Contents

Motivacion

Dada la rampa $r(t) = tu(t)$, si la quisieramos derivar vemos que la derivada no esta definida en el punto de $t = 0$.

Supongamos un espacio vectorial $\mathcal{V} = \mathcal{K}^n$ y sea B una base ortonormal de dicho espacio con producto interno. Ahora puedo considerar un vector cualquiera v y una funcion que a v le asigna su producto interno $< \omega, v >$. A su vez, le asigna a cualquier vector su producto interno. Formalmente,

$$T_\omega(v) =< \omega, v >$$

Esta transformacion lineal T exhibe la propiedad de linealidad. Ahora algo mas interesante.

Al ser $\omega \in \mathcal{V}$ se debe poder escribir como combinacion lineal de miembros de la previamente mencionada base ortonormal de $\mathcal{V}$. Entonces, $< \omega, v_j >= \alpha_j$ donde α_j es el escalar asociado a la base ortonormal y su combinacion lineal. Otra manera de expresar esto es $T_\omega(v_j) = \alpha_j$

Funciones Generalizadas

Formacion del Concepto

Si tengo una senal x, como puedo hacer para fabricar una transformacion lineal que me permita reconstruirla de tal manera que pueda ver su derivada. Vamos a buscar ahora una funcion que nos permita expresar el producto interno y que tenga linealidad: la integral.

$$T_x(\phi) = \int x(t)\phi(t)dt =< x, \phi >$$

Para que la integral siempre converja para cualquier x lo que necesito es que la funcion ϕ pertenezca a la clase de funciones que admiten derivadas de todos los ordenes y que se anulan fuera de cierto intervalo. Entonces, ahora digo que x es una funcion continua a trozos. Lo de ϕ se nota como $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$. Este espacio es el de funciones de prueba infinitamente diferenciables y que se anulan fuera del intervalo $[-\alpha\phi, \alpha\phi]$.

Definicion Formal

> Una funcion generalizada es una funcoinal lineal (continua) sobre el conjunto de las funciones de prueba $\mathcal{C}_0^\infty$

Esta siguiente anotacion es totalmente al margen pero aclaro que $\mathcal{C}_0^\infty$ se dice que es un K-espacio vectorial porque actua sobre el conjunto K.

Ejemplo

Veamos el caso de $< \mu, \phi >$.

$$< \mu, \phi >= \int_\infty^\infty \mu(t)\phi(t)dt = \int_0^\infty \phi(t)dt$$

Funcion Generalizada Regular

Sea g una distribucion (funcion generalizada) si existe y funcion continua a trozos tal que

$$< g, \phi >=< y, \phi >= \int_\infty^\infty y(t)\phi(t)dt \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty$$

se dice que g es regular

Propiedades de Funciones Generalizadas

Igualdad de Funciones Generalizadas

Considero g y $g' \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ es el espacio de funciones generalizadas) Defino que $g = g'$ si

$$< g, \phi >=< g', \phi > \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty$$

.

Si se tienen x_1 y x_2 funciones continuas a trozos y α_1 y $\alpha_2 \in K$. Entonces,

$$< \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 x_1(t), \alpha_2 x_2(t))\phi(t) dt$$

. Luego, por linealidad resulta que

$$\alpha_1 < x_1, \phi > + \alpha_2 < x_2, \phi >$$

Aca medio que rafa hace lo mismo pero en lugar de x les pone g y ahora esta definido el producto por un escalar y la linealidad para las funciones generalizadas. Esto porque $(\mathcal{D}, +, ., K)$ resulta un espacio vectorial.

Funcion Generalizada Singular

Un ejemplo tipico es el de la delta de dirac. $< \delta, \phi >= \phi(0)$

Producto de una Funcion Generalizada por una Funcion de prueba

$\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ y x funcion continua a trozos. Luego

$$< \gamma x, \Phi >= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) x(t) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \gamma(t) \phi(t) dt$$

Esto se puede hacer porque tanto ϕ como $\gamma \in \mathcal{C}_0^\infty$

De nuevo, aca se copia lo mismo pero dandolo como definicion. No lo hago porque no me da la velocidad.

Un ejemplo:

$$< \sin(t)\delta, \phi >=< \delta, \sin(t)\phi >= \sin(t)\phi(t)|_{t=0} = 0 =< 0, \phi >$$

Esta es la funcion generalizada nula. El coseno resulta ser la funcion generalizada identica. No lo voy a demostrar porque es identico a lo de recien pero viene por el lado de que $\cos(0) = 1$

Derivada Generalizada

Ahora considero x continua y x' continua a trozos.

$$< x', \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\phi(t)dt$$

. Ahora tengo el gustazo de integrar por partes.

$$x(t)\phi(t)|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{a\to\infty} x(a)\phi(a) - \lim_{b\to-\infty} x(b)\phi(b)$$

.

Sea $g \in \mathcal{D}$ defino su derivada generalizada g' como

$$< g', \phi >= - < g, \phi' > \forall\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}$$

Derivada de la Rampa Unitaria

De esta manera, vamos a buscar la derivada generalizada de la rampa unitaria.

$$< r', \phi >= - < r, \phi' >= \int_{\infty}^{\infty} r(t)\phi'(t)dt$$

$$\int_0^{\infty} t\phi'(t)dt = -(t\phi(t)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \phi dt) = \int_0^{\infty} \phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi(t)dt =< u(t), \phi(t) >$$

Ahora podes mirar lo primero y ultimo que escribimos y vas a ver que $r' = u$. Despues Rafa calculo la derivada de $u(t)$ para mostrar que da $\delta(t)$ pero yo no lo voy a hacer.

Derivada n-esima

Lo que si me voy a dignar a hacer es mostar la propiedad de la derivada n-esima.

$$< g^{(n)}, \phi >= (-1)^n < g, \phi(n) >$$

La Delta de Dirac

Quizas no sea el lugar correcto para decir esto pero aclaro. La nocion de que *la delta de Dirac es una funcion que vale cero en todos lados salvo en uno donde es infinito y que si la integras da cero* es erronea. Asi seria si la delta fuera una funcion, pero no lo es. *Es una imagen pictorica* segun Rafa, aunque el senor piensa que se lo que me esta diciendo. Despues de decir esto se hacen un par de aclaraciones y definiciones sobre por que la delta funciona como lo hace pero no lo copie. En todo caso, Marcos lo copio textual. Lo que si voy a tirar aca es que

$$< \delta(t - t_0), \phi >= \phi(to)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta^{(n)}(at) = \frac{1}{|a|}(\frac{1}{a})^n \delta^{(n)}(t)$$

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

Aca Rafa desarrolla un par de ejemplos que estan en la presentacion pero para esto es mejor confiar y ver que dice Nelly, asi que tampoco lo anoto.