

# TP1 - Cálculo en dos o más variables

## Ejercicio 1.

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a.  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

$$x^2 + y^2 = 0$$

$$(x, y) = (0, 0)$$

$$D = \{(x, y): (x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)\}$$

b.  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - z^2$

$$D = \{(x, y, z): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$$

c.  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 - 9}$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ Circunferencia de radio 3 centrada en } (0, 0).$$

$$D = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \neq 9\}$$

d.  $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}$

Nunca puede ser 0 porque a algo positivo se le suma algo positivo

$$D = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

e.  $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2 - z^2}$

$$y^2 - z^2 = 0$$

$$y^2 = z^2$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{z^2}$$

$$|y| = |z|$$

$$D = \{(x, y, z): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \wedge y \neq z \wedge y \neq -z\}$$

f.  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$$9 - x^2 - y^2 < 0$$

$$-x^2 - y^2 < -9$$

$$x^2 + y^2 > 9$$

$$D = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$$

g.  $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}$

$$D = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

h.  $f(x, y) = \log(16 - x^2 - 16y^2)$

$$16 - x^2 - 16y^2 \leq 0$$

$$1 - \frac{x^2}{16} - y^2 \leq 0$$

$$-\frac{x^2}{16} - y^2 \leq -1$$

$$\frac{x^2}{16} + y^2 \geq 1$$

$$D = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge \frac{x^2}{16} + y^2 < 1\}$$

## Ejercicio 2.

Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

a.  $f(x, y) = \log(9 - x^2 - 9y^2)$  en  $(1,0)$ ;  $(1,1)$ ;  $(0,1)$ ;  $(-1,1)$

$$f(1,0) = \log(9 - 1^2 - 9 * 0^2) =$$

$$= \log(9 - 1 - 0) =$$

$$= \log(8) \approx 0,90309$$

$$f(1,1) = \log(9 - 1^2 - 9 * 1^2) =$$

$$= \log(9 - 1 - 9) =$$

$$= \log(-1) = \text{Indefinido}$$

$$(1,1) \notin \text{Dom}(f)$$

$$f(0,1) = \log(9 - 0^2 - 9 * 1^2) =$$

$$= \log(9 - 0 - 9) =$$

$$= \log(0) = \textit{Indefinido}$$

$$(0,1) \notin \text{Dom}(f)$$

$$f(-1,1) = \log(9 - (-1)^2 - 9 * 1^2) =$$

$$= \log(9 - 1 - 9) =$$

$$= \log(-1) = \textit{Indefinido}$$

$$(-1,1) \notin \text{Dom}(f)$$

b.  $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$  en  $(1,0); (1,1); (0,1); (-1,1); (2,2)$

$$f(1,0) = \sqrt{4 - 1^2 - 4 * 0^2} =$$

$$= \sqrt{4 - 1 - 0} =$$

$$= \sqrt{3} = 1,732$$

$$f(1,1) = \sqrt{4 - 1^2 - 4 * 1^2} =$$

$$= \sqrt{4 - 1 - 4} =$$

$$= \sqrt{-1} = \textit{Indefinido}$$

$$(1,1) \notin \text{Dom}(f)$$

$$f(0,1) = \sqrt{4 - 0^2 - 4 * 1^2} =$$

$$= \sqrt{4 - 0 - 4} =$$

$$= \sqrt{0} = 0$$

$$f(-1,1) = \sqrt{4 - (-1)^2 - 4 * 1^2} =$$

$$= \sqrt{4 - 1 - 4} =$$

$$= \sqrt{-1} = \textit{Indefinido}$$

$$(-1,1) \notin \text{Dom}(f)$$

$$f(2,2) = \sqrt{4 - 2^2 - 4 * 2^2} =$$

$$= \sqrt{4 - 4 - 16} =$$

$$= \sqrt{-16} = \textit{Indefinido}$$

$$(2,2) \notin \text{Dom}(f)$$

c.  $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$  en  $(1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)$

$$\begin{aligned}
 f(1,0) &= e^{1^2+0^2} = \\
 &= e^{1+0} = \\
 &= e^1 = e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(1,1) &= e^{1^2+1^2} = \\
 &= e^{1+1} = \\
 &= e^2 \approx 7,38096
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(0,1) &= e^{0^2+1^2} = \\
 &= e^{0+1} = \\
 &= e^1 = e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(-1,1) &= e^{(-1)^2+1^2} = \\
 &= e^{1+1} = \\
 &= e^2 \approx 7,38096
 \end{aligned}$$

### Ejercicio 3

Calcular los siguientes límites, o demostrar que no existe

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} 5x - x^2 + 3y^2 &= \\
 &= 5 * 3 - 3^2 + 3 * 1^2 = \\
 &= 15 - 9 + 3 = 9
 \end{aligned}$$

El límite existe y es 9.

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{7x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} + 1 \right) &= \\
 &= \left( \frac{7*0^2 - 2*0^2}{0+0^2} + 1 \right) = \text{Indeterminado}
 \end{aligned}$$

Iterados:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{7x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} + 1 \right) \right) &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{7x^2 - 2 * 0^2}{x^2 + 0^2} + 1 \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{7x^2}{x^2} + 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{7\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2} + 1 \right) = 8$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{7x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} + 1 \right) \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{7 * 0^2 - 2y^2}{0^2 + y^2} + 1 \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{-2\cancel{y}^2}{\cancel{y}^2} + 1 \right) = -1$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe.

c.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,0)} e^{x+y^2-z} =$

$$= e^{1+1^2-0} = e^2 \approx 7,38906$$

El límite existe y es aproximadamente 7,38906.

d.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \sin(x + y + z) =$

$$= \sin(0 + 0 + 0) = 0$$

e.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4 + y^4} =$

$$= \frac{0^4}{0^4 + 0^4} = \text{Indeterminado}$$

Iterados:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + y^4} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^4}{x^4 + 0^4} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^4}{x^4} \right) = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + y^4} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0^4}{0^4 + y^4} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0}{y^4} \right) = 0$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe.

$$\begin{aligned} \text{f. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \\ &= \frac{(0 * 0)}{\sqrt{0^2 + 0^2}} = \\ &= \frac{0}{0} = \text{Indeterminado} \end{aligned}$$

Iterados:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x * 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{0}{\sqrt{x^2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{0}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0 * y}{\sqrt{0^2 + y^2}} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{y}{\sqrt{y^2}} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0}{y} \right) = 0 \end{aligned}$$

Recta  $y = mx$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x * (mx)}{\sqrt{x^2 + (mx)^2}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m * x^2}{\sqrt{x^2 + m^2 * x^2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m * x^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m * x^2}{|x| * \sqrt{(1+m^2)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2}{x} \right| \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} |x| \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} = \\
&= 0 * \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} = 0
\end{aligned}$$

Curva  $y = x^2$ :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x * x^2}{\sqrt{x^2 + (x^2)^2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + x^4}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2(1+x^2)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x| \sqrt{(1+x^2)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} * \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2}{x} \right| * \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} x * \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)}} = \\
&= \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0
\end{aligned}$$

Coordenadas Polares  $x = r \cos(\theta)$   $y = r \sin(\theta)$ :

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * r \sin(\theta)}{\sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2}} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{|r| \sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{r^2}{r} \right| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} |r| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} |r| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{1}} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} |r| * \cos(\theta) * \sin(\theta) = \\
&= 0 * \cos(\theta) * \sin(\theta) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto el límite siempre existe y es 0 independientemente del valor de  $\theta$ .

$$\begin{aligned}
\text{g. } \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} &= \\
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{(x - y)^2}{x - y} = \\
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} x - y = 0
\end{aligned}$$

El límite existe y es 0.

## Ejercicio 4

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida en todo  $\mathbb{R}^2$ , redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

$$\text{a. } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La función  $\frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  es continua en todos los  $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$  ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{Indeterminado}$$



Coordenadas Polares  $x = r \cos(\theta)$   $y = r \sin(\theta)$ :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos(\theta))^3}{\sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2}} = \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} = \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{|r| \sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{r^2}{r} \right| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} |r| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} |r| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{1}} = \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} |r| * r * \cos^3(\theta) =
 \end{aligned}$$

\*r no puede ser negativo al tratarse del radio de una circunferencia por lo que se puede sacar el módulo |r| y dejar solo r.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 * \cos^3(\theta) = \\
 &= 0^2 * \cos^3(\theta) = 0
 \end{aligned}$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de  $\theta$ .

$f(0,0) = 1$  por lo tanto no se cumple  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$  haciendo que la continuidad no este definida en todo  $\mathbb{R}^2$ . La función puede ser redefinida para extender su continuidad de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

De este modo se cumple  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$  y por lo tanto la función es continua en todo  $\mathbb{R}^2$ .

$$b. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

La función  $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$  es continua en todos los  $\mathbb{R}^2 - (0,0)$  ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{Indeterminado}$$

Iterados:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+0^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0}{\sqrt{0^2+y^2}} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0}{\sqrt{y^2}} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0}{y} \right) = 0$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe, por lo tanto no se cumple  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  haciendo que la continuidad no este definida en todo  $\mathbb{R}^2$ . Como el límite no existe se trata de una discontinuidad inevitable por lo que no se puede redefinir la función.

$$c. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

La función  $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$  es continua en todos los  $\mathbb{R}^2 - (0,0)$  ya que está compuesta por dos

funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{Indeterminado}$$

Coordenadas Polares  $x = r \cos(\theta)$  y  $y = r \sin(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos(\theta))^2}{\sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2}} &= \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{|r| \sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{r^2}{r} \right| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} |r| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} |r| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{1}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} |r| * \cos^2(\theta) = \end{aligned}$$

\*r no puede ser negativo al tratarse del radio de una circunferencia por lo que se puede sacar el módulo |r| y dejar solo r.

$$\begin{aligned} &= \lim_{r \rightarrow 0} r * \cos^2(\theta) = \\ &= 0 * \cos^2(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de  $\theta$ .

$f(0,0) = 0$  por lo tanto se cumple  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$  haciendo que la continuidad este definida en todo  $\mathbb{R}^2$ .

d.  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Como el  $Dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  se evaluará la continuidad en el punto (0,0) (el punto que genera problemas).

Coordenadas Polares  $x = r \cos(\theta)$  y  $y = r \sin(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * r \sin(\theta)}{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} &= \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * r \sin(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^2} \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\cancel{r^2} (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \cos(\theta) * \sin(\theta) = \cos(\theta) * \sin(\theta) \end{aligned}$$

Como el valor del límite depende de  $\theta$ , el mismo no existe, por lo tanto no se cumple  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  haciendo que la continuidad no este definida en todo  $\mathbb{R}^2$ .

Como el límite no existe se trata de una discontinuidad inevitable por lo que no se puede redefinir la función.

Además  $f(0,0) = \frac{0*0}{0^2+0^2} = \frac{0}{0}$  por lo tanto  $\nexists f(0,0)$ .

e.  $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Como el  $Dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  se evaluará la continuidad en el punto (0,0) (el punto que genera problemas).

Coordenadas Polares  $x = r \cos(\theta)$  y  $y = r \sin(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * (r \sin(\theta))^2}{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} &= \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * r^2 \sin^2(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^3} \cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{\cancel{r^2} (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r * \frac{\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r * \cos(\theta) * \sin^2(\theta) = \\ &= 0 * \cos(\theta) * \sin^2(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de  $\theta$ .

$f(0,0) = \frac{0 \cdot 0^2}{0^2 + 0^2} = \frac{0}{0}$  por lo tanto  $\nexists f(0,0)$  haciendo que la continuidad no este definida en todo  $\mathbb{R}^2$ . La función puede ser redefinida para extender su continuidad de la siguiente manera:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

## Ejercicio 5.

Encontrar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

a)  $f(x, y) = 3x^2y + y^3$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

$f$  es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$f_x(x, y) = 6xy$$

$$f_y(x, y) = 3x^2 + 3y^2$$

$$\text{Dom}(f_x) = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Dom}(f_y) = \mathbb{R}^2$$

b)  $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^3$$

$f$  es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$f_x(x, y, z) = 2xy + z^2$$

$$f_y(x, y, z) = x^2 + 2yz$$

$$f_z(x, y, z) = y^2 + 2zx$$

$$\text{Dom}(f_x) = \mathbb{R}^3$$

$$\text{Dom}(f_y) = \mathbb{R}^3$$

$$\text{Dom}(f_z) = \mathbb{R}^3$$

c)  $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x^2 + y)$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

$f$  es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$f_x(x, y) = e^{xy}y + \cos(x^2 + y) * 2x$$

$$f_y(x, y) = e^{xy}x + \cos(x^2 + y)$$

$$\text{Dom}(f_x) = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Dom}(f_y) = \mathbb{R}^2$$

d)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$f$  es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{(y * (x^2 + y^2)) - xy * 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{yx^2 + y^3 - 2x^2y}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = \\ &= \frac{y^3 + yx^2 * (1 - 2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = \\ &= \frac{y^3 - yx^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \end{aligned}$$

$$f_y(x, y) = \frac{x * (x^2 + y^2) - xy * 2y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{xy^2 + x^3 - 2y^2x}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = \\
&= \frac{x^3 + xy^2 * (1 - 2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = \\
&= \frac{x^3 - xy^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}
\end{aligned}$$

$$Dom(fx) = R^2 - \{(0,0)\}$$

$$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$$

e)  $f(x, y) = x^2 \log(x + y)$

$$Dom(f) = \{(x, y): (x, y) \in R^2 \wedge x + y > 0\}$$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x, y) = 2x * \ln(x + y) + \frac{x^2}{x+y}$$

$$fy(x, y) = \frac{x^2}{x + y}$$

$$Dom(fx) = \{(x, y): (x, y) \in R^2 \wedge x + y > 0\}$$

$$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$$

f)  $f(x, y) = \sum_{i=1}^n [y_i - (x + yx_i)]$

Paso.

## Ejercicio 6.

Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a)  $f(x, y) = xe^{x^2y}$  en  $(1, \log(2))$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$f_x(x, y) = e^{x^2 y} + e^{x^2 y} * 2 * x^2 * y$$

$$f_y(x, y) = x^3 * e^{x^2 y}$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^{1^2 \ln(2)} + e^{1^2 \ln(2)} * 2 * 1^2 * \ln(2) = \\ &= 2 + 4 \ln(2) \approx 4.77258 \end{aligned}$$

$$f_y(x, y) = 1^3 * e^{1^2 \ln(2)} = 2$$

b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  en (-4,3)

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_x(x, y) = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = -\frac{4}{5}$$

$$f_y(x, y) = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$$

## Ejercicio 7.

Analizar diferenciabilidad en  $\mathbb{R}^2$  de las siguientes funciones:

a)  $f(x, y) = \text{sen}(x^2 + y^2)$



$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

$f$  es continua en todo  $\mathbb{R}^2$  por lo que las derivadas parciales se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$f_x(x, y) = \cos(x^2 + y^2) * 2x$$

$$f_y(x, y) = \cos(x^2 + y^2) * 2y$$

$$\text{Dom}(f_x) = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Dom}(f_y) = \mathbb{R}^2$$

Como existen las derivadas parciales  $f_x(x, y)$  y  $f_y(x, y)$  y además estas son continuas en todo su dominio ( $\mathbb{R}^2$ ), entonces  $f$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ .

b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

$f$  es continua en todo su dominio por lo que las derivadas parciales se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Dom}(f_x) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$\text{Dom}(f_y) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Como  $(0,0)$  no pertenece al dominio de ambas derivadas parciales, debemos analizar que pasa con respecto a la diferenciabilidad en dicho punto. Se sabe que  $f$  es continua en  $(0,0)$ ; ahora veremos qué pasa con respecto a las derivadas parciales en  $(0,0)$  haciendo uso de la definición.

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

Como el limite puede dar dos valores, no existe el mismo haciendo que la función no tenga derivadas parciales en el punto (0,0) y por lo tanto no es diferenciable en todo  $R^2$ .

$$c) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Como tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas (aplicando las propiedades vistas en teoría se puede afirmar que todo polinomio es diferenciable)  $f$  es diferenciable en todos los puntos de  $R^2 - (0, 0)$ .

Falta ver qué pasa en el (0,0) y se analizara usando la diferenciability:

$f$  es continua en (0,0); para buscar las derivadas parciales se debe aplicar la definición.

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k^3} = 0$$

$f$  es diferenciable en el punto (0,0) si lo siguiente tiende a 0:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - \{f_x(x, y)(x - 0) + f_y(x, y)(y - 0) + f(0,0)\}}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2 + y^2) * \sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2 + y^2) * \sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2 + y^2) * (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Coordenadas Polares  $x = r \cos(\theta)$   $y = r \sin(\theta)$ :

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * r \sin(\theta)}{((r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
& = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * r \sin(\theta)}{(r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \\
& = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos(\theta) * \sin(\theta)}{r^3} = \\
& = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = \\
& = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = +\infty \\ \lim_{r \rightarrow 0^-} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = -\infty \end{cases}
\end{aligned}$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe. Por lo tanto f no es diferenciable en el punto (0,0) y en consecuencia no es diferenciable en todo  $R^2$ .

$$d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Como tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas (aplicando las propiedades vistas en teoría se puede afirmar que todo polinomio es diferenciable) f es diferenciable en todos los puntos de  $R^2 - (0, 0)$ .

Falta ver qué pasa en el (0,0) y se analizara usando la diferenciability:

f es continua en (0,0); para buscar las derivadas parciales se debe aplicar la definición.

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k^3} = 0$$

f es diferenciable en el punto (0,0) si lo siguiente tiende a 0:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - \{f_x(x, y)(x - 0) + f_y(x, y)(y - 0) + f(0,0)\}}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = \\
& = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy^2}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2) * \sqrt{x^2 + y^2}} = \\
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2) * \sqrt{x^2 + y^2}} = \\
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2) * (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \\
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Coordenadas Polares  $x = r \cos(\theta)$   $y = r \sin(\theta)$ :

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * (r \sin(\theta))^2}{((r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * r^2 * \sin^2(\theta)}{(r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{r^3} = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \cos(\theta) * \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

Como el valor del límite depende de  $\theta$  se puede concluir que el límite no existe. Por lo tanto  $f$  no es diferenciable en el punto  $(0,0)$  y en consecuencia no es diferenciable en todo  $R^2$ .

$$e) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Como tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas (aplicando las propiedades vistas en teoría se puede afirmar que todo polinomio es diferenciable)  $f$  es diferenciable en todos los puntos de  $R^2 - (0, 0)$ .

Falta ver qué pasa en el  $(0,0)$  y se analizara usando la diferenciabilidad:

$f$  es continua en  $(0,0)$ ; para buscar las derivadas parciales se debe aplicar la definición.

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{|h| * h} = 0$$

$$f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{|k| * k} = 0$$

$f$  es diferenciable en el punto  $(0,0)$  si lo siguiente tiende a 0:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - \{fx(x,y)(x-0) + fy(x,y)(y-0) + f(0,0)\}}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2} * \sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \end{aligned}$$

Como se trata de la suma de potencias, no hace falta poner el módulo puesto que nunca dará negativo.

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Coordenadas Polares  $x = r \cos(\theta)$   $y = r \sin(\theta)$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * r \sin(\theta)}{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) * r \sin(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos(\theta) * \sin(\theta)}{r^2} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \cos(\theta) * \sin(\theta) = \end{aligned}$$

Como el valor del límite depende de  $\theta$  se puede concluir que el límite no existe. Por lo tanto  $f$  no es diferenciable en el punto  $(0, 0)$  y en consecuencia no es diferenciable en todo  $R^2$ .

## Ejercicio 8.

Hallar, en caso de que exista, el plano tangente a la gráfica de la función  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$  en el punto  $(-1, 1, f(-1, 1))$ .

De ser posible, con ayuda de un software a su elección, muestre las gráficas de la función y el plano tangente.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

$f$  es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$f_x(x, y) = e^{x^2+y^2} * 2x$$

$$f_y(x, y) = e^{x^2+y^2} * 2y$$

$$\text{Dom}(f_x) = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Dom}(f_y) = \mathbb{R}^2$$

Como existen las derivadas parciales  $f_x(x, y)$  y  $f_y(x, y)$  y además estas son continuas en todo su dominio ( $\mathbb{R}^2$ ), entonces  $f$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ .

**Ecuación del plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ :**

$$z = f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Para hallar la ecuación del plano tangente debemos evaluar la función y sus derivadas parciales primeras en el punto  $(-1, 1)$ :

$$\begin{aligned} f_x(-1, 1) &= e^{(-1)^2+1^2} * 2 * (-1) = e^2 * (-2) \approx 7.38905609893 * (-2) \\ &\approx -14.7781121979 \end{aligned}$$

$$f_y(-1, 1) = e^{(-1)^2+1^2} * 2 = e^2 * 2 \approx 7.38905609893 * 2 \approx 14.7781121979$$

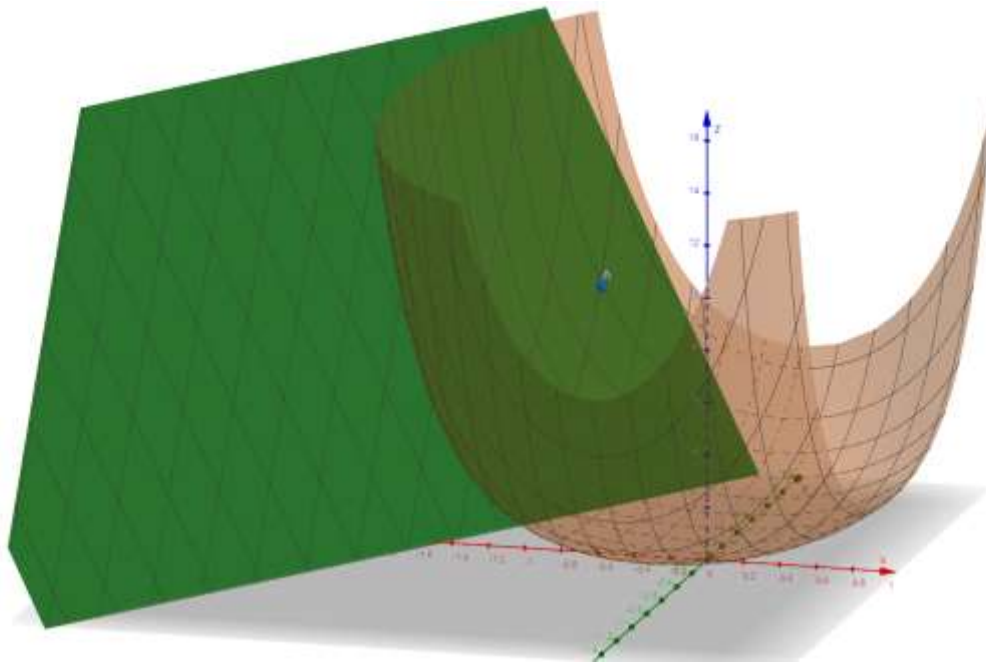
$$f(-1, 1) = e^{(-1)^2+1^2} = e^2 \approx 7.38905609893$$

Por lo tanto, el plano tangente a la gráfica de  $f$  por el punto  $(-1, 1, f(-1, 1))$  es:

$$z = -14.7781121979 * (x - (-1)) + 14.7781121979 * (y - 1) + 7.38905609893$$

$$z = e^2 * (-2) * (x - (-1)) + e^2 * 2 * (y - 1) + e^2$$

Gráfico de  $f(x, y)$  y del plano tangente



## Ejercicio 9.

Encontrar la aproximación lineal de la función  $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$  en  $(1, 0)$  y utilizarla para estimar aproximadamente  $f(0.98, 0.05)$ .

Grafique con ayuda de software la función y su aproximación lineal.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

$f$  es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$f_x(x, y) = 2x + e^{xy} * y$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 + e^{xy} * x$$

$$\text{Dom}(f_x) = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Dom}(f_y) = \mathbb{R}^2$$

Como existen las derivadas parciales  $f_x(x, y)$  y  $f_y(x, y)$  y además estas son continuas en todo su dominio ( $\mathbb{R}^2$ ), entonces  $f$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ .

Para hallar la ecuación del plano tangente debemos evaluar la función y sus derivadas parciales primeras en el punto  $(1, 0)$ :

$$f_x(1, 0) = 2 * 1 + e^{1*0} * 0 = 2$$

$$f_y(1, 0) = 4 * 0^3 + e^{1*0} * 1 = e^0 = 1$$

$$f(1, 0) = 1^2 + 0^4 + e^{1*0} = 1 + 1 = 2$$

El plano tangente a la gráfica de  $f$  por el punto  $(1, 0, f(1, 0))$  es:

$$z = 2 * (x - 1) + 1 * (y - 0) + 2 = 2x - 2 + y + 2 = 2x + y$$

**Linealización de  $f$  en el punto  $P_0 = (x_0, y_0)$ :**

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0)$$

La linealización de  $f$  alrededor de  $(0.98, 0.05)$  está dada por la función:

$$L(x, y) = 2 + 2 * (x - 1) + 1 * (y - 0) = 2 + 2x - 2 + y = 2x + y$$

Por lo tanto, la aproximación lineal de  $f$  en el punto  $(0.98, 0.05)$  es:

$$L(0.98, 0.05) = 2 * 0.98 + 0.05 = 2.01$$

$$\text{Entonces } f(0.98, 0.05) \approx L(0.98, 0.05) = 2.01$$

Gráfico de  $f(0.98, 0.05) \approx L(0.98, 0.05)$



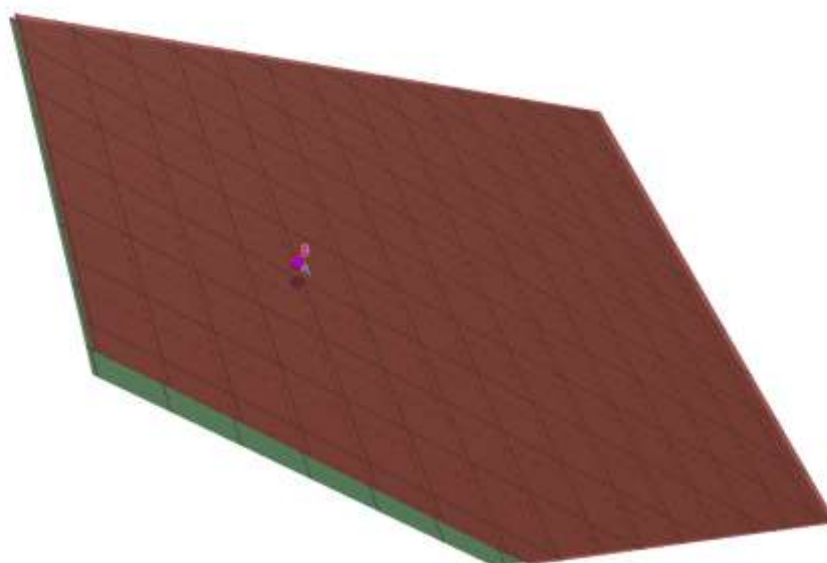


Gráfico de  $f(x, y)$  y del plano tangente

