Práctica 2

Ejercicio 1.

Retome el Ejercicio 1 de la Práctica 1:

a) Seleccione un par de enunciados que sean lógicamente equivalentes (que tenga el mismo significado). Demuéstrelo mediante tablas de verdad.

<u>Enunciado 1</u>

Si Juan contrata un informático entonces el proyecto tendrá éxito.

p: Juan contrata un informático.

q: El proyecto tiene éxito.

A1: $p \rightarrow q$

<u>Enunciado 2</u>

Si el proyecto no tiene éxito entonces Juan no ha contratado un informático.

p: Juan contrata un informático.

q: El proyecto tiene éxito.

A1: $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$

q	p	$(\neg q)$	$(\neg p)$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$	$p \rightarrow q$	$((\neg q)\rightarrow(\neg p))\leftrightarrow(p\rightarrow q)$
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V

b) Para cada ítem construya un enunciado que sea lógicamente equivalente.

A_1: $p \vee q$

Eq_1: $(\neg((\neg p) \wedge (\neg q)))$

A_2: $q \rightarrow p$

Eq_2: $(\neg q) \vee p$

A_3: $(\neg p) \rightarrow q$

Eq_3: $p \vee q$

A_4: $p \rightarrow q$

Eq_4: $(\neg p) \vee q$

A_5: $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$

Eq_5: $q \vee (\neg p)$

A_6: $q \leftrightarrow p$

Eq_6: $(\neg q) \leftrightarrow (\neg p)$

A_7: $((p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge s)) \rightarrow t$

Eq_7: $(\neg ((\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg s))) \rightarrow t$

A_8: $p \vee q$

Eq_8: $(\neg((\neg p) \wedge (\neg q)))$

A_9: $(p \wedge q) \rightarrow r$

Eq_9: $(\neg (p \wedge q)) \vee r$

A_{10}: $p \leftrightarrow (q \vee r)$

Eq_{10}: $(\neg p) \leftrightarrow (\neg(q \vee r))$

Ejercicio 2.

Sean A , B fbfs que cumplen que $(\neg A \vee B)$ es tautología. Sea C una fbf cualquiera. Determinar, si es posible, cuáles de las siguientes fbfs son tautologías y cuáles contradicciones. Justificar las respuestas.

a) $((\neg(A \rightarrow B)) \rightarrow C)$

Se sabe que $(\neg A) \vee B$ es una tautología por enunciado. Además por tabla de verdad se conoce que $A \rightarrow B$ es lógicamente equivalente a la anterior fbf. Dado esto la negación de $A \rightarrow B$ siempre dará falso (es una contradicción). Como el antecedente siempre será falso, no importará el valor de verdad del consecuente ya que la formula siempre dará verdadero, y por lo tanto es una tautología.

b) $(C \rightarrow ((\neg A) \vee B))$

Como se sabe que por enunciado $(\neg A) \vee B$ es una tautología, el consecuente siempre será verdadero, por lo tanto, no importa el valor de verdad del antecedente ya que la implicación siempre dará verdadero, haciendo que sea una tautología.

c) $((\neg A) \rightarrow B)$

Como $(\neg A \vee B)$ es una tautología, no existe un caso en el que A sea verdadero y B sea falso. Teniendo eso en cuenta:

A	B	¬A	$((\neg A) \rightarrow B)$
F	F	V	F
F	V	V	V
V	V	F	V

Como se puede observar en la línea 1, $((\neg A) \rightarrow B)$ no puede ser una tautología, ya que si A es falso y B es falso, la implicación se vuelve falsa.

Ejercicio 3.

¿Es cierto que dadas A y B fbfs cualesquiera, siempre ocurre que si A y $A \rightarrow B$ son tautologías entonces B también lo es? Fundamentar. Ejemplificar con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural

Se va a demostrar por el absurdo:

Hipotesis: A es tautología (i)

$(A \rightarrow B)$ es tautología (ii)

Conclusión falsa: B no es tautología (iii)

Demostración: (iv) Por (iii), existe una valuación v tal que v(B)=F

(v) Por (i), v(A)=V

(vi) Por (ii), $v((A \rightarrow B))$=V

(vii) Por definición de valoración y por (v) y (vi), v(B)=V ($v(A \rightarrow B)$ si y sólo si no es el caso que $\models_v A$ y no $\models_v B$).

Se puede observar cómo hay una contradicción entre los inciso (iv) y (vii), por lo tanto B es una tautología.

<u>Ejemplos:</u>

- Haya sol o no, entonces hoy voy a la plaza o no voy.
- Si sale el sol y es martes, entonces sale el sol.

Ejercicio 4.

Sea A una fbf donde aparecen sólo los conectivos ^, v, ¬ . Sea A' la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada ^ por v y cada v por ^. ¿Si A es una tautologías, A' también lo es? Justificar. Ejemplificar con algunos ejemplos escritos en lenguaje natural.

No vale, se puede demostrar por contraejemplo:

$A = (p \vee (\neg p))$

$A' = (p \wedge (\neg p))$

A es tautología, pero A' no lo es.

<u>Ejemplos:</u>

A_1. $(p \vee (\neg p))$: Leona hace una kill o Leona no hace una kill

A_2. $(p \wedge (\neg p))$: Leona hace una kill y Leona no hace una kill.

B_1. $(p \vee (\neg p))$: Mi gata Leona es negra o no es negra.

B_2: $(p \wedge (\neg p))$: Mi gata Leona es negra y no es negra.

Ejercicio 5.

Demostrar que cualquier tautologías proposicional que esté escrita usando los conectivos ¬, v, ^,→ contiene alguna ocurrencia ya sea del símbolo "¬" o del símbolo "→". Idea: Demostrar que cualquier fórmula que contenga sólo la conjunción y disyunción puede tomar el valor F.

<u>Se demostrará por inducción</u>

Siendo N la cantidad de conectivos.

<u>CASO BASE:</u> N=0 no hay conectivos, entonces A es atómica. Es decir A=p v(p)=F, por lo tanto v(A)=F.

<u>CASO N. HIPOTESIS INDUCTIVA:</u> se asume que para toda fbf A que contiene sólo conjunción y disyunción, con N o menos conectivos v(A)=F

<u>CASO N+1:</u> A puede tener 2 formatos

- Caso 1: A es (B v C)
- Caso 2: A es (B ^ C)

Tanto B como C tienen N o menos conectivos, por lo tanto vale la hipótesis inductiva para ambas, es decir v(B)=F y v(C)=F . Entonces, por la definición de la semántica del v y del ^, tanto en el caso 1 como en el caso 2, v(A)=F.

Con esto se demuestra que v(A)=F, para cualquier fbf (que contenga sólo v y ^). Por lo tanto queda demostrado que los conectivos "v" y "^" no alcanzan para escribir tautologías, haciendo que sea necesario el uso de ya sea "→" o de "¬".

Ejercicio 6.

¿Es cierto que en el Cálculo de Enunciados pueden escribirse dos fbfs que tengan diferentes letras de proposición y aun así ambas fbfs sean lógicamente equivalentes?. Fundar.

Si, es cierto, por ejemplo p v p es lógicamente equivalente a q v q.

p	q	p v p	q v q	(p v p)↔(q v q)
F	F	F	F	V
F	V	V	V	V
V	F	V	V	V
V	V	V	V	V

Como se cumple que (p v p)↔(q v q) es una tautología entonces p v p es lógicamente equivalente a q v q

Ejercicio 7.

Para las tablas dadas a continuación, encontrar al menos dos fbf del Cálculo de Enunciados que las tenga por tablas de verdad.

Ayuda: alcanza con usar p, q, ¬, ^, v.

p	q	f?
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

p	q	f?
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

p	q	f?
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Tabla 1:

- (p v (¬p)) v q
- (q v (¬q)) v (p ^ q)

Tabla 2:

- q ^ (p v (¬p))
- ¬((¬q) ^ (¬ (p v (¬p))))

Tabla 3:

- p ^ (q v (¬q))
- ¬((¬p) ^ (¬ (q v (¬q))))

Ejercicio 8.

Determinar cuáles de las siguientes fbfs son lógicamente implicadas por la fbf (A ^ B). Fundamentar. Def. de implicación lógica, ver def. 1.7 del Hamilton.

a) A

A	B	A ^ B	(A ^ B) → A
F	F	F	V

F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	V

Como (A ^ B) → A es una tautología, A es lógicamente implicada por (A ^ B).

b) B

A	B	A ^ B	(A ^ B) → B
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	V

Como (A ^ B) → B es una tautología, B es lógicamente implicada por (A ^ B).

c) A v B

A	B	A ^ B	A v B	(A ^ B) → (A v B)
F	F	F	F	V
F	V	F	V	V
V	F	F	V	V
V	V	V	V	V

Como (A ^ B) → (A v B) es una tautología, (A v B) es lógicamente implicada por (A ^ B).

d) ¬A v B

A	B	A ^ B	(¬A)	(¬A) v B	(A ^ B) → ((¬A) v B)
F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
V	V	V	F	V	V

Como (A ^ B) → ((¬A) v B) es una tautología, ((¬A) v B) es lógicamente implicada por (A ^ B).

e) ¬B → A

A	B	A ^ B	(¬B)	(¬B) → A	(A ^ B) → ((¬B) → A)
F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V
V	V	V	F	V	V

Como (A ^ B) → ((¬B) → A) es una tautología, ((¬B) → A) es lógicamente implicada por (A ^ B).

f) A ↔ B

A	B	A ^ B	A ↔ B	(A ^ B) → (A ↔ B)
F	F	F	V	V
F	V	F	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Como (A ^ B) → (A ↔ B) es una tautología, A ↔ B es lógicamente implicada por (A ^ B).

g) A → B

A	B	A ^ B	A → B	(A ^ B) → (A → B)
F	F	F	V	V
F	V	F	V	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Como (A ^ B) → (A → B) es una tautología, A → B es lógicamente implicada por (A ^ B).

h) ¬B → ¬A

A	B	A ^ B	(¬A)	(¬B)	(¬B) → (¬A)	(A ^ B) → ((¬B) → (¬A))
F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
V	V	V	F	F	V	V

Como (A ^ B) → ((¬B) → (¬A)) es una tautología, (¬B) → (¬A) es lógicamente implicada por (A ^ B).

i) B → ¬A

A	B	A ^ B	(¬A)	B → (¬A)	(A ^ B) → (B → (¬A))
F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V
V	V	V	F	F	F

Como (A ^ B) → (B → (¬A)) no es una tautología, B → (¬A) no es lógicamente implicada por (A ^ B).

Ejercicio 9.

Sea la relación ≤ tal que dadas fbfs A , B se cumple que A ≤ B sii A → B es una tautología. Dadas las fbfs: p, p → q, ¬p, p ^ ¬p, r v ¬r, organizarlas bajo la relación ≤. Representar gráficamente

- Se sabe p ^ (¬p) es una contradicción, por lo tanto puede implicar a todos.
- Se sabe que r v (¬r) es una tautológica, por lo tanto puede ser implicada por todos.
- Ninguna de las fbfs implica a p, excepto por p ^ (¬p). p solamente implica a r v (¬r).
    - Como p solamente implica a r v (¬r) pero no es implicado por p → q no puede ser incluido entre ambos.
    - Como p es implicado por p ^ (¬p) pero no implica a (¬p) no puede ser incluido entre ambos.
- Ninguna de las fbfs implica a ¬p, excepto por p ^ (¬p).
- (¬p) → (p → q).
- (¬p) → (r v (¬r)).

Por lo tanto queda: p ^ (¬p) ≤ ¬p ≤ p → q ≤ r v (¬r) (p queda excluido de la relación).

Ejercicio 10.

Sea A una fbf donde aparecen sólo los conectivos ^, ¬. Sea A' la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada ^ por v y cada letra de preposición por su negación (o sea, cada p por ¬p, cada q por ¬q, etc.). ¿Es cierto que A’ es lógicamente equivalente a ¬A? Fundamentar. Ejemplificar con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural.

Si lo es, por la proposición 1.15 del Hamilton donde se encuentra demostrado.

Ejemplo:

- A=p
- B=q
- p: Leona se hace una pentakill.
- q: Diana intea.

- (¬ (p v q)): No es cierto que Leona se haga una pentakill o que Diana intee.
- (¬ p) ^ (¬ q): Leona no se hace una pentakill y Diana no intea.

Ejercicio 11.

Sea # el operador binario definido como p#q =def (p ^ ¬q) v (¬p ^ q). Def. de implicación lógica, ver def. 1.7 del Hamilton.

a) Probar que # es asociativo, es decir, x#(y#z) es lógicamente equivalente a (x#y)#z.

(x ^ ¬((y ^ ¬z) v (¬y ^ z))) v (¬x ^ ((y ^ ¬z) v (¬y ^ z)))

x	y	z	~z	y∧(~z)	~y	(~y)∧z	(y∧(~z))∨((~y)∧z)	~((y∧(~z))∨((~y)∧z))	x∧(~((y∧(~z))∨((~y)∧z)))	~x	(~x)∧((y∧(~z))∨((~y)∧z))	(x∧(~((y∧(~z))∨((~y)∧z))))∨((~x)∧((y∧(~z))∨((~y)∧z)))
F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	V	V	F	F	V	F	F	F	F	F
V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	V

(((x ^ ¬y) v (¬x ^ y)) ^ ¬z) v (¬((x ^ ¬y) v (¬x ^ y)) ^ z)

x	y	z	~y	x∧(~y)	~x	(~x)∧y	(x∧(~y))∨((~x)∧y)	~z	((x∧(~y))∨((~x)∧y))∧(~z)	~((x∧(~y))∨((~x)∧y))	(~((x∧(~y))∨((~x)∧y)))∧z	(((x∧(~y))∨((~x)∧y))∧(~z))∨((~((x∧(~y))∨((~x)∧y)))∧z)
F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	F	F	V	F	V	F	F
V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V

((x ^ ¬((y ^ ¬z) v (¬y ^ z))) v (¬x ^ ((y ^ ¬z) v (¬y ^ z)))) ↔ ((((x ^ ¬y) v (¬x ^ y)) ^ ¬z) v (¬((x ^ ¬y) v (¬x ^ y)) ^ z))

((x∧(~((y∧(~z))v((~y)∧z))))v((~x)∧((y∧(~z))v((~y)∧z))))↔((((x∧(~y))v((~x)∧y))∧(~z))v((~((x∧(~y))v((~x)∧y)))∧z))
V
V
V
V
V
V
V
V

b) Probar que # es conmutativo, es decir, y#z es lógicamente equivalente a z#y.

((y ^ ¬z) v (¬y ^ z)) ↔ ((z ^ ¬y) v (¬z ^ y))

y	z	~z	y∧(~z)	~y	(~y)∧z	(y∧(~z))v((~y)∧z)	z∧(~y)	(~z)∧y	(z∧(~y))v((~z)∧y)	((y∧(~z))v((~y)∧z))↔((z∧(~y))v((~z)∧y))
F	F	V	F	V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V

Ejercicio 12.

Demostrar que las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes.

a) (p → q) es lógicamente equivalente a (¬p v q)

p	q	(¬p)	(p → q)	((¬p) v q)	(p → q) ↔ ((¬p) v q)
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Como (p → q) ↔ ((¬p) v q) es una tautología, (p → q) es lógicamente equivalente a ((¬p) v q).

b) (p ↔ q) es lógicamente equivalente a ((p → q) ^ (q → p))

p	q	(p ↔ q)	(p → q)	(q → p)	((p → q) ^ (q → p))	(p ↔ q) ↔ ((p → q) ^ (q → p))
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V

V	F	F	F	V	F	V
V	V	V	V	V	V	V

Como (p ↔ q) ↔ ((p → q) ^ (q → p)) es una tautología, (p ↔ q) es lógicamente equivalente a ((p → q) ^ (q → p)).

c) (¬ (p ^ q)) es lógicamente equivalente a (¬p v ¬q)

p	q	(p ^ q)	(¬ (p ^ q))	(¬p)	(¬q)	((¬p) v (¬q))	(¬ (p ^ q)) ↔ ((¬p) v (¬q))
F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	V

Como (¬ (p ^ q)) ↔ ((¬p) v (¬q)) es una tautología, (¬ (p ^ q)) es lógicamente equivalente a ((¬p) v (¬q)).

d) (¬ (p v q)) es lógicamente equivalente a (¬p ^ ¬q)

p	q	(p v q)	(¬ (p v q))	(¬p)	(¬q)	((¬p) ^ (¬q))	(¬ (p v q)) ↔ ((¬p) ^ (¬q))
F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
V	V	V	F	F	F	F	V

Como (¬ (p v q)) ↔ ((¬p) ^ (¬q))es una tautología, (¬ (p v q)) es lógicamente equivalente a ((¬p) v (¬q)).