DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico II

Algoritmos y Estructuras de Datos III
Primer Cuatrimestre de 2015

Integrante	LU	Correo electrónico
Aldasoro Agustina	86/13	agusaldasoro@gmail.com
Noriega Francisco	660/12	frannoriega.92@gmail.com
Zimenspitz Ezequiel	155/13	ezeqzim@gmail.com
Zuker Brian	441/13	brianzuker@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (54 11) 4576-3359
http://www.fcen.uba.ar

Resumen

Habiéndonos sido dado una serie de tres problemáticas a resolver, se plantean sus respectivas soluciones acorde a los requisitos pedidos. Se adjunta una descripción de cada problema y su solución, conjunto a su análisis de correctitud y de complejidad sumado a su experimentación. El lenguaje elegido para llevar a cabo el trabajo es C++.

Dentro de cada *.cpp* está el comando para compilar cada ejercicio desde la carpeta donde se encuentran los mismos. A continuación se los adjunta. El flag *-std=c++11* debió ser añadido dado que utilizamos la librería <chrono>, la cual nos permitió medir tiempos de ejecución:

1. *g++ -o main Dakkar.cpp -std=c++11*
2. *g++ -o main Zombieland.cpp -std=c++11*
3. *g++ -o main RefinandoPetroleo.cpp -std=c++11*

Índice

Fijarse que nos dijeron que no habiamos puesto pseudocodigo en la explicacion del algortimo y tal vez ahora nos falte eso :)

1. Dakkar

1.1. Descripción de la problemática

La problemática trata de una travesía, la cual cuenta con *n* cantidad de etapas. Para cada una de las etapas, se puede elegir recorrerla en alguno de los tres vehículos disponibles: una BMX, una motocross o un buggy arenero. Cada uno de ellos permite concretar cada etapa en cantidades de tiempo diferentes. Además, la cantidad de veces que se pueden usar la motocross y el buggy arenero está acotada por k_m y k_b respectivamente.

Los *tiempos* que le llevan a los vehículos recorrer el trayecto varían por cada etapa y son datos conocidos pasados por parámetro.

Se pide recorrer la travesía, dentro de las restricciones, de modo que se utilice la menor cantidad de tiempo posible. Si existen dos (o más) maneras de atravesarla dentro del tiempo óptimo, se pide devolver sólo una.

Se exige resolver la problemática con una complejidad temporal de $O(n.k_m.k_b)$.

Dibujitos con ejemplos :)

1.2. Resolución propuesta y justificación

Para resolver esta problemática, optamos por implementar un algoritmo de *Programación Dinámica*.

Con el fin de encontrar el recorrido factible que emplee menos tiempo; debemos comparar, para cada etapa, cuál es el menor tiempo con el que puede recorrer el camino faltante eligiendo en la instancia actual uno de los tres vehículos disponibles. Dado que la formulación de este problema es muy extensa, se realizó una formulación recursiva de modo que para cada problema se le asigna un valor dependiendo de un subproblema menor.

Formulación Recursiva

Optamos por comenzar recorriendo desde la etapa n hasta la etapa 0; *n* va a indicar la etapa actual, k_m la cantidad de motos y k_b la cantidad de buggys restantes que se pueden utilizar.

- Cuando llegamos a la etapa *n*$= 0$ es porque terminamos todo el recorrido, de modo que el tiempo devuelto va a ser 0.
- Cuando $k_m = 0$ y $k_b = 0$ es porque la etapa actual (*n*) y el recorrido restante (las *n-1* etapas) lo vamos a tener que hacer sólo en bicicleta, sin importar el tiempo que conlleve ya que nos quedamos sin motos y buggys para usar.
- Cuando $k_m = 0$ y $k_b \neq 0$ es porque utilizamos la mayor cantidad de motos posibles y las *n-1* etapas restantes -conjunto a la actual(*n*)- las vamos a tener que recorrer con Bicicleta o buggy. Por este motivo se elige la opción con tiempo menor usando Bicicleta o buggy en la etapa *n* y llamando recursivamente a la función para *n-1* considerando esta elección.
- De modo análogo, cuando $k_m \neq 0$ y $k_b = 0$ sólo vamos a contar con Motos y Bicicletas para la etapa actual y las *n-1* etapas faltantes.
- En cambio, en caso contrario, todavía tenemos disponible cantidad de los tres vehículos. Por este motivo, se comparan los tres casos: empleando la Bicicleta en la etapa n, la Moto o el buggy llamando recursivamente a la función para *n-1* de modo que va a devolver el menor tiempo posible considerando la elección llevada a cabo.

$$func(n, k_m, k_b) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ tiempoBici(n) + f(n-1, 0, 0) & \text{si } k_m = 0 \wedge k_b = 0 \\ min \begin{pmatrix} tiempoBici(n) + func(n-1, 0, k_b), \\ tiempobuggy(n) + func(n-1, 0, k_b - 1) \end{pmatrix} & \text{si } k_m = 0 \wedge k_b \neq 0 \\ min \begin{pmatrix} tiempoBici(n) + func(n-1, k_m, 0), \\ tiempoMoto(n) + func(n-1, k_m - 1, 0) \end{pmatrix} & \text{si } k_m \neq 0 \wedge k_b = 0 \\ min \begin{pmatrix} tiempoBici(n) + func(n-1, k_m, k_b), \\ tiempoMoto(n) + func(n-1, k_m - 1, k_b), \\ tiempobuggy(n) + func(n-1, k_m, k_b - 1) \end{pmatrix} & \text{sino} \end{cases}$$

Dado que los n, k_m y k_b iniciales van a ser los dados por parámetro y en el planteo de nuestra ecuación en la llamada recursiva n siempre decrementa en 1 y los demás o bien quedan iguales o uno de ellos decrementa en uno, estos parámetros van a estar acotados por:

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq n \leq n_{parametro} \\ 0 \leq k_m \leq k_{m_{parametro}} \\ 0 \leq k_b \leq k_{b_{parametro}} \end{array}$$

Esta formulación recursiva resuelve el problema porque.... Poner aca algo del estilo de la demo de golosos je ALGUIEN???!!!

Diccionario a utilizar

El diccionario que vamos a utilizar consiste en una matriz de $k_{m_{inicial}}$x$k_{b_{inicial}}$, en la que por cada posición va a haber un contenedor de tamaño $n_{inicial}$ (lo cual forma un cubo) de modo que dentro de cada uno de ellos se va a poder almacenar el resultado de invocar a la función con estos tres parámetros.

Formulación Top Down

Si analizamos el comportamiento de nuestra función recursiva como si fuera un algoritmo recursivo, podemos notar que la primer posición del cubo que va a poder completar va a ser la de $(k_{m_{inicial}}, k_{b_{inicial}}, 0)$. Dado que para todas las guardas el primer caso que compara es usar la bicicleta. Explicar con un poco mas de detalle.

Luego, seguirá completando la matriz variando en orden ascendente el tercer parámetro y completando para todos los k_m y k_b.

Formulación Bottom Up

Una vez comprendido el comportamiento de la función, podemos establecer una manera de completar nuestro diccionario cubo de modo iterativo.

Primero completamos para $n = 0$ todos los valores de k_m y k_b. Esto:Notar que dados los índices que utilizamos a la hora de la implementación, cuando hablamos de $n = 0$ nos referimos a la etapa 1 de la carrera (la última que vamos a recorrer), lo cual no es estrictamente el mismo resultado que el expuesto en la formulación recursiva. Sin embargo, podemos denotar esto como una diferencia que no afecta al funcionamiento del algoritmo.es asi?

Cuando $n = 0$ simplemente vamos a asignar el vehículo que presente menor tiempo para esta etapa, entre los disponibles basándonos en los k_m y k_b.

Luego para $n = 1$, debemos considerar el costo mínimo entre usar cada uno de los vehículos disponibles para esta etapa sumado a su correspondiente costo mínimo de la etapa anterior.

Continuamos con las iteraciones hasta llegar a $n = n_{parametro}$.

Aca poner un dibujito que ejemplifique.

Cuando contamos con la matriz Diccionario completa, nuestro resultado va a estar ubicado en la posición $(k_{m_{parametro}}, k_{b_{parametro}}, n_{parametro})$.

Al ingresar los datos dentro del diccionario de esta manera, lo único que hacemos es invertir el orden de llenado. Es por este motivo que estamos cumpliendo con el mismo comportamiento de la función recursiva ya mencionada. Como ya pudimos asegurar que la formulación recursiva resolvía de manera correcta la problemática planteada, estamos en condiciones de afirmar que completar el diccionario en el orden inverso también resuelve el ejercicio.

Con el fin de poder calcular el camino una vez obtenida la cantidad de tiempo menor para realizar el trayecto, en cada posición del diccionario no sólo guardamos el tiempo empleado para llegar hasta ahí sino que también cuál fue su situación inmediatamente anterior.

De este modo, recorremos la matriz desde la posición $(k_{m_{parametro}}, k_{b_{parametro}}, n_{parametro})$ hacia la situación que indica la misma, y así sucesivamente. De este modo obtenemos las elecciones hechas desde la última etapa hasta la primera.

1.3. Análisis de la complejidad

1.3.1. Complejidad Temporal

Como parámetro vamos a recibir m_k, m_b, n y los tiempos necesarios para atravesar con cada vehículo las *n* etapas. Los tiempos los vamos a tener almacenados en un vector de tuplas, donde cada componente va a ser BMX, Moto y buggy.

Mediante tres `fors` anidados (primero por la cantidad de etapas, después por la cantidad de motos y por último la cantidad de buggys), vamos a recorrer posición a posición nuestra matriz de vectores (cubo). Comenzando en la posición $(0, 0, 0)$ y finalizando en (k_m, k_b, n).

Dentro de cada iteración, lo que vamos a hacer es completar la posición del diccionario correspondiente acorde indica el planteo recursivo, con la salvedad de que cada casillero representa cuánto nos cuesta llegar a la siguiente etapa, es decir que la posición (k_m, k_b, n) tendrá lo que cueste ir de la etapa n a la etapa n+1, usando la cantidad de Motos y Buggys correspondiente.

En todas las iteraciones, escribiremos en el diccionario bajo la clave: (k_m, k_b, n). En cada posición vamos a poner un par: la primera posición corresponde al valor del tiempo y la segunda al indicador de la posición inmediatamente anterior.

Para escribir la *primer posición* vamos a seguir la siguiente regla:

- Si $n = 0 \land k_m = 0 \land k_b = 0$ escribimos el tiempo que le lleva a la BMX para ir de 0 a 1
- Si $n = 0 \land k_m = 0 \land k_b \neq 0$ escribimos el tiempo que sea menor para ir de 0 a 1 entre BMX y Buggy
- Si $n = 0 \land k_m \neq 0 \land k_b = 0$ escribimos el tiempo que sea menor para ir de 0 a 1 entre BMX y Moto
- Si $n = 0 \land k_m \neq 0 \land k_b \neq 0$ escribimos el tiempo que sea menor para ir de 0 a 1 entre BMX, Buggy y Moto
- Si $n \neq 0 \land k_m = 0 \land k_b = 0$ escribimos el tiempo que le lleva a la BMX para ir de n a $n + 1 + dicc(m, b, n - 1)$
- Si $n \neq 0 \land k_m = 0 \land k_b \neq 0$ escribimos el tiempo que sea menor para ir de n a $n + 1$ entre $tiempo(BMX) + dicc(m, b, n - 1)$ y $tiempo(Buggy) + dicc(m, b - 1, n - 1)$
- Si $n \neq 0 \land k_m \neq 0 \land k_b = 0$ escribimos el tiempo que sea menor para ir de n a $n + 1$ entre $tiempo(BMX) + dicc(m, b, n - 1)$ y $tiempo(Moto) + dicc(m - 1, b, n - 1)$
- Si $n \neq 0 \land k_m \neq 0 \land k_b \neq 0$ escribimos el tiempo que sea menor para ir de n a $n + 1$ entre $tiempo(BMX) + dicc(m, b, n - 1)$, $tiempo(Buggy) + dicc(m, b - 1, n - 1)$ y $tiempo(Moto) + dicc(m - 1, b, n - 1)$

Debido a la forma de completar el diccionario, todas estas asignaciones son operaciones con un costo de $\mathbf{O(1)}$.

Esto se debe a que acceder al vector con todos los costos por etapa, sumar y buscar el mínimo entre enteros (min() [1]) son operaciones de costo: $O(1)$. Además, al buscar en el diccionario siempre lo hacemos en posiciones ya definidas lo cual también presenta un costo de $O(1)$ debido a que es una matriz de vectores.

[1] http://www.cplusplus.com/reference/algorithm/min/

Para la *segunda posición*, que representa la escritura para devolver el camino, lo que realizamos es dejar asentado cuántos Buggys y cuántas Motos quedan disponibles después de esta iteración. Es asi, no? Eze?.

El costo de estas operaciones también pertenece a $\mathbf{O(1)}$. Las mismas son operaciones elementales (asignación y suma de enteros) y un llamado a make_pair() [2] que toma tiempo constante.

Finalmente retornamos el valor de $dicc(k_{m_{parametro}}, k_{b_{parametro}}, n_{parametro})$

La complejidad resulta entonces: por cada etapa, por cada posible uso de moto, por cada posible uso de buggy, realizar operaciones en tiempo constante. De esto deducimos que la complejidad es de $\mathbf{O(k_m, k_b, n)}$ como se pedía en el enunciado.

1.3.2. Complejidad Espacial

Dado que la estructura utilizada es una matriz (`vector<vector>`) de m_kxm_b, donde en cada posición contamos con un arreglo de n posiciones y una tupla ($O(1)$); su complejidad espacial es de $\mathbf{O(m_k.m_b.n)}$.

[2] http://www.cplusplus.com/reference/utility/make_pair/

1.4. Código fuente

```
struct datosPorEtapas{
    unsigned int bmx;
    unsigned int moto;
    unsigned int buggy;
};
```

```
int main(int argc, char const *argv[]){
    unsigned int etapas, cmoto, cbuggy;
    cin >> etapas >> cmoto >> cbuggy;
    deque<datosPorEtapas> datos;
    for (int i = 0; i < etapas; ++i){
        unsigned int bmx, moto, buggy;
        datosPorEtapas actual;
        cin >> actual.bmx >> actual.moto >> actual.buggy;
        datos.push_back(actual);
    }
    Matriz cubo;
//iniciliazamos el cubo
    for (int i = 0; i <= cmoto; ++i){
        Filas fila;
        for (int j = 0; j <= cbuggy; ++j){
            Etapas etapa;
            for (int k = 0; k < etapas; ++k){
                etapa.push_back(make_pair(0, make_pair(0, 0)));
            }
            fila.push_back(etapa);
        }
        cubo.push_back(fila);
    }
//cout pedido
    cout << dakkar(etapas, cmoto, cbuggy, datos, cubo);
//para devolver del comienzo hasta el final
    deque<int> usados;
    pair<int, int> recorrido;
    int cantMoto = cmoto, cantBuggy = cbuggy;
    for (int cantE = etapas-1; cantE >= 0; --cantE) {
        recorrido = cubo[cantMoto][cantBuggy][cantE].second;
        if(cantMoto > recorrido.first){
            cantMoto--;
            usados.push_front(2);
        }
        else if(cantBuggy > recorrido.second){
            cantBuggy--;
            usados.push_front(3);
        }
        else{
            usados.push_front(1);
        }
    }
    for (int i = 0; i < etapas; ++i) {
        cout << " " << usados[i];
    }
    cout << endl;
    return 0;}
```

```
unsigned int dakkar(unsigned int etapas, unsigned int cmoto, unsigned int cbuggy,
 deque<datosPorEtapas>& datos, Matriz& cubo){
    int bici, moto, buggy;
    for (int n = 0; n < etapas; ++n){
        for (int m = 0; m <= cmoto; ++m){
            for (int b = 0; b <= cbuggy; ++b){
            //guardamos un link hacia el lugar de donde salimos
                pair<int, int> par;
                par.first = m;
                par.second = b;
            //llenamos espacios triviales y luego sabemos cuales estan calculados,
            // para ahorrar rehacer las cuentas
                if (n==0){
                    if(m == 0){
                        if(b == 0){
                            bici = datos[n].bmx;
                            cubo[m][b][n] = make_pair(bici, par);
                        }
                        else{
                            bici = datos[n].bmx;
                            buggy = datos[n].buggy;
                        //si elegimos el buggy guardamos esa decision
                            if(bici > buggy)
                                par.second--;
                            cubo[m][b][n] = make_pair(min(bici, buggy), par);
                        }
                    }
                    else{
                        if(b == 0){
                            bici = datos[n].bmx;
                            moto = datos[n].moto;
                        //si elegimos la moto guardamos esa decision
                            if(bici > moto)
                                par.first--;
                            cubo[m][b][n] = make_pair(min(bici, moto), par);
                        }
                        else{
                            bici = datos[n].bmx;
                            moto = datos[n].moto;
                            buggy = datos[n].buggy;
                        //guardamos lo que elegimos
                            if(bici > buggy || bici > moto)
                                if(buggy > moto)
                                    par.first--;
                                else
                                    par.second--;
                            cubo[m][b][n] = make_pair(min(min(bici, moto), buggy), par);
                        }
                    }
                }
```

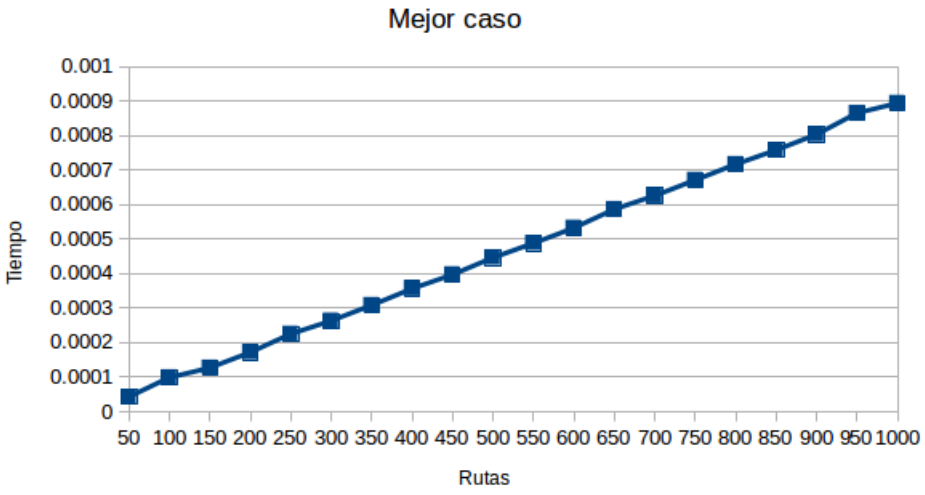
```
                    else{
                        if(m == 0){
                            if(b == 0){
                                bici = cubo[m][b][n-1].first + datos[n].bmx;
                                cubo[m][b][n] = make_pair(bici, par);
                            }
                            else{
                                bici = cubo[m][b][n-1].first + datos[n].bmx;
                                buggy = cubo[m][b-1][n-1].first + datos[n].buggy;
                            //si elegimos el buggy guardamos esa decision
                                if(bici > buggy)
                                    par.second--;
                                cubo[m][b][n] = make_pair(min(bici, buggy), par);
                            }
                        }
                        else{
                            if(b == 0){
                                bici = cubo[m][b][n-1].first + datos[n].bmx;
                                moto = cubo[m-1][b][n-1].first + datos[n].moto;
                            //si elegimos la moto guardamos esa decision
                                if(bici > moto)
                                    par.first--;
                                cubo[m][b][n] = make_pair(min(bici, moto), par);
                            }
                            else{
                                bici = cubo[m][b][n-1].first + datos[n].bmx;
                                moto = cubo[m-1][b][n-1].first + datos[n].moto;
                                buggy = cubo[m][b-1][n-1].first + datos[n].buggy;
                            //guardamos lo que elegimos
                                if(bici > buggy || bici > moto)
                                    if(buggy > moto)
                                        par.first--;
                                    else
                                        par.second--;
                                cubo[m][b][n] = make_pair(min(min(bici, moto), buggy), par);
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
        return cubo[cmoto][cbuggy][etapas-1].first;
    }
```

1.5. Experimentación

1.5.1. Constrastación Empírica de la complejidad

Para realizar la siguiente experimentación, comenzamos mirando el caso más sencillo, que se da cuando tanto k_m como k_b son igual a 0. Es decir, en todos los casos debemos usar la BMX. La complejidad teórica planteada es de $O(n * k_m * k_b)$, por lo que se intuye que en este caso debería ser $O(n)$.
Los tiempos de ejecución para cada etapa n fueron:

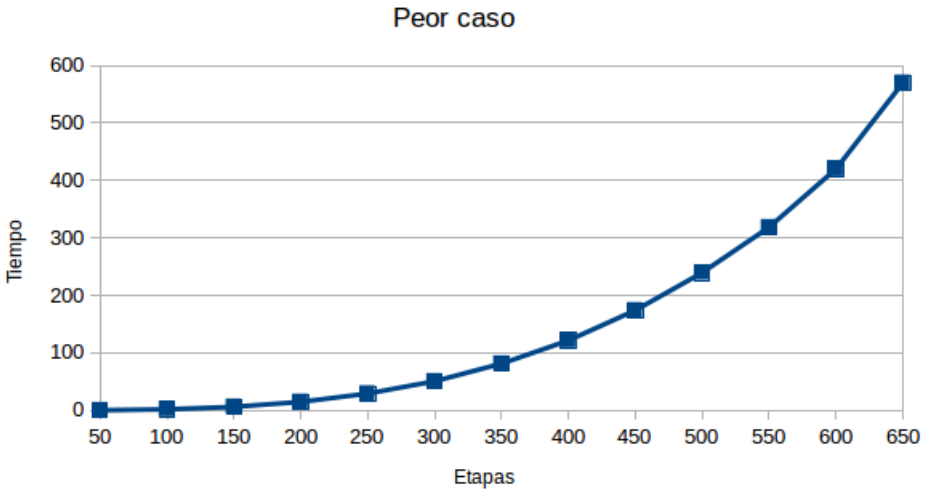
n	Tiempo en segundos
50	0.0000428063
100	0.0000990471
150	0.0001270313
200	0.0001718291
250	0.0002251666
300	0.0002632707
350	0.0003082768
400	0.0003563523
450	0.0003971006
500	0.0004461637
550	0.0004880608
600	0.0005325091
650	0.0005865319
700	0.0006258109
750	0.0006709416
800	0.0007168112
850	0.0007580348
900	0.000803331
950	0.0008650634
1000	0.0008941003



Como preveíamos, el gráfico tiene comportamiento lineal, lo cual es consistente con la cota teórica planteada.

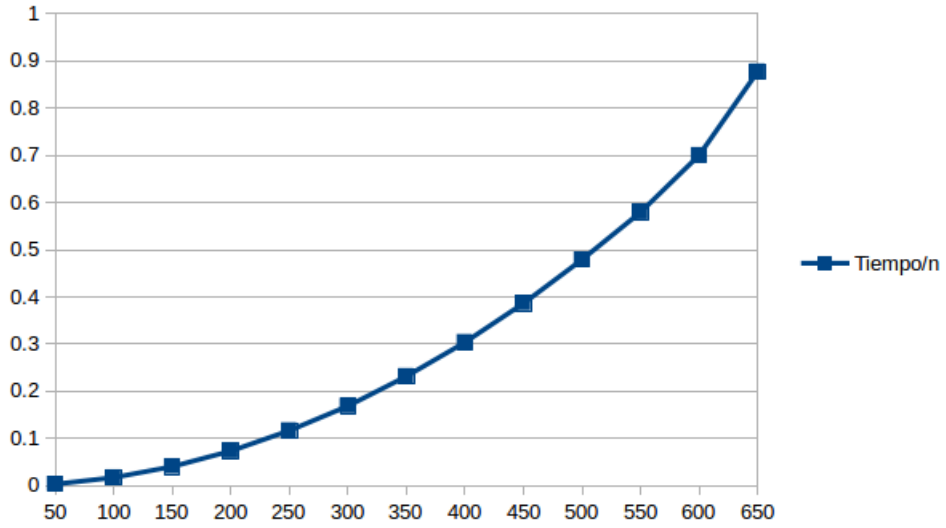
Luego, consideramos el peor caso posible, que es el que iguala tanto k_m como k_b con n. Es decir, el caso en el que para cada etapa, tenemos la posiblidad de elegir cualquiera de las 3 opciones, BMX, motocross o buggy.
Los tiempos que cuestan recorrer cada etapa con las distintas opciones fueron generados aleatoriamente, ya que no influyen en el costo temporal del algoritmo.
Los tiempos de ejecución para cada etapa n fueron:

n	Tiempo en segundos
50	0.1744401
100	1.733896
150	6.082229
200	14.68914
250	29.19128
300	50.62509
350	81.18956
400	121.5241
450	173.8635
500	239.492
550	318.615
600	420.213
650	570.048

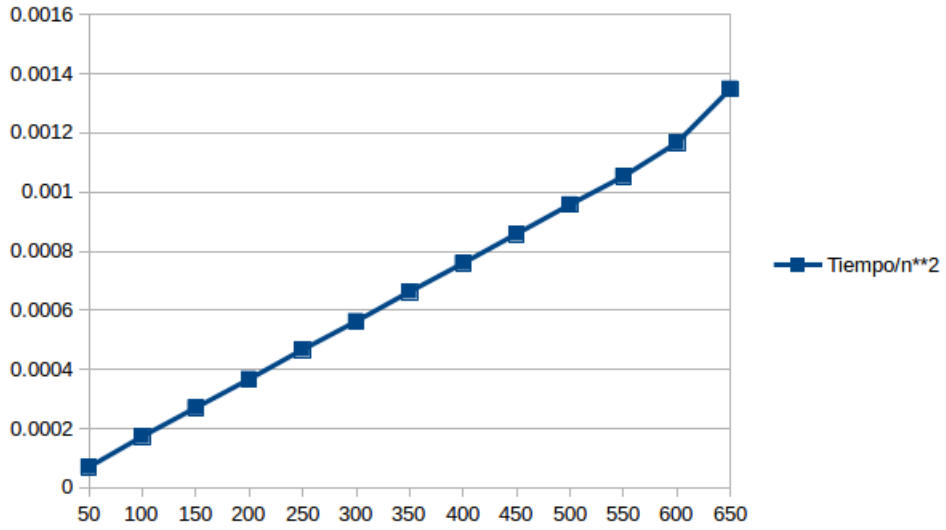


Como en este caso tanto k_m como k_b son iguales a n, la Cota de Complejidad planteada teóricamente ($O(n * k_m * k_b)$) es igual a $O(n^3)$. En el gráfico se aprecia una parábola creciente, pero no podemos asegurar que ésta sea la que nosotros planteamos, ya que todas las curvas son similares. Por ello, linealizamos los tiempos, dividiendo cada instancia por n.

El gráfico resultante es el siguiente:



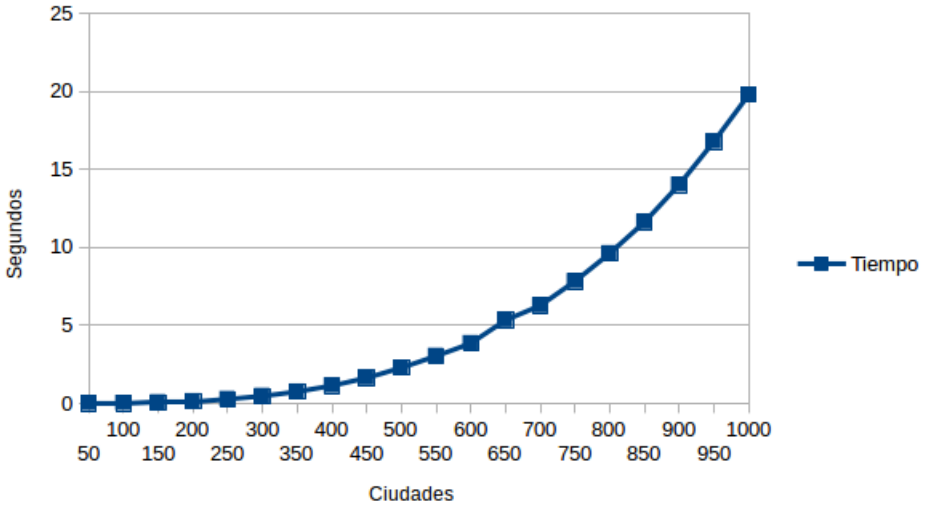
Este gráfico es similar al anterior, con una pendiende menos pronunciada. De todas formas, para asegurarnos que nuestra experimentación se condice con la Cota Teórica planteada, volvemos a linealizar, dividiendo cada instancia por n:



En efecto, este gráfico tiene comportamiento lineal, lo cual confirma nuestra afirmación.

Luego, con el fin de comparar los tiempos de ejecución, se realizó una última experimentación, en la cual se tomaron los mismos valores para k_m y k_b, proporcionales al n dado. Como resultado se obtuvieron los siguientes valores:

n	Tiempo en segundos
50	0.0015956707
100	0.0152238567
150	0.055239755
200	0.132059613
250	0.264843302
300	0.464658156
350	0.748833425
400	1.13247454
450	1.63054066
500	2.28274084
550	3.03236404
600	3.84826384
650	5.3375904
700	6.2688524
750	7.82798085
800	9.62078432
850	11.6278678182
900	14.0280025641
950	16.79448
1000	19.80024



Como se ve, el gráfico es similar al del peor caso, pero los tiempos de ejecución son mucho menores, por lo que es evidente la influencia de k_m y k_b en la Cota Teórica planteada.

2. Zombieland II

2.1. Descripción de la problemática

2.2. Resolución propuesta y justificación

2.3. Análisis de la complejidad

2.4. Código fuente

```
struct posYsold {
    int soldadosVivos;
    int i;
    int j;
};
```

```
Matriz ciudadInfestada;
unsigned int n, m;

int main(int argc, char const *argv[]){
    unsigned int s;
    cin >> n >> m >> s;
    unsigned int inicioH, inicioV, bunkerH, bunkerV;
    cin >> inicioH >> inicioV >> bunkerH >> bunkerV;
    inicioV--;
    inicioH--;
    bunkerV--;
    bunkerH--;
//la matriz de la ciudad guarda cuantos zombies tiene el eje para moverse
// a la derecha y hacia abajo (en ese orden)
//para la izquierda es ir al de la izquierda y preguntar por el derecho
//para arriba es ir al de arriba y preguntar por el de abajo
    ciudadInfestada = Matriz(n, vector<pair<int, int> >(m));
    for (int i = 0; i < n-1; ++i) {
        for (int j = 0; j < m-1; ++j) {
            cin >> ciudadInfestada[i][j].first;
        }
//no hay camino a la derecha
        ciudadInfestada[i][m-1].first = -1;
        for (int j = 0; j < m; ++j) {
            cin >> ciudadInfestada[i][j].second;
        }
    }
    for (int j = 0; j < m-1; ++j) {
        cin >> ciudadInfestada[n-1][j].first;
//no hay camino hacia abajo
        ciudadInfestada[n-1][j].second = -1;
    }
//no hay camino a la derecha ni abajo
    ciudadInfestada[n-1][m-1].first = -1;
    ciudadInfestada[n-1][m-1].second = -1;
//creamos el cubo a completar
    Cubo grafo(n, vector<vector<pair<posYsold, bool> > >(m));
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        for (int j = 0; j < m; ++j) {
            grafo[i][j] = vector<pair<posYsold, bool> >(s+1);
        }
    }
//aplicamos el algoritmo
    int soldadosVivos = zombieland(grafo, inicioH, inicioV, bunkerH, bunkerV, s);
```

```
    //cout pedido
        cout << soldadosVivos << endl;
        deque<posYsold> recorrido;
    //para armarlo desde el principio hasta el final
        if(soldadosVivos != 0){
            posYsold posActual;
            posActual.soldadosVivos = soldadosVivos;
            posActual.i = bunkerH;
            posActual.j = bunkerV;
            while(posActual.i != inicioH || posActual.j != inicioV){
                recorrido.push_front(posActual);
                posActual = grafo[posActual.i][posActual.j][posActual.soldadosVivos].first;
            }
            posActual.soldadosVivos = s;
            posActual.i = inicioH;
            posActual.j = inicioV;
            recorrido.push_front(posActual);
        }
        for (int i = 0; i < recorrido.size(); ++i) {
            cout << recorrido[i].i+1 << " " << recorrido[i].j+1 << endl;
        }
        return 0;
    }
```

```
int zombieland(Cubo& grafo, int inicioH, int inicioV, int bunkerH, int bunkerV, int soldados){
    int maxSoldados = 0;
//cola para el BFS arranca con la posicion de donde salimos
    queue<posYsold> cola;
    posYsold actual;
    actual.soldadosVivos = soldados;
    actual.i = inicioH;
    actual.j = inicioV;
    cola.push(actual);
//se marca esta posicion como visitada
    grafo[inicioH][inicioV][soldados].second = true;
    int zombies;
    int resultadoBatalla;
//mientras tengamos algo para visitar (no sabemos si llegaremos al final)
    while(cola.size() > 0){
//actual es el primero de la cola
        actual = cola.front();
    //si no estamos el final vemos si podemos ir a cada una de las cuatro direcciones
    //si es valido, no se mueren todos los soldados y no visite ese nodo,
    //agregare el siguiente nodo a visitar
    //si ya lo visite, existe un camino que me lleva hasta ahi,
    //ya fue encolado el camino que le sigue
        if(!(actual.i == bunkerH && actual.j == bunkerV)){
            zombies = zombiesCuadra(actual.i, actual.j, ARRIBA);
            resultadoBatalla = resulBatalla(actual.soldadosVivos, zombies);
            if(zombies != -1 && resultadoBatalla > 0 && !grafo[actual.i-1][actual.j]
            [resultadoBatalla].second){
                posYsold arriba;
                arriba.soldadosVivos = resultadoBatalla;
                arriba.i = actual.i-1;
                arriba.j = actual.j;
                cola.push(arriba);
                grafo[actual.i-1][actual.j][resultadoBatalla].second = true;
                grafo[actual.i-1][actual.j][resultadoBatalla].first = actual;
            }
            zombies = zombiesCuadra(actual.i, actual.j, DER);
            resultadoBatalla = resulBatalla(actual.soldadosVivos, zombies);
            if(zombies != -1 && resultadoBatalla > 0 && !grafo[actual.i][actual.j+1]
            [resultadoBatalla].second){
                posYsold der;
                der.soldadosVivos = resultadoBatalla;
                der.i = actual.i;
                der.j = actual.j+1;
                cola.push(der);
                grafo[actual.i][actual.j+1][resultadoBatalla].second = true;
                grafo[actual.i][actual.j+1][resultadoBatalla].first = actual;
            }
```

```
                zombies = zombiesCuadra(actual.i, actual.j, ABAJO);
                resultadoBatalla = resulBatalla(actual.soldadosVivos, zombies);
                if(zombies != -1 && resultadoBatalla > 0 && !grafo[actual.i+1][actual.j]
                [resultadoBatalla].second){
                    posYsold abajo;
                    abajo.soldadosVivos = resultadoBatalla;
                    abajo.i = actual.i+1;
                    abajo.j = actual.j;
                    cola.push(abajo);
                    grafo[actual.i+1][actual.j][resultadoBatalla].second = true;
                    grafo[actual.i+1][actual.j][resultadoBatalla].first = actual;
                }
                zombies = zombiesCuadra(actual.i, actual.j, IZQ);
                resultadoBatalla = resulBatalla(actual.soldadosVivos, zombies);
                if(zombies != -1 && resultadoBatalla > 0 && !grafo[actual.i][actual.j-1]
                [resultadoBatalla].second){
                    posYsold izq;
                    izq.soldadosVivos = resultadoBatalla;
                    izq.i = actual.i;
                    izq.j = actual.j-1;
                    cola.push(izq);
                    grafo[actual.i][actual.j-1][resultadoBatalla].second = true;
                    grafo[actual.i][actual.j-1][resultadoBatalla].first = actual;
                }
            }
        //si llegamos al final, actualizamos los soldados que quedaron vivos,
        //si es mayor a haber llegado por otro camino
            else
                if(maxSoldados < actual.soldadosVivos)
                    maxSoldados = actual.soldadosVivos;
        //desencolo el nodo que estaba analizando
            cola.pop();
        }
        return maxSoldados;
    }
```

```
    int zombiesCuadra(int i, int j, movimiento mov){
    //devuelve los zombies que en la cuadra pedida
        switch(mov){
            case ARRIBA:
                if(i == 0)
                    return -1;
                return ciudadInfestada[i-1][j].second;
            case ABAJO:
                return ciudadInfestada[i][j].second;
            case IZQ:
                if(j == 0)
                    return -1;
                return ciudadInfestada[i][j-1].first;
            case DER:
                return ciudadInfestada[i][j].first;
        }
    }
```

```
int resulBatalla(int sold, int zomb){
//devuelve si es posible pasar por una cuadra
    if(sold>=zomb)
        return sold;
    return sold-(zomb-sold);
}
```

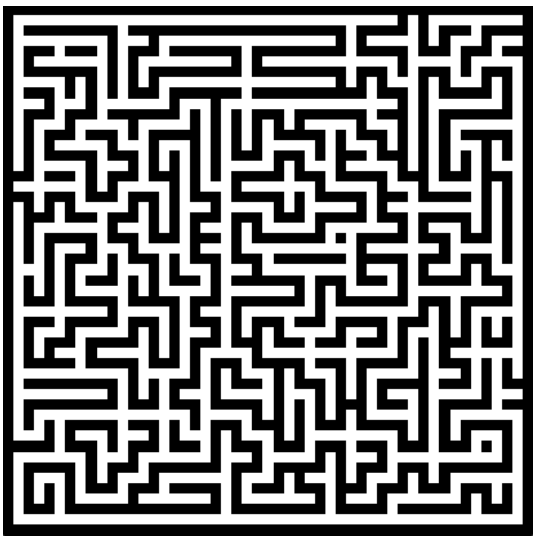
2.5. Experimentación

2.5.1. Constrastación Empírica de la complejidad

Para realizar los experimentos, se consideró como peor caso, aquel en el que se debiera recorrer cada nodo de la ciudad, tantas veces como cantidad de soldados se tuviese a disposicion, siendo ese caso, en el que se recorrerían $s.n.m$ elementos, coiniciendo así con la complejidad teórica $O(s.n.m)$.
Aunque ese el caso deseable, generar dicha instancia para los distintos valores de s, n y m, resultó tan dificultoso como resolver el problema en cuestión.
Por ello, se decidio generar instancias con una cantidad aleatoria de zombies por cuadra. Ésto permitió generar instancias automáticamente, para casos de prueba grandes, pero trajo consigo los siguientes problemas:

1. No se puede determinar si existe un camino desde el punto de inicio hasta el búnker.
2. No se puede determinar, si al existir un camino, este será único.
3. No se puede determinar cuantos soldados van a llegar al búnker.
4. No se puede determinar cuantos caminos adulteran la cantidad de soldados, ni cuantos soldados mueren en cada uno de ellos.

El resultado del generador de instancias, proporcionaba un laberinto como el siguiente:



Los pasajes del laberinto son los caminos donde hay entre 0 y $s + 1$ zombies, y las paredes, caminos donde hay entre 0 y s.2.
Estos valores aleatorios fueron tomados adrede, por un lado, para que incluso el mejor camino (alguno de los pasajes que conducen a la salida), tuviera perdida de soldados, pero intentando que éstas sean mínimas, para aumentar las probabilidades de que puedan efectivamente llegar al búnker. Las paredes, no son un obstaculo, dado que podrían terminar siendo un pasaje, pero la probabilidad de que eso ocurra es muy baja.
Aún asi, el s tomado en el algoritmo aleatorio es el que se recibe en la entrada. Esto significa, que se configura al principio, y despues no se actualiza con la cantidad de soldados despues de una batalla.
Por ende, no podemos determinar el porcentaje de soldados totales que llegarán, pero sí podemos saber el porcentaje que sobrevivirá a la primer batalla.
Así, la cantidad de soldados que sobreviviran a la primer batalla es:

- 95 % en caso de que el camino sea un pasaje.
- 50 % en casos de que el camino sea una pared.

Estos rangos aleatorios también se obtuvieron experimentando, hasta lograr valores que ocasionaran bajas pero que no impidieran a los soldados llegar al búnker en la mayoría de los casos. Dichos experimentos exceden el interés de esta sección y no serán discutidos.

Pese a dificultades expuestas, se decidió proceder con dichas instancias, ya que lograban generar una fluctuación en la cantidad de soldados, y esto, si bien lejos del peor caso propuesto, resultó ser una aproximación que nos resultó suficiente.

Por lo dicho anteriormente, se realizaron experimentos sobre los siguientes dos casos:

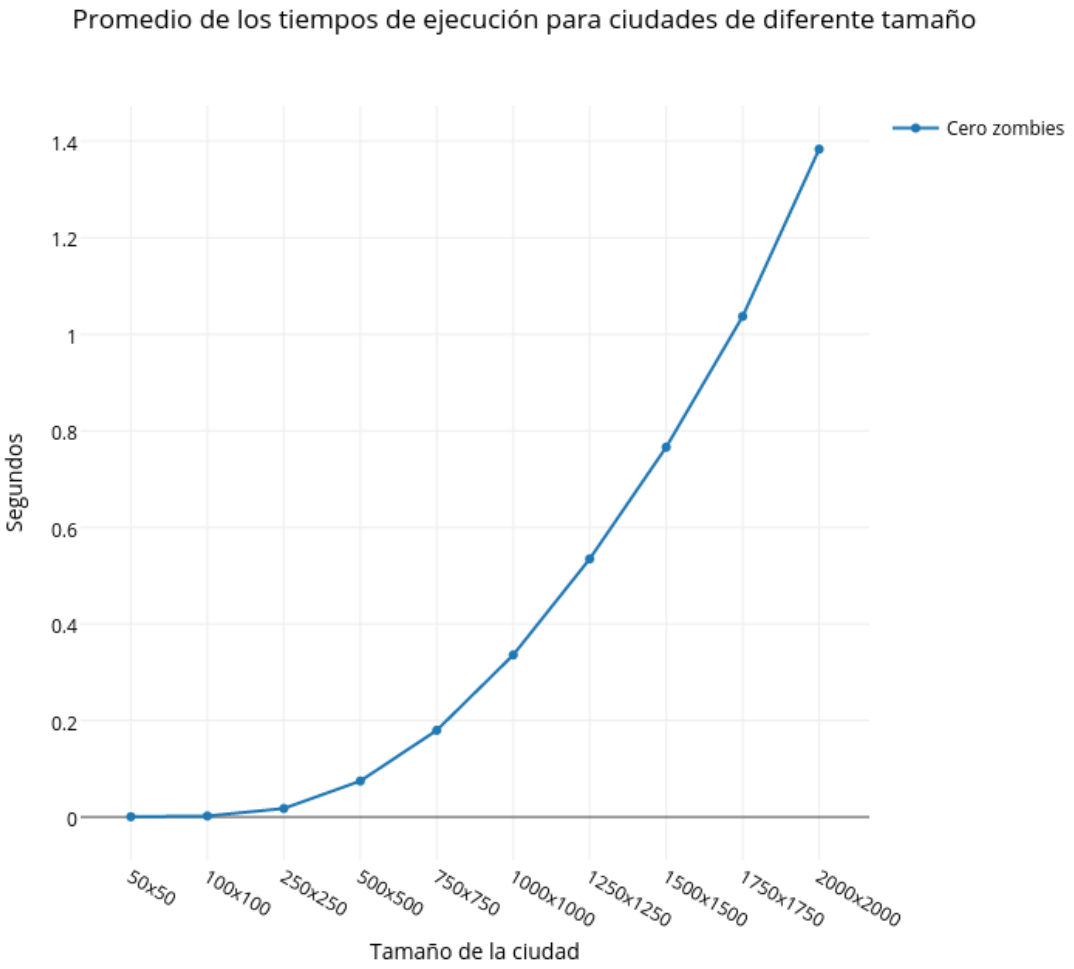
- **Cero zombies**: En esta instancia, la cantidad de zombies en cada cuadra es cero, con lo cual, el algoritmo recorre toda la ciudad, y se queda con cualquier camino.
- **Zombies aleatorios**: Es la instancia explicada anteriormente.

También es necesario aclarar, que los experimentos se realizaron sobre ciudades cuadradas, con puntos de inicio y llegada en los extremos opuestos de la ciudad, y con cantidad de soldados iniciales igual a 20.

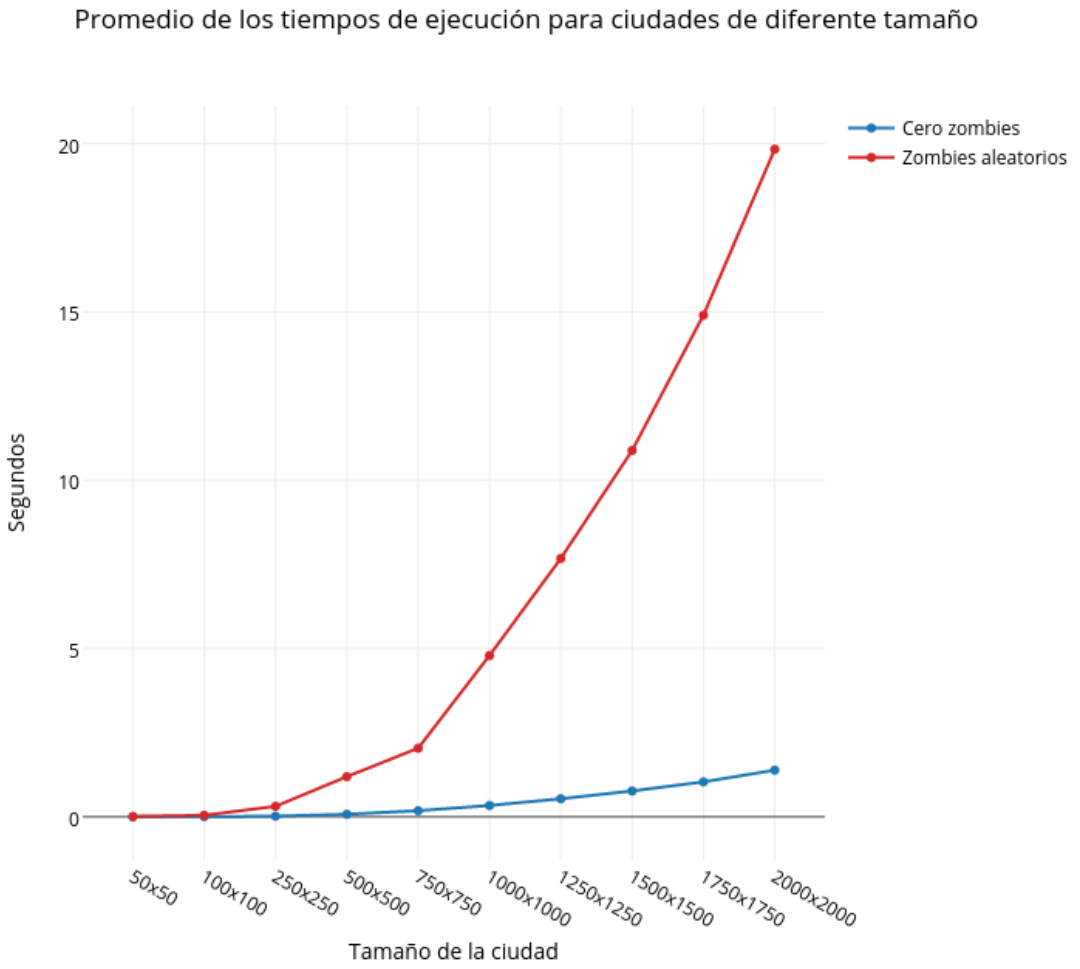
A continuación se detallan los experimentos y sus resultados. Debido al tamaño de las instancias de prueba, los inputs de dichos experimentos no fueron adjuntados.

Experimento	**Cero zombies**	**Zombies aleatorios**
Tamaño de la ciudad	Soldados al final	
50x50	20	6
100x100	20	19
250x250	20	17
500x500	20	17
750x750	20	16
1000x1000	20	12
1250x1250	20	20
1500x1500	20	7
1750x1750	20	14
2000x2000	20	20

Dado que los tiempos de ejecución para ambos experimentos varían ampliamente, primero analizaremos el experimento de **Cero zombies**.

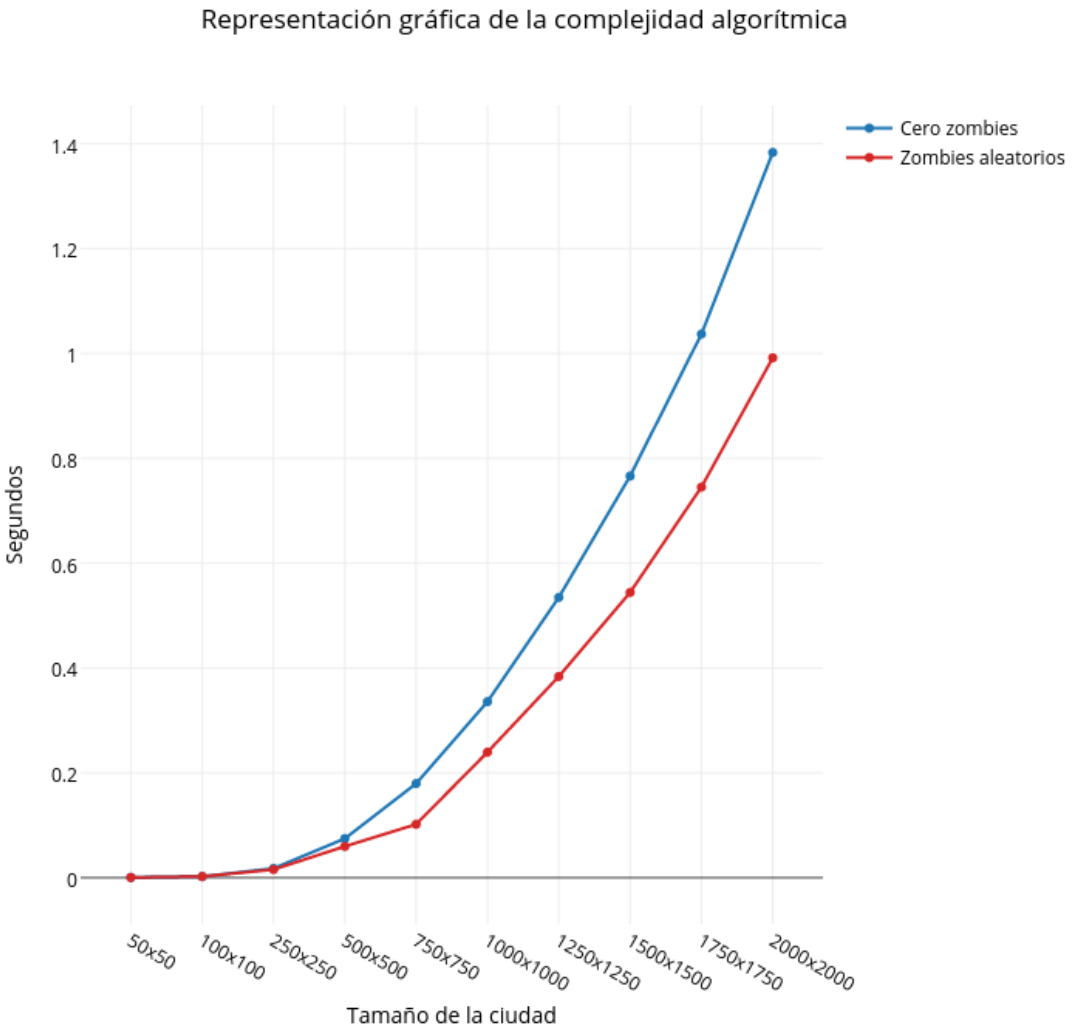


Como se puede apreciar, al no haber zombies, no existe ningun camino en el cual mueran soldados, por lo que los tiempos se incrementan acorde a la dimension de la ciudad, y al ser cuadradas, crece polinomialmente.



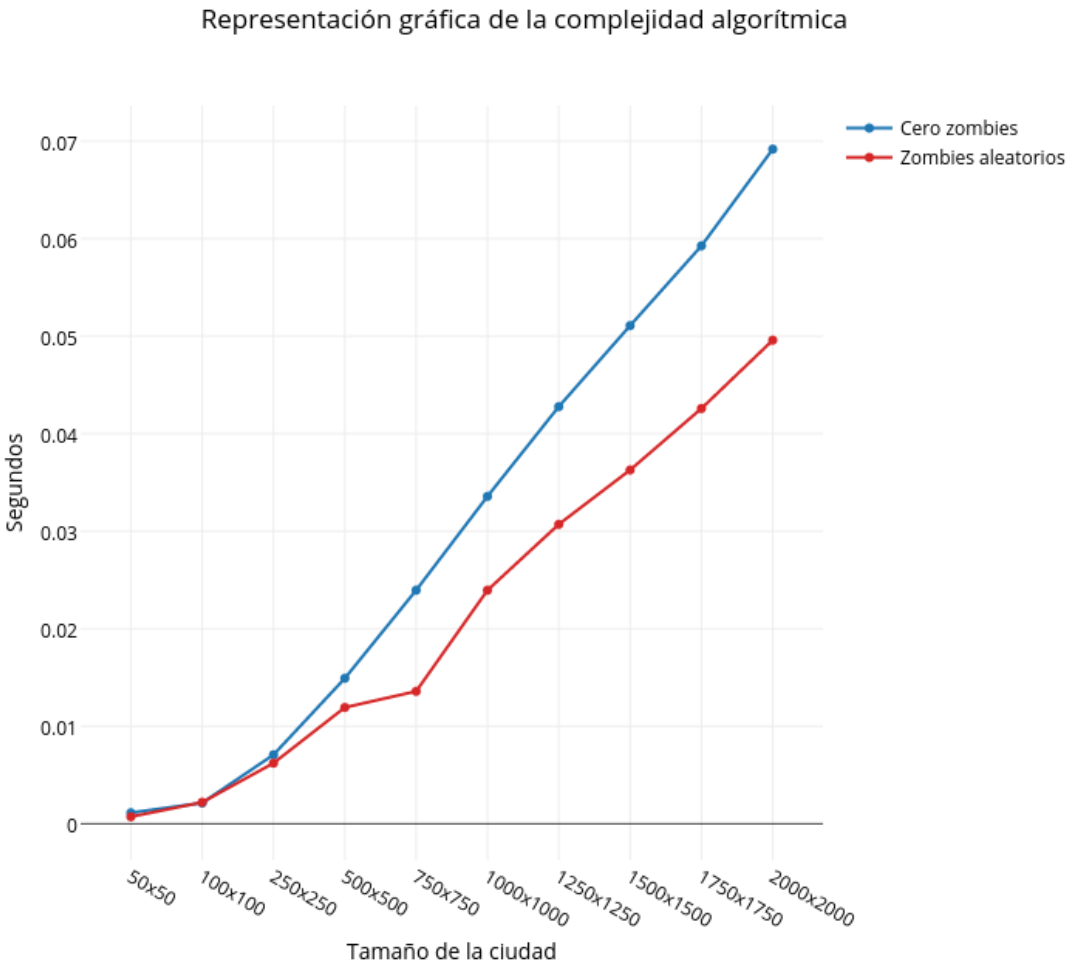
Aquí se pueden apreciar las diferencias de tiempos. Ésta radica en el hecho de que **Zombies aleatorios** posee caminos en los cuales los soldados mueren. Por ello, el algoritmo deberá recorrer, en peor caso, s veces la ciudad entera.

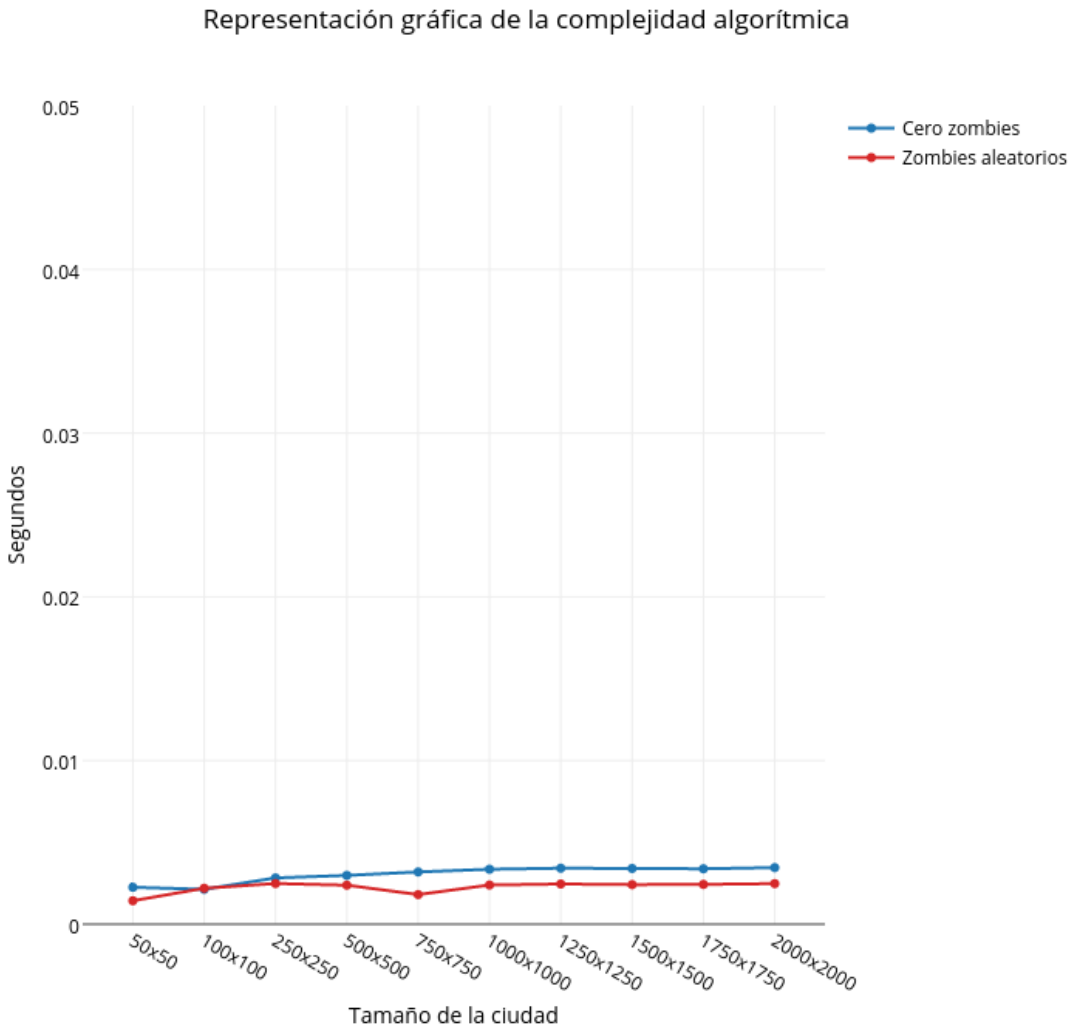
Se procedió, entonces, a dividir los resultados de **Zombies aleatorios** por la cantidad de soldados iniciales con los que se ejecutó el algoritmo a fin de que quede reflejado, que en ese caso, los tiempos serán muy similares a los de **Cero zombies**. Esto se debe a que ya no son los tiempos de recorrer s veces la ciudad, sino de recorrerla una sola vez. Sin embargo, es necesario aclarar que la similitud que se intenta mostrar, es aproximada, ya que no podemos asegurar que efectivamente, el algoritmo recorre s veces la ciudad. Tal es el peor caso, y como hemos expuesto en un principio, no podemos asegurar que sea el que realmente ocurre.



Manteniendo los resultados de **Zombies aleatorios** divididos por s, finalmente dividimos los resultados tanto de **Cero zombies** como de **Zombies aleatorios**, por n, y en una instancia aparte, por $n.m$. De esta manera, dado que en ambos tienen s igual a 1, solo queda ver que al dividir por n, los resultados se aproximan a una función lineal, y que al dividirlos por $n.m$, se aproximan a una constante.

Como solo nos interesa la relación, y no la función exacta ni la constante, multiplicamos los resultados de dichas divisiones por 100, para que los valores sean más claros y visibles.


Representación gráfica de la complejidad algorítmica
Cero zombies
Zombies aleatorios
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
Segundos
50x50
100x100
250x250
500x500
750x750
1000x1000
1250x1250
1500x1500
1750x1750
2000x2000
Tamaño de la ciudad



Se puede ver que la experimentación se corresponde con la teoría, y que la complejidad, en peor caso, es $O(s.n.m)$.

3. Refinando petróleo

3.1. Descripción de la problemática

Dentro de una locación dada, se cuenta con *n* pozos de extracción de petróleo. Como el petróleo luego de ser extraído debe ser refinado, se nos pide diagramar la construcción de refinerías y tuberías para hacerlo posible.

Para armar esta red de refinamiento se podrán construir refinerías, colocadas en cada pozo, y tuberías que conectan los distintos pozos entre sí. Como todos los pozos deben tener un camino factible, para llegar a alguna planta procesadora, se les deberá colocar una planta de refinamiento en el mismo, o bien, armar un camino de tuberías que lo conecte con una.

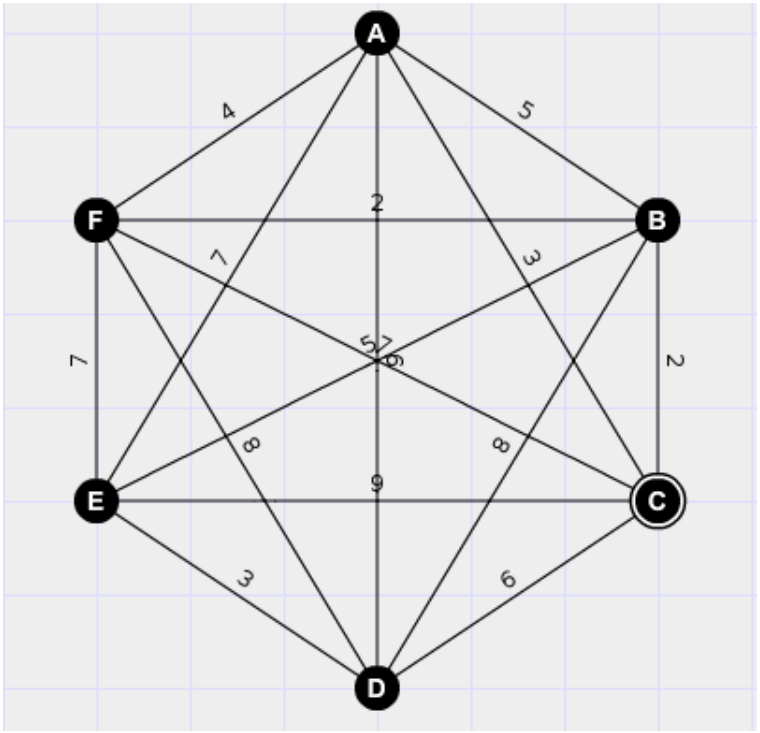
Las refinerías tienen un costo fijo, independiente del pozo donde se ubiquen, mientras que el costo de las tuberías depende de los pozos que se quiera conectar. Además, contamos con la restricción de que sólo se pueden construir tuberías entre los pozos que nos son indicados. Todos estos datos nos son dados como parámetros de la función.

Se desea escribir un algoritmo que de una distribución de refinerías y tuberías tal que todo pozo tenga acceso a una refinería y minimice el costo de la inversión. Se debe indicar cuántas refinerías construir y en qué pozos, así como también cuántas tuberías y entre que pozos.

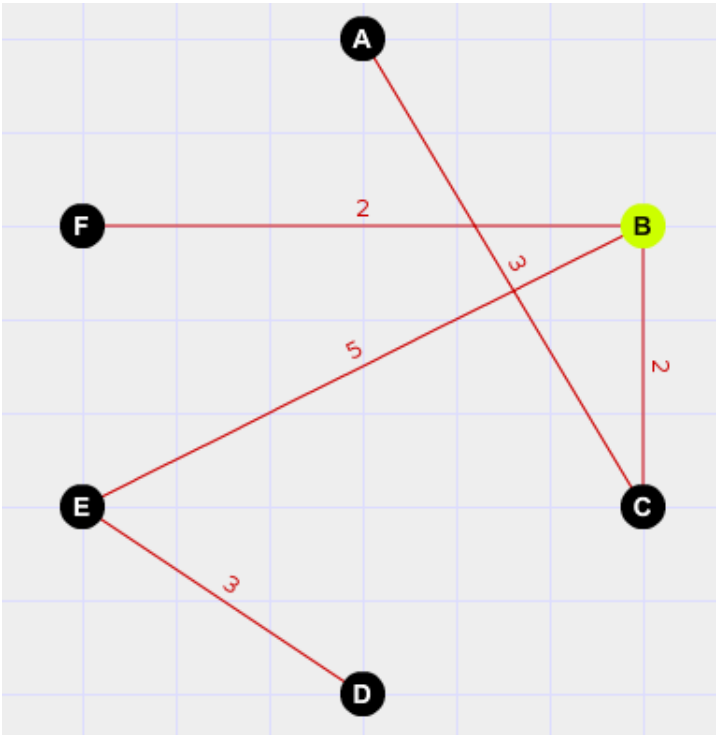
El algoritmo debe tener complejidad mejor que $O(n^3)$ siendo n la cantidad de pozos de la zona.

A continuación citaremos una serie de ejemplos donde los modelamos como grafos, tal que los nodos son los pozos existentes y los ejes iniciales son las posibles conexiones entre ellos con un peso igual al costo de construir una tubería allí. En las soluciones, se preservan sólo los ejes donde construiremos una tubería y los nodos que sean amarillos representan pozos que contendrán una refinería en ellos.

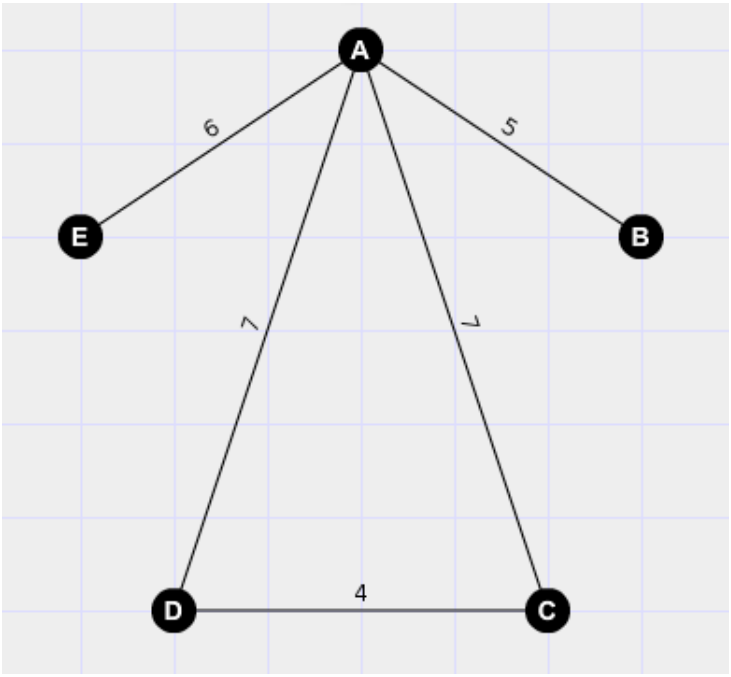
Ejemplo 1: considerando un costo de construir una refinería igual a 7, contamos con la siguiente distribución de pozos y sus posibles conexiones:



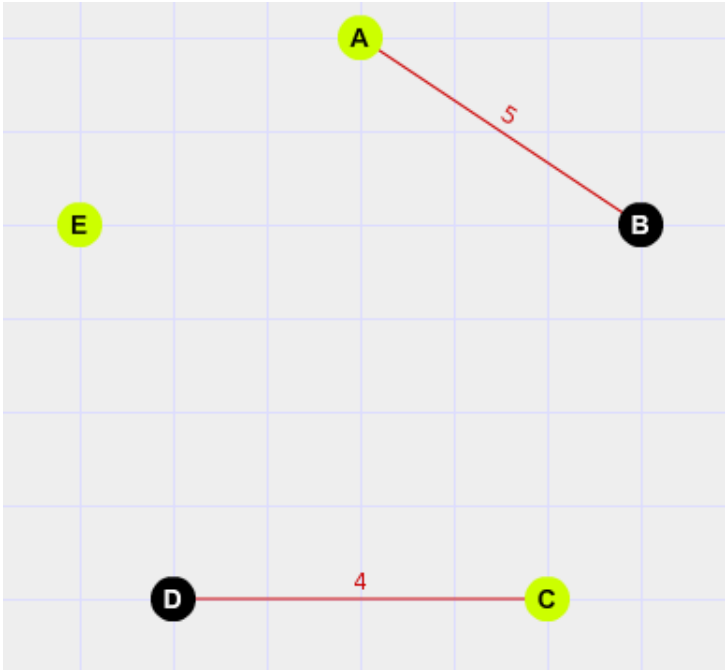
La solución debe tener un costo total de 22 y es correcto devolver una distribución como la siguiente:



Ejemplo 2: Consideramos otra distribución con un costo de construir una refinería igual a 6:



La solución tendrá un costo total de 27, con la siguiente como una distribución válida:



3.2. Resolución propuesta y justificación

Dada la estructura del problema presentado, se optó por modelar la situación mediante un grafo no dirigido. En este mismo, cada nodo presenta un pozo petrolero y los ejes indican la posibilidad de la construcción de tuberías. Es decir, dados dos nodos e y f del grafo, va a existir un eje $w = (e, f)$ si y solo si se puede construir una tubería entre e y f. Además, cada eje va a contar con un peso que indica el costo de construcción de su tubería.

Este grafo inicial se va a armar con los datos pasados por parámetro. En primera instancia, se guardan los ejes que se obtienen de la *entrada standard* como una lista de adyacencia.

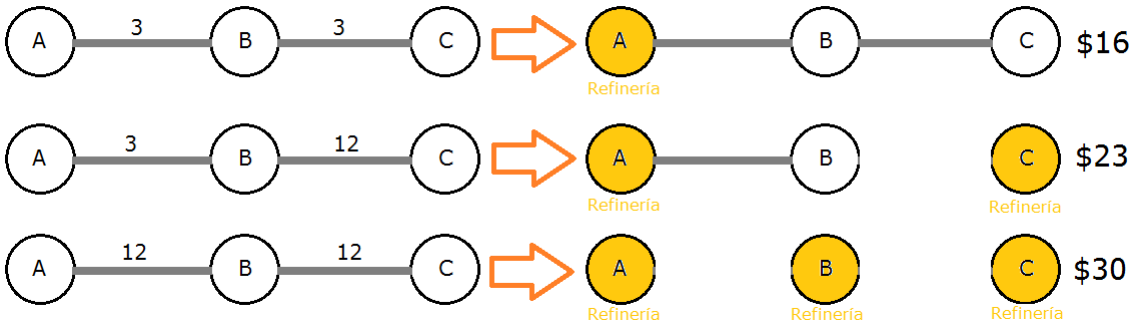
A partir de aquí vamos a trabajar con un algoritmo particular sobre *árboles generadores mínimos*: **algoritmo de Kruskal**.

El grafo obtenido hasta ahora puede tener desde 1 hasta n componentes conexas, para cada una de ellas vamos a formar su árbol generador mínimo. Esto nos asegurará formar un árbol por componente tal que su peso total sea el mínimo de todos los árboles factibles. Al saber que los pesos de los ejes son todos positivos, contamos con que el único camino resultante entre dos nodos va a ser el camino de menor costo de los caminos originales.

El algoritmo de Kruskal es un algoritmo goloso que está implementado para grafos. Lo primero que realizamos fue ordenar los ejes que tenemos del grafo, por su peso en orden creciente. A continuación, se recorren los ejes secuencialmente y para cada uno se decide si debe permanecer o se debe quitar, de modo que si el eje actual no genera un ciclo (con los elegidos hasta esta instancia) permanece, en caso contrario se elimina.

Además, cuenta con una restricción adicional. Cada eje que revisa va a permanecer sólo si su peso es menor al costo de construir una refinería. Esta nueva condición, nos asegura que para cada pozo su camino para llegar a una refinería va a ser el mínimo.

Consideremos el caso de $n = 3$, donde contamos con los nodos: A, B y C con un costo de construir una refinería de $10. A continuación, adjuntamos tres ejemplos donde se puede ver que la elección (entre insertar una tubería entre dos nodos o una refinería en cada uno) se condice con insertar una tubería sólo si su costo es menor al de construir una refinería.



Una vez que obtuvimos los ejes definitivos, nos queda simplemente contar cuántas refinerías hay que colocar (una, por cada componente conexa -árbol- que formen los ejes seleccionados) y ubicarla en cualquier nodo de la componente.

Llevar la cuenta de cuánto se lleva gastado es sumar los costos de cada tubería colocada más la cantidad de refinerías por su costo, y así obtenemos el costo total.

3.3. Análisis de la complejidad

Dados los datos ingresados como parámetros, contamos con el costo de construir una refinería y un grafo no dirigido de forma tal que la cantidad de nodos están numerados (arbitrariamente) de 0 a $n-1$ y posee m ejes. Tomamos como notación *n = cantNodos* y *m = cantEjes*.

Es importante destacar que la cantidad de ejes está acotada por $O(n^2)$; ya que cada nodo, en el peor caso, puede conectarse con todos los nodos del grafo, excepto consigo mismo, es decir que para cada nodo, existen a lo sumo n-1 ejes que entran y salen del mismo.

El grafo que construímos con los datos pasados como parámetro va a estar representado mediante una lista de adyacencia, la cual va a ser un vector de ejes. Esto presenta un costo de $O(m)$, como $m \leq n^2$ pertenece a $\mathbf{O(n^2)}$.

Luego, vamos a utilizar la estructura *Union-Find* [3] [4]. Esta estructura (adjuntada en el archivo *Union-Find.h*) consiste de un vector capaz de almacenar diversos conjuntos disjuntos -cada uno con un *Elemento Representante-*, la cual cuenta con los siguientes tres métodos: `find_set(x)`, `union_set(x, y)` y `is_in(x, y)`.

`find_set(x)` devuelve el elemento representante del conjunto al que pertenece *x*.

`union_set(x, y)` une al conjunto que contiene a *x* con el conjunto al que pertenece *y*.

`is_in(x, y)` devuelve true si *x* está en el mismo conjunto que *y*, false en caso contrario.

El algoritmo de Kruskal se apoya en esta estructura. Nuestra función `generarArbolesMinimos` recibe como parámetros de entrada al vector de ejes totales, el costo de construir una refinería y la cantidad de pozos (n).

Como primer paso, ordena los ejes mediante el algoritmo sort() [5] de la librería Standard de *C*, cuya complejidad es $O(m.log(m))$. Lo cual es equivalente a $O(n^2.log(n^2))$, por propiedades de logaritmo es $O(n^2 2.log(n))$ y eliminando constantes es $\mathbf{O(n^2.log(n))}$.

Luego, se recorren todos los ejes del vector obtenido como parámetro (`ejes`), ya ordenados. De modo que, primero nos ubicamos en el eje de menor costo, terminando el recorrido con el de mayor. Manejaremos un vector `res` y una estructura *Union-Find* (`bosqueMinimo`), que nos permitirán almacenar los ejes que sean candidatos válidos para nuestra solución.

Al comienzo de la iteración, `res` estará vacío y (`bosqueMinimo`) contendrá a todos los nodos, sin ninguna conexión entre sí. Vamos a recorrer el vector `ejes` y por cada uno de ellos vamos a fijarnos si va a estar en la solución o no.

Esto implica verificar que, al agregarlos, no se forme un ciclo con los ejes ya iterados. Es decir, que sólo se unirán los dos nodos que une este eje dentro de su conjunto correspondiente en (`bosqueMinimo`), si pertenecen a conjuntos distintos. Si es un eje válido y su costo es menor al costo de construir una refinería, entonces lo agregamos a res.

Este paso aprovecha la estructura de conjuntos disjuntos *Union-Find*, para ver si dos conjuntos son disjuntos y eventualmente unirlos eficientemente.

Dado que lo implementamos con las heurísticas de *path compression* y *union by rank*, la complejidad de m operaciones `find_set` y `union-set` más una llamada a `make_set` de complejidad $O(n)$, ejecutan en tiempo $O(m\alpha(n))$, donde $\alpha(n)$ es la inversa de *función de Ackerman*[4]:

$$\begin{aligned} A(m,n) &= (2 \uparrow^{m-2} (n+3)) - 3 \\ \alpha(n) &= min\{k \in N_0 : A(k,1) \geq n\} \end{aligned}$$

[3] Introduction to Algorithms (Third Edition) - Cormen, Leiserson, Rivest, Stein [2009], Unidad 21.

[4] Gregory C. Harfst and Edward M. Reingold. A potential-based amortized analysis of the union-find data structure, 2000.

[5] http://www.cplusplus.com/reference/algorithm/sort/

Algunos valores de la *función de Ackerman* se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} A(0,1) &= 2 \\ A(1,1) &= 3 \\ A(2,1) &= 7 \\ A(3,1) &= 2047 \\ A(4,1) &= 10^{80} \end{aligned}$$

Como A crece excesivamente rápido, α crece excesivamente lento:

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq n \leq 2 \\ 1 & \text{si } n = 3 \\ 2 & \text{si } 4 \leq n \leq 7 \\ 3 & \text{si } 8 \leq n \leq 2047 \\ 4 & \text{si } 2048 \leq n \leq A(4,1) \end{cases}$$

Esto nos indica que para casi cualquier caso práctico que empleemos (hasta 10^{80} nodos), $\alpha(n)$ será a lo sumo 4. Por lo tanto, la complejidad de estas operaciones es $O(m)$ o lo que es lo mismo $\mathbf{O(n^2)}$.

Tener en cuenta que, dentro del ciclo también se ejecutan asignaciones y push_back() [6] en un vector pero estas operaciones cuentan con un costo $O(1)$ (amortizado en el caso de `push_back`), lo cual es despreciable.

Finalmente devuelve el vector resultante por copia, lo que suma, en el peor caso, $\mathbf{O(n)}$ dado que un árbol generador tiene a lo sumo $n-1$ ejes.

Hasta este punto, la complejidad es la suma de las mencionadas: $O(n^2) + O(n^2.log(n)) + O(n^2) = \mathbf{O(n^2.log(n))}$.

Resta hacer un recorrido lineal en los ejes del árbol generador mínimo que nos devolvió el algoritmo de *Kruskal*, armando un nuevo *Union-Find* para distinguir cuáles son las componentes conexas resultantes. De esta manera, vamos a determinar qué componentes necesitan una refinería (determinamos que el elemento representante de cada conjunto).

Esto tarda $\mathbf{O(n)}$ ya que, como se indicó anteriormente, a lo sumo son $n-1$ ejes.

La cuenta final resulta $O(n) + O(n^2.log(n)) = \mathbf{O(n^2.log(n))}$, la cual es estrictamente mejor que $O(n^3)$ como se pedía en el enunciado.

[6] http://www.cplusplus.com/reference/vector/vector/push_back/

3.4. Código fuente

```
class UnionFind {
public:
     UnionFind(int tamano);
    ~UnionFind();
    int find_set(int x);
    void union_set(int x, int y);
    bool is_in(int x, int y);

private:
    vector<int> parent;
    vector<int> rank;
};
```

```
 UnionFind::UnionFind(int tamano){
     parent = vector<int>(tamano);
    rank = vector<int>(tamano);
//cada indice es su propio representante, su ranking es 0
    for (int i = 0; i < tamano; ++i) {
        parent[i] = i;
        rank[i] = 0;
    }
}
```

```
int UnionFind::find_set(int x) {
//si es representante lo devuelvo, si no lo hago apuntar directamente al representante
//para que llamadas consecutivas cuesten tiempo constante
    if(parent[x] != x)
        parent[x] = find_set(parent[x]);
    return parent[x];
}
```

```
void UnionFind::union_set(int x, int y) {
//buscamos representantes de ambos elementos
//requiere que no esten en el mismo conjunto
    int rx = find_set(x);
    int ry = find_set(y);
//incluyo el de menor ranking en el de mayor para mantener balanceada la estructura
    if(rank[rx] < rank[ry]){
        parent[rx] = ry;
    }
    else{
        parent[ry] = rx;
        if(rank[ry] == rank[rx])
            rank[rx]++;
    }
}
```

```
bool UnionFind::is_in(int x, int y) {
    return find_set(x) == find_set(y);
}
```

```
struct eje {
    unsigned int pozoA;
    unsigned int pozoB;
    unsigned int costoTuberia;
    bool operator< (const eje& otro) const{
        return costoTuberia < otro.costoTuberia;
    }
};
```

```
int main(int argc, char const *argv[]){
    unsigned int pozos, cantConexiones, costoRefineria;
    unsigned int pozoA, pozoB, costoTuberia;
    cin >> pozos >> cantConexiones >> costoRefineria;
    vector<eje> ejes;
//leemos la entrada, la almacenamos en ejes
    for (int i = 0; i < cantConexiones; ++i){
        cin >> pozoA >> pozoB >> costoTuberia;
        pozoA--;
        pozoB--;
        eje conex;
        conex.pozoA = pozoA;
        conex.pozoB = pozoB;
        conex.costoTuberia = costoTuberia;
        ejes.push_back(conex);
    }
//aplicamos el algoritmo
    refinandoPetroleo(ejes, pozos, costoRefineria);
    return 0;
}
```

```
int refinandoPetroleo(vector<eje>& ejes, int cantPozos, int costoRefineria){
//generamos los arboles minimos para cada componente conexa,
//en realidad solo los ejes que cuesten menos que poner refinerias
    vector<eje> conexionesMinimas = generarArbolesMinimos(ejes, costoRefineria, cantPozos);
    UnionFind conexos(cantPozos);
    int costoTotal = 0, cantRef = 0;
//armamos un union-find para identificar componentes triviales, en las demas solo hara falta
//poner una refineria en el representante de la componente pues los tubos son mas baratos
//para unir los distintos pozos
    for (int i = 0; i < conexionesMinimas.size(); ++i) {
        conexos.union_set(conexionesMinimas[i].pozoA, conexionesMinimas[i].pozoB);
        costoTotal += conexionesMinimas[i].costoTuberia;
    }
//en las componentes triviales van refinerias
    vector<bool> refinerias(cantPozos);
    for (int i = 0; i < cantPozos; ++i) {
        if(conexos.find_set(i) == i){
            refinerias[i] = true;
            costoTotal += costoRefineria;
            cantRef += 1;
        }
    }
//cout pedido
    cout << costoTotal << " " << cantRef << " " << conexionesMinimas.size() << endl;
    for (int i = 0; i < refinerias.size(); ++i) {
        if(refinerias[i])
            cout << i+1 << " ";
        }
    cout << endl;
    for (int i = 0; i < conexionesMinimas.size(); ++i) {
        cout << conexionesMinimas[i].pozoA+1 << " " << conexionesMinimas[i].pozoB+1 << endl;
    }
    return costoTotal;
}
```

```
vector<eje> generarArbolesMinimos(vector<eje>& ejes, int costoRefineria, int cantPozos){
    UnionFind bosqueMinimo(cantPozos);
    vector<eje> res;
//ordenamos los ejes segun su costo para obtener en tiempo constante, los menores
    sort(ejes.begin(), ejes.end());
    for (int i = 0; i < ejes.size(); ++i) {
//si agregar el eje no forma ciclo
    if(!bosqueMinimo.is_in(ejes[i].pozoA,ejes[i].pozoB)){
//lo uno y si cuesta menos que poner una refineria, lo agrego a res
        bosqueMinimo.union_set(ejes[i].pozoA, ejes[i].pozoB);
            if(ejes[i].costoTuberia < costoRefineria){
                eje conex;
                conex.pozoA = ejes[i].pozoA;
                conex.pozoB = ejes[i].pozoB;
                conex.costoTuberia = ejes[i].costoTuberia;
                res.push_back(conex);
            }
        }
    }
    return res;
}
```

3.5. Experimentación

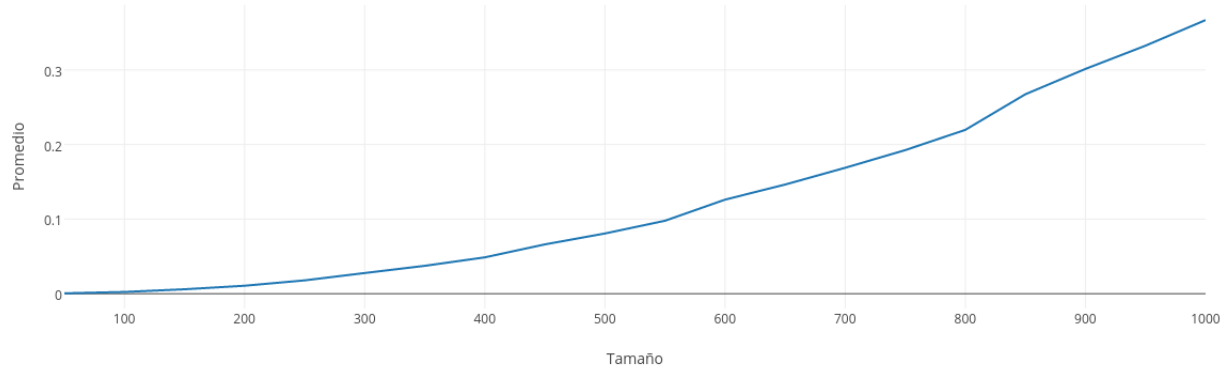
3.5.1. Constrastación Empírica de la complejidad

Para llevar a cabo esta experimentación, consideramos el peor caso posible de cantidad de ejes del grafo, es decir que habrá exactamente $n.(n-1)$ ejes (cada nodo puede conectarse con cualquier nodo del grafo, excepto consigo mismo), variando la cantidad de nodos.

Armamos un script que generó estas instancias, toma como parámetro la cantidad de pozos, y el costo de la refinería, las conexiones no, porque queríamos un grafo completo, este valor será $n.(n-1)$. El mismo escribe un archivo con el formato de la entrada standard, donde a cada eje le asigna un peso random entre 0 y 2∗costoRefinería.El archivo se adjunta en... y se llama ...

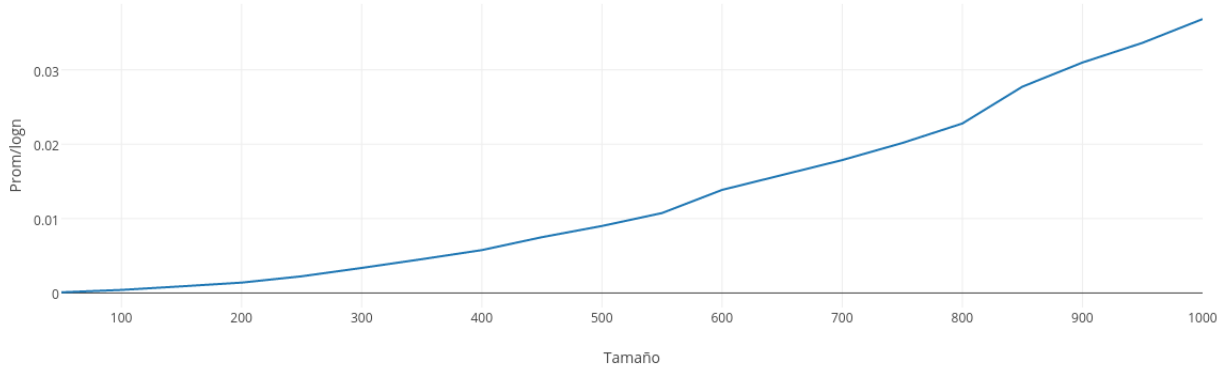
Los tiempos de ejecución para cada n (cantidad de nodos) fueron los siguientes:

n	Tiempo en segundos
50	0.0005254864
100	0.002332719
150	0.0059328642
200	0.01065945
250	0.0178728144
300	0.0277215188
350	0.0373807766
400	0.0487278266
450	0.0661190683
500	0.0807527896
550	0.0978193478
600	0.126140013
650	0.146378511
700	0.168847877
750	0.192539493
800	0.219705288
850	0.267457097
900	0.301437881
950	0.332602623
1000	0.366929358

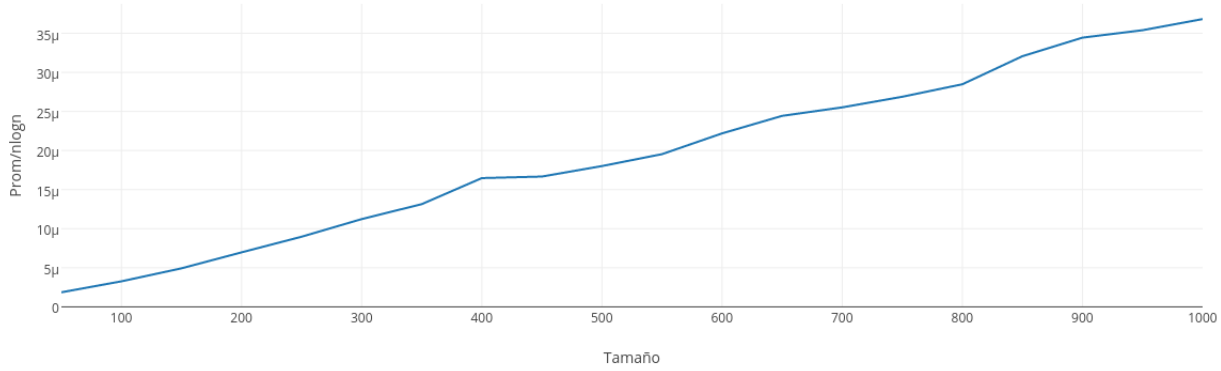


Dado que la Cota de Complejidad planteada teóricamente es de $O(n^2.log(n))$, era esperable que la curva sea una parábola creciente.

A simple vista, no se puede apreciar si la relación que tienen respecto de tamaño/tiempo es efectivamente la que buscamos (pues casi todas las curvas polinomiales tienen gráficos similares). Por este motivo, como siguiente paso decidimos comenzar a linealizar los tiempos, dividiendo a cada uno por $log(n)$.



La morfología de este gráfico es similar a la anterior, sigue siendo una parábola creciente, por lo tanto terminaremos de linealizar, dividiendo a cada uno por n, para ver si se trata de la parábola cuadrática.



Efectivamente puede observarse que el comportamiento es lineal. Por lo tanto, podemos afirmar que nuestra experimentación condice a la Cota Teórica planteada de $\mathbf{O(n^2.log(n))}$.