# Matemática 4 - 2024

# TP1 - Cálculo en dos o más variables

1. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

   (b) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2-9}$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2+1}$

   (e) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{y^2-z^2}$

   (f) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

   (g) $f(x,y) = e^{-x^2+y^2}$

   (h) $f(x,y) = \log\left(16-x^2-16y^2\right)$

2. Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

   (a) $f(x,y) = \log\left(9-x^2-9y^2\right)$ en $(1,0);(1,1);(0,1);(-1,1)$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$ en $(1,0);(1,1);(0,1);(-1,1);(2,2)$

   (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en $(1,0);(1,1);(0,1);(-1,1)$

3. Calcular los siguientes límites, o demostrar que no existen:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} 5x - x^2 + 3y^2$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{(7x^2-2y^2)}{x^2+y^2}+1\right)$

   (c) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin\left(x+y+z\right)$

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^4+y^4}$

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (g) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida en todo $R^2$, redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

   (e) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

5. Encontrar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

   (a) $f(x,y) = 3x^2y + y^3$
   (b) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$
   (c) $f(x,y) = e^{xy} + \sin\big(x^2 + y\big)$
   (d) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
   (e) $f(x,y) = x^2 \log(x+y)$
   (f) $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (x + yx_i)]^2$

6. Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   (a) $f(x,y) = xe^{x^2y}$ en $(1, \log(2))$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ en $(-4,3)$

7. Analizar diferenciabilidad en $R^2$ de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = sen(x^2+y^2)$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{x.y^2}{x^2+y^2} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$

(e) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$

8. Hallar, en caso de que exista, el plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en el punto $(-1,1,f(-1,1))$.
   De ser posible, con ayuda de un software a su elección, muestre las gráficas de la función y el plano tangente.

9. Encontrar la aproximación lineal de la función $f(x,y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en $(1,0)$ y utilizarla para estimar aproximadamente $f(0.98, 0.05)$.
   Grafique con ayuda de software la función y su aproximación lineal.

10. Calcular los vectores gradientes de las siguientes funciones

    (a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

    (b) $f(x,y,z) = x.y.z$

11. Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en los puntos y dirección de los vectores dados:

    (a) $f(x,y) = x^2 + 3xy^2$ ; $p = (1,2)$ y $\vec{v} = (-1,-2)$

    (b) $f(x,y) = x.y^2$ ; $p = (1,1)$ y $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -1)$

12. Encontrar las direcciones en las cuales la derivada direccional en el punto $(1,0)$ de $f(x,y) = x^2 + sen(xy)$ tiene el valor 1.

13. Encontrar la dirección de máximo crecimiento de las siguientes funciones en los puntos dados:

    (a) $f(x,y) = xe^y + 3y$ ; $p = (1,0)$

    (b) $f(x,y) = 4x^2yz^3$ ; $p = (1,2,1)$

14. Hallar máximos, mínimos y puntos silla de las siguientes funciones. Además calcular el valor de la misma en cada uno esos puntos

    (a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

    (b) $f(x,y) = xy - 2x - y$

    (c) $f(x,y) = xseny$

15. El criterio de las derivadas segundas, ¿permite clasificar los puntos estacionarios de $f(x, y) = x^2 y$ ?
    En caso afirmativo, hallarlos y analizarlos.

16. Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y - 2$

    (a) Hallar el mínimo de la función de dos formas:

        i. Analítica: Calculando los punto estacionarios.

        ii. Numérica: Mediante el método de descenso del gradiente. Utilizar tolerancia de 0.0001, tamaño de paso 0.4 y punto de inicio $x_0 = (10, 2)$.

    (b) ¿Cuántas iteraciones fueron necesarias para la convergencia del método del gradiente? Realice la búsqueda nuevamente pero con tamaño de paso 0.1 ¿Cuántas iteraciones fueron necesarias para la convergencia en este caso?

    (c) ¿Qué ocurre si utilizamos el mismo tamaño de paso (0.4) de este punto para hallar el mínimo de la función del punto anterior?

    (d) (Para pensar) A raíz del inciso anterior ¿Siempre se puede elegir el mismo tamaño de paso para cualquier función que estudiemos? ¿Qué ocurre cuando éste parámetro es muy grande o muy pequeño?

# Ejercicios Adicionales

- Hallar el dominio de las siguientes funciones:

    1. $f(x,y) = \log\left(4 - x^2 - y^2\right)$
    2. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
    3. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - 9y^2}$

- Analizar los siguientes límites:

    1. $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{2x^2y^3}{x^2+y^4})$
    2. $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{x(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}})$
    3. $lim_{(x,y)\to(0,1)} \quad (\frac{2xy-2x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}})$
    4. $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{yx^3-xy^3}{x^2+y^2})$
    5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad \frac{xye^x}{x^2+y^2}$

- Dada la función $f(x,y) = xy.\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$ definir $f(0,0)$ de manera que $f$ sea continua en el origen y demostrarlo.

- Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)+x^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ probar que:

    1. Existen las derivadas parciales de $f$ en $(0,0)$.
    2. $f$ no es continua en $(0,0)$.

- Para interpretar intuitivamente el cálculo de las derivadas por definición genere un código similar al que realizó anteriormente que muestre como los límites se van acercando a las derivadas parciales (calculadas por regla) evaluadas en un punto.

- Analizar en qué región del plano las siguientes funciones son diferenciables:

    1. $f(x,y) = 3x^2y + y^3$
    2. $f(x,y) = xy$
    3. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2-1}{x^2+y^2+1}$
    4. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

5. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- Hallar, en caso que exista, una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

1. $f(x,y) = xy$ en $(0,0)$
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $(1,2)$
3. $f(x,y) = e^y(x^2 + y^2)$ en $(1,0)$
4. $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ en $(1,1)$
5. $f(x,y) = e^x \cos(xy)$ en $(0,0)$

- Encontrar, si existe, la linealización $L(x,y)$ de la función en el punto indicado:

1. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2.y^2}$ en $(0,2)$
2. $f(x,y) = \frac{y}{x+y}$ en $(1,2)$

- Encontrar la dirección de máximo crecimiento de función $f(x,y) = xe^y + y^2$ en el punto $p = (1,1)$

- Para interpretar la idea de derivada direccional (y su cálculo por definición), generar un código que calcule la derivada direccional "'acortando"' la distancia entre los puntos (calcular el límite con $t$ cada vez más chico).

- Dada la función $f(x) = x^4 + 2x^3$ hallar el mínimo de la función de dos formas:

1. Hallar el mínimo de la función de dos formas:
   (a) Analítica: Calculando los punto críticos
   (b) Numérica: Mediante el método de descenso del gradiente. Utilizar tolerancia de 0.0001, tamaño de paso 0.1 y punto de inicio $x_0 = -2$.
2. ¿Cuántas iteraciones son necesarias hasta alcanzar el mínimo con el método del gradiente con inicio en $x_0 = -2$? Realice la búsqueda nuevamente pero con inicio en $x_0 = 0.4$ ¿Cuántas iteraciones fueron necesarias en este caso? ¿Se alcanzó el mínimo?
3. (Para pensar) ¿Por qué no se llegó al mismo valor en el segundo caso? ¿Siempre se alcanza el mínimo global de la función que se estudia utilizando el método del descenso del gradiente?

1. Sea $f : D \subset R^2 \to R$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Dar el dominio de $f$ y analizar su continuidad.

   (b) Analizar si $f$ es diferenciable en todo su dominio.

   (c) Hallar, si existe, el plano tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(-3, 4, f(-3, 4))$. Dibujar (con ayuda de software) el plano y la función en un mismo gráfico .

2. Sea $g : D \subset R^2 \to R$ dada por: $g(x,y) = e^{x^2}.(sen(y) + cos(y))$

   (a) Analizar la diferenciabilidad de $g$

   (b) Encontrar la aproximación lineal de la función $g$ en $(-1, \frac{\pi}{2})$ y utilizarla para estimar aproximadamente $g(-0.98, 1.55)$. Graficar con ayuda de software, la función y su aproximación lineal.

   (c) Encontrar la dirección de máximo crecimiento de $g$ en el punto $(2, \pi)$

3. Sea $g : D \subset R^2 \to R$ dada por: $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

   - Analizar la diferenciabilidad de $g$ en todo $R^2$
   - Encontrar, de ser posible, la dirección de máximo crecimiento de $g$ en el punto $(4, 3)$
   - Encontrar, de ser posible, la aproximación lineal de la función $g$ en $(3, -4)$ y utilizarla para estimar aproximadamente $g(2.998, -4.003)$.
     Graficar con ayuda de software, la función y su aproximación lineal.