

ALGORITMOS DE APROXIMACIÓN

Diseño de redes métricas 2-conexas de costo mínimo

Agustín Cabrera Bertucci

Docente Pablo Romero

07/10/2025

Problema disparador

El problema que abordaremos a continuación emerge naturalmente al ahondar en las propiedades topológicas de las redes o grafos. Conceptos cercanos han sido mencionados en cursos introductorios ya sea de computación o matemática discreta.

[Video] comenzamos con un problema disparador: el de las aristas de corte.

Enunciado al problema y condiciones (1)

Comenzemos por describir las condiciones de estudio al problema a abordar.

- Se dice que un grafo es **métrico** si los pesos de sus arcos conforman una métrica $d(\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$. Cumple que:

$$d(u, u) = 0 \quad \forall u \in V \tag{1}$$

$$d(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in V \tag{2}$$

$$d(u, v) = d(v, u) \quad \forall u, v \in V \tag{3}$$

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) \quad \forall u, v, w \in V \tag{4}$$

Enunciado al problema y condiciones (2)

- Un grafo se dice **2-conexo por vértices** si al quitar un vértice cualquiera el grafo permanece conexo. (Análogo para **arcos**)
- Dado un grafo métrico, nos interesa hallar un subgrafo generador que cumpla la propiedad de ser 2-conexo. Buscamos que dicho subgrafo sea además de **costo mínimo**.
- Nos limitamos al estudio de **grafos completos** por un motivo que veremos a continuación.
- **Obs:** Los grafos de la familia C_n son 2-conexos.

Resultado útil: 2-conectividad por vértices implica 2-conectividad por aristas.

Dificultad del problema

- El problema en cuestión reside en la clase de problemas *NP*-difícil por lo que no tenemos un algoritmo eficiente para su resolución.
- Nótese que es más restrictivo que el problema del árbol de Steiner que solo exige conectividad.
- A continuación demostramos su pertenencia a la clase de problemas *NP*-difícil

Demostración [video]: reducción de Karp del problema del ciclo hamiltoniano hacia el problema de la red métrica 2-conexa de costo mínimo.

Extracto Slide 7 Clase 4

Dado un grafo completo K_n con costos métricos en sus aristas $c : E(K_n) \rightarrow \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, el MWTCNS consiste en hallar el **subgrafo 2-conexo** de K_n con **mínimo costo**.

Sea $\mathcal{G}^{(2)}$ la clase de grafos 2-conexos. Entonces, el MWTCNS es el problema $\Pi = (\mathcal{I}, S_\Pi, f)$, donde

- $\mathcal{I} = \{(K_n, c) : n \in \mathbb{Z}, n \geq 3, c : E(K_n) \rightarrow \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}, c(xz) \leq c(xy) + c(yz)\}.$
- $S_\Pi((K_n, c)) = \{G \subseteq K_n : G \in \mathcal{G}^{(2)}\}.$
- $f((K_n, c), G) = \sum_{e \in E(G)} c(e).$
- $OPT_\Pi(K_n, c) = \min_{\{G \in S_\Pi(K_n, c)\}} \sum_{e \in E(G)} c(e).$

Propiedades de grafos 2-conexos

Mencionemos algunos resultados que nos serán útiles.

- Requieren eliminación de al menos 2 de sus vértices para causar desconexión.
- Una propiedad equivalente es que para todo par de vértices, existen 2 caminos interiormente disjuntos entre ellos. Es decir que solo comparten sus extremos.
- **Existe** subgrafo generador 2-conexo de costo mínimo cuyos nodos cumplen la propiedad de tener de grado 2 o 3. (Teorema 3, Clyde Monma)

Las primeras propiedades son prácticamente derivadas de su definición; la última por su parte es bastante más compleja en su demostración y la misma queda disponible en las referencias del curso.

Posibles abordajes al problema

Hemos de optar por utilizar un método para atacar este problema, detallamos algunos de los posibles caminos. Sin embargo, dada la dificultad previamente mostrada, hemos de restringirnos a un algoritmo de aproximación. Detalles de la complejidad de otros abordajes serán vistas a continuación.

- Diseño de estrategia golosa.
- Programación lineal entera y relajaciones.
- Esquema Primal-Dual (como en bosques de Steiner)
- Transformación a problemas conocidos: **MTSP**, 2ECSS, etc.
- Programación dinámica
- Algoritmos iterativos sobre soluciones factibles aleatorias y heurísticas

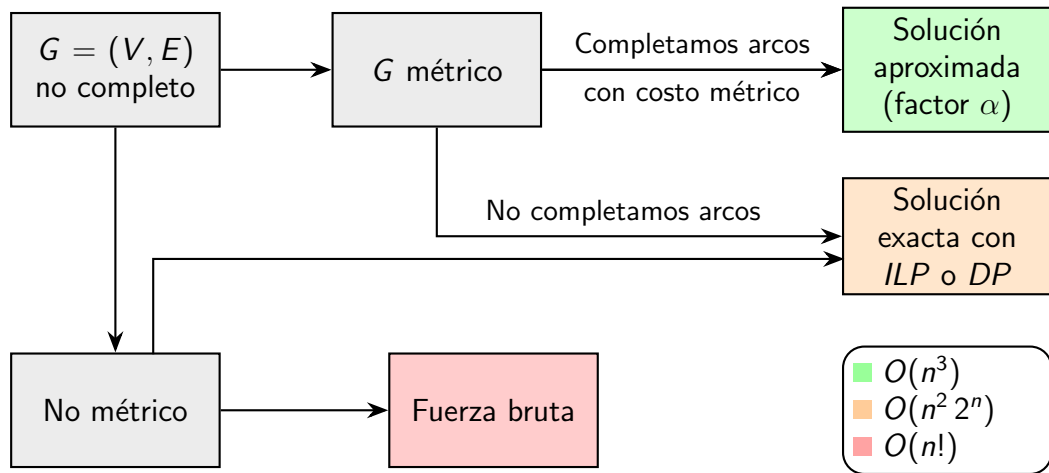
Transformación en problemas conocidos:

- Veamos que, gracias a la observación anterior, un ciclo hamiltoniano cumple ser 2-conexo. Si nos restringimos al ciclo Hamiltoniano de costo mínimo **podríamos tener una buena aproximación** para el costo del subgrafo generador 2-conexo de costo mínimo.
- Por los contenidos del curso y por limitar nuestro estudio a **grafos métricos**, podemos aproximar el valor óptimo de un ciclo Hamiltoniano de costo mínimo por medio de ciertos algoritmos de aproximación.

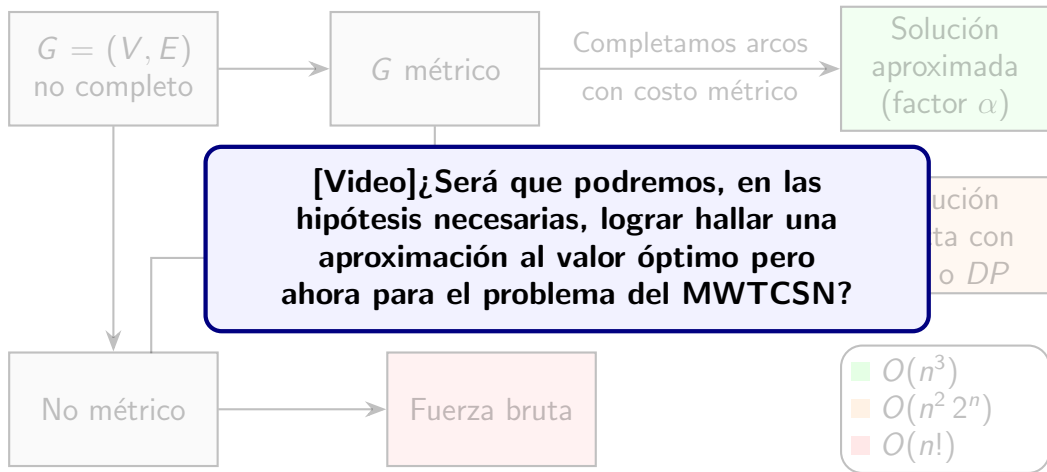
Este atajo podría ayudarnos a evadir una búsqueda por fuerza bruta cuya complejidad vemos debajo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cantidad matrices binarias simétricas: } O(2^{\frac{n^2-n}{2}}) \\ \text{Algoritmo de Trajan: } O(n + m) = O(n^2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Encontrar óptimo: } O(n^2 2^{\frac{n^2-n}{2}})$$

Manejo de instancias en TSP, buscamos lo mismo en MWTCSN



Manejo de instancias en TSP, buscamos lo mismo en MWTCNS



Def: grafo cúbico

Un grafo $G = (V, E)$ se dice cúbico si cumple que $\deg(v) = 3 \forall v \in V$

Nótese que en grafos cúbicos, por medio del Handshaking Lemma, se tiene que

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 3 \cdot |V| = 2 \cdot |E| \Rightarrow |V| \text{ es par}$$

Este hecho nos será de utilidad para posicionarnos en las hipótesis de un resultado auxiliar que necesitaremos más adelante.

Teoremas 6 y 7 (Claude Berge 1958)

Sea $G = (V, E)$ un grafo k -regular y $(k - 1)$ -conexo por aristas (con costos) y en donde $|V|$ es par $\Rightarrow \exists M$ emparejamiento perfecto que cumple $c(M) \leq \frac{1}{k} c(E)$

Al restringir a grafos cúbicos (3-regulares), que tienen cantidad par de vértices, con costos no negativos que satisfacen las desigualdad triangular y 2-conexos por aristas: estamos en hipótesis del teorema con $k = 3$.

Por lo que se concluye que $\exists M$ emparejamiento perfecto tal que $c(M) \leq \frac{1}{3} c(E)$ (Resultado al que haremos referencia como Lema 3)

Teorema 7

Dado un grafo Hamiltoniano con costos métricos en sus aristas, entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$d(C_{opt}(V)) \leq \frac{4}{3}d(TC_{opt}(V))$$

En donde $C_{opt}(V)$ y $TC_{opt}(V)$ denotan el ciclo Hamiltoniano de costo mínimo y la red óptima 2-conexa, ambas sobre V .

Demostración: sea $G = (V, E)$ un subgrafo generador 2-conexo de costo mínimo en las condiciones del Teorema 3 (vértices de grado 2 o 3). Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $G \not\cong C_n \forall n \in \mathbb{N}$, es decir que G no es un ciclo.

Comparación con MTSP #3

Sea \bar{V} el conjunto de los vértices de grado impar. Llamemos $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ al grafo cúbico sin puentes producto de contraer repetidamente todas las aristas incidentes a un vértice de grado igual a 2.

Notemos que cada $(u, v) \in \bar{E}$ corresponde a un camino maximal en G cuya totalidad de nodos internos son de grado 2 (al conjunto ordenado de aristas que conforman dicho camino le llamaremos $P_{u,v}$). Equivalentemente, G es una subdivisión del grafo \bar{G} .

Ahora definamos los nuevos costos para las aristas (las aristas que no vieron modificadas mantienen su valor):

$$\bar{d}(u, v) = \sum_{e \in P_{u,v}} d(e) \quad \forall (u, v) \in \bar{E} - E$$

Comparación con MTSP #4

La definición tomada nos garantiza no violar la desigualdad triangular en la definición de la función distancia. Además $\bar{d}(\bar{E}) = d(E)$.

Estamos en la hipótesis del Lema 3 (grafo 3-regular, 2-conexo con cantidad par de vértices) por lo que \bar{G} tiene un emparejamiento perfecto M de peso a lo sumo $1/3 \cdot \bar{d}(\bar{E})$.

En nuestro grafo original teníamos 2 tipos de vértices, los de grado 3 (\bar{V}) y lo de grado par ($V - \bar{V}$).

Queremos llevar el grafo a un multigrafo Euleriano (todos los vértices de grado par). El duplicar todas las aristas es la salida sencilla pero estamos desaprovechando que $V - \bar{V}$ ya cumple lo deseado.

Comparación con MTSP #5

En su lugar, podemos solamente duplicar las aristas de los caminos correspondientes a las aristas de M en G . El nuevo grafo con adiciones en sus aristas será $G' = (V, E')$.

En consecuencia de lo detallado previamente:

$$d(E') = \bar{d}(M) + d(E) \leq \frac{1}{3}\bar{d}(\bar{E}) + d(E) \leq \frac{4}{3}d(E)$$

Sobre este grafo se puede aplicar el argumento típico de atajos para construir un circuito Hamiltoniano C tal que: $d(C) \leq d(E')$

Por transitividad de la desigualdad se obtiene el resultado deseado:

$$d(C_{opt}(V)) \leq \frac{4}{3}d(TC_{opt}(V))$$



Extracto slide 13 clase 6

Teorema 5: El algoritmo de Christofides es un algoritmo de aproximación de factor $3/2$ para el MTSP.

Uniendo los resultados con los que contamos de momento tenemos un algoritmo de aproximación basado enteramente en Christofides para el problema MWTCN (factor $\alpha = 2$):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Teorema 5, clase 6: } d(C_{cf}) \leq \frac{3}{2} \cdot d(C_{opt}) \\ \text{Teorema 7: } d(C_{opt}) \leq \frac{4}{3} \cdot d(TC_{opt}) \end{array} \right\} \Rightarrow d(C_{cf}) \leq 2 \cdot d(TC_{opt})$$

[Video] aplicación concreta sobre un grafo

Pregunta: ¿es acaso el factor obtenido con este abordaje mejorable?

Familia rígida para factor $\alpha = 2$

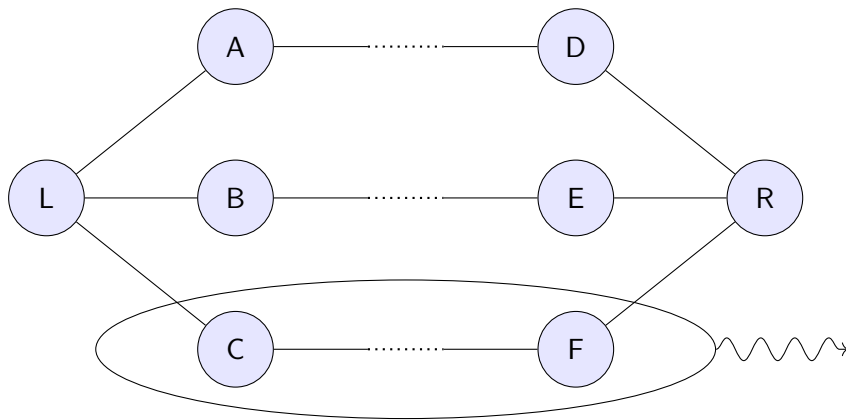
Si consideramos una generalización de uno de los grafos mostrados en el video y definimos una familia de grafos $Monma(k)$ como se ilustra en la figura (ver siguiente diapositiva) entonces:

- Son redes 2-conexas en sí mismas, el óptimo a estas instancias del MWTCN es: $3k + 3$.
- Siguiendo el algoritmo planteado, el ciclo Hamiltoniano en el grafo expandido tiene un costo de: $4k + 2$.
- Entonces se observa que:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k + 2}{3k + 3} = \frac{4}{3}$$

Recordando entonces la definición de familia justa, de $Monma(k)$ y de límite en el infinito, $\forall \epsilon > 0, \exists n \geq 2$ tal que $\forall m \geq n, a_m \in B(4/3, \epsilon)$

Familia rígida a considerar: $Monma(k)$, $k \geq 2$



Cada uno de los tres caminos, compuestos por vértices de grado 2, tienen k vértices

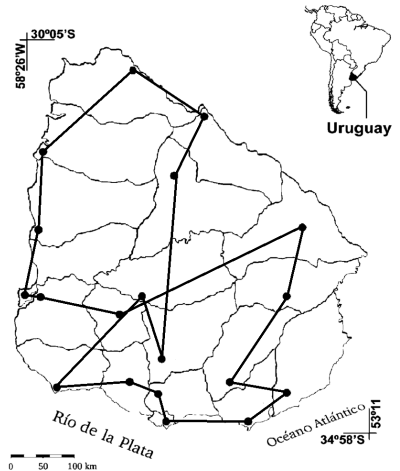
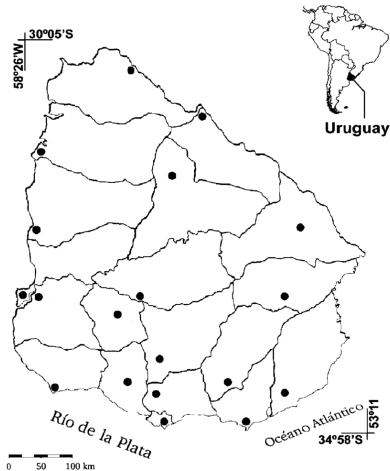
Ejemplos y Aplicaciones sencillas

Con el fin de ilustrar aplicaciones reales afines al tema expuesto, se presenta la siguiente realidad.

Consideremos el grafo asociado al mapa de la República Oriental del Uruguay, donde tenemos 19 nodos representando las capitales departamentales (siguiendo una numeración según orden alfabético) y arcos entre ellas en función de la distancia (sobre la esfera) entre las ciudades. Queremos saber en el contexto de la realidad planteada, cuál es la red métrica 2-conexa de costo mínimo; aquí el costo se podría interpretar como la menor cantidad de kilómetros de ruta en línea recta sumando todas las rutas presentes.

En la vida real las rutas no son rectas pues alteran su curso según la topología geográfica ni unen un par de ciudades estrictamente pues hay rutas que se conectan exclusivamente con otras rutas.

Construcción de la instancia y ejecución de Christofides



Resultados y estimaciones

En función de las pruebas realizadas (con implementaciones propias) buscamos evidenciar todo lo abordado previamente.

Cuadro: Soluciones computacionales sobre instancia varias

Instancia	Tamaño	OPT_{MTSP}	Christofides	OPT_{MWTCSN}	Razón
Aleatoria #1	6	45,48	50,13	45,48	1.1
Aleatoria #2	8	60,99	62,71	60,99	1.03
Monma(2) canónico	8	10	10	9	$1.\bar{1}$
Mapa Uruguayo	19	$1321,5 \leq$	1982,2	$991,1 \leq$	$\leq 2 \cdot \text{Christofides}$
TSPLib::Brazil58	58	25 395	27 442	$19\,046 \leq$	$\leq 4/3 \cdot OPT_{MTSP}$
TSPLib::DSJ1000	1000	18 659 688	20 943 965	$13\,994\,766 \leq$	$\leq 4/3 \cdot OPT_{MTSP}$

Pregunta: ¿Qué tan acertada parece nuestra aproximación en grafos pequeños? ¿Qué comportamiento queda en evidencia?

- Logramos probar la existencia de un algoritmo de aproximación de factor 2 para MWTCSN.
- También se puede lograr un algoritmo de aproximación de factor 2 pero trabajando sobre Redes de Steiner 2-conexas. (Véase resultado disponible de C. Monma)
- En la actualidad **no se conocen** algoritmos que mejoren el factor 2 (obviando mejoras irrisorias en algoritmo de Christofides).
- Como mencionamos antes, el problema es también abordable por métodos basados en programación lineal y dualidad, arrojando resultados muy interesantes (más aún si se incorporan heurísticas nuevas).