Inferencia de Tipos

Paradigmas (de Lenguajes) de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

17 de octubre de 2025

Inferencia de tipos

Motivación

Dada una expresión: ¿Tiene tipo? ¿Cuál es el tipo? ¿Es el más general? ¿Qué necesitamos saber del contexto?

Introducción

¿Tiene tipo? ¿Cuál es el tipo? ¿Es el más general?
¿Qué necesitamos saber del contexto?

- $(\lambda x.\, \mathit{isZero}(x))\ \mathit{true}$
- $\lambda x.\, \mathit{succ}(x)$
- $\lambda x.\, \mathit{succ}(y)$
- $\emptyset \ \triangleright\ \lambda x : \mathit{Nat}.\, x : \mathit{Nat} \to \mathit{Nat}$
- $\emptyset \ \triangleright\ \lambda x : X_1.\, x : X_1 \to X_1$

Introducción

Generalidad

¿Qué significa ser el juicio *más general*? Que todos los juicios derivables para $\lambda x.\, x$ son instancias de $\emptyset \,\triangleright\, \lambda x : X_1.\, x : X_1 \to X_1$. Por ejemplo:

- $\emptyset \,\triangleright\, \lambda x : \mathit{Nat}.\, x : \mathit{Nat} \to \mathit{Nat}$
- $\emptyset \,\triangleright\, \lambda x : \mathit{Bool}.\, x : \mathit{Bool} \to \mathit{Bool}$
- $\{y : \mathit{Bool}\} \,\triangleright\, \lambda x : X_2 \to \mathit{Nat}.\, x : (X_2 \to \mathit{Nat}) \to X_2 \to \mathit{Nat}$
- $\ldots$

Ejemplos a ojo

Inferir el juicio de tipado de las siguientes expresiones:

1. $\lambda x.\, y$
2. $f\ \mathit{true}$
3. $\mathsf{isZero}(x)$

Algoritmo de Martelli Montanari

Determinar el resultado de aplicar el algoritmo MGU sobre las siguientes ecuaciones:

1. $\mathtt{MGU}\{X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow \mathsf{Bool} \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3\}$
2. $\mathtt{MGU}\{(X_2 \rightarrow X_1) \rightarrow \mathsf{Nat} \stackrel{?}{=} X_2 \rightarrow X_3\}$
3. $\mathtt{MGU}\{X_1 \rightarrow \mathsf{Bool} \stackrel{?}{=} \mathsf{Nat} \rightarrow \mathsf{Bool}, X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \rightarrow X_1\}$

Algoritmo $\mathcal{I}$ — Inferencia de tipos

El algoritmo $\mathcal{I}$ recibe un término U sin anotaciones de tipos.

Consta de los siguientes pasos:

1. **Rectificación** del término.
2. **Anotación** del término con variables de tipo frescas.
3. **Generación de restricciones** (ecuaciones entre tipos).
4. **Unificación de las restricciones**.

Algoritmo $\mathcal{I}$ — Paso 1: rectificación

Decimos que un término está *rectificado* si:

1. No hay dos variables ligadas con el mismo nombre.
2. No hay una variable ligada con el mismo nombre que una variable libre.

Ejercicio: Rectificar los siguientes términos

- $(\lambda f.\, \lambda x.\, f(f\ x))(\lambda f. f)$
- $x\,(\lambda x.\ \mathrm{succ}(x))$

Algoritmo $\mathcal{I}$ — Paso 2: anotación

Tenemos un término U, que suponemos ya rectificado.

Producimos un contexto Γ_0 y un término M_0:

1. El contexto Γ_0 le da tipo a todas las variables libres de U.
   El tipo de cada variable es una incógnita *fresca*.
2. El término M_0 está anotado de tal modo que $\mathit{erase}(M_0) = U$.
   Todas las anotaciones son incógnitas frescas.

Ejercicio: Anotar los siguientes términos

- $\lambda f.\, \lambda x.\, f\,(f\; x)$
- $x\,(\lambda y.\ \mathrm{succ}(y))$

Algoritmo $\mathcal{I}$ — Paso 3: generación de las restricciones

Tenemos un contexto Γ y un término M con anotaciones de tipos.

Recursivamente calculamos:

1. Un tipo τ, que corresponde al tipo de M.
2. Un conjunto de ecuaciones E.
   Representan restricciones para que E esté bien tipado.

Definimos un algoritmo recursivo:

$$\mathcal{I}\underbrace{(\underbrace{\Gamma}_{\text{contexto}} \mid \underbrace{M}_{\text{término}})}_{\text{entrada}} = \underbrace{(\underbrace{\tau}_{\text{tipo}} \mid \underbrace{E}_{\text{restricciones}})}_{\text{salida}}$$

con la precondición de que Γ le da tipo a todas las variables de M.

Algoritmo $\mathcal{I}$ — Paso 3: generación de las restricciones

1. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{True}) = (\mathsf{Bool} \mid \emptyset)$
2. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{False}) = (\mathsf{Bool} \mid \emptyset)$
3. $\mathcal{I}(\Gamma \mid x) = (\tau \mid \emptyset) \qquad \text{si } (x : \tau) \in \Gamma$
4. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3) = (\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} \mathsf{Bool}, \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$
   donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
   $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$
   $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$
5. $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1\, M_2) = (X_k \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} (\tau_2 \to X_k)\} \cup E_1 \cup E_2)$
   donde X_k es una incógnita fresca
   $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
   $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$
6. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \lambda x : \tau . M) = (\tau \to \sigma \mid E)$
   donde $\mathcal{I}(\Gamma, x : \tau \mid M) = (\sigma \mid E)$
7. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{zero}) = (\mathsf{Nat} \mid \emptyset)$
8. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{succ}(M)) = (\mathsf{Nat} \mid \{\tau \stackrel{?}{=} \mathsf{Nat}\} \cup E) \qquad$ donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$
9. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{pred}(M)) = (\mathsf{Nat} \mid \{\tau \stackrel{?}{=} \mathsf{Nat}\} \cup E) \qquad$ donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$
10. $\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathsf{isZero}(M)) = (\mathsf{Bool} \mid \{\tau \stackrel{?}{=} \mathsf{Nat}\} \cup E) \qquad$ donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M) = (\tau \mid E)$

Algoritmo $\mathcal{I}$ — Paso 4: unificación de las restricciones

Recordemos: Γ_0 y M_0 resultan de anotar un término rectificado U.

Una vez calculado $\mathcal{I}(\Gamma_0 \mid M_0) = (\tau \mid E)$:

1. Calculamos $S = \mathtt{mgu}(E)$.
2. Si no existe el unificador, el término U no es tipable.
3. Si existe el unificador, el término U es tipable y vale:

$$S(\Gamma_0) \vdash S(M_0) : S(\tau)$$

Algoritmo $\mathcal{I}$

¿Qué tipo tienen las siguientes expresiones?

1. $\lambda f.\, \lambda x.\, f(f\ x)$
2. $x\ (\lambda x.\ \mathsf{succ}(x))$
3. $\lambda x.\, x\ y\ x$

Algoritmo $\mathcal{I}$

Ejercicio

Dada la siguiente extensión al conjunto de términos para el cálculo λ con listas:

$$M ::= \ldots | \mathit{map}_{\sigma,\tau} | \mathit{foldr}_{\sigma,\tau}$$

La modificación al sistema de tipos es la introducción de dos axiomas de tipado para $\mathit{map}_{\sigma,\tau}$ y $\mathit{foldr}_{\sigma,\tau}$:

$$\frac{}{\Gamma \rhd \mathit{map}_{\sigma,\tau} : (\sigma \to \tau) \to [\sigma] \to [\tau]} \qquad \frac{}{\Gamma \rhd \mathit{foldr}_{\sigma,\tau} : (\sigma \to \tau \to \tau) \to \tau \to [\sigma] \to \tau}$$

Se extiende el algoritmo de inferencia con las siguientes reglas:

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathit{map}_{\sigma,\tau}) = ((\sigma \to \tau) \to [\sigma] \to [\tau] \mid \emptyset)$$

$$\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathit{foldr}_{\sigma,\tau}) = ((\sigma \to \tau \to \tau) \to \tau \to [\sigma] \to \tau \mid \emptyset)$$

Usar el algoritmo $\mathcal{I}$ con esta nueva extensión para tipar la siguiente expresión:

$$\mathit{foldr}\ \mathit{map}$$

Algoritmo $\mathcal{I}$

1. *foldr map* ya está rectificado
2. $\Gamma_0 = \emptyset$, $M_0 = foldr_{X_1,X_2}\ map_{X_3,X_4}$
3. $\mathcal{I}(\emptyset \mid foldr_{X_1,X_2}\ map_{X_3,X_4}) =??$
   - $\mathcal{I}(\emptyset \mid foldr_{X_1,X_2}) = ((X_1 \to X_2 \to X_2) \to X_2 \to [X_1] \to X_2 \mid \emptyset)$
   - $\mathcal{I}(\emptyset \mid map_{X_3,X_4}) = ((X_3 \to X_4) \to [X_3] \to [X_4] \mid \emptyset)$

Algoritmo $\mathcal{I}$

1. *foldr map* ya está rectificado
2. $\Gamma_0 = \emptyset$, $M_0 = foldr_{X_1,X_2}\ map_{X_3,X_4}$
3. $\mathcal{I}(\emptyset \mid foldr_{X_1,X_2}\ map_{X_3,X_4}) =$
   $(X_5 \mid \{(X_1 \to X_2 \to X_2) \to X_2 \to [X_1] \to X_2 \stackrel{?}{=} ((X_3 \to X_4) \to [X_3] \to [X_4]) \to X_5\})$
   - $\mathcal{I}(\emptyset \mid foldr_{X_1,X_2}) = ((X_1 \to X_2 \to X_2) \to X_2 \to [X_1] \to X_2 \mid \emptyset)$
   - $\mathcal{I}(\emptyset \mid map_{X_3,X_4}) = ((X_3 \to X_4) \to [X_3] \to [X_4] \mid \emptyset)$
4. $S = mgu\{(X_1 \to X_2 \to X_2) \to X_2 \to [X_1] \to X_2 \stackrel{?}{=} ((X_3 \to X_4) \to [X_3] \to [X_4]) \to X_5\}$

Algoritmo $\mathcal{I}$

$S = MGU\{(X_1 \to X_2 \to X_2) \to X_2 \to [X_1] \to X_2 \stackrel{?}{=} ((X_3 \to X_4) \to [X_3] \to [X_4]) \to X_5\} S = MGU\{(X_1 \to X_2 \to X_2) \to X_2 \to [X_1] \to X_2 \stackrel{?}{=} ((X_3 \to X_4) \to [X_3] \to [X_4]) \to X_5\}$

$\longmapsto^1 \{X_1 \to X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_3 \to X_4) \to [X_3] \to [X_4],\ X_2 \to [X_1] \to X_2 \stackrel{?}{=} X_5\}$

$\longmapsto^1 \{X_1 \to X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} (X_3 \to X_4) \to [X_3] \to [X_4],\ X_2 \to [X_1] \to X_2 \stackrel{?}{=} X_5\}$

$\longmapsto^1 \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4,\ X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} [X_3] \to [X_4],\ X_2 \to [X_1] \to X_2 \stackrel{?}{=} X_5\}$

$\longmapsto^1 \{X_1 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4,\ X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} [X_3] \to [X_4], X_2 \to [X_1] \to X_2 \stackrel{?}{=} X_5\}$

$\longmapsto^4 \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} [X_3] \to [X_4],\ X_2 \to [X_3 \to X_4] \to X_2 \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_1 := X_3 \to X_4\}$

$\longmapsto^4 \{X_2 \to X_2 \stackrel{?}{=} [X_3] \to [X_4],\ X_2 \to [X_3 \to X_4] \to X_2 \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_1 := X_3 \to X_4\}$

$\longmapsto^1 \{X_2 \stackrel{?}{=} [X_3],\ X_2 \stackrel{?}{=} [X_4],\ X_2 \to [X_3 \to X_4] \to X_2 \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_1 := X_3 \to X_4\}$

$\longmapsto^1 \{X_2 \stackrel{?}{=} [X_3],\ X_2 \stackrel{?}{=} [X_4],\ X_2 \to [X_3 \to X_4] \to X_2 \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_1 := X_3 \to X_4\}$

$\longmapsto^4 \{[X_3] \stackrel{?}{=} [X_4],\ [X_3] \to [X_3 \to X_4] \to [X_3] \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_2 := [X_3]\} \circ \{X_1 := X_3 \to X_4\}$

$\longmapsto^4 \{[X_3] \stackrel{?}{=} [X_4],\ [X_3] \to [X_3 \to X_4] \to [X_3] \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_2 := [X_3]\} \circ \{X_1 := X_3 \to X_4\}$

$\longmapsto^1 \{X_3 \stackrel{?}{=} X_4,\ [X_3] \to [X_3 \to X_4] \to [X_3] \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_2 := [X_3]\} \circ \{X_1 := X_3 \to X_4\}$

$\longmapsto^1 \{X_3 \stackrel{?}{=} X_4,\ [X_3] \to [X_3 \to X_4] \to [X_3] \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_2 := [X_3]\} \circ \{X_1 := X_3 \to X_4\}$

Algoritmo $\mathcal{I}$

$$S = MGU\{(X_1 \to X_2 \to X_2) \to X_2 \to [X_1] \to X_2 \stackrel{?}{=} ((X_3 \to X_4) \to [X_3] \to [X_4]) \to X_5\}$$

$$= \{X_1 := X_3 \to X_4, X_2 := [X_3], X_3 := X_4, X_5 := [X_4] \to [X_4 \to X_4] \to [X_4]\}$$

$$= \{X_1 := X_3 \to X_4, X_2 := [X_3], X_3 := X_4, X_5 := [X_4] \to [X_4 \to X_4] \to [X_4]\}$$

$$= \{X_1 := X_4 \to X_4, X_2 := [X_4], X_3 := X_4, X_5 := [X_4] \to [X_4 \to X_4] \to [X_4]\}$$

$$S(\emptyset) \vdash S(\mathit{foldr}_{X_1, X_2}\ \mathit{map}_{X_3, X_4}) : S(X_5) =$$

$$\emptyset \vdash \mathit{foldr}_{X_4 \to X_4, [X_4]}\ \mathit{map}_{X_4, X_4} : [X_4] \to [X_4 \to X_4] \to [X_4]$$

Extensión del algoritmo $\mathcal{I}$

Listas

$$\sigma ::= \ldots \mid [\sigma]$$

$$M, N, O ::= \ldots \mid [\,]_\sigma \mid M :: N \mid \mathit{Case}\ M\ \mathit{of}\ [\,] \rightsquigarrow N\ ; h :: t \rightsquigarrow O$$

$$\frac{}{\Gamma \rhd [\,]_\sigma\ : [\sigma]} \qquad \frac{\Gamma \rhd M : \sigma \qquad \Gamma \rhd N : [\sigma]}{\Gamma \rhd M :: N : [\sigma]}$$

$$\frac{\Gamma \rhd M : [\sigma] \qquad \Gamma \rhd N : \tau \qquad \Gamma \cup \{h : \sigma, t : [\sigma]\} \rhd O : \tau}{\Gamma \rhd \mathit{Case}\ M\ \mathit{of}\ [\,] \rightsquigarrow N\ ; h :: t \rightsquigarrow O : \tau}$$

Extensión del algoritmo de inferencia

$\mathcal{I}(\Gamma \mid [\,]_\tau) = ([\tau] \mid \emptyset)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1 :: M_2) = (\tau_2 \mid \{\tau_2 \stackrel{?}{=} [\tau_1]\} \cup E_1 \cup E_2)$

donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid \mathit{Case}\ M_1\ \mathit{of}\ [\,] \rightsquigarrow M_2\ ; h :: t \rightsquigarrow M_3) =$

$(\tau_2 \mid \{\tau_1 \stackrel{?}{=} [X_h], \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3, X_t \stackrel{?}{=} \tau_1\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

donde $\mathcal{I}(\Gamma \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$

$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$

$\mathcal{I}(\Gamma, h : X_h, t : X_t \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$

X_h y X_t variables frescas

Dar el tipo de: $\mathit{Case}\ \mathrm{succ}(\underline{0}) :: x\ \mathit{of}\ [\,] \rightsquigarrow x\ ; x :: y \rightsquigarrow \mathrm{succ}(x) :: [\,]$

Extensión del algoritmo de inferencia

Listas por comprensión

$$M ::= \ldots \mid \; [\ M \mid x \leftarrow M, M\ ]$$

Consideremos el Cálculo Lambda extendido con las listas por comprensión vistas en la práctica 4.

La regla de tipado es la siguiente:

$$\frac{\Gamma \cup \{x : \sigma\} \ \triangleright M : \tau \quad \Gamma \triangleright N : [\sigma] \quad \Gamma \cup \{x : \sigma\} \ \triangleright \ O : \mathsf{Bool}}{\Gamma \triangleright [\ M \mid x \leftarrow N, O\ ] : \ [\tau]}$$

Extensión del algoritmo de inferencia

Listas por Comprensión

$\mathcal{I}(\Gamma \mid [\ M_1 \mid x \leftarrow M_2, M_3\ ]) = ([\tau_1] \mid \{\tau_2 \stackrel{?}{=} [X_0], \tau_3 \stackrel{?}{=} \mathsf{Bool}\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

donde $\mathcal{I}(\Gamma, x : X_0 \mid M_1) = (\tau_1 \mid E_1)$
$\mathcal{I}(\Gamma \mid M_2) = (\tau_2 \mid E_2)$
$\mathcal{I}(\Gamma, x : X_0 \mid M_3) = (\tau_3 \mid E_3)$
X_0 variable fresca

Dar el tipo de: $[\ \text{if } x \text{ then } \underline{0} \text{ else } \underline{1} \mid x \leftarrow \mathit{false} :: \text{isZero}(x) :: [\ ], \mathit{true}\ ]$

Fin

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿Preguntas? ? ? ? ? ?