

6. L'Analyse de Signal

6.1 La Transformée de Fourier

fft	transformée de Fourier
ifft	transformée de Fourier inverse
fft2	transformée de Fourier 2D
ifft2	transformée de Fourier inverse 2D

Exemple de la fonction **fft**:

On génère un signal qui est la somme de deux sinus et on regarde la sortie de la fonction **fft**.

Regardez **fft_sin.m**.

fft_sin.m

```
%script pour montrer une analyse fft
Tinitial =0;           %d'abord on define le base du temps des données
Tfinal = 1;
NbEch = 300;          %Nombre d'échantillons

Tech = (Tfinal - Tinitial)/(NbEch-1);
Fech = 1/Tech;         %on détermine la période et la fréquence d'échantillonnage

Freq1 = 10;           % les fréquences des composants du signal
Freq2 = 25;

t = Tinitial : Tech: Tfinal; % on génère le vecteur du temps et le signal
x = sin(2*pi*Freq1*t) + 0.5*sin(2*pi*Freq2*t);

y = fft(x);           % on applique l'analyse de Fourier

% la sortie est complex. On prend le modulus complex comme amplitude
% et on divise par Nb de données pour arriver aux 'vrais' amplitudes
m = abs(y)/NbEch;

p = unwrap(angle(y));  % la phase est calculée.

f = (0:NbEch-1)*Fech/NbEch; % pour créer l'echelle de la fréquence

subplot(3,1,1),plot(t,x),xlabel('temps(s)')
subplot(3,1,2),plot(f,m),xlabel('fréquence(Hz)'),grid on
subplot(3,1,3),plot(f,p*180/pi),xlabel('fréquence(Hz)'),ylabel('phase(deg)'),grid on
```

6.2 Interpolation

L'interpolation consiste à estimer les valeurs des points qui se trouvent entre des points donnés. MATLAB est capable de faire de l'interpolation sur des données mono-dimensionnelles ou plus généralement à n dimension. On trouve deux familles de calcul de l'interpolation dans MATLAB:

- L'interpolation polynomial
- L'interpolation basée sur FFT

interp1	interpolation polynomial à une dimension
interpft	interpolation basée sur FFT à une dimension
interp2	interpolation polynomial deux dimension

Syntaxe : $y_i = \text{interp1}(x, y, x_i, \text{'méthode'})$

x = vecteur d'abscisses monotones(croissantes ou décroissantes)

y = vecteur des points donnés correspondant aux valeurs de x

x_i = vecteur des valeurs pour lesquelles on veut estimer y

'méthode' = nom de l'algorithme utilisé : 'nearest','linear','spline','cubic'

Si les valeurs de x sont régulières, l'exécution est accélérée en utilisant '*methode'

Comparaison des différentes méthodes

Pour cette comparaison, on utilise un fichier de données census.mat fourni par MATLAB

```
» clear
```

```
» load census
```

```
» whos
```

Name	Size	Bytes	Class
cdate	21x1	168	double array
pop	21x1	168	double array

Grand total is 42 elements using 336 bytes

```
» plot(cdate,pop, '*')
```

```
» low = min(cdate)
```

```
low =
```

```
1790
```

```
» high = max(cdate)
```

```
high =
```

```
1990
```

```
» xi = low:high;
```

```
» yi = interp1(cdate,pop,xi,'nearest');
```

```
» figure
```

```
» plot(cdate,pop, '+',xi,yi,'r')
```

```
» figure
```

```
» yi = interp1(cdate,pop,xi,'linear');
```

```
» plot(cdate,pop, '+',xi,yi,'r')
```

```
» figure
```

```
» yi = interp1(cdate,pop,xi,'spline');
```

```
» plot(cdate,pop, '+',xi,yi,'r')
```

```
» figure
```

```
» yi = interp1(cdate,pop,xi,'cubic');
```

```
» plot(cdate,pop, '+',xi,yi,'r')
```

L'interpolation à deux dimensions est très importante dans le traitement de l'image. La syntaxe est la suivante

Syntaxe : `zi = interp2 (X, Y, Z, Xi, Yi,'méthode')`

X,Y,Z = matrices des points mesurés

Xi, Yi = matrices des valeurs pour lesquelles on veut estimer l'altitude (les résultats du **meshgrid**)

'méthode' = nom de l'algorithme utilisé : 'nearest','bilinear','spline','bicubic'

Exercice :

1. Comparez les différentes méthodes de l'interpolation bi -dimensionnelle. Vous pouvez travailler avec la fonction de démonstration `peaks` de MATLAB.

```
>> [X,Y] = meshgrid(-3:1:3,-3:1:3)    création d'un maillage cartésien du plan x,y
>> Z = peaks(X,Y)                     calcul de la matrice de l'altitude
>> surf (X,Y,Z)
```

L'objectif est d'affiner le maillage en utilisant l'interpolation. Donc ...

```
>> [Xi ,Yi] = meshgrid (-3:0.25:3,-3:0.25:3);
```

Il existe aussi sous MATLAB des fonctions de triangulation et d'interpolation des données dispersées (des nuages de points).

Exemples : `convhull`, `delaunay`, `tsearch`

6.3 L'ajustement des courbes

- **l'ajustement d'un polynôme par la méthode des moindres carrés**

polyfit	trouve les coefficients d'un polynôme
polyval	calcule les valeurs d'un polynôme(ex. utilisant les résultats de <code>polyfit</code>)

Les polynômes dans MATLAB sont représentés sous forme de vecteurs de lignes composés des coefficients classés en ordre décroissant. Le polynôme $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ est écrit dans MATLAB comme `>> p = [1 -6 11 -6]`

Exemple :

<code>>> xm = 0:10;</code>	vecteur d'abscisses(mesures)
<code>>> p = [1 2 0];</code>	polynôme $x^2 + 2x$
<code>>> ym = polyval(p,xm) + rand(size(xm));</code>	évaluation de p et on ajoute du bruit
<code>>> plot(xm,ym,'x')</code>	
<code>>> pf = polyfit(xm,ym,4)</code>	interpolation par un polynôme d'ordre 4

```
p =
0.0018 -0.0361 1.2284 1.5023 0.8249
```

<code>>> y = polyval(pf,xm);</code>	calcule les ordonnées de ce nouveau polynôme en fonction des abscisses
---	--

```

» plot(xm,ym,'x',xm,y)           affichage et comparaison
» res = ym - y;
» plot(xm,res,'x')

```

- **L'ajustement aux équations non-linéaires**

La boîte à outils Optimisation contient la fonction **curvefit** qui permet l'ajustement à des fonctions non-linéaires

Syntaxe de base `x = curvefit('fun',x0,xdata,ydata)`

`fun` = nom d'une autre fonction (.m) qui contient la fonction
`x0` = les conditions initiales
`xdata,ydata` = les données à ajuster
`x` = les coefficients de sortie

Exemple /Exercice

But : trouver la forme et les coefficients de l'équation qui représentent le mieux les données

- Dans le fichier fitting.mat il y a des données à ajuster. Charger ce fichier. Regarder l'allure des données.
- A votre avis quelle est la forme d'une équation qui peut représenter ces données ?
 Ecrivez l'équation dans un fichier.m(avec l'en-tête fonction `f = fun(x,xdata)` dans la forme suivante

$$f = x(1) + x(2)f1(xdata) + x(3)f2(xdata) \dots\dots$$
- Créer un vecteur `x0` des valeurs de départ
- Appeler la fonction **curvefit** avec les paramètres 'fun', `x0` et les données.
- Pour comparer les données avec votre résultat, faites appel à **fun** en lui passant les coefficients évalués par **curvefit**. Tracez les données et la courbe idéale. Vous pouvez également évaluer les résidus

6.4 Le filtrage des données

Un filtre peut être caractérisé par sa fonction de transfert. Les coefficients de cette fonction de transfert se divisent en deux groupes, l'un pour le numérateur et l'autre pour le dénominateur. MATLAB stocke les coefficients dans deux vecteurs ligne, le vecteur **b** correspond au numérateur, et **a** au dénominateur.

```

» Fs = 100;
» t = 0:1/Fs:1;
» x = sin(2*pi*t*3) + 0.25*sin(2*pi*t*40);
» b = ones(1,10)/10;
» y = filtfilt(b,1,x);
» yy = filter(b,1,x);
» plot(t,x,t,y,'r--',t,yy,'g:')

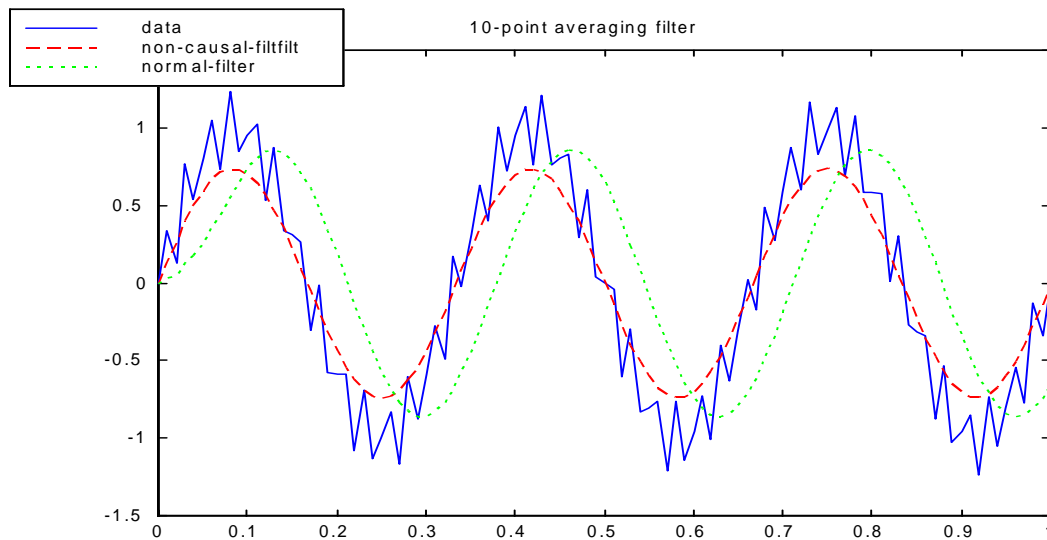
```

-génération des données
 -coefficients de filtrage pour un filtre de 10 points moyennes
 -forward and reverse digital filtering
 -one-dimensional digital filter

```

» legend('data','non-causal-filtfilt','normal-filter')
» title('10-point averaging filter')

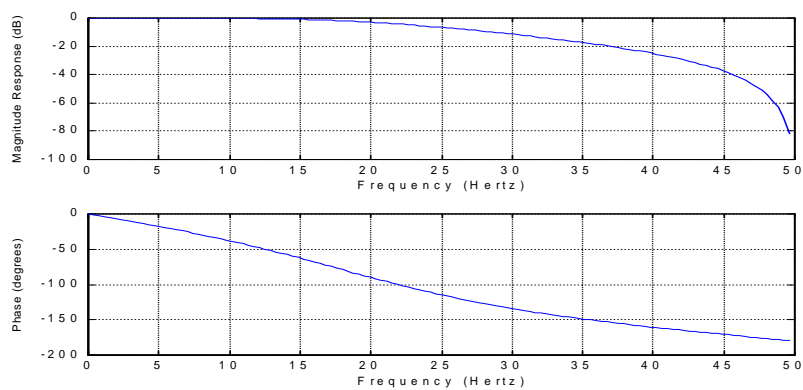
```



```

» [b,a] = butter(2,20/50);    - on génère les coefficients pour un filtre butterworth
» freqz(b,a,128,100)         - affichage des caractéristiques du filtre

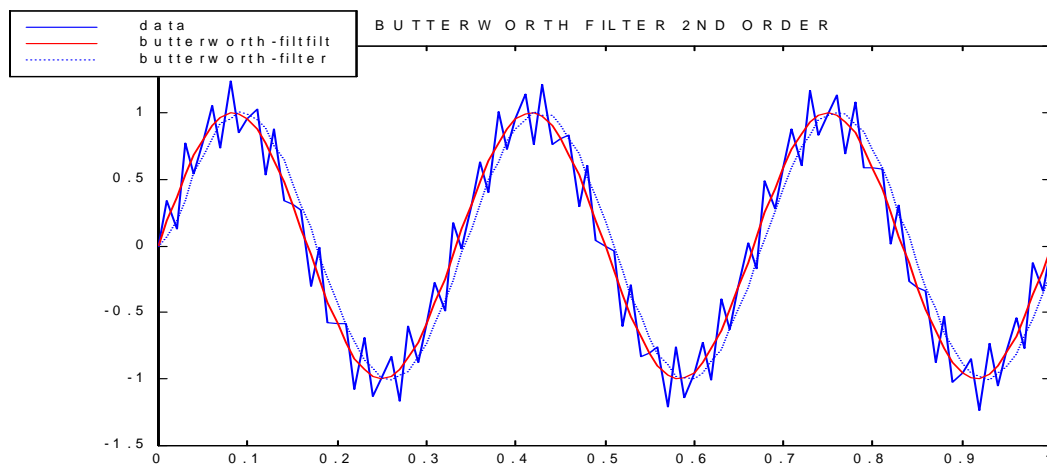
```



```

» butty = filter(b,a,x);
» buttyy = filtfilt(b,a,x);
» plot(t,x,t,buttyy,'r',t,butty,'g:')

```



7. Chaînes de caractères

Les chaînes de caractères sont traitées comme des matrices. Chaque caractère correspond à un élément de la matrice.

La manipulation d'une matrice de caractères se fait de la même manière que ce qu'on a déjà vu.

Exemples

```
>> a = 'azerty';
```

```
>> a(1,2)
```

```
ans =
```

```
z
```

```
>> e = [a,'abcd']          concaténation horizontale
```

```
e =
```

```
azertyabcd
```

```
>> F = [a; 'toto']
```

??? All rows in the bracketed expression must have the same number of columns.

```
>> F = [a; 'toto ']
```

concaténation verticale. ATTENTION à la longueur de la chaîne

```
F =
```

```
azerty
```

```
toto
```

```
>> G = str2mat(a,'toto')
```

cette fonction fait une concaténation verticale en gérant les blancs automatiquement

```
G =
```

```
azerty
```

```
toto
```

7.1 Conversion

num2str	valeur numérique → chaîne de caractères
str2num	chaîne de caractères → valeur numérique
mat2str	matrice → chaîne de caractères
dec2hex	entier en base 10 → chaîne hexadécimale
real	chaîne de caractères → codes ascii
isstr	egal 1 si c'est une chaîne de caractères
char	codes ascii → chaîne de caractères

Exemple

```
>> x = 45.678;
```

```
>> size(x)
```

```
ans =
```

```
1      1
```

```
>> y = num2str(x);
```

```
>> size(y)
```

```
ans =
```

```
1      6
```

7.2 Comparaison, recherche, remplacement

strcmp	comparaison de 2 chaînes de caractères
strncmp	comparaison des n premiers caractères de 2 chaînes
findstr	Recherche d'une chaîne dans une autre
strrep	Remplace une chaîne par une autre

Exemples:

```
>> c1 = 'bonjour'; c2 = 'bonne annee';
>> strcmp(c1,c2)
ans =
    0
>> strncmp(c1,c2)
ans =
    1
>> i = findstr(c2,'ne')
i =
     4     9
>> c3 = strrep(c2,'annee','fete')
c3 =
    bonne fete
```

7.3 Evaluation d'une chaîne de caractères

La commande **eval**(chaîne) évalue la chaîne de caractères comme une commande MATLAB

Exemple:

```
» pi1 = 4*atan(1)
pi1 =
    3.1416

» s = '4*atan(1)';
» pi2 = 2*eval(s)
pi2 =
    6.2832
```

Cette commande est très utile si, par exemple, on veut changer le nom d'une variable dans chaque itération d'une boucle

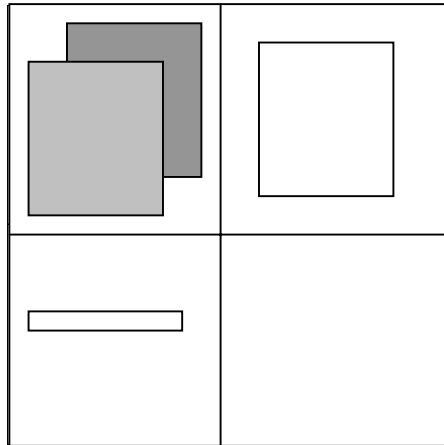
```
%carré magic
for k=5:2:11
    n= num2str(k);
    nom= [ 'M',n, '= magic(k) ' ];
    eval(nom)
end
```

8. Les Tableaux de Cellules et les Structures

Les tableaux de cellules et les structures dans MATLAB offrent un format de stockage optimisé.

8.1 Les Tableaux de Cellules

Un tableau de cellules est une variable constituée de cellules, celles-ci peuvent contenir n'importe quel type de données: matrice, structure, cellule..



8.1.1 Construction d'un tableau de cellules

Les accolades { } sont utilisées pour représenter des cellules. Trois syntaxes existent pour la construction d'un tableau de cellules

Syntaxe 1 :

- » A{1,1} = rand(3,3,3);
- » A{1,2} = magic(4);
- » A{2,1} = 'sujet 1';

Syntaxe 2

- » A(1,1) = {rand(3,3,3)};
- » A(1,2) = {magic(4)};
- » A(2,1) = {Sujet 1};

Syntaxe 3 » A = {rand(3,3,3), magic(4); 'Sujet 1', []};

Pour afficher, on a aussi une choix à faire selon les détails voulues

- a) >> A donne la forme du tableau et le type du contenu de chaque cellule
- b) celldisp(A) affiche le contenu détaillé de A
- c) cellplot(A) donne une représentation graphique de A

8.1.2 Accès aux éléments d'une cellule.

Les indices, les accolades et les parenthèses donnent accès aux éléments

```
>> Sub = A{2,1};  
>> Donnees = A{1,2}  
>> cond = A{1,2}(1,:)
```


8.1.3 Manipulation des cellules

Voici quelques exemples de manipulation des cellules

» b = A(1,:)	b est construit avec la première ligne de A
b =	
[3x3x3 double] [4x4 double]	
» c = reshape(A,4,1)	A est transformé en un tableau de cellules de 4 lignes et de 1 colonne.
c =	
[3x3x3 double]	
'Sujet 1'	
[4x4 double]	
[]	
» A(:,2) = []	on supprime la deuxième colonne
A =	
[3x3x3 double]	
'Sujet 1'	
» M = max(max(A{1,1}))	calcul du max de la matrice contenue dans la
M(:,1) =	première cellule de A
0.9318	
M(:,2) =	
0.8462	
M(:,3) =	
0.7095	

8.1.4 Cellules et chaînes de caractères

Les chaînes de caractères peuvent être stockées dans des cellules. Cela évite de compléter les chaînes par des blancs lorsqu'on crée un tableau.

```
>> Mois = {'Janvier';'Fevrier';'Mars';'Avril'}

>> Mois2 = char(Mois)    transforme les 4 cellules en tableau de chaîne de caractères. Les
                           blancs sont insérés automatiquement
>> Mois3 = cellstr(Mois2) transforme le tableau en 4 cellules - les blancs sont enlevés
```

On peut créer des tableaux multidimensionnels de cellules. On n'est pas obligé d'avoir une correspondance entre les pages des cellules

8.2 Les Structures

Les structures sont composées de champs, ceux-ci peuvent contenir n'importe quel type de données. Comme les tableaux de cellules les structures peuvent être multidimensionnelles.

Chaque champ est construit un par un. Dans un premier temps; la structure n'a qu'une dimension

Exemple : >> » sujet.nom = 'Jean';
 » sujet.poid = 120;
 » sujet.data = rand(5);

La variable sujet est agrandie comme suit

 » sujet(2).nom = 'Jeanne';
 » sujet(2).poid = 140;
 » sujet(2).data = rand(5);

Pour accéder au champs d'une structure il suffit de taper le nom du structure, un point suivi par le nom du champs

 >> sujet(2).data(:,3) donne accès à la troisième colonne dans le champs data

Les commandes suivantes permettent aussi d'accéder au contenu d'une structure

getfield	Lecture d'un champ
setfield	Ecriture d'un champ
fieldnames	Lecture de la liste des champs d'une structure
rmfield	Suppression d'un champ

La fonction ex-struct est utilisée pour afficher les informations contenues dans la structure
Sujet créée toute à l'heure

ex_struct.m

```
function ex_struct(S)
%Affichage de la structure "Sujet"

for i=1:length(S)
    figure
    plot(S(i).data)
    title(S(i).nom,'fontsize',18)
end
```

Exemple d'une analyse en batch

batch.m

```
%script pour gerer une analyse en batch
clear all;

% on cree une liste des fichiers a traiter
File = dir('nuage*.txt'); % on determine la liste des fichiers a traiter

num_fichiers = size(File,1);

for count = 1: num_fichiers
    id_fich_in = fopen(File(count).name,'r');
    File(count).Data = fscanf(id_fich_in, '%f',[2,inf]);
    fclose(id_fich_in);

    % ici on appelle les fonctions d'analyse .....
    File(count).Norm_data = normalisation(File(count).Data);

    File(count).Moy_donnees = mean(File(count).Data);
    File(count).Ecart_T = std(File(count).Data);

    %..... etc etc

    % creation du nom du fichier de sortie - la meme racine que le fichier
    % d'entree mais avec une extension differente
    nom_sortie = File(count).name(1:(end-3));
    nom_sortie = [nom_sortie, 'out'];

    % ouverture et ecriture des donnees
    id_fich_out = fopen(nom_sortie,'w');
    fprintf(id_fich_out,' donnees moyennes\n');
    fprintf (id_fich_out,'%f',File(count).Moy_donnees);
    fprintf(id_fich_out,' \n ecart-types\n');
    fprintf (id_fich_out,'%f',File(count).Ecart_T);
    fprintf(id_fich_out,' \n donnees normalisees\n');
    fprintf (id_fich_out,'%f %f\n',File(count).Norm_data);
    fclose(id_fich_out);

    %affichage
    figure
    plot(File(count).Norm_data)
    title([File(count).name(1:(end-4)), ' averages =
',num2str(File(count).Moy_donnees)])
end

% analyse inter sujet
% ex. on calcule la moyenne pour tous les fichier pour col 1 et 2
av_data = [File.Moy_donnees];
av_col1 = mean(av_data(1:2:end))
av_col2 = mean(av_data(2:2:end))

% ....et si on avait la boite a outils 'Statistics, on serait pret
% à ecrire l'article !
```

9. Fonctions de Fonctions

MATLAB peut travailler en termes de fonctions mathématiques qu'il représente sous la forme de M-files. Ces fonctions mathématiques peuvent être utilisées comme arguments d'entrée d'un ensemble de routines MATLAB qui permettent de faire :

- de l'intégration numérique
- de l'optimisation
- de l'ajustement des courbes
- la résolution d'équations non-linéaires.

L'ensemble de ces routines MATLAB porte le nom générique de fonctions de fonctions et la plupart se trouve dans le répertoire funfun dans MATLAB/Toolbox.

Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{(x - 0.3)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x - 0.9)^2 + 0.06} - 6$

Cette fonction peut être utilisée comme une entrée pour une fonction de fonction. Cette fonction s'écrit dans humps.m

```
function [out1,out2] = humps(x)
%HUMPS  A function used by QUADDEMO, ZERODEMO and FPLOTDemo.
%  Y = HUMPS(X) is a function with strong maxima near x = .3
%  and x = .9.
%
%  [X,Y] = HUMPS(X) also returns X.  With no input arguments,
%  HUMPS uses X = 0:.05:1.
%
%  Example:
%      plot(humps)
%
%  See QUADDEMO, ZERODEMO and FPLOTDemo.

if nargin==0, x = 0:.05:1; end

y = 1 ./ ((x-.3).^2 + .01) + 1 ./ ((x-.9).^2 + .04) - 6;

if nargout==2,
    out1 = x; out2 = y;
else
    out1 = y;
end
```

9.1 Tracé

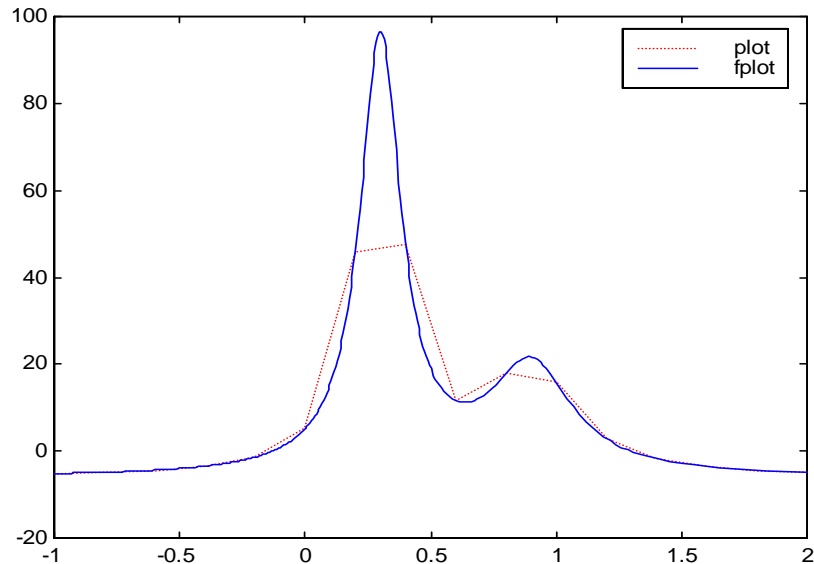
Deux possibilités se présentent pour tracer une fonction :

- définir soi-même le vecteur d'abscisse et utiliser **plot**
- utiliser la commande **fplot** qui ne nécessite que les bornes de l'intervalle du tracé.

```
» x = -1:0.2:2;                définition des abscisses
» plot(x,humps(x),'r:')
» hold on
```

La fonction **fplot** permet de représenter graphiquement des fonctions en ne donnant que les bornes des abscisses. Le pas d'échantillonnage est défini automatiquement en prenant en compte la pente.

» **fplot**('humps',[-1 2])



9.2 Intégration Numérique

quad	Intégration par la méthode de Simpson à pas adaptatif
quad8	Intégration par la méthode de Newton-Cotes à pas adaptatif
dblquad	Double intégration

Exemple :

» q = quad('humps',0,1)

q =
29.8583

9.3 Optimisation

fmin	recherche du minimum de fonctions monovariabiles
fmins	recherche du minimum de fonctions multivariabiles
fzero	recherche du zéro de fonctions monovariabiles

Exemple:

» xmin = fmin('humps',0.5,1)

xmin =
0.6370

recherche d'un minimum entre les abscisses 0.5 et 1

» ymin = humps(xmin)

ymin =
11.2528

calcul de l'ordonnée de ce minimum

» plot(xmin,ymin,'+r')

affichage du minimum par une croix rouge

```
» xz=fzero('humps',0)
xz =
-0.1316
```

```
» plot(xz,0,'ob')
```

La **Toolbox d'Optimisation** complète ces fonctions

9.4 Résolution de systèmes d'équations différentielles

MATLAB permet de résoudre les systèmes d'équations différentielles de la forme

$$dX/dt = f(t,X)$$

connaissant la valeur initiale de la solution $X(t_0) = X_0$

Les solveurs d'équations différentielles sous MATLAB utilisent des méthodes numériques d'intégration. Ce sont des solveurs à pas variable.

Les algorithmes de résolution d'un système d'équations différentielles sont classés en deux catégories. La première regroupe les algorithmes qui s'appliquent aux systèmes d'équations non-raides, la seconde contient ceux pour les systèmes raides.

9.4.1 Algorithmes de résolution de systèmes d'équations différentielles non raides

ode45	basé sur l'algorithme de Runge-Kutta et utilisé généralement pour un premier essai dans la résolution d'un système.
ode23	basé sur l'algorithme de Runge-Kutta . L'ordre est simplement inférieur, ce qui fait qu'il est plus efficace lorsque les tolérances sont moins exigeante.
ode113	est une adaptation de l'algorithme d'Adams. Cet algorithme est d'ordre variable(son pas d'intégration varie).

9.4.2 Algorithmes de résolution de systèmes d'équations différentielles raide

ode15s	basé sur les formules de différentiation numérique. Il est d'ordre variables. Si l'équation est raide ou si ode45 est inefficace, il faut essayer ode15s
ode23s	Cet algorithme est à pas unique, il est plus efficace que ode15s lorsque les tolérances sont plus larges....

9.4.3 Appel général d'un solver

L'écriture syntaxique employée par les algorithmes ODE est la suivante:

[t,X] = solver ('fichier', tspan, Xo options, p1, p2.....)

où solver est un des algorithmes précédents

Les arguments d'entrée sont :

'fichier'	chaîne représentant le nom du fichier décrivant le système ODE- le ODEfile
tspan	vecteur de temps. Pour un vecteur de deux éléments tspan = [t ₀ t _{final}]
Xo	vecteur avec les conditions initiales du problème.
options	argument qui peut être créé par odeset pour contrôler l'algorithme

p1, p2... paramètres de la fonction

Les arguments de sortie sont :

t vecteur colonne des points temporels
X tableau des solutions. Chaque ligne de X correspond à une solution pour un point temporel retourné dans t

Il est également possible d'obtenir des statistiques sur les performance de l'algorithme

[t,X,s] = solver ('fichier', tspan, Xo, options, p1, p2.....)

où s est un vecteur colonne de six éléments

- nombre de pas réussis
- nombre d'accès ayant échoué
-

La fonction **odeset**, sans paramètre d'entrée permet d'obtenir la liste des propriétés d'un algorithme de résolution. Donc en tapant **odeset** on peut voir les options de défaut. Cette commande aussi permet de personnaliser les options.....

9.4.4. Exemple de résolution d'equations.

On va comparer l'efficacité des différents algorithmes pour résoudre l'équation suivante

$$dx/dt = -1000(x - \sin(t)) + \cos(t)$$

D'abord on programme cette équation sous forme d'une fonction MATLAB dans un ODEfile

equation.m

```
function dx = equation(t,x)
% exemple de résolution d'une équation différentielle

dx = -1000*(x - sin(t)) + cos(t);
```

- **algorithmes pour problèmes non-raides**

```
» [t,x,s] = ode45('equation',[0 10],0);
```

```
» s(1)
```

```
ans =
```

```
3013
```

```
» plot(t,x)
```

```
» zoom on
```

```
» [t,x,s] = ode23('equation',[0 10],0);
```

```
» s(1)
```

```
ans =
```

```
3976
```

```
» [t,x,s] = ode113('equation',[0 10],0);
```

```
» s(1)
ans =
    6200
» plot(t,x)
```

- **algorithmes pour équations raides**

```
» [t,x,s] = ode15s('equation',[0 10],0);
» s(1)
ans =
    40
» plot(t,x)
```

```
» [t,x,s] = ode23s('equation',[0 10],0);
» s(1)
ans =
    224
» plot(t,x)
```

L'argument s(1) indique le nombre de pas réussis, c'est à dire le nombre de dates par lesquelles est passé le solveur pour résoudre l'équation différentielle tout en satisfaisant les critères d'erreurs définis (odeset). Plus ce nombre est faible, plus grande est la rapidité de résolution. On note que dans le cas particulier d'une équation raide (equation.m) les solveurs raides permettent de gagner un facteur 10 en temps de résolution.