Relaciones entre conjuntos

Una relación es una estructura discreta utilizada en matemáticas para representar las relaciones entre elementos de dos o más conjuntos.

En este apunte definiremos las relaciones n-arias pero estudiaremos con más detalle las relaciones binarias (de éstas pueden extenderse varias nociones a las primeras).
Además veremos algunas propiedades de las relaciones binarias y dos tipos especiales de ellas que más tarde nos servirán para estudiar algunas aplicaciones.

Definición 0.1. *Una relacion n-aria sobre* $A_1, ...A_n$ *es un subconjunto del producto cartesiano* $A_1 \times ..... \times A_n$

Si R *es una relacion n-aria sobre* $A_1, ...A_n$ *se llama* ***i-ésima proyección*** Π_i *a la aplicación de* R *en* A_i *que a cada n-upla de* R *le asigna su i-ésima coordenada.*

Ejemplo 0.2. *Como todo conjunto, las relaciones están dadas por* extensión*, dando todos las tuplas que la componen, o por* comprensión *dando la propiedad que la caracteriza.*

- $R = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a < b < c\}$ *es una relación 3-aria (o ternaria) definida en el conjunto de los números reales*

- *Supongamos los siguientes conjuntos:*
  $A = \{$*alumnos de mate 4*$\} = \{$*Ana, Pedro, Juan, Lucía,Felipe, ...*$\}$

$D = \{$*docentes de mate 4*$\} = \{$*Antonio,Diego,Eli, Mari, Franco ....*$\}$

$E = \{$*evaluaciones de mate 4*$\} = \{$*parcial1,parcial2,parcial3,parcial4,...*$\}$

$N = \{notas\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Podemos definir una relación 4-aria (o cuaternaria)sobre los conjuntos anteriores donde cada tupla muestre a los alumnos con la nota que alcanzó en determinado examen y el docente que corrigió.

$R = \{$*(Ana,parcial1,9,Antonio); (Juan, parcial2, 8, Eli);(Lucia, parical1,Mari, 10);......*
..... (Felipe,parcial2,Diego, 7);(Felipe, parcial3,8, Eli);......$\} \subset A \times E \times N \times D$

Una aplicación de las relaciones n-arias es el análisis de las bases de datos (específicamente las bases de datos relacionales).
Existe una analogía entre *Relación* (conjunto matemático) y *Tabla* .

Los conceptos básicos de una base de datos relacional son:

- Tablas: son las relaciones (que representan las bases de datos).
- Registros: son las n-tuplas
- Campos: son las entradas de las n-tuplas (elementos de los conjuntos).
- Atributos: son las columnas de cada tabla

1 Relaciones Binarias

Las relaciones 2-arias se llaman también ***binarias***, entonces:

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una relación binaria *definida entre los mismos es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, caracterizado por alguna propiedad común a sus elementos*

$$R = \{(x, y)/(x, y) \in A \times B\} \subset A \times B$$

Muchas veces cuando $(x, y) \in R$ escribiremos xRy y diremos que x está relacionado por R con y.

Ejemplos 1.1. *1. Si $A = \{x/x \text{ es vocal}\}$ y $B = \{brisa, sol, mar, nube\}$*

y la relación en $A \times B$ viene definida por: xRy si y sólo si x es letra de y.

Entonces,la relación definida por extensión quedaría:

$R = \{(i, brisa); (a, brisa); (a, mar); (o, sol); (u, nube); (e, nube)\}$

2. Si $A = \{$enteros pares entre -4 y 10 inclusive$\}$, $B = Z$ y la relación viene definida en la forma: xRy si y sólo si y es el cuadrado de x

Entonces,la relación definida por extensión quedaría:

$R = \{(-4, 16); (-2, 4); (0, 0); (2, 4); (4, 16); (6, 36); (8, 64); (10, 100)\}$

- **Dominio e Imagen de una Relación**

Sea R una relación de A en B.

Se llama **dominio** de R al conjunto de elementos x de A tales que $(x, y) \in R$

$$Dom_R = \{x \in A : (x, y) \in R\}$$

Se llama **imagen** de R al conjunto de elementos y de B tales que $(x, y) \in R$

$$Im_R = \{y \in B : (x, y) \in R\}$$

Ejemplo 1.2. *Dados los conjuntos* $A = \{a, e, i\}$ *y* $B = \{sol, nube, cielo\}$ *y la relación* R *en* $A \times B$ *definida por:* xRy *si y sólo si* x *es letra de* y*, esto es:* $R = \{(e, nube), (i, cielo)\}$

Luego,

$$Dom(R) = \{e, i\} \subset A$$

$$Im(R) = \{nube, cielo\} \subset B$$

- **Relación Inversa**

Sea R una relación de A en B. Se llama **relación inversa** de R al subconjunto de $B \times A$ definido por

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

Ejemplo 1.3. *Sean* $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ *y* $B = \{-27, -16, -8, -2, -1, 0, 1, 2, 8, 16, 27\}$*, y sea* R *de* A *en* B *definida por :* xRy *si y sólo si* x *es el cubo de* y*; dada por extensión por:*

$R = \{(-8, -2); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (8, 2); (27, 3)\}$

Entonces, $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\} = \{(-2, -8); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (2, 8); (3, 27)\}$

es decir, $yR^{-1}x$ *si y sólo si* y *es la raíz cúbica de* x

- **Composición**

Dadas las relaciones R en $A \times B$ y S en $B \times C$ se puede construir la relación composición

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} \subset A \times C$$

Ejemplo 1.4. *Sean los siguientes subconjuntos de enteros:* $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *y* $C = \{-5, -4, -3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Sea R de A en B definida por : xRy si y sólo si x es el opuesto de y, y escrita por extensión: $R = \{(-2, 2); (-1, 1); (0, 0); (1, -1); (2, -2)\}$

Sea S de B en C definida por : xRy si y sólo si y es el doble de x, y escrita por extensión: $S = \{(-2, -4); (-1, -2); (0, 0); (1, 2); (2, 4)\}$

Ahora busquemos la relación compuesta. Observemos que podremos encontrar SoR de A en C pero no RoS.

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} = \{(-2, 4); (-1, 2); (0, 0); (1, -2); (2, -4)\}$$

Ejemplo 1.5. *Sean A un conjunto de alumnos, B un banco de preguntas de un formulario y* $C = \{10, 15, 20, 30\}$.

Sea R de A en B dada por: aRb si y sólo si a contestó correctamente la pregunta b *y sea S la relación de B en C :* bSc si y sólo si c es el puntaje signado a la pregunta b

Entonces la relación compuesta RS está definida de la siguiente forma:
a SoR b si y sólo si a contestó correctamente una pregunta con puntaje asignado c

La matriz de una relación

Es posible representar una relación entre dos conjuntos finitos con una matriz.

Sea R una relación entre $A = \{a_1, ...a_m\}$ y $B = \{b_1, ...b_n\}$, la matriz de representación M_R de la relación está dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (a_i, b_j) \in R \\ 0 & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ejemplos 1.6.

- *Sea* $R = \{(1, r); (2, s); (3, r)\}$ *una relación entre* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{r, s\}$

  Entonces la matriz de la relación será:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Dada la matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Podemos considerar que existe una relación R *entre algún conjunto* $A = \{a, b, c\}$ *y otro conjunto* $B = \{1, 2, 3, 4\}$ *tal que* $R = \{(a, 1); (a, 4); (b, 2); (b, 3); (c, 1); (c, 3)\}$

2 Relaciones Binarias en un conjunto

Si una relación R es tal que $R \subset A \times A$, se dice que está definida en el conjunto A (o que R es una relación sobre A)

En este tipo de relaciones se pueden definir las siguientes propiedades:

- **Reflexividad**: R será *reflexiva* si para todo $x \in A$ vale que xRx
- **Simetría**: R será *simétrica* si para todo x, y en A vale que xRy implica yRx
- **Antisimetría**: R será *antisimétrica* si para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
- **Transitividad**: R será *transitiva* si para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz

Obs: Vemos que las propiedades están definidas por un condicional entonces para probarlas debemos mirar bien que *si se cumple que el antecedente es Verdadero tiene que ser Verdadero también el consecuente para que todo el condicional sea Verdadero*, es decir los únicos casos **falsos** son los de antecedente Verdadero y consecuente Falso. Recordemos que de igual manera, *antecedente Falso hace que el condicional sea Verdadero, no importa cual sea el valor de verdad del consecuente*, entonces si no encontramos un par no tenemos que buscar su inverso u otro para componer para probar simetría, antisimetría o trannsitividad.

Ejemplos 2.1. *1. Sea* $A = \{a, b, c\}$

- $R = \{(a, b); (a, a); (b, b)\}$ *es transitiva pero no simétrica ni reflexiva. También es antisimétrica.*

  Como no todos los elementos de A *están relacionados consigo mismo* R *no puede ser reflexiva. Tampoco es simétrica porque vemos que tenemos el par* (a, b) *pero no está el* (b, a)*. Como todos los pares que se pueden componer tienen en el mismo conjunto* R *su par compuesto decimos que es transitiva. Cada par que tiene su inverso cumple que su primer coordenada es igual a la segunda.*

- $R = \{(a,a);(b,b);(c,c)\}$ *es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva*

  Esta relación es bastante trivial, es la Identidad de A que ya antes mencionamos (Δ_A). Se ve fácilmente que cumple con todas las propiedades (claramente todos los elementos se relacionan consigmo mismo; como la primer coordenada es igual a la segunda en todos los casos, tenemos el par inverso, y por lo tanto será simétrica. La transitividad y antisimetría se da al no cumplirse (o cumplirse de manera trivial al relacionar cada par con él mismo) la conjunciíon del antecedente.

- $R = \{(a,b);(b,c);(a,c);(c,b);(a,a);(b,b);(c,c)\}$ *es reflexiva, transitiva pero no es simétrica ni antisimétrica.*

  Como para cada elemento $x \in A$ encontramos el par (x,x) entonces es reflexiva. Si miramos cada par que puede componerse vemos que está también el compuesto (por ejemplo, (a,b) y (b,c) se pueden componer y nos da (a,c) que está; lo mismo con (a,c) y (c,b) que da (a,b), o (b,c) y (c,b) que devuelven (c,c) y (b,b) que están en R).

  Vemos que no es simétrica ya que tenemos al par (a,b) pero no a su inverso el par (b,a) (no importa que otros pares tengan a su inverso, tiene que darse para todos). Tampoco es antisimétrica ya que está el par (b,c) y el par (c,b) pero $b \neq c$.

  Éste es un ejemplo de una relación que no es ni simétrica ni antisiméstrica, mostrando que una propiedad no es " opuesta " a la otra.

2. *La relación $x \leq y$ en el conjunto de los números naturales es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Obviamente no es simétrica .*

   Observemos que si el "menor" es estricto la relación no sería reflexiva ni antisimétrica.

3. *En el conjunto de las rectas del plano, la relación L es paralela a M es reflexiva, simétrica y transitiva (podemos pensarlo geométricamente o recordar que dos rectas del plano son paralelas si tienen igual pendiente).*

4. *La relación de "X es correlativa con Y" , entre las materias de un plan de estudio (de una carrera en particular), es transitiva*

2.1 Relaciones de Orden

Definición 2.2. *Una relación binaria R definida sobre un conjunto A es un* ***preorden*** *en A si es reflexiva y transitiva.*
Y es una ***relación de orden*** *(ó un* **orden** sobre A*) si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

Muchas veces diremos que la relación ordena *S y la notaremos por $\leq$ (no confundir este símbolo con el orden de los números reales, el orden de los reales es un ejemplo más de orden).*

Obs: *Si bien nosotros diremos que una relación con estas propiedades es un* orden *muchas veces vamos a encontrar que a este tipo de relaciones se las denomina* **orden parcial**. *Un orden parcial refiere a una relación donde hay elementos que no son comparables.*
Si cada par de elementos en un conjunto es comparable diremos que el orden es ***total*** *o* ***lineal****.*

Con esto se pretende formalizar la idea intuitiva de orden de un conjunto.

Ejemplos 2.3. *Varios conjuntos con los que estamos familiarizados o estudiamos antes en este apunte son conjuntos ordenados:*

- *Dado $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, y su orden usual, se puede ver fácilmente que se cumplen las tres propiedades para que sea un conjunto ordenado.*
- *La relación sobre un conjunto A llamada* ***relación Identidad*** *y denotada por Δ_A es una relación de orden.*
- *Dado un conjunto S, sea $P(S)$ el conjunto de "Partes de S", o sea, el conjunto de todos los subconjuntos de S.*

  La inclusión de conjuntos $\subseteq$ en $P(S)$ es una relación de orden (todo subconjunto de S está contenido o es igual a si mismo, entonces tenemos la reflexividad. Si vale la doble inclusión entre conjuntos entonces los dos conjuntos son iguales y la relación es antismétrica. Es fácil ver que también vale la propiedad transitiva de la inclusión entre subconjuntos.
  Si pensamos en la inclusión estricta entonces la relación sería un preorden.

- *Sea* $B = \{B, \wedge, \vee, ', o, 1\}$ *un algebra de Boole y sea* x *la relación dada por* $a \leq b$si y sólo si $a \wedge b = a$ *es un orden en* B.

- *Dado el conjunto de todos los alumnos de la facultad podemos ordenarlo por el número de legajo de cada alumno.*

- *Sea* A *un conjunto de personas y sea* R *la relación sobre* A *dada por* aRb *si y sólo si la estatura de* a *es menor a la estatura de* b

  R *es un preorden y sería un orden sólo si entre todas las personas de* A *no hay personas con la misma estatura.*

Ejemplo 2.4. *La divisibilidad es una relación de orden en* $\mathbb{N}$

Recordemos que a ***divide*** *a b , y se escribe* $a|b$ *si existe un entero* c *tal que* $b = ac$. *Ahora probemos que esta relación entre números naturales cumple las tres propiedades necesarias para ser una relación de orden.*

- *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n|n$ *ya que existe* 1 *tal que* $n = n.1$; *por lo tanto la relación es reflexiva.*

- *para todo par* $n, m \in \mathbb{N}$, *si* $n|m$ *y* $m|n$ *entonces* $n = m$ *ya que* $n|m$ *implica que existe* k *tal que* $m = nk$; *por otro lado, si* $m|n$ *existe* h *tal que* $n = mh$. *Luego,* $n = mh = (nk)h = n(kh)$ *y como son todos números naturales* $kh = 1$ *y* $n = m$. *De esta manera probamos que la relación es antisimétrica.*

- *dados tres números naturales cualesquiera,* n, m, r *tales que* $n|m$ *y* $m|r$, *entonces probaremos que* $n|r$ *para demostrar que la relación es transitiva.*

  Como $n|m$ *existe* k *tal que* $m = nk$ *y como* $m|r$ *existe* h *tal que* $r = mh$;

  luego, $r = mh = (nk)h = n(hk)$ *entonces existe un natural* $t = hk$ *tal que* $r = nt$ *y por lo tanto* $n|r$ *como queríamos probar.*

Observemos que si en lugar del conjunto $\mathbb{N}$ *de los números naturales tomamos el conjunto de los enteros,* $\mathbb{Z}$, *no se cumplirá la propiedad de antisimetría*
(ya que $n|-n$ *y* $-n|n$ *PERO* $n \neq -n$*).*

La divisibilidad en $\mathbb{Z}$ *no es un orden (es un preorden)*

Observemos que mientras en algunos de los ejemplos anteriores todos los elementos están relacionados (dados dos números reales cualesquiera x e y, siempre se da que : $x \leq y$, $x = y$ ó $y \leq x$, todas las personas pueden compararse por su altura, etc), en otros ejemplos hay elementos que no están relacionados (podemos encontrar subconjuntos E y H de S que tengan intersección vacía o que tengan elementos en común pero no se dé ninguna de las dos inlusiones $E \not\subset H$ y $H \not\subset E$. Hay naturales m y n tales que no se cumple $m|n$ ni $n|m$).
Esta diferencia define nuevos tipos de conjuntos ordenados:

Definición 2.5. *Dado un conjunto ordenado (A, R) se dice que dos elementos a, b del conjunto son **comparables** si se verifica que aRb ó bRa, en caso contrario se dice que son **incomparables**.*
*Si todos los elementos de A son comparables dos a dos entonces se dice que A está **totalmente ordenado** y que R es un **orden total** en A. Si existen elementos incomparables se dirá que R es un **orden parcial** en A.*

Sabemos que los números reales están ordenados por su orden usual $\leq$, es igual con los naturales, enteros y racionales (con el mismo orden usual). Además vimos que los naturales y los enteros pueden ser ordenados (o parcialmente ordenados) por la relación *divide*. Pero, ¿qué pasa con los números complejos? hay alguna forma de ordenarlos?
Si pensamos a los complejos como pares ordenados y definimos una relación entre pares (*serían pares de pares...*) podríamos ver que tipo de orden hay entre ellos.

No sólo podemos pensar en el producto de dos relaciones si no de n relaciones:

Definición 2.6. *Sean (A_1, R_1), (A_2, R_2).... (A_n, R_n) una familia de conjuntos ordenados.*

- *Se llama relación **orden producto** (estándar) a la relación $R \subset A_1 \times A_2 \times \ \times A_n$ definida por: $(x_1, x_2, , x_n)R(y_1, y_2, , y_n)$ si y sólo si $x_1R_1y_1$, $x_2R_2y_2 \cdots x_nR_ny_n$ para todo $i = 1....n$*
- *Se llama relación **producto lexicográfico** a la relación $L \subset A_1 \times A_2 \times \ \times A_n$ definida por: $(x_1, x_2, , x_n)L(y_1, y_2, , y_n)$ si y sólo si $x_i = y_i$ para todo $i = 1....n$, ó $x_jR_jy_j$ siendo j el primer índice tal que $x_j \neq y_j$*

2.1.1 Conjuntos Ordenados

Un conjunto A junto con un orden (parcial/total) R es un ***conjunto ordenado***. (*conjunto parcialmente/totalmente ordenado*).

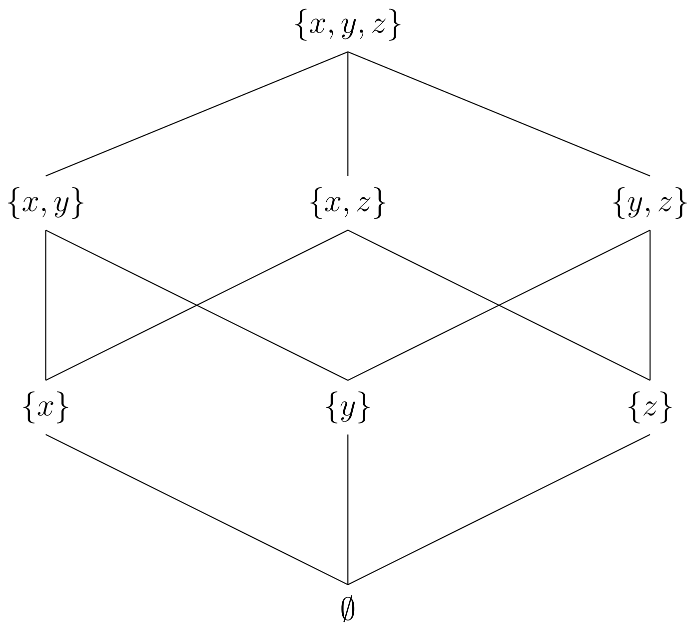
Generalmente se dice que R ordena al conjunto A y se denota (A, R).

Diagramas de Hasse

Un diagrama de Hasse es una *versión simplificada* de un digrafo. Es una herramienta muy útil ya que describe completamente el orden asociado.

Ejemplo 2.7. *Antes vimos que la inclusión de conjuntos* $\subseteq$ *en* $P(S)$ *es una relación de orden para un conjunto* S *y su conjunto de "Partes de* S*",* $P(S)$*, o sea, el conjunto de todos los subconjuntos de* S*.*

Veamos el diagrama de Hasse para un ejemplo particular de $S = \{x, y, z\}$ *.*



2.1.2 Elementos extremos de conjuntos (parcialmente) ordenados

Algunos elementos de un conjunto ordenado tienen especial importancia para muchas propiedades y aplicaciones de los conjuntos ordenados.

Definición 2.8. *Sea $(A,<)$ un conjunto ordenado cualquiera.*
Diremos que un elemento $a \in A$ es un ***elemento máximo de A*** *si $x < a$ para todo $x \in A$. De manera dual, un elemento $a \in A$ es un* ***elemento mínimo de A*** *si $a < x$ para todo $x \in A$.*

Definición 2.9. *Sean $(A,<)$ un conjunto ordenado cualquiera y B un subconjunto de A.*

- *Un elemento $a \in A$ es una* ***cota superior de B*** *si $b < a$ para todo $b \in B$*
- *Un elemento $a \in A$ es una* ***cota inferior de B*** *si $a < b$ para todo $b \in B$.*

- *Un elemento $a \in A$ se llama* **supremo** de B *(mínima cota superior de B) si a es cota superior de B y $a < c$ para toda c cota superior de B*
- *Un elemento $a \in A$ se llama* **ínfimo** de B *(máxima cota inferior de B) si a es cota inferior de B y $c < a$ para toda c cota inferior de B*

Definición 2.10. *Un* **reticulado** *es un conjunto ordenado $(L,<)$ tal que cada subconjunto $\{a,b\}$ de dos elementos tiene supremo e ínfimo.*

2.2 Relaciones de Equivalencia

Definición 2.11. *Diremos que una relación R definida sobre un conjunto A reflexiva, simétrica y transitiva es una* ***relación de equivalencia*** *(ó que es un* equivalencia en A*)*

Muchas veces notaremos a una relación de equivalencia R por $\sim$, $\approx$ ó $\equiv$

La idea de equivalencia sobre un conjunto permite establecer una relación entre los elementos del conjunto que comparten cierta característica o propiedad. Esto permitirá reagrupar dichos elementos.

Ejemplos 2.12.

- *La igualdad matemática (ya sean conjuntos numéricos o conjuntos en general) es trivialmente una relación de equivalencia.*
- *La relación sobre un conjunto A llamada* ***relación Identidad*** *y denotada por Δ_A es una relación de equivalencia.*
- *Pensemos en los ángulos (esto ya lo usamos cuando trabajamos con los argumentos de los números complejos en forma trigonométrica, polar o exponencial!!).*

  Decimos que $\alpha \sim \beta$ si y sólo si existe un entero k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$
  Claramente la relación es reflexiva ya que para $k = 0$ todo ángulo está relacionado con sí mismo.
  Supongamos que $\alpha \sim \beta$ entonces existe k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$, luego $\beta = \alpha - 2k\pi = \alpha + 2(-k)\pi$, y por lo tanto $\beta \sim \alpha$ mostrando que la relación es simétrica.

  Por último probemos que $\sim$ es transitiva. Si $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \delta$ entonces veremos que $\alpha \sim \delta$
  $\alpha \sim \beta$ entonces existe k tal que $\alpha = \beta + 2k\pi$
  $\beta \sim \delta$ entonces existe h tal que $\beta = \delta + 2h\pi$
  por lo tanto, $\alpha = \beta + 2k\pi = (\delta + 2h\pi) + 2k\pi = \delta + 2(h + k)\pi$ con $h + k$ entero, obtendiendo que $\alpha \sim \delta$

- *Antes vimos que en el conjunto de las rectas del plano, la relación L es paralela a M es reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto esta relación es una Equivalencia.*

- *Sea A el conjunto de los alumnos de Mate 4, y sea R la relación definida por* $\boldsymbol{a}R\boldsymbol{b}$ *si y sólo si el apellido de* ***a*** *comienza con la misma letra que el apellido de* ***b***

- *Sea E un conjunto de conjuntos.*
  La relación $X \sim Y$ si y sólo si existe una biyección de X en Y es una equivalencia en E. A esta relación se la llama de ***coordinabilidad****, y los conjuntos X e Y se dicen* ***coordinables****. (puede que recuerden (o estudien más adelante) esta relación en otras materias de la carrera)*

Clases de Equivalencia, Conjunto Cociente y Particiones

Definición 2.13. *Dada una relación de equivalencia R sobre A y un elemento $a \in A$ se denominará* ***clase de equivalencia de a por R*** *y se denotará $\bar{a}$ (ó* ***R(a)****) al conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con a por R. Es decir, $\bar{a} = \{x \in A : xRa\}$*

Cualquier elemento de $\bar{a}$ se llama ***representante*** *de la clase, y en particular, como la relación es reflexiva se da que $a \in \bar{a}$, luego a es representante de la clase $\bar{a}$ para todo $a \in A$.*

Ejemplos 2.14.

- *La relación de equivalencia L es paralela a M en el conjunto de las rectas del plano, podemos tomar como representante de cada* **clase** *a la recta que pasa por el origen*

- *Cuando se trabaja con números racionales sabemos que una propiedad que tienen las fracciones es la siguiente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ac = bd$, entonces por lo general uno toma o "se queda" con la fracción irreducible que la cumpla.*
  Esa fracción irreducible será la representante de la clase bajo la relación de equivalencia dada por esa propiedad característica.

- *En el ejemplo de equivalencia entre ángulos podemos tomar como representante de cada clase a los ángulos dentro del intervalo $[0, 2\pi)$ (como hacíamos con los argumentos de los complejos).*

Definición 2.15. *Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de elementos del conjunto A respecto de la relación R se lo llamará* ***conjunto cociente de A respecto de la relación R*** *y se lo denotará:* $A/R = \{\bar{a} : a \in A\}$

Definición 2.16. *Una* ***partición*** *de un conjunto A es un conjunto de partes no vacías de A, disjuntas dos a dos y tales que su unión coincide con A.*

Esto es, dado A un conjunto, y $P = \{A_i\}$ *con* $i \in I$ *(una familia de subconjuntos de A). Se dice que P es una partición de A si y sólo si se verifican:*

- *Si* $A_i \in P$ *entonces* $A_i \neq \emptyset$

- *Si* $A_i, A_j \in P$ *entonces* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$

- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Es decir, una división de un conjunto no vacío en "partes" separadas y no vacías representadas mediante una colección o familia de subconjuntos de dicho conjunto que lo recubren.

Notación: Si bien estamos usando la P para referirnos a las particiones, en general una partición suele anotarse con la letra π

Ejemplos 2.17.

- *El conjunto de los números naturales puede ser "particionado" en pares e impares*

- *El conjunto de alumnos de mate4 puede dividirse en los que aprobaron la entrega 1, los que deben reentregarla y los que no lo hicieron.*

Sea P una partición de un conjunto A.
Definiremos sobre A la siguiente relación R: *aRb si y sólo si existe $X \in P$ tal que $a, b \in X$*

Claramente R es reflexiva ya que al ser P una partición de A todo elemento del conjunto pertenece a algún subconjunto de la familia P.
Es inmediata la simetría de R (si existe $X \in P$ tal que $a, b \in X$, existirá (ese mismo) X tal que $b, a \in X$).
Sólo falta comprobar la transitividad de R para poder afirmar que es una relación de equivalencia: queremos probar que si dados $a, b, c \in A$ tales que aRb y bRc entonces aRc.
Si aRb y bRc entonces existen $X, y \in P$ tales que $a, b \in X$ y $b, c \in Y$, luego $b \in X \cap Y$ pero como $X, y \in P$ pero como P es una partición sus elementos tienen intersección vacía, con lo cual o no existe b o $X = Y$ y por lo tanto $a, c \in Y = X$ y aRc.

La relación R definida de esta forma es llamada ***equivalencia asociada a la partición P***

Ejemplo 2.18. *Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $P = \{\{a\}; \{b, e\}; \{c, d, f\}\}$ una partición de A.*
La relación asociada a la partición está dada por
$R = \{(a, a); (b, b); (e, e); (b, e); (e, b); (c, c); (d, d); (f, f); (c, d); (d, c); (c, f); (f, c); (d, f); (f, d)\}$
y claramente vemos que es de equivalencia.

Ahora veamos unos resultados que nos muestran una propiedad dual para las relaciones de equivalencias y las particiones.

Lema 2.19. *Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces para todos par a, b de elementos de A vale que $\bar{a} = \bar{b}$ si y sólo si aRb*

Supongamos que $\bar{a} = \bar{b}$,como R es reflexiva aRa entonces $a \in \bar{a} = \bar{b}$, luego $a \in \bar{b}$ y aRb
Ahora suponemos que aRb y probaremos que las clases son iguales:
Sea $z \in\in \bar{a}$, entonces zRa pero como R es de equivalencia, por transitividad y la hipótesis general aRb tenemos que zRb, luego $\bar{a} \subset \bar{b}$. De la misma manera podemos ver que vale la otra inclusión y por lo tanto, $\bar{a} = \bar{b}$.

Teorema 2.20. *Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A , el conjunto cociente A/R es una partición de A.*

Demostración: *Queremos mostrar que A/R (el conjunto de todas las clases de equivalencia por R) particiona a A*
Veamos que cumple con la definición, o sea que es un conjunto de partes no vacías de A disjuntas dos a dos y que su unión es A

Como R es reflexiva, para todo $a \in A$ vale que aRa y por lo tanto $\bar{a} = R(a)$ es no vacío.
Supongamos que existe $x \in R(a) \cap R(b)$, luego xRa y xRb. Como R es simétrica y transitiva (por ser de equivalencia) aRb pero esto significa que las clases son iguales. Entonces todas las partes o son iguales o son disjuntas
Por definición todas las clases de equivalencia por R sobre A son subconjuntos de A y por la tanto la unión de todas ellas está incluida en A.
Como todo elemento $a \in A$ pertenece a su propia clase $\bar{a} = R(a)$ (por ser R reflexiva), vemos que todo elemento de A es un elemento en la unión de todas las clases.

Ejemplo 2.21. *Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1); (2, 4); (4, 2); (4, 1); (1, 4)\}$ una relación de equivalencia en A*
El conjunto cociente $A/R = \{\{1, 2, 4\}; \{3\}\}$ es una partición de A

2.2.1 Relación de Congruencia

En su obra *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada en el a no 1801, **Gauss** introdujo el concepto de congruencia.

Definición 2.22. *Dados los enteros a, b y m, se dice que* a es congruente con b módulo m *y se escribe* $a \equiv b$ *(mod m) (ó* $a \equiv_m b$ *ó* $a \equiv b\ (m)$ *) si y sólo si* $m|a-b$*, es decir, existe* $k \in Z$ *tal que* $a - b = k.m$

Ejemplo 2.23. $4 \equiv 10\ (3)$ *pues* $3|4-10$*, ya que existe* -2 *tal que* $4 - 10 = -6 = -2 \cdot 3$

Proposición 2.24. *La relación de congruencia módulo m es una relación de equivalencia*

Demotración: Para mostrar que la congruencia es una relación de equivalencia tenemos que probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Tenemos: *a es congruente con b módulo m* , ó $a \equiv_m b$ si y sólo si $m|a-b$, entonces,

- $\equiv_m$ es reflexiva ya que para a entero vale que $m|a-a$ pues $a - a = 0.m$
- $\equiv_m$ es simétrica.

  Supongamos que $a \equiv_m b$, entonces m divide a $a - b$ y existe k entero tal que $a - b = k.m$, luego existe $-k$ tal que $b - a = -(a - b) = -(k.m) = (-k).m$ y por lo tanto $m|b-a$ y $b \equiv_m a$
- $\equiv_m$ es transitiva: esto es, si $a \equiv_m b$ y $b \equiv_m c$ entonces $a \equiv_m c$

  Supongamos que $a \equiv_m b$ entonces $m|a-b$, existe k entero tal que $a - b = km$,

  por otro lado $b \equiv_m c$ entonces $m|b-c$, existe h entero tal que $b - c = hm$,

  luego $a - c = a + (-b + b) - c = (a - b) + (b - c) = km + hm = (k + h)m$, y existe un entero $t = k + h$ tal que $a - c = tm$ y así m divide a $a - c$ y de esa forma tenemos que $a \equiv_m c$ como queríamos probar.

Por ser la congruencia una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$, determina una partición del conjunto de los números enteros en *clases de equivalencia* que se denominan *clases de congruencia módulo m* .

La clase de congruencia módulo m de un número x será el conjunto $\overline{x} = \{y \in \mathbb{Z} : y \equiv_m x\}$

Esto nos permite agrupar a los enteros en familias disjuntas de manera que dos números son congruentes módulo m si y sólo si están en la misma clase de equivalencia.

Esta partición de $\mathbb{Z}$ inducida por la congruencia módulo m es lo que nos determina el conjunto cociente $\mathbb{Z}m = \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/\equiv_m$ que estaremos estudiando.

Observación 2.25. *Dos números enteros pertenecen a la misma clase de equivalencia si y sólo si son congruentes módulo m.*
Supongamos que a y b pertenecen a la "clase del x", entonces $a \equiv_m x$ *y* $b \equiv_m x$*. Como la congruencia es una relación simétrica y transitiva tenemos que* $a \equiv_m b$*.*
Por otro lado, si $a \equiv_m b$ *es claro que ambos pertenecen a la misma clase de equivalencia.*

Proposición 2.26. *Todo entero es* ***congruente módulo*** m *con su* ***resto*** *en la división por* m

Demostración:

Supongamos que $x \equiv_m y$, sabemos que esto equivale a decir que existe k entero tal que $x - y = km$, entonces podemos escribir $x = km + y$.
Como antes dijimos que dos enteros son congruentes si pertenecen a la misma clase podemos con ésto describir las clases de la siguiente forma:
$\overline{x} = \{y : y \equiv_m x\} = \{y : x = km + y\} = \{y : y = x + k'm\} = \{y : y = x, y = x + 1, y = x + 2.....\}$

Ejemplos 2.27. 1. *Sabemos que* $x \equiv_3 y$ *si y sólo si* $x - y = k \cdot 3$.

Ahora tomemos por ejemplo al 2*, como* $y \equiv_3 2$ *es lo mismo que* $y - 2 = k \cdot 3$ *entonces vale* $y = k \cdot 3 + 2$ *(todos los puntos de "esa recta")*

$$\bar{2} = \{y \in Z : y \equiv_3 2\} = \{2, 5, 8, 11, \cdots\}$$

2. *Veamos la congruencia módulo* 2*, esto es* $x \equiv_2 y$ *si y sólo si* $x - y = 2 \cdot m$

Tomemos al 1*, Como* $1 \equiv y(2)$ *es lo mismo que* $y - 1 = k \cdot 2$ *entonces vale* $y = k \cdot 2 + 1$

$$\bar{1} = \{y \in Z : 1 \equiv_2 y\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$$

$$\bar{0} = \{y \in Z : 0 \equiv_2 y\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$$

Luego, $Z/\equiv_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

"Partimos" el conjunto de los números enteros en dos clases, la del $\bar{0}$ *y la del* $\bar{1}$*, es decir, los números que tienen resto* 0 *cuando se los divide por* 2*, o resto* 1*.*

Esto es, ***los números pares y los impares****.*

Proposición 2.28. *Dos enteros son congruentes módulo* m *si y sólo si los respectivos restos en su división por* m *son iguales.*

Demostración:

Supongamos que x e y son dos enteros congruentes módulo m y probemos que tienen el mismo resto en la división por m.

Por el algoritmo de la división, existen (y son únicos) cociente y resto enteros tales que :

$x = k_1 m + r_1$ con $0 \leq r_1 < m$

$y = k_2 m + r_2$ con $0 \leq r_2 < m$ (Observemos que $|r_1 - r_2| < m$)

Luego, $x - y = (k_1 m + r_1) - (k_2 m + r_2) = (k_1 m - k_2 m) + (r_1 - r_2) = (k_1 - k_2)m + (r_1 - r_2)$

Y como $x \equiv_m y$, existe un entero k tal que $x - y = km$, concluimos que debe ser $r_1 - r_2 = 0$ y por lo tanto $r_1 = r_2$.

Ahora supongamos que los restos en la división por m coinciden y veremos que $x \equiv_m y$.

Otra vez usando el algoritmo de la división existen k_1, k_2, r enteros tales que :

$$x = k_1 m + r$$

$$y = k_2 m + r$$

Así, $x - y = (k_1 m + r) - (k_2 m + r) = (k_1 m - k_2 m) + (r - r) = (k_1 - k_2)m = km$

mostrando que $m | x - y$ y por lo tanto, $x \equiv_m y$.

Ejemplo 2.29. *Sea $m = 5$, vemos que $7 \equiv_5 42$ ya que ambos tienen resto 2 en la división por 5 (de hecho ambos son congruentes con 2)*

Todo entero es congruente con su resto en la división por m, $x \equiv_m r$, ya que por el algoritmo de la división para cualquier entero x existe y es único el resto r en la división por m

También sabemos que dos enteros congruentes pertenecen a la misma clase de equivalencia, y por lo tanto las clases serán iguales, $\bar{x} = \bar{r}$.

Por las propiedades y características de la división entera, tenemos que hay m posibles restos en la división por m. Estos son, 0, ..., $m-1$.

De esta forma vemos que habrá m clases de equivalencia o congruencia.

Teorema 2.30. *Sea $m \in N, \mathbb{Z}m = \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/\equiv_m$, el conjunto cociente, tiene m clases de equivalencias.*