Sistemas de n grados de libertad

Introducción

Las oscilaciones de n grados de libertad son fenómenos frecuentes en diversos sistemas de la realidad, desde estructuras mecánicas hasta circuitos eléctricos. Estudiar y comprender el análisis de estas oscilaciones resulta de gran interés, ya que nos brinda una comprensión más profunda de los comportamientos dinámicos y vibracionales que se presentan en estos sistemas complejos.

En este informe, nos introduciremos en la idea general de las oscilaciones de n grados de libertad a partir de un ejemplo sencillo. A través del estudio de estas oscilaciones, podremos apreciar cómo los diferentes grados de libertad interaccionan entre sí, generando patrones de movimiento y características específicas.

A lo largo de este informe, entenderemos los conceptos fundamentales, las ecuaciones de movimiento y las herramientas matemáticas necesarias para analizar y comprender las oscilaciones de n grados de libertad. Al finalizar, realizaremos una simulacion fisica numerica del problema el cual nos permita visualizar y comprender los parametros y resultados del sistema.

1. Dos Péndulos Acoplados

Sistema en estudio

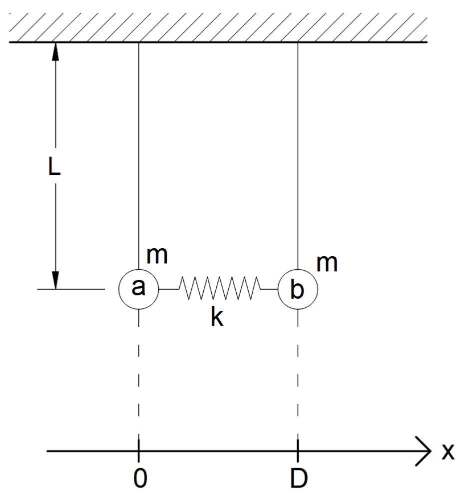


Figura 1: Esquema del Sistema

Los péndulos consisten en varillas rígidas pivotadas en la parte superior, de modo que oscilan sin fricción en el plano del papel. Las masas en los extremos de las varillas están acopladas mediante un resorte de constante k. Consideraremos el movimiento libre del sistema, sin fuerzas externas aparte de la gravedad. Este es un ejemplo clásico de dos "osciladores acoplados". El resorte que conecta los dos osciladores es el acoplamiento, el cual se denomina generalmente muelle. Supondremos que el resorte en la Figura 1 está sin estirar cuando los dos péndulos cuelgan rectos hacia abajo, como se muestra. Entonces, la configuración de equilibrio es la que se muestra en la Figura 1, siendo $x = 0$ a la posicion de reposo de la masa a y $x = D$ la posicion de reposo de la masa b. Este es un ejemplo de un sistema con dos grados de libertad, porque se requieren dos cantidades, las desviaciones de cada uno de las dos masas desde el equilibrio, para especificar la configuración del sistema.Para dicho sistema realizamos algunas suposiciones para poder simplificar el problema. Vamos a considerar que ambos pendulos tienen una longuitud L y que ambas masas son iguales, es decir $m_1 = m_2 = m$.

Ecuaciones de movimiento

Supongamos que las masas se mueven hacia la derecha, en sentido de las x positivas. Teniendo en cuenta este movimiento, realizamos el diagrama de cuerpo libre del sistema como se muestra en la Figura 2.

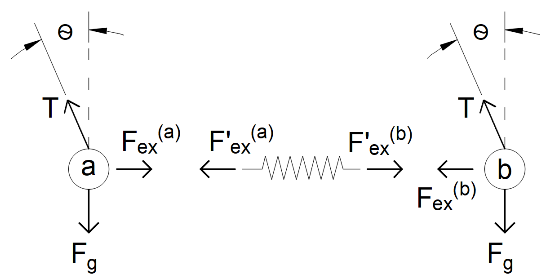


Figura 2: Diagrama cuerpo libre del sistema

Ecuaciones de movimiento masa a (m_a)

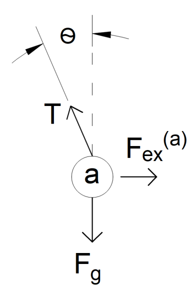


Figura 3: Diagrama cuerpo libre masa a

Cuando las masas se mueven horizontalmente, también se moverán verticalmente, debido a que la longitud de los péndulos se mantiene fija. Por lo tanto, utilizando la segunda ley de Newton, observando la Figura 2, tenemos:

<u>Direccion vertical</u>

Consideraremos una aproximación para ángulos pequeños $\Longrightarrow \theta \ll 1rad \longrightarrow \cos\theta \approx 1$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m \cdot \ddot{y}_a \\ T \cdot \cos\theta + F_g &= m \cdot \ddot{y}_a \\ T + F_g &= m \cdot \ddot{y}_a \end{aligned}$$

Como $T = m \cdot g$, podemos considerar que el sistema no se desplaza en sentido vertical.

<u>Direccion horizontal</u>

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m \cdot \ddot{x}_a \\ T_x + F_{ex}^{(a)} &= m \cdot \ddot{x}_a \end{aligned}$$

Sabemos que por la Ley de Hooke, la fuerza del resorte debido al desplazamiento de la masa es $F_e = -k \cdot \Delta$. Como la fuerza que ejerce el resorte sobre m es su opuesta, entonces:

$$F_{ex}^{(a)} = -(-k \cdot \Delta) = -(-k \cdot ((x_b - D) - x_a)) = -k \cdot (x_a - (x_b - D))$$

Por otro lado, que la componente $|T_x| = \frac{m \cdot g}{L} x$. Por lo tanto la ecuacion de movimiento de la masa a nos queda de la siguiente manera.

$$-\frac{m \cdot g}{L} \cdot x_a - k \cdot (x_a - (x_b - D)) = m \cdot \ddot{x}_a \tag{1}$$

Ecuaciones de movimiento masa b m_b

Realizando el mismo analisis que con m_a llegamos a la siguiente ecuacion de movimiento de la masa b.

$$-\frac{m \cdot g}{L} \cdot (x_b - D) - k \cdot ((x_b - D) - x_a) = m \cdot \ddot{x}_b \tag{2}$$

Modos Normales

En este apartado veremos que el movimiento más general posible de este sistema, y de cualquier sistema similar de n osciladores, puede descomponerse en soluciones particularmente simples, en las cuales todos los grados de libertad oscilan con la misma frecuencia y con una forma bien definida. Estas soluciones simples se llaman **"modos normales"**. Los desplazamientos para el movimiento más general se pueden escribir como sumas de las soluciones sencillas, en un termino mas matematico diremos que el movimiento mas general posible es una combinacion lineal de los modos normales. Esto lo desarrollaremos en detalle más adelante, pero puede ser útil tener un nocion de que es lo

que vamos a hacer.
El nombre “normal” es debido a una definicion matematica, proveniente del algebra lineal. Ningún modo normal puede ser una combinación lineal de los otros modos normales, ya que cada uno corresponde a un posible movimiento independiente del sistema físico con su propia frecuencia. La forma matemática de decir esto es que el conjunto de todos los modos normales es ”linealmente independiente”. Esto quiere decir, que dichos modos son ortogonales entre si, es por eso el nombre. Otro detalle a tener en cuenta es que existen n modos normales, donde n es el número de grados de libertad del sistema.
Para este sistema, el modo normal con frecuencia más baja es aquel en el cual los desplazamientos de los dos bloques son iguales. El otro modo normal es aquel en el cual los desplazamientos de los dos bloques son opuestos.

Modo Normal 1

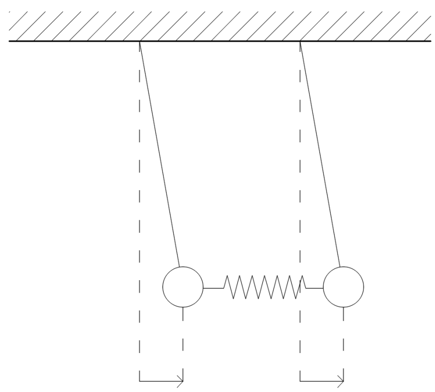


Figura 4: Modo 1

Aqui el sistema esta en fase, por lo tanto sumamos las ecuaciones (1) y (2).

$$\begin{array}{lllcl} & -\frac{m\cdot g}{L}\cdot x_a & -k\cdot(x_a-(x_b-D)) & = & m\cdot\ddot{x}_a \\ + & & & & \\ & -\frac{m\cdot g}{L}\cdot(x_b-D) & -k\cdot((x_b-D)-x_a) & = & m\cdot\ddot{x}_b \\ \hline & -\frac{m\cdot g}{L}\cdot(x_a+x_b-D) & +\quad k\cdot 0 & = & m\cdot(\ddot{x}_a+\ddot{x}_b) \end{array} \tag{3}$$

Simplificamos ahora la ecuacion (3).

$$-\frac{\cancel{m}\cdot g}{L}\cdot(x_a+x_b-D) = \cancel{m}\cdot(\ddot{x}_a+\ddot{x}_b)$$
$$-\frac{g}{L}\cdot(x_a+x_b-D) = (\ddot{x}_a+\ddot{x}_b) \tag{4}$$

Se puede observar en (4) que resulta conveniente definir una funcion φ_1 la cual representa la suma de las cordenadas de ambas masas. Lo que hacemos aqui, es de alguna manera es simplificar nuestro estudio enfocandose en esta nueva funcion. Por lo tanto, para poder describir este modo, nos haremos referencia a como varia en funcion del tiempo la suma de las coordenadas de cada masa. Estas funciones, se las denominan “coordenadas normales”.

$$\begin{aligned} \varphi_1 =& (x_a + x_b - D) \\ \dot{\varphi}_1 =& \dot{x_a} + \dot{x_b} \\ \ddot{\varphi}_1 =& \ddot{x_a} + \ddot{x}_b \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos dicha función en (4).

$$\begin{aligned} -\frac{g}{L} \cdot \varphi_1 =& \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{L} \cdot \varphi_1 =& 0 \qquad \Longrightarrow \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \end{aligned}$$

La solucion de dicha ecuacion diferencial es una funcion armonica sinusoidal del tipo
$\varphi_1 = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \Phi)$ siendo $\omega_1^2 = \frac{g}{L}$.
Es interesante observar que el sistema trabaja como un unico pendulo, por lo tanto, si se cortara el resorte que los une, el sistema seguira oscilando igual. Por lo tanto, para este modo normal el acoplamiento no interviene.

Modo Normal 2

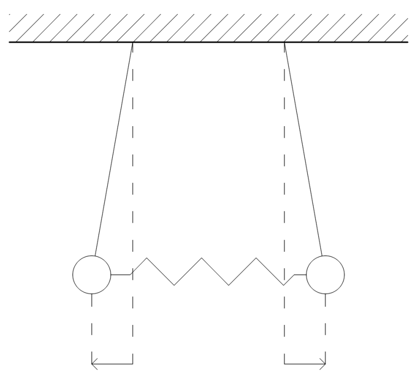


Figura 5: Modo 2

Aqui el sistema esta fuera de fase, por lo que restamos las ecuaciones (1) y (2).

$$\begin{array}{rlll} & -\frac{m \cdot g}{L} \cdot x_a & -k \cdot (x_a - (x_b - D)) & = \quad m \cdot \ddot{x}_a \\ - & & & \\ & -\frac{m \cdot g}{L} \cdot (x_b - D) & -k \cdot ((x_b - D) - x_a) & = \quad m \cdot \ddot{x}_b \\ \hline & -\frac{m \cdot g}{L} \cdot (x_a - x_b + D) & +k \cdot (2 \cdot x_a - 2 \cdot (x_b - D)) & = \quad m \cdot (\ddot{x}_a - \ddot{x}_b) \end{array} \tag{5}$$

Simplificamos ahora la ecuacion (5).

$$-\frac{\cancel{m}\cdot g}{L}\cdot(x_a-x_b+D)+\frac{\cancel{m}}{m}k\cdot(2\cdot x_a-2\cdot(x_b-D))=\cancel{m}\cdot(\ddot{x}_a-\ddot{x}_b)$$
$$-\frac{g}{L}\cdot(x_a-x_b+D)+\frac{2k}{m}(x_a-x_b+D))=\ddot{x}_a-\ddot{x}_b$$
$$-\left(\frac{g}{L}+\frac{2k}{m}\right)\cdot(x_a-x_b+D)=\ddot{x}_a-\ddot{x}_b \tag{6}$$

Nuevamente resulta util definir una nueva funcion φ_2. Esta funcion describe como varia la distancia que existe entre dichas masas.

$$\varphi_2 =(x_a-x_b+D)$$
$$\dot{\varphi}_2 =\dot{x_a}-\dot{x_b}$$
$$\ddot{\varphi}_2 =\ddot{x_a}-\ddot{x_b}$$

Reemplazamos dicha funcion en (6).

$$-\left(\frac{g}{L}+\frac{2k}{m}\right)\cdot\varphi_2 =\ddot{\varphi}_2$$
$$\ddot{\varphi}_2+\left(\frac{g}{L}+\frac{2k}{m}\right)\cdot\varphi_2 =0$$

La solucion de esta nueva ecuacion diferencial es nuevamente una funcion armonica sinusoidal del tipo
$\varphi_2 = A\cdot\cos(\omega\cdot t+\Phi)$ siendo $\omega_2^2=\frac{g}{L}+\frac{2k}{m}$.
A diferencia del modo anterior, aqui si interviene el acoplamiento. Esto resulta relevante observarlo ya que si la constante $k\to 0 \Longrightarrow \omega_1\approx\omega_2$, por lo que cada pendulo seria independiente entre si y no tendrian un acoplamiento entre ellos. Una manera de que esto suceda, es si movemos el resorte hacia arriba como se muestra en la Figura 6, alejandolo de las masas hasta que llega al borde donde los pendulos pivotean.

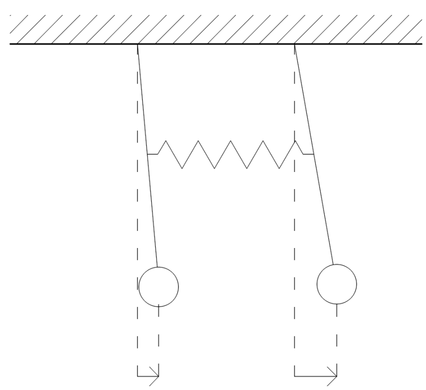


Figura 6: Ejemplo para $k\to 0$

Movimiento General del Sistema

Como mencionamos anteriormente, el movimiento mas general del sistema se puede escribir como la suma de sus modos normales. Para poder hallar dicha ecuacion, utilizaremos las condiciones iniciales del sistema para poder definir ciertos parametros y recurriremos a utilizar las coordenadas normales.
En el Apendice A se encuentra explicado este mismo procedimiento, pero realizado con matrices, el cual es el procedimiento mas adecuado para poder resolver este tipo de problemas de n grados de libertad. Se menciona esto, ya que al resolver el problema de esta manera, se comprende de mejor manera porque se suma las coordenadas normales para hallar el movimiento $x_a(t)$ y porque se resta para hallar $x_b(t)$.

Condiciones Iniciales

Supongamos que la masa m_a se encuentra en reposo, y se aparta de su posicion de resposo a la masa m_b una distancia A_0 como muestra la Figura 7. Nuestras condiciones iniciales del sistema son:

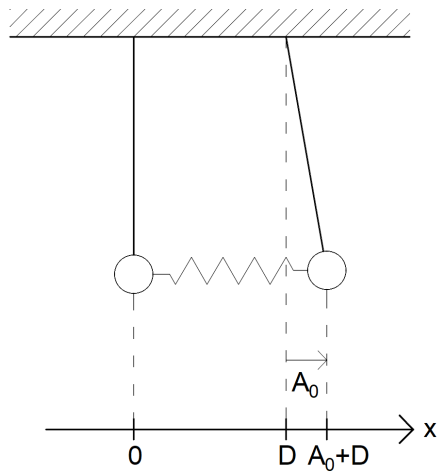


Figura 7: Posicion Inicial del Sistema

Posiciones

Modo 1

$$\begin{aligned}\varphi_1(0) =& x_a(0) + x_b(0) - D \\ \varphi_1(0) =& 0 + A_0 + D - D = A_0 \\ \varphi_1(0) =& A_0 \end{aligned} \tag{7}$$

Modo 2

$$
\begin{aligned}
\varphi_2(0) =& x_a(0) - (x_b(0) - D) \\
\varphi_2(0) =& 0 + -(A_0 + D - D) = -A_0 \\
\varphi_2(0) =& -A_0
\end{aligned} \tag{8}
$$

<u>**Velocidades**</u>
Modo 1

$$
\dot{\varphi}_1(0) = 0 \tag{9}
$$

Modo 2

$$
\dot{\varphi}_2(0) = 0 \tag{10}
$$

Como mencionamos anteriormentes las funciones $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son funciones armonicas. Por lo tanto, las velocidades y las funciones de posicion son las siguientes:
Modo 1

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(t) =& A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \Phi_1) \\
\dot{\varphi}_1(t) =& -A_1 \cdot \omega_1 \operatorname{sen}(\omega_1 \cdot t + \Phi_1)
\end{aligned}
$$

Utilizando (9) y (7) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1(0) =& -A_1 \cdot \omega_1 \operatorname{sen}(\omega_1 \cdot 0 + \Phi_1) \\
0 =& \operatorname{sen}(\Phi_1) \\
\Phi_1 =& 0 \\
\varphi_1(0) =& A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot 0) \\
A_0 =& A_1
\end{aligned}
$$

Utilizando (10) y (8) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_2(0) =& -A_2 \cdot \omega_2 \operatorname{sen}(\omega_2 \cdot 0 + \Phi_2) \\
0 =& \operatorname{sen}(\Phi_2) \\
\Phi_2 =& 0 \\
\varphi_2(0) =& A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot 0) \\
-A_0 =& A_2
\end{aligned}
$$

Reescribimos las coordenadas normales con los valores obtenidos con las condiciones iniciales.

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(t) =& A_0 \cdot \cos(\omega_1 t) \\
\varphi_2(t) =& -A_0 \cdot \cos(\omega_2 t)
\end{aligned}
$$

Movimiento Masa a

$$\begin{aligned}
\varphi_1 + \varphi_2 =& (x_a + x_b - D) + (x_a - x_b + D) \\
\varphi_1 + \varphi_2 =& x_a + x_a = 2x_a \\
\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} =& x_a
\end{aligned}$$

Reemplazo

$$\begin{aligned}
x_a =& \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot A_0 \cdot \big(\cos(\omega_1 \cdot t) - \cos(\omega_2 \cdot t) \big) \\
x_a =& -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot A_0 \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right) \cdot sen\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right) \right] \\
x_a =& -A_0 \cdot \left[\overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t \right)}^{\text{Oscilacion rapida}} \cdot \overbrace{sen\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t \right)}^{\text{Oscilacion lenta}} \right]
\end{aligned}$$

Notar que esta ecuacion es un ejemplo de un batido.
$\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cdot t \right) \longrightarrow$ notemos que este termino respresenta una oscilacion la cual tiene una frecuencia la cual es el promedio de las frecuencias normales. Por lo tanto, es una frecuencia "grande".
$\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \cdot t \right) \longrightarrow$ este termino es un factor que funciona como un modulador de la amplitud. La frecuencia de esta oscilacion es la semiresta de las frecuencias normales. Por lo tanto es pequeña.

Ejemplo

En este ejemplo consideramos $L = 0{,}5m$, $k = 100\frac{N}{m}$, $m = 5kg$, $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$ y $A_0 = 5cm = 50mm$
Calculamos las frecuencias normales.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}5}} = 4{,}43s^{-1}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}5} + \frac{2 \cdot 100}{5}} = 7{,}72s^{-1}$$

De esta manera podemos obtener la ecuacion de movimiento de la masa m_a. A continuacion se muestra una grafica de este movimiento.

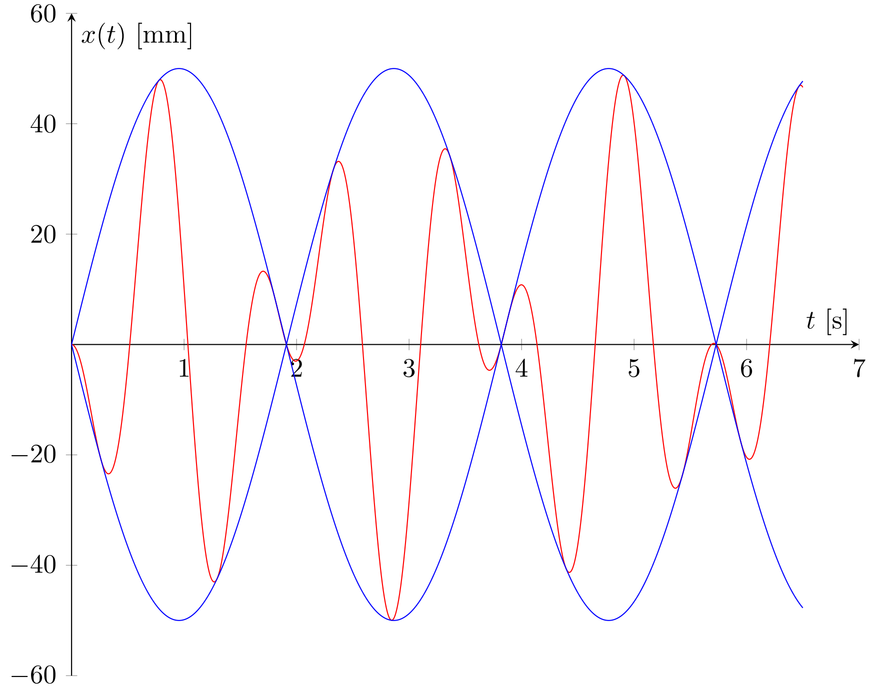


Figura 8: Grafica Movimiento masa a, Ejemplo

Movimiento Masa b

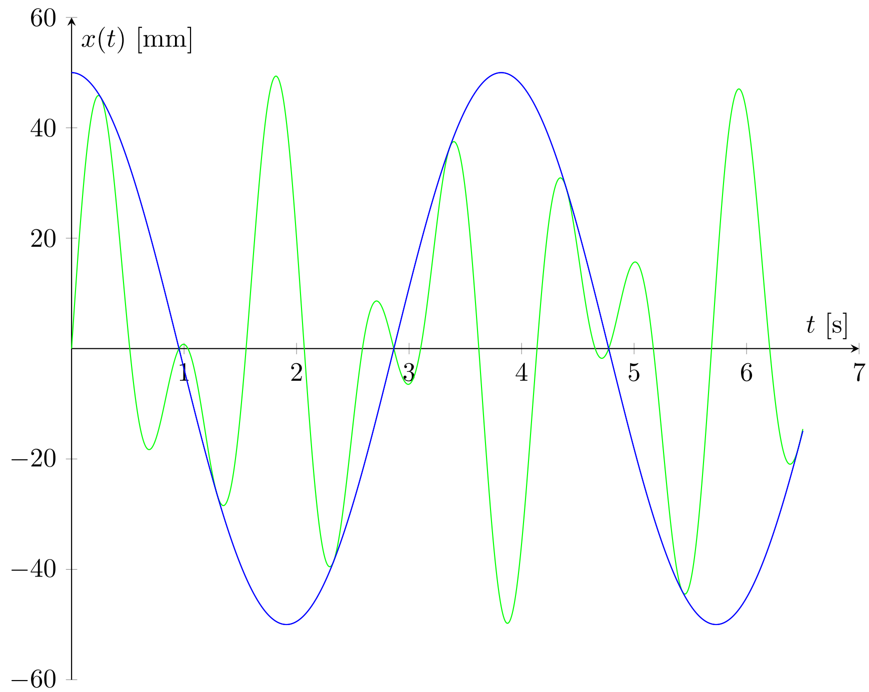
$$
\begin{aligned}
\varphi_1 - \varphi_2 =& (x_a + x_b - D) - (x_a - x_b + D) \\
\varphi_1 - \varphi_2 =& 2 \cdot x_b + D \\
x_b =& D + \frac{1}{2} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \\
x_b =& D + \frac{1}{2} \cdot \big(A_0 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + A_0 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) \big) \\
x_b =& D + \frac{A_0}{2} \cdot \big(\cos(\omega_1 \cdot t) + \cos(\omega_2 \cdot t) \big) \\
x_b =& D + A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)
\end{aligned}
$$

Continuacion de ejemplo

Como calculamos anteriormente,las frecuencias normales son.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}5}} = 4{,}43s^{-1}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}5} + \frac{2 \cdot 100}{5}} = 7{,}72s^{-1}$$

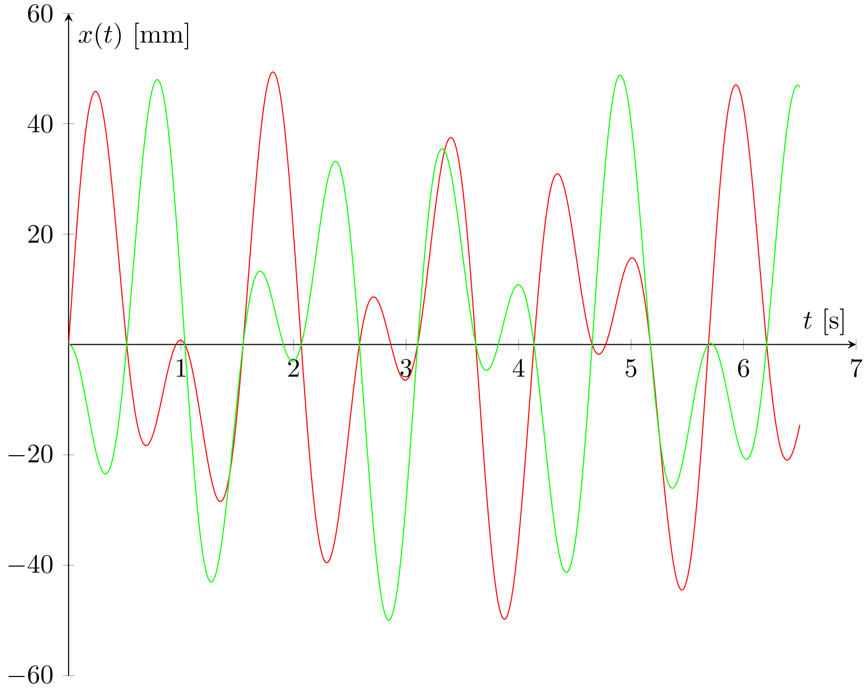
De esta manera podemos obtener la ecuacion de movimiento de la masa m_b. A continuacion se muestra una grafica de este movimiento.



2. Energia

3. Simulacion física del Sistema

En este caso, es sencillo encontrar las soluciones analíticas del problema, pero existen casos mas complejos en el cual no se pueden determinar las soluciones analiticamente. En este apartado, desarrollamos también otra manera de resolver el problema, a traves de un analisis numerico, utilizando el famoso método de Runge-Kutta de 4to Orden



Ecuaciones de Movimiento

El problema presenta un sistema de 2 ecuaciones diferenciales de segundo orden.

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_a = & -\left(k + \frac{mg}{L}\right) \cdot x_a + k \cdot x_2 \\ m \cdot \ddot{x}_b = & k \cdot x_a - \left(k + \frac{mg}{L}\right) \cdot x_b \end{cases}$$

4. Bibliografía

A. Analisis Matricial

Ecuaciones de Movimiento

En este apartado resolveremos el mismo problema que el que se presentó anteriormente pero utilizando matrices.

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_a + 0 \cdot \ddot{x}_b = & -\left(k + \frac{mg}{L}\right) \cdot x_a + k \cdot x_2 \\ 0 \cdot \ddot{x}_a + m \cdot \ddot{x}_b = & k \cdot x_a - \left(k + \frac{mg}{L}\right) \cdot x_b \end{cases}$$

Podemos escribir el siguiente sistema de ecuacion lineal como un sistema matricial.

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad , \quad K = \begin{bmatrix} k + \frac{mg}{L} & -k \\ -k & k + \frac{mg}{L} \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad , \quad \ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_a \\ \ddot{x}_b \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, nuestro sistema lineal se puede escribir de la siguiente manera

$$M\ddot{X} = -KX \tag{11}$$

Supongamos que la solucion de este sistema matricial es armonica para ambas masas.

$$\begin{aligned} X =& A \cdot \cos\left(wt + \Phi\right) \\ \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} =& \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cdot \cos\left(\omega t + \Phi\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, sus respectivos vectores de velocidad y de aceleracion son los siguientes.

$$\begin{aligned} X =& A \cdot \cos\left(\omega t + \Phi\right) \\ \dot{X} =& - A\omega \cdot \operatorname{sen}\left(\omega t + \Phi\right) \\ \ddot{X} =& - A\omega^2 \cdot \cos\left(\omega t + \Phi\right) \Longrightarrow \ddot{X} = -\omega^2 \cdot X \end{aligned}$$

Trabajamos algebraicamente con el sistema de la ecuacion (11)

$$\begin{aligned} M\ddot{X} =& - KX \\ \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I} \ddot{X} =& - M^{-1}KX \\ \ddot{X} =& - M^{-1}KX \\ -\omega^2 \cdot X =& - M^{-1}KX \qquad (12) \\ \underbrace{\omega^2}_{\lambda} \cdot X =& \underbrace{M^{-1}K}_{A} X \qquad (13) \end{aligned}$$

Observemos que la ecuacion (12) tiene la forma $\lambda v = Av$, donde $\lambda = \omega^2$ siendo este el autovalor asociado a la matriz A, y $v = X$ siendo este el autovector asociado a un autovalor.

Autovalores - frecuencias normales

Comenzamos buscando los autovalores de la matriz $-M^{-1}KX$.

$$\begin{aligned}
\omega^2 \cdot X =& M^{-1}KX \\
M^{-1}KX - \omega^2 \cdot X =& 0 \\
\left(M^{-1}K - \omega^2 I\right) \cdot X =& 0 \\
\left(M^{-1}K - \omega^2 I\right) \cdot A\cos(\omega t + \Phi) =& 0 \\
\left(M^{-1}K - \omega^2 I\right) \cdot A =& 0
\end{aligned}$$

Para que este sistema tenga soluciones no nulas, el determinante de la matriz $det(M^{-1}K - \omega^2 I) = 0$

$$\begin{aligned}
M^{-1}K - \omega^2 I =& \begin{bmatrix} \frac{g}{L} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -k/m \\ -k/m & \frac{g}{L} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{bmatrix} \\
|M^{-1}K - \omega^2| =& \left(\frac{g}{L} + k/m - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuacion caracateristica, obtenemos los siguientes valores de ω.

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L} \qquad\qquad \omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{2k}{m} \tag{14}$$

Autovectores - modos normales

Modo 1 - Para $\omega_1^2 = \frac{g}{L}$

$$\begin{aligned}
\left(M^{-1}K - \omega^2 I\right) \cdot A =& \begin{bmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} A_1 - A_2 \\ -A_1 - A_2 \end{bmatrix} = 0 \\
\therefore A_1 =& A_2 = \lambda \\
A_1 =& \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Autovector asociado frecuencia modal 1}}
\end{aligned}$$

Modo 2 - Para $\omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{2k}{m}$

$$\begin{aligned}
\left(M^{-1}K - \omega^2 I\right) \cdot A =& \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = -\frac{k}{m} \begin{bmatrix} A_1 + A_2 \\ A_1 + A_2 \end{bmatrix} = 0 \\
\therefore A_1 =& - A_2 = \lambda \\
A_1 =& \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{Autovector asociado frecuencia modal 2}}
\end{aligned}$$

Condiciones iniciales

El objetivo de haber conseguido los vectores de modo normal (auvectores) es para poder escribir de forma matematica cualquier configuracion del sistema como una combinacion lineal de ellos. Cada modo normal como mencionamos anteriormente son linealmente independiente. Entonces podemos escribir las coordenadas de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} x_a &= \alpha \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + \beta \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_2) \\ x_b &= \alpha \cdot \cos(\omega_1 t + \Phi_1) - \beta \cdot \cos(\omega_2 t + \Phi_2) \end{aligned}$$

Por las condiciones iniciales anteriores tenemos que:

$$\alpha = \frac{A_0}{2} \quad \beta = -\frac{A_0}{2} \quad \Phi_1 = \Phi_2 = 0$$

Coordenadas de movimiento de las masas

Coordenada masa a

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{A_0}{2} \cdot \cos(\omega_1 t) - \frac{A_0}{2} \cdot \cos(\omega_2 t) \\ x_a &= \frac{A_0}{2} \cdot (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) \\ x_a &= -A_0 \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \right] \end{aligned} \tag{15}$$

Coordenada masa b

$$\begin{aligned} x_b &= \frac{A_0}{2} \cdot \cos(\omega_1 t) - \left(-\frac{A_0}{2}\right) \cdot \cos(\omega_2 t) \\ x_b &= \frac{A_0}{2} \cdot (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \\ x_b &= A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \end{aligned}$$

Como la masa b esta ubicada a una distancia D de la masa a, la coordenadas de dicha masa es:

$$x_b = D + A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \tag{16}$$