Demostracion de correccion de ciclos en SmallLang

Ejercicio 1

a) $P_c \equiv \{\texttt{res} = 0 \land \texttt{i} = 0\}$ y $Q_c \equiv \{\texttt{res} = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$

b) Al usar como condicion del invariante $0 \leq i < |s|$ no se considera la iteracion cuando se sale del ciclo, por lo tanto no se cumpliria este en la ultima iteracion.

c) Falla $P_c \to I$ pues i=0 y res=0 entonces se cumple $0 \leq 0 < |s|$ pero no vale $0 = \sum_{j=0}^{0} s[j]$ pues tendria que $0 = s[0]$ y esto solo seria valido en el caso de que $s[0] = 0$, $\therefore$ la P_c no implica al invariante

d) Veo el segundo punto del TI, es decir $\{I \land B\}S\{I\}$:

$\{I \land B\}S\{I\} \iff \{I \land B\} \to wp(S, I)$ $\therefore$ calculo $wp(S, I)$:

$$
\begin{align}
wp(i := i+1, res := res + s[i], Q_c) &\equiv wp(i := i+1, wp(res := res + s[i], Q_c)) \\
&\equiv wp(i := i+1, def(res) \land def(s) \land def(i) \land 0 \leq i < |s| \land_L \\
&res + s[i] = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]) \nonumber \\
&\equiv def(i) \land 0 \leq i+1 < |s| \land_L res + s[i+1] = \sum_{j=0}^{i} s[j]
\end{align}
$$

Luego veo la implicacion:

$$
\begin{align}
(0 \leq i \leq |s| \land res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \land i < |s|) \Rightarrow 0 \leq i < |s| \land res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \\
0 \leq i < |s| \land res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \nRightarrow 0 \leq i+1 < |s| \land_L res + s[i+1] = \sum_{j=0}^{i} s[j]
\end{align}
$$

Los rangos no son iguales, ya que por ejemplo $i = |s| - 1$ hace verdadero al antecedente pero falso al consecuente. Asimismo podemos analizar cuando las sumatorias son iguales si se despeja res:

$$
\begin{align}
\sum_{j=0}^{i-1} s[j] &\iff res = (\sum_{j=0}^{i} s[j]) - s[i+1] \\
\sum_{j=0}^{i-1} s[j] &\iff res = (\sum_{j=0}^{i-1} s[j]) + s[i] - s[i+1] \\
0 &\iff s[i] - s[i+1] \\
s[i+1] &\iff s[i]
\end{align}
$$

Esta condicion no es siempre verdadera, ya que depende de los valores de esas posiciones en la lista.

De esta manera falla la tripla de Hoare $\{I \wedge B\}S\{I\}$ y $\therefore$ el ciclo no es correcto al intercambiar de lugar las instrucciones de su cuerpo

e) 1. $P_c \to I$

$$res = 0 \wedge i = 0 \implies 0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \tag{1}$$

$$res = 0 \wedge i = 0 \implies 0 \leq 0 \leq |s| \wedge_L 0 = \sum_{j=0}^{-1} s[j] \tag{2}$$

$$res = 0 \wedge i = 0 \implies True \wedge_L 0 = 0 \tag{3}$$

$$res = 0 \wedge i = 0 \implies True \wedge_L True \tag{4}$$

$$res = 0 \wedge i = 0 \implies True \checkmark \tag{5}$$

2. $\{I \wedge B\}S\{I\} \iff \{I \wedge B\} \to wp(S, I)$. Veo la ultima wp:

$$wp(S, I) \equiv wp(res := res + s[i], wp(i := i + 1, I)) \tag{1}$$

$$\equiv wp(res := res + s[i], def(i) \wedge res = \sum_{j=0}^{(i+1)-1} s[j]) \tag{2}$$

$$\equiv wp(res := res + s[i], res = \sum_{j=0}^{i} s[j]) \tag{3}$$

$$\equiv def(res) \wedge def(s) \wedge def(i) \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L res + s[i] = \sum_{j=0}^{i} s[j] \tag{4}$$

$$\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \tag{5}$$

Luego como $\{I \wedge B\} \equiv wp(S, I)$ por tautologia la implicaion es valida

3. $I \wedge \neg B \implies Q_c$

$$0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge i \geq |s| \implies i = |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \equiv Q_c \checkmark \tag{1}$$

Como son validas siempre las tres condiciones, el ciclo es **parcialmente correcto**

f) Propongo la funcion variante $fv = |s| - i$. Pruebo por teorema de terminacion que el ciclo termina:

1. $\{I \wedge B \wedge V_0 = fv\} S \{fv < V_0\} \iff \{I \wedge B \wedge V_0 = fv\} \rightarrow wp(S, \{fv < V_0\})$. Veo la wp:

$$
\begin{aligned}
wp(S, fv < V_0) &\equiv wp(res := res + s[i], wp(i := i + 1, fv < V_0)) && (1)\\
&\equiv wp(res := res + s[i], def(i) \wedge |s| - i - 1 < V_0) && (2)\\
&\equiv wp(res := res + s[i], |s| - i - 1 < V_0) && (3)\\
&\equiv def(res) \wedge def(s) \wedge def(i) \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < V_0 && (4)\\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < V_0 && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

Ahora veo la implicacion:

$$
\begin{aligned}
0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge i < |s| \wedge V_0 = fv &\implies res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge 0 \leq i < |s| && (1)\\
res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge 0 \leq i < |s| &\implies 0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < V_0 && (2)
\end{aligned}
$$

Luego puedo ver que los rangos coinciden y que al reemplazar fv en V_0 tengo que:

$$|s| - i - 1 < V_0 \implies |s| - i - 1 < |s| - i \implies -1 < 0 \implies True$$

2. $(I \wedge fv \leq 0) \rightarrow \neg B$

$$0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \wedge |s| - i \leq 0 \implies i = |s| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j] \implies \neg(i < |s|) \quad (1)$$

Por TI probamos que el ciclo es correcto respecto a su especificacion y por TT que el ciclo finaliza, $\therefore$ el ciclo es correcto

Ejercicio 2

a) $P_c = \{n \geq 0 \wedge i = 0 \wedge res = 0\}$ y $Q_c = \{res = \sum_{j=0}^{n-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0)\}$

b) Veo los tres puntos del teorema del invariante:

1. $P_c \rightarrow I$

$$n \geq 0 \wedge i = 0 \wedge res = 0 \implies 0 \leq i \leq |n| \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \tag{1}$$

$$0 \leq 0 \leq |n| \wedge 0 \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \implies True \checkmark \tag{2}$$

2. $\{I \wedge B\}S\{I\} \iff \{I \wedge B\} \rightarrow wp(S, I)$. Veo la ultima wp:

$$wp(S, I) \equiv wp(res := res + i, wp(i := i + 2, I)) \equiv wp(res := res + i, def(i) \wedge I^{i}_{i+2}) \tag{1}$$

$$\equiv wp(res := res + i, 0 \leq i + 2 \leq |n| \wedge_L i + 2 \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i+1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0)) \tag{2}$$

$$\equiv wp(res := res + i, 0 \leq i + 2 \leq |n| \wedge_l i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i+1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0)) \tag{3}$$

$$\equiv def(res) \wedge def(i) \wedge 0 \leq i + 2 \leq |n| \wedge_L i \mod 2 = 0 \wedge \tag{4}$$

$$res + i = \sum_{j=0}^{i+1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0)$$

Luego analizo la sumatoria en sus ultimos terminos:

$res + i = \sum_{j=0}^{i+1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \equiv$

$res+i = ifThenElse(i \mod 2 = 0, i, 0)+ifThenElse(i+1 \mod 2 = 0, i+1, 0)+\sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j$
$\mod 2 = 0, j, 0)$

Luego uso i mod 2 = 0:

$res + i = i + \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0)$

$res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0)$

Asi $wp(S,I) \equiv 0 \leq i+2 \leq |n| \wedge_L i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0)$

Ahora vemos la implicacion para poder probar la tripla de Hoare

$$0 \leq i \leq |n| \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \wedge i < n \implies \tag{1}$$
$$0 \leq i < |n| \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \implies \tag{2}$$
$$0 \leq i+2 \leq |n| \wedge_L i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \tag{3}$$

Luego en ambos lados del implica i es par y el res coincide. Resta ver que sucede con los rangos:

$$0 \leq i < |n| \implies 0 \leq i+2 \leq |n| \tag{1}$$
$$i \geq 0 \wedge i < n \implies i \geq -2 \wedge i < n-2 \checkmark \tag{2}$$

$\therefore$ la tripla de Hoare es valida

3. $I \wedge \neg B \rightarrow Q_c$

$$0 \leq i \leq |n| \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \wedge i \geq n \implies \tag{1}$$
$$i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \wedge i = n \implies \tag{2}$$
$$n \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{n-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \wedge i = n \implies \tag{3}$$

Luego quedo la misma sumatoria de la Q_c por lo tanto vale la implicacion ya que es de tipo $A \wedge B \rightarrow A$

c) Propongo $fv = n - 1$

1. $\{I \wedge B \wedge V_0 = fv\}S\{fv < V_0\} \iff \{I \wedge B \wedge V_0 = fv\} \rightarrow wp(S, \{fv < V_0\})$. Veo la wp:

$$
\begin{aligned}
wp(S, fv < V_0) &\equiv wp(res := res + i, wp(i := i + 2, fv < V_0)) && (1)\\
&\equiv wp(res := res + i, def(i) \wedge n - i - 2 < V_0) && (2)\\
&\equiv wp(res := res + i, n - i - 2 < V_0) && (3)\\
&\equiv def(res) \wedge def(i) \wedge n - i - 2 < V_0 && (4)\\
&\equiv n - i - 2 < V_0 && (5)
\end{aligned}
$$

Ahora veo la implicacion:

$$0 \leq i < |n| \wedge i \mod 2 = 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \wedge V_0 = fv \implies \quad (1)$$

$$n - i - 2 < n - i \implies -2 < 0 \checkmark \quad (2)$$

2. $(I \wedge fv \leq 0) \rightarrow \neg B$

$$0 \leq i \leq |n| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \wedge n - i \leq 0 \implies \quad (1)$$

$$i = n \wedge res = \sum_{j=0}^{n-1} ifThenElse(j \mod 2 = 0, j, 0) \implies \neg(i < n) \quad (2)$$

Por **TI** el ciclo es parcialmente correcto y por **TT** el ciclo finaliza, por lo tanto el ciclo es correcto respecto a su especificacion

Ejercicio 3

a) Propongo la siguiente solucion:

```
i:=1
res:=0
while(i <= n)
    if n mod i = 0 do
        res:=res+i
    else
        skip
    endif
    i:=i+1
endwhile
```

b) $P_c \equiv \{n \geq 1 \wedge i = 1 \wedge res = 0\}$ y $Q_c \equiv \{i > n \wedge_L res = \sum_{j=0}^{n} ifThenElse(n \mod j = 0, j, 0)\}$

$I \equiv \{1 \leq i \leq n+1 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ifThenElse(n \mod j = 0, j, 0)\}$

Ejercicio 4

a) Deberian apareceer la i y las listas s y r

b) $I \equiv \{0 \leq i \leq |s| \wedge |s| = |r| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |i| \rightarrow_L s[j] = r[j])\}$

- $|s| = |r|$ es necesario para que valga $P_c \rightarrow I$
- Necesito todo el invariante para que valga $I \wedge \neg B \rightarrow Q_c$

c) Propongo $fv = |s| - i$

1. $\{I \wedge B \wedge V_0 = fv\} S \{fv < V_0\} \iff \{I \wedge B \wedge V_0 = fv\} \rightarrow wp(S, \{fv < V_0\})$. Veo la wp:

$$
\begin{aligned}
wp(S, fv < V_0) &\equiv wp(r[i] := s[i], wp(i := i+1, fv < V_0)) && (1)\\
&\equiv wp(r[i] := s[i], def(i) \wedge |s| - i - 1 < V_0) && (2)\\
&\equiv wp(r[i] := s[i], |s| - i - 1 < V_0) && (3)\\
&\equiv def(r) \wedge def(s) \wedge def(i) \wedge 0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < V_0 && (4)\\
&\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L |s| - i - 1 < V_0 && (5)
\end{aligned}
$$

Ahora veo la implicacion:

$$
\begin{aligned}
&0 \leq i \leq |s| \wedge |s| = |r| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |i| \rightarrow_L s[j] = r[j]) \wedge i < |s| \wedge fv = V_0 \implies && (1)\\
&|s| - i - 1 < |s| - i \implies -1 < 0 \checkmark && (2)
\end{aligned}
$$

2. $(I \wedge fv \leq 0) \rightarrow \neg B$

$$0 \leq i \leq |s| \wedge |s| = |r| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |i| \rightarrow_L s[j] = r[j]) \wedge fv \leq 0 \implies \tag{1}$$

$$i = |s| \wedge |s| = |r| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |i| \rightarrow_L s[j] = r[j]) \implies \neg(i < |s|) \tag{2}$$

Ejercicio 5

a) Propongo $I \equiv \{|s| \mod 2 \wedge |s|/2 - 1 \leq i \leq |s| - 1 \wedge suma = \sum_{j=0}^{|s|-2-i} s[j]\}$

1. $P_c \rightarrow I$

   - —s— mod 2 aparece en ambas partes de la implicacion
   - $i = |s| - 1 \implies |s|/2 - 1 \leq i \leq |s| - 1$ pues esta en el rango
   - Como $i = |s| - 1$ entonces $suma = 0$ Luego suponiendo verdadero la P_c solo necesitaria el rango del invariante para que valga la implicacion

2. $\{I \wedge B\}S\{I\} \iff \{I \wedge B\} \rightarrow wp(S, I)$Necesito el rango

3. $I \wedge \neg B \rightarrow Q_c$ Necesito el invariante completo

b) Propongo la funcion $fv = i - |s|/2 + 1$

1. $\{I \wedge B \wedge V_0 = fv\}S\{fv < V_0\} \iff \{I \wedge B \wedge V_0 = fv\} \rightarrow wp(S, \{fv < V_0\})$. Veo la wp:

$$wp(suma := suma + s[|s| - 1 - i], i := i - 1, fv < V_0) \tag{1}$$

$$\equiv wp(suma := suma + s[|s| - 1 - i], def(i) \wedge i - 1 - |s|/2 + 1 < V_0) \tag{2}$$

$$\equiv wp(def(suma) \wedge def(s) \wedge 0 \leq |s| - 1 - i < |s| \wedge i - |s|/2 < V_0) \tag{3}$$

$$\equiv -|s| + 1 \leq -i < 1 \wedge i - |s|/2 < V_0 \tag{4}$$

$$\equiv -1 < i \leq |s| - 1 \wedge i - |s|/2 < V_0 \tag{5}$$

$$\equiv i - |s|/2 < V_0 \tag{6}$$

Ahora veo la implicacion:

$$|s| \mod 2 \wedge |s|/2 - 1 \leq i \leq |s| - 1 \wedge suma = \sum_{j=0}^{|s|-2-i} s[j] \wedge i < |s| \wedge fv = V_0 \tag{1}$$

$$\equiv |s| \mod 2 \wedge |s|/2 - 1 \leq i \leq |s| - 1 \wedge suma = \sum_{j=0}^{|s|-2-i} s[j] \wedge fv = V_0 \implies \tag{2}$$

$$i - |s|/2 < i - |s|/2 + 1 \implies 0 < 1 \checkmark \tag{3}$$

2. $I \wedge fv \leq 0 \to \neg B$

$$|s| \mod 2 \wedge |s|/2 - 1 \leq i \leq |s| - 1 \wedge suma = \sum_{j=0}^{|s|-2-i} s[j] \wedge i - |s|/2 + 1 \leq 0 \implies \tag{1}$$

$$i = |s|/2 \implies \neg(i \geq |s|/2) \tag{2}$$

Ejercicio 6

c) $P_c \equiv \{|s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0 \wedge res = 0 \wedge i = |s| - 1\}$
$Q_c \equiv res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]$
$I \equiv \{-1 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{|s|-i-2} s[|s| - 1 - j] \wedge |s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0\}$

1. $P_c \to I$

   - En ambos casos aparecen $|s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0$
   - Como $i = |s| - 1$ entonces $res = \sum_{j=0}^{|s|-i-2} s[|s| - 1 - j] = \sum_{j=0}^{-1} s[|s| - 1 - j] = 0$, cumpliendo res=0
   - $i = |s| - 1$ esta en el rango del I, es decir $-1 \leq i < |s|$

2. $(I \wedge \neg B) \to Q_c$

$$-1 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{|s|-i-2} s[|s| - 1 - j] \wedge i < 0 \implies \tag{1}$$

$$i = -1 \wedge res = \sum_{j=0}^{|s|-i-2} s[|s| - 1 - j] \implies -1 = i < 0 \implies \neg(i \geq 0) \checkmark \tag{2}$$

3. $\{I \wedge B\}S\{I\} \iff \{I \wedge B\} \to wp(S, I)$

$$wp(res := res + s[i], wp(i : i-1, I)) \equiv wp(res := res + s[i], def(i) \wedge -1 \leq i - 1 < |s| \tag{1}$$
$$\wedge_L\ res = \sum_{j=0}^{|s|-i+1-2} s[|s|-1-j] \wedge |s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0)$$
$$\equiv wp(res := res + s[i], 0 \leq i \leq |s| \tag{2}$$
$$\wedge_L\ res = \sum_{j=0}^{|s|-i-1} s[|s|-1-j] \wedge |s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0)$$
$$\equiv def(res) \wedge def(s) \wedge def(i) 0 \leq i < |s| \tag{3}$$
$$\wedge_L\ res + s[i] = \sum_{j=0}^{|s|-i-1} s[|s|-1-j] \wedge |s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0$$
$$\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res + s[i] = s[|s|-1-|s|+1+i] + \sum_{j=0}^{|s|-i-2} s[|s|-1-j] \wedge |s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0 \tag{4}$$
$$\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res + s[i] = s[i] + \sum_{j=0}^{|s|-i-2} s[|s|-1-j] \wedge |s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0 \tag{5}$$
$$\equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{|s|-i-2} s[|s|-1-j] \wedge |s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0 \tag{6}$$

Luego $I \wedge B \equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{|s|-i-2} s[|s|-1-j] \wedge |s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0$ y por lo tanto no solo $I \wedge B \to wp(S, I)$, sino que $I \wedge B \equiv wp(S, I)$

Propongo a $fv = i + 1$ como funcion variante y a continuacion aplico el teorema de terminacion:

4. $\{I \wedge B \wedge V_0 = fv\}S\{fv < V_0\} \iff \{I \wedge B \wedge V_0 = fv\} \to wp(S, \{fv < V_0\})$. Veo la wp:

$$wp(res := res + s[i], wp(i := i-1, fv - V_0)) \equiv wp(res := res + s[i], i < V_0) \equiv i < V_0 \tag{1}$$

Veo la implicacion:

$$0 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{|s|-i-2} s[|s|-1-j] \wedge |s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0 \wedge i + 1 = V_0 \implies \tag{1}$$
$$i < i + 1 \implies 0 < 1 \checkmark \tag{2}$$

5. $I \wedge fv \leq 0 \rightarrow \neg B$

$$-1 \leq i < |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{|s|-i-2} s[|s|-1-j] \wedge |s| \geq 1 \wedge |s| \mod 2 = 0 \wedge i+1 \leq 0 \implies \tag{1}$$

$$i = -1 \implies \neg(i \geq 0) \checkmark \tag{2}$$

Ejercicio 7

-

```
i=0
while (i<|s|) do
    if(i mod 2 = 0) then
        s[i]:=2*i
    else
        s[i]:=2*i+1
    endif
    i:=i+1
endwhile
```

- $P_c \equiv \{i = 0\}$

  $Q_c \equiv \{(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L ((j \mod 2 = 0 \wedge s[j] = 2j) \vee (j \mod 2 \neq 0 \wedge s[j] = 2j+1)))\}$

  $B \equiv \{i < |s|\}$

- $fv(i) = |s| - i$

Ejercicio 8

-

```
i=0
while (i<|s|/2) do
    s[j]:=0
    s[|s|-1-j]:=0
    i:=i+1
endwhile
```

- $P_c \equiv \{i = 0 \wedge |s| \mod 2 = 0\}$

  $Q_c \equiv \{(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = 0)\}$

  $B \equiv \{i < |s|/2\}$

- $fv(i) = |s|/2 - i$

Ejercicio 11

a) Obs se le asignan a todos los elementos anteriores a la posicion d el valor e y los posteriores manienen su valor. Propongo el invariante $I \equiv \{0 \leq i \leq d < |s| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \rightarrow_L s[j] = e) \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(i \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = S_0[j])\}$

Propongo la funcion variante $fv = d - i$

1. $P_c \rightarrow I$

   $P_c \equiv \{s = S_0 \wedge i = 0 \wedge 0 \leq d < |s|\}$

   - Como i=0, entonces, $0 \leq i \leq d < |s| \equiv 0 \leq d < |s|$, de manera que tendria este rango en ambos lados de la implicacion
   - Como i=0 $(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \rightarrow_L s[j] = e) \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < 0 \rightarrow_L s[j] = e) \equiv True$
   - Como i=0 $(\forall j : \mathbb{Z})(i \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = S_0[j]) \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = S_0)$, es decir que todos los elementos de la lista s sean los de la lista S_0, es decir, $s = S_0$

2. $I \wedge \neg B \rightarrow Q_c$

   $$I \wedge i \geq d \equiv i = d \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < d \rightarrow_L s[j] = e) \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(d \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = S_0[j]) \quad (1)$$

   $I \wedge \neg B \rightarrow Q_c$ pues ambas son iguales

3. $(I \wedge fv \leq 0) \rightarrow \neg B$

   $$I \wedge d - i \leq 0 \equiv I \wedge i \geq d \implies \neg(i < d) \quad (1)$$

b) Obs: se asigna el valor 'e' a todos los elementos mayores o iguales a la posicion d y los anteriores se mantienen igual.

Propongo el invariante $I \equiv \{0 \leq d \leq i \leq |s| \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \rightarrow_L s[j] = S_0[j]) \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(d \leq j < i \rightarrow_L s[j] = e)\}$

Propongo la funcion variante $fv = |s| - i$

1. $P_c \rightarrow I$

   $P_c \equiv \{s = S_0 \wedge i = d \wedge 0 \leq d < |s|\}$ Como i=d entonces:

   - $0 \leq d \leq i \leq |s| \equiv 0 \leq d \leq |s|$ y esto es true pues $0 \leq d < |s| \implies 0 \leq d \leq |s|$
   - $(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < d \rightarrow_L s[j] = S_0[j])$ es cierto pues el ciclo nunca podra acceder a valores menores a d
   - $(\forall j : \mathbb{Z})(d \leq j < d \rightarrow_L s[j] = e) \equiv True$

2. $I \land \neg B \to Q_c$

$$I \land \neg(i < |s|) \equiv i = |s| \land (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \to_L s[j] = S_0[j]) \land (\forall j : \mathbb{Z})(d \leq j < |s| \to_L s[j] = e) \tag{1}$$

Es decir, quedo textualmente la Q_c y por tautologia $A \to A$ esto es cierto

3. $(I \land fv \leq 0) \to \neg B$

$$i \land |s| - i \leq 0 \implies i = |s| \implies \neg(i < |s|) \equiv True \checkmark \tag{1}$$

c) Obs el ciclo suma todas las posiciones de una secuencia mas su largo.

Propongo el invariante $I \equiv \{-1 \leq i < |s| \land res = |s| - 1 - i + \sum_{j=i+1}^{|s|-1} s[j]\}$

Propongo la funcion variante $fv = i + 1$

1. $P_c \to I$

   $P_c \equiv \{i = |s| - 1 \land res = 0\}$

   - Como $i = |s| - 1$ entonces i esta dentro del rango $-1 \leq i < |s|$
   - como $i = |s| - 1$ entonces $res = |s| - 1 - (|s| - 1) + \sum_{j=|s|-1+1}^{|s|-1} s[j] = 0$

2. $I \land \neg B \to Q_c$

$$I \land \neg(i \geq 0) \equiv i = -1 \land res = |s| - 1 - i + \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j] \tag{1}$$

Es decir, quedo textualmente la Q_c y por tautologia $A \to A$ esto es cierto

3. $(I \land fv \leq 0) \to \neg B$

$$I \land i + 1 \leq 0 \implies i = -1 \implies \neg(i \geq 0) \implies True \checkmark \tag{1}$$