Trabajo Práctico 1
“No creo que a él le gustara eso”

Métodos Numéricos

Segundo cuatrimestre - 2014

The Secret of Monkey Island

El problema

El parabrisas

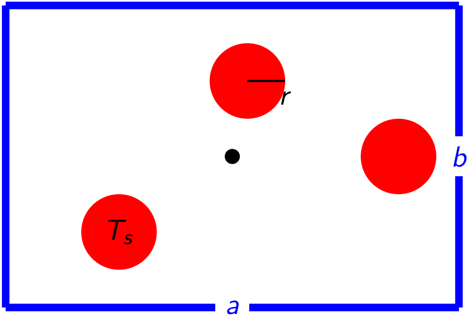
- La nave tiene un parabrisas, que está siendo atacado por sanguijuelas mutantes.
- Los bordes del parabrisas tienen un sistema de refrigeración que aplica una temperatura constante de -100^{o}C.
- Las sanguijuelas aplican una temperatura (parámetro) sobre la superficie que cubren.

Nos interesa

- Determinar la temperatura en el *punto crítico* del parabrisas.
- Proponer una estrategia que, eliminando sanguijuelas, produzca que la temperatura en el punto crítico se encuentre por debajo de los 235^{o}C.

El parabrisas y las sanguijuelas

- a = ancho (mts.)
- b = alto (mts.)
- r = radio de la sanguijuela (mts.)
- T_s = temp. ejercida por la sanguijuela.



El modelo

Sea $T(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función de temperatura en el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Conocemos:

- La temperatura en los bordes, -100^{o}C, i.e., $T(0, y) = T(x, 0) = T(x, b) = T(a, y) = -100^o\mathrm{C}$
- La temperatura en los puntos cubiertos por una sanguijuela, T_s.

¿Qué buscamos?:

$T(x, y)$ para todo punto del parabrisas, y así podemos calcular la temperatura en el punto crítico y determinar si es seguro o no.

El modelo

¿Cómo buscamos la temperatura en los puntos internos?

Llamamos a nuestro amigo físico y nos dice que (después de un tiempito) los puntos internos van a cumplir:

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

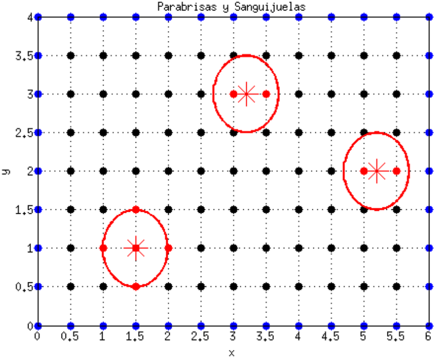
Ecuación de Laplace

Ecuación diferencial en derivadas parciales, utilizadas en muchos campos aplicados. En nuestro caso, describen las condiciones que se cumplen en el estado estacionario del sistema.

Solución Numérica

Discretización

- Transformamos el problema *continuo* en un problema *discreto*.
- En lugar de obtener una función $T(x, y)$ que describa la temperatura en todos los puntos, calculamos la temperatura en los puntos de la discretización y la llamamos t_{ij}.



Solución Numérica

Discretización (cont.)

Consideramos la siguiente discretización del parabrisas:

- $h \in \mathbb{R}$ la granularidad de la discretización.
- $a = m \times h$ y $b = n \times h$, con $n, m \in \mathbb{N}$, obteniendo así una grilla de $(n + 1) \times (m + 1)$ puntos.
- Para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $j = 0, 1, \ldots, m$, llamemos $t_{ij} = T(x_j, y_i)$ al valor (desconocido) de la función T en el punto $(x_j, y_i) = (ih, jh)$, donde el punto $(0, 0)$ se corresponde con el extremo inferior izquierdo del parabrisas.

Solución Numérica

Diferencias finitas

Relación con la derivada

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underbrace{\approx}_{\text{Fijado } h} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Definición

- Diferencia finita atrasada:

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}(x_j, y_i) \cong \frac{t_{i,j} - t_{i,j-1}}{h}$$

- Diferencia finita adelantada:

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}(x_j, y_i) \cong \frac{t_{i,j+1} - t_{i,j}}{h}$$

Solución Numérica

Diferencias finitas (cont.)

Discretizamos las de segundo orden

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2}(x_j, y_i) &= \frac{\partial(\frac{\partial T(x,y)}{\partial x})}{\partial x}(x_j, y_i) \\
&= \frac{\frac{t_{i,j+1}-t_{i,j}}{h} - \frac{t_{i,j}-t_{i,j-1}}{h}}{h} \\
&= \frac{t_{i,j-1} - 2t_{i,j} + t_{i,j+1}}{h^2}
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}(x_j, y_i) = \frac{t_{i-1,j} - 2t_{i,j} + t_{i+1,j}}{h^2}
$$

Reemplazando en (1)

$$
\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{t_{i-1,j} + t_{i,j-1} - 4t_{ij} + t_{i+1,j} + t_{i,j+1}}{h^2} = 0 \qquad (2)
$$

Variables

Como ya dijimos, la temperatura en cada punto de la discretización, t_{ij}, $i = 0, \ldots, n$ y $j = 0, \ldots, m$.

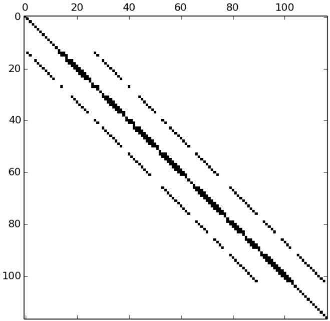
Ecuaciones

- Sabemos que cada punto en el borde del parabrisas vale -100^{o}C.
- Sabemos que cada punto cubierto por una sanguijuela vale T_s.
- Sabemos que cada uno de los puntos restantes cumple exactamente una ecuación (i.e., (2)) que depende de sus cuatro vecinos, en particular el promedio.

El TP

Objetivo general

Se deberá formular un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular la temperatura en todos los puntos de la grilla que discretiza el parabrisas. El sistema de ecuaciones resultante para este problema puede ser muy grande. Luego, es importante plantear el sistema de ecuaciones de forma tal que posea cierta estructura (i.e., una matriz banda), con el objetivo de explotar esta característica tanto desde la *complejidad espacial* como *temporal* del algoritmo.



El TP

Implementación

1. Representar la matriz del sistema utilizando como estructura de datos los tradicionales arreglos bi-dimensionales. Implementar el algoritmo clásico de EG.
2. Representar la matriz del sistema aprovechando la estructura banda de la misma, haciendo hincapié en la complejidad espacial. Realizar las modificaciones necesarias al algoritmo de EG para que aproveche la estructura banda de la matriz.

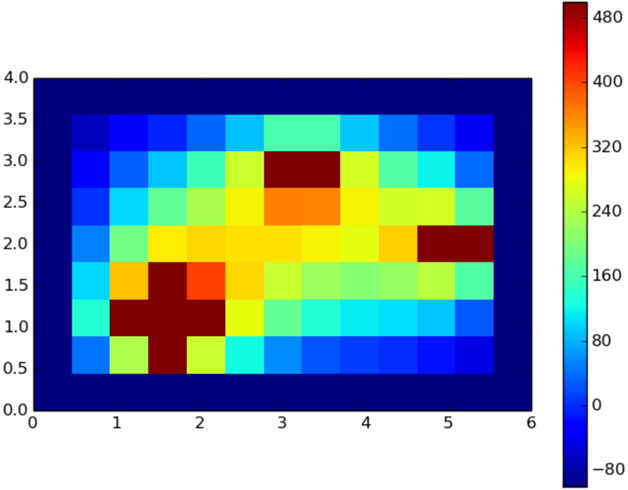
El TP

Experimentación

- Considerar al menos dos instancias de prueba, generando discretizaciones variando la granularidad para cada una de ellas y comparando el valor de la temperatura en el punto crítico. Se sugiere presentar gráficos de temperatura para los mismos, ya sea utilizando las herramientas provistas por la cátedra o implementando sus propias herramientas de graficación.
- Analizar el tiempo de cómputo requerido en función de la granularidad de la discretización, buscando un compromiso entre la calidad de la solución obtenida y el tiempo de cómputo requerido. Comparar los resultados obtenidos para las variantes propuestas en 1 y 2.
- Estudiar el comportamiento del método propuesto para la estimación de la temperatura en el punto crítico y para la eliminación de sanguijuelas.

El TP

Ejemplo solución graficada



El TP

Consideraciones generales

- **Informe** que incluya una descripción detallada de los métodos implementados y las decisiones tomadas, experimentos realizados, junto con el correspondiente análisis y siguiendo las pautas definidas en el archivo *pautas.pdf*.
- El programa debe ser compilado, ejecutado y testeado utilizando los *scripts* de *Python* provistos, verificando que los **tests** pasen satisfactoriamente. Además, se debe respetar el formato especificado en el enunciado.
- Es muy importante explicar las hipótesis previas de cada experimento, detallando los parámetros para poder replicarlo. Además, la discusión debe desprenderse de los resultados obtenidos y **no** debe limitarse a describir qué pasa en el gráfico, sino también incluir una justificación (o intuición) del por qué de los resultados.

El TP

Cronograma sugerido

- Viernes 22/08: Formulación del sistema, estructuras para la representación de matriz, EG clásico.
- Viernes 29/08: EG banda, primeros experimentos, algoritmo eliminación sanguijuelas.
- Jueves 04/09: Entrega TP1 a *metnum.lab@gmail.com*

El TP

Aplicación

¿El Monkey Island es la aplicación? ¿En serio? ¿El Monkey Island?

El TP

Aplicación