



## Informe de Adscripción a la cátedra

# Física II

## Sistema de $n$ grados de libertad

Adscripto: Agustín Rafaelli – R-4398/2 – Estudiante de Ingeniería Civil

Director de la adscripción: Carlos Mauricio Silva – JTP Física II

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Dos Péndulos Acoplados</b>	<b>4</b>
2.1. Sistema en estudio . . . . .	4
2.2. Ecuaciones de movimiento . . . . .	5
2.2.1. Ecuaciones de movimiento masa a ( $m_a$ ) . . . . .	5
2.2.2. Ecuaciones de movimiento masa b $m_b$ . . . . .	6
2.3. Modos Normales . . . . .	6
2.3.1. Modo Normal 1 . . . . .	7
2.3.2. Modo Normal 2 . . . . .	9
2.4. Movimiento General del Sistema . . . . .	10
2.4.1. Condiciones Iniciales . . . . .	11
2.4.2. Movimiento Masa a . . . . .	13
2.4.3. Movimiento Masa b . . . . .	14
<b>3. Simulación computacional del sistema</b>	<b>16</b>
3.1. Modelo Físico . . . . .	16
3.2. Modelo Computacional . . . . .	17
3.2.1. $k_1$ . . . . .	18
3.2.2. $k_2$ . . . . .	18
3.2.3. $k_3$ . . . . .	18
3.2.4. $k_4$ . . . . .	19
3.2.5. Valores finales . . . . .	19
<b>4. Actividades</b>	<b>20</b>
4.1. Ejercicio 1 . . . . .	20
4.2. Ejercicio 2 . . . . .	20
<b>5. Bibliografía</b>	<b>21</b>
<b>A. Análisis Matricial</b>	<b>22</b>
A.1. Autovectores - modos normales . . . . .	23
A.1.1. Modo 1 - Para $\omega_1^2 = \frac{g}{L}$ . . . . .	23
A.1.2. Modo 2 - Para $\omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{2k}{m}$ . . . . .	24
A.2. Condiciones iniciales . . . . .	24
A.3. Coordenadas de movimiento de las masas . . . . .	24
A.3.1. Coordenada masa a . . . . .	24
A.3.2. Coordenada masa b . . . . .	25

# Presentación

Este trabajo de adscripción se llevó a cabo en el marco de la cátedra de Física II, bajo la supervisión del profesor Carlos Mauricio Silva. Se abordó el problema de oscilaciones acopladas de dos masas unidas por un resorte.

En la Sección 1 se presenta una introducción que justifica el análisis y comprensión de este tipo de sistemas. Posteriormente, en la Sección 2, se intenta encontrar soluciones analíticas para el problema. Para lograr esto, se realizó un análisis matricial detallado, el cual se describe en el Apéndice A.

Llegando al núcleo de este trabajo de adscripción, se llevó a cabo una simulación computacional del problema. Para ello, se emplearon métodos numéricos, específicamente el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Este enfoque permitió realizar la simulación de manera efectiva. La implementación de la simulación se encuentra disponible en el siguiente repositorio en GitHub.

- Repositorio: <https://github.com/agusrafa/coupled-double-pendulum.git>
- Link página web: <https://agusrafa.github.io/coupled-double-pendulum/>

En la sección 3 se describe el método empleado.

Por último, en la sección 4 se presentan algunas actividades que un docente puede incluir en su guía de trabajos prácticos para que el estudiante saque el máximo provecho de la simulación. Esto, desde luego, deberá adaptarse a los objetivos de aprendizaje que el equipo de cátedra proponga en cada caso.

## 1. Introducción

Las oscilaciones de  $n$  grados de libertad son fenómenos frecuentes en diversos sistemas de la realidad, desde estructuras mecánicas hasta circuitos eléctricos. Estudiar y comprender el análisis de estas oscilaciones resulta de gran interés, ya que nos brinda una comprensión más profunda de los comportamientos dinámicos y vibracionales que se presentan en estos sistemas complejos.

En este informe, nos introduciremos en la idea general de las oscilaciones de  $n$  grados de libertad a partir de un ejemplo sencillo. A través del estudio de estas oscilaciones, podremos apreciar cómo los diferentes grados de libertad interactúan entre sí, generando patrones de movimiento y características específicas.

A lo largo de este trabajo, entenderemos los conceptos fundamentales, las ecuaciones de movimiento y las herramientas matemáticas necesarias para analizar y

comprender este fenómeno físico. Al finalizar, realizaremos una simulación física numérica del problema el cual nos permita visualizar y comprender los parámetros y resultados del sistema.

## 2. Dos Péndulos Acoplados

### 2.1. Sistema en estudio

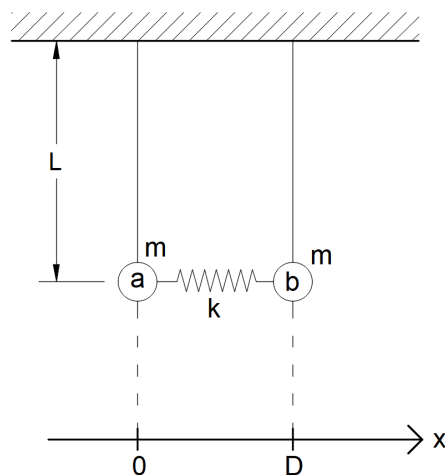


Figura 1: Esquema del Sistema

El sistema está conformado por dos péndulos materializados como varillas rígidas, las cuales pueden pivotar respecto a la parte superior del sistema, de modo que oscilan sin fricción en el plano del papel. Las masas en los extremos de las varillas están acopladas mediante un resorte de constante  $k$ .

Consideraremos el movimiento libre del sistema, sin fuerzas externas aparte de la gravedad. Este es un ejemplo clásico de dos “osciladores acoplados”. El resorte que conecta los dos osciladores es el acoplamiento, el cual se denomina generalmente muelle. Supondremos que el resorte, como se muestra en la Figura 1, está sin estirar cuando los dos péndulos cuelgan rectos hacia abajo, siendo esta la posición de equilibrio del sistema, siendo  $x = 0$  la posición de reposo de la masa a y  $x = D$  la posición de reposo de la masa b.

Este caso de estudio es un problema de un sistema con dos grados de libertad, porque se requieren dos cantidades, las desviaciones de cada uno de las dos masas desde el equilibrio, para especificar la configuración del sistema. Para resolver este problema, realizamos algunas suposiciones para poder simplificar el análisis. Va-

mos a considerar que ambos péndulos tienen una longitud  $L$  y que ambas masas son iguales, es decir  $m_1 = m_2 = m$ .

## 2.2. Ecuaciones de movimiento

Supongamos que las masas se mueven hacia la derecha, en sentido de las  $x$  positivas. Teniendo en cuenta este movimiento, realizamos el diagrama de cuerpo libre del sistema como se muestra en la Figura 2.

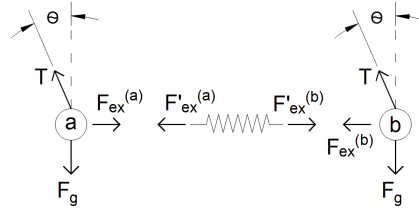


Figura 2: Diagrama cuerpo libre del sistema

### 2.2.1. Ecuaciones de movimiento masa a ( $m_a$ )

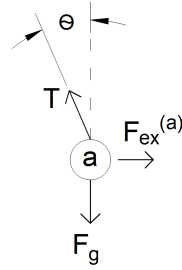


Figura 3: Diagrama cuerpo libre masa a

Cuando las masas se mueven horizontalmente, también se moverán verticalmente, debido a que la longitud de los péndulos se mantiene fija. Por lo tanto, utilizando la segunda ley de Newton, observando la Figura 2, tenemos:

#### Dirección vertical

Consideraremos una aproximación para ángulos pequeños  $\Rightarrow \theta \ll 1 \text{ rad} \rightarrow \cos \theta \approx 1$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= m \cdot \ddot{y}_a \\ T \cdot \cos \theta + F_g &= m \cdot \ddot{y}_a \\ T + F_g &= m \cdot \ddot{y}_a\end{aligned}$$

Como  $T = m \cdot g$ , podemos considerar que el sistema no se desplaza en sentido vertical.

### Dirección horizontal

$$\begin{aligned}\sum F_x &= m \cdot \ddot{x}_a \\ T_x + F_{ex}^{(a)} &= m \cdot \ddot{x}_a\end{aligned}$$

Sabemos que por la Ley de Hooke, la fuerza del resorte debido al desplazamiento de la masa es  $F_e = -k \cdot \Delta$ . Como la fuerza que ejerce el resorte sobre  $m$  es su opuesta, entonces:

$$F_{ex}^{(a)} = -(-k \cdot \Delta) = -(k \cdot ((x_b - D) - x_a)) = -k \cdot (x_a - (x_b - D))$$

Por otro lado, que la componente  $|T_x| = \frac{m \cdot g}{L} x$ . Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la masa a nos queda de la siguiente manera.

$$-\frac{m \cdot g}{L} \cdot x_a - k \cdot (x_a - (x_b - D)) = m \cdot \ddot{x}_a \quad (1)$$

#### **2.2.2. Ecuaciones de movimiento masa b $m_b$**

Realizando el mismo análisis que con  $m_a$  llegamos a la siguiente ecuación de movimiento de la masa b.

$$-\frac{m \cdot g}{L} \cdot (x_b - D) - k \cdot ((x_b - D) - x_a) = m \cdot \ddot{x}_b \quad (2)$$

### **2.3. Modos Normales**

En este apartado, veremos que el movimiento más general posible de este sistema, y de cualquier sistema similar de  $n$  osciladores, puede descomponerse en

soluciones particularmente simples, en las cuales todos los grados de libertad oscilan con la misma frecuencia y con una forma bien definida. Estas soluciones simples se llaman **“modos normales”**. Los desplazamientos para el movimiento más general se pueden escribir como sumas de las soluciones sencillas. En un término más matemático, diremos que el movimiento más general posible es una combinación lineal de los modos normales. Esto lo desarrollaremos en detalle más adelante, pero puede ser útil tener una noción de lo que vamos a hacer.

El nombre “normal” proviene de una definición matemática derivada del álgebra lineal. Ningún modo normal puede ser una combinación lineal de los otros modos normales, ya que cada uno corresponde a un posible movimiento independiente del sistema físico con su propia frecuencia. La forma matemática de expresar esto es que el conjunto de todos los modos normales es “linealmente independiente”, lo que significa que dichos modos son ortogonales entre sí, de ahí el nombre. Otro detalle a tener en cuenta es que existen  $n$  modos normales, donde  $n$  es el número de grados de libertad del sistema.

Para este sistema, el modo normal con la frecuencia más baja es aquel en el cual los desplazamientos de los dos bloques son iguales. El otro modo normal es aquel en el cual los desplazamientos de los dos bloques son opuestos.

### 2.3.1. Modo Normal 1

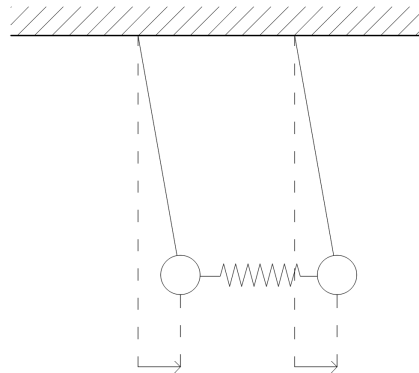


Figura 4: Modo 1

Aquí el sistema esta en fase, por lo tanto sumamos las ecuaciones (1) y (2).

$$\begin{array}{rcl}
-\frac{m \cdot g}{L} \cdot x_a & -k \cdot (x_a - (x_b - D)) & = m \cdot \ddot{x}_a \\
+ & & \\
-\frac{m \cdot g}{L} \cdot (x_b - D) & -k \cdot ((x_b - D) - x_a) & = m \cdot \ddot{x}_b \\
\hline
-\frac{m \cdot g}{L} \cdot (x_a + x_b - D) & + k \cdot 0 & = m \cdot (\ddot{x}_a + \ddot{x}_b)
\end{array} \tag{3}$$

Simplificamos ahora la ecuación (3).

$$\begin{aligned}
-\frac{m \cdot g}{L} \cdot (x_a + x_b - D) &= m \cdot (\ddot{x}_a + \ddot{x}_b) \\
-\frac{g}{L} \cdot (x_a + x_b - D) &= (\ddot{x}_a + \ddot{x}_b)
\end{aligned} \tag{4}$$

Se puede observar en (4) que resulta conveniente definir una función  $\varphi_1$ , la cual representa la suma de las coordenadas de ambas masas. Lo que hacemos aquí es, de alguna manera, simplificar nuestro estudio centrándonos en esta nueva función. Por lo tanto, para describir este modo, nos referiremos a cómo varía en función del tiempo la suma de las coordenadas de cada masa. A estas funciones se les denomina “coordenadas normales”.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (x_a + x_b - D) \\
\dot{\varphi}_1 &= \dot{x}_a + \dot{x}_b \\
\ddot{\varphi}_1 &= \ddot{x}_a + \ddot{x}_b
\end{aligned}$$

Ahora reemplazamos dicha función en (4).

$$\begin{aligned}
-\frac{g}{L} \cdot \varphi_1 &= \ddot{\varphi}_1 \\
\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{L} \cdot \varphi_1 &= 0 \quad \implies \ddot{x} + \omega_1^2 \cdot x = 0
\end{aligned}$$

La solución de dicha ecuación diferencial es una función armónica sinusoidal del tipo:

$$\varphi_1 = A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \Phi) \quad \omega_1^2 = \frac{g}{L}$$

Es interesante observar que el sistema funciona como un único péndulo, por lo tanto, si se cortara el resorte que los une, el sistema seguirá oscilando de la misma manera. En consecuencia, para este modo normal, el acoplamiento no interviene.



### 2.3.2. Modo Normal 2

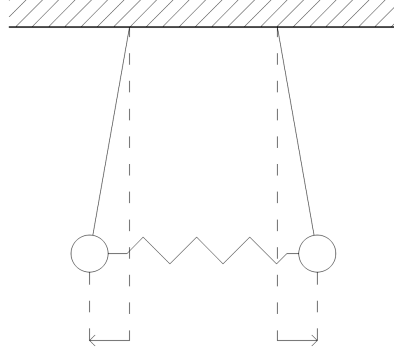


Figura 5: Modo 2

Aquí el sistema está fuera de fase, por lo que restamos las ecuaciones (1) y (2).

$$\begin{array}{rcl}
 -\frac{m \cdot g}{L} \cdot x_a & -k \cdot (x_a - (x_b - D)) & = m \cdot \ddot{x}_a \\
 -\frac{m \cdot g}{L} \cdot (x_b - D) & -k \cdot ((x_b - D) - x_a) & = m \cdot \ddot{x}_b
 \end{array} \tag{5}$$

---


$$-\frac{m \cdot g}{L} \cdot (x_a - x_b + D) + k \cdot (2 \cdot x_a - 2 \cdot (x_b - D)) = m \cdot (\ddot{x}_a - \ddot{x}_b)$$

Simplificamos ahora la ecuación (5).

$$\begin{aligned}
 -\frac{m \cdot g}{L} \cdot (x_a - x_b + D) + \frac{m}{m} k \cdot (2 \cdot x_a - 2 \cdot (x_b - D)) &= m \cdot (\ddot{x}_a - \ddot{x}_b) \\
 -\frac{g}{L} \cdot (x_a - x_b + D) + \frac{2k}{m} (x_a - x_b + D) &= \ddot{x}_a - \ddot{x}_b \\
 -\left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right) \cdot (x_a - x_b + D) &= \ddot{x}_a - \ddot{x}_b
 \end{aligned} \tag{6}$$

Nuevamente resulta útil definir una nueva función  $\varphi_2$ . Esta función describe como varía la distancia que existe entre dichas masas.

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 &= (x_a - x_b + D) \\
 \dot{\varphi}_2 &= \dot{x}_a - \dot{x}_b \\
 \ddot{\varphi}_2 &= \ddot{x}_a - \ddot{x}_b
 \end{aligned}$$

Reemplazamos dicha función en (6).

$$\begin{aligned} -\left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right) \cdot \varphi_2 &= \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right) \cdot \varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

La solución de esta nueva ecuación diferencial es nuevamente una función armónica sinusoidal del tipo:

$$\varphi_2 = A \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \Phi) \quad \omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{2k}{m}$$

A diferencia del modo anterior, aquí sí interviene el acoplamiento. Esto resulta relevante observarlo ya que si la constante  $k \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_1 \approx \omega_2$ , por lo que cada péndulo sería independiente entre sí y no tendrían un acoplamiento entre ellos. Una manera de que esto suceda es si movemos el resorte hacia arriba, como se muestra en la Figura 6, alejándolo de las masas hasta que llega al borde donde los péndulos pivotean.

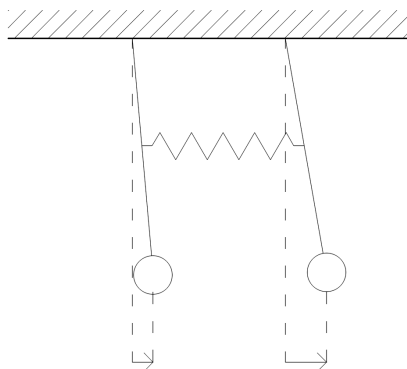


Figura 6: Ejemplo para  $k \rightarrow 0$

## 2.4. Movimiento General del Sistema

Como mencionamos anteriormente, el movimiento más general del sistema se puede escribir como la suma de sus modos normales. Para poder hallar dicha ecuación, utilizaremos las condiciones iniciales del sistema para definir ciertos parámetros y recurriremos a utilizar las coordenadas normales.

En el Apéndice A, se encuentra explicado este mismo procedimiento, pero realizado con matrices, el cual es el procedimiento más adecuado para poder resolver este

tipo de problemas de  $n$  grados de libertad. Se menciona esto, ya que al resolver el problema de esta manera, se comprende de mejor manera por qué se suman las coordenadas normales para hallar el movimiento  $x_a(t)$  y por qué se restan para hallar  $x_b(t)$ .

#### 2.4.1. Condiciones Iniciales

Supongamos que la masa  $m_a$  se encuentra en reposo y se aparta de su posición de reposo a la masa  $m_b$  una distancia  $A_0$ , como muestra la Figura 7.

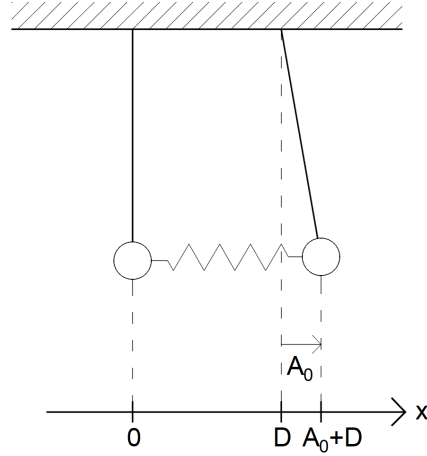


Figura 7: Posición Inicial del Sistema

Nuestras condiciones iniciales del sistema son:

##### Posiciones

##### Modo 1

$$\begin{aligned}\varphi_1(0) &= x_a(0) + x_b(0) - D \\ \varphi_1(0) &= 0 + A_0 + D - D = A_0 \\ \varphi_1(0) &= A_0\end{aligned}\tag{7}$$

##### Modo 2

$$\begin{aligned}\varphi_2(0) &= x_a(0) - (x_b(0) - D) \\ \varphi_2(0) &= 0 + -(A_0 + D - D) = -A_0 \\ \varphi_2(0) &= -A_0\end{aligned}\tag{8}$$

## Velocidades

### Modo 1

$$\dot{\varphi}_1(0) = 0 \quad (9)$$

### Modo 2

$$\dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (10)$$

Como mencionamos anteriormentes, las funciones  $\varphi_1(t)$  y  $\varphi_2(t)$  son funciones armónicas. Por lo tanto, las velocidades y las funciones de posición son las siguientes:

### Modo 1

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \Phi_1) \\ \dot{\varphi}_1(t) &= -A_1 \cdot \omega_1 \sin(\omega_1 \cdot t + \Phi_1)\end{aligned}$$

Utilizando (9) y (7) obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1(0) &= -A_1 \cdot \omega_1 \sin(\omega_1 \cdot 0 + \Phi_1) \\ 0 &= \sin(\Phi_1) \\ \Phi_1 &= 0 \\ \varphi_1(0) &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot 0) \\ A_0 &= A_1\end{aligned}$$

Utilizando (10) y (8) obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_2(0) &= -A_2 \cdot \omega_2 \sin(\omega_2 \cdot 0 + \Phi_2) \\ 0 &= \sin(\Phi_2) \\ \Phi_2 &= 0 \\ \varphi_2(0) &= A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot 0) \\ -A_0 &= A_2\end{aligned}$$

Reescribimos las coordenadas normales con los valores obtenidos con las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= A_0 \cdot \cos(\omega_1 t) \\ \varphi_2(t) &= -A_0 \cdot \cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

### 2.4.2. Movimiento Masa a

$$\begin{aligned}\varphi_1 + \varphi_2 &= (x_a + x_b - D) + (x_a - x_b + D) \\ \varphi_1 + \varphi_2 &= x_a + x_a = 2x_a \\ \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} &= x_a\end{aligned}$$

Reemplazo.

$$\begin{aligned}x_a &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot A_0 \cdot (\cos(\omega_1 \cdot t) - \cos(\omega_2 \cdot t)) \\ x_a &= -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot A_0 \cdot \left[ \underbrace{\text{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right)}_{\text{Oscilación rápida}} \cdot \underbrace{\text{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)}_{\text{Oscilación lenta}} \right] \\ x_a &= -A_0 \cdot \left[ \text{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \right]\end{aligned}$$

Notar que esta ecuación es un ejemplo de un batido.

$\text{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) \rightarrow$  Notemos que este término representa una oscilación que tiene una frecuencia la cual es el promedio de las frecuencias normales. Por lo tanto, es una frecuencia “grande”.

$\text{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \rightarrow$  Este término es un factor que funciona como un modulador de la amplitud. La frecuencia de esta oscilación es la semiresta de las frecuencias normales. Por lo tanto, es pequeña.

**Ejemplo** En este ejemplo consideramos  $L = 0,5m$ ,  $k = 100 \frac{N}{m}$ ,  $m = 5kg$ ,  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$  y  $A_0 = 5cm = 50mm$  Calculamos las frecuencias normales.

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{9,81}{0,5}} = 4,43s^{-1} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{9,81}{0,5} + \frac{2 \cdot 100}{5}} = 7,72s^{-1}\end{aligned}$$

De esta manera, podemos obtener la ecuación de movimiento de la masa  $m_a$ . A continuación, se muestra una gráfica de este movimiento.

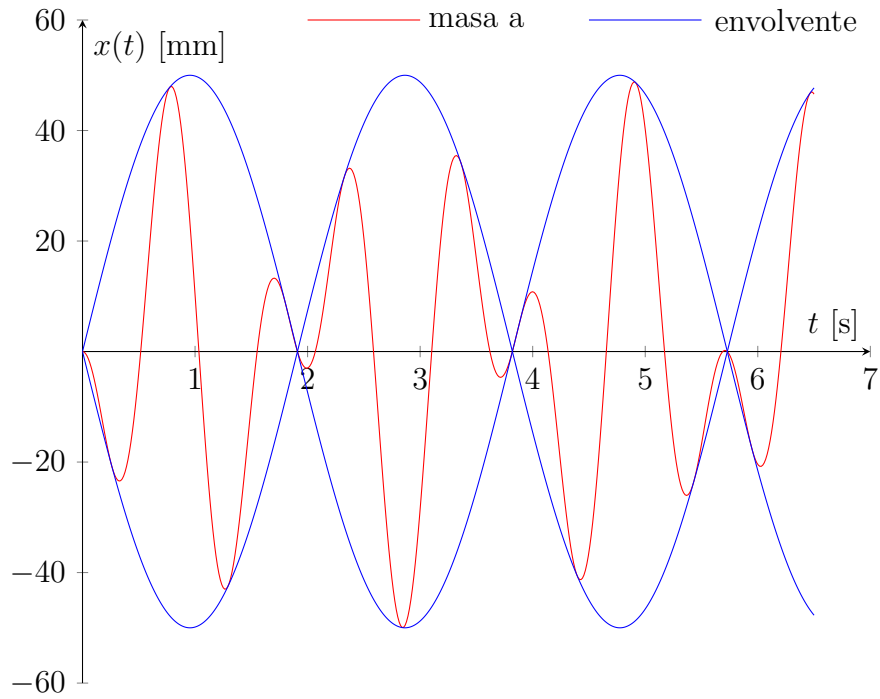


Figura 8: Gráfica Movimiento masa a, Ejemplo

### 2.4.3. Movimiento Masa b

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (x_a + x_b - D) - (x_a - x_b + D)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2 \cdot x_b + D$$

$$x_b = D + \frac{1}{2} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$x_b = D + \frac{1}{2} \cdot (A_0 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + A_0 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t))$$

$$x_b = D + \frac{A_0}{2} \cdot (\cos(\omega_1 \cdot t) + \cos(\omega_2 \cdot t))$$

$$x_b = D + A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

**Continuación del Ejemplo** Como calculamos anteriormente, las frecuencias normales son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9,81}{0,5}} = 4,43s^{-1}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{9,81}{0,5} + \frac{2 \cdot 100}{5}} = 7,72s^{-1}$$

De esta manera podemos obtener la ecuación de movimiento de la masa  $m_b$ . A continuación se muestra una gráfica de este movimiento.

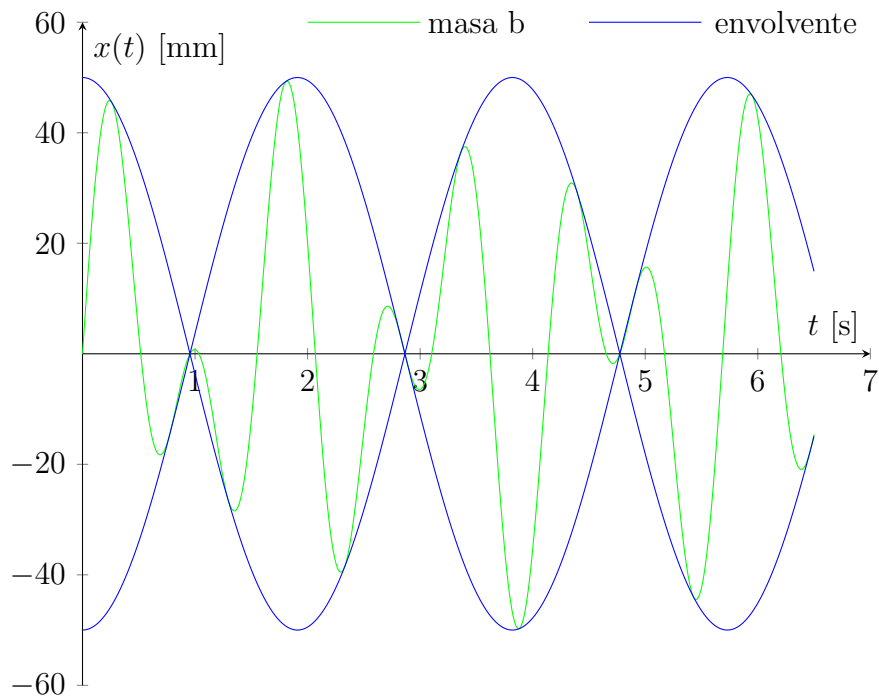


Figura 9: Gráfica Movimiento masa b, Ejemplo.

### 3. Simulación computacional del sistema

En este caso, es sencillo encontrar las soluciones analíticas del problema, pero existen casos más complejos en los cuales no se pueden determinar las soluciones analíticamente. En este apartado, desarrollamos también otra manera de resolver el problema a través de un análisis numérico, utilizando el famoso método de Runge-Kutta de 4to Orden.

#### 3.1. Modelo Físico

El problema puede ser modelado matemáticamente mediante un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden.

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_a = -\left(k + \frac{mg}{L}\right) \cdot x_a + k \cdot x_b \\ m \cdot \ddot{x}_b = k \cdot x_a - \left(k + \frac{mg}{L}\right) \cdot x_b \end{cases}$$

Reescribimos el mismo sistema de manera que el término de la masa quede en el otro lado de la igualdad.

$$\begin{cases} \ddot{x}_a = -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot x_a + \frac{k}{m} \cdot x_b \\ \ddot{x}_b = \frac{k}{m} \cdot x_a - \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot x_b \end{cases}$$

El método de Runge-Kutta es un método numérico ampliamente empleado para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden o sistemas de EDO de primer orden. Este método también es aplicable a ecuaciones diferenciales de orden superior, siendo posible lograr esto mediante la conversión de dichas ecuaciones en un sistema de ecuaciones de primer orden.

$$\begin{cases} \dot{x}_a = v_a \\ \dot{v}_a = -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot x_a + \frac{k}{m} \cdot x_b \\ \dot{x}_b = v_b \\ \dot{v}_b = \frac{k}{m} \cdot x_a - \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot x_b \end{cases}$$

Ahora podremos utilizar Runge-Kutta de 4to Orden. Utilizaremos el método más clásico del mismo donde:

$$y_{(i+1)} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \cdot h$$



siendo:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(y_i) \\k_2 &= f(y_i + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h) \\k_3 &= f(y_i + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot h) \\k_4 &= f(y_i + k_3 \cdot h) \\h &= \text{incremento}\end{aligned}$$

En nuestro problema, hay que resolver 4 ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, cada función tiene sus constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$ .

### 3.2. Modelo Computacional

Desarrollaremos cómo proceder numéricamente para poder resolver el problema.

$$\begin{cases} \dot{x}_a = & f(v_a) = v_a \\ \dot{v}_a = & g(x_a, x_a) = -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot x_a + \frac{k}{m} \cdot x_b \\ \dot{x}_b = & p(v_a) = v_b \\ \dot{v}_b = & j(x_a, x_a) = \frac{k}{m} \cdot x_a - \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot x_b \end{cases}$$

Como podemos ver, las funciones corresponden a las siguientes variables.

$$\begin{aligned}f &\longrightarrow \text{para } x_a \\g &\longrightarrow \text{para } v_a \\p &\longrightarrow \text{para } x_b \\j &\longrightarrow \text{para } v_b\end{aligned}$$

Ahora calcularemos cada constante  $k$ .

### 3.2.1. $k_1$

$$k_{1f} = f(v_a) = v_{a(n)}$$

$$k_{1g} = g(x_a, x_b) = -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot x_{a(n)} + \frac{k}{m} \cdot x_{b(n)}$$

$$k_{1p} = p(v_b) = v_{b(n)}$$

$$k_{1j} = j(x_a, x_b) = \frac{k}{m} \cdot x_{a(n)} - \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot x_{b(n)}$$

### 3.2.2. $k_2$

$$k_{2f} = f\left(v_a + \frac{k_{1g}}{2}\right) = v_{a(n)} + \frac{k_{1g}}{2}$$

$$k_{2g} = g\left(x_a + \frac{k_{1f}}{2}, x_b + \frac{k_{1p}}{2}\right) = -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot \left(x_{a(n)} + \frac{k_{1f}}{2}\right) + \frac{k}{m} \cdot \left(x_{b(n)} + \frac{k_{1p}}{2}\right)$$

$$k_{2p} = p\left(v_b + \frac{k_{1j}}{2}\right) = v_{b(n)} + \frac{k_{1j}}{2}$$

$$k_{2j} = j\left(x_a + \frac{k_{1f}}{2}, x_b + \frac{k_{1p}}{2}\right) = \frac{k}{m} \cdot \left(x_{a(n)} + \frac{k_{1f}}{2}\right) - \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot \left(x_{b(n)} + \frac{k_{1p}}{2}\right)$$

### 3.2.3. $k_3$

$$k_{3f} = f\left(v_a + \frac{k_{2g}}{2}\right) = v_{a(n)} + \frac{k_{2g}}{2}$$

$$k_{3g} = g\left(x_a + \frac{k_{2f}}{2}, x_b + \frac{k_{2p}}{2}\right) = -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot \left(x_{a(n)} + \frac{k_{2f}}{2}\right) + \frac{k}{m} \cdot \left(x_{b(n)} + \frac{k_{2p}}{2}\right)$$

$$k_{3p} = p\left(v_b + \frac{k_{2j}}{2}\right) = v_{b(n)} + \frac{k_{2j}}{2}$$

$$k_{3j} = j\left(x_a + \frac{k_{2f}}{2}, x_b + \frac{k_{2p}}{2}\right) = \frac{k}{m} \cdot \left(x_{a(n)} + \frac{k_{2f}}{2}\right) - \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot \left(x_{b(n)} + \frac{k_{2p}}{2}\right)$$

### 3.2.4. $k_4$

$$k_{4f} = f\left(v_a + k_{3g}\right) = v_{a(n)} + k_{3g}$$

$$k_{4g} = g\left(x_a + k_{3f}, x_b + k_{3p}\right) = -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot \left(x_{a(n)} + k_{3f}\right) + \frac{k}{m} \cdot \left(x_{b(n)} + k_{3p}\right)$$

$$k_{4p} = p\left(v_b + k_{3j}\right) = v_{b(n)} + k_{3j}$$

$$k_{4j} = j\left(x_a + k_{3f}, x_b + k_{3p}\right) = \frac{k}{m} \cdot \left(x_{a(n)} + k_{3f}\right) - \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) \cdot \left(x_{b(n)} + k_{3p}\right)$$

### 3.2.5. Valores finales

Finalmente, una vez calculadas las constantes  $k$ , podremos calcular los próximos valores de cada función.

$$\begin{cases} x_{a(n+1)} = x_{an} + \frac{1}{6} \cdot (k_{1f} + 2 \cdot k_{2f} + 2 \cdot k_{3f} + k_{4f}) \cdot h \\ v_{a(n+1)} = v_{an} + \frac{1}{6} \cdot (k_{1g} + 2 \cdot k_{2g} + 2 \cdot k_{3g} + k_{4g}) \cdot h \\ x_{b(n+1)} = x_{bn} + \frac{1}{6} \cdot (k_{1p} + 2 \cdot k_{2p} + 2 \cdot k_{3p} + k_{4p}) \cdot h \\ v_{b(n+1)} = v_{bn} + \frac{1}{6} \cdot (k_{1j} + 2 \cdot k_{2j} + 2 \cdot k_{3j} + k_{4j}) \cdot h \end{cases}$$

## 4. Actividades

### 4.1. Ejercicio 1

¿Qué es un sistema de oscilación de  $n$  grados de libertad?

¿Cómo se define un grado de libertad en este contexto?

¿Qué son los modos normales en un sistema de oscilación de  $n$  grados de libertad?

### 4.2. Ejercicio 2

Determine cuáles de los siguientes casos son modos normales. Dadas las siguientes condiciones:

Masa ( $m$ ): 5 kg, Constante del resorte ( $k$ ): 10 N/m, Longitud del resorte ( $l$ ): 0,4 m.

- a.  $A_1 = 0,02$  m y  $A_2 = 0,02$  m
- b.  $A_1 = 0$  m y  $A_2 = 0,02$  m
- c.  $A_1 = -0,005$  m y  $A_2 = -0,035$  m
- d.  $A_1 = -0,03$  m y  $A_2 = 0,03$  m

#### Preguntas Adicionales:

- ¿Qué comportamiento característico se visualiza para los modos normales?
- ¿Y para los que no son modos normales?
- En el caso **b**), escriba la ecuación de movimiento de ambas masas.

Utilice la simulación del repositorio para obtener resultados adicionales.

## 5. Bibliografía

### Referencias

- [1] Feynman, R. P., Gottlieb, M. A., and Pfeiffer, R. (1963, 2006, 2010). *The Feynman Lectures on Physics*. Publicado por Basic Books.
- [2] Georgi, H. (1993). *The Physics of Waves*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- [3] Chapra, S. C., and Canale, R. P. (1999). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- [4] Nakamura, S. (1997). *Métodos Numéricos Aplicados con Software (1a ed.)*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

## A. Análisis Matricial

### Ecuaciones de Movimiento

En este apartado resolveremos el mismo problema que el que se presentó anteriormente pero utilizando matrices.

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_a + 0 \cdot \ddot{x}_b = -\left(k + \frac{mg}{L}\right) \cdot x_a + k \cdot x_b \\ 0 \cdot \ddot{x}_a + m \cdot \ddot{x}_b = k \cdot x_a - \left(k + \frac{mg}{L}\right) \cdot x_b \end{cases}$$

Podemos expresar el siguiente sistema de ecuaciones lineales como un sistema matricial.

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k + \frac{mg}{L} & -k \\ -k & k + \frac{mg}{L} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}, \quad \ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_a \\ \ddot{x}_b \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, nuestro sistema lineal se puede escribir de la siguiente manera

$$M\ddot{X} = -KX \quad (11)$$

Supongamos que la solución de este sistema matricial es armónica para ambas masas.

$$X = A \cdot \cos(\omega t + \Phi)$$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cdot \cos(\omega t + \Phi)$$

Por lo tanto, sus respectivos vectores de velocidad y de aceleración son los siguientes.

$$X = A \cdot \cos(\omega t + \Phi)$$

$$\dot{X} = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \Phi)$$

$$\ddot{X} = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \Phi) \implies \ddot{X} = -\omega^2 \cdot X$$

Trabajamos algebraicamente con el sistema de la ecuación (11)

$$\begin{aligned} M\ddot{X} &= -KX \\ \underbrace{M^{-1} \cdot M}_I \ddot{X} &= -M^{-1}KX \\ \ddot{X} &= -M^{-1}KX \\ -\omega^2 \cdot X &= -M^{-1}KX \\ \underbrace{\omega^2}_\lambda \cdot X &= \underbrace{M^{-1}K}_A X \end{aligned} \quad (12)$$

Observemos que la ecuacion (12) tiene la forma  $\lambda v = Av$ , donde  $\lambda = \omega^2$  siendo este el autovalor asociado a la matriz A, y  $v = X$  siendo este el autovector asociado a un autovalor.

## Autovalores - frecuencias normales

Comenzamos buscando los autovalores de la matriz  $-M^{-1}KX$ .

$$\begin{aligned}\omega^2 \cdot X &= M^{-1}KX \\ M^{-1}KX - \omega^2 \cdot X &= 0 \\ \left(M^{-1}K - \omega^2 I\right) \cdot X &= 0 \\ \left(M^{-1}K - \omega^2 I\right) \cdot A \cos(\omega t + \Phi) &= 0 \\ \left(M^{-1}K - \omega^2 I\right) \cdot A &= 0\end{aligned}$$

Para que este sistema tenga soluciones no nulas, el determinante de la matriz  $\det(M^{-1}K - \omega^2 I) = 0$

$$\begin{aligned}M^{-1}K - \omega^2 I &= \begin{bmatrix} \frac{g}{L} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -k/m \\ -k/m & \frac{g}{L} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{bmatrix} \\ |M^{-1}K - \omega^2 I| &= \left(\frac{g}{L} + k/m - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación característica, obtenemos los siguientes valores de  $\omega$ .

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L} \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{2k}{m} \quad (13)$$

## A.1. Autovectores - modos normales

### A.1.1. Modo 1 - Para $\omega_1^2 = \frac{g}{L}$

$$\left(M^{-1}K - \omega^2 I\right) \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} A_1 - A_2 \\ -A_1 - A_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore A_1 = A_2 = \lambda$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Autovector asociado frecuencia modal 1}}$$

Autovector asociado frecuencia modal 1

### A.1.2. Modo 2 - Para $\omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{2k}{m}$

$$\left( M^{-1}K - \omega^2 I \right) \cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = -\frac{k}{m} \begin{bmatrix} A_1 + A_2 \\ A_1 + A_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore A_1 = -A_2 = \lambda$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

Autovector asociado frecuencia modal 2

## A.2. Condiciones iniciales

El objetivo de haber obtenido los vectores de modo normal (autovectores) es poder expresar cualquier configuración del sistema matemáticamente como una combinación lineal de ellos. Cada modo normal, como mencionamos anteriormente, es linealmente independiente. Entonces, podemos expresar las coordenadas de la siguiente manera.

$$x_a = \alpha \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \beta \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

$$x_b = \alpha \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_1) - \beta \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

Por las condiciones iniciales anteriores tenemos que:

$$\alpha = \frac{A_0}{2} \quad \beta = -\frac{A_0}{2} \quad \Phi_1 = \Phi_2 = 0$$

## A.3. Coordenadas de movimiento de las masas

### A.3.1. Coordenada masa a

$$x_a = \frac{A_0}{2} \cdot \cos(\omega_1 t) - \frac{A_0}{2} \cdot \cos(\omega_2 t)$$

$$x_a = \frac{A_0}{2} \cdot (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t))$$

$$x_a = -A_0 \cdot \left[ \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \right] \quad (14)$$



### A.3.2. Coordenada masa b

$$\begin{aligned}x_b &= \frac{A_0}{2} \cdot \cos(\omega_1 t) - \left(-\frac{A_0}{2}\right) \cdot \cos(\omega_2 t) \\x_b &= \frac{A_0}{2} \cdot (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \\x_b &= A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)\end{aligned}$$

Como la masa b esta ubicada a una distancia  $D$  de la masa a, la coordenadas de dicha masa es:

$$x_b = D + A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \quad (15)$$