# Práctica N° 6 - Lógica de primer orden

Aclaraciones:

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

## Sintaxis de la Lógica de Primer Orden

### Ejercicio 1

Dados $\mathcal{F} = \{d, f, g\}$, donde $d$ itene aridad 0, $f$ aridad 2 y $g$ aridad 3. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son términos sobre $\mathcal{F}$?

I. $g(d, d)$

II. $f(X, g(Y, Z), d)$

III. $g(X, f(d, Z), d)$

IV. $g(X, h(Y, Z), d)$

V. $f(f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d)), g(d, d)), g(f(d, d, X), d), Z)$

### Ejercicio 2

Sean $c$ una constante, $f$ un símbolo de función de aridad 1 y $S$ y $B$, dos símbolos de predicado binarios. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son fórmulas?

I. $S(c, X)$

II. $B(c, f(c))$

III. $f(c)$

IV. $B(B(c, X), Y)$

V. $S(B(c), Z)$

VI. $(B(X, Y) \Rightarrow (\exists Z.S(Z, Y)))$

VII. $(S(X, Y) \Rightarrow S(Y, f(f(X))))$

VIII. $B(X, Y) \Rightarrow f(X)$

IX. $S(X, f(Y)) \wedge B(X, Y)$

X. $\forall X.B(X, f(X))$

XI. $\exists X.B(Y, X(c))$

### Ejercicio 3

Sea $\sigma = \exists X.P(Y, Z) \wedge \forall Y.\neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z)$

I. Identificar todas las variables libres y ligadas.

II. Calcular $\sigma\{X := W\}$, $\sigma\{Y := W\}$, $\sigma\{Y := f(X)\}$ y $\sigma\{Z := g(Y, Z)\}$.

**Ejercicio 4**

Dada $\sigma = \neg\forall X.(\exists Y.P(X,Y,Z)) \wedge \forall Z.P(X,Y,Z)$

I. Identificar todas las variables libres y ligadas.

II. Calcular $\sigma\{X := t\}$, $\sigma\{Y := t\}$ y $\sigma\{Z := t\}$ con $t = g(f(g(Y,Y)),Y)$.

III. Calcular $\sigma\{X := t, Y := t, Z := t\}$ con $t = g(f(g(Y,Y)),Y)$.

IV. Calcular $\sigma(\{X := t\} \circ \{Y := t\} \circ \{Z := t\})$ con $t = g(f(g(Y,Y)),Y)$.

## Unificación

**Ejercicio 5 ★**

Unir con flechas las expresiones que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* ("most general unifier"). Asumir que $\mathsf{a}$ es una constante, $X$, $Y$, $Z$ son variables, $f$ y $g$ son símbolos de función, y $P$ y $Q$ predicados.

$$P(f(X)) \quad P(\mathsf{a}) \quad P(Y) \quad Q(X,f(Y)) \quad Q(X,f(Z)) \quad Q(X,f(\mathsf{a})) \quad X \quad f(X)$$

$$P(X) \quad P(f(\mathsf{a})) \quad P(g(Z)) \quad Q(f(Y),X) \quad Q(f(Y),f(X)) \quad Q(f(Y),Y) \quad f(f(c)) \quad f(g(Y))$$

**Ejercicio 6 ★**

Determinar, para cada uno de los siguientes pares de términos de primer orden, si son unificables o no. En cada caso justificar su respuesta exhibiendo una secuencia exitosa o fallida (según el caso) del algoritmo de Martelli-Montanari. Asimismo, en caso de que los términos sean unificables indicar el *mgu* ("most general unifier"). Notación: $X, Y, Z$ variables; $a, b, c$ constantes; $f, g$ símbolos de función.

I. $f(X,X,Y)$ y $f(a,b,Z)$

II. $Y$ y $f(X)$

III. $f(g(c,Y),X))$ y $f(Z,g(Z,a))$

IV. $f(a)$ y $g(Y)$

V. $f(X)$ y $X$

VI. $g(X,Y)$ y $g(f(Y),f(X))$

**Ejercicio 7**

Preguntas para pensar.

I. La relación entre términos *unifica con*, ¿es reflexiva? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva?

II. ¿Existe algún término $t$ tal que todo término $s$ unifique con él?

III. ¿Cómo aplicaría el algoritmo de unificación al problema de determinar si, dado un conjunto finito de términos, existe un unificador común a todos?

**Ejercicio 8 ★**

Sean las constantes $\mathsf{Nat}$ y $\mathsf{Bool}$ y la función binaria $\to$ (representada como un operador infijo), determinar el resultado de aplicar el algoritmo `MGU` ("most general unifier") sobre las ecuaciones planteadas a continuación. En caso de tener éxito, mostrar la sustitución resultante.

I. MGU $\{\mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2 \doteq \mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool}\}$

II. MGU $\{\mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_3\}$

III. MGU $\{\mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_2\}$

IV. MGU $\{(\mathbf{T}_2 \to \mathbf{T}_1) \to \mathsf{Bool} \doteq \mathbf{T}_2 \to \mathbf{T}_3\}$

V. MGU $\{\mathbf{T}_2 \to \mathbf{T}_1 \to \mathsf{Bool} \doteq \mathbf{T}_2 \to \mathbf{T}_3\}$

VI. MGU $\{\mathbf{T}_1 \to \mathsf{Bool} \doteq \mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool}, \mathbf{T}_1 \doteq \mathbf{T}_2 \to \mathbf{T}_3\}$

VII. MGU $\{\mathbf{T}_1 \to \mathsf{Bool} \doteq \mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool}, \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_1\}$

VIII. MGU $\{\mathbf{T}_1 \to \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_3 \to \mathbf{T}_4, \mathbf{T}_3 \doteq \mathbf{T}_2 \to \mathbf{T}_1\}$

## Deducción natural

### Ejercicio 9 ★

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas, **sin usar principios de razonamiento clásicos**, salvo que se indique lo contrario:

I. Intercambio ($\forall$): $\forall X.\forall Y.P(X,Y) \iff \forall Y.\forall X.P(X,Y)$.

II. Intercambio ($\exists$): $\exists X.\exists Y.P(X,Y) \iff \exists Y.\exists X.P(X,Y)$.

III. Intercambio ($\exists/\forall$): $\exists X.\forall Y.P(X,Y) \implies \forall Y.\exists X.P(X,Y)$.

IV. Universal implica existencial: $\forall X.P(X) \implies \exists X.P(X)$.

V. Diagonal ($\forall$): $\forall X.\forall Y.P(X,Y) \implies \forall X.P(X,X)$.

VI. Diagonal ($\exists$): $\exists X.P(X,X) \implies \exists X.\exists Y.P(X,Y)$.

VII. de Morgan (I): $\neg\exists X.P(X) \iff \forall X.\neg P(X)$.

VIII. de Morgan (II): $\neg\forall X.P(X) \iff \exists X.\neg P(X)$.
Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

IX. Universal/conjunción: $\forall X.(P(X) \wedge Q(X)) \iff (\forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X))$.

X. Universal/disyunción: $\forall X.(P(X) \vee \sigma) \iff (\forall X.P(X)) \vee \sigma$, asumiendo que $X \notin \mathsf{fv}(\sigma)$.
Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

XI. Existencial/disyunción: $\exists X.(P(X) \vee Q(X)) \iff (\exists X.P(X) \vee \exists X.Q(X))$.

XII. Existencial/conjunción: $\exists X.(P(X) \wedge \sigma) \iff (\exists X.P(X) \wedge \sigma)$, asumiendo que $X \notin \mathsf{fv}(\sigma)$.

XIII. Principio del bebedor: $\exists X.(P(X) \implies \forall X.P(X))$.
En este ítem es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

### Ejercicio 10 ★

Demostrar en deducción natural: $(\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \Rightarrow (\forall X.R(X, f(f(X))))$.

### Ejercicio 11

Una fórmula $\sigma$ está en *forma normal negada* (f.n.n.) si se puede producir con la siguiente gramática:

$$\sigma ::= P(t_1,\ldots,t_n) \mid \neg P(t_1,\ldots,t_n) \mid \sigma \wedge \sigma \mid \sigma \vee \sigma \mid \forall X.\,\sigma \mid \exists X.\,\sigma$$

Es decir, una fórmula está en f.n.n. si no tiene ocurrencias del conectivo de la implicación ($\Rightarrow$) y todas las ocurrencias del conectivo de la negación ($\neg$) acompañan a fórmulas atómicas (es decir, la negación sólo puede encontrarse en las "hojas" de la fórmula). Demostrar que toda fórmula $\sigma$ es equivalente a una fórmula en forma normal negada. Es decir, para cada fórmula $\sigma$ existe una fórmula $\sigma'$ en f.n.n. tal que $\vdash \sigma \iff \sigma'$.

### Ejercicio 12

Una fórmula $\sigma$ está en *forma normal prenexa* (f.n.p.) si es de la forma $\mathcal{Q}_1 X_1. \dots \mathcal{Q}_n X_n. \tau$ donde cada $\mathcal{Q}_i$ es un cuantificador ($\forall$ o $\exists$) y $\tau$ es una fórmula en forma normal negada sin ocurrencias de cuantificadores. Demostrar que toda fórmula $\sigma$ es equivalente a una fórmula en forma normal prenexa. Es decir, para cada fórmula $\sigma$ existe una fórmula $\sigma'$ en f.n.p. tal que $\vdash \sigma \iff \sigma'$.

## Semántica

### Ejercicio 13 ★

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden que incluye (junto con las variables, conectivos y cuantificadores) la constante $a_1$, el símbolo de función $f$ de aridad 2 y el símbolo de predicado $P$ de aridad 2. Sea $\sigma$ la fórmula

$$\forall X_1.\forall X_2.(P(f(X_1, X_2), a_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$$

Definamos una interpretación $I$ para $\mathcal{L}$ como sigue. $D_I$ es $\mathbb{Z}$, $\overline{a}_1$ es 0, $\overline{f}(X,Y)$ es $X - Y$, $\overline{P}(X,Y)$ es $X < Y$. Escribir la interpretación de $\sigma$ en castellano. ¿El enunciado es verdadero o falso? Hallar una interpretación de $\sigma$ en la cual el enunciado tenga el valor de verdad opuesto.

### Ejercicio 14 ★

Sea $N$ la interpretación aritmética donde $D_I = \mathbb{N}$ y

| | |
|---|---|
| $\overline{c}^0$ | es el 0, |
| $\overline{P}^2$ | es $=$, |
| $\overline{f}_1^1$ | es la función sucesor, |
| $\overline{f}_2^2$ | es $+$, |
| $\overline{f}_3^2$ | es $\times$ |

Hallar, si es posible, asignaciones que satisfagan y que no satisfagan las siguientes fórmulas.

I. $P(f_2(X_1, X_1), f_3(f_1(X_1), f_1(X_1)))$

II. $P(f_2(X_1, c), X_2) \Rightarrow P(f_2(X_1, X_2), X_3)$

III. $\neg P(f_3(X_1, X_2), f_3(X_2, X_3))$

IV. $\forall X_1.P(f_3(X_1, X_2), X_3)$

V. $\forall X_1.(P(f_3(X_1, c), X_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$

### Ejercicio 15

Demostrar que ninguna de las siguientes fórmulas es lógicamente válida.

I. $\forall X_1.\exists X_2.P(X_1, X_2) \Rightarrow \exists X_2.\forall X_1.P(X_1, X_2)$

II. $\forall X_1.\forall X_2.(P(X_1, X_2) \Rightarrow P(X_2, X_1))$

III. $\forall X_1.\neg Q(X_1) \Rightarrow Q(c)$

IV. $(\forall X_1.P(X_1, X_1)) \Rightarrow \exists X_2.\forall X_1.P(X_1, X_2)$

# Ejercicios extra de deducción natural (opcional)

## Ejercicio 16

Dar derivaciones en DN de las siguientes fórmulas.

I. $(\forall X.P(X)) \Rightarrow P(a)$

II. $P(a) \Rightarrow \exists X.P(X)$

III. $(\forall X.\forall Y.(R(X,Y) \Rightarrow \neg R(Y,X))) \Rightarrow \forall X.\neg R(X,X)$

IV. $(\forall X.\forall Y.R(X,Y)) \Rightarrow \forall X.R(X,X)$

V. $(\exists X.P(X)) \Rightarrow (\forall Y.Q(Y)) \Rightarrow \forall X.\forall Y.(P(X) \Rightarrow Q(Y))$

VI. $(\forall X.(P(X) \Rightarrow Q(X))) \wedge (\exists X.P(X)) \Rightarrow \exists X.Q(X)$

VII. $(\neg\forall X.(P(X) \vee Q(X))) \Rightarrow \neg\forall X.P(X)$

VIII. $(\exists X.(P(X) \Rightarrow Q(X))) \Rightarrow (\forall X.P(X)) \Rightarrow \exists X.Q(X)$

IX. $(\forall X.(P(X) \Rightarrow Q(X))) \wedge (\neg\exists X.Q(X)) \Rightarrow \forall X.\neg P(X)$

X. $(\forall X.(\exists Y.R(Y,X) \Rightarrow P(X))) \Rightarrow (\exists X.\exists Y.R(X,Y)) \Rightarrow \exists X.P(X)$

XI. $(\exists X.(P(X) \vee Q(X))) \Rightarrow (\forall X.\neg Q(X)) \Rightarrow \exists X.P(X)$

XII. $(\neg\forall X.\exists Y.R(X,Y)) \Rightarrow \neg\forall X.R(X,X)$

XIII. $(\neg\exists X.\forall Y.R(Y,X) \Rightarrow \exists X.\exists Y.\neg R(X,Y))$

XIV. $\neg(\forall X.P(X) \wedge \exists X.\neg P(X))$

XV. $(\exists X.(R(X,X) \wedge P(X))) \Rightarrow \neg\forall X.(P(X) \Rightarrow \neg\exists Y.R(X,Y))$

XVI. $(\exists X.P(X) \Rightarrow \forall X.Q(X)) \Rightarrow \forall Y.(P(Y) \Rightarrow Q(Y))$

XVII. $\neg(\forall X.(P(X) \wedge Q(X))) \wedge \forall X.P(X) \Rightarrow \neg\forall X.Q(X)$

XVIII. $(\forall X.(R(X,X) \Rightarrow Q(X))) \wedge \exists X.\forall Y.R(X,Y) \Rightarrow \exists X.Q(X)$