Lógica de Predicados de Primer Orden

Temas:

- Lógica de Predicados. Lenguajes de primer orden. Sintaxis: términos y formulas bien formadas. Predicados y cuantificadores. Representación del conocimiento

Bibliografía:

- Pons, Rosenfeld, Smith. Lógica para Informatica. Capítulo 2
- Hamilton. Lógica para Matemáticos. Capítulo 3

Trabajo práctico: TP 04

Profesora: Dra. Claudia Pons
Claudia.pons.33@gmail.com

Introducción

La lógica proposicional permite formalizar y teorizar sobre la validez de una gran cantidad de enunciados. Sin embargo existen enunciados intuitivamente válidos que no pueden ser probados por dicha lógica.
Por ejemplo, considérese el siguiente razonamiento:

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es un hombre.
Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Su formalización es la siguiente:

p
q
Por lo tanto, r

Esta es claramente una <u>forma de razonamiento inválido</u>, lo que contradice nuestra intuición.

Sucede que para estudiar la validez de este tipo de razonamientos necesitamos analizar :

- ✓ la naturaleza de la premisa «Todos los As son Bs»
- ✓ la estructura interna de cada enunciado

Dicha problemática la resuelve la <u>**lógica de predicados**</u>
Esto se corresponde a las ideas de:

- ✓ **Cuantificadores**
- ✓ **Sujetos y Predicados**

El ***Sujeto*** es la cosa acerca de la cual el enunciado está afirmando algo, ej. Sócrates.

El **Predicado** se refiere a una propiedad que posee el sujeto, ej «es mortal»

Predicados

Un *predicado* es "lo que se afirma de un sujeto en una proposición" (D.R.A.E.).
Los predicados pueden definir propiedades sobre uno, dos, o más individuos (u objetos), establecen **relaciones** entre ellos.

Así, hay predicados unarios (o monádicos), binarios, ternarios,…,n-arios.

Los predicados unarios definen relaciones de grado uno, es decir propiedades de un objeto, como por ejemplo:

"el 7 es un número primo" que lo simbolizamos P_1^1 (7)
«Socrates es mortal» que lo simbolizamos P_2^1 (socrates)
«Sócrates es un hombre» que lo simbolizamos P_3^1 (socrates)

Los predicado binarios definen una relación de grado dos, por ejemplo:

" 9 es múltiplo de 3" que lo simbolizamos P_1^2 (9,3)
"7 es menor que 9" que lo simbolizamos P_2^2 (7,9)

Nota: La lógica de predicados limitada a representar relaciones entre objetos se denomina ***de primer orden***, la que permite expresar relaciones entre relaciones se conoce como ***de segundo orden***, y así sucesivamente. En este capítulo nos centraremos en la lógica de predicados de primer orden.

Predicados

Ejemplos:

En cada uno de los siguientes enunciados, se ha subrayado el sujeto y el resto es el predicado:

a) Sócrates es un hombre.
b) Juan escribe libros.
c) El número cuya raiz es -1 no es real.
d) El aislamiento durará hasta el 25 de Diciembre.

Resulta conveniente representar a los predicados con letras mayúsculas y a los sujetos con minúsculas, con lo cual los enunciados de arriba se simbolizan del modo siguiente:

a) H(s) simboliza «Sócrates es un hombre» . También podemos representar que Napoleón es un hombre diciendo H(n), donde n simboliza a Napoleón.
b) E(j) simboliza « Juan escribe libros», donde j simboliza a Juan, mientras que E simboliza a la propiedad de «escribir libros». También podemos simbolizar que Sócrates escribe libros diciendo E(s).
c) (~ R(j)) donde j representa al número cuya raíz es -1 .
d) D(a), donde a simboliza al aislamiento y D al predicado «durará hasta el 25 de Dic»
e) D(a,f), donde a simboliza al aislamiento, f al 25 Dic y D al predicado «durará hasta»

También podemos ponerle nombres mas genéricos a los predicados, por ej:

a) P_1^1(x) simboliza «x es un hombre»
b) P_2^1(x) simboliza «x escribo libros»
c) P_3^1(x)) simboliza «x es real»
d) P_1^2(x,y), simboliza «x durará hasta y»

Ejercicio: Representación del conocimiento

PREMISAS.

a) **<u>El aislamiento </u>durará hasta el 25de Diciembre.**

b) **<u>El 25 de Diciembre </u>es Navidad**

CONCLUSION.

<u>El aislamiento </u>durará hasta Navidad.

PREMISAS

a) D(a), donde a simboliza al aislamiento
y D(x) al predicado «x durará hasta el 25 de Diciembre»

a) N(f), donde f simboliza al 25 Dic y N(x) al predicado «x es Navidad»

CONCLUSION.

P(a), donde P(x) es el predicado «x durará hasta Navidad.»

PREMISAS

a) D(a,f), donde a simboliza al aislamiento y f simboliza al 25 Dic
y D(x,y) al predicado «x durará hasta y»

a) N(f), donde N(x) al predicado «x es Navidad»

CONCLUSION.

(D(a,f) $\wedge$ N(f))

Cuantificadores

⊳¿Qué ocurre ahora con enunciados tales como «todos los hombres son mortales»? Necesitamos algo más que un análisis de sujeto y predicado, ya que el significado del enunciado depende de la fuerza de la palabra «todos». Consideremos otro ejemplo:

Todo entero tiene un factor primo.

En el simbolismo matemático ordinario, escribiríamos esto así:

Para todo x, si x es un entero entonces x tiene un factor primo.

Usando el lenguaje simbólico que acabamos de introducir, podemos escribir:

Para todo x, E(x) $\rightarrow$P(x)

Donde E(x) simboliza «x es un entero» y P(x) simboliza «x tiene un factor primo».

Introduciendo un símbolo para el cuantificador :

$(\forall x)\ (\ E(x) \rightarrow P(x)\ )$

Cuantificadores

Hay otro cuantificador que parece necesario para simbolizar frases corrientes.

Consideremos la frase:

«Algunos mamíferos tienen alas»

También lo podemos reformular como:

«Existe al menos un mamífero que tiene alas»

O en lenguaje más artificial podemos decir:

Existe al menos un objeto x, tal que x es mamífero y x tiene alas.

La frase **«Existe al menos un objeto x, tal que»** se simboliza **$(\exists x)$** y se denomina **Cuantificador Existencial**

Utilizando el cuantificador pdemos escribir la frase como:

$(\exists x)\ (\ M(x) \wedge A(x)\ )$

Donde M(x) significa «x es un mamífero»

A(x) significa «x tiene alas»

Relación entre $\forall$ $\exists$

Veamos estos ejemplos:

«No todas las aves vuelan» $\sim(\forall x)\ (\ A(x) \rightarrow V(x)\ )$

«Algunas aves no vuelan» $(\exists x)\ (\ A(x) \wedge \sim V(x)\ )$

Estos ejemplos ilustran un esquema común (pero que puede no cumplirse):

- **El cuantificador universal** va seguido de una **implicación**, debido a que los enunciados universales suelen ser de la forma,
  «dado un x cualquiera, si tiene la propiedad A entonces tiene también la propiedad B»

- **El cuantificador existencial** va seguido de una **conjunción**, debido a que los enunciados existenciales suelen ser de la forma,
  «existe al menos un x, que tiene la propiedad A y tiene también la propiedad B»

Relación entre ∀ ∃

(i) $\sim(\forall x)(A(x) \rightarrow V(x))$,
(ii) $(\exists x)(A(x) \wedge \sim V(x))$.

Para comparar más de cerca, transformemos el primero en

$$\sim(\forall x)(\sim A(x) \vee V(x))$$

según las reglas del Capítulo 1, y luego en

$$\sim(\forall x)\sim(A(x) \wedge \sim V(x)).$$

La forma de este enunciado es ahora similar a la de (ii), pero con $\sim(\forall x)\sim$ en lugar de $(\exists x)$.

La consideración de ejemplos como éste nos permite comprender intuitivamente que las dos frases:

(i) No es el caso que todos los x no tengan la propiedad P,
(ii) Existe algún x que tiene la propiedad P,

tienen el mismo significado, cualquiera que sea la propiedad P.

Sintaxis: el lenguaje simbólico de la lógica

Para estudiar los principios del razonamiento, la lógica necesita en primer término capturar y formalizar las estructuras del lenguaje natural en un lenguaje simbólico, para luego formalizar los mecanismos de razonamiento que se aplican sobre dichas estructuras lingüísticas.

El lenguaje simbólico consta de :

- **El alfabeto o vocabulario**
  Es el conjunto de **símbolos primitivos** que pertenecen al lenguaje.

- **La gramática**
  Consiste en un conjunto de reglas que definen recursivamente las cadenas de símbolos que pertenecen al lenguaje.

Sintaxis: el lenguaje simbólico de la lógica

- **Alfabeto**

El alfabeto del lenguaje está formado por:

- ✓ Un conjunto de símbolos de constantes C = {c_1, c_2, …}.
- ✓ Un conjunto de símbolos de variables X = {x_1, x_2, …}.
- ✓ Un conjunto de símbolos de funciones F = {f_1^1, f_2^1,…, f_1^2, f_2^2,…}.
- ✓ Un conjunto de símbolos de predicados P = {P_1^1, P_2^1,…, P_1^2, P_2^2,…}.
- ✓ Símbolos de conectivas (los mismos de la lógica proposicional): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- ✓ Paréntesis de apertura y cierre.
- ✓ El cuantificador universal $\forall$ (“para todo”) y el cuantificador existencial $\exists$ (“existe”).

- **Gramática**

La gramática del lenguaje define dos clases de elementos, por un lado los ***términos***, que son las expresiones que denotan los objetos del dominio, y por el otro las ***fórmulas bien formadas (fbf)***, con las que se expresan las relaciones entre los objetos.

Los términos se definen inductivamente de la siguiente manera:

- ✓ Los símbolos de constantes y de variables son términos.
- ✓ Si t_1, …, t_n son términos y f_i^n es un símbolo de función, entonces f_i^n(t_1, …, t_n) es un término.
- ✓ Sólo las expresiones que pueden ser generadas mediante las cláusulas i y ii en un número finito de pasos son términos.

Por su parte, las fórmulas bien formadas se definen así:

- ✓ Si t_1, …, t_n son términos y P_i^n es un símbolo de predicado, entonces P_i^n(t_1, …, t_n) es una formula bien formada. En este caso se denomina *fórmula atómica* o directamente *átomo*.
- ✓ Si A y B son fórmulas bien formadas, entonces ($\neg$ A), (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B), (A $\rightarrow$ B) y (A $\leftrightarrow$ B) también lo son.
- ✓ Si A es una fórmula bien formada y x es un símbolo de variable, entonces ($\forall$x) A y ($\exists$x) A son fórmulas bien formadas.
- ✓ Sólo las expresiones que pueden ser generadas mediante las cláusulas i a iii en un número finito de pasos son fórmulas bien formadas.

Sintaxis: por ejemplo, hablemos de números

Los Símbolos del alfabeto del lenguaje de los números:

$\mathbf{c_1}$ será el símbolo de constante para representar el cero.

x será un símbolo de variable.

f_1^1 será el símbolo de función para representar el sucesor.

f_1^2 será el símbolo de función para representar la suma.

P_1^1 será el símbolo de predicado para representar la propiedad de ser par.
P_1^2 será el símbolo de predicado para representar la relación de igualdad.
P_2^2 será el símbolo de predicado para representar la relación $<$.

Ejemplos de Términos:

- ✓ **Los símbolos de constantes y de variables son términos.**
  - ➢ Entonces $\mathbf{c_1}$ y **x** son términos.
- ✓ **Si t_1, …, t_n son términos y f_i^n es un símbolo de función, entonces $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.**
  - ➢ Como $\mathbf{c_1}$ es un término, y f_1^1 es un símbolo de función unario, entonces $f_1^1\ (\mathbf{c_1})$ es un término.

    Que podría interpretarse como la función sucesor aplicada al cero, suc(0).
  - ➢ Como $\mathbf{c_1}$ y **x** son términos, y f_1^2 es un símbolo de función binario, entonces $f_1^2\ (\mathbf{c_1}, \mathbf{x})$ es un término

    Que podría interpretarse como la función suma, +(0,x).
    Notar: notación prefija +(0,x) vs. notación infija (0+x).

Sintaxis: por ejemplo, hablemos de números

Los Símbolos del alfabeto del lenguaje de los números:

c_1 será el símbolo de constante para representar el cero.

x será un símbolo de variable.

f_1^1 será el símbolo de función para representar el sucesor.

f_1^2 será el símbolo de función para representar la suma.

P_1^1 será el símbolo de predicado para representar la propiedad de ser par.
P_1^2 será el símbolo de predicado para representar la relación de igualdad.
P_2^2 será el símbolo de predicado para representar la relación >

Ejemplos de fórmulas bien formadas (fbf) :

- **Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y P_i^n es un símbolo de predicado, entonces $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ es una fbf (en este caso es *atómica*).**
  - Como c_1 es un término y P_1^1 es un símbolo de predicado, entonces $P_1^1(c_1)$ es una fbf.
    Que podría interpretarse como la afirmación «el número cero es par».
  - Como c_1 y **x** son términos y P_1^2 es un símbolo de predicado, entonces $P_1^2(x, c_1)$ es una fbf.
    Que podría interpretarse como la afirmación «x es igual a 0».
  - Como c_1 y $f_1^2(c_1, x)$ son términos y P_1^2 es un símbolo de predicado, entonces $P_1^2(f_1^2(c_1, x), x)$ es una fbf.
    Que podría interpretarse como la afirmación «0+x es igual a x».
  - Como c_1 y $f_1^1(c_1)$ son términos, entonces $P_1^2(f_1^1(c_1), c_1)$ es una fbf.
    Que podría interpretarse como «El sucesor del cero es igual a cero».

Sintaxis: por ejemplo, hablemos de números

Los Símbolos del alfabeto del lenguaje de los números:

$\mathbf{c_1}$ será el símbolo de constante para representar el cero.

x será un símbolo de variable.

$\boldsymbol{f_1^1}$ será el símbolo de función para representar el sucesor.

$\boldsymbol{f_1^2}$ será el símbolo de función para representar la suma.

$\boldsymbol{P_1^1}$ será el símbolo de predicado para representar la propiedad de ser par.
$\boldsymbol{P_1^2}$ será el símbolo de predicado para representar la relación de igualdad.
$\boldsymbol{P_2^2}$ será el símbolo de predicado para representar la relación >

Ejemplos de fórmulas bien formadas (fbf) :

- ✓ **Si A y B son fórmulas bien formadas, entonces (¬ A), (A ∧ B), (A ∨ B), (A → B) y (A ↔ B) también lo son.**
  - ➢ $\neg P_1^2(f_1^1(c_1), c_1)$ es una fbf.
    Que podría interpretarse como «El sucesor del cero no es igual a cero».

- ✓ **Si A es una fórmula bien formada y x es un símbolo de variable, entonces (∀x) A y (∃x) A son fórmulas bien formadas.**
  - ➢ $(\forall x)\ P_1^2(f_1^2(x, c_1), x)$ es una fbf.
    Que podría interpretarse como «el cero es el neutro de la suma».
  - ➢ $(\forall x)\ P_2^2(f_1^1(x), x)$ es una fbf.
    Que podría interpretarse como «suc(x)>x».

Sintaxis: scope, ligadura, variable libre

Los cuantificadores tienen un ***alcance* o scoupe, o *radio de acción*** determinado.
Por ejemplo, en la fórmula bien formada:

$$(\forall x)\ (P_1^1(x) \rightarrow P_2^1(x))$$

las dos ocurrencias del símbolo de variable x suceden dentro del alcance del cuantificador ∀
Mientras que en la fórmula bien formada:

$$(\forall x)\ P_1^1(x) \rightarrow P_2^1(x)$$

el ∀ alcanza sólo a la primera ocurrencia de x. Diremos en el primer caso que **x está *ligada***, y en el segundo que la primera x está *ligada* y la otra **está *libre*** (por lo que podría sustituirse por cualquier otro símbolo de variable).

Una fbf es ***abierta*** si contiene algún símbolo de variable libre, y ***cerrada*** si todos los símbolos de variables están ligados.