TP2 – Regresión Lineal

Agustina Sol Rojas y Antonio Felix Glorioso Ceretti

Ejercicio 1.

Suponga que (x1, y1), ... , (xn, yn) son pares observados generados por los siguientes modelos y deduzca los estimadores de mínimos cuadrados de β1 y β0 .

a) $Y = \beta 1x + \varepsilon$

Se utilizará el método de los mínimos cuadrados:

$$f(\beta 1) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} (yi - \beta 1xi)^2$$

$$\frac{\partial f(\beta 1)}{\partial \beta 1} = \sum_{i=1}^{n} 2 * (yi - \beta 1xi) * (-xi) = 0$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} (-yixi + \beta 1xi^2) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -yixi + \sum_{i=1}^{n} (\beta 1xi^2) = 0$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} yixi + \beta 1 \sum_{i=1}^{n} xi^2 = 0$$

$$= \beta 1 \sum_{i=1}^{n} xi^2 = \sum_{i=1}^{n} yixi$$

$$\widehat{\beta 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} yixi}{\sum_{i=1}^{n} xi^2}$$

La recta de regresión estimada es $\hat{y}i = \widehat{\beta 1}x$

b) $Y = \beta 1(ax + c) + \beta 0 + \varepsilon$

$$Y = \beta 1X + \beta 0 + \varepsilon$$

$$\hat{y} = \widehat{\beta 1}x + \widehat{\beta 0}$$

$$y = \beta 1(ax + c) + \beta 0 + \varepsilon$$

$y = a\beta 1x + \beta 1c + \beta 0 + \varepsilon$

$\beta 1' \qquad \beta 0'$

$y = \beta 1'x + \beta 0' + \varepsilon$

$$\widehat{\beta 1} = \frac{Sxy}{Syy}$$

$$\widehat{\beta 0} = \hat{y} - \widehat{\beta 1}\bar{x}$$

$\widehat{\beta 1}' = a\widehat{\beta 1}$

$\widehat{\beta 0}' = \widehat{\beta 1}c + \widehat{\beta 0}$

La recta de regresión estimada es $\hat{y}' = \widehat{\beta 1}'x + \widehat{\beta 0}'$

Ejercicio 2.

Una cadena de supermercados financia un estudio sobre los gastos mensuales en alimentos, de familias de 4 miembros. La investigación se limitó a familias con ingresos netos entre \$688.000 y \$820.000, con lo cual se obtuvo la siguiente recta de estimación $\hat{y} = 0{,}85x - 18.000$.

y = gastos ; x = Ingresos

a) Estime los gastos en alimentos en un mes, para una familia de 4 miembros con un ingreso de \$700.000

$\hat{y} = 0{,}85 * 700000 - 18000 = 577000$

b) Uno de los directivos de la compañía se preocupa por el hecho de que la ecuación aparentemente indica que para una familia que tiene un ingreso de \$12.000 no gastaría nada en alimentos ¿Cuál sería su respuesta?

No se pueden estimar los gastos porque el ingreso está fuera del rango.

Ejercicio 3.

La empresa META quiere pronosticar el precio de sus acciones en función de los días en el periodo del 03/09/23 al 30/08/24, pero durante las fechas del 02/02/24 al 24/04/24 implementaron una serie de actualizaciones en sus distintas plataformas que dispararon el precio de sus acciones y querían saber en qué porcentaje afectaron dichas actualizaciones al ajuste y a la linealidad.

Utilizando los datos proporcionados en el archivo “META” haga los cálculos necesarios y responda.

Sugerencia: Realice dos análisis diferentes y para una de ellas desestimar los datos del periodo de actualización.

<u>Sin actualización:</u>

Cálculos auxiliares:

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i) * (\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n} = 14896028.792634 - \frac{31878 * 106855.010034}{252}$$

$$= 14896028.792634 - 13517158.7693 = 1378870.02333$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} = 5366130 - \frac{1016206884}{252} = 5366130 - 4032567.0$$

$$= 1333563.0$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n} = 47061434.07557989 - \frac{11417993169.366241}{252}$$

$$= 47061434.0755798 - 45309496.70383429 = 1751937.3717456013$$

$$\widehat{\beta_1} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{1378870.02333}{1333563.0} = 1.0339744154066948$$

$$\widehat{\beta_0} = \bar{y} - \widehat{\beta_1}\bar{x} = 424.0278175952381 - 1.0339744154066948 * 126.5$$

$$= 424.0278175952381 - 130.79776354894688$$

$$= 293.23005404629123$$

$$SS_R = Syy - \widehat{\beta_1} S_{xy} = 1751937.3717456013 - 1.0339744154066948 * 1378870.02333$$

$$= 1751937.3717456013 - 1425716.3262975523 = 326221.045448049$$

Ajuste y linealidad:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_R}{Syy} = 1 - \frac{326221.045448049}{1751937.3717456013} = 1 - 0.18620588310357677$$

$$= 0.8137941168964232 * 100 = 81.37941\%$$

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{1378870.02333}{\sqrt{1333563.0 * 1751937.3717456013}} = \frac{1378870.02333}{\sqrt{2336318857277.179}}$$

$$= \frac{1378870.02333}{1528502.1613583604} = 0.9021053801504696$$

<u>Con actualización:</u>

Cálculos auxiliares:

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i) * (\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n} = 1325517.5464050155$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} = 1312812.9538461538$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n} = 1397233.2607275099$$

$$\widehat{\beta_1} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 1.009677382083747$$

$$\widehat{\beta_0} = \bar{y} - \widehat{\beta_1}\bar{x} = 278.98103545163457$$

$$SS_R = Syy - \widehat{\beta_1} S_{xy} = 58888.17456722213$$

Ajuste y linealidad:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_R}{Syy} = 0.9578537269170359 * 100 = 95.78537\%$$

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = 0.9787000188602408$$

Dichas actualizaciones afectaron al ajuste un 14.40596% y a la linealidad un 7.65946387%

Ejercicio 4.

Los siguientes datos corresponden a los tiempos relativos en segundos que tardaron en ejecutarse seis programas elegidos al azar en el entorno Windows y en DOS:

	Programas					
Windows	2,5	7,1	5	8,5	7	8,1
DOS	2,3	7,1	4	8	6,6	5

a) Realizar el grafico de dispersión de los puntos

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i) * (\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n} = 20.759999999999962$$

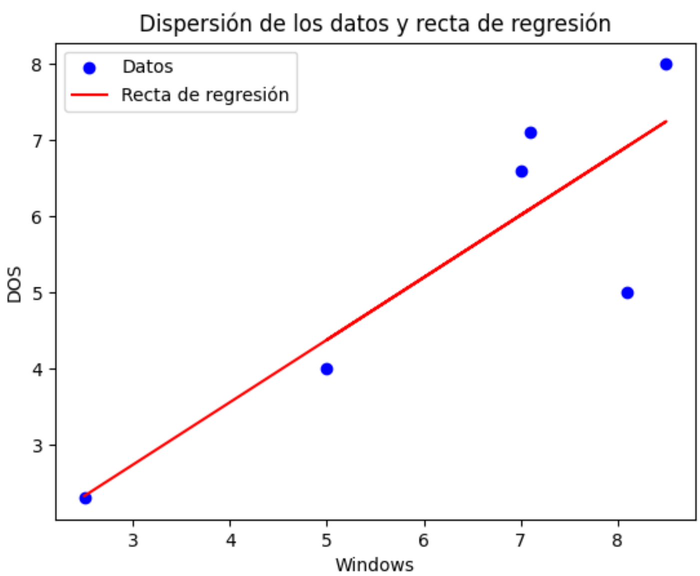
$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} = 25.313333333333276$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n} = 22.75999999999999$$

$$\widehat{\beta_1} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{20.759999999999962}{25.313333333333276} = 0.8201211482749543$$

$$\widehat{\beta_0} = \bar{y} - \widehat{\beta_1}\bar{x} = 5.5 - 0.8201211482749543 * 6.3666 = 5.5 - 5.22138330261$$
$$= 0.2785620226494574$$

<u>Grafico</u>



$$\hat{y} = \widehat{\beta_1}x + \widehat{\beta_0} = 0.8201211482749543x + 0.2785620226494574$$

b) Si un programa tarda 6 segundos en ejecutarse en Windows, ¿Cuánto tardara en ejecutarse en DOS?

Para saber cuánto tarada en ejecutar un programa de DOS si el de Windows tarda 6 segundos utilizaremos nuestra función de regresión linear:

$$\hat{y} = \widehat{\beta_1}x + \widehat{\beta_0} = 0.8201211482749543x + 0.2785620226494574$$

Reemplazaremos x con el valor 6 y resolveremos para $\hat{y}$

$$\hat{y} = 0.8201211482749543 * 6 + 0.2785620226494574 = 5.199288912299183$$

Por lo tanto, en DOS, se tardará unos 5.199 segundos

c) Se estima que los tiempos de Windows mejoraran reduciéndose en un 10% en los próximos años, estime la recta de regresión considerando esta mejora. Suponga que los tiempos DOS no se modifican.

Para calcular la mejora sobre los tiempos de Windows se deberá multiplicar un 0.9 a $\widehat{\beta_1}x$

$$\hat{y} = 0.9 * \widehat{\beta_1}x + \widehat{\beta_0} = 0.9 * 0.8201211482749543x + 0.2785620226494574$$
$$= 0.73810903344x + 0.2785620226494574$$

Ejercicio 5.

En la tabla siguiente, se muestran la variable y, rendimiento de un sistema informático, respecto a la variable x, numero de buffer:

x	5	10	15	20	25	5	10	15	20	25	5	10	15	20	25
y	9.6	20.1	29.9	39.1	50.0	9.6	19.4	29.7	40.3	49.9	10.7	21.3	30.7	41.8	51.2

A partir de la tabla anterior, se quiere ajustar la variable y como función de x.

a) Realizar el análisis de regresión de los datos (Estimación de la recta, Test de Hipótesis, Indicadores).

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i) * (\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n} = 1514.000000000001$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} = 750.0$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n} = 3064.324000000006$$

$$\widehat{\beta_1} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{1514.000000000001}{750.0} = 2.0186666666666677$$

$$\widehat{\beta_0} = \bar{y} - \widehat{\beta_1}\bar{x} = 30.22 - 2.0186666666666677 * 15 = -0.06000000000002004$$

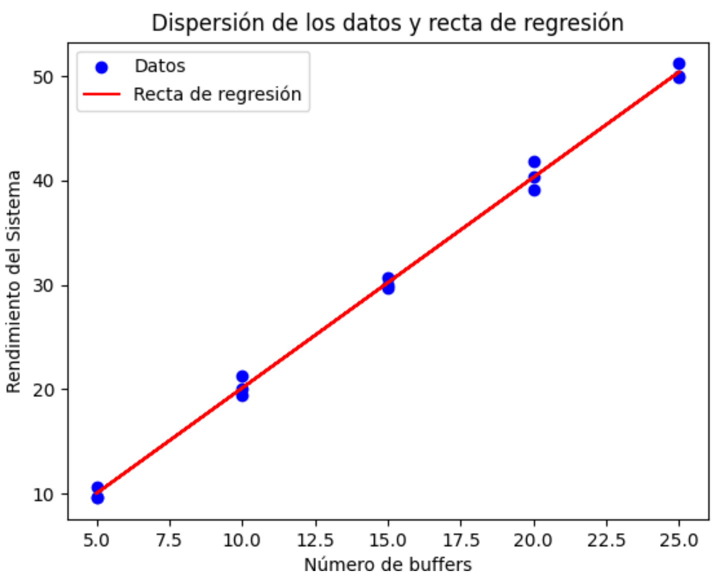
$$SS_R = Syy - \widehat{\beta_1} S_{xy} = 8.062666666669429$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{SS_R}{n-2} = 0.6202051282053407$$

$$R^2 = 1 - \frac{SS_R}{Syy} = 0.9973688596027478$$

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} = 0.9986835632985795$$

<u>Grafico</u>



Estimación de la recta:

$$\hat{y} = \widehat{\beta_1}x + \widehat{\beta_0} = 2.0186666666666677x + (-0.06000000000002004)$$

Test de Hipótesis sobre β_1:

Deseamos probar la hipótesis de que la pendiente β_1 es igual a 0. Entonces supongamos las hipótesis:

$$H_0: \beta_1 = 0 \qquad H_1: \beta_1 \neq 0$$

Estadístico de prueba:

$$T = \frac{\widehat{\beta_1} - \theta}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$$

Como regla de decisión se usará:

- Se rechaza H_0 si $|T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$
- Se acepta en caso contrario.

Se usará un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

$$T = \frac{2.0186666666666677-0}{\sqrt{\frac{0.6202051282053407}{750}}} = \frac{2.0186666666666677}{\sqrt{\frac{0.6202051282053407}{750}}} = \frac{2.0186666666666677}{\sqrt{0.00082694017}} = 70.1984571704$$

$$t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = t_{\frac{0.05}{2},15-2} = t_{0.025,13} = 2{,}16037$$

Como $|70.1984571704| > 2{,}16037$ se rechaza H_0.

b) Comentar los resultados siguientes:

- Recta de regresión del rendimiento del sistema informático frente al número de buffers e interpretación de los coeficientes.

La recta de regresión se ajusta de manera casi perfecta a los valores dados, esto se puede ver en el grafico como también en el valor de R^2 (es muy cercano a 1). También se puede ver que r es muy cercano a 1 por lo que hay una gran correlación entre x e y.

- Contraste de hipótesis sobre la pendiente de la pendiente de la recta.

La hipótesis de la pendiente igualada a 0 fue rechazada por lo que se puede asumir que x tiene importancia al explicar la variabilidad en Y. También puede significar que el modelo lineal es adecuado, o que, aunque existe efecto lineal pueden obtenerse mejores resultados agregando términos polinomiales de mayor grado en x.

Ejercicio 6.

Determine si las siguientes relaciones son posibles o no y justifique su respuesta:

a. $\widehat{\sigma^2} = 0{,}2\,;\ n = 102\,;\ R^2 = 0{,}8\,;\ S_{yy} = 100$

$$R^2 = 1 - \frac{SS_R}{S_{yy}}$$

$$0{,}8 = 1 - \frac{SS_R}{100}$$

$$0{,}8 - 1 = -\frac{SS_R}{100}$$

$$20 = SS_R$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{SS_R}{n-2} = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

Si es posible ya que todos los valores están correctamente relacionados.

b. $\hat{y} = 7x + 4\,;\ \bar{x} = 10\,;\bar{y} = 64\,;\ r = -0{,}8$

No es posible ya que la pendiente $(7x)$ de la recta de regresión es positiva y r indica que la relación entre x e y es de índole negativa (es decir, la recta tendría que ser decreciente).

c. $\widehat{\beta_0} = 10{,}073 \; ; \; \widehat{\beta_1} = -2{,}06 \; ; \; \bar{x} = 8{,}5 \; ; \; \bar{y} = 8{,}325$

$$\widehat{\beta_0} = \bar{y} - \widehat{\beta_1}\bar{x} = 8{,}325 - (-2{,}06) * 8{,}5 = 25.835$$

No es posible ya que el valor obtenido de $\widehat{\beta_0}$ mediante el uso de los otros indicadores es distinto al dado en el enunciado.

Ejercicio 7.

Indique si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Justifique su respuesta:

a. $SS_R = S_{yy} - \widehat{\beta_0} S_{xy}$ $\qquad \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \widehat{\beta_1}$

$$SS_R = S_{yy} - \frac{\left(S_{xy}\right)^2}{S_{xx}} = S_{yy} - \frac{S_{xy}}{S_{xx}} * S_{xy} = S_{yy} - \widehat{\beta_1} S_{xy}$$

La afirmación es incorrecta.

b. El error del intervalo de predicción es $\sqrt{n+1}$ veces mayor que el intervalo confianza para la respuesta media cuando $x^* = \bar{x}\, es\ igual\ (1 - \alpha)$.

$$ICM(\varepsilon) = t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}$$

$$IP(\varepsilon) = t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}$$

$$x^* = \bar{x}\, es\ igual\ (1 - \alpha)$$

$$\frac{ICM(\varepsilon)}{IP(\varepsilon)} = \frac{t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}}{t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}}$$

$$= \frac{\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}} = \frac{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n} * n + 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} * \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{ICM(\varepsilon)}{IP(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$ICM(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} * IP(\varepsilon)$$

$$\sqrt{n+1} * ICM(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} * \sqrt{n+1} * IP(\varepsilon)$$

$$\sqrt{n+1} * ICM(\varepsilon) = IP(\varepsilon)$$

Esta afirmación es correcta ya que $IP(\varepsilon)$ siempre es $\sqrt{n+1}$ veces más grande que $ICM(\varepsilon)$ cuando $x^* = \bar{x}\, es\ igual\ (1 - \alpha)$.

c. El coeficiente de determinación R^2 indica el grado de relación lineal que existe entre la variable independiente y dependiente.

   Esta afirmación es incorrecta debido a que R^2 indica la relación entre la función de regresión lineal y nuestros datos. Lo que describe el grado de relación lineal que existe entre la variable independiente y dependiente es r (Coeficiente de Correlación Lineal).

d. El principio de mínimos cuadrados consiste en minimizar la suma de los residuos al cuadrado considerando la distancia perpendicular entre el valor observado y el estimado.

e. Esta afirmación es incorrecta debido a que el principio de mínimos cuadrados consiste en minimizar la suma de los residuos al cuadrado considerando la distancia vertical entre el valor observado y el estimado, no la perpendicular.

Ejercicio 8.

En un departamento de informática, un grupo de investigación dedicado al estudio de las comunicaciones por la red desea conocer la relación entre el tiempo de transmisión de un fichero y la información útil del mismo. Para ello se han hecho algunos experimentos en los que se enviaban paquetes de distintas longitudes (bytes) de información útil y se median los tiempos (en milisegundos) que tardaban desde el momento en que se enviaban hasta que llegaban al servidor. Los resultados del experimento se resumen en los siguientes estadísticos:

$$S_{xx} = 47.990\ ;\ \bar{x} = 194\ ;\ \widehat{\beta_0} = 27{,}3275$$
$$\sum x_i^2 = 424.350\ ;\sum x_i y_i = 183.760\ ;\sum y_i^2 = 81.715$$

Se pide estudiar la relación entre las variables tiempo (y) y longitud (x) de los ficheros. Para ello, se pide:

a. Obtener la recta de regresión del tiempo en función de la longitud de los ficheros. Interpretar los resultados obtenidos.

Del enunciado se sabe:

$$S_{xx} = 47.990\ ;\ \bar{x} = 194\ ;\ \widehat{\beta_0} = 27{,}3275$$
$$\sum x_i^2 = 424.350\ ;\sum x_i y_i = 183.760\ ;\sum y_i^2 = 81.715$$

La formula de S_{xx} se puede expresar de la siguiente manera.

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n} * \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} * \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Reemplazando valores se puede obtener $\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$47.990 = 424.350 - 194 * \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$-47.990 + 424.350 = 194 * \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{376.36}{194} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.94$$

A partir de $\sum_{i=1}^{n} x_i$ y de $\bar{x}$, se puede obtener n:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Reemplazando valores

$$194 = \frac{1.94}{n}$$

$$n = 100$$

Continuara...

b. Indicar el valor que toma el coeficiente de determinación y correlación lineal. Interpretar los resultados.

c. Estudiar la significación del modelo.

d. Obtener el intervalo de confianza, al 95%, para la pendiente de la recta.

e. ¿Cuál será el tiempo de transmisión para un fichero que tiene una longitud 250 bytes?

Ejercicio 9.

De un análisis de regresión realizada sobre un Dataset, el cual consiste en un pequeño relevamiento del tiempo que demandan las llamadas a servicio técnico de una empresa

(x) y la cantidad de unidades de hardware reparadas (y), se sabe que el $IC(\beta_0) = (-0{,}4348\ ;\ -0{,}4248)$, que la estimación de la pendiente es 12 veces el error que se comete al estimar la verdadera ordenada al origen con $\widehat{\beta_0}$ y que la proporción de variación total observada no explicada por el modelo de regresión lineal es tan solo del 2%.

A partir de los datos proporcionados determinar:

a. El error que se comete al estimar la verdadera ordenada al origen con $\widehat{\beta_0}$.

$IC(\beta_0) = (-0.4348\ ;\ -0.4248)$

A partir de los valores dados por enunciado y siguiendo la fórmula de cálculo para los extremos del intervalo se tiene el siguiente sistema de ecuaciones.

1. $\widehat{\beta_0} - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]} = -0{,}4348$

2. $\widehat{\beta_0} + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]} = -0.4248$

Se busca el valor de $\widehat{\beta_0}$ en la ecuación 1. para reemplazarlo en la ecuación 2.

1. $\widehat{\beta_0} - t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]} = -0{,}4348$

$$\widehat{\beta_0} = -0{,}4348 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]}$$

2. $\widehat{\beta_0} + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]} = -0.4248$

$$-0.4348 + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]} + t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]} = -0.4248$$

$$2 * t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]} = -0.4248 + 0.4348$$

$$2 * t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]} = 0.01$$

$$t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]}=\frac{0.01}{2}=0.005$$

De esta forma, se afirma que el error que se comete al estimar la verdadera ordenada al origen vale 0.005

b. La recta de regresión estimada

Sabemos por el subpunto a. que $\widehat{\beta_0}$ es:

$$\widehat{\beta_0}=-0.4348+\ t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]}$$

Como ya sabemos el error, este se puede reemplazar:

$$\widehat{\beta_0}=-0.4348+0.005$$

$$\widehat{\beta_0}=-0.4298$$

Y por enunciado tenemos que:

$$\widehat{\beta_1}=12*\left(t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{\widehat{\sigma^2}\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]}\right)$$

$$\widehat{\beta_1}=12*0.005$$

$$\widehat{\beta_1}=0.06$$

Por lo tanto, la recta de regresión estimada es:

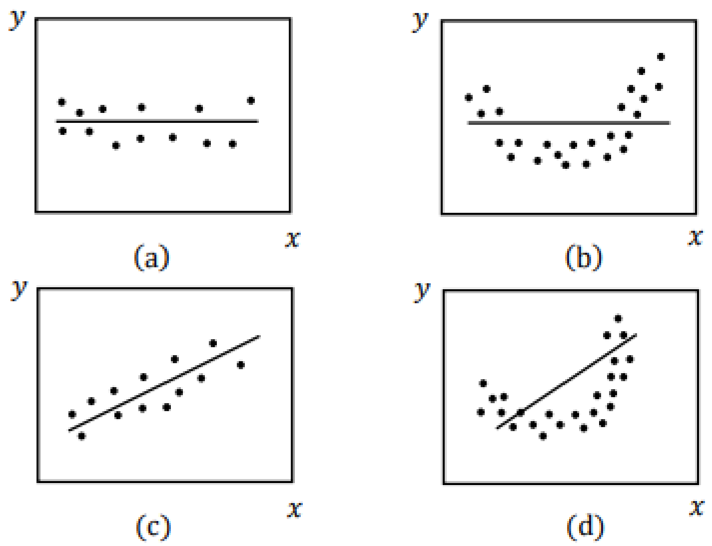
$$\hat{y}=\widehat{\beta_1}x+\widehat{\beta_0}=0.06x-0.4298$$

c. La bondad del ajuste

$$R^2=1-0.02=0.98$$

Ejercicio 10.

Observando los siguientes gráficos de regresión y considerando las hipótesis $H_0: \beta_1 = 0 \; vs \; H_1: \beta_1 \neq 0$ Indique para cada una, si se acepta o no H_0 y la implicancia de esta.



En los gráficos de (a) y (c) se rechaza H_0 ya que x tiene importancia al explicar la variabilidad en y (hay una relación lineal entre x e y). Mientras que en los gráficos de (b) y (d) pueden obtenerse mejores resultados agregando términos polinomiales de mayor grado en x, es decir, se acepta H_0.

Ejercicio 11.

La autoridad aeronáutica argentina realizó un estudio de operaciones de aerolíneas, en 18 compañías, que reveló que la relación entre el número de pilotos empleados y el número de aviones en servicio tenía una pendiente de 4.3. Estudios anteriores indicaban que la pendiente de esta relación era 4.0. Si se calculó que la desviación estándar de la de pendiente de regresión es 0.17, ¿hay razones para creer, a un nivel de significancia de 0.05, que la pendiente verdadera ha cambiado?

Del enunciado se obtuvo:

$n = 18$

$\widehat{\beta_1} = 4.3$

$\widehat{\beta_{10}} = 4$

$\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{S_{xx}}} = 0.17$

Se expresa la hipótesis que queremos plantear como:

$$H_0: \beta_1 = 4 \; vs \; H_1: \beta_1 \neq 4$$

Como estadístico de prueba utilizaremos:

$$T = \frac{\widehat{\beta_1} - \theta}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$$

Regla de decisión:

- Se rechaza H_0 si $|T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$
- Se acepta en caso contrario.

Se calcula T y se usará un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

$T = \frac{4.3 - 4}{0.17}$=1.76470588235

$t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = t_{\frac{0.05}{2},18-2} = t_{0.025,16} = 2.11991$

Como $|1.76470588235| < 2.11991$ se acepta H_0. Es decir, no hay evidencia para saber si, a un nivel de significancia de 0.05, la pendiente verdadera ha cambiado.

Ejercicio 12.

Un horticultor inventó una escala para medir la frescura de rosas que fueron empacadas y almacenadas durante periodos variables antes de trasplantarlas. La medición y de frescura y el tiempo x en días que la rosa está empacada y almacenada antes de trasplantarla, se dan a continuación.

x	5	5	10	10	15	15	20	20	25	25
y	15,3	16,8	13,6	13,8	9,8	8,7	5,5	4,7	1,8	1,0

a) ¿Hay suficiente evidencia para indicar que la frescura está linealmente relacionada con el tiempo de almacenaje?

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i) * (\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n} = -379.0$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} = 500.0$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n} = 291.93999999999994$$

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{-379.0}{\sqrt{500.0 * 291.93999999999994}} = -0.9919902553515021$$

Si hay suficiente evidencia para para indicar que la frescura está linealmente relacionada con el tiempo de almacenaje ya que r es cercano a -1 → Correlación inversa perfecta.

b) Estime mediate un intervalo de 98% el descenso de frescura de las rosas por cada día que pasa.

c) Estime mediante un intervalo de 98% la frescura de las rosas cuando no han sido almacenada ni empacada.

d) Estime la medición de frescura media para un tiempo de almacenaje de 14 días con un intervalo de confianza de 95%.