Física II (62.03 – 82.02)

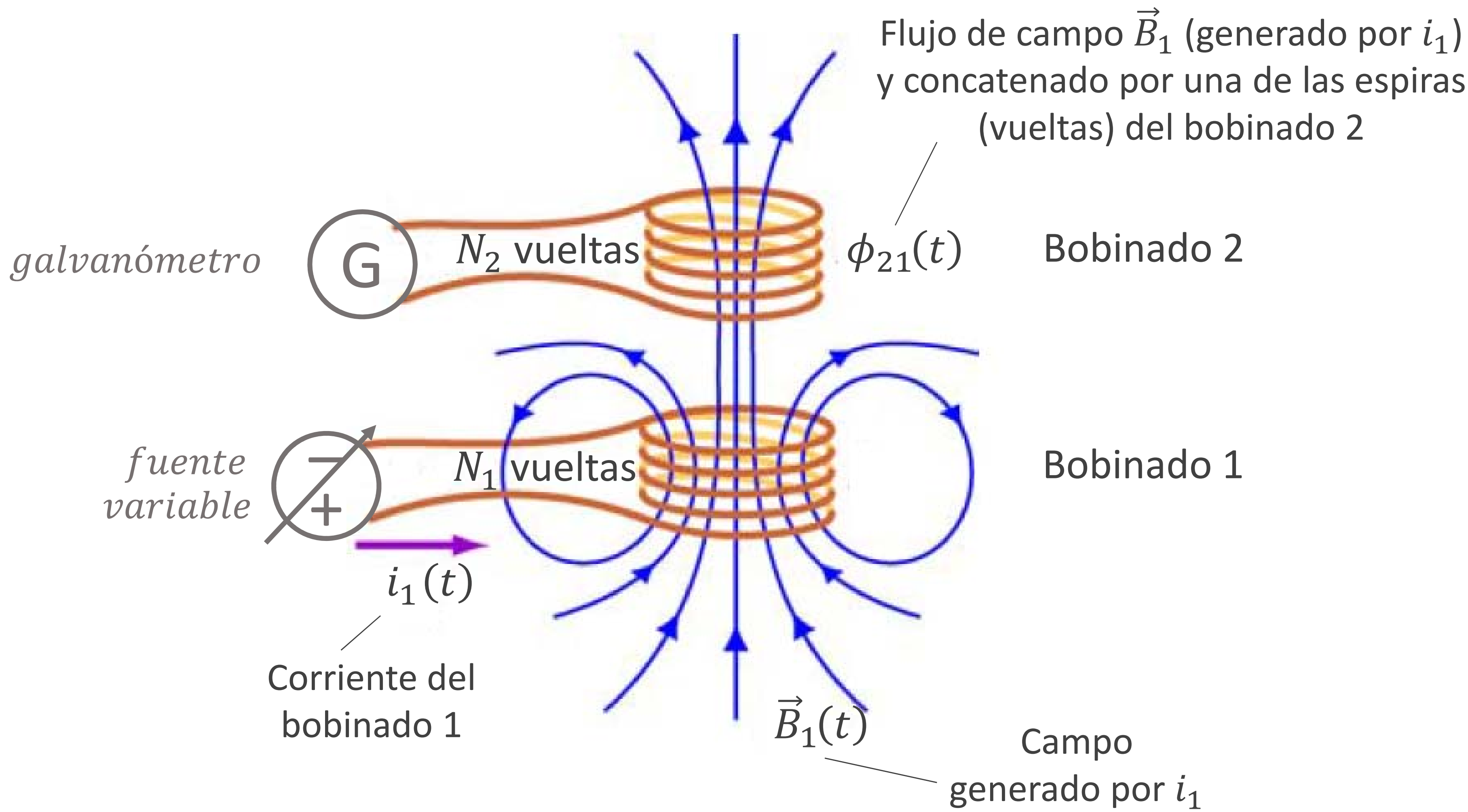
Electromagnetismo
Inductancia

Josefina M. Silveyra

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Inductancia mutua

- Supongamos dos bobinados ubicados uno cerca del otro como indica la figura:



- Por la Ley de Faraday-Lenz para una bobina de N vueltas –idénticas y “juntitas”, se induce una fem en el bobinado 2 debido a i_1:

$$\varepsilon_{21} = -N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt} \iint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

<u>Obs.:</u> Hay que integrar $\vec{B}_1$ en una superficie definida por una espira del *bobinado 2*, prestando atención a la ubicación de la espira: ¡el campo generado por el bobinado 1 no es uniforme en todo el espacio! Un error común es calcular $B_1|_{en\ 1}.S_2$

- Si $i_1(t)$ varía lentamente, podemos seguir usando la Ley de Biot-Savart para determinar el campo que genera:

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \int \frac{\mu}{4\pi} \frac{i_1(t) d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

donde μ es la permeabilidad absoluta del medio (podría no ser vacío).

<u>Obs.:</u> En Física II siempre trabajamos con medios isótropos y homogéneos. Además, en problemas de este tema (para “Circuitos Magnéticos” no), haremos siempre la aproximación de que el medio es lineal. Así que μ es escalar y además constante, por lo que no depende de $\vec{H}$ ni, por lo tanto, de i.

- Luego, observamos que la variación con el tiempo de $\phi_{21}(t)$ es directamente proporcional a la variación con el tiempo de $i_1(t)$:

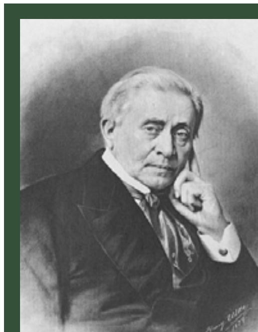
$$N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt} \Rightarrow$$

$$\boxed{M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{21}}{di_1}}$$

Inductancia mutua [Henry=H=T.m²/A]

$$\boxed{M_{21} = N_2 \frac{\phi_{21}}{i_1}}$$

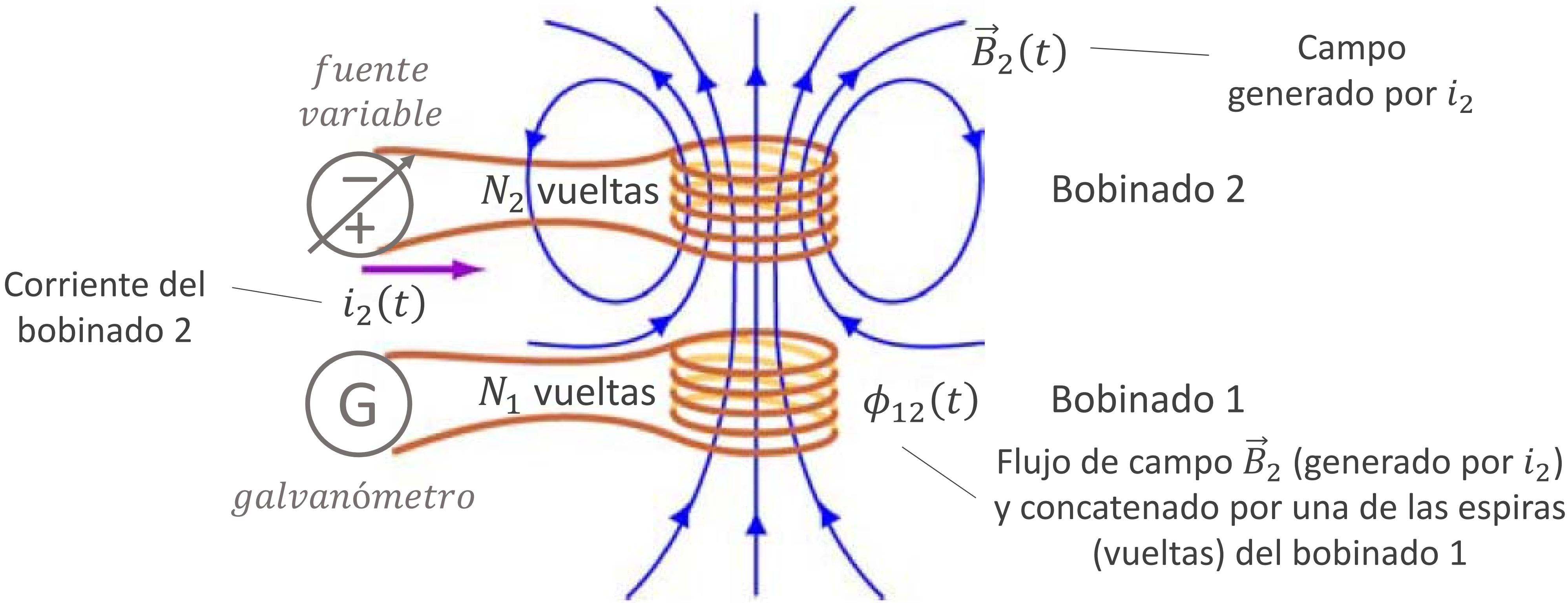
Para medios lineales



Joseph Henry (1797-1878) EEUU

- M depende únicamente de la geometría de los bobinados, su separación y orientación, y de las propiedades del medio (si están en vacío o en un núcleo ferromagnético). **NO** depende de i. Es una magnitud siempre POSITIVA. (ídem C y R)

- Análogamente, si ahora circula corriente por solo el bobinado 2:



- La variación con el tiempo de $\phi_{12}(t)$ es directamente proporcional a la variación con el tiempo de $i_2(t)$:

$$N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

- De donde se obtiene la otra inductancia mutua:

$$M_{12} = N_1 \frac{d\phi_{12}}{di_2}$$

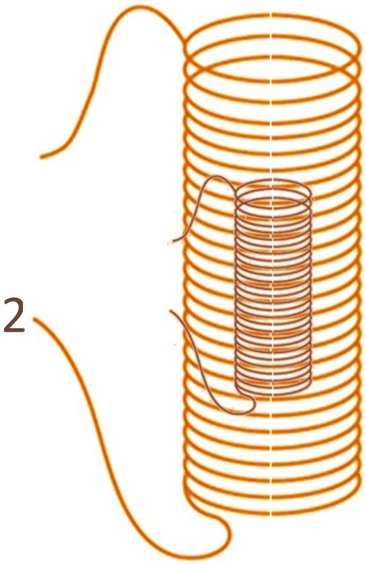
- Al final de esta clase, mediante el Teorema de la Reciprocidad, haciendo un análisis de la energía en dos inductores acoplados magnéticamente, demostraremos que, <u>para medios lineales</u>:

$$\boxed{M_{21} = M_{12} \equiv M}$$

Ejemplo: Inductancia mutua de dos solenoides

Bobinado 1
N_1
S_1
l_1
$\mu_1 = \mu_0$

Bobinado 2
N_2
S_2
l_2
$\mu_2 = \mu_0$



- Hallaremos las inductancias mutuas M_{21} y M_{12} entre los solenoides de la figura.
- Comenzamos hallando M_{21} por definición:

$$M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{21}}{di_1} \qquad \text{donde, } \phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

- Podemos hallar B_1 dentro del solenoide 1 a partir de la Ley de Ampère (lejos de los bordes) suponiendo una corriente i_1:

$$B_1 = \mu_1 \frac{N_1 i_1}{l_1}$$

- Observamos que B_1 es uniforme dentro del solenoide (lejos de los bordes). Por lo tanto:

$$\phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = B_1 \iint_{S_2} ds = B_1 S_2 = \mu_1 \frac{N_1 i_1}{l_1} S_2$$

$$\parallel$$

- Luego:

$$M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{21}}{di_1} = N_2 \frac{d\left(\mu_1 \frac{N_1 i_1}{l_1} S_2\right)}{di_1} = N_2 \mu_1 \frac{N_1}{l_1} S_2 \frac{di_1}{di_1} = \boxed{\mu_1 \frac{S_2}{l_1} N_1 N_2}$$

Obs.: en un medio lineal μ no depende de i

Obs.: Si definíamos $M_{21} = N_2 \frac{\phi_{21}}{i_1}$ llegábamos al mismo resultado

- Notamos que, efectivamente, M_{21} no depende de i_1 (que puede ser incluso nula), sino solo de cómo están construidos los bobinados.

- ¿Podemos hallar M_{12} por definición?

NO, porque no podemos hallar analíticamente el flujo magnético generado por i_2 y concatenado por el bobinado 1, puesto que el campo B_2 no es uniforme en él –ni siquiera todas las espiras concatenan el mismo campo (a diferencia de lo que sucedía en el caso anterior). Recordemos cómo era el campo generado por un solenoide:

Bobinado 1

N_1

S_1

l_1

$\mu_1 = \mu_0$

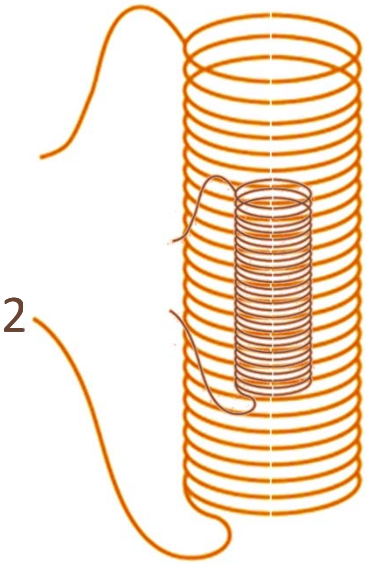
Bobinado 2

N_2

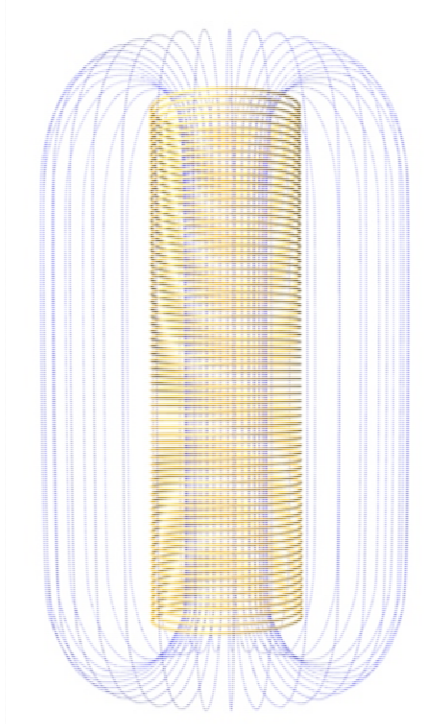
S_2

l_2

$\mu_2 = \mu_0$



$$\iint_{S_1} \vec{B}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = ???$$

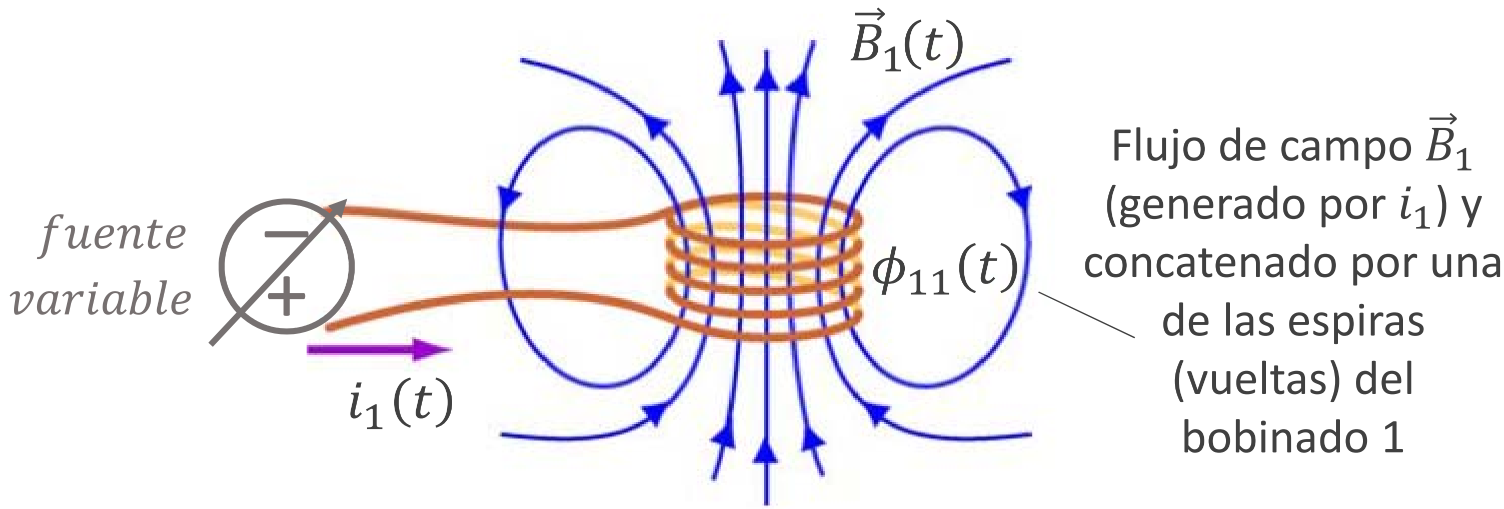


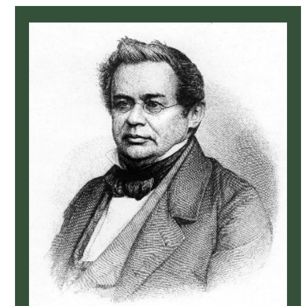
- Hallamos M_{12} por el Teorema de Reciprocidad:

$$M_{12} = M_{21} = \mu_1 \frac{S_2}{l_1} N_1 N_2$$

Autoinductancia

- Supongamos un bobinado por el que circula una corriente como indica la figura:




Heinrich Lenz
(1804-1865)
Rusia

- fem **autoinducida, fuerza contra-electromotriz o, en inglés, *back-emf*:** fem inducida en el bobinado oponiéndose al paso de corriente por él mismo. Propiedad de todos los circuitos de corriente.
- Análogamente,

$$\varepsilon_{11} = -N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt} = -N_1 \frac{d}{dt} \iint_{S_1} \vec{B}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \Rightarrow \boxed{L_1 = N_1 \frac{d\phi_{11}}{di_1}}$$

Autoinductancia [H]

$$\boxed{L_1 = N_1 \frac{\phi_{11}}{i_1}}$$

Para medios lineales

<u>Obs.:</u> Físicamente, L es la medida de oponerse al cambio de corriente.

- **Inductor:** elemento circuital de gran L.

Simbología

Ejemplo: Autoinductancia de un solenoide

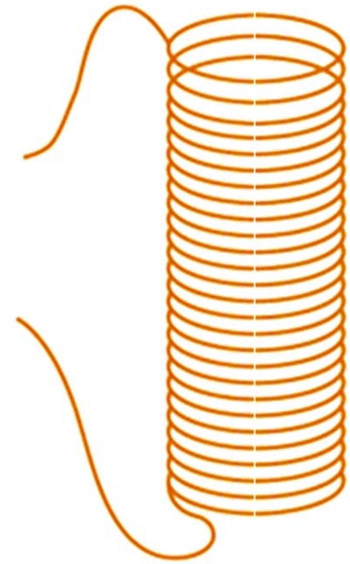
Bobinado 1

N_1

S_1

l_1

$\mu_1 = \mu_0$



- Hallaremos la autoinductancia L_1 del solenoide 1.

- Por definición:

$$L_1 = N_1 \frac{d\phi_{11}}{di_1} \qquad \text{donde, } \phi_{11} = \iint_{S_1} \vec{B}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

- Podemos hallar B_1 dentro del solenoide 1 a partir de la Ley de Ampère (lejos de los bordes) suponiendo una corriente i_1:

$$B_1 = \mu_1 \frac{N_1 i_1}{l_1}$$

- Por lo tanto:

$$\phi_{11} = \iint_{S_1} \vec{B}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = B_1 \iint_{S_1} ds = B_1 S_1 = \mu_1 \frac{N_1 i_1}{l_1} S_1$$

- Luego:

$$L_1 = N_1 \frac{d\phi_{11}}{di_1} = N_1 \frac{d\left(\mu_1 \frac{N_1 i_1}{l_1} S_1\right)}{di_1} = N_1 \mu_1 \frac{N_1}{l_1} S_1 \frac{di_1}{di_1} = \boxed{\mu_1 \frac{S_1}{l_1} N_1 N_1}$$

Obs.: en un medio lineal μ no depende de i

Obs.: Si definíamos $L_1 = N_1 \frac{\phi_{11}}{i_1}$ llegábamos al mismo resultado

- Notamos que, efectivamente, L_1 no depende de i_1 (que puede ser incluso nula), sino solo de cómo están construidos los bobinados.

Factor de acoplamiento

- El flujo magnético de acoplamiento entre dos bobinados depende de la separación y orientación de los bobinados, y de la permeabilidad magnética del medio.

- **Factor (o coeficiente) de acoplamiento:** Fracción del flujo total que abraza o acopla a las dos bobinas:

$$k = \frac{\phi_{21}}{\phi_1} = \frac{\phi_{12}}{\phi_2}$$

$$\boxed{0 \leq k \leq 1}$$

ϕ_{21}: Flujo generado por el bobinado 1 y concatenado por el bobinado 2

ϕ_{12}: Flujo generado por el bobinado 2 y concatenado por el bobinado 1

ϕ_1: Flujo generado por el bobinado 1

ϕ_2: Flujo generado por el bobinado 2

- La inductancia mutua se puede expresar en función de las autoinducciones y del factor de acoplamiento:

$$M^2 = M_{12}M_{21} = N_1\frac{\phi_{12}}{i_2}N_2\frac{\phi_{21}}{i_1} = N_1\frac{k\phi_2}{i_2}N_2\frac{k\phi_1}{i_1} = k^2\left(N_1\frac{\phi_1}{i_1}\right)\left(N_2\frac{\phi_2}{i_2}\right) = k^2 L_1 L_2$$

<u>Obs.:</u> en un medio lineal

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$M = k\sqrt{\left(\mu_1\frac{S_1}{l_1}N_1^2\right)\left(\mu_2\frac{S_2}{l_2}N_2^2\right)}$$

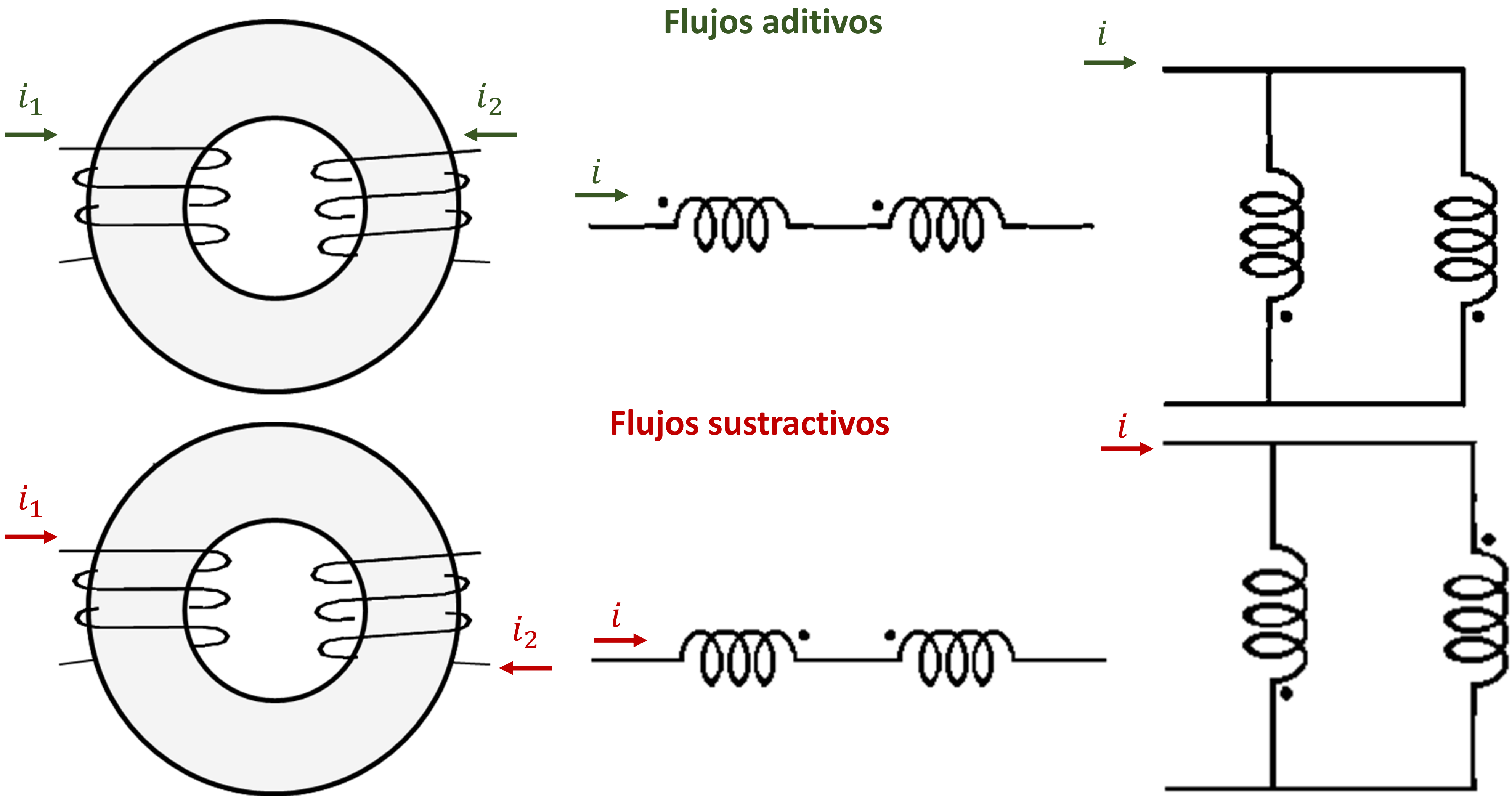
Si (caso particular):
$S_1 = S_2;\, l_1 = l_2;\, \mu_1 = \mu_2$
$\Rightarrow$

$$\boxed{M = k\mu\frac{S}{l}N_1 N_2}$$

¡OJO! Si el acoplamiento no es perfecto e insistimos en hallar M por definición, cuidado que no todo el flujo generado por un bobinado es concatenado por el otro: $\phi_{21} = k\phi_1$

Bornes homólogos

- Los bornes homólogos son aquellos por los cuales corrientes simultáneamente entrantes (o salientes) producen flujos magnéticos aditivos en el interior de cada bobinado. Si las corrientes entran simultáneamente por bornes no homólogos, los flujos resultan sustractivos.
- En los esquemas circuitales, se indica con un punto uno de los dos pares de bornes homólogos.



Circuitos eléctricos con inductores

- Para analizar circuitos con combinaciones de inductores, necesitaremos aplicar las Leyes de Kirchhoff. Recordémoslas (Clase 10):

  <u>**Ley de nodos:**</u> La suma algebraica de todas las corrientes que pasan por un nodo es igual a cero. **Será válida para variaciones lentas de corriente.**
  Basada en el principio de conservación de la carga y en la condición de estado estacionario. Quiere decir que no hay acumulación de carga en ningún punto.

$$\boxed{\sum i = 0 \Rightarrow \sum i_{\substack{entrantes \\ al\ nodo}} = \sum i_{\substack{salientes \\ al\ nodo}}}$$

  <u>**Ley de mallas:**</u> La suma algebraica de las caídas de tensión en una malla es igual a la tensión total suministrada.
  Basada en el principio de conservación de la energía en condición de estados estático y estacionario (en los cuales diferencia de potencial es trabajo externo por unidad de carga, o variación de energía por unidad de carga).
  Quiere decir que el sistema es conservativo: la potencia disipada en las resistencias (por efecto Joule), es provista por las *fem*.

$$\sum \varepsilon - \sum iR = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \varepsilon_{fuentes} + \sum \varepsilon_{inductores} - \sum iR = 0$$

$$\boxed{\sum \varepsilon_{fuentes} - \sum L\frac{di}{dt} \mp \sum M\frac{di}{dt} - \sum iR = 0}$$

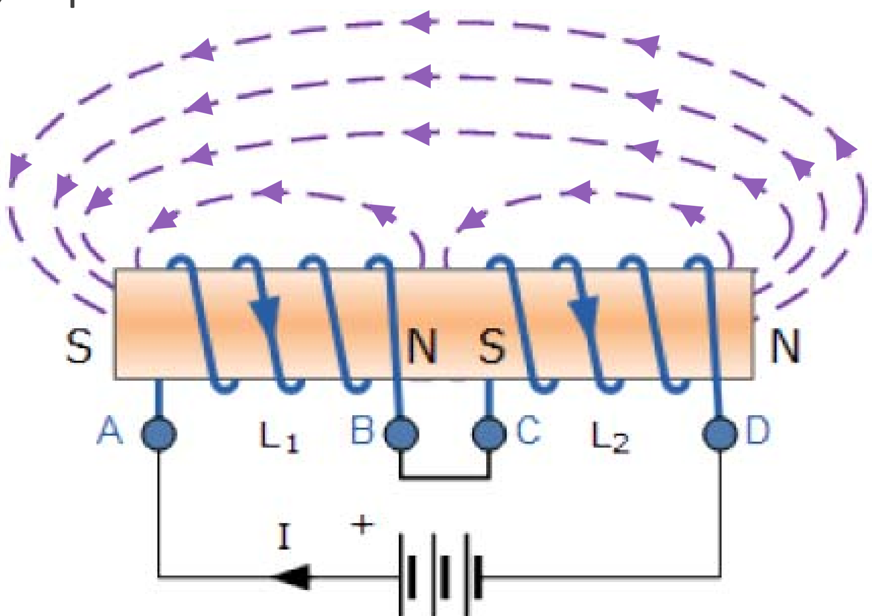
<u>Obs.:</u> la corriente de "$L\frac{di}{dt}$" es la que pasa por el inductor L, mientras que la de "$M\frac{di}{dt}$" es la que pasa por el otro inductor magnéticamente acoplado al inductor L

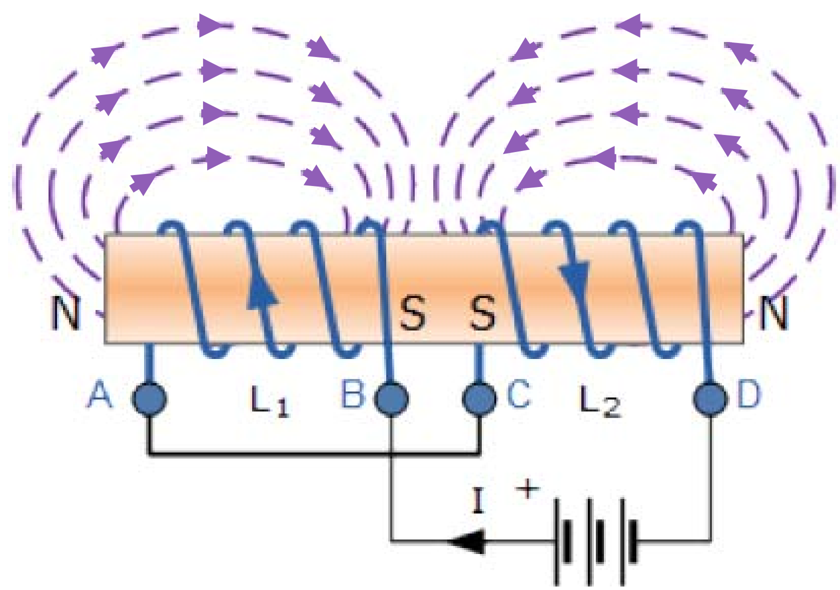
Combinando inductores

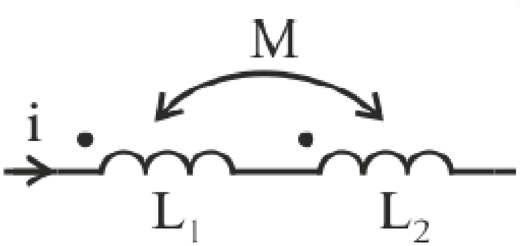
- Como ya mencionamos, cuando el campo magnético de un inductor le llega a un segundo inductor, ambos inductores están mutuamente acoplados y están caracterizados por el coeficiente de inductancia mutua M.
- Dependiendo de la conexión entre los dos inductores, existen diversos circuitos equivalentes que se pueden utilizar para simplificar el análisis de circuitos.

Inductores magnéticamente acoplados y conectados eléctricamente en serie

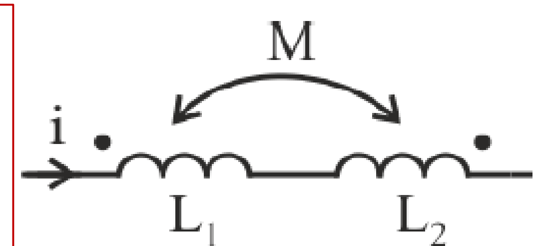
- Los campos magnéticos generados por los inductores se pueden estar oponiendo o reforzando entre sí, dependiendo de la orientación de ellos:





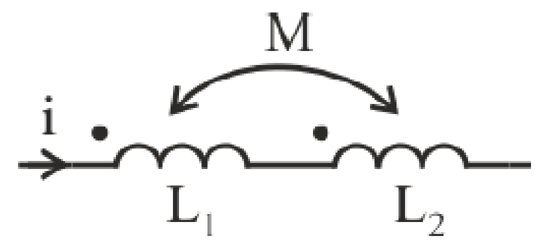


Bornes homólogos:
Par de bornes por los que, si entrara la corriente por ellos, los flujos magnéticos serían aditivos
<u>Obs.:</u> par de bornes con puntito, **o bien**, sin puntito



Caso flujos aditivos

- En el caso de la figura, la corriente entra en ambos inductores por bornes homólogos, lo que quiere decir que el flujo concatenado por cada bobinado, es el generado por él mismo MÁS el generado por el otro bobinado –que le llega a él.



- Por lo tanto, la fem inducida en cada bobinado es:

$$\varepsilon_1 = -\left(L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}\right) \qquad \varepsilon_2 = -\left(L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}\right)$$

Obs.: ambas fem dependen de la misma corriente porque por ambos bobinados circula la misma i.

- Así que la fem total, dado que están conectados en serie, será:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -(L_1 + M)\frac{di}{dt} - (L_2 + M)\frac{di}{dt} = -(L_1 + M + L_2 + M)\frac{di}{dt} = -L_{\substack{eq\\serie\\adit}} \frac{di}{dt}$$

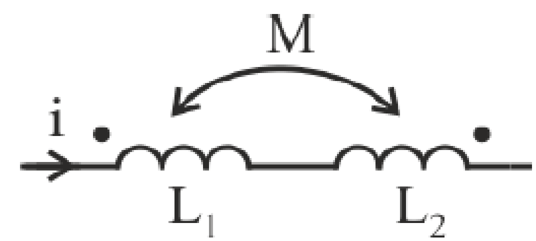
donde,

$$\boxed{L_{\substack{eq\\serie\\adit}} = L_1 + L_2 + 2M}$$

Obs.: Si los inductores estuvieran magnéticamente desacoplados (M=0), la inductancia equivalente es la suma de las autoinductancias (análogo a combinar resistencias en serie)

Caso flujos sustractivos

- En el caso de la figura, la corriente entra en ambos inductores por bornes **NO homólogos**, lo que quiere decir que el flujo concatenado por cada bobinado, es el generado por él mismo MENOS el generado por el otro bobinado –que le llega a él.



- Por lo tanto, la fem inducida en cada bobinado es:

$$\varepsilon_1 = -\left(L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}\right) \qquad \varepsilon_2 = -\left(L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}\right)$$

Obs.: ambas fem dependen de la misma corriente porque por ambos bobinados circula la misma i.

- Así que la fem total será:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -(L_1 - M)\frac{di}{dt} - (L_2 - M)\frac{di}{dt} = -(L_1 - M + L_2 - M)\frac{di}{dt} = -L_{\substack{eq\\serie\\sust}} \frac{di}{dt}$$

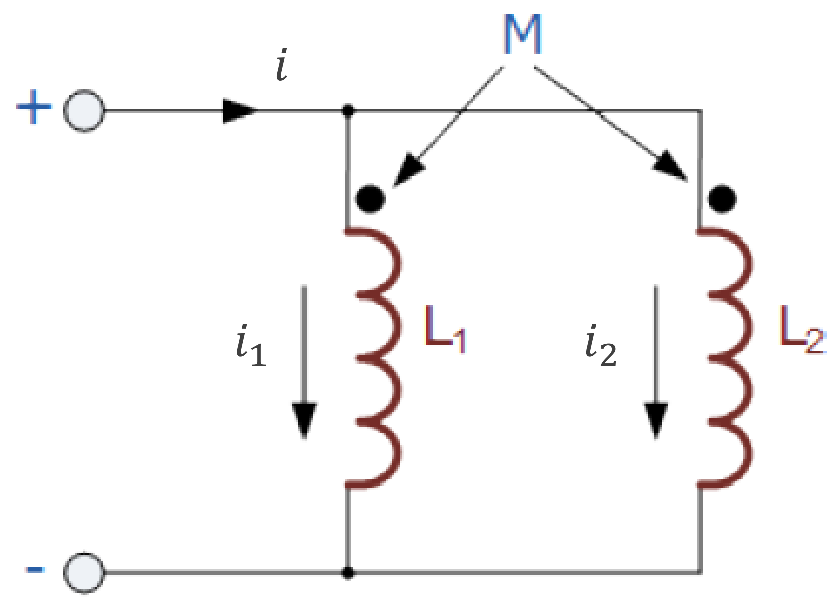
donde, $\boxed{L_{\substack{eq\\serie\\sust}} = L_1 + L_2 - 2M}$

Obs.: Al recorrer un circuito para aplicar la Ley de Kirchhoff de mallas, debido a la ε_L, la tensión cae al atravesar un inductor en el sentido de la corriente (análogamente al atravesar una resistencia).
La caída de tensión debido a ε_M tendrá el mismo signo que la debido a ε_L, si la corriente entra a los bobinados magnéticamente acoplados por bornes homólogos. Y tendrá el signo contrario si entra por bornes no homólogos.

Inductores magnéticamente acoplados y conectados eléctricamente en paralelo

- En este caso también, los campos magnéticos generados por los inductores se pueden estar oponiendo o reforzando entre sí, dependiendo de la orientación de ellos:

Caso flujos aditivos



- La fem inducida en cada bobinado es:

$$\varepsilon_1 = -\left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}\right) \qquad \varepsilon_2 = -\left(L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}\right)$$

- Como están conectados en paralelo, ambas fem deben ser iguales:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

- Esta fem ε dependerá de la corriente total y de la inductancia equivalente:

$$\varepsilon = -L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}} \frac{di}{dt} = -L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}} \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right)$$

$$i = i_1 + i_2$$

- A continuación, operaremos con estas ecuaciones para hallar la inductancia equivalente en función de las autoinductancias y de la inductancia mutua

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$$-\left(L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}\right) = -\left(L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}\right)$$

$$L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

$$L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_1}{dt} = L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

$$(L_1 - M)\frac{di_1}{dt} = (L_2 - M)\frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{(L_2 - M)}{(L_1 - M)}\frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{(L_1 - M)}{(L_2 - M)}\frac{di_1}{dt}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1$$

$$-L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}\frac{di}{dt} = -\left(L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}\right)$$

$$L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}\frac{di}{dt} = \left(L_1\frac{(L_2 - M)}{(L_1 - M)}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_2}{dt}\right)$$

$$L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}\frac{di}{dt} = \left(L_1\frac{(L_2 - M)}{(L_1 - M)} + M\right)\frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}}{\left(L_1\frac{(L_2 - M)}{(L_1 - M)} + M\right)}\frac{di}{dt} = \frac{di_2}{dt}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_2$$

$$-L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}\frac{di}{dt} = -\left(L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}\right)$$

$$L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}\frac{di}{dt} = \left(L_2\frac{(L_1 - M)}{(L_2 - M)}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_1}{dt}\right)$$

$$L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}\frac{di}{dt} = \left(L_2\frac{(L_1 - M)}{(L_2 - M)} + M\right)\frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}}{\left(L_2\frac{(L_1 - M)}{(L_2 - M)} + M\right)}\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt}$$

$$-L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}\frac{di}{dt}=-L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}\left(\frac{di_1}{dt}+\frac{di_2}{dt}\right)$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{L_{\substack{eq\ par\\adit}}}{\left(L_2\frac{(L_1-M)}{(L_2-M)}+M\right)}\frac{di}{dt}+\frac{L_{\substack{eq\ par\\adit}}}{\left(L_1\frac{(L_2-M)}{(L_1-M)}+M\right)}\frac{di}{dt}$$

$$1=\left(\frac{1}{L_2\frac{(L_1-M)}{(L_2-M)}+M}+\frac{1}{L_1\frac{(L_2-M)}{(L_1-M)}+M}\right)L_{\substack{eq\ par\\adit}}$$

$$1=\left(\frac{(L_2-M)}{L_2(L_1-M)+M(L_2-M)}+\frac{(L_1-M)}{L_1(L_2-M)+M(L_1-M)}\right)L_{\substack{eq\ par\\adit}}$$

$$1=\left(\frac{L_2-M}{L_1L_2-ML_2+ML_2-M^2}+\frac{L_1-M}{L_1L_2-ML_1+ML_1-M^2}\right)L_{\substack{eq\ par\\adit}}$$

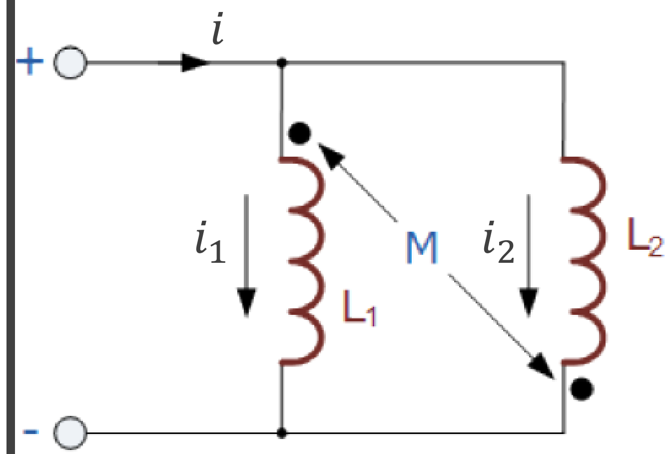
$$1=\left(\frac{L_2-M}{L_1L_2-M^2}+\frac{L_1-M}{L_1L_2-M^2}\right)L_{\substack{eq\ par\\adit}}$$

$$1=\left(\frac{L_1+L_2-2M}{L_1L_2-M^2}\right)L_{\substack{eq\ par\\adit}}$$

$$\boxed{L_{\substack{eq\\paralelo\\adit}}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}}$$

<u>Obs.:</u> Si los inductores estuvieran magnéticamente desacoplados (M=0), este caso también es análogo al de combinar resistencias en paralelo

Caso flujos sustractivos



- Para este caso:

$$\varepsilon_1=-\left(L_1\frac{di_1}{dt}-M\frac{di_2}{dt}\right)$$

$$\varepsilon_2=-\left(L_2\frac{di_2}{dt}-M\frac{di_1}{dt}\right)$$

- Operando análogamente al caso anterior obtenemos:

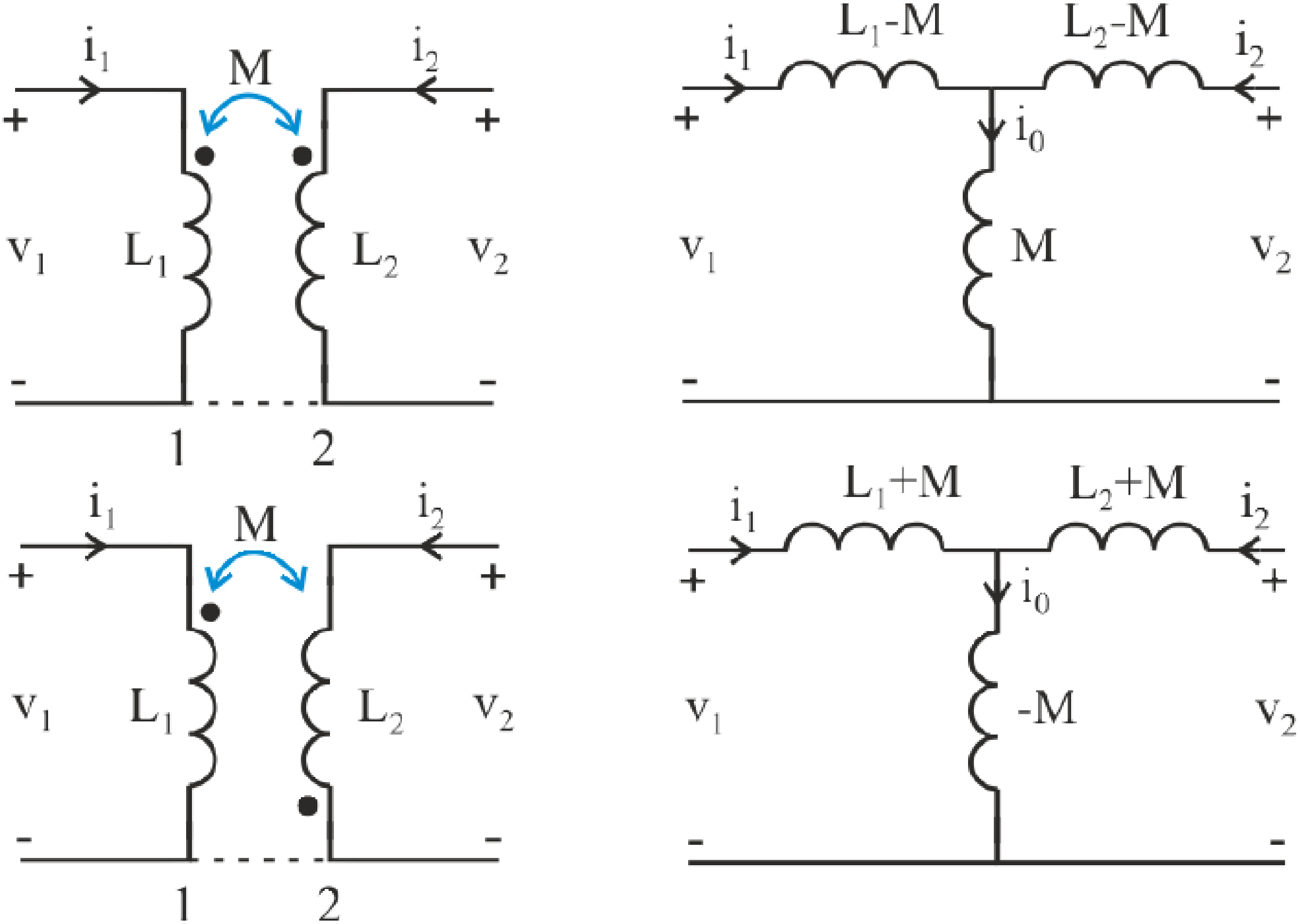
$$\boxed{L_{\substack{eq\\paralelo\\sust}}=\frac{L_1L_2+M^2}{L_1+L_2+2M}}$$

Inductores magnéticamente acoplados y desconectados eléctricamente entre sí

- Esta configuración, que tiene dos circuitos eléctricos separados, también puede ser descripta por un único circuito equivalente.

En el apartado 9.19.2 del Apunte, se puede ver un breve análisis de esta configuración.

- A continuación se presentan los circuitos equivalentes para los casos de flujos aditivo y sustractivo, pero excede los contenidos de Física II: analizaremos la configuración original y no el circuito equivalente.



Energía (del campo magnético) almacenada por un inductor con corriente

- Partiendo de un inductor desenergizado (es decir, por el que no circula corriente), energizarlo con una corriente I requiere trabajo externo contra la fem inducida en el inductor.
- Recordemos que por la Ley de Lenz, si por un inductor circula una corriente variable en el tiempo (en este caso creciente de 0 a I), el sistema se opondrá al cambio (es decir, "intentará" que la corriente siga siendo nula).
- Este trabajo, es una cantidad **fija** de energía (es decir, no importa qué tan rápido llevemos la corriente de 0 a I) y **se recupera** al desconectar la fuente (es decir, al llevar la corriente de I a 0), puesto que el sistema "intentará" que la corriente siga siendo I: una vez desconectada la fuente que mantenía la corriente igual a I, durante un breve intervalo de tiempo seguirá circulando una corriente.
- Mientras el inductor continúa energizado con una corriente constante en el tiempo I, la energía entregada al comienzo permanece latente en el sistema, almacenada en el campo magnético.

$$i(t=0)=0$$

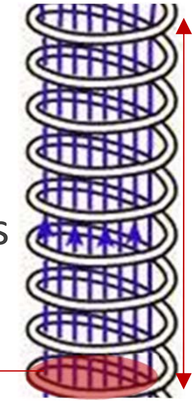
$$W=\int_0^t p(t)\,dt=\int_0^t i(t).v(t)\,dt=\int_0^t i(t).L\frac{di(t)}{dt}dt=\int_0^I i(t).Ldi(t)=L\frac{I^2}{2}$$

<u>Obs.:</u> No depende de cuándo tiempo transcurra hasta hacer circular la corriente final por el inductor, sino solo de la geometría y medio del inductor (dentro del parámetro L) y del valor final de corriente.

- Por lo tanto, la energía almacenada por un inductor energizado con I (en el campo magnético generado) es igual al trabajo total entregado para alcanzar dicho estado desde un estado inicial desenergizado:

$$\boxed{U=\frac{1}{2}LI^2}$$

Ejemplo: Energía magnética almacenada por un solenoide con corriente



- Hallaremos la energía almacenada por un solenoide muy largo a partir de la energía del campo magnético generado por este en todo espacio:
- Repaso:

- Densidad de energía del campo magnético: $u_m\left[\frac{J}{m^3}\right]=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

- Energía del campo magnético: $U=\iiint_{\substack{todo\ el\\ espacio}} u_m\,dv$

- Para un medio lineal dentro del solenoide: $\vec{B}=\mu\vec{H} \Rightarrow \vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu} \Rightarrow u_m=\frac{1}{2}\frac{\left|\vec{B}\right|^2}{\mu}$

- Campo magnético generado por un solenoide infinito con corriente i:

$$\vec{B}(\rho)=\begin{cases}\mu\frac{N}{l}i\hat{k} & \text{dentro del solenoide}\\ \vec{0} & \text{fuera del solenoide}\end{cases}$$

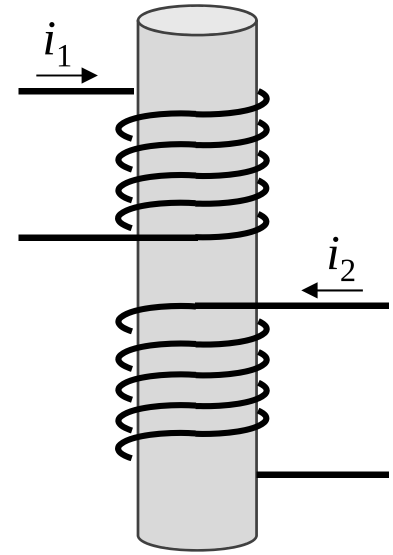
- Por todo lo anterior, obtenemos:

$$U=\iiint_{\substack{todo\ el\\ espacio}} u_m\,dv=\iiint_{\substack{todo\ el\\ espacio}}\frac{1}{2}\frac{\left|\vec{B}\right|^2}{\mu}dv=\frac{1}{2\mu}\underbrace{\iiint_{solenoide}}_{\text{única región con campo}}\left(\mu\frac{N}{l}i\right)^2dv=\frac{1}{2\mu}\left(\mu\frac{N}{l}i\right)^2\underbrace{(Sl)}_{\text{volumen del solenoide}}=\frac{1}{2}\underbrace{\mu\frac{S}{l}N^2}_{\text{autoinductancia } L}i^2$$

$$\boxed{U=\frac{1}{2}Li^2}$$

Hemos verificado que la energía del campo magnético, almacenada en el inductor, equivale al trabajo entregado por la fuente.

Energía almacenada por dos inductores magnéticamente acoplados



- Hallaremos la energía almacenada por dos inductores magnéticamente acoplados energizados (es decir, por lo que circula una corriente).
- Analizaremos el caso general para el que las corrientes son diferentes.
- Hallaremos la energía almacenada hallando el trabajo que tuvimos que entregar para alcanzar dicho estado desde un estado inicial desenergizado, es decir, sin corrientes:

$$i_1(t=0)=0 \qquad\qquad i_2(t=0)=0$$

- El trabajo entregado para llevar la corriente i_1 de 0 a I_1 en $t=t_1$ será:

$$W_1=\int_0^{t_1} p(t)\,dt=\int_0^{t_1}[i_1(t).v_1(t)+i_2(t).v_2(t)]dt$$

$$=\int_0^{t_1}\left[i_1(t)\left(L_1\frac{di_1(t)}{dt}+M_{12}\cancel{\frac{di_2(t)}{dt}}\right)+\cancel{i_2(t)}.\left(L_2\frac{di_2(t)}{dt}+M_{21}\frac{di_1(t)}{dt}\right)\right]dt$$

$$i_2(t)=0$$

Obs.: El + es porque estamos analizando el caso de flujos aditivos

$$=\int_0^{t_1} i_1(t).L_1\frac{di_1(t)}{dt}\,dt=\int_0^{I_1} i_1(t).L_1 di_1(t)=L_1\frac{I_1^2}{2}$$

- Mantenemos i_1 constante en el tiempo en I_1 y por lo tanto: $\frac{di_1(t)}{dt}=0$
- Luego, llevamos la corriente i_2 de 0 a I_2 en $t=t_2$. El nuevo trabajo entregado al sistema será:

$$W_2 = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} [i_1(t).v_1(t) + i_2(t).v_2(t)]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[i_1(t)\left(L_1 \cancel{\frac{di_1(t)}{dt}} + M_{12}\frac{di_2(t)}{dt}\right) + i_2(t).\left(L_2\frac{di_2(t)}{dt} + M_{21}\cancel{\frac{di_1(t)}{dt}}\right)\right]dt$$

$$i_1(t) = I_1 \qquad\qquad i_1(t) = I_1$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(I_1.M_{12}\frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t).L_2\frac{di_2(t)}{dt}\right)dt$$

$$= \int_{0}^{I_2}(I_1.M_{12} + i_2(t).L_2)di_2(t) = M_{12}I_1I_2 + L_2\frac{I_2^2}{2}$$

- Por lo tanto, el trabajo total entregado al sistema para energizar a los inductores con corrientes I_1 e I_2 es:

$$W_T = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + M_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2$$

- Si hubiéramos energizado los inductores con el proceso inverso, hubiéramos obtenido:

$$W_T' = W_1' + W_2' = \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{21}I_2I_1 + \frac{1}{2}L_1I_1^2$$

- La energía final almacenada en el sistema no puede depender del proceso realizado para alcanzarlo (**si los medios son lineales**), por lo tanto:

$$W_T = W_T' \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{12} = M_{21}}$$

- Y la energía almacenada por un sistema de dos inductores energizados con I_1 e I_2 es igual al trabajo total entregado para alcanzar dicho estado desde un estado inicial desenergizado:

$$U = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

El término de la inductancia mutua será positivo si las corrientes entran por bornes homólogos y negativo si entran por bornes no homólogos a los bobinados.