1) a) $$cte_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\sum_{j=i+1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{j} cte_2\right]\right] =$$

la saco afuera

$$= cte_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\sum_{j=i+1}^{n} j\cdot cte_2\right] =$$

$$= cte_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[cte_2\cdot\sum_{j=i+1}^{n} j\right] =$$

$$= cte_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[cte_2\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j\right)\right] =$$

$$= cte_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[cte_2\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right)\right] =$$

saco afuera y distribuyo sumatoria

$$= cte_1 + \sum_{i=1}^{n-1} cte_2\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2} - i\left(\frac{i+1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{i^2+i}{2}$$

$$= cte_1 + cte_2\cdot\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i+1)}{2}\right) =$$

$$= cte_1 + cte_2\cdot\left(\left((n-1)\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i^2+i}{2}\right)\right) =$$

distribuyo

saco afuera

$$= cte_1 + cte_2\cdot\left(\left((n-1)\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1}(i^2+i)\cdot\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= cte_1 + cte_2\cdot\left(\left((n-1)\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i\right)\right)\right) =$$

$$= cte_1 + cte_2\cdot\left(\left((n-1)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(n-1)(n)\cdot(2n-2+1)}{6}\right.\right.\right.$$

$$+ \left(\frac{(n-1) * n}{2}\right) \Big) =$$

$$= ae_1 + ae_2 \cdot \left(\left((n-1) \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(n-1)n \cdot (2n-1)}{6} + \left(\frac{(n-1) * n}{2}\right)\right)\right)\right) =$$

$$= ae_1 + ae_2 \cdot \left(\left((n-1) \cdot \frac{n^2+n}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(n^2-n) \cdot (2n-1)}{6} + \frac{n^2-n}{2}\right)\right)\right)$$

$$= ae_1 + ae_2 \cdot \left(\left((n-1) \cdot \frac{n^2+n}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6} + \frac{n^2-n}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= ae_1 + ae_2 \left(\left(\frac{n^3-n}{2}\right) - \left(\frac{n^3-n}{6}\right)\right) =$$

$$= ae_1 + ae_2 \cdot \left(\frac{n^3-n}{3}\right)$$

$$= ae_1 + \left(ae_2 \cdot \frac{n^3}{3} - ae_2 \frac{n}{3}\right) =$$

$$= ae_1 + ae_2 \frac{n^3}{3} - ae_2 \frac{n}{3} =$$

$$\boxed{= ae_1 + n^3 \frac{ae_2}{3} - n \frac{ae_2}{3}} = T(n)$$

b) $n^3 \frac{cte2}{3} - n \frac{cte2}{3} + cte1$ como es

polinomio de coeficiente principal de grado 3

considero que el $O(n^3)$

DEMOSTRACIÓN.

$n^3 \frac{cte2}{3} - n \frac{cte2}{3} + cte1 \leq c \cdot n^3$ para todo $n \geq n_0$

① análisis 1er término

$n^3 \leq n^3$

Defino constante

$c_1 = \frac{cte2}{3}$

$n^3 \cdot \frac{cte2}{3} \leq n^3 \cdot \frac{cte2}{3}$

$n_0 = 1$

$1^3 \cdot \frac{cte2}{3} \leq 1^3 \cdot \frac{cte2}{3}$

$\frac{cte2}{3} \leq \frac{cte2}{3}$

se verifica desigualdad. primer termino se puede acotar con $c_1 = \frac{cte}{3}$ y $n_0 = 1$

② termino 2 $\quad n \leq n^3$

$c_2 = \frac{cte2}{3}$

$n \cdot \frac{cte2}{3} \leq n^3 \frac{cte2}{3}$

$n_0 = 1$ $\quad 1 \cdot \frac{cte2}{3} \leq 1^3 \cdot \frac{cte2}{3}$

$\frac{cte2}{3} \leq \frac{cte2}{3}$

se puede acotar con $c_2 = \frac{cte2}{3}$ y $n_0 = 1$

③ Termino 3 $\quad cte \leq n^3$

$c_3 = cte1$

$cte1 \leq n^3 \cdot cte1$

$n_0 = 1$ $\quad cte1 \leq 1 \cdot cte1$

$cte1 \leq cte1$

se puede acotar con $c_3 = cte1$ y $n_0 = 1$

④

$$T(n) \leq (c_1 + c_2 + c_3)\, n^3 =$$

$$= T(n) \leq \left(\frac{cte_2}{3} + \frac{cte_2}{3} + cte_1\right) n^3$$

$$c = \frac{cte_2}{3} + \frac{cte_2}{3} + cte_1$$

$n_0 = 1 \Rightarrow$ mas restrictivo.

$\boxed{T(n) \leq O(n^3),\ \text{con } c = \frac{cte_2}{3} + \frac{cte_2}{3} + cte_1 \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ con } n_0 = 1}$