TP4 – Relaciones entre conjuntos

Agustina Sol Rojas

Ejercicio 1.

Sean los conjuntos A = {1, 0, −1} y B = {4, 3, 2, 1}. Decide si las siguientes corresponden a relaciones de A en B. Justifica.

a. R = {(1; 1),(0; 2)}
   - $(1;1) \in A \times B$
   - $(0;2) \in A \times B$
   - Por lo tanto $R \subseteq A \times B$

b. R = {(−1; 1),(1; −1)}
   - $(-1;1) \in A \times B$
   - $(1;-1) \notin A \times B$
   - Por lo tanto no se da que $R \subseteq A \times B$.
     - R no es una relación de A en B

c. R = {(−1; 1),(−1; 2),(−1; 3)}
   - $(-1;1) \in A \times B$
   - $(-1;2) \in A \times B$
   - $(-1;3) \in A \times B$
   - Por lo tanto $R \subseteq A \times B$.

d. R = {(4; 1)}
   - $(4;1) \notin A \times B$
   - Por lo tanto no se da que $R \subseteq A \times B$.
     - R no es una relación de A en B

e. R = ∅
   - $\emptyset \notin A \times B$
   - Por lo tanto no se da que $R \subseteq A \times B$.

Ejercicio 2.

Sea A = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}, B = Z y la relación de A en B que viene definida en la forma: xRy si y sólo si y es el cuadrado de x. Escribe R por extensión. Define R^{-1} por comprensión y por extensión.

R por extensión:

$$R = \{(-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$$

R^{-1} por comprensión:

$$R^\wedge(-1) = \{(y, x): (x, y) \in \ R\}$$

$$R^\wedge(-1) = \{(y, x): (y \ \in A) \quad [\![(\_^\wedge)(x \ \in B)]\!] \ ^\wedge \ (x^\wedge 2 = y)\}$$

R^{-1} por extensión:

$$R^\wedge(-1) = \{(9, -3), (4, -2), (1, -1), (0,0), (1,1), (4,2), (9,3)$$

Ejercicio 3.

Sean los conjuntos A = {a, b, c, d, e} , V = {vocales} y B = {1, 2, 3}. Decide si las siguientes corresponden a relaciones. Justifica

a. R = {(a, a, a); (a, b, c); (b, c, d)} en A × A × A
    - $(a, a, a) \in A \times A \times A$
    - $(a, b, c) \in A \times A \times A$
    - $(b, c, d) \in A \times A \times A$
    - Por lo tanto $R \subseteq A \times A \times A$.

b. R = {(a, a, a); ((c, e, 2); (a, b, 1)} en A × V × B
    - $(a, a, a) \notin A \times V \times B$
    - $(c, e, 2) \in A \times V \times B$
    - $(a, b, 1) \notin A \times V \times B$
    - Por lo tanto no se da que $R \subseteq A \times V \times B$.

c. R = {(a, b, 1); (e, c, 2) : (i, j, 3)} en V × A × B

- $(a, b, 1) \in V \times A \times B$
- $(e, c, 2) \in V \times A \times B$
- $(i, j, 3) \notin V \times A \times B$
- Por lo tanto no se da que $R \subseteq V \times A \times B$.

d. R = {(a, z, 3); ((b, i, 2); (c, x, 1)} en A × V × B

- $(a, z, 3) \notin A \times V \times B$
- $(b, i, 2) \in A \times V \times B$
- $(c, x, 1) \notin A \times V \times B$
- Por lo tanto no se da que $R \subseteq V \times A \times B$.

Ejercicio 4.

Sea A = {1, 2, 3} y la relación R en A × A × A definida en la forma: (x, y, z) ∈ R si y sólo si x < y & y < z , siendo < el "menor" usual entre números reales. Escribe R por extensión

$$R = (\{1,2,3\})$$

Ejercicio 5.

Para cada una de las siguientes relaciones: dar tres pares que pertenezcan y tres pares que no; indicar si son reflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas.

a. En el conjunto de los números reales

- xRy si y sólo si x ≥ 4 & y ≥ 5.
  - Pares que pertenecen:
    - i. (4,5)
    - ii. (4,6)
    - iii. (4,7)
  - Pares que no pertenecen:
    - i. (3,5)
    - ii. (3,6)
    - iii. (3,7)
  - No es reflexiva puesto que no se da que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que xRx

        i. Contraejemplo: $4 \in \mathbb{R}$ pero $(4,4) \notin R$
- No es simétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en $\mathbb{R}$ vale que xRy implica yRx
    i. Contraejemplo: $(4,5) \in R \rightarrow (5,4) \in R$
        1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es simétrica.
- No es antisimetrica puesto que no se cumple que para todo x, y en $\mathbb{R}$ vale que xRy e yRx implican que $x = y$
    i. Contraejemplo: $(5,6)$ ^ $(6,5) \in R \rightarrow 5 = 6$
        1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es asimetrica.
- Si es transitiva puesto que para todo x, y, z en $\mathbb{R}$ vale que xRy e yRz implican que xRz
    i. Si vale xRy se cumple que $x \geq 4\ e\ y \geq 5$
    ii. Si vale yRz se cumple $y \geq 4\ y\ z \geq 5$
    iii. En el caso xRz como por i. se cumple que $x \geq 4$ y por ii. se cumple que $z \geq 5$, entonces vale yRz
    iv. Por lo tanto siempre que el antecedente sea verdadero, teniendo en cuenta lo dicho en iii. el consecuente será verdadero y siempre que el antecedente sea falso, teniendo en cuenta lo dicho en iii. el consecuente será falso. En ambos casos la implicación es verdadero y por lo tanto la relación es transitiva.

- xRy si y sólo si y ≤ x ≤ y + 3.
    - Pares que pertenecen:
        i. (3,1)
        ii. (3,2)
        iii. (4,2)
    - Pares que no pertenecen:
        i. (3,3)
        ii. (4,4)
        iii. (5,6)

- No es reflexiva puesto que no se da que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que xRx
    i. Contraejemplo: $3 \in \mathbb{R}$ pero $(3,3) \notin R$
- No es simétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en $\mathbb{R}$ vale que xRy implica yRx
    i. Contraejemplo: $(3,1) \in R \rightarrow (1,3) \in R$
        1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es simétrica.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo x, y en $\mathbb{R}$ vale que xRy e yRx implican que $x = y$
    i. Si vale xRy se cumple que $y \leq x \leq y + 3$.
    ii. Hay casos donde vale xRy pero no valdrá yRx puesto que si $x > y$ vale $x \leq y \leq x + 3$ pero nunca se dará $x \leq y$, por lo tanto no se cumplirá $x \leq y \leq x + 3$
    iii. Esto hace que el antecedente sea siempre falso ya que no ocurre que para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ vale xRy e yRx por lo tanto la implicación se cumple trivialmente.
- No es transitiva puesto que no se cumple que para todo x, y, z en $\mathbb{R}$ vale que xRy e yRz implican que xRz
    i. Contraejemplo: $(9,6) \in R$ ^ $(6,3) \in R \rightarrow (9,3) \in R$
        1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, ya que no se cumple que $3 \leq 9 \leq 3 + 3$ por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es transitiva.

b. Sean A = {1, 2, 3, 4} y P(A) el conjunto de partes de A

P(A) = $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,1\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,1,\{3,2\},\{3,3\},\{3,4\},\{4,1\},\{4,2\},\{4,3\},\{4,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

- en P(A) , XRX si y sólo si X ∩ Y = Ø
    - Pares que pertenecen:
        i. ({1,2},{4})
        ii. ({1,3},{2,4})
        iii. ({1},{2,2})
    - Pares que no pertenecen:

i. ({1},{1})

ii. ({1,3},{3})

iii. ({1},{1,2})

- No es reflexiva puesto que no se da que para todo $X \in P(A)$ vale que XRX
  i. Contraejemplo: $\{1\} \in P(A)$ pero $(\{1\},\{1\}) \notin R$
- Si es simétrica puesto que se cumple que para todo X, Y en $P(A)$ vale que XRY implica YRX
  i. Si vale XRY se cumple que $X \cap Y = \emptyset$.
  ii. Como la intersección es conmutativa si vale $X \cap Y = \emptyset$ también vale $Y \cap X = \emptyset$.
  iii. Si vale $Y \cap X = \emptyset$, se cumple que YRX.
  iv. Por lo tanto XRY implica YRX.
- No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo X, Y en $P(A)$ vale que XRY e YRX implican que $X = Y$
  i. Contraejemplo: $(\{1\},\{2\}) \in R$ ^ $(\{2\},\{1\}) \in R \rightarrow \{1\} = \{2\}$
- No es transitiva puesto que no se cumple que para todo X, Y, Z en $P(A)$ vale que XRY e YRZ implican que XRZ
  i. Contraejemplo: $(\{1,4\},\{2\}) \in R$ ^ $(\{2\},\{1,3,4\}) \in R \rightarrow (\{1,4\},\{1,3,4\}) \in R$
     1. $\{1,4\} \cap \{1,3,4\} = \emptyset$
     2. $\{1,4\} = \emptyset \rightarrow absurdo$

- en P(A) , XRY si y sólo si X ⊂ Y
  - *Cuando practique para el parcial lo hago...*

Ejercicio 6.

Determinar si las siguientes relaciones definidas en A = {a, b, c, d} son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas

- R0 = ∅
  - No es reflexiva puesto que no se da que para todo $x \in A$ vale que $xR0x$
    - Contraejemplo: a $\in A$ pero $(a, a) \notin R0$

  - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que $xR0y$ implica $yR0x$
    - Como nunca se cumple $xR0y$ puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, el consecuente siempre será falso, por lo tanto la simetría se cumple trivialmente.
  - Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que $xR0y$ e $yR0x$ implican que $x = y$
    - Como nunca se cumple $xR0y$ ni $yR0x$ puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, el consecuente siempre será falso, por lo tanto la simetría se cumple trivialmente.
  - Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que $xR0y$ e $yR0z$ implican que $xR0z$
    - Como nunca se cumple $xR0y$ ni $yR0z$ puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, el consecuente siempre será falso, por lo tanto la simetría se cumple trivialmente.
- R1 = {(a, a); (a, b); (d, c); (c, d)}
  - No es reflexiva puesto que no se da que para todo $x \in A$ vale que $xR1x$
    - Contraejemplo: b ∈ A pero $(b, b) \notin R1$
  - No es simétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que $xR1y$ implica $yR1x$
    - Contraejemplo: $(a, b) \in R1 \rightarrow \ (b, a) \in R1$
      - $(b, a) \notin R$
  - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que $xR1y$ e $yR1x$ implican que $x = y$
    - Contraejemplo: $(d, c) \in R1$ ^ $(c, d) \in R1 \rightarrow c = d$
      - $c = d \rightarrow absurdo$
  - No es transitiva puesto que no se cumple que para todo x, y, z en A vale que $xR1y$ e $yR1z$ implican que $xR1z$
    - Contraejemplo: $(d, c) \in R1$ ^ $(c, d) \in R1 \rightarrow (d, d) \in R1$
      - $(d, d) \notin R1$
- R2 = {(a, a); (b, b); (a, b); (b, a); (d, d); (c, c)}
  - Si es reflexiva puesto que se da que para todo $x \in A$ vale que $xR2x$.
    - $a \in A$ y vale $aR2a$.
    - $b \in A$ y vale $bR2b$.

        - $c \in A$ y vale $cR2c$.
        - $d \in A$ y vale $dR2d$.
    - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que $xR2y$ implica $yR2x$.
        - $aR2a \to aR2a$
        - $bR2b \to bR2b$
        - $cR2c \to cR2c$
        - $dR2d \to dR2d$
        - $aR2b \to bR2a$
    - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que $xR2y$ e $yR2x$ implican que $x = y$
        - Contraejemplo: $(a, b) \in R2$ ^ $(b, a) \in R2 \to a = b$
            - $a = b \to absurdo$
    - Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que $xR2y$ e $yR2z$ implican que $xR2z$
        - $(a, b) \in R2$ ^ $(b, a) \in R2 \to (a, a) \in R2$
- R3 = {(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)}
    - No es reflexiva puesto que no se da que para todo $x \in A$ vale que $xR3x$
        - Contraejemplo: c $\in A$ pero $(c, c) \notin R3$
    - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que $xR3y$ implica $yR3x$.
        - $aR3a \to aR3a$
        - $bR3b \to bR3b$
        - $cR3c \to cR3c$
        - $dR3d \to dR3d$
        - $aR3b \to bR3a$
    - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que $xR3y$ e $yR3x$ implican que $x = y$
        - Contraejemplo: $(a, b) \in R3$ ^ $(b, a) \in R3 \to a = b$
            - $a = b \to absurdo$
    - No es transitiva puesto que no se cumple que para todo x, y, z en A vale que $xR2y$ e $yR2z$ implican que $xR2z$
        - Contraejemplo: $(a, b) \in R2$ ^ $(b, c) \in R2 \to (a, c) \in R2$
            - $(a, c) \notin R3$
- R4 = A × A

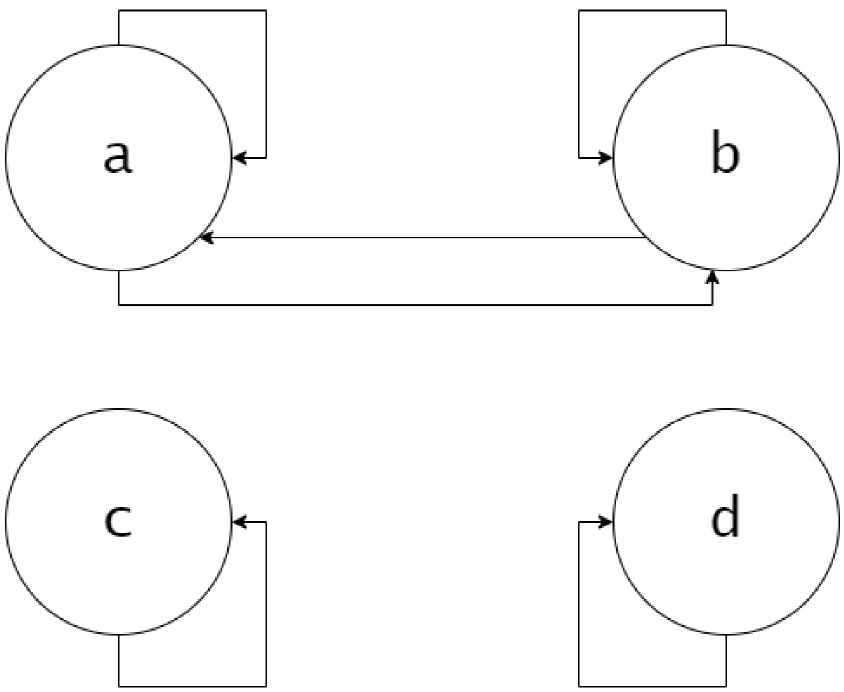
- *Cuando practique para el parcial lo hago...*

Ejercicio 7.

Escribir la matriz y los dígrafos asociados a las relaciones anteriores

Solo hago R2 para no perder tiempo

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



Ejercicio 8.

Sea A = {a, b, c, d}

a. Dar un ejemplo de una relación R no reflexiva en A

$$R = \{(a,b),(b,a),(c,d)\}$$

b. Dar un ejemplo de una relación R simétrica en A

$$R = \{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}$$

c. Dar un ejemplo de una relación R no transitiva en A

$$R = \{(a,b),(b,c),(c,d)\}$$

d. Dar un ejemplo de una relación R no simétrica en A

$$R = \{(a,b),(c,d)\}$$

e. Dar un ejemplo de una relación R antisimétrica en A

$$R = \{(a,a),(b,b)(a,b),(c,d)\}$$

Ejercicio 9.

Demostrar que si R es simétrica y transitiva y aRb para ciertos a y b, entonces aRa y bRb.

1. Como R es simétrica y vale aRb, entonces se cumple bRa.
2. Como R es transitiva y vale aRb y bRa ,entonces se cumple aRa.
3. Como R es transitiva y vale bRa y aRb, entonces se cumple bRb.

Ejercicio 10.

Sea A un conjunto arbitrario. Sea R = ΔA (diagonal de A) . Analizar qué propiedades tiene R.

- Si es reflexiva puesto que se da que para todo $x \in A$ vale que xRx.
- Si es simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy implica yRx.
    - Para los $a, b \in A$ tal que $a = b$, vale tanto aRb y bRa por lo tanto la implicación $aRb \to bRa$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
    - Para los $a, b \in A$ tal que $a \neq b$, no vale ni aRb ni bRa por lo tanto la implicación $aRb \to bRa$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
    - Para los $a, b \in A$ tal que $a = b$, vale tanto aRb y bRa por lo tanto la implicación aRb ^ $bRa \to a = b$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
    - Para los $a, b \in A$ tal que $a \neq b$, no vale ni aRb ni bRa por lo tanto la implicación aRb ^ $bRa \to a = b$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz
    - Para los $a, b, c \in A$ tal que $a = b = c$, vale tanto aRb, bRc y aRc por lo tanto la implicación aRb ^ $bRc \to aRc$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
    - Para los $a, b, c \in A$ tal que $a \neq b \neq c$, no vale ni aRb, ni bRc ni aRc por lo tanto la implicación aRb ^ $bRc \to aRc$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.