



DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico III

Algoritmos y Estructuras de Datos III
Primer Cuatrimestre de 2015

Integrante	LU	Correo electrónico
Aldasoro Agustina	86/13	agusaldasoro@gmail.com
Noriega Francisco	660/12	frannoriega.92@gmail.com
Zimenspitz Ezequiel	155/13	ezeqzim@gmail.com
Zuker Brian	441/13	brianzuker@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
<http://www.fcen.uba.ar>

Resumen

El objetivo de este trabajo es plantear soluciones a la problemática de *Conjunto Independiente Dominante Mínimo*, para lo cual se desarrolla un algoritmo exacto que calcula la solución óptima y también heurísticas con el fin de abordar la misma problemática.

El código de este trabajo práctico presenta una función `main` que permite correr cualquiera de los algoritmos desarrollados bajo el mismo `input` e incluso hacerlo veces consecutivas. Cada uno recibe parámetros necesarios para reutilizar el código. Búsqueda Local utiliza Greedy para generar instancias iniciales, GRASP aprovecha a la búsqueda local y una adaptación del greedy. Ver sección 7.

Para compilar se usa `g++ -o main correrCIDM.cpp -std=c++11`

Esta flag se añade con el fin de poder utilizar funciones de medición para los tiempos de ejecución dentro de la experimentación.

Índice

1. Introducción al problema	4
1.1. Conjunto Independiente Dominante Mínimo (CIDM)	4
1.2. Paralelismo con “El señor de los caballos”	4
1.3. Todo conjunto independiente maximal es un conjunto dominante	5
1.4. Situaciones de la vida real	6
2. Algoritmo Exacto	7
2.1. Explicación y mejoras	7
2.2. Complejidad Temporal	8
2.3. Experimentación	9
2.3.1. Mejor caso	9
2.3.2. Nodos fijos	10
2.3.3. Ejes fijos	13
2.3.4. Sin ejes	14
3. Heurística Constructiva Golosa	17
3.1. Explicación	17
3.2. Complejidad Temporal	18
3.3. Comparación de resultados con solución óptima	20
3.4. Experimentación	21
4. Heurística de Búsqueda Local	26
4.1. Explicación	26
4.1.1. Elección de Solución Inicial	26
4.1.2. Elección de Vecindad	26
4.1.3. Métodos elegidos	27
4.2. Complejidad Temporal	28
4.2.1. dameParesVecinosComun	28
4.2.2. dameTernasVecinasComun	30
4.2.3. localCIDM	31
4.3. Experimentación	35
4.3.1. Análisis de tiempos de ejecución	35

Sección ÍNDICE

4.3.2. Contrastación empírica de la complejidad	42
4.3.3. Comparación soluciones Local vs Exacto	44
4.3.4. Elección de versión óptima	48
5. Metaheurística GRASP	53
5.1. Explicación	53
5.2. Experimentación	54
6. Comparación entre todos los métodos	65
6.1. Comparación	65
6.2. Resultados	67
6.2.1. Nodos fijos	67
6.2.2. Ejes Fijos	71
6.2.3. Grafo bipartito completo	75
6.2.4. Ciclo simple	76
7. Anexo	78
7.1. Ejecución de los métodos	78
7.2. Generación de casos de test	78
7.3. Clase ListaAdy	79

1. Introducción al problema

1.1. Conjunto Independiente Dominante Mínimo (CIDM)

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Un conjunto $D \subseteq V$ es un *conjunto dominante* de G si todo vértice de G está en D o bien tiene al menos un vecino que está en D .

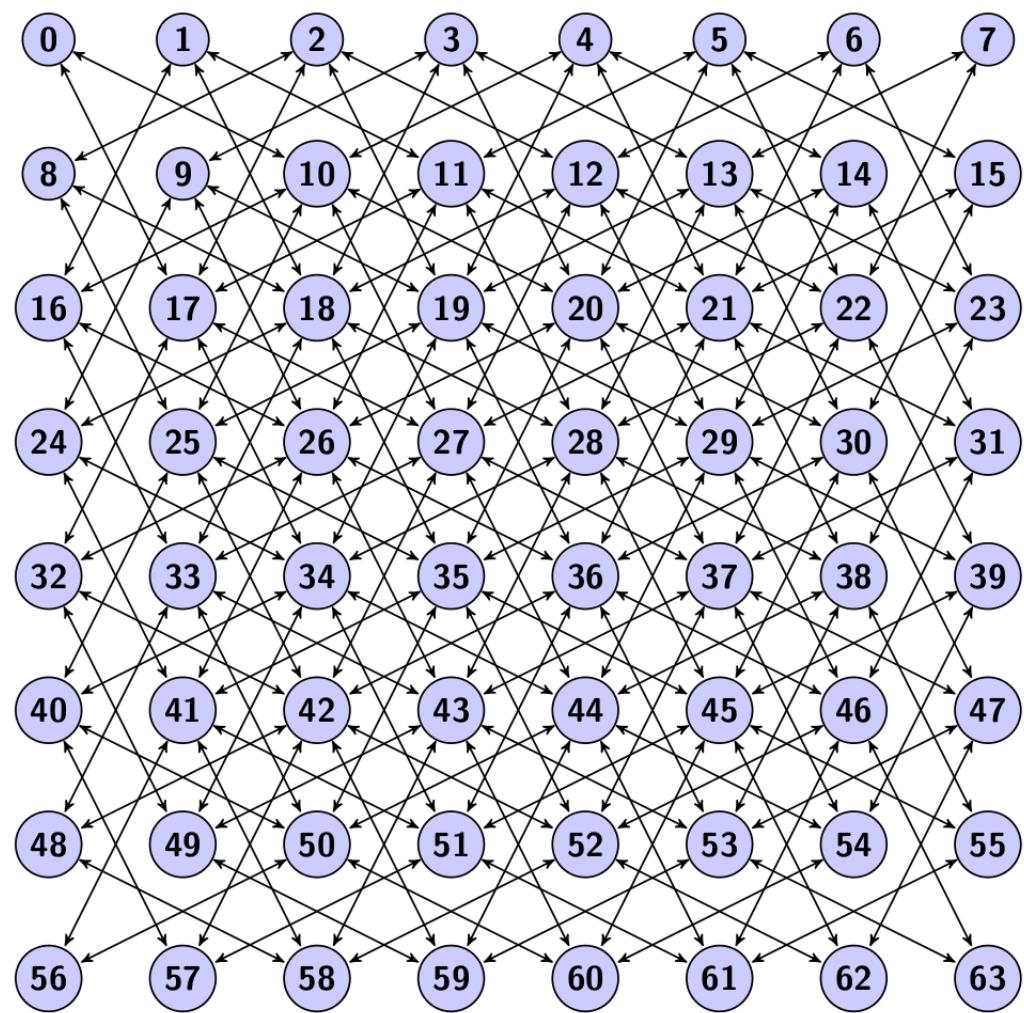
Por otro lado, un conjunto $I \subseteq V$ es un *conjunto independiente* de G si no existe ningún eje de E entre dos vértices de I .

Definimos entonces un *conjunto independiente dominante* de G como un conjunto independiente que a su vez es un conjunto dominante del grafo G .

El problema de Conjunto Independiente Dominante Mínimo (CIDM) consiste en hallar un conjunto independiente dominante de G con mínima cardinalidad.

1.2. Paralelismo con “El señor de los caballos”

El problema “*El señor de los caballos*” es similar al problema de encontrar un *Conjunto Independiente Dominante Mínimo* considerando solamente una familia específica de grafos. Esta es la familia de grafos donde cada nodo modela un casillero de un tablero de ajedrez y sólo existe un eje entre dos nodos v_1 y v_2 si el movimiento desde v_1 a v_2 o viceversa es un movimiento permitido para una pieza de caballo.



La relación con nuestro problema es la siguiente:

- “El señor de los caballos” busca un conjunto dominante, dado que intenta ocupar el tablero, y para ello requiere que o bien cada casillero tenga un caballo, o bien que cada casillero sea amenazado por un caballo.
- “El señor de los caballos” busca un conjunto mínimo, es decir, que utilice la menor cantidad de caballos posibles.
- “El señor de los caballos” NO busca un conjunto independiente, dado que si fuese necesario, un caballo puede ubicarse en un casillero que estuviese siendo amenazado por otro.

1.3. Todo conjunto independiente maximal es un conjunto dominante

Para asegurarnos de que un conjunto es independiente y dominante al mismo tiempo, vamos a demostrar que vale la siguiente propiedad:

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple, un *conjunto independiente* de $I \subseteq V$ se dice *maximal* si no existe otro conjunto independiente $J \subseteq V$ tal que $I \subset J$, es decir que I está incluido estrictamente en J .

Todo conjunto independiente maximal es un *conjunto dominante*.

Demostración

Sean $G = (V, E)$ grafo simple, $I \subseteq V$ *conjunto independiente maximal*.

Quiero ver que I es un *conjunto dominante*:

Lo que es equivalente a probar que $(\forall \text{ nodo } v \in V) ((v \in I) \vee (\exists \text{ nodo } w \in \text{adyacentes}(v), w \in I))$

Supongo por el absurdo que: $(\exists \text{ nodo } v \in V) \text{ tq } ((v \notin I) \wedge (\forall \text{ nodo } w \in \text{adyacentes}(v), w \notin I))$

Considero a $\text{adyacentes}(I)$ como el conjunto que se obtiene de concatenar todos los vecinos de cada elemento de I . Por lo tanto, es equivalente decir $(\forall \text{ nodo } w \in \text{adyacentes}(v), w \notin I)$ y decir $(v \notin \text{adyacentes}(I))$.

$$\Rightarrow v \notin I \wedge v \notin \text{adyacentes}(I)$$

$$\Rightarrow \exists \text{ conjunto independiente } J: J \subseteq V \text{ tq } J = I + \{v\}$$

J es independiente porque I lo era y al agregarle el nodo v se mantiene esta propiedad ya que v no pertenecía a I y además no estaba conectado a ningún nodo del conjunto I .

$$\Rightarrow \exists J \text{ conjunto independiente tq } I \subset J. \text{ Absurdo!} (I \text{ era un conjunto Independiente Maximal})$$

El absurdo provino de suponer que I era un conjunto independiente maximal, pero no dominante. Por lo tanto, I debe ser un conjunto dominante.

1.4. Situaciones de la vida real

Situaciones de la vida real que puedan modelarse utilizando CIDM:

- **Ubicación de estudiantes al momento de rendir un examen:** Encontrar la mejor manera de ubicar a todos los estudiantes en el aula, tal que ninguno esté suficientemente cerca de otro como para copiarse, pero tal que entre la mayor cantidad de estudiantes posibles. Esta situación es lo mismo que modelar el aula como un grafo donde cada asiento es un nodo y cada asiento es adyacente a los asientos que están a sus costados (en todas las direcciones); luego buscar el *CIDM* de dicho grafo.
- **Ubicación de servicios en ciudades:** Para minimizar costos, es probable que si se quiere situar centros de servicios (cualesquiera sean estos: hospitales, estaciones de servicio, distribuidoras, etc), se los situe de manera tal que tengan amplia cobertura, pero sin situar demasiados centros, es decir, situando la mínima cantidad. Tampoco se querría que un centro cubra la misma zona que otro centro. Si se modela a la ciudad, tomando cada zona (arbitraria, como barrios, o manzanas, o conjunto de manzana) como un nodo, en los que cada nodo es adyacente al nodo que representa la zona vecina, entonces el problema de situar estos centros minimizando costos, es igual a encontrar un *CIDM* en el grafo mencionado.

2. Algoritmo Exacto

De acuerdo a lo ya explicado en el inciso 1.2, podemos establecer una analogía con este problema y “El señor de los caballos”. Por lo tanto, la metodología empleada para la implementación del algoritmo exacto también fue la de *Backtracking*.

De este modo, nos vemos obligados a recorrer inteligentemente todos los conjuntos dentro del conjunto de partes del total de nodos V . Mediante el backtracking podemos realizar podas y estrategias para saltar algunas ramas de decisión donde se predice que no se va a poder encontrar la solución óptima allí.

2.1. Explicación y mejoras

Nuestro algoritmo recorre ordenadamente el conjunto de partes de V y por cada uno de ellos verifica que cumpla la función `esIndependienteMaximal()`. La misma devuelve 0 si es falso, la cantidad de nodos en el conjunto en caso contrario.

Es decir, se itera sobre los nodos y , considerando el nodo actual como presente o como ausente, termina encontrando el mínimo conjunto independiente maximal.

En una variable se acumula la solución óptima hasta el momento, la cual se actualiza cuando se encuentra un nuevo conjunto independiente maximal que tiene un cardinal menor al óptimo actual. En ella va a quedar la solución buscada luego de correr el algoritmo.

La poda que implementamos consistió en verificar que una futura solución posible no cuente con una cantidad igual o superior de nodos que la solución óptima obtenida hasta el momento. Esto quiere decir que si la óptima actual consiste de k nodos y nos encontramos ante la pregunta de agregar un nuevo nodo a una posible solución de $k - 1$ nodos, ésta será a lo sumo tan buena como la que ya teníamos, por lo que no nos resulta útil contemplarla. De esta forma, se descartan rápidamente todas las soluciones peores o iguales que la actual.

Otra poda posible consistía en separar cada una de las componentes conexas del grafo y , para cada una de ellas, buscar el mínimo conjunto independiente maximal. Luego, uniendo todos estos resultados, se obtiene el conjunto deseado del grafo.

Una estrategia podría ser verificar si agregar el nodo actual me va a resultar útil. Es decir, por ejemplo, si estoy agregando un vecino de un nodo que ya se encuentra en el conjunto, este no será útil ya que la solución no sería maximal. De esta forma, podríamos evitar revisar aquellos conjuntos.

Estas dos optimizaciones no se implementaron porque requerían un manejo distinto de estructuras lo cual consideramos sería innecesario ya que empeorarían los tiempos de ejecución.

```
unsigned int calcularCIDM(Matriz& adyacencia, unsigned int i, vector<unsigned int>& conjNodos,
vector<unsigned int>& optimo){

    if (conjNodos.esIndependienteMaximal()) then
        | optimo ← conjNodos;
        | return optimo.size();
    end
    if (i.estaEnRango()) then
        | if (conjNodos es más grande que el optimo actual) then
            | | return 0;
        end
        siNoAgrego ← calcularCIDM(adyacencia, i+1, conjNodos, optimo);
        agrego el nodo i a conjNodos;
        siAgrego ← calcularCIDM(adyacencia, i+1, conjNodos, optimo);
        elimino el nodo i de conjNodos;
        return el mejor entre siNoAgrego y siAgrego;
    end
    return 0;
```

Algorithm 1: algoritmo exacto

2.2. Complejidad Temporal

Al ser un algoritmo de *Backtracking* o fuerza bruta, tiene una complejidad exponencial. En este caso, la misma es de $O(2^n)$, siendo n la cantidad de nodos del grafo.

Se llega a dicha complejidad dado que para cada nodo, tenemos que preguntarnos qué ocurre tanto si lo agregamos al conjunto, como si no.

Dicho de otra forma, vamos a recorrer todos los conjuntos dentro del conjunto de partes del total de nodos de V . El cardinal de dicho conjunto de partes es 2^n .

Para cada uno de los subconjuntos, el algoritmo verifica si cumple la función `esIndependienteMaximal()`, la cual tiene una complejidad en peor caso de $O(n^2)$. De esta forma, nuestro algoritmo tiene complejidad $O(2^n * n^2)$, lo que es equivalente a $O(2^n)$.

Al tener en cuenta la poda utilizada, se puede ver que la misma no disminuye la complejidad teórica planteada dado que en el peor caso, podría haber que recorrer completamente el conjunto de partes. De todas formas, dicha poda mejora notablemente los tiempos de ejecución del algoritmo, como veremos más adelante, ya que descarta las soluciones peores que la óptima hasta el momento.

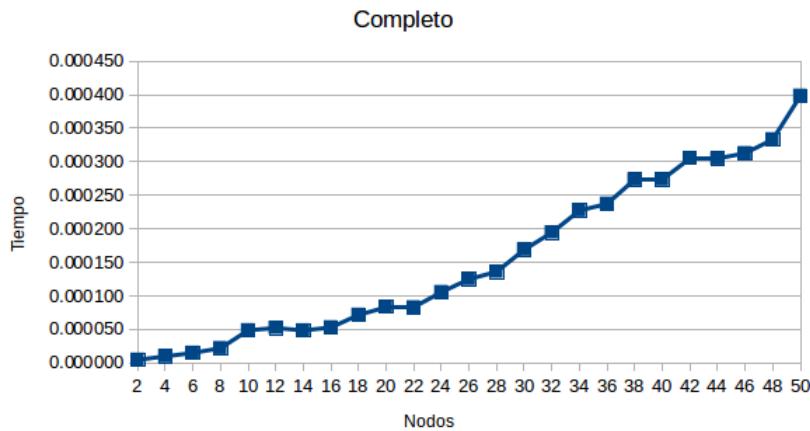
2.3. Experimentación

Para realizar la experimentación, se generaron grafos específicos, que nos permitieron ver el funcionamiento de nuestro algoritmo. Las conexiones entre los nodos de cada grafo son aleatorias, pero respetando la cantidad de ejes que nosotros definamos previamente.

Las instancias con tiempos de ejecución bajos fueron corridas 100 veces, obteniendo luego un promedio de todas, con el fin de eliminar outliers. Aquellas instancias que tardaban mucho más tiempo, determinamos que los outliers no modificaban en forma considerable, por lo que no nos pareció necesario realizarlas reiteradas veces.

2.3.1. Mejor caso

De acuerdo a cómo fue planteado nuestro algoritmo, se puede ver que el mejor caso posible será cuando los grafos pasados por parámetro sean completos. Esto es así debido a la poda implementada: cuando considera al primer nodo, encuentra una posible solución y luego descarta rápidamente todas las demás, ya que una solución con un solo nodo será necesariamente una solución óptima.



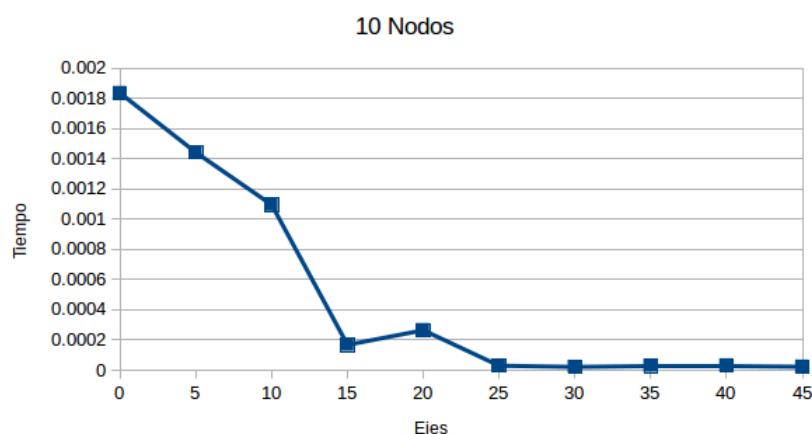
Se puede ver que el gráfico no tiene una tendencia exponencial, lo que era esperable ya que encontrará la solución en el primer nodo, pero luego deberá descartar los siguientes n nodos, teniendo una complejidad en peor caso de $O(n^2)$.

2.3.2. Nodos fijos

Para continuar viendo el comportamiento del algoritmo, decidimos realizar experimentos fijando la cantidad de nodos y variando la cantidad de ejes.

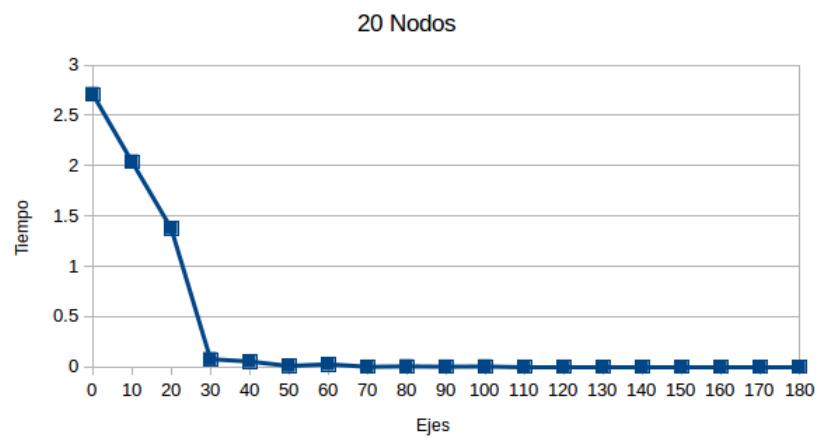
Los tiempos de ejecución para nodos fijos en 10 fueron los siguientes:

Ejes	Tiempo
0	0.00183446
5	0.00144151
10	0.00109473
15	0.00016757
20	0.00026461
25	0.00002951
30	0.00002110
35	0.00002912
40	0.00003069
45	0.00002226



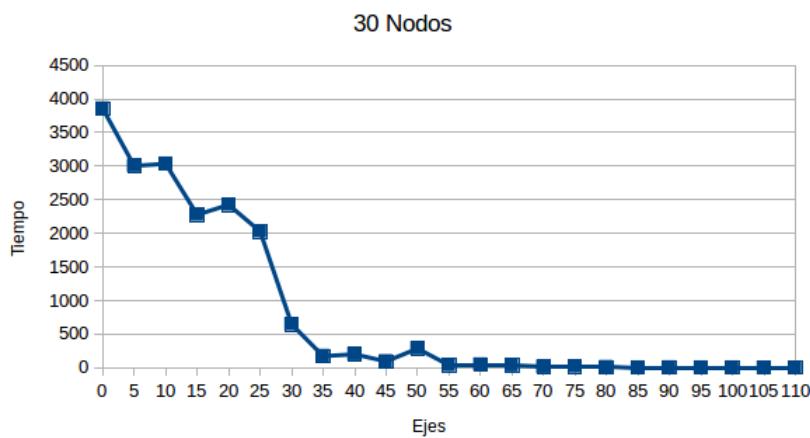
Tiempos para 20 nodos:

Ejes	Tiempo
0	2.711875
10	2.0401455
20	1.3764805
30	0.076818295
40	0.05422746
50	0.009414217
60	0.025866655
70	0.0009003714
80	0.0049536455
90	0.0019486415
100	0.0037668155
110	0.000811313
120	0.001422941
130	0.0001214862
140	0.0001463258
150	9.03317E-005
160	0.0001304291
170	0.0001313739
180	0.000095395



Para 30 nodos:

Ejes	Tiempo
0	3854.93
5	3004.21
10	3035.02
15	2276.72
20	2423.98
25	2026.34
30	645.834
35	173.097
40	199.783
45	93.6673
50	285.263
55	37.6866
60	46.629645
65	33.144255
70	11.19414
75	15.869275
80	7.440072
85	1.420106
90	3.3511875
95	1.2927065
100	1.0168595
105	0.15861015
110	0.4207426

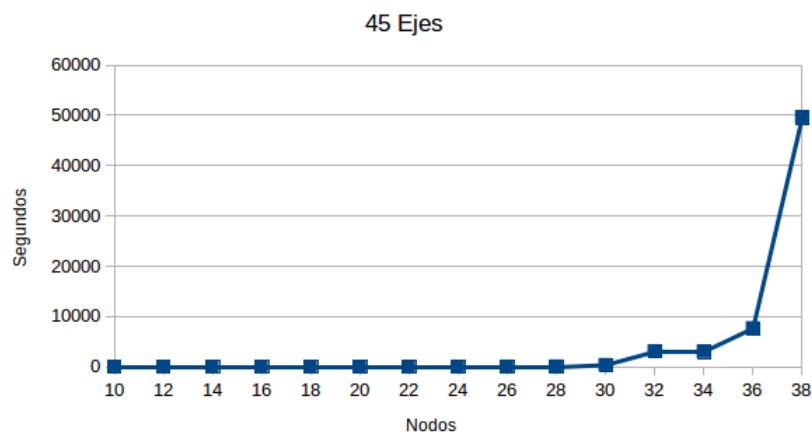


Como podemos ver, en todos los casos ocurre algo similar: cuando no tienen ejes la ejecución es más lenta, ya que debe recorrer todas las posibles opciones del conjunto de partes, sin lograr descartar ninguna. A medida que se van agregando ejes, los tiempos van decreciendo ya que gracias a la poda implementada, no es necesario recorrer todas las posibles soluciones.

2.3.3. Ejes fijos

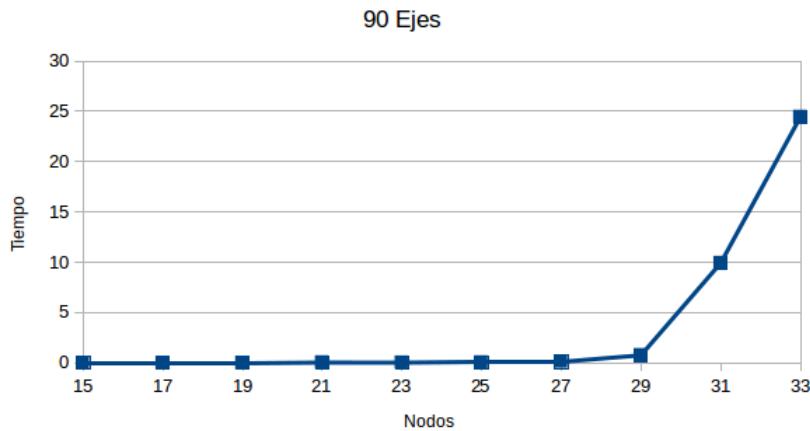
En esta sección podremos ver el comportamiento exponencial del ejercicio, ya que se mantuvo fija la cantidad de ejes, pero fue aumentando la cantidad de nodos. Los resultados de los tiempos de ejecución, con 45 ejes fijos fueron:

Nodos	Tiempo
10	6.974115E-005
12	0.0001912309
14	0.0001047463
16	0.010293569
18	0.013017305
20	0.023726705
22	0.13164895
24	0.4864227
26	20.211575
28	44.99018
30	344.1135
32	3090.602
34	2977.318
36	7641.97
38	49532.4333333333



Para 90 ejes:

Nodos	Tiempo
15	6.50116E-005
17	0.0004393166
19	0.0006342648
21	0.033956355
23	0.02623205
25	0.042124215
27	0.11144235
29	0.75794095
31	9.9156506667
33	24.44762

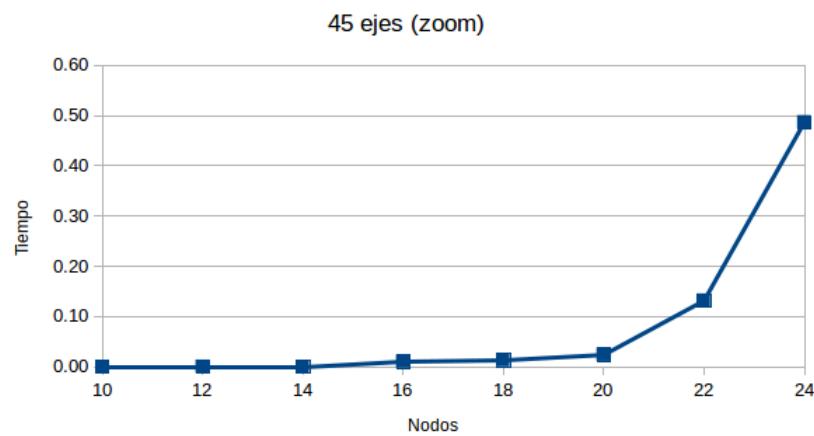


Como preveíamos, se puede ver que los valores van aumentando exponencialmente en ambos casos, lo cual nos indica que la complejidad temporal depende directamente de la cantidad de nodos que tenga el grafo. De todas formas, en algunos casos es posible ver el efecto que tiene la poda, ya que el tiempo de ejecución no aumentó exponencialmente, por ejemplo, entre los casos con 32 y 34 nodos, con 45 ejes fijos. Veremos luego que esto no ocurre en el peor caso.

Para mostrar más claramente el aspecto exponencial de la función en los casos más chicos, haremos zoom en el gráfico:

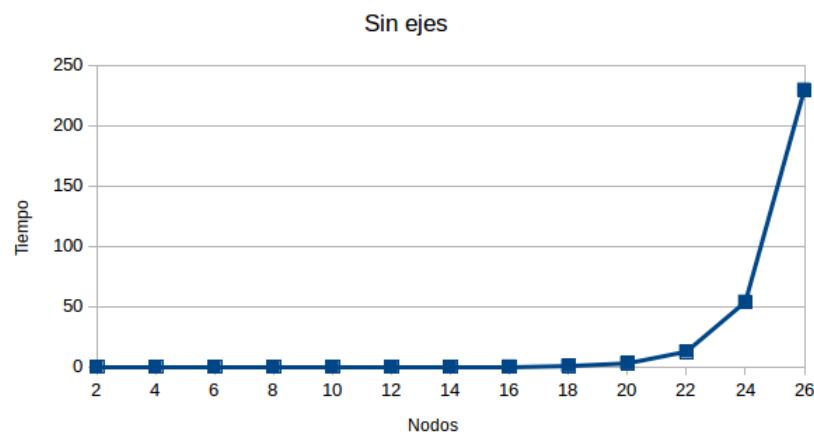
2.3.4. Sin ejes

El peor caso para nuestro algoritmo se da cuando el grafo pasado por parámetro no cuenta con ningún eje. Esto es así porque deberá revisar todos los posibles conjuntos dentro del conjunto de partes, intentando encontrar uno mejor que el que utiliza todos los nodos. Claramente esto no es posible, ya que al no contar con ejes, aquella es la única solución posible.

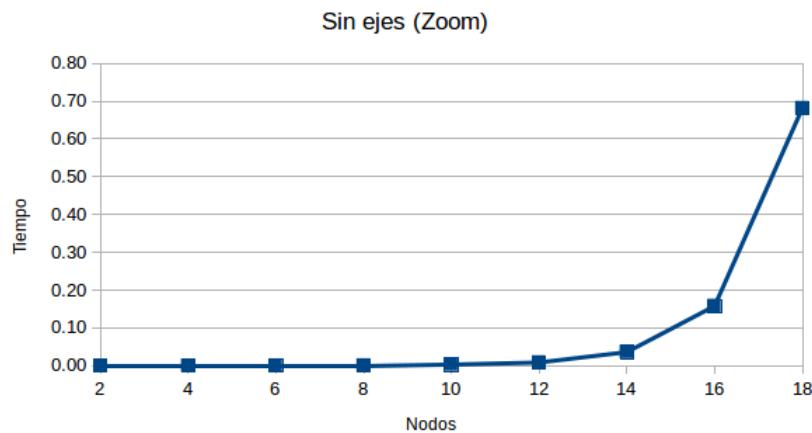


Los tiempos de ejecución para los distintos grafos sin ejes fueron:

Nodos	Tiempo
2	5.4496E-006
4	3.91842E-005
6	0.0002040706
8	0.0006613658
10	0.002856698
12	0.00857044
14	0.03590956
16	0.1578688
18	0.681332
20	2.930954
22	12.58866
24	53.82
26	229.522



Para ver más claramente el aspecto del gráfico para los casos más chicos, haremos zoom en el gráfico:



Aquí se ve claramente que los tiempos aumentan exponencialmente en cada paso, lo que confirma nuestra complejidad temporal teórica de $O(2^n)$.

3. Heurística Constructiva Golosa

3.1. Explicación

La heurística constructiva golosa busca, dado un grafo, determinar un Conjunto Independiente Dominante Mínimo, eligiendo en cada iteración, la mejor opción según el criterio definido

Nuestro criterio se basa en el grado de los nodos. Dado que el grafo nunca se modifica, podemos ordenar un conjunto con todos los nodos del grafo en función de su grado al comienzo del algoritmo.

Luego, haremos un ciclo iterando este conjunto, el primer nodo siempre será agregado al conjunto solución, y luego se procede a eliminarlo junto a sus vecinos.

Esto se traduce en elegir en cada paso el nodo de mayor grado que aún no haya sido dominado por otro con grado superior.

De esta manera, el algoritmo siempre obtiene un conjunto independiente (dado que por cada nodo que toma, elimina a sus vecinos) y dominante (dado que por cada nodo que toma, lo agrega al conjunto, y elimina a sus vecinos, es decir, que estos son adyacentes a un nodo del conjunto), pero no puede asegurar que siempre sea mínimo. Eso dependerá del grafo.

```
vector<nodoGrado>grados(adyacencia.cantNodos());
for int i = 0; i<grados.size(); ++i
do
    grados[i].nodo = i;
    grados[i].grado = adyacencia.gradoDeNodo(i);
end
sort(grados.begin(), grados.end());
while grados.size()>0 do
    unsigned int nodo = grados[0].nodo;
    optimo.push_back(nodo);
    vector<nodoGrado>::iterator iter = grados.begin();
    while iter != grados.end() do
        if adyacencia.sonVecinos(nodo, iter->nodo) or nodo == iter->nodo then
            | iter = grados.erase(iter);
        else
            | iter++;
        end
    end
end
```

Algorithm 2: heurística greedy

3.2. Complejidad Temporal

En lo que respecta a la complejidad temporal, demostraremos a continuación que la misma es $O(n^2)$, con n la cantidad de nodos del grafo.

Recordemos que el algoritmo ordena los nodos de mayor grado a menor grado, luego toma el primero de dicha lista, lo agrega al conjunto solución, y lo elimina de la lista junto a sus adyacentes. Luego repite el proceso, tomando el siguiente nodo de la lista de nodos restantes.

Dicho esto, definiremos a $f(i, n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como:

$$f(i, n) = \text{Cantidad de operaciones en el peor caso, teniendo } n \text{ nodos totales y faltando eliminar } i.$$

Es decir,

- $f(0, n) = c$, dado que no falta eliminar ningun nodo, el algoritmo termina, con c alguna cantidad constante de operaciones.
- $(\forall i \in 1 \dots n - 1) f(i, n) = h * (i - 1) + f(i - 1, n) + c$, con h la cantidad de vecinos del nodo que estoy viendo, c alguna cantidad constante de operaciones, y $f(i - 1, n)$ es el llamado recursivo.

Expliquemos que significa cada monomio:

- $h * (i - 1)$: En el peor de los casos, recorre por cada nodo de la lista de adyacencia del nodo tomado, a los demás nodos sin marcar (sin incluir el nodo tomado).
- $f(i - 1, n)$: En el peor de los casos, no hay nodos de la lista de adyacencia, que no hayan sido eliminados aún.
- c : Alguna cantidad constante de operaciones.

Entonces, querremos demostrar que $(\forall i \in 1 \dots n - 1) f(i, n) \leq k * i * n + c$ (con k y c alguna constante), pues al momento de ejecutar el algoritmo, se tienen n nodos, y faltan eliminar n nodos, siendo la complejidad del mismo, $O(f(n, n)) = O(n^2)$; y dado que la cantidad de nodos por borrar no puede ser mayor que la cantidad total de nodos, es correcto pedir que $0 \leq i < n$.

Teorema

Dado $f(i, n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$f(i, n)$ = Cantidad de operaciones en el peor caso, teniendo n nodos totales y faltando eliminar i .

$$f(0, n) = c$$

$$f(i, n) = h * (i - 1) + f(i - 1, n) + c$$

Luego, $(\forall i \in 1 \dots n - 1) f(i, n) \leq k * i * n + c$.

Demostración

Sea $P(i) = f(i, n) \leq k * i * n + c$, demostraremos por inducción global, que $(\forall i \in 1 \dots n - 1) P(i)$

Entonces,

Casos base:

- $f(0, n) = c$
- $f(1, n) = h * (1 - 1) + c = c \leq k * 1 * n + c$
Dado que tengo n nodos, y solo falta eliminar uno. k es alguna cantidad constante de operaciones para eliminar el nodo y finalizar el algoritmo.

Paso inductivo:

$$\underbrace{P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(m-1)}_{\text{Hipótesis inductiva}} \Rightarrow \underbrace{P(m)}_{\text{Tesis inductiva}}$$

Es decir, que por hipótesis inductiva, podemos suponer que vale $f(r, n) \leq k * r * n + c$, con $r \leq m - 1$, y queremos ver que $f(m, n) \leq k * m * n + c$.

Luego,

$$\begin{aligned} f(m, n) &= h * (m - 1) + f(m - 1, n) + c \\ &\stackrel{HI}{\Rightarrow} f(m, n) \leq h * (m - 1) + n * (m - 1) + c \end{aligned}$$

Dado que la cantidad de vecinos adyacentes esta acotada por la cantidad de nodos totales, $0 \leq h < n$, luego

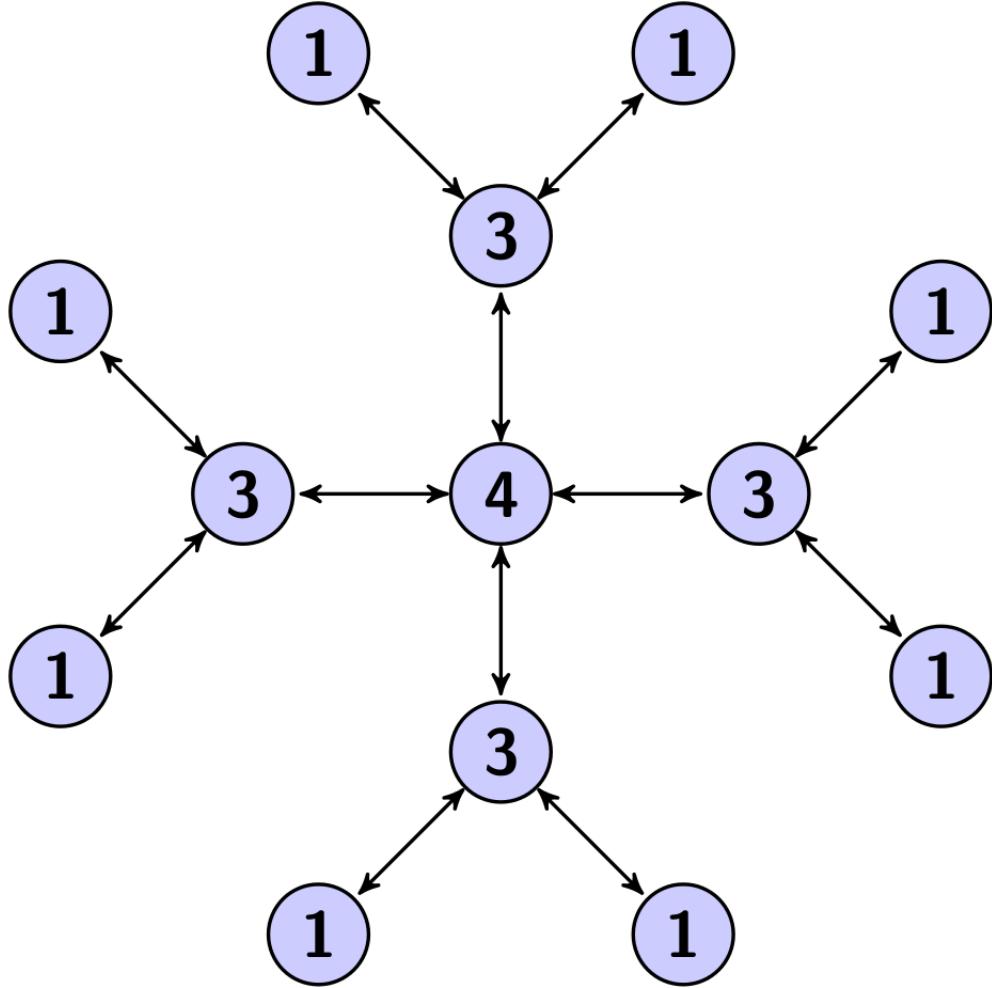
$$\begin{aligned} &\leq n * (m - 1) + n * (m - 1) + c \\ &\leq n * m + n * m + c \\ &= 2 * n * m + c \\ &\leq \underbrace{k * n * m + c}_{\text{Tesis inductiva}} \quad \text{En particular, con } k = 2 \text{ en este caso} \end{aligned}$$

■

Entonces, $f(i, n) \leq c * i * n + k$, para algún c y k constantes. Dado que el algoritmo ejecuta, en peor caso, $f(n, n)$ operaciones, su complejidad esta acotada por $f(n, n)$, por lo tanto, tiene complejidad $O(n^2)$.

3.3. Comparación de resultados con solución óptima

La heurística constructiva golosa fallará en encontrar siempre la solución óptima. Particularmente, existen grafos para los cuales la heurística fallará siempre.



En este ejemplo, el greedy tomará como primer nodo, al nodo del centro, y eliminará a todos sus adyacentes. Luego, tomará todas las componentes conexas restantes. El resultado final será una solución con $(m - 2) * m$ versus m de la solución óptima, con m igual al grado del nodo central.

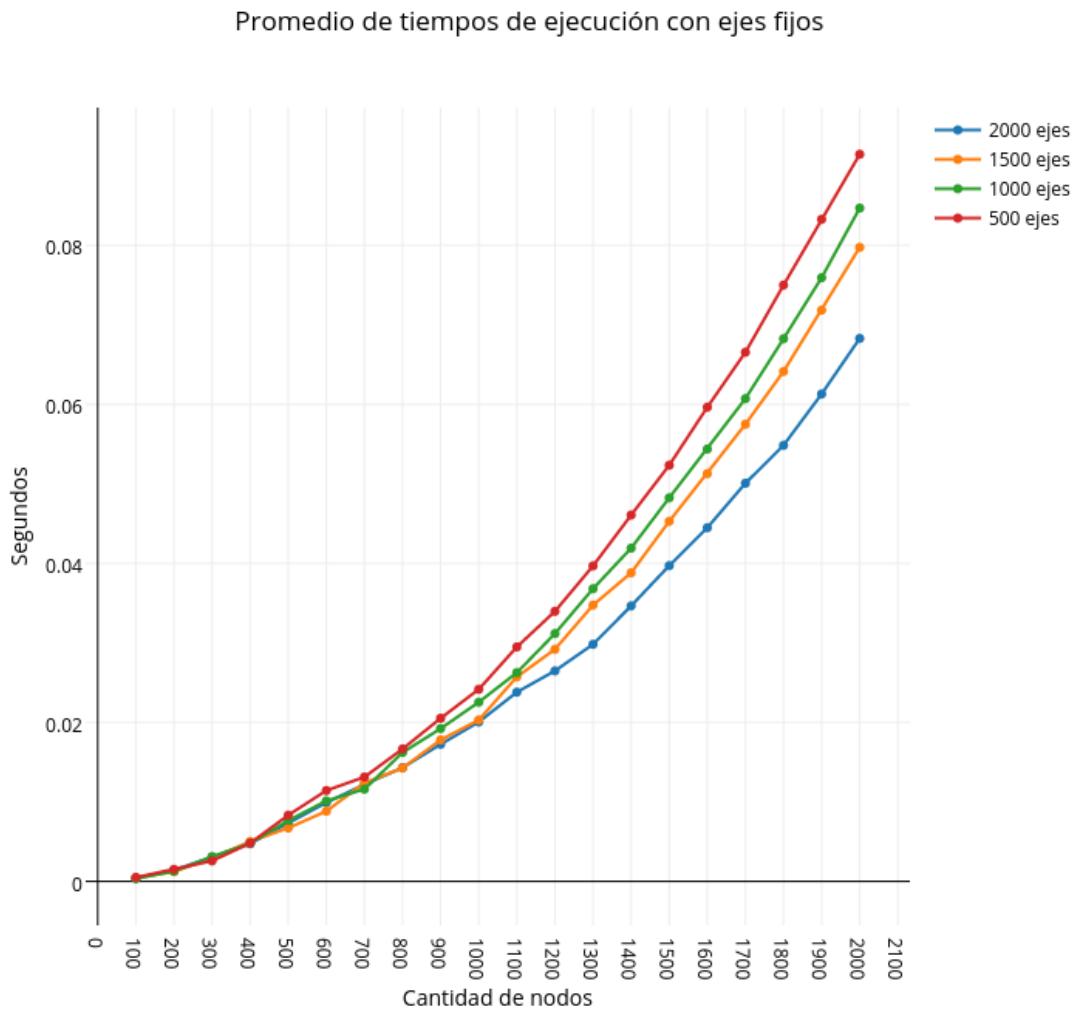
Otro caso donde fallará, en la mayoría de los casos, es en los ciclos simples. Dado que estos son *2 – regulares*, el orden en el que el greedy tomará los nodos, no puede ser determinado antes de su ejecución. Sólo tendrá éxito en encontrar la solución óptima, si ordena los nodos de manera tal que $\forall v_i \in V$, el arreglo a recorrer sea $[v_1, \dots, v_n]$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Alternativamente, el greedy siempre encontrará la solución óptima para los grafos completos y los grafos *0 – regulares* (pues la misma es trivial); pero más interesante aún, siempre encontrará la solución óptima para los grafos bipartitos completos (en los que la misma, es la partición más pequeña del bipartito).

3.4. Experimentación

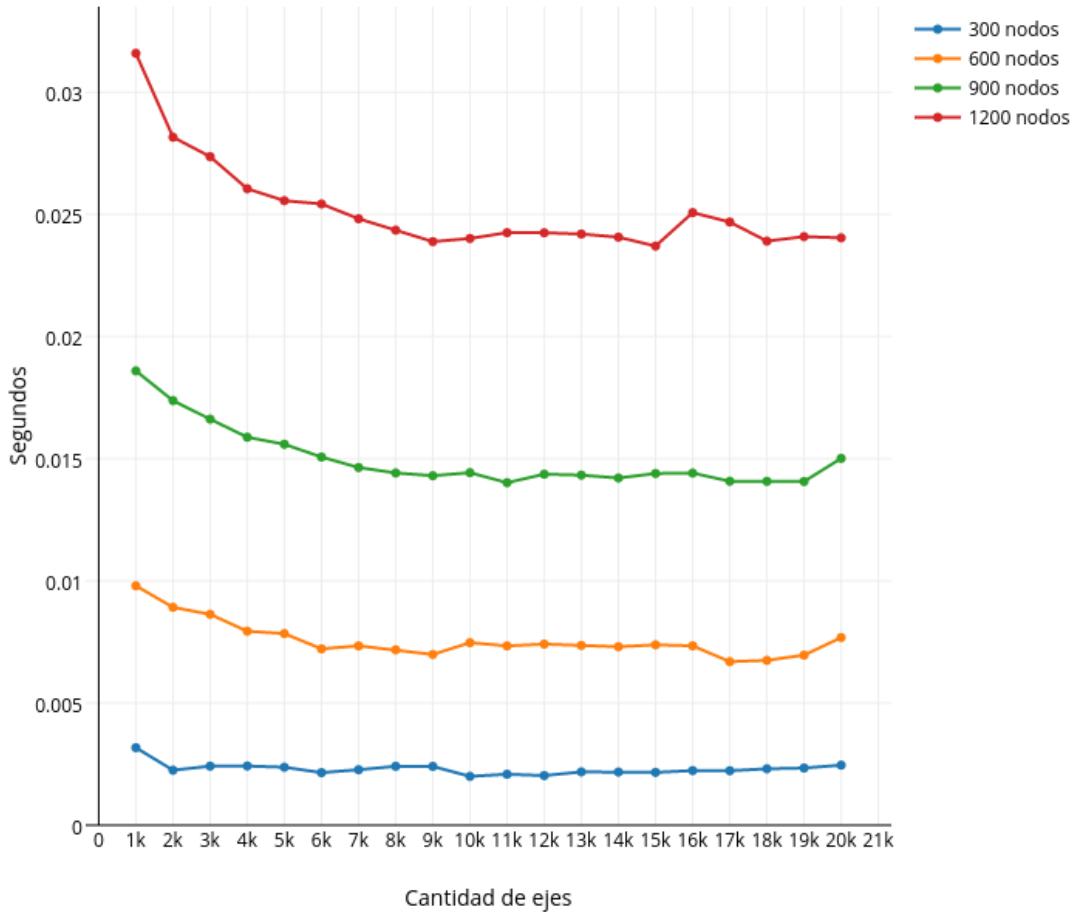
Para la experimentación, se realizaron experimentos sobre grafos generados de manera aleatoria, fijando nodos y variando ejes, y viceversa.

A continuación se adjuntan los gráficos con los resultados:



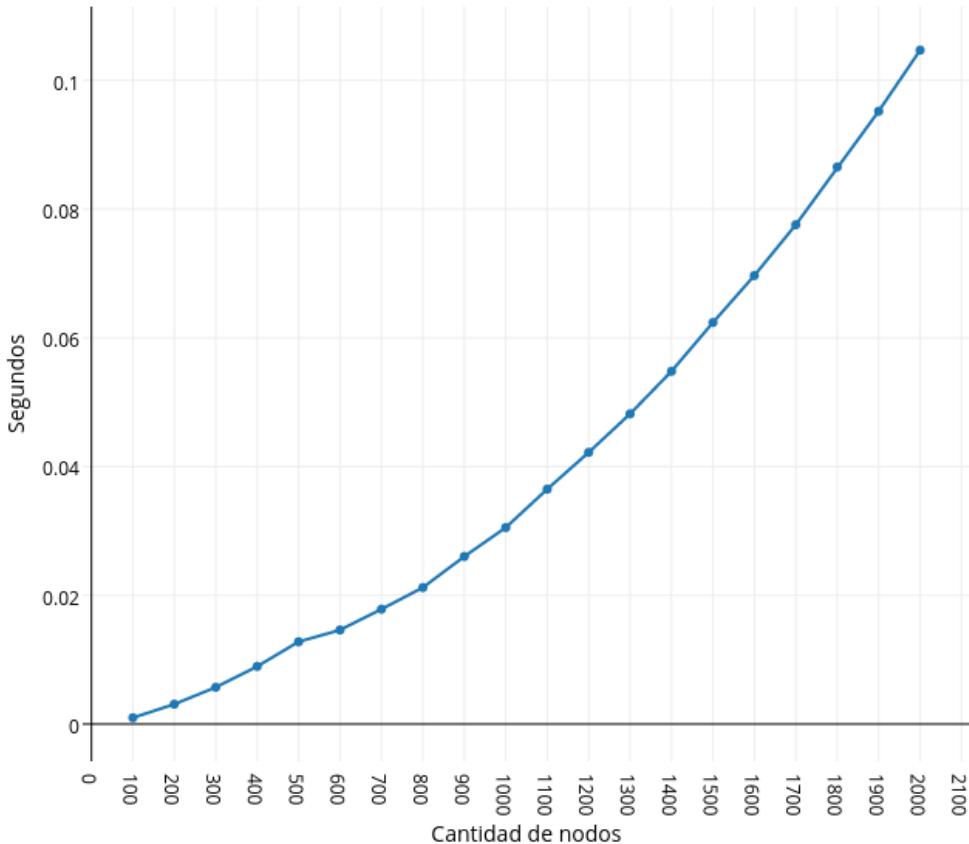
Como se puede observar, los tiempos aumentan a medida que disminuyen la cantidad de ejes. Esto se debe a que a menor cantidad de ejes, menor cantidad de nodos se eliminan de la lista de nodos que itera el algoritmo.

Promedio de tiempos de ejecución con nodos fijos



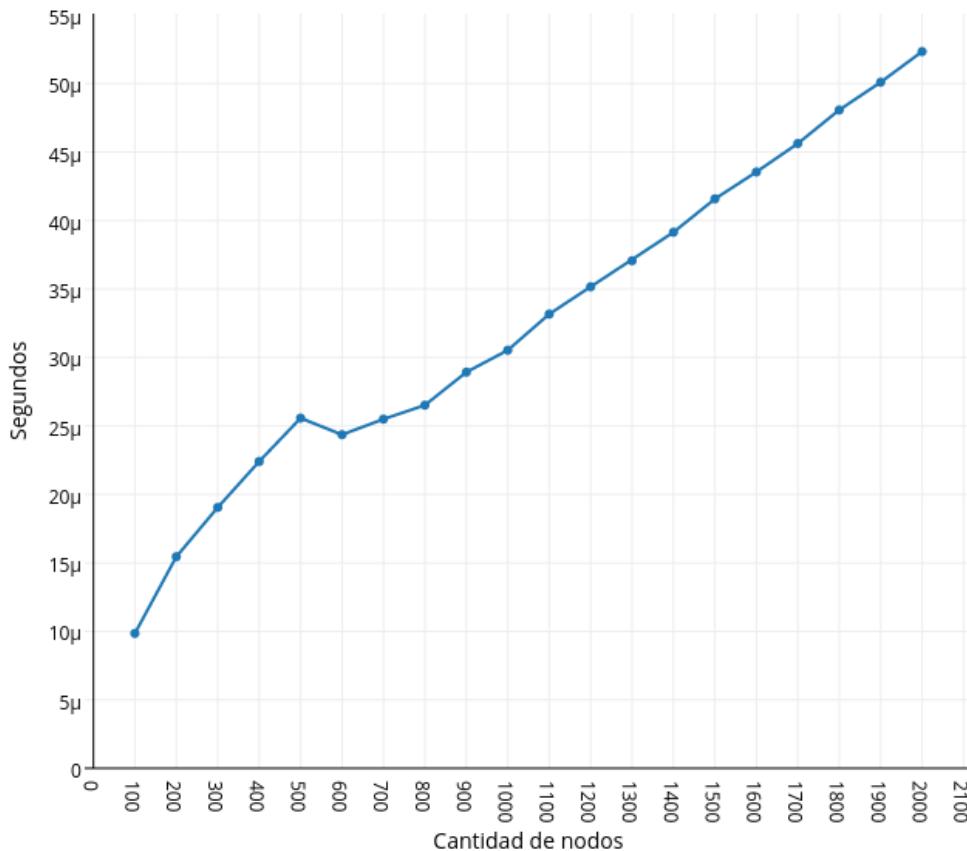
En este gráfico, se puede ver que si bien la cantidad de ejes (como fue mencionado en el gráfico anterior) afecta los tiempos, a mayor cantidad de ejes se puede observar que el verdadero limitante es la cantidad de nodos. Aquí se aprecia que la complejidad teórica se corresponde, en cuanto a que depende de la cantidad de nodos, y no de la cantidad de ejes.

Representación gráfica de la complejidad algorítmica



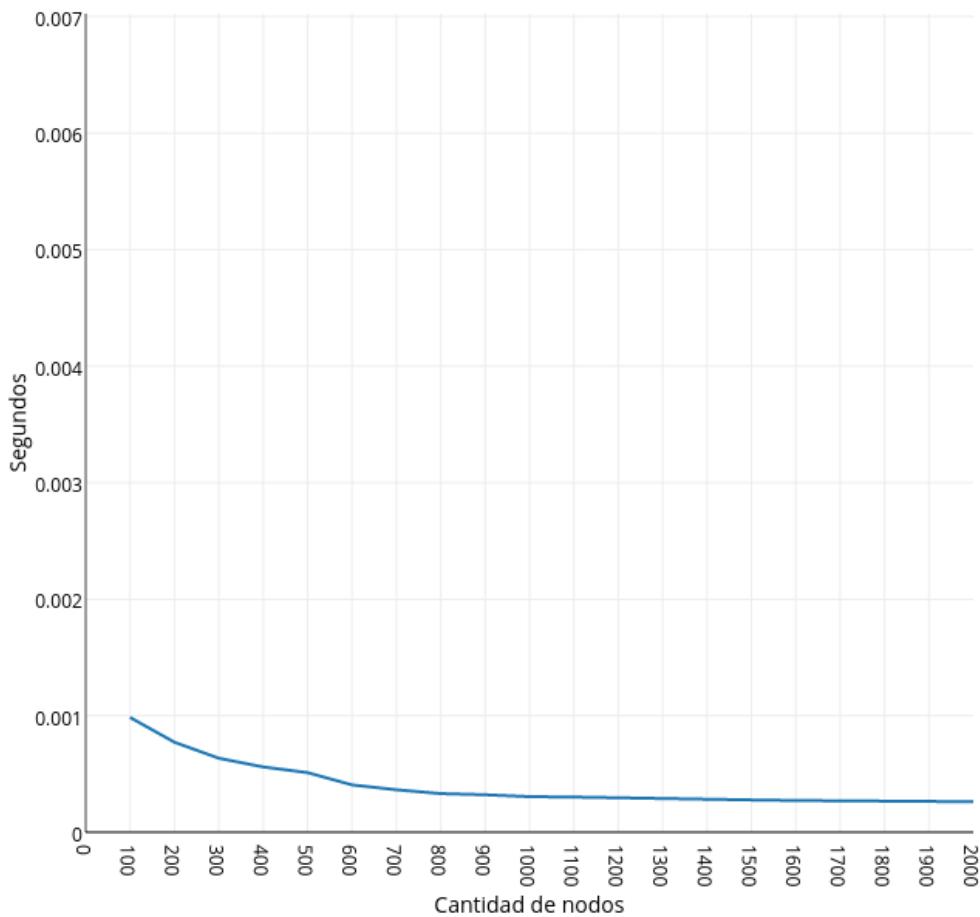
Resultó interesante graficar, a su vez, algún caso en el que se refleje la complejidad algorítmica. Para ello, se tomo el grafo sin ejes, es decir, todas componentes conexas, puesto que el algoritmo deberá recorrer, por cada nodo, el resto de todos los nodos preguntando si son vecinos. Aquí se puede apreciar que efectivamente, los tiempos incrementan de manera cuadrática.

Representación gráfica de la complejidad algorítmica



Para asegurarnos de que efectivamente la función corresponde a la familia de funciones cuadráticas y no a otra, se procedió a dividir los resultados por el tamaño de la entrada. Se puede apreciar que el gráfico se aproxima a una función lineal.

Representación gráfica de la complejidad algorítmica



Finalmente, se procedió a dividir los resultados (ya divididos) por el tamaño de la entrada nuevamente. Efectivamente, el resultado tiende a una constante, lo que termina demostrando de manera empírica, la complejidad teórica explicada.

4. Heurística de Búsqueda Local

Un algoritmo de Búsqueda Local consiste de dos pasos: elegir una solución inicial y luego, visitar soluciones parecidas hasta encontrar la mejor posible.

Para cada solución factible $s \in S$ se define $N(s)$ como el conjunto de “soluciones vecinas” de s . Un procedimiento de búsqueda local toma una solución inicial s e iterativamente la mejora reemplazándola por otra solución mejor del conjunto $N(s)$, hasta llegar a un óptimo local.

Sea $s \in S$ una solución inicial

Mientras exista $s' \in N(s)$ con $f(s) > f(s')$

$s \leftarrow s'$

Donde $f : s \rightarrow \mathbb{N}$ es una función que mapea soluciones factibles del problema a Naturales. Nuestra función devuelve el cardinal de s .

Nuestro objetivo es minimizar f , por lo tanto nuestras vecindades planteadas son de la forma, $f(s) - 1 == f(s')$ o bien $f(s) - 2 == f(s')$, es decir que cada conjunto de $N(s)$ tiene cardinal $s - 1$ o bien $s - 2$. Al avanzar a un conjunto vecino, sólo se puede decrementar en uno o en dos (depende la vecindad elegida) la cantidad de nodos.

4.1. Explicación

Considerando el problema a tratar, establecimos nuestros criterios para encontrar las soluciones iniciales y las vecindades.

4.1.1. Elección de Solución Inicial

Al momento de seleccionar la solución Inicial, determinamos dos criterios.

Criterio I Solución Inicial: Secuencial

Los nodos al ser ingresados como parámetro del algoritmo tienen de identificador un número entre 0 y $n - 1$. El orden que vamos a utilizar para recorrerlos es el que haya sido dado cuando fueron ingresados como parámetro.

Lo primero que realizamos es tomar al nodo 0 y considerarlo parte de la solución. Se descartan todos los nodos vecinos a él y se continúa el proceso con el nodo que tenga menor número de *id* entre los nodos no dominados o parte del conjunto solución.

De este modo se forma un conjunto solución tal que en cada paso añade al nodo disponible que tenga su identificador número menor.

Criterio II Solución Inicial: Golosa

Se realiza una ejecución del algoritmo Goloso de la Sección 3.

Esto quiere decir, se ordenan los nodos por grado de manera decreciente. Se eligen los nodos de a uno (de mayor a menor), de modo que al elegir un nodo se descartan sus vecinos para sus futuras elecciones.

4.1.2. Elección de Vecindad

Dada una solución al problema, se establece un conjunto de soluciones “similares” denominadas *vecinas*. Los criterios para elegir esta vecindad pueden variar.

Criterio I Vecindad

El primer criterio elegido es, a partir de una solución, quitarle dos nodos y agregarle uno que no haya sido contenido.

Para ello, se prueban todas las combinaciones de pares de nodos dentro del conjunto posibles y se considera a los nodos que tienen ambas como vecinos. Si al sacar este par y agregar el nuevo nodo, se obtiene un conjunto Independiente Dominante Mínimo, se actualiza el conjunto solución.

Criterio II Vecindad

El segundo criterio es similar al anterior, sólo que ahora consideramos quitar tres nodos y agregar uno.

Se consideran todas las combinaciones posibles de grupos de tres nodos dentro del conjunto solución inicial y se prueba con los nodos que sean vecinos de todos ellos si forman un conjunto solución.

4.1.3. Métodos elegidos

Implementamos cuatro métodos:

- **Método 2:** Ejecutando este método se utiliza el *criterio de solución inicial Secuencial (I)* y el *criterio de vecindad* que quita dos nodos y agrega uno (I).
- **Método 3:** Ejecutando este método se utiliza el *criterio de solución inicial Golosa (II)* y el *criterio de vecindad* que quita dos nodos y agrega uno (I).
- **Método 4:** Ejecutando este método se utiliza el *criterio de solución inicial Secuencial (I)* y el *criterio de vecindad* que quita tres nodos y agrega uno (II).
- **Método 5:** Ejecutando este método se utiliza el *criterio de solución inicial Golosa (II)* y el *criterio de vecindad* que quita tres nodos y agrega uno (II).

4.2. Complejidad Temporal

Este algoritmo llama, según la vecindad a ejecutar, a una de las siguiente dos funciones, que dominan la complejidad del ciclo.

4.2.1. dameParesVecinosComun

Dado un conjunto de nodos, se buscan todas las combinaciones de pares de nodos posibles. Luego, para cada par de nodos (i,j) se recorren: la lista de adyacencia de i y la de j. Por cada elemento que pertenezca a las dos listas, se añade al vector par dentro de la estructura vecinosEnComun.

```
struct vecinosEnComun{
    unsigned int nodoA;
    unsigned int nodoB;
    vector<unsigned int> vecinosComun;
};
```

```
for int i = 0; i < optimo.size(); ++i do
    for int j = i+1; j < optimo.size(); ++j do
        list<unsigned int>* vecinosA = adyacencia.dameVecinos(optimo[i]);
        list<unsigned int>* vecinosB = adyacencia.dameVecinos(optimo[j]);
        vecinosEnComun par;
        par.nodoA = optimo[i];
        par.nodoB = optimo[j];
        list<unsigned int>::iterator itVecinosA = vecinosA->begin(), itVecinosB =
        vecinosB->begin();
        while itVecinosA != vecinosA->end() and itVecinosB != vecinosB->end() do
            if *itVecinosA == *itVecinosB then
                par.vecinosComun.push_back(*itVecinosA);
                itVecinosA++;
                itVecinosB++;
            else
                if *itVecinosA > *itVecinosB then
                    itVecinosB++;
                else
                    itVecinosA++;
                end
            end
        end
        if par.vecinosComun.size() > 0 then
            | pares.push_back(par);
        end
    end
end
```

Funciones usadas:

listaAd::dameVecinos¹

push_back()²

size()³

¹Complejidad constante. Ver sección 7.3

²<http://www.cplusplus.com/reference/vector/vector/push.back/>

³<http://www.cplusplus.com/reference/vector/vector/size/>

Para elegir todos los pares posibles de nodos en el conjunto óptimo, se recorre mediante dos *fors*. El primero itera *i* desde 0 hasta el último elemento y el segundo desde *i* hasta el último elemento.

De este modo, cada par de nodos se recorre una única vez. Ya que es lo mismo el par (*i,j*) que (*j,i*).

Dentro de los *fors* anidados, se crea una estructura `vecinosEnComun` **par** donde el nodoA es *i* y el nodoB es *j*.

Para poder armar la lista `vecinosComun` (miembro de la estructura `vecinosEnComun`), se iteran las listas de adyacencia con `itVecinosA` (*i*) e `itVecinosB` (*j*).

Como ambas listas fueron ordenadas antes de invocar a la función `dameParesVecinosComun`, es posible encontrar elementos en común recorriendolas secuencialmente de manera simultánea.

Se procede de manera simple, si `nodo(itVecinosA)` es igual a `nodo(itVecinosB)` entonces se añade el nodo actual a la lista `vecinosComun`. En caso contrario, se avanza el iterador que sea menor.

Si concluía la iteración de las dos listas de adyacencia, la lista `vecinosEnComun` posee al menos un elemento; entonces se agrega **par** a la solución.

Dado un par (*i,j*), la complejidad de recorrer ambas listas de adyacencia es de: $O(\text{grado}(i) + \text{grado}(j))$. Cada par se recorre una única vez.

Por lo tanto, considerando a (*n - 1*) como el último nodo, los dos *fors* anidados van a iterar:

Cuando sea el par de nodos (0,1) : `grado(0)+grado(1)`

Cuando sea el par de nodos (0,2) : `grado(0)+grado(2)`

...

Cuando sea el par de nodos (0,*n-1*) : `grado(0)+grado(n-1)`

Cuando sea el par de nodos (1,2) : `grado(1)+grado(2)`

Cuando sea el par de nodos (1,3) : `grado(1)+grado(3)`

...

Cuando sea el par de nodos (1,*n-1*) : `grado(1)+grado(n-1)`

...

Cuando sea el par de nodos (*n-2,n-1*) : `grado(n-2)+grado(n-1)`

Se puede apreciar que el grado de cada nodo se suma (*n-1*) veces. Por lo tanto, al sumar las complejidades da un total de:

$$\text{grado}(0)*(n-1) + \text{grado}(1)*(n-1) + \dots + \text{grado}(n-1)*(n-1)$$

lo que es equivalente a:

$$[\text{grado}(0)+\text{grado}(1)+\dots+\text{grado}(n-1)]*(n-1)$$

La complejidad en peor caso se obtiene cuando los grados de todos los nodos son máximos, por lo tanto se trata de un grafo completo. Donde vale que $2^* \# \text{ejes} = \text{grado}(0) + \text{grado}(1) + \dots + \text{grado}(n-1)$.

Por consecuencia, la complejidad de esta función es de:

$O(2^* \# \text{ejes} * (n-1))$ lo que equivale a $O(\# \text{ejes} * n)$ que pertenece a $O(n^3)$ ya que la mayor cantidad de ejes que puede tener un grafo es $((n-1)n)/2$.

4.2.2. dameTernasVecinasComun

La función `dameTernasVecinasComun` funciona de manera análoga a la descripta en el inciso 4.2.1.

Se va a encargar de armar todas las combinaciones posibles al tomar tres nodos del conjunto pasado por parámetro. Luego, obtener los nodos (si existen) que sean vecinos de los tres.

De esta manera, recorre el conjunto con tres *fors* tal que cada tupla la recorre una sola vez.

En este caso el cálculo de cada iteración, dada la tupla (i,j,k) , será de $\text{grado}(i) + \text{grado}(j) + \text{grado}(k)$:

Dada la tupla $(0,1,2)$ el costo será: $\text{grado}(0) + \text{grado}(1) + \text{grado}(2)$

Dada la tupla $(0,1,3)$ el costo será: $\text{grado}(0) + \text{grado}(1) + \text{grado}(3)$

...

Dada la tupla $(0,1,n-1)$ el costo será: $\text{grado}(0) + \text{grado}(1) + \text{grado}(n-1)$

Dada la tupla $(0,2,3)$ el costo será: $\text{grado}(0) + \text{grado}(2) + \text{grado}(3)$

...

Dada la tupla $(0,n-2,n-1)$ el costo será: $\text{grado}(0) + \text{grado}(n-1) + \text{grado}(n-2)$

Dada la tupla $(1,2,3)$ el costo será: $\text{grado}(1) + \text{grado}(2) + \text{grado}(3)$

...

Dada la tupla $(n-3,n-2,n-1)$ el costo será: $\text{grado}(n-3) + \text{grado}(n-2) + \text{grado}(n-1)$

En el peor caso, el grado de todos los nodos es de n (grafo completo). Por lo tanto, el costo de cada iteración es de $O(3n)$.

La cantidad de ternas que se pueden formar es de $(n(n - 1)(n - 2))/6$, equivale a decir que va a iterar $O(n^3)$ veces con costo $O(3n)$ cada vez.

Dando una complejidad de $O(n^4)$.

4.2.3. localCIDM

```

optimo = genero_instancia_inicial();
if cae_en_optimizacion(optimo) then
    return optimizacion(optimo);
else
    optimo.sort();
    while hay cambios posibles do
        vector<vecinosEnComun> vecinos = encontrar_vecinos_en_comun(optimo);
        if no hay vecinos then
            | salir del ciclo
        else
            while hay vecinos do
                eliminar par o terna con vecino en comun;
                for cada vecino en comun do
                    | lo agrego al optimo;
                    veo si es CID;
                    if no lo es then
                        | restauro y miro el siguiente vecino;
                    end
                end
            end
            if es CID then
                lo asigno al optimo;
                vuelvo al ciclo principal;
            else
                restauro optimo;
                veo la siguiente tupla o termino;
            end
        end
    end
end
end

```

Como primera medida, ordena todas las listas de adyacencia: listaAd::ordenar, esto toma $O(n^2 \cdot \log(n))$, para cada nodo (n) ordenar su lista de adyacencia (en el caso del grafo completo, tendrán $(n - 1)$ vecinos, y ordenarlos toma $O(n \cdot \log(n))$)

Para las **ejecuciones 3 y 5**, el parametro greedy esta en true, por lo tanto comienza con una solucion inicial golosa. Por lo tanto invoca a la funcion greedyCIDM() la cual tiene complejidad $O(n^2)$ explicada en el inciso 3.

Para las **ejecuciones 2 y 4**, la solucion inicial es secuencial. Esto quiere decir que para obtener una primera solucion al problema se arma un vector nodos con la cantidad de nodos, donde en la posicion i se encuentra el nodo i .

Se recorre secuencialmente este arreglo (desde la posicion cero) de modo que se añade el nodo actual a la solucion y se elimina del vector nodos.

Luego, se borran tambien del vector a los vecinos del nodo actual.

En la siguiente iteracion se tienen $n - 1 - (\text{grado}(0))$ elementos en el vector nodos.

Lo cual, en el peor caso, sería $n-1$ donde $\text{grado}(0)=0$.

Considero la notación $\text{vecinos}(i)$ como la cantidad de nodos pertenecientes al vector nodos durante la iteración i que sean adyacentes al nodo i .

En la iteración i , el vector va a contener $n - \text{grado}(0) - \dots - 1 - \text{vecinos}(i)$

Donde en el peor caso, también, deberá ser $\text{vecinos}(i)$ con valor mínimo. Por consecuente, el peor caso es un grafo donde cada nodo es una componente conexa trivial, es decir que no existen ejes.

En el peor caso, itera n veces ya que el tamaño del vector disminuye sólo en una unidad por iteración.

El costo de las operaciones por iteración es $O(n)$.

Las funciones usadas son:

`push.back` (costo $O(n)$ amortizado)

`listaAdy::sonVecinos` (costo $O(\min(\text{grado}(nodoA), \text{grado}(nodoB)))$)

Por lo tanto esta sección es del orden de $O(n^2)$

A continuación, se introducen optimizaciones del algoritmo.

- En primer lugar, si la solución óptima actual posee tamaño 1 no va a encontrarse una solución mejor, por consiguiente se devuelve. (Costo $O(1)$)
- En segundo lugar, si la solución óptima actual posee tamaño 2 la única solución que puede ser mejor es la que posee un sólo nodo. Se chequea si existe una solución con un sólo nodo (costo $O(n)$). Si existe, la solución óptima es la de un sólo nodo y se devuelve sino era la solución con dos nodos. Funciones usadas: `assign`, `listaAdy::gradoDeNodo` y `listaAdy::cantNodos` (todas con costo $O(1)$)
- En tercer lugar, si la solución óptima actual posee tamaño n debe ser la solución que se retorna. Ya que la única manera de que todos los nodos sean parte del conjunto solución al problema es que cada uno sea una componente conexa, es decir no existan ejes. A continuación, debe ser la solución devuelta. (Costo $O(1)$)

Si la ejecución del algoritmo no entró en ninguno de los casos citados, se prosigue ordenando al vector de solución óptima. (Costo $O(n \log(n))$, en el peor caso tiene $n - 1$ elementos)

Ahora se prosigue con las iteraciones por vecindades.

En los casos de **ejecución 2 y 3**, se pasa por parámetro el valor de `vecindad==true`. Se ejecuta la función `dameParesVecinosComun` (vista en 4.2.1), es decir por cada iteración se querrá tomar un par de nodos tal que sea posible quitarlos y agregar un vecino de ambos al conjunto solución y se obtenga una solución con un nodo menos.

Se iterará en un `while` hasta que la variable `hayCambiosHechas` sea `false` (complejidad $O(n)$ explicada más adelante).

Lo primero que se hace es ejecutar `dameParesVecinosComun()` (complejidad $O(n^3)$).

Si esta función no devolvió ningún par, se debe salir del ciclo.

Se ejecuta otro while, mientras haya pares sin ser visitados (de los obtenidos) (complejidad $O(n.(n - 1)/2) = O(n^2)$).

Como lo que se quiere hacer es borrar nodos del conjunto solución, se hace en una copia porque a priori no se sabe si conducirá a un conjunto que sea solución.

Se borra del conjunto solución al par actual (i,j) que por el modo en que armamos los pares siempre se cumple que $i < j$. Esto tiene un costo de $O(n)$ ya que itera la solución hasta que encuentre j y en el medio elimina i. Se borra con el operador `erase` de iterador (complejidad $O(3n)$ en el peor caso).

Ahora resta ver si al agregar algún nodo en común se forma un conjunto solución que sea Independiente Maximal. Recorreremos la lista de nodos que tienen en común i y j para ver si al agregar alguno de ellos al conjunto solución, el conjunto obtenido cumple ser Independiente Dominante Mínimo. Es decir, se itera la lista de vecinos hasta encontrar un nodo que al insertarlo cumpla ser un conjunto solución válido o hasta que termine sin haber podido formar un CIDM.

Lo que tendrá un costo de $O(n^2)$.

Primero se fija que esta combinación de quitar los nodos (i,j) y agregar el nodo actual no se haya probado todavía, si es así se agrega el nodo actual de la lista al conjunto solución de manera ordenada. Se itera el vector hasta la posición donde se debe insertar lo que tiene costo de $O(n)$ ya que en peor caso en la solución original había $n-1$, se sacaron i y j por lo que el vector quedó de un tamaño $n-2$. Si el nodo a insertar debe hacerse al final, recorre todos.

`iterator::insert` tiene complejidad $O(n)$

Ahora con el conjunto formado se invoca a la función `lisAdy::esIndependienteMaximal` que tiene una complejidad de $O(n^2)$

Si el conjunto armado hasta el momento no es Independiente Maximal, vamos a querer borrar el nodo añadido último por lo que se itera de nuevo el vector hasta encontrarlo y borrarlo con `iterator::erase` con un costo total de $O(n)$.

Este código si al momento de quitar dos nodos (i,j) puede añadir diversos nodos y con cualquiera resulta un conjunto Independiente Maximal, sólo considera al primero que logre cumplir ser un conjunto Independiente Maximal.

Si al quitar dos nodos y agregar uno se logró un conjunto solución válido se actualiza el vector solución óptimo.

El ciclo mayor iterará hasta que no se hagan más cambios. Esto va a pasar cuando haya probado todos los pares de nodos posibles y por cada uno probado añadir otro.

Es decir, en el peor caso se comenzó con una solución inicial de $n-1$ nodos y, se quitaron dos y añadió uno hasta que la solución final quede de tamaño 1. Es decir, el while más grande iterará en peor caso n veces.

Por cada par de nodos iterará n^2 veces y la cantidad de pares posibles en peor caso será de $O(n^2)$.

Por lo tanto el costo de cada iteración del ciclo mayor será de $O(n^4)$, iterándola n veces dará un costo total del algoritmo de $O(n^5)$.

En los casos de **ejecución 4 y 5**, el procedimiento será similar.

Primero buscará ternas con vecinos en común (`dameTernasVecinasComun`) con un costo de $O(n^4)$.

Pero el costo de cada iteración del ciclo mayor será de $O(n^4)$, por lo explicado anteriormente, con lo cual el costo total del algoritmo es $O(n^5)$ también para esta vecindad.

4.3. Experimentación

El objetivo de esta sección es comparar los cuatro métodos implementados bajo el paradigma de *Búsqueda Local* entre sí, respecto de su tiempo de ejecución y del conjunto solución resultante.

Además, las soluciones obtenidas por los cuatro métodos se contrastan con la solución óptima resultante de ejecutar el algoritmo exacto para las mismas instancias.

Todas las instancias utilizadas fueron generadas con el generador de instancias detallado en la Sección 7.2.

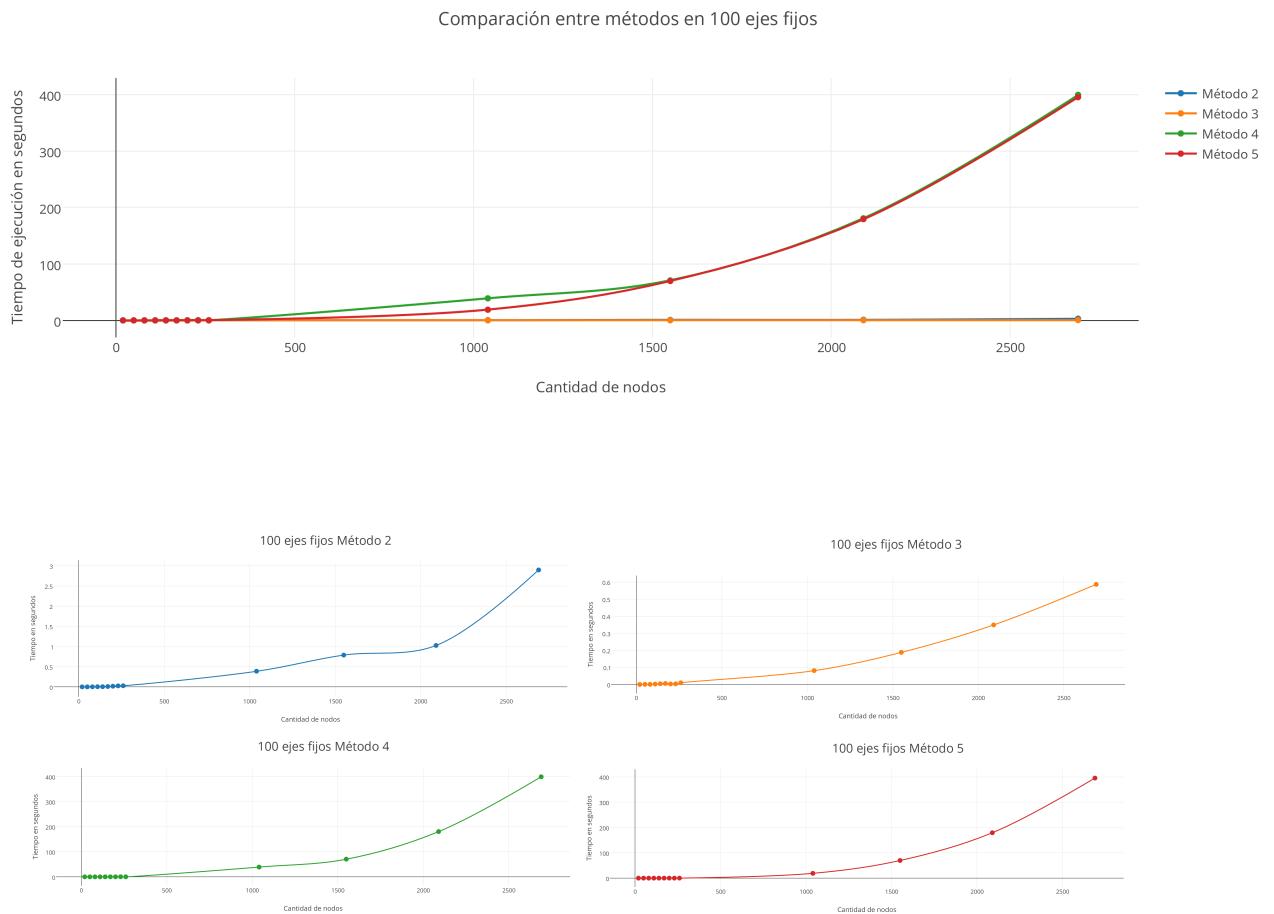
4.3.1. Análisis de tiempos de ejecución

En primera instancia, contrastamos tiempos de ejecución entre los cuatro métodos. Como así también el crecimiento de la curva de tiempos de ejecución acorde varían los ejes y los nodos dejando fijo nodos y ejes respectivamente.

Ejes Fijos

Con el generador de instancias se armaron grupos de grafos con 100, 500, 2000 y 4000 ejes variando la cantidad de nodos. Se ejecutaron los cuatro métodos para todos los casos generados.

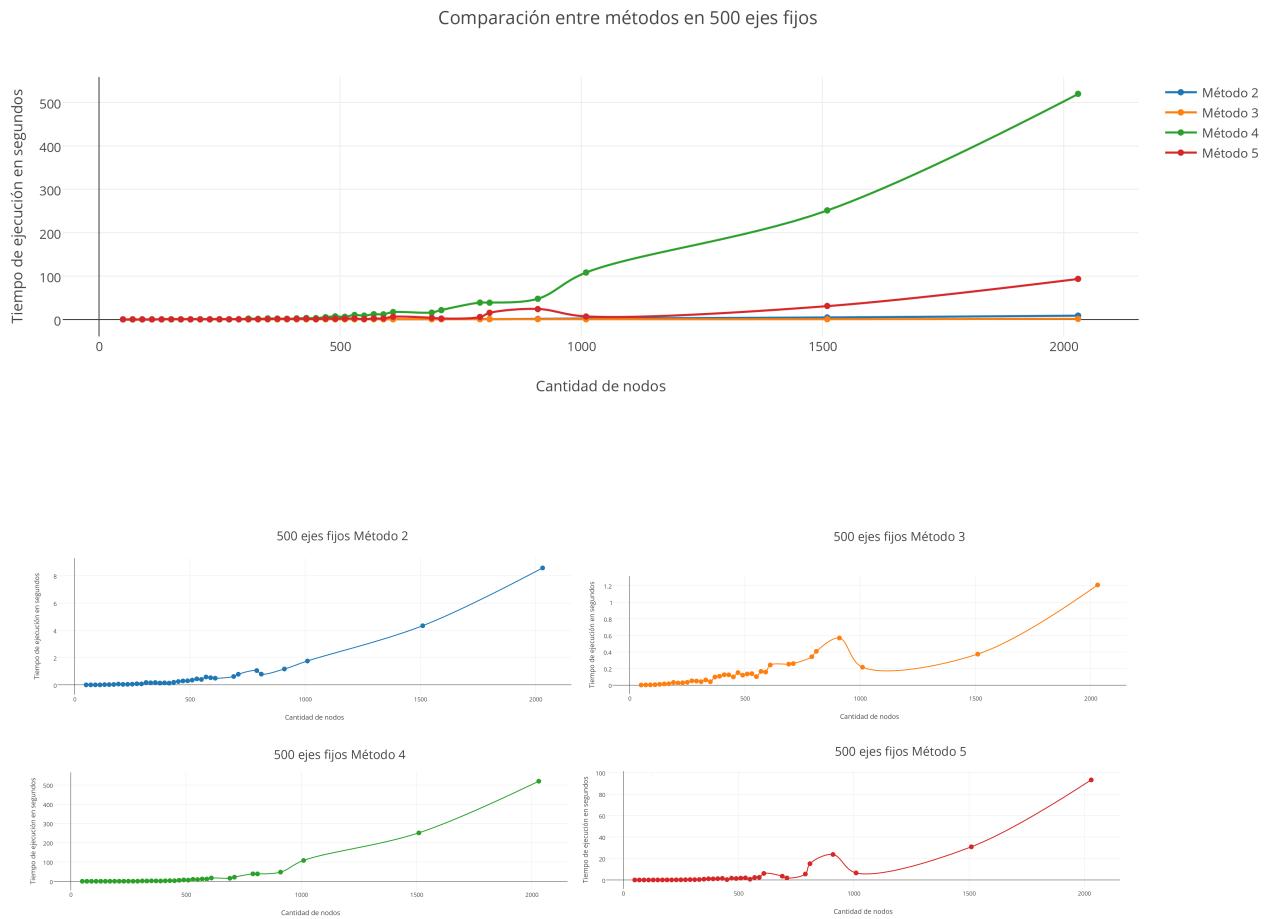
Se midieron los tiempos de ejecución y se exponen a continuación:



En el primer gráfico se puede apreciar que cuando la cantidad de nodos comienza a ser mayor, los métodos con la segunda vecindad (4 y 5) presentan una curva que posee un crecimiento mayor que las otras dos. Este comportamiento se condice con la complejidad teórica calculada, si bien los cuatro métodos poseen complejidad $O(n^5)$, resulta intuitivo que las constantes de los métodos 3 y 4 sean mayores ya que se fija todas las combinaciones que resultan de quitar tres nodos.

En el segundo gráfico lo que se quiso hacer es mostrar con detalle cada método ya que en el primero, al tener cantidades de tiempo variadas, no se puede apreciar con detalle el comportamiento de todas las curvas por sí solas.

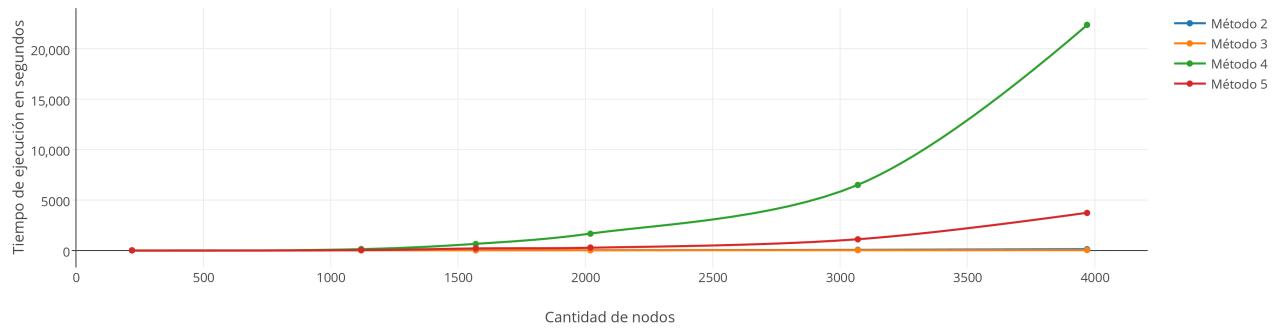
De este modo, se puede apreciar que los cuatro métodos tienen un comportamiento que asemeja a una función polinomial aunque a simple vista no se podría acertar que sean las mismas funciones nombradas como complejidad.



Al realizar el mismo procedimiento pero ahora con 500 ejes fijos lo que se puede apreciar es que, si bien los métodos 3 y 4 se mantienen en las mediciones de tiempos mayores, la curva del **Método 4** se aleja notablemente de los demás.

En las ampliaciones de los métodos, desde una perspectiva amplia, se puede notar que poseen un comportamiento que asimila polinomial al igual que en el caso anterior. Se podría decir que la causa de que las gráficas no sean estrictamente creciente se debe a la complejidad $O(n^5)$.

Comparación entre métodos en 2000 ejes fijos



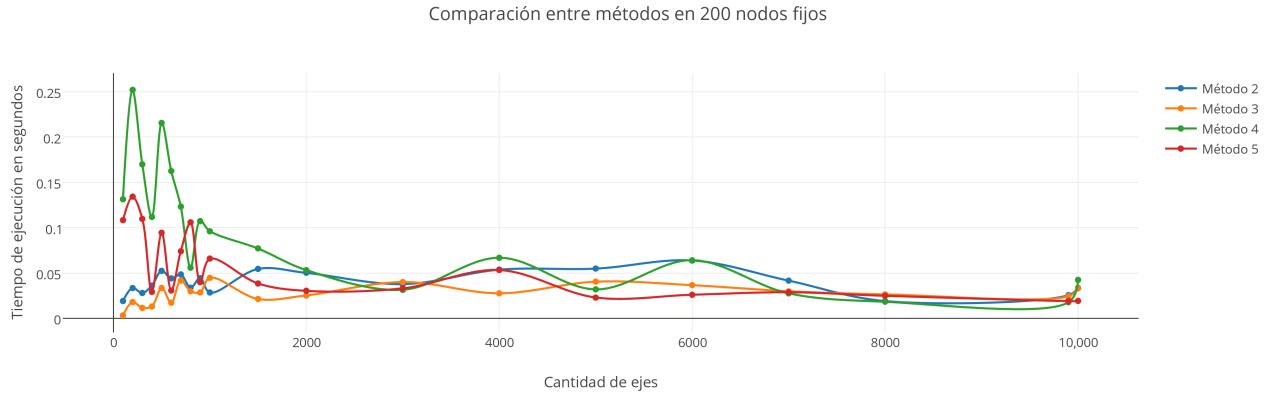
Comparación entre métodos en 4000 ejes fijos



Al plantear la misma experimentación con cantidad de ejes mayor, se puede apreciar un comportamiento análogo donde el **método 4** posee un tiempo de ejecución notablemente mayor al resto y el **método 3** permanece siendo el de menor tiempo de ejecución.

Nodos Fijos

En esta instancia, se contrastarán grupos de grafos que posean cantidad de nodos fijos: 200, 300, 500, 600 y 700 variando en cada caso la cantidad de ejes. Se comparan los tiempos de ejecución entre los cuatro métodos planteados en los casos generados.

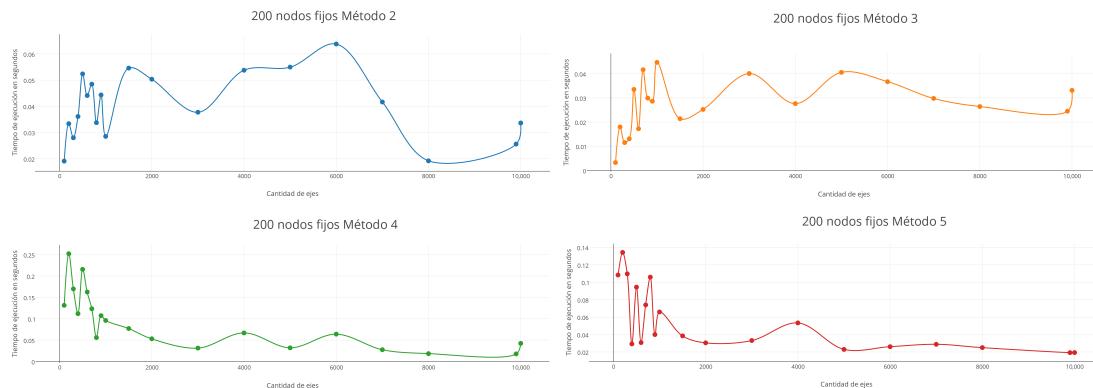


Dando una observación general sobre este gráfico, se puede apreciar que para todos los métodos el tiempo de ejecución disminuye al aumentar la cantidad de ejes.

A simple vista podría sonar un poco absurdo, sin embargo la causa de este comportamiento está ligada a que al existir mayor cantidad de ejes (manteniendo la cantidad de nodos) aumenta el grado de los nodos. Por lo tanto, al igual que el algoritmo Goloso, cuando se arma una solución inicial se inserta el nodo de mayor grado. Luego, se descartan todos los nodos vecinos ya que no serán candidatos al conjunto solución.

Si bien, para descartar nodos vecinos, se debe recorrer la lista de adyacencia completa; ese tiempo es compensado al tener menos nodos en la siguiente iteración para recorrer.

En cuanto a la parte del algoritmo que consiste en la búsqueda local, los métodos que quitan de a tres nodos tienen una curva que decrece ya que al tener más ejes van a existir una mayor cantidad de tuplas que tengan ejes vecinos en común. Si bien también aumenta la cantidad de pares, al quitar nodos de a tres se realiza en un tiempo de ejecución menor la cantidad total de iteraciones.



Haciendo hincapie en cada método por separado, se observa un comportamiento distingible.

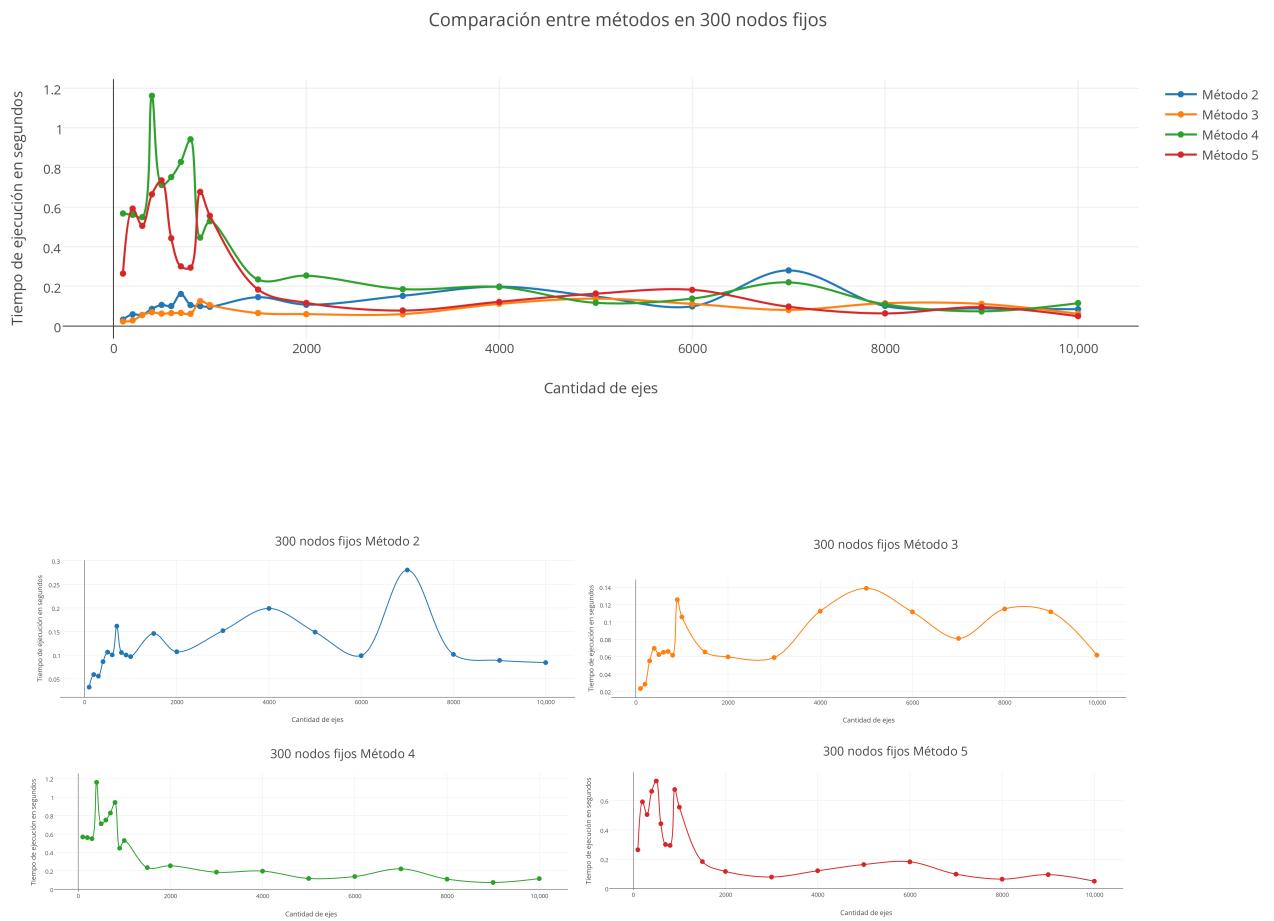
Si bien las curvas de los cuatro métodos oscilan notablemente, si uno observa bajo un punto de vista general se puede apreciar que los métodos 4 y 5 tienen un comportamiento notablemente decreciente

Sección 4.3 Experimentación

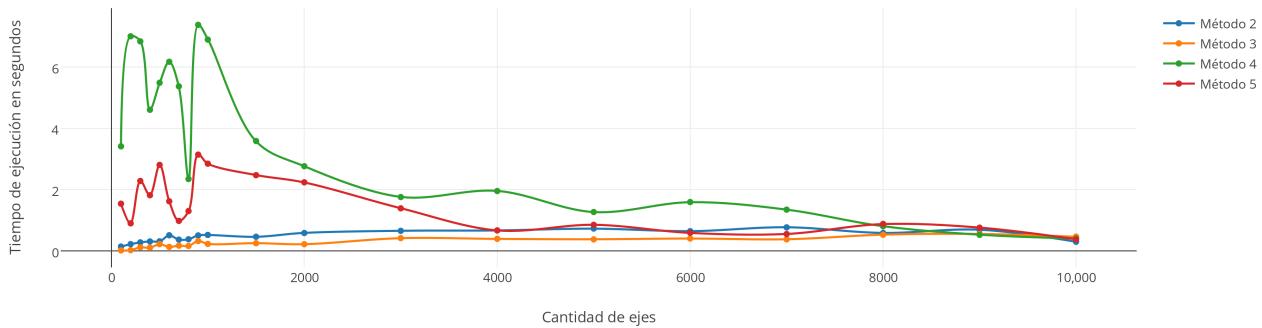
similar al de una curva polinomial. Ambos métodos utilizan la segunda vecindad, lo que indicaría que el comportamiento es causado por disminuir en cada iteración de a dos nodos en vez de uno y reducir así el tiempo de ejecución.

Por otro lado, los métodos 2 y 3 poseen un crecimiento abrupto con una cantidad de ejes menor y después sus curvas oscilan de manera constante. Como ambas manejan la misma vecindad, un potencial causante de dicho comportamiento corresponde a que necesitan una cantidad lineal de iteraciones del algoritmo para reducir la misma cantidad de nodos del conjunto solución ya que sólo se elimina de a un nodo.

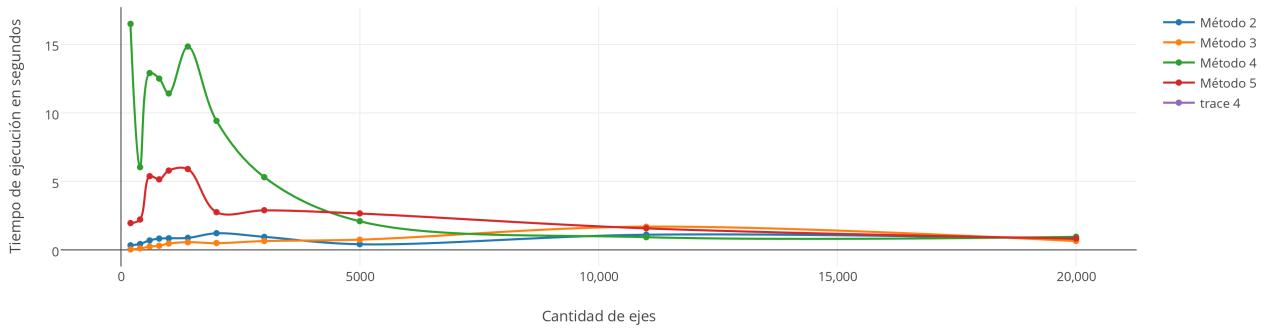
Ejecutamos la misma experimentación, pero en esta ocasión fijando la cantidad de nodos en 300, 500 y 600.



Comparación entre métodos en 500 nodos fijos



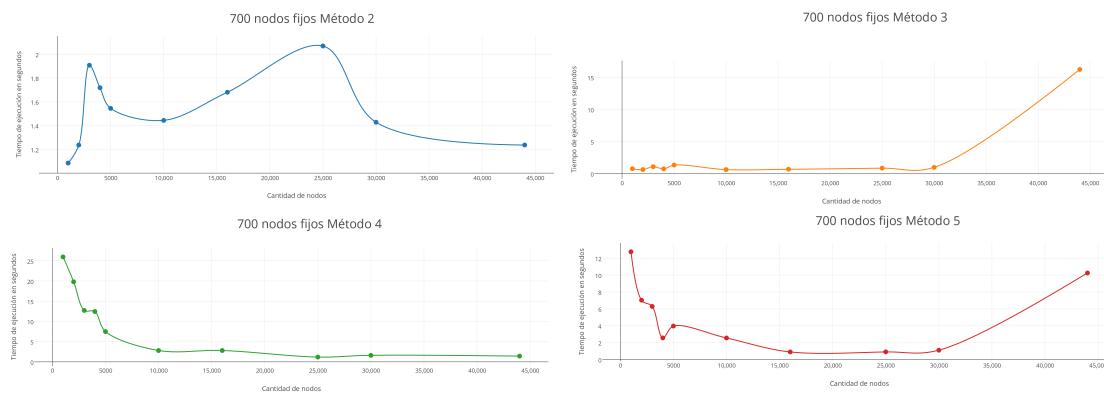
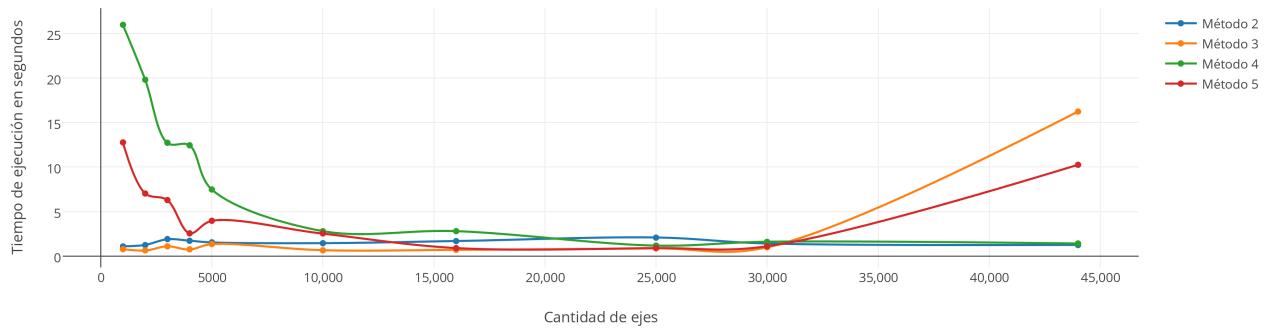
Comparación entre métodos en 600 nodos fijos



La conclusión que se puede sacar de este último set de gráficos es que, si se fija la cantidad de nodos, no importa en qué valor, los tiempos de ejecución de los métodos poseen un comportamiento similar al explicado en el inciso anterior.

Donde el **Método 4** permanece siendo quien tiene mayores tiempos de ejecución sin importar la cantidad de nodos y ejes. Así mismo, el **Método 3** se mantiene con los tiempos de ejecución menores.

Comparación entre métodos en 700 nodos fijos



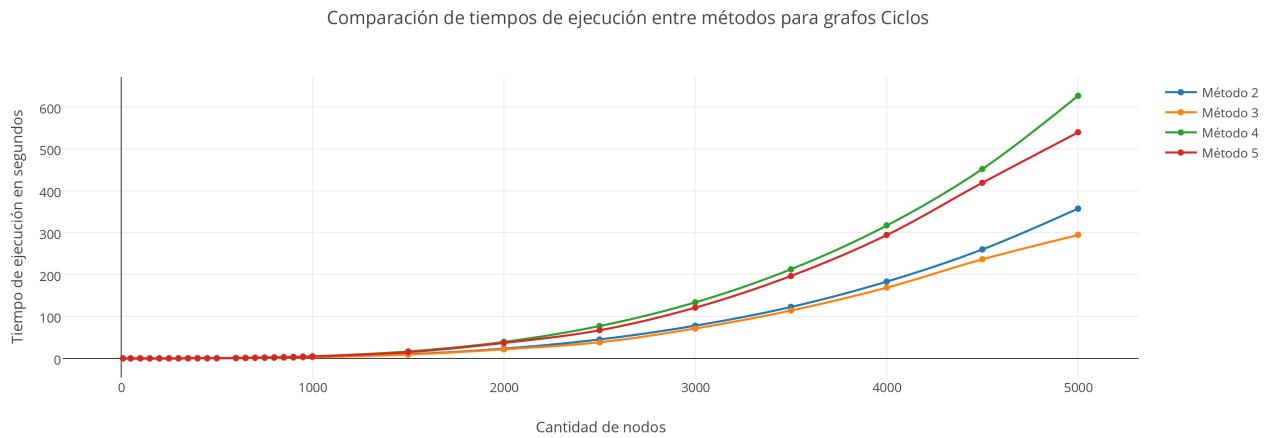
Nos pareció un caso notable de distinción el de 700 nodos fijos, cuando se analizan los métodos por separado.

Si bien a ciencia cierta no se puede asignar a qué función pertenece cada curva, pero se pueden notar las raíces que poseen las curvas. De modo que se aprecia un comportamiento no estrictamente creciente.

4.3.2. Contrastación empírica de la complejidad

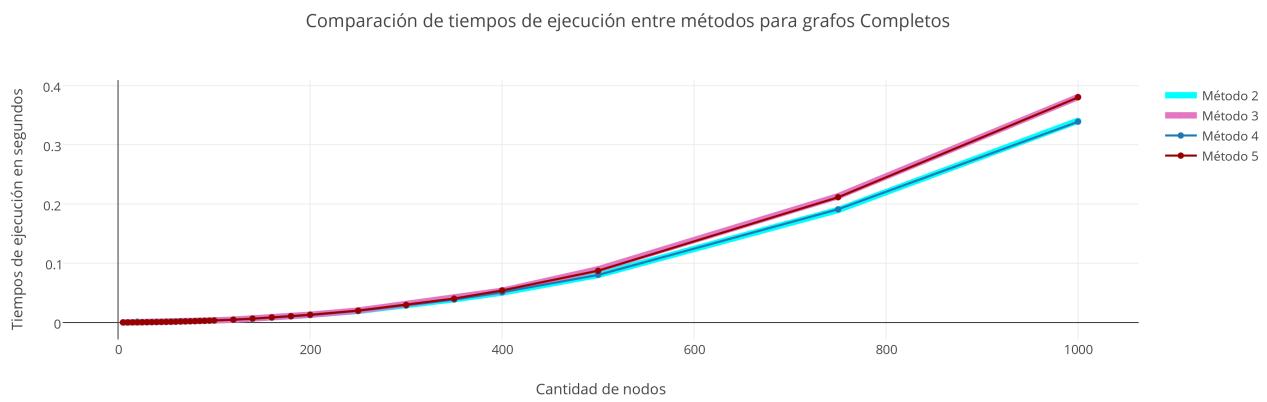
Se quiso linealizar los tiempos de ejecución con el fin de poder contrastar de manera óptima las complejidades empíricas con las teóricas. Sin embargo, esto no fue posible debido a que los tiempos de ejecución son muy pequeños y al dividirlos por la cantidad de nodos los resultados obtenidos no generan gráficos de real interés.

A continuación se exponen los tiempos de ejecución para los distintos métodos, considerando grafos Ciclo y grafos Completos:



Los tiempos de ejecución para grafos Ciclos se condicen con los gráficos de la sección 4.3.1. Esto significa que los **métodos 4 y 5** poseen mayor tiempo de ejecución y finalmente, el **método 2** preserva el menor.

Todas las curvas presentan un comportamiento que se asemeja a un valor cuadrático o cúbico, ya que si bien la complejidad teórica es de $O(n^5)$ al tener sólo dos vecinos cada nodo las listas de adyacencia se recorren en $O(2) \subseteq O(1)$.



Los grafos completos poseen un tiempo de ejecución con una curva muy similar a la lineal, ya que con un sólo nodo ya se obtiene la solución.

Si se ejecuta la Solución Inicial I, sólo se añade el nodo 0 y se recorre a todos sus vecinos para marcarlos como dominados.

Si se ejecuta la Solución Inicial II, primero se ordenarán los nodos por grado (lo que costará un tiempo innecesario) lo que dará como resultado un conjunto de nodos en un orden indistinto ya que todos tie-

nen el mismo grado. Luego agarrará el que figure primero y marcará a todos sus vecinos como dominados.

Sin importar cómo haya sido obtenida la solución inicial, el algoritmo comprueba que la solución inicial tiene un sólo nodo por lo tanto no sigue ejecutando ya que es consciente de que no existe una solución con un cardinal menor que uno.

El funcionamiento de los métodos explica porque los métodos 3 y 5 poseen la misma curva entre sí, al igual que los métodos 2 y 4.

Los que poseen una curva con valores más altos son los métodos que utilizan de Solución Inicial el algoritmo Goloso.

4.3.3. Comparación soluciones Local vs Exacto

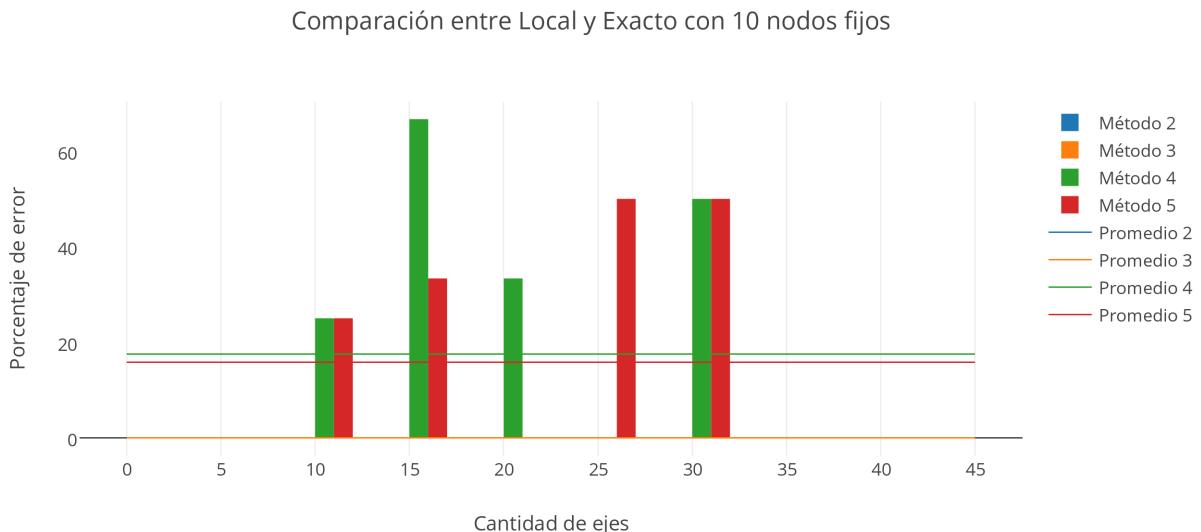
Habiendo comparado los tiempos de ejecución entre los distintos métodos, resta ver qué tan lejanas son estas heurísticas de la solución óptima.

Por este motivo, se crearon lotes de grafos con 10, 20 y 30 nodos fijos (variando la cantidad de ejes) así como también con 45 y 90 ejes fijos (variando la cantidad de nodos). Con el objetivo de comparar los conjuntos solución devueltos por los cuatro métodos contra la solución óptima real (que pudimos obtener ejecutando el Algoritmo Exacto).

Por último, se evaluaron los conjuntos solución de las heurísticas locales bajo el contexto de tableros del “Señor de los Caballos” respecto de la solución óptima real.

Teniendo en cuenta la solución óptima real para cada instancia, lo que muestra el gráfico es el porcentaje de error que posee la solución devuelta por las heurísticas de Búsqueda Local.

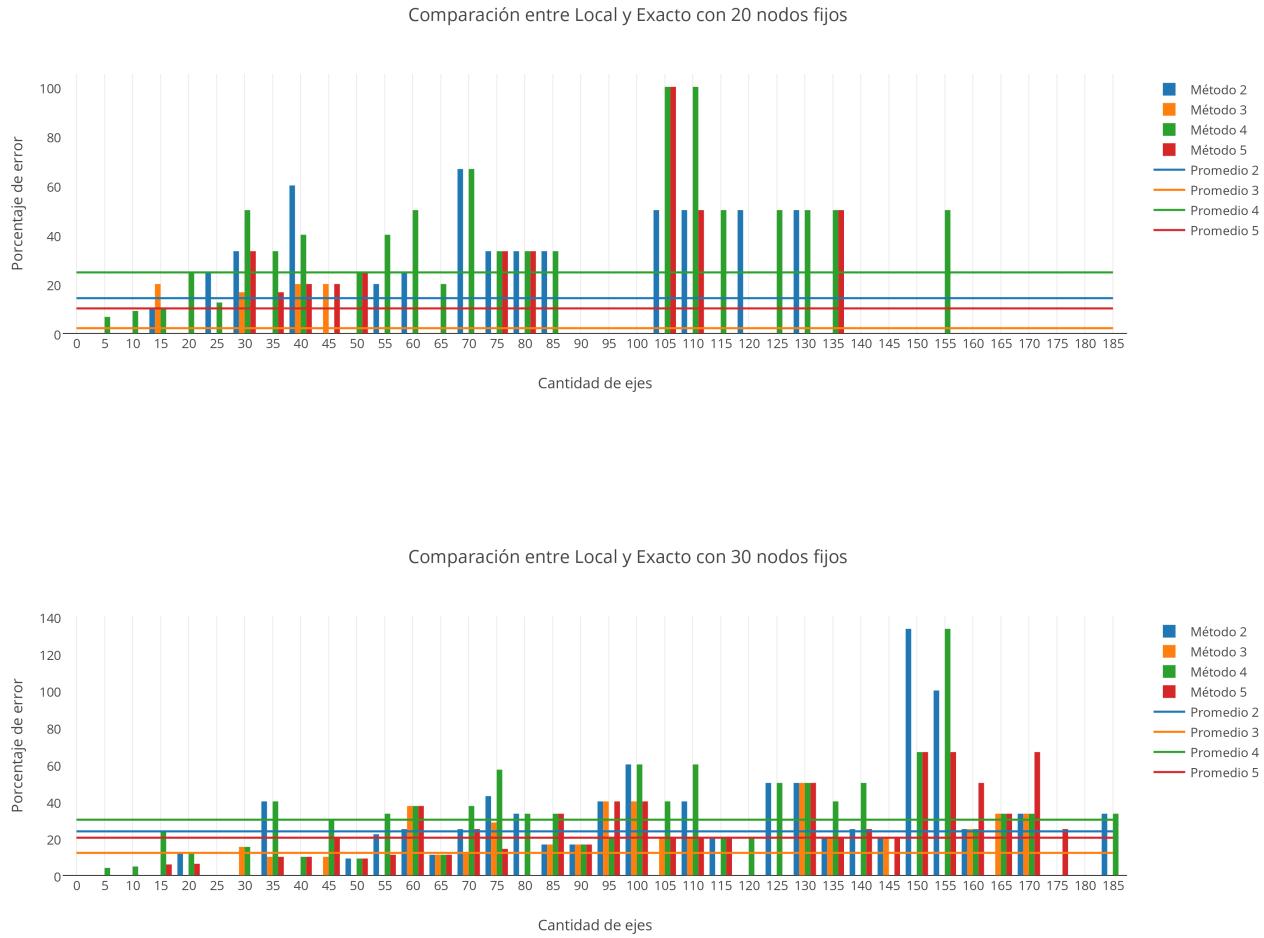
En los primeros casos, por cada cantidad de ejes tomada, se grafica en barras verticales el porcentaje de error de cada Método. Mientras que las líneas horizontales representan al porcentaje de error promedio para la cantidad de nodos fijos impuesta.



En primera instancia, para una cantidad chica de nodos no es posible establecer un criterio específico respecto de la variación del error ya que son casos muy acotados.

Sin embargo, es atinado remarcar que los promedios de error para los **métodos 2 y 3** fue nula.

Se repitió el proceso fijando la cantidad de nodos en 20 y 30.



En ambos casos, se pueden apreciar picos muy notorios. Sin embargo, los márgenes de error promedio se mantienen por debajo del 30 % en todos los métodos para ambos casos siendo un promedio de error bastante notable.

Dado que los grafos fueron armados de manera aleatoria, no contamos con ninguna hipótesis respecto a la relación que tienen los ejes con los nodos (ya sea que posea subgrafos ciclos, cliques o etc.).

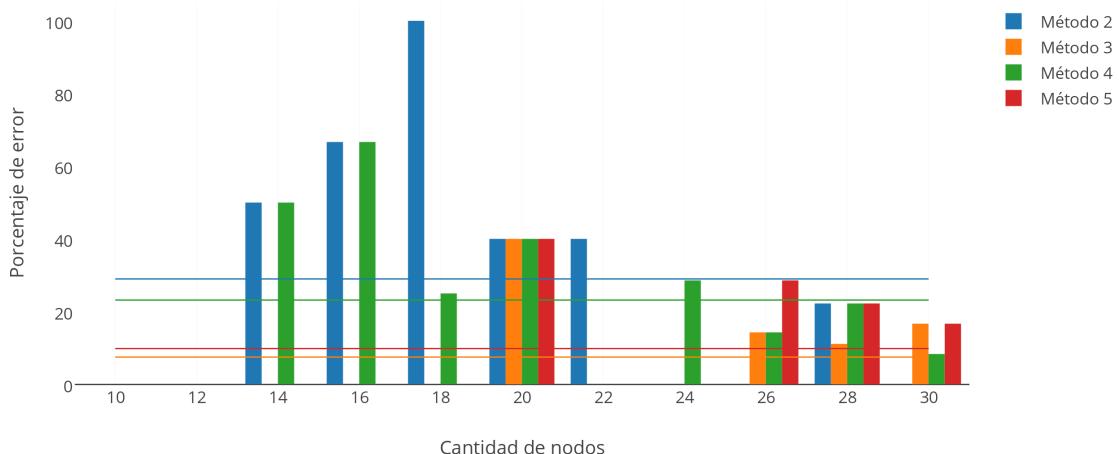
También se observa que el porcentaje de error aumenta, acorde la cantidad de ojos también lo hace. Inclusive el porcentaje de error del Método 3 (el de menor margen error en todos los casos) aumenta para una cantidad mayor de nodos. El principal motivo de este comportamiento se lo podría atribuir a que al ser un grafo con mayor cantidad de nodos, existe una mayor cantidad de conjuntos independientes maximales (que es lo que devuelven como resultado las heurísticas).

Podemos concluir que, para los casos testeados y sin importar cómo varía la cantidad de ejes en un grafo, el porcentaje de error va a ser siempre menor empleando el **Método 3**.

En segunda instancia, se generaron lotes de grafos primero con 45 ejes fijos y luego con 90.

Al igual que en la etapa anterior, las barras verticales representan el porcentaje de error por método mientras que las líneas horizontales indican el promedio de error para cada uno.

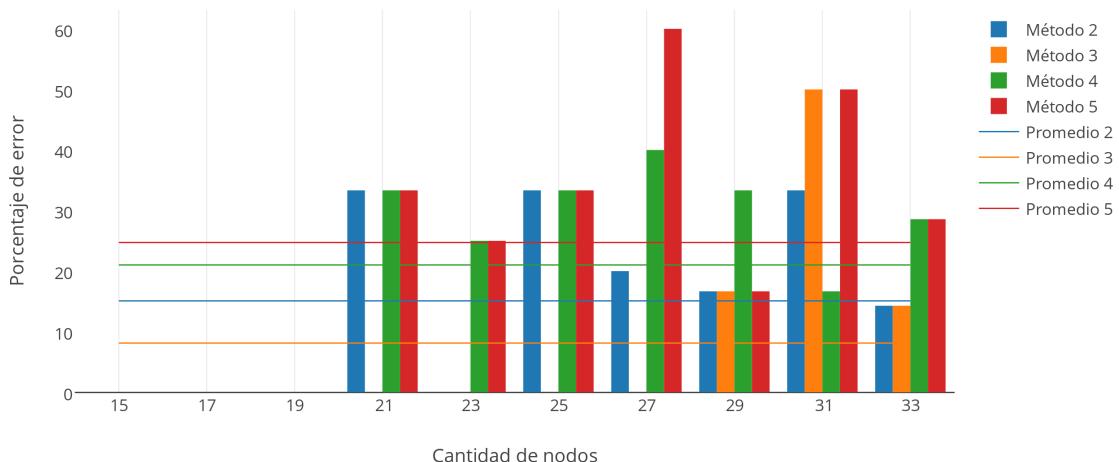
Comparación entre Local y Exacto con 45 ejes fijos



Al contrario del caso anterior, se puede apreciar como el margen de error disminuye acorde aumenta la cantidad de nodos. Si bien en el caso anterior no era intuitivo (ya que se media el aumento de ejes conjunto al de nodos), en esta instancia si lo será.

Esto se debe a que al dejar la cantidad de ejes fija y agregar nodos, el grafo queda cada vez “más no-conexo” por lo tanto mayor cantidad de nodos deberá pertenecer al conjunto solución. Y aún más existirá una menor cantidad de conjuntos Independientes Maximales, por lo cual tendrá una mayor probabilidad de devolver el que tenga un tamaño óptimo.

Comparación entre Local y Exacto con 90 ejes fijos

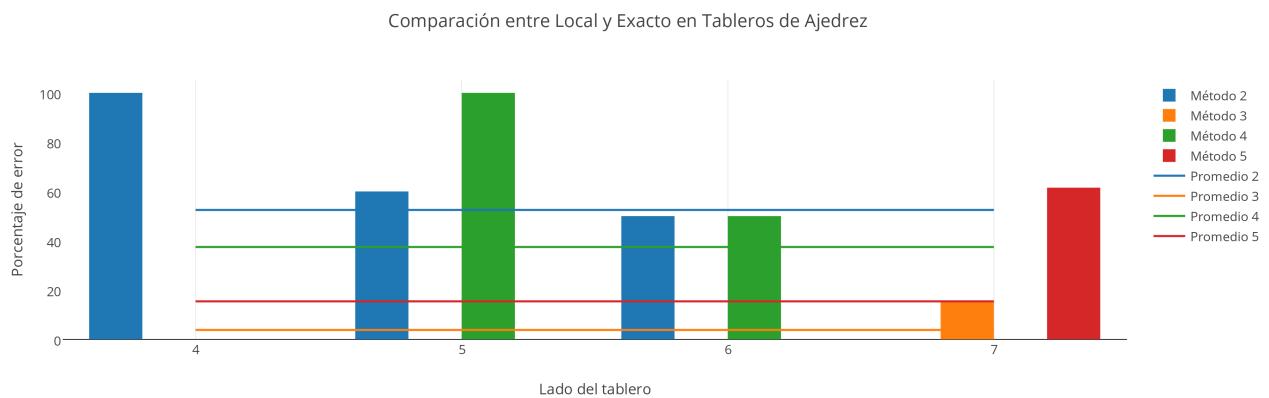


Cuando contamos con 90 ejes fijos sucede un comportamiento análogo. Al tener poca cantidad de nodos, se trabaja con grafos “muy conexos” por lo que basta con pocos nodos para hallar al conjunto solución óptima. Y aún más, aquí también la cantidad de conjuntos Independientes Maximales posibles será menor.

Sección 4.3 Experimentación

Una vez más, la experimentación muestra que el Método 3 es quien otorga resultados más cercanos a la Solución Óptima.

Por último, se decidió aplicar las heurísticas desarrolladas a grafos que sean del aspecto del tablero “El señor de los Caballos”.



El comportamiento a observar es que las Heurísticas Golosas no poseen margen de error al tener tableros más pequeños. Al revés es en el caso que optan por la solución inicial propuesta I, quienes el mayor margen de error lo tienen en tableros más pequeños.

Esta situación se puede explicar con la base de que empezando con una solución *para nada buena*, resulta imposible avanzar mediante vecindades a una solución mejor ya que no se encuentran dos nodos que se puedan quitar a cambio de añadir otro, más aún quitar tres para añadir uno.

4.3.4. Elección de versión óptima

Si bien ya comparamos las soluciones obtenidas por las heurísticas locales contra las soluciones otorgadas por el algoritmo exacto, nos pareció de importancia comparar entre heurísticas solamente.

De este modo, pudimos testear una mayor cantidad de casos y más grandes que hubiera resultado muy excesivo aplicarles el algoritmo de Backtracking debido a su tiempo de ejecución.

En los siguientes gráficos se abordan grafos primero dejando una cantidad de ejes fija: 100, 500 y 2000; luego dejando una cantidad de nodos fija: 200, 300, 500, 600 y 700. Los lotes utilizados para comparar resultados a continuación son los mismos que figuraron en la comparación de tiempos (Sección: 4.3.1).

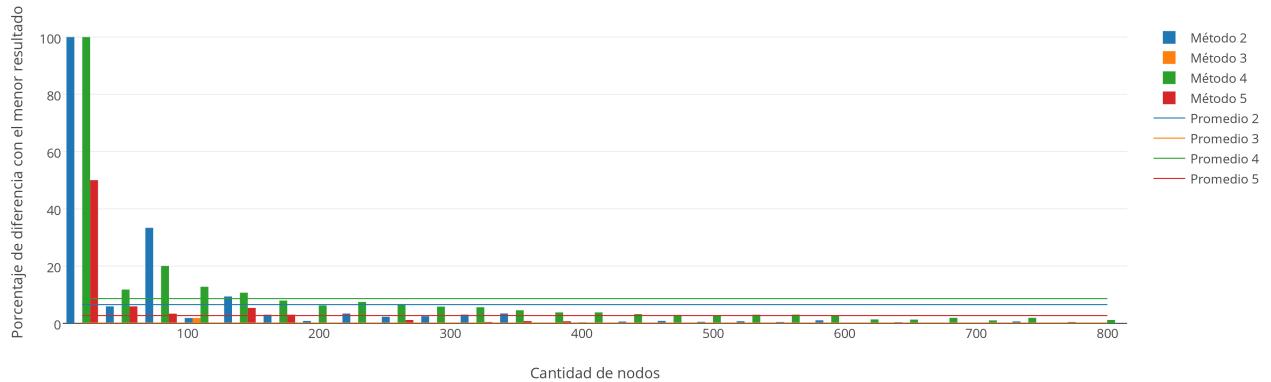
Los gráficos están diseñados de la siguiente manera: como no tenemos un parámetro de cuál es la verdadera solución óptima; de las cuatro obtenidas para una misma instancia, a la menor se la considera como solución óptima.

Por lo tanto, los porcentajes de error de los gráficos en las barras verticales marcan el error cometido respecto de la respuesta de menor cardinal en el conjunto.

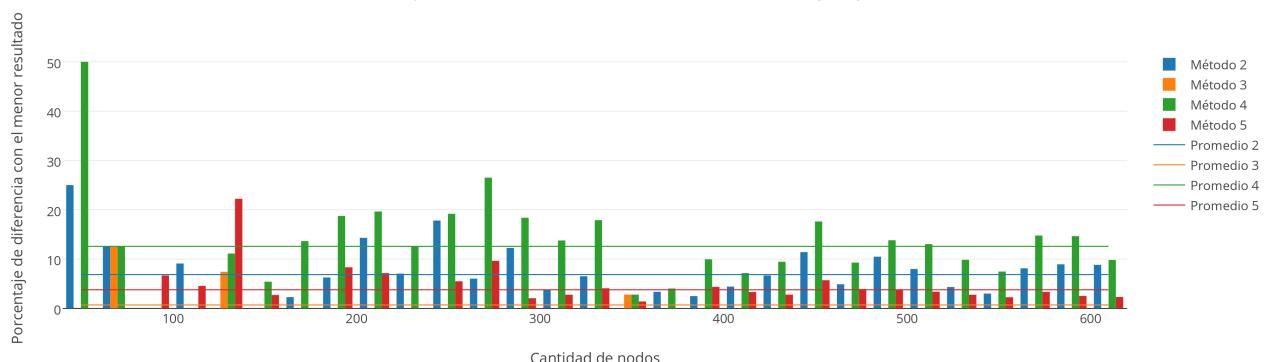
Así mismo, las líneas horizontales marcan el promedio del porcentaje de error.

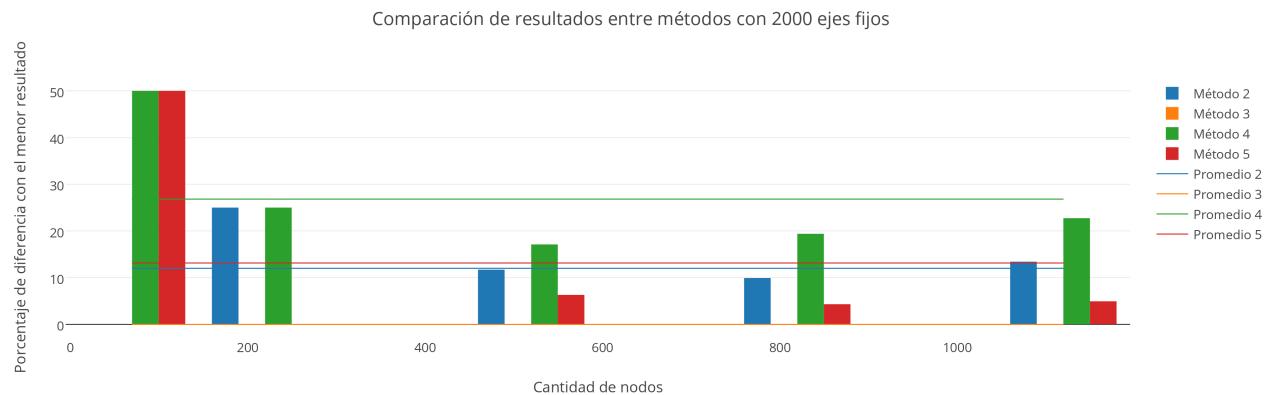
Ejes Fijos

Comparación de resultados entre métodos con 100 ejes fijos



Comparación de resultados entre métodos con 500 ejes fijos





En los tres casos, en mayor o menor medida, se puede apreciar como el porcentaje de error disminuye a mayor cantidad de nodos para los cuatro métodos.

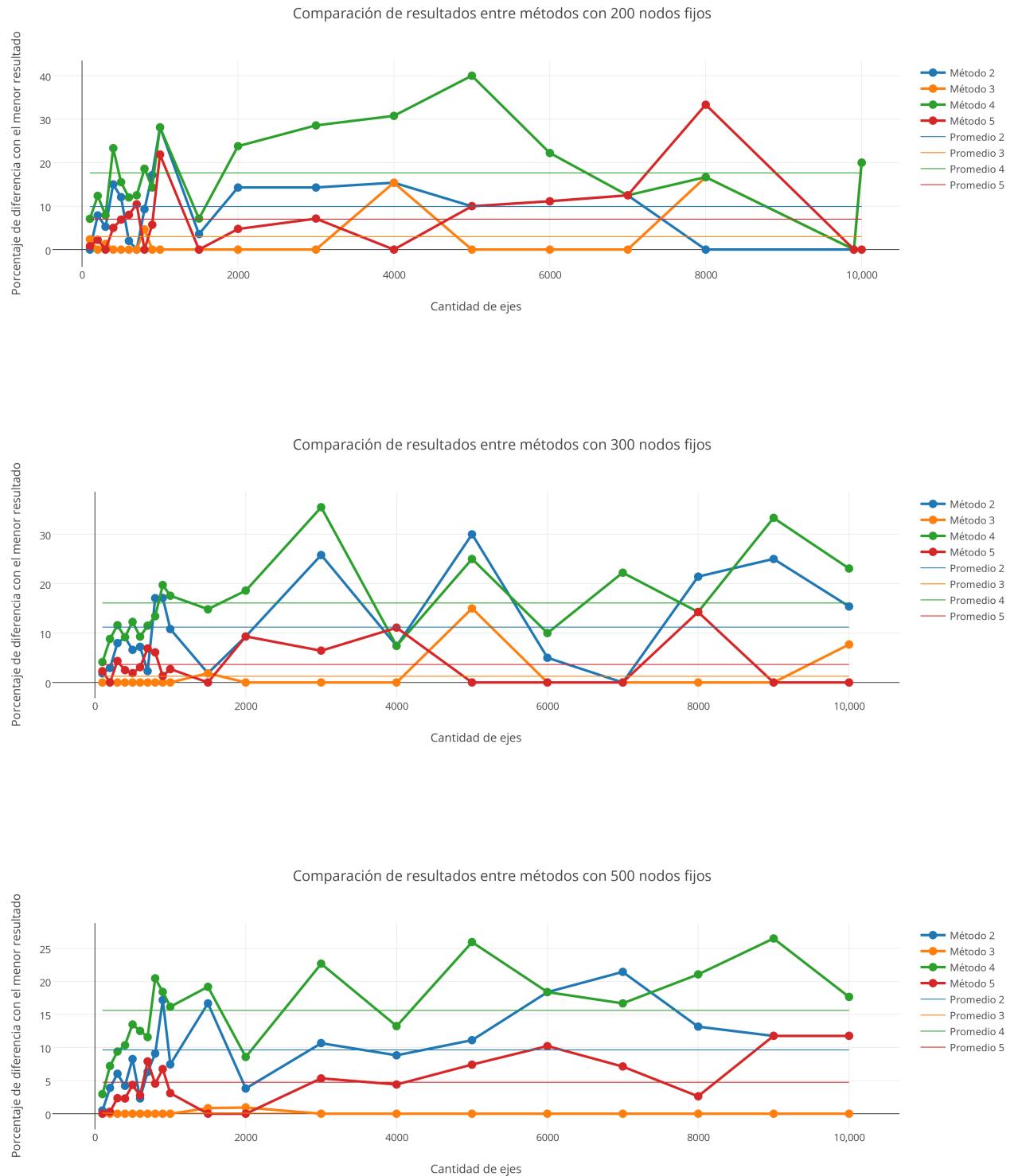
Si bien este decrecimiento no es estricto (al menos para 500 y 2000), analizando el gráfico a gran escala esta apreciación es válida.

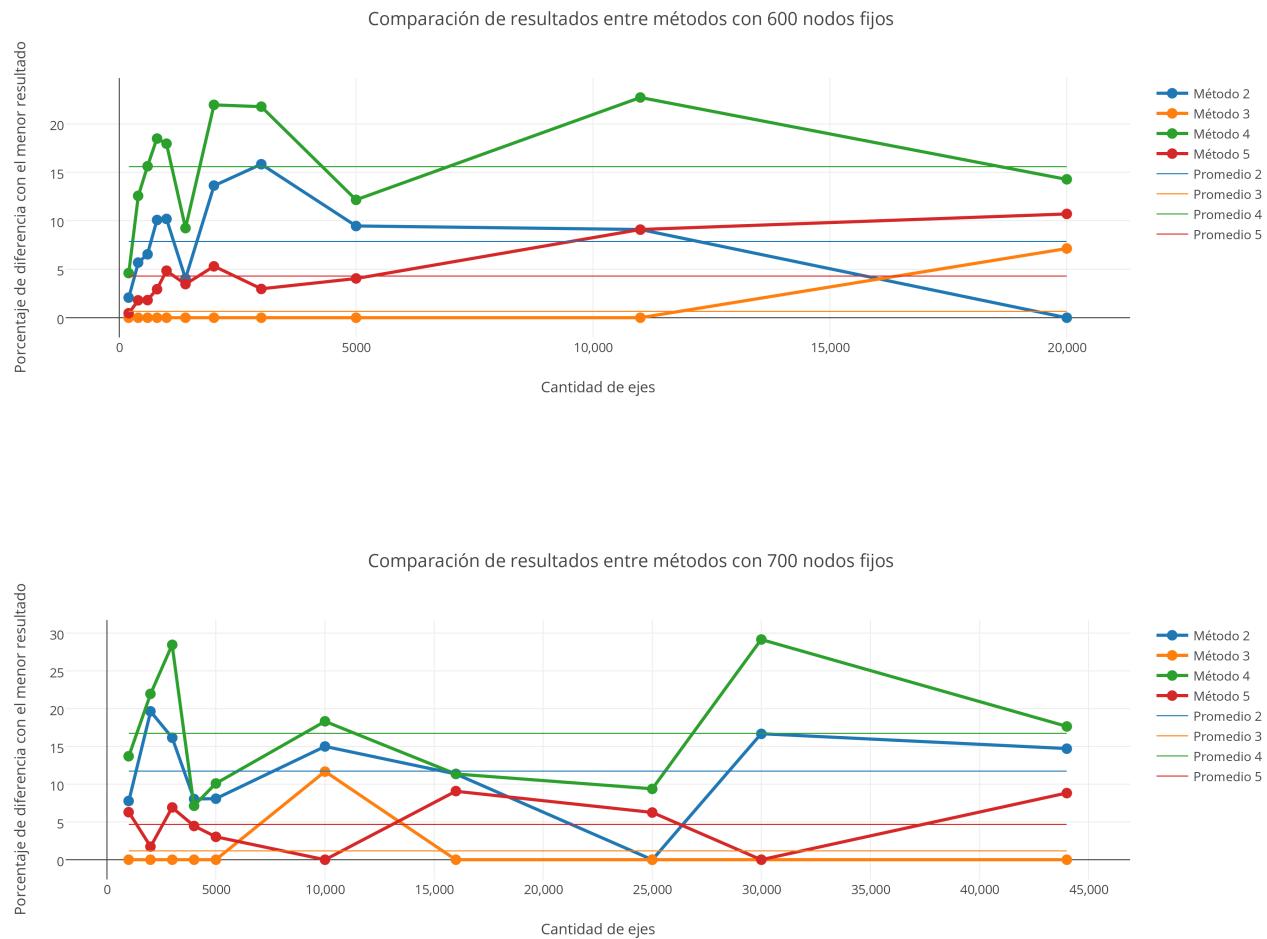
Es válido destacar que, al dejar la cantidad de ejes fija y aumentar la cantidad de nodos, se obtiene un grafo *menos conexo* por lo que la cantidad de Conjuntos Independientes Dominantes decrece, debido a que cada nodo “domina” a una cantidad baja.

A simple vista se observa que el promedio de error del método 3 es casi nulo, por lo que indicaría que en la mayoría de los casos fue quien otorgó la solución de menor cardinal.

Nodos Fijos

Los gráficos a continuación indican lo mismo que los de la sección anterior, solamente que se decidió graficar linealmente en vez de barras para una mayor comprensión del comportamiento.





Sin importar la cantidad en que se fijen los nodos, todos los gráficos revelan un comportamiento similar.

Ningún método ofrece una muestra de percentiles que obedezca a una función suave, sin embargo las oscilaciones que muestran parecen tener un comportamiento específico tal que varían siempre entre los mismos valores.

El **Método 3** es quien se mantiene siempre por debajo, indicando que es quien obtuvo el conjunto solución de menor cardinal. Y concluyendo las observaciones hechas hasta el momento, el **Método 4** es quien peores resultados arroja.

Resulta intuitivo que comenzar con una solución Golosa es mejor que con una solución Secuencial, ya que se espera que la solución Golosa sea mejor. Si bien esto no se puede probar teóricamente, los datos empíricos obtenidos arrojan resultados que validan esta hipótesis.

Heurística Local Óptima

Como conclusión de la experimentación definimos que la Heurística Local con Vecindad y Solución Óptima es la implementada bajo el Método 3.

Utiliza la Solución Inicial II (construcción Golosa) y la vecindad I (quita dos nodos y agrega uno).

Este Método es quien arrojó siempre mejores resultados en cuanto a tiempos y respecto del cardinal de su conjunto solución. Siempre se mantuvo con menores tiempos de ejecución y menores márgenes de error.

Podemos definir que la Heurística Local a utilizar en la Sección 6 será la del **Método 3**.

5. Metaheurística GRASP

5.1. Explicación

La metaheurística *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure (GRASP)*, es una mezcla de las dos heurísticas previas (vistas en 3 y 4). Dicho de manera simple: genera un punto de partida de forma golosa para el algoritmo de búsqueda local.

La distinción de este algoritmo radica en cómo se construye “golosamente” la solución inicial.

Como la sigla lo indica, consiste en un algoritmo *Goloso Randomizado*. Es decir que se escogen candidatos a solución inicial de una manera golosa ligeramente distinta a la utilizada en la sección anterior. El método *Greedy* de la sección 3 escoge a los nodos que van a pertenecer al conjunto solución, de a uno siempre eligiendo al que tiene mayor grado. En cambio, en este caso por cada paso no se elige al nodo de mayor grado sino que se elige uno al azar entre los que “mejor grado” tienen.

Hablar de “mejor grado” nos obliga a dar un criterio para ello, lo que da pie a la definición de la *Restricted Candidate List (RCL)*, que es el conjunto de candidatos elegibles para la solución base.

La *solución inicial* se puede formar de diversas maneras. En todos los casos, se añade de a un nodo al conjunto solución hasta que se forme una solución válida. Tres formas para determinar la elección por nodo son:

- Elegir un nodo entre los $\alpha\%$ nodos que tengan mayor grado hasta completar una solución válida.
- Elegir un nodo entre los α nodos que tengan mayor grado hasta completar una solución válida.
- Elegir un nodo entre los nodos que cumplan determinada propiedad en un $\alpha\%$ hasta completar una solución válida (como por ej: “Los nodos que tengan grado, a lo sumo, $\alpha\%$ menor que el nodo de mayor grado”).

Optamos por implementar las primeras dos opciones para generar una solución inicial. Una vez obtenida bajo el método deseado, se aplica el algoritmo de *búsqueda local* explicado en el inciso 4 sin modificaciones.

Un aspecto también diferencial de esta heurística, es que no generamos una única instancia inicial, sino que se toma una determinada cantidad de ellas (acorde al criterio de parada). Se ejecuta el algoritmo para la primer instancia y se guarda la solución como óptima, luego si en alguna ejecución futura se mejora (se obtiene otra solución con menor cantidad de nodos) se actualiza óptima.

Las *vecindades* utilizadas son las mismas que se utilizaron en la heurística de búsqueda local (4).

El *criterio de parada* que adoptamos fue contabilizar las ejecuciones que no produjeron mejora, de modo que sólo se ejecute una determinada cantidad de repeticiones “malas”. Es decir, siempre que la ejecución otorgue una solución óptima con menos cantidad de nodos que la existente, se seguirá ejecutando. Pero si las ejecuciones no otorgan mejoras se suman al contador, de modo que al llegar a la cantidad indicada se terminará la ejecución.

Otra opción podría haber sido correr un número fijo de veces y quedarnos con la mejor solución encontrada; o también si conocieramos alguna cota, acercarnos a esta en un determinado porcentaje; o bien una combinación de todas.

5.2. Experimentación

Para analizar qué combinación de vecindades de búsqueda local y elección de solución inicial se acercan a encontrar el óptimo en distintos escenarios, se experimentó con una serie de grafos según criterios:

- Mantener los ejes fijos, variando la cantidad de nodos
- Mantener los nodos fijos, variando la cantidad de ejes
- Grafos Tablero (análogos a los del “Señor de los Caballos”)

Se optó por ejecutar el algoritmo 30 veces y luego, con los tamaños de cada conjunto solución, sacar un promedio.

Es decir, obtener un promedio de la cantidad de nodos que requería la solución óptima en cada ejecución del algoritmo.

Luego, sabiendo cuántos son los nodos que pertenecen a la solución óptima (ejecutando el algoritmo exacto), divimos y obtuvimos en qué porcentaje la heurística falla en encontrar el *óptimo verdadero*.

Las siguientes tabla muestra los valores obtenidos, las columnas 2, 3 y 4 indican el criterio aplicado al grafo; vecindad 2x1 indica que la vecindad usada fue la de quitar dos nodos y agregar uno, vecindad 3x1 quitar tres y agregar uno; n representa el alfa elegido; n mejores indica que como criterio de búsqueda de solución inicial, se tomó uno entre los n mejores según el criterio greedy establecido, n % mejores indica seleccionar uno entre los que pertenezcan al n % de los mejores.

La diferencia en las dos tablas radica en el criterio de parada, para la primera, se tomó la decisión de no seguir buscando si no se modificó el óptimo luego de 5 iteraciones, para la segunda, si no se lo modificó luego de 10.

	Ejes Fijos	Nodos Fijos	Tableros	Porcentaje de error
Vecindad 2x1 3 mejores	0.14444444444	0.0443696313	0	6.29380252333333 %
Vecindad 2x1 5 mejores	0.0873015873	0.0878199237	0.7916666667	32.22627259 %
Vecindad 2x1 7 mejores	0.1272510823	0.0897730705	0.8083333333	34.17858287 %
Vecindad 2x1 10 mejores	0.0977272727	0.1190627034	0.75	32.2263325366667 %
Vecindad 2x1 12 mejores	0.1186147186	0.1041559051	0.4583333333	22.7034652333333 %
Vecindad 3x1 3 mejores	0.278466811	0.151036013	0.0833333333	17.0945385766667 %
Vecindad 3x1 5 mejores	0.1813888889	0.2439944838	0.5416666667	32.2350013133333 %
Vecindad 3x1 7 mejores	0.2068867244	0.2352629853	0.8083333333	41.6827681 %
Vecindad 3x1 10 mejores	0.2764466089	0.2326181999	0.8333333333	44.7466047366667 %
Vecindad 3x1 12 mejores	0.258968254	0.2521559379	0.1666666667	22.59302862 %
Vecindad 2x1 10 %	0.086468254	0.0821545316	0	5.62075952 %
Vecindad 2x1 25 %	0.1322474747	0.0895125969	0.4583333333	22.6697801633333 %
Vecindad 2x1 50 %	0.1164862915	0.0996809898	0.7416666667	31.9277982666667 %
Vecindad 2x1 75 %	0.1488816739	0.1212623738	1.075	44.8381349233333 %
Vecindad 2x1 100 %	0.0852272727	0.0990432947	1.0333333333	40.58679669 %
Vecindad 3x1 10 %	0.2001839827	0.1837163913	0	12.7966791333333 %
Vecindad 3x1 25 %	0.1706132756	0.1460248135	0.1666666667	16.1101585266667 %
Vecindad 3x1 50 %	0.2624531025	0.203697747	0.4833333333	31.64947276 %
Vecindad 3x1 75 %	0.2133477633	0.2416739045	0.9416666667	46.5562778166667 %
Vecindad 3x1 100 %	0.2849206349	0.2945727019	0.4833333333	35.42755567 %

Cuadro 1: Promedio de porcentajes de error de GRASP con respecto al algoritmo exacto para cada vecindad y cada selección de solución inicial. Con criterio de parada fijado en 5 repeticiones sin mejorar la mejor solución hallada

	Ejes Fijos	Nodos Fijos	Tableros	Porcentaje de error
Vecindad 2x1 3 mejores	0.1823232323	0.0716093318	0.3333333333	19.5755299133333 %
Vecindad 2x1 5 mejores	0.1201370851	0.0936978155	0.4166666667	21.01671891 %
Vecindad 2x1 7 mejores	0.1566738817	0.0903101931	0.3333333333	19.3439136033333 %
Vecindad 2x1 10 mejores	0.1187950938	0.124087402	0.6166666667	28.65163875 %
Vecindad 2x1 12 mejores	0.0911976912	0.1113699446	0.6166666667	27.3078100833333 %
Vecindad 3x1 3 mejores	0.2596572872	0.1778930085	0.55	32.91834319 %
Vecindad 3x1 5 mejores	0.2637698413	0.2698233628	0.6333333333	38.8975512466667 %
Vecindad 3x1 7 mejores	0.3213239538	0.2286797787	0.55	36.6667910833333 %
Vecindad 3x1 10 mejores	0.2844047619	0.2735979587	0.4833333333	34.7112017966667 %
Vecindad 3x1 12 mejores	0.2242460317	0.269319628	0.2833333333	25.8966331 %
Vecindad 2x1 10 %	0.0830808081	0.0538074353	0	4.56294144666667 %
Vecindad 2x1 25 %	0.1161616162	0.0841469551	0	6.67695237666667 %
Vecindad 2x1 50 %	0.218989899	0.1268513858	0.325	22.36137616 %
Vecindad 2x1 75 %	0.2454076479	0.126309841	0.3333333333	23.5016940733333 %
Vecindad 2x1 100 %	0.2024242424	0.1329405378	0.8333333333	38.9566037833333 %
Vecindad 3x1 10 %	0.1853138528	0.1630435123	0	11.61191217 %
Vecindad 3x1 25 %	0.2839177489	0.2205421872	0.1666666667	22.37088676 %
Vecindad 3x1 50 %	0.2687914863	0.212152652	0.45	31.0314712766667 %
Vecindad 3x1 75 %	0.3088888889	0.1862762984	0.5916666667	36.2277284666667 %
Vecindad 3x1 100 %	0.3076803752	0.2703141941	0.9666666667	51.4887078666667 %

Cuadro 2: Promedio de porcentajes de error de GRASP con respecto al algoritmo exacto para cada vecindad y cada selección de solución inicial. Con criterio de parada fijado en 10 repeticiones sin mejorar la mejor solución hallada

Para seleccionar la mejor combinación de parámetros de la heurística, respecto a la solución encontrada contra la óptima del algoritmo exacto, tomamos como criterio que se minimice la suma de cada fila, es decir, que para casos donde los grafos incrementan su cantidad de ejes, o bien solo su cantidad de nodos, y tableros de caballos, la diferencia contra la óptima sea mínima.

Esto nos lleva a que la combinación óptima es: Vecindad 2x1 10 % mejores con 10 iteraciones consecutivas sin ver modificaciones en el óptimo hallado hasta ese momento. Con un error promedio del 4,5 %.

Vale también para las ejecuciones con 5 iteraciones sin modificar el óptimo que la misma configuración es la de menor error promedio (5,6 %).

Además nos interesa ver que sucede con los tiempos de ejecución, para ver si existe alguna configuración que convenga aplicar por esta métrica.

Para esto, se tomaron tiempos de las mismas instancias para las que analizamos el porcentaje de acierto del óptimo.

En primer lugar analizamos grafos completos y vacíos, esperamos que sus gráficos sean paráolas cuadráticas, ya que tienen una única solución posible en cuánto a la cantidad de nodos de la misma. Recordando que GRASP ejecuta una adaptación del algoritmo Greedy de costo $O(n^2)$ y sabiendo que el algoritmo de búsqueda local retorna en tiempo constante si la solución hallada es o bien un nodo (grafo completo), o bien todos los nodos del grafo (grafo vacío, todas componentes conexas triviales), podemos argumentar por qué esperamos encontrar esa curva particular.

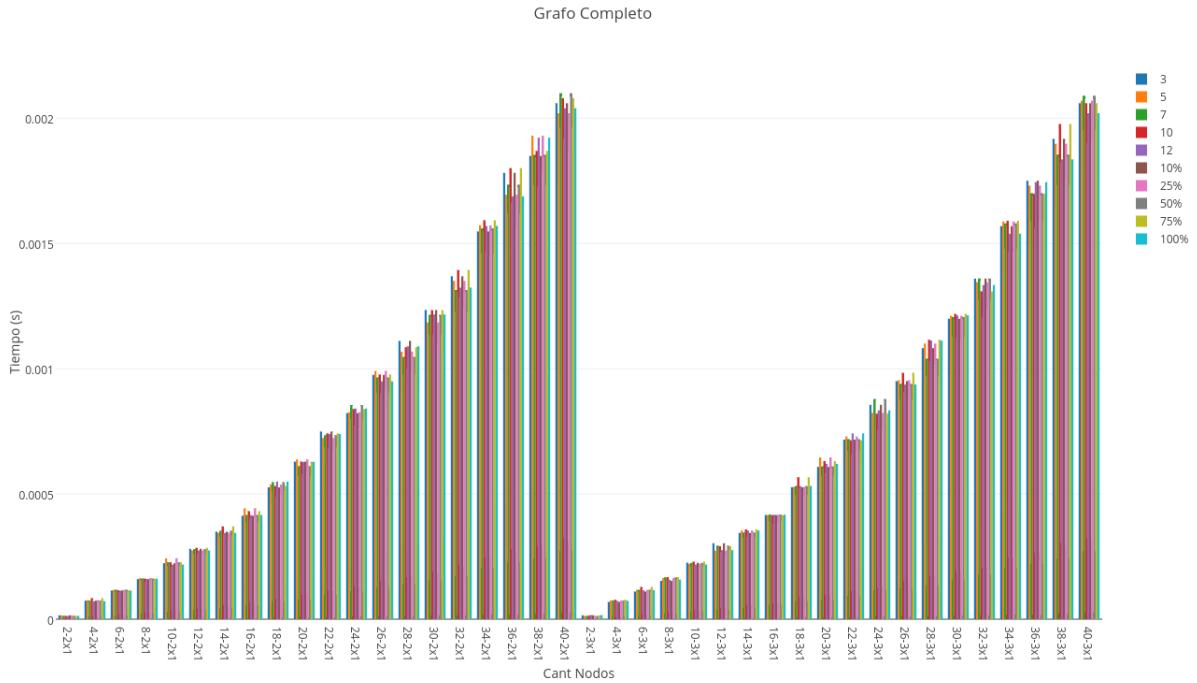


Figura 1: Comparación tiempos de ejecución de la heurística GRASP para grafos completos, aumentando su cantidad de nodos y contrastando las dos vecindades planteadas. Criterio de parada = 5 iteraciones

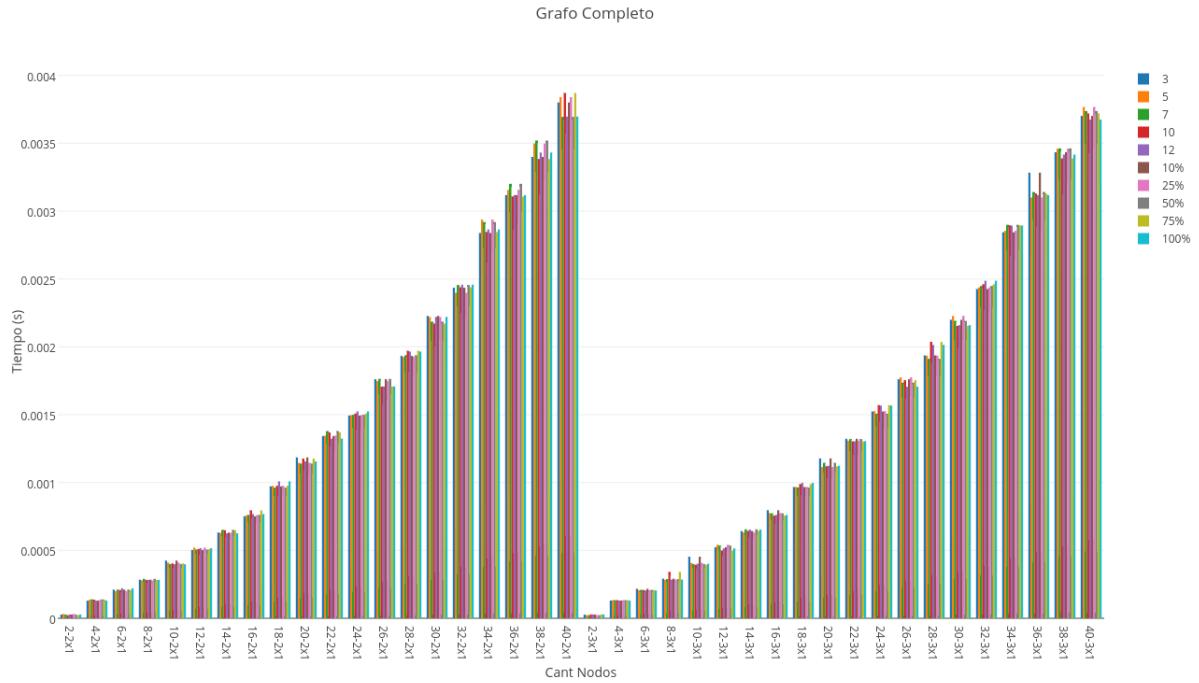


Figura 2: Comparación tiempos de ejecución de la heurística GRASP para grafos completos, aumentando su cantidad de nodos y contrastando las dos vecindades planteadas. Criterio de parada = 10 iteraciones

Estos dos gráficos verifican la curvatura que esperábamos para el caso del grafo completo, como también que no importa que vecindad se ejecute, pues nunca se intenta mejorar la solución inicial dado que sabemos que es óptima por sus características. Además se aprecia que el alpha elegido no genera oscilaciones significativas al ejecutarse bajo la misma instancia.

El anterior permite vislumbrar que efectivamente los criterios de parada afectan al tiempo de ejecución, se puede ver que las columnas pares duplican a la de su izquierda. Esto se da porque las columnas impares son mediciones sobre no mejorar el óptimo durante 5 iteraciones y las demás durante 10.

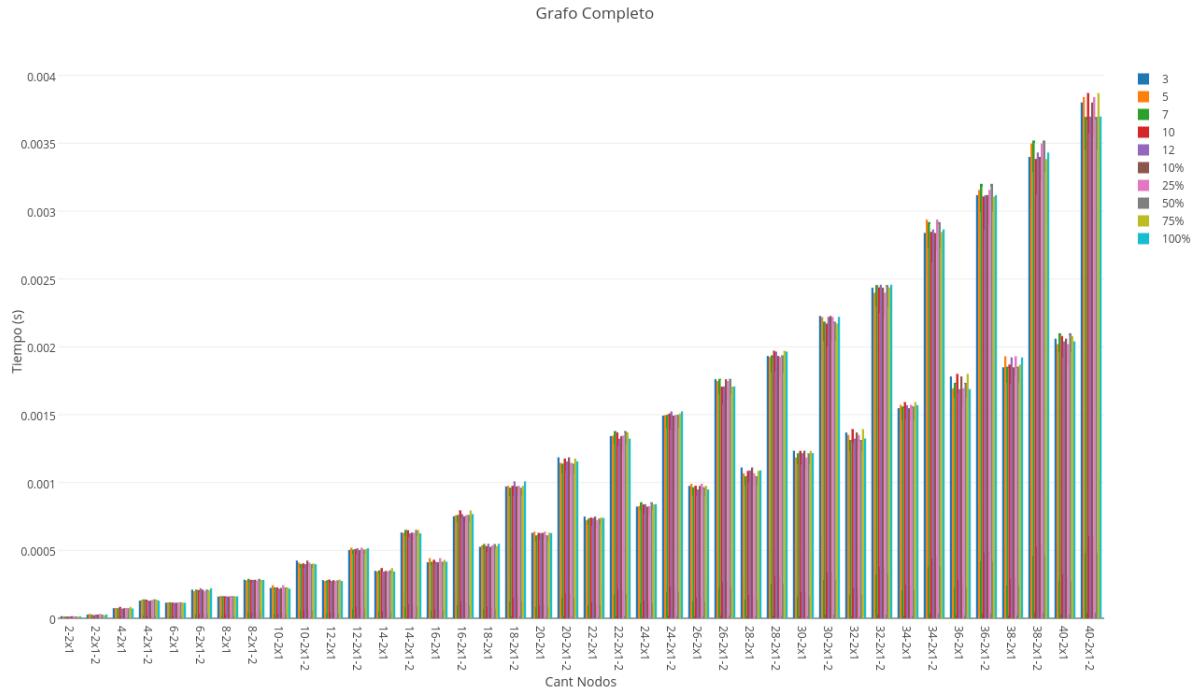


Figura 3: Comparación tiempos de ejecución contrastando los criterios de parada utilizados

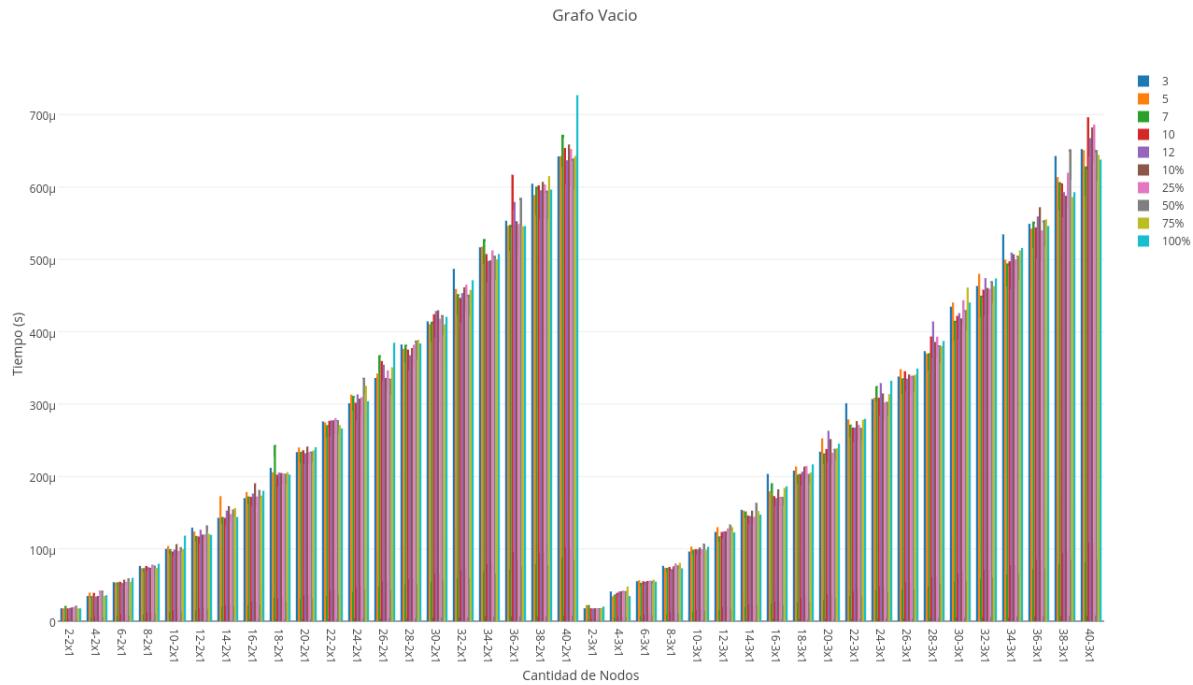


Figura 4: Comparación tiempos de ejecución de la heurística GRASP para grafos vacíos, aumentando su cantidad de nodos y contrastando las dos vecindades planteadas. Criterio de parada = 5 iteraciones

Estos 3 gráficos de grafos vacíos se pueden analizar del mismo modo que a los de grafos completos y verificar que cumplen con las mismas características, pues son mínimas en su conjunto de vecindades asociados.

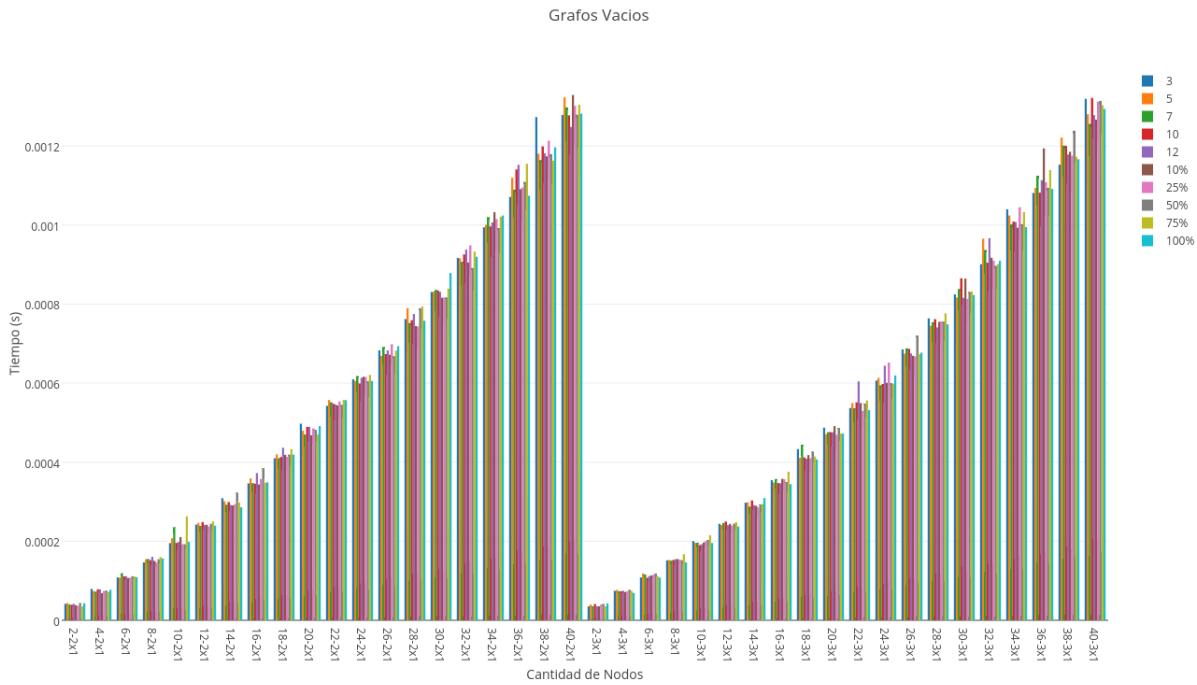


Figura 5: Comparación tiempos de ejecución de la heurística GRASP para grafos vacíos, aumentando su cantidad de nodos y contrastando las dos vecindades planteadas. Criterio de parada = 10 iteraciones

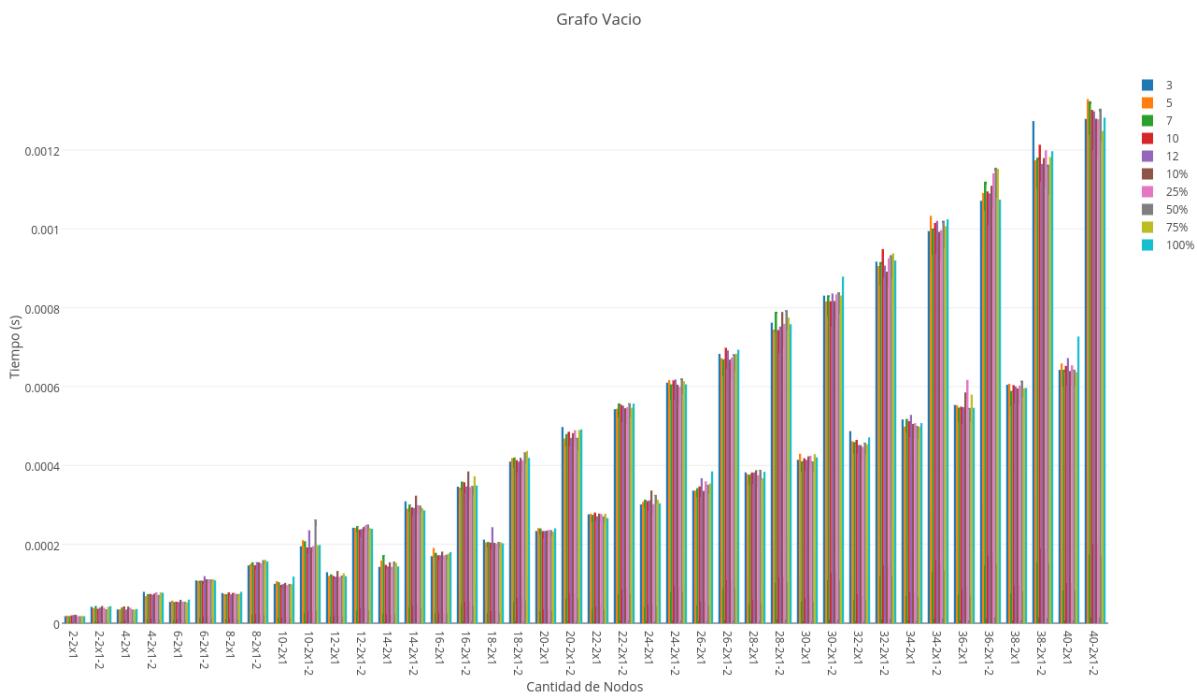


Figura 6: Comparación tiempos de ejecución contrastando los criterios de parada utilizados

Este gráfico y el siguiente muestran lo analizado en las secciones de las heurísticas anteriores, los tiempos de ejecución dependen de la cantidad de nodos que posea el grafo.

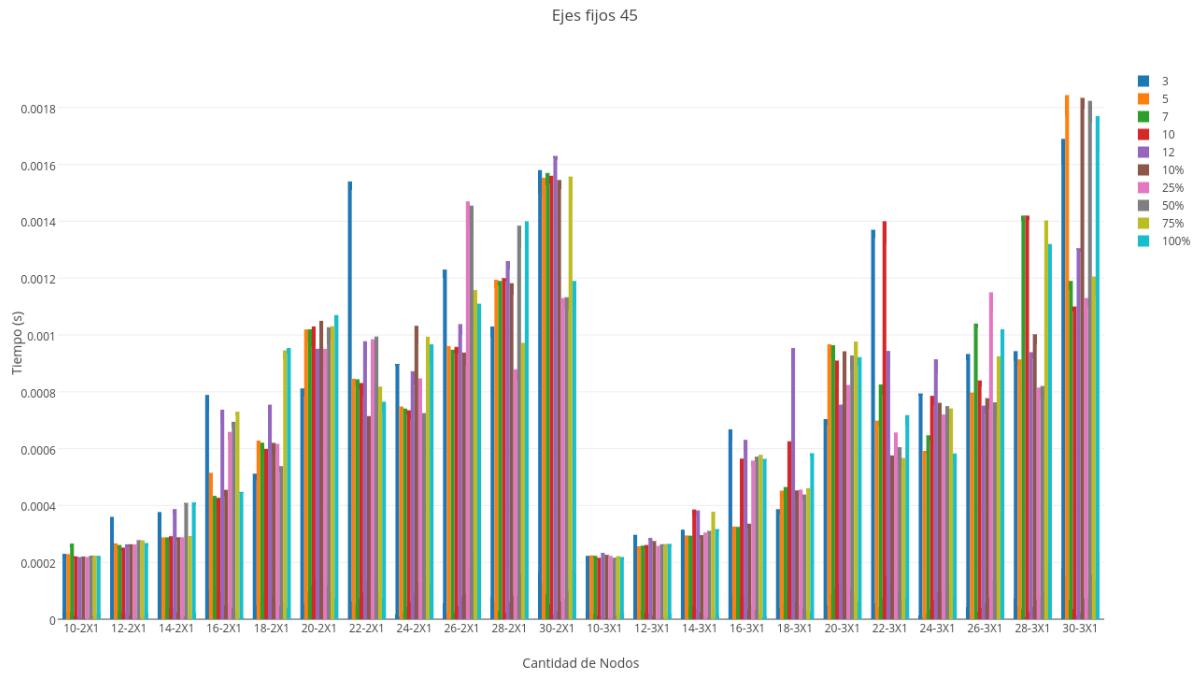


Figura 7: Comparación tiempos de ejecución de la heurística GRASP para grafos aleatorios con 45 ejes, aumentando su cantidad de nodos y contrastando las dos vecindades planteadas. Criterio de parada = 5 iteraciones

Mantener la cantidad de ejes fija y modificar la cantidad de nodos implica que no tendremos una solución trivial como en los casos anteriores, entonces el algoritmo comienza a revisar la vecindad de la solución inicial. Como el método para generarla es randomizado, a priori no sabemos cuántas veces actualizará su óptimo, y esto explica los altos y bajos para algunas ejecuciones de la misma instancia para distintos alphas y vecindades; no obstante se observa que se mantiene una marcada relación instancia-tiempo de ejecución más allá de la vecindad seleccionada.

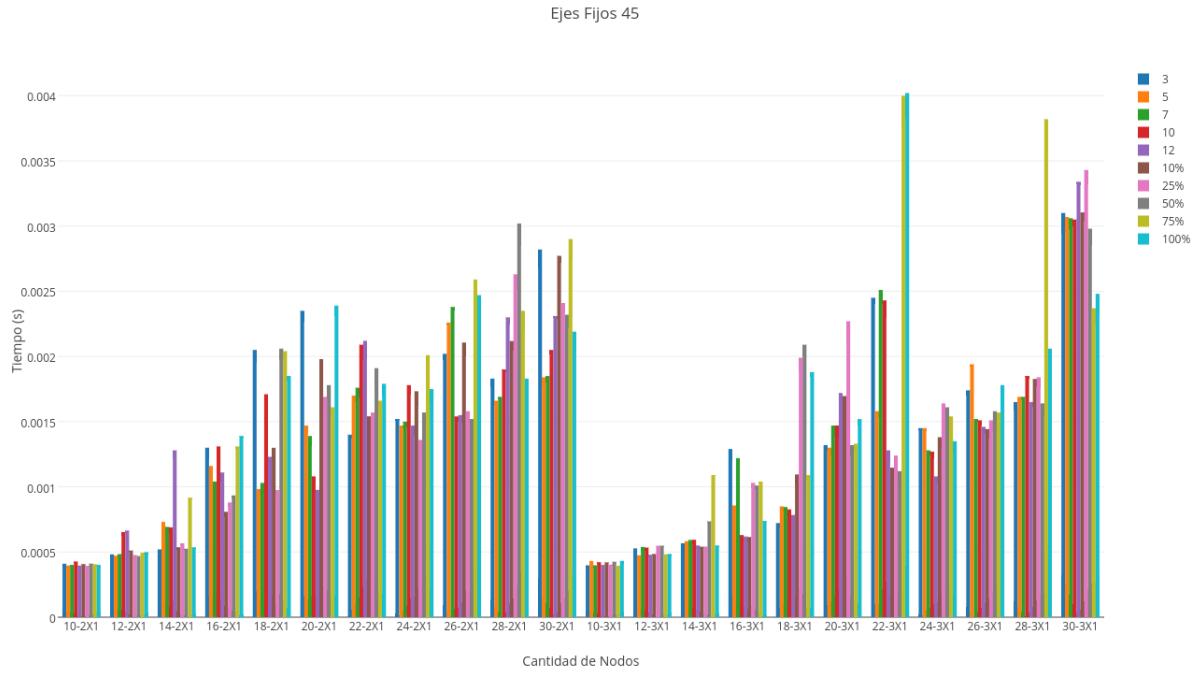


Figura 8: Comparación tiempos de ejecución de la heurística GRASP para grafos aleatorios con 45 ejes, aumentando su cantidad de nodos y contrastando las dos vecindades planteadas. Criterio de parada = 10 iteraciones

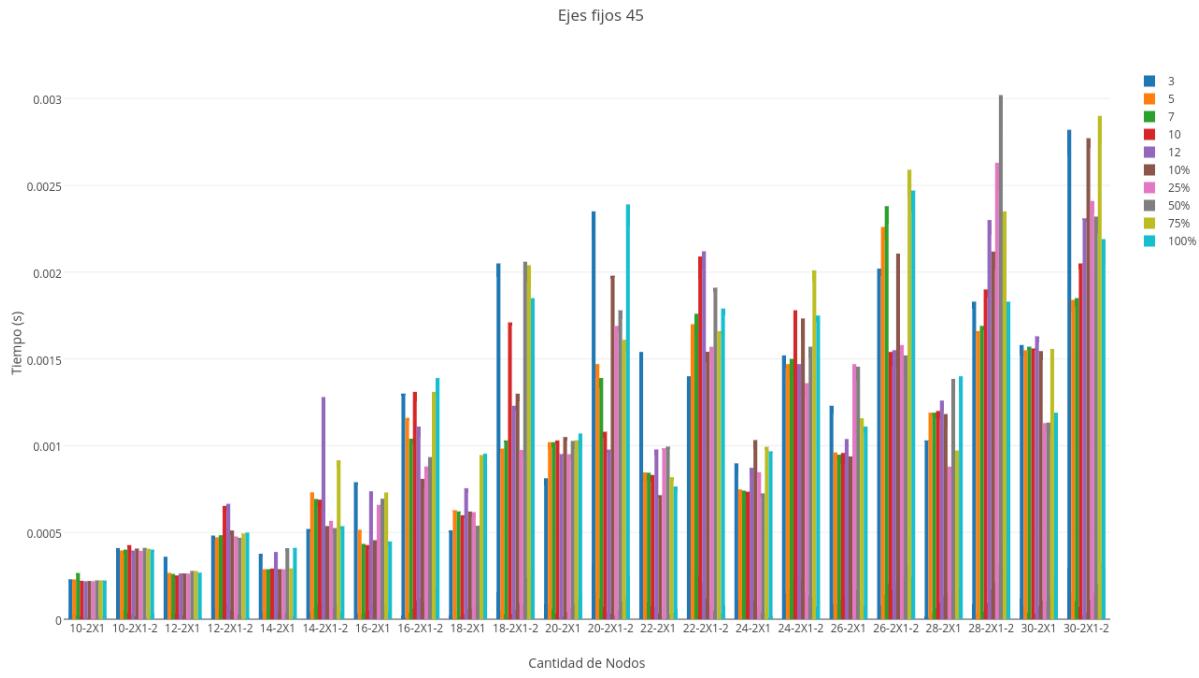


Figura 9: Comparación tiempos de ejecución contrastando los criterios de parada utilizados

Nuevamente, como en los casos Completo y Vacío, la tendencia de que parar luego de 10 iteraciones duplique a parar a las 5, se mantiene vigente.

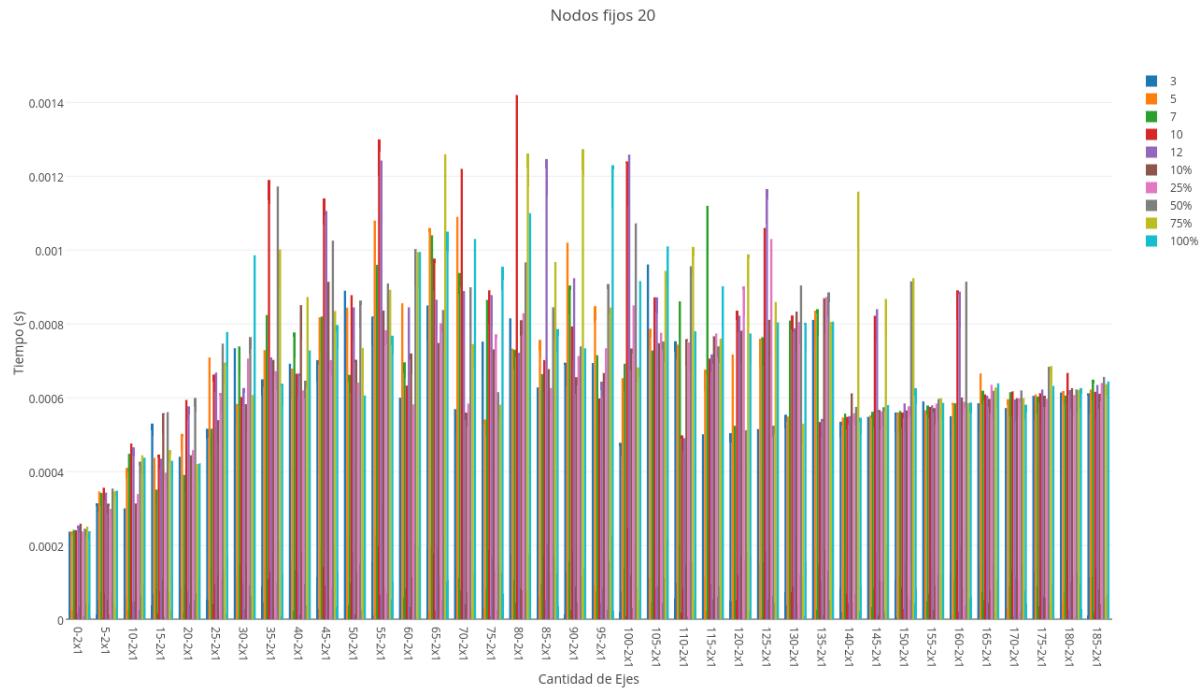


Figura 10: Comparación tiempos de ejecución de la heurística GRASP para grafos aleatorios con 20 nodos, aumentando su cantidad de ejes. Criterio de parada = 5 iteraciones. Vecindad 2x1

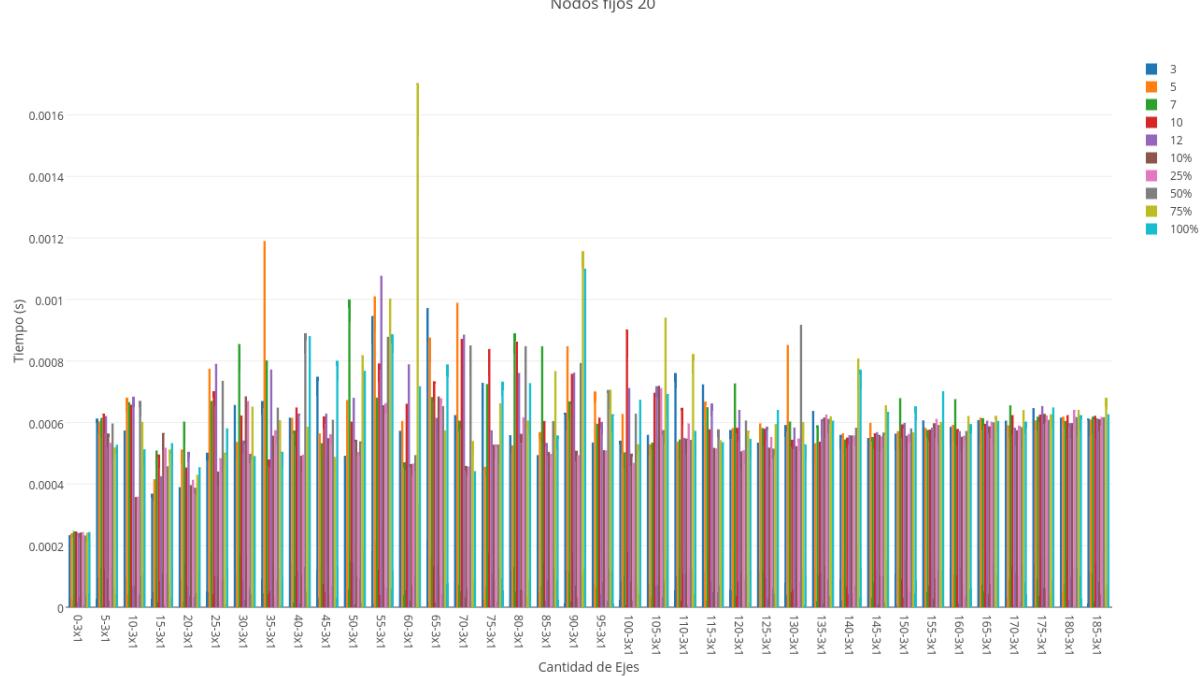


Figura 11: Comparación tiempos de ejecución de la heurística GRASP para grafos aleatorios con 20 nodos, aumentando su cantidad de ejes. Criterio de parada = 5 iteraciones. Vecindad 3x1

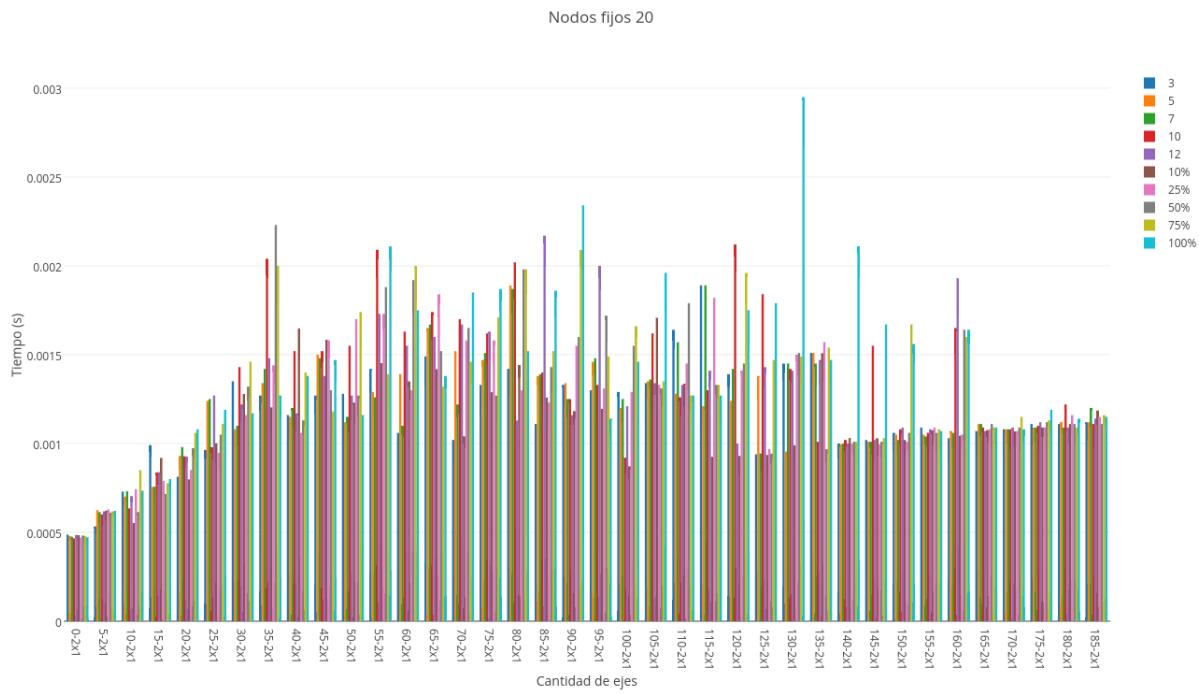


Figura 12: Comparación tiempos de ejecución de la heurística GRASP para grafos aleatorios con 20 nodos, aumentando su cantidad de ejes. Criterio de parada = 10 iteraciones. Vecindad 2x1

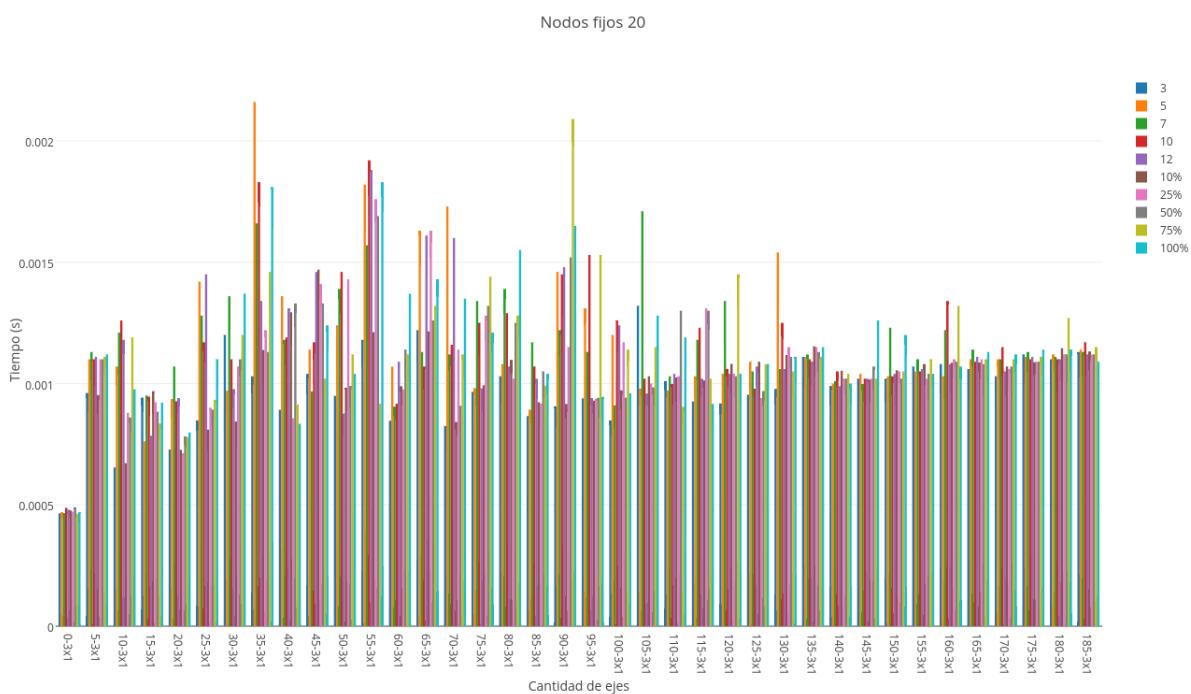


Figura 13: Comparación tiempos de ejecución de la heurística GRASP para grafos aleatorios con 20 nodos, aumentando su cantidad de ejes. Criterio de parada = 10 iteraciones. Vecindad 3x1

Estos últimos cuatro gráficos tiene la característica de tener un tiempo de ejecución aproximadamente constante. No obstante en la zona media hay oscilaciones en función del alpha elegido que no se presentan en los extremos izquierdo y derecho.

Esto se debe a que el primer caso es el grafo vacío (solución trivial) y los siguientes poseen muchos ejes aunque no todos, haciendo que la vecindad tarde más en recorrerse completamente.

Comparando los tiempos hallados y viendo que las fluctuaciones, entre el alpha elegido y la vecindad tomada no presentan aumentos descomunales en los tiempos de ejecución, concluimos que salvo para el caso de alpha igual a 100 %, las ejecuciones son de tiempos semejantes.

Por lo tanto decidimos que la mejor configuración para ejecutar la heurística GRASP es la que mejor resultados provee en cuánto a qué tan cerca del óptimo está. Que como se mencionó anteriormente es con alpha = 10 %, y la vecindad 2x1.

La distinción entre que itere 5 o 10 veces sin modificar el óptimo, si bien aquí se concluyó que duplica el tiempo de ejecución, decidimos mantenerlo en 10 para el experimento del inciso 6. Esto es para poder medir la diferencia en la solución hallada por esta heurística en contraposición con la de búsqueda local, con una cantidad razonable de instancias iniciales con alta probabilidad de ser distintas entre sí.

6. Comparación entre todos los métodos

6.1. Comparación

Aquí compararemos todos los algoritmos contra el exacto, que es el que nos da la solución óptima en todos los casos y veremos cuál es la diferencia existente.

Comenzando con 45 ejes fijos y variando los nodos, los resultados fueron:

Nodos	Exacto	Local	Grasp	Greedy
10	1	1	1	1
12	2	2	2	2
14	2	2	2	2
16	3	3	3	3
18	4	4	4	4
20	5	7	7	7
22	5	5	5	5
24	7	7	7	7
26	7	8	8	9
28	9	10	10	11
30	12	14	14	14

Recién pueden empezar a notarse las diferencias cuando la cantidad de nodos es mayor que 26.

Continuamos con 90 ejes fijos:

Nodos	Exacto	Local	Grasp	Greedy
15	1	1	1	2
17	2	2	2	2
19	3	3	3	3
21	3	3	4	4
23	4	4	4	5
25	3	3	4	6
27	5	5	5	8
29	6	7	8	7
31	6	9	8	9
33	7	8	8	9

Nuevamente, los algoritmos suelen coincidir con el exacto cuando la cantidad de nodos es baja, pero luego comienzan a verse disparidades.

Ahora fijaremos los nodos y variaremos la cantidad de ejes.

Con 10 nodos fijos:

Ejes	Exacto	Local	Grasp	Greedy
0	10	10	10	10
5	6	6	6	6
10	4	4	4	5
15	3	3	3	4
20	3	3	3	3
25	2	2	2	3
30	2	2	2	3
35	2	2	2	2
40	1	1	1	1
45	1	1	1	1

Como la cantidad de nodos es baja, era bastante probable que los algoritmos consigan la respuesta

óptima. De todas formas, podemos ver que el Greedy falla en algunos casos.

Con 20 nodos fijos:

Ejes	Exacto	Local	Grasp	Greedy
0	20	20	20	20
5	15	15	15	15
10	11	11	11	11
15	10	12	10	12
20	8	8	8	8
25	8	8	8	8
30	6	7	7	8
35	6	6	6	7
40	5	6	6	6
45	5	6	6	6
50	4	4	4	5
55	5	5	5	5
60	4	4	4	4
65	5	5	5	5
70	3	3	3	3
75	3	3	3	4

Con 30 nodos fijos:

Ejes	Exacto	Local	Grasp	Greedy
0	30	30	30	30
5	25	25	25	25
10	21	21	22	21
15	17	19	20	19
20	16	16	19	16
25	16	15	15	15
30	13	12	12	12
35	10	12	13	13
40	10	12	12	12
45	10	10	10	11
50	11	11	13	12
55	9	9	11	10
60	8	11	11	11
65	9	10	10	10
70	8	9	9	10
75	7	9	9	10
80	6	6	6	6
85	6	7	7	8
90	6	7	7	7
95	5	7	7	9
100	5	7	7	7
105	5	6	6	6
110	5	6	6	8
115	5	5	5	6
120	5	5	5	5

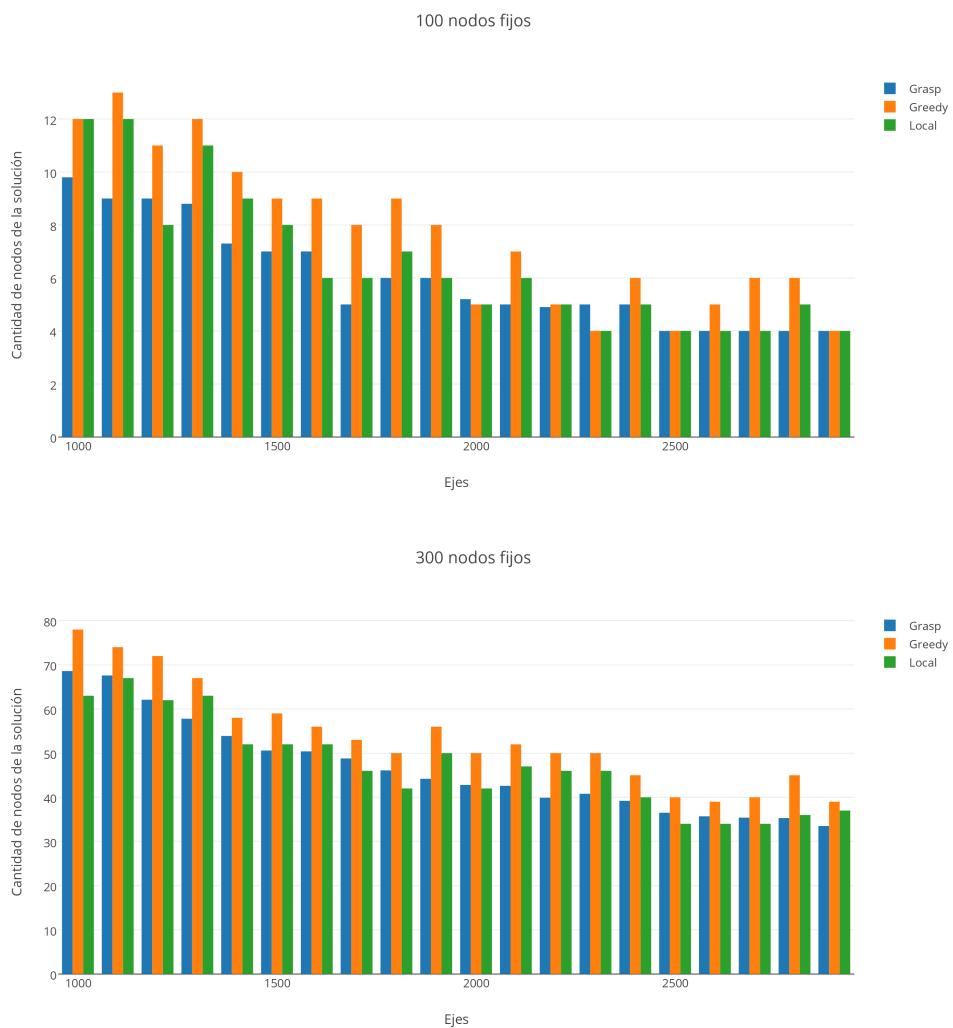
6.2. Resultados

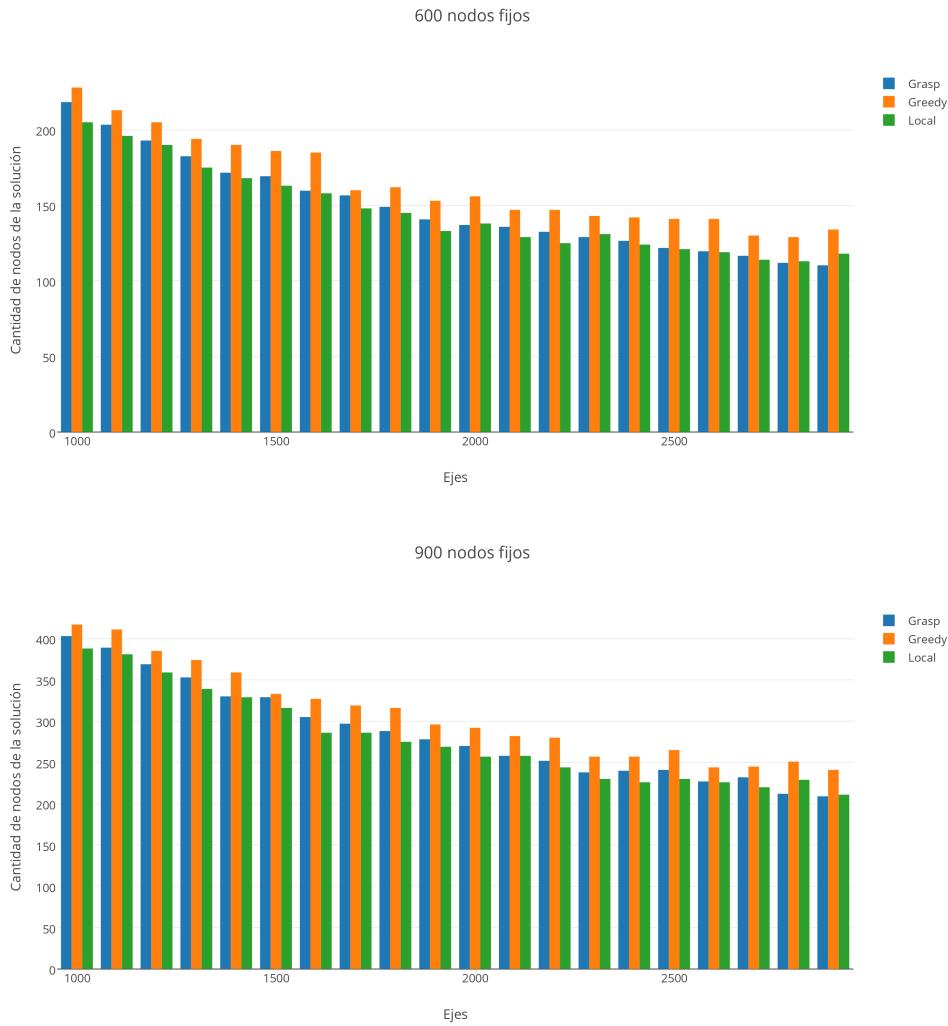
6.2.1. Nodos fijos

Aquí se comparan los resultados de los 3 algoritmos (Grasp, Greedy y Local), manteniendo los nodos fijos. Nuestros tests fueron con nodos fijos desde 100 hasta 1000 y para cada una de esas instancias, variando los ejes de a 100, comenzando con 1000 ejes.

En estos gráficos, vamos a buscar, para cada cambio en los ejes, cuál fue el que menos nodos utiliza en su respuesta. Éste será el mejor en cuanto a resultados.

Mostraremos los gráficos con 100, 300, 600 y 900 nodos fijos:





Analizando estos gráficos, podemos ver rápidamente que el algoritmo Greedy nos devuelve en todos los casos una solución peor que los otros dos, ya que utiliza mayor cantidad de nodos. Por otra parte, se puede ver cierta ventaja del Grasp para los casos más chicos (100, 300 nodos), pero para los casos grandes (600, 900 nodos), se ve que el Local es mejor en casi todos los casos.

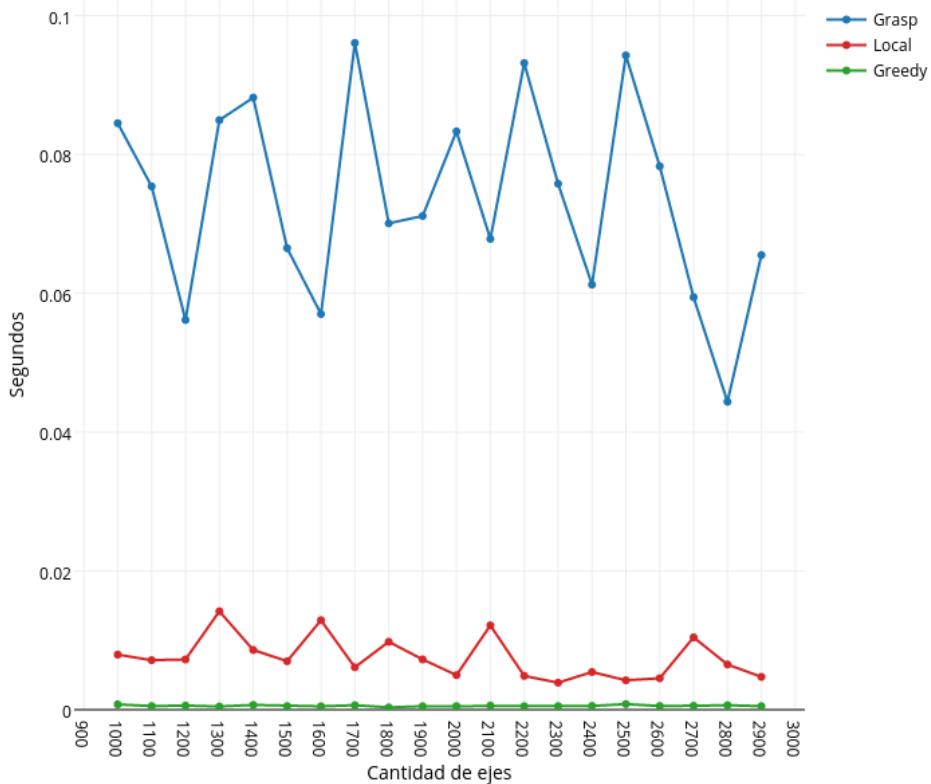
No podemos distinguir claramente cuál es la mejor opción entre estos dos, ya que los valores son bastante cambiantes a lo largo de los 4 gráficos, por lo que buscamos el promedio de nodos que utiliza cada algoritmo. Los resultados fueron los siguientes:

Nodos	Grasp	Local	Greedy
100	6	6.55	7.65
300	46.59	47.25	53.65
600	149.255	145.65	164.3
900	289.925	277.95	307.55

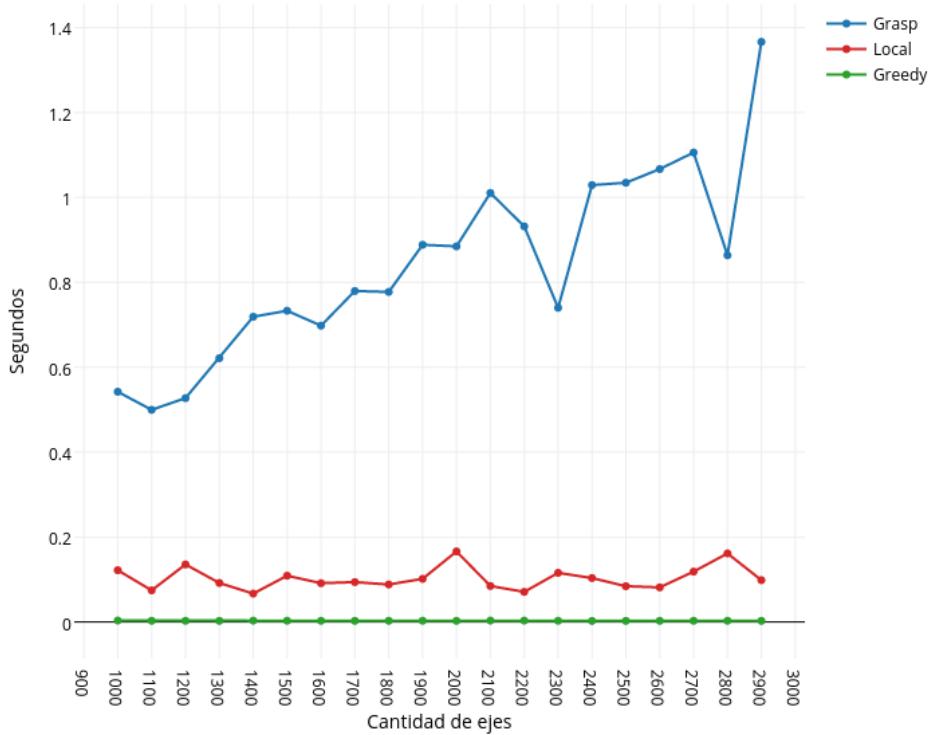
Estos promedios confirman los datos que se podían apreciar en los gráficos, es decir, que el Greedy utiliza siempre mayor cantidad de nodos que los otros, que Grasp es mejor en los casos chicos y que a medida que crece la cantidad de nodos, es preferible el Local.

También se analizaron los tiempos de ejecución en las mismas instancias, cuyos resultados fueron los siguientes:

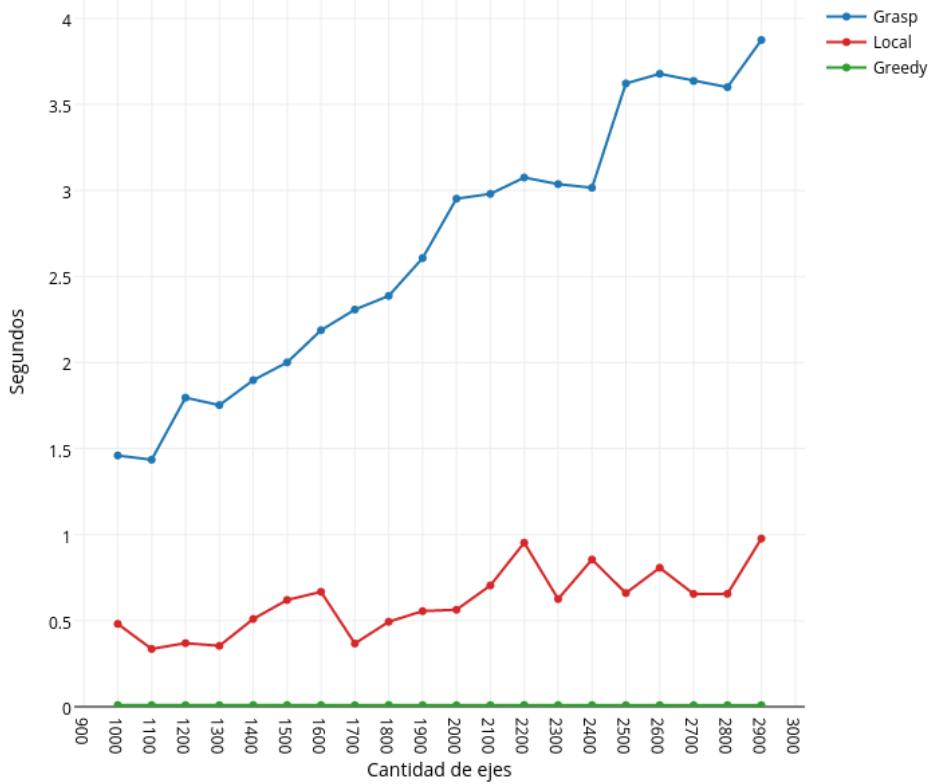
Promedio de tiempos de ejecución con 100 nodos fijos



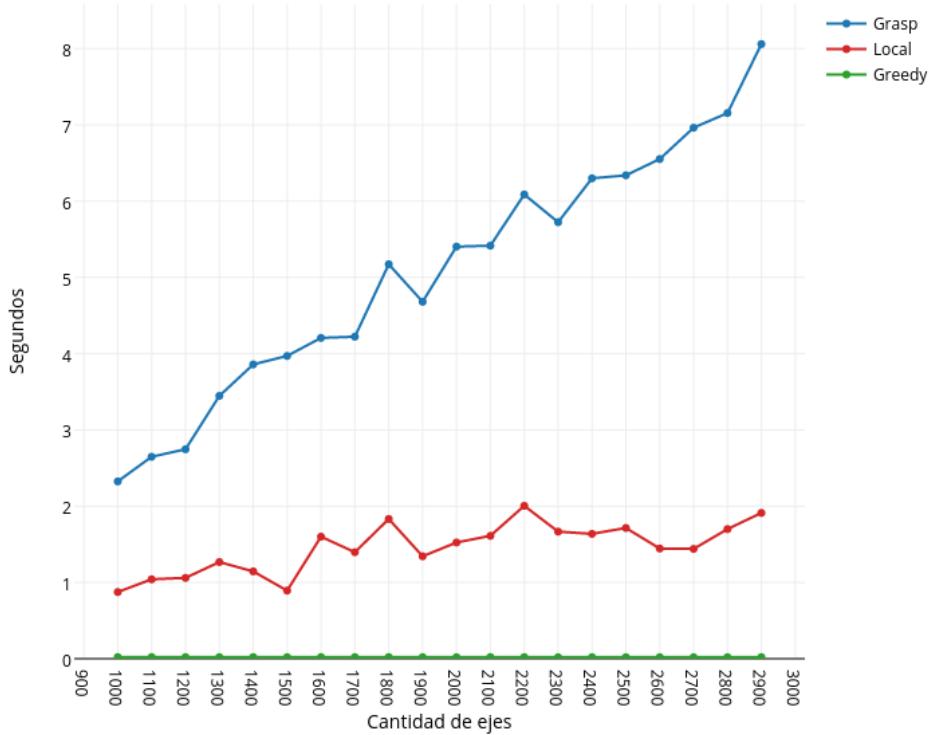
Promedio de tiempos de ejecución con 300 nodos fijos



Promedio de tiempos de ejecución con 600 nodos fijos



Promedio de tiempos de ejecución con 900 nodos fijos

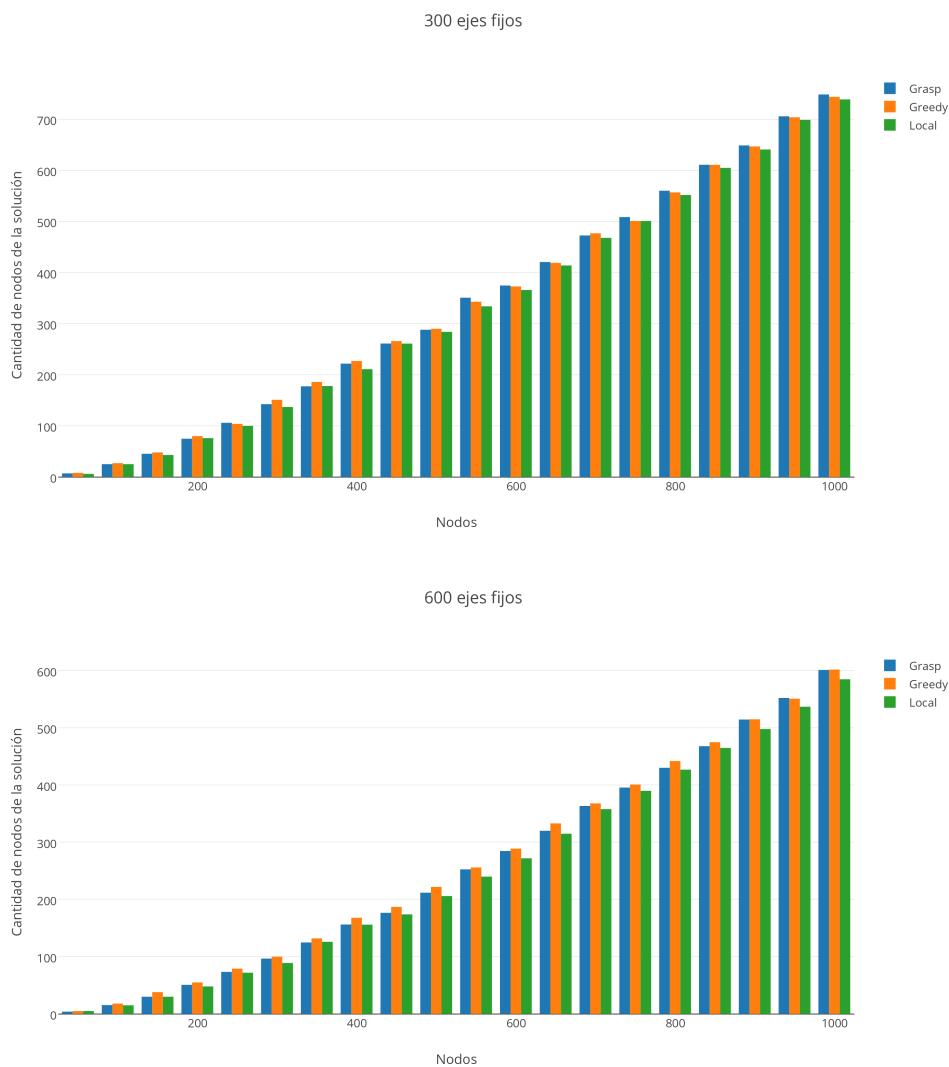


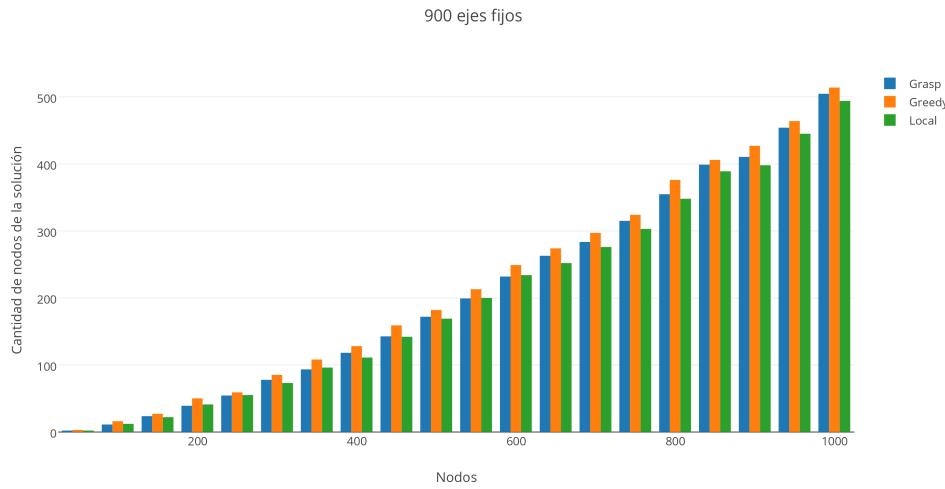
Se puede observar, que los algoritmos empeoran a mayor cantidad de nodos, pero debe notarse, que en general, Local y Greedy permanecen más bien constantes, mientras que Grasp empeora a mayor cantidad de ejes tiene, en grafos más grandes. Por lo tanto, y conforme al análisis anterior, queda aún más claro que para casos grandes, Local es la mejor alternativa al momento de fijar nodos y variar ejes, sea por tiempos de ejecución, como por mejor resultado.

6.2.2. Ejes Fijos

Para continuar, realizamos los mismos tests, pero manteniendo los ejes fijos y variando la cantidad de nodos. Los tests realizados fueron con ejes fijos desde 0 hasta 1000 y para cada instancia, los nodos varían de 50 a 1000.

Mostraremos los resultados obtenidos con 300, 600 y 900 ejes fijos:





A primera vista, se puede ver que para casi todas las instancias el algoritmo de Búsqueda Local es el que menos nodos utiliza en su solución. En cuanto al Greedy y el Grasp, las diferencias son chicas y alternadas con 300 ejes, pero con 600 y 900 ejes, Greedy aparenta ser el peor.

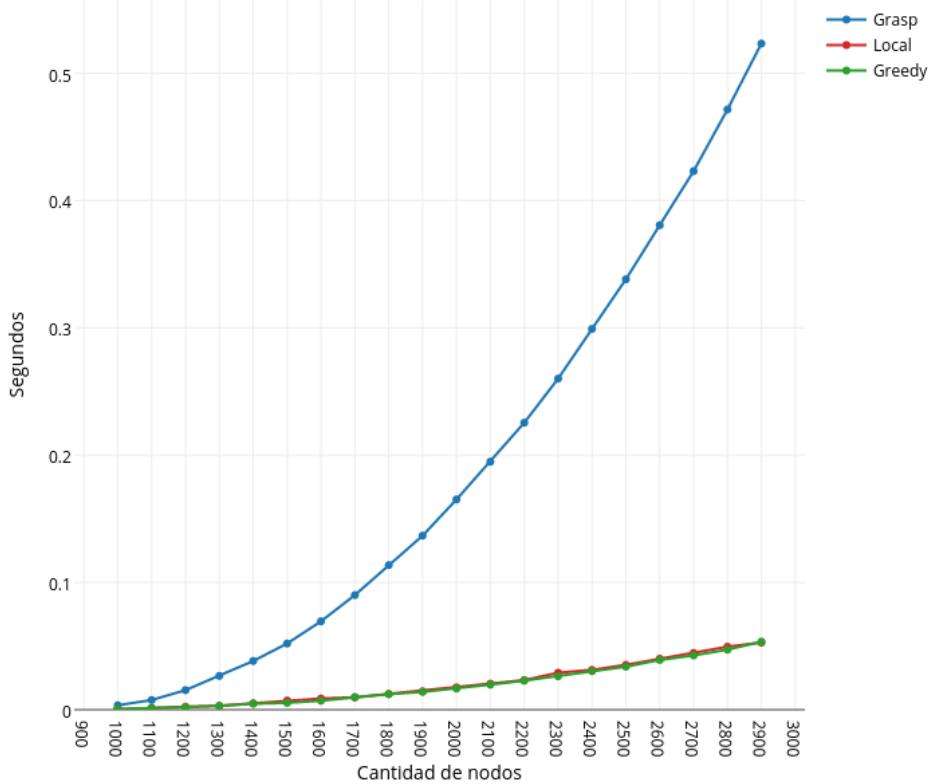
Para corroborar estos datos, tomamos nuevamente el promedio de todas las soluciones:

Nodos	Grasp	Local	Greedy
300	337.61	332	338.15
600	256.165	250.4	261.8
900	207.44	203.1	217.9

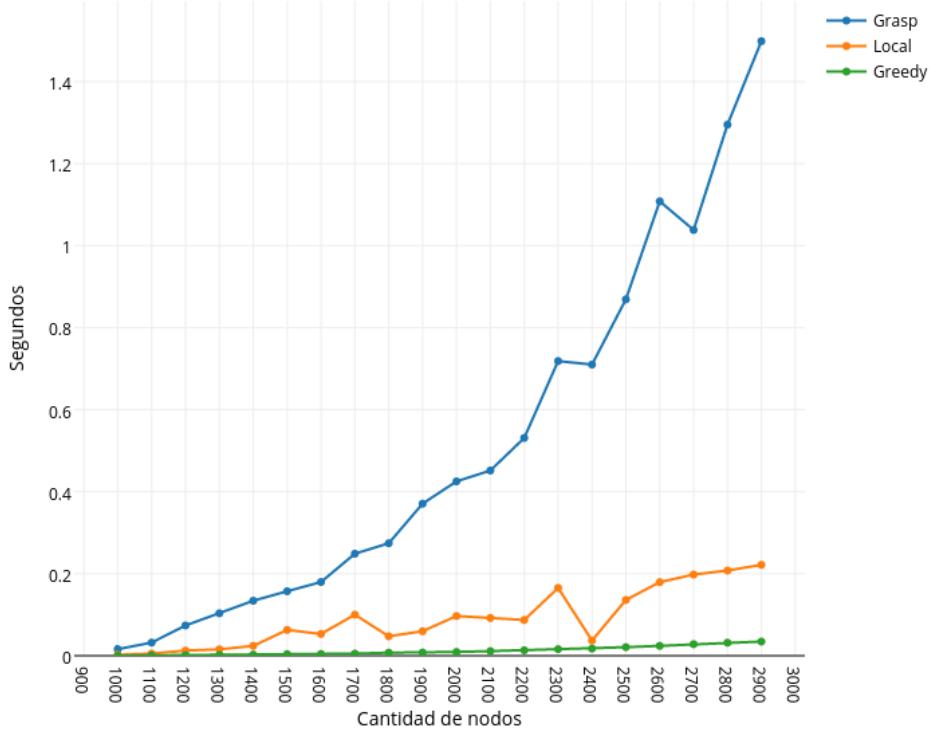
Como preveíamos, estos promedios confirman nuestro análisis.

Nuevamente, para fortalecer nuestra conclusión, se analizaron los tiempos de ejecución en las mismas instancias, cuyos resultados fueron los siguientes:

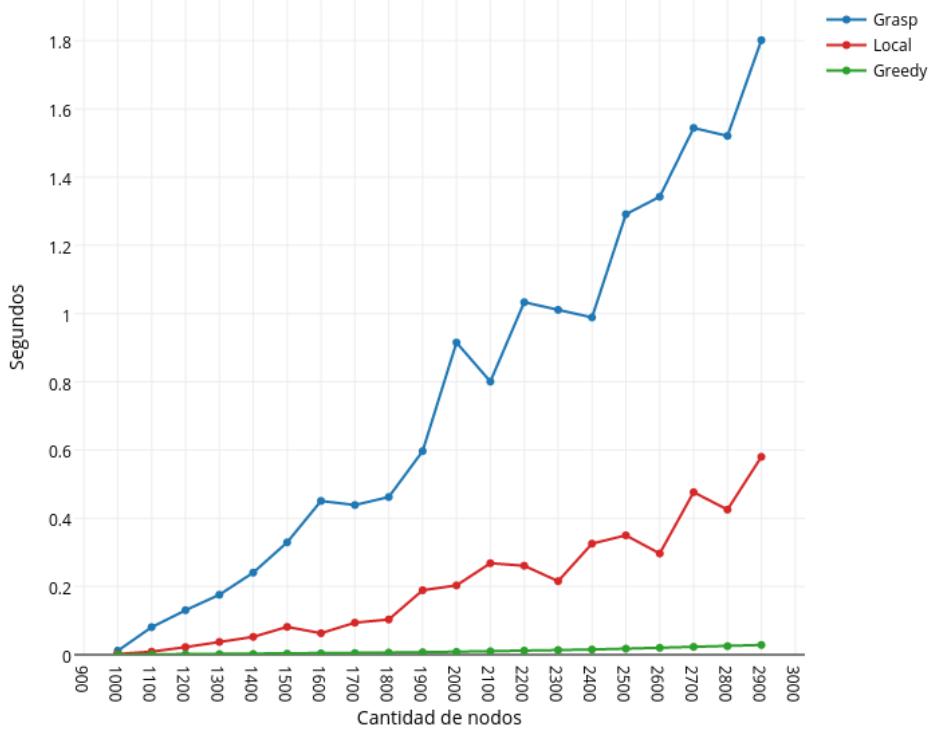
Promedio de tiempos de ejecución con 0 ejes fijos



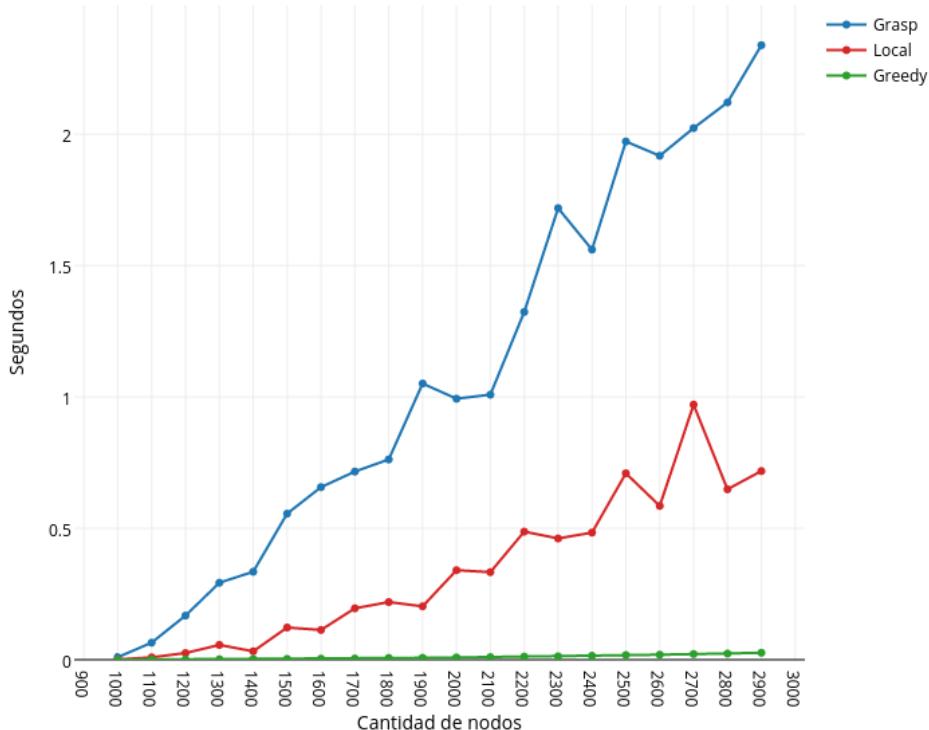
Promedio de tiempos de ejecución con 300 ejes fijos



Promedio de tiempos de ejecución con 600 ejes fijos



Promedio de tiempos de ejecución con 900 ejes fijos



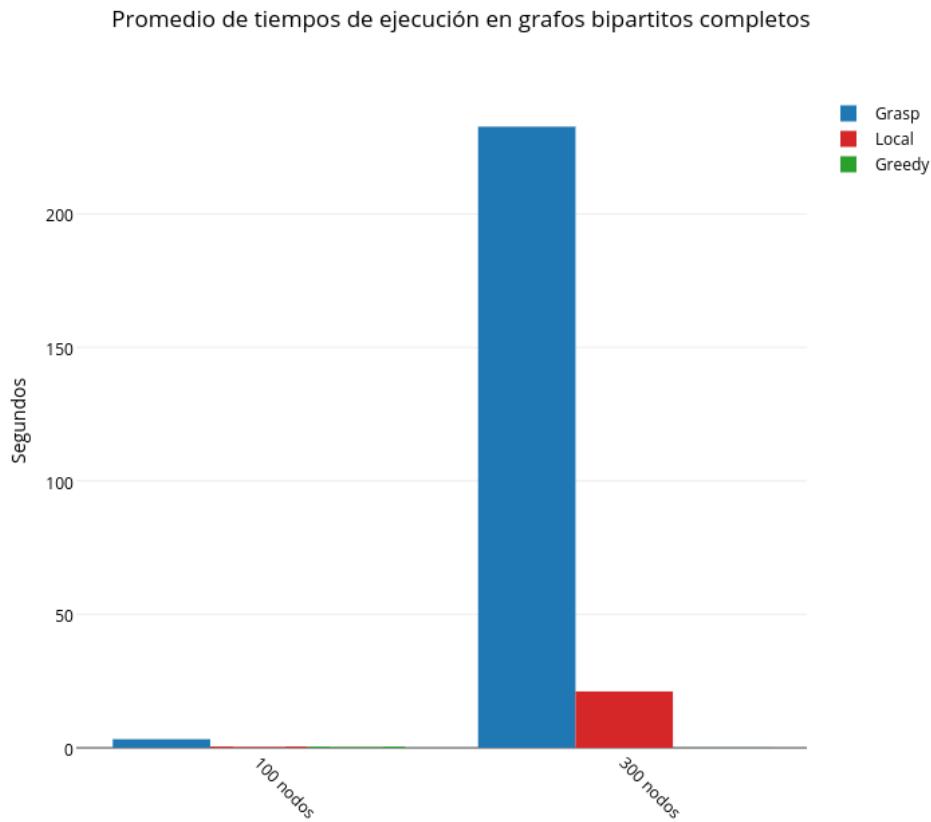
Como era esperado, Grasp insume mayor tiempo que Local y Greedy para cualquier caso. Considerando los resultados y los tiempos de ejecución, concluimos que Local es la mejor alternativa, si se mantienen

ejes y se varían nodos.

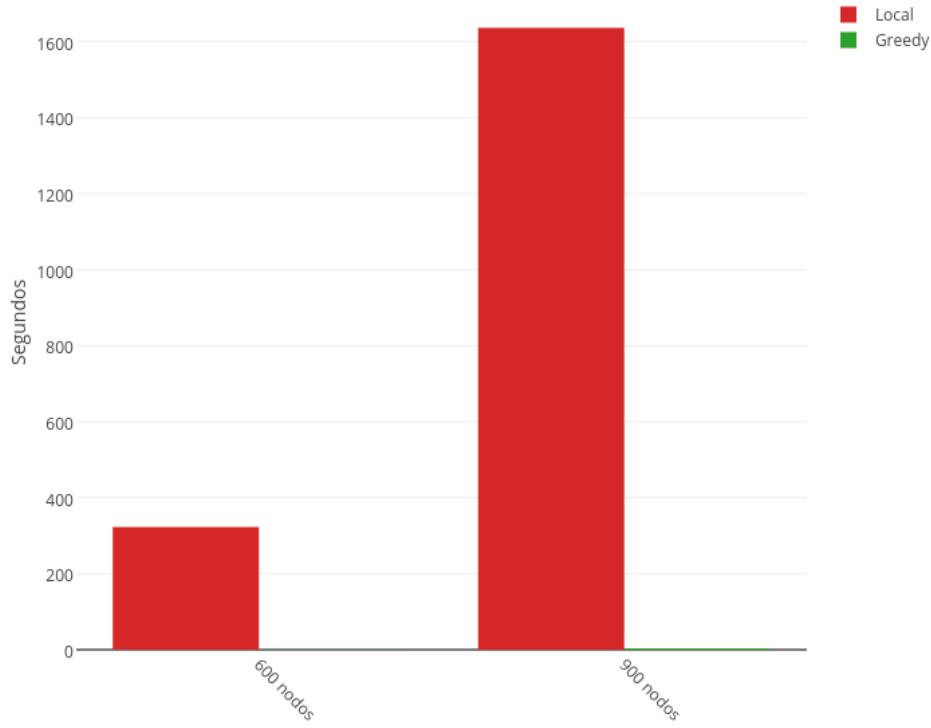
6.2.3. Grafo bipartito completo

Dado que los resultados siempre son óptimos, se omitieron los gráficos de resultados para este caso.

Analizando los tiempos de ejecución sobre instancias de 100, 300, 600 y 900 nodos, se obtuvieron los siguientes resultados:



Promedio de tiempos de ejecución en grafos bipartitos completos



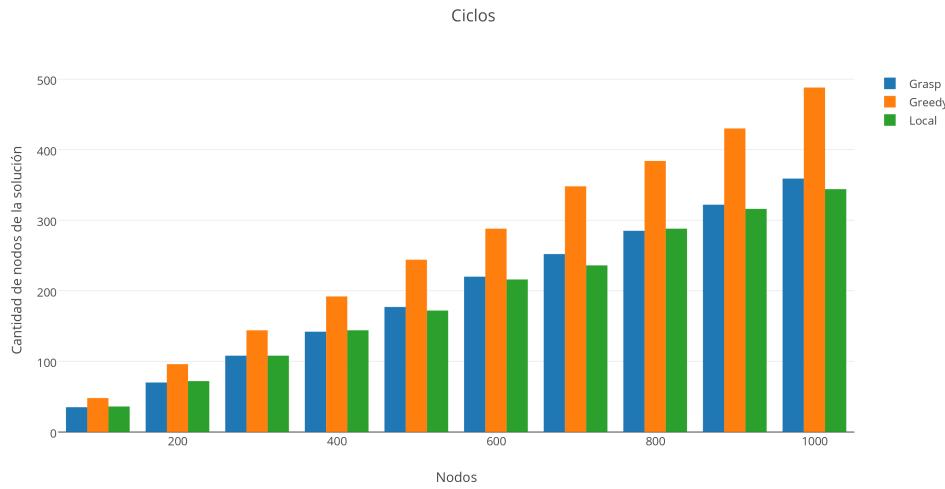
Para el segundo gráfico, se omitió la ejecución del Grasp, dado que los tiempos de ejecución del mismo para los grafos bipartitos completos de esa magnitud, eran demasiado altos, lo cual era predecible pues debe ejecutar la búsqueda local 10 veces, es decir que su ejecución consume $10x(\text{tiempo de búsqueda local})$.

Dado que los tres algoritmos siempre obtienen la solución óptima para la familia de grafos bipartitos completos, concluimos que el Greedy es el mejor de los tres para estos casos, ya que es el que menor tiempo insume.

6.2.4. Ciclo simple

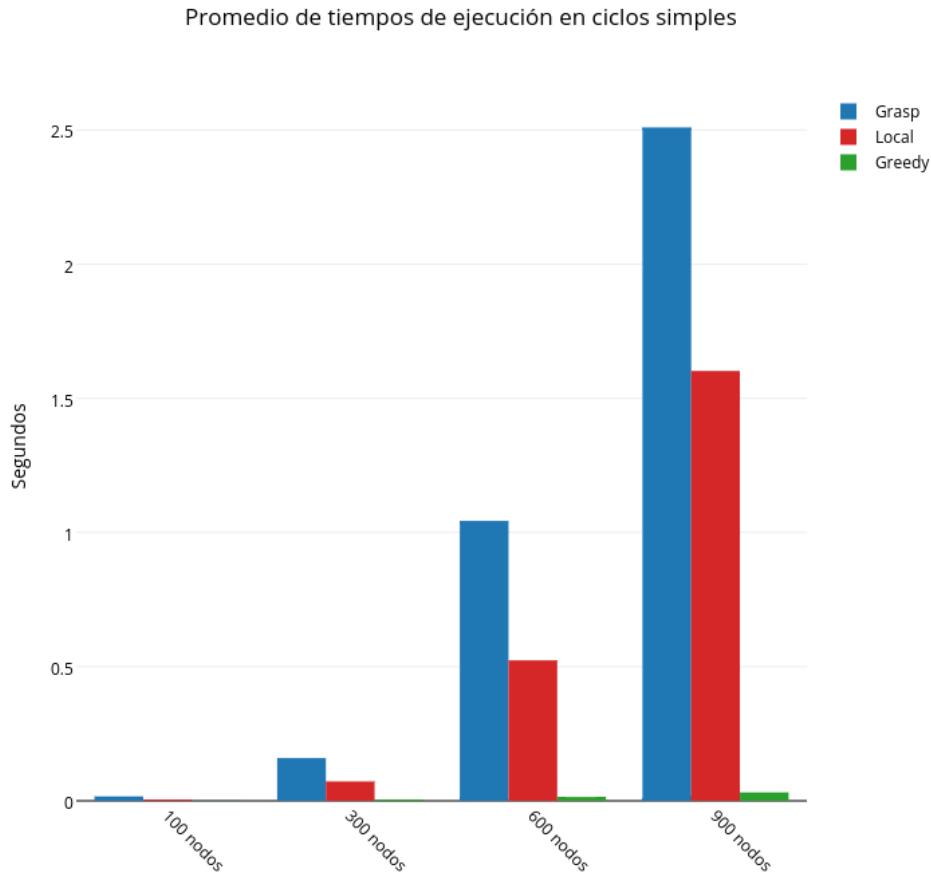
Por último, analizaremos qué ocurre cuando el grafo de entrada es un ciclo. Para ello fuimos generando distintos ciclos, comenzando con 100 nodos y aumentando de a 100 hasta 1000 nodos.

Los resultados obtenidos fueron:



Se aprecia rápidamente que el Greedy es el peor de los 3 y que los resultados entre el Grasp y Local son muy parejos, siendo Local un poco mejor en los casos más grandes.

A su vez, los tiempos de ejecución sobre las mismas instancias, se obtuvieron los siguientes resultados:



Analizando tanto tiempos como resultados obtenidos, concluimos que el algoritmo Local es el más conveniente cuando el grafo es un ciclo, ya que obtiene resultados mucho mejores al Greedy a pesar de ser un poco más lento. Además, es mejor que Grasp tanto en tiempo de ejecución como en el resultado.

7. Anexo

7.1. Ejecución de los métodos

Al momento de ejecutar el `main` se le deben pasar los siguientes parámetros acorde a lo deseado:

- **0: Algoritmo Exacto;**
- **1: Heurística Greedy** (con parámetros `alpha = 0`, `conAlpha = true`);
- **2: Heurística Búsqueda local** (solución inicial por orden de nomenclatura (`greedy = false`), vecindad `2x1` (`vecindad = true`));
- **3: Heurística Búsqueda local** (solución inicial greedy (`greedy = true`), vecindad `2x1` (`vecindad = true`), `alpha = 0`);
- **4: Heurística Búsqueda local** (solución inicial por orden de nomenclatura (`greedy = false`), vecindad `3x1` (`vecindad = false`));
- **5: Heurística Búsqueda local** (solución inicial greedy (`greedy = true`), vecindad `3x1` (`vecindad = false`), `alpha = 0`);
- **6: Heurística GRASP** (solución inicial por porcentaje de mejores (`conAlpha = true`), vecindad `2x1` (`vecindad = true`), `alpha = input`);
- **7: Heurística GRASP** (solución inicial por porcentaje de mejores (`conAlpha = true`), vecindad `3x1` (`vecindad = false`), `alpha = input`);
- **8: Heurística GRASP** (solución inicial por cantidad de mejores (`conAlpha = false`), vecindad `2x1` (`vecindad = true`), `alpha = input`);
- **9: Heurística GRASP** (solución inicial por cantidad de mejores (`conAlpha = false`), vecindad `3x1` (`vecindad = false`), `alpha = input`);
- **i: Imprime** la lista de adyacencia del grafo pasado por `input`;
- **q: Finaliza** la ejecución;

7.2. Generación de casos de test

A la hora de desarrollar las experimentaciones, partimos de crear distintas instancias de grafos con un generador que armamos en Python.

Mediante este script, se podían generar instancias:

- Un grafo con `n` nodos y `a` aristas.
- Conjunto de `k` grafos todos con `n` nodos y variando cantidad de aristas.
- Conjunto de `k` grafos todos con `a` aristas y variando cantidad de nodos.
- Un grafo Bipartito con `n` nodos en `V1` y `m` nodos en `V2`.
- Un grafo completo de `n` nodos.
- Un grafo ciclo de `n` nodos.
- Un tablero de `p` casilleros de ancho.

Es importante destacar que en las instancias que se generaban conjuntos de grafos todos los grafos eran independientes entre sí, generados aleatoriamente.

Si bien se tiene una noción fuerte de las características de los grafos, cuando se arman grafos de `n` nodos y `a` aristas (ya sea en las ejecuciones de conjunto o individuales), se crean las `n` aristas y los ejes se arman al azar.

7.3. Clase ListaAdy

Esta clase se implementó con el fin de abstraer el grafo pasado como input en una lista de adyacencias. Es decir que el grafo $G=(V,E)$, consta de un arreglo de tamaño $\#(V)$, de listas enlazadas, donde la posición i representa al nodo con numeración arbitraria i y su lista asociada tendrá tantos elementos como vecinos tenga este nodo, siendo cada elemento, el número del nodo.

El primer recuadro muestra la estructura de la clase y los siguientes, los métodos que implementa con su respectiva complejidad.

```
vector<list<unsigned int>> lista;
```

```
listaAdy::listaAdy(unsigned int cantNodos){  
    lista = vector<list<unsigned int>>(cantNodos);  
}  
Costo  $O(n)$ .
```

```
unsigned int listaAdy::gradoDeNodo(unsigned int nodo){  
    return lista[nodo].size();  
}  
Costo  $O(1)$ .
```

```
void listaAdy::agregarEje(unsigned int a, unsigned int b){  
    lista[a].push_back(b);  
    lista[b].push_back(a);  
}  
Costo  $O(n)$  amortizado.
```

```
unsigned int listaAdy::cantNodos(){  
    return lista.size();  
}  
Costo  $O(1)$ 
```

```
list<unsigned int>* listaAdy::dameVecinos(unsigned int nodo){  
    return &lista[nodo];  
}  
Costo  $O(1)$ 
```

```
bool listaAdy::sonVecinos(unsigned int a, unsigned int b){  
    if lista[a].size() > lista[b].size() then  
        | unsigned int z = a;  
        | a = b;  
        | b = z;  
    end  
    for list<unsigned int>::iterator it = lista[a].begin(); it != lista[a].end(); ++it do  
        | if *it == b then  
        | | return true;  
        | end  
    end  
    return false;  
}  
Costo  $O(n)$ 
```

```
void listaAdy::ordenar(){  
    for int i = 0; i < lista.size(); ++i do  
        | lista[i].sort();  
    end  
}  
Costo  $O(n^2 \cdot \log(n))$ 
```