93.55 - Fisica IV

Agustin Fisher - Carlos M. della Paolera

2022-2Q

Contents

Radiacion de Cuerpo Negro

Radiacion Termica

El espectro visible es un porcion infima del espectro de frecuencias. Por encima de espectro visible esta e infrarrojo, ondas cortas/argas, etc...

La radiacion termica es una radiacion electromagnetica. Si se tiene un material caliente, el calor produce agitacion de moleculas, que mueve cargas. Sabemos por Maxwell que esto produce radiacion electromagnetica. Se tienen estos osciladores que generan la radiacion electromagnetica.

La radiacion termica se caracteriza por tener un espectro continuo, para cada frecuencia una cierta intensidad de radiacion termica. Es fuertemente dependiente de la temperatura. Cuando calentamos algo y cambia su color, tiene que ver con la frecuencia a la que esta radiando.

Para caracterizarla matematicamente vamos a usar el concepto de...

Radiancia Espectral ($e_f(T)$)

La radiancia espectral es la potencia emitida por unidad de area y por unidad de frecuencia para una dada temperatura del cuerpo radiante.

$$e_T(T) = \int_0^\infty e_\lambda(T) d\lambda$$

Esto es la potencia total por unidad de area. Se obtiene integrando en todas las longitudes de onda o frecuencias.

Ley de Kirchoff

Asumiendo un cuerpo caliente en equilibrio termodinamico, la ley de Kirchoff nos dice que su emisividad E_f es igual a su absortividad A_f.

En equilibrio absorbe lo mismo que emite

Tambien descubrio que la radiancia espectral se podia expresar como una sola funcion universal, pero no llego a encontrar la expresion

$$e_f = J(f, T) A_f$$

Para el espectro de absorcion con $0 < A_f < 1$.

$$e_f = J(f, T) E_f$$

Para el espectro de emision, con $0 < E_f < 1$.

Definicion de Cuerpo Negro

Un cuerpo negro se define como emisor y absorbedor idea. Matematicamente cumple que $A_f = E_f = 1$.

Cuerpo gris es aquel cuyos coeficientes son constantes, pero menores a uno.

Ley de Stefan

Josef Stefan encontro que la potencia total radiada po unidad de area para un cuerpo negro corresponde a cierta ley

$$e_t = \sigma T^4$$

.

Donde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ y T es la temperatura absoluta en K.elvin

Si bien dijimos que los cuerpos negros son ideales, hay cuerpos que se pueden aproximar al comportamiento de un cuerpo negro. Por ejemplo, el Sol. Si esta ecuacion fuera para otro tipo de cuerpo con coeficientes no constantes, tendria que trabajar directamente desde la integral de radiancia espectral, ya que los coeficientes dependerian de la frecuencia.

Ley de Desplazamiento de Wien

La ley de desplazamiento de Wien nos dice que la longitud maxima de radiancia espectral resulta inversamente proporcional a la temperatura.

La expresion matematica de esta ley es

$$\lambda_{max} T = 2,898 \times 10^{-3} mK$$

Lo que descubrio Wien es que el maximo de radianca espectral varia de tal manera que el producto de la temperatura y la longitud de onda es una constante. Por lo tanto, estas dos magnitudes son inversamente proporcionales.

Densidad de Energia por Unidad de Volumen

La densidad de energia por unidad de volumen $u(f,T)$ dentro de una cavidad radiante se relaciona con la radiancia espectral mediante

$$e_f df = \frac{c}{4} u(f,T) df$$

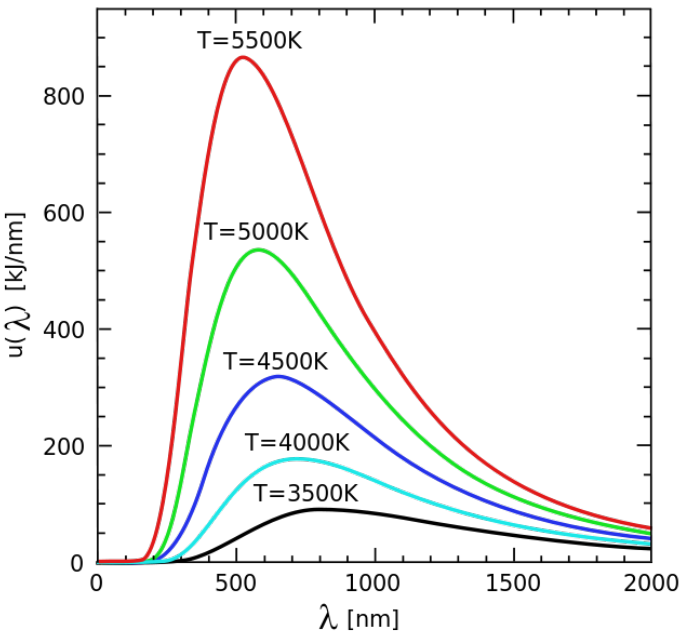

Figure 1: Ley de Desplazamiento de Wien

Aproximaciones

Ley Exponencial de Wien

Una manera de aproximar la radiancia espectral de CN es con una aproximacion semi-empirica conocida como la **Ley Exponencial de Wien**.

$$u(f,T) = Af^3 e^{-\frac{\alpha f}{T}}$$

Del grafico se puede apreciar que la ley exponencial ajusta bien para longitudes de onda cortas. Planck nos provee de resultados experimentales, y es evidente que en longitudes de onda mayores, difieren de la prediccion del modelo de Wien.

Aproximacion de Rayleigh-Jeans

Usando el modelo de cavidad radiante

$$u(f,T)df =< E > N(f)df$$

donde $< E >$ es el valor medio de la energia sobre los modos en el interior de la cavidad y $N(f)$ es la densidad de modos con frecuencia f por unidad de volumen.

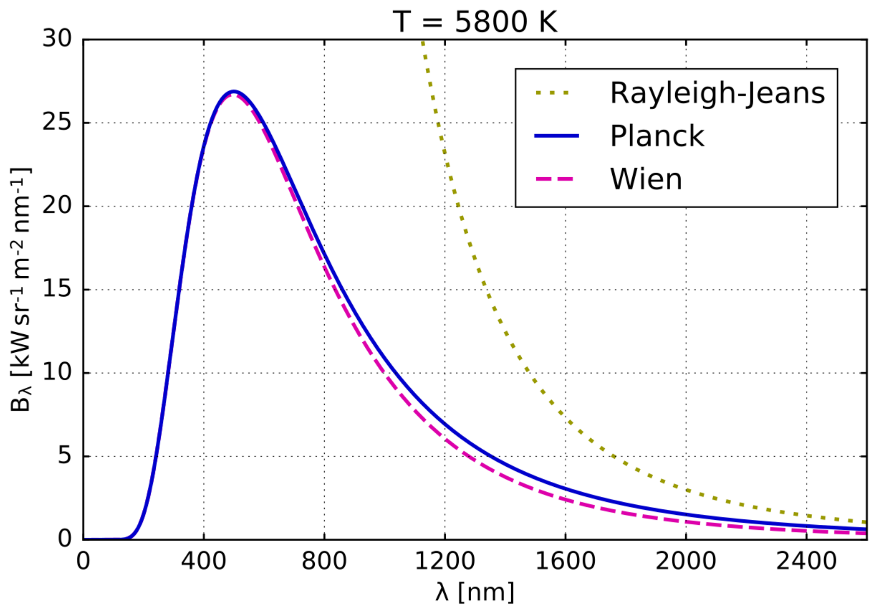

Figure 2: Comparacion de Rayleigh-Jean con Planck y con Wien

Lo que hicieron estos dos cientificos es modelar la densidad de energia como un gas de particulas. Entonces, con la distribucion de Maxwell-Boltzmann pudieron llegar a que, para los modos de cada frecuencia $f\dots$

$$< E >= \frac{\int_0^\infty E e^{-\frac{E}{k_b T}} dE}{\int_0^\infty e^{-\frac{E}{k_b T}} dE} = k_B T$$

Por las dudas, la constante de Boltzmann es $1,38 \times 10^{-23} J/K$.

Ahora que sabemos que $< E >= k_B T$, nos podemos dedicar a ver que es $N(f)$. Aca viene un mini salto de fe (esta demostrado en campus)

$$N(f)df = \frac{8\pi f^3}{c^3} df$$

$$N(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

Nota: *recordemos que* $f = \frac{c}{\lambda}$ *y que* $df = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$

Concluyendo la expresion para la densidad de energia de Rayleigh-Jeans, nos queda

$$u_{RJ}(f,T)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} k_B T df$$

$$u_{RJ}(\lambda,T)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T d\lambda$$

Nota: *ojo que esta ultima expresion diverge cuando* $\lambda \to 0$*. Esto no es lo que sucede experimentalmente (remitirse a Fig. 2)*

Tambien, podemos notar que

$$\frac{c}{4} u_{RJ}(f,T) = e_f(T)df$$

Atencion: Rayleigh-Jeans ajusta bien para longitudes de onda grandes. Se habla de una catastrofe ultravioleta, esta aproximacion falla horriblemente para longitudes de onda pequenas con respecto a la maxima visible. Notese que para $\lambda \to 0$ la radiancia espectral segun Rayleigh-Jeans se va a infinito, cuando en realidad sabemos que se tiene que ir a cero.

Planck

En 1901 Planck propone una hipotesis que resolveria la catastrofe ultravioleta. La energia para un modo correspondiente a una dada frecuencia no puede tomar valores continuos sino que viene en paquetes discretos de valor hf denominados cuantos de energia.

$$E = nhf$$

Siendo n un numero natural y $h = 6,626 \times 10^{-34} Js$ la constante de Planck.

Dado que la energia ya no seia un continuo, no vamos a poder hablar de integrar la energia, sino que vamos a tener que trabajar con una sumatoria.

$$< E >= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nhf A e^{-\frac{nhf}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\frac{nhf}{k_B T}}}$$

Llamando $\beta = \frac{1}{k_B T}$ se puede mostrar que el valor medio de la energia es

$$< E >= \frac{d}{d\beta}[\ln(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nhf})]$$

Observemos que esta sumatoria es mucho mas sencilla. Recordemos la serie geometrica para resolverla...

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| \in (0;1)$$

El resultado de resolverla es

$$< E >= \frac{hf}{e^{\beta hf} - 1}$$

De aqui suge la famosa expresion para la **distribucion de Planck**

$$u_{Planck}(f,T)df = \frac{8\pi}{c^3}\frac{hf^3}{e^{\beta hf} - 1}df$$

$$u_{Planck}(\lambda,T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5(e^{\beta\frac{hc}{\lambda}} - 1)}$$

Esta es la expresion que da la curva que ajusta de mejor manera la radiacion por longitud de onda. Tiende a Wien cuando el exponente es mucho mayor a uno, y tiene a Rayleigh-Jeans cuando es mucho menor a 1.

Tambien, se puede derivar desde Planck la **Ley de Stefan**. Recordando que $e_\lambda(T)d\lambda = \frac{c}{4}u(\lambda,T)d\lambda$ y que $e_T(T) = \int_0^\infty e_\lambda(T)d\lambda$ podemos usar la sustitucion $x = \frac{hc}{k_B T\lambda}$ y el resultado de la integral $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$ se puede demostrar que

$$e_T = \frac{c}{4}\int_0^\infty \frac{8\pi hc}{\lambda^5(e^{\frac{hc}{k_B T\lambda}} - 1)}d\lambda = \sigma T^4$$

Efecto Fotoelectrico

El efecto fotoelectrico consiste en la emision de electrones por parte de un electrodo metalico al incidir sobre el mismo con radiacion electromagnetica (suele ser luz visible o UV). Fue observado por primera vez por Hertz en 1987 durante sus experiencias de propagacion de ondas electomagneticas en el vacio. Fue estudiado en mayor profundidad por Philipp Lenard.

Lo que encontro Lenard, registrando la fotocorriente en funcion del potencial generador fue lo siguiente.

En la figua 4 se observa un potencial retardador V_S independiente de la intensidad de la radiacion, pero dependiente de la frecuencia de la radiacion incidente y del material del catodo.

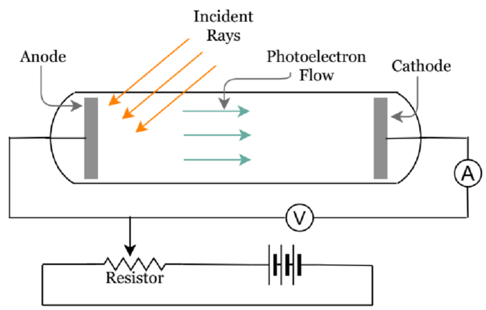

Figure 3: Experiencia de efecto fotoelectrico de Lenard (1902)

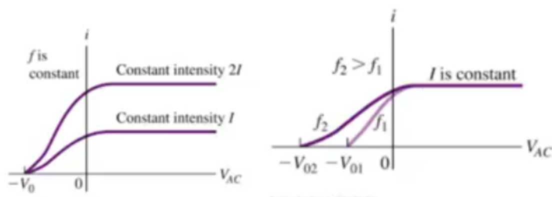

Figure 4: Obesrvaciones de Lenard

Apendice

Formulas

Transformaciones de Lorentz

Normales

$$T = \begin{cases} x = (x' + vt')\gamma \\ t = (t' + \frac{vx'}{c^2})\gamma \end{cases}$$

$$T' = \begin{cases} x' = (x - vt)\gamma \\ t' = (t - \frac{vx}{c^2})\gamma \end{cases}$$

$$l = \frac{l_p}{\gamma}$$

Transformaciones de velocidad

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{q - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

Inversas

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 - \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{q - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu'_x}{c^2}}$$

Inversion Temporal

Si ocurren dos eventos E_1 y E_2 y se tiene $\Delta x > 0$ y $\Delta t > 0$, entonces el segundo evento ocurre despues del primero. Para que exista un sistema de referecncia en el cual se encuentran invertidos, debe cumplirse que

$$\Delta t = (\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})\gamma \Rightarrow \Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2} < 0$$

Como la informacion viaja a la velocidad de la luz, podemos reducir esto a

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{c}$$

Efecto Doppler

Se tienen dos relojes A y B sincronizados en $x_0 = 0$ y $t_0 = 0$. B se mueve sobre el eje x positivo a una velocidad v y emite una senal en x_B, t_B. t_A es el tiempo que pasa en A desde t_0 hasta que B emite la senal. Cuando la senal llega al reloj A este marca t'_A. t'_B es el tiempo que marca B cuando se inicia la comparacion.

$$t'_B = (t_A - \frac{v}{c^2}vt_A)\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})\gamma t_A = \frac{t_A}{\gamma}$$

Debo comparar t'_A con t'_B

$$x_B = (t'_A - t_A)c = vt_A \Rightarrow t'_A = (1 + \frac{v}{c})t_A$$

$$\therefore \frac{t'_B}{t'_A} = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$

Dinamica

$$E = \gamma m_0 c^2$$

$$E^2 = p^2c^2 + (m0c^2)^2$$

Solo para fotones (particulas no masivas)

$$E = pc$$

$$mc^2 = pc$$

$$m = \frac{p}{c}$$

Cantidad de movimiento

$$p = \gamma m_0 v$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2KE_0}$$

Cuerpos Negros

Ley de desplazamiento de Wien *se usa para ver el* λ_{max} *y saber que modelo usar para la radiancia*

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \text{ donde } b = 2,89777.10^{-3}$$

Valor medio de la energia (Planck)

$$< E >= \frac{hc}{\lambda(e^{hc}\lambda k_B T - 1)}$$

Intensidad espectral en $Jm^{-3}s^{-1}$, o intensidad de la radiacion emitida por un cuerpo negro (Planck)

$$J(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

$$J(f, T) = \frac{2\pi hf^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}$$

Poder emisivo, o cantidad de energia radiante emitida por unidad de superficie

$$e(\lambda, T) = \int_{\lambda_L}^{\lambda_H} J(\lambda, T) d\lambda$$

Antes de esto se usaba la Ley de Stefan-Boltzmann para la emision de cuerpos negros

$$e_{total} = \sigma T^4 = \int_0^{\infty} J(\lambda, T) d\lambda = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3} T^4$$

Para cuerpos no negros (emisividad menor a uno) se usa $e_{total} = \epsilon\sigma T^4$

Si λ es muy chico, entonces $e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}$ tiende a infinito. Esto es un problema de Rayleigh-Jean. Lo usamos cuando λ es muy grande comparado a λ_{max}

$$J(\lambda, T)_{RJ} d\lambda = \frac{2\pi c l_B T}{\lambda^4} d\lambda [kgs^{-3}m^{-1}]$$

$$J(f, T)_{RJ} df = \frac{8\pi f^2}{c^3} k_B T df$$

Derivacion:

$$J(\lambda, T) = \frac{c}{4} u(\lambda, T)$$
$$u(\lambda, T) = N(\lambda) < E >$$
$$N(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4}$$
$$< E >_{RJ} = k_B T$$

Si λ es muy grande, entonces el modelo de Wien se hace cero cuando no deberia. Para obtener Wien desde Planck se toma $hc \gg \lambda k_B T$

$$u(\lambda, T)_W = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}$$

Efecto Fotoelectrico

Energia maxima de un electron desprendido por un foton de frecuencia f. ϕ es la funcion de trabajo

$$K_{max} = hf - \phi$$

Frecuencia de corte o umbral es la frecuencia a la que todo electron que se desprende queda en reposo. Es decir, la frecuencia de la energia cinetica minima.

$$f_0 = \frac{\phi}{f}$$

Efecto compton consiste en el aumento de la longitud de onda de un foton cuando choca con un electron libre y pierde parte de su energia. La longitud de onda dispersada depende del angulo de dispersion:

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\theta))$$

Aniquilacion de particulas consiste en la creacion de particulas a partir de una colision entre otras particulas. Se cumple la conservacion de la energia y de la cantidad de movimiento en ambos ejes.

Modelo del Atomo de Bohr

Atomo hidrogenoide es todo aquel que tiene la misma configuracion electronica que el hidrogeno, es decir, un solo atomo en su orbita.

Hipotesis 1: el electron realiza una orbita circular alrededor del nucleo segun lo establecen las leyes de la mecanica clasica.

Hipotesis 2: el e^- solo puede moverse en orbitas circulares (permitidas) en las cuales se cumple que el modulo del momento angular es:

Momento angular cuantizado

$$\vec{L_e} = n\hbar = \frac{nh}{2\pi} = nvr; n = 1, 2, 3...$$

Hipotesis 3: mientras el electron se mueve a una orbita pemitida (estable), la energia se mantiene constante

$$E_n = \frac{-13, Z^2}{n^2}$$

radio de las orbitas y velocidad del elctron (ambos cuantizados):

$$r_n = \frac{a_0 n^2}{Z}$$

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon^2\hbar n}$$

Hipotesis 4: Cuando el atomo se encuentra en un estado de energia E_o, espontaneamente pasa a un estado de energia E_f, con $E_f < E_i$ emitiendo un foton cuya energia es:

$$hf = E_i - E_f = -13,6Z^2(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2})$$

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 \frac{13,6}{hc} (\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2})$$

Constantes

Glosario

c velocidad de la luz

$E_0 = m_0 c^2$ Energia de reposo

$E_T = K + E_0 = \gamma m_0 c^2$ Energia total

e carga elemental

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ Fuerza

$f, \mathcal{V}$ Frecuencia

f_0 Frecuencia de corte

h Constante de Planck

$\bar{h} = \frac{h}{2\pi}$ Constante de Planck (h barra)

$J(\lambda, T)$ Funcion de densidad espectral

K Energia cinetica

k_B Constante de Boltzmann

l_p, l_o Longitud propia

m_0 Masa en reposo

$\vec{p} = m_0 \vec{v} \gamma$ Cantidad de movimiento

$u(\lambda, T)$ Funcion de distribucion de energia

Z Numero atomico

$\beta = \frac{v}{c}$ Velocidad relativa a la de la luz

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{v^2}{c^2}}}$ Factor de Lorentz

ϵ Emisividad

ϵ_0 Permitividad, constante dielectrica

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ Constante de Coulomb

ϕ Funcion de trabajo

λ Longitud de onda, constante de decaimiento

σ Constante de Stefan-Boltzmann

$\mu = \frac{mM}{m+M}$ Masa relativa