algo del capítulo 5, y el segundo era un curso optativo más avanzado que cubría el resto. El capítulo 6 es el más difícil del libro, pero la importancia del Teorema de Incompletitud de Gödel es tal que las ideas que subyacen a su demostración habían de hacerse figurar en un libro como éste. Las demostraciones detalladas pueden omitirse en una primera lectura, puesto que el material del capítulo 7 no depende de ellas.

El alcance de este libro es más limitado que el de otras introducciones standard a la materia. En particular, la teoría de modelos y la teoría axiomática de conjuntos sólo se tocan de refilón. Por ello, referimos al lector interesado a la lista de títulos del final del libro para ulteriores lecturas. Algunos de estos títulos se citan expresamente en el libro (por el nombre del autor) y, en general, cubren la mayoría de las áreas de la lógica matemática y tratan con mayor profundidad los tópicos de este libro.

Hay ejercicios al final de cada sección. En general, los ejemplos rutinarios preceden a los que exigen mayor esfuerzo, pero todos los ejemplos pretenden ser aplicaciones directas del material de la correspondiente sección. Su propósito es clarificar y consolidar la materia, no extenderla. Al final del libro se proporcionan sugerencias o soluciones de muchos de los ejercicios.

Los símbolos en el libro son, en la medida de lo posible, standard (lo mismo que la terminología). No obstante, hay algunos usos no standard que se han introducido para aumentar la claridad. No causarán problemas al lector que esté familiarizado con la materia, y pretenden ayudar al que no lo esté. Es un hecho desafortunado el que diferentes autores usen diferentes notaciones y simbolismos. Por esta razón, y para facilitar las referencias, se ha incluido un glosario de símbolos. A lo largo de todo el texto, el símbolo $\triangleright$ se emplea para indicar la reasunción de la línea principal de exposición, después de haber sido rota ésta por una proposición, ejemplo, corolario o definición.

Finalmente, hay cuatro deudas que deseo reconocer. Primeramente, mi deuda para con el libro de Mendelson (*Introduction to Mathematical Logic*) será evidente para todos los que estén familiarizados con él. Como texto básico para lógicos tiene pocos rivales. En segundo lugar, este libro no hubiese sido posible sin el tiempo que puso a mi disposición la Universidad de Stirling. En tercer lugar, y a un nivel más personal, expreso mi mayor agradecimiento a Francis Bell por su concienzuda lectura de un borrador del texto y por sus numerosas y valiosas sugerencias. Y por último, vaya mi sincero agradecimiento a Irene Wilson y May Abrahamson por su paciente labor de mecanografía del manuscrito.

A. G. H.

1
Cálculo de enunciados informal

1.1 Enunciados y conectivas

La lógica, o al menos la matemática lógica, consiste en deducciones. Vamos a examinar las reglas de deducción haciendo uso de la precisión que caracteriza al enfoque matemático. Al hacer esto, si queremos que haya precisión tenemos que hacer inequívoco nuestro lenguaje, y la manera matemática standard de lograr esto consiste en introducir un lenguaje simbólico en el que los símbolos tengan significados y usos enunciados con toda precisión. Ante todo, examinaremos un aspecto del lenguaje cotidiano, a saber, las *conectivas* (o conjunciones[1], que es el término gramatical más común).

Cuando tratamos de analizar una frase en lenguaje castellano, observamos primeramente si se trata de una frase simple o de una frase compuesta. Una frase simple consta de un sujeto y un predicado (en el sentido gramatical). Por ejemplo:

<u>Napoleón</u> ha muerto

<u>Juan</u> le debe a Jaime doscientas pesetas

<u>Todos los huevos que no son cuadrados</u> son redondos

En cada caso, el sujeto se ha subrayado y la parte restante es el predicado. Una frase compuesta se forma a partir de frases simples por medio de conectivas. Por ejemplo:

Napoleón ha muerto y el mundo se regocija
Si todos los huevos no son cuadrados, entonces todos los huevos son redondos
Si el barómetro desciende, entonces lloverá o nevará

[1] La palabra «conjunción» tiene para nosotros un significado más específico. Se define en la sección 1.2.

Admitiremos como supuesto básico el que todas las frases simples que consideramos van a ser verdaderas o falsas. Ciertamente, podría argüirse que existen frases que no pueden considerarse ni verdaderas ni falsas, así que emplearemos otro término diferente: Nos referimos a *enunciados* simples y compuestos, y nuestro supuesto será que todos los enunciados son verdaderos o falsos.

Denotaremos los enunciados simples mediante letras mayúsculas A, B, C, ... Así, para simbolizar enunciados compuestos hemos de introducir símbolos para las conectivas. Las conectivas más comunes, y los símbolos que emplearemos para denotarlas, se indican en la tabla que sigue

no A	$\sim A$
A y B	$A \wedge B$
A o B	$A \vee B$
si A entonces B	$A \rightarrow B$
A si y sólo si B	$A \leftrightarrow B$

Naturalmente, si se ha de definir con precisión el significado de los símbolos, hemos de estar seguros de que conocemos con precisión el significado de las expresiones de la columna de la izquierda. Volveremos a esto en seguida.

Así pues, los tres enunciados compuestos vistos más arriba pueden escribirse simbólicamente:

$$A \wedge B$$
$$C \rightarrow D$$
$$E \rightarrow (F \vee G)$$

(respectivamente), donde A simboliza «Napoleón ha muerto», B simboliza «el mundo se regocija», C simboliza «todos los huevos no son cuadrados», etc.

Nótese que cuando un enunciado compuesto se simboliza de esta manera, lo que queda es el esqueleto lógico, una mera «forma enunciativa» que puede ser común a varios enunciados diferentes. Esto es precisamente lo que nos permite analizar las deducciones, ya que la deducción tiene que ver con las «formas» de los enunciados de una argumentación, más bien que con sus significados.

Ejemplo 1.1

Si Sócrates es un hombre entonces Sócrates es mortal
Sócrates es un hombre
∴ Sócrates es mortal

Esta es una argumentación que se considera lógicamente satisfactoria. Pero consideremos la argumentación:

Sócrates es un hombre
Sócrates es mortal

Puede pensarse que la conclusión se deduce de las premisas, pero esto es así a causa de los significados de las palabras «hombre» y «mortal», y no a causa de una deducción puramente lógica. Pongamos estas argumentaciones en forma simbólica.

$$\begin{array}{ll} & A \rightarrow B \\ & A \\ \therefore & B \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & A \\ \therefore & B \end{array}$$

La «forma» de la primera es lo que la hace válida. Cualquier argumentación con la misma forma sería válida también. Esta es nuestra intuición lógica referente a enunciados del tipo si ... entonces ... No obstante, la segunda no comparte esta propiedad; hay muchas argumentaciones de esta forma que no consideraríamos válidas desde el punto de vista intuitivo. Por ejemplo:

La luna es amarilla
∴ La luna es de queso

Estudiaremos, pues, *formas enunciativas* más bien que enunciados particulares. Las letras p, q, r... serán *variables de enunciado* que designan enunciados simples arbitrarios no especificados. Nótese la distinción entre los usos de las letras p, q, r... y las letras A, B, C... Las primeras son variables que pueden ser sustituidas por enunciados simples particulares. Las últimas son meras «etiquetas» que designan ciertos enunciados simples particulares. Las variables nos permiten describir en un plano general las propiedades que poseen los enunciados y las conectivas. Ahora bien, todo enunciado simple es verdadero o falso, así que puede imaginarse que una variable de enunciado dada toma uno u otro de entre los dos *valores de verdad:* V (verdadero) o F (falso). El modo en que la verdad o falsedad de un enunciado compuesto o forma enunciativa compuesta depende de los valores de verdad de los enunciados simples o variables de enunciado que lo constituyen es el tema de la sección siguiente.

Ejercicios

1 Tradúzcanse a forma simbólica los siguientes enunciados compuestos:
(*a*) Si la demanda ha permanecido constante y los precios han aumentado, entonces el volumen de transacciones tiene que haber disminuido.

(*b*) Ganaremos las elecciones, suponiendo que a Ramírez se le elija como dirigente del partido.
(*c*) Si Ramírez no es elegido como dirigente del partido, entonces o González o Hernández dejarán el gabinete ministerial, y perderemos las elecciones.
(*d*) Si x es un número racional e y es un entero, entonces z no es real.
(*e*) O bien el asesino ha abandonado el país, o alguien está encubriéndole.
(*f*) Si el asesino no ha abandonado el país, entonces alguien está encubriéndole.
(*g*) La suma de dos números es par si y sólo si los dos números son pares o los dos números son impares.
(*h*) Si y es un entero entonces z no es real, supuesto que x sea un número racional.

2 (*a*) Escójanse pares de enunciados de la lista del ejercicio 1 que tengan la misma forma.
(*b*) Escójanse pares de enunciados de la lista del ejercicio 1 que tengan el mismo significado.

1.2 Funciones de verdad y tablas de verdad

Consideremos una por una las conectivas.

Negación

La negación de un enunciado A la escribimos como $\sim A$. Está claro que si A es verdadero entonces $\sim A$ es falso, y si A es falso entonces $\sim A$ es verdadero. El significado de A es irrelevante. Podemos describir la situación por medio de una *tabla de verdad:*

p	$\sim p$
V	F
F	V

La tabla indica el valor de verdad de $\sim p$ a partir del valor de verdad de p. La conectiva $\sim$ da lugar a una *función de verdad* $f^{\sim}$, que en este caso es una función del conjunto $\{V, F\}$ en sí mismo, definida por la tabla de verdad. Así pues:

$$f^{\sim}(V) = F$$
$$f^{\sim}(F) = V$$

Conjunción

Al igual que arriba, es fácil ver que el valor de verdad tomado por la conjunción $A \wedge B$ de dos enunciados A y B depende sólo del valor de

verdad tomado por A y del valor de verdad tomado por B. Se tiene la tabla:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

En la tabla tenemos una fila para cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad para p y q. La última columna da los correspondientes valores de verdad para $p \wedge q$. La conectiva $\wedge$ define, pues, una función de verdad $f^{\wedge}$ de dos argumentos:

$$f^{\wedge}(V, V) = V$$
$$f^{\wedge}(V, F) = F$$
$$f^{\wedge}(F, V) = F$$
$$f^{\wedge}(F, F) = F$$

Disyunción

Hemos empleado $A \vee B$ para denotar «A o B», pero existen dos usos diferentes de la palabra «o» en castellano. «A o B» puede significar «A o B o ambos», o puede significar «A o B pero no ambos». A fin de mantener la precisión de nuestro lenguaje simbólico hemos de elegir solamente uno de éstos como significado de nuestro símbolo $\vee$. Escogemos el primero. No hay ninguna razón especial para hacerlo así; podríamos haber escogido igualmente el segundo. La tabla de verdad queda entonces:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La conectiva $\vee$ define una función de verdad de dos argumentos, de la misma manera que $\wedge$.

•

Observación: Si A y B son enunciados simples, podemos simbolizar «A o B pero no ambos» poniendo

$$(A \vee B) \wedge \sim(A \wedge B)$$

Análogamente, si hubiésemos usado «A o B pero no ambos» como definición del significado de nuestro símbolo de disyunción, podríamos haber expresado «A o B o ambos» usando la disyunción definida junto con $\wedge$ y $\sim$. $(A \vee B) \vee (\sim\ldots)$

Condicional

$A \rightarrow B$ pretende representar el enunciado «A implica B» o «si A entonces B». Ahora bien, en este caso el uso normal del castellano no es de tanta ayuda a la hora de construir una tabla de verdad, y la tabla que vamos a utilizar es por lo general fuente de dificultades para la intuición. Es la siguiente:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La dificultad radica en el valor de verdad V asignado a $A \rightarrow B$ en los casos en que A es falso. La consideración de ejemplos de enunciados condicionales en los cuales el antecedente es falso quizá pudiera llevarle a uno a la conclusión de que tales enunciados no poseen en absoluto un valor de verdad. Podría recibirse además la impresión de que esta clase de enunciados ni son útiles ni tienen sentido. Por ejemplo, del enunciado:

Si la hierba es roja entonces la luna es de queso

podría muy bien decirse que no tiene sentido.

No obstante, nosotros vamos a interesarnos por la deducción y los métodos de demostración, principalmente en matemáticas. En este contexto, el significado de un enunciado condicional $A \rightarrow B$ es que su veracidad permite inferir la veracidad de B a partir de la veracidad de A, y no permite inferir nada en particular a partir de la falsedad de A. Un tipo muy corriente de enunciado matemático puede servir para ilustrar esto. Se trata de los enunciados *universales*, por ejemplo:

Para todo entero n, si $n > 2$ entonces $n^2 > 4$

Esto se considera como un enunciado verdadero acerca de los enteros. Por lo tanto, cabe esperar que consideremos al enunciado

Si $n > 2$ entonces $n^2 > 4$

como verdadero, independientemente del valor que tome n. Diferentes valores de n dan lugar a todas las posibles combinaciones de valores de verdad para «$n > 2$» y «$n^2 > 4$», excepto la combinación VF. Tomando n como 3, -3, 1 respectivamente, resultan las combinaciones VV,

FV, FF, y éstas son las combinaciones que, de acuerdo con nuestra tabla, dan a la implicación el valor de verdad V. La veracidad intuitiva de la implicación que hemos considerado sirve pues en cierta medida de justificación a la tabla de verdad. El punto a recordar es que la única circunstancia en la que el enunciado $A \rightarrow B$ se considera falso es cuando A es verdadero y B es falso.

Bicondicional

Denotaremos «A si y sólo si B» por $A \leftrightarrow B$. Aquí la situación es clara: $A \leftrightarrow B$ deberá ser verdadero cuando A y B tengan el mismo valor de verdad (ambos verdaderos o ambos falsos) y sólo entonces. La tabla de verdad es entonces:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esto completa nuestra lista de conectivas. Es obvio que utilizando estas conectivas se pueden construir enunciados compuestos de cualquier longitud a partir de enunciados simples. Usando variables de enunciados podemos construir *formas* enunciativas de cualquier longitud.

Definición 1.2

Una *forma enunciativa* es una expresión en la que intervienen variables de enunciado y conectivas, que pueda formarse utilizando las reglas:

(i) Toda variable de enunciado es una forma enunciativa.

(ii) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son formas enunciativas, entonces $(\sim\mathscr{A})$, $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$, $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$, $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ y $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ son formas enunciativas.

Ejemplo 1.3

$((p \wedge q) \rightarrow (\sim(q \vee r)))$ es una forma enunciativa. Por (i), p, q, r son formas enunciativas. Por (ii), $(p \wedge q)$ y $(q \vee r)$ son formas enunciativas. Por (ii), $(\sim(q \vee r))$ es una forma enunciativa. Por (ii), $((p \wedge q) \rightarrow (\sim(q \vee r)))$ es una forma enunciativa.

▷ Esta definición es un ejemplo de definición inductiva. Establece un patrón que volverá a aparecer de nuevo cuando describamos en detalle los sistemas formales.

Las conectivas determinan funciones de verdad simples. Usando las tablas de verdad de las conectivas, podemos construir una tabla de verdad para cualquier forma enunciativa dada. Nos referimos a una tabla que indique, para cualquier asignación dada de valores de ver-

dad a las variables de enunciado que aparezcan en la forma enunciativa, el valor de verdad que tome ésta. Ésta tabla de verdad es una representación gráfica de una función de verdad. Así pues, toda forma enunciativa da lugar a una función de verdad, cuyo número de argumentos es igual al número de variables de enunciado distintas que aparezcan en la forma enunciativa. Ilustremos esto mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 1.4

(*a*) $((\sim p) \vee q)$.

Primeramente se construye la tabla de verdad:

p	q	$(\sim p)$	$((\sim p) \vee q)$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Obsérvese que la función de verdad correspondiente a esta forma enunciativa es la misma que la función de verdad determinada por $(p \rightarrow q)$.

(*b*) $(p \rightarrow (q \vee r))$.

Tabla de verdad:

p	q	r	$(q \vee r)$	$(p \rightarrow (q \vee r))$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	V

La función de verdad tiene en este caso tres argumentos, puesto que hay tres variables de enunciado. Cada fila de la tabla da el valor de la función de verdad para una combinación diferente de valores de verdad para las letras. Nótese que la tabla de verdad de cualquier forma enunciativa en la que intervengan tres variables de enunciado tendrá ocho filas, y obsérvese el patrón según el cual se han escrito las tres primeras columnas de la tabla. Esta manera de agrupar las *V*s y

*F*s bajo las letras p, q, r asegura que cada posible combinación aparezca una vez y sólo una.

▷ En el caso general, a una forma enunciativa en la que intervengan n variables de enunciado diferente (siendo n cualquier número natural) le corresponderá una función de verdad de n argumentos, y la tabla de verdad tendrá 2^n filas, una para cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad para las variables de enunciado. Nótese además que existen 2^{2^n} funciones de verdad distintas de n argumentos, que corresponden a las 2^{2^n} maneras posibles de disponer las *V*s y las *F*s en la última columna de una tabla de verdad de 2^n filas. Está claro que el número de formas enunciativas que se pueden construir utilizando n variables de enunciado es infinito, así que formas enunciativas distintas pueden corresponder a una misma función de verdad.

Para investigar esto más a fondo necesitamos algunas definiciones.

Definición 1.5

(*a*) Una forma enunciativa es una *tautología* si toma el valor de verdad *V* bajo cada una de las posibles asignaciones de valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella.

(*b*) Una forma enunciativa es una *contradicción* si toma el valor de verdad *F* bajo cada una de las posibles asignaciones de valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella.

▷ No toda forma enunciativa cae en una u otra de estas categorías. De hecho, ninguna de las consideradas hasta aquí cae en ellas.

Ejemplo 1.6

(*a*) $(p \vee (\sim p))$ es una tautología.
(*b*) $(p \wedge (\sim p))$ es una contradicción.
(*c*) $(p \leftrightarrow (\sim (\sim p)))$ es una tautología.
(*d*) $(((\sim p) \rightarrow q) \rightarrow (((\sim p) \rightarrow (\sim q)) \rightarrow p))$ es una tautología.

El método que se utiliza para comprobar si una forma enunciativa dada es una tautología o una contradicción consiste en construir la tabla de verdad.

▷ Debería resultar claro a partir de la definición que todas las tautologías que contengan n variables de enunciado dan lugar a una misma función de verdad de n argumentos, concretamente la que toma siempre el valor *V*. Con respecto a las contradicciones puede hacerse una observación similar.

Definición 1.7

Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son formas enunciativas, diremos que $\mathscr{A}$ *implica lógicamente* a $\mathscr{B}$ si $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ es una tautología, y que $\mathscr{A}$ es *lógicamente equivalente* a $\mathscr{B}$ si $(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ es una tautología.

Ejemplo 1.8

(*a*) $(p \wedge q)$ implica lógicamente a p.
(*b*) $(\sim(p \wedge q))$ es lógicamente equivalente a $((\sim p) \vee (\sim q))$.
(*c*) $(\sim(p \vee q))$ es lógicamente equivalente a $((\sim p) \wedge (\sim q))$.

Ad (*a*): Tabla de verdad de $((p \wedge q)\rightarrow p)$:

$((p$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

Ad (*b*):

$(\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F

Aquí hemos introducido otra manera de escribir tablas de verdad. Para formas enunciativas complicadas es más fácil escribir la tabla de este modo. Se empieza escribiendo columnas de Vs y Fs debajo de las variables de enunciado en el mismo orden que ya conocemos de tablas anteriores, para asegurarnos de que cada combinación aparezca una sola vez. Esto se ha de hacer, por supuesto, de manera consistente a lo largo de todas las intervenciones de una misma variable. Seguidamente, se van insertando bajo las conectivas los valores de verdad de las diversas partes, hasta llegar a rellenar la columna correspondiente a la forma enunciativa completa. En los ejemplos de más arriba, dicha columna está enmarcada por líneas verticales.

Observación: Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ formas enunciativas que contengan las mismas variables de enunciado. Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son lógicamente equivalentes, entonces representan una misma función de verdad. Puesto que si $(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ es una tautología, no toma nunca el valor F, de modo que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ han de tomar siempre el mismo valor de verdad. Así pues, las funciones de verdad correspondientes a $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ han de ser forzosamente iguales.

Ejercicios

3 Escríbanse las tablas de verdad de las siguientes formas enunciativas:

(*a*) $((\sim p) \wedge (\sim q))$;
(*b*) $\sim((p\rightarrow q)\rightarrow(\sim(q\rightarrow p)))$;
(*c*) $(p\rightarrow(q\rightarrow r))$;
(*d*) $((p \wedge q)\rightarrow r)$;
(*e*) $((p\leftrightarrow(\sim q)) \vee q)$;
(*f*) $((p \wedge q) \vee (r \wedge s))$;
(*g*) $(((\sim p) \wedge q)\rightarrow((\sim q) \wedge r))$;
(*h*) $((p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r)))$.

4 Demuéstrese que la forma enunciativa $((\sim p) \vee q)$ da lugar a la misma función de verdad que $(p\rightarrow q)$, y que $((\sim p)\rightarrow(q \vee r))$ da lugar a la misma función de verdad que $((\sim q)\rightarrow((\sim r)\rightarrow p))$.

5 ¿Cuáles de entre las siguientes formas enunciativas son tautologías?

(*a*) $(p\rightarrow(q\rightarrow p))$;
(*b*) $((q \vee r)\rightarrow((\sim r)\rightarrow q))$;
(*c*) $((p \wedge (\sim q)) \vee ((q \wedge (\sim r)) \vee (r \wedge (\sim p))))$;
(*d*) $((p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((p \wedge (\sim q)) \vee r))$.

6 Demuéstrese que los siguientes pares de formas enunciativas son lógicamente equivalentes.

(*a*) $(p\rightarrow q)$, $((\sim q)\rightarrow(\sim p))$;
(*b*) $((p \vee q) \wedge r)$, $((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$;
(*c*) $(((\sim p) \wedge (\sim q))\rightarrow(\sim r))$, $(r\rightarrow(q \wedge p))$;
(*d*) $(((\sim p) \vee q)\rightarrow r)$, $((p \wedge (\sim q)) \vee r)$.

7 Demuéstrese que la forma enunciativa $(((\sim p)\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow(\sim q)))$ no es una tautología. Encuéntrense formas enunciativas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ tales que $(((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow(\sim\mathscr{B})))$ sea una contradicción.

1.3 Reglas de manipulación y sustitución

Proposición 1.9

Si $\mathscr{A}$ y $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ son tautologías, entonces $\mathscr{B}$ es una tautología.
Demostración: Supongamos que $\mathscr{A}$ y $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ son tautologías y que $\mathscr{B}$ no lo es. Entonces existe una asignación de valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en $\mathscr{A}$ o en $\mathscr{B}$, que da a $\mathscr{B}$ el valor F. Pero esta asignación debe dar a $\mathscr{A}$ el valor V, ya que $\mathscr{A}$ es una tautología, y por tanto da a $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ el valor F. Esto contradice la hipótesis de que $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ es una tautología. Así pues, $\mathscr{B}$ debe ser una tautología.

▷ Consideremos la forma enunciativa $(p\rightarrow p)$. Es fácil demostrar que es

una tautología. Ahora bien, si sustituimos p por la forma enunciativa $((r \wedge s) \rightarrow t)$ en ambos lugares, obtenemos

$$(((r \wedge s) \rightarrow t) \rightarrow ((r \wedge s) \rightarrow t)$$

que vuelve a ser una tautología. Intuitivamente, está claro que esto mismo ocurriría sea cual sea la forma enunciativa que sustituyésemos en el lugar de p, siempre que sustituyésemos en *todas* las intervenciones de p. (La forma enunciativa $(p \rightarrow ((r \wedge s) \rightarrow t))$ obviamente no es tautología). Recogemos esta idea en una proposición.

Proposición 1.10

Sea $\mathscr{A}$ una forma enunciativa en la que aparecen las variables de enunciado $p_1, p_2, \ldots, p_m$, y sean $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ formas enunciativas cualesquiera. Si $\mathscr{A}$ es una tautología entonces la forma enunciativa $\mathscr{B}$, obtenida a partir de $\mathscr{A}$ reemplazando cada intervención de p_i por $\mathscr{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, es también una tautología.

Demostración: Sea $\mathscr{A}$ una tautología y sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ las variables de enunciado que aparecen en $\mathscr{A}$. Sean $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ formas enunciativas cualesquiera. Asignemos valores de verdad arbitrarios a las variables de enunciado que aparecen en $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$. El valor de verdad que toma $\mathscr{B}$ es el mismo que habría tomado $\mathscr{A}$ si los valores tomados por $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ se hubiesen asignado a $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente; es decir, V. Así pues, $\mathscr{B}$ toma el valor V bajo cualquier asignación de valores de verdad; es decir, $\mathscr{B}$ es una tautología.

▷ La proposición 1.10 es una de entre varias que nos iremos encontrando, cuyas aplicaciones están muy extendidas y son muy a menudo inconscientes. Por ejemplo, la siguiente proposición es un resultado útil.

Proposición 1.11

Cualesquiera que sean las formas enunciativas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, $(\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}))$ es lógicamente equivalente a $((\sim\mathscr{A}) \vee (\sim\mathscr{B}))$ y $(\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}))$ es lógicamente equivalente a $((\sim\mathscr{A}) \wedge (\sim\mathscr{B}))$.

Demostración: Vimos antes que

$$(\sim(p \wedge q) \leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$$

es una tautología. De la proposición 1.10 se deduce que para formas enunciativas cualesquiera $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$,

$$((\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})) \leftrightarrow ((\sim\mathscr{A}) \vee (\sim\mathscr{B})))$$

es también una tautología. Por tanto, $(\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}))$ es lógicamente equivalente a $((\sim\mathscr{A}) \vee (\sim\mathscr{B}))$. La otra parte se demuestra análogamente.

Ejemplo 1.12

Para formas enunciativas cualesquiera $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $(\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}))$ es lógicamente equivalente a $((\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C})$. (A causa de esto, se acostumbra a omitir los paréntesis interiores y escribir $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$.)

Consideremos la forma enunciativa

$$(((p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)) \leftrightarrow ((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3)))$$

Construyendo una tabla de verdad de la manera usual, puede demostrarse que es una tautología. Aplicando ahora la proposición 1.10, sustituyendo $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ en el lugar de p_1, p_2, p_3, se obtiene el resultado deseado.

Ejemplo 1.13

Para formas enunciativas cualesquiera $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, los siguientes pares de formas enunciativas son lógicamente equivalentes.

(*a*) $(\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}))$ y $((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vee \mathscr{C})$
(*b*) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ y $(\mathscr{B} \wedge \mathscr{A})$
(*c*) $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ y $(\mathscr{B} \vee \mathscr{A})$

Para verificarlo, se sigue el patrón del ejemplo anterior.

▷ Consideremos ahora la forma enunciativa $((p \wedge p) \rightarrow q)$. $(p \wedge p)$, que aparece en ella, es lógicamente equivalente a p (ya que $((p \wedge p) \leftrightarrow p)$ es una tautología). Reemplazando $(p \wedge p)$ por p, obtenemos $(p \rightarrow q)$. Ahora bien, $(p \rightarrow q)$ es lógicamente equivalente a $((p \wedge p) \rightarrow q)$ (compruébese mediante tabla de verdad). De nuevo se trata de un caso particular de una proposición general sobre sustitución.

Proposición 1.14 REEMPLAZO DE IGUALES

Si $\mathscr{B}_1$ es una forma enunciativa resultante de sustituir en la forma enunciativa $\mathscr{A}_1$ una o más intervenciones de la forma enunciativa $\mathscr{B}$ por la forma enunciativa $\mathscr{A}$, y si $\mathscr{B}$ es lógicamente equivalente a $\mathscr{A}$, entonces $\mathscr{B}_1$ es lógicamente equivalente a $\mathscr{A}_1$.

Demostración: Supongamos que $\mathscr{B}$ es lógicamente equivalente a $\mathscr{A}$ y que $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{A}_1$ son como se ha descrito. Queremos demostrar que $(\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}_1)$ es una tautología. Asignemos valores de verdad a todas las variables de enunciado que intervienen. $\mathscr{B}_1$ se diferencia de $\mathscr{A}_1$ tan sólo en que en algunos lugares $\mathscr{B}$ está donde antes estaba $\mathscr{A}$. El valor de verdad tomado por $\mathscr{B}_1$ tiene que ser el mismo que tome $\mathscr{A}_1$, ya que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ tienen el mismo valor de verdad. Así pues, $(\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}_1)$ toma el valor V. Se deduce que $(\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}_1)$ toma siempre el valor V, ya que los valores de verdad asignados originalmente a las variables eran arbitra-

rios. Así pues, $(\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}_1)$ es una tautología y $\mathscr{A}_1$ es lógicamente equivalente a $\mathscr{B}_1$.

▷ La proposición siguiente no es parte integrante del desarrollo, pero la incluimos aquí porque da una impresión de los métodos que utilizaremos más adelante. Por esta razón trataremos con algún detalle la demostración.

Proposición 1.15

Llamemos forma enunciativa restringida a una forma enunciativa en la que solamente figuren las conectivas $\sim$, $\wedge$ y $\vee$. Sea $\mathscr{A}$ una forma enunciativa restringida, y supongamos que $\mathscr{A}^*$ se ha obtenido a partir de $\mathscr{A}$ intercambiando $\wedge$ y $\vee$ y reemplazando cada variable de enunciado por su negación. Entonces $\mathscr{A}^*$ es lógicamente equivalente a $(\sim\mathscr{A})$.

Demostración: La demostración procede por inducción sobre el número n de conectivas que aparecen en $\mathscr{A}$. Si logramos demostrar que, para cada número natural n, toda forma enunciativa restringida $\mathscr{A}$ que tenga exactamente n conectivas satisface la proposición, está claro que habremos demostrado todo lo necesario.

Paso base: $n=0$ ($\mathscr{A}$ no contiene conectivas). En este caso $\mathscr{A}$ consiste simplemente en una variable de enunciado, p, por ejemplo. Así, $\mathscr{A}^*$ es en este caso $(\sim p)$, de modo que, trivialmente, $\mathscr{A}^*$ es lógicamente equivalente a $(\sim\mathscr{A})$.

Paso de inducción: Supongamos que $n>0$, que $\mathscr{A}$ tiene n conectivas, y que toda forma enunciativa con menos de n conectivas posee la propiedad requerida. Debido a las tres maneras de construir formas enunciativas, hemos de considerar tres casos:

Caso 1: $\mathscr{A}$ es de la forma $(\sim\mathscr{B})$.
Caso 2: $\mathscr{A}$ es de la forma $(\mathscr{B} \vee \mathscr{C})$.
Caso 3: $\mathscr{A}$ es de la forma $(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$.

Ad Caso 1: $\mathscr{B}$ tiene $n-1$ conectivas, así que por hipótesis de inducción $\mathscr{B}^*$ es lógicamente equivalente a $(\sim\mathscr{B})$. Pero $\mathscr{A}^*$ es $(\sim\mathscr{B}^*)$, así que $\mathscr{A}^*$ es lógicamente equivalente a $(\sim(\sim\mathscr{B}))$, por ejemplo, a $(\sim\mathscr{A})$. Nótese que, casi inconscientemente, hemos usado aquí el resultado de la proposición 1.14.

Ad Caso 2: $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ contienen cada una menos de n conectivas, así que $\mathscr{B}^*$ y $\mathscr{C}^*$ son lógicamente equivalentes a $(\sim\mathscr{B})$ y $(\sim\mathscr{C})$, respectivamente. Ahora bien, $\mathscr{A}^*$ es $(\mathscr{B}^* \wedge \mathscr{C}^*)$. Por la proposición 1.14 esto es

lógicamente equivalente a $((\sim\mathscr{B}) \wedge \mathscr{C}^*)$, y de nuevo por la misma proposición, esto es lógicamente equivalente a $((\sim\mathscr{B}) \wedge (\sim\mathscr{C}))$. Ahora bien, hemos visto ya (proposición 1.11) que esto es equivalente a $(\sim(\mathscr{B} \vee \mathscr{C}))$, es decir, $(\sim\mathscr{A})$. Así pues, $\mathscr{A}^*$ es lógicamente equivalente a $(\sim\mathscr{A})$.

Ad Caso 3: Como en el Caso 2, $\mathscr{B}^*$ y $\mathscr{C}^*$ son lógicamente equivalentes a $(\sim\mathscr{B})$ y $(\sim\mathscr{C})$, respectivamente. $\mathscr{A}^*$ es $(\mathscr{B}^* \vee \mathscr{C}^*)$, que es lógicamente equivalente a $((\sim\mathscr{B}) \vee \mathscr{C}^*)$ y por tanto a $((\sim\mathscr{B}) \vee (\sim\mathscr{C}))$ y por tanto a $(\sim(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}))$, es decir, a $(\sim\mathscr{A})$. Así pues, $\mathscr{A}^*$ es lógicamente equivalente a $(\sim\mathscr{A})$.

Bajo la hipótesis de que toda forma enunciativa restringida con menos de n consecutivas posee la propiedad requerida, hemos demostrado que toda forma enunciativa restringida con n conectivas posee la propiedad requerida. Así pues, por el principio de inducción matemática, toda forma enunciativa restringida tiene la propiedad requerida.

Corolario 1.16

Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son variables de enunciado, entonces

$$((\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee \ldots \vee (\sim p_n))$$

es lógicamente equivalente a

$$(\sim(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n))$$

Demostración: Este es un caso especial de la proposición 1.15, en el que es la forma enunciativa $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$.

▷ Introduciendo una nueva notación con el fin de abreviar, podemos escribir este resultado poniendo

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} (\sim p_i)\right) \text{ es lógicamente equivalente a } \left(\sim\left(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i\right)\right)$$

También podemos usar la proposición para demostrar el resultado «dual» del anterior, a saber

$$((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge \ldots \wedge (\sim p_n))$$

es lógicamente equivalente a

$$(\sim(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)),$$

es decir, $\left(\bigwedge_{i=1}^{n} (\sim p_i)\right)$ es lógicamente equivalente a $\left(\sim\left(\bigvee_{i=1}^{n} p_i\right)\right)$

Proposición 1.17 (leyes de De Morgan)

Sean $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ formas enunciativas cualesquiera. Entonces:

(i) $(\bigvee_{i=1}^{n}(\sim\mathscr{A}_i))$ es lógicamente equivalente a $(\sim(\bigwedge_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i))$
(ii) $((\bigwedge_{i=1}^{n}(\sim\mathscr{A}_i))$ es lógicamente equivalente a $(\sim(\bigvee_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i))$

Demostración: Usando los corolarios anteriores y la proposición 1.10.

Ejercicios

8 Demuéstrese que, para formas enunciativas cualesquiera $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, los siguientes pares de formas enunciativas son lógicamente equivalentes.

(*a*) $(\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}))$ y $((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vee \mathscr{C})$;
(*b*) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ y $(\mathscr{B} \wedge \mathscr{A})$;
(*c*) $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ y $(\mathscr{B} \vee \mathscr{A})$;
(*d*) $\mathscr{A}$ y $(\sim(\sim\mathscr{A}))$.

9 Demuéstrese que, para formas enunciativas cualesquiera $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, las siguientes formas enunciativas son tautologías.

(*a*) $((\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \rightarrow \mathscr{A})$;
(*b*) $((\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})) \rightarrow \mathscr{B})$;

10 Demuéstrese, usando la proposición 1.14, que $((\sim((\sim p) \vee q)) \vee r)$ es lógicamente equivalente a $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$.

11 Demuéstrese, usando las proposiciones 1.14 y 1.17, que la forma enunciativa $((\sim(p \vee (\sim q))) \rightarrow (q \rightarrow r))$ es lógicamente equivalente a cada una de las siguientes.

(*a*) $((\sim(q \rightarrow p)) \rightarrow ((\sim q) \vee r))$;
(*b*) $(((\sim p) \wedge q) \rightarrow (\sim(q \wedge (\sim r))))$;
(*c*) $((\sim((\sim q) \vee r)) \rightarrow (q \rightarrow p))$;
(*d*) $(q \rightarrow (p \vee r))$.

1.4 Formas normales

Sigamos considerando lo que hemos llamado formas enunciativas restringidas. Hemos observado antes que a partir de toda forma enunciativa puede construirse una tabla de verdad. Vamos a demostrar ahora un resultado recíproco.

Proposición 1.18

Toda función de verdad es la función de verdad determinada por una forma enunciativa tal que todas las conectivas que figuran en ella están entre $\sim$, $\wedge$ y $\vee$ (es decir, una forma enunciativa restringida).

Demostración: Supongamos que la función dada es de n argumentos Vamos a construir una forma enunciativa $\mathscr{A}$ a partir de las variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Observemos primeramente que si la función de verdad toma el valor F para toda combinación de valores de verdad, entonces corresponde a cualquier contradicción, y la forma enunciativa

$$((p_1 \wedge (\sim p_1)) \wedge p_2 \wedge p_3 \ldots \wedge p_n)$$

nos servirá.

Supongamos ahora que la función de verdad toma el valor V por lo menos una vez. Nuestro método se basa en construir, para cada una de las 2^n combinaciones de valores de verdad, una forma enunciativa que sea verdadera para esa combinación y falsa para todas las demás combinaciones. Por ejemplo, si $n=3$, la forma enunciativa $(p_1 \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))$ es verdadera solamente para la combinación VFF de valores de verdad para p_1, p_2, p_3 respectivamente, y $((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge p_3)$ es verdadera solamente para la combinación FFV. Estas formas enunciativas especiales se llaman *conjunciones básicas*. Dada una asignación de valores de verdad a $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ponemos p_i en la conjunción si a p_i se le asigna V, y ponemos $(\sim p_i)$ en la conjunción si a p_i se le asigna F, para $1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces, para la asignación de valores de verdad dada, todos los miembros de la conjunción tienen el valor V, y así la conjunción completa recibe el valor V. De análoga manera, para cualquier otra asignación de valores de verdad, al menos uno de los miembros de la conjunción recibirá el valor F, de modo que la conjunción total tomará el valor F.

Para demostrar ahora nuestra proposición, consideremos todas las combinaciones de n valores de verdad para las cuales nuestra función de verdad arroja el valor V. Sea $\mathscr{A}$ la disyunción de todas las conjunciones básicas obtenidas tomando estas combinaciones como los valores de verdad de $p_1, p_2, \ldots p_n$. Esta $\mathscr{A}$ es la forma enunciativa requerida. Para convencernos de ello, asignemos valores de verdad a $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Si nuestra función de verdad aplicada a esta combinación arroja el valor V, entonces la correspondiente conjunción básica está en $\mathscr{A}$ y toma el valor V para la asignación de valores de verdad en cuestión, así que $\mathscr{A}$ toma asimismo el valor V. Si nuestra función de verdad aplicada a esta combinación arroja el valor F, entonces la correspondiente conjunción básica no está incluida en $\mathscr{A}$, y todas las demás conjunciones básicas incluidas en $\mathscr{A}$ toman el valor F para la asignación de valores de verdad en cuestión, con lo cual $\mathscr{A}$ toma también el valor F. Así pues, para cualquier asignación de valores de verdad, el valor de verdad de $\mathscr{A}$ es el dado por la función de verdad.

Para entender mejor esta demostración conviene referirla a un ejemplo concreto.

Ejemplo 1.19

Especifiquemos una función de verdad por medio de una tabla (se trata de una función de tres argumentos).

V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Las combinaciones de valores de verdad para las que la función arroja el valor V son VVV, VVF y FFF. Las conjunciones básicas correspondientes son:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$
$$(p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3))$$
$$((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))$$

La forma enunciativa $\mathscr{A}$ construida en la demostración es

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee ((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))$$

Esta forma enunciativa corresponde a la función de verdad dada, y la tabla dada es su tabla de verdad.

Corolario 1.20

Toda forma enunciativa que no sea contradicción es lógicamente equivalente a una forma enunciativa restringida de la forma

$$(\bigvee_{i=1}^{m} (\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij})),$$

siendo Q_{ij} una variable de enunciado o la negación de una variable de enunciado. Esta forma se llama *forma normal disyuntiva.*

Demostración: Dos formas enunciativas son lógicamente equivalentes si y sólo si corresponden a la misma función de verdad. Dada una forma enunciativa $\mathscr{A}$, obtenemos su tabla de verdad y la función de verdad que ésta define. Aplicamos entonces el método de la proposición 1.18 para obtener una forma enunciativa en la forma deseada, correspondiente a dicha función de verdad.

Corolario 1.21

Toda forma enunciativa que no sea tautología es lógicamente equivalente a una forma enunciativa restringida de la forma

$$(\bigwedge_{i=1}^{m} (\bigvee_{j=1}^{n} Q_{ij})),$$

siendo cada Q_{ij} una variable de enunciado o la negación de una variable de enunciado. Esta forma se llama *forma normal conjuntiva.*

Demostración: Sea $\mathscr{A}$ una forma enunciativa que no es tautología. Entonces $\sim\mathscr{A}$ no es contradicción y es lógicamente equivalente a una forma enunciativa $(\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}))$ en forma normal conjuntiva. $\mathscr{A}$ es pues lógicamente equivalente a $(\sim(\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij})))$, y por las leyes de De Morgan, esto es lógicamente equivalente a $(\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n}(\sim Q_{ij})))$. El resultado se deduce reemplazando en esta forma enunciativa cada expresión de la forma $(\sim(\sim q))$ por q.

Ejemplo 1.22

Encuéntrese una forma normal conjuntiva lógicamente equivalente a

$$(((\sim p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3)$$

Construimos una forma normal conjuntiva lógicamente equivalente a

$\sim$	$(((\sim$	$p_1)$	$\vee$	$p_2)$	$\rightarrow$	$p_3)$
F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F

Las combinaciones que dan el valor V son VVF, FVF y FFF. Por lo tanto, una forma normal disyuntiva lógicamente equivalente es

$$((p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee ((\sim p_1) \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee ((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3)))$$

Así pues, la forma enunciativa dada es lógicamente equivalente a la negación de la anterior, la cual, por las leyes de De Morgan, es lógicamente equivalente a

$$(\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \wedge (\sim((\sim p_1) \wedge p_2 \wedge (\sim p_3))) \wedge (\sim((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))))$$

y a

$$(((\sim p_1 \vee (\sim p_2) \vee (\sim(\sim p_3))) \wedge ((\sim(\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee (\sim(\sim p_3))) \wedge ((\sim(\sim p_1) \vee (\sim(\sim p_2)) \vee (\sim(\sim p_3)))$$

y a

$$((\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee p_3) \wedge (p_1 \vee (\sim p_2) \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3)$$

que está en forma normal conjuntiva.

Ejercicios

12 Encuéntrense formas enunciativas en forma normal disyuntiva que sean lógicamente equivalentes a las siguientes:

(*a*) $(p \leftrightarrow q)$;
(*b*) $(p \rightarrow ((\sim q) \vee r))$;
(*c*) $((p \wedge q) \vee ((\sim q) \leftrightarrow r))$;
(*d*) $(\sim((p \rightarrow (\sim q)) \rightarrow r))$;
(*e*) $(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s)$.

13 Encuéntrense formas enunciativas en forma normal conjuntiva que sean lógicamente equivalentes a las siguientes:

(*a*) $(((\sim p) \vee q) \rightarrow r)$;
(*b*) $(p \leftrightarrow q)$;
(*c*) $(p \wedge q \wedge r) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q) \wedge r)$;
(*d*) $(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s)$.

1.5 Conjuntos adecuados de conectivas

Definición 1.23

Un conjunto *adecuado* de conectivas es un conjunto tal que toda función de verdad puede representarse por medio de una forma enunciativa que contenga solamente conectivas del conjunto.

▷ Una de las consecuencias de la discusión precedente es que $\{\sim, \wedge, \vee\}$ es un conjunto adecuado de conectivas. Podemos utilizar este conjunto para encontrar otros.

Proposición 1.24

Los pares $\{\sim, \wedge\}$, $\{\sim, \vee\}$ y $\{\sim, \rightarrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivas.

Demostración: En primer lugar, cualesquiera que sean las formas enunciativas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ es lógicamente equivalente a $(\sim((\sim\mathscr{A}) \wedge (\sim\mathscr{B})))$, de modo que toda forma enunciativa que contenga $\{\sim, \wedge, \vee\}$ puede transformarse en una forma enunciativa que contenga solamente $\sim$ y $\wedge$.

En segundo lugar, podemos usar análogamente la equivalencia lógica entre $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ y $(\sim((\sim\mathscr{A}) \vee (\sim\mathscr{B})))$ para ver que $\{\sim, \vee\}$ es adecuado.

En tercer lugar, hemos de encontrar formas enunciativas lógicamente equivalentes a $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ y $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ en las que aparezcan solamente $\sim$ y $\rightarrow$.

$(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ es lógicamente equivalente a $(\sim(\mathscr{A} \rightarrow (\sim\mathscr{B})))$.
$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ es lógicamente equivalente a $((\sim\mathscr{A}) \rightarrow \mathscr{B})$.

Estas equivalencias pueden usarse para transformar cualquier forma enunciativa en la que figuren $\{\sim, \vee, \wedge\}$ en una forma enunciativa lógicamente equivalente en la que figuren solamente $\sim$ y $\rightarrow$.

Ejemplo 1.25

$(((\sim p_1) \vee p_2) \rightarrow p_3)$ es lógicamente equivalente a cada una de las formas enunciativas siguientes:

(*a*) $(\sim((\sim p_1) \vee p_2) \vee p_3)$
(*b*) $(\sim(\sim(p_1 \wedge (\sim p_2)) \wedge (\sim p_3)))$
(*c*) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3)$

▷ A partir de nuestras cinco conectivas hay tres modos de escoger un par adecuado. Ningún otro par es adecuado. Para convencernos de esto, consideremos primeramente un par de conectivas distintas de $\sim$, y preguntémonos: ¿Puede expresarse una función de verdad que tome siempre el valor F mediante una forma enunciativa que use solamente ese par de conectivas? La respuesta es forzosamente negativa, ya que dando a todas las variables de enunciado de una tal forma enunciativa el valor V la forma enunciativa total tomaría necesariamente el valor V. No hay modo de que la forma o una parte suya tome el valor F bajo esta asignación de valores de verdad. Así pues, ninguna forma enunciativa en la que sólo figuren las conectivas $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ puede ser una contradicción. Por tanto, ningún subconjunto de este conjunto de conectivas puede ser adecuado. Se deja al lector la verificación de que $\{\sim, \leftrightarrow\}$ no es un conjunto adecuado.

Existen otras conectivas; de hecho, cualquier tabla de verdad podría emplearse para definir una conectiva, pero su significado intuitivo sería menos claro. No obstante, hay dos que merecen mencionarse.

Nor

Se denota por $\downarrow$, y su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$(p \downarrow q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nand

Se denota |, y su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$(p \mid q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

La razón del interés de estas conectivas (que tiene consecuencias en el diseño y estudio de computadoras) viene dada por la proposición siguiente:

Proposición 1.26

Los conjuntos unitarios $\{\downarrow\}$ y $\{|\}$ son conjuntos adecuados de conectivas, es decir, toda función de verdad puede expresarse mediante una forma enunciativa en la que sólo aparece $\downarrow$ (respectivamente |).

Demostración: Basta con que expresemos $\sim$ y $\wedge$, o bien $\sim$ y $\vee$, en términos de $\downarrow$ y en términos de |, ya que sabemos que $\{\sim, \wedge\}$ y $\{\sim, \vee\}$ son conjuntos adecuados. En primer lugar, observemos que

$$(\sim p) \text{ es lógicamente a } (p \downarrow p),$$

y

$$(p \wedge q) \text{ es lógicamente equivalente a } ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)).$$

En segundo lugar,

$$(\sim p) \text{ es lógicamente equivalente a } (p \mid p),$$

y

$$(p \vee q) \text{ es lógicamente equivalente a } ((p \mid p) \mid (q \mid q)).$$

La verificación tiene lugar del modo usual, construyendo tablas de verdad, y se deja como ejercicio.

Ejemplo 1.27

Encuéntrese una forma enunciativa en la que sólo figure $\downarrow$ y que sea equivalente a $(p \rightarrow q)$.

$$(p \rightarrow q) \text{ es lógicamente equivalente a } (\sim(p \wedge (\sim q))$$

y con ello a

$$(\sim(p \wedge (q \downarrow q))$$

y con ello a

$$(\sim((p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)])$$

y con ello a

$$\{(p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]\} \downarrow \{(p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]\}$$

Este ejemplo ilustra el precio que hay que pagar en términos de complicación y longitud si se desea usar una única conectiva.

Ejercicios

14 Encuéntrense formas enunciativas en las que sólo figuren las conectivas $\sim$ y $\vee$, que sean lógicamente equivalentes a las siguientes:

(*a*) $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$;
(*b*) $(((\sim p) \wedge (\sim q)) \rightarrow ((\sim r) \wedge s))$;
(*c*) $(p \leftrightarrow q)$.

15 Encuéntrense formas enunciativas en las que sólo figuren las conectivas $\sim$ y $\wedge$, que sean lógicamente equivalentes a las siguientes:

(*a*) $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$;
(*b*) $((p \vee q \vee r) \wedge ((\sim p) \vee (\sim q) \vee (\sim r)))$;
(*c*) $((p \leftrightarrow (\sim q)) \leftrightarrow r)$.

16 Encuéntrense formas enunciativas en las que sólo figuren las conectivas $\sim$ y $\rightarrow$, que sean lógicamente equivalentes a las siguientes:

(*a*) $((p \wedge q) \vee (r \wedge s))$;
(*b*) $(p \leftrightarrow q)$;
(*c*) $(p \wedge q \wedge r)$.

17 (*a*) Demuéstrese que $\{\wedge, \vee\}$ no es un conjunto adecuado de conectivas.
(*b*) (Más difícil.) Demuéstrese que $\{\sim, \leftrightarrow\}$ no es un conjunto adecuado de conectivas.

18 Encuéntrese una forma enunciativa en la que sólo figure la conectiva |, que sea lógicamente equivalente a $(p \rightarrow q)$.

19 Demuéstrese que no existen conectivas binarias, aparte de $\downarrow$ y |, que constituyen por sí mismas un conjunto adecuado de conectivas. (Indicación: Considérese la tabla de verdad de cualquier conectiva así.)

1.6 Argumentaciones y validez

Volvamos a la consideración de argumentaciones. Por el momento hemos de restringirnos a argumentaciones cuyas premisas y conclusión sean enunciados, simples o compuestos, en el sentido definido al comienzo del capítulo. Vimos que lo importante era la «forma» de la argumentación, más bien que los significados de los enunciados que

intervienen. Consideraremos, pues, *formas argumentativas*. En un ejemplo previo nos encontramos con la forma argumentativa.

$$(p \to q)$$
$$p$$
$$\therefore\ q$$

En general, una forma argumentativa es una sucesión finita de formas enunciativas, de las cuales la última se considera como la conclusión y las restantes como las premisas.

Al tratar de decidir y definir qué es lo que constituye una forma argumentativa «válida», volvemos a tropezar con el mismo tipo de dificultad que ya tuvimos en relación con el símbolo de implicación. Al asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en una forma argumentativa, podemos encontrarnos con que la conclusión es falsa y una o más de las premisas son, asimismo, falsas. ¿Justifican las premisas falsas una conclusión falsa? En cierto sentido, la pregunta es irrelevante, puesto que en el uso normal una argumentación se emplea solamente para demostrar que una cierta conclusión se deduce de premisas conocidas. Por lo tanto, todo lo que exigimos a una forma argumentativa válida es que, bajo cualquier asignación de valores de verdad a las variables de enunciado, si todas las premisas toman el valor V, la conclusión toma también el valor V. Equivalentemente, podemos hacer la siguiente definición:

Definición 1.28

La forma argumentativa

$$\mathscr{A}_1,\ \mathscr{A}_2,\ \ldots,\ \mathscr{A}_n;\ \therefore\ \mathscr{A}$$

es *inválida* si es posible asignar valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en ella, de tal manera que $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ tomen el valor V y $\mathscr{A}$ tome el valor F. En otro caso, la forma argumentativa es válida.

▷Se nos presenta ahora el problema de comprobar si una forma argumentativa dada es o no válida. Consideremos el ejemplo sencillo: $(p \to q)$, p; $\therefore q$. Construimos una tabla de verdad teniendo en cuenta todas las formas enunciativas que aparecen como premisas o conclusión.

p	q	$(p \to q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Las dos premisas toman simultáneamente el valor V tan sólo en la primera fila, y ocurre que la conclusión también toma el valor V en esta fila. Así pues, la forma argumentativa no es inválida, es decir, es válida.

Ejemplo 1.29

Investiguemos la validez de la forma argumentativa:

$$(p \to q),\ ((\sim q) \to r),\ r;\ \therefore\ p$$

Construimos la tabla de verdad:

$(p$	$\to$	$q)$	$((\sim$	$q)$	$\to$	$r)$	r	p	
V	V	V	F	V	V	V	V	V	←
V	V	V	F	V	V	F	F	V	
V	F	F	V	F	V	V	V	V	
V	F	F	V	F	F	F	F	V	
F	V	V	F	V	V	V	V	F	←
F	V	V	F	V	V	F	F	F	
F	V	F	V	F	V	V	V	F	←
F	V	F	V	F	V	F	F	F	

Las tres filas marcadas con flechas son aquellas en las que todas las premisas toman el valor V. No obstante, en las filas quinta y séptima la conclusión toma el valor F. Así pues, la forma argumentativa es inválida.

Por consiguiente, disponemos de un método para decidir la validez de una forma argumentativa, que nos dará la respuesta en cada caso. No obstante, si el número de variables de enunciado es grande, la tabla de verdad será engorrosa y poco práctica. En cualquier caso, para nuestros propósitos no necesitamos la tabla de verdad completa. Nuestro método consiste en buscar una fila de un tipo particular, y esta búsqueda podemos llevarla a cabo de manera sistemática, en lugar de hacerla siguiendo el método de tanteo que supone construir la tabla completa. El procedimiento práctico se describe mejor en un ejemplo.

Ejemplo 1.30

Comprobemos la validez de la siguiente forma argumentativa.

$$((\sim p_1) \vee p_2),\ (p_1 \to (p_3 \wedge p_4)),\ (p_4 \to p_2);\ \therefore\ (p_2 \vee p_3).$$

Tratemos de asignar valores de verdad de manera que quede demostrada la invalidez de la forma argumentativa, es decir, de modo que las premisas se hagan verdaderas y la conclusión se haga falsa. Para que $(p_2 \vee p_3)$ tome el valor F, hemos de asignar F tanto a p_2

como a p_3. Seguidamente, para que $(p_4 \to p_2)$ tome el valor V, hemos de asignar F a p_4. Para que $((\sim p_1) \vee p_2)$ tome el valor V hemos de asignar F a p_1. Comprobando ahora el valor de verdad de la otra premisa $(p_1 \to (p_3 \wedge p_4))$ bajo estas asignaciones, vemos que resulta V. Así pues

p_1	p_2	p_3	p_4
F	F	F	F

es una asignación de valores de verdad bajo el cual todas las premisas toman el valor V y la conclusión toma el valor F. Por consiguiente, la forma argumentativa es inválida.

Nótese que si la forma argumentativa hubiese sido válida, hubiésemos sido incapaces de asignar valores de verdad de la manera inicialmente pretendida.

Ejemplo 1.31

Comprobemos la validez de la argumentación

$$(p_1 \to (p_2 \to p_3)),\ p_2;\ \therefore (p_1 \to p_3)$$

Tratemos de asignar valores de verdad a efectos de demostrar la invalidez de la forma argumentativa. Para que $(p_1 \to p_3)$ tome el valor F, p_1 tiene que tomar el valor V y p_3 el valor F. Hemos de exigir también que p_2 valga V. Bajo esta asignación de valores de verdad, la otra premisa, $(p_1 \to (p_2 \to p_3))$, toma el valor F. Así pues, es imposible asignar valores de verdad de modo que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, y la argumentación es válida.

▷ La siguiente proposición explicita la conexión entre argumentaciones e implicaciones, ya mencionada brevemente más arriba.

Proposición 1.32

La forma argumentativa

$$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n;\ \therefore \mathscr{A}$$

es válida si y sólo si la forma enunciativa

$$((\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A})$$

es una tautología.

Demostración: Supongamos primeramente que $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n;\ \therefore \mathscr{A}$ es una forma argumentativa válida y que $((\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A})$ *no* es una tautología. Existe entonces una asignación de valores de verdad a las

variables de enunciado que intervengan, tal que $(\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n)$ toma el valor V y $\mathscr{A}$ toma el valor F. Bajo esta asignación, cada $\mathscr{A}_i$ toma el valor $V (1 \leqslant i \leqslant n)$ y $\mathscr{A}$ toma el valor F. Esto contradice la validez de la forma argumentativa, por lo cual $((\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A})$ tiene que ser una tautología.

Supongamos ahora, a la inversa, que $((\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A})$ es una tautología y que $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n;\ \therefore \mathscr{A}$ *no* es una forma argumentativa válida. Existe entonces una asignación de valores de verdad que hace tomar a cada $\mathscr{A}_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ el valor V y a $\mathscr{A}$ el valor F, de modo que $((\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A})$ toma el valor F. Esto contradice la suposición de que esta forma enunciativa es una tautología, así que $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n;\ \therefore \mathscr{A}$ es una forma argumentativa válida.

Concluyamos el capítulo con una observación referente al familiar método matemático de «demostración por contradicción» o *reducción al absurdo*, que incidentalmente acaba de utilizarse en la demostración anterior.

Este tipo de demostración consiste en deducir una contradicción de la negación del enunciado que se quiere demostrar. El que este procedimiento es legítimo en el sentido de este capítulo, puede verse como sigue: Si tenemos una argumentación de la que se sabe que es un caso concreto de una forma argumentativa válida, y se sabe que su conclusión es falsa, entonces al menos una de las premisas debe ser falsa. Si se sabe que todas las premisas son verdaderas excepto una (la que se ha supuesto), puede deducirse legítimamente que ésta que se ha supuesto es la falsa.

Ejercicios

20 Para cada una de las siguientes argumentaciones, escríbase una forma argumentativa que se corresponda con ella y determínese si es válida o inválida.

(*a*) Si la función f no es continua, entonces la función g no es diferenciable. g es diferenciable. Así pues, f no es continua.

(*b*) Si Valdés ha instalado calefacción central, entonces ha vendido su coche o ha pedido dinero prestado al banco. Por tanto, si Valdés no ha vendido su coche, entonces no ha instalado calefacción central.

(*c*) Si hay petróleo en Poligonia, entonces o los expertos tienen razón o el gobierno está mintiendo. No hay petróleo en Poligonia, o si no los expertos se equivocan. Así pues, el gobierno no está mintiendo.

(*d*) Si U es un subespacio de V, entonces U es subconjunto de V, U contiene al vector cero y U es cerrado. U es un subconjunto de V, y si U es cerrado, entonces U contiene al vector cero. Así pues, si U es cerrado, entonces U es un subespacio de V.

21 Supóngase que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n; \therefore \mathscr{A}$ es una forma argumentativa válida. Demuéstrese que $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}; \therefore (\mathscr{A}_n \rightarrow \mathscr{A})$ es también una forma argumentativa válida.

22 Demuéstrese que lo siguiente es una forma argumentativa válida:

$$p, (p|(q|r)); \therefore r$$

2
Cálculo de enunciados formal

2.1 El sistema formal *L*

Nuestro estudio de la lógica está animado, al menos en parte, por el propósito de efectuar un análisis del proceso de deducción. En el primer capítulo hemos visto cómo abstraer la forma de los enunciados y las argumentaciones con el fin de ver más claramente las relaciones entre ellas y de dar una definición intuitiva de argumentación válida. No obstante, siguen en pie ciertas cuestiones. Por ejemplo, ¿podemos encontrar un procedimiento sencillo que nos permita construir una argumentación paso a paso, sabiendo que cada paso es válido? ¿En qué podríamos basar un procedimiento de este tipo? No podemos deducir a partir de la nada, sino que hemos de hacer algunas suposiciones iniciales. Para investigar este tipo de problemas, vamos a introducir la idea de *sistema deductivo formal*. Esto es en esencia la continuación de nuestro proceso de abstracción, a lo largo del cual llegamos a hacer abstracta la noción de demostración. La palabra «formal» aparece con frecuencia en libros de texto de lógica, sin que se dé explicación de ella. Se usa para referirse a una situación en la que se emplean símbolos cuyo comportamiento y propiedades están completamente determinados por un conjunto dado de reglas. En un sistema formal los símbolos carecen de significado, y al manejarlos hemos de tener cuidado de no presuponer nada de sus propiedades, salvo lo que se especifique en el sistema. Este es el único modo de estar seguros de que todas las suposiciones que hagamos a lo largo de una demostración son explícitas; y el hacer explícitas todas nuestras suposiciones es la única manera de que podamos descubrir algo fundamental acerca de la lógica.

En este libro nos ocuparemos de dos sistemas formales particulares, pero a veces necesitaremos tratar otros que son modificaciones de estos dos, de modo que vamos a comenzar dando una definición general de lo que constituye un sistema formal.

Para especificar un sistema formal se requieren:

1. Un alfabeto de símbolos.
2. Un conjunto de cadenas finitas de dichos símbolos, llamadas fórmulas bien formadas. Ha de imaginarse que éstas son las palabras y frases de nuestros lenguajes formales.
3. Un conjunto de fórmulas bien formadas, llamadas axiomas.
4. Un conjunto finito de «reglas de deducción», por ejemplo, reglas que permiten deducir una fórmula bien formada, tal como $\mathscr{A}$, como «consecuencia directa» de un conjunto finito de fórmulas bien formadas, tales como $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k$.

Dadas estas cuatro cosas, pueden construirse deducciones (que pueden o no estar relacionadas con la deducción lógica, en dependencia del sistema formal particular considerado) por medio de aplicaciones sucesivas de las reglas de deducción a partir de axiomas. Muy pronto precisaremos esto.

Notación: De aquí en adelante abreviaremos «fórmula bien formada» poniendo «*fbf*».

Definición 2.1

El *sistema formal L del cálculo de enunciados* se define como sigue:

1. Alfabeto de símbolos (infinito):

$$\sim, \rightarrow, (\ ,\ ), p_1, p_2, p_3, \ldots,$$

2. Conjunto de *fbfs*. En lugar de especificarlo explícitamente damos una regla inductiva con tres partes (véase Definición 1.2):
   (i) p_i es una *fbf* para todo $i \geqslant 1$.
   (ii) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son *fbfs*, entonces $(\sim\mathscr{A})$ y $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ son *fbfs*.
   (iii) El conjunto de todas las *fbfs* es el generado por (i) e (ii).
3. Axiomas. Hay infinitos axiomas, así que no podemos escribirlos todos. No obstante, podemos especificarlos por medio de tres *esquemas de axiomas*. Cualesquiera que sean las *fbfs* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, las *fbfs* siguientes son axiomas de L:

$(L1)$ $(\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$.

$(L2)$ $((\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{C}))\rightarrow((\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{C})))$.

$(L3)$ $(((\sim\mathscr{A})\rightarrow(\sim\mathscr{B}))\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$.

Nótese que cada esquema de axioma tiene infinitas «realizaciones», según $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ varían sobre todas las *fbfs* de L.

4. Reglas de deducción. En L hay solamente una regla de deducción, la regla *modus ponens* (abreviadamente, MP), que afirma: De $\mathscr{A}$ y $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ se deduce como consecuencia directa $\mathscr{B}$, siendo $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ *fbfs* cualesquiera de L.

▷ El alfabeto y el conjunto de *fbfs* se han escogido de modo que reflejen el desarrollo del capítulo anterior. Queremos que las *fbfs* representen de alguna manera las formas enunciativas, así que la definición sigue de cerca a la definición de forma enunciativa. Los símbolos $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ no aparecen en el alfabeto de L, de modo que las expresiones en las que intervengan no son parte de L. No obstante, como ya hemos visto, $\{\sim, \rightarrow\}$ es un conjunto adecuado de conectivas, de manera que toda función de verdad estará representada por alguna *fbf* de L, y toda forma enunciativa será lógicamente equivalente a alguna *fbf* de L. (Téngase presente, sin embargo, que las nociones de forma enunciativa y equivalencia lógica pertenecen al capítulo 1 y no tienen lugar en el sistema formal L.) En L hemos limitado el número de conectivas a fin de hacer el sistema formal más sencillo y para poder escribir en poco espacio un conjunto de axiomas y reglas de deducción. Si hubiésemos incluido $\wedge$, por ejemplo, en el alfabeto de símbolos, tendríamos que haber incluido también axiomas y/o reglas de deducción para gobernar su comportamiento (y para hacer explícita su conexión con el símbolo $\rightarrow$), ya que los símbolos de nuestro lenguaje no tienen propiedades prefijadas; todas sus propiedades han de ser derivables a partir de la información contenida en la definición de L.

La regla de deducción de L parece razonable desde el punto de vista intuitivo. Esta regla corresponde a una de las maneras standard de proceder en una argumentación en lenguaje cotidiano. Los axiomas de L son la parte menos obvia del sistema. El lector hará bien en examinarlos de cerca, dándose cuenta de que si se consideran como formas enunciativas, son tautologías. Los axiomas han de estar presentes para proporcionar una base a partir de la cual deducir, y el conjunto que hemos escogido no es el único posible. Los esquemas de axiomas considerados más arriba resultan ser convenientes para las demostraciones de dos teoremas posteriores, el Teorema de Deducción y el Teorema de Adecuación. En el curso de la exposición se aclararán presumiblemente las razones que han aconsejado la elección de axiomas.

Debemos explicar ahora la naturaleza deductiva de L.

Definición 2.2

Una *demostración en L* es una sucesión finita de *fbfs*. $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ tal que para todo i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, o $\mathscr{A}_i$ es un axioma de L o $\mathscr{A}_i$ se deduce de dos miembros anteriores de la sucesión, digamos $\mathscr{A}_j$ y $\mathscr{A}_k$ $(j<i,\ k<i)$ como consecuencia directa, aplicando la regla de deducción MP. Una tal demostración diremos que es una *demostración de* $\mathscr{A}_n$ *en L*, y también que $\mathscr{A}_n$ *es un teorema de L*.

Observaciones 2.3

(*a*) En la definición anterior, obsérvese que $\mathscr{A}_j$ y $\mathscr{A}_k$ deben ser necesariamente de las formas $\mathscr{B}$ y $(\mathscr{B}\to\mathscr{A}_i)$ o viceversa.

(*b*) Si $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ es una demostración en L y $k<n$, entonces $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k$ es también una demostración en L (evidentemente, satisface la definición), de modo que $\mathscr{A}_k$ es un teorema de L.

(*c*) Los axiomas de L son ciertamente teoremas de L. Sus demostraciones en L son sucesiones con un solo miembro.

Ejemplo 2.4

La siguiente sucesión finita es una demostración en L.

(1)	$(p_1\to(p_2\to p_1))$	(caso particular de $(L1)$)
(2)	$((p_1\to(p_2\to p_1))\to((p_1\to p_2)\to(p_1\to p_1)))$	$(L2)$
(3)	$((p_1\to p_2)\to(p_1\to p_1))$	(de (1), (2) mediante MP)

Se deduce que $((p_1\to p_2)\to(p_1\to p_1))$ es un teorema de L.

Una demostración en L es una demostración a partir de los axiomas. Vamos a necesitar también el concepto más general de deducción a partir de un conjunto dado de *fbfs*.

Definición 2.5

Sea Γ un conjunto de *fbfs* de L (que pueden o no ser axiomas o teoremas de L). Una sucesión finita $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ de *fbfs* de L es una *deducción a partir de* Γ si para todo i $(1\leqslant i\leqslant n)$ se verifica alguna de las condiciones siguientes:

(*a*) $\mathscr{A}_i$ es un axioma de L,

(*b*) $\mathscr{A}_i$ es miembro de Γ,

(*c*) $\mathscr{A}_i$ se deduce directamente de dos miembros anteriores de la sucesión mediante MP.

Así pues, una deducción a partir de Γ es justamente una «demostración» en la cual los miembros de Γ se consideran temporalmente como axiomas.

El último miembro, $\mathscr{A}_n$, de una sucesión finita que sea una deducción a partir de Γ, se dice que es *deducible a partir de* Γ, o que es una consecuencia de Γ en L.

Si una *fbf* $\mathscr{A}$ es el último miembro de alguna deducción a partir de Γ, diremos que $\mathscr{A}$ es *derivable* a partir de Γ y escribiremos $\Gamma\vdash_L\mathscr{A}$.

Nótese que todo teorema de L es deducible a partir del conjunto vacío de *fbfs* (una demostración en L es una deducción a partir de ϕ), de manera que si $\mathscr{A}$ es un teorema de L podemos escribir $\phi\vdash_L\mathscr{A}$, o más sencillamente y para abreviar, $\vdash_L\mathscr{A}$.

Observación: Es importante recordar que «$\vdash$» no es un símbolo de L, y que por lo tanto una expresión que lo contenga no puede ser parte de L. Por ejemplo, $\vdash_L\mathscr{A}$, lejos de ser parte de L, es un enunciado *acerca* de L, el enunciado que afirma que la *fbf* $\mathscr{A}$ es un teorema de L.

Ejemplo 2.6

Lo que sigue es una deducción de L que demuestra $\{\mathscr{A}, (\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))\}\vdash_L(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$ siendo $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ *fbfs* cualesquiera de L.

(1)	$\mathscr{A}$	hipótesis
(2)	$(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))$	hipótesis
(3)	$(\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$	$(L1)$
(4)	$(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$	(1), (3) MP
(5)	$((\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))\to((\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))$	$(L2)$
(6)	$((\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))$	(2), (5) MP
(7)	$(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$	(4), (6) MP

▷ Este ejemplo y la observación que le precede sacan a la luz una distinción que importa recalcar: Del mismo modo que $\vdash_L\mathscr{A}$ es un enunciado acerca de L, el resultado del ejemplo es un resultado general sobre L:

Para *fbfs* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ cualesquiera de L,

$$\{\mathscr{A}, (\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))\}\vdash_L(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$$

Este resultado acerca de L ciertamente no es parte de L. En nuestros procedimientos existen dos niveles, ya que estamos demostrando resultados acerca de demostraciones. Emplearemos la palabra «teorema» tan sólo para referirnos a *fbfs* del sistema formal que posean demostración en el sentido de la Definición 2.2. Para designar resultados, como el mencionado más arriba, acerca de sistemas formales, se usa a veces la palabra «metateorema». Los teoremas son ciertas *fbfs*, mientras que los metateoremas se escriben en lenguaje matemático ordinario. Nuestro uso de la palabra proposición tiene por objeto evitar confusiones. En general, nuestras proposiciones son metateoremas.

Nótese también que las letras cursivas $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, etc., que hemos venido usando no son parte de L. Las usamos por conveniencia, para representar a *fbfs* de L no especificadas, o cuando hacemos aseveraciones generales sobre L.

Hemos construido el sistema formal L como un sistema en el cual ciertas *fbfs* pueden demostrarse como teoremas. Naturalmente, nos interesa saber qué *fbfs* de L son teoremas. Ahora bien, el único método de que disponemos para demostrar que una *fbf* es un teorema es exhi-

bir una sucesión finita de *fbfs* que constituya una demostración. Esto puede resultar un asunto engorroso y los métodos a emplear en cada caso particular no siempre son obvios.

Ejemplo 2.7

Para *fbfs* cualesquiera $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ de L

(*a*) $\vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{A})$.
(*b*) $\vdash_L (\sim \mathscr{B} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$.

Escribiremos para cada caso una demostración en L. Para (*a*):

(1)	$(\mathscr{A} \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})) \to ((\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A}))$		$(L2)$
(2)	$(\mathscr{A} \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}))$		$(L1)$
(3)	$((\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A}))$	(1), (2)	MP
(4)	$((\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A}))$		$(L1)$
(5)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$	(3), (4)	MP

Para (*b*):

(1)	$(\sim \mathscr{B} \to (\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}))$		$(L1)$
(2)	$((\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$		$(L3)$
(3)	$((\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})) \to (\sim \mathscr{B} \to ((\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})))$		$(L1)$
(4)	$(\sim \mathscr{B} \to ((\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})))$	(2), (3)	MP
(5)	$(\sim \mathscr{B} \to ((\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))) \to ((\sim \mathscr{B} \to (\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to (\sim \mathscr{B} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})))$		$(L2)$
(6)	$(\sim \mathscr{B} \to (\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B})) \to (\sim \mathscr{B} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$	(4), (5)	MP
(7)	$(\sim \mathscr{B} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$	(1), (6)	MP

En lo anterior hemos sido menos estrictos que anteriormente en el uso de los paréntesis. Algunas de las expresiones empleadas en la demostración del caso (*b*) no son *fbfs*. Por ejemplo, (1) debería ser $((\sim \mathscr{B}) \to ((\sim \mathscr{A}) \to (\sim \mathscr{B})))$. No obstante, seguiremos abreviando *fbfs* de esta manera. Las ventajas que se obtienen así son obvias, pero hemos de tener cuidado de no omitir tantos paréntesis que la expresión resultante sea ambigua.

▷ Una manera de hacer menos ardua la demostración de teoremas es permitir en las demostraciones la inserción de *fbfs* para las que se ha obtenido previamente una demostración. Esto se corresponde con el procedimiento matemático standard de citar teoremas previamente demostrados. Otro modo consiste en hacer uso de ciertos metateoremas generales, algunos de los cuales tienen el efecto de reglas de inferencia adicionales. La principal herramienta es el resultado siguiente.

Proposición 2.8 (El Teorema de Deducción)

Si $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{B}$ entonces $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$, siendo $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ *fbfs* de L y Γ un conjunto de *fbfs* de L (eventualmente vacío).

Demostración: La demostración es por inducción sobre el número de *fbfs* de la sucesión que constituye la deducción de $\mathscr{B}$ a partir de $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$. Para el paso base, supongamos que esta sucesión tenga un solo miembro. Este miembro debe ser la propia $\mathscr{B}$, así que $\mathscr{B}$ es un axioma de L o $\mathscr{B}$ es miembro de $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$.

Caso 1: $\mathscr{B}$ es un axioma de L. Lo que sigue es una deducción de $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ a partir de Γ.

(1)	$\mathscr{B}$		axioma de L
(2)	$(\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}))$		$(L1)$
(3)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(1), (2)	MP

Así pues, $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$.

Caso 2: $\mathscr{B} \in \Gamma$. La siguiente deducción muestra que $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$.

(1)	$\mathscr{B}$		miembro de Γ
(2)	$(\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}))$		$(L1)$
(3)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(1), (2)	MP

Caso 3: $\mathscr{B}$ es $\mathscr{A}$. Hemos visto que $\vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{A})$, de manera que la demostración de $(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ en L servirá como deducción de $(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ a partir de Γ. Por tanto, también en este caso tenemos $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$. Esto completa el paso base.

Supongamos ahora que la deducción de $\mathscr{B}$ a partir de $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ es una sucesión de n miembros, siendo $n > 1$, y que la proposición se verifica para todas las *fbfs* $\mathscr{C}$ que pueden deducirse de $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ vía una sucesión de menos de n miembros. Ahora hay cuatro casos a considerar.

Caso 1: $\mathscr{B}$ es un axioma de L. Exactamente igual que en el Caso 1 de antes, demostramos que $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$.

Caso 2: $\mathscr{B} \in \Gamma$. También en este caso, $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ como en el Caso 2 de antes.

Caso 3: $\mathscr{B}$ es $\mathscr{A}$. Como en el Caso 3 anterior.

Caso 4: $\mathscr{B}$ se obtiene de dos *fbfs* anteriores de la demostración mediante una aplicación de MP. Estas dos *fbfs* tendrán por fuerza las formas $\mathscr{C}$ y $(\mathscr{C} \to \mathscr{B})$, y cada una de ellas puede ciertamente deducirse de $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ mediante una sucesión de menos de n miembros. En cada caso, basta con omitir los miembros siguientes de la deducción original, y lo que queda es la sucesión deseada (cf. Observación 2.3(*b*)). Tenemos $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{C}$ y $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L (\mathscr{C} \to \mathscr{B})$, y, aplicando la hipótesis de inducción, $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$ y $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B}))$.

La deducción requerida de $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ a partir de Γ puede construirse ahora como sigue:

(1)		
⋮		deducción de $(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$ a partir de Γ
(k)	$(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$	
$(k+1)$		
⋮		deducción de $(\mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B}))$ a partir de Γ
(l)	$(\mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B}))$	
$(l+1)$	$(\mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B}))\to((\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$	$(L2)$
$(l+2)$	$(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	(l), $(l+1)$ MP
$(l+3)$	$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	(k), $(l+2)$ MP

$\therefore\quad \Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ en los cuatro casos.

Así pues, por el principio de inducción matemática, la proposición se verifica cualquiera que sea el número de *fbfs* de la deducción de $\mathscr{B}$ a partir de $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$.

Nota. No hemos usado ningún caso particular de $(L3)$ en la demostración de esta proposición. Esto tiene importantes consecuencias en el estudio de otros sistemas formales que tienen otros conjuntos de axiomas diferentes.

▷ El recíproco del Teorema de Deducción es fácil de demostrar.

Proposición 2.9

Si $\Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ entonces $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_L\mathscr{B}$, siendo $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ *fbfs* de L y Γ un conjunto (eventualmente vacío) de *fbfs* de L.

Demostración: Dada una deducción de $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ a partir de Γ, deseamos construir una deducción de $\mathscr{B}$ a partir de $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$.

(1)		
⋮		
(k)	$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	deducción de $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ a partir de Γ
$(k+1)$	$\mathscr{A}$	miembro de $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$
$(k+2)$	$\mathscr{B}$	(k), $(k+1)$ MP

▷ El uso del Teorema de Deducción se ilustra en la demostración del resultado siguiente, que puede utilizarse como nueva regla de deducción.

Corolario 2.10

Dadas *fbfs* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ cualesquiera de L,

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),\ (\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$$

Demostración: Escribamos la deducción.

(1)	$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	hipótesis
(2)	$(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$	hipótesis
(3)	$\mathscr{A}$	hipótesis
(4)	$\mathscr{B}$	(1), (3) MP
(5)	$\mathscr{C}$	(2), (4) MP

Lo que hemos demostrado así es que

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),\ (\mathscr{B}\to\mathscr{C}),\ \mathscr{A}\}\vdash_L\mathscr{C} \qquad (*)$$

es decir,

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),\ (\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_L\mathscr{C}$$

De este modo tenemos, por el Teorema de Deducción

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),\ (\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{C}) \text{ como se quería}$$

▷ Este resultado se aplicará varias veces en lo que sigue; nos referiremos a él como regla del 'silogismo hipotético', y lo abreviaremos por *SH*.

Nota: Hay varias maneras de aplicar el Teorema de Deducción a (*) de más arriba. Puede deducirse también cualquiera de los resultados siguientes:

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),\ \mathscr{A}\}\vdash_L((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to\mathscr{C}),$$
$$\{(\mathscr{B}\to\mathscr{C}),\ \mathscr{A}\}\vdash_L((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{C}).$$

Aplicando de nuevo el Teorema de Deducción al resultado del corolario obtenemos

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\}\vdash_L((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))$$

y por tanto

$$\vdash_L((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))).$$

Proposición 2.11

Dadas *fbfs* cualesquiera $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ de L, los dos siguientes son teoremas de L.

$$(a)\qquad (\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$$
$$(b)\qquad ((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}).$$

Demostración: ((*a*) apareció en el ejemplo 2.7, pero lo incluimos aquí para ilustrar la simplificación resultante del uso de la nueva regla *SH*.)

Ad (*a*):

(1)	$(\sim\mathscr{B}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}))$	(*L*1)
(2)	$(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$	(*L*3)
(3)	$(\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$	(1), (2) *SH*

Ad (*b*):

(1)	$(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})$	hipótesis
(2)	$(\sim\mathscr{A}\to(\sim\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\sim\mathscr{A}))$	(*L*1)
(3)	$(\sim\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\sim\mathscr{A})\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$	(*L*3)
(4)	$(\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))$	(2), (3) *SH*
(5)	$(\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))$	(*L*2)
(6)	$(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$	(4), (5) *MP*
(7)	$(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$	(1), (6) *MP*
(8)	$(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A})$	(*L*3)
(9)	$(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$	(7), (8) *MP*
(10)	$\mathscr{A}$	(1), (9) *MP*

Así pues, $(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\vdash_L\mathscr{A}$,

$\therefore\vdash_L((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A})$, por el Teorema de Deducción. Estos resultados serán útiles más adelante.

Ejercicios

1 Escríbanse demostraciones en L para las siguientes *fbfs*.

(*a*) $(p_1\to p_2)\to((\sim p_1\to\sim p_2)\to(p_2\to p_1))$;
(*b*) $((p_1\to(p_2\to p_3))\to(p_1\to p_2))\to((p_1\to(p_2\to p_3))\to(p_1\to p_3))$;
(*c*) $(p_1\to(p_1\to p_2))\to(p_1\to p_2)$;
(*d*) $(p_1\to(p_2\to(p_1\to p_2)))$.

2 Demuéstrese que para *fbfs* cualesquiera $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ de L se verifica lo que sigue.

(*a*) $\{(\sim\mathscr{A})\}\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$;
(*b*) $\{(\sim(\sim\mathscr{A}))\}\vdash_L\mathscr{A}$;
(*c*) $\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\sim\mathscr{A}))\}\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$;
(*d*) $\{(\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))\}\vdash_L(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))$.

3 Usando el Teorema de Deducción para L, demuéstrese que las siguientes *fbfs* son teoremas de L, siendo $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ *fbfs*, cualesquiera de L.

(*a*) $(\mathscr{A}\to(\sim(\sim\mathscr{A})))$;
(*b*) $((\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to((\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B})))$;
(*c*) $(((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A})\to\mathscr{A})$;
(*d*) $(\sim(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$.

4 Sea L' el sistema deductivo formal que difiere de L tan sólo en que tiene el

esquema de axiomas (*L*3) $((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A}))$. Demuéstrese que, dadas *fbfs*, cualesquiera $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ de L (y con ello de L'):

(i) $\vdash_{L'}((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A}))$,

y

(ii) $\vdash_{L'}((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$.

Dedúzcase que una *fbf* es un teorema de L si y sólo si es un teorema de L'.

5 La regla *SH* es un ejemplo de regla de deducción adicional legítima para L. ¿Es la siguiente regla legítima en el mismo sentido? A partir de las *fbfs* $\mathscr{B}$ y $(\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))$, se deduce $(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$.

2.2 El Teorema de Adecuación para L

No es una tarea muy remuneradora el demostrar que ciertas *fbfs* de L particulares son teoremas de L, como hemos hecho en la proposición 2.11. Como muestra la parte (*b*), a veces es difícil el saber cómo proceder, y el producto final puede ser muy complejo y distar mucho de ser una demostración intuitiva. No obstante, este aspecto de L no debe inquietarnos. La razón para definir L ha sido ante todo el intento de construir un sistema formal que refleje (por analogía) nuestras ideas intuitivas de deducción, validez y verdad, tratando de paso de aprender algo acerca de estas ideas.

El capítulo 1 nos ha proporcionado una noción de 'verdad lógica', el concepto de tautología. Parece razonable esperar que estas verdades lógicas se correspondan con los teoremas de L, y tratar de construir L según esta finalidad. El resto de este capítulo se dedica a demostrar que L posee esta propiedad. Este procedimiento nos proporcionará una cierta comprensión de la naturaleza y propiedades de los sistemas formales en general, que será útil en capítulos posteriores.

Pese a que los símbolos de L se consideran como puramente formales, L se ha definido de tal manera que pudimos interpretar las *fbfs* de L como formas enunciativas, estando representada cada función de verdad por alguna *fbf*. Así pues, aunque no podamos hablar de asignar valores de verdad a los símbolos de L de la misma manera que en el capítulo 1, podemos definir un procedimiento análogo.

Definición 2.12

Una *valoración* de L es una función v cuyo dominio es el conjunto de *fbfs* de L y cuyo rango es el conjunto $\{V, F\}$, tal que para *fbfs* cualesquiera $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ de L,

(i) $v(\mathscr{A})\neq v(\sim\mathscr{A})$

y

(ii) $v(\mathscr{A}\to\mathscr{B})=F$ si y sólo si $v(\mathscr{A})=V$ y $v(\mathscr{B})=F$

Nótese que una 'asignación' arbitraria de 'valores de verdad' a los símbolos $p_1, p_2, \ldots$ de L conducirá a una valoración, ya que cada *fbfs* de L tomará (como forma enunciativa) exactamente uno de los dos valores de verdad bajo una tal asignación. (i) e (ii) se satisfarán trivialmente.

Definición 2.13

Una *fbf* de L es una *tautología* si para toda valoración v, $v(\mathscr{A}) = V$. Esto equivale a considerar $\mathscr{A}$ como forma enunciativa y aplicar la definición ya conocida.

▷ Demostraremos que una *fbf* de L es un teorema de L si y sólo si es una tautología. Ya estamos en condiciones de demostrar la implicación en un sentido.

Proposición 2.14 (El Teorema de Corrección)

Todo teorema de L es una tautología.

Demostración: Sea $\mathscr{A}$ un teorema de L. La demostración es por inducción sobre el número de *fbfs* de L miembros de una sucesión finita que constituya una demostración de $\mathscr{A}$ en L.

Para el paso base, supongamos que la demostración de $\mathscr{A}$ consta de una sola *fbf*, la propia $\mathscr{A}$. Entonces $\mathscr{A}$ tiene que ser un axioma de L. Todos los axiomas de L son tautologías. Esto se comprueba construyendo tablas de verdad, y se deja como ejercicio al lector.

Supongamos ahora que la demostración de $\mathscr{A}$ contiene n *fbfs*, siendo $n > 1$, y supongamos como hipótesis de inducción que todos los teoremas de L que poseen demostraciones de menos de n pasos son tautologías. O bien $\mathscr{A}$ es un axioma, en cuyo caso $\mathscr{A}$ es una tautología, o $\mathscr{A}$ se deduce mediante *MP* de dos *fbfs* anteriores en la demostración. Estas dos *fbfs* deberán tener las formas $\mathscr{B}$ y $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$. Pero $\mathscr{B}$ y $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ son teoremas de L cuyas demostraciones son sucesiones de menos de n *fbfs* (la demostración de $\mathscr{A}$ truncada apropiadamente). Así pues, $\mathscr{B}$ y $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ son tautologías por hipótesis de inducción, y de este modo, por la Proposición 1.9, $\mathscr{A}$ es una tautología.

Así pues, por el principio de inducción matemática, todo teorema de L es una tautología.

▷ Para demostrar el resultado recíproco, necesitamos dos nuevas ideas: *extensiones* de L y *consistencia*.

L tiene tres esquemas de axiomas, que son los puntos de partida para las demostraciones de teoremas. ¿Qué ocurriría si añadiésemos otro esquema de axiomas, o simplemente otro axioma? Tendríamos

más premisas de las que partir, de modo que, en general, podríamos esperar que fuese posible demostrar más teoremas. Todas las *fbfs* que fuesen teoremas previamente serían siéndolo, pero quizás algunas *fbfs* que no eran teoremas antes se convertirían en teoremas. De hecho, aparecerán nuevos teoremas si y sólo si el nuevo conjunto de axiomas contiene al menos una *fbf* que no fuese previamente un teorema. (El lector podrá encontrar fácilmente una demostración de ésto.)

Definición 2.15

Una *extensión* de L es un sistema formal obtenido alterando o ampliando el conjunto de axiomas de manera que todos los teoremas de L sigan siendo teoremas (habiéndose introducido eventualmente teoremas nuevos).

No hace falta más que consultar alguno de los muchos textos de lógica para comprobar que es posible reemplazar nuestros esquemas de axiomas ($L1$), ($L2$) y ($L3$) por otros, de tal manera que la clase de los teoremas no varíe. Por ejemplo, (véase el Ejercicio 2.4), ($L3$) puede reemplazarse por el esquema:

$$((\sim\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to ((\sim\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}))$$

sin alterar la clase de los teoremas.

Nota: Es posible que un sistema formal sea extensión de L sin tener axiomas en común con L

▷ Si extendiésemos L a sistemas con mayor número de teoremas cada vez, lo más probable es que llegase a existir una *fbf* $\mathscr{A}$ tal que tanto $\mathscr{A}$ como $(\sim\mathscr{A})$ fuesen teoremas. Es evidente que una situación así no es deseable.

Definición 2.16

Una extensión de L es *consistente* si no existe ninguna *fbf* $\mathscr{A}$ de L tal que tanto $\mathscr{A}$ como $(\sim\mathscr{A})$ sean teoremas de la extensión.

Naturalmente, esta definición sería irrelevante si el propio L no fuese consistente.

Proposición 2.17

L es consistente.

Demostración: Supongamos que L no fuese consistente, por ejemplo que existiese una *fbf* $\mathscr{A}$ tal que $\vdash_L \mathscr{A}$ y $\vdash_L (\sim\mathscr{A})$. Entonces, por la proposi-

ción 2.14 (Teorema de Corrección), tanto $\mathscr{A}$ como $(\sim\mathscr{A})$ serían tautologías. Esto es imposible, ya que si $(\sim\mathscr{A})$ es una tautología, entonces $\mathscr{A}$ es una contradicción. Por lo tanto, L es consistente.

Proposición 2.18

Una extensión L^* de L es consistente si y sólo si existe una *fbf* que no es teorema de L^*.

Demostración: Sea L^* consistente. Entonces para toda *fbf* $\mathscr{A}$, o bien $\mathscr{A}$ o bien $(\sim\mathscr{A})$ no es teorema (ambas no pueden ser teoremas).

Recíprocamente, supongamos que L^* no es consistente. Demostremos que no hay *fbfs* que no sean teoremas de L^*, es decir, que toda *fbf* es teorema de L^*. Sea $\mathscr{A}$ cualquier *fbf*; L^* no es consistente, así que $\vdash_{L^*} \mathscr{B}$ y $\vdash_{L^*} (\sim\mathscr{B})$ para ciertas *fbfs* $\mathscr{B}$. Ahora bien, $\vdash_{L^*} (\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$, por Proposición 2.11. Así, $\vdash_{L^*} (\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$ pues L^* es extensión de L Aplicando dos veces MP, obtenemos ahora $\vdash_{L^*} \mathscr{A}$. Así pues, toda *fbf* es teorema de L^*, como se quería.

Han de recalcarse dos aspectos de esta proposición. A saber:

(*a*) En una extensión inconsistente de L, toda *fbf* es un teorema. Siempre que hagamos uso de extensiones de L debemos tener cuidado con la consistencia, ya que el valor de un sistema en el que todas las *fbfs* son teoremas es tan insignificante como el de un sistema en el que ninguna *fbf* es teorema.

(*b*) La condición suficiente de consistencia dada por la proposición es sorprendentemente débil: Que exista una sola *fbf* que no sea teorema. Esto es sorprendente, porque en cualquier sistema consistente habrá ciertamente muchas *fbfs* que no son teoremas: Por ejemplo, las negaciones de todos los teoremas son no-teoremas.

Pasemos ahora a una proposición que parece insignificante y puramente técnica, pero que usaremos vez tras vez en las demostraciones de resultados posteriores. Describe una circunstancia en la que puede obtenerse una extensión consistente.

Proposición 2.19

Sea L^* una extensión de L y sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de L que no sea teorema de L^*. Entonces L^{**} es también consistente, siendo L^{**} la extensión de L obtenida añadiendo $(\sim\mathscr{A})$ como nuevo axioma a L^*.

Demostración: Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de L que no es teorema de L^*. Supongamos que L^{**} es inconsistente. Entonces, para alguna *fbf* $\mathscr{B}$, $\vdash_{L^{**}} \mathscr{B}$ y $\vdash_{L^{**}} (\sim\mathscr{B})$. Ahora bien, del mismo modo que en la demostración de la Proposición 2.18, se deduce que $\vdash_{L^{**}} \mathscr{A}$. Pero L^{**} tan sólo se diferencia de L^* en que tiene a $(\sim\mathscr{A})$ como axioma adicional, así que $\vdash_{L^{**}} \mathscr{A}$ es equivalente a $(\sim\mathscr{A})\vdash_{L^*} \mathscr{A}$. (Una demostración en L^{**} es justamente una deducción a partir de $(\sim\mathscr{A})$ en L^*). Así pues, $\vdash_{L^*} ((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A})$, por el Teorema de Deducción. Pero $\vdash_{L} (((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A})$, por la proposición 2.11, de modo que $\vdash_{L^*} (((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A})$.
Con MP obtenemos ahora

$$\vdash_{L^*} \mathscr{A}$$

Pero esto contradice la hipótesis de que $\mathscr{A}$ no es teorema de L^*. Así pues, L^* tiene que ser consistente.

▷ Obviamente, existe en alguna parte un límite a las *fbfs* que pueden incluirse como axiomas adicionales en una extensión de L, manteniendo la consistencia. La siguiente proposición tiene por objeto alcanzar este límite, pero describamos primero la situación en una definición.

Definición 2.20

Una extensión de L es *completa* si para toda *fbf* $\mathscr{A}$, o $\mathscr{A}$ o $(\sim\mathscr{A})$ es teorema de la extensión.

Observaciones: (*a*) L dista mucho de ser completa. Por ejemplo, p_1 es una *fbf* de L, y ni p_1 ni $(\sim p_1)$ son teoremas de L.

(*b*) Toda extensión inconsistente de L es obviamente completa, por la Proposición 2.18.

(*c*) Si L^c es una extensión consistente y completa de L, entonces cualquier otra extensión de L en la cual la clase de los teorema extienda a la clase de los teoremas de L^c es inconsistente. En efecto, supongamos que $\mathscr{A}$ no es teorema de L^c. Entonces $(\sim\mathscr{A})$ es teorema de L^c. Así pues, si $\mathscr{A}$ es un teorema de otra extensión, también lo es $(\sim\mathscr{A})$, de modo que esta otra extensión no puede ser consistente.

Proposición 2.21

Sea L^* una extensión consistente de L. Entonces existe una extensión consistente y completa de L^*.

(Nótese que aquí hemos generalizado nuestra terminología. Una extensión de L^* se obtiene alterando o ampliando el conjunto de axiomas de L^* de manera que el conjunto de teoremas aumente. Véase la Definición 2.15.)

Demostración: Sea $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots$ una enumeración de todas las *fbfs* de L. Esta puede haberse construido de varias maneras —se aconseja

al lector que intente encontrar un método para producir una lista de este tipo. (Al hacerlo, será útil el estar familiarizado con construcciones referentes a conjuntos infinitos numerables).[1] Construyamos una sucesión $J_0, J_1, J_2, \ldots$ de extensiones de L^* como sigue.
Sea

$$J_0 = L^*$$

Si

$$\vdash_{J_0} \mathscr{A}_0, \text{ sea } J_1 = J_0$$

Si no $\vdash_{J_0} \mathscr{A}_0$, añádase $(\sim \mathscr{A}_0)$ como nuevo axioma para obtener J_1 a partir de J_0.

En general, dado $n \geqslant 1$, y para construir J_n a partir de J_{n-1}: Si $\vdash_{J_{n-1}} \mathscr{A}_{n-1}$, entonces $J_n = J_{n-1}$, y si no $\vdash_{J_{n-1}} \mathscr{A}_{n-1}$, sea J_n la extensión de J_{n-1} obtenida añadiendo $(\sim \mathscr{A}_{n-1})$ como nuevo axioma.

L^* es consistente, es decir, J_0 es consistente, por hipótesis. Dado $n \geqslant 1$, si J_{n-1} es consistente, entonces J_n es consistente, por la Proposición 2.19. Así pues, por inducción, todo $J_n (n \geqslant 0)$ es consistente. Definamos ahora J como aquella extensión de L^* que tiene como axiomas a aquellas *fbfs* que son axiomas de al menos uno de los J_n.

Demostraremos que J es consistente. Supongamos lo contrario. Entonces existe una *fbf.* $\mathscr{A}$ tal que $\vdash_J \mathscr{A}$ y $\vdash_J (\sim \mathscr{A})$. Ahora bien, las demostraciones de $\mathscr{A}$ y $(\sim \mathscr{A})$ en J son sucesiones finitas de *fbfs*, de modo que cada demostración solamente puede contener casos particulares de un número finito de axiomas de J. Así pues, debe existir un n suficientemente grande como para que todos estos axiomas utilizados sean axiomas de J_n. Se deduce que $\vdash_{J_n} \mathscr{A}$ y $\vdash_{J_n} (\sim \mathscr{A})$. Esto contradice la consistencia de J_n, con lo que J debe ser consistente.

Queda por demostrar que J es completo. Sea $\mathscr{A}$ una *fbf.* de L. $\mathscr{A}$ debe aparecer en la lista $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots$, digamos que $\mathscr{A}$ es $\mathscr{A}_k$. Si $\vdash_{J_k} \mathscr{A}_k$, entonces $\vdash_J \mathscr{A}_k$, puesto que J es una extensión de J_k. Si no $\vdash_{J_k} \mathscr{A}_k$, entonces de acuerdo con la construcción de J_{k+1}, $(\sim \mathscr{A}_k)$ es un axioma de J_{k+1}, con lo que $\vdash_{J_{k+1}} (\sim \mathscr{A}_k)$. Esto implica que $\vdash_J (\sim \mathscr{A}_k)$. Así, en todo caso tenemos $\vdash_J \mathscr{A}$ o $\vdash_J (\sim \mathscr{A})$, con lo que J es completo.

Proposición 2.22

Si L^* es una extensión consistente de L, entonces existe una valoración en la cual todo teorema de L^* toma el valor V.

[1] Véase el Apéndice.

Demostración: Definamos v sobre *fbfs* de L poniendo:

$$v(\mathscr{A}) = V \text{ si } \vdash_J \mathscr{A},$$

y

$$v(\mathscr{A}) = F \text{ si } \vdash_J (\sim \mathscr{A}),$$

siendo J una extensión consistente y completa de L^*, como la dada en la demostración de la Proposición 2.21. Nótese que v está definida sobre todas las *fbfs*, por ser J completa. Ahora bien, $v(\mathscr{A}) \neq v(\sim \mathscr{A})$ para toda *fbf.* $\mathscr{A}$, ya que J es consistente, y queda por demostrar que $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ si y sólo si $v(\mathscr{A}) = V$ y $v(\mathscr{B}) = F$. Supongamos primero que $v(\mathscr{A}) = V$, $v(\mathscr{B}) = F$ y $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = V$. Entonces $\vdash_J \mathscr{A}$, $\vdash_J (\sim \mathscr{B})$ y $\vdash_J (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$. Se deduce que $\vdash_J \mathscr{B}$, por MP, en contradicción con la consistencia de J. Recíprocamente, supongamos que $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ y o bien $\vdash_J (\sim \mathscr{A})$ o bien $\vdash_J \mathscr{B}$. Ahora bien

$$\vdash_J (\sim \mathscr{A} \to (\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A}))$$

y

$$\vdash_J (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}))$$

de modo que, por MP

$$\vdash_J (\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A}) \text{ o } \vdash_J (\mathscr{A} \to \mathscr{B}).$$

Pero $\vdash_J ((\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}))$, luego en cualquiera de los dos casos tenemos $\vdash_J (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$, en contradicción con la consistencia de J. Así pues, $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ implica $v(\mathscr{A}) = V$ y $v(\mathscr{B}) = F$, con lo que v es una valoración.

Sea ahora $\mathscr{A}$ un teorema de L^*. Entonces $\vdash_J \mathscr{A}$, pues J es una extensión de L^*. Con ello, $v(\mathscr{A}) = V$.

▷ Ahora estamos en condiciones de demostrar el resultado que deseábamos.

Proposición 2.23 (El Teorema de Adecuación para L)

Si $\mathscr{A}$ es una *fbf* de L y $\mathscr{A}$ es una tautología, entonces $\vdash_L \mathscr{A}$.

Demostración: Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de L que es tautología, y supongamos que $\mathscr{A}$ no es un teorema de L. Entonces la extensión L^*, obtenida añadiendo $(\sim \mathscr{A})$ como nuevo axioma, es consistente, por la Proposición 2.19. Así pues, existe una valoración v que da a todo teorema de L^* el valor V. En particular, $v(\sim \mathscr{A}) = V$. Pero $v(\sim \mathscr{A}) = V$, ya que $\mathscr{A}$ es una tautología, y llegamos a una contradicción. Luego $\mathscr{A}$ es un teorema de L.

▷ Ahora ya hemos comprobado que el sistema formal L tiene la principal propiedad que debería tener: Que las *fbfs* derivables en él sean precisamente las 'lógicamente verdaderas'. Los axiomas y la regla de deducción de L caracterizan la deducción lógica, al menos en este contexto. El valor de nuestro estudio de L radica en esto y no en el estudio detallado de *fbfs*, demostraciones y teoremas de L.

Las ideas y métodos que hemos utilizado para demostrar el Teorema de Adecuación son bastantes fuertes y tendrán más adelante otras aplicaciones, pese a que su uso aquí ha sido el de meras herramientas para un propósito particular. En la literatura hay muchas otras demostraciones del Teorema de Adecuación, y algunas de ellas utilizan métodos totalmente diferentes. Hemos usado este método debido a que más tarde podremos aplicar más o menos el mismo procedimiento para demostrar un Teorema de Adecuación análogo para el sistema formal más complicado del cálculo de predicados. De hecho, toda nuestra discusión del sistema L ha tenido por objeto introducir las ideas de la materia más bien que estudiar el cálculo de enunciados por sí mismo. En lo que se refiere al cálculo de enunciados, el Capítulo 1 nos proporciona ya una visión suficiente. Las tablas de verdad nos dan toda la información necesaria acerca de formas enunciativas y formas argumentativas particulares, y utilizándolas podemos distinguir de manera efectiva entre tautologías, contradicciones y otras formas enunciativas. La consecuencia que esto trae consigo para L es importante y útil, así que la incluimos como proposición.

Proposición 2.24

L es *decidible*, es decir, existe un método efectivo para decidir si una *fbf* dada de L es o no un teorema de L.

Demostración: Para decidir si una *fbf* $\mathscr{A}$ es o no teorema de L, basta considerarla como forma enunciativa y construir su tabla de verdad. Es un teorema si y sólo si es una tautología.

Observación 2.25

Esto hace innecesario el seguir construyendo demostraciones en L. Las tablas de verdad proporcionan un método mecánico, aunque no siempre rápido, para demostrar si una *fbf* dada es teorema de L. Pero, naturalmente, esto no lo sabíamos hasta ahora, de modo que la demostración de la Proposición 2.11, por ejemplo, no puede cambiarse, pues su resultado se necesitaba en la demostración del Teorema de Adecuación.

Ejercicios

6 Demuéstrese que todo axioma de L es una tautología.

7 Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de L y sea L^+ la extensión de L obtenida añadiendo $\mathscr{A}$ como nuevo axioma. Demuéstrese que el conjunto de los teoremas de L^+ es diferente del conjunto de los teoremas de L si y sólo si $\mathscr{A}$ no es teorema de L

8 Sea $\mathscr{A}$ la *fbf* $((\sim p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow \sim p_2))$. Demuéstrese que L^+, obtenido añadiendo esta $\mathscr{A}$ como nuevo axioma, tiene un conjunto de teoremas mayor que el de L. ¿Es L^+ una extensión consistente de L?

9 Demuéstrese que si $\mathscr{B}$ es una contradicción, entonces $\mathscr{B}$ no puede ser teorema de ninguna extensión consistente de L.

10 Sea L^{++} la extensión de L obtenida añadiendo como cuarto *esquema* de axiomas:

$$((\sim \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow (\mathscr{A} \rightarrow \sim \mathscr{B}))$$

Demuéstrese que L^{++} es inconsistente. (Sugerencia: Véase el Ejercicio 7 del Capítulo 1).

11 Sea J una extensión consistente y completa de L, y sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de L. Demuéstrese que la extensión de J obtenida añadiendo $\mathscr{A}$ como nuevo axioma es consistente si y sólo si $\mathscr{A}$ es un teorema de J.

12 Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de L en la que intervengan las letras de enunciado $p_1, \ldots, p_n$, y sean $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ *fbfs* cualesquiera de L. Sea $\mathscr{B}$ la *fbf* de L obtenida sustituyendo cada intervención de p_i en $\mathscr{A}$ por $\mathscr{A}_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Demuéstrese que si $\mathscr{A}$ es un teorema de L, entonces $\mathscr{B}$ es un teorema de L.

3
Cálculo de predicados informal

3.1 Predicados y cuantificadores

En el Capítulo 1 hemos analizado frases y argumentaciones, descomponiéndolas en enunciados constituyentes simples, y considerando éstos como las piezas de la construcción. De este modo hemos podido descubrir algo de lo que hace válida a una argumentación. No obstante, existen argumentaciones que no son susceptibles de un tratamiento de este tipo. Por ejemplo, escribamos uno de los ejemplos del Capítulo 1 de manera ligeramente distinta:

Todos los hombres son mortales
Sócrates es un hombre
∴ Sócrates es mortal.

Intuitivamente, consideraríamos esto como ejemplo de argumentación válida, pero si tratamos de simbolizar su forma como hicimos en el Capítulo 1, lo que obtenemos es $p, q, \therefore r$. Según el Capítulo 1, ésta no es una forma argumentativa válida.

La validez en este caso no depende de las relaciones entre las premisas y la conclusión en tanto que enunciados simples, sino de relaciones entre *partes* de los enunciados que intervienen y entre las formas de éstos. Si quisiésemos aclarar más esto encontrando la «forma argumentativa» correspondiente, nos encontraríamos con algo como:

Todos los *A*s son *B*
C es un *A*
∴ *C* es *B*

Aquí hay dos puntos a tratar: Primero la naturaleza general de la premisa «Todos los *A*s son *B*»; y segundo, el uso de símbolos para representar partes de enunciados simples. Estos puntos corresponden, respectivamente, a las ideas de «cuantificador» y «predicado». Todo enunciado simple en castellano tiene un sujeto y un predicado, cada

uno de los cuales puede consistir en una sola palabra, una frase breve o toda una cláusula. Hablando muy groseramente, el sujeto es la cosa acerca de la cual el enunciado está afirmando algo, y el predicado se refiere a una «propiedad» que posee el sujeto.

Ejemplo 3.1

En cada uno de los siguientes enunciados, se ha subrayado el sujeto y el resto es el predicado.

(*a*) Sócrates es un hombre.
(*b*) Yo escribo libros.
(*c*) El número cuya raíz es -1 no es real.
(*d*) El mundo nos debe a todos el sustento.

Resulta conveniente representar los predicados mediante letras mayúsculas *A*, *B*, *C*, ..., y los sujetos mediante letras minúsculas, con lo cual enunciados tales como los de más arriba se simbolizan del modo siguiente:

(*a*) $H(s)$ simboliza «Sócrates es un hombre», siendo H una letra de predicado que simboliza «es un hombre», y s simboliza a Sócrates. Podríamos análogamente simbolizar «Napoleón es un hombre» poniendo $H(n)$, donde n simboliza a Napoleón.

(*b*) $L(i)$ puede simbolizar «Yo escribo libros» de manera parecida.

(*c*) En este caso nuestro predicado es una negación, de modo que podemos elegir. Podemos escoger R que signifique «no es real», con lo que el enunciado tomará la forma $R(j)$, donde j representa al número cuya raíz es -1. O podemos escoger S que signifique «es real», con lo que el enunciado será $(\sim S(j))$.

(*d*) $V(m)$, análogamente a (*a*) y (*b*).

Queda claro que los enunciados compuestos también pueden simbolizarse de esta manera, simbolizando todos los enunciados simples que los constituyen.

▷¿Qué ocurre ahora con enunciados tales como «todos los hombres son mortales»? Necesitamos algo más que un análisis de sujeto y predicado, ya que el significado del enunciado depende de la fuerza de la palabra «todos». Consideremos otro ejemplo:

Todo entero tiene un factor primo.

En el simbolismo matemático ordinario, escribiríamos esto así:

Para todo x, si x es un entero entonces x tiene un factor primo.

Usando el tipo de lenguaje simbólico que acabamos de introducir, podríamos escribir esto en la forma:

$$\text{Para todo } x,\ ((E(x) \rightarrow P(x)),$$

donde $E(x)$ simboliza «x es un entero» y $P(x)$ simboliza «x tiene un factor primo».

Análogamente, si introducimos símbolos de predicados H y M para simbolizar «es un hombre» y «es mortal», respectivamente, entonces «todos los hombres son mortales» puede escribirse:

$$\text{Para todo } x,\ (H(x) \rightarrow M(x)).$$

La frase «para todo x» se llama *cuantificador universal* y se simboliza como $(\forall x)$. Nótese que cuando escribimos $(\forall x)\ (H(x) \rightarrow M(x))$ no suponemos nada acerca de la naturaleza del objeto x. La implicación se afirma «para todo objeto x del universo». Si x es un hombre entonces x es mortal, para todo x que no sea hombre, el si ese x particular es mortal o no es irrelevante. La implicación es verdadera porque su primera parte es falsa (véase la tabla de verdad de $\rightarrow$).

La introducción del símbolo x no debe causar confusión, pese a que no aparece en la frase castellana original. Su empleo no es más que una abreviatura matemática, y está claro que «todos los hombres son mortales» también puede simbolizarse como:

$$\text{Para todo } y,\ (H(y) \rightarrow M(y)).$$

Emplearemos las letras x e y como variables, como sujetos indeterminados. Cuando se usan, como más arriba, en enunciados que comienzan con cuantificadores, se llaman variables *ligadas*.

Hay otra clase de cuantificador que parece necesario a primera vista para simbolizar frases castellanas corrientes. Consideremos la frase: «Algunos cerdos tienen alas.» Una reformulación sería: «Existe al menos un cerdo que tiene alas», o bien, usando un artificio similar al de más arriba:

Existe al menos un objeto x tal que
x es un cerdo y x tiene alas.

La frase «existe al menos un objeto x tal que» se llama *cuantificador existencial* y se simboliza por $(\exists x)$. La frase puede escribirse ahora como

$$(\exists x)(C(x) \wedge A(x)),$$

donde $C(x)$ y $A(x)$ significan «x es un cerdo» y «x tiene alas», respectivamente.

Más en general, si A es un símbolo que representa un predicado,

tiene sentido escribir $(\forall x)A(x)$ y $(\exists x)A(x)$. Lo primero significa «todo objeto tiene la propiedad determinada por A», y lo segundo significa «existe algún objeto que tiene la propiedad determinada por A».

Ejemplo 3.2

Simbolícense:

(*a*) No todas las aves saben volar.
(*b*) Todo el mundo puede hacer eso.
(*c*) Algunas personas son estúpidas.
(*d*) Existe un entero que es mayor que cualquier otro entero.

Respuestas: (naturalmente, puede haber otras).

(*a*) $\sim(\forall x)(A(x) \rightarrow V(x))$.
(*b*) $(\forall x)(H(x) \rightarrow P(x))$.

Puede servir de ayuda el recorrer los pasos dados, como hicimos antes. «Todo el mundo puede hacer eso» significa «Todas las personas pueden hacer eso» y, al igual que antes, esto significa «Para todo x, si x es una persona, entonces x puede hacer eso». $H(x)$ simboliza «x es una persona» y $P(x)$ simboliza «x puede hacer eso».

(*c*) $(\exists x)(H(x) \wedge S(x))$.
(*d*) $(\exists x)(E(x) \wedge (\forall y)(E(y) \rightarrow x \geqslant y))$.

Veremos que estos ejemplos ilustran un esquema común, aunque no universal. El cuantificador universal va seguido muy frecuentemente de una implicación, debido a que los enunciados universales suelen ser de la forma «dado un x cualquiera, si tiene la propiedad A entonces tiene también la propiedad B».

Consideremos (*a*) con más detenimiento. Es bien sabido que se trata de una afirmación verdadera, que podemos justificar mediante los ejemplos de las avestruces, kiwis y pingüinos. Intuitivamente, justificamos «no todas las aves saben volar» justificando «existen aves que no saben volar». Aquí tenemos una importante conexión entre los dos cuantificadores, ya que un momento de reflexión bastará para convencernos de que los dos enunciados recién considerados tienen el mismo significado. Simbolicémoslos.

(i) $\sim(\forall x)(A(x) \rightarrow V(x))$,
(ii) $(\exists x)(A(x) \wedge \sim V(x))$.

Para comparar más de cerca, transformemos el primero en

$$\sim(\forall x)(\sim A(x) \vee V(x))$$

según las reglas del Capítulo 1, y luego en

$$\sim(\forall x) \sim (A(x) \wedge \sim V(x)).$$

La forma de este enunciado es ahora similar a la de (ii), pero con $\sim(\forall x)\sim$ en lugar de $(\exists x)$.

La consideración de ejemplos como éste nos permite comprender intuitivamente que las dos frases:

(i) No es el caso que todos los x no tengan la propiedad P,
(ii) Existe algún x que tiene la propiedad P,

tienen el mismo significado, cualquiera que sea la propiedad P.

Ejemplo 3.3

Simbolícense los enunciados siguientes, primeramente sin usar cuantificadores universales y después sin usar cuantificadores existenciales.

(*a*) Todas las aves saben volar.
(*b*) Ningún hombre es una isla.
(*c*) Algunos números no son racionales.

Respuestas:

(*a*) $\sim(\exists x)(A(x) \wedge \sim V(x))$
$(\forall x)(A(x) \rightarrow V(x))$.
(*b*) $\sim(\exists x)(H(x) \wedge I(x))$
$(\forall x)(H(x) \rightarrow \sim I(x))$.
(*c*) $(\exists x)(N(x) \wedge \sim R(x))$
$\sim(\forall x)(N(x) \rightarrow R(x))$.

(Naturalmente, existen otras simbolizaciones equivalentes.)

▷ Ahora que ya sabemos simbolizar, ¿cómo nos ayuda esto a decidir las relaciones entre enunciados o la validez de argumentaciones? No es posible extender el uso de las tablas de verdad, porque nuestros enunciados de ahora ya no tienen el carácter de funciones de verdad. El uso de variables y cuantificadores significa que el valor de verdad de una frase ya no depende simplemente de los valores de verdad de sus partes componentes, como era el caso antes; ni siquiera se da el caso de que las partes componentes tengan siempre valores de verdad. En particular, no tiene sentido hablar del valor de verdad de una parte de una frase que contenga una variable sin cuantificar, como por ejemplo «x es un ave», o $A(x)$, en el simbolismo del ejemplo anterior.

Ejercicios

1 Simbolícense las frases siguientes, empleando cuantificadores, variables y símbolos de predicado.
(*a*) No toda función tiene derivada.
(*b*) Existe una función que es continua pero no tiene derivada.
(*c*) Si algunos trenes se retrasan entonces todos los trenes se retrasan.
(*d*) Todo número es o par o impar.
(*e*) Ningún número es a la vez par e impar.
(*f*) Algunas personas odian a todo el mundo.
(*g*) Los elefantes son más pesados que los ratones.

2 Simbolícese cada uno de los enunciados siguientes, primeramente sin utilizar cuantificadores existenciales y después sin utilizar cuantificadores universales.
(*a*) No todos los coches tienen tres ruedas.
(*b*) Algunas personas son o perezosas o estúpidas.
(*c*) Ningún ratón es más pesado que un elefante.
(*d*) Todo número es negativo o posee raíz cuadrada.

3 Escójanse pares cualesquiera de enunciados de los Ejercicios 1 y 2 que tengan el mismo significado.

3.2 Lenguajes de primer orden

Un método de análisis de enunciados y argumentaciones es la lógica silogística. Esta materia tiene una larga genealogía, que se extiende desde Aristóteles hasta nuestros días. El lector interesado puede seguirla con más detalle en otros libros (por ejemplo, Copi), así que no entraremos en ello aquí. Se basa en el estudio de un pequeño número de formas argumentales particulares intuitivamente válidas, como por ejemplo la mencionada al comienzo de este capítulo:

Todos los *A*s son *B*
C es un *A*
∴ *C* es un *B*.

El propósito es, dada una argumentación particular, expresarla por medio de una o más de estas formas argumentativas básicas, demostrando así su validez. Los lógicos y matemáticos modernos han considerado que este método de análisis es demasiado restrictivo y han buscado un método diferente de análisis. Lo que se ha desarrollado, y lo que estudiaremos aquí, tiene el gran mérito matemático de conducir a nuevas y ricas áreas de estudio que ni siquiera se contemplan en la lógica silogística.

Vamos a construir un sistema formal. Se trata de un sistema formal más complicado que el del Capítulo 2, como era de esperar, pero está edificado sobre los mismos principios. Hemos de describir primero un lenguaje formal, dando el alfabeto de símbolos y las reglas de construcción de las fórmulas bien formadas. En esto nos guiaremos por la experiencia que hemos adquirido más arriba simbolizando frases ordinarias, ya que nuestro propósito es hacer el lenguaje formal de tal manera que las frases ordinarias puedan ser traducidas a fórmulas bien formadas, y reflejar las propiedades lógicas de las frases en propiedades de las *fbfs* del sistema. En este punto hemos de aclarar una vez más que los símbolos del lenguaje formal no han de tener más significado ni propiedades que los especificados dentro del propio sistema formal. En ocasiones pueden interpretarse de diferentes maneras, pero estas interpretaciones no son parte del sistema.

El alfabeto de símbolos es el siguiente:

$x_1, x_2, \ldots$	variables,
$a_1, a_2, \ldots$	constantes individuales,
$A_1^1, A_2^1, \ldots; A_1^2, A_2^2, \ldots; A_1^3, A_2^3, \ldots;$	letras de predicado,
$f_1^1, f_2^1, \ldots; f_1^2, f_2^2, \ldots; f_1^3, f_2^3, \ldots;$	letras de función,
$(,),,$	signos de puntuación,
$\sim, \rightarrow$	conectivas,
$\forall$	cuantificador.

Observaciones 3.4

(*a*) Las constantes individuales se incluyen para que tengamos en nuestro lenguaje fórmulas que puedan interpretarse como enunciados acerca de cosas particulares. Por ejemplo, el enunciado «Sócrates es un hombre» podría ser una interpretación de la fórmula $A_1^1(a_1)$.

(*b*) Hay una lista de listas de letras de predicado. La primera de ellas es una lista de letras de predicado monarias que están pensadas para representar predicados monarios (tales como «es un hombre»). La siguiente es una lista de letras de predicado binarias, para simbolizar relaciones o predicados binarios (tales como «es el padre de»). Y así sucesivamente. (Un ejemplo de predicado ternario en lenguaje ordinario es el enunciado «los puntos A, B y C son colineales».)

(*c*) No hemos visto letras que representen funciones en ninguna de las simbolizaciones informales que han aparecido hasta ahora. La idea de función es tan fundamental en matemáticas que resulta ventajoso admitir letras para funciones en el lenguaje formal. Esto es debido a que las interpretaciones de los símbolos que tenemos previstas son principalmente matemáticas. Naturalmente, una función es una clase especial de relación, y sería suficiente de hecho el disponer de símbolos para relaciones (letras de predicado), pero nuestro interés primordial no radica en achicar lo más posible el alfabeto de símbolos. Estamos aplicando también el criterio de claridad intuitiva. Más adelante, cuando discutamos sistemas matemáticos específicos, veremos con bastante claridad el efecto de la inclusión de letras de función, aptas para representar funciones de diferente número de argumentos. En ambos casos, el superíndice indica el número de argumentos.

(*d*) Hay un solo cuantificador en el lenguaje, el cuantificador universal. Hemos visto ya que el cuantificador existencial se puede definir en términos del cuantificador universal, de manera que sólo necesitamos tener uno de los dos. Por motivos análogos, incluimos a $\sim$ y $\rightarrow$ como únicas conectivas.

(*e*) Hay listas infinitas de símbolos, pese a que sólo admitiremos combinaciones finitas de éstos como fórmulas bien formadas (véase más abajo). Necesitamos un número *potencialmente* infinito de símbolos para mantener nuestro lenguaje lo más general posible. En las aplicaciones solamente especificaremos interpretaciones para algunos de estos símbolos, y algunas aplicaciones pueden necesitar más símbolos que otras, de manera que no nos interesa poner una cota superior al número de símbolos interpretables.

▷ En general, un *lenguaje de primer orden* $\mathscr{L}$ tendrá como alfabeto de símbolos:

variables $x_1, x_2, \ldots$,
algunas (eventualmente ninguna) de las constantes individuales $a_1, a_2, \ldots$,
algunas (eventualmente ninguna) de las letras de predicado A_i^n,
algunas (eventualmente ninguna) de las letras de función f_i^n,
los símbolos de puntuación (,) y ,,
las conectivas $\sim$ y $\rightarrow$,
el cuantificador $\forall$.

Está claro que existen muchos lenguajes de primer orden diferentes, dependiendo de los símbolos que se incluyan. En la mayor parte de nuestro trabajo no especificaremos qué lenguaje empleamos, por lo cual los resultados que obtengamos serán aplicables a todo lenguaje. El significado del término «primer orden» surgirá más tarde; está conectado con el uso del cuantificador universal.

Para especificar por completo un lenguaje de primer orden, hemos de decir lo que es una fórmula bien formada; pero consideremos primero algunos ejemplos.

Ejemplo 3.5

(*a*) Si queremos que nuestro lenguaje de primer orden sea apropiado para enunciados referentes a la aritmética de los números naturales, deberemos hacer que $\mathscr{L}$ contenga (junto con las variables, los signos de puntuación, las conectivas y el cuantificador) los símbolos:

a_1, para representar el 0,
A_1^2, para representar $=$,
f_1^1, para representar la función sucesor,
f_1^2, para representar $+$,
f_2^2, para representar $\times$.

Entonces, por ejemplo,

$$A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_2))$$

se interpretaría como «$x_1+x_2=x_1x_2$».

(*b*) Si queremos que nuestro lenguaje de primer orden sea apropiado para enunciados relativos a grupos, podemos tomar un $\mathscr{L}$ que contenga (junto con las variables, los signos de puntuación, las conectivas y el cuantificador) los símbolos:

a_1, para representar el elemento identidad,
A_1^2, para representar $=$,
f_1^1, para representar la función que transforma cada elemento en su inverso,
f_1^2, para representar la operación binaria del grupo.

Entonces, por ejemplo,

$$A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1)$$

se interpretaría como «$x_1 \cdot x_1^{-1}=$identidad».

Definición 3.6

Antes de definir las fórmulas bien formadas necesitamos algunos preliminares. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden. *Término* de $\mathscr{L}$ se define del siguiente modo:

(i) Las variables y las constantes individuales son términos.
(ii) Si f_i^n es una letra de función de $\mathscr{L}$, y si $t_1, \ldots, t_n$ son términos de $\mathscr{L}$, entonces $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ es un término de $\mathscr{L}$.
(iii) El conjunto de todos los términos es el generado por (i) e (ii).

Los términos van a ser aquellas expresiones del lenguaje formal que se interpretan como objetos, es decir, las cosas a las que se aplican las funciones, las cosas que tienen propiedades, las cosas acerca de las cuales se hacen aseveraciones.

Fórmula atómica de $\mathscr{L}$ se define así: Si A_j^k es una letra de predicado de $\mathscr{L}$ y $t_1, \ldots, t_k$ son términos de $\mathscr{L}$, entonces $A_j^k(t_1, \ldots, t_k)$ es una fórmula atómica de $\mathscr{L}$.

Las fórmulas atómicas son las expresiones más sencillas del lenguaje que son interpretables como aseveraciones, como por ejemplo que un cierto objeto verifica una cierta propiedad. La palabra «atómica» significa por supuesto «indivisible».

Las fórmulas atómicas, siguiendo la analogía que sugiere el término, son la materia de la que están hechas las fórmulas bien formadas.

Se pueden combinar de acuerdo con ciertas reglas lógicas y ocupan un lugar comparable al de las letras de enunciado en nuestro anterior sistema formal.

Fórmula bien formada de $\mathscr{L}$ se define por:
(i) Toda fórmula atómica de $\mathscr{L}$ es una *fbf* de $\mathscr{L}$.
(ii) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son *fbfs* de $\mathscr{L}$, también lo son $(\sim\mathscr{A})$, $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ y $(\forall x_i)\,\mathscr{A}$, siendo x_i cualquier variable.
(iii) El conjunto de todas las *fbfs* de $\mathscr{L}$ es el generado por (i) e (ii).

Observación 3.7

(*a*) Las *fbfs* están construidas a partir de las fórmulas atómicas de la misma manera que en el sistema formal L, exceptuando, por supuesto, la inclusión del cuantificador universal. Si $\mathscr{A}$ es una *fbf* de $\mathscr{L}$, también lo es $(\forall x_i)\,\mathscr{A}$, siendo x_i cualquier variable. Así pues, por ejemplo, si $A_1^1(x_2)$ es una *fbf* de $\mathscr{L}$, también lo es $(\forall x_i)\,\mathscr{A}$, siendo x_i cualquier variable. Así pues, por ejemplo, si $A_1^1(x_2)$ es una *fbf* de $\mathscr{L}$, también lo es $(\forall x_1)\,A_1^1(x_2)$. Por tanto, no es necesario que el cuantificador tenga conexión con la *fbf* a la que se aplica, aunque evidentemente nos ocuparemos más de los casos en los que la variable cuantificada aparezca en la fórmula subsiguiente.

(*b*) Lo mismo que en el sistema L, incluimos solamente las conectivas $\sim$ y $\rightarrow$. Esto es con vistas a simplificar nuestras demostraciones de propiedades del lenguaje y de los sistemas formales basados en el lenguaje. Por la misma razón, excluimos el símbolo $\exists$. No obstante, más adelante nos resultará conveniente usar el símbolo $\exists$ y las conectivas $\wedge$ y $\vee$ como símbolos *definidos*, siguiendo las ideas intuitivas ya indicadas anteriormente.

$(\exists x_i)\,\mathscr{A}$ es una abreviatura de $(\sim((\forall x_i)(\sim\mathscr{A})))$,
$(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$ es una abreviatura de $(\sim(\mathscr{A}\rightarrow(\sim\mathscr{B})))$,
$(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$ es una abreviatura de $((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{B})$.

Las fórmulas que incluyen estos símbolos no son estrictamente *fbfs* del lenguaje formal, pero pueden traducirse a *fbfs* de ser necesario.

(*c*) El uso de paréntesis en las fórmulas bien formadas se indica con precisión en la definición. No obstante, como ya hicimos en L, a veces omitiremos paréntesis, en tanto que ello no introduzca ambigüedades. Al igual que antes, se supondrá que un símbolo $\sim$ se aplica a la *fbf* subsiguiente más corta posible; por ejemplo, $(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ es una abreviatura de $((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{B})$. Trataremos los cuantificadores de manera similar; por ejemplo, $((\forall x_i)\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ es una *fbf* en la que no se han omitido paréntesis; no deje de observarse la diferencia entre esta *fbf* y la *fbf* $(\forall x_i)(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$. Introduzcamos alguna terminología en relación con esto.

Definición 3.8

En la *fbf* $(\forall x_i)\,\mathscr{A}$, decimos que $\mathscr{A}$ es el *radio de acción* del cuantificador. Más en general, si $((\forall x_i)\,\mathscr{A})$ aparece como subfórmula de una *fbf* $\mathscr{B}$, decimos que el radio de acción de este cuantificador en $\mathscr{B}$ es $\mathscr{A}$.

Una intervención de la variable x_i en una *fbf* se dice que es *ligada* si la variable aparece dentro del radio de acción de un $(\forall x_i)$ en la *fbf*, o si es la x_i de un $(\forall x_i)$. Si una intervención de una variable no es ligada, se dice que es *libre*.

Ejemplo 3.9

(*a*) En la *fbf* $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$ el radio de acción del cuantificador $(\forall x_1)$ es $A_1^1(x_2)$, la variable x_2 aparece libre, y la variable x_1 aparece ligada.

(*b*) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2)\rightarrow A_1^1(x_2))$ es una *fbf* en la cual todas las intervenciones de x_1 y x_2 son ligadas. El radio de acción del $(\forall x_1)$ es $(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2)\rightarrow A_1^1(x_2))$.

(*c*) $(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2)\rightarrow(\forall x_2)\,A_1^1(x_2))$ es una *fbf* en la cual x_1 aparece ligada dos veces y x_2 aparece libre una vez y ligada dos veces. El radio de acción del $(\forall x_1)$ es $(A_1^2(x_1, x_2)\rightarrow(\forall x_2)\,A_1^1(x_2))$, y el radio de acción del $(\forall x_2)$ es $A_1^1(x_2)$.

▷ En lo anterior hemos estado usando símbolos que no son parte del lenguaje formal, concretamente $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$. El lector recordará una situación similar en el Capítulo2. Estas letras son parte del lenguaje matemático ordinario que estamos usando para describir y discutir el formal, y pueden representar fórmulas bien formadas (generalmente arbitrarias) del lenguaje formal. A veces escribiremos también $\mathscr{A}(x_1)$ o $\mathscr{B}(x_1, ..., x_n)$, por ejemplo, cuando estemos interesados en ciertas variables (o términos) particulares. Estas expresiones indicarán a menudo, aunque no siempre, que las variables mencionadas aparecen libres en la *fbf*. Si x_i aparece libre en $\mathscr{A}(x_i)$, entonces, para todo término t, $\mathscr{A}(t)$ denotará el resultado de sustituir por t cada intervención libre de x_i.

Ejemplo 3.10

Examinaremos el uso de variables cuantificadas, volviendo a nuestro anterior ejemplo $(\forall x_1)\,A_1^1(x_2)$. Intuitivamente, la idea es que ésto se interprete como «sea cual sea el objeto x_1, la propiedad determinada por A_1^1 se verifica para el objeto representado por x_2». El cuantificador es claramente redundante, y otros cuantificadores puestos en el lugar de $(\forall x_1)$ serían redundantes también. $(\forall x_3)\,A_1^1(x_2)$ tendría la misma interpretación intuitiva, al igual que $(\forall x_7)\,A_1^1(x_2)$. No obstante, está claro que la interpretación intuitiva de $(\forall x_2)\,A_1^1(x_2)$ es esencialmente diferente de cualquiera de las anteriores. Sería «cualquiera que sea el objeto x_2, la propiedad determinada por A_1^1 se verifica para ese objeto». Y, sin necesidad de referirse a interpretaciones intuitivas; hay una diferencia puramente formal entre $(\forall x_2)\,A_1^1(x_2)$ y los otros casos, consistente en que las dos variables que intervienen son la misma.

Muchas veces tendremos ocasión de reemplazar variables por otras variables o términos, y queremos hacerlo de manera que la interpretación intuitiva no varíe. Para utilizar el mismo ejemplo, $(\forall x_1)\,A_1^1(x_2)$: Si reemplazamos x_2 por x_3 obtenemos una *fbf* que tiene la misma forma de interpretación, y si reemplazamos x_2 por x_1 obtenemos una *fbf* que tiene una forma de interpretación diferente. Diremos que x_3 está libre para x_2 en $(\forall x_1)\,A_1^1(x_2)$, pero que x_1 no lo está. Más en general, si reemplazamos x_2 por el término $f_1^2(x_1, x_3)$, por ejemplo, obtenemos $(\forall x_1)\,A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$, y existe una interacción entre el cuantificador $(\forall x_1)$ y su radio de acción que no estaba presente previamente. Por ello, diremos que $f_1^2(x_1, x_3)$ no está libre para x_2 en $(\forall x_1)\,A_1^1(x_2)$. No obstante, un término en el que no aparezca la variable x_1 está libre para x_2 en $(\forall x_1)\,A_1^1(x_2)$. Extendamos estas ideas a una definición general.

Definición 3.11

Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* arbitraria de $\mathscr{L}$. Un término t está *libre para* x_i en $\mathscr{A}$ si x_i no aparece libre en $\mathscr{A}$ dentro del radio de un $(\forall x_j)$, siendo x_j alguna de las variables que intervienen en t.

Esto viene a significar (del mismo modo, que más arriba) que t puede sustituirse en el lugar de cualquier intervención libre de x_i en $\mathscr{A}$ sin que aparezcan interacciones con cuantificadores de $\mathscr{A}$.

Ejemplo 3.12

Ya hemos visto algunos ejemplos más arriba. Uno más complicado es

$$((\forall x_1)\,A_1^2(x_1, x_2)\rightarrow(\forall x_3)\,A_2^2(x_3, x_1))$$

Aquí vemos, por ejemplo, que $f_1^2(x_1, x_4)$ no está libre para x_2, que $f_2^2(x_2, x_3)$ está libre para x_2, que x_2 está libre para x_1 (nótese que x_1 sólo aparece libre una vez) y que $f_4^2(x_1, x_3)$ no está libre para x_1.

Observación 3.13

Para toda *fbf* $\mathscr{A}$ y toda variable x_i (tanto si x_i aparece libre en $\mathscr{A}$ como si no), x_i está libre para x_i en $\mathscr{A}$.

▷ Hemos descrito el lenguaje formal que vamos a usar y desarrollar. Procederemos, lo mismo que en el Capítulo 2, a indicar axiomas y reglas de deducción para completar la especificación de diversos sistemas formales, que llamaremos sistemas del *Cálculo de Predicados de Primer Orden*. No obstante, antes de hacerlo es conveniente investigar la palabra «interpretación» que hemos usado ya vagamente varias veces, y tratar de precisarla.

Ejercicios

4 Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden cuyo alfabeto de símbolos no contenga letras de función. Descríbase el conjunto de términos de $\mathscr{L}$.

5 Descríbase el conjunto de términos del lenguaje de primer orden cuyo alfabeto de símbolos no contiene constantes individuales y tiene un único símbolo de función f_1^1.

6 ¿Cuáles de entre las siguientes son *fbfs*?

(*a*) $A_1^2(f_1^1(x_1), x_1)$.
(*b*) $f_1^3(x_1, x_3, x_4)$.
(*c*) $(A_1^1(x_2) \rightarrow A_1^3(x_3, a_1))$.
(*d*) $\sim(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$.
(*e*) $((\forall x_2)A_1^1(x_1) \rightarrow (\sim A_1^1(x_2)))$.
(*f*) $A_1^3(f_2^3(x_1, x_2, x_3))$.
(*g*) $(\sim A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(x_2))$.
(*h*) $(\forall x_1)A_1^3(a_1, a_2, f_1^1(a_3))$.

7 ¿Cuáles de entre las apariciones de x_1 en las siguientes *fbfs* son libres, y cuáles son ligadas?

(*a*) $(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_2, a_1))$.
(*b*) $(A_1^1(x_3) \rightarrow (\sim(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^3(x_1, x_2, a_1)))$.
(*c*) $((\forall x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2))$.
(*d*) $(\forall x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \rightarrow (\forall x_1)A_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2)))$.

¿Está el término $f_1^2(x_1, x_3)$ libre para x_2 en alguna de las *fbfs* anteriores?

8 Sea $\mathscr{A}(x_i)$ una *fbf* de $\mathscr{L}$ en la que aparece libre x_i, y sea x_j una variable que no aparece libre en $\mathscr{A}(x_i)$. Demuéstrese que si x_j está libre para x_i en $\mathscr{A}(x_i)$, entonces x_i está libre para x_j en $\mathscr{A}(x_j)$. $\mathscr{A}(x_j)$ es el resultado de sustituir cada intervención libre de x_i en $\mathscr{A}(x_i)$ por x_j.

9 En cada uno de los casos siguientes, sea $\mathscr{A}(x_1)$ la *fbf* dada, y sea t el término $f_1^2(x_1, x_3)$. Escríbase la *fbf* $\mathscr{A}(t)$, decidiendo en cada caso si t está libre para x_1 en la *fbf* dada.

(*a*) $((\forall x_2)A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow A_1^1(x_1))$.
(*b*) $(\forall x_1)(\forall x_3)(A_1^1(x_3) \rightarrow A_1^1(x_1))$.
(*c*) $(\forall x_2)A_1^1(f_1^1(x_2)) \rightarrow (\forall x_3)A_1^3(x_1, x_2, x_3)$.
(*d*) $(\forall x_2)A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \rightarrow (\forall x_3)A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$.

10 Repítase el Ejercicio 9 para los siguientes términos t.

(*a*) x_2.
(*b*) x_3.
(*c*) $f_1^2(a_1, x_1)$.
(*d*) $f_1^3(x_1, x_2, x_3)$.

3.3 Interpretaciones

Definición 3.14

Una interpretación I para $\mathscr{L}$ es un conjunto no vacío D_I (el *dominio* de I) junto con una colección de elementos distinguidos $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots)$, una colección de funciones sobre $D_I(\bar{f}_i^n, i>0, n>0)$, y una colección de relaciones sobre $D_I(\bar{A}_i^n, i>0, n>0)$.

▷ Ya se ha señalado anteriormente que las variables $x_1, x_2, \ldots$ de $\mathscr{L}$ estaban destinadas a interpretarse como «objetos». El conjunto D_I pretende ser el dominio de objetos sobre el que se supone que varían las variables. La colección de elementos distinguidos constará de objetos particulares que se suponen simbolizados por las constantes individuales. Análogamente, las relaciones y funciones se consideran interpretaciones concretas de las letras de predicado y las letras de función de $\mathscr{L}$. Nótese que para un lenguaje particular $\mathscr{L}$, las litas de constantes, letras de función y letras de predicado pueden estar restringidas. Una interpretación para un tal lenguaje $\mathscr{L}$ tendrá tan sólo los elementos distinguidos, funciones y relaciones necesarios para interpretar los símbolos de $\mathscr{L}$.

Ahora estamos en condiciones de aclarar el término «lenguaje de primer orden». Un lenguaje así contiene variables interpretables como objetos del dominio de interpretación, y cuantificadores referidos a dichas variables. Así pues, en una interpretación los cuantificadores varían sobre objetos del dominio. Esta es la propiedad característica de un lenguaje de primer orden. Un lenguaje de segundo orden contendría además cuantificadores interpretables como referidos a variables que varíen sobre relaciones entre (y, por tanto, conjuntos de) objetos del dominio de la interpretación. Un lenguaje así tendría dos clases de variables, una para objetos y otra para relaciones. Nosotros vamos a limitar enteramente nuestra atención a lenguajes y sistemas formales de primer orden.

Ejemplo 3.15

Aritmética Formal. Véase el Ejemplo 3.5(*a*), donde se describe el lenguaje de primer orden apropiado. Este contiene a_1, A_1^2, f_1^1, f_2^2, además de variables, signos de puntuación, conectivas y cuantificador. Podemos definir una interpretación N como sigue: Sea $D_N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales. El único elemento distinguido es el 0 (la interpretación de la constante individual a_1). La adición y la multiplicación de números naturales son las interpretaciones de las otras dos letras de función binaria f_1^2 y f_2^2, respectivamente, y la función sucesor es la interpretación de f_1^1. La relación $=$ es la interpretación de la letra de predicado A_1^2.

Mediante la interpretación anterior, las fórmulas bien formadas de este lenguaje pueden interpretarse como enunciados referentes a números naturales. Por ejemplo, la *fbf*

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\sim(\forall x_3)(\sim A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)) \qquad (*)$$

tiene la interpretación

para todo x e $y \in D_N$, no es cierto que
para todo $z \in D_N$, $x+z \neq y$

o, equivalentemente

para todo x e $y \in D_N$, existe $z \in D_N$ tal que $x+z=y$

▷ Un ejemplo de un enunciado sobre números naturales que no es la interpretación de alguna *fbf* del lenguaje de primer orden apropiado es: «todo conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo». Este enunciado comienza con un cuantificador universal sobre conjuntos de números y correspondería a una *fbf* de un lenguaje formal de *segundo* orden para la aritmética.

Solamente cuando se ha dado una interpretación de los símbolos de $\mathscr{L}$ tiene sentido hablar de *significados* de *fbfs*, y por lo tanto sólo podemos considerar la verdad y la falsedad en el contexto de una interpretación. La *fbf* (*) de más arriba resulta tener un significado falso en esta interpretación, pero en otras interpretaciones su significado bien pudiera ser verdadero.

Ejemplo 3.16

La *fbf* (*) tiene un significado verdadero en la interpretación I, siendo D_I el conjunto de los números racionales positivos, 1 la interpretación de a_1, e interpretándose f_1^2 como la multiplicación y f_2^2 como la división (función que calcula el cociente).

(*) se traduce en I como:
para todo x, $y \in D_I$ existe $z \in D_I$ tal que $x \cdot z = y$

Esta es una propiedad bien conocida de los números racionales.

▷ Hemos incluido este último ejemplo con el principal propósito de ilustrar que puede haber interpretaciones del mismo lenguaje formal $\mathscr{L}$ que difieran sustancialmente. En nuestros ejemplos de lenguajes, generalmente tendremos in mente alguna interpretación particular, pero esto no debe impedirnos el considerar otras interpretaciones y las consecuencias de su existencia.

Podemos ver ahora una similaridad entre esta situación y la situación del Capítulo 2. Allí, las *fbfs* del sistema L del cálculo de enunciados no podían considerarse en sí mismas como verdaderas o falsas. Verdad y falsedad eran relevantes tan sólo cuando asignábamos valores de verdad a las variables de enunciado o construíamos una valoración. Es más, vimos que algunas *fbfs* podían ser verdaderas o falsas, dependiendo de la valoración. En nuestro sistema actual, más complicado, la noción de interpretación corresponde a la asignación de valores de verdad. Una cuestión obvia a plantear ahora es: ¿Tenemos un análogo de las tautologías? La respuesta es «sí», y la definición es justamente la que sería de esperar, pero volveremos a considerar este punto más tarde. Ahora hemos de precisar más la idea de *verdad* con

respecto a una interpretación. A pesar de la aparente complejidad de lo que sigue, las ideas no son difíciles, y el lector deberá procurar tener presente el esbozo intuitivo que hemos construido ya. Para el resto de este capítulo, se sugiere que el lector no familiarizado con la materia omita los detalles de las demostraciones en una primera lectura. Las demostraciones no son importantes para la compresión intuitiva de las ideas implicadas, y éstas podrían verse oscurecidas por una atención excesiva a los detalles.

Ejercicios

11 Sea $\mathscr{L}$ el lenguaje de primer orden que incluye (junto con las variables, signos de puntuación, conectivas y cuantificador) la constante individual a_1, la letra de función f_1^2 y la letra de predicado A_2^2. Denotaremos por $\mathscr{A}$ la *fbf*.

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1) \rightarrow A_2^2(x_1, x_2))$$

Definamos una interpretación I para $\mathscr{L}$ como sigue. D_I es $\mathbb{Z}$, $\bar{a}_1$ es 0, $\bar{f}_1^2(x, y)$ es $x-y$, $\bar{A}_2^2(x, y)$ es $x<y$. Escríbase la interpretación de $\mathscr{A}$ en I. ¿Es un enunciado verdadero o falso? En cuéntrese otra interpretación en la cual $\mathscr{A}$ sea un enunciado con el valor de verdad opuesto.

12 ¿Existe una interpretación (para un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$ adecuado) en la cual la *fbf*

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(f_1^1(x_1)))$$

se interprete como un enunciado falso? Si es así, escríbase una en detalle. En otro caso, explíquese por qué no existe.

13 Repítase el Ejercicio 12 con la *fbf*

$$(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_2, x_1))$$

3.4 Satisfacción, verdad

Sea I una interpretación para el lenguaje $\mathscr{L}$, de dominio D_I. Aquí y en lo que sigue usaremos la notación de la Definición 3.14. Las interpretaciones en I de a_i, f_i^n, A_i^n se denotarán por $\bar{a}_i$, $\bar{f}_i^n$, $\bar{A}_i^n$, respectivamente. Nótese que, para cada i, $\bar{a}_i \in D_I$, $\bar{f}_i^n$: $D_I^n \rightarrow D_I$ y $\bar{A}_i^n$ es una relación n-aria sobre D_I.

Definición 3.17

Se llama *valoración* en I a toda función v del conjunto de términos de $\mathscr{L}$ en el conjunto D_I, que verifique las propiedades:

(i) $v(a_i) = \bar{a}_i$ para toda constante individual a_i de $\mathscr{L}$.

(ii) $v(f_i^n(t_1, \ldots, t_n)) = \bar{f}_i^n(v(t_1), \ldots, v(t_n))$, siendo f_i^n cualquier letra de función de $\mathscr{L}$, y $t_1, \ldots, t_n$ términos cualesquiera de $\mathscr{L}$

Una valoración no es más que una regla que asigna a cada término de $\mathscr{L}$ el objeto de D_I destinado a ser su interpretación. La parte (ii) asegura la consistencia de la regla.

Observaciones 3.18

(*a*) En general, en una interpretación dada existirán diferentes valoraciones.

b) Una valoración v queda completamente especificada indicando lo valores de $v(x_1)$, $v(x_2)$, ... Esto es debido a que los $v(a_i)$ vienen dados por la definición (*i*), e, inductivamente, para todo término $f_i^n(t_1, ..., t_n)$, el valor de $v(f_i^n(t_1, ..., t_n))$ viene determinado por (ii).

▷ Más tarde tendremos ocasión de manejar valoraciones casi idénticas, en el sentido siguiente.

Definición 3.19

Dos valoraciones v y v' son *i-equivalentes* si $v(x_j)=v'(x_j)$ para todo $j \neq i$.

Las valoraciones *i*-equivalentes asignan los mismos valores a todas las variables, excepto quizá x_i; pero nótese que, en general, los valores de términos en los que aparezca x_i diferirán.

▷ Consideremos ahora una *fbf* $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$. Una valoración dada puede tener el efecto de «asignar un valor de verdad» a $\mathscr{A}$ del siguiente modo: Se reemplaza cada término t que aparezca en $\mathscr{A}$ por $v(t)$, y cada letra de función y de predicado por su interpretación en I. Lo que se obtiene es un enunciado acerca de los elementos del conjunto D_I, que puede ser verdadero o falso. Si es verdadero, se dice que v satisface $\mathscr{A}$.

Precisamos esto de la manera siguiente:

Definición 3.20

Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de $\mathscr{L}$, y sea I una interpretación para $\mathscr{L}$. Se dice que la valoración v en I *satisface* a la *fbf* $\mathscr{A}$ si puede demostrarse inductivamente que lo hace, a partir de las cuatro condiciones siguientes:

(i) v satisface la fórmula atómica $A_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ si $\overline{A}_j^n(v(t_1), \ldots, v(t_n))$ se verifica en D_I.
(ii) v satisface $(\sim\mathscr{B})$ si v no satisface $\mathscr{B}$.
(iii) v satisface $(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{C})$ si v satisface $(\sim\mathscr{B})$ o v satisface $\mathscr{C}$.
(iv) v satisface $(\forall x_i)\,\mathscr{B}$ si toda valoración v' que sea *i*-equivalente a v satisface $\mathscr{B}$.

Observaciones 3.21

(*a*) Para v y $\mathscr{A}$ cualesquiera, o v satisface $\mathscr{A}$ o v satisface $(\sim\mathscr{A})$.

(*b*) Quizá sea necesario explicar un poco (iv). $(\forall x_i)\,\mathscr{B}$ se interpretará como un cierto enunciado del tipo «para todo $y \in D_I$, ...», donde imaginamos a y como interpretación de x_i. v proporciona interpretaciones para las variables que aparecen en $\mathscr{B}$, y es razonable decir que v satisface $(\forall x_i)\,\mathscr{B}$ si, ante todo, v satisface $\mathscr{B}$ y si, además, cualquier otra valoración que se obtenga de v cambiando el valor de $v(x_i)$ también satisface $\mathscr{B}$.

(*c*) Puede servir de ayuda para la comprensión de esta definición el señalar que cada una de las cláusulas (i)-(iv) de más arriba puede considerarse como un enunciado «si y sólo si», por tener la naturaleza de una definición.

Ejemplo 3.22

(*a*) En la interpretación aritmética N, consideremos la *fbf* $A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_3, x_4))$. Toda valoración v en la cual $v(x_1)=2$, $v(x_2)=6$, $v(x_3)=3$, $v(x_4)=4$ satisfacerá a esta *fbf*, puesto que $2\times 6=3\times 4$ es verdadero en D_N. Análogamente, ninguna valoración w que cumpla $w(x_1)=1$, $w(x_2)=5$, $w(x_3)=4$, $w(x_4)=2$ la satisfacerá.

(*b*) La *fbf* $(\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_1))$ se interpreta en N como «para todo $n \in D_N$, $nm=mn'$, que ciertamente se considerará como verdadero. Sea v una valoración en N. Entonces $v(x_1)$ y $v(x_2)$ son números naturales y $A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_1))$ se interpreta como $v(x_1)\times v(x_2)=v(x_2)\times v(x_1)$, que es verdadero. Así pues, v satisface $A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_1))$. Es más, si cambiamos el valor de $v(x_1)$ para obtener una nueva valoración 1-equivalente v', es fácil ver que v' también satisface $A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_1))$. Así pues, por (iv) de la definición de más arriba, v satisface $(\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), F_2^2(x_2, x_1))$ en N. Por lo tanto, toda valoración v en N satisface esta *fbf*.

(*c*) La *fbf* $(\forall x_1)\,A_1^2(x_1, a_1)$ se interpreta intuitivamente como «para todo $n \in D_N$, $n=0'$, que es falsa. Sea v una valoración en N. Entonces $A_1^2(x_1, a_1)$ se interpreta por «$v(x_1)=0$». Así pues, v no satisface $A_1^2(x_1, a_1)$ salvo si $v(x_1)=0$. Supongamos que $v(x_1)=0$, y preguntémonos si v satisface $(\forall x_1)A_1^2(x_1, a_1)$. Para que esto se cumpla, tendremos que estar en condiciones de asegurar que toda v' obtenida a partir de v cambiando el valor de $v(x_1)$ satisface también $A_1^2(x_1, a_1)$. Pero evidentemente no podemos asegurarlo. Por lo tanto, ninguna valoración en N satisface $(\forall x_1)\,A_1^2(x_1, a_1)$.

▷ La sustitución de variables o términos en lugar de variables es una técnica que será importante más adelante. La siguiente proposición va a ser necesaria, pese a que su naturaleza técnica hace complicada la

demostración, que sirve de ilustración de la forma que van a asumir las demostraciones en esta parte de la materia.

Proposición 3.23

Sea $\mathscr{A}(x_i)$ una *fbf* de $\mathscr{L}$ en la que aparece libre x_i, y sea t un término que está libre para x_i en $\mathscr{A}(x_i)$. Supongamos que v es una valoración y que v' es la valoración i-equivalente a v y tal que $v'(x_i)=v(t)$. Entonces v satisface $\mathscr{A}(t)$ si y sólo si v' satisface $\mathscr{A}(x_i)$.

Demostración: Observamos primero que para todo término u en el que aparezca x_i podemos obtener otro término u' sustituyendo todas las intervenciones de x_i por t, y que entonces $v(u')=v'(u)$. Demostramos esto por inducción sobre la longitud de u, (por ejemplo, el número de símbolos que aparecen en u).

Paso base: u es x_i, de modo que u' es t. Entonces:

$$v'(u)=v'(x_i)=v(t), \text{ (por definición de } v'),$$
$$=v(u').$$

Paso de inducción: u es $f_i^n(u_1, \ldots, u_n)$, siendo $u_1, \ldots, u_n$ términos de longitud menor. Sean $u'_1, \ldots, u'_n$ los términos obtenidos sustituyendo cada intervención de x_i por t. Entonces $u'=f_i^n(u'_1, \ldots, u'_n)$. Así,

$$v(u')=f_i^n(v(u'_1), \ldots, v(u'_n))$$
$$=f_i^n(v'(u_1), \ldots, v'(u_n)),$$

por la hipótesis de inducción,

$$=v'(u).$$

Así pues, queda demostrado $v(u')=v'(u)$, para todo término u de $\mathscr{L}$.

Demostramos ahora la proposición por inducción sobre la longitud de la *fbf* $\mathscr{A}(x_i)$, es decir, el número de conectivas y cuantificadores de $\mathscr{A}(x_i)$.

Paso base: $\mathscr{A}(x_i)$ es una fórmula atómica, digamos $A_j^n(u_1, \ldots, u_n)$, siendo $u_1, \ldots, u_n$ términos de $\mathscr{L}$. Supongamos que v' satisface $\mathscr{A}(x_i)$. Entonces

$\overline{A}_j^n(v'(u_1), \ldots, v'(u_n))$ se verifica en la interpretación,

de modo que

$\overline{A}_j^n(v(u'_1), \ldots, v(u'_n))$ se verifica en la interpretación,

donde $u'_1, \ldots, u'_n$ se han obtenido como más arriba, sustituyendo cada intervención de x_i por t. (Aquí usamos el resultado preliminar de más arriba.) Tenemos ahora que v satisface la *fbf* $A_j^n(u'_1, \ldots, u'_n)$, es decir, v

satisface $\mathscr{A}(t)$. El recíproco puede demostrarse invirtiendo esta argumentación.

Paso de inducción:

Caso 1: $\mathscr{A}(x_i)$ es $(\sim\mathscr{B}(x_i))$
Caso 2: $\mathscr{A}(x_i)$ es $(\mathscr{B}(x_i)\rightarrow\mathscr{C}(x_i))$.

Estos casos son inmediatos y se dejan como ejercicio.

Caso 3: $\mathscr{A}(x_i)$ es $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$ $\quad (j\neq i)$

Supongamos que v no satisface $\mathscr{A}(t)$. Demostremos que v' no satisface $\mathscr{A}(x_i)$. Existe una valoración w que es j-equivalente a v y que no satisface $\mathscr{B}(t)$. Sea w' la valoración que es i-equivalente a w y cumple $w'(x_i)=w(t)$. Entonces, por la hipótesis de inducción aplicada a $\mathscr{B}(x_i)$, tenemos que w' no satisface $\mathscr{B}(x_i)$ (ya que w no satisface $\mathscr{B}(t)$.) Ahora bien, t está libre para x_i en $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$, así que x_j no aparece en t. Así pues, $v(t)$ depende sólo de los $v(x_k)$ para $k\neq j$. Pero para $k\neq j$, $v(x_k)=w(x_k)$, así que $v(t)=w(t)$. Se deduce que w' es j-equivalente a v', ya que w es j-equivalente a v. Ahora, como w' no satisface $\mathscr{B}(x_i)$, v' no satisface $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$, es decir, v' no satisface $\mathscr{A}(x_i)$. El recíproco requiere una argumentación similar y se deja como ejercicio.

Definición 3.24

Una *fbf* $\mathscr{A}$ es *verdadera* en una interpretación I si toda valoración en I satisface $\mathscr{A}$. $\mathscr{A}$ es *falsa* si no existe ninguna valoración en I que satisfaga $\mathscr{A}$.

Notación: Escribiremos $I\models\mathscr{A}$ si $\mathscr{A}$ es verdadera en I. Este símbolo no debe confundirse con $\vdash$; el lector notará que ninguno de ellos es un símbolo del lenguaje formal. Ambos son parte del metalenguaje que usamos para hablar de nuestros lenguajes formales.

Observaciones 3.25

(*a*) Puede ocurrir que para cierta *fbf* $\mathscr{A}$, algunas valoraciones en I satisfagan $\mathscr{A}$ y otras no. Una *fbf* así no es ni verdadera ni falsa en I.

(*b*) El dominio de una interpretación es por definición no vacío, así que, trivialmente, el conjunto de valoraciones no puede ser vacío. Está claro a partir de la definición que una valoración dada o satisface o no satisface una *fbf* $\mathscr{A}$ dada, y por lo tanto es imposible que una *fbf* sea a la vez verdadera y falsa en una interpretación dada.

(*c*) En una interpretación dada, una *fbf* $\mathscr{A}$ es falsa si y sólo si $(\sim\mathscr{A})$ es verdadera. Esto es una consecuencia inmediata de las definiciones de valoración y verdad. Se deduce que para ninguna *fbf* $\mathscr{A}$ puede ocurrir que $\mathscr{A}$ y $(\sim\mathscr{A})$ sean ambas verdaderas.

(*d*) En una interpretación dada I, una *fbf* $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ es falsa si y sólo si $\mathscr{A}$ es verdadera y $\mathscr{B}$ es falsa. Demostremos uno de los dos sentidos, para ilustrar el modo en que se aplican las definiciones. Supongamos que $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ es falsa en I. Entonces ninguna valoración satisface $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ en I. Dada cualquier valoración v, tendremos que v no satisface $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$. Por la Definición 3.20(iii), v no satisface $(\sim\mathscr{A})$ y v no satisface $\mathscr{B}$. Así pues, v satisface $\mathscr{A}$ y v no satisface $\mathscr{B}$. Por lo tanto, toda valoración satisface $\mathscr{A}$ y no satisface $\mathscr{B}$. Se deduce que $\mathscr{A}$ es verdadera y que $\mathscr{B}$ es falsa.

Proposición 3.26

Si las *fbfs* $\mathscr{A}$ y $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ son verdaderas en una interpretación particular I, entonces $\mathscr{B}$ es verdadera también.

Demostración: Sea v una valoración en I. Entonces v satisface $\mathscr{A}$ y v satisface $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$. Por la definición de satisfacción, se tiene entonces que v satisface $(\sim\mathscr{A})$ o v satisface $\mathscr{B}$. Pero v no puede satisfacer $(\sim\mathscr{A})$, así que v tiene que satisfacer $\mathscr{B}$. Se deduce que $\mathscr{B}$ es satisfecha por toda valoración en I, así que $\mathscr{B}$ es verdadera en I.

Proposición 3.27

Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de $\mathscr{L}$ y sea I una interpretación para $\mathscr{A}$. Entonces, $I\models\mathscr{A}$ si y sólo si $I\models(\forall x_i)\mathscr{A}$, siendo x_i cualquier variable.

Demostración: Supongamos que $I\models\mathscr{A}$, y sea v cualquier valoración en I. Entonces v satisface $\mathscr{A}$ y toda v' que sea i-equivalente también satisface $\mathscr{A}$, ya que toda valoración satisface $\mathscr{A}$. Así pues, v satisface $(\forall x_i)\mathscr{A}$, con lo que toda valoración satisface $(\forall x_i)\mathscr{A}$, p.e. $I\models(\forall x_i)\mathscr{A}$.

Supongamos ahora que $I\models(\forall x_i)\mathscr{A}$, y sea v cualquier valoración en I. v satisface entonces $(\forall x_i)\mathscr{A}$. Así pues, toda v' que sea i-equivalente a v satisface $\mathscr{A}$. En particular, v satisface $\mathscr{A}$, con lo que toda valoración satisface $\mathscr{A}$, es decir, $I\models\mathscr{A}$.

Corolario 3.28

Sean $y_1, \ldots, y_n$ variables de $\mathscr{L}$, sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de $\mathscr{L}$, y sea I una interpretación. Entonces $I\models\mathscr{A}$ si y sólo si $I\models(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\mathscr{A}$.

Demostración: Por aplicación repetida de la proposición 3.27.

▷ Hay dos aspectos de este resultado que merecen mención. En primer lugar, el añadir un cuantificador para una variable que no aparece libre en $\mathscr{A}$, formando $(\forall x_i)\mathscr{A}$, no cambia la interpretación desde el punto de vista intuitivo (véase el Ejemplo 3.10), de manera que no hemos

de sorprendernos de que en estas circunstancias $\mathscr{A}$ sea verdadera si y sólo si $(\forall x_i)\mathscr{A}$ es verdadera. El añadir un cuantificador para una variable que aparece libre en $\mathscr{A}$, formando $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$, tiene diferente efecto; pero el resultado de más arriba indica que $\mathscr{A}(x_i)$ es verdadera si y sólo si $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ es verdadera. De este modo, cuando consideramos la verdad o falsedad de *fbfs* con variables libres, el (los) cuantificador(es) universal(es) se sobreentiende(n) en un cierto sentido.

El cuantificador existencial se ha introducido como símbolo definido del lenguaje formal. Veamos cómo encaja en el contexto de las valoraciones y la satisfacción.

Proposición 3.29

En una interpretación I, una valoración v satisface la fórmula $(\exists x_i)\mathscr{A}$ si y sólo si existe al menos una valoración v' que es i-equivalente a v y que satisface $\mathscr{A}$.

Demostración: $(\exists x_i)\mathscr{A}$ es $\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$. Supongamos que v satisface $\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$. Entonces v no satisface $(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$. Así pues, existe alguna v' que es i-equivalente a v y no satisface $(\sim\mathscr{A})$. Esta v' debe forzosamente satisfacer $\mathscr{A}$. El recíproco se demuestra invirtiendo la argumentación.

▷ El lenguaje del cálculo de proposiciones contenía las conectivas $\sim$ y $\rightarrow$. El lenguaje $\mathscr{L}$ las contiene también. Por lo tanto, si tomamos una *fbf* $\mathscr{A}_0$ de L y reemplazamos cada letra de enunciado que aparezca en ella por una *fbf.* de $\mathscr{L}$ (haciendo el mismo reemplazamiento para todas las intervenciones de una misma letra de enunciado), obtendremos una *fbf* $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$. Se dice entonces que $\mathscr{A}$ *procede de* $\mathscr{A}_0$ *por sustitución.* Análogamente, partiendo de una *fbf.* de $\mathscr{L}$, podemos ver que tiene la misma estructura que alguna (generalmente varias) *fbfs* de L. Por ejemplo, consideremos

$$(\sim(\forall x_1)A_1^1(x_1)\rightarrow((\forall x_2)A_2^2(x_1, x_2)\rightarrow(A_1^1(x_2)\rightarrow(\forall x_1)A_3^1(x_1)))).$$

Esta *fbf.* proviene por sustitución de la *fbf* $(\sim p_1\rightarrow p_2)$ de L, y también de $(\sim p_1\rightarrow(p_2\rightarrow p_3))$. Otro ejemplo puede ser la *fbf.*

$$((\forall x_1)A_1^1(x_1)\rightarrow(\forall x_1)A_1^1(x_1))$$

que procede por sustitución de la *fbf* $(p_1\rightarrow p_1)$ de L. Ahora bien, $(p_1\rightarrow p_1)$ es una tautología. Extenderemos la noción de tautología a *fbfs* de $\mathscr{L}$ como sigue:

Definición 3.30

Una *fbf* $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$ es una tautología si proviene por sustitución de una tautología de L.

Proposición 3.31

Una *fbf* de $\mathscr{L}$ que sea una tautología es verdadera en cualquier interpretación para $\mathscr{L}$.

Demostración: La analogía entre las Definiciones 2.12 y 3.30 es la que nos proporciona nuestro método. Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de $\mathscr{L}$ que proviene por sustitución de una *fbf* $\mathscr{A}_0$ de L. A partir de toda valoración v en una interpretación I podemos obtener una valoración (parcial) v' de L como sigue. Sean $p_1, \ldots, p_k$ las letras de enunciado que aparecen en $\mathscr{A}_0$, y sean $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k$ las *fbfs* de $\mathscr{L}$ que se han sustituido en lugar de ellas para obtener $\mathscr{A}$. Para $1 \leqslant i \leqslant k$, sea

$$v'(p_i) = \begin{cases} V \text{ si } v \text{ satisface } \mathscr{A}_i. \\ F \text{ si } v \text{ no satisface } \mathscr{A}_i. \end{cases}$$

Demostramos ahora que v satisface $\mathscr{A}$ si y sólo si $v'(\mathscr{A}_0) = V$. La demostración tiene lugar por inducción sobre el número de conectivas de $\mathscr{A}_0$.

Paso base: $\mathscr{A}_0$ es una letra de enunciado, por ejemplo, p_n. Por la definición de v', tenemos entonces que $v'(p_n) = V$ si y sólo si v satisface $\mathscr{A}$.

Paso de inducción:

Caso 1: $\mathscr{A}_0$ es $\sim\mathscr{B}_0$, con lo que $\mathscr{A}$ es $\sim\mathscr{B}$, donde $\mathscr{B}$ proviene de $\mathscr{B}_0$ por sustitución. Por la hipótesis de inducción, v satisface $\mathscr{B}$ si y sólo si $v'(\mathscr{B}_0) = V$. Así pues, v no satisface $\mathscr{B}$ si y sólo si $v'(\mathscr{B}_0) = F$. Se deduce que v satisface $\mathscr{A}$ si y sólo si $v'(\mathscr{A}_0) = V$, usando las definiciones 3.20(ii) y 2.12(i).

Caso 2: $\mathscr{A}_0$ es $(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{C}_0)$, por lo que $\mathscr{A}$ es $(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$, donde $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ provienen por sustitución de $\mathscr{B}_0$ y $\mathscr{C}_0$, respectivamente. Las afirmaciones siguientes son todas equivalentes:

(*a*) v satisface $\mathscr{A}$.
(*b*) o v satisface $\sim\mathscr{B}$ o v satisface $\mathscr{C}$ (por la Definición 3.20 (iii)).
(*c*) o v no satisface $\mathscr{B}$ o v satisface $\mathscr{C}$.
(*d*) o $v'(\mathscr{B}_0) = F$ o $v'(\mathscr{C}_0) = V$.
(*e*) $v'(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{C}_0) = V$ (por Definición 2.12).
(*f*) $v'(\mathscr{A}_0) = V$.

Esto finaliza la demostración por inducción. La demostración de la proposición es ahora inmediata.

Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de $\mathscr{L}$ que es una tautología. Entonces $\mathscr{A}$ proviene por sustitución de una tautología $\mathscr{A}_0$ de L. Sea v una valoración de una interpretación I. Por lo recién demostrado, v satisface $\mathscr{A}$ si $v'(\mathscr{A}_0) = V$. Pero como $\mathscr{A}_0$ es tautología, v satisface $\mathscr{A}$. Así, $\mathscr{A}$ es verdadera en I.

▷ Hemos visto que en una interpretación dada no toda *fbf* es forzosamente verdadera o falsa. Consideremos, por ejemplo, la *fbf* $A_1^1(x_1)$ y una interpretación I para la cual D_I es $\mathbb{Z}$, el conjunto de los enteros, y la interpretación de A_1^1 es el predicado «>0». Entonces $A_1^1(x_1)$ se satisface para toda valoración v para la cual $v(x_1) > 0$, pero no se satisface para ninguna valoración w tal que $w(x_1) \leqslant 0$. Intuitivamente, el si $A_1^1(x_1)$ se hace verdadera o no, depende de la interpretación de x_1. Esta situación surge muy frecuentemente al manejar una *fbf* en la que intervenga alguna variable libre. Nuestro siguiente resultado de importancia establece que una *fbf* en la que *no* aparecen variables libres es necesariamente verdadera o falsa en cualquier interpretación dada. Necesitamos algunos resultados auxiliares previos.

Definición 3.32

Una *fbf* $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$ se llama *cerrada* si en $\mathscr{A}$ no aparecen variables libres.

Proposición 3.33

Sea I una interpretación para $\mathscr{L}$ y sea $\mathscr{A}$ una *fbf* de $\mathscr{L}$. Si v y w son valoraciones tales que $v(x_i) = w(x_i)$ para toda variable libre x_i de $\mathscr{A}$, entonces v satisface $\mathscr{A}$ si y sólo si w satisface $\mathscr{A}$.

Demostración: Por inducción sobre el número de conectivas y cuantificadores que intervienen en $\mathscr{A}$.

Paso base: $\mathscr{A}$ es una fórmula atómica, por ejemplo $A_i^n(t_1, \ldots, t_n)$. Las valoraciones v y w coinciden sobre las variables libres que aparecen en $t_1, \ldots, t_n$ y sobre todas las constantes individuales que aparecen, de modo que $v(t_i) = w(t_i)$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Por lo tanto, v satisface $\mathscr{A}$ si y sólo si w satisface $\mathscr{A}$.

Paso de inducción:

Caso 1: $\mathscr{A}$ es $\sim\mathscr{B}$.
Caso 2: $\mathscr{A}$ es $(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$.

Estos dos casos son inmediatos, sin más que utilizar las definiciones apropiadas. Se dejan como ejercicios.

Caso 3: $\mathscr{A}$ es $(\forall x_i)\mathscr{B}$.

Supongamos que v satisface $\mathscr{A}$, y sea w' i-equivalente a w. Entonces, como x_i no aparece libre en $(\forall x_i)\mathscr{B}$, tenemos $v(y) = w'(y)$ para toda variable y libre en $\mathscr{A}$. Ahora bien, cualquier v' que sea i-equivalente a v satisface $\mathscr{B}$; tomemos en particular la v' determinada por

$$v'(x_i) = w'(x_i)$$
$$v'(x_j) = v(x_j) \text{ si } j \neq i.$$

Entonces $w'(y)=v'(y)$ para toda variable y libre en $\mathscr{B}$. Así pues, por hipótesis de inducción y considerando que v' satisface $\mathscr{B}$, tenemos que w' satisface $\mathscr{B}$, con lo que w satisface $(\forall x_i)\mathscr{B}$.

La demostración de que si w satisface $(\forall x_i)\mathscr{B}$ entonces v satisface $(\forall x_i)\mathscr{B}$ procede del mismo modo.

Esto completa la inducción y demuestra el resultado.

Corolario 3.34

Si $\mathscr{A}$ es una *fbf* cerrada de $\mathscr{L}$ e I es una interpretación para $\mathscr{L}$, entonces $I \models \mathscr{A}$ o $I \models (\sim\mathscr{A})$.

Demostración: Sea $\mathscr{A}$ una *fbf* cerrada y sea I una interpretación. Sean v y w valoraciones arbitrarias. Trivialmente, $v(y)=w(y)$ siempre que y sea variable libre de $\mathscr{A}$ ($\mathscr{A}$ no tiene variables libres), de modo que v satisface $\mathscr{A}$ si y sólo si w satisface $\mathscr{A}$. Por lo tanto, o toda valoración satisface $\mathscr{A}$ o ninguna valoración satisface $\mathscr{A}$, es decir, o $\mathscr{A}$ es verdadera en I o $\mathscr{A}$ es falsa en I. Entonces, por la observación 3.25 (*c*), o $I \models \mathscr{A}$ o $I \models (\sim\mathscr{A})$.

▷ Este resultado es de interés para nosotros, ya que la noción de verdad en una interpretación es más importante que la de satisfacción con respecto a una valoración. Lo que hemos establecido es que para fórmulas *cerradas* todas las valoraciones en una cierta interpretación particular nos dan la misma respuesta en lo concerniente a la satisfacción de una fórmula dada. Así pues, para comprobar la verdad o falsedad de una *fbf* cerrada dada solamente necesitamos comprobar si alguna valoración la satisface o no. Veremos también que las fórmulas cerradas son de mayor importancia en lo que concierne a las propias matemáticas —de hecho, las fórmulas con variables libres a veces se comportan de una manera poco natural.

Las interpretaciones dan valores de verdad a las *fbfs* cerradas de $\mathscr{L}$. Puede suceder que para una *fbf* dada $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$ todas las interpretaciones para $\mathscr{L}$ le den el valor V; es decir, que $\mathscr{A}$ sea verdadera en todas las posibles interpretaciones para $\mathscr{L}$.

Definición 3.35

Una *fbf* $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$ es *lógicamente válida* si $\mathscr{A}$ es verdadera en toda interpretación para $\mathscr{L}$. $\mathscr{A}$ es *contradictoria* si $\mathscr{A}$ es falsa en toda interpretación.

Estas nociones son los análogos, dentro de la presente situación, de las nociones de tautología y contradicción del Capítulo 1. Del mismo modo que allí había fórmulas que no eran ni tautologías ni contradicciones, en $\mathscr{L}$ hay fórmulas que no son ni lógicamente válidas ni contradictorias.

Observación 3.36

(*a*) Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.26 que si las *fbfs* $\mathscr{A}$ y $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ son lógicamente válidas, entonces $\mathscr{B}$ es lógicamente válida.

(*b*) De manera análoga, es consecuencia de la Proposición 3.27 que si la *fbf* $\mathscr{A}$ es lógicamente válida, también lo es $(\forall x_i)\mathscr{A}$, cualquiera que sea la variable x_i.

Ejemplo 3.37

(*a*) Hemos visto que toda *fbf* de $\mathscr{L}$ que provenga de una tautología de L por sustitución es lógicamente válida (Proposición 3.31). Nótese, pues, que la clase de las *fbfs* de $\mathscr{L}$ lógicamente válidas contiene a la clase de las tautologías.

(*b*) $((\forall x_i)\mathscr{A}\rightarrow(\exists x_i)\mathscr{A})$ es lógicamente válida, cualquiera que sea la *fbf* $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$. Esto se demuestra por un método standard como sigue.

Sea I una interpretación de dominio D_I y sea v una valoración en I. Si v no satisface $(\forall x_i)\mathscr{A}$ entonces v satisface $((\forall x_i)\mathscr{A}\rightarrow(\exists x_i)\mathscr{A})$. Si v satisface $(\forall x_i)\mathscr{A}$, entonces toda valoración v' que sea i-equivalente a v satisface $\mathscr{A}$. Está claro, entonces, que existe una valoración i-equivalente a v que satisface $\mathscr{A}$. Así pues, v satisface $(\exists x_i)\mathscr{A}$, por la Proposición 3.29. Así pues, también en este caso v satisface $((\forall x_i)\mathscr{A}\rightarrow(\exists x_i)\mathscr{A})$. Hemos demostrado, pues, que una valoración arbitraria en una interpretación arbitraria satisface la *fbf* dada, con lo que ésta es lógicamente válida.

(*c*) $((\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)\rightarrow(\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2))$ no es lógicamente válida. La demostración quizá es algo menos inmediata, puesto que lo que tenemos que hacer es encontrar una interpretación en la que la *fbf* dada no sea verdadera. Hemos de elegir un dominio D_I, una interpretación para la letra de predicado A_1^2, y una valoración que no satisfaga la *fbf*.

Sea $D_I=\mathbb{Z}$. Sea $A_1^2(y, z)$ la relación «$y<z$». Sin necesidad de escoger una valoración, está claro que la *fbf* cerrada $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$ es verdadera en esta interpretación, y que $(\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$ es falsa; es decir, toda valoración satisface la primera y no satisface la segunda. Así pues, ninguna valoración satisface la *fbf* dada. No es verdadera en esta interpretación, y no puede ser lógicamente válida.

(*d*) $A_1^1(x_1)$ no es lógicamente válida. Como vimos anteriormente (pág. 66), esta *fbf* no sólo no es lógicamente válida, sino que existen interpretaciones en las cuales no es ni verdadera ni falsa.

▷ En general, para demostrar la validez lógica de una *fbf* dada, hemos de probar que una interpretación arbitraria la satisface. El demostrar que una *fbf* no es lógicamente válida generalmente requiere algo de ingenio para construir una interpretación concreta en la que haya una valoración que no la satisfaga.

Ejercicios

14 En la interpretación aritmética N del Ejemplo 3.5, encuéntrense, si es posible, valoraciones que satisfagan y que no satisfagan las siguientes *fbfs*.

(*a*) $A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_2, x_3))$.
(*b*) $(A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3))$.
(*c*) $\sim A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_3))$.
(*d*) $(\forall x_1) A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3)$.
(*e*) $((\forall x_1) A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1) \to A_1^2(x_1, x_2))$.

15 En la interpretación descrita en el Ejercicio 11, encuéntrense, si es posible, valoraciones que satisfagan y que no satisfagan las siguientes *fbfs*.

(*a*) $A_2^2(x_1, a_1)$.
(*b*) $A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to A_2^2(a_1, f_1^2(x_1, x_2))$.
(*c*) $\sim A_2^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2)))$.
(*d*) $(\forall x_1) A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$.
(*e*) $(\forall x_1) A_2^2(f_1^2(x_1, a_1) \to A_2^2(x_1, x_2)$.

16 ¿Cuáles de las siguientes *fbfs* son verdaderas en la interpretación N, y cuáles son falsas?

(*a*) $(\forall x_1) A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1)$.
(*b*) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_2, a_1), x_1))$.
(*c*) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3) A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$.
(*d*) $(\exists x_1) A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_1, x_1))$.

17 ¿Cuáles de las siguientes *fbfs* cerradas son verdaderas en la interpretación del ejercicio 11, y cuáles son falsas?

(*a*) $(\forall x_1) A_2^2(f_1^2(a_1, x_1), a_1)$.
(*b*) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\sim A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1))$.
(*c*) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_2^2(x_1, x_2) \to A_2^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3)))$.
(*d*) $(\forall x_1)(\exists x_2) A_2^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2))$.

18 Demuéstrese que, en una interpretación dada, la *fbf*. $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ es falsa si y sólo si $\mathscr{A}$ es verdadera y $\mathscr{B}$ es falsa. [Véase la Observación 3.25(*d*)].

19 Demuéstrese que cada una de las siguientes *fbfs* es lógicamente válida.

(*a*) $((\exists x_1)(\forall x_2) A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)(\exists x_1) A_1^2(x_1, x_2))$.
(*b*) $(\forall x_1) A_1^1(x_1) \to ((\forall x_1) A_2^1(x_1) \to (\forall x_2) A_1^1(x_2))$.
(*c*) $(\forall x_1)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\forall x_1)\mathscr{A} \to (\forall x_1)\mathscr{B})$, para algunas *fbfs* $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$.
(*d*) $((\forall x_1)(\forall x_2)\mathscr{A} \to (\forall x_2)(\forall x_1)\mathscr{A})$, para algunas *fbf* $\mathscr{A}$.

20 Dése un ejemplo de *fbf* lógicamente válida que no sea cerrada.

21 Demuéstrese que si t es un término libre para x_i en la *fbf* $\mathscr{A}(x_i)$, entonces la *fbf* $(\mathscr{A}(t) \to (\exists x_i\ \mathscr{A}(x_i))$ es lógicamente válida.

22 Demuéstrese que ninguna de las siguientes *fbfs* es lógicamente válida.

(*a*) $(\forall x_1)(\exists x_2) A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1) A_1^2(x_1, x_2)$.
(*b*) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1))$.
(*c*) $(\forall x_1)((\sim A_1^1(x_1)) \to (\sim A_1^1(a_1)))$.
(*d*) $((\forall x_1) A_1^2(x_1, x_1) \to (\exists x_2)(\forall x_1) A_1^2(x_1, x_2))$.

23 Sea $\mathscr{A}(x_i)$ una *fbf* de $\mathscr{L}$ en la que x_i aparece libre y sea t un término libre para x_i en $\mathscr{A}(x_i)$. Supongamos que v es una valoración tal que $v(t) = v(x_i)$. Demuéstrese que v satisface $\mathscr{A}(t)$ si y sólo si v satisface $\mathscr{A}(x_i)$.

4
Cálculo de Predicados Formal

4.1 El sistema formal $K_{\mathscr{L}}$

En el Capítulo 3 hemos descrito los lenguajes formales que vamos a utilizar, y hemos visto cómo diferentes tipos de enunciados pueden trasladarse a *fbfs* de lenguajes de primer orden apropiados. Los mismo que hicimos en el Capítulo 3, consideramos en este capítulo un lenguaje de primer orden fijo y no especificado $\mathscr{L}$, con el fin de que nuestros resultados sean generales y se apliquen a todos los lenguajes de primer orden. Los símbolos de $\mathscr{L}$ pueden interpretarse de muchos modos diferentes, pero ahora nos ocuparemos de los aspectos puramente formales del lenguaje y consideraremos relaciones lógicas entre *fbfs* más bien que propiedades que dependan de interpretaciones particulares. El esquema a seguir es similar al del Capítulo 2: Definiremos un sistema deductivo formal y demostraremos seguidamente que tiene las propiedades que debe tener: Es decir, que es consistente y que la clase de sus teoremas es precisamente la clase de las *fbfs* lógicamente válidas.

Fijemos un lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$. Definamos un sistema deductivo formal $K_{\mathscr{L}}$ por medio de los siguientes axiomas y reglas de deducción.

Axiomas

Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ *fbfs* cualesquiera de $\mathscr{L}$. Las siguientes *fbfs* son axiomas de $K_{\mathscr{L}}$:

($K1$) $(\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$.
($K2$) $(\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))\to((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))$.
($K3$) $(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$.
($K4$) $((\forall x_i)\,\mathscr{A}\to\mathscr{A})$, si x_i no aparece libre en $\mathscr{A}$.
($K5$) $((\forall x_i)\,\mathscr{A}\to\mathscr{A}(t))$, si $\mathscr{A}(x_i)$ es una *fbf* de $\mathscr{L}$ y t es un término de $\mathscr{L}$ libre para x_i en $\mathscr{A}(x_i)$.
($K6$) $(\forall x_i)(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to(\forall x_i)\mathscr{B})$, si $\mathscr{A}$ no tiene intervenciones libres de la variable x_i.

Nótese que éstos son esquemas de axioma, cada uno con infinitas realizaciones posibles.

Reglas

(1) *Modus ponens*, es decir, de $\mathscr{A}$ y $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ se deduce $\mathscr{B}$, siendo $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ *fbfs* cualesquiera de $\mathscr{L}$.

(2) Generalización, es decir, de $\mathscr{A}$ se deduce $(\forall x_i)\mathscr{A}$, siendo $\mathscr{A}$ cualquier *fbf* de $\mathscr{L}$ y x_i cualquier variable.

Observación 4.1

(*a*) Los esquemas de axioma y las reglas de deducción para $K_{\mathscr{L}}$ incluyen los esquemas de axiomas y la regla de L. Los axiomas y la regla adicionales se necesitan para las demostraciones en las que intervienen propiedades de los cuantificadores.

(*b*) El axioma ($K5$) se ha enunciado en su forma más general. En las aplicaciones nos encontramos frecuentemente con el caso particular $((\forall x_i)\mathscr{A}\to\mathscr{A})$, donde x_i puede o no aparecer libre en $\mathscr{A}$. Si x_i aparece libre en $\mathscr{A}$ podemos escribir $\mathscr{A}$ como $\mathscr{A}(x_i)$, y ($K5$) nos proporciona $((\forall x_i)\to\mathscr{A}(x_i))$, ya que x_i está libre para x_i en $\mathscr{A}(x_i)$. Si x_i no aparece libre en $\mathscr{A}$, entonces ($K4$) nos da $((\forall x_i)\mathscr{A}\to\mathscr{A})$.

Definición 4.2

(Véase Definición 2.2). Una *demostración* en $K_{\mathscr{L}}$ es una sucesión finita $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ de *fbfs*. de $\mathscr{L}$ tal que para todo $i\,(1\leqslant i\leqslant n)$, o $\mathscr{A}_i$ es axioma de $K_{\mathscr{L}}$ o $\mathscr{A}_i$ se deduce de miembros anteriores de la sucesión por MP o generalización.

Si Γ es un conjunto de *fbfs* de $\mathscr{L}$, una *deducción a partir de* Γ en $K_{\mathscr{L}}$ es una sucesión similar, en la que pueden incluirse además elementos de Γ. (Véase Definición 2.5.)

Una *fbf* $\mathscr{A}$ es un *teorema* de $K_{\mathscr{L}}$ si es el último miembro de una sucesión finita que constituye una demostración en $K_{\mathscr{L}}$.

Una *fbf* $\mathscr{A}$ es *consecuencia* en $K_{\mathscr{L}}$ del conjunto de *fbfs*. Γ si $\mathscr{A}$ es el último miembro de una sucesión finita que constituya una deducción a partir de Γ en $K_{\mathscr{L}}$.

Escribiremos $\vdash_{K_{\mathscr{L}}}\mathscr{A}$ para denotar «$\mathscr{A}$ es un teorema de $K_{\mathscr{L}}$», y $\Gamma\vdash_{K_{\mathscr{L}}}\mathscr{A}$ para denotar «$\mathscr{A}$ es una consecuencia de Γ en $K_{\mathscr{L}}$», siendo Γ un conjunto de *fbfs* de $K_{\mathscr{L}}$.

Por conveniencia, abreviaremos $K_{\mathscr{L}}$ a K, salvo que haya alguna razón para hacer énfasis en el lenguaje particular utilizado.