

Implementación eficiente del tipo de dato Conjunto en Java

Algoritmos y Estructuras de Datos

2^{do} cuatrimestre 2024

Introducción

Vamos a implementar `Conjunto.java` mediante estructuras de datos eficientes.

Introducción

Vamos a implementar Conjunto.java mediante estructuras de datos eficientes.

```
interface Conjunto<T> {  
    public int cardinal();  
    public void insertar(T elem);  
    public boolean pertenece(T elem);  
    public void eliminar(T elem);  
    public String toString();  
    public T minimo();  
    public T maximo();  
}
```

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece				
insertar				
borrar				
max/min				

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$			
insertar				
borrar				
max/min				

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$			
insertar	$\mathcal{O}(N)$			
borrar				
max/min				

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$			
insertar	$\mathcal{O}(N)$			
borrar	$\mathcal{O}(N)$			
max/min				

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$			
insertar	$\mathcal{O}(N)$			
borrar	$\mathcal{O}(N)$			
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$			

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
insertar	$\mathcal{O}(N)$			
borrar	$\mathcal{O}(N)$			
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$			

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
borrar	$\mathcal{O}(N)$			
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$			

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$			

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$		

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$		

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$		
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$		

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$		

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(\log N)$
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(\log N)$
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(\log N)$
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(\log N)$
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$

Introducción

Complejidad de las estructura de implementadas hasta ahora:

	Lista enlazada	Lista bi-enlazada	Arreglo redimensionable	Arreglo redimensionable (ordenado)
pertenece	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(\log N)$
insertar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$
borrar	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(N)$
max/min	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)/\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$

Podemos hacer algo mejor

Sabemos que dado un arreglo de tamaño N ordenado podemos verificar pertenencia de un elemento en $\mathcal{O}(\log N)$ con
búsqueda binaria

Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

$2 \leq 12$. Nos queda $[2, 5, 8, 12]$ 4 posibles, 2 candidatos de cada lado

Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

$2 \leq 12$. Nos queda $[2, 5, 8, 12]$ 4 posibles, 2 candidatos de cada lado

$2 \leq 5$. Nos queda $[2, 5]$ 2 posibles, 1 candidato de cada lado

Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

$2 \leq 12$. Nos queda $[2, 5, 8, 12]$ 4 posibles, 2 candidatos de cada lado

$2 \leq 5$. Nos queda $[2, 5]$ 2 posibles, 1 candidato de cada lado

$2 \leq 2$. Nos queda $[2]$

Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

$2 \leq 12$. Nos queda $[2, 5, 8, 12]$ 4 posibles, 2 candidatos de cada lado

$2 \leq 5$. Nos queda $[2, 5]$ 2 posibles, 1 candidato de cada lado

$2 \leq 2$. Nos queda $[2]$

Necesitamos a lo sumo $\lceil \log_2 N \rceil$ preguntas

Introducción

$2 \in [2, 5, 8, 12, 15, 18, 21, 24]$? 8 posibles, 4 candidatos de cada lado

$2 \leq 12$. Nos queda $[2, 5, 8, 12]$ 4 posibles, 2 candidatos de cada lado

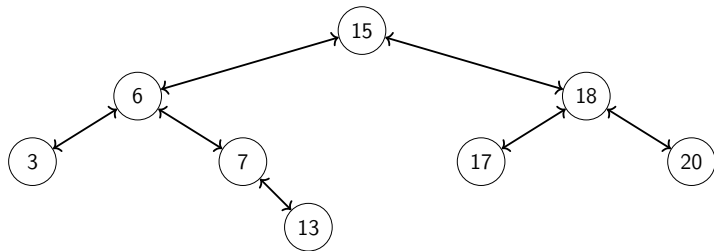
$2 \leq 5$. Nos queda $[2, 5]$ 2 posibles, 1 candidato de cada lado

$2 \leq 2$. Nos queda $[2]$

Necesitamos a lo sumo $\lceil \log_2 N \rceil$ preguntas

¿Podemos usar esta idea para **implementar** un conjunto eficiente?

Árboles binarios de búsqueda (ABB)



Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB \iff

Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB \iff es null

Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB \iff es null o satisface las siguientes condiciones:

Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB \iff es null o satisface las siguientes condiciones:

- Los valores del subárbol izquierdo son menores que el valor de la raíz.

Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB \iff es null o satisface las siguientes condiciones:

- ▶ Los valores del subárbol izquierdo son menores que el valor de la raíz.
- ▶ Los valores del subárbol derecho son mayores que el valor de la raíz.

Árboles binarios de búsqueda (ABB): invariante de representación

Un objeto es ABB \iff es null o satisface las siguientes condiciones:

- ▶ Los valores del subárbol izquierdo son menores que el valor de la raíz.
- ▶ Los valores del subárbol derecho son mayores que el valor de la raíz.
- ▶ Los objetos izquierdos y derechos son ABBs.

Objetivo

Implementar un tipo de datos `Conjunto<T>` en Java usando árboles binarios de búsqueda (ABB)

Implementación (ABB.java)

```
public class ABB<T extends Comparable<T>> implements Conjunto<T> {
```

Implementación (ABB.java)

```
public class ABB<T extends Comparable<T>> implements Conjunto<T> {  
    private Nodo _raiz;
```

Implementación (ABB.java)

```
public class ABB<T extends Comparable<T>> implements Conjunto<T> {  
    private Nodo _raiz;
```

Implementación (ABB.java)

Constructor

```
public class ABB<T extends Comparable<T>> implements Conjunto<T> {  
    private Nodo _raiz;  
  
    public ABB() {  
        _raiz = null;  
    }  
}
```


Implementación (ABB.java)

El único atributo indispensable es `_raiz`. Pero podríamos usar otros (como `_cardinal` o `_altura`) para tener operaciones $O(1)$.

```
public class ABB<T extends Comparable<T>> implements Conjunto<T> {  
    private Nodo _raiz;  
    private int _cardinal;  
    private int _altura;  
  
    public ABB() {  
        _raiz = null;  
        _cardinal = 0;  
        _altura = 0;  
    }  
}
```

Representación de los nodos

Definimos la clase Nodo. ¿Cuáles son los atributos?

```
private class Nodo {
```

Representación de los nodos

Declaramos los atributos

```
private class Nodo {  
    T valor;  
    Nodo izq;  
    Nodo der;  
    Nodo padre;
```

Representación de los nodos

Definimos el constructor de Nodo (solo recibe un valor v de tipo T)

```
private class Nodo {  
    T valor;  
    Nodo izq;  
    Nodo der;  
    Nodo padre;  
  
    Nodo(T v) {
```

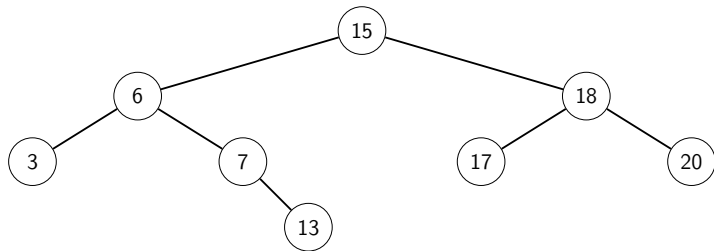
Representación de los nodos

¿En qué se diferencia con la estructura de la lista doblemente enlazada?

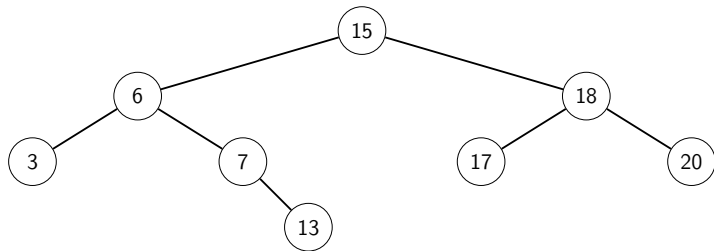
```
private class Nodo {  
    T valor;  
    Nodo izq;  
    Nodo der;  
    Nodo padre;  
  
    Nodo(T v) {  
        valor = v;  
        izq = null;  
        der = null;  
        padre = null;  
    }  
}
```

Algoritmos

`abb.pertenece(elem)`

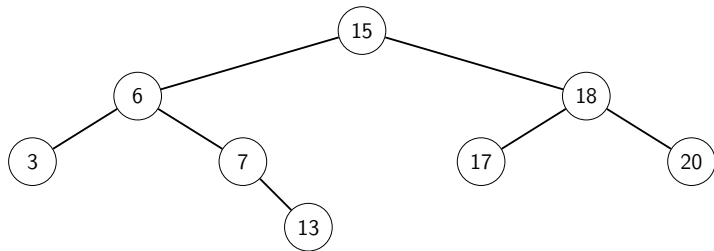


`abb.pertenece(elem)`



`abb.busqueda_recursiva(elem)`

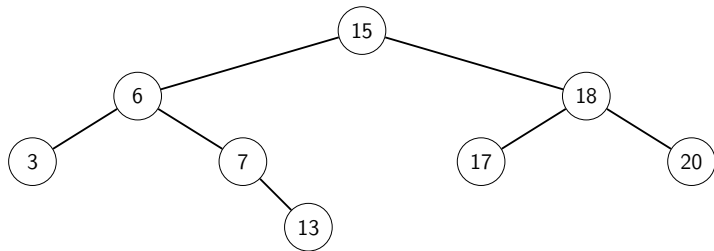
`abb.pertenece(elem)`



`abb.busqueda_recursiva(elem)`

- **Caso Base 1.** Si el ABB es null, devolver false.
- **Caso Base 2.** Si la raíz contiene el elemento, devolver true.

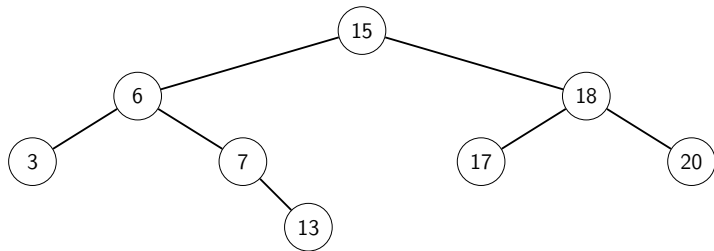
`abb.pertenece(elem)`



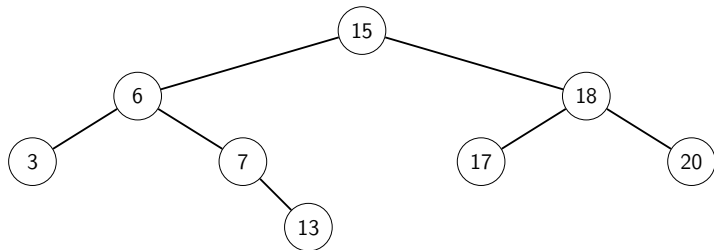
`abb.busqueda_recursiva(elem)`

- **Caso Base 1.** Si el ABB es null, devolver false.
- **Caso Base 2.** Si la raíz contiene el elemento, devolver true.
- **Paso Recursivo.** Si no, continuamos la búsqueda recursiva en el sub-árbol que indique `compareTo()`

`abb.insertar(elem)`



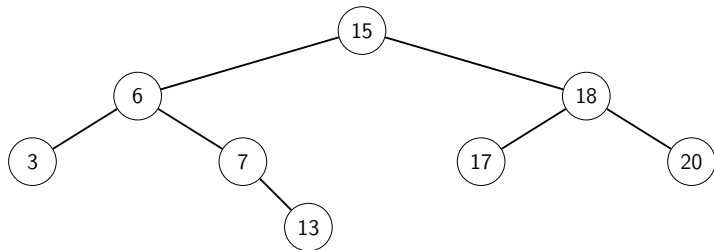
`abb.insertar(elem)`



`ultimo_nodo_buscado = abb.buscar_nodo(elem)`

(un algoritmo parecido al anterior, que devuelve el último nodo de la búsqueda)

`abb.insertar(elem)`

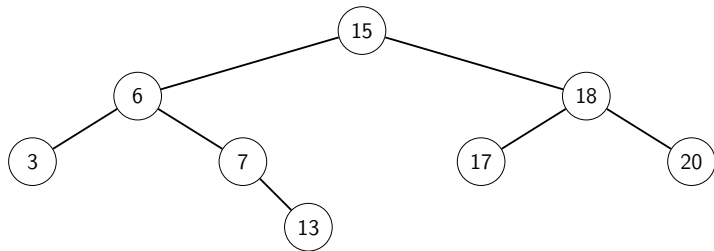


`ultimo_nodo_buscado = abb.buscar_nodo(elem)`

(un algoritmo parecido al anterior, que devuelve el último nodo de la búsqueda)

- SI lo encontramos, no hacemos nada.

`abb.insertar(elem)`

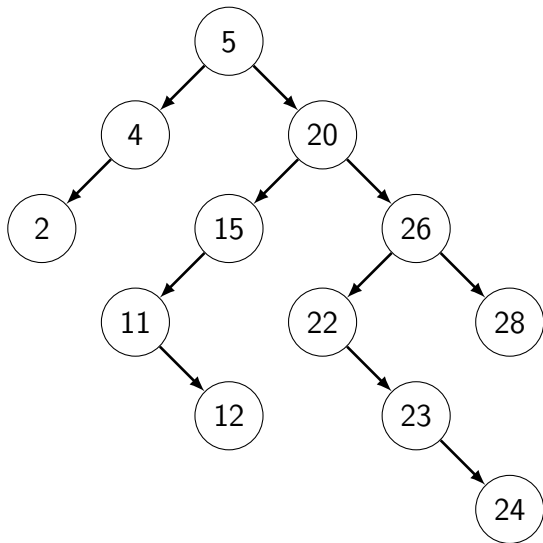


`ultimo_nodo_buscado = abb.buscar_nodo(elem)`

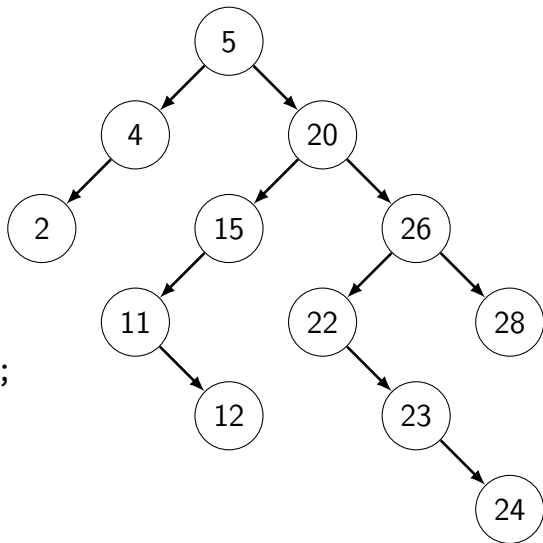
(un algoritmo parecido al anterior, que devuelve el último nodo de la búsqueda)

- SI lo encontramos, no hacemos nada.
- SINO lo insertamos como hijo del último nodo de la búsqueda.

`abb.eliminar(elem)`

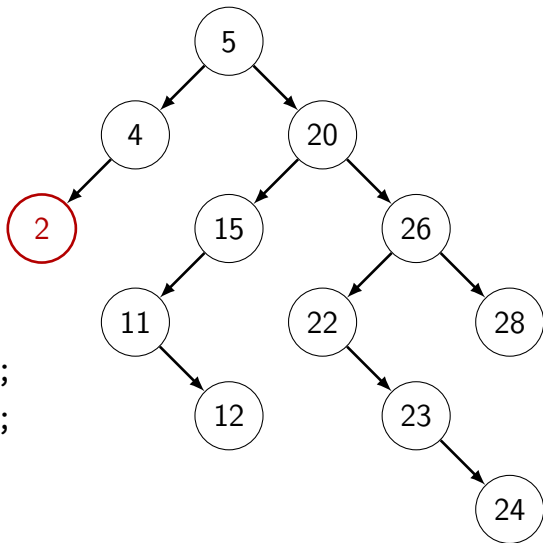


`abb.eliminar(elem)`



`abb.eliminar(3);`

`abb.eliminar(elem)`

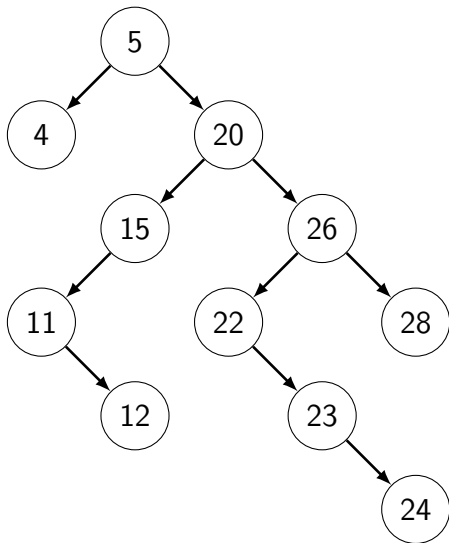


`abb.eliminar(3);`

`abb.eliminar(2);`

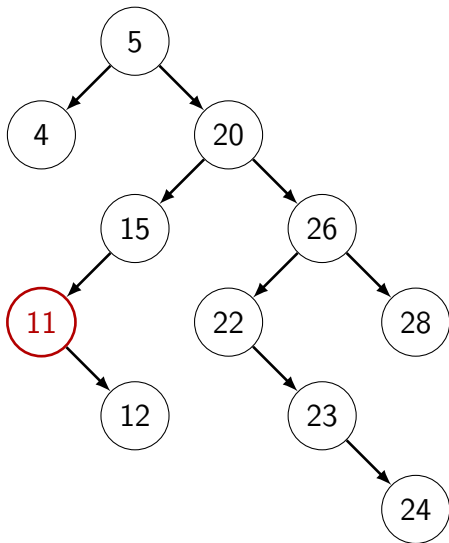
`abb.eliminar(elem)`

`abb.eliminar(3);`
`abb.eliminar(2);`

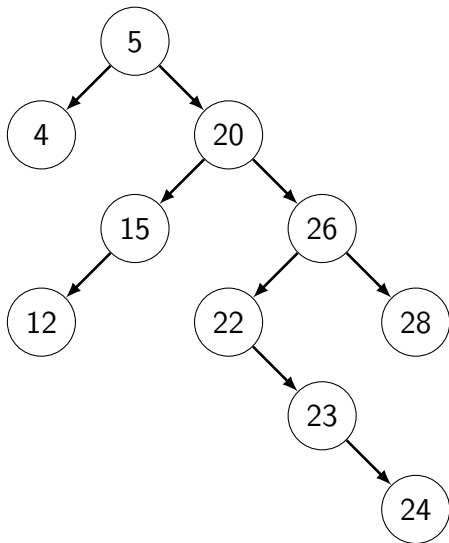


`abb.eliminar(elem)`

```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);
```



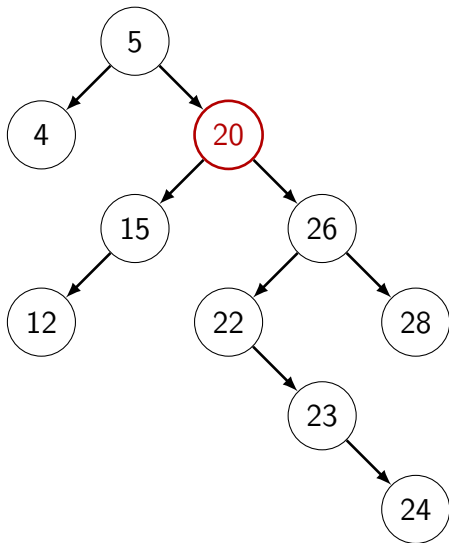
`abb.eliminar(elem)`



```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);
```

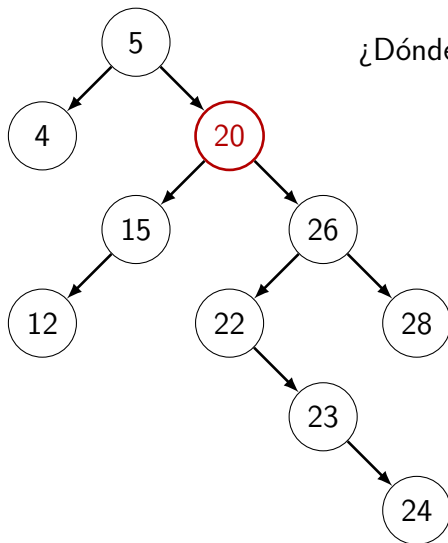
`abb.eliminar(elem)`

```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);  
abb.eliminar(20);
```



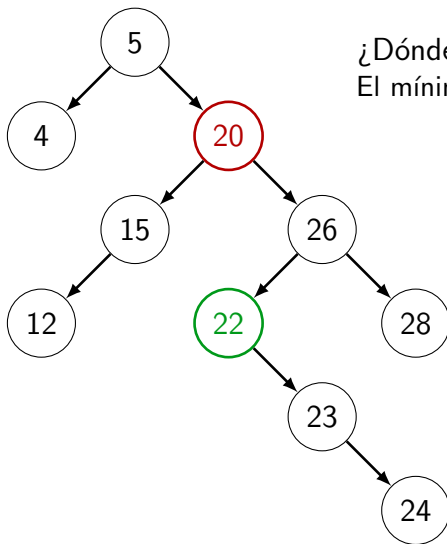
`abb.eliminar(elem)`

```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);  
abb.eliminar(20);
```



`abb.eliminar(elem)`

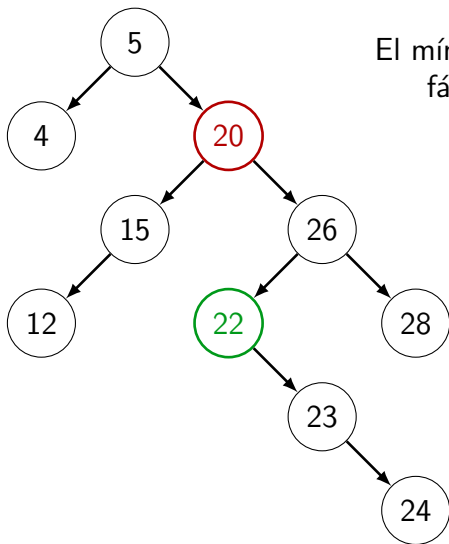
```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);  
abb.eliminar(20);
```



¿Dónde está el sucesor?
El mínimo de la derecha

`abb.eliminar(elem)`

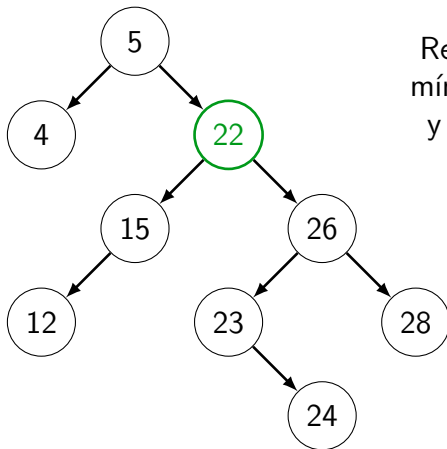
```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);  
abb.eliminar(20);
```



El mínimo siempre es
fácil sacarlo

`abb.eliminar(elem)`

```
abb.eliminar(3);  
abb.eliminar(2);  
abb.eliminar(11);  
abb.eliminar(20);
```



Removemos el
mínimo derecho
y lo subimos

```
abb.eliminar(elem)
```

- Tenemos 4 casos:

```
abb.eliminar(elem)
```

- Tenemos 4 casos:
 - SI no está, no hacemos nada

`abb.eliminar(elem)`

- Tenemos 4 casos:
 - SI no está, no hacemos nada
 - SI está y no tiene descendencia
→ Lo borramos.

`abb.eliminar(elem)`

- Tenemos 4 casos:
 - SI no está, no hacemos nada
 - SI está y no tiene descendencia
→ Lo borramos.
 - SI está y tienen un solo hijo.
→ El hijo ocupa su lugar.

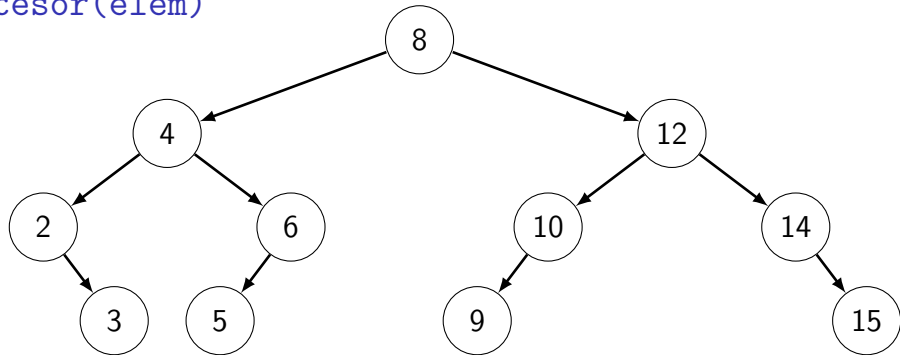
`abb.eliminar(elem)`

- Tenemos 4 casos:
 - SI no está, no hacemos nada
 - SI está y no tiene descendencia
→ Lo borramos.
 - SI está y tienen un solo hijo.
→ El hijo ocupa su lugar.
 - SI está y tiene dos hijos.

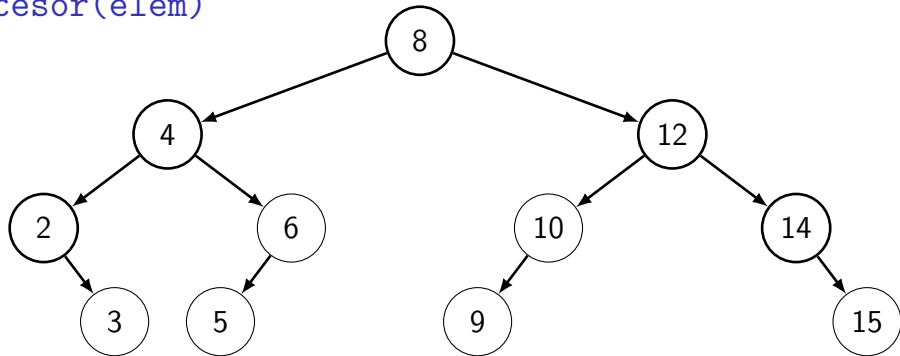
`abb.eliminar(elem)`

- Tenemos 4 casos:
 - SI no está, no hacemos nada
 - SI está y no tiene descendencia
→ Lo borramos.
 - SI está y tienen un solo hijo.
→ El hijo ocupa su lugar.
 - SI está y tiene dos hijos.
→ Lo remplazamos por el inmediato sucesor (o predecesor).

abb.sucesor(elem)

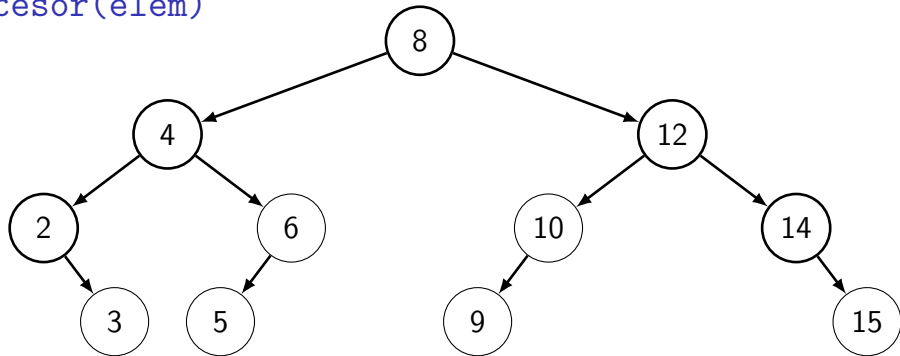


`abb.sucesor(elem)`



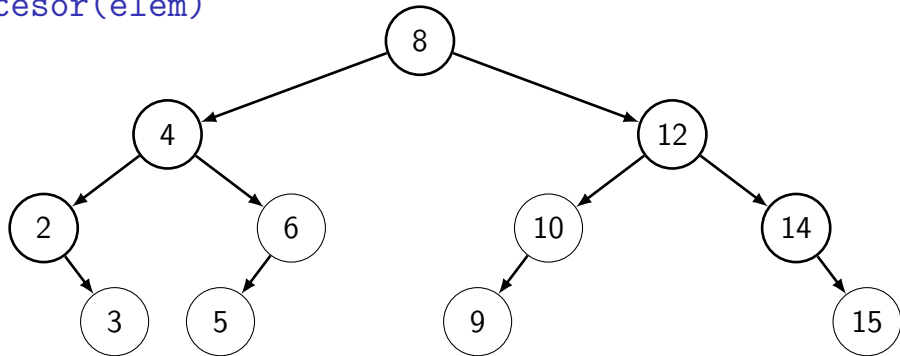
Si `tiene_subarbol_derecho(elem)`:

`abb.sucesor(elem)`



Si `tiene_subarbol_derecho(elem)`:
 `res = minimo_a_su_derecha(elem)`

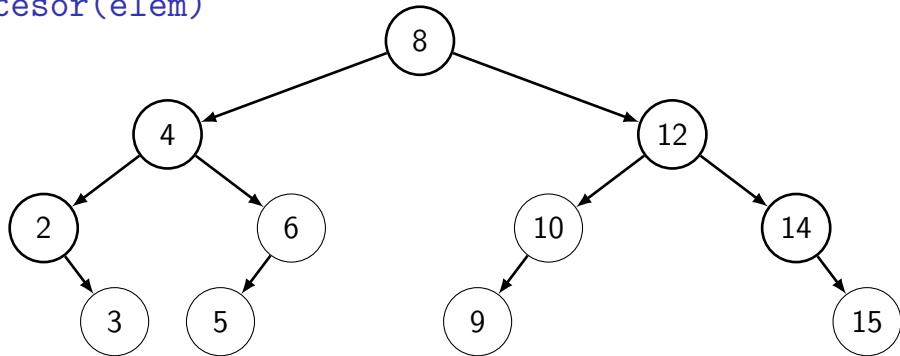
`abb.sucesor(elem)`



Si `tiene_subarbol_derecho(elem)`:
 `res = minimo_a_su_derecha(elem)`

Si no:

`abb.sucesor(elem)`



Si `tiene_subarbol_derecho(elem)`:

`res = minimo_a_su_derecha(elem)`

Si no:

`res = primer_ancestro_derecho(elem)`

abb.sucesor(elem)

```
private Nodo sucesor(Nodo nodo){  
    // caso tiene subarbol derecho  
    Nodo res;  
    if (nodo._der != null){  
        res = nodo._der;  
        while (res._izq != null){  
            res = res._izq;  
        }  
    } else {  
  
        // caso contrario: no tiene subarbol derecho  
        // el siguiente es el primer padre de un subarbol izquierdo  
        res = nodo._padre;  
        while (res._der != null && res._der._valor.equals(nodo._valor)) {  
            res = res._padre;  
        }  
    }  
    return res;  
}
```

Iterador<T>

```
private class ABB_Iterador implements Iterador<T> {  
    private Nodo _actual = this.minimo();  
  
    public boolean haySiguiente() {  
        /* ... */  
    }  
  
    public T siguiente() {  
        /* ... */  
    }  
}  
  
public Iterador<T> iterador() {  
    return new ABB_Iterador();  
}
```

Algoritmos Recursivo

`inorder(ABB) = inorder(ABB.izq) + [ABB.val] + inorder(ABB.der)`

Algoritmos Recursivo

$\text{inorder(ABB)} = \text{inorder(ABB.izq)} + [\text{ABB.val}] + \text{inorder(ABB.der)}$

Para hacer un iterador necesitamos un algoritmo *iterativo*:

Algoritmos Recursivo

$\text{inorder(ABB)} = \text{inorder(ABB.izq)} + [\text{ABB.val}] + \text{inorder(ABB.der)}$

Para hacer un iterador necesitamos un algoritmo *iterativo*:

Constructor: Crear el iterador apuntando al primer elemento (el mínimo).

Siguiente: Devolver el nodo actual y apuntar a su sucesor.

Complejidades

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem):`
- ▶ `abb.insertar(elem):`
- ▶ `abb.min(elem):`
- ▶ `abb.sucesor(elem):`
- ▶ `abb.borrar(elem):`

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`:
- ▶ `abb.min(elem)`:
- ▶ `abb.sucesor(elem)`:
- ▶ `abb.borrar(elem)`:

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`:
- ▶ `abb.sucesor(elem)`:
- ▶ `abb.borrar(elem)`:

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.sucesor(elem)`:
- ▶ `abb.borrar(elem)`:

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.sucesor(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.borrar(elem)`:

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.sucesor(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.borrar(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.sucesor(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.borrar(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$

Rebalancando (AVL) tendríamos complejidades $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(\log N)$

¿Qué complejidades en peor caso tienen las siguientes operaciones?:

- ▶ `abb.pertenece(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.insertar(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.min(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.sucesor(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$
- ▶ `abb.borrar(elem)`: $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(N)$

Rebalancando (AVL) tendríamos complejidades $\mathcal{O}(\text{Altura}) = \mathcal{O}(\log N)$

Agregando un atributo privado, `abb.min(elem)` podría ser $\mathcal{O}(1)$

¡A programar!

En `ABB.java` está la declaración de la clase, los métodos públicos y la definición de `Nodo` y de `ABB_Iterador`.