

# Matemática IV- 2024

## TP3 - Números

1. Probar que no hay enteros simultáneamente pares e impares.
2. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
  - (a) Si  $a|1$  entonces  $a = 1$  o  $a = -1$
  - (b)  $a|b$  y  $b|c$  entonces  $a|c$
  - (c)  $a(a-1)$  es par
  - (d)  $x|y$  y  $y|z$  entonces  $x|yz$
3. Si a un número se lo divide por 5, el resto es 3 y si se lo divide por 7, el resto es 4. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 35 ?
4. Sean  $a$  y  $b$  dos números enteros que tienen restos 4 y 7 respectivamente en la división por 11. Hallar los restos de la división por 11 de  $(a + b^2)$
5. Convertir los siguientes números de base 10 a base 8:
  - (a) 98
  - (b) 44
  - (c) 20
6. Calcular el máximo común divisor entre:
  - (i)  $(16, 24)$
  - (ii)  $(70, 50)$
  - (iii)  $(121, 88)$
  - (iv)  $(-90, 90)$
  - (v)  $(980, 224)$
7. Probar que si  $a$  y  $b$  son enteros:
  - (a) si  $a$  es no nulo,  $(a, 0) = |a|$
  - (b)  $(a, b) = (a - b, b)$
  - (c) si además  $a$  y  $b$  son coprimos
    - $a + b$  es coprimo con  $a$
    - $a + b$  y  $ab$  son coprimos
8. Hallar  $\text{mcd}(5k + 3, 3k + 2)$ , para cualquier  $k$  entero

9. Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y sea  $p$  primo. Demostrar que si  $p|ab$  entonces  $p|a$  ó  $p|b$   
Mostrar que ésto no se cumple si  $p$  no es primo.
10. Hallar, si existe, un número entero  $q$  tal que  $7290q$  es el cubo de un entero.
11. Demostrar que dados  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{Q}$  tales que  $a < b$ , existe otro número racional  $x$  tal que  $a < x < b$ .
12. Probar que no existe un número racional cuyo cubo sea igual a 2.
13. Indique la parte real  $\text{Re}(z)$  y la parte imaginaria  $\text{Im}(z)$  de los siguientes complejos:  
a)  $\sqrt{-49}$       b)  $\sqrt{-20}$       c)  $\sqrt{-\frac{9}{16}}$       d)  $z = -8$       h)  $z = 7i$   
f)  $z = (3 + i) + (5 - 4i)$       g)  $z = 3i - (5 - 2i)$       h)  $\frac{1+3i}{3-i}$       i)  $\frac{1-i}{(1+i)^2}$
14. La suma de un número complejo y su conjugado es  $-8$  y la suma de sus módulos es 10. De qué números complejos se trata?
15. Encuentre  $x$  e  $y$  tales que:  
a)  $x - 15i = 9 + 5yi$ ;      b)  $2x + 3yi = 6 + yi$ ;
16. Hallar, si existe,  $x$  real tal que  $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$  siendo  $z = \frac{x+2i}{4-3i}$
17. Encontrar, si existe, un valor de  $k$  real para que el complejo  $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$  sea un número real.
18. Calcular las siguientes potencias:  
a)  $i^{489}$       b)  $-i^{1026}$       c)  $(3i)^{168}$
19. Dados los siguientes números complejos, encontrar la forma más adecuada para realizar las operaciones pedidas:  
 $z_1 = 3 + 3i$        $z_2 = -1 + i$        $z_3 = 5 + 4i$        $z_4 = 9$        $z_5 = 5i$        $z_6 = -7$   
 $z_7 = -4 - 4i$        $z_8 = -8i$        $z_9 = 2 - 2i$        $z_{10} = 3 - 4i$
- a)  $z_1 + z_7$       b)  $z_5 - z_3$       c)  $z_9 \cdot z_6$       d)  $z_8/z_{10}$       e)  $z_3 + z_6$       f)  $z_2 - z_6$   
g)  $z_3 \cdot z_{10}$       h)  $z_1^3$       i)  $z_9^9$       j)  $z_5^{15}$       k)  $z_{10}^3$
- l) hallar las raíces cuartas de  $z_2$   
m) hallar las raíces cúbicas de  $z_4$   
n) hallar las raíces séptimas de  $i$

## Ejercicios Adicionales

1. Sean  $a$  y  $b$  dos enteros coprimos, demostrar que :
  - (a)  $(a, a + 1) = 1$
  - (b)  $(a, b) = (a - b, b)$
  - (c)  $a|c$  y  $b|c$  entonces  $ab|c$
2. Demostrar que : Si  $(a, b) = d$  ;  $a|c$  y  $b|c$  entonces  $ab|cd$
3. El resto de la división de un número por 7 es 2; si se lo divide por 3, su resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 21?
4. \* Intente codificar (en el lenguaje que Ud prefiera) el *algoritmo de Euclides*. Pruebe que funciona con alguno de los ejercicios
5. \* Investigue que dice *La criba de Eratóstenes* y trate de escribir un código que realice el procedimiento.
6. Sean  $u$  y  $v$  números racionales. Probar que:
  - (a)  $u + v \in Q$  y  $u - v \in Q$
  - (b)  $u.v \in Q$
  - (c) Si  $u$  es no nulo,  $u^{-1} \in Q$
7. Dados  $a, b, c, d \in Z$  , suponiendo que los denominadores no se anulen y que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  no es cero, probar:
  - (a)  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  y  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
  - (b)  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
  - (c)  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
8. Demostrar que si  $p$  es primo y  $n \in N$ , entonces  $\sqrt[n]{p}$  es irracional
9. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es  $\sqrt{13}$  y el del segundo es 5. De qué números complejos se trata?
10. Demostrar que para cualquier complejo  $z$  vale que
  - $z.\bar{z} = |z|^2$
  - $z + \bar{z} = 2Re(z)$
  - $z - \bar{z} = 2Im(z)i$

11. Encontrar el valor de  $h$  para que el complejo  $\frac{1+3hi}{7+(h-2)i}$  sea un imaginario puro.
12. Realizar las operaciones con los complejos del último ejercicio (antes de los adicionales):
- \*) hallar las raíces cúbicas de  $z_5$
  - \*\*) hallar las raíces quintas de  $z_6$
  - \*\*\*) hallar las raíces séptimas de  $z_8$