



Bibliografía

- Hamilton. Lógica para matemáticos. Capítulo 3
- Pons, Rosenfeld, Smith. Lógica para Informática. Capítulo 2

Temario

- Lógica de predicados de primer orden. Dominios, Interpretaciones, Satisfacción de fórmulas bien formadas. Niveles de Verdad y falsedad de las fórmulas. Tautologías, contradicciones, fórmulas lógicamente válidas.

Ejercicios

1. Señalar las ocurrencias libres o ligadas de x_1, x_2, x_3 en la siguiente *fbf* escrita en un lenguaje de primer orden donde $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, y $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con g de aridad 1; f de aridad 2, A_1^2 de aridad 2

$$\text{i } \forall x_1(\exists x_2 A_1^2(x_1, f(x_2, x_3)) \rightarrow \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3)).$$

$$\text{ii } \forall x_1(\exists x_2 A_1^2(x_1, f(x_2, x_3))) \rightarrow \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3).$$

2. Sean A y B *fbfs* escritas en un lenguaje de primer orden. Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de *fbfs* (usar noción de i-equivalencia o contraejemplos según corresponda):

$$\text{i } (\forall x) A \qquad \exists x A$$

$$\text{ii } \exists x \exists y A \qquad \exists y \exists x A$$

$$\text{iii } \exists x \forall y A \qquad \forall y \exists x A$$

$$\text{iv } \exists x(A \wedge B) \qquad \exists x A \wedge \exists x B$$

$$\text{v } \exists x(A \vee B) \qquad \exists x A \vee \exists x B$$

$$\text{vi } \forall x(A \vee B) \qquad \forall x A \vee \forall x B$$

3. Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:

Conjunto de constantes: $\mathcal{C} = \{c, u\}$.

Sin símbolos de función: $\mathcal{F} = \emptyset$.

Conjunto de símbolos de predicado: $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con A_1^2 de aridad 2.



Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

- . $I(c) = 0$
- . $I(u) = 1$
- . $I(A_1^2(x, y)) = \{(x, y) \in N \times N; x \leq y\}$

donde I es una función de interpretación semántica.

Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Fundamentar las respuestas.

- i $A_1^2(c, x)$ es satisfactible en I .
 - ii $A_1^2(u, x)$ es satisfactible en I .
 - iii $\forall x A_1^2(c, x)$ es satisfactible en I .
 - iv $\forall x A_1^2(u, x)$ es satisfactible en I .
 - v $A_1^2(c, x)$ es verdadera en I .
 - vi $\forall x A_1^2(c, x)$ es lógicamente válida.
 - vii $A_1^2(u, c) \wedge \neg A_1^2(u, c)$ es contradictoria.
4. Ofrecer una interpretación para los siguientes lenguajes de primer orden donde las fórmulas sean verdaderas y otra donde sean falsas. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

- i $\mathcal{C} = \mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con A_1^2 de aridad 2.
 - . $\forall x \forall y (A_1^2(x, y) \rightarrow A_1^2(y, x))$.
 - . $\forall x (A_1^2(x, x))$.
 - . $\forall x \forall y \forall z ((A_1^2(x, y) \wedge A_1^2(y, z)) \rightarrow A_1^2(x, z))$.
 - ii $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f\}$, $\mathcal{P} = \{A_1^2\}$, con f y A_1^2 de aridad 2.
 - . $\forall x (A_1^2(x, c) \rightarrow A_1^2(x, f(y)))$.
 - . $\forall x (\neg A_1^2(x, x))$.
 - . $\neg \forall x \forall y (A_1^2(x, y))$.
5. Determinar si las siguientes *fbfs* escritas en algún lenguaje de primer orden son contradictorias, satisfactibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación o lógicamente válidas. Fundamentar.

- i $(\exists x)(\neg A(x)) \vee (\forall x)(A(x) \vee B(x))$.
- ii $\exists y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$.



6.
 - i Si la *fbf* $A(x)$ es satisfactible, ¿entonces la *fbf* $\exists x A(x)$ es lógicamente válida?. Fundamentar.
 - ii La *fbf* abierta $\forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \forall x P(x, y)$ ¿es lógicamente válida?. Fundamentar.
 - iii Sea un lenguaje de primer orden con la letra de constante c y las letras de predicado P y Q , ambas de aridad 1. Sea la *fbf*: $(P(c) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow Q(c)$ ¿Es lógicamente válida? Fundamentar.
 - iv Sean A y B dos *fbf* escritas en un lenguaje de primer orden. La *fbf*: $\forall x (A(x) \vee B(x)) \rightarrow ((\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)))$ es lógicamente válida? Fundamentar.
7. Sea A una *fbf* de un lenguaje de primer orden, I una interpretación para tal lenguaje. Demostrar que A es verdadera en I si y sólo si $\neg A$ es falsa en I .
8. Sea A una *fbf* que no contiene cuantificadores (es decir, abierta) escrita en algún lenguaje de primer orden. Sea I una interpretación para tal lenguaje. ¿Es posible decidir acerca del valor de verdad de A en I ? Fundamentar.
9. Retomar la práctica anterior y para cada ítem (por separado) del ejercicio 4, encontrar alguna interpretación donde todas las sentencias dadas sean verdaderas y además:
 - Pipo es un dragón que vive en un zoológico.
 - Sebastián es bueno y también es malo al mismo tiempo.
 - Pedro es un peluquero.En algún caso la interpretación podría no existir (justificar por qué)