Práctica 3

Ejercicio 1.

Dada la siguiente secuencia de fbfs de L

a. $((\neg p) \to (\neg(q \to r))) \to ((q \to r) \to p)$
b. $((\neg p) \to (\neg (q \to r)))$
c. $((q \to r) \to p)$

Analizar si se trata de una demostración en L de la forma $\Gamma \vdash_L A$ para algún conjunto Γ de fbfs y alguna fbf A. En ese caso:

i. Describir al conjunto Γ y a la fbf A y explicar cada paso de la secuencia (es decir, axiomas y reglas de inferencia).

$\Gamma = \{((\neg p) \to (\neg (q \to r)))\}$
$A = ((q \to r) \to p)$

1. $((\neg p) \to (\neg(q \to r))) \to ((q \to r) \to p)$ Instancia de L3.
2. $((\neg p) \to (\neg (q \to r)))$ Hipótesis.
3. $((q \to r) \to p)$ Aplicación MP entre a y b.

ii. Decir si A es un teorema de L

No es un teorema de L ya que no se parte de un Γ vacio.

iii. Decir si A es tautología

Como L es correcto y completo, si una fbf es un teorema entonces es una tautología y viceversa. Como A no es un teorema de L, entonces no es una tautología.

Ejercicio 2.

Sean A , B y C tres fórmulas bien formadas (fbfs) del sistema formal L . Dar una demostración sintáctica en L de los siguientes teoremas. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas. Intente resolverlos sin usar el metateorema de la deducción y luego usándolo.

i. $\vdash_L ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$

Demostracion sin el metateorema: *muy difícil por ahí en algún momento la haga por ahí no.*

Demostracion con el metateorema:

Ad (*b*):

(1)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})$	hipótesis
(2)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow(\sim\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\sim\mathscr{A}))$	$(L1)$
(3)	$(\sim\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\sim\mathscr{A})\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))$	$(L3)$
(4)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})))$	(2), (3) SH
(5)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})))\rightarrow((\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})))$	$(L2)$
(6)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))$	(4),(5)MP
(7)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))$	(1),(6)MP
(8)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}))\rightarrow((\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A})$	$(L3)$
(9)	$(\sim\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A}$	(7),(8)MP
(10)	$\mathscr{A}$	(1),(9)MP

Como se llegó a $(\neg A \rightarrow A) \vdash_L A$, por el metateorema de deducción $\vdash_L ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$

ii. $\vdash_L ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$

Demostración sin el metateorema: *muy difícil por ahí en algún momento la haga por ahí no.*

Demostración con el metateorema:

1) $(A \rightarrow B)$ Hipótesis.
2) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ Instanciación de L3.
3) $(\neg B \rightarrow \neg A)$ Aplicación MP entre 1 y 2.

Como se llegó a $(A \rightarrow B) \vdash_L (\neg B \rightarrow \neg A)$, por el metateorema de deducción $\vdash_L$

$((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$

Ejercicio 3.

Sean A , B y C tres fórmulas bien formadas (fbfs) del sistema formal L . Dar una demostración sintáctica en L de las siguientes deducciones. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

i. $\{ ((A \rightarrow B) \rightarrow C), B \} \vdash_L (A \rightarrow C)$

Demostración:

1.	$B \rightarrow (A \rightarrow B)$	Instanciación de L1
2.	B	Hipótesis
3.	$(A \rightarrow B)$	Aplicación MP entre 1 y 2.
4.	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$	Hipótesis.
5.	C	Aplicación MP entre 3 y 4.
6.	$C \rightarrow (A \rightarrow C)$	Instanciación de L1.
7.	$(A \rightarrow C)$	Aplicación MP entre 5 y 6.

A partir de $\{ (A \rightarrow B) \rightarrow C), B \}$ se derivó $(A \rightarrow C)$

Ejercicio 4.

Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que $\Gamma \vdash_L A$. ¿Es cierto que para todo Γi tal que $\Gamma i \subset \Gamma$, $\Gamma i \vdash_L A$?. Fundar.

No, no se puede.

Demostración con contraejemplo:

Sea:

- $\Gamma i = \emptyset$.
- $\Gamma = \{ p \}$.
- $A = p$.

- $\emptyset \subset \{ p \}$.

Es posible $\Gamma \vdash L$ A, es decir p $\vdash L$ p, y se puede realizar en un paso:

1. p Hipótesis.

Pero no es posible $\Gamma i \vdash L$ A, es decir $\emptyset \vdash L$ p, ya que $\emptyset$ y p no se puede derivar a partir del vacío, por lo que no se cumple $\Gamma i \vdash L$ A para todo Γi tal que $\Gamma i \subset \Gamma$.

Ejercicio 5.

Sean Γ y $\Gamma 0$ conjuntos de fbfs del C. de Enunciados. ¿Es cierto que para todo Γ existe algún $\Gamma 0 \subseteq \Gamma$ tal que si $\Gamma \vdash L$ A entonces $\Gamma 0 \vdash L$ A ?. Fundar.

Si, es cierto.

Demostración: Como $\Gamma 0 \subseteq \Gamma$ existe un $\Gamma 0 = \Gamma$ y por hipótesis si $\Gamma \vdash L$ A entonces también sucederá que $\Gamma 0 \vdash L$ A puesto que $\Gamma 0$ es igual a Γ.

Ejercicio 6.

Sean A , B y C fbfs del C. de Enunciados. Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que $\Gamma \cup \{ A , B \} \vdash L$ C y también se sabe que $\Gamma \vdash L$ A .

i. ¿Es cierto que $\Gamma \vdash L$ (C $\rightarrow$ B)?. Fundar.

   No es cierto.

   Contraejemplo:

   Sea:

   - $\Gamma = \{ p \}$
   - B = q.
   - A = p.
   - C = p.

Se cumple $\Gamma \cup \{ A , B \} \vdash_L C$ y también se cumple $\Gamma \vdash_L A$ pero no se cumple $\Gamma \vdash_L (C \rightarrow B)$

ii. ¿Es cierto que $\vdash_L (A)$?. Fundar.

No es cierto.

Contraejemplo:

Sea:

- $\Gamma = \{ p \}$
- $B = q$.
- $A = p$.
- $C = p$.

Se cumple $\Gamma \cup \{ A , B \} \vdash_L C$ y también se cumple $\Gamma \vdash_L A$, pero no se cumple $\vdash_L (A)$, debido a que p no es una tautología.