Práctica 5

Ejercicio 1.

Señalar las ocurrencias libres o ligadas de x_1, x_2, $x_3$en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde $C = \{c\}, F = \{f, g\}$, y $P = \{A_1^2\}$, con g de aridad 1; f de aridad 2, A_1^2 de aridad

i. $\forall x_1 \left(\exists x_2 A_1^2\big(x_1, f(x_2, x_3)\big) \to \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3)\right)$.

Todas las intervenciones de x_1y x_2 se encuentran ligadas. En su primera aparición x_3 se encuentra libre, por lo tanto:

- x_1 4 veces ligada.
- x_2 2 veces ligada.
- x_3 1 vez libre.
- x_3 2 veces ligada.

ii. $\forall x_1 \left(\exists x_2 A_1^2\big(x_1, f(x_2, x_3)\big)\right) \to \forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3)$.

Todas las intervenciones de x_2 se encuentran ligadas. En su primera aparición x_3 se encuentra libre. Las $x_1$de $\forall x_3 A_1^2(g(c), x_1) \vee A_1^2(x_1, x_3)$ se encuentran libres, por lo tanto:

- x_1 2 veces libre.
- x_1 2 veces ligada.
- x_2 2 veces ligada.
- x_3 1 vez libre.
- x_3 2 veces ligada.

Ejercicio 2.

Sean A y B fbfs escritas en un lenguaje de primer orden. Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de fbfs (usar noción de i-equivalencia o contraejemplos según corresponda):

(Me falta dar el lenguaje de primer orden que es poner C={c} y etc para las funciones, variables y relaciones)

i. (∀x) A(x) ∃xA(x)

Contraejemplo:

Siendo $D_I = \aleph$ y $I(A(x)) = \{x \in \aleph : x \; es \; par\}$

$(\forall x)\ A$ es falsa ya que no se cumple que A es verdadera cualquiera sea la valoración de x (por ejemplo $v(x) = 3$).

$\exists x A$ es verdadera ya que para una valoración de x se cumple A (por ejemplo $v(x) = 2$).

ii. ∃x∃yA(x) ∃y∃xA(x)

Siguiendo la proposición 3.29.

$Sea\ I\ una\ interpretación\ y\ v_1\ una\ valoración\ en\ la\ que\ | =_{I,v_1} \exists x \exists y A(x)$

1. $| =_{I,v_1} \exists x \exists y A(x) \rightarrow$ existe una valoración v_2 x-equivalente a v_1 tal que,
2. $| =_{I,v_2} \exists y A(x) \rightarrow$ existe una valoración v_3 y-equivalente a v_2 tal que,
3. $| =_{I,v_3} A(x)$
4. v_3 es entonces x-equivalente a v_1 y es y-equivalente a v_2, es decir, v_3 es una valoración que satisface A con un par de valores de (x, y).

$Sea\ I\ una\ interpretación\ y\ v_1{}'\ una\ valoración\ en\ la\ que\ | =_{I,v_1{}'} \exists y \exists x A(x)$

1. $| =_{I,v_1{}'} \exists y \exists x A(x) \rightarrow$ existe una valoración $v_2{}'$ y-equivalente a v_1´ tal que,

2. $|=_{I,v_2\prime}$ $\exists x A(x)$ → existe una valoración v_3´ x-equivalente a v_2´ tal que,
3. $|=_{I,v_3\prime}$ $A(x)$
4. v_3´ es entonces y-equivalente a v_1´ y es x-equivalente a v_2´, es decir, v_3´ es una valoración que satisface A con un par de valores de (y, x).

Entonces si existe una valoración de x,y para la cual es verdadera la primera fbf, también va a ocurrir en la segunda fbf, caso contrario, ambas serán falsas.

iii. ∃x∀yA(x) ∀y∃xA(x)

Contraejemplo:
Siendo $D_I = \aleph$ y $I(A) = \{x, y \in \aleph : x \geq y\}$.

$\exists x \forall y A$ es falsa ya que no existe un natural mayor a todos los naturales, puesto que son infinitos.
$\forall y \exists x A$ es verdadera puesto que todos los naturales tienen un número mayor que él.

iv. ∃x(A(x) ∧ B(x)) ∃xA(x) ∧ ∃xB(x)

Contraejemplo:
Siendo $D_I = \aleph$ y $I(A) = \{x \in \aleph : x\ es\ par\}$ e $I(B) = \{x \in \aleph : x\ es\ impar\}$.

$\exists x(A(x) \land B(x))$ es falsa ya que no existe una valoración para x tal que este número sea par e impar.
$\exists x A(x) \land \exists y B(y)$ → se puede renombrar puesto que tienen distinto alcance.

$|=_{I,v} \exists x A(x) \land \exists y B(y)\ sii$
$|=_{I,v} \exists x A(x) \land |=_{I,v} \exists y B(y)\ sii$
$|=_{I,v'} A(x) \land |=_{I,v'} B(y)$

Dada la valoración v’ tal que:
$v'(x) = 2$
$v'(y) = 3$

$A(x)$ se satisface y $B(x)$ se satisface, por lo tanto $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y)$ se satisface (no solo eso, es verdadera ya que se satisface en todas las valoraciones).

v. ∃x(A(x) ∨ B(x)) ∃xA(x) ∨ ∃xB(x)

Siguiendo la proposición 3.29.

$Sea\ I\ una\ interpretación\ y\ v_1\ una\ valoración\ en\ la\ que\ |=_{I,v_1} \exists x(A(x) \vee B(x))$

1. $|=_{I,v_1} \exists x(A(x) \vee B(x))$ → existe una valoración v_2 x-equivalente a v_1 tal que,
2. $|=_{I,v_2} A(x) \vee B(x)$ → eso sucede sii,
3. $|=_{I,v_2} A(x) \vee |=_{I,v_2} B(x)$
4. Si $|=_{I,v_2} A(x)$, entonces $|=_{I,v_1} \exists x A(x)$ → siguiendo la proposición 3.29.
5. Si $|=_{I,v_2} B(x)$, entonces $|=_{I,v_1} \exists x B(x)$ → siguiendo la proposición 3.29.
6. Por lo tanto $|=_{I,v_1} \exists x A \vee \exists x B$

$Sea\ I\ una\ interpretación\ y\ v_1{'}\ una\ valoración\ en\ la\ que\ |=_{I,v_1{'}} \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

1. $|=_{I,v_1{'}} \exists x A(x) \vee \exists y B(y)$ → existe una valoraciones $v_2{'}$ y $v_3{'}$ x-equivalente a v_1 tal que,
2. $|=_{I,v_2{'}} A(x) \vee |=_{I,v_2{'}} B(y)$
3. Si estamos en el primer caso entonces sucede $|=_{I,v_2{'}} A(x) \vee B(x)$ (ya que para que se satisfaga esa fbf basta con que se satisfaga A(x) o B(x) y ya sabemos que se satisface A(x)) y por lo tanto siguiendo la proposición 3.29 $|=_{I,v_1{'}} \exists x(A(x) \vee B(x))$
4. Si estamos en el segundo caso entonces sucede $|=_{I,v_2} A(y) \vee B(y)$ y por lo tanto siguiendo la proposición 3.29 $|=_{I,v_1{'}} \exists y(A(y) \vee B)$ que también podría escribirse como $|=_{I,v_1{'}} \exists y(A(y) \vee B(y))$

vi. ∀x(A(x) ∨ B(x)) ∀xA(x) ∨ ∀xB(x)

Contraejemplo:

Siendo $D_I = \aleph$ y $I(A) = \{x \in \aleph : x\ es\ par\}$ e $I(B) = \{x \in \aleph : x\ es\ impar\}$ o bien e $I(B) = \neg A$

$\forall x(A \ \lor\ B)$ es verdadera ya que todo número natural puede ser par o impar. (ya que $\forall x(A \ \lor\ \neg A)$ es una tautología).

$\forall x A \ \lor\ \forall x B$ es falsa puesto que existen no se cumple que todos los números naturales son pares o todos los números naturales son impares.

Debería consultar los de i-equivalencia no estoy muy segura de lo que hice.

Ejercicio 3.

Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes características:

Conjunto de constantes: C = {c, u}.

Sin símbolos de función: F = ∅.

Conjunto de símbolos de predicado: P = $\{A_1^2\}$, con A_1^2 de aridad 2.

Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

I(c) = 0

I(u) = 1

I(A_1^2) = $\{(x, y) \ \in\ N\ \times\ N\ ;\ x\ \leq\ y\}$

donde I es una función de interpretación semántica.

Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Fundamentar las respuestas.

i. $A_1^2(c, x)$ es satisfactible en I.

Sea v tal que $v(x) = 3$:

$| =_{I,v} (A_1^2(c, x)$ sii $\big(v(c), v(x)\big) \in \mathrm{I}(A_1^2)$

sii $(0{,}3) \in \leq$

sii $0 \leq 3$

La afirmación es correcta.

ii. $A_1^2(u, x)$ es satisfactible en I.

Sea v tal que $v(x) = 2$:

$| =_{I,v} (A_1^2(u, x)$ sii $\big(v(u), v(x)\big) \in \mathrm{I}(A_1^2)$

sii $(1{,}2) \in \leq$

sii $1 \leq 2$

La afirmación es correcta.

iii. $\forall x A_1^2(c, x)$ es satisfactible en I.

Como el 0 es el menor de los naturales, para cualquier valoración v se cumple $| =_{I,v} A_1^2(c, x)$.

La afirmación es correcta.

iv. $\forall x A_1^2(u, x)$ es satisfactible en I.

Como el 1 no es el menor de los naturales, para cualquier valoración v no se cumple$| =_{I,v} A_1^2(u, x)$.

Sea v tal que $v(x) = 0$:

$| =_{I,v} (A_1^2(u, x)$ sii $\big(v(u), v(x)\big) \in \mathrm{I}(A_1^2)$

sii $(1{,}0) \in \leq$

sii $1 \leq 0$

La afirmación es incorrecta, $\forall x A_1^2(u,x)$ es falsa en I.

v. $A_1^2(c,x)$ es verdadera en I.

Como el 0 es el menor de los naturales, para toda valoración v aplicada a x, se cumple $| =_{I,v} A_1^2(c,x)$.

La afirmación es correcta.

vi. $\forall x A_1^2(c,x)$ es lógicamente valida.

Si cambiamos el dominio de la interpretación I por los números Enteros, para toda valoración v, no se cumple$| =_{I,v} A_1^2(c,x)$.
Sea v tal que $v(x) = -1$:
$| =_{I,v} (A_1^2(c,x)\ sii\ \big(v(c), v(x)\big) \in \ \mathrm{I}(A_1^2)$
$sii\ (0,-1) \in \leq$
$sii\ 0 \leq -1$

La afirmación es incorrecta, ya que $\forall x A_1^2(c,x)$ no es verdadera para todas las interpretaciones.

vii. $A_1^2(u,c) \wedge \neg A_1^2(u,c)$ es contradictoria.

Sea $p = A_1^2(u,c)$, se puede escribir la fbf de la siguiente forma:

$p \wedge \neg p$, que tiene la siguiente tabla de verdad:

p	$\wedge$	$\neg$	p
V	F	F	V

F	F	V	F
V	F	F	V
F	F	V	F

Como en todas las posibles asignaciones de verdad es falsa, la fbf es contradictoria.

Ejercicio 4.

Ofrecer una interpretación para los siguientes lenguajes de primer orden donde las fórmulas sean verdaderas y otra donde sean falsas. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.

i. C = F = ∅, P = $\{A_1^2\}$, con A_1^2 de aridad 2.

- $\forall x \forall y (A_1^2(x,y) \rightarrow A_1^2(y,x))$
- $\forall x (A_1^2(x,x)$
- $\forall x \forall y \forall z \left(\left(A_1^2(x,y) \land A_1^2(y,z) \right) \rightarrow A_1^2(x,z) \right)$

Sea I la siguiente interpretación para el lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

I(A_1^2) = $\{(x,y) \in N \times N \,;\, x = y\}$

Todas las fbf son verdaderas y se traducen como:

- Para todo número natural x y todo número natural y vale que si x es igual a y, entonces y es igual a x.
- Para todo numero natural x vale que x es igual a x.
- Para todo número natural x, todo número natural y y todo número natural z vale que si x es igual a y y y es igual a z entonces x es igual a z.

Sea I la siguiente interpretación para el lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:

I(A_1^2) = $\{(x, y) \in N \times N\, ;\ x = y - 1\}$, o I(A_1^2) = “x es el antecesor de y”

Todas las fbf son falsas y se traducen como:

- Para todo número natural x y todo número natural y vale que si x es el antecesor de y, entonces y es el antecesor de x.
  - Contraejemplo: sea $v(x) = 5$ y $v(y) = 6$, 5 es el antecesor de 6, pero 6 no es el antecesor de 5.
- Para todo número natural x vale que x es el antecesor de x.
  - Contraejemplo: sea $v(x) = 5$, 5 no es el antecesor de 5.
- Para todo número natural x, todo número natural y y todo número natural z vale que si x es el antecesor de y y y es el antecesor de z entonces x es el antecesor de z.
  - Contraejemplo: sea $v(x) = 5$, $v(y) = 6$, $v(z) = 7$, 5 es el antecesor de 6 y 6 es el antecesor de 7, pero 5 no es el antecesor de 7.

ii. C = {c}, F = {f}, P = {A_1^2}, con f y A_1^2 de aridad 2.

- $\forall x\left(A_1^2(x, c) \rightarrow A_1^2(x, f(y))\right)$
- $\forall x(\neg A_1^2(x, x)$
- $\neg\forall x\forall y\left(A_1^2(x, y)\right) \equiv \exists x\neg\forall y\left(A_1^2(x, y)\right) \equiv \exists x\exists y\left(\neg A_1^2(x, y)\right)$

Sea I la siguiente interpretación para el lenguaje sobre el dominio de los números Enteros:

$I(c) = 0$

$I(f(x))$ devuelve siempre 0.

I(A_1^2) = $\{(x, y) \in N \times N\, ;\ x > y\}$.

Todas las fbf son verdaderas y se traducen como:

- Para todo número natural x vale que si x es mayor a 0, entonces x es mayor a 0.
- Para todo número natural x no vale que x es mayor a x.

- Existe un numero natural x y un numero natural y tal que x no es mayor que y.

Para que la tercera formula sea falsa, debe cumplirse $\forall x \forall y \left(A_1^2(x, y)\right)$, esto causa que la primera formula se cumpla siempre ya que la implicación seria verdadera ($V \rightarrow V$, ya que $A_1^2(x, y)$ se cumple para cualquier x e y) para cualquier x.

Ejercicio 5.

Determinar si las siguientes fbfs escritas en algún lenguaje de primer orden son contradictorias, satisfactibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación o lógicamente válidas. Fundamentar.

i. $(\exists x)(\neg A(x)) \vee (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

$$(\exists x)(\neg A(x)) \vee (\forall x)(A(x) \vee B(x)) \equiv$$
$$\equiv \neg(\exists x)\big(\neg A(x)\big) \rightarrow \big(A(x) \vee B(x)\big) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)\big(A(x)\big) \rightarrow (\forall x)\big(A(x) \vee B(x)\big)$$

Es lógicamente valida, ya que siempre que el antecedente sea verdadero, el consecuente será verdadero (ya que se trata de una disyunción, en la cual basta que solamente una de las dos fórmulas sea verdadera para que se cumpla). En el caso que el antecedente sea falso, la implicación se cumplirá trivialmente.

ii. $\exists y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$

Como $\exists y \exists x P(x, y)$ es lógicamente equivalente a $\exists x \exists y P(x, y)$, siempre que el antecedente sea verdadero, el consecuente será verdadero, y siempre que el antecedente sea falso, el consecuente será falso. En ambos casos se cumple la implicación, haciendo que siempre sea verdadera.

Ejercicio 6.

i. Si la fbf $A(x)$ es satisfactible, ¿entonces la fbf $\exists x A(x)$ es lógicamente válida?. Fundamentar

No, para que $\exists x A(x)$ sea lógicamente valida, debe ser verdadera en todas las interpretaciones, es decir, en toda las interpretaciones $A(x)$ debe ser satisfactible para todas las posibles valoraciones de x.

Contraejemplo:
C = F = ∅, P = $\{A_1^1\}$ con A_1^1 de aridad 1.
$D_I = \aleph$, I(A_1^1): " x es menor a 0".
Como se encontró una interpretación en la que $\exists x A(x)$ no es satisfactible, este no es lógicamente valido.

ii. La fbf abierta $\forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \forall x P(x,y)$ ¿es lógicamente válida?. Fundamentar

Contraejemplo:
C = F = ∅, P = $\{P\}$ con P de aridad 2.
$D_I = \aleph, I(P) = \{(x,y) \in N \times N : x \leq y\}$

Fijando $v(x) = 0$, el antecedente es verdadero ya que para toda valoración w, y equivalente, se cumple P, pero el consecuente es falso, ya que P no se cumple para cualquier valoración de x,y. Por ejemplo si se toma para el consecuente $v(x) = 1, v(y) = 0$, este será falso.

iii. Sea un lenguaje de primer orden con la letra de constante c y las letras de predicado P y Q, ambas de aridad 1. Sea la fbf : $\Big(P(c) \wedge \forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)\Big) \rightarrow Q(c)$ ¿Es lógicamente válida? Fundamentar.

Si el antecedente no se cumple, la implicación se cumple trivialmente.
Si el antecedente se cumple, entonces se cumple $P(c)$ y además se cumple $P(x) \rightarrow Q(x)$, para cualquier valor de x, incluyendo el valor de la letra

constante c. Entonces por MP (3.26) entre $P(c)$ y $P(c) \rightarrow Q(c)$ se puede afirmar que se cumple $Q(c)$.

iv. Sean A y B dos fbf escritas en un lenguaje de primer orden. La fbf: ∀x(A(x) ∨ B(x)) → ((∀xA(x)) ∨ (∀xB(x))) es lógicamente válida? Fundamentar.

Contraejemplo:
C = F = ∅, P = $\{A, B\}$ con A y B de aridad 1.
Siendo $D_I = \aleph$ y $I(A) = \{x \in \aleph : x\ es\ par\}$ e $I(B) = \{x \in \aleph : x\ es\ impar\}$ o bien e $I(B) = \neg A$
$\forall x(A(x)\ \vee\ B(x))$ para esta interpretación será siempre verdadero, puesto que se trata de una tautología, pero $((\forall xA(x))\ \vee\ (\forall xB(x)))$ será falso puesto que no para cualquier valor de x se cumple que es par ni tampoco no para cualquier valor de x se cumple que es impar.

Ejercicio 7.

Sea A una fbf de un lenguaje de primer orden, I una interpretación para tal lenguaje. Demostrar que A es verdadera en I si y sólo si ¬A es falsa en I.

i. Sea una interpretación I, si $| =_I A(x)$ entonces se cumple que para toda valoración v de x $A(x)$ se satisface. Teniendo en cuenta que v o satisface $A(x)$ o $\neg A(x)$, entonces como v satisface $A(x)$ entonces v no satisface a $\neg A(x)$.

ii. Sea una interpretación I, si $| =_I \neg A(x)$ entonces se cumple que para toda valoración v de x $\neg A(x)$ se satisface. Teniendo en cuenta que v o satisface $A(x)$ o $\neg A(x)$, entonces como v satisface $\neg A(x)$ entonces v no satisface a $A(x)$.

Ejercicio 8.

Sea A una fbf que no contiene cuantificadores (es decir, abierta) escrita en algún lenguaje de primer orden. Sea I una interpretación para tal lenguaje. ¿Es posible decidir acerca del valor de verdad de A en I? Fundamentar.

Es posible decidir el valor de verdad de A en I. Para ello hay que verificar si para todas las valoraciones posibles se satisface la fbf (o caso contrario no se satisface en ninguna).

<u>Por ejemplo:</u>

C = F = ∅, P = $\{A\}$ con A de aridad 1.

$D_I = todos\ los\ \aleph\ pares\ , I(P): "x\ es\ par"$

$| =_{I,v}\ \ P(x)$

Como $P(x)$ se satisface para cualquiera sea la valoración de x, esta fbf es verdadera.

Si $I(P)$: "$x\ es\ impar$", la fbf seria falsa.

Ejercicio 9.

Retomar la practica anterior y para cada item (por separado) del ejercicio 4, encontrar alguna interpretación donde todas las sentencias dadas sean verdaderas y además:

- Pipo es un dragón que vive en un zoológico.
- Sebastián es bueno y también es malo al mismo tiempo.
- Pedro es un peluquero.

En algún caso la interpretación podría no existir (justificar por qué)

$C = \{c_1, c_2, c_3\}\ , F = \emptyset, P = \{P_1^1, P_2^1, P_3^1, P_4^1\}$ con A de aridad 1.

$D_I = universo.$

$c_1 = Pipo$

$c_2 = Sebastian$

$c_3 = Pedro$

$I(P_1^1)\ : "x\ es\ un\ dragon"$

$I(P_2^1)\ : "x\ vive\ en\ un\ zoologico"$

$I(P_3^1)\ : "x\ es\ bueno"$

$I(P_4^1)\ : "x\ es\ un\ peluquero"$

- $P_1^1(c_1) \wedge P_2^1(c_1)$
- $P_3^1(c_2) \wedge \neg P_3^1(c_2)$
    - Como se trata de una contradicción, no será nunca verdadera en una interpretación.
- $P_4^1(c_3)$