Algoritmos y Estructuras de Datos

Guía Práctica 3
Verificación de programas (Parte 2)
Segundo Cuatrimestre 2024

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

3.2. Demostración de corrección de ciclos en SmallLang

3.2.1. Teorema del invariante: corrección de ciclos

Ejercicio 1. Consideremos el problema de sumar los elementos de un arreglo y la siguiente implementación en SmallLang, con el invariante del ciclo.

Especificación

proc sumar (in s: $array < \mathbb{Z} >) : \mathbb{Z}$ {
    requiere $\{True\}$
    asegura $\{res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$
}

Implementación en SmallLang

```
res := 0;
i := 0;
while (i < s.size()) do
  res := res + s[i];
  i := i + 1
endwhile
```

Invariante de Ciclo

$$I \equiv 0 \leq i \leq |s| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} s[j]$$

a) Escribir la precondición y la poscondición del ciclo.

b) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si el primer término del invariante se reemplaza por $0 \leq i < |s|$?

c) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si el límite superior de la sumatoria $(i-1)$ se reemplaza por i?

d) ¿Qué punto falla en la demostración de corrección si se invierte el orden de las dos instrucciones del cuerpo del ciclo?

e) Mostrar la corrección parcial del ciclo, usando los primeros puntos del teorema del invariante.

f) Proponer una función variante y mostrar la terminación del ciclo, utilizando la función variante.

Ejercicio 2. Dadas la especificación y la implementación del problema `sumarParesHastaN`

Especificación

proc sumarParesHastaN (in n: $\mathbb{Z}) : \mathbb{Z}$ {
    requiere $\{n \geq 0\}$
    asegura $\{res = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathsf{IfThenElseFi}(j\ mod\ 2 = 0, j, 0))\}$
}

Implementación en SmallLang

```
res := 0;
i := 0;
while (i < n) do
  res := res + i;
  i := i + 2
endwhile
```

Invariante de ciclo

$$I \equiv 0 \leq i \leq n+1 \wedge i\ mod\ 2\ =\ 0 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} (\mathsf{IfThenElseFi}(j\ mod\ 2 = 0, j, 0))$$

a) Escribir la precondición y la poscondición del ciclo.

b) Mostrar la corrección parcial del ciclo, usando los primeros puntos del teorema del invariante.

c) Proponer una función variante y mostrar la terminación del ciclo, utilizando la función variante.

Ejercicio 3. Considere el problema `sumaDivisores`, dado por la siguiente especificación:

proc `sumaDivisores` (in n: $\mathbb{Z}$) : $\mathbb{Z}$ {
    requiere $\{n \geq 1\}$
    asegura $\{res = \sum_{j=1}^{n}(\text{IfThenElseFi}(n \ mod \ j = 0, j, 0))\}$
}

a) Escribir un programa en SmallLang que satisfaga la especificación del problema y que contenga exactamente un ciclo.

b) Escribir la pre y post condición del ciclo y su invariante.

c) Considere el siguiente invariante para este problema

$$I \equiv 1 \leq i \leq n/2 \wedge res = \sum_{j=1}^{i}(\text{IfThenElseFi}(n \ mod \ j = 0, j, 0))$$

Si no coincide con el propuesto en el inciso anterior, ¿qué cambios se le deben hacer al programa para que lo represente este invariante? ¿Deben cambiar la pre y post condición?

Ejercicio 4. Considere la siguiente especificación e implementación del problema `copiarSecuencia`, y la pre y post condiciones del ciclo.

Especificación

proc `copiarSecuencia` (in s: $array < \mathbb{Z} >$, inout r: $array < \mathbb{Z} >$) {
    requiere $\{|s| = |r| \wedge r = R_0\}$
    asegura $\{|s| = |r| \wedge_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = r[j])\}$
}

Implementación en SmallLang

```
i := 0;
while (i < s.size()) do
  r[i]:=s[i];
  i:=i+1
endwhile
```

$$P_c \equiv |s| = |r| \wedge i = 0$$

$$Q_c \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |r| \implies_L s[j] = r[j])$$

a) ¿Qué variables del programa deben aparecer en el invariante?

b) Proponer un invariante e indicar qué clausula del mismo es necesario para cada paso de la demostración.

c) Proponer una función variante y demostrar que el ciclo termina.

Ejercicio 5. Sea el siguiente ciclo con su correspondiente precondición y postcondición:

```
while (i >= s.size() / 2) do
  suma := suma + s[s.size()-1-i];
  i := i - 1
endwhile
```

$$P_c : \{|s| \ mod \ 2 = 0 \wedge i = |s| - 1 \wedge suma = 0\}$$

$$Q_c : \{|s| \ mod \ 2 = 0 \wedge i = |s|/2 - 1 \ \wedge_L \ suma = \sum_{j=0}^{|s|/2-1} s[j]\}$$

a) Proponer un invariante e indicar qué clausula del mismo es necesaria para cada paso de la demostración.

b) Proponer una función variante que permita demostrar que el ciclo termina.

c) Demostrar la terminación del ciclo utilizando la función variante.

Ejercicio 6. Dado el siguiente problema

proc sumarElementos (in s: $array < \mathbb{Z} >$) : $\mathbb{Z}$ {
requiere $\{|s| \geq 1 \land |s|$ **mod** $2 = 0\}$
asegura $\{res = \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$
}

Dar un invariante y función variante para cada una de estas posibles implementaciones

a)
```
res := 0
i := 0
while (i < s.size()) do
    res := res + s[i];
    i := i + 1
endwhile
```

b)
```
res := 0
i := 0
while (i < s.size()) do
    res := res + s[s.size() - 1 - i];
    i := i + 1
endwhile
```

c)
```
res := 0
i := s.size() - 1
while (i >= 0) do
    res := res + s[i];
    i := i - 1
endwhile
```

d)
```
res := 0
i := 0
while (i > s.size() / 2) do
    res := res + s[i] + s[s.size() - 1 - i];
    i := i + 1
endwhile
```

Ejercicio 7. Considerando el siguiente Invariante:

$$I \equiv \{0 \leq i \leq |s| \land (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i \rightarrow_L ((j\ mod\ 2 = 0 \land s[j] = 2 \times j) \lor (j\ mod\ 2 \neq 0 \land s[j] = 2 \times j + 1)))\}$$

- Escribir un programa en SmallLang que se corresponda al invariante dado.
- Defina las P_c, B y Q_c que correspondan a su programa.
- Dar una función variante para que se pueda completar la demostración.

Ejercicio 8. Considerando el siguiente Invariante:

$$I \equiv \{0 \leq i \leq |s|/2 \land (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < i) \rightarrow_L (s[j] = 0 \land s[|s| - j - 1] = 0)\}$$

- Escribir un programa en SmallLang que se corresponda al invariante dado.
- Defina las P_c, B y Q_c que correspondan a su programa.
- Dar una función variante para que se pueda completar la demostración.

Ejercicio 9. Indique si el siguiente enunciado es verdadero o falso; fundamente:

Si dados B y I para un ciclo S existe una función f_v que cumple lo siguiente:

- $\{I \land B \land f_v = V_0\}S\{f_v > V_0\}$
- $\exists(k : \mathbb{Z})(I \land f_v \geq k \rightarrow \neg B)$

entonces el ciclo siempre termina.

Ejercicio 10. Considere la especificación de la función `existeElemento` y su implementación

Especificación

proc `existeElemento` (in s: $array < \mathbb{Z} >$, in e: $\mathbb{Z}$) : Bool {
  `requiere` $\{True\}$
  `asegura` $\{res = True \leftrightarrow$
  $((\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s|) \wedge_L s[k] = e)\}$
}

Implementación en SmallLang

```
i := 0;
j := −1;
while (i < s.size()) do
   if (s[i] = e) then
      j := i
  else
     skip
  endif;
  i := i + 1
endwhile;
if (j != −1)
   res := true
else
   res := false
endif
```

Escribir los pasos necesarios para demostrar la correctitud de la implementación respecto a la especificación usando WP y el teorema del invariante

3.2.2. Ejercicios de parcial

Ejercicio 11. Dados los siguientes ciclos y sus respectivas precondición (P_c) y poscondición (Q_c).

1. Proponer un invariante (I) y una función variante (f_v) para el ciclo
2. Demostrar los siguientes pasos de la demostración de correctitud del ciclo
   I) $P_c \rightarrow I$
   II) $(I \wedge \neg B) \rightarrow Q_c$
   III) $(I \wedge f_v \leq 0) \rightarrow \neg B$

a) $P_c \equiv \{s = S_0 \wedge i = 0 \wedge 0 \leq d < |s|\}$

while $i < d$ **do**
  $s[i] := e;$
  $i := i + 1;$
end

$Q_c \equiv \{(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < d \rightarrow_L s[j] = e) \wedge (\forall j : \mathbb{Z})(d \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = S_0[j])\}$

b) $P_c \equiv \{s = S_0 \wedge 0 \leq d < |s| \wedge i = d\}$

while $i < |s|$ **do**
  $s[i] := e$
  $i := i + 1$
end

$Q_c \equiv \{(\forall (j : \mathbb{Z})(0 \leq j < d \rightarrow_L s[i] = S_0[i])) \wedge (\forall (j : \mathbb{Z})(d \leq j < |s| \rightarrow_L s[i] = e))\}$

c) $P_c \equiv \{i = |s| - 1 \wedge res = 0\}$

while $i \geq 0$ **do**
  $res := res + s[i] + 1;$
  $i := i - 1;$
end

$Q_c \equiv \{res = |s| + \sum_{j=0}^{|s|-1} s[j]\}$