

# Sobre la estadística del conteo de fotones

Fellenberg Ferraris Vicente Tomas, Jeon Agustín Luca, Zacarias Javier Fabricio

26 de febrero de 2025

## Resumen

En este trabajo se estudió el comportamiento estadístico de los fotones mediante el conteo de los mismos. Primero se estudió una fuente de amplitud estable con un tiempo de coherencia muy bajo ( $\sim 10^{-9}s$ ) y luego se estudió una fuente que simuló ser una fuente térmica, una fuente pseudo-térmica cuyo tiempo de coherencia se estimó estudiando su autocorrelación ( $\sim 10^{-3}s$ ). Para la fuente de amplitud estable se observó que los datos siguieron una distribución de Poisson en concordancia con el marco teórico. Para la fuente pseudo-térmica se observó que los datos no siguieron una distribución de Bose-Einstein como se propone en el marco teórico.

## 1. Introducción

La teoría semi-clásica establece que la luz se comporta como partículas denominadas fotones, por lo que es de interés el estudiar y analizar la luz contando estas partículas individualmente en lugar de en un continuo. Esto permite analizar conceptos como la cantidad de fotones por unidad de tiempo y estudiar su estadística. El conteo de fotones consiste en una fuente de luz y un fotomultiplicador, o PMT por sus siglas en inglés, el cual convierte los fotones en señales eléctricas que podemos medir y registrar. El PMT consiste en un fotocátodo, varios dínodos, y un ánodo (ver figura 1).

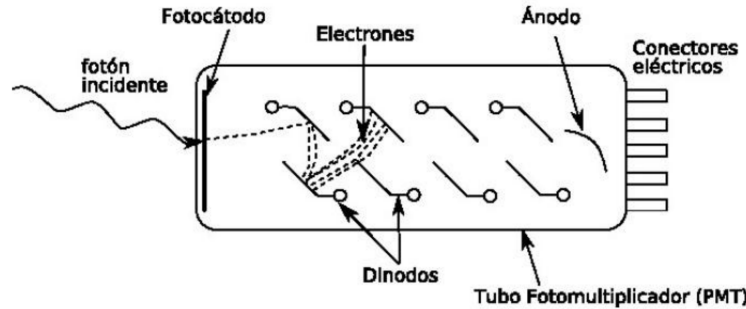


Figura 1: Esquema de funcionamiento de un PMT[1].

Al incidir fotones en el fotocátodo, éste emite electrones por efecto fotoeléctrico, los cuales son multiplicados por los dínodos, y finalmente inciden en el ánodo como un pulso de corriente. Cuando la intensidad de la luz es alta, estos pulsos se superponen formando una corriente continua. Por otro lado, si la intensidad es lo bastante baja, los fotones incidentes están lo suficientemente separados temporalmente para que los pulsos de salida en el ánodo sean discretos y distinguibles, con un ancho menor a la distancia entre pulsos. De esta forma, cada pulso digital se puede atribuir a un fotón individual, registrándolo como una cuenta, permitiendo el conteo de fotones [2]. Para un gran número de cuentas, se puede estudiar la estadística del número de fotones por unidad de tiempo, lo cual da información sobre la naturaleza de la luz observada.

La única hipótesis es que se asume que la probabilidad por unidad de tiempo  $p(t)$  de una fotoionización en un instante  $t$ , es proporcional a la intensidad de la luz  $I(t)$  (promediada en un ciclo de oscilación del campo) en cada instante de tiempo. Desarrollando esta hipótesis se llega a que la probabilidad de medir  $m$  fotones en un intervalo de tiempo  $T$  (tiempo de integración) es la dada en la ecuación 1, llamada fórmula de Mandel[4], donde  $I(t,T)$  es la intensidad de luz media que incide sobre el PMT durante el período de tiempo entre  $t$  y  $t+T$ , los corchetes representan un promedio sobre varias mediciones, y  $\epsilon$  es una constante que caracteriza la eficiencia del detector.

$$P_m(T) = \left\langle \frac{[\epsilon I(t, T)T]^m}{m!} e^{[-\epsilon I(t, T)T]} \right\rangle \quad (1)$$

Calcular esta probabilidad de forma general tiene sus dificultades, pero hay casos en los que se puede simplificar, de los cuales vimos tres.

### 1.1. Casos Particulares

#### ■ Onda clásica de amplitud estable[4]:

Este es el caso mas simple, donde la intensidad promediada en un ciclo toma un valor  $I(t, T) = I$  independiente del tiempo, por lo que la ecuación 1 queda

$$P_m(T) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} e^{-\langle m \rangle} \quad (2)$$

con un número medio de cuentas

$$\langle m \rangle = \epsilon IT \quad (3)$$

La ecuación 2 es la distribución de Poisson. La varianza de esta distribución se caracteriza por ser igual a su valor medio, es decir

$$(\Delta m)^2 = \langle m \rangle \quad (4)$$

#### ■ Luz térmica con tiempos de integración largos[4]:

Incluso si la luz es fluctuante, como una fuente térmica, mientras el tiempo de integración  $T$  sea mucho más grande que el tiempo de coherencia  $t_c$  de las fluctuaciones, la intensidad media se va a mantener relativamente constante. De esta forma, la distribución sigue siendo la de poisson, es decir, la ecuación 2 con el número medio de cuentas dado por 3, donde, en este caso,  $I$  es el promedio de intensidad a tiempos largos. También se mantiene la ecuación 4 para la varianza.

#### ■ Luz térmica con tiempos de integración cortos[4]:

En el caso de una fuente térmica con tiempo de integración  $T$  mucho menor al tiempo de coherencia  $t_c$ , la intensidad 'instantánea' es esencialmente constante en el intervalo  $T$ , es decir,  $I(t, T) = I(t)$  para  $T \ll t_c$ . De esta forma la ecuación 1 queda

$$P_m(T) = \frac{\langle m \rangle^m}{(1 + \langle m \rangle)^{(1+m)}} \quad (5)$$

con el mismo  $\langle m \rangle$  definido en 3. A la ecuación 5 se la conoce como fórmula de Bose-Einstein[3]. En este caso, la varianza cumple con la fórmula

$$(\Delta m)^2 = \langle m \rangle (1 + \langle m \rangle) \quad (6)$$

El caso de fuente térmica con tiempos de integración cortos es difícil de lograr experimentalmente, pues las fuentes térmicas suelen tener tiempos de coherencia extremadamente cortos (del orden del picosegundo o menos), haciendo imposible lograr que  $T \ll t_c$ . La forma de estudiar esta luz es simulándola mediante la creación de una fuente pseudo-térmica[5]. Ésta se logra a través de un montaje experimental basado en un disco esmerilado rotante, el cual dispersa el haz de un láser en un patrón de 'speckle' fluctuante. Luego de pasar por una abertura de diámetro mucho mas chico que el grano de speckle, la intensidad detras de la misma simula la de una fuente térmica. Este método permite controlar el tiempo de coherencia variando la velocidad de rotación del disco.

Entonces, el objetivo de esta práctica es estudiar experimentalmente la naturaleza estadística que siguen los fotones para distintos tipos de fuentes de luz, y comparar con las distribuciones esperadas en cada caso.

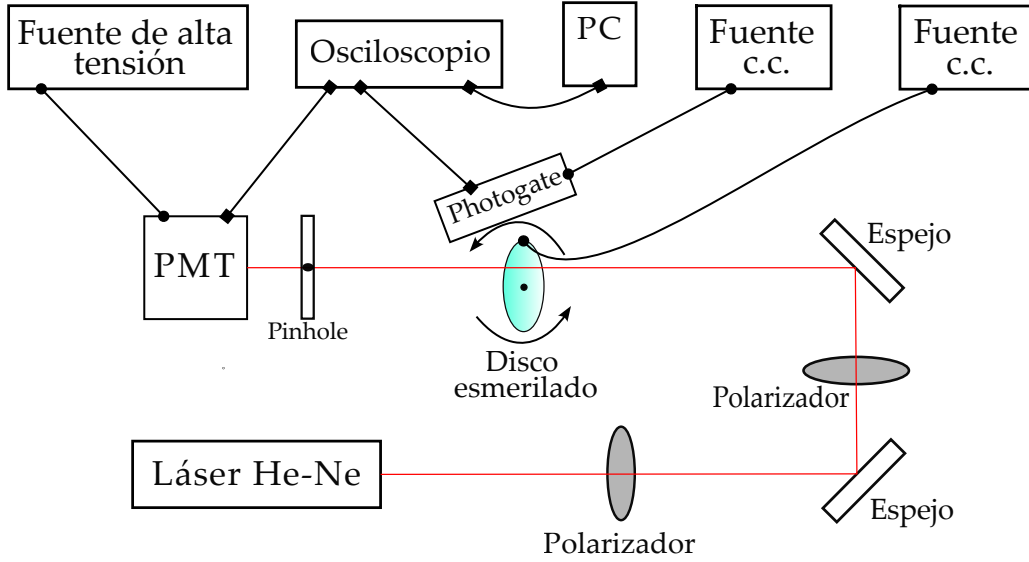


Figura 2: Esquema del montaje experimental utilizado en el laboratorio.

## 2. Montaje experimental

El montaje experimental que se utilizó para este experimento se ilustra en la figura 2. Dicho montaje consistió de un láser He-Ne (Helio-Neón) Melles Griot, de  $1\text{ mW}$  de potencia y longitud de onda  $\lambda = 632,8\text{ nm}$ . El haz del láser se refractaba en un polarizador, este último servía para controlar la intensidad del haz. Luego la luz se reflejaba en un espejo que cambiaba la dirección de propagación del haz, y nuevamente la luz se encontraba con un arreglo polarizador-espejo, para luego incidir sobre un disco esmerilado en el cual se refractaba. El disco esmerilado podía rotar sobre su eje a una velocidad que se podía variar, y tenía en su proximidad un photogate que permitía medir su período de giro. Finalmente el haz pasaba a través de un pinhole y llegaba al fotomultiplicador (PMT). Todos los elementos descritos hasta aquí se encontraban dentro de una caja negra para evitar lo máximo posible el ingreso de luz de fuentes externas que perturben el experimento. Aquí se comprenderá mejor porqué eran necesarios los espejos reflectantes que cambiaban la dirección de propagación del haz de luz, pues el espacio dentro de la caja era acotado y la disposición del instrumental que se encontraba en la caja negra era análoga a la que se observa en la figura 2.

El PMT se alimentó con una fuente de alta tensión Stanford Research System modelo PS350, al cual se le fijó un voltaje de  $(900 \pm 1)\text{V}$  durante todo el experimento. Además el PMT estaba conectado al canal 1 (CH1) de un osciloscopio Tektronix TDS1002B de manera de poder observar los pulsos que enviaba el fotomultiplicador. Se usaron dos fuentes de corriente continua LG GP-4303D, que permitían variar el voltaje de alimentación, una fue usada para conectar un motor que hizo girar al disco esmerilado y, al variar el voltaje se cambiaba la velocidad angular del disco. La segunda fuente alimentaba el photogate y se le fijó un voltaje de  $(6,3 \pm 0,1)\text{V}$ . Además se conectó el photogate al CH2 del osciloscopio para registrar el movimiento del disco y calcular su período de giro.

El photogate tiene incorporado un sensor láser, y lo que detectaba era el paso de una bandita negra adherida al borde del disco esmerilado, de manera que cada vez que la bandita negra obstruía al sensor se observaba un pulso en el CH2 del osciloscopio. Usando los cursores de este último se calculó el período de giro del disco y luego su velocidad angular.

Por último, la señal del PMT que se observó en el CH1 del osciloscopio fue adquirida con la computadora por medio de un cable USB que conectaba esta última con el osciloscopio. Además, para poder conformar los pulsos enviados por el PMT, se conectó una resistencia de carga en paralelo al osciloscopio. Esto se hizo por medio de una ficha T en el CH1 de manera de tener enchufado simultáneamente el fotomultiplicador y la resistencia.

## 3. Desarrollo y resultados

Se estudiaron los anchos de los pulsos al variar la resistencia de carga sobre la cual se medía la caída de tensión. Las resistencias utilizadas fueron de  $R = [50\Omega, 1000\Omega, 9970\Omega]$  y sus respectivos anchos de picos fueron

$t_p \approx [10ns, 10\mu s, 1\mu s]$ . En la figura 3 se puede observar que un aumento en la resistencia conllevó a un aumento en el ancho del pico.

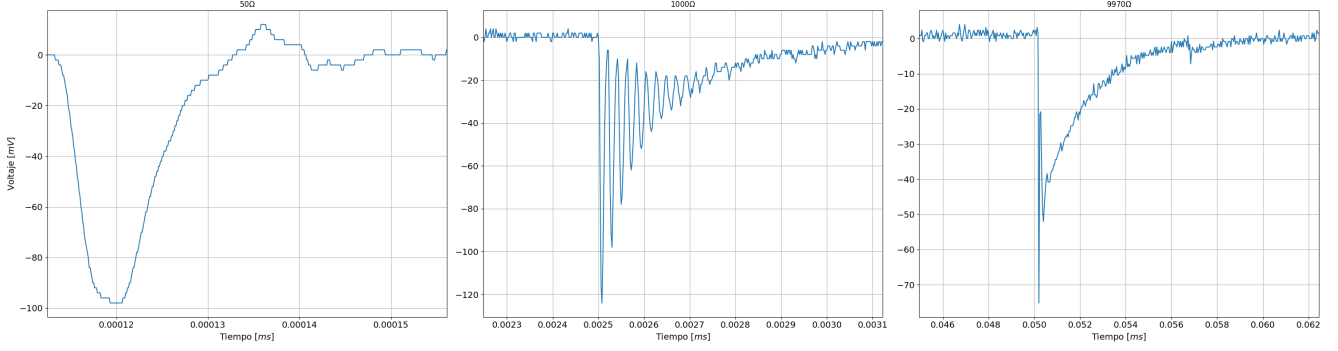


Figura 3: Gráfico de un pulso en función de la resistencia de carga.

Durante todo el experimento utilizamos como resistencia de carga la de  $50\Omega$  ya que nos permitió observar múltiples pulsos angostos que no se superponían entre si y fueran posibles de registrar por el osciloscopio.

Para poder detectar los picos relacionados a un fotón llegando al fotocatodo se tuvo que eliminar el ruido espurio. Para ello, se tomaron datos de 1000 pantallas del osciloscopio con una escala temporal de  $10\mu s$ , eligiendo como tiempo de integración el tiempo registrado en cada pantalla, es decir,  $T = 100\mu s$  (10 veces la escala temporal) y usando la función *find peaks* obtuvimos los mínimos. Esto se hizo sin encender el láser, para poder caracterizar el ruido y las cuentas que ocurren en oscuridad, y así obtener un criterio aproximado sobre como contar los picos para que no incluyan el ruido ni la mayoría de las 'cuentas oscuras'. En la figura 4 se puede observar el voltaje medido en oscuridad en función del tiempo y un histograma del mismo. Mirando el gráfico, se determinó a ojo que el voltaje mínimo para que un pulso sea considerado una cuenta fue aquel que es mayor al 99.999 % de las mediciones, siendo este valor  $V_t = -2mV$ .

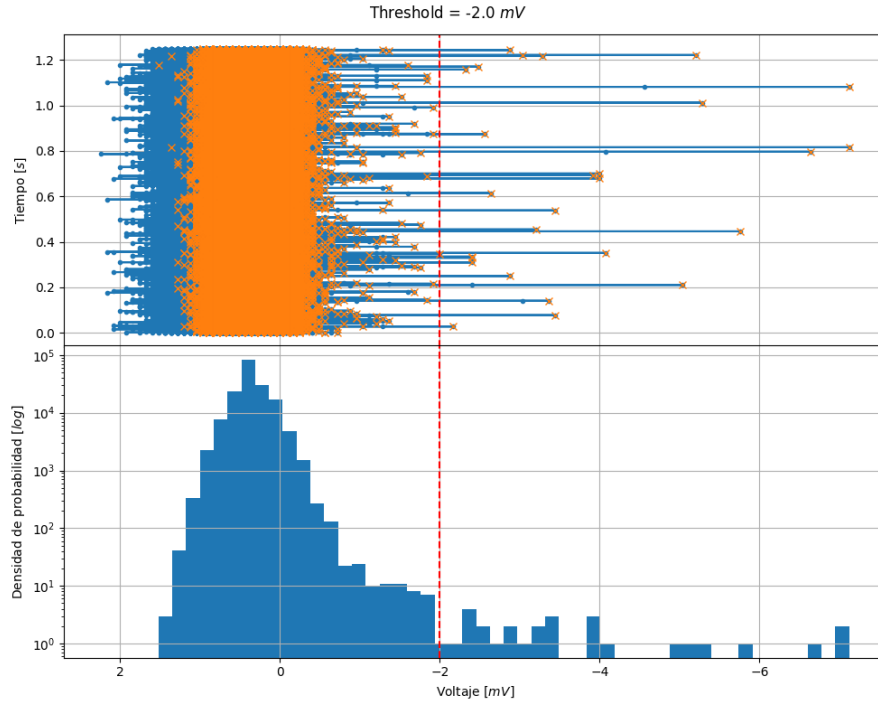


Figura 4: En el gráfico superior se puede observar el voltaje en función del tiempo de las 1000 pantallas en oscuridad, y en el gráfico inferior un histograma de la altura de los picos. En rojo se graficó el voltaje mínimo elegido.

Habiendo decidido un umbral, el primer caso a estudiar fue el de la fuente clásica de amplitud estable, para la cual bastaba encender el láser sin girar el disco. Se procedió a encender el láser y nuevamente se tomaron 1000 pantallas con una escala temporal de  $10\mu s$  siendo el tiempo de integración  $T = 100\mu s$ . Se analizaron la cantidad de picos y se realizó un histograma como se puede observar en la figura 5. A su vez, se graficó una distribución de Poisson (ecuación 2) utilizando el valor medio obtenido del histograma. El valor medio y la varianza del histograma difieren en menos del 3 %, por lo que concuerda con la varianza de la distribución de Poisson (ecuación 4). A su vez, utilizando la estadística  $\chi^2_\nu$  se obtuvo el valor de 0.645 que al ser cercano a 1 se puede concluir que la distribución teórica tiene el mismo orden de magnitud que los errores asociados a cada bin pero que sus valores son más cercanos al valor medio que los propios errores.

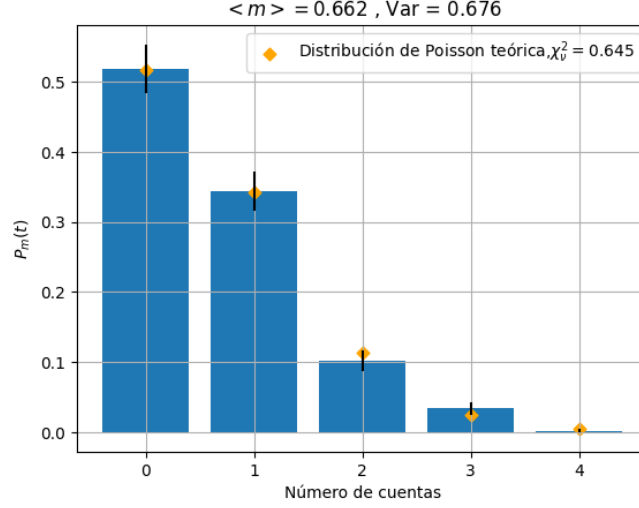


Figura 5: Histograma normalizado de la cantidad de cuentas medidas por pantalla en el caso de  $T=100\mu s$ . En naranja una distribución de Poisson tomando el valor medio del histograma.

Se quiso ver como cambiaban los resultados al cambiar el tiempo de integración  $T$ , y la intensidad  $I$ .

Primero se modificó el tiempo de integración tomando  $T = [12.5, 25, 50, 100]\mu s$ . En la figura 6 se realizó un ajuste lineal del número de cuentas en función del tiempo de integración según la ecuación 3 y se obtuvo que  $\epsilon I = 0,0065 \pm 0,0005$  cuentas/ $\mu s$  (o  $6,5 \pm 0,5$  cuentas/ $ms$ ).

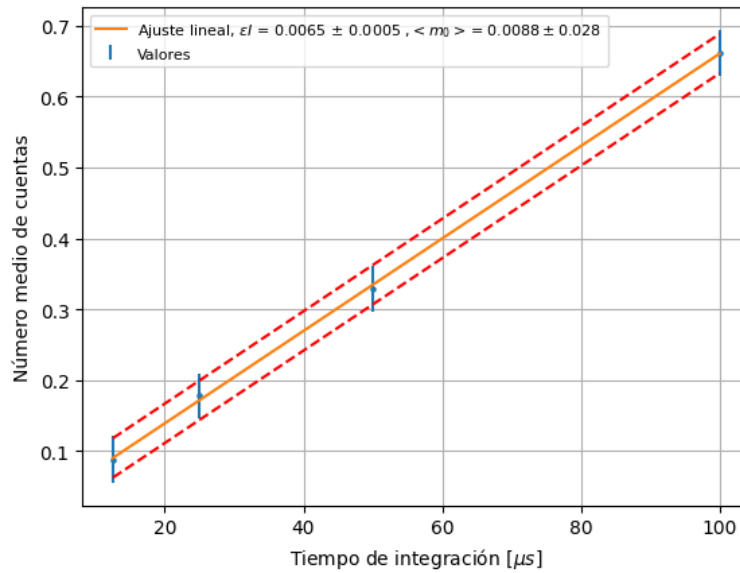


Figura 6: Ajuste lineal del valor medio de cuentas en función del tiempo de integración según la ecuación 3.

Se puede observar que se obtuvo una ordenada al origen no nula. El término  $\langle m_0 \rangle = 0,009 \pm 0,028$  *cuentas* es un término que no tiene sentido físico ya que implicaría que a tiempo de integración nulo se observan en promedio  $\langle m_0 \rangle$  cuentas. El motivo de este parámetro se puede deber a una no linealidad para tiempos de integración muy cortos, falta de datos para el ajuste o ambos.

Lo siguiente fue variar la intensidad. Se giró el polarizador para aumentar la intensidad del haz y se volvieron a medir 1000 pantallas con tiempo de integración  $T = 100\mu s$ . En la figura 7 se puede observar un histograma del número de cuentas y una distribución de Poisson utilizando como valor medio de número de cuentas el obtenido del histograma. Se puede observar que este valor medio aumentó al crecer la intensidad, como se esperaba de la ecuación 3, siendo ahora  $\langle m \rangle = 2,608$ . El valor medio y la varianza (2,514) del histograma difieren en menos del 4% y concuerda nuevamente con una distribución de Poisson, concordando también con las ecuaciones 2 y 4.

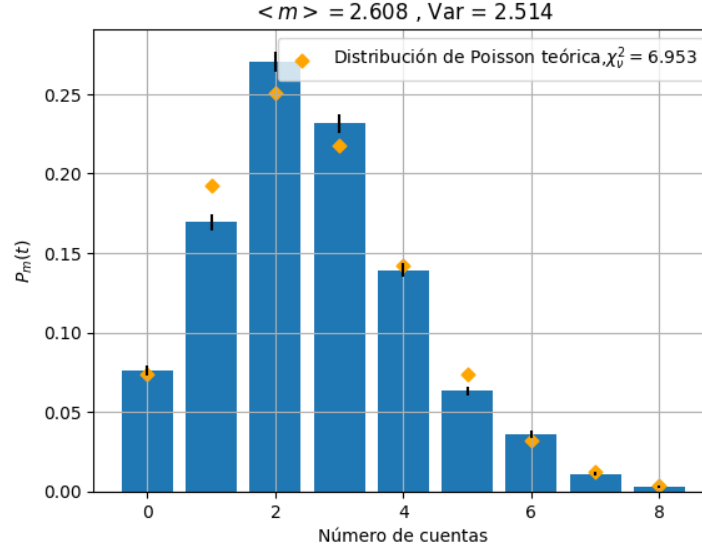


Figura 7: Histograma normalizado de la cantidad de cuentas medidas por pantalla. En naranja una distribución de Poisson tomando el valor medio del histograma.

Se procedió a estudiar la fuente pseudo-térmica. Se encendió el disco esmerilado para poder modificar el tiempo de coherencia del haz. En la figura 8 se puede observar el período de oscilación del disco en función del voltaje de alimentación.

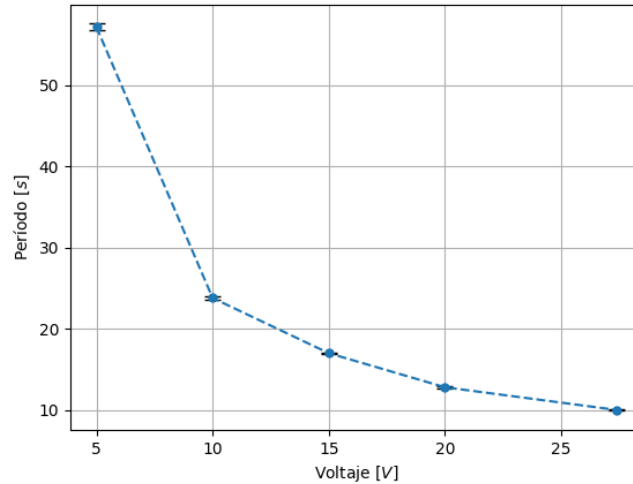


Figura 8: Período de oscilación en función del voltaje.

Para estimar el tiempo de coherencia de la fuente pseudo-térmica se tomó como resistencia de carga la del osciloscopio ( $1M\Omega$ ) y se llevó el experimento al régimen continuo (aumentando la intensidad del haz girando el polarizador), es decir, que la frecuencia de las cuentas sea mucho mayor a la resolución temporal. A su vez, se aumentaron los tiempos de integración. Se calculó la función de autocorrelación y tomando el criterio FWHM se estimó el tiempo de coherencia de la fuente en función del voltaje del disco. En la figura 9 se puede observar que el tiempo de coherencia aumentó cuando el voltaje del disco disminuyó.

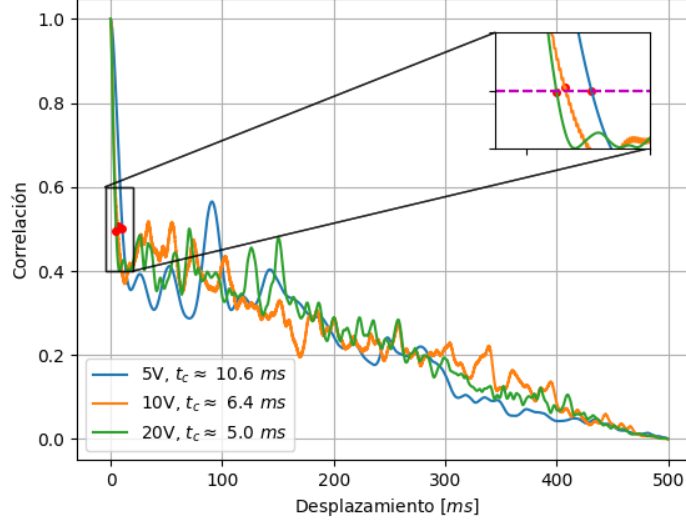


Figura 9: Autocorrelación en función del desplazamiento temporal.

Habiendo estimado los tiempos de coherencia, se procedió a analizar los dos casos propuestos. Primero, para el régimen  $T \ll t_c$ , se tomaron 1000 pantallas con un tiempo de integración de  $100\mu s$ . El disco estaba rotando con un período de  $[17,0 \pm 0,1]s$ . En la figura 10 se puede observar un histograma del número de cuentas en cada pantalla y una distribución de Bose-Einstein/Poisson usando el valor medio del histograma. A través del valor de  $\chi^2_\nu$  se puede observar que tanto la distribución de Bose-Einstein como la distribución de Poisson describen de manera correcta al sistema pero al tener la distribución de Poisson un valor menor de esta estadística se considera que estos datos se ajustan mejor a esta distribución.

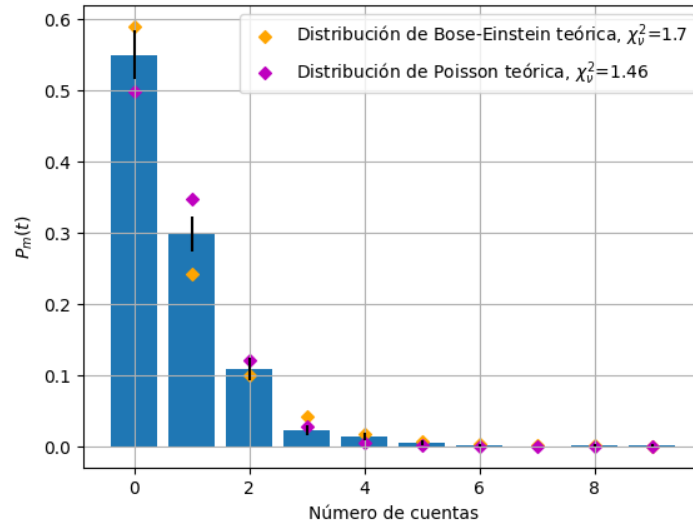


Figura 10: Histograma del número de cuentas por pantalla. En naranja/magenta una distribución de Bose-Einstein/Poisson usando como valor medio el obtenido por el histograma.

Se tomaron otras 1000 pantallas en el régimen  $T \gg t_c$ , tomando una escala temporal de  $100ms$  pero con el disco rotando con un período de  $12,8 \pm 0,1s$ . En la figura 11 se puede observar un histograma del número de cuentas en cada pantalla y una distribución de Bose-Einstein/Poisson usando el valor medio del histograma. A través del valor de  $\chi^2_\nu$  se puede observar que la distribución de Bose-Einstein no ajusta de manera correcta los datos observados y que la distribución de Poisson sí lo hace. El  $\chi^2_\nu$  de la distribución de Poisson es menor a 1 por lo que el ajuste teórico es más aproximado al valor medio del número de cuentas por bin que los errores asociados a los mismos.

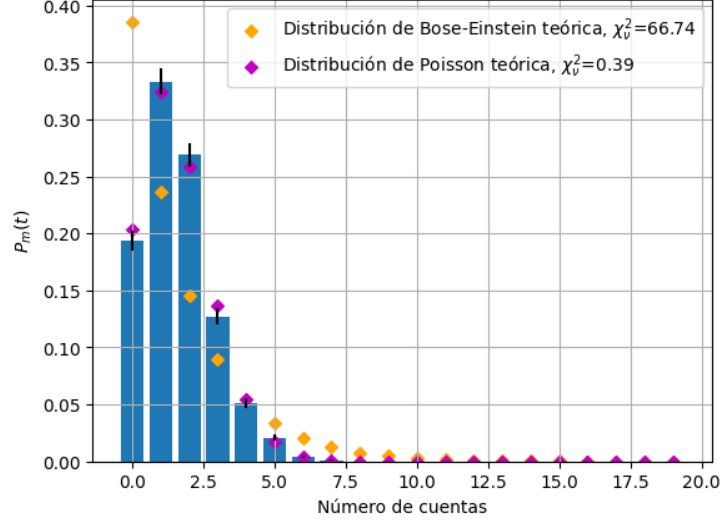


Figura 11: Histograma del número de cuentas por pantalla. En naranja una distribución de Poisson usando como valor medio el obtenido por el histograma.

Se tomaron 1000 pantallas en el régimen  $T \sim t_c$  tomando una escala temporal de  $1ms$  con la misma configuración del disco. En la figura 12 se puede observar un histograma del número de cuentas en cada pantalla y una distribución de Bose-Einstein/Poisson usando el valor medio del histograma. A través del valor de  $\chi^2_\nu$  se puede observar que tanto la distribución de Bose-Einstein como la distribución de Poisson no pueden ajustar los datos observados.

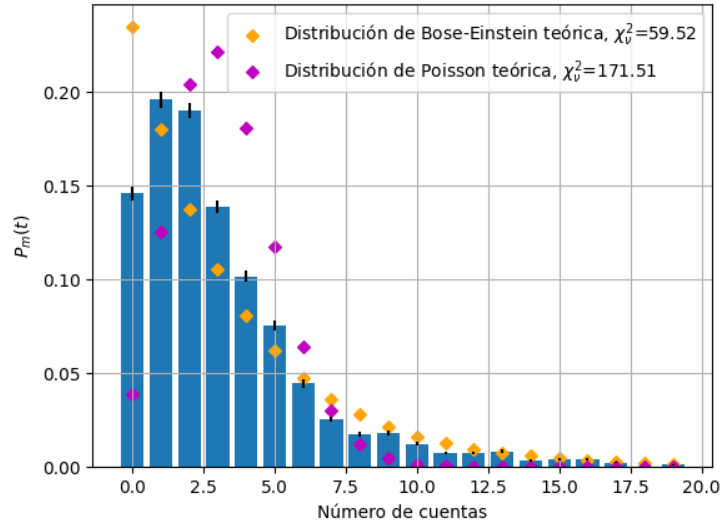


Figura 12: Histograma del número de cuentas por pantalla. En naranja/magenta una distribución de Bose-Einstein/Poisson usando como valor medio el obtenido por el histograma.

Según la figura 9 este tiempo de integración es similar al tiempo de coherencia pero para tiempos menores que el mismo se siguió observando una distribución de Poisson por lo que concluimos que este tiempo de integración no puede ser similar al tiempo de coherencia.



## 4. Conclusiones

Concluimos que para tiempos de integración mayores que el tiempo de coherencia la distribución que describe el número de cuentas es la de Poisson. No se pudo observar el régimen de tiempo de coherencia similar al tiempo de integración debido a que no se pudo estimar de manera precisa el tiempo de coherencia. Para tiempos de integración menores que el tiempo de coherencia (en nuestro caso creemos que fue de al menos 1 orden de magnitud) observamos que el número de cuentas puede ser descripta de mejor manera por una distribución de Poisson que por una distribución de Bose-Einstein. Esto se contradice con la ecuación 5 que hace referencia a la distribución que debería seguir el número de cuentas con tiempos de integración corto. Creemos que esto se debe a que el tiempo de integración utilizado no cumplió la condición de que sea menor que el tiempo de coherencia. Para menores tiempos de integración permitidos por el osciloscopio no fue posible observar picos definidos por lo que una posible mejora de este trabajo sería poder observar múltiples cuentas en tiempos de integración más cortos (utilizando resistencias de carga con menor resistencia y con una mejor resolución temporal). Además, se podría calcular de manera precisa el tiempo de coherencia utilizando un interferómetro o estudiando el espectro de emisión del láser.

## Referencias

- [1] Laboratorio 5. *Guía del laboratorio. Conteo de eventos y estadística de fotones*. URL: <https://materias.df.uba.ar/l5b2018c2/files/2013/02/guia.pdf>.
- [2] Electron Tube Division Hamamatsu Photonics K.K. *Photon Counting Using Photomultiplier Tubes*. URL: [http://users.df.uba.ar/bragas/Labo5\\_1er2011/PMT\\_photoncounting.pdf](http://users.df.uba.ar/bragas/Labo5_1er2011/PMT_photoncounting.pdf).
- [3] P. Koczyk, P. Wiewiór y C. Radzewicz. «Photon counting statistics - Undergraduate experiment». En: *American Journal of Physics* 64 (1996), pág. 241. URL: [https://materias.df.uba.ar/labo5a2013v/files/2013/02/Koczyk\\_photon-counting-statistics\\_AmJPhys\\_64\\_241\\_1996.pdf](https://materias.df.uba.ar/labo5a2013v/files/2013/02/Koczyk_photon-counting-statistics_AmJPhys_64_241_1996.pdf).
- [4] Rodney Loudon. *The Quantum Theory of Light*. 3.<sup>a</sup> ed. Oxford University Press, 2000, págs. 93-95.
- [5] M. L. Martinez Ricci et al. «Photon counting statistics using a digital oscilloscope». En: *American Journal of Physics* 75 (2007), pág. 707. URL: [https://materias.df.uba.ar/labo5a2013v/files/2013/02/MartinezRicci\\_photoncountingoscilloscope\\_AmJPhys\\_75\\_707\\_2007.pdf](https://materias.df.uba.ar/labo5a2013v/files/2013/02/MartinezRicci_photoncountingoscilloscope_AmJPhys_75_707_2007.pdf).