TP1 - Cálculo en dos o más variables

Agustina Sol Rojas y Antonio Felix Glorioso Ceretti

Ejercicio 1.

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

$x^2 + y^2 = 0$

$(x, y) = (0, 0)$

$D = \{(x,y): (x,y) \in R^2 - (0,0)\}$

b. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - z^2$

$D = \{(x,y,z): x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R\}$

c. $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2-9}$

$x^2 + y^2 - 9 = 0$

$x^2 + y^2 = 9$ Circunferencia de radio 3 centrada en (0,0).

$D = \{(x,y): x \in R \wedge y \in R \wedge x^2 + y^2 \neq 9\}$

d. $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+1}$

Nunca puede ser 0 porque a algo positivo se le suma algo positivo

$D = \{(x,y): x \in R \wedge y \in R\}$

e. $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2-z^2}$

$y^2 - z^2 = 0$

$y^2 = z^2$

$\sqrt{y^2} = \sqrt{z^2}$

$|y| = |z|$

$D = \{(x,y,z): x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R \wedge y \neq z \wedge y \neq -z\}$

f. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$9 - x^2 - y^2 < 0$

$-x^2 - y^2 < -9$

$x^2 + y^2 > 9$

$D = \{(x,y): x \in R \hat{} y \in R \hat{} x^2 + y^2 \leq 9\}$

g. $f(x,y) = e^{-x^2+y^2}$

$D = \{(x,y): x \in R \hat{} y \in R\}$

h. $f(x,y) = \log(16 - x^2 - 16y^2)$

$16 - x^2 - 16y^2 \leq 0$

$1 - \frac{x^2}{16} - y^2 \leq 0$

$-\frac{x^2}{16} - y^2 \leq -1$

$\frac{x^2}{16} + y^2 \geq 1$

$D = \{(x,y): x \in R \hat{} y \in R \hat{} \frac{x^2}{16} + y^2 < 1\}$

Ejercicio 2.

Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

a. $f(x,y) = \log(9 - x^2 - 9y^2)$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)

$f(1,0) = \log(9 - 1^2 - 9 * 0^2) =$

$= \log(9 - 1 - 0) =$

$= \log(8) \approx 0{,}90309$

$f(1,1) = \log(9 - 1^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 1 - 9) =$

$= \log(-1) = Indefinido$

$(1,1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(0,1) = \log(9 - 0^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 0 - 9) =$

$= \log(0) = Indefinido$

$(0,1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(-1,1) = \log(9 - (-1)^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 1 - 9) =$

$= \log(-1) = Indefinido$

(-1,1) $\notin \mathrm{Dom}(f)$

b. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1); (2,2)

$f(1,0) = \sqrt{4 - 1^2 - 4 * 0^2} =$

$= \sqrt{4 - 1 - 0} =$

$= \sqrt{3} = 1{,}732$

$f(1,1) = \sqrt{4 - 1^2 - 4 * 1^2} =$

$= \sqrt{4 - 1 - 4} =$

$= \sqrt{-1} = Indefinido$

$(1,1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(0,1) = \sqrt{4 - 0^2 - 4 * 1^2} =$

$= \sqrt{4 - 0 - 4} =$

$= \sqrt{0} = 0$

$f(-1,1) = \sqrt{4 - (-1)^2 - 4 * 1^2} =$

$= \sqrt{4 - 1 - 4} =$

$= \sqrt{-1} = Indefinido$

(-1,1) $\notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(2,2) = \sqrt{4 - 2^2 - 4 * 2^2} =$

$= \sqrt{4 - 4 - 16} =$

$= \sqrt{-16} = Indefinido$

$(2,2) \notin \mathrm{Dom}(f)$

c. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)

$f(1,0) = e^{1^2+0^2} =$
$= e^{1+0} =$
$= e^1 = e$

$f(1,1) = e^{1^2+1^2} =$
$= e^{1+1} =$
$= e^2 \approx 7{,}38096$

$f(0,1) = e^{0^2+1^2} =$
$= e^{0+1} =$
$= e^1 = e$

$f(-1,1) = e^{(-1)^2+1^2} =$
$= e^{1+1} =$
$= e^2 \approx 7{,}38096$

Ejercicio 3

Calcular los siguientes límites, o demostrar que no existe

a. $\underset{(x,y)\to(3,1)}{lim} 5x - x^2 + 3y^2 =$
$= 5 * 3 - 3^2 + 3 * 1^2 =$
$= 15 - 9 + 3 = 9$
El límite existe y es 9.

b. $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} (\frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) =$
$=(\frac{7*0^2-2*0^2}{0+0^2} + 1) = Indeterminado$

Iterados:

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\left(\frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2}+1\right)\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{7x^2 - 2 * 0^2}{x^2 + 0^2} + 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{7x^2}{x^2} + 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{7\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + 1 \right) = 8$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \left(\frac{7x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} + 1 \right) \right) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{7 * 0^2 - 2y^2}{0^2 + y^2} + 1 \right) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{-2\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} + 1 \right) = -1$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe.

c. $\lim_{(x,y,z) \to (1,1,0)} e^{x+y^2-z} =$

$= \; e^{1+1^2-0} = \; e^2 \approx 7{,}38906$

El límite existe y es aproximadamente 7,38906.

d. $\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \sin(x + y + z) =$

$= \sin(0 + 0 + 0) = 0$

e. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4} =$

$$= \frac{0^4}{0^4 + 0^4} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{x^4}{x^4 + y^4} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^4}{x^4 + 0^4} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^4}{x^4} \right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+y^4}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0^4}{0^4+y^4}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^4}\right)=0$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe.

f. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=$

$$=\frac{(0*0)}{\sqrt{0^2+0^2}}=$$

$$=\frac{0}{0}=Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x*0}{\sqrt{x^2+0^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{\cancel{\sqrt{x^2}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x}\right)=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0*y}{\sqrt{0^2+y^2}}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\cancel{\sqrt{y^2}}}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y}\right)=0$$

Recta y = mx:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x*(mx)}{\sqrt{x^2+(mx)^2}}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m * x^2}{\sqrt{x^2 + m^2 * x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m * x^2}{\sqrt{x^2(1 + m^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m * x^2}{|x| * \sqrt{(1 + m^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} \frac{m}{\sqrt{(1 + m^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left|\frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}}\right| \frac{m}{\sqrt{(1 + m^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} |x| \frac{m}{\sqrt{(1 + m^2)}} =$$

$$= 0 * \frac{m}{\sqrt{(1 + m^2)}} = 0$$

Curva y = x²:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x * x^2}{\sqrt{x^2 + (x^2)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2(1 + x^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{|x|\sqrt{(1 + x^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} * \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left|\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}}\right| * \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x * \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{(1 + x^2)}} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} |r| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} |r| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} |r| * \cos(\theta) * \sin(\theta) =$$

$$= 0 * \cos(\theta) * \sin(\theta) = 0$$

Por lo tanto el límite siempre existe y es 0 independientemente del valor de θ.

g. $\lim_{(x,y) \to (2,2)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} =$

$$= \lim_{(x,y) \to (2,2)} \frac{\cancel{(x-y)^2}}{\cancel{x-y}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (2,2)} x - y = 0$$

El límite existe y es 0.

Ejercicio 4

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida en todo R^2 , redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

a. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 1 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)\;\; y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))^3}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * r * \cos^3(\theta) =$$

*r no puede ser negativo al tratarse del radio de una circunferencia por lo que se puede sacar el módulo |r| y dejar solo r.

$$= \lim_{r\to 0} r^2 * \cos^3(\theta) =$$

$$= 0^2 * \cos^3(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0{,}0) = 1$ por lo tanto no se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0{,}0)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R². La función puede ser redefinida para extender su continuidad de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si(x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$$

De este modo se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,09} f(x,y) = f(0{,}0)$ y por lo tanto la función es continua en todo R².

b. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+0^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\cancel{\sqrt{x^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to0}\left(\frac{0}{\sqrt{0^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to0}\left(\frac{0}{\cancel{\sqrt{y^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to0}\left(\frac{0}{y}\right) = 0$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe, por lo tanto no se cumple $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R^2. Como el límite no existe se trata de una discontinuidad inevitable por lo que no se puede redefinir la función.

c. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))^2}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \cos^2(\theta) =$$

*r no puede ser negativo al tratarse del radio de una circunferencia por lo que se puede sacar el módulo |r| y dejar solo r.

$$= \lim_{r\to 0} r * \cos^2(\theta) =$$

$$= 0 * \cos^2(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0,0) = 0$ por lo tanto se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ haciendo que la continuidad este definida en todo R^2.

d. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Como el $Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$ se evaluará la continuidad en el punto (0,0) (el punto que genera problemas).

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\cancel{r^2}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos(\theta) * \sin(\theta) = \cos(\theta) * \sin(\theta)$$

Como el valor del límite depende de θ , el mismo no existe, por lo tanto no se cumple $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R^2.

Como el límite no existe se trata de una discontinuidad inevitable por lo que no se puede redefinir la función.

Además $f(0,0) = \frac{0*0}{0^2+0^2} = \frac{0}{0}$ por lo tanto $\nexists f(0,0)$.

e. $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Como el $Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$ se evaluará la continuidad en el punto (0,0) (el punto que genera problemas).

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * (r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r^2\sin^2(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{\cancel{r^2}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r * \frac{\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r * \cos(\theta) * \sin^2(\theta) =$$

$$= 0 * \cos(\theta) * \sin^2(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0,0) = \frac{0*0^2}{0^2+0^2} = \frac{0}{0}$ por lo tanto $\nexists f(0,0)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R². La función puede ser redefinida para extender su continuidad de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ejercicio 5.

Encontrar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

a. $f(x,y) = 3x^2y + y^3$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = 6xy$

$fy(x,y) = 3x^2 + 3y^2$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

b. $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$

$Dom(f) = R^3$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y,z) = 2xy + z^2$

$fy(x,y,z) = x^2 + 2yz$

$fz(x,y,z) = y^2 + 2zx$

$Dom(fx) = R^3$

$Dom(fy) = R^3$

$Dom(fz) = R^3$

c. $f(x,y) = e^{xy} + \sin(x^2 + y)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = e^{xy}y + \cos(x^2 + y) * 2x$

$fy(x,y) = e^{xy}x + \cos(x^2 + y)$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

d. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = \frac{\left(y * (x^2 + y^2)\right) - xy * 2x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{yx^2 + y^3 - 2x^2y}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \frac{y^3 + yx^2 * (1 - 2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \frac{y^3 - yx^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

$$fy(x,y) = \frac{x * (x^2 + y^2) - xy * 2y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{xy^2 + x^3 - 2y^2x}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \frac{x^3 + xy^2 * (1-2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \frac{x^3 - xy^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

$Dom(fx) = R^2 - \{(0,0)\}$

$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$

e. $f(x,y) = x^2 \log(x+y)$

$Dom(f) = \{(x,y): (x,y) \in R^2 \,\hat{}\, x + y > 0\}$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = 2x * \ln(\mathrm{x} + \mathrm{y}) + \frac{x^2}{x+y}$

$fy(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$

$Dom(fx) = \{(x,y): (x,y) \in R^2 \,\hat{}\, x + y > 0\}$

$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$

f. $f(x,y) = \sum_{i=n}^{n} [y_i - (x + yx_i)]$

Paso.

Ejercicio 6.

Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x,y) = xe^{x^2y}$ en $(1, \log(2))$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = e^{x^2 y} + e^{x^2 y} * 2 * x^2 * y$$

$$fy(x,y) = x^3 * e^{x^2 y}$$

$$fx(x,y) = e^{1^2 \ln(2)} + e^{1^2 \ln(2)} * 2 * 1^2 * \ln(2) =$$

$$= 2 + 4\ln(2) \approx 4.77258$$

$$fy(x,y) = 1^3 * e^{1^2 \ln(2)} = 2$$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en (-4,3)

$$Dom(f) = R^2$$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$fy(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$fx(x,y) = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = -\frac{4}{5}$$

$$fy(x,y) = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$$

Ejercicio 7.

Analizar diferenciabilidad en R^2 de las siguientes funciones:

a. $f(x,y) = sen(x^2 + y^2)$

$$Dom(f) = R^2$$

f es continua en todo R^2 por lo que las derivadas parciales se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = cos(x^2 + y^2) * 2x$

$fy(x,y) = cos(x^2 + y^2) * 2y$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x,y)$ y $fy(x,y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2.

b. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que las derivadas parciales se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$fy(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$Dom(fx) = R^2 - \{(0,0)\}$

$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$

Como (0,0) no pertenece al dominio de ambas derivadas parciales, debemos analizar que pasa con respecto a la diferenciabilidad en dicho punto. Se sabe que f es continua en (0,0); ahora veremos qué pasa con respecto a las derivadas parciales en (0,0) haciendo uso de la definición.

$$fx(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{h}{h} = 1 \\ \lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

Como el limite puede dar dos valores, no existe el mismo haciendo que la función no tenga derivadas parciales en el punto (0,0) y por lo tanto no es diferenciable en todo R^2.

c. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \, si \, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \, si \, (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Como tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas (aplicando las propiedades vistas en teoría se puede afirmar que todo polinomio es diferenciable) f es diferenciable en todos los puntos de $R^2 - (0, 0)$.

Falta ver qué pasa en el (0,0) y se analizara usando la diferenciabilidad:

f es continua en (0,0); para buscar las derivadas parciales se debe aplicar la definición.

$$fx(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$fy(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k^3} = 0$$

f es diferenciable en el punto (0,0) si lo siguiente tiende a 0:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - \{fx(x,y)(x-0) + fy(x,y)(y-0) + f(0,0)\}}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\frac{xy}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2) * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2) * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2) * (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * \; r\sin(\theta)}{((r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * \; r\sin(\theta)}{(r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r^3} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = \begin{cases} \lim_{r\to 0+} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = +\infty \\ \lim_{r\to 0-} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = -\infty \end{cases}$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe. Por lo tanto f no es diferenciable en el punto (0,0) y en consecuencia no es diferenciable en todo R^2.

d. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Como tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas (aplicando las propiedades vistas en teoría se puede afirmar que todo polinomio es diferenciable) f es diferenciable en todos los puntos de $R^2 - (0, 0)$.

Falta ver qué pasa en el (0,0) y se analizara usando la diferenciabilidad:

f es continua en (0,0); para buscar las derivadas parciales se debe aplicar la definición.

$$fx(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$fy(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k^3} = 0$$

f es diferenciable en el punto (0,0) si lo siguiente tiende a 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \{fx(x,y)(x-0) + fy(x,y)(y-0) + f(0,0)\}}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2) * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2) * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2) * (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * (r\sin(\theta))^2}{((r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r^2 * \sin^2(\theta)}{(r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{r^3} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos(\theta) * \sin^2(\theta)$$

Como el valor del límite depende de θ se puede concluir que el límite no existe. Por lo tanto f no es diferenciable en el punto (0,0) y en consecuencia no es diferenciable en todo R^2.

e. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Como tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas (aplicando las propiedades vistas en teoría se puede afirmar que todo polinomio es diferenciable) f es diferenciable en todos los puntos de $R^2 - (0, 0)$.

Falta ver qué pasa en el (0,0) y se analizara usando la diferenciabilidad:

f es continua en (0,0); para buscar las derivadas parciales se debe aplicar la definición.

$$fx(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{|h| * h} = 0$$

$$fy(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{|k| * k} = 0$$

f es diferenciable en el punto (0,0) si lo siguiente tiende a 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \{fx(x,y)(x-0) + fy(x,y)(y-0) + f(0,0)\}}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2} * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} =$$

Como se trata de la suma de potencias, no hace falta poner el módulo puesto que nunca dará negativo.

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos(\theta) * \sin(\theta) =$$

Como el valor del límite depende de θ se puede concluir que el límite no existe. Por lo tanto f no es diferenciable en el punto (0, 0) y en consecuencia no es diferenciable en todo R^2.

Ejercicio 8.

Hallar, en caso de que exista, el plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en el punto $(-1, 1, f(-1,1))$.

De ser posible, con ayuda de un software a su elección, muestre las gráficas de la función y el plano tangente.

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x, y) = e^{x^2+y^2} * 2x$

$fy(x, y) = e^{x^2+y^2} * 2y$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x, y)$ y $fy(x, y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2.

Ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $P0 = (x0, y0, f(x0, y0))$:

$$z = fx(x0, y0) * (x - x0) + fy(x0, y0) * (y - y0) + f(x0, y0)$$

Para hallar la ecuación del plano tangente debemos evaluar la función y sus derivadas parciales primeras en el punto $(-1, 1)$:

$fx(-1, 1) = e^{(-1)^2+1^2} * 2 * (-1) = e^2 * (-2) \approx 7.38905609893 * (-2)$

≈ -14.7781121979

$fy(-1, 1) = e^{(-1)^2+1^2} * 2 = e^2 * 2 \approx 7.38905609893 * 2 \approx 14.7781121979$

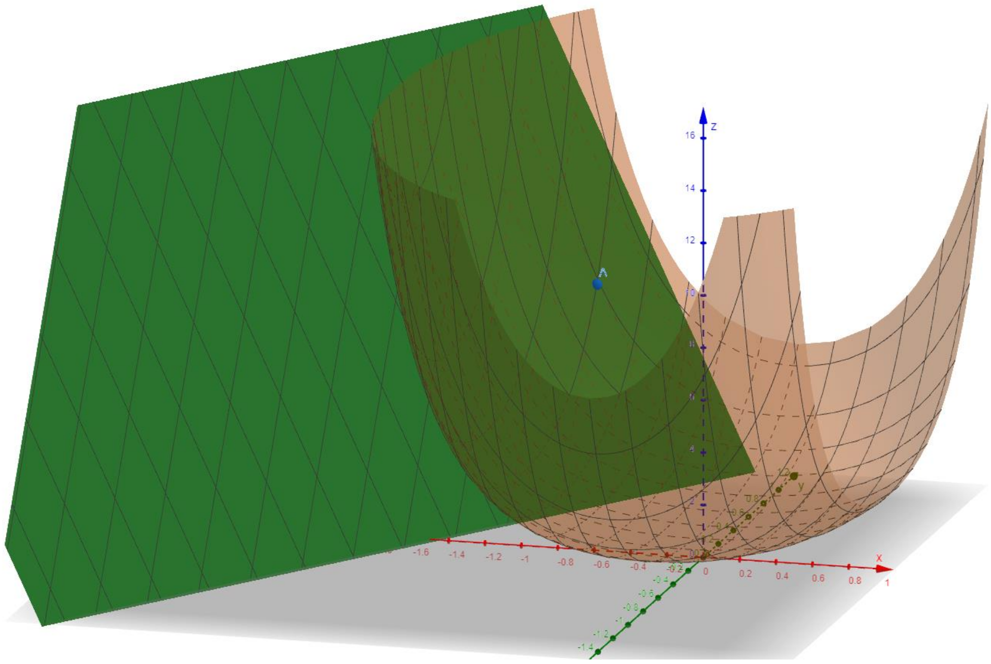
$f(-1, 1) = e^{(-1)^2+1^2} = e^2 \approx 7.38905609893$

Por lo tanto, el plano tangente a la gráfica de f por el punto $(-1, 1, f(-1, 1))$ es:

$z = -14.7781121979 * (x - (-1)) + 14.7781121979 * (y - 1) + 7.38905609893$

$z = e^2 * (-2) * (x - (-1)) + e^2 * 2 * (y - 1) + e^2$

Gráfico de $f(x, y)$ y del plano tangente



Ejercicio 9.

Encontrar la aproximación lineal de la función $f(x,y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en $(1,0)$ y utilizarla para estimar aproximadamente $f(0.98, 0.05)$.

Grafique con ayuda de software la función y su aproximación lineal.

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = 2x + e^{xy} * y$
$fy(x,y) = 4y^3 + e^{xy} * x$

$Dom(fx) = R^2$
$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x,y)$ y $fy(x,y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2.

Para hallar la ecuación del plano tangente debemos evaluar la función y sus derivadas parciales primeras en el punto $(1, 0)$:

$fx(1, 0) = 2 * 1 + e^{1*0} * 0 = 2$

$fy(1, 0) = 4 * 0^3 + e^{1*0} * 1 = e^0 = 1$

$f(1,0) = 1^2 + 0^4 + e^{1*0} = 1 + 1 = 2$

El plano tangente a la gráfica de f por el punto $(1, 0, f(1, 0))$ es:

$z = 2 * (x - 1) + 1 * (y - 0) + 2 = 2x - 2 + y + 2 = 2x + y$

Linealización de f en el punto $P0 = (x0, y0)$:

$$L(x, y) = f(x0, y0) + fx(x0, y0) * (x - x0) + fy(x0, y0) * (y - y0)$$

La linealización de f alrededor de $(0.98, 0.05)$ está dada por la función:

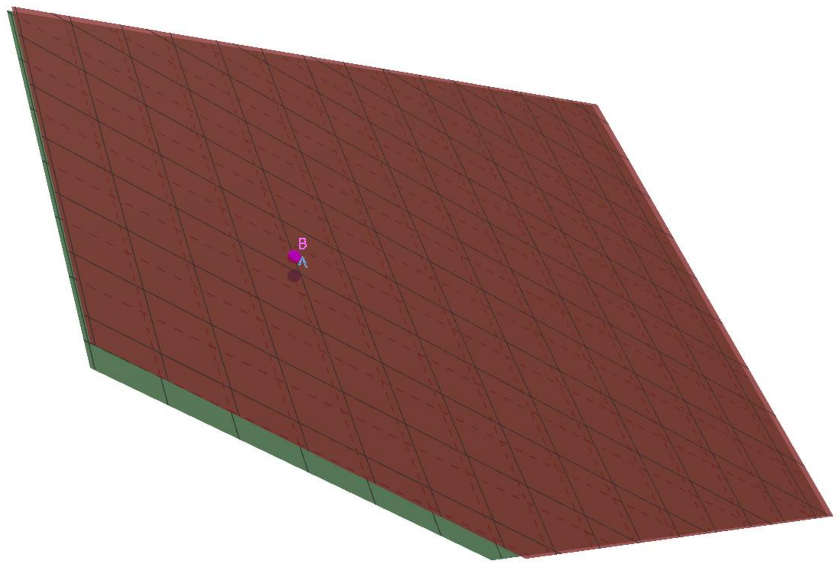
$L(x, y) = 2 + 2 * (x - 1) + 1 * (y - 0) = 2 + 2x - 2 + y = 2x + y$

Por lo tanto, la aproximación lineal de f en el punto $(0.98, 0.05)$ es:

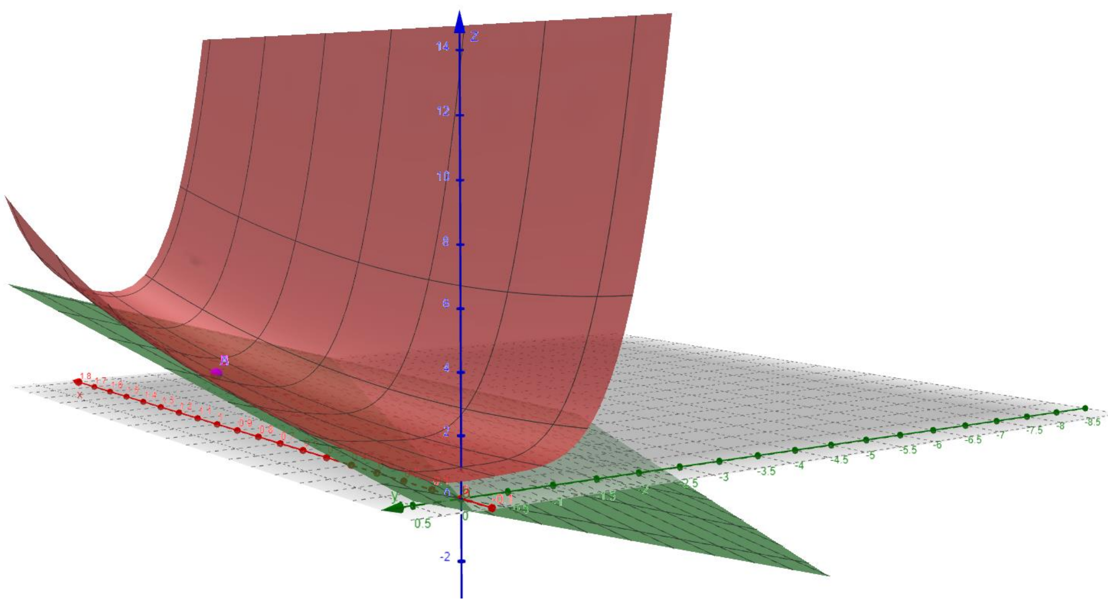
$L(0.98, 0.05) = 2 * 0.98 + 0.05 = 2.01$

Entonces $f(0.98, 0.05) \approx L(0.98, 0.05) = 2.01$

Gráfico de $f(0.98, 0.05) \approx L(0.98, 0.05)$



<u>Gráfico de $f(x,y)$ y del plano tangente</u>



Ejercicio 10.

Calcular los vectores gradientes de las siguientes funciones

a. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación.

$fx(x, y) = e^{x^2+y^2} * 2x$

$fy(x, y) = e^{x^2+y^2} * 2y$

$\nabla f(x, y) = \left(e^{x^2+y^2} * 2x,\ e^{x^2+y^2} * 2y\right)$

b. $f(x, y, z) = x * y * z$

$Dom(f) = R^3$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación.

$fx(x, y, z) = y * z$

$fy(x, y, z) = x * z$

$fz(x, y, z) = x * y$

$\nabla f(x, y, z) = (y * z, x * z, x * y)$

Ejercicio 11.

Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en los puntos y dirección de los vectores dados:

a. $f(x, y) = x^2 + 3xy^2$; $p = (1, 2)\ y\ \vec{v} = (-1, -2)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x, y) = 2x + 3y^2$

$fy(x, y) = 6xy$

$Dom(fx) = R^2$
$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x, y)$ y $fy(x, y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2 por lo que se puede calcular la derivada direccional de la siguiente manera

$$D_{\vec{v}}f(x, y) = \nabla f(x, y) . \vec{v}$$

$\nabla f(x, y) = (2x + 3y^2, 6xy\ )$

$Longitud\ de\ \vec{v} = (-1, -2)$:
$||-1, -2|| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$Normalizacion\ de\ \vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
$El\ vector\ unitario\ en\ la\ direccion\ \vec{v}\ es\ \vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Derivada direccional
$D_{\vec{v}}f(1,2) = \nabla f(1,2)\ .\ \vec{v} =$
$= (2 * 1 + 3 * 2^2, 6 * 1 * 2)\ .\ \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$
$= (14, 12)\ .\ \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$
$= \left(14 * -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(12 * -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$
$= -\frac{14}{\sqrt{5}} - \frac{24}{\sqrt{5}} = -\frac{38}{\sqrt{5}}$

b. $f(x, y) = xy^2$; $p = (1, 1)\ y\ \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$Dom(f) = R^2$
f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x, y) = y^2$
$fy(x, y) = 2xy$

$Dom(fx) = R^2$
$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x, y)$ y $fy(x, y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2 por lo que se puede calcular como en el punto a.

$\nabla f(x, y) = (y^2, 2xy\,)$

$Longitud\ de\ \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -1\right):$

$$\left\|\left(\frac{1}{2}, -1\right)\right\| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$Normalizacion\ de\ \vec{v} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right)$$

$$El\ vector\ unitario\ en\ la\ direccion\ \vec{v}\ es\ \vec{u} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right)$$

Derivada direccional

$D_{\vec{v}}f(1,1) = \nabla f(1,1)\,.\ \vec{v} =$

$$= \ (1^2, 2)\,.\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right) =$$

$$= \left(1 * \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right) + \left(2 * -\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = -\frac{3}{2 * \sqrt{5 * \frac{1}{4}}} = \ -\frac{3}{2 * \sqrt{5} * \sqrt{\frac{1}{4}}} = -\frac{3}{2 * \sqrt{5} * \frac{1}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 12.

Encontrar las direcciones en las cuales la derivada direccional en el punto (1, 0) de $f(x,y) = x^2 + sen(xy)$ tiene el valor 1

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x,y) = 2x + cos(xy) * y$

$fy(x,y) = cos(xy) * x$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x,y)$ y $fy(x,y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2 por lo que se puede calcular como en el punto anterior.

$\nabla f(x,y) = (2x + cos(xy) * y\ , cos(xy) * x\ )$

Derivada direccional

$D_{\vec{v}} f(1,0) = \nabla f(1,0)\ .\ (x,y) = (2\ , cos(0)\ )\ .\ (x,y) = (2,1)\ .\ (x,y) = 2x + y$

$2x + y$ debe ser igual 1 y además, la longitud de $\vec{v}$ debe ser 1

$||(x,y)|| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 1^2$

$x^2 + y^2 = 1$ Como se trata de la suma de potencias, no hace falta poner el módulo puesto que nunca dará negativo.

Se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Luego de resolver el sistema de ecuaciones se llega a que las direcciones en las cuales $D_{\vec{v}} f(1,0)$ vale 1 son:

$\vec{v} = (0,1)$

$\vec{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

Ejercicio 13.

Encontrar la dirección de máximo crecimiento de las siguientes funciones en los puntos dados:

a. $f(x,y) = xe^y + 3y \,; \quad p = (1,0)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x,y) = e^y$

$fy(x,y) = xe^y + 3$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x,y)$ y $fy(x,y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2 por lo tanto f es diferenciable en el punto $(1, 0)$ por lo que la dirección de máximo crecimiento de f en $(1, 0)$ está dada por la dirección del gradiente de f en $(1, 0)$ que es la siguiente:

$\nabla f(x,y) = (e^y, xe^y + 3\,)$

$$\nabla f(1{,}0) = (e^0, 1e^0 + 3\ ) = (1, 4)$$

$Longitud\ de\ (1, 4)$

$\left|\left|(1, 4)\ \right|\right| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$$Normalizacion\ de\ (1, 4)\ = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

b. $f(x, y, z) = 4x^2yz^3\ ;\quad p = (1{,}2{,}1)$

$Dom(f) = R^3$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x, y, z) = 8xyz^3$

$fy(x, y, z) = 4x^2z^3$

$fz(x, y, z) = 12x^2yz^2$

$Dom(fx) = R^3$

$Dom(fy) = R^3$

$Dom(fz) = R^3$

Como existen las derivadas parciales $fx(x, y)$ y $fy(x, y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^3), entonces f es diferenciable en todo R^3 por lo tanto f es diferenciable en el punto (1, 2, 1) por lo que la dirección de máximo crecimiento de f en (1, 2, 1) está dada por la dirección del gradiente de f en (1, 2, 1) que es la siguiente:

$\nabla f(x, y, z) = (8xyz^3, 4x^2z^3, 12x^2yz^2)$

$\nabla f(1{,}2{,}1) = (8 * 1 * 2 * 1^3, 4 * 1^2 1^3, 12 * 1^2 * 2 * 1^2) = (16, 4{,}24)$

Ejercicio 14.

Hallar máximos, mínimos y puntos silla de las siguientes funciones. Además calcular el valor de la misma en cada uno esos puntos

a. $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x,y) = -2 - 2x$

$fxx(x,y) = -2$

$fy(x,y) = 4 - 8y$

$fyy(x,y) = -8$

$fxy(x,y) = fyx(x,y) = 0$

Los puntos críticos se dan en los puntos (x, y) cuando:

1) $fx(x,y) = 0$ y $fy(x,y) = 0$
2) $fx(x,y)$ *no existe*
3) $fy(x,y)$ *no existe*

Como las derivadas existen, se debe determinar cuando $fx(x,y) = 0$ y $fy(x,y) = 0$

$fx(x,y) = -2 - 2x = 0 \rightarrow x = -1$

$fy(x,y) = 4 - 8y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$

Se tiene como punto crítico a $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

Ahora se vera si el punto crítico es un mínimo local, máximo local o punto silla.

$$H = \begin{pmatrix} fxx(x,y) & fxy(x,y) \\ fyx(x,y) & fyy(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$Determinante \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a * d - b * c$$

$$Determinante \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -2 * -8 - (0 * 0) = 16$$

Como H > 0 y $fxx(x,y) < 0$ entonces $f(x,y)$ tiene un máximo local en $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

b. $f(x,y) = xy - 2x - y$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x,y) = y - 2$

$fxx(x,y) = 0$

$fy(x,y) = x - 1$

$fyy(x,y) = 0$

$fxy(x,y) = fyx(x,y) = -1$

Los puntos críticos se dan en los puntos (x, y) cuando:

1) $fx(x,y) = 0$ y $fy(x,y) = 0$
2) $fx(x,y)$ *no existe*
3) $fy(x,y)$ *no existe*

Como las derivadas existen, se debe determinar cuando $fx(x,y) = 0$ y $fy(x,y) = 0$

$fx(x,y) = y - 2 = 0 \rightarrow y = 2$

$fy(x,y) = x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

Se tiene como punto crítico a (1,2)

Ahora se verá si el punto crítico es un mínimo local, máximo local o punto silla.

$$H = \begin{pmatrix} fxx(x,y) & fxy(x,y) \\ fyx(x,y) & fyy(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Determinante \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

Como H < 0 entonces $f(x,y)$ tiene un punto silla en $(1, 2)$

c. $f(x,y) = xsen(y)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x,y) = \ sen(y)$

$fxx(x,y) = 0$

$fy(x,y) = xcos(y)$

$fyy(x,y) = -xsen(y)$

$fxy(x,y) = fyx(x,y) = \cos(y)$

Los puntos críticos se dan en los puntos (x, y) cuando:

1) $fx(x,y) = 0$ y $fy(x,y) = 0$
2) $fx(x,y)\ no\ existe$
3) $fy(x,y)\ no\ existe$

Como las derivadas existen, se debe determinar cuando $fx(x,y) = 0$ y $fy(x,y) = 0$

$$fx(x,y) = sen(y) = 0 \rightarrow y = \begin{cases} 2\pi n \\ \pi + 2\pi n \end{cases}$$

$$fy(x,y) = xcos(y) = 0 \rightarrow x = 0$$

Hay varios puntos críticos que no me voy a molestar en escribir

Ahora se verá si los puntos críticos son un mínimo local, máximo local o punto silla.

$$H = \begin{pmatrix} fxx(x,y) & fxy(x,y) \\ fyx(x,y) & fyy(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(y) \\ \cos(y) & -xsen(y) \end{pmatrix}$$

$$Determinante \begin{pmatrix} 0 & \cos(y) \\ \cos(y) & -xsen(y) \end{pmatrix} = \ -\cos^2(y)$$

Como H $<$ 0 entonces $f(x,y)$ tiene un punto silla en los puntos críticos.

Ejercicio 15.

El criterio de las derivadas segundas, ¿permite clasificar los puntos estacionarios de $f(x, y) = x^2y$? En caso afirmativo, hallarlos y analizarlos.

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x, y) = 2xy$

$fxx(x, y) = 2y$

$fy(x, y) = x^2$

$fyy(x, y) = 0$

$fxy(x, y) = fyx(x, y) = 2x$

Los puntos críticos se dan en los puntos (x, y) cuando:

1) $fx(x, y) = 0$ y $fy(x, y) = 0$
2) $fx(x, y)$ *no existe*
3) $fy(x, y)$ *no existe*

Como las derivadas existen, se debe determinar cuando $fx(x, y) = 0$ y $fy(x, y) = 0$

$fx(x, y) = 2xy = 0 \rightarrow X = \{(x, y): x = 0 \,\hat{}\, y = 0\}$

$fy(x, y) = x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

Los puntos críticos son $X \cap \{(x, y): x = 0\}$, por lo tanto son aquellos donde $x = 0$.

Ahora se verá si los puntos críticos son un mínimo local, máximo local o punto silla.

$$H = \begin{pmatrix} fxx(x, y) & fxy(x, y) \\ fyx(x, y) & fyy(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

$$Determinante \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix} = -(2x)^2$$

Como x siempre será 0, H = 0 entonces $f(x, y)$ tiene un punto silla en todos los puntos críticos.

Ejercicio 16.

Dada la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y - 2$

a) Hallar el mínimo de la función de dos formas:

   i. Analítica: Calculando los punto estacionarios.

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x,y) = 2x$

$fxx(x,y) = 2$

$fy(x,y) = 2y + \frac{1}{2}$

$fyy(x,y) = 2$

$fxy(x,y) = fyx(x,y) = 0$

Los puntos críticos se dan en los puntos (x, y) cuando:

4) $fx(x,y) = 0$ y $fy(x,y) = 0$
5) $fx(x,y)$ *no existe*
6) $fy(x,y)$ *no existe*

Como las derivadas existen, se debe determinar cuando $fx(x,y) = 0$ y $fy(x,y) = 0$

$fx(x,y) = 2x = 0 \rightarrow x = 0$

$fy(x,y) = 2y + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{4}$

Se tiene como punto crítico a $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

Ahora se verá si el punto crítico es un mínimo local, máximo local o punto silla.

$$H = \begin{pmatrix} fxx(x,y) & fxy(x,y) \\ fyx(x,y) & fyy(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Determinante \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

Como H > 0 y $fxx(x,y) > 0$ entonces $f(x,y)$ tiene un mínimo local en $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

ii. Numérica: Mediante el método de descenso del gradiente. Utilizar tolerancia de 0.0001, tamaño de paso 0.4 y punto de inicio $x_0 = (10, 2)$.

Algoritmo:

```
import numpy as np  # Asignacion de variables

e = 0.0001
n = 0.4  # 0.1

# Definicion de la funcion
def f(array):
  return array[0] ** 2 + array[1] ** 2 + array[1] / 2 - 2

# Definicion del vector gradiente
def gradiente(array):
  return np.array([2 * array[0], 2 * array[1] + 0.5])

# Definicion de la condicion de corte
def corte(x_0, x_1):
  return abs(f(x_1) - f(x_0)) < e

# Multiplicacion del vector gradiente por el tamaño de paso
def mult_paso(x_1):
  return x_1 * n
```

```python
# Calculo del minimo con el metodo de descenso del gradiente
def main():
  x_0 = np.array([10, 2])
  i = 1
  while True:
    print(f"Iteracion {i}")
    x_1 = x_0 - mult_paso(gradiente(x_0))
    if corte(x_0, x_1):
      return x_1
    x_0 = x_1
    i += 1

print(main())
```

b) ¿ Cuántas iteraciones fueron necesarias para la convergencia del método del gradiente? Realice la búsqueda nuevamente pero con tamaño de paso 0.1 ¿Cuántas iteraciones fueron necesarias para la convergencia en este caso?

Con el tamaño de paso 0.4 fueron necesarias 6 iteraciones.
Con tamaño de paso 0.1 fueron necesarias 30 iteraciones.

c) ¿Qué ocurre si utilizamos el mismo tamaño de paso (0.4) de este punto para hallar el mínima de la función del punto anterior?

El algoritmo se queda en un loop debido a que no llega a la condición de corte y deja de funcionar correctamente (diverge a valores cada vez mayores)

d) (Para pensar) A raíz del inciso anterior ¿Siempre se puede elegir el mismo tamaño de paso para cualquier función que estudiemos? ¿Qué ocurre cuando este parámetro es muy grande o muy pequeño?

No siempre se puede elegir el mismo tamaño de paso para cualquier función. Con uno grande se tienen menos iteraciones pero el código puede que deje de funcionar correctamente.