TP3 – Números

Agustina Sol Rojas

Ejercicio 1.

Probar que no hay enteros simultáneamente pares e impares

1. Sea $a \in Z$, a es múltiplo de $b \in Z$ si$\exists\ c \in Z:\ a = b * c$
2. Un numero $x \in Z$ es par si es múltiplo de 2 ($\exists\ c \in Z:\ x = 2 * c$). Caso contrario es impar ($\nexists\ c \in Z:\ x = 2 * c$).

$\exists\, n \in Z : n\ es\ par\ e\ impar$

Planteos auxiliares:

$n\ es\ par \to \exists\, c \in Z : n = 2 * c$

$n\ es\ impar \to\ \nexists\ c \in Z:\ n = 2 * c$

$\therefore \exists\, c \in Z : n = 2 * c\ \ y \nexists\ c \in Z:\ n = 2 * c \to absurdo.$

$\therefore \nexists\, n \in Z : n\ es\ par\ e\ impar$

Ejercicio 2.

Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si a|1 entonces a = 1 o a = −1

Planteos auxiliares:

$a|1\ si\ \exists\, c \in Z : 1 = a * c$

$Si\ a = -1 \to -1|1$

$\exists\, d \in Z : 1 = -1 * d$

$Si\ a = 1 \to 1|1$

$\exists\, e \in Z : 1 = 1 * e$

$Como \exists\, c \in Z :\ 1 = a * c$

$entonces - 1|1\ o\ 1|1$

$entonces \exists\, d \in Z: 1 = -1 * d\ o \exists\, e \in Z : 1 = 1 * e$

<u>Demostración</u>

$1 = -1 * d$

$\frac{1}{-1} = d$

$-1 = d$

$1 = 1 * e$

$\frac{1}{1} = e$

$1 = e$

$\therefore \exists\, d = -1 \in Z : 1 = -1 * (-1)$ y $\exists\, e = 1 \in Z : 1 = 1 * 1$

$\therefore Si\ a|1\ entonces\ a = 1\ o\ a = -1$

b) a|b y b|c entonces a|c

Planteos auxiliares:

$a|b\ si \exists\, d \in Z : b = a * d$

$b|c\ si \exists\, e \in Z : c = b * e$

$a|c\ si \exists\, f \in Z : c = a * f$

$¿\exists\, f \in Z : c = a * f?$

$Como \exists\, d \in Z : b = a * d\ y \exists\, e \in Z : c = b * e$

$entonces \exists\, f \in Z : c = a * f$

<u>Demostración</u>

$b = a * d$

$c = b * e$

$c = b * e = (a * d) * e = a * (d * e) = a * f$

$f = d * e \in Z$

$\therefore \exists\, f \in Z : c = a * f \rightarrow a|c$

c) a(a − 1) es par

Para poder demostrar que a(a-1) es par se demostrara primero que la multiplicación de un numero par con cualquier otro entero da un numero par:

Asumiendo que x es par, entonces $\exists\ y \in Z : x = 2 * y$
Sea z un entero cualquiera (sea par o no)

$x * z\ es\ par\ si\ \exists\ f \in Z : x * z = 2 * f$

$x = 2 * y$

$x * z = (2 * y) * z = 2 * (y * z) = 2 * f$

$f = (y * z) \in Z$

$\therefore\ \exists\ f \in Z : x * z = 2 * f$

Ahora se demostrará que a(a-1) es par considerando dos casos:

1. <u>a es par:</u>

$Si\ a\ es\ par, entonces\ \exists\ c \in Z : a = 2 * c$

$a = 2c$

$a(a - 1) = (2c) * (2c - 1)$

$Como\ 2c\ es\ par, (2c) * (2c - 1)\ es\ par\ y\ por\ lo\ tanto\ a(a - 1)\ es\ par$

2. <u>a es impar:</u>

$Si\ a\ es\ impar, entonces\ \nexists\ c \in Z :\ a = 2 * c$

Como no existe entero que haga valer la igualdad se tratara de aproximar de la mejor manera posible a a por un multiplo de 2, haciendo uso de la diferencia entre a y dicho número, lo que se llama resto, siendo aquel en este caso 1. Reescribiendo quedaría:

Si $a\ es\ impar, entonces\ \exists\ c \in Z : a = 2 * c + 1$

$a = 2c + 1$

$a(a - 1) = (2c + 1) * (2c + 1 - 1) = (2c + 1) * (2c)$

$Como\ 2c\ es\ par\ (por\ 1.), (2c + 1) * (2c)\ es\ par\ y\ por\ lo\ tanto\ a(a - 1)\ es\ par$

d) x|y y y|z entonces x|yz

Planteos auxiliares

$x|y\ si\ \exists\ t \in Z : y = x * t$

$$y|z \; si \; \exists \, w \in Z : z = y * w$$
$$x|yz \; si \; \exists \, j \in Z : yz = x * j$$

$Como \; \exists \, t \in Z : y = x * t \; y \; \exists \, w \in Z : z = y * w$

$entonces \; \exists \, j \in Z : yz = x * j$

<u>Demostración</u>

$y = x * t$

$z = y * w$

$yz = (x * t) * (y * w) = x * (t * y * w) = x * j$

$$j = (t * y * w) \in Z$$

$\therefore \exists \, j \in Z : yz = x * j \rightarrow x|yz$

Ejercicio 3.

Si a un número se lo divide por 5, el resto es 3 y si se lo divide por 7, el resto es 4. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 35 ?

a. $N = 5q_1 + 3$
b. $N = 7q_2 + 4$

$N = 35q + r$ ¿Cuál es el r si se divide al número por 35?

1. Se multiplican las ecuaciones (ambos lados de la igualdad) de tal forma que el primer término a la derecha de la igualdad tenga el valor de 35 * q_i:

   Se hace uso de la propiedad distributiva.

   a. $7N = 7 * 5q_1 + 3 * 7 = 35q_1 + 21$
   b. $5N = 5 * 7q_2 + 4 * 5 = 35q_2 + 20$

2. Luego se multiplicarán ambas ecuaciones de tal forma que la resta entre ambas nos deje un solo N:

   a. $3 * (7N) = 3 * 35 * q_1 + 21 * 3 \rightarrow 21N = 35 * (3q_1) + 63$
   b. $4 * 5N = 4 * 35 * q_2 + 20 * 4 \rightarrow 20N = 35 * (4q_2) + 80$

Se reordena un poco la ecuación haciendo uso de la propiedad asociativa de la multiplicación.

3. Se restan ambas ecuaciones:

$$
\begin{array}{l}
21N = 35 * (3q_1) + 63 \\
-\,20N = 35 * (4q_2) + 80 \\
\hline
\end{array}
$$

$N = 35(3q_1 - 4q_2) + (63 - 80)$

Teniendo en cuenta que $q_3 = (3q_1 - 4q_2) \in Z$ nos queda:

$N = 35q_3 + (-17)$

4. Esto nos deja con un resto negativo, lo cual no es válido (el resto debe tomar valores $0 \leq r < |35|$), para tener un ecuación con resto valido se la debe reescribir, para ello se sumará y se restara a la ecuación el numero 35 (es como sumar 0, el elemento neutro de la suma):

$N = 35q_3 + (-17) + 35 - 35$

Reescribiendo la ecuacion quedaría:

$N = 35q_3 - 35 + 18$

Sacamos factor común de $35q_1 - 35$

$N = 35(q_3 - 1) + 18$

Teniendo en cuenta que $q = (q_3 - 1) \in Z$ nos queda:

$N = 35q + 18$

$\therefore$ *Si se divide a N por* 35 *el resto es* 18

Ejercicio 4.

Sean a y b dos números enteros que tienen restos 4 y 7 respectivamente en la división por 11. Hallar los restos de la división por 11 de (a + b^2)

a. $a = 11 * q_1 + 4$
b. $b = 11 * q_2 + 7$

$(a + b^2) = 11 * q + r$ ¿Cuál es el r si se divide $(a + b^2)$ por 11?

1. Se reemplaza en $(a + b^2)$ a a y a b por sus respectivas formulas y se aplican propiedades de la suma, la multiplicación y la regla del binomio:

$$
\begin{aligned}
(a + b^2) &= (11q_1 + 4) + (11q_2 + 7)^2 = 11q_1 + 4 + 11q_2 * 11q_2 + 2 * 11q_2 * 7 + 49 \\
&= (11q_1 + 11q_2 * 11q_2 + 2 * 11q_2 * 7) + 53 \\
&= 11 * (q_1 + (q_2)^2 + 14q_2) + 53
\end{aligned}
$$

2. Teniendo en cuenta que $q_3 = (q_1 + (q_2)^2 + 14q_2) \in Z$ nos queda:

$(a + b^2) = 11 * q_3 + 53$

3. Esto nos deja con un resto mayor a $|11|$, lo cual no es válido (el resto debe tomar valores $0 \leq r < |11|$), para tener un ecuación con resto valido se la debe reescribir, para ello escribirá a 49 como $11 + 11 + 11 + 11 + 9$:

$(a + b^2) = 11 * q_3 + 11 + 11 + 11 + 11 + 9$

Sacamos factor común de $11 * q_3 + 11 + 11 + 11 + 11$

$(a + b^2) = 11 * (q_3 + 4) + 9$

Teniendo en cuenta que $q = (q_3 + 4) \in Z$ nos queda:

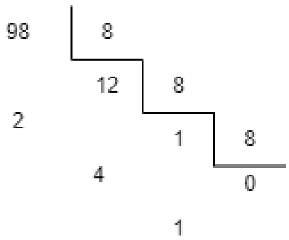
$(a + b^2) = 11 * q + 9$

$\therefore$ *Si se divide a* $(a+b^2)$ por 11 *el resto es* 9

Ejercicio 5.

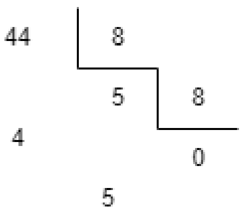
Convertir los siguientes números de base 10 a base 8:

a) 98



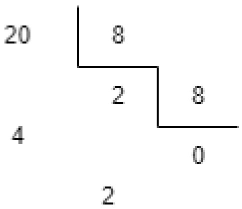
142

b) 44



54

c) 20



24

Ejercicio 6.

Calcular el máximo común divisor entre

i) (16, 24)

Se descompone cada entero en producto de primos y se buscan los factores en común.

$16 = 2 * 2 * 2 * 2$
$24 = 2 * 2 * 2 * 3$

$2 * 2 * 2 = 2^3 = 8$ es el mayor factor en común y por lo tanto es el mcd.

ii) (70, 50)

Se descompone cada entero en producto de primos y se buscan los factores en común.

$70 = 2 * 5 * 7$
$50 = 2 * 5 * 5$

$2 * 5 = 10$ es el mayor factor en común y por lo tanto es el mcd.

iii) (121, 88)

Se descompone cada entero en producto de primos y se buscan los factores en común.

$121 = 11 * 11$
$88 = 2 * 2 * 2 * 11$

11 es el mayor factor en común y por lo tanto es el mcd.

iv) (−90, 90)

Como el 90 es un divisor de -90 (y de el mismo) el mcd es 90.

v) (980, 224)

Se descompone cada entero en producto de primos y se buscan los factores en común.

$980 = 2 * 2 * 5 * 7 * 7$

$224 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 7$

$2 * 2 * 7 = 28$ es el mayor factor en común y por lo tanto es el mcd.

Ejercicio 7.

Probar que si a y b son enteros:

a) a + b es coprimo con a (tener en cuenta (a,b) = 1)

Se quiere probar $(a + b, a) = 1$

1. Dado $(a + b, a) = d$, por definicion de mcd se cumple:
   - $d|a + b$, es decir, $\exists\, m_1 \in Z : a + b = d * m_1$
   - $d|a$, es decir, $\exists\, m_2 \in Z : a = d * m_2$

2. Teniendo en cuenta que $a + b = d * m_1$ restando en ambos lados de la ecuación a a quedaría:

   $b = d * m_1 - a = d * m_1 - d * m_2 = d(m_1 - m_2)$

3. Teniendo en cuenta que $c = m_1 - m_2 \in Z$:

$$b = d * c$$

4. Esto implica que $d|b$

5. Por lo tanto si $d|a + b$ y $d|a$, entonces $d|b$ y $d|a$ entonces $d|(a, b)$ pero por enunciado se sabe que $(a, b) = 1$, por lo tanto no queda otra opción que $d = 1$, entonces $(a + b, a) = 1$, es decir, a+b es coprimo con a.

b) sí a es no nulo, (a, 0) = |a|

1. Dados $a, 0 \in Z$ si a no es nulo, entonces d es el mcd de a y 0 si $d > 0$ y:
   - $d|a \ y \ d|0$.
   - Si existe otro numero $D \ t$al que $D|a \ y \ D|0$, entonces necesariamente $D|d$.

2. Como $d|0$ siempre se cumple, ya que 0 es divisible por todos los enteros, se debe buscar un d entero mayor a 0 tal que $d|a$ cumpliéndose que exista otro número D tal que $D|a$ y $D|0$, entonces $D|d$.

3. Para que $d|a$ debe existir un $c \in Z : a = d * c$

   a. Si $a > 0, d = |a| \ y \ c = 1$ se cumple $a = |a| * 1$
   b. Si $a < 0, d = |a| \ y \ c = -1$ se cumple $a = |a| * -1$

4. En ambos casos el valor de $d \ es \ |a|$, ya que para cualquier otra combinación de valores de d y c no se cumpliría la igualdad $a = d * c$ a la vez que se cumple la definición de mcd.

5. Entonces necesariamente $d = |a|$, por lo tanto si a es no nulo $(a, 0) = |a|$.

c) (a, b) = 1 entonces ma+nb=k, con m,n y k enteros.

1. Dado que $(a, b) = 1$, por la Identidad de Bézout existen enteros m_1 y n_1 tal que: $m_1 a + n_1 b = 1$

2. Multiplicando a ambos lados de la ecuación por k quedaría: $k * m_1 a + k * n_1 b = 1k \rightarrow (km_1)a + (kn_1)b = k$

3. Teniendo en cuenta que $m = km_1 \in Z$ y $n = kn_1 \in Z$ nos queda: $ma + nb = k$

4. Por lo tanto queda demostrado que si $(a, b) = 1$ entonces $ma + nb = k$, con m, n y k enteros.

Ejercicio 8.

Hallar mcd(5k + 3, 3k + 2), para cualquier k entero

1. Dado $(5k + 3, 3k + 2)$ se desea encontrar un entero $d > 0$ tal que para todo k se cumpla:
   - $d|5k + 3$, es decir, $\exists\, m_1 \in Z : 5\text{k} + 3 = d * m_1$
   - $d|3k + 2$, es decir, $\exists\, m_2 \in Z : 3k + 2 = d * m_2$
   - Existe otro numero D tal que $D|5k + 3$ y $D|3k + 2$, entonces necesariamente $D|d$.

2. Para ello se multiplicarán ambas ecuaciones de tal forma que los coeficientes de k en ambas tengan el mismo valor para poder eliminar el término con k al restarlas.
   - $3 * 5\text{k} + 3 * 3 = 3 * d * m_1 \rightarrow 15k + 9 = 3 * d * m_1$
   - $5 * 3k + 5 * 2 = 5 * d * m_2 \rightarrow 15k + 10 = 5 * d * m_2$

3. Luego se restan ambas ecuaciones:

   $$\begin{array}{l} 15k + 9 = 3 * d * m_1 \\ -\,15k + 10 = 5 * d * m_2 \\ \hline -1 = (3 * d * m_1 - 5 * d * m_2) \end{array}$$

4. Teniendo en cuenta que $c = (3m_1 - 5m_2) \in Z$ nos queda:
   $-1 = d(3m_1 - 5m_2) = d * c$

5. Para que la igualdad se satisfaga $d = 1$ y $c = -1$ o $d = -1$ y $c = 1$, con cualquier otra combinación de valores de d y c no se cumple la igualdad.

6. Siguiendo la definición de mcd, d debe ser un valor positivo, por lo que necesariamente $d = 1$.

7. Por lo tanto $(5k + 3, 3k + 2) = 1$ para todo k.

8. Por lo tanto $5k + 3$ y $3k + 2$ son coprimos para todo k.

Ejercicio 9.

Sean a, b ∈ Z y sea p primo. Demostrar que si p|ab entonces p|a o p|b.

Mostrar que esto no se cumple si p no es primo.

1. Suponiendo que $p|ab$ por definicion de divisibilidad se cumple:

    - $\exists\, c \in Z : a * b = p * c$

2. Si $p|a$ o $p|b$ se cumple que:

    - $\exists\, x \in Z\ a = p * x$ o $\exists\, w \in Z\ b = p * w$

3. Siguiendo el Teorema Fundamental de la Aritmética siendo a y b enteros (distintos a $0, 1, -1$) estos son productos finito de números primos y esa factorización es única salvo el orden:

    - $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha^i}$
    - $b = \prod_{j=1}^{n} q_j^{\alpha^j}$

4. Si p no es uno de los factores primos en la factorización de a entonces $(a, p) = 1$.

5. Siguiendo la Identidad de Bézout existen enteros m y n tales que:

    $1 = a * m + p * n$

6. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por b y la reescribimos un poco siguiendo las propiedades de la suma y la multiplicación para obtener:

    $b = a * b * m + p * n * b$

7. Se sabe por hipótesis que $a * b = p * c$, por lo tanto se puede reemplazar $a * b$ en la ecuación:

$b = p * c * m + p * n * b$

8. Usando algunas propiedades de la multiplicación y la suma, la ecuación se puede reescribir como:

   $b = p * (c * m + n * b)$

9. Teniendo en cuenta que $w = (c * m + n * b) \in Z$:

   $b = p * w$

10. Por lo tanto se cumple que $p|b$

11. Como se demostró que si $p|ab$ y p no divide a a, entonces p necesariamente debe dividir a b, lo cual se termina demostrando. Por lo tanto la afirmación es verdadera.

12. Se puede demostrar de forma análoga si $p|ab$ y p no divide a b, entonces p necesariamente debe dividir a a.

Si p no es primo, esto no se cumple:

Contraejemplo:

1. Sean:
   - $p = 6$
   - $a = 2$
   - $b = 3$

2. $a * b = 2 * 3 = 6$, claramente $6|6$, ya que $\exists\ c \in Z : 6 = 6 * c$, con $c = 1$.

3. No se cumple que $6|2$ puesto que $\nexists\ c \in Z : 2 = 6 * c$

4. No se cumple que $6|3$ puesto que $\nexists\ d \in Z : 3 = 6 * d$

5. Esto demuestra que si p no es primo, puede dividir a $a * b$ sin dividir a ninguno de los factores individuales.

Ejercicio 10.

Hallar, si existe, un número entero q tal que 7290q es el cubo de un entero

1. Se debe hallar un $q \in Z$ tal que $7290 * q \ = x^3$

2. Se reescribirá a 7290 como su descomposición en factores primos:

   $7290 = \ 2^1 \cdot 3^6 \cdot 5^1$

3. Para que $7290 * q \ = x^3$ todos los exponentes deben ser múltiplos de 3:
   - 2^1 necesita ser elevado a la 2^3por lo tanto se necesita 2^2.
   - 3^6 ya es múltiplo de 3.
   - 5^1 necesita ser elevado a la 5^3por lo tanto se necesita 5^2

4. Como 7290 está siendo multiplicado por q, se puede establecer el valor de ese q como lo que "necesita" cada factores primo para tener un exponente múltiplo de 3, eso nos dejaría:

   $q = 2^2 * 5^2 = 100$

5. Por lo tanto q debe ser 100 para que $7290 * q \ = x^3$

6. Verificación:
   $7290 * 100 \ = x^3$
   $\sqrt[3]{7290 * 100} \ = \sqrt[3]{x^3}$
   $\sqrt[3]{2^3 * 3^6 \ * \ 5^3} = \sqrt[3]{x^3}$
   $2 * 3^2 * 5 = x$
   $x = 90$

   $x^3 \ = 90^3 = 729000$

Ejercicio 11.

Demostrar que dados a y b en Q tales que a < b, existe otro número racional x tal que a < x < b.

1. Sean a y b en tales que $a < b$:

   - Si se suma a a en ambos lados de la desigualdad quedaría:
     $a + a < b + a \rightarrow 2a < a + b$

   - Si se suma a b en ambos lados de la desigualdad quedaría:
     $a + b < b + b \rightarrow a + b < 2b$

2. Como ambas desigualdades contienen la expresión $a + b$ se las puede juntar y quedaría:

   $2a < a + b < 2b$

3. Multiplicando todo por $\frac{1}{2}$ nos quedaría:

   $$\frac{2a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{2b}{2} \rightarrow \ a < \frac{a+b}{2} < b$$

4. Por lo tanto existe otro número racional $x = \frac{a+b}{2}$ tal que $a < x < b$.

Ejercicio 12.

Probar que no existe un número racional cuyo cubo sea igual a 2.

1. Sea $r = \frac{p}{q}$ donde $q \neq 0,\ p \in Z\ ,\ q \in Z$ y $\frac{p}{q}$ es el representante canónico de r, es decir, es una fracción irreducible.

2. Si $r^3 = 2$ entonces $\left(\frac{p}{q}\right)^3 = 2$

3. Esto implica que $\frac{p^3}{q^3} = 2$

4. Multiplicando ambos lados de la ecuación por q^3:

   $p^3 = 2 * q^3$

5. Esto implica que p^3 es par (ya que el cubo de un numero impar no puede ser un número par, debido a que impar * impar * impar es un numero impar, no lo voy a demostrar abrazo), por lo tanto p debe ser un número par. Si p es par, se puede escribir como:

   $p = 2 * c$ con $c \in Z$

6. Sustituyendo $p = 2 * c$ en la ecuación:

   $(2 * c)^3 = 2 * q^3 \rightarrow 8 * c^3 = 2 * q^3$

7. Dividiendo ambos lados por 2, obtenemos:

   $4 * c^3 = q^3 \rightarrow 2 * 2 * c^3 = q^3$

8. Esto implica que q^3 es divisible por 2, y por lo tanto, q^3 también es par. Si q es par, se puede escribir como:

   $q = 2 * k$ con $c \in Z$.

9. Dado que tanto p como q son pares, se contradice la suposición de que $\frac{p}{q}$ no es una fracción irreducible y por tanto la hipótesis de partida es falsa. Entonces, no existe un número racional cuyo cubo sea igual a 2.