

Automática y Maquinas Eléctricas.

Proyecto Global Integrador: Control de Accionamiento de CA con Motor Síncrono de Imanes Permanentes

Costarelli, Ignacio Agustín
Automática y Máquinas Eléctricas
Facultad de Ingeniería. UNCuyo.
Septiembre de 2020
agustin@costarellisa.com.ar

García, Juan Ignacio
Automática y Máquinas Eléctricas
Facultad de Ingeniería. UNCuyo.
Septiembre de 2020
jugarov@gmail.com

1. Resumen

El presente informe tiene como objetivo el diseño de un sistema de control para un motor de corriente alterna trifásico. Para la realización del mismo, se analiza en primer lugar el funcionamiento y la respuesta del sistema a lazo abierto, diseñando para ello un modelo que describe en forma fidedigna su comportamiento.

Tras la realización del diseño del sistema de control, se comprobará el correcto funcionamiento del mismo realizando simulaciones para el seguimiento de una consigna. Frente a un primer análisis del sistema controlado, se encontrarán ciertos errores que imposibilitarán que la operación sea llevada a cabo, de modo que se estudiarán posibles soluciones a los problemas hallados, logrando así cumplir con la creación de un sistema robusto de desempeño óptimo.

2. Introducción

En el presente documento se diseñarán y analizarán modelos de un sistema de control de posición automático para un accionamiento electromecánico de cuatro cuadrantes compuesto por: Una máquina eléctrica de corriente alterna trifásica y síncrona, excitada por imanes permanentes y alimentada por un inversor trifásico, un reductor de velocidad planetario, realimentación mediante un sensor de posición en el eje del motor, sensores de corriente instantánea de fases en la salida del inversor hacia el estator.

Este sistema de control será diseñado para su aplicación en una articulación “hombro” de un robot SCARA. Dado que el resto de articulaciones del robot afectarán a ciertos parámetros de la articulación que realmente interesa controlar; se anotarán dichos parámetros como un valor nominal seguidos de una tolerancia que expresa el rango posible de variación. De esta manera, se evitan los problemas asociados a la dinámica no lineal que introduce el resto de articulaciones.

Se abordará el estudio del sistema dividiendo el mismo en tres subsistemas; y se crearán modelos que describan correctamente su comportamiento. Una vez desarrollados, se desarrollará una simulación de cada inciso analizado, para tener una mejor comprensión gráfica del sistema evaluado y observar las respuestas del mismo.

Por último, se diseñará un sistema de control capaz de manipular el sistema para realizar las operaciones que se le solicite en forma óptima y precisa, verificando que los valores

de trabajo se encuentren dentro de los valores permitidos mediante la realización de una simulación.

3. Modelado, Análisis y Simulación Dinámica a Lazo Abierto

3.1. Modelo matemático equivalente de un grado de libertad. subsistema mecánico del motor

En primer lugar, se realiza una abstracción del sistema y se describe el modelo físico que describe el subsistema mecánico sobre el que se trabajará. En este mismo modelo, es posible realizar una simplificación y operar con un modelo equivalente más sencillo, como se presenta a continuación:

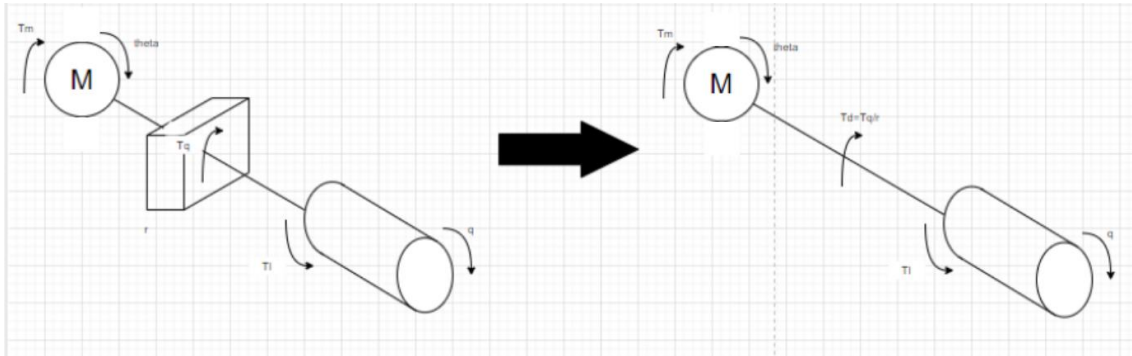


Figura 1: Modelo conceptual del subsistema mecánico.

De este modelo físico, es posible ahora extraer las ecuaciones que conformarán el modelo matemático del sistema:

En el eje de salida: $J_l \cdot \ddot{q}(t) = T_q(t) - b_l \cdot \dot{q}(t) - T_l(t)$ (Ec. 1)

En el subsistema motor: $J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d(t)$ (Ec. 2)

Siendo:

- J_l el momento de inercia del brazo, que varía en función de la extensión de los otros eslabones del robot, pudiendo adoptar valores de $J_l \approx (0.2520 \pm 0.1260) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
- J_m el momento de inercia que posee el motor. Su valor es $J_m \approx 3.1 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
- T_q el torque neto entregado por el motor, considerando las pérdidas que genera el rozamiento.
- T_m el torque bruto que genera el motor por efectos electromagnéticos.
- T_d el torque efectivo que es transmitido a la carga, aquel ya transformado por el reductor de velocidad.
- T_l el torque resistente que ofrece la carga.
- b_l el factor de amortiguamiento viscoso del brazo, que varía en función de la extensión de los otros eslabones del robot, pudiendo adoptar valores de $b_l \approx (0 \pm 0.0630) \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad/s}}$.
- b_m el factor de amortiguamiento viscoso del motor. Su valor es $b_m \approx 1.5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad/s}}$.
- q la variable de salida que se desea controlar, que en este caso representa la posición angular que adopta el brazo robótico.
- ω_m la velocidad angular a la que rota el motor.

Por las simplificaciones realizadas en el modelo físico, debido a que el tren de transmisión está formado por una caja reductora reversible con sistema de engranajes planetarios, si se asume un acoplamiento rígido, sin elasticidad torsional y sin juego o backlash, se puede

observar que no hay pérdidas de energía y que la relación de la carga mecánica con el subsistema mecánico se puede expresar mediante las equivalencias $\dot{q}(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t)$ y $T_q(t) = r \cdot T_d(t)$, siendo r la relación de reducción total del tren de transmisión, que vale $r = 314.3008$.

De este modo, puede reescribirse Ec. 1 como:

$$\begin{aligned} J_l \cdot \frac{1}{r} \cdot \dot{\omega}_m(t) &= r \cdot T_d(t) - b_l \cdot \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t) - T_l(t) \\ T_d(t) &= J_l \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \dot{\omega}_m(t) + b_l \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3})$$

Y, reemplazando $T_d(t)$ en Ec. 2:

$$\begin{aligned} J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) &= T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - J_l \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \dot{\omega}_m(t) - b_l \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \omega_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \\ (J_m + J_l \cdot \frac{1}{r^2}) \cdot \dot{\omega}_m(t) &= T_m(t) - (b_m + b_l \cdot \frac{1}{r^2}) \cdot \omega_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 4})$$

Para simplificar esta expresión, se definen los parámetros equivalentes $J_{eq} = J_m + J_l \cdot \frac{1}{r^2}$ y $b_{eq} = b_m + b_l \cdot \frac{1}{r^2}$, obteniendo de este modo la expresión que modela matemáticamente el subsistema mecánico:

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \quad (\text{Ec. 5})$$

A continuación, se plantean las ecuaciones de estado del subsistema referido al eje del motor:

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot T_m(t) - \frac{1}{J_{eq}} \cdot b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{1}{J_{eq}} \cdot T_l(t) \\ \dot{\theta}(t) = \omega_m(t) \\ y(t) = \theta_m \end{cases} \quad (\text{Ec. 6})$$

O, en su forma matricial,

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{J_{eq}} \cdot b_{eq} \end{bmatrix} \cdot \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} & -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot \bar{u}(t) \\ \dot{\bar{y}}(t) = [1 \quad 0] \cdot \bar{x}(t) \end{cases} \quad ; \quad \bar{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \theta_m(t_0) \\ \omega_m(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 7})$$

Cuyos vectores de estado, entrada y salida son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \begin{bmatrix} \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix} & \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\omega}_m \end{bmatrix} & \bar{u}(t) &= \begin{bmatrix} T_m \\ T_l \end{bmatrix} \\ \bar{y}(t) &= [\theta_m] \end{aligned} \quad (\text{Ec. 8})$$

Es posible ahora representar este subsistema en un diagrama de bloques como el que se presenta a continuación:

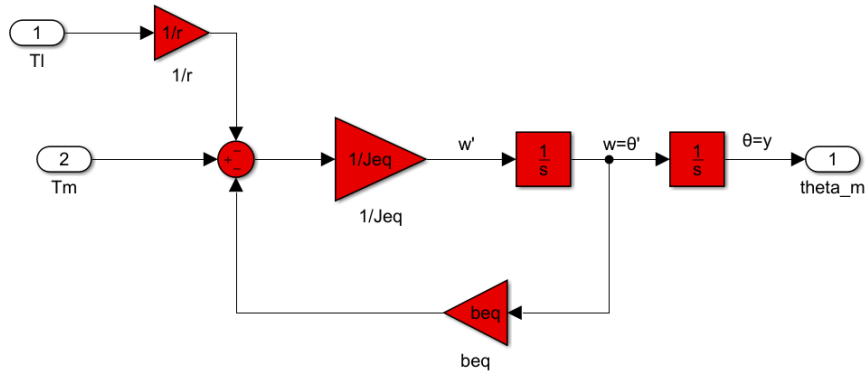


Figura 2: Diagrama de bloques del subsistema mecánico.

3.2. Modelo dinámico del sistema físico completo

3.2.a. Modelo global no lineal para i_{ds}^r genérica

En esta sección se desarrollarán los subsistemas eléctrico y térmico para incorporarlos al modelo del sistema completo.

Para el desarrollo del subsistema eléctrico, se hará uso de la transformación de Park, que consiste en una transformación lineal que transforma el espacio de referencia del sistema trifásico abc del estator a un espacio de referencia $dq0$ en régimen permanente. Este nuevo sistema adoptado permite interpretar los parámetros evaluados como componentes longitudinales, transversales y perpendiculares al rotor del motor; así como desacoplar el subsistema eléctrico en tres subsistemas distintos como se muestra en las siguientes figuras:

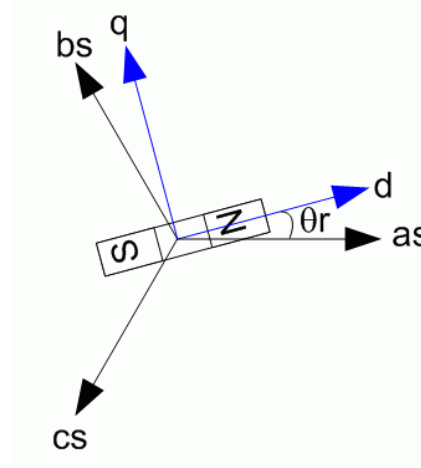


Figura 3: Representación del sistema coordenado $dq0$ sobre el polo del rotor. d representa el eje longitudinal, q el eje transversal y 0 el eje perpendicular a estos dos.

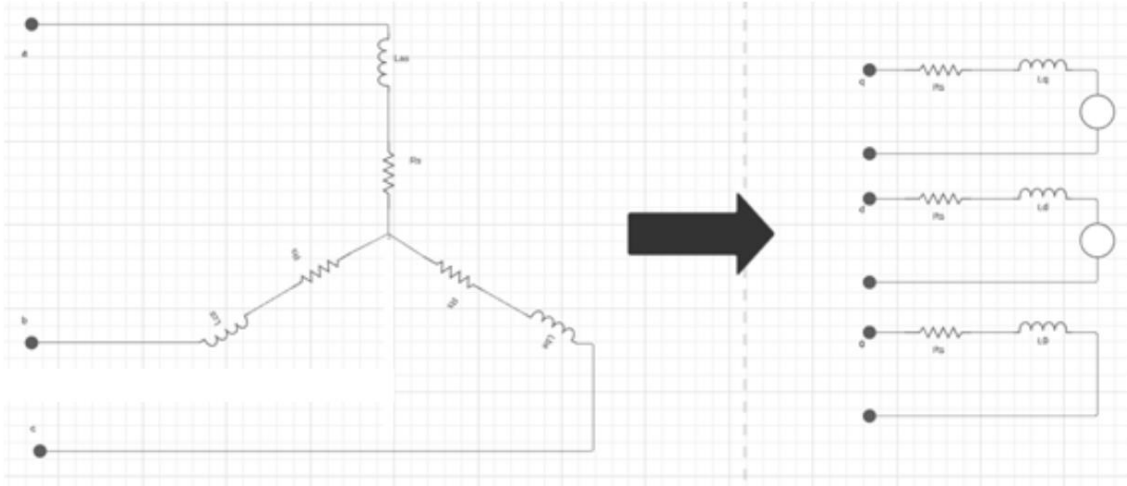


Figura 4: Desacople del subsistema eléctrico.

En primer lugar se realizará el modelo matemático del subsistema eléctrico referido a las coordenadas abc . Para cada fase, en un sistema estrella con neutro, es posible modelar su comportamiento como:

$$\begin{cases} v_{as}(t) = R_s \cdot i_{as}(t) + \frac{d\lambda_{as}(t)}{dt} \\ v_{bs}(t) = R_s \cdot i_{bs}(t) + \frac{d\lambda_{bs}(t)}{dt} \\ v_{cs}(t) = R_s \cdot i_{cs}(t) + \frac{d\lambda_{cs}(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{Ec. 9})$$

Siendo:

- v la tensión eléctrica del estator. El subíndice indica los bornes entre los que se aplica esta diferencia de potencial.
- i la corriente eléctrica del estator. El subíndice indica la rama en la que se establece esta corriente.
- λ el flujo magnético concatenado por las espiras del bobinado del estator. El subíndice indica la rama en la que se establece este flujo.
- R_s el valor de la resistencia del devanado del estator. A una temperatura de 40°C , vale $R_s = 1.02\Omega$.

Además del voltaje, también puede modelarse las coordenadas eléctricas en función del movimiento del rotor:

$$\begin{aligned} \theta_r(t) &= P_p \cdot \theta_m(t) \\ \omega_r(t) &= P_p \cdot \omega_m(t) \\ \frac{d\theta_r(t)}{dt} &= \omega_r(t) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 10})$$

Donde P_p representa el número de pares de polos magnéticos del estator, en este caso $P_p = 3$.

Para realizar la transformación de Park, debe emplearse la siguiente expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \theta_r(t) & \sin \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 11})$$

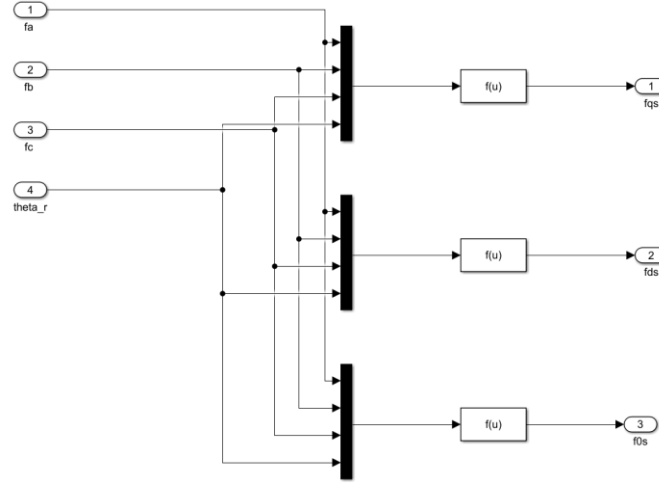


Figura 5: Diagrama de bloques que representa la transformación de Park.

Aplicando la transformación sobre Ec. 9, se obtiene el modelo matemático del subsistema eléctrico referido a las coordenadas $dq0$ sobre el rotor:

$$\bar{v}_{qd0s}^\theta(t) = [R_s] \cdot \bar{i}_{qd0s}^\theta(t) + \frac{d\bar{\lambda}_{qd0s}^\theta(t)}{dt} + \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\lambda}_{qd0s}^\theta(t) \quad (\text{Ec. 12})$$

El flujo magnético total puede observarse desde cada uno de los ejes del sistema $dq0$, de modo que cada componente depende de la componente de corriente que atraviese el bobinado del estator. Así, el flujo magnético directo (d), en cuadratura (q) y dispersado (0) del motor puede calcularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \lambda_{qs}^r(t) &= L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\ \lambda_{ds}^r(t) &= L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r \\ \lambda_{0s}(t) &= L_{ls} \cdot i_{0s}(t) \\ \lambda_{qd0s}^\theta(t) &= \lambda_{qs}^r(t) + \lambda_{ds}^r(t) + \lambda_{0s}^r(t) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 13})$$

Siendo L la inductancia del estator. El subíndice indica el eje desde el que se mide dicha inductancia, de modo que vale $L_d \approx 6.6mH$ en el eje directo, $L_q \approx 5.8mH$ en el eje en cuadratura y $L_{ls} \approx 0.8mH$ en el eje de dispersión.

Reemplazando estas identidades en Ec. 12, puede obtenerse el siguiente sistema de ecuaciones, que definen el modelo del subsistema eléctrico de la aplicación:

$$\begin{cases} v_{qs}^r(t) = R_s \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r] \\ v_{ds}^r(t) = R_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\ v_{0s}(t) = R_s \cdot i_{0s}(t) + L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{Ec. 14})$$

Por otra parte, se desarrollará a continuación el subsistema térmico. Para modelar el mismo, se parte de la consideración de que únicamente se poseen pérdidas resistivas, por efecto Joule, en el bobinado del estator, despreciando así las pérdidas magnéticas y por rozamiento en los rodamientos. Así, las pérdidas son de carácter eléctrico, de modo que puede calcularse la potencia de las mismas como se indica a continuación; y además, al ser función de la corriente del bobinado, puede aplicarse la transformación de Park a la expresión resultante:

$$\begin{aligned} P_{s \text{ perd}}(t) &= R_s \cdot (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) \\ &= \frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^r{}^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 15})$$

Por otro lado, el balance térmico en el bobinado del estator es:

$$P_{s \text{ perd}}(t) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s^o(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^o(t) - T_{amb}^o(t)) \quad (\text{Ec. 16})$$

Siendo:

- C_{ts} la capacitancia térmica del estator, que toma un valor de $C_{ts} \approx 1.091 \frac{W}{^\circ C/s}$.
- R_{ts-amb} la resistencia térmica existente en la frontera estator-ambiente. Para este sistema toma un valor de $R_{ts-amb} \approx 55 \frac{^\circ C}{W}$.
- T_s^o la temperatura que alcanza el bobinado del estator.
- T_{amb}^o la temperatura ambiente. Si bien puede variar, para el desarrollo del análisis se considerará que toma un valor constante $T_{amb}^o = 40^\circ C$, como un caso muy desfavorable.

Dado que Ec. 15 y Ec. 16 son equivalentes:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^r{}^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) &= C_{ts} \cdot \frac{dT_s^o(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^o(t) - T_{amb}^o(t)) \\ \frac{dT_s^o(t)}{dt} &= \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^r{}^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) - (T_s^o(t) - T_{amb}^o(t)) \cdot \frac{1}{R_{ts-amb}} \right] \end{aligned} \quad (\text{Ec. 17})$$

Esta última expresión constituye el modelo del subsistema térmico del motor.

Habiendo modelado satisfactoriamente los tres subsistemas que lo componen, pueden combinarse ahora en el modelo completo de sistema motor sobre el que se quiere trabajar. Para ello, debe tenerse en cuenta en primer lugar la expresión del torque electromagnético, que permite relacionar los subsistemas mecánico y eléctrico:

$$\begin{aligned}
 T_m &= \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_{ds}^r \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_{qs}^r \cdot i_{ds}^r(t)] \\
 T_m &= \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [(L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r) \cdot i_{qs}^r(t) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot i_{ds}^r(t)] \\
 T_m &= \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t)
 \end{aligned} \tag{Ec. 18}$$

Incorporando *Ec. 18* en *Ec. 6* y *Ec. 14*, correspondientes a los modelos de los subsistemas mecánico y eléctrico, puede obtenerse el modelo que representa el sistema por completo:

$$\begin{cases}
 \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot [-R_s \cdot i_{qs}^r(t) + v_{qs}^r(t) - (L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \\
 \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} [-R_s \cdot i_{ds}^r(t) + v_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)] \\
 \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [-R_s \cdot i_{0s}(t) + v_{0s}(t)] \\
 \omega_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\
 \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\
 \frac{dT_s^o(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^r{}^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) - (T_s^o(t) - T_{amb}^o(t)) \cdot \frac{1}{R_{ts-amb}} \right]
 \end{cases} \tag{Ec. 19}$$

Se observa que este modelo no puede ser representado matricialmente, ya que se trata de un sistema no lineal que no admite la representación de una matriz \mathbb{A} .

Por último, sí es posible realizar una representación en diagrama de bloques del sistema global, como se muestra a continuación:

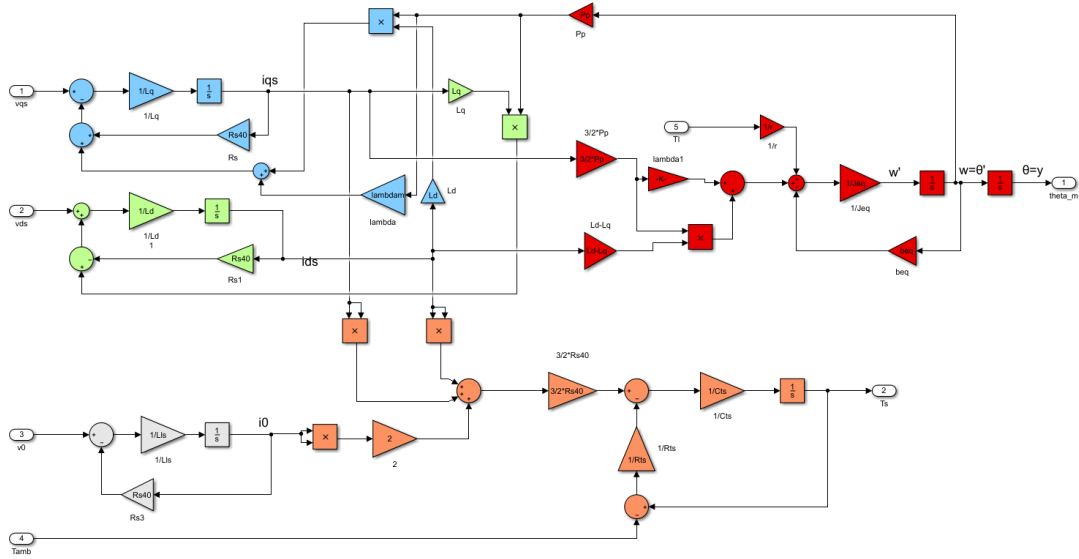


Figura 6: Diagrama de bloques del sistema. Se ha asignado un código de colores a los elementos pertenecientes a un mismo grupo para cada variable de estado.

3.2.b. Modelo simplificado lineal invariante

Para linealizar el sistema no lineal obtenido en la sección anterior, es necesario adoptar ciertas condiciones que permitan obtener un sistema lineal equivalente. En primer lugar, se considerará $i_{ds}^r(t) = 0$, lo cual permite desacoplar el flujo magnético del par motor y controlarlos individualmente. Así, el motor de CA puede modelarse como un motor de CC y diseñar un sistema de control equivalente para ambos casos. A esta técnica se la conoce como *Control vectorial con campo orientado*.

La segunda consideración realizada será el desacople del subsistema térmico, el cual, debido a las despreciables variaciones en R_s en el rango de temperatura de trabajo, la temperatura no producirá ninguna variación en el resto del sistema.

Por último, dado que el estator del motor posee una conexión estrella trifilar, con neutro flotante, puede deducirse mediante la ley de Kirchoff que, tratándose de un sistema simétrico y equilibrado:

$$i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t) = 0 \quad (\text{Ec. 20})$$

Aplicando la transformación de Park:

$$i_{0s}(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)) = 0 \quad (\text{Ec. 21})$$

$$\frac{di_{0s}(t)}{dt} = 0 \rightarrow v_{0s}(t) = 0$$

Así, teniendo en cuenta estas consideraciones sobre el sistema descrito en Ec. 19 puede expresarse matricial el modelo simplificado lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^{rr} \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right) \\ \dot{i}_{qs}^r(t) = \frac{1}{L_q} \cdot \left(v_{qs}^r(t) - P_p \cdot \lambda_m^{rr} \cdot \omega_m(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) \right) \end{cases} \quad (\text{Ec. 22})$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_{qs}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{rr}}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m^{rr}}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \cdot v_{qs}^r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq} \cdot r} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot T_l(t) \\ \bar{y} = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{Ec. 23})$$

Este modelo puede ser representado en el siguiente diagrama de bloques:

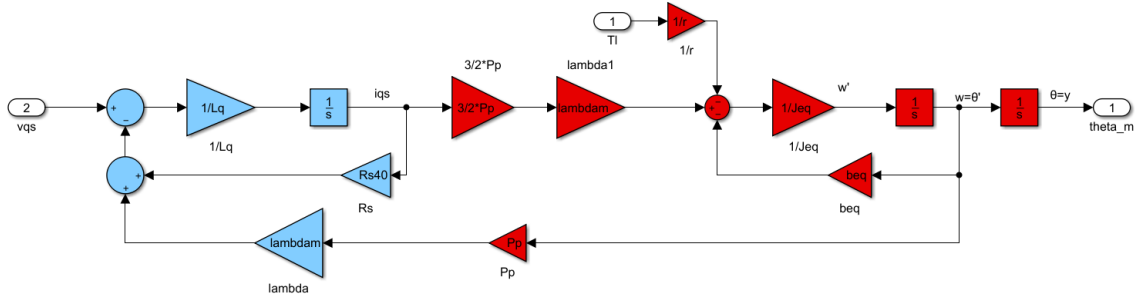


Figura 7: Diagrama de bloques del sistema LTI simplificado.

Para lograr la restricción que permite considerar $i_{ds}^r(t) = 0$, debe realimentarse el sistema con una entrada tal que cause este efecto. Así, si se considera que en Ec. 14 se anula el valor de $i_{ds}^r(t)$, se obtendrá el valor de la rama v_{ds}^r con el que debe realimentarse la entrada para lograr este efecto:

$$v_{ds}^r(t) = -P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \quad (\text{Ec. 24})$$

La variable que se manipulará en el sistema es la tensión, pero expresada en el sistema coordinado abc ; de modo que será necesario aplicar la transformación inversa de Park para regresar al sistema original. Esta transformación inversa es de forma:

Inversa: $f_{qd0s}^r(t) \rightarrow f_{abcs}(t)$

$$\begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \sin \theta_r(t) & 1 \\ \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \\ \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 25})$$

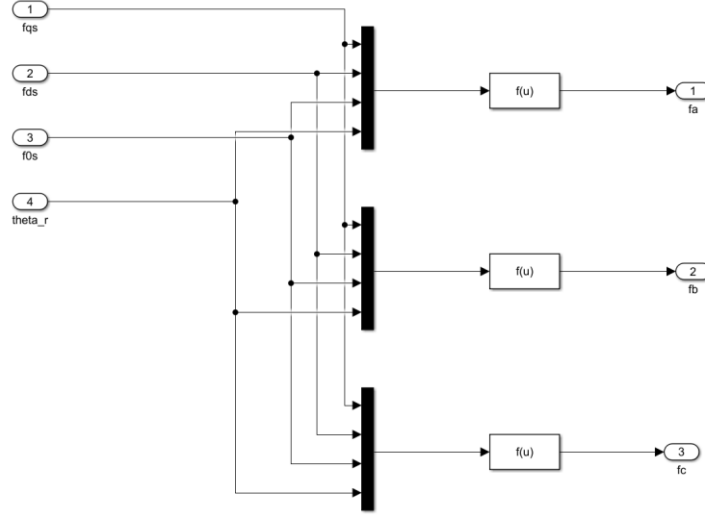


Figura 8: Diagrama de bloques que representa la transformación inversa de Park.

Ahora, si se aplica a Ec. 14, se obtendrá la expresión que describe la realimentación necesaria en la entrada controlada para lograr las restricciones propuestas:

$$\begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \sin \theta_r(t) & 1 \\ \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \\ \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 26})$$

$$\begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin \theta_r(t) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}(t) \\ \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}(t) \\ \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 27})$$

$$v_{as}(t) = \cos \theta_r(t) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin \theta_r(t) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}(t)$$

$$v_{bs}(t) = \cos \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin \left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}(t) \quad (\text{Ec. 28})$$

$$v_{cs}(t) = \cos \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin \left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}(t)$$

Considerando $v_{ds}^r = -P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)$ y $v_{0s}^r = 0$:

$$\begin{aligned}
v_{as}(t) &= \cos(\theta_r(t)) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t)) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\
v_{bs}(t) &= \cos\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\
v_{cs}(t) &= \cos\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)
\end{aligned} \tag{Ec. 29}$$

Se observa así que la señal de entrada v_{abcs}^r puede ser suministrada por un generador de tensión trifásica, ya que estas señales poseen la misma amplitud y están desfasadas a 120 grados eléctricos. Puede hacerse el mismo análisis en corriente:

$$\begin{aligned}
i_{as}(t) &= \cos\theta_r(t) \cdot i_{qs}^r(t) + \sin\theta_r(t) \cdot i_{ds}^r(t) + i_{0s}(t) \\
i_{bs}(t) &= \cos\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_{qs}^r(t) + \sin\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_{ds}^r(t) + i_{0s}(t) \\
i_{cs}(t) &= \cos\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_{qs}^r(t) + \sin\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_{ds}^r(t) + i_{0s}(t)
\end{aligned} \tag{Ec. 30}$$

Considerando $i_{ds}^r(t) = 0$ y $i_{0s}(t) = 0$

$$\begin{aligned}
i_{as}(t) &= \cos\theta_r(t) \cdot i_{qs}^r(t) \\
i_{bs}(t) &= \cos\left(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_{qs}^r(t) \\
i_{cs}(t) &= \cos\left(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot i_{qs}^r(t)
\end{aligned} \tag{Ec. 31}$$

Una vez más, se observa que el sistema es simétrico y equilibrado, información que puede ser verificada por las características constructivas del motor.

3.2.c. Modelo global linealizado con parámetros variables

Otra solución para trabajar con el modelo del sistema completo puede ser realizar una aproximación lineal considerando pequeñas variaciones locales alrededor de puntos de operación considerados cuasi-estacionarios, de la forma $z(t) = Z_0(t) + \Delta z(t)$.

Donde $Z_0(t)$ representa una magnitud cuasi-estacionaria de variación lenta y $\Delta z(t)$ una magnitud dinámica de variación rápida en el tiempo. Así, conociendo que cualquier sistema puede ser expresado en forma genérica como

$$\begin{cases} \bar{\dot{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) & ; \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \\ \bar{y}(t) = \mathbb{C} \cdot \bar{x}(t) \end{cases} \tag{Ec. 32}$$

con $\bar{x}(t) = \bar{X}_0(t) + \bar{\Delta}x(t)$ y $\bar{u}(t) = \bar{U}_0(t) + \bar{\Delta}u(t)$

De este modo, si se realiza la aproximación lineal sobre las variables x y u , puede considerarse, de acuerdo a la definición de derivada, que el valor de la función en un

instante dado es igual al valor de la función en el instante anterior más la variación generada. Esto es:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \frac{d\bar{X}_0(t)}{dt} + \frac{d\bar{\Delta x}(t)}{dt} = f(\bar{X}_0(t) + \bar{\Delta x}(t), \bar{U}_0(t) + \bar{\Delta u}(t)) \\ \bar{x}_0 = \bar{X}_0(t_0) + \bar{\Delta x}(t_0) \end{cases} ; \bar{\Delta x}(t_0) = 0 \Rightarrow \bar{x}_0 = \bar{X}_0$$

(Ec. 33)

Por otro lado, puede también realizarse una aproximación mediante polinomios de Taylor de primer orden:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &\approx f(\bar{X}_0(t) + \bar{\Delta x}(t), \bar{U}_0(t) + \bar{\Delta u}(t)) \\ \bar{x}(t) &\approx f(\bar{X}_0(t), \bar{U}_0(t)) + \frac{d\bar{f}(t)}{dx}(0) \cdot \bar{\Delta x}(t) + \frac{d\bar{f}(t)}{du}(0) \cdot \bar{\Delta u}(t) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 34})$$

Sustituyendo esta expresión en Ec. 33, se observa que puede separarse el modelo del sistema en dos partes, una no lineal cuasi-estacionaria que representa el equilibrio dinámico del sistema y una lineal dinámica que representa las pequeñas variaciones en un entorno local:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\Delta x}}{dt}(t) \approx \frac{d\bar{f}(t)}{dx}(0) \cdot \bar{\Delta x}(t) + \frac{d\bar{f}(t)}{du}(0) \cdot \bar{\Delta u}(t) \\ \bar{\Delta x}(t_0) = 0 \end{cases} ; \bar{\Delta y}(t) = \mathbb{C} \cdot \bar{\Delta x}(t) \quad (\text{Ec. 35})$$

Así, para el sistema que es foco de este informe, los modelos son:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{m0} = \omega_{m0} \\ \dot{\omega}_{m0} = \frac{1}{J_{eq}} \left\{ \frac{3}{2} \cdot P_p [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r] \cdot i_{qs0}^r \right\} - b_{eq} \cdot \omega_{m0} - \frac{1}{r} \cdot T_{l0} \\ \dot{i}_{qs0}^r = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs0}^r - R_s \cdot i_{qs0}^r - (\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r) \cdot P_p \cdot \omega_{m0}] \\ \dot{i}_{ds0}^r = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{ds0}^r - R_s \cdot i_{ds0}^r + L_q \cdot i_{qs0}^r \cdot P_p \cdot \omega_{m0}] \\ \dot{i}_{0s0} = -\frac{R_s}{L_{ls}} \cdot i_{0s0} + \frac{1}{L_{ls}} \cdot v_{0s0} \\ \dot{T}_{s0} = \frac{1}{C_{ts}} \left[\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs0}^2 + i_{ds0}^2 + i_{0s0}^2) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_{s0}^o - T_{amb0}^o) \right] \end{cases} \quad (\text{Ec. 36})$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{\theta}_m(t) = \Delta \omega_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \{ -b_{eq} \cdot \Delta \omega_m(t) - \frac{1}{r} \Delta T_l(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \{ [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r] \Delta i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{qs0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) \} \} \\ \Delta \dot{i}_{qs}^r(t) = \frac{1}{L_q} \cdot [\Delta v_{qs}^r(t) - R_s \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - P_p \cdot (\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r) \cdot \Delta \omega_m(t) - P_p \cdot L_d \cdot \omega_{m0} \Delta i_{ds}^r(t)] \\ \Delta \dot{i}_{ds}^r(t) = \frac{1}{L_d} \cdot [\Delta v_{ds}^r(t) - R_s \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + L_q \cdot P_p \cdot (i_{qs0}^r \cdot \Delta \omega_m(t) + \omega_{m0} \cdot \Delta i_{qs}^r(t))] \\ \Delta \dot{i}_{0s}(t) = -\frac{R_s}{L_{ls}} \cdot \Delta i_{0s}(t) + \frac{1}{L_{ls}} \cdot \Delta v_{0s}(t) \\ \Delta \dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{ts}} \left[3 \cdot R_s \cdot (i_{qs0}^r \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + i_{ds0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + 2 \cdot i_{0s0} \cdot \Delta i_{0s}(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (\Delta T_s^o(t) - \Delta T_{amb}^o(t)) \right] \end{cases} \quad (\text{Ec. 37})$$

Y en forma matricial:

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) \\ \Delta \dot{i}_{qs}^r(t) \\ \Delta \dot{i}_{ds}^r(t) \\ \Delta \dot{i}_{0s}(t) \\ \Delta \dot{T}_s^o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r]}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{qs0}^r}{J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P_p \cdot (\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r)}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} & -\frac{P_p \cdot L_d \cdot \omega_{m0}}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_q \cdot P_p}{L_d} \cdot i_{qs0}^r & \frac{L_q \cdot P_p}{L_d} \cdot \omega_{m0} & -\frac{R_s}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot R_s}{C_{ts}} \cdot i_{qs0}^r & \frac{3 \cdot R_s}{C_{ts}} \cdot i_{ds0}^r & \frac{6 \cdot R_s}{C_{ts}} \cdot i_{0s0} & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{0s}(t) \\ \Delta T_s^o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta T_l(t) \\ \Delta v_{qs}^r(t) \\ \Delta v_{ds}^r(t) \\ \Delta v_{0s}(t) \\ \Delta T_{amb}^o(t) \end{bmatrix} \\ & [\Delta \theta_m(t)] = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{0s}(t) \\ \Delta T_s^o(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (Ec. 38)$$

Este es un modelo lineal que representa al sistema mucho mejor que el modelo propuesto en Ec. 23. Se obtiene un espacio de puntos de operación con el cual poder lograr de diversas formas un mismo efecto. Un ejemplo de esto es el mismo modelo simplificado desarrollado en la sección anterior: ese modelo es un caso particular del modelo aquí descrito. Esto puede demostrarse si se aplican las mismas restricciones empleadas en la sección anterior, de modo que se observa que el modelo simplificado que se obtiene es exactamente igual al hallado en la sección anterior:

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) \\ \Delta \dot{i}_{qs}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ L_q \end{bmatrix} \cdot \Delta v_{qs}^r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{J_{eq} \cdot r} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta T_l(t) \quad (Ec. 39) \\ & \bar{y} = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

Además, puede analizarse el comportamiento del sistema frente a variaciones en $i_{ds}^r(t)$ si además se tiene en cuenta la ecuación del par electromagnético (Ec. 18) y el modelo del subsistema eléctrico (Ec. 14):

$$T_m = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (Ec. 18)$$

$$\begin{aligned}\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} &= \frac{1}{L_d} [-R_s \cdot i_{ds}^r(t) + v_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_d \cdot i_{qs}^r(t)] = 0 \\ \omega_m(t) &= \frac{-v_{ds}^r(t) + R_s \cdot i_{ds}^r(t)}{P_p \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)}\end{aligned}\quad (\text{Ec. 40})$$

De estas expresiones se deduce que, dado que para motores de polos salientes $L_d > L_q$, cuando $i_{ds}^r(t)$ toma un valor positivo, el campo magnético principal es reforzado, aumentando el torque en el motor pero disminuyendo la velocidad del mismo; mientras que para un valor de $i_{ds}^r(t)$ negativo ocurre lo contrario, debido al debilitamiento del campo magnético principal. Cuando $i_{ds}^r(t) = 0$, el flujo concatenado está afectado únicamente por los imanes permanentes, y el motor alcanza un estado de equilibrio dinámico entre el par motor y su velocidad.

3.2.d. Funciones de Transferencia

Partiendo del modelo simplificado de Ec. 23, es posible obtener la función de transferencia del sistema aplicando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} s\Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s\Omega_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot I_{qs}^r(s) - b_{eq} \cdot \Omega_m(s) - \frac{T_l(s)}{r} \right) \\ sI_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q} \cdot (V_{qs}^r(s) - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - P_p \cdot \lambda_m^r \cdot \Omega_m(s)) \end{cases} \quad (\text{Ec. 41})$$

Y, operando sobre el sistema y sustituyendo las variables correspondientes, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Theta_m(s) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot V_{qs}^r(s) - \frac{1}{r} \cdot (sL_q + R_s)T_l(s)}{J_{eq} \cdot L_q \cdot s^3 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s^2 + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2}) \cdot s} \quad (\text{Ec. 42})$$

Que permite obtener la función de transferencia para las entradas $v_{qs}^r(t)$ y $T_l(t)$:

$$G_{V_{qs}^r}(s) = \frac{\Theta(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{s[J_{eq} \cdot L_q \cdot s^2 + (R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2})]} \quad (\text{Ec. 43})$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{\Theta(s)}{T_l(s)} = \frac{-\frac{1}{r} \cdot (L_q \cdot s + R_s)}{s[J_{eq} \cdot L_q \cdot s^2 + (R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r2})]} \quad (\text{Ec. 44})$$

3.3. Análisis de estabilidad a lazo abierto

3.3.a. Determinación de polos y ceros del sistema y representación en el plano s

Para la determinación de los polos y ceros del sistema, puede hacerse uso del polinomio característico obtenido en la sección anterior, en las funciones de transferencia:

$$s \left[J_{eq} \cdot L_q \cdot s^2 + (R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s + \left(R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2 \right) \right] = 0 \quad (\text{Ec. 45})$$

Los valores que satisfacen la igualdad anterior son los polos del sistema:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_{1,2} = \frac{-(R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q) \pm \sqrt{(R_s \cdot J_{eq} + b_{eq} \cdot L_q)^2 - 4 \cdot J_{eq} \cdot L_q \cdot R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \end{cases} \quad (\text{Ec. 46})$$

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -89,26 + 301,57 i \\ s_3 = -89,26 - 301,57 i \end{cases} \quad (\text{Ec. 47})$$

El cero del sistema es introducido por la perturbación $T_l(t)$:

$$z_1 = -\frac{R_s}{L_q} = -175,86 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (\text{Ec. 48})$$

A continuación, se representan estos valores en la siguiente figura, que representa el plano numérico real-imaginario; donde los polos son representados con el símbolo “x” y los ceros con el símbolo “o”:

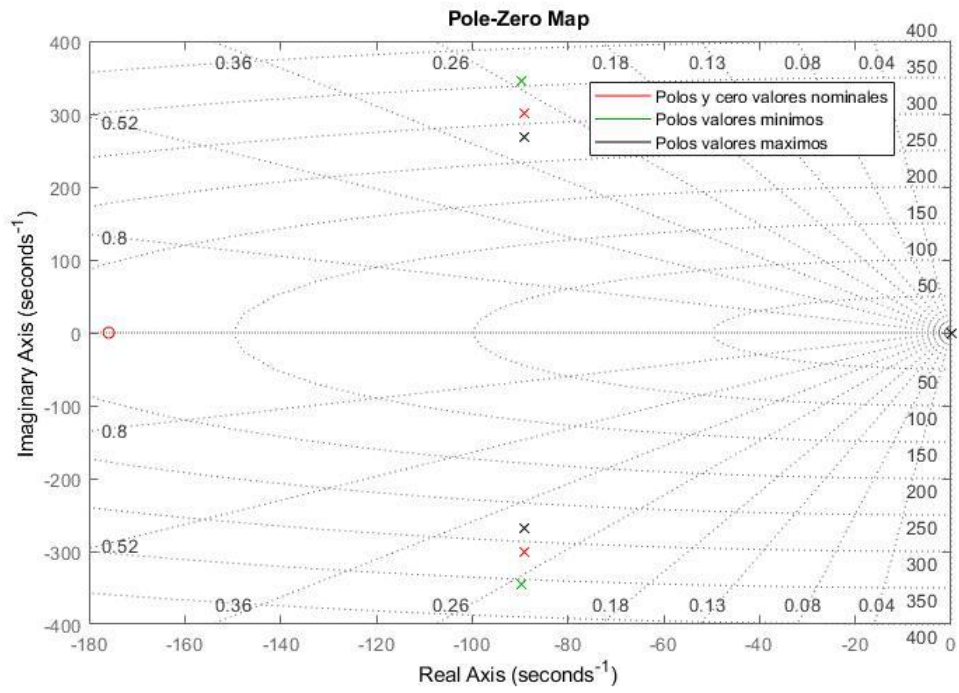


Figura 9: Diagrama de polos y ceros a lazo abierto considerando $R_s = 1.02\Omega$, a 40°C .

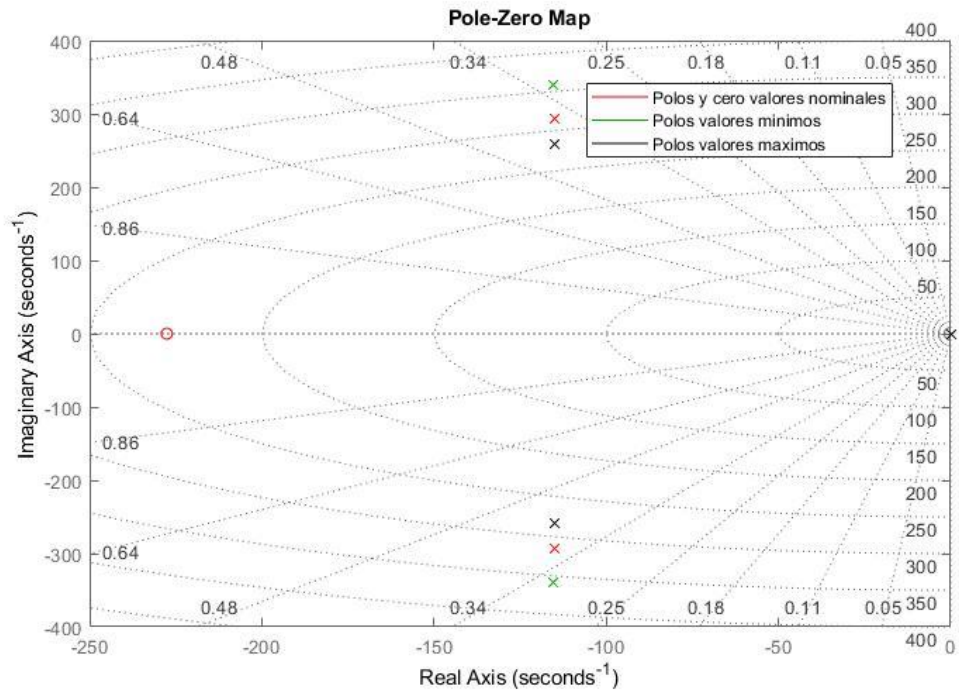


Figura 10: Diagrama de polos y ceros a lazo abierto considerando $R_s = 1.32\Omega$, a 115°C .

3.3.b. Evaluación de la estabilidad. Determinación de la frecuencia natural y el amortiguamiento del sistema

El sistema será estable si para toda excitación acotada $u(t)$ en $t > t_0$, todas las variables de estado toman valores también acotados. Además, tras la desaparición de la excitación, el espacio de estados tiende a regresar a su estado original \underline{x}_0 .

El análisis de estabilidad puede realizarse desde distintos enfoques:

- Se verifica que el sistema es estable si y sólo si todos los polos del sistema poseen parte real negativa. Puede verificarse que esta condición se cumple en Ec. 47.
- Para un sistema lineal LTI, sus polos son iguales a los autovalores de su matriz de sistema (\mathbb{A}), de modo que puede aplicarse el mismo criterio de estabilidad que antes.
- Gráficamente, un sistema es estable si y sólo si sus polos se encuentran en los cuadrantes 2 y 3 del plano s . Se verifica esta condición observando las figuras 7 y 8.

El análisis de ceros y polos nos brinda información adicional sobre el sistema: el que los polos del sistema posean parte imaginaria indica que se tratará de un sistema amortiguado; del tipo subamortiguado.

Puede obtenerse el valor de la frecuencia natural del sistema (ω_n) y del amortiguamiento del sistema (ξ) si se compara la ecuación característica, Ec. 45, con la forma estándar de un sistema de segundo orden:

$$s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0 \quad (\text{Ec. 49})$$

De este modo, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2}{J_{eq} \cdot L_q}} \quad (\text{Ec. 50})$$

$$\xi = \frac{\frac{R_s}{L_q} + \frac{b_{eq}}{J_{eq}}}{2 \cdot \sqrt{\frac{R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2}{J_{eq} \cdot L_q}}}$$

De donde se obtiene:

$$\omega_n = 314,5047 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (\text{Ec. 51})$$

$$\xi = 0,2838$$

Esto permite corroborar que el sistema se trata de un sistema subamortiguado. Se repite este proceso para las distintas variaciones de los parámetros.

R40		R115	
Parámetros mínimos	Parámetros máximos	Parámetros mínimos	Parámetros máximos
$\xi = 0,2506$	$\xi = 0,3144$	$\xi = 0,3230$	$\xi = 0,4054$
$\omega_n = 357,3817 \frac{rad}{s}$	$\omega_n = 283,2766 \frac{rad}{s}$	$\omega_n = 357,6192 \frac{rad}{s}$	$\omega_n = 283,4815 \frac{rad}{s}$

Tabla 1: Frecuencias naturales y amortiguamiento relativo para distintos valores del sistema.

Se puede observar que para los distintos parámetros del sistema como es que cambian tanto el amortiguamiento como la frecuencia natural del sistema.

3.4. Respuesta dinámica en el dominio temporal

3.4.a. Respuesta del estado interno frente a una entrada escalón

El objetivo de esta sección es analizar la respuesta del estado frente a una entrada escalón de tensión de valor $v_{qsnom}^r = 19,596 V$ tras un período de 0,1s; al que se suma posteriormente una segunda entrada escalón de torque de valor $T_{lmax}(t) = 1,57 Nm$ tras 0,3s desde el inicio del período de análisis.

Una vez más, dado que la entrada de control está expresada en un sistema de referencia abc , es necesario realizar la antitransformación de Park para obtener la entrada correspondiente al valor requerido en el sistema $dq0$.

Para poder observar la respuesta del sistema bajo las condiciones descritas, se realizó la simulación que a continuación se presenta; a la que se realimenta como se explicó en la sección 3.2.b (Ec. 24):

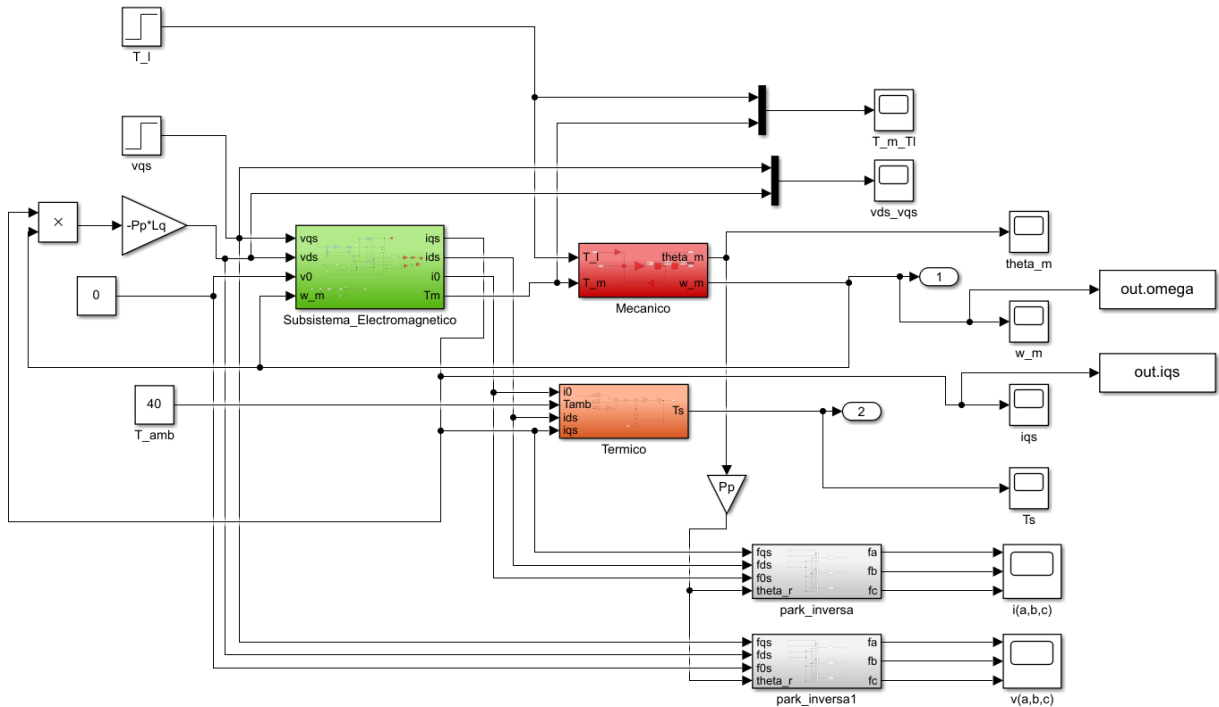


Figura 11: Diagrama de bloques del sistema completo sobre el que se realiza la simulación.

Y así, se obtuvieron las respuestas de las variables de estado que se muestran a continuación:

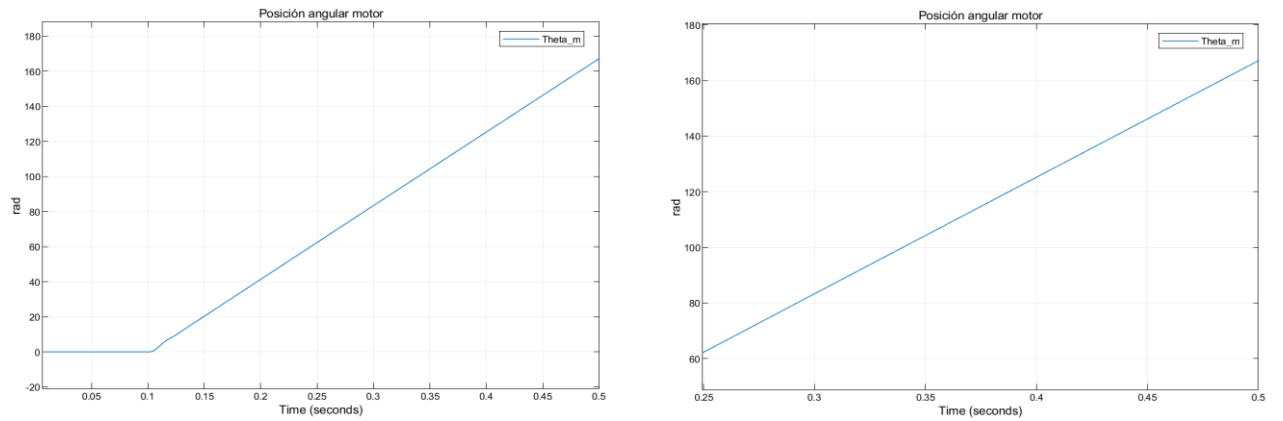


Figura 12: Posición angular del motor a lo largo del tiempo. A la derecha se detalla el momento donde se introduce la entrada de torque.

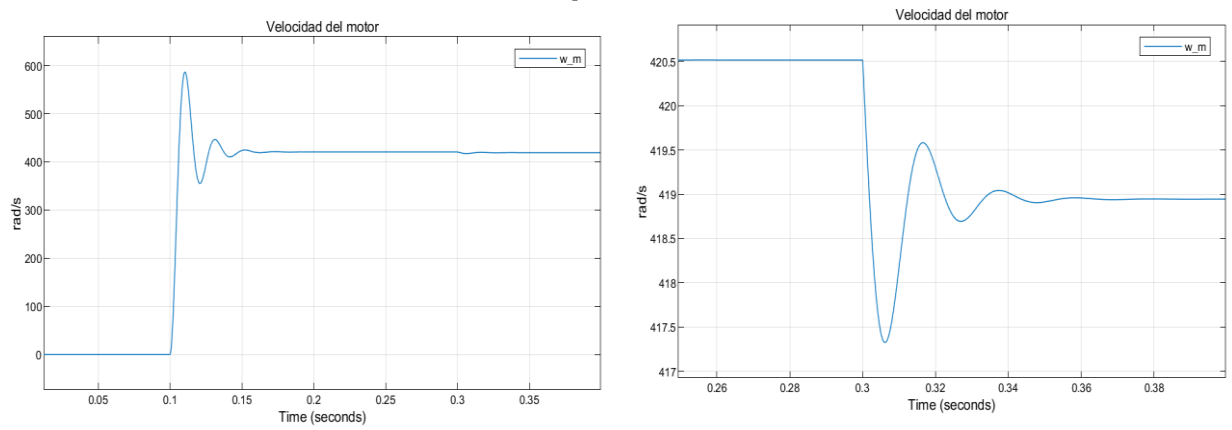


Figura 13: Velocidad del motor a lo largo del tiempo. A la derecha se detalla el momento donde se introduce la entrada de torque.

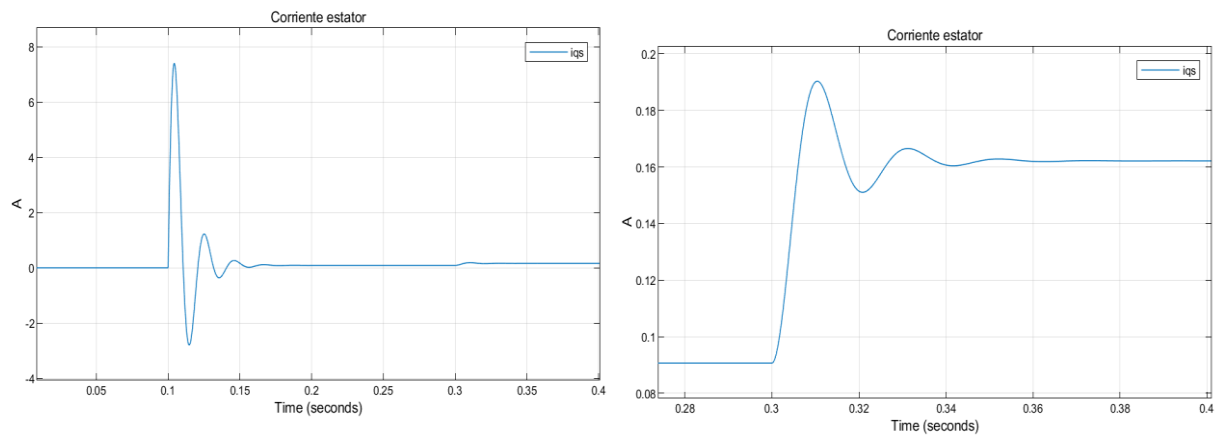


Figura 14: Corriente del estator a lo largo del tiempo. A la derecha se detalla el momento donde se introduce la entrada de torque.

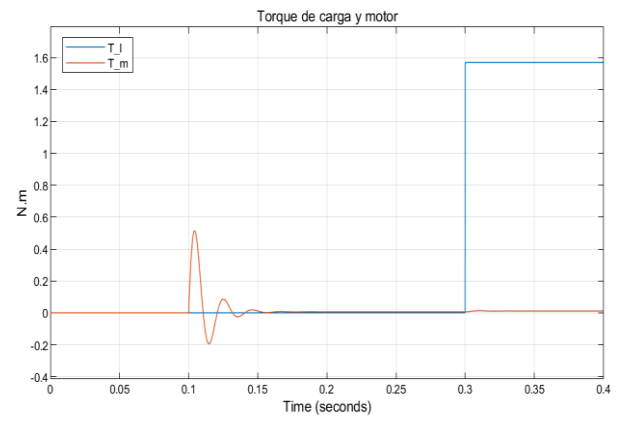
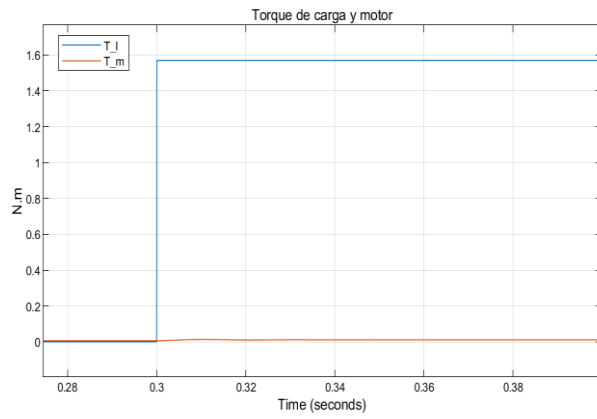


Figura 15: Torques motor y resistente a lo largo del tiempo. A la derecha se detalla el momento donde se introduce la entrada de torque.

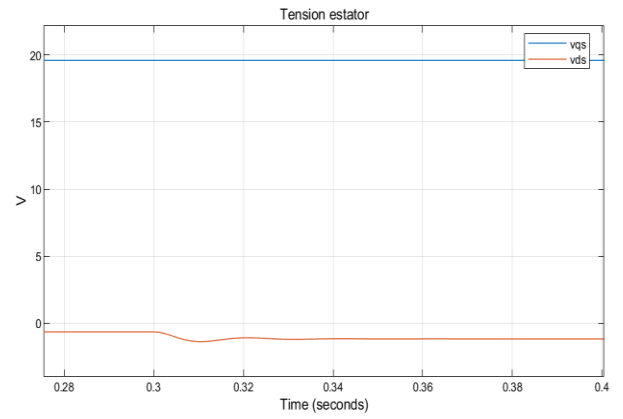
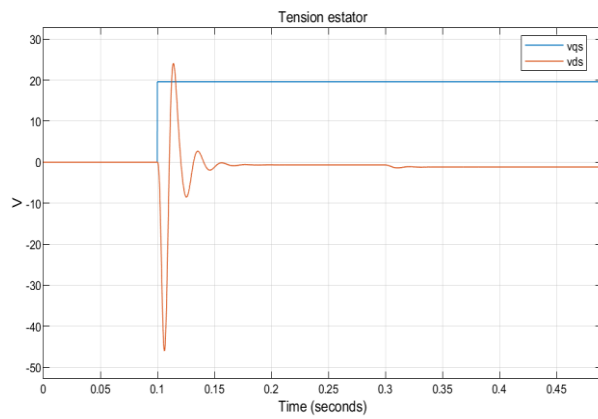


Figura 16: Tensión del estator en las ramas q y d a lo largo del tiempo. A la derecha se detalla el momento donde se introduce la entrada de torque.

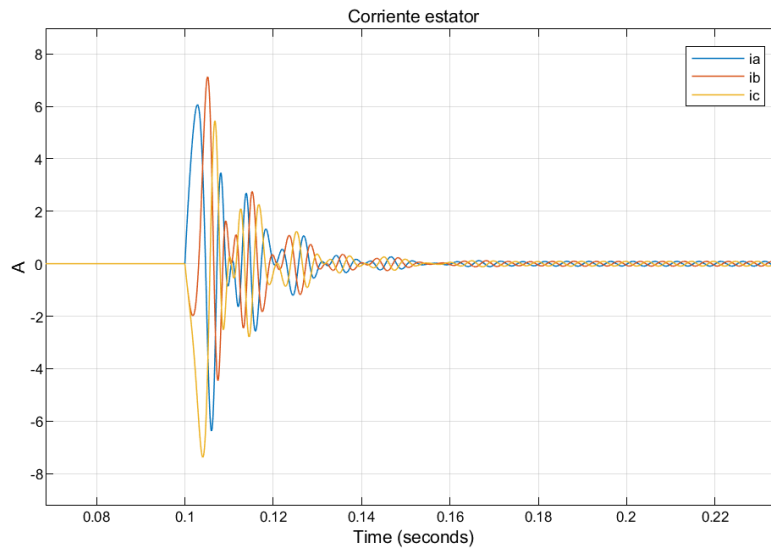


Figura 17: Corriente del estator en coordenadas a , b y c a lo largo del tiempo.

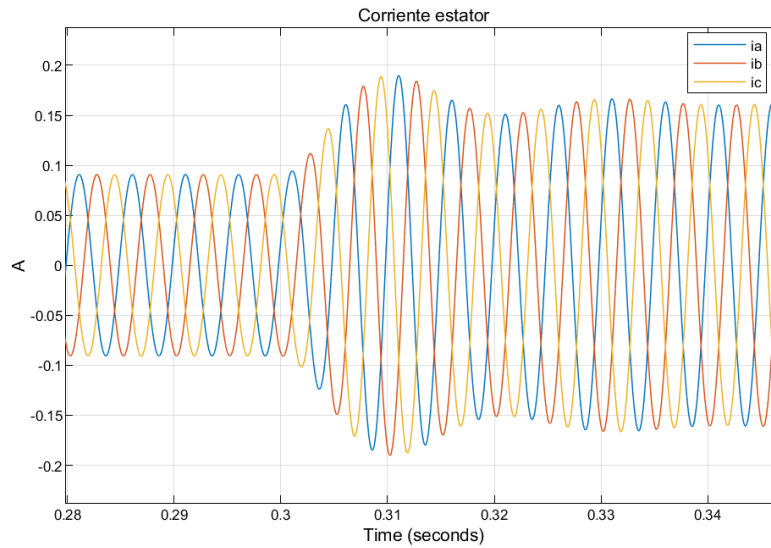


Figura 18: Detalle de la corriente del estator a lo largo del tiempo en el momento en que se introduce el escalón de torque.

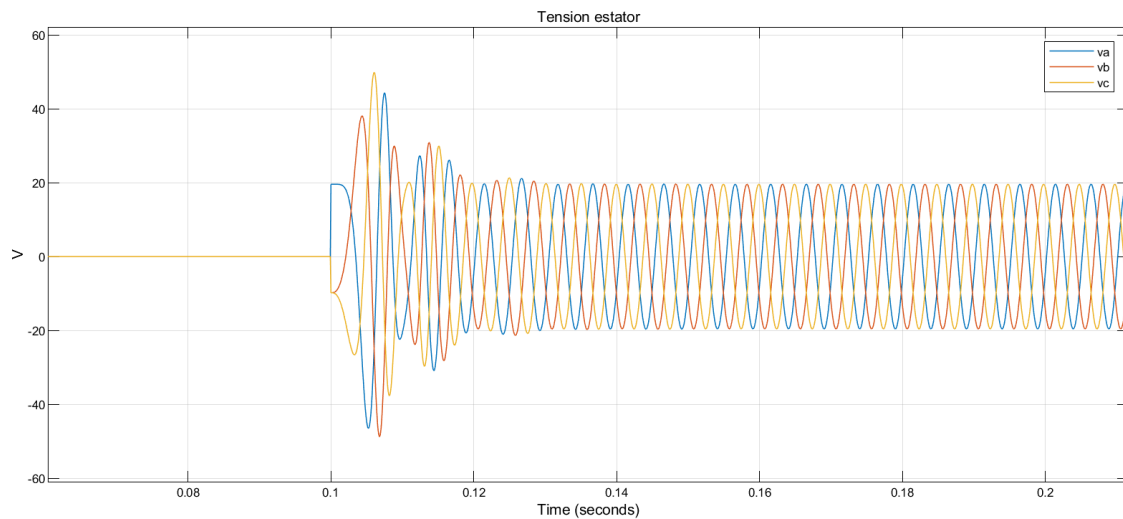


Figura 19: Tensión del estator a lo largo del tiempo. A la derecha se detalla el momento donde se introduce la entrada de torque.

3.4.b. Determinación de velocidad y corriente final de establecimiento

Observando los gráficos obtenidos anteriormente y haciendo uso de Matlab para analizar con mayor precisión la información, puede determinarse el valor de los sobrepicos de velocidad y corriente, el valor final de establecimiento de estas variables, el tiempo que

toma este proceso (con una tolerancia del 1%) y el *rise time* de dichas variables. Los datos mencionados son consignados en la tabla que se presenta a continuación:

	$\omega_m(t)$		$i_{qs}^r(t)$	
Valor final de establecimiento	$420.5 \frac{rad}{s}$	$418.9 \frac{rad}{s}$	0.0967 A	0.1621 A
Tiempo de crecimiento	0.00414 s		0.00414 s	
Tiempo de establecimiento	0.0460 s		0.0460 s	
Sobrepico	$\omega_m(0.110s) = 586.5 \frac{rad}{s}$		$i_{qs}^r(0.310s) = 0.1903 A$	

Tabla 2: Información extraída sobre la simulación realizada.

Comparando los valores de la tabla con lo observado en las gráficas, se ve que $\omega_m(t)$ para el escalón de $v_{qs}^r(t)$ tiene un comportamiento transitorio igual al de $i_{qs}^r(t)$ respecto al escalón de $T_l(t)$, esto se debe a que sus funciones de transferencia poseen los mismos polos.

3.5. Análisis de controlabilidad completa de estado desde la entrada $V_{qs}^r(t)$

Un sistema LTI se denomina controlable si desde cualquier estado inicial x_0 evaluado en un momento concreto, es posible manipular los valores de las variables de estado a través del control de las entradas del sistema $u(t)$ en un intervalo de tiempo finito.

El criterio de controlabilidad completa de estado consiste en verificar que la matriz de controlabilidad, de orden n , tenga también orden n . Esto es, afirmar que los vectores $\mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}, \dots, \mathbb{A}^{n-1}\mathbb{B}$ de los que se compone la matriz mencionada, sean linealmente independientes.

$$\mathcal{C} = [\mathbb{B} \quad \mathbb{A}\mathbb{B} \quad \dots \quad \mathbb{A}^{n-1}\mathbb{B}] \quad (\text{Ec. 52})$$

Para este sistema, utilizando el modelo reducido detallado en Ec. 14, la matriz de controlabilidad presenta la siguiente forma al evaluarla desde la entrada $V_{qs}^r(t)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{rr}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \\ 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{rr}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} & -\frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{rr} \cdot b_{eq}}{2 \cdot J_{eq}^2 \cdot L_q} - \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{rr} \cdot R_s}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q^2} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & -\frac{3 \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{rr^2}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q^2} + \frac{R_s^2}{L_q^3} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 53})$$

En la que se verifican los criterios de controlabilidad; permitiendo afirmar que el sistema es controlable desde la entrada $V_{qs}^r(t)$.

3.6. Análisis de observabilidad completa de estado desde la salida medida $\theta_m(t)$

Un sistema LTI se considera observable si desde cualquier estado inicial x_0 evaluado en un momento concreto, puede determinarse el valor de este estado inicial mediante la observación de la salida $y(t)$ del sistema durante un período de tiempo finito.

El criterio de observabilidad en el espacio de estado consiste en verificar que la matriz de observabilidad, de orden n , tenga también orden n . Esto es, afirmar que los vectores $\mathbb{C}, \mathbb{C}\mathbb{A}, \dots, \mathbb{C}\mathbb{A}^{n-1}$ de los que se compone la matriz mencionada, sean linealmente independientes.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} \\ \mathbb{C}\mathbb{A} \\ \vdots \\ \mathbb{C}\mathbb{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 54})$$

Para este sistema, utilizando el modelo reducido detallado en Ec. 14, la matriz de observabilidad presenta la siguiente forma al evaluarla desde la salida $\theta_m(t)$:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m''}{2 \cdot J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 55})$$

En la que se verifican los criterios de observabilidad; permitiendo afirmar que el sistema es controlable desde la salida $\theta_m(t)$.

Si se usara un tacogenerador, se debe analizar la observabilidad del sistema desde la salida $\omega_m(t)$. En este caso, se obtiene la siguiente matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m''}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{b_{eq}^2}{J_{eq}} - \frac{3 \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m''^2}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} & -\frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m'' \cdot b_{eq}}{2 \cdot J_{eq}} - \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m'' \cdot R_s}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 56})$$

En la que no se cumplen los criterios de observabilidad, denotando así que el uso de tacogenerador no satisface las necesidades del sistema; y que no podrá reconstruirse un espacio de estado conociendo la velocidad a la que trabaja el sistema.

4. Diseño, Análisis y Simulación de Controlador de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque

4.1. Modulador de torque equivalente

4.1.a. Desacople de las realimentaciones de estado hacia la entrada

En esta sección se implementará un modulador de torque sobre el sistema, que permita controlar el sistema mediante el uso de consignas de torque como parámetro de entrada. Para ello se incorporará en primer lugar un modulador de tensión que transforme la variable física de tensión $v_{abc}(t)$ en el valor virtual $v_{abc}^*(t)$ que se requiere y que servirá como consigna de tensión deseada. En este caso particular, se considerará que el modulador de tensión presenta ganancia unitaria, permitiendo considerar:

$$v_{abc}(t) \approx v_{abc}^*(t) \quad (\text{Ec. 57})$$

A continuación, se define una variable $v_{qd0s}^{r*'}(t)$ como la consigna de tensión necesaria para realimentar el sistema de modo tal que se realice un desacople de las realimentaciones de estado; logrando depurar la consigna $v_{qd0s}^{r*}(t)$ que se obtendrá a la salida de este proceso.

Dicha consigna se modela como se presenta a continuación, basándose en el modelo desarrollado para el subsistema eléctrico de *Ec. 14* para entender cuáles son las realimentaciones de estado que deben ser desacopladas:

$$\begin{aligned} v_{qs}^{r*}(t) &= v_{qs}^{r*'}(t) + R_s \cdot i_{qs}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r] \\ v_{ds}^{r*}(t) &= v_{ds}^{r*'}(t) + R_s \cdot i_{ds}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\ v_{0s}^*(t) &= v_{0s}^{*'}(t) + R_s \cdot i_{0s}(t) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 58})$$

Siguiendo estas directrices, se construye el subsistema que se puede observar en la siguiente imagen:

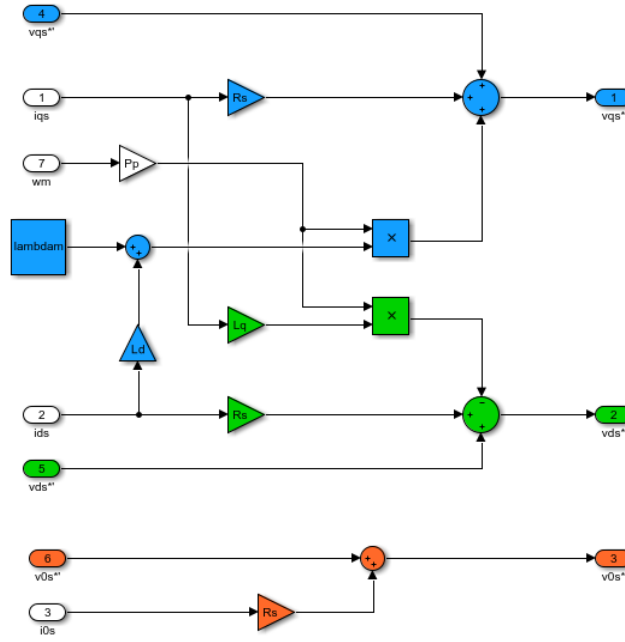


Figura 20: Diagrama de bloques del desacople de las realimentaciones de estado.

4.1.b. Diseño de lazos internos de control vectorial de corriente

Para realizar el control de la variable $v_{qd0s}^{r*'}(t)$, es necesario realizar una realimentación en base a un lazo de corriente del sistema. Para lograrlo, se observa la relación existente entre la tensión y la variación de corriente, nuevamente remitiendo a Ec. 14, que modela el subsistema electromecánico del sistema

$$\begin{aligned}
 L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} &= v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r] \\
 L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} &= v_{ds}^r(t) - R_s \cdot i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\
 L_{ls} \frac{di_{0s}(t)}{dt} &= v_{0s}(t) - R_s \cdot i_{0s}(t)
 \end{aligned} \tag{Ec. 59}$$

A continuación, conociendo la información detallada en Ec. 57 y Ec. 58, puede integrarse el desacople de variables físicas desarrollado en la sección anterior en Ec. 59, pudiendo observar mejor la relación entre la variación de corriente y $v_{qd0s}^{r*'}(t)$:

$$\begin{aligned}
L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} &\approx v_{qs}^{r*}(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^{rr}] = v_{qs}^{r*'}(t) \\
L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} &\approx v_{ds}^{r*}(t) - R_s \cdot i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) = v_{ds}^{r*'}(t) \\
L_{ls} \frac{di_{0s}(t)}{dt} &\approx v_{0s}^*(t) - R_s \cdot i_{0s}(t) = v_{0s}^{*'}(t)
\end{aligned} \tag{Ec. 60}$$

De este modo, la consigna de tensión es ahora función de la corriente del sistema. Esto permite controlar su valor haciendo uso de una consigna de corriente proporcional al valor requerido en $v_{qs}^{r*'}(t)$. Así, se modela $v_{qs}^{r*'}(t)$ en forma proporcional al error que exista entre la nueva consigna de corriente, $i_{qs}^{r*}(t)$, y el valor real que posee la corriente en el sistema:

$$\begin{aligned}
L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} &\approx v_{qs}^{r*'}(t) = (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \cdot R_q' \\
L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} &\approx v_{ds}^{r*'}(t) = (i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)) \cdot R_d' \\
L_{ls} \frac{di_{0s}(t)}{dt} &\approx v_{0s}^{*'}(t) = (i_{0s}^*(t) - i_{0s}(t)) \cdot R_0'
\end{aligned} \tag{Ec. 61}$$

Para calcular el valor del parámetro de ganancia $R_{q,d,0}$ introducido en el modulador de corriente, es necesario analizar la función de transferencia del mismo:

$$\begin{aligned}
L_q \cdot s \cdot I_{qs}^r(s) &\approx (I_{qs}^{r*}(s) - I_{qs}^r(s)) \cdot R_q' \\
L_d \cdot s \cdot I_{ds}^r(s) &\approx (I_{ds}^{r*}(s) - I_{ds}^r(s)) \cdot R_d' \\
L_{ls} \cdot s \cdot I_{0s}(s) &\approx (I_{0s}^*(s) - I_{0s}(s)) \cdot R_0'
\end{aligned} \tag{Ec. 62}$$

$$\begin{aligned}
G_{iqs}(s) &= \frac{I_{qs}^r(s)}{I_{qs}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_q}{R_q'} \cdot s + 1} \\
G_{ids}(s) &= \frac{I_{ds}^r(s)}{I_{ds}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_d}{R_d'} \cdot s + 1} \\
G_{i0s}(s) &= \frac{I_{0s}(s)}{I_{0s}^*(s)} = \frac{1}{\frac{L_{ls}}{R_0'} \cdot s + 1}
\end{aligned} \tag{Ec. 63}$$

Cuyos únicos polos se encuentran en $s = -\frac{R}{L}$, de modo que el modulador no produce inestabilidades en el sistema. Se requiere que este polo adopte el valor $s = -5000\frac{rad}{s}$, por lo que:

$$\begin{aligned} R'_q &= 5000 \cdot L_q = 29\Omega \\ R'_d &= 5000 \cdot L_d = 33\Omega \\ R'_0 &= 5000 \cdot L_{ls} = 4\Omega \end{aligned} \quad (\text{Ec. 64})$$

Es importante destacar que, como se desea trabajar con el modelo de sistema simplificado, representado en Ec. 22, y se ha acondicionado la planta real del sistema para trabajar bajo las consideraciones planteadas en la sección correspondiente; se desea que el valor de las consignas $i_{ds}^*(t)$ e $i_{0s}^*(t)$ tomen el valor 0. Por esta razón, se fijan dichas consignas a este valor y la variable $i_{qs}^*(t)$ se convierte en la única variable que puede ser manipulada.

En la siguiente figura puede observarse el diagrama de bloques correspondiente a la aplicación del modulador de corriente:

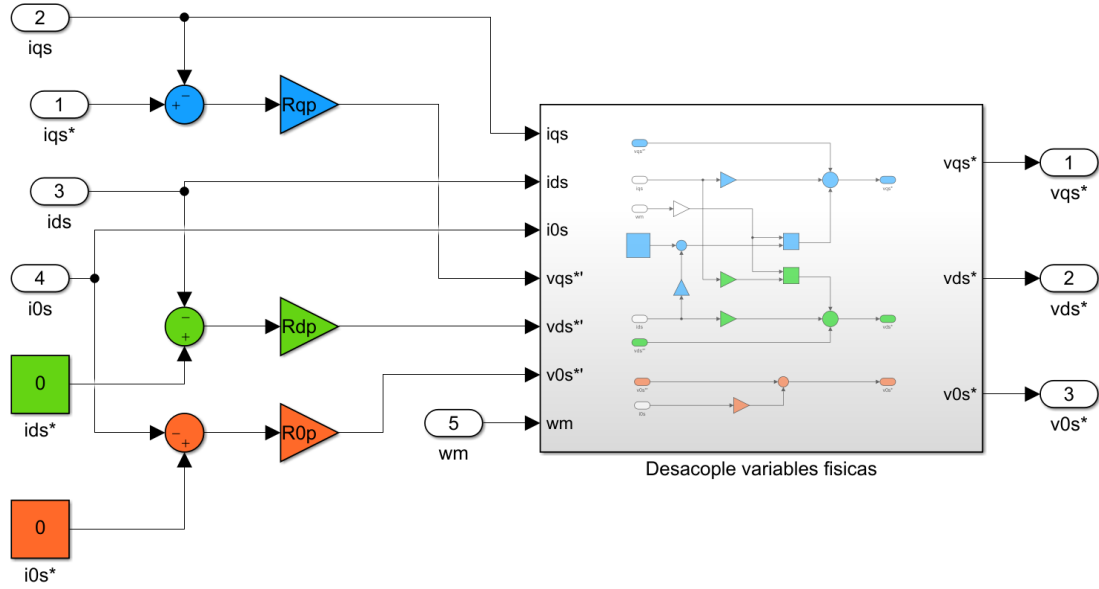


Figura 21: Diagrama de bloques del modulador de corriente.

4.1.c. Incorporación de consigna de torque

Una vez más, se realiza una realimentación del sistema para controlar el mismo mediante consignas de torque $T_m^*(t)$. Dicha consigna se modela de la siguiente manera:

$$T_m^*(t) = T_m^{*'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t) \quad (\text{Ec. 65})$$

Que, una vez más, permite el desacople del término $\omega_m(t) \cdot b_{eq}$, garantizando así el acceso directo a dicha variable.

Por último, es necesario el modelado de la consigna $T_m^{*'}(t)$, que se realiza observando la relación existente entre el torque y la corriente. Para ello se observa la ecuación del par electromagnético, Ec. 18, y se propone el siguiente modelo para el modulador de torque:

$$T_m^{*'}(t) \approx \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t)$$

$$i_{qs}^{*'}(t) = \frac{T_m^{*'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)]} \quad (\text{Ec. 66})$$

Aplicando este ajuste, se obtiene el modulador de torque al completo, cuyo diagrama de bloques puede observarse en la siguiente figura:

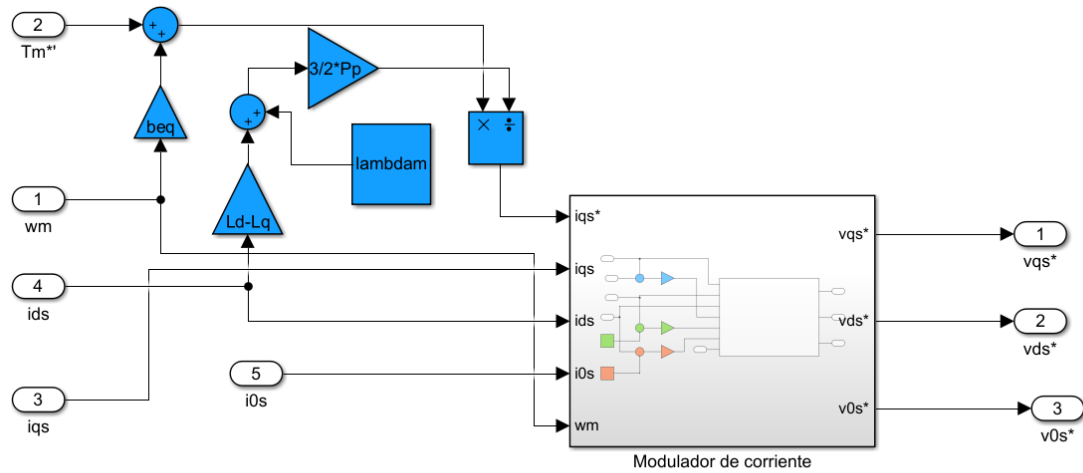


Figura 22: Diagrama de bloques que representa el modulador de torque.

4.2. Controlador externo de movimientos: posición y velocidad

En esta sección se diseñará un controlador PID que permita regular el valor de la consigna de torque del modulador de torque, realimentando con los valores de posición y velocidad del sistema. El diseño del controlador seleccionado puede representarse mediante el siguiente diagrama de bloques:

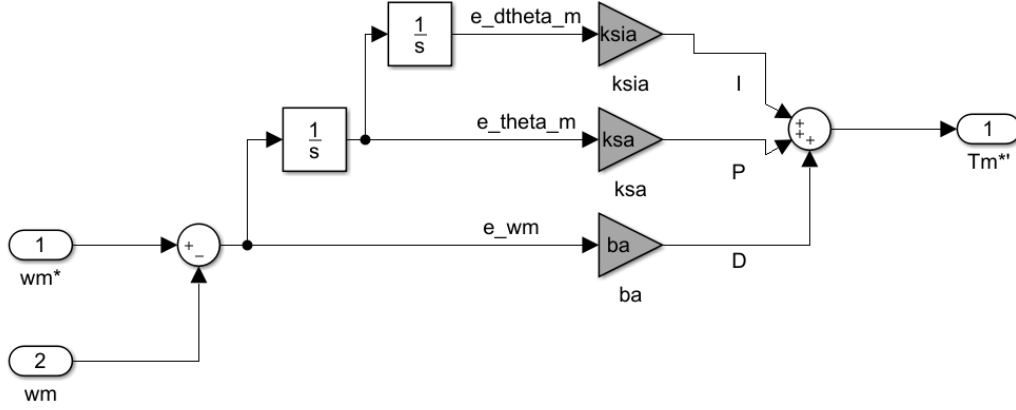


Figura 23: Diagrama de bloques que representa el controlador PID seleccionado.

Se observa que el controlador elegido no emplea control derivativo, sino dos controles integrales. Esta elección es tomada debido a que este tipo de control es más robusto frente a ruidos que puedan afectar la señal de control; mientras que el uso de control derivativo actúa como un filtro pasa alto, que amplifica en gran medida los ruidos mencionados. Esta decisión también implica que la variable de entrada del controlador ya no es la posición angular del motor, sino su velocidad.

La salida del controlador será la consigna de torque que tomará el modulador del sistema diseñado en la etapa anterior, de modo que se modela dicha variable en el dominio s :

$$T_m^{*'}(s) = b_a \cdot e_{\omega m}(s) + k_{sa} \cdot e_{\theta m}(s) + k_{sia} \cdot \frac{e_{\theta m}(s)}{s} \quad (\text{Ec. 67})$$

Donde las variables $e_{\theta m}(s)$ y $e_{\omega m}(s)$ representan los errores considerados entre la consigna deseada y el valor real de la variable:

$$\begin{aligned} e_{\theta m}(s) &= \Theta_m^*(s) - \Theta_m(s) \\ e_{\omega m}(s) &= s \cdot e_{\theta m}(s) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 68})$$

Por otro lado, puede observarse la relación entre la variable torque y la variación de velocidad del motor en el modelo del subsistema mecánico, en Ec. 5, considerando el desacople del término $-b_{eq} \cdot \omega_m(t)$ a causa de las consideraciones realizadas en la sección anterior. De este modo:

$$\dot{\omega}_m(t) \cdot J_{eq} = T_m^{*'}(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (\text{Ec. 69})$$

Que, trabajando en dominio s y reemplazando en Ec. 69 la expresión Ec. 67:

$$s^2 \cdot \Theta_m(s) \cdot J_{eq} = T_m^{*'}(s) - \frac{T_l(s)}{r}$$

$$s^2 \cdot \Theta_m(s) \cdot J_{eq} = b_a \cdot e_{\omega m}(s) + k_{sa} \cdot e_{\theta m}(s) + k_{sia} \cdot \frac{e_{\theta m}(s)}{s} - \frac{T_l(s)}{r} \quad (\text{Ec. 70})$$

Conociendo el valor de los errores, que fueron definidos en Ec. 68, pueden sustituirse en la expresión anterior para lograr aislar las funciones de transferencia del controlador:

$$s^2 \cdot \Theta_m(s) \cdot J_{eq} = \left[b_a \cdot s + k_{sa} + \frac{k_{sia}}{s} \right] \cdot \Theta_m^*(s) - \Theta_m(s) - \frac{T_l(s)}{r}$$

$$s^2 \cdot \Theta_m(s) \cdot J_{eq} = \left[\left(b_a \cdot s + k_{sa} + \frac{k_{sia}}{s} \right) \cdot \Theta_m^*(s) \right] - \left[\left(b_a \cdot s + k_{sa} + \frac{k_{sia}}{s} \right) \cdot \Theta_m(s) \right] - \frac{T_l(s)}{r}$$

$$\left[s^2 \cdot J_{eq} + \left(b_a \cdot s + k_{sa} + \frac{k_{sia}}{s} \right) \right] \cdot \Theta_m(s) = \left(b_a \cdot s + k_{sa} + \frac{k_{sia}}{s} \right) \cdot \Theta_m^*(s) - \frac{T_l(s)}{r}$$

$$\Theta_m(s) = \frac{b_a \cdot s + k_{sa} + \frac{k_{sia}}{s}}{s^2 \cdot J_{eq} + b_a \cdot s + k_{sa} + \frac{k_{sia}}{s}} \cdot \Theta_m^*(s) - \frac{1}{s^2 \cdot J_{eq} + b_a \cdot s + k_{sa} + \frac{k_{sia}}{s}} \cdot \frac{T_l(s)}{r} \quad (\text{Ec. 71})$$

De este modo, la función de transferencia, para cada entrada, se presenta a continuación:

$$G_{\Theta_m^*}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{\Theta_m^*(s)} = \frac{b_a \cdot s^2 + k_{sa} s + k_{sia}}{s^3 \cdot J_{eq} + b_a \cdot s^2 + k_{sa} s + k_{sia}} \quad (\text{Ec. 72})$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{r}{s^3 \cdot J_{eq} + b_a \cdot s^2 + k_{sa} \cdot s + k_{sia}}$$

Aplicando el método de sintonía serie, con $n=2,5$, se obtienen las siguientes identidades para los parámetros del controlador:

$$b_a = J_{eq} \cdot \omega_{vel}$$

$$k_{sa} = b_a \cdot \omega_{pos} \quad (\text{Ec. 73})$$

$$k_{sia} = k_{sa} \cdot \omega_{int}$$

Siendo:

$$\omega_{vel} = n \cdot \omega_{pos}$$

$$\omega_{int} = \frac{1}{n} \cdot \omega_{pos} \quad (\text{Ec. 74})$$

De modo que:

$$b_a = J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos}$$

$$k_{sa} = J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos}^2 \quad (\text{Ec. 75})$$

$$k_{sia} = J_{eq} \cdot \omega_{pos}^3$$

Permitiendo así obtener el polinomio característico del controlador, combinando el conocimiento de Ec. 72:

$$p(s) = s^3 \cdot J_{eq} + b_a \cdot s^2 + k_{sa} \cdot s + k_{sia} = J_{eq} \cdot (s + \omega_{pos}) \cdot (s^2 + (n - 1) \cdot \omega_{pos} \cdot s + \omega_{pos}^2) \quad (\text{Ec. 76})$$

Para poder obtener los valores que ajusten la acción que se requiere del controlador, se diseña paralelamente un polinomio que permite localizar los polos en las posiciones deseadas:

$$p(s) = J_{eq} \cdot (s + \omega_{pos}) \cdot (s^2 + s \cdot 2 \cdot \xi \cdot \omega_{pos} + \omega_{pos}^2) \quad (\text{Ec. 77})$$

Se solicita que $\omega_{pos} = 800 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$; y puede obtenerse el valor de $\zeta = \frac{n-1}{2} = \frac{3}{4}$. Así, es posible obtener los valores de b_a , k_{sa} y k_{sia} :

$$b_a = 0.0113 \frac{\text{N.m}}{\text{rad/s}}$$

$$k_{sa} = 9.0416 \frac{\text{N.m}}{\text{rad}} \quad (\text{Ec. 78})$$

$$k_{sia} = 2893.3 \frac{\text{N.m}}{\text{rad.s}}$$

$$p_1 = -800$$

$$p_2 = -600 + 529.15 i \quad (\text{Ec. 79})$$

$$p_3 = -600 - 529.15 i$$

Pudiendo de este modo analizar los polos del sistema con este nuevo controlador:

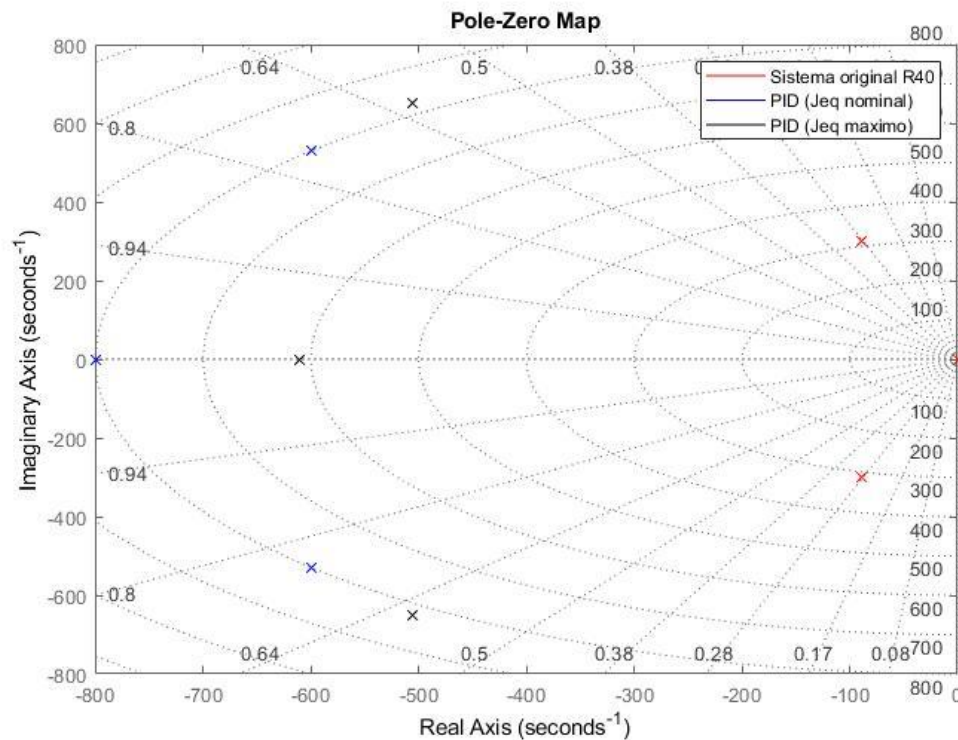


Figura 24: Gráfico de polos del sistema.

En el caso de los polos para valores máximos de J_{eq} podemos ver que los mismos se desplazan un poco a la derecha, pero el sistema continúa siendo estable; y que, respecto a los polos originales del sistema, los nuevos se ubican más lejos del origen de coordenadas, denotando así que el sistema es más robusto, tal como se predijo al diseñar el controlador.

4.3. Observador de estado de orden reducido

La utilización de una consigna de velocidad como parámetro de entrada del sistema introduce dificultades a la hora de manipular el mismo, tales como la complejidad a la hora de controlar este sistema mediante esta variable o la imprecisión de los tacogeneradores que sensarían la velocidad del sistema.

Por otra parte, como se evaluó en la sección 3.6, el sistema no es observable desde la velocidad del motor. Debe entonces diseñarse un estimador que permita aproximar el valor de esta variable inaccesible.

Por ello, surge el planteamiento de incorporar un observador de estado que provea la consigna de velocidad necesaria basándose en el sensado de la posición angular del brazo robótico mediante encoder.

El observador se encargará de actuar sobre la posición angular final del motor, de modo que se enfocará el uso del mismo sobre el subsistema mecánico del sistema, suponiendo desacoplada la realimentación obtenida por los efectos viscosos en el sistema. Así, la planta observada puede modelarse como:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}.\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}.\mathbf{u}(t) & ; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}.\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 80})$$

Y el observador es modelado como:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}.\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}.\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_e(\mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)) & ; \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{C}}.\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 81})$$

Donde la matriz que contiene los parámetros de ajuste del observador se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} K_{e\theta} \\ K_{e\omega} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 82})$$

Suponiendo un funcionamiento ideal, las matrices de sistema de ambos modelos coinciden, así como las matrices de entrada y salida. De este modo, puede reescribirse el modelo del observador como:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{K}_e.\mathbf{C}].\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}.\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_e.\mathbf{C}.\mathbf{x}(t) & ; \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}.\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (\text{Ec. 83})$$

Para poder obtener los valores de los parámetros de realimentación del observador, es necesario obtener en primer lugar el polinomio característico del sistema.

Siendo:

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{A} - \mathbf{K}_e.\mathbf{C}] \quad (\text{Ec. 84})$$

El polinomio característico puede hallarse a través del determinante que se presenta a continuación:

$$|s.\mathbf{I} - \mathbf{A}'| = \begin{vmatrix} s + K_{e\theta} & -1 \\ K_{e\omega} & s \end{vmatrix} \quad (\text{Ec. 85})$$

$$s^2 + s.K_{e\theta} + K_{e\omega}$$

Paralelamente, se propone un polinomio de orden dos que permitirá localizar los polos donde se desee. Se solicita que ambos polos se ubiquen en $s = -3200 \frac{\text{rad}}{s}$:

$$(s + 3200)^2 = s^2 + s.6400 + 3200^2 \quad (\text{Ec. 86})$$

Igualando esta expresión con Ec. 85:

$$K_{e\theta} = 6,4 \cdot 10^3 \frac{1}{s} \quad (\text{Ec. 87})$$

$$K_{e\omega} = 1,024 \cdot 10^7 \frac{1}{s^2}$$

Con esta información, puede ahora modelarse, en un diagrama de bloques, el observador de estados:

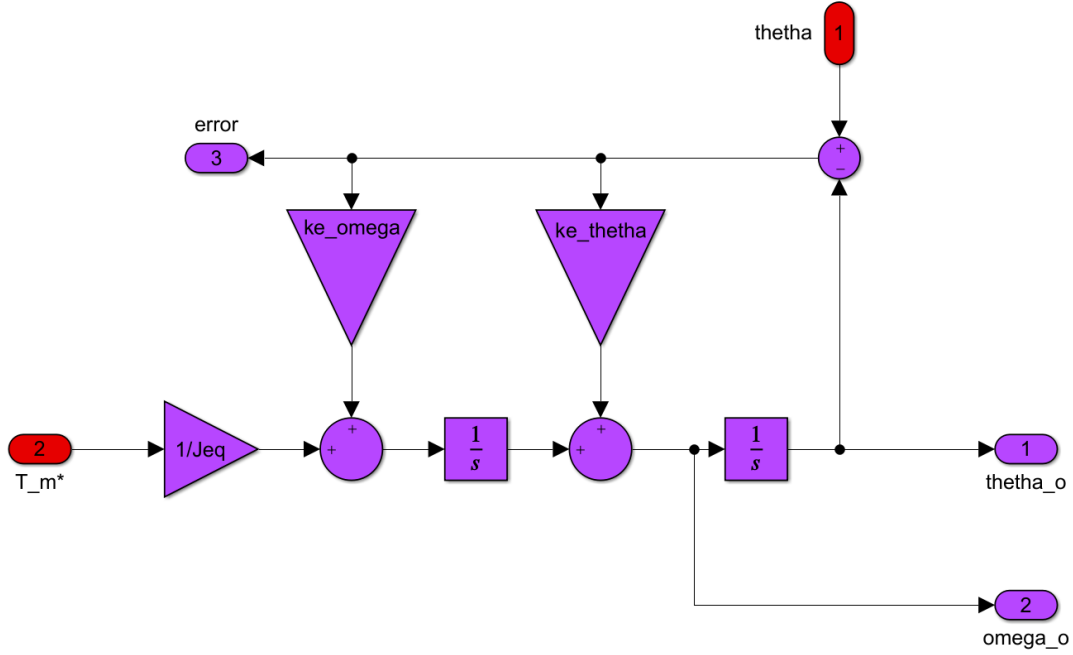


Figura 25: Diagrama de bloques que representa el observador del subsistema mecánico.

Se estudiará a continuación el error cometido por el observador en caso de que este no tuviera un comportamiento ideal. Para ello, se define un estado error, tal que:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad ; \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{Ec. 88})$$

De modo que cuando se comparan los vectores de estado de la planta y el observador (Ec. 80 y Ec. 81), se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u}(t) - \mathbf{K}_e \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{d}(t)$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{C}] \cdot \mathbf{x}(t) - [\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_e \cdot \tilde{\mathbf{C}}] \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{B} - \tilde{\mathbf{B}}] \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{d}(t) \quad (\text{Ec. 89})$$

La incertidumbre paramétrica en el espacio de estados, puede representarse como se presenta a continuación:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \Delta \mathbf{B} \quad (\text{Ec. 90})$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}$$

Si se continúa desarrollando la expresión Ec. 89, teniendo en cuenta las expresiones de incertidumbre presentadas en la ecuación anterior, puede obtenerse la expresión que modela los errores introducidos por el acoplamiento del observador:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= [A - K_e \cdot C] \cdot [\dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t)] - [\Delta A - K_e \cdot \Delta C] \cdot \tilde{x}(t) - \Delta B \cdot u(t) + B_d \cdot d(t) \\ \dot{e}(t) &= [A - K_e \cdot C] \cdot e(t) - [\Delta A - K_e \cdot \Delta C] \cdot [x(t) - e(t)] - \Delta B \cdot u(t) + B_d \cdot d(t)\end{aligned}\quad (\text{Ec. 91})$$

4.4. Simulación en tiempo continuo

4.4.a. Seguimiento de consignas de movimiento

En esta sección se combinará todo el desarrollo realizado hasta el momento para lograr una simulación del sistema frente a seguimiento de consignas de posiciones articulares. Para ello, se supondrá una entrada con perfil trapezoidal como el que se presenta a continuación:

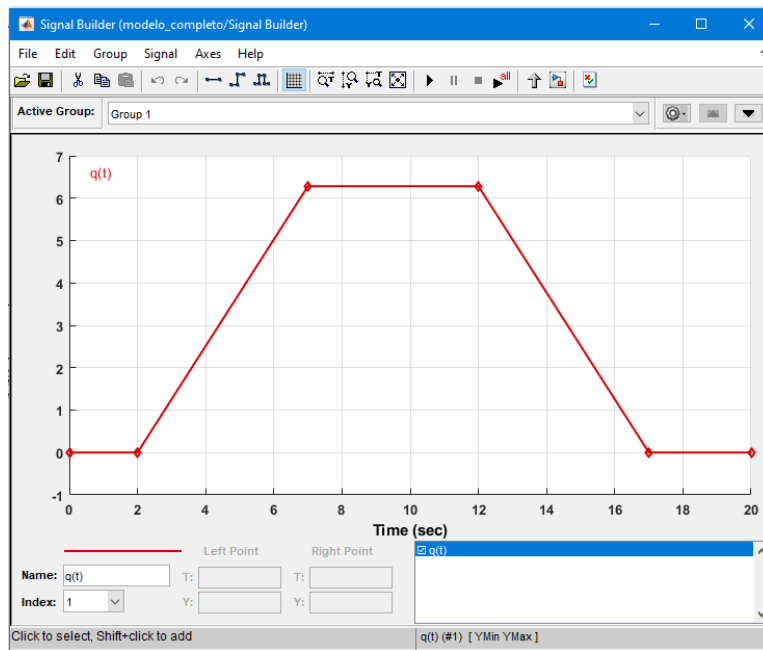


Figura 26: Perfil de posición de la consigna de posición que se desea seguir.

El sistema al completo es modelado en Simulink, incorporando todos los módulos descritos anteriormente. El modelo general utilizado puede observarse en la siguiente imagen:

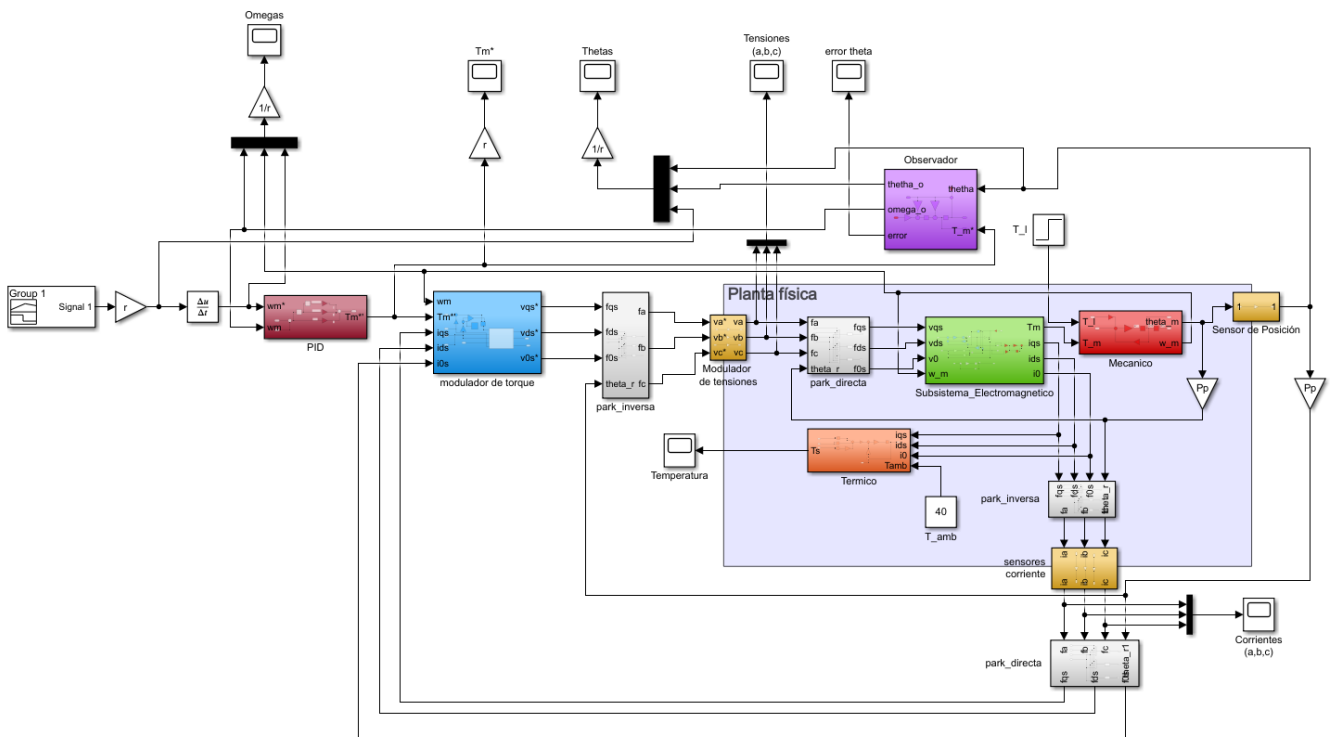


Figura 27: Diagrama de bloques del sistema completo diferenciando planta física de sistema de control.

Así, se obtienen las respuestas que se detallan a continuación:

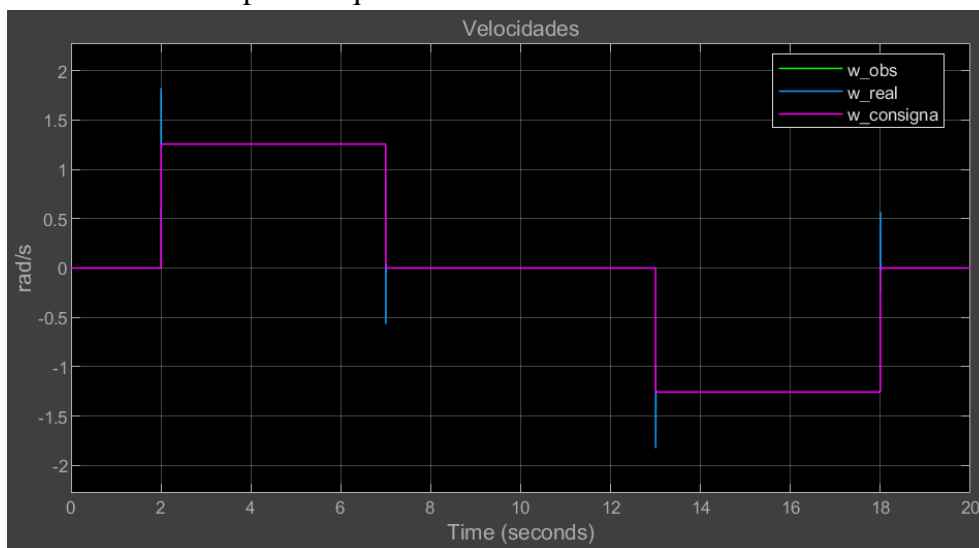


Figura 28: Respuesta de velocidad del sistema

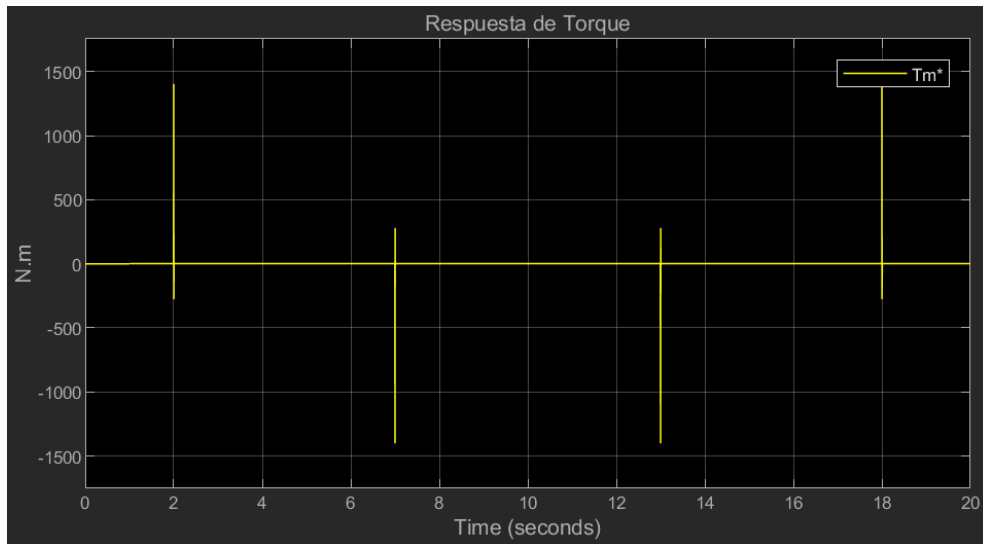


Figura 29: Respuesta de torque del sistema.

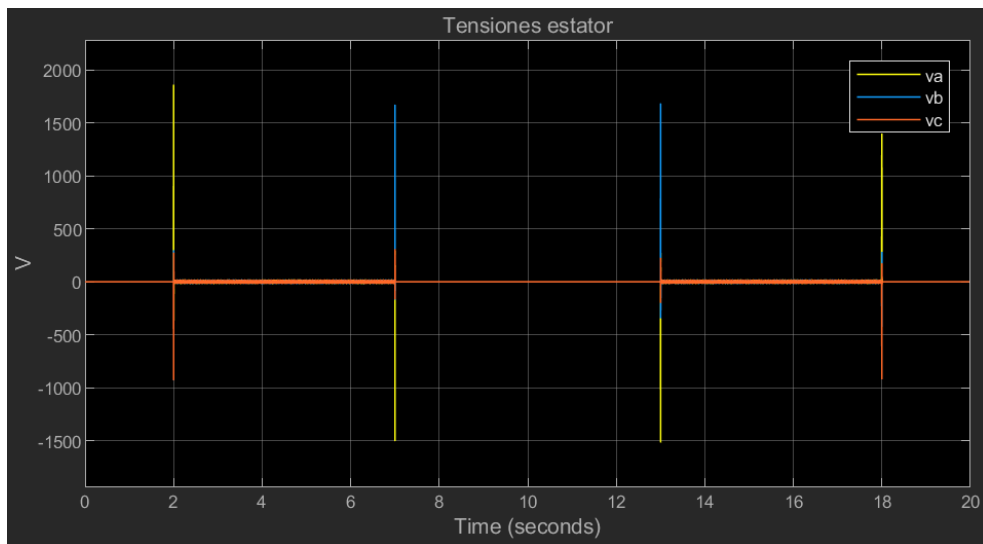


Figura 30: Respuesta de tensiones del sistema coordenadas a, b y c..

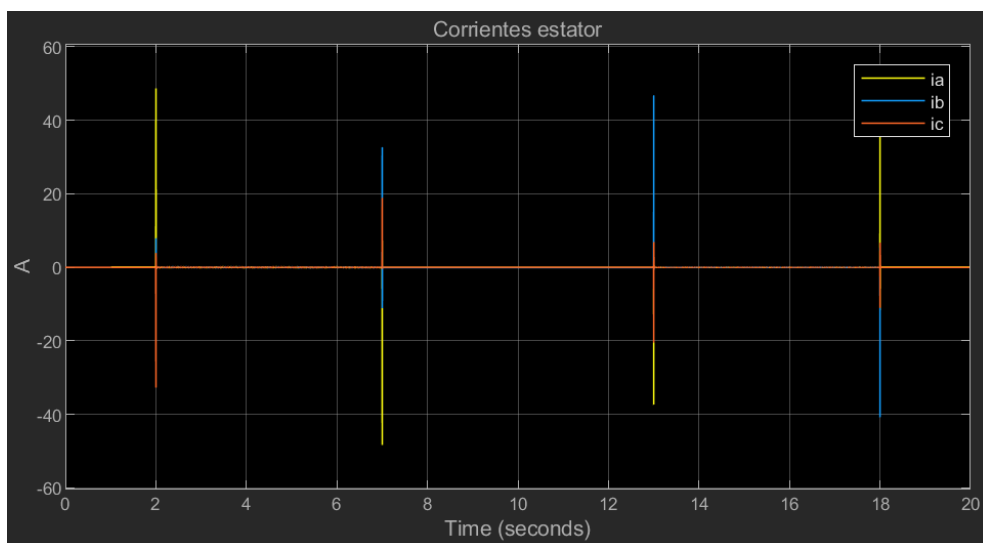


Figura 31: Respuesta de corrientes del sistema en coordenadas a, b y c..

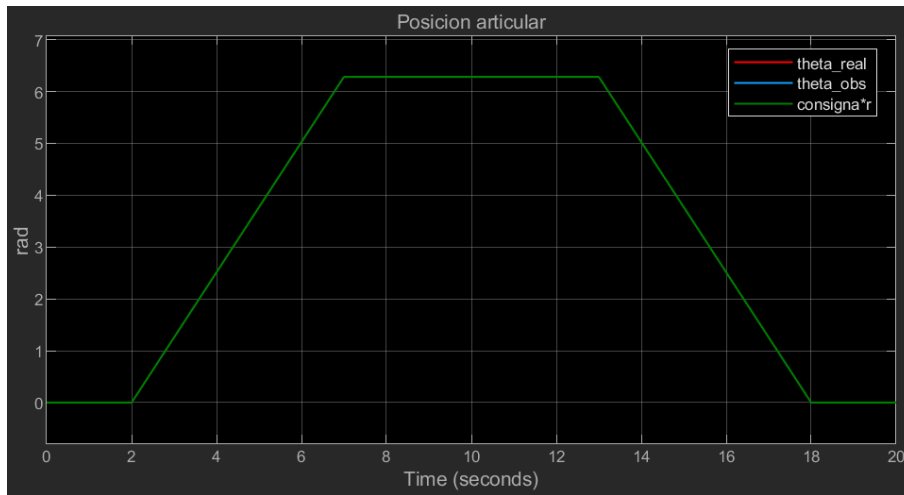


Figura 32: Respuesta de posición articular del sistema.

Se observa que, a primera vista, el sistema opera como se desea. Sin embargo, existen zonas en las que el sistema no opera de forma perfecta, como se puede apreciar en las siguientes figuras:

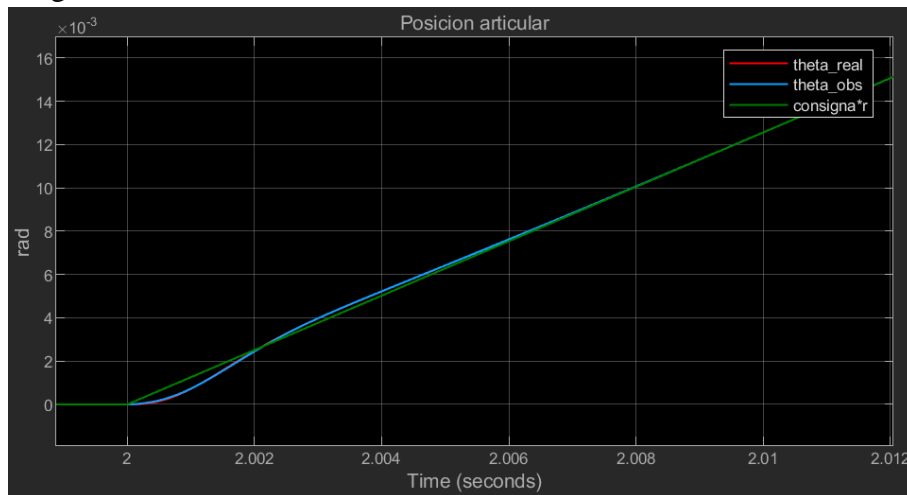


Figura 33: Detalle de la posición articular del sistema apreciando error.

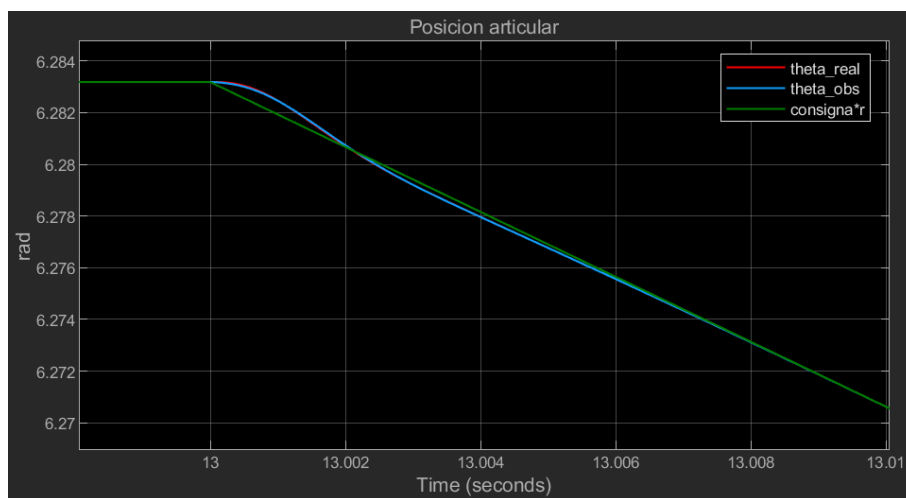


Figura 34: Detalle de la posición articular del sistema apreciando error.

Por último, se observa que, si bien la consigna se cumple correctamente, los valores de tensión y corriente superan ampliamente los valores nominales de la máquina. Esto se debe a que la elección de la consigna de posición propuesta no es adecuada ya que obliga a adoptar perfiles cuadrados de velocidad e impulsos de aceleración de gran magnitud, que solo se pueden lograr mediante la aplicación de altos valores de tensión, torque y corriente. Este problema se tratará con mayor detalle en la sección siguiente.

4.4.b. Análisis del rechazo a perturbaciones

A continuación, se analizará el desempeño del sistema frente a perturbaciones de carga en el sistema. Para ello se aplica una entrada escalón de carga en $t = 1$ s con valor $T_l = 1,53$ Nm. Se puede observar el efecto de las perturbaciones en las siguientes imágenes:

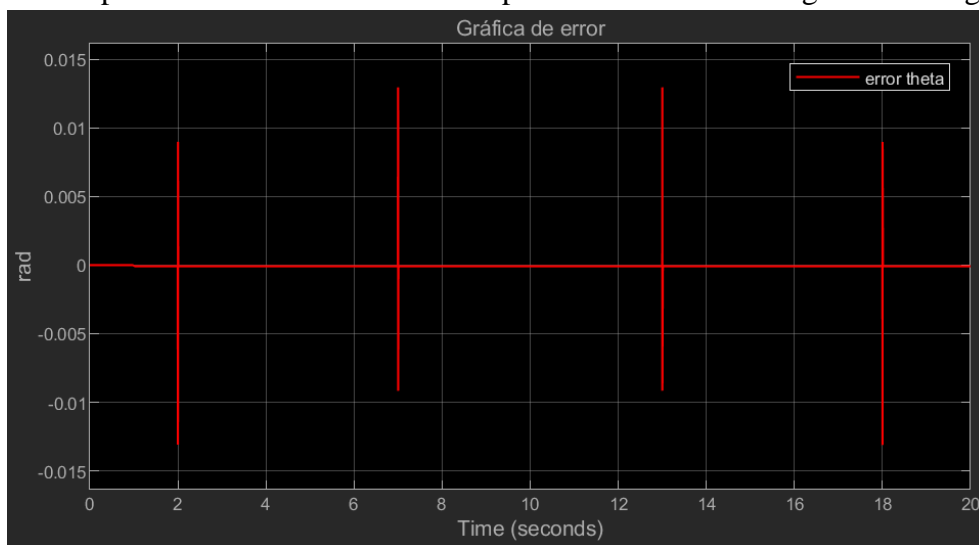


Figura 35: Gráfico de error cometido entre la posición articular real del sistema y la observada.

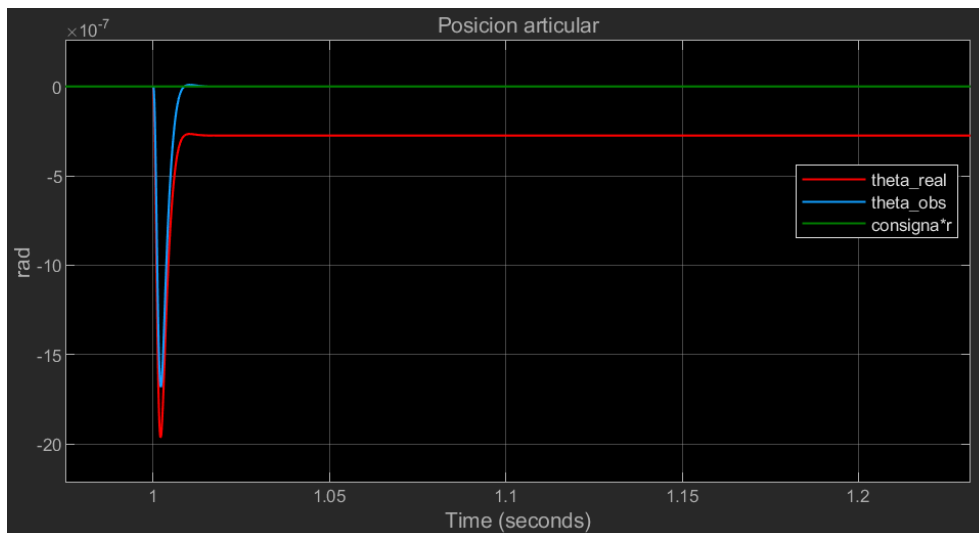


Figura 36: Detalle del gráfico de posiciones en el momento de aplicación de la perturbación.

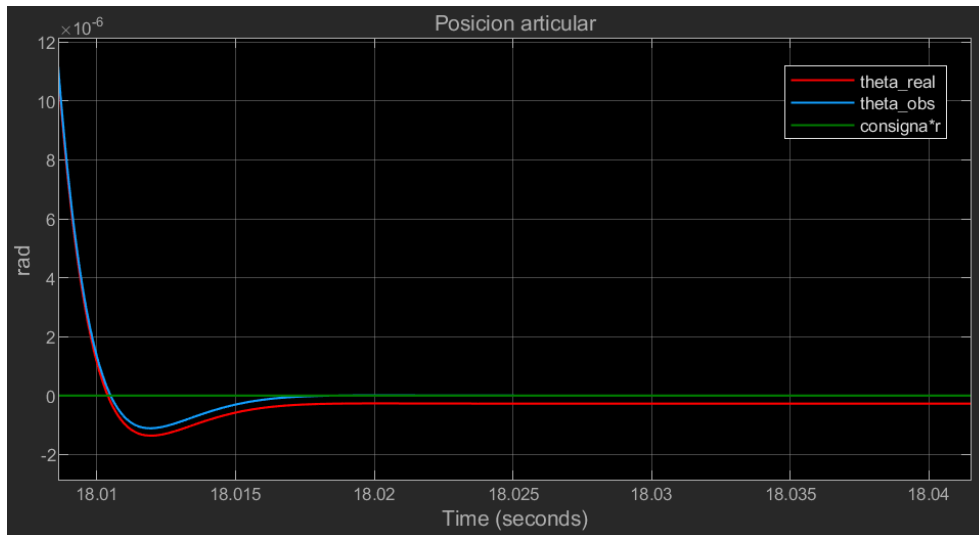


Figura 37: Detalle del gráfico de posiciones en el momento en que la consigna se establece en 0.

Como se puede apreciar, la perturbación introduce un error de estado estacionario en la salida de posición del sistema. Esto se debe a que el observador diseñado actúa únicamente como controlador PD, sin acción integral que actúe sobre dicho error de estado estacionario. La solución a este problema será estudiada en detalle en la siguiente sección.

4.5. Verificación de desempeño y mejoras

4.5.a. Análisis de límites de operación del sistema

De la simulación realizada en la sección 4.4.a, se extraen los datos que se presentan en la siguiente tabla:

	Valor obtenido en la simulación		Valor nominal	
	Valor en régimen continuo	Valor máximo (pico)	Valor en régimen continuo	Valor máximo (pico)
Velocidad en el rotor	-	$1,824 \frac{rad}{s}$	-	$2,2 \frac{rad}{s}$
Torque en la salida del reductor	1,570 N.m	1405 N.m	7,26 Nm	29,42 Nm
Corriente en el bobinado del estator	1.157 A	49,71 A	0,4 A	2 A
Tensión en el bobinado del estator	-	1862 V	-	19,56 V

Tabla 3: Información extraída sobre la simulación realizada.

Se observa que varios parámetros superan los límites establecidos. Este problema es causado por la elección de la consigna de posición, que obliga a adoptar perfiles cuadrados de velocidad e impulsos de aceleración de gran magnitud, que solo se pueden lograr mediante la aplicación de altos valores de tensión, torque y corriente.

Para solucionar este problema, se diseña una consigna de aceleración con perfil trapezoidal que resuelva los problemas asociados a los valores excesivos de tensión, corriente y torque.

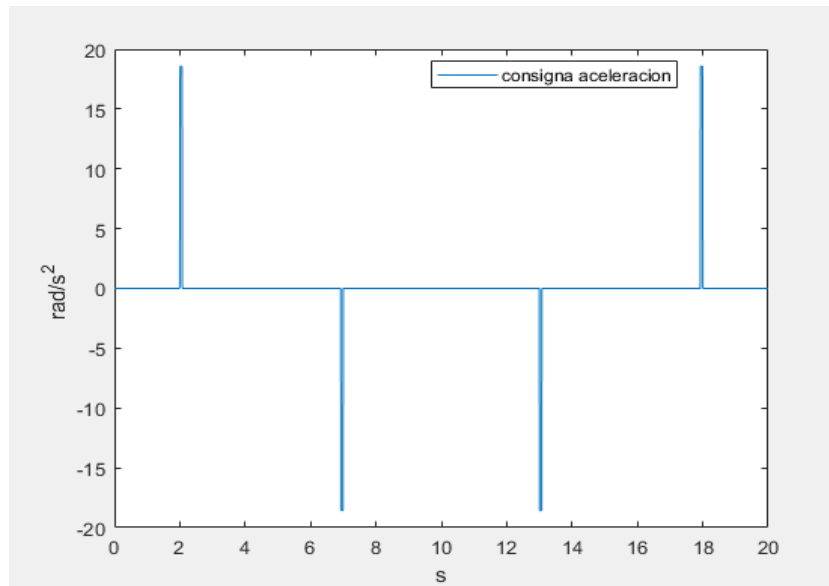


Figura 38: Señal de aceleración diseñada como consigna.

El perfil que se presentó fue diseñado a través de un algoritmo que, a partir de la introducción de los datos de duración de la acción, desplazamiento a realizar, velocidad máxima del rotor y porcentaje que representa la pendiente, es capaz de diseñar el perfil de aceleración que logra un movimiento suave hasta el valor objetivo.

De forma conceptual, puede entenderse la realización de cada perfil trapezoidal como la generación de un pulso cuadrado al que se le recortan las esquinas superiores, restando al área de dicho pulso cuadrado un porcentaje equivalente al valor solicitado por la pendiente del trapecio.

Este área representa la velocidad máxima a la que llegará el rotor. Por motivos de seguridad, se limitó la velocidad a la que se exigirá trabajar el motor en un porcentaje de la velocidad máxima.

Una vez diseñado el perfil de aceleración, se integra el mismo para lograr la consigna de velocidad deseada y que controlará el motor:

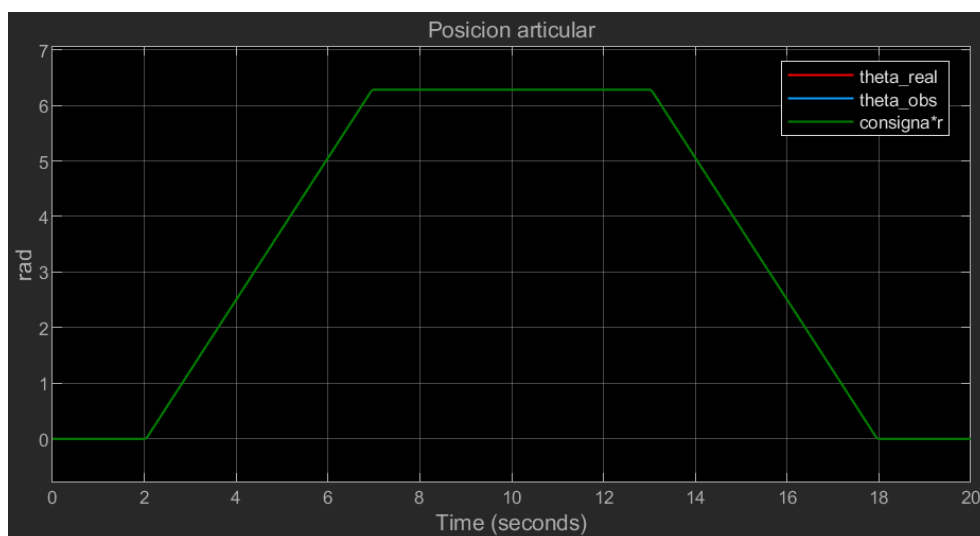


Figura 39: Consigna y respuesta de posición articular del sistema generada por la consigna de aceleración adoptada.

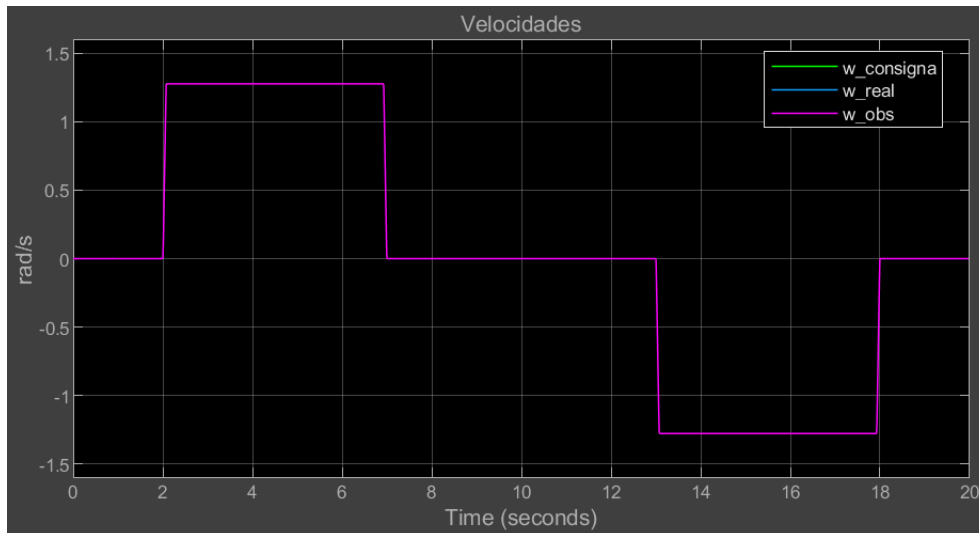


Figura 40: Consigna y respuesta de velocidad del sistema para la consigna de aceleración adoptada.

La utilización de este perfil asegura que el brazo realice el movimiento requerido dentro del tiempo estipulado, evitando el fenómeno de *jerk* (debido a la inclinación de la recta de aceleración) y sobrepasar los valores permitidos de tensión, corriente y torque, como puede apreciarse a continuación:

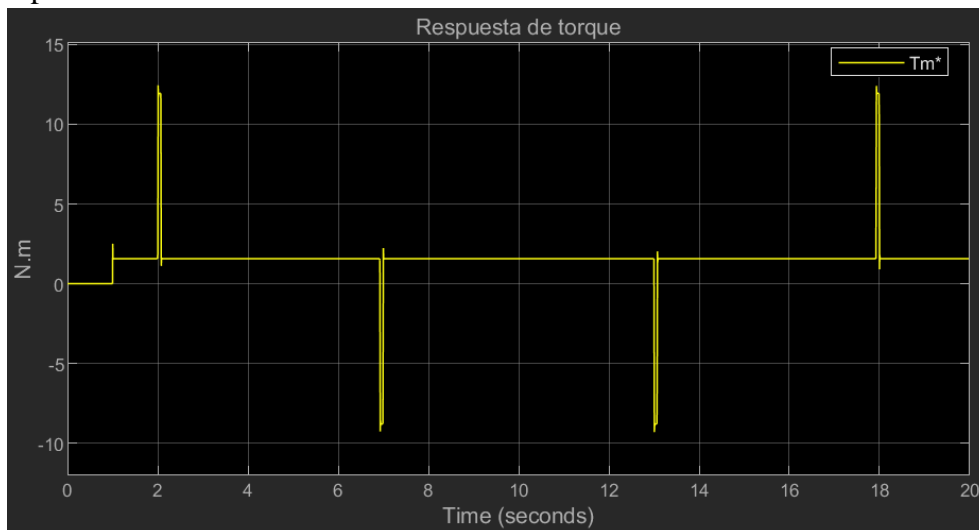


Figura 41: Respuesta del torque del sistema para la consigna de aceleración adoptada.

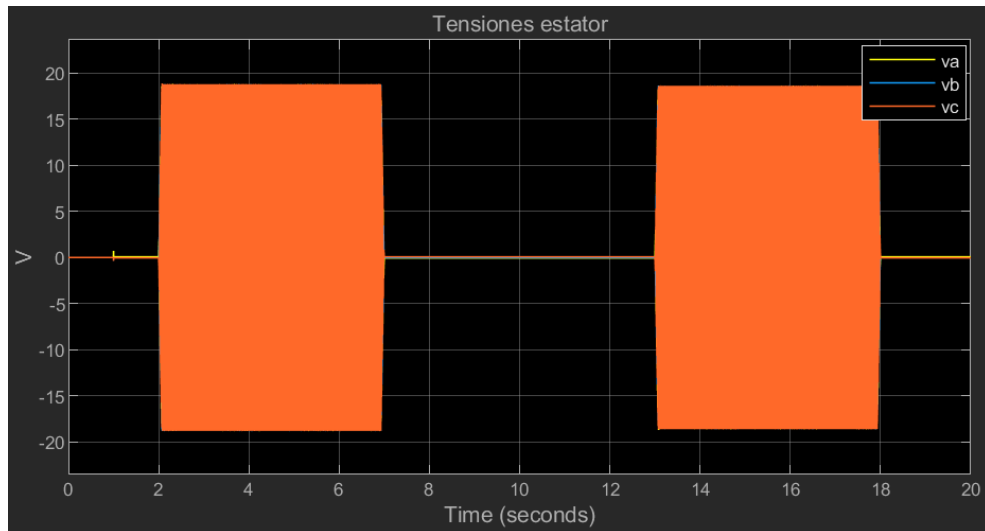


Figura 42: Respuesta de tensión del sistema para la consiga de aceleración adoptada.

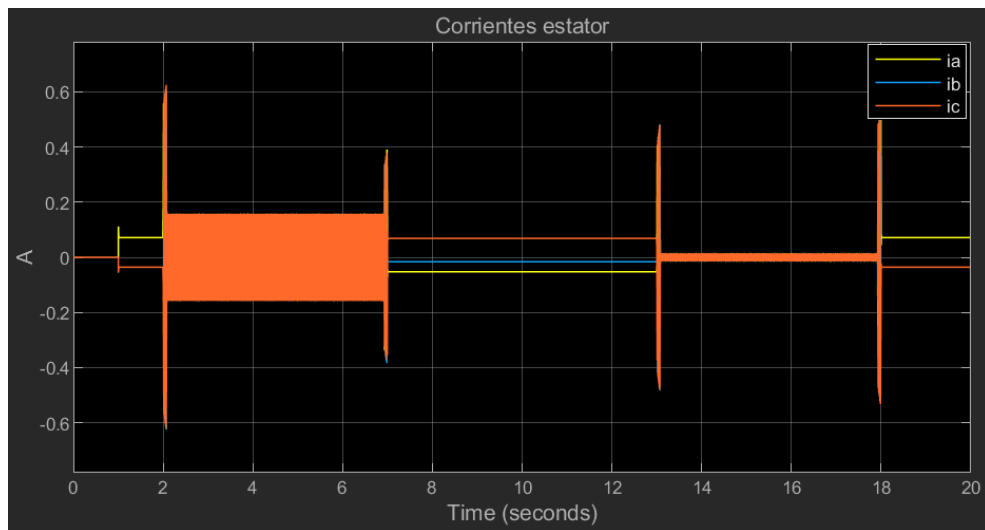


Figura 43: Respuesta de corriente del sistema para la consiga de aceleración adoptada.

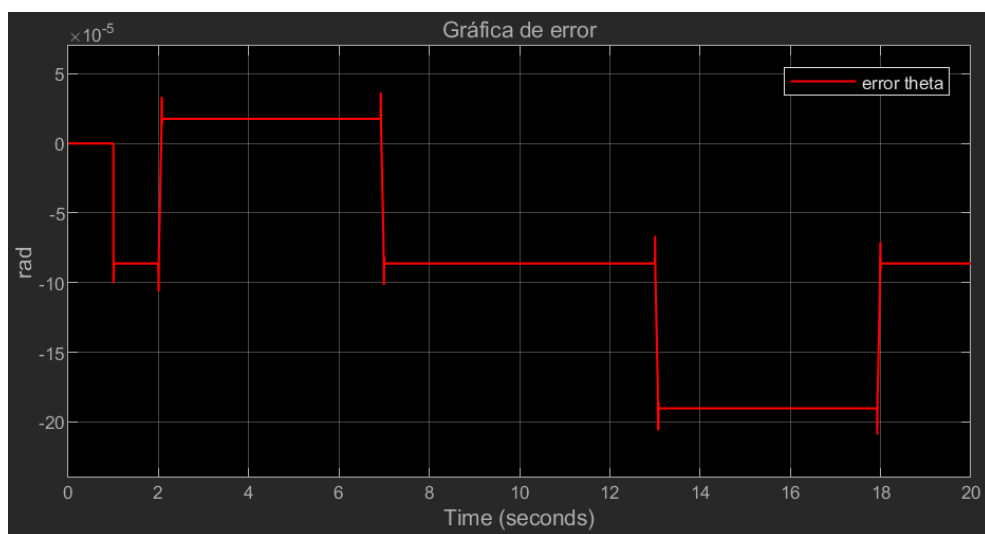


Figura 44: Gráfico de error cometido entre la posición articular real del sistema y la observada para consiga de aceleración. Todavía puede apreciarse un error de estado estacionario en el sistema.

4.5.b. Análisis de error de estado estable en la respuesta

Como se mencionó en la sección 4.4.b, el sistema introduce un error de estado estacionario frente a perturbaciones de carga. Esto se debe a que el observador diseñado actúa únicamente como controlador PD, sin acción integral que actúe sobre dicho error de estado estacionario.

Para entender el problema, es necesario analizar la dinámica del error del observador diseñado, desarrollada en Ec. 91, considerando $\Delta A = \Delta B = \Delta C = 0$. El error de observación cometido tenderá a 0 en un sistema rápido y estable solo cuando la entrada B_d sea nula, es decir, cuando no existan perturbaciones.

Frente a la existencia de perturbaciones, este sistema no puede corregir el estado estacionario, de modo que se vuelve a diseñar un observador que incorpora un control integrativo:

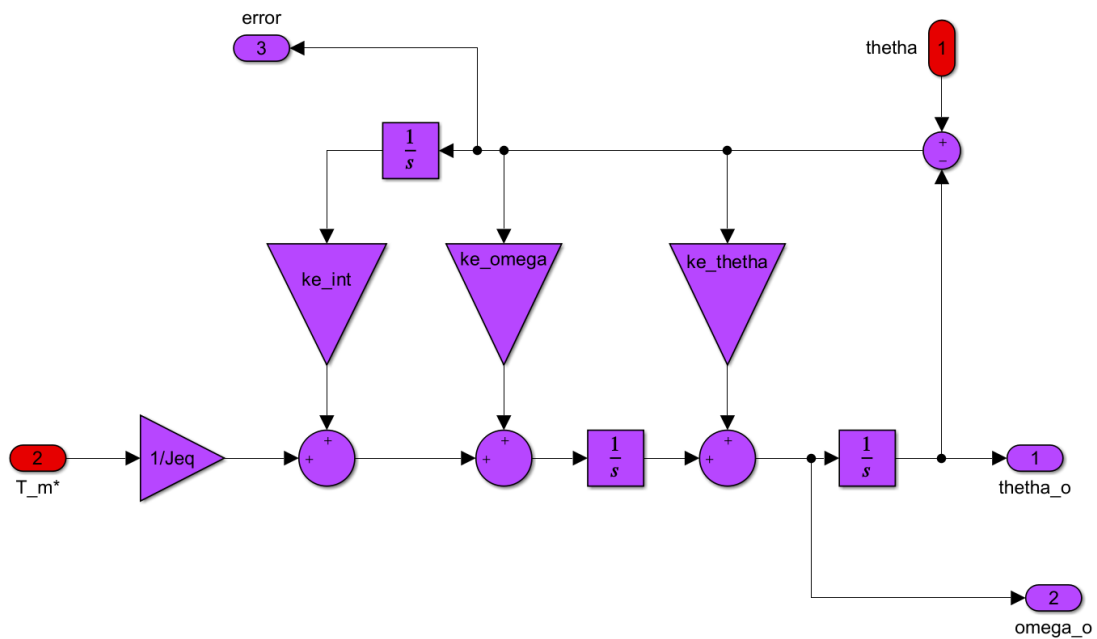


Figura 45: Nueva planta del observador.

Así, se define un nuevo estado que tiene en cuenta el tiempo que permanece la estimación del observador en un valor erróneo:

$$z(t) = \int (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) \cdot dt \quad (\text{Ec. 92})$$

Y se redefine el modelo del observador:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\theta}}(t) &= K_{e\theta} \cdot (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) + \tilde{\omega}(t) \\
\dot{\tilde{\omega}}(t) &= K_{e\omega} \cdot (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) + \frac{T_m^*(t)}{J_{eq}} + z(t) \\
\dot{\tilde{z}}(t) &= K_{ei} \cdot (\theta(t) - \tilde{\theta}(t))
\end{aligned} \tag{Ec. 93}$$

Para la obtención de los parámetros del observador, $K_{e\theta}$, $K_{e\omega}$ y K_{ei} es necesaria la obtención de la ecuación característica del observador, que se obtiene de la siguiente manera:

$$|s.I - A'| = \begin{vmatrix} s + K_{e\theta} & -1 & 0 \\ K_{e\omega} & s & -1 \\ K_{ei} & 0 & s \end{vmatrix} \tag{Ec. 94}$$

Donde la matriz A' es la matriz de sistema del observador, y vale:

$$A' = \begin{bmatrix} -K_{e\theta} & 1 & 0 \\ -K_{e\omega} & 0 & 1 \\ -K_{ei} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{Ec. 95}$$

Resolviendo el determinante planteado en Ec. 94 se obtiene el polinomio característico de tercer orden que se presenta a continuación:

$$s^3 + s^2 \cdot K_{e\theta} + K_{e\omega} \cdot s + K_{ei} \tag{Ec. 96}$$

Por otro lado, se diseña el polinomio deseado para que sus tres polos se encuentren en $s = -3200$:

$$(s + 3200)^3 = s^3 + s^2 \cdot (6400 + 3200) + s \cdot (3200^2 + (6400 \cdot 3200)) + 3200^3 \tag{Ec. 97}$$

E igualando las expresiones Ec. 96 se obtienen los valores de los parámetros del observador:

$$\begin{aligned}
K_{e\theta} &= 9600 \\
K_{e\omega} &= 3,072 \cdot 10^7 \\
K_{ei} &= 3,2768 \cdot 10^{10}
\end{aligned} \tag{Ec. 98}$$

Se observa en la *Figura 46*, tras la aplicación del observador con acción integral, que los errores han disminuido y lo más importante de todo se ha eliminado el error de estado estacionario.



Figura 46: Gráfico de error cometido entre la posición articular real del sistema y de observador con acción integral

4.5.c. Análisis térmico del sistema

Se toma por último la lectura de la temperatura de los devanados del sistema desde la simulación, aplicando cíclicamente la operación desarrollada en la sección anterior durante un periodo de 200 segundos. Se verifica que la temperatura se mantiene asintóticamente por debajo del límite establecido y que el sistema no corre riesgo:

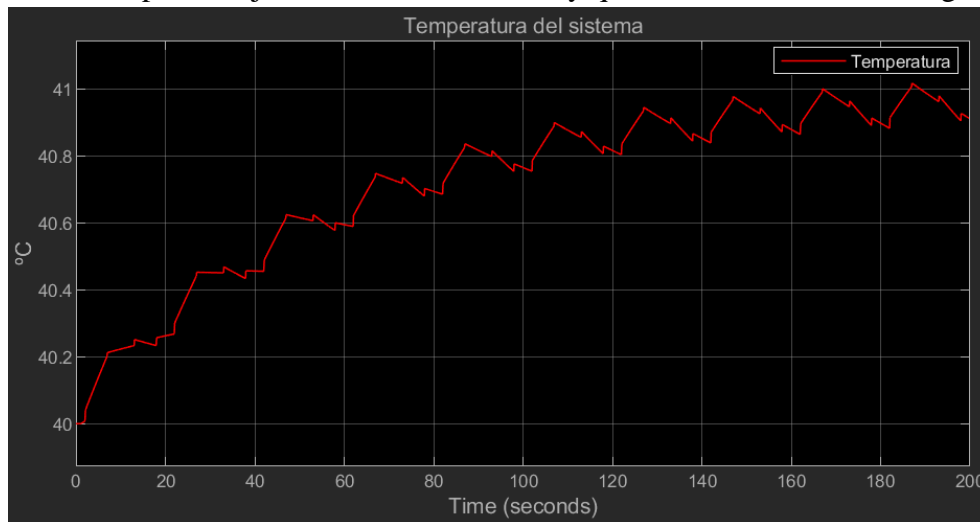


Figura 47: Respuesta térmica del sistema para 10 ciclos de operación continuas en 200s

En caso de trabajar con temperaturas muy altas, la hipótesis realizada sobre el valor de la resistencia de los devanados ya no es válida, y es necesario considerar la variación de su valor.

5. Conclusión

Se logró desarrollar satisfactoriamente todas las etapas de un controlador para un motor de corriente trifásica, obteniendo modelos suficientemente certeros que cimentaron una buena simulación precisa y estable del comportamiento del sistema, considerando que se cumplan las hipótesis planteadas desde un principio.

El desarrollo del proyecto ha englobado todos los temas desarrollados en la cátedra de Automática y Máquinas Eléctricas e integrado los mismos en una aplicación tangible, en una situación en la que es muy posible que se deba trabajar en un futuro y que ahora se conoce con todo detalle.

6. Referencias

- [1] Ing. Gabriel Julián. Proyecto Global Integrador: Control de Accionamiento de CA con Motor Sincrónico de Imanes Permanentes
- [2] Ing. Gabriel Julian. Proyecto Global Integrador: Guía para preparar Informe Técnico
- [3] Ing. Gabriel Julian. Material de clases.
- [4] Katsuhiko Ogata. Ingenieria de control moderno.