Física II (62.03 – 82.02)

Magnetostática en medios materiales
Circuitos magnéticos

Josefina M. Silveyra

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Repaso

- Medios materiales: Fenómenos magnéticos con medios materiales, momentos magnéticos
- Campos en magnetismo: $\vec{B}[T]$, $\vec{M}[A/m] = \frac{\partial \vec{\mu}}{\partial Vol}$, $\vec{H}[A/m] = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$
- Relaciones constitutivas: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$
- Ley de Ampère para magnetostática en materiales: $\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = i_{\substack{real \\ conc(S(C))}}$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{real}$
- Condiciones de frontera, de borde o de contorno: $B_{n1} - B_{n2} = 0$, $H_{t2} - H_{t1} = K_{real}$
- Energía del campo magnético: $U = \iiint_{\substack{todo\ el \\ espacio}} u_m \, dv$, $u_m \left[\frac{J}{m^3}\right] = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$
- Clasificación de materiales: diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos
- Materiales ferromagnéticos
  - Dominios magnéticos en materiales ferromagnéticos
  - Temperatura de Curie de materiales ferromagnéticos (transición ferro-paramagnética)
  - Curva de histéresis de materiales ferromagnéticos (Ms, Mr, Hc)
  - Ejemplo: Desmagnetizando materiales magnetizados
  - Clasificación de materiales ferromagnéticos: duros, blandos (aplicación en motor eléctrico)

Repaso

Electrostática	Magnetostática
Campos	
$\vec{P} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial Vol}$ $\vec{P}$ generado por cargas de polarización en materiales	$\vec{M} = \frac{\partial \vec{\mu}}{\partial Vol}$ $\vec{M}$ generado por corrientes de magnetización (imaginarias) en materiales
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$
$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$	$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ $\mu_r = \chi_m + 1$
Clasificación de materiales	
Vacío: $\varepsilon_r = 1$	Vacío: $\mu_r = 1$
Dieléctricos: $\varepsilon_r > 1$: atenúan el campo $\vec{E}$ dentro del material	Diamagnéticos: $\mu_r \lesssim 1$: atenúan levemente el campo $\vec{B}$ dentro del material
Conductores: $\varepsilon_r \to \infty$: cancelan el campo $\vec{E}$ dentro del material	Diamagnéticos perfectos (superconductores): μ_r =0: cancelan el campo $\vec{B}$ dentro del material
	Paramagnéticos: $\mu_r \gtrsim 1$: incrementan levemente el campo $\vec{B}$ dentro del material
	Ferromagnéticos: $\mu_r \gg 1$: incrementan fuertemente el campo $\vec{B}$ dentro del material
Límites de la material FII	
Medios lineales, isótropos y homogéneos.	Medios isótropos y homogéneos, 1) lineales, 2) no lineales o 3) no lineales e histeréticos.

Repaso

Electrostática		Magnetostática	

Leyes

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{\substack{total\\enc(S)}}}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho^{total}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{total} = q_{libre} + q_{pol} \qquad \rho_{total} = \rho_{libre} + \rho_{pol}$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = q_{\substack{libre\\enc(S)}} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho^{libre}$$

$$\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{s} = -q_{\substack{pol\\enc(S)}} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\rho^{pol}$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$$

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 i_{\substack{total\\conc(S(C))}} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}_{total}$$

$$i_{total} = i_{real} + i_{mag} \qquad \vec{J}_{total} = \vec{J}_{real} + \vec{J}_{mag}$$

$$\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = i_{\substack{real\\conc(S(C))}} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{real}$$

$$\oint_C \vec{M}.d\vec{l} = i_{\substack{mag\\conc(S(C))}} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{M} = \vec{J}_{mag}$$

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Condiciones de frontera

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad B_{n1} = B_{n2}$$

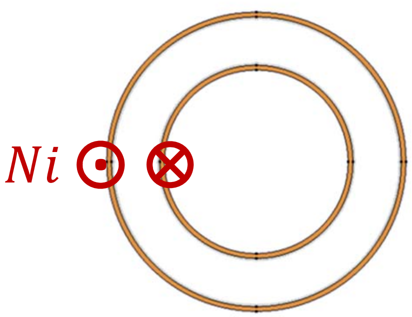
$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma_{real} \qquad H_{t2} - H_{t1} = K_{real}$$

Energía del campo

$$u_e\left[\frac{J}{m^3}\right] = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \qquad u_m\left[\frac{J}{m^3}\right] = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

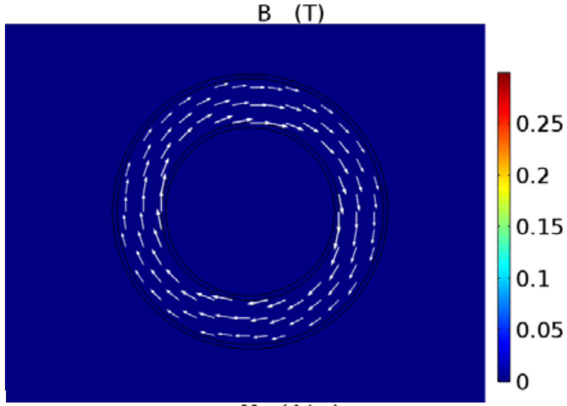
Circuitos magnéticos

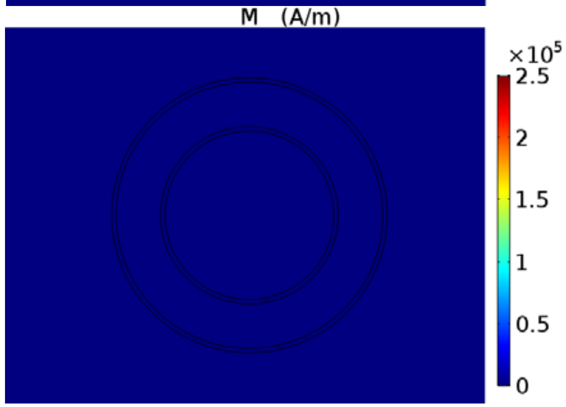
Toroide en vacío

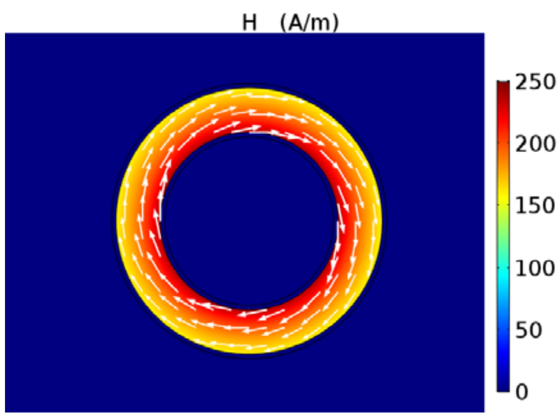


Observaciones:

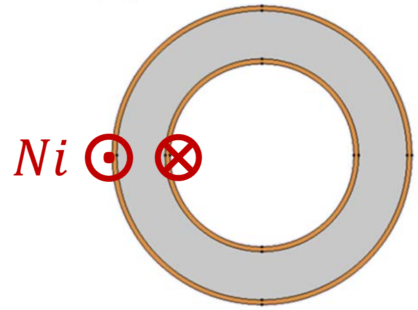
- $\vec{B}$ y $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ son azimutales y decrecen con el radio. Están confinados dentro del bobinado.
- M es nulo





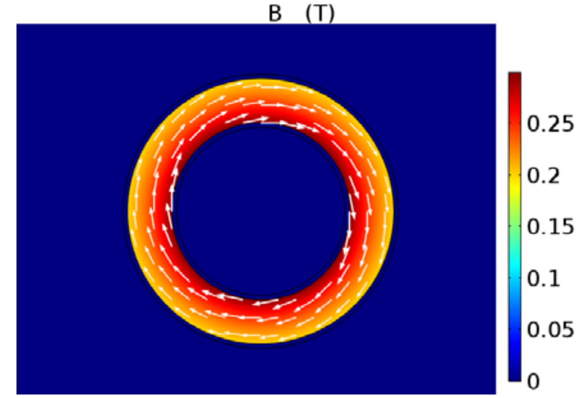


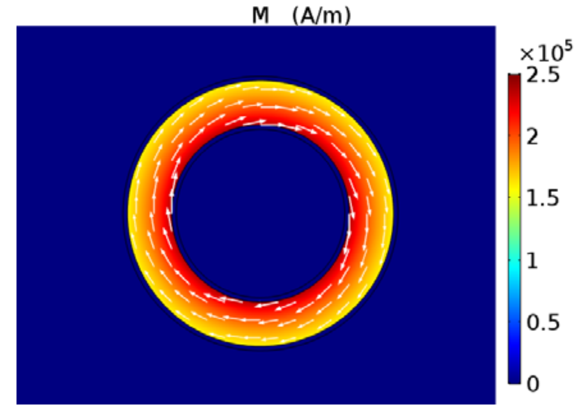
Toroide con núcleo ferromagnético blando ($\mu_r = 1000$)

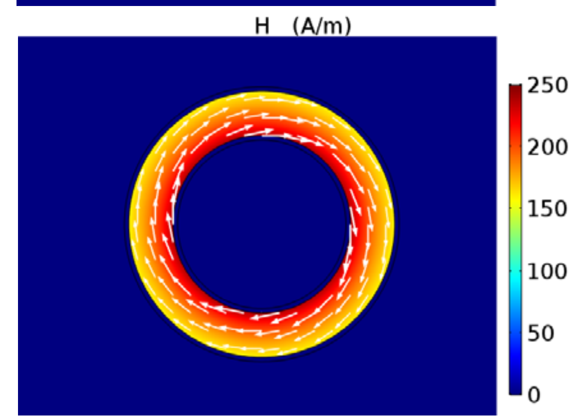


Observaciones:

- $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ es 1000 veces más intenso que sin el núcleo.
- $\vec{H}$ es igual al caso anterior.

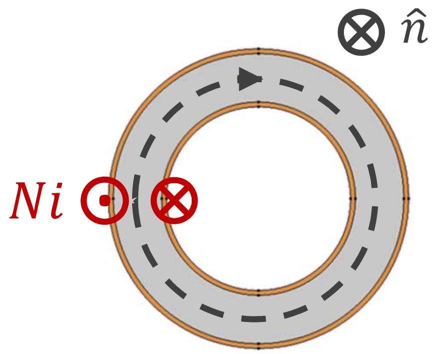






Los núcleos ferromagnéticos incrementan la densidad de flujo magnético (y la densidad de energía almacenada) para la misma N.i aplicada.

Cálculo analítico de los campos H, B y M



- Fuera del núcleo: $\vec{H} = \vec{0}$

  $\vec{B} = \vec{0}$

  $\vec{M} = \vec{0}$

- Dentro del núcleo: $\vec{H} = H(\rho)(-\hat{\varphi})$

$$\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = i_{\substack{real \\ conc(S(C))}}$$

$$+H(\rho)2\pi\rho = +Ni$$

$$H(\rho) = \frac{Ni}{2\pi\rho}$$

<u>Obs.:</u> H_t es continuo dentro del núcleo pero discontinuo en la interfaz entre el núcleo y el aire, porque hay $\vec{K}_{real}$ en la interfaz.

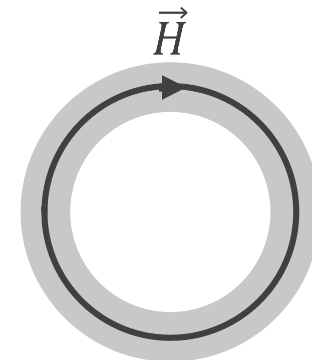
$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

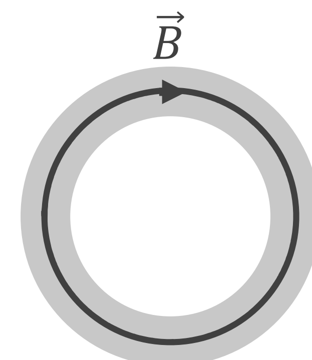
$$B(\rho) = \mu_0\mu_r\frac{Ni}{2\pi\rho}$$

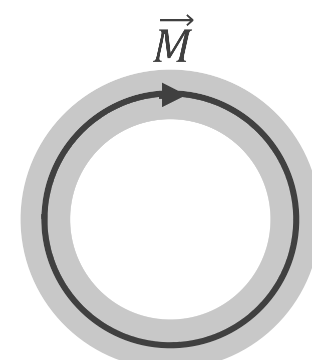
$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

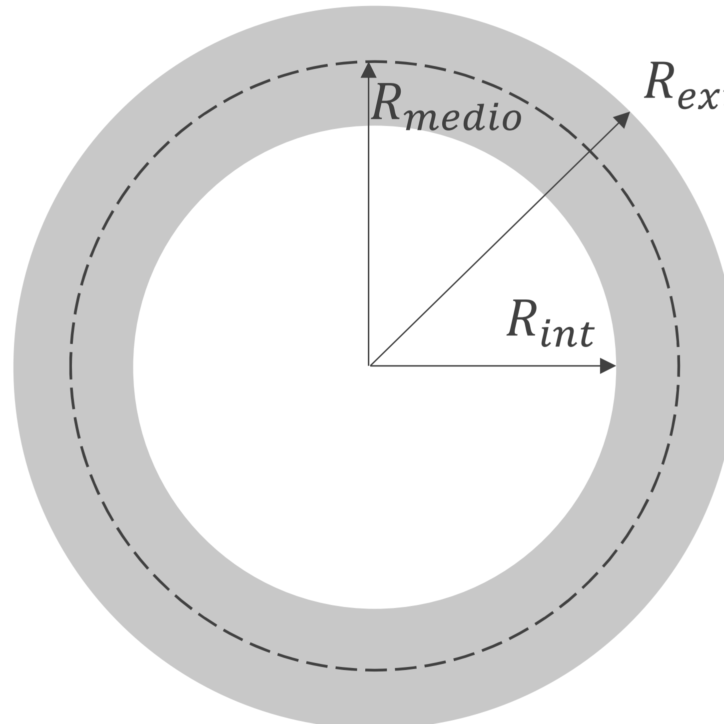
$$M(\rho) = (\mu_r - 1)\frac{Ni}{2\pi\rho}$$







Aproximación de núcleo delgado



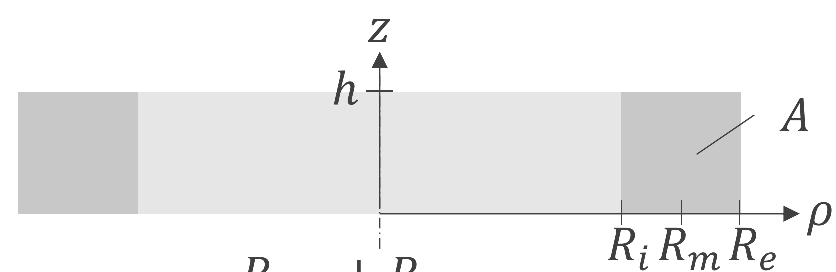
- En ocasiones, es útil aproximar $B(\rho)$ como:

$$B_{medio} = \frac{\Phi_B}{A} = B(R_{medio})$$

- Por ejemplo, para calcular el flujo magnético a través de la sección transversal del núcleo:

$$\Phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^h \int_{R_{int}}^{R_{ext}} B(\rho) d\rho\, dz = h \int_{R_{int}}^{R_{ext}} B(\rho) d\rho$$

$$\Phi_B \approx \langle \Phi_B \rangle = B(R_{medio})A$$



$$R_{medio} = \frac{R_{ext} + R_{int}}{2}$$

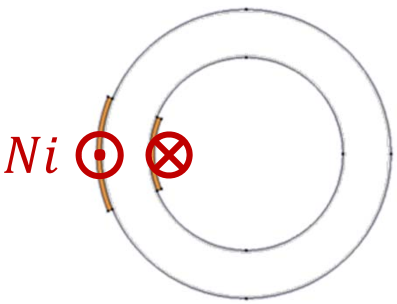
$$grosor = R_{ext} - R_{int}$$

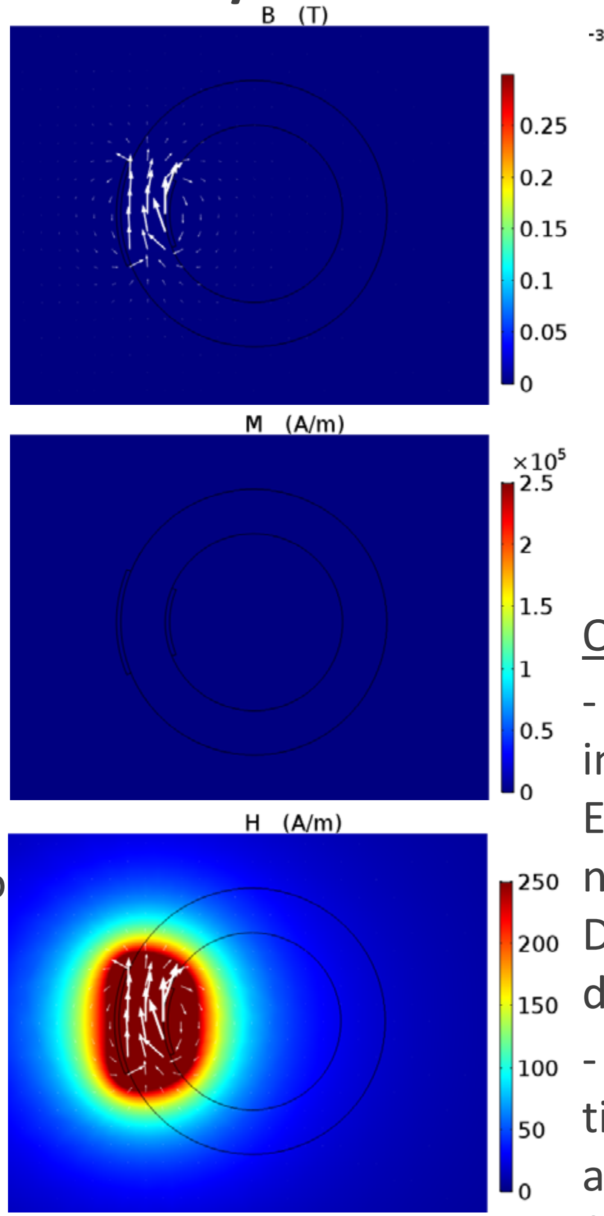
$\frac{grosor}{R_{medio}}$ (%)	$B(R_{int})\,[T]$	$B(R_{medio})\,[T]$	$B(R_{ext})\,[T]$	$\frac{B(R_{int}) - B(R_{medio})}{B(R_{int})}$ [%]	$\frac{B(R_{ext}) - B(R_{medio})}{B(R_{ext})}$ [%]	$\Phi_B\,[Wb]$	$\langle \Phi_B \rangle\,[Wb]$	$\frac{\Phi_B - \langle \Phi_B \rangle}{\Phi_B}$ [%]
10	0.21050	0.20001	0.19067	5.0	-4.9	2E-05	2E-05	**0.1**
20	0.21052	0.20010	0.19066	4.9	-5.0	8E-05	8E-05	**0.3**
30	0.21048	0.20001	0.19066	5.0	-4.9	2E-04	2E-04	**0.7**
40	0.21061	0.20041	0.19075	4.8	-5.1	3E-04	3E-04	**1.1**
50	0.21070	0.20052	0.19083	4.8	-5.1	5E-04	5E-04	**1.9**
60	0.21076	0.20070	0.19087	4.8	-5.2	7E-04	7E-04	**2.7**
70	0.21079	0.19948	0.19090	5.4	-4.5	1E-03	1E-03	**4.5**
80	0.21079	0.19935	0.19090	5.4	-4.4	1E-03	1E-03	**5.9**
90	0.21081	0.20152	0.19085	4.4	-5.6	2E-03	2E-03	**6.5**

Si bien B nunca es uniforme, el error en la aproximación del flujo será menor cuanto más delgado sea el núcleo. <u>El error máximo a soportar dependerá de la aplicación</u>.

Arrollamiento/bobinado/devanado asimétrico

Bobinado en vacío

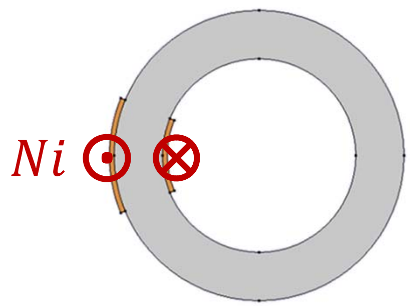


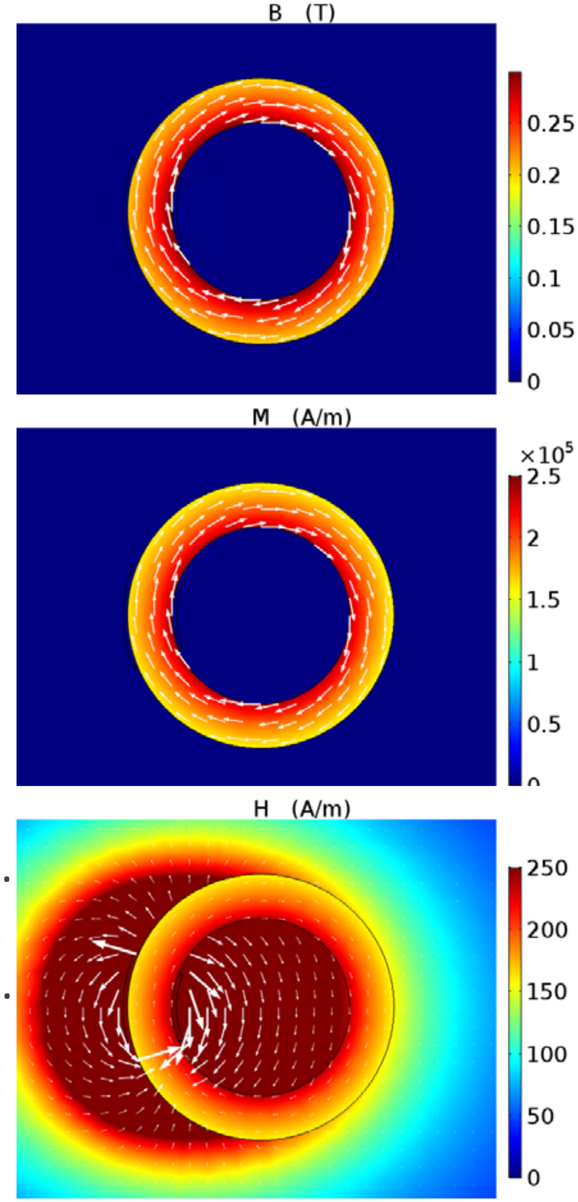


<u>Observaciones:</u>

- $\vec{B}$ y $\vec{H}$ NO son azimutales y están concentrados cerca del bobinado –dentro y fuera (como en un solenoide corto).
- M es nulo

Núcleo ferromagnético blando bobinado ($\mu_r = 1000$)



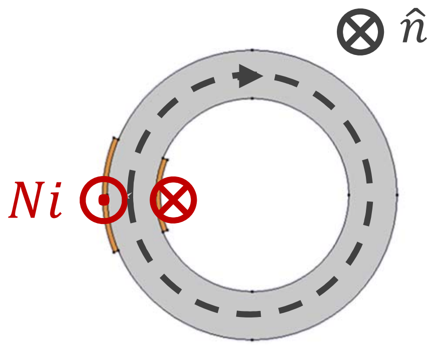


<u>Observaciones:</u>

- $\vec{B}$ es ~1000 veces más intenso que sin núcleo. Es despreciable fuera del núcleo respecto a dentro. Dentro del núcleo tiene dirección aprox. azimutal.
- $\vec{H}$ dentro del núcleo tiene dirección aprox. azimutal. Es más intenso fuera que dentro del núcleo.

Los núcleos ferromagnéticos concentran la densidad de flujo magnético (B).

Cálculo analítico de los campos H, B y M



$$l_{medio} = 2\pi R_{medio}$$

- Fuera del núcleo:
- NO puedo determinar cómo es H
- B es despreciable (frente a B dentro del núcleo)
- M=0 (porque hay vacío)

- Dentro del núcleo: $\vec{H} \cong H(-\hat{\varphi})$

$$H \cong H\binom{camino}{medio}$$

$$\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = i_{\substack{real\\ conc(S(C))}}$$

$$+Hl_{medio} = +Ni$$

$$H = \frac{Ni}{l_{medio}}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

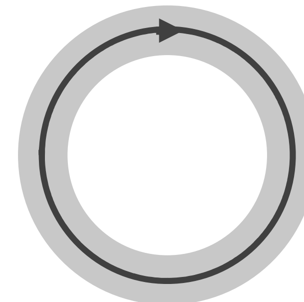
$$B = \mu_0\mu_r\frac{Ni}{l_{medio}}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

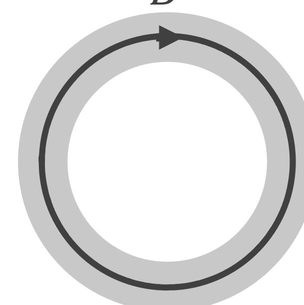
$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

$$M = (\mu_r - 1)\frac{Ni}{l_{medio}}$$

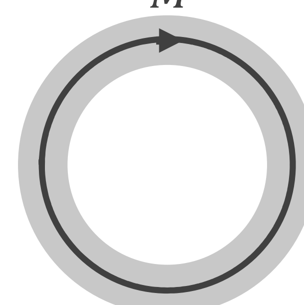
$\vec{H}$



$\vec{B}$

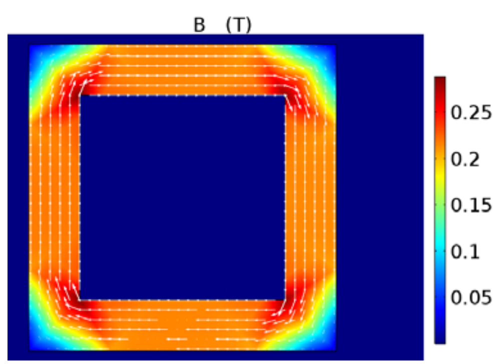


$\vec{M}$



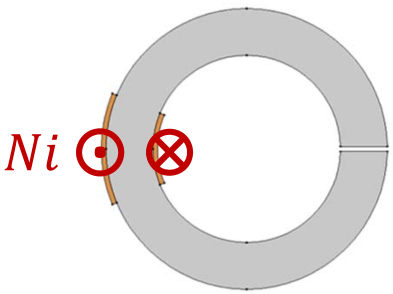
Obs:

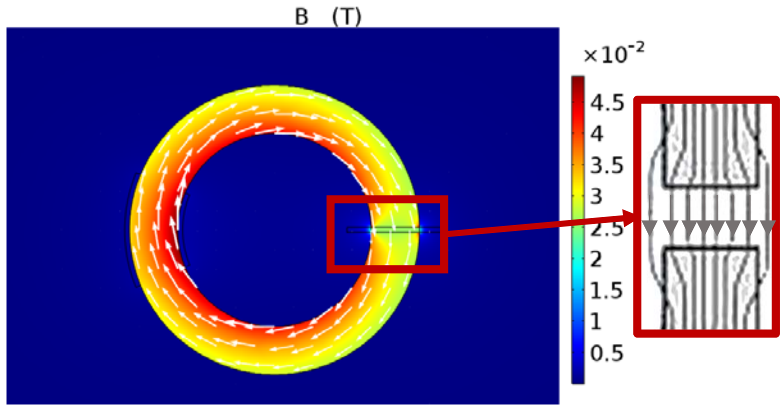
Aproximamos $\vec{H} \parallel d\vec{l}$, ¡incluso en núcleos no toroidales! (ej.: cuadrados)

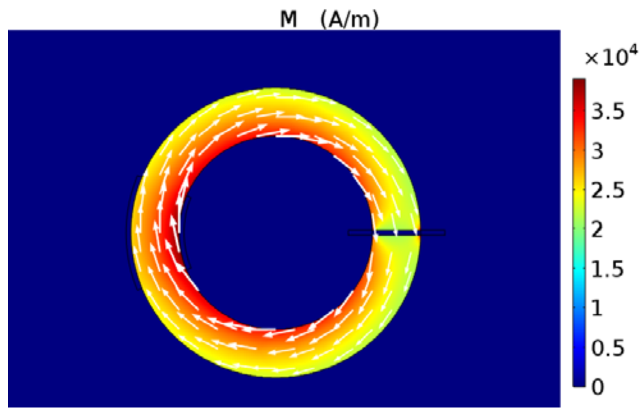


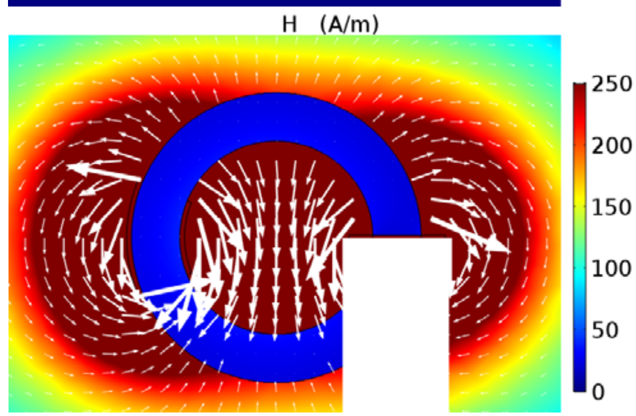
Entrehierro

Núcleo ferro. blando
($\mu_r = 1000$)



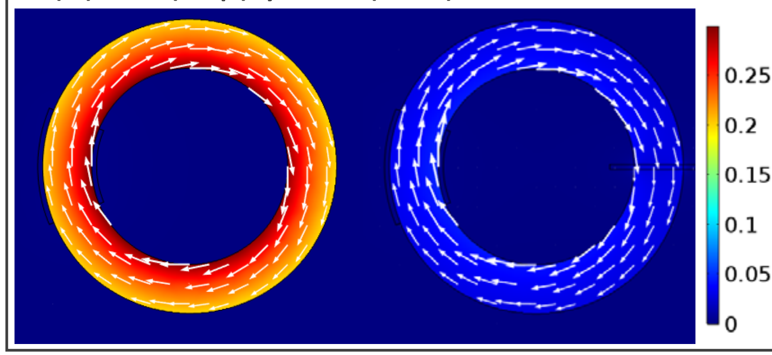




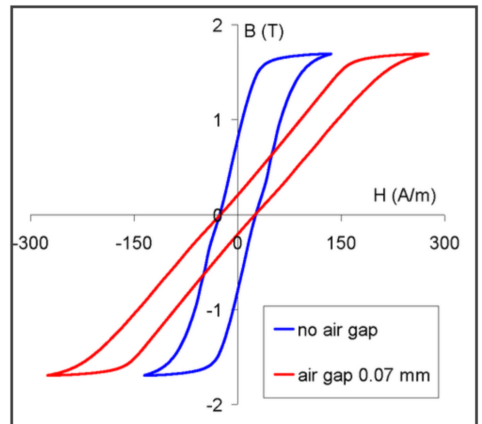


<u>Observaciones:</u>
- $\vec{H}$ es extremadamente intenso en el entrehierro
- $\vec{B}$ se dispersa en el entrehierro, pero si este es muy delgado (respecto a la sección transversal del núcleo), puede despreciarse la dispersión (manteniendo la intensidad).
- Para el mismo NI, los campos en el núcleo son menos intensos con que sin entrehierro.

B(T) sin (izq.) y con (der.) entrehierro

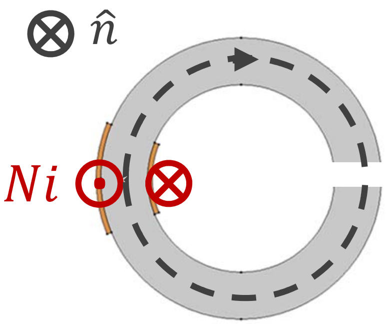


<u>Obs.:</u> El entrehierro baja la "permeabilidad efectiva" del circuito ($\mu_{ef} = \frac{B^*}{H^*} = \frac{\Phi_B/S_{mat}}{Ni/l_{medio}}$) y es útil para algunas aplicaciones.



$$B^* = \frac{\Phi}{S_{mat}} \text{ vs } H^* = \frac{Ni}{l_{medio}}$$

Cálculo analítico de los campos H, B y M



Longitud media del núcleo material: $l_{mat} = 2\pi R_{medio} - l_e$

Longitud del entrehierro: $l_e \ll 2\pi R_{medio}$

<u>Obs:</u> l_e es despreciable frente a $2\pi R_{medio}$

Sección transversal del núcleo material: S_{mat}

Sección transversal del entrehierro: S_e

Dentro del circuito magnético (incluyendo el entrehierro): $\vec{H} \cong H(l_{medio})(-\hat{\varphi})$

$$\boxed{\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = i_{\substack{real \\ conc(S(C))}}}$$

$$+H_{mat}l_{mat} + H_e l_e = +Ni$$

<u>Obs:</u> $H_e l_e$ **NO** es despreciable frente a $H_{mat}l_{mat}$

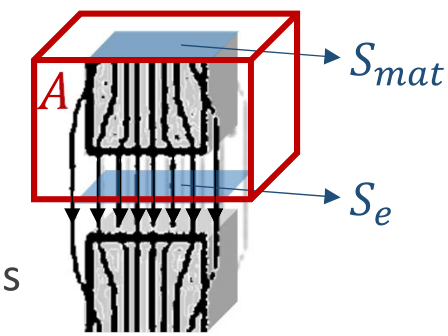
$\vec{B} = \mu\vec{H}$ — <u>Obs:</u> Si el material es "NO lineal", usar la curva BvsH y, eventualmente, la historia del material.

$$B_{mat} = \mu_0\mu_r H_{mat} \Rightarrow H_{mat} = \frac{B_{mat}}{\mu_0\mu_r}$$

$$B_e = \mu_0 H_e \Rightarrow H_e = \frac{B_e}{\mu_0}$$

$$+\frac{B_{mat}}{\mu_0\mu_r}l_{mat} + \frac{B_e}{\mu_0}l_e = +Ni$$

$$\boxed{\oiint_A \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0}$$



<u>Obs:</u> El flujo de $\vec{B}$ por las superficies laterales es despreciable.

$$B_{mat}S_{mat} = B_e S_e \quad \Rightarrow B_e = \frac{S_{mat}}{S_e}B_{mat}$$

<u>Obs:</u> B_n debería ser continuo en la interfaz. Esta contradicción surge hacer la aproximación $\vec{B} \parallel d\vec{l}$ a lo largo de todo el circuito, cuando en realidad $\vec{B}$ se "tuerce" en la región cercana al entrehierro.

$$\frac{B_{mat}}{\mu_0 \mu_r} l_{mat} + \frac{B_e}{\mu_0} l_e = Ni$$

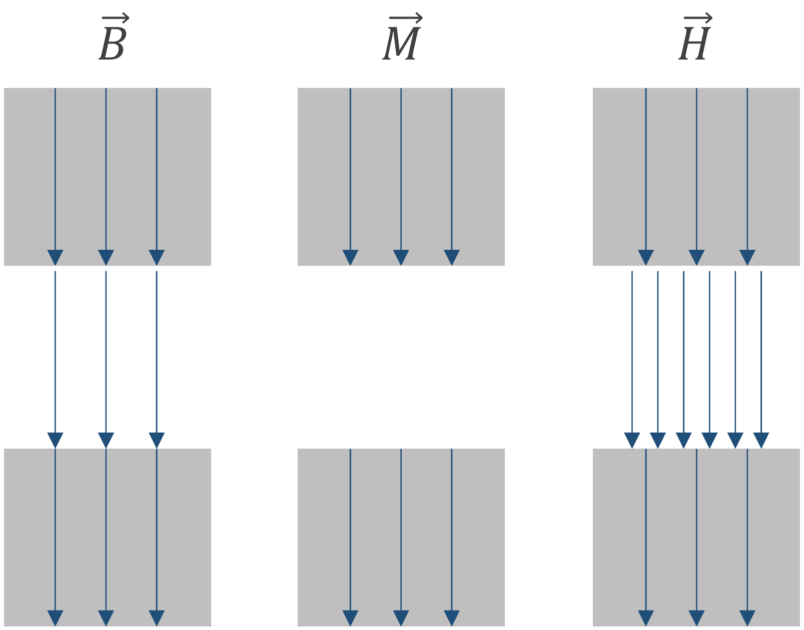
$$\Phi = B_{mat} S_{mat} = B_e S_e \Rightarrow B_e = \frac{S_{mat}}{S_e} B_{mat}$$

$$\frac{B_{mat}}{\mu_0}\left(\frac{l_{mat}}{\mu_r} + \frac{S_{mat}}{S_e} l_e\right) = Ni$$

$$B_{mat} = \frac{\mu_0 Ni}{\left(\frac{l_{mat}}{\mu_r} + \frac{S_{mat}}{S_e} l_e\right)} \qquad \Rightarrow H_{mat} = \frac{B_{mat}}{\mu_0 \mu_r} \qquad \Rightarrow M_{mat} = \frac{B_{mat}}{\mu_0} - H_{mat}$$

$$\Rightarrow B_e = \frac{S_{mat}}{S_e} B_{mat} \qquad \Rightarrow H_e = \frac{B_e}{\mu_0} \qquad \Rightarrow M_e = 0$$

Líneas de campo asumiendo entrehierro estrecho ($S_{mat} \cong S_e \Rightarrow B_{mat} \cong B_e$):



Observación:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \end{array}\right. \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

- Las líneas de campo B son cerradas (no nacen ni mueren en ningún lado).
- Las líneas de campo H mueren (nacen) donde nacen (mueren) las líneas de campo M.

Ley de Hopkinson

- Redespejemos…

$$\frac{B_{mat}}{\mu_0\mu_r}l_{mat}+\frac{B_e}{\mu_0}l_e=Ni$$

$$\Phi=B_{mat}S_{mat}=B_eS_e$$

$$\Rightarrow B_{mat}=\frac{\Phi}{S_{mat}};B_e=\frac{\Phi}{S_e}$$

$$\frac{\Phi}{S_{mat}}\frac{l_{mat}}{\mu_0\mu_r}+\frac{\Phi}{S_e}\frac{l_e}{\mu_0}=Ni$$

$$\Phi\left(\frac{l_{mat}}{\mu_{mat}S_{mat}}+\frac{l_e}{\mu_eS_e}\right)=Ni$$

$$\Phi(\mathcal{R}_{mat}+\mathcal{R}_e)=fmm$$

$$\boxed{\Phi\mathcal{R}_{equivalente}=fmm}$$

(análoga a la Ley de Ohm)

<u>Reluctancia:</u> Resistencia que un circuito ofrece al paso del flujo magnético Φ (análoga a la resistencia eléctrica pero sin su mismo sentido físico, ej.: no disipa energía por el paso del flujo magnético como sí sucede en una resistencia por Efecto Joule).

$$\boxed{\mathcal{R}=\frac{l}{\mu S}}$$

Análoga a la resistencia eléctrica: $R=\rho\frac{l}{S}=\frac{l}{\sigma S}$

John Hopkinson
(1849-1898)
Inglaterra

<u>Fuerza magnetomotriz:</u> Causa del flujo magnético Φ en un circuito magnético (análoga a la fuerza electromotriz, que causa el flujo de una corriente en un circuito eléctrico; tampoco es una fuerza)

$$\boxed{fmm=Ni}$$

Análoga a la fuerza electromotriz: fem

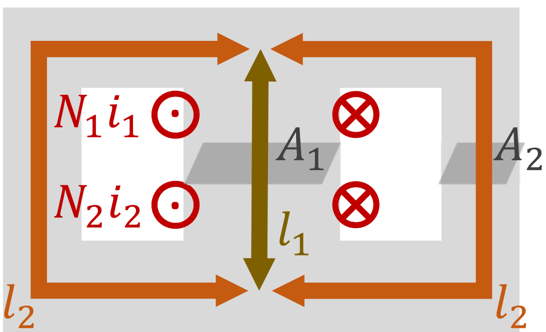
<u>Obs.:</u> Útil para resolver circuitos magnéticos complejos en analogía a los circuitos eléctricos (reluctancias equivalentes en serie y en paralelo; leyes de mallas y nodos).

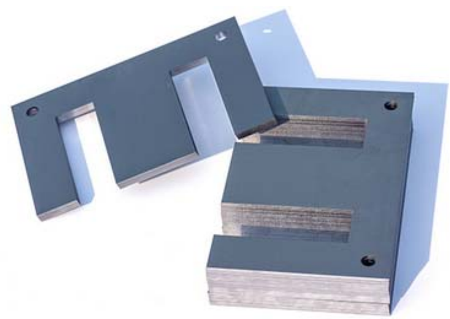
Ejemplos: Circuitos magnéticos complejos donde es útil la Ley de Hopkinson

- **Transformadores**

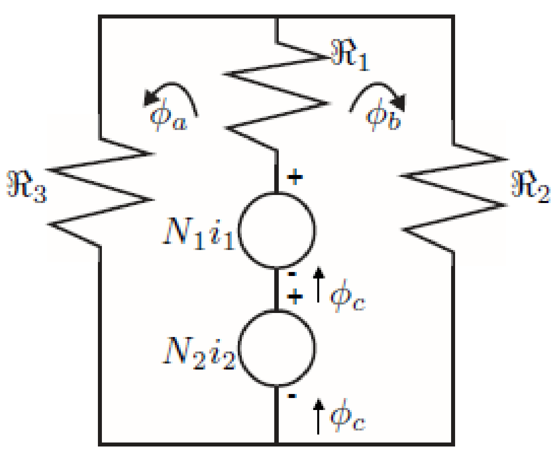
Ejemplo: Transformador tipo "shell"

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$



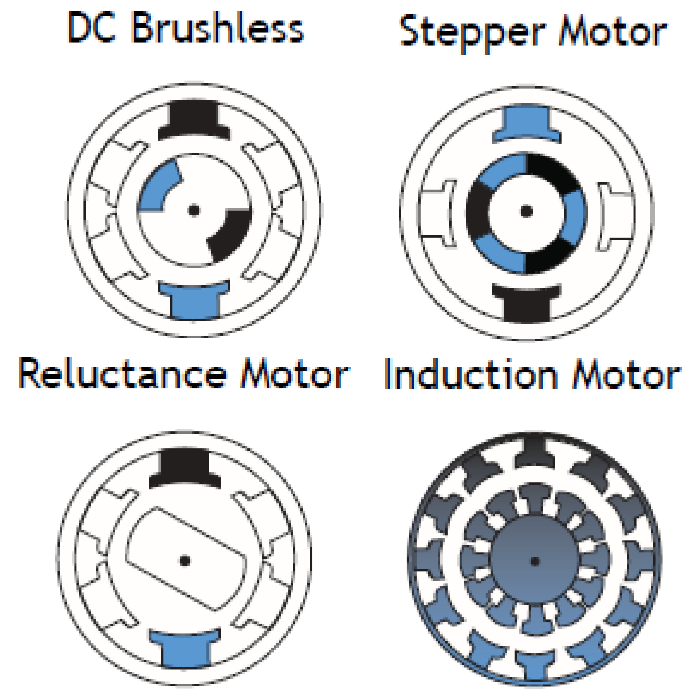


Circuito equivalente



$$\Re_1 = \frac{l_1}{\mu A_1} \quad \Re_2 = \frac{l_2}{\mu A_2}$$

- **Motores eléctricos**



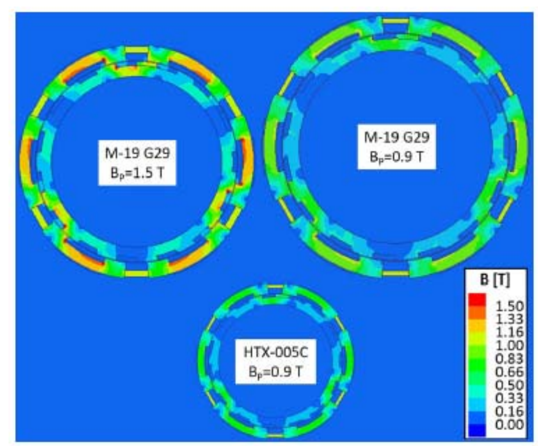
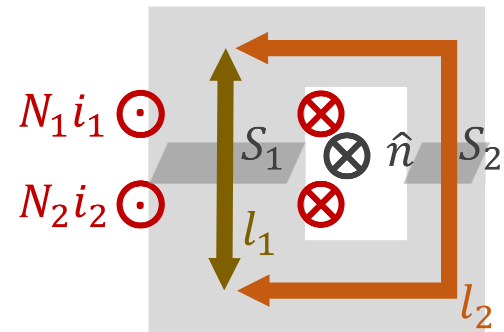


FIG. 3. ANSYS FEM analyses of PPMT rotary motors with different soft magnets and peak flux densities. All motors use NdFeB permanent magnets, give the same output power, incur the same iron loss and are in the same length scale.

Motor PPMT-Parallel Path Magnetic Technology (Silveyra et al., Journal of Applied Physics, 2014)

Ejemplo: Circuitos magnéticos con cambios de sección (reluctancias en serie)

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$



- El objetivo es hallar los tres campos (H, B, y M) en todo el circuito magnético.

- Debemos plantear un campo H_i único a lo largo de cada tramo i de material y sección uniformes. Para cada tramo con nuevo material y/o sección, planteamos un campo H diferente.

$$\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = i_{\substack{real \\ conc(S(C))}} \quad \Rightarrow \quad +H_1 l_1 + H_2 l_2 = +N_1 i_1 + N_2 i_2$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} B_1 = \mu H_1 \\ B_2 = \mu H_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} H_1 = B_1/\mu \\ H_2 = B_2/\mu \end{matrix}$$

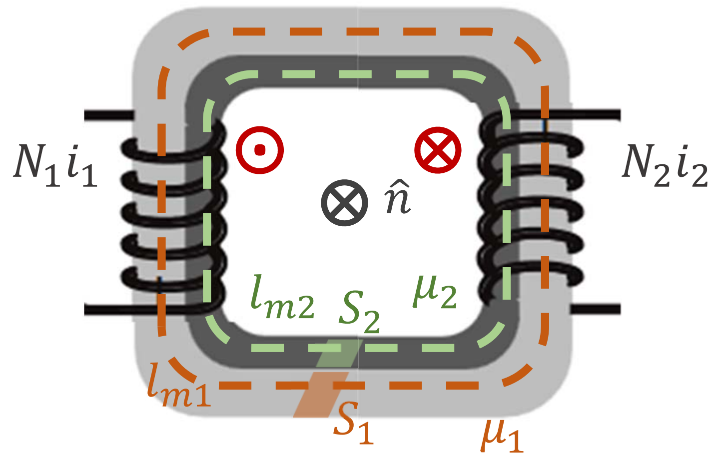
$$\oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 S_1 = B_2 S_2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = B_1 S_1 / S_2$$

$$\therefore \quad B_1 \frac{1}{\mu} l_1 + B_1 \frac{1}{\mu} \frac{S_1}{S_2} l_2 = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

$$B_1 \left(\frac{1}{\mu} l_1 + \frac{1}{\mu} \frac{S_1}{S_2} l_2 \right) = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

$$B_1 = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\left(\frac{1}{\mu} l_1 + \frac{1}{\mu} \frac{S_1}{S_2} l_2 \right)}$$

Ejemplo: Circuitos magnéticos con distintos materiales contiguos (reluctancias en paralelo)



- El objetivo es hallar los tres campos (H, B, y M) en todo el circuito magnético.
- Identificamos los campos H del problema y planteamos la ley de Ampere: $\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = i_{\substack{real \\ conc(S(C))}}$

$\vec{H}_1 = H_1(l_{m1})$ en sentido horario

$\vec{H}_2 = H_2(l_{m2})$ en sentido horario

Obs.: Elegimos **UNA** curva amperiana para dar toda la vuelta: por el medio del material 1 **O BIEN** por el medio del material 2. No tenemos por qué pasar por todos los materiales en una misma vuelta. Eventualmente, planteamos dos veces la Ley de Ampere, eligiendo cada vez un camino cerrado distinto para recorrer.

$$+H_1 l_{m1} \cancel{+ H_2 l_{m2}} = i_{\substack{real \\ conc(S(C))}}$$

$$+H_1 l_{m1} = -N_1 i_1 + N_2 i_2 \qquad +H_2 l_{m2} = -N_1 i_1 + N_2 i_2$$

$$H_1 = \frac{-N_1 i_1 + N_2 i_2}{l_{m1}} \qquad H_2 = \frac{-N_1 i_1 + N_2 i_2}{l_{m2}}$$

Obs: H_t debería ser continuo en la interfaz. Esta contradicción surge hacer la aproximación $H_1 = H_1(l_{m1})$ y $H_2 = H_2(l_{m2})$ a lo ancho de toda la sección transversal de cada material, respectivamente. Si se toma un único l_m para ambos materiales, entonces se obtiene el mismo campo H.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$B_1 = \mu_1 H_1$$

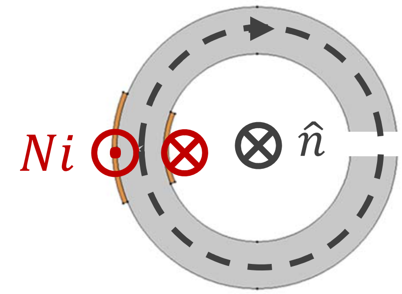
$$B_2 = \mu_2 H_2$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

$$M_1 = \frac{B_1}{\mu_0} - H_1$$

$$M_2 = \frac{B_2}{\mu_0} - H_2$$

<u>Ejemplo:</u> Circuitos con núcleos ferromagnéticos con histéresis



$\vec{H}_m$ y $\vec{H}_e$ en sentido horario

- El objetivo es hallar los tres campos (H, B, y M) en todo el circuito magnético, el cual tiene una parte con material ferromagnético y otra parte con aire (~vacío)
- Comenzamos planteando la Ley de Ampère generalizada, teniendo en cuenta que habrá dos campos H distintos a lo largo de la curva amperiana elegida (uno en cada medio):

$$\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = i_{\substack{real \\ conc(S(C))}}$$

$$\boxed{+H_m l_m + H_e l_e = +Ni \qquad (1)}$$

<u>Obs.:</u> $l_m = 2\pi R - l_e \cong 2\pi R$, pues la longitud del entrehierro es despreciable frente a todo el camino

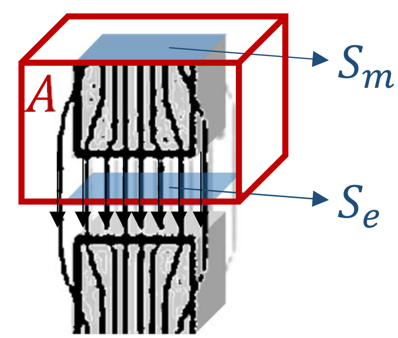
¡¡OJO!! $H_e l_e$ **NO** es despreciable frente a $H_m l_m$, pues si bien $l_e \ll l_m$, H_e puede ser mucho mayor que H_m

- Tenemos una ecuación con dos incógnitas (H_m y H_e). Relacionamos los campos en cada medio a partir de la Ley de Gauss para magnetismo, que dice que es nulo el flujo de B a través de una superficie **cerrada** (o bien, todo el flujo de B entrante a una sup. cerrada es igual al flujo saliente):

$$\Phi_{B|_A} = 0 \;\Rightarrow B_m S_m = B_e S_e$$

$$l_e \ll l_m \Rightarrow S_m \cong S_e \;\Rightarrow \boxed{B_m \cong B_e \quad (2)}$$

<u>Obs.:</u> Si no pudiéramos asumir $S_m \cong S_e$, nos deberían dar como dato del problema la relación entre S_m y S_e.



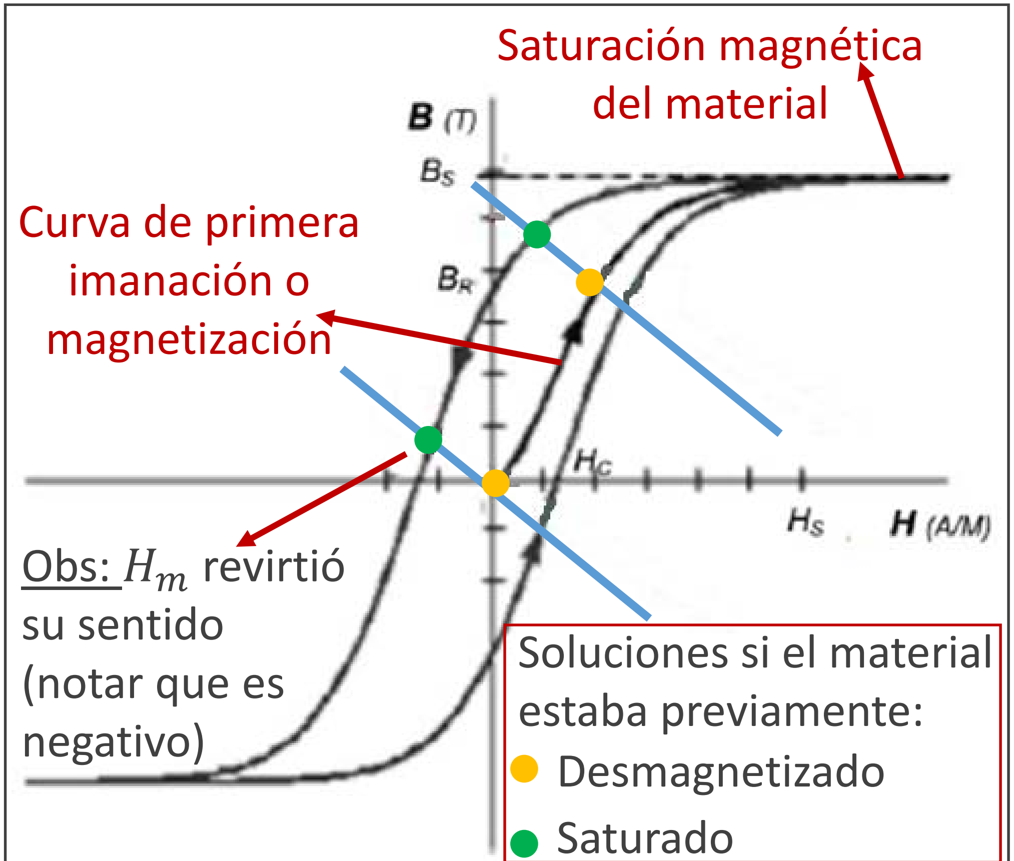
- Pero la ec. (2) no relaciona los campos H como la ec. (1), sino los campo B.
  Así que debemos relacionar los campos H y B entre sí.
  Lo hacemos con las ecuaciones constitutivas de cada medio.
- El vacío es un medio lineal, por lo que vale: $\boxed{B_e = \mu_0 H_e \quad (3)}$

- Pero **¡OJO!** En este problema, el material ferromagnético es no lineal y tiene histéresis.

La relación entre B_m y H_m está dada gráficamente con el ciclo de histéresis y la historia del material. Es decir, además del ciclo, deben decirme, por ejemplo, que el material estaba magnéticamente saturado antes de cortar el entrehierro.
(<u>Nota:</u> Puede ser que en vez de darnos un gráfico a escala como dato del problema, nos den una tabla y tengamos que interpolar valores).

$$\cancel{B_m = \mu_m H_m}$$

- Ahora sí tenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas (H_m, B_m, H_e y B_e). Pero una de las ecuaciones es "gráfica". Con (1), (2) y (3) hallaremos una ecuación analítica entre H_m y B_m y, finalmente buscaremos la intersección entre dicha ecuación y la gráfica (4):



Relación (gráfica) entre B_m y H_m $\quad (4)$

$$H_m l_{m1} + H_e l_e = Ni \quad (1)$$

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} \quad (3') \Rightarrow \quad H_m l_{m1} + \frac{B_e}{\mu_0} l_e = Ni$$

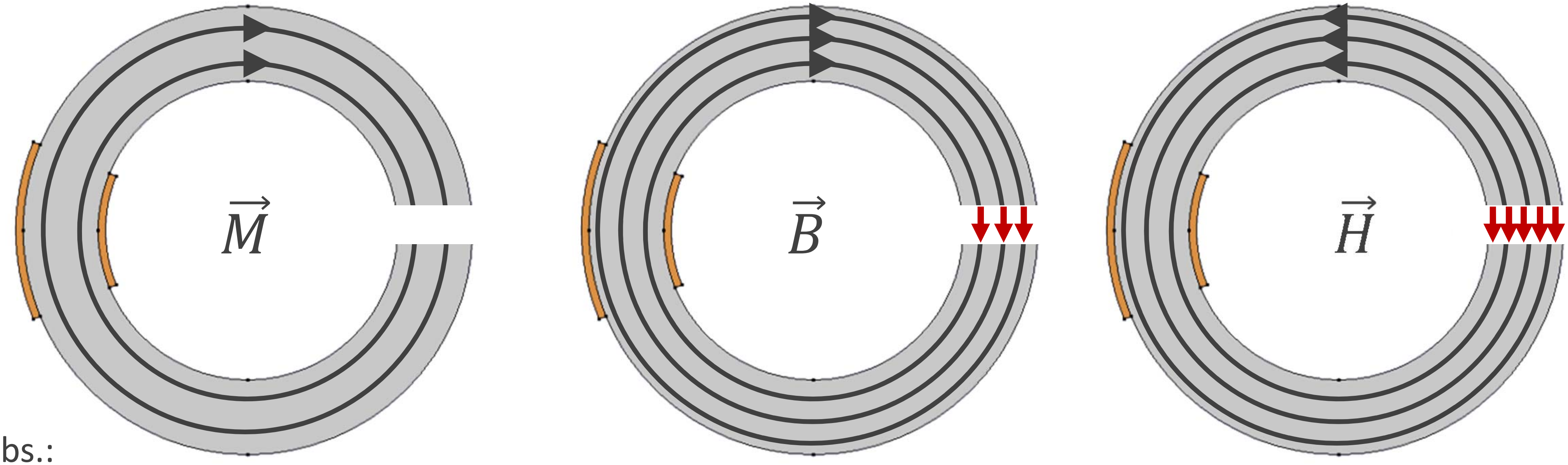
$$B_e = B_m \quad (2) \Rightarrow \quad H_m l_{m1} + \frac{B_m}{\mu_0} l_e = Ni$$

$$\frac{B_m}{\mu_0} l_e = Ni - H_m l_{m1}$$

$$\boxed{B_m = -\frac{\mu_0 l_m}{l_e} H_m + \frac{\mu_0}{l_e} Ni}$$

<u>Obs.:</u> Recta con pendiente negativa que, si la corriente es nula, pasa por el origen (notar la ordenada al origen).

- Dibujamos las líneas de campo para M, B y H a lo largo de todo el circuito, para el caso del material previamente saturado y luego i=0:



<u>Obs.:</u>

- B tendrá el sentido horario asumido al comienzo si dio positivo (y contrario si diera negativo)
- B tiene el mismo sentido en el entrehierro que en el material y hay la misma cantidad de líneas de campo en el entrehierro que en el material (pues $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) (a lo sumo se separarán/dispersarán un poco en el entrehierro)
- M tiene el mismo sentido que B en el material ferromagnético
- M está presente solo en el material, donde hay momentos magnéticos
- H tiene el mismo sentido que B en el entrehierro (pues $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$)
- H tendrá el mismo sentido que B en el material si dio positivo, y el contrario si dio negativo
- H será más intenso en el entrehierro que en el material

$$\left.\begin{array}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{array}\right\} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} \vec{\nabla} \cdot \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}}$$

Donde mueren líneas de campo M nacen líneas de campo H, y viceversa