

Técnicas de Prueba

Técnicas de prueba

- Demostración por contra-ejemplo
- Demostración por el absurdo
- Demostración por inducción natural/estructural

Demostración por contra-ejemplo

Ejercicio :

Sea A una fbf donde aparecen solo los conectivos \wedge , \vee , \neg .

Sea A' la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada \wedge por \vee y cada \vee por \wedge .

Si A es una tautología, A' también lo es? Justificar.

Esta propiedad **NO VALE**. Y lo demostraremos construyendo un contra-ejemplo

$$A = (p \vee (\neg p))$$

$$A' = (p \wedge (\neg p))$$

A es tautología, pero A' no lo es.

Demostración por el absurdo

Ejercicio :

¿Es cierto que dadas A y B fbfs cualesquiera, siempre ocurre que si A y $A \rightarrow B$ son tautologías entonces B también lo es? Fundamental.

Asumimos lo contrario a lo que queremos demostrar:
Las hipótesis son Verdaderas y la Conclusión es Falsa, o sea:

Hipotesis: A es tautología (i)
 $(A \rightarrow B)$ es tautología (ii)

Conclusion falsa: B no es tautología (iii)

Demostración:

(iv) Por (iii), existe una valuación v tal que $v(B)=F$

(v) Por (i), $v(A)=V$

(vi) Por (ii), $v((A \rightarrow B)) = V$

(vii) Por definición de valoración y por (v) y (vi), $v(B)=V$

Contradicción!

Demostración por inducción natural/estructural

Ejercicio :

Demostrar que cualquier tautología proposicional que este escrita usando los conectivos \neg , \vee , \wedge , \rightarrow contiene alguna ocurrencia ya sea del símbolo " \neg " o del símbolo " \rightarrow ".

Idea: Demostrar que cualquier fórmula, sea A, que contenga sólo \vee y \wedge puede tomar el valor F.

Para demostrar que A «puede» tomar el valor falso vamos a construir una valuación en particular en la cual A sea Falsa.

Sea v una valuación, que asigna el valor Falso a todas las letras. O sea $v(p_i) = F$ para todo i . En esa valuación la Fbf A también va a tomar el valor falso.

Recordemos que en la tabla de verdad cada VALORACION se ve como una FILA. Lo siguiente es un ejemplo para 2 letras. La última fila corresponde a la valuación v que nos interesa.

p1	p2	A (Fbf con sólo conectivos \vee y \wedge)
V	V	?
V	F	?
F	V	?
F	F	F

Vamos a demostrarlo formalmente usando inducción sobre la estructura de A.

Sea v una valuación, que asigna el valor Falso a todas las letras. O sea $v(p_i)=F$ para todo i . En esa valuación la Fbf A también va a tomar el valor falso, o sea $v(A)=F$.

Para demostrar por inducción necesitamos un número natural N . En este caso el “ N ” es la “cantidad de conectivos de la Fbf”

CASO BASE. $N=0$

Como N es cero, no hay conectivos, entonces A es atómica. O sea $A=p_1$
 $v(p_1)=F$ por lo tanto $v(A)=F$

HIPOTESIS INDUCTIVA (H.I.): asumimos que para toda Fbf A que contiene sólo conjunción y disyunción, con N o menos conectivos $v(A)=F$

CASO $N+1$

Usando la H.I. tenemos que poder probar que $v(A)=F$, para una fórmula A que tiene $N+1$ conectivos.

A puede tener 2 formatos:

Caso 1: A es $(B \vee C)$

Caso 2: A es $(B \wedge C)$

Vemos que tanto B como C tienen N o menos conectivos, por lo tanto para ellas vale la H.I., es decir $v(B)=F$ y $v(C)=F$.

Entonces, por la definición de la semántica del \vee y del \wedge , tanto en el caso 1 como en el caso 2, $v(A)=F$.

Con esto hemos demostrado que $v(A)=F$, para cualquier fbf (que contenga sólo \vee y \wedge).

Hemos demostrado que A puede tomar el valor Falso y por lo tanto A no es una Tautología.

p1	p2	A (Fbf con sólo conectivos \vee y \wedge)
V	V	?
V	F	?
F	V	?
F	F	F

Retornando al objetivo del ejercicio, vemos que los conectivos \vee y \wedge no alcanzan para escribir tautologías.

Entonces, para expresar tautologías deben usarse además otros conectivos.