TP6 – Espacios Vectoriales – Transformaciones Lineales

Agustina Sol Rojas

Ejercicio 1.

Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio:

a) R^3

- $(R^3, +, \cdot)$
    - "$+$" es cerrado en R^3:
        - Se cumple que $\forall a, b \in R^3, a + b \in R^3$.
            - Esto se cumple debido a que la suma es una operación cerrada en R.
                - $a_i + b_i = c_i \in R$.
                    - Por lo tanto $(c_1, c_2, c_3) \in R^3$.
    - "$\cdot$" es cerrado en R^3:
        - Se cumple $\forall a \in R^3$ y $\forall k \in R, k \cdot a \in R^3$.
            - Esto se cumple debido a que el producto es una operación cerrada en R.
                - $k \cdot a_i = b_i \in R$.
                    - Por lo tanto $(b_1, b_2, b_3) \in R^3$.
    - "$+$" es conmutativa en R^3:
        - Se cumple $\forall a, b \in R^3, a + b = b + a$.
            - Esto se cumple debido a que la suma es una operación conmutativa en R.
    - "$+$" es asociativa en R^3:
        - Se cumple $\forall a, b, c \in R^3, (a + b) + c = a + (b + c)$.
            - Esto se cumple debido a que la suma es una operación asociativa en R.

- Existencia del elemento neutro para "$+$" en R^3:
  - Se cumple que $\exists e \in R^3: a + e = e + a = a, \forall a \in R^3$ y ese $e = (0,0,0)$.
    - Esto se cumple debido a que el 0 es el neutro de la suma en R.
- Existencia del opuesto en R^3:
  - Se cumple que $\forall a \in R^3, \exists a' \in R^3 : a + a' = a' + a = e$ y ese $a' = -a$.
    - Esto se cumple debido a que el $a + (-a) = -a + a = 0$ para cualquier $a \in R$.
- "$\cdot$" es asociativa en R^3:
  - Se cumple que $\forall \alpha, \beta \in R\ y\ \forall a \in V, (\alpha\beta) \cdot a = \alpha(\beta \cdot a)$.
    - $a = (a_1, a_2, a_3)$
    - $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \left((\alpha \cdot \beta) \cdot a_1, (\alpha \cdot \beta) \cdot a_2, (\alpha \cdot \beta) \cdot a_3\right) = \left(\alpha \cdot (\beta \cdot a_1), \alpha \cdot (\beta \cdot a_2), \alpha \cdot (\beta \cdot a_3)\right) = \alpha \cdot (\beta \cdot a_1, \beta \cdot a_2, \beta \cdot a_3) = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$
    - Esto se cumple debido a que el producto es una operación asociativa en R.
- "$\cdot$" es distributiva respecto a la suma de escalares:
  - Se cumple que $\forall \alpha, \beta \in R\ y\ \forall a \in R^3, (\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$.
    - $a = (a_1, a_2, a_3)$
    - $(\alpha + \beta) \cdot a = \left((\alpha + \beta) \cdot a_1, (\alpha + \beta) \cdot a_2, (\alpha + \beta) \cdot a_3\right) = (\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot a_1, \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot a_2, \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot a_3) = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$
    - Esto se cumple debido a que el producto es una operación distributiva respecto a la suma en R.
- "$\cdot$" es distributiva respecto a la suma de vectores:
  - Se cumple que $\forall \alpha \in R\ y\ \forall a, b \in R^3, \alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$.
    - $a = (a_1, a_2, a_3)$
    - $b = (b_1, b_2, b_3)$
    - $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot \left((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)\right) = \alpha \cdot (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = \left(\alpha \cdot (a_1 + b_1), \alpha \cdot (a_2 + b_2), \alpha \cdot (a_3 + b_3)\right) = (\alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot b_1, \alpha \cdot a_2 + \alpha \cdot b_2, \alpha \cdot a_3 + \alpha \cdot b_3) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3) + (\alpha \cdot b_1, \alpha \cdot b_2, \alpha \cdot b_3) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$
    - Esto se cumple debido a que el producto es una operación distributiva respecto a la suma en R.
- Existencia del elemento neutro para "$\cdot$" en R^3:
  - Se cumple que $\forall a \in R^3, \exists e \in R : e \cdot a = a \cdot e = a$ y ese $e = 1$.

        - Esto se cumple debido a que el 1 es el neutro del producto en R.

b) Las matrices reales de $2x2$

c) Los polinomios de grado menor o igual a 3 (P_3). ¿El conjunto de los polinomios de grado 3, también es un espacio vectorial?

Ejercicio 2.

Sea V un Espacio Vectorial, demostrar que si $\alpha.v = 0_V$ entonces $\alpha = 0$ o $v = 0_V$ (o ambos son nulos).

- $\alpha.v = 0_V$
    - Sea $\alpha = 0$.
        - Como para todo $v \in V$, se cumple $0.v = 0_V$ se cumple que $a.v = 0_V$ ya que si $\alpha = 0$, entonces $\alpha.v = 0.v = 0_V$
    - Sea $v = 0_V$
        - Como para todo escalar α vale que $\alpha.0_V = 0_V$ se cumple que $a.v = 0_V$, ya que si $v = 0_V$, entonces $\alpha.v = \alpha.0_V = 0_V$

Ejercicio 3.

Decidir si los siguientes conjuntos son subespacios (justificar):

a) $S = \{(x, 0) : x \in R\}$

- $S \subset R^2$
    1. $S \neq \emptyset$
        i. Como $0 \in R$, se da que $(0,0) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.
    2. $\forall s_1, s_2 \in S \to s_1 + s_2 \in S$
        i. $s_1 = (x_1, 0)$ con $x_1 \in R$
        ii. $s_2 = (x_2, 0)$ con $x_2 \in R$
        iii. $s_1 + s_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_3, 0)$ con $x_3 \in R$ ya que la suma es cerrada en R
        iv. Por lo tanto $s_1 + s_2 \in S$.
    3. $Dado\ k \in K\ y\ \forall s \in S \to k.s \in S$

i. $s = (x, 0)$ con $x \in R$.

ii. $k.s = (k.x, k.0) = (k.x, 0) = (y, 0)$ con $y \in R$ ya que el producto es cerrado en R.

iii. Por lo tanto $k.s \in S$.

b) $S = \{(1, y) : y \in R\}$

- $S \subset R^2$

1. $S \neq \emptyset$

i. Como $0 \in R$, se da que $(1,0) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.

2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$

i. $s_1 = (1,1)$ con $1 \in R$

ii. $s_2 = (1,0)$ con $0 \in R$

iii. $s_1 + s_2 = (1,1) + (1,0) = (2,1)$ como $2 \neq 1$, $s_1 + s_2 \notin S$

iv. Por lo tanto no se cumple $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$

- No contiene a 0_V

c) $S = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 0\}$

- $S \subset R^2$

1. $S \neq \emptyset$

i. Como $(0,0) \in R^2$ y $0 + 0 = 0$ se da que $(0,0) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.

2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$

i. $s_1 = (x_1, y_1)$ con $x_1 + y_1 = 0$ y $(x_1, y_1) \in R^2$

ii. $s_2 = (x_2, y_2)$ con $x_2 + y_2 = 0$ y $(x_2, y_2) \in R^2$

iii. $s_1 + s_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

a. $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$

iv. Por lo tanto $s_1 + s_2 \in S$.

3. $Dado\ k \in K\ y\ \forall s \in S \rightarrow k.s \in S$

i. $s = (x, y)$ con $x + y = 0$ y $(x, y) \in R^2$

ii. $k.s = k.(x, y) = (k.x, k.y)$

a. $k.x + k.y = k(x + y) = k.0 = 0$

iii. Por lo tanto $k.s \in S$.

d) $S = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 1\}$

- $S \subset R^2$

1. $S \neq \emptyset$

i. Como $(1,0) \in R^2$ y $1 + 0 = 1$ se da que $(1,0) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.

2. $\forall s_1, s_2 \in S \to s_1 + s_2 \in S$
   i. $s_1 = (x_1, y_1)$ con $x_1 + y_1 = 1$ y $(x_1, y_1) \in R^2$
   ii. $s_2 = (x_2, y_2)$ con $x_2 + y_2 = 1$ y $(x_2, y_2) \in R^2$
   iii. $s_1 + s_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
      a. $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 1 + 1 = 2$
   iv. Por lo tanto no se cumple $\forall s_1, s_2 \in S \to s_1 + s_2 \in S$

- No contiene a 0_V

e) $S = \{(x, y, z) \in R^3 : z = x - y\}$

- $S \subset R^3$

1. $S \neq \emptyset$
   i. Como $(3,2,1) \in R^3$ y $3 - 2 = 1$ se da que $(3,2,1) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.
2. $\forall s_1, s_2 \in S \to s_1 + s_2 \in S$
   i. $s_1 = (x_1, y_1, z_1)$ con $x_1 - y_1 = z_1$ y $(x_1, y_1, z_3) \in R^3$
   ii. $s_2 = (x_2, y_2, z_2)$ con $x_2 - y_2 = z_2$ y $(x_2, y_2, z_2) \in R^3$
   iii. $s_1 + s_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
      a. $z_1 + z_2 = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$
   iv. Por lo tanto $s_1 + s_2 \in S$.
3. $Dado\ k \in K\ y\ \forall s \in S \to k.s \in S$
   i. $s = (x, y, z)$ con $z = x - y$ y $(x, y, z) \in R^3$
   ii. $k.s = k.(x, y, z) = (k.x, k.y, k.z)$
      a. $k.z = k.(x - y) = k.x - k.y$
   iii. Por lo tanto $k.s \in S$.

f) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x + y + w = 1\}$

- $S \subset R^4$

1. $S \neq \emptyset$
   i. Como $(0,0,3,1) \in R^4$ y $0 + 0 + 1 = 1$ se da que $(0,0,3,1) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.
2. $\forall s_1, s_2 \in S \to s_1 + s_2 \in S$
   i. $s_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ con $x_1 + y_1 + w_1 = 1$ y $(x_1, y_1, z_1, w_1) \in R^4$
   ii. $s_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ con $x_2 + y_2 + w_2 = 1$ y $(x_2, y_2, z_2, w_2) \in R^4$
   iii. $s_1 + s_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$
      a. $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (w_1 + w_2) = (x_1 + y_1 + w_1) + (x_2 + y_2 + w_2) = 1 + 1 = 2$

iv. Por lo tanto no se cumple $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$

- No contiene a 0_V

g) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x + y - w = 0, z + 3y = 0\}$

- $S \subset R^4$

1. $S \neq \emptyset$

   i. Como $(0,0,0,0) \in R^4$ y $0 + 0 - 0$ y $0 + 3.0 = 0$ se da que $(0,0,0,0) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.

2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$

   i. $s_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ con $x_1 + y_1 - w_1 = 0, z_1 + 3y_1 = 0$ y $(x_1, y_1, z_1, w_1) \in R^4$

   ii. $s_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ con $x_2 + y_2 - w_2 = 0, z_2 + 3y_2 = 0$ y $(x_2, y_2, z_2, w_2) \in R^4$

   iii. $s_1 + s_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$

      a. $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (w_1 + w_2) = (x_1 + y_1 - w_1) + (x_2 + y_2 - w_2) = 0 + 0 = 0$

      b. $(z_1 + z_2) + 3(y_1 + y_2) = (z_1 + 3y_1) + (z_2 + 3y_2) = 0 + 0 = 0$

   iv. Por lo tanto $s_1 + s_2 \in S$.

3. $Dado\ k \in K\ y\ \forall s \in S \rightarrow k.s \in S$

   i. $s = (x, y, z, w)$ con $x + y - w = 0, z + 3y = 0$ y $(x, y, z, w) \in R^4$

   ii. $k.s = k.(x, y, z, w) = (k.x, k.y, k.z, k.w)$

      a. $k.x + k.y - k.w = k(x + y - w) = k.0 = 0$

      b. $k.z + 3k.y = k(z + 3y) = k.0 = 0$

   iii. Por lo tanto $k.s \in S$.

h) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in R\right\}$

- $S \subset R^{4X4}$

1. $S \neq \emptyset$

   i. Como $3,2,1 \in R$ se da que $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.

2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$

   i. $s_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix}$ con $a_1, b_1, c_1 \in R$

   ii. $s_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$ con $a_2, b_2, c_2 \in R$

iii. $s_1 + s_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in S$ ya que la suma es cerrada en R.

iv. Por lo tanto $s_1 + s_2 \in S$.

3. $Dado\ k \in K\ y\ \forall s \in S \rightarrow k.s \in S$

   i. $s = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in R$

   v. $k.s = k.\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a & k.b \\ k.a & k.c \end{pmatrix} \in S$ ya que el producto es cerrado en R.

Ejercicio 4.

Decidir si los siguientes subconjuntos son generadores de R^3:

a) $S = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)\}$

- Cualquier $v \in R^3$ puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de S.
  1. $v = (x, y, z) = x.(1,0,0) + y.(0,1,0) + z.(0,0,1)$

b) $S = \{(1, 0, 1); (1, 1, 1); (0, 0, 1)\}$

- Se debe determinar si es posible encontrar escalares $\alpha, \beta, \gamma \in R$ tales que $v = \alpha.(1,0,1) + \beta.(1,1,1) + \gamma.(0,0,1)$ para cualquier $v \in R^3$
  - $v = (x, y, z) = \alpha.(1,0,1) + \beta.(1,1,1) + \gamma.(0,0,1) = (\alpha, 0, \alpha) + (\beta, \beta, \beta) + (0,0,\gamma) = (\alpha + \beta, \beta, \alpha + \beta + \gamma)$
  - Esto nos deja:
    - $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$
  - Teniendo en cuenta que $y = \beta$ y reemplazando en la igualdades de x y z nos queda:
    - $x - y = \alpha$
    - $z = \alpha + y + \gamma$
  - Reemplazando α en z nos queda:
    - $z = (x - y) + y + \gamma$

- $z - x = \gamma$
  - Por lo tanto:
    - $\begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y \\ \gamma = z - x \end{cases}$
  - Como existen escalares $\alpha, \beta, \gamma \in R$ tales que $v = \alpha.(1,0,1) + \beta.(1,1,1) + \gamma.(0,0,1)$ para cualquier $v \in R^3$, S es generador de R^3.

c) $S = \{(1, 0, 1); (0, 1, 0)\}$

- Se debe determinar si es posible encontrar escalares $\alpha, \beta \in R$ tales que $v = \alpha.(1,0,1) + \beta.(0,1,0)$ para cualquier $v \in R^3$
  - $v = (x, y, z) = \alpha.(1,0,1) + \beta.(0,1,0) = (\alpha, 0, \alpha) + (0, \beta, 0) = (\alpha, \beta, \alpha)$
  - Esto nos deja:
    - $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$
  - Teniendo en cuenta que $x = z$, S solo permite generar los vectores en donde la primera coordenada es igual a la tercera, no todo R^3.
    - Si $x \neq z$, no existe solución para α y β.

Ejercicio 5.

Analizar si el siguiente conjunto puede generar el subespacio de las matrices simétricas de 2×2 $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

1. Una matriz simétrica 2×2 tiene la siguiente forma:

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in R$$

2. Se debe determinar si es posible encontrar escalares $\alpha, \beta, \gamma \in R$ tales que $v = \alpha.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para cualquier $v \in A$ (siendo A el conjunto de matrices simétricas 2×2).
   i. $v = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$
   ii. Esto nos deja:

a. $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \gamma \end{cases}$

iii. Esto corresponde exactamente a una matriz simétrica y como α, β, γ pueden tomar cualquier valor real, se pueden generar todas las matrices simétricas 2×2.

Ejercicio 6.

Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1, 0, 1); (1, 1, 0)\}$

1. $(x, y, z) = \alpha.(1,0,1) + \beta.(1,1,0) = (\alpha, 0, \alpha) + (\beta, \beta, 0) = (\alpha + \beta, \beta, \alpha)$.
2. Los vectores generan el subespacio $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x = z + y\}$

Ejercicio 7.

Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1, 1, 1); (1, -1, 0)\}$

1. $(x, y, z) = \alpha.(1, 1, 1) + \beta.(1, -1, 0) = (\alpha, \alpha, \alpha) + (\beta, -\beta, 0) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha)$.
2. $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \\ \quad z = \alpha \end{cases}$
3. Reemplazando a α por z en x:
   i. $x - z = \beta$
4. Reemplazando a β por $x - z$ en y:
   i. $y = z - (x - z) \rightarrow y = 2z - x$
5. Esto nos deja que $y = 2z - x$. Por lo tanto los vectores generan el subespacio $S = \{(x, y, z) \in R^3 : y = 2z - x\}$

Ejercicio 8.

Ejercicio 9.

Ejercicio 10.

Ejercicio 11.

Ejercicio 12.

Ejercicio 13.

Ejercicio 14.

Ejercicio 15.

Ejercicio 16.

Ejercicio 17.

Ejercicio 18.

Ejercicio 19.

Ejercicio 20.

Ejercicio 21.

Ejercicio 22.