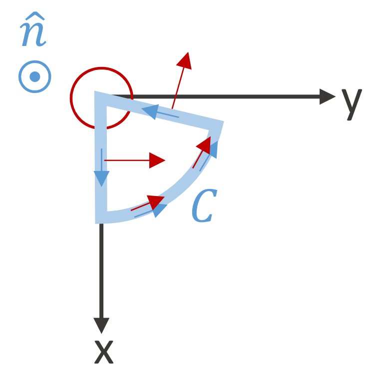
$$\boxed{\therefore \vec{B} = B\hat{\varphi}}$$

Paso 3: Elegir una curva amperiana (es decir, cerrada), tal que el campo sea:

- Uniforme y tangencial a la curva, o bien,
- Perpendicular a la curva

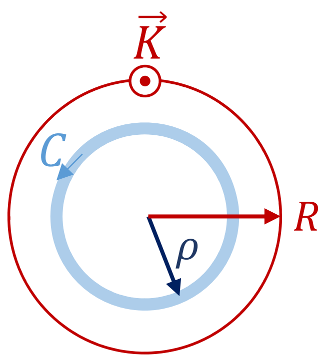
Ejemplos:





Paso 4: Aplicar la ley de Ampère integral para calcular la intensidad del campo en cada región.

$\rho < R$



$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 i_{conc(S(C))}$$

$$\oint_C B(\rho)\hat{\varphi}.\,dl\hat{\varphi} = \mu_0 0$$

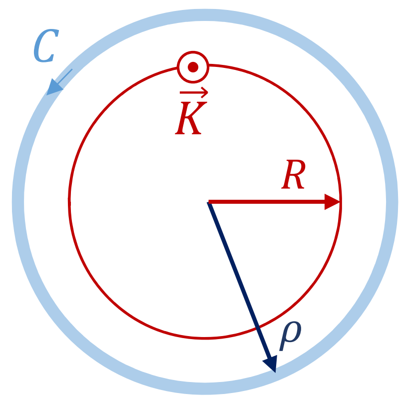
$$\parallel$$

$$B(\rho)\oint_C dl = 0$$

$$\boxed{B(\rho) = 0}$$

$\rho > R$

$\hat{n}$ $\odot$



$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 i_{conc(S(C))}$$

$$\oint_C B(\rho)\hat{\varphi}.dl\hat{\varphi} = \mu_0 \int_{L(C)} \vec{K}(\vec{r}) \cdot dl\hat{n}_L$$

$$B(\rho)\oint_C dl = \mu_0 K \int_{L(C)} (+1)dl$$

$$B(\rho)2\pi\rho = \mu_0 K 2\pi R$$

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 K 2\pi R}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}$$

$$\boxed{B(\rho) = \frac{\mu_0 K R}{\rho}}$$

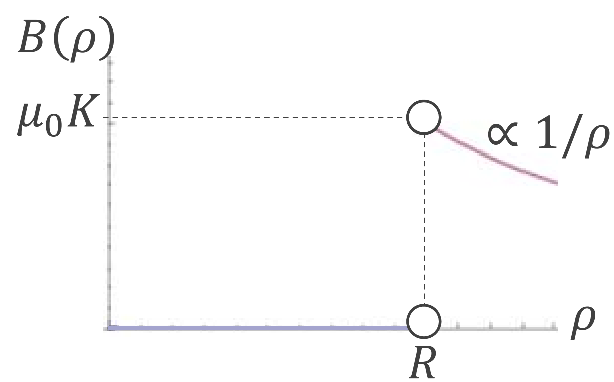
<u>Obs.:</u> $\hat{n}_L$ está dado por el sentido de circulación elegido de la curva C y la regla de la mano derecha

<u>Obs.:</u> $L(C)$ es la curva que resulta de la intersección entre la superficie plana delimitada por la curva de Ampere C y la distribución de corriente (el cilindro rojo)

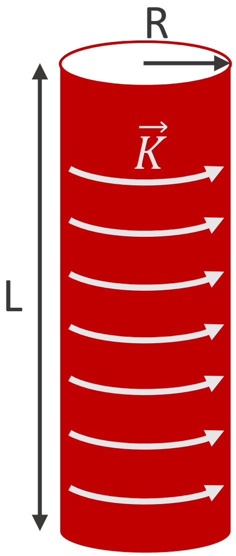
<u>Observación:</u> ¡Misma expresión que hallamos por Biot-Savart para un hilo infinito!

<u>Paso 5:</u> Recuadramos la respuesta final del campo magnético en todo el espacio (con la intensidad hallada en el paso 4 y la dirección hallada en el paso 2).

$$\boxed{\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \vec{0} & \rho < R \\ \mu_0 K R \dfrac{1}{\rho}\hat{\varphi} & \rho > R \end{cases}}$$

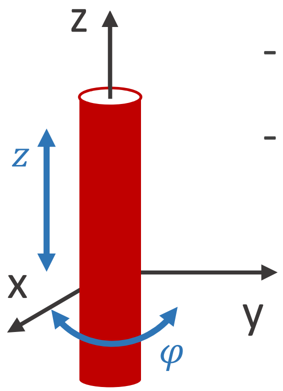


Ejemplo: Solenoide: Cilindro infinito con K azimutal uniforme



- Dada una distribución de corriente azimutal, distribuida de uniformemente en forma cilíndrica con radio R y longitud L tendiendo a infinito, vamos a hallar el campo magnético que genera en todo el espacio.

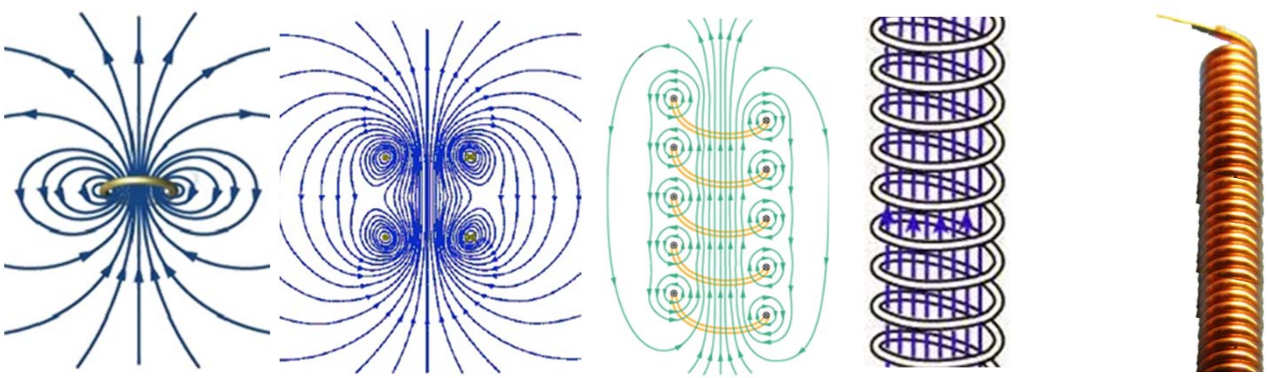
Paso 1: Determinar la dependencia del campo con las coordenadas espaciales

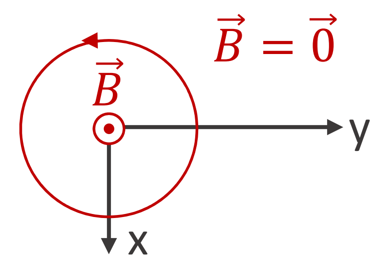


- Hay simetría de rotación en φ (me muevo en φ y veo lo mismo)
- Hay simetría de traslación en z (me muevo en z y veo lo mismo, ¡lejos de los extremos!)

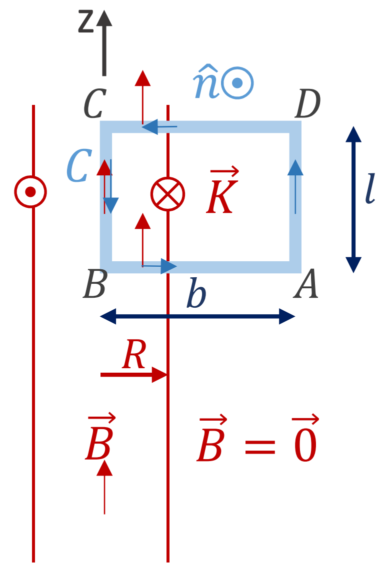
$$\boxed{\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho, \cancel{\varphi}, \cancel{z}) = \vec{B}(\rho)}$$

Paso 2: Determinar la dirección del campo





$$\boxed{\begin{gathered}\vec{B} = B\hat{k}\ (dentro\ del\ solenoide)\\ \vec{B} = \vec{0}\ (fuera\ del\ solenoide)\end{gathered}}$$



Paso 3: Elegir una curva amperiana.

Paso 4: Aplicar la ley de Ampère integral para calcular la intensidad del campo.

Obs.: Únicamente hallaremos la intensidad del campo dentro del cilindro. Ya dijimos que el campo fuera del solenoide es nulo.

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 i_{conc(S(C))}$$

$$\int_{BA} B(\rho)\underbrace{\hat{k}.d\vec{l}}_{\perp} + \int_{BC} B(\rho)\underbrace{\hat{k}\,dl\,(-\hat{k})}_{\nparallel} + \int_{CD} B(\rho)\underbrace{\hat{k}\,d\vec{l}}_{\perp} + \int_{AD} \vec{0}.dl\hat{k} = \mu_0 \int_{L(C)} \underbrace{\vec{K}(\vec{r})\cdot dl\hat{n}_L}_{\nparallel}$$

$$-B(\rho)\int_{BC} dl = \mu_0 K \int_{L(C)} (-1)dl$$

$$-B(\rho)l = -\mu_0 K l$$

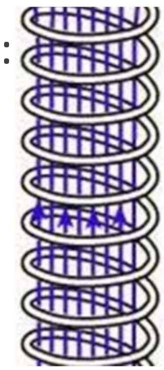
$$B(\rho) = \mu_0 K$$

Recordar:
- $\hat{n}_L$ está dado por el sentido de circulación elegido de la curva C y la regla de la mano derecha
- $L(C)$ es la curva que resulta de la intersección entre la superficie plana delimitada por la curva de Ampere C y la distribución de corriente (el cilindro rojo)

Obs.: En lugar de darnos una densidad superficial de corriente, K, nos podrían haber dado:
- la corriente que pasa por 1 espira, i, y
- la *densidad de espiras*, $n = N/L$

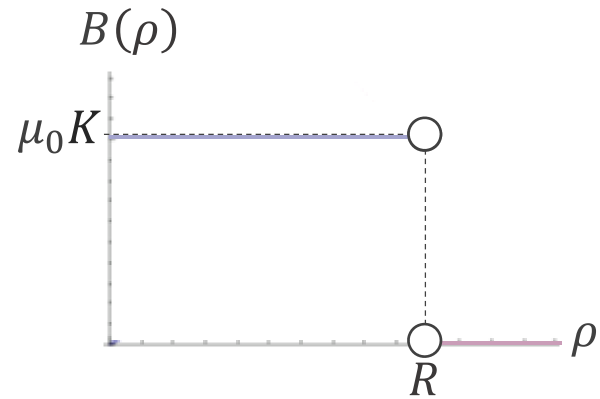
(donde N es el número total de espiras y L la longitud total del solenoide)

$$\Rightarrow i_{conc(S(C))} = nli = \frac{N}{L} li$$



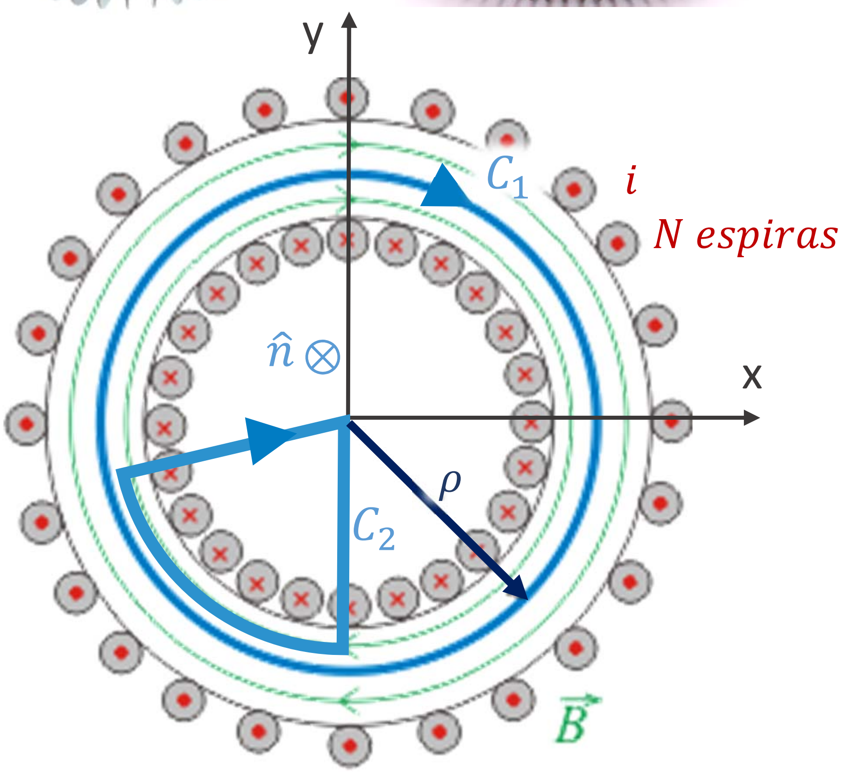
Paso 5: Recuadramos la respuesta final del campo magnético en todo el espacio (con la intensidad hallada en el paso 4 y la dirección del paso 2).

$$\boxed{\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \mu_0 K\hat{k} = \mu_0 n i\hat{k} = \mu_0 \dfrac{N}{L} i\hat{k} & dentro\ del\ cilindro \\ \vec{0} & fuera\ del\ cilindro \end{cases}}$$



Obs.: El campo es uniforme dentro del solenoide infinito y no depende de R.

Ejemplo: Toroide



$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho)(-\hat{\varphi}) \; (dentro\ del\ toroide)$$
$$\vec{B} = \vec{0} \; (fuera\ del\ toroide)$$

Obs.: C_1 y C_2 son posibles curvas amperianas. A continuación trabajaremos con C_1.

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}).d\vec{l} = \mu_0 i_{conc(S(C))}$$

$$\oint_{C_1} B(\rho)(-\hat{\varphi}).dl(-\hat{\varphi}) = \mu_0 i_{conc(S(C))}$$

$$+B(\rho)\oint_{C_1} dl = +\mu_0 N i$$

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi\rho}$$

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi}\dfrac{1}{\rho}(-\hat{\varphi}) & dentro\ del\ toroide \\ \vec{0} & fuera\ del\ toroide \end{cases}$$