Un mordisquito de Análisis de Fourier

Juan Manuel Pérez

27 de junio de 2017

Un poco de contexto

- Idea: descomponer función en sumas trigonométricas
- Fuertes motivaciones físicas: termodinámica, formas normales de una cuerda
- Historia muy rica

Series de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 1-periódica. Queremos descomponerla en sumas trigonométricas

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(2\pi nx) + b_n sin(2\pi nx)$$

- Cada una de estos senos y cosenos representa una "frecuencia"
- Podemos calcular los coeficientes de la siguiente maneram

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)cos(2\pi nx)dx$$
$$b_n = \frac{1}{2} m \int_0^1 f(x)sin(2\pi nx)dx$$

Series de Fourier versión compleja

De nuevo, pero usemos otra base: las exponenciales complejas

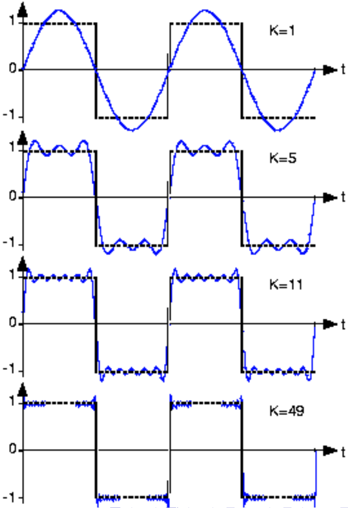
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nx} \tag{1}$$

Si $f(x)$ es real, los c_n son conjugados simétricos y también podemos hablar de "frecuencia"

Un ejemplo clásico

Calculemos la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Transformada de Fourier

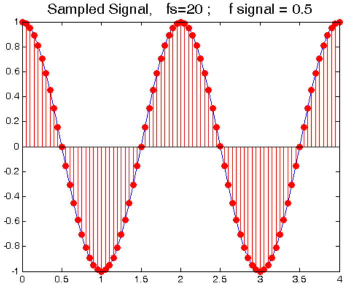
Extensión "contínua" de la serie de Fourier para funciones no periódicas.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, definimos su transformada de Fourier

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx$$

- Dada una función contínua, nos devuelve otra función contínua
- Decimos que $f(t)$ está en el dominio del tiempo y $F(w)$ en el de las frecuencias

Mundo discreto

- Las computadoras no usan tiempo contínuo
- Manipulan muestras equiespaciadas de una señal
- A esto se le llama "muestreo"



Discrete Fourier Transform

- Sea $x[n]$, una secuencia de números reales (potencialmente complejos) con período N (es decir $x[n] = x[n+N]$).
- De la misma manera que hicimos antes, queremos descomponer a x como suma de exponenciales complejas armónicamente relacionadas

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{i\frac{2\pi k}{N}n}$$

Discrete Fourier Transform

- Podemos pensar una secuencia N-periódica como un vector de $\mathbb{C}^N$.
- En ese caso, $W_k^j = e^{i\frac{2\pi k}{N}j}$ son N vectores ortogonales con norma N

Luego, como estos vectores forman una base ortogonal, tenemos que sus coeficientes se calculan de la siguiente manera

$$a_k = \frac{1}{N}\langle x, W_k\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i\frac{2\pi k}{N}n}$$

Discrete Fourier Transform

Entonces, la transformada discretam de Fourier se define de la siguiente manera

$$X[k] = \langle x, W_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi k}{N} n}$$

Esencialmente lo mismo que los coeficientes anteriores pero sin dividir por la norma