TP5 – Estructuras Algebraicas - Morfismos

Agustina Sol Rojas

Ejercicio 1.

Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos entre las estructuras algebraicas indicadas y en caso afirmativo hallar nucleó e imagen.

a) $f: G \rightarrow F$ dada por $f(x) = 2^x$ y siendo los grupos $G = (R, +)$ los reales con la suma usual, $F = (R_0, \cdot)$ los reales sin el 0 con el producto usual.

<u>Verificación de neutro a neutro:</u>

El neutro de la suma en los reales es el 0. El neutro del producto en los reales sin el 0 es el 1.

$f(0) = 2^0 = 1$

<u>Verificación de morfismo:</u>

Es homomorfismos ya que sucede $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ para todo $a, b \in G$:

$f(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = f(a) \cdot f(b)$

$Nu(f) = \{0\}$

$Im(f) = \{a \in R_0 : a = 2^k, k \in Z\}$

b) $f: G \rightarrow F$ dada por $f(x) = -x$ y siendo los grupos $G = (Z, *)$ los enteros con la operación $a * b = a + b + ab$, $F = (Z, \circ)$ los enteros con la operación $a \circ b = a + b - ab$.

No es homomorfismos ya que no se cumple $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ para todo $a, b \in G$:

$f(a * b) = f(a + b + ab) = -(a + b + ab) = -a - b - ab \neq -a - b + ab$

$= f(a) \circ f(b)$

c) $f: (P(A),\cup) \to (P(A),\cap)$ dada por $f(X) = X^c$ (siendo A cualquier conjunto, $P(A)$ indica el conjunto de partes de A y X^c el complemento de un conjunto).

Verificación de neutro a neutro:

Neutro de la unión $\to \emptyset$

Neutro de la intersección $\to A$

$f(\emptyset) = \emptyset^c = A$

Verificación de morfismo:

Es homomorfismos ya que sucede $f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y)$ para todo $X, Y \in P(A)$:

$f(X \cup Y) = (X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c = f(X) \cap f(Y)$

$Nu(f) = \emptyset$

$Im(f) = P(A)$

Ejercicio 2.

Sea $f: G \to H$ un homomorfismo de grupos. Demostrar que el nucleó y la imagen de f son subgrupos de G y H respectivamente.

1. $Nu(f)$ subgrupo de G

Elemento neutro:

Como siempre vale que $f(e_1) = e_2$, el neutro de G pertenece al núcleo.

Operación bien definida y elemento inverso:

Como $a, b \in Nu(f)$ entonces $f(a) = e_2 = f(b)$ Ahora, como f es morfismo,

$f(a * b^{-1}) = f(a) \otimes f(b^{-1}) = f(a) \otimes \left(f(b)\right)^{-1} = e_2 \otimes (e_2)^{-1} = e_2 \otimes e_2 = e_2$

2. $Im(f)$ subgrupo de H

Elemento neutro:

Como f es morfismo siempre vale que $f(e_1) = e_2$, el neutro de H pertenece a la imagen.

<u>Operación bien definida y elemento inverso</u>:

Como $a, b \in Im(f)$ entonces $\exists x, y \in G$ tal que $f(x) = a$ y $f(y) = b$. Ahora, como f es morfismo, $a \otimes b^{-1} = f(x) \otimes f(y)^{-1} = f(x) \otimes f(y^{-1}) = f(x * y^{-1})$. Como $f(x * y^{-1}) = a \otimes b^{-1}$, $a \otimes b^{-1} \in Im(f)$.

Ejercicio 3.

Sea $(G,*)$ un grupo. Demostrar que la función $f: G \rightarrow G$ definida por $f(a) = a^2$ es un homomorfismo si y sólo si G es abeliano (recordar un ejercicio de grupos abelianos de la primera parte del TP 5.

1. $f: G \rightarrow G$ es un homomorfismo $\rightarrow$ G es abeliano
   i. Como $f: G \rightarrow G$ es un homomorfismo se da que $f(a * b) = f(a) * f(b)$
   ii. Aplicamos la función y nos deja los siguiente aplicando la asociatividad de G al ser grupo:
      a. $(a * b)^2 = a^2 * b^2$
      b. $(a * b) * (a * b) = a * a * b * b$
      c. $a * b * a * b = a * a * b * b$
   iii. Multiplicamos ambos lados por a^{-1} y como G es grupo se cumple que $a^{-1} * a = e$:
      a. $(a^{-1} * a) * b * a * b = (a^{-1} * a) * a * b * b$
      b. $e * b * a * b = e * a * b * b$
      c. $b * a * b = a * b * b$
   iv. Multiplicamos ambos lados por b^{-1} y como G es grupo se cumple que $b * b^{-1} = e$:
      a. $b * a * (b * b^{-1}) = a * b * (b * b^{-1})$
      b. $b * a * e = a * b * e$
      c. $b * a = a * b$
   v. $*$ es conmutativa en G, por lo tanto G es abeliano.

2. G es abeliano $\rightarrow$ $f: G \rightarrow G$ es un homomorfismo
   i. Como G es abeliano se da que $*$ es asociativa y conmutativa, existe elemento neutro y todos los elementos de G tienen inverso.

ii. Sea $a, b \in G$ se da:

$f(a * b) = (a * b)^2 = (a * b) * (a * b) = a * b * a * b = a * a * b * b =$
$(a * a) * (b * b) = a^2 * b^2 = f(a) * f(b)$

iii. Por lo tanto para todo $a, b \in G$ se da que $f(a * b) = f(a) * f(b)$, haciendo que $f: G \to G$ es un homomorfismo.

Ejercicio 4.

Si H_1,H_2 son dos subgrupos de un grupo conmutativo G, probar que la aplicación $f: H_1 \times H_2 \to G$ dada por $f(a, b) = ab$, es un morfismo de grupos.

1. Como $H_1 \times H_2$ son subgrupos de G, $H_1 \times H_2$ es un grupo con la operación definida por:
   i. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$
2. Teniendo en cuenta que G es un grupo conmutativo desarrollamos:
   $$f\big((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)\big) = f(a_1 a_2, b_1 b_2) = (a_1 a_2) \cdot (b_1 b_2) = (a_1 b_1) \cdot (a_2 b_2)$$
   $$= f(a_1, b_1) \cdot f(a_2, b_2)$$
3. Como vale $f\big((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)\big) = f(a_1, b_1) \cdot f(a_2, b_2)$, $f: H_1 \times H_2 \to G$ es un morfismo de grupos

Ejercicio 5.

Si $f: G_1 \to G_2$ es un morfismo de grupos entonces es monomorfismo si y sólo si $Nu(f) = \{e_1\}$.

1. Si $f: G_1 \to G_2$ es monomorfismo $\to Nu(f) = \{e_1\}$
   i. Como $f: G_1 \to G_2$ es morfismo de grupo se da que:
      a. $f(e_1) = e_2$
   ii. Como $f: G_1 \to G_2$ es monomorfismo se da que f es inyectiva, es decir, a cada elemento de G_2 le corresponde como máximo a un elemento de G_1. Esto quiere decir que al neutro (e_2) de G_2 le corresponde un solo elemento, que como se vio en i. ese elemento es e_1.
   iii. Por lo tanto $Nu(f) = \{e_1\}$
2. Si $Nu(f) = \{e_1\} \to f: G_1 \to G_2$ es monomorfismo

i. Suponiendo que no es un monomorfismo se da que para $a, b \in G_1$:

   a. $f(a) = f(b)$

ii. Esto quiere decir que:

   a. $f(a) \otimes (f(b))^{-1} = e_2$

iii. Como $f: G_1 \to G_2$ es morfismo de grupo se da que:

   a. $f(a * b^{-1}) = e_2$

iv. Esto quiere decir que $a * b^{-1} \in Nu(f)$.

v. Por hipótesis como solamente $e_1 \in Nu(f)$ entonces $e_1 = a * b^{-1}$. Como $e_1 = a * a^{-1}$, $a = b$.

vi. Por lo tanto f es inyectiva, ya a cada elemento de G_2 le corresponde como máximo a un elemento de G_1, haciendo que $f: G_1 \to G_2$ sea un monomorfismo.

Ejercicio 6.

Sea $(G,*)$ un grupo. Demostrar que la función $f: G \to G$ definida por $f(a) = a^{-1}$ es un isomorfismo si y sólo si G es abeliano

Biyectiva:

f es inyectiva y sobreyectiva todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada (llegan a elementos distintos), y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.

1. Si $f: G \to G$ es isomorfismo → G es abeliano

   i. Como $f: G \to G$ es isomorfismo, f es biyectiva y morfismo de grupo.

   ii. Sea $a^{-1}, b^{-1} \in G$ se da que:

      a. $f(a^{-1} * b^{-1}) = (a^{-1} * b^{-1})^{-1} = b * a$

      b. $f(a^{-1}) * f(b^{-1}) = a * b$

   iv. Como $f: G \to G$ es morfismo de grupo, $f(a^{-1} * b^{-1}) = f(a^{-1}) * f(b^{-1})$ es decir:

      a. $b * a = a * b$

   v. Por lo tanto G es abeliano.

2. Si G es abeliano→ $f: G \to G$ es isomorfismo

   i. Como G es abeliano $b * a = a * b$

   ii. $f(a * b) = (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} = a^{-1} * b^{-1} = f(a) * f(b)$

iii. Por lo tanto $f(a * b) = f(a) * f(b)$ haciendo que $f: G \to G$ sea morfismo de grupo.

iv. Como G es grupo, se da que para todo $a \in G$ el inverso existe y es único y como $f(a) = a^{-1}$, entonces $f: G \to G$ es biyectiva, ya que todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada (su inverso el cual es único)(esto es monomorfismo) y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida (su inverso el cual se sabe que existe)(esto es epimorfismo).

Ejercicio 7.

Sea R una relación de congruencia sobre un semigrupo $(S,*)$ y $(S/R,\circledast)$ el semigrupo cociente correspondiente.

Demostrar que la función $f_R: S \to S/R$ definida por $f_R(a) = \bar{a}$ es un homomorfismo.

1. Por la definición de la operación $\circledast$ se sabe que:
   i. $\bar{a} \circledast \bar{b} = \overline{a * b}$
2. Sea $a, b \in S$:
   i. $f_R(a * b) = \overline{a * b} = \bar{a} \circledast \bar{b} = f_R(a) \circledast f_R(b)$
3. Como $f_R(a * b) = f_R(a) \circledast f_R(b)$, $f_R: S \to S/R$ un homomorfismo.

Ejercicio 8.

Sea z un número complejo. ¿Cuándo será un isomorfismo de grupos la aplicación $f: C \to C$ siendo C el conjunto de los números complejos, dada por $f(x) = z.x$?

Sea el numero complejo $x = a + bi$, la aplicación de $f: C \to C$ será un isomorfismo cuando $z \neq 0$.

Ejercicio 9.

Probar que hay un isomorfismo entre en grupo de las matrices $2x2$ con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales R_4 con la suma usual.

Se debe probar que $f: R_{2x2} \to R_4$ es un isomorfismo. Para ello se programa primero es morfismo, luego que monomorfismo y luego que es epimorfismo, y así será isomorfismo.

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, b, c, d).$$

Se usará $+_m$ para denotar la suma entre R_{2x2} y $+_v$ para denotar las suma entre R_4.

1. Morfismo:
   i. Sea $A, B \in R_{2x2}$:
      a. $f(A +_m B) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} +_m \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) =$

      $f\left(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}\right) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) =$

      $(a_1, a_2, a_3, a_4) +_v (b_1, b_2, b_3, b_4) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right) +_v f\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) =$

      $f(A) +_v f(B)$

   ii. Como se cumple $f(A +_m B) = f(A) +_v f(B)$, $f: R_{2x2} \to R_4$ es morfismo de grupo.
2. Monomorfismo:
   i. Sea $f(A) = f(B)$ para $A, B \in R_{2x2}$ para matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$
      a. $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$
   ii. Como se da que:
      - $a_1 = b_1$
      - $a_2 = b_2$
      - $a_3 = b_3$
      - $a_4 = b_4$

      Por igualdad de vectores $A = B$
   iii. Por lo tanto $f: R_{2x2} \to R_4$ es un monomorfismo.
3. Epimorfismo:
   i. Se debe probar que para todo $V \in R_4$ se da que existe un $M \in R_{2x2}$ tal que $f(M) = V$
   ii. Sea V un vector cualquiera de R_4 tal que $V = (x, y, z, w)$ existe un $M \in R_{2x2}$ tal que $f(M) = V$ y ese $M = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}$

iii. Por lo tanto $f: R_{2x2} \rightarrow R_4$ es un epimorfismo.

Por lo tanto $f: R_{2x2} \rightarrow R_4$ es un isomorfismo.

Ejercicio 10.

Probar que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a $(Z_m, +)$

- Un grupo cíclico de orden m es un grupo G en el que existe $g \in G$ tal que para todo elemento $a \in G$ existe un entero k tal que $a = g^k$.
  - $G = \{e, g^1, \dots, g^{m-1})$.
  - Al ser de orden finito, $g^m = e$.
- $Z_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$
  - $(Z_m, +)$ es un anillo, se demostró en la practica anterior.
- Se propone la función $f: G \rightarrow Z_m$ dada por $f(g^k) = \bar{k}$
  - Por la naturaleza del grupo G, k será un numero entre $0\ y\ m - 1$.
  - Esta función asigna cada potencia de g a su correspondiente clase de equivalencia en Z_m.
- Es un isomorfismo:
  - Morfismo de grupo:
    - Sea g^k y $g^l \in G$ se da, empleando una ley de los exponentes en G y la asociatividad en Z_m, lo siguiente:
      - $f(g^k * g^l) = f(g^{k+l}) = (k + l) = \overline{k + l} = \bar{k} + \bar{l} = f(g^k) + f(g^l)$.
  - f es Biyectiva:
    - Inyectiva:
      - Sea g^k y $g^l \in G$ tal que $f(g^k) = f(g^l)$ sucede que:
        - $\bar{k} = \bar{l}$, lo que significa que $g^k = g^l$ ya que $k = l$ debido a que el orden de G es igual a la cantidad de clases de equivalencia de Z_m.
      - Por lo tanto f es inyectiva, ya que el único caso donde dos elementos del conjunto de salida tienen la misma imagen en el conjunto de llegada es cuando son el mismo elemento.

- Sobreyectiva:
  - Dado cualquier $\bar{a} \in Z_m$ se puede encontrar un elemento de G que se mapea a $\bar{a}$ y ese elemento es g^a. Para cualquier $\bar{a} \in Z_m$ se da que $f(g^a) = \bar{a}$.
  - Por lo tanto f es sobreyectiva, ya que a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.