

## TP4 – Relaciones entre conjuntos

Agustina Sol Rojas

### Ejercicio 1.

Sean los conjuntos  $A = \{1, 0, -1\}$  y  $B = \{4, 3, 2, 1\}$ . Decide si las siguientes corresponden a relaciones de  $A$  en  $B$ . Justifica.

- a.  $R = \{(1; 1), (0; 2)\}$
- $(1; 1) \in A \times B$
  - $(0; 2) \in A \times B$
  - Por lo tanto  $R \subseteq A \times B$
- b.  $R = \{(-1; 1), (1; -1)\}$
- $(-1; 1) \in A \times B$
  - $(1; -1) \notin A \times B$
  - Por lo tanto no se da que  $R \subseteq A \times B$ .
    - $R$  no es una relación de  $A$  en  $B$
- c.  $R = \{(-1; 1), (-1; 2), (-1; 3)\}$
- $(-1; 1) \in A \times B$
  - $(-1; 2) \in A \times B$
  - $(-1; 3) \in A \times B$
  - Por lo tanto  $R \subseteq A \times B$ .
- d.  $R = \{(4; 1)\}$
- $(4; 1) \notin A \times B$
  - Por lo tanto no se da que  $R \subseteq A \times B$ .
    - $R$  no es una relación de  $A$  en  $B$
- e.  $R = \emptyset$
- $\emptyset \notin A \times B$
  - Por lo tanto no se da que  $R \subseteq A \times B$ .

## Ejercicio 2.

Sea  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \mathbb{Z}$  y la relación de  $A$  en  $B$  que viene definida en la forma:  $xRy$  si y sólo si  $y$  es el cuadrado de  $x$ . Escribe  $R$  por extensión. Define  $R^{-1}$  por comprensión y por extensión.

$R$  por extensión:

$$R = \{(-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$$

$R^{-1}$  por comprensión:

$$R^{-1} = \{(y,x): (x,y) \in R\}$$

$$R^{-1} = \{(y,x): (y \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x^2 = y)\}$$

$R^{-1}$  por extensión:

$$R^{-1} = \{(9,-3), (4,-2), (1,-1), (0,0), (1,1), (4,2), (9,3)\}$$

## Ejercicio 3.

Sean los conjuntos  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $V = \{\text{vocales}\}$  y  $B = \{1, 2, 3\}$ . Decide si las siguientes corresponden a relaciones. Justifica

- $R = \{(a, a, a); (a, b, c); (b, c, d)\}$  en  $A \times A \times A$ 
  - $(a, a, a) \in A \times A \times A$
  - $(a, b, c) \in A \times A \times A$
  - $(b, c, d) \in A \times A \times A$
  - Por lo tanto  $R \subseteq A \times A \times A$ .
- $R = \{(a, a, a); (c, e, 2); (a, b, 1)\}$  en  $A \times V \times B$ 
  - $(a, a, a) \notin A \times V \times B$
  - $(c, e, 2) \in A \times V \times B$
  - $(a, b, 1) \notin A \times V \times B$
  - Por lo tanto no se da que  $R \subseteq A \times V \times B$ .

- c.  $R = \{(a, b, 1); (e, c, 2) : (i, j, 3)\}$  en  $V \times A \times B$
- $(a, b, 1) \in V \times A \times B$
  - $(e, c, 2) \in V \times A \times B$
  - $(i, j, 3) \notin V \times A \times B$
  - Por lo tanto no se da que  $R \subseteq V \times A \times B$ .
- d.  $R = \{(a, z, 3); ((b, i, 2); (c, x, 1))\}$  en  $A \times V \times B$
- $(a, z, 3) \notin A \times V \times B$
  - $(b, i, 2) \in A \times V \times B$
  - $(c, x, 1) \notin A \times V \times B$
  - Por lo tanto no se da que  $R \subseteq V \times A \times B$ .

## Ejercicio 4.

Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y la relación  $R$  en  $A \times A \times A$  definida en la forma:  $(x, y, z) \in R$  si y sólo si  $x < y$  &  $y < z$ , siendo  $<$  el "menor" usual entre números reales. Escribe  $R$  por extensión

$$R = (\{1,2,3\})$$

## Ejercicio 5.

Para cada una de las siguientes relaciones: dar tres pares que pertenezcan y tres pares que no; indicar si son reflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas.

- a. En el conjunto de los números reales
- $xRy$  si y sólo si  $x \geq 4$  &  $y \geq 5$ .
    - Pares que pertenecen:
      - (4,5)
      - (4,6)
      - (4,7)
    - Pares que no pertenecen:
      - (3,5)
      - (3,6)
      - (3,7)
    - No es reflexiva puesto que no se da que para todo  $x \in \mathbb{R}$  vale que  $xRx$

- i. Contraejemplo:  $4 \in \mathbb{R}$  pero  $(4,4) \notin R$
- No es simétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $\mathbb{R}$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$ 
  - i. Contraejemplo:  $(4,5) \in R \rightarrow (5,4) \in R$ 
    - 1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es simétrica.
- No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $\mathbb{R}$  vale que  $xRy$  e  $yRx$  implican que  $x = y$ 
  - i. Contraejemplo:  $(5,6) \wedge (6,5) \in R \rightarrow 5 = 6$ 
    - 1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es asimétrica.
- Si es transitiva puesto que para todo  $x, y, z$  en  $\mathbb{R}$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ 
  - i. Si vale  $xRy$  se cumple que  $x \geq 4$  e  $y \geq 5$
  - ii. Si vale  $yRz$  se cumple  $y \geq 4$  y  $z \geq 5$
  - iii. En el caso  $xRz$  como por i. se cumple que  $x \geq 4$  y por ii. se cumple que  $z \geq 5$ , entonces vale  $yRz$
  - iv. Por lo tanto siempre que el antecedente sea verdadero, teniendo en cuenta lo dicho en iii. el consecuente será verdadero y siempre que el antecedente sea falso, la implicación se cumple trivialmente. En ambos casos la implicación es verdadero y por lo tanto la relación es transitiva.
- $xRy$  si y sólo si  $y \leq x \leq y + 3$ .
  - Pares que pertenecen:
    - i.  $(3,1)$
    - ii.  $(3,2)$
    - iii.  $(4,2)$
  - Pares que no pertenecen:
    - i.  $(9,3)$
    - ii.  $(5,1)$
    - iii.  $(5,6)$
  - Si es reflexiva puesto que se da que para todo  $x \in \mathbb{R}$  vale que  $xRx$

- i. Siempre se cumple  $xRx$  ya que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se cumple  $x \leq x \leq x + 3$ .
  - 1. Todo número es menor o igual a sí mismo.
  - 2. Todo número es menor o igual a si mismo más tres.
- o No es simétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $\mathbb{R}$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$ 
  - i. Contraejemplo:  $(3,1) \in R \rightarrow (1,3) \in R$ 
    - 1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es simétrica.
- o Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $\mathbb{R}$  vale que  $xRy$  e  $yRx$  implican que  $x = y$ 
  - i. Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $x = y$ , se cumple  $xRy$  e  $yRx$  (explicado en reflexiva), por lo tanto como el antecedente y el consecuente son verdaderos, la implicación se cumple.
  - ii. Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $x < y$ , tal que se cumple  $x \leq y \leq x + 3$  (si no se cumple, la implicación también es verdadera trivialmente), entonces se cumple  $yRx$ , pero no se cumplirá  $y \leq x \leq y + 3$ , porque se sabe que  $x < y$ , haciendo que no se cumpla  $xRy$ . Esto hace que el antecedente sea falso y por lo tanto la implicación se cumple trivialmente.
  - iii. Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $y < x$ , tal que se cumple  $y \leq x \leq y + 3$  (si no se cumple, la implicación también es verdadera trivialmente), entonces se cumple  $xRy$ , pero no se cumplirá  $x \leq y \leq x + 3$ , porque se sabe que  $y < x$ , haciendo que no se cumpla  $yRx$ . Esto hace que el antecedente sea falso y por lo tanto la implicación se cumple trivialmente.
- o No es transitiva puesto que no se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $\mathbb{R}$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ 
  - i. Contraejemplo:  $(9,6) \in R \wedge (6,3) \in R \rightarrow (9,3) \in R$ 
    - 1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, ya que no se cumple que  $3 \leq 9 \leq 6$  por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es transitiva.

b. Sean  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $P(A)$  el conjunto de partes de  $A$

$P(A) =$

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,1\}, \{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,3\}, \{3,4\}, \{4,1\}, \{4,2\}, \{4,3\}, \{4,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

- en  $P(A)$ ,  $XRX$  si y sólo si  $X \cap Y = \emptyset$ 
  - Pares que pertenecen:
    - i.  $(\{1,2\}, \{4\})$
    - ii.  $(\{1,3\}, \{2,4\})$
    - iii.  $(\{1\}, \{2,2\})$
  - Pares que no pertenecen:
    - i.  $(\{1\}, \{1\})$
    - ii.  $(\{1,3\}, \{3\})$
    - iii.  $(\{1\}, \{1,2\})$
  - No es reflexiva puesto que no se da que para todo  $X \in P(A)$  vale que  $XRX$ 
    - i. Contraejemplo:  $\{1\} \in P(A)$  pero  $(\{1\}, \{1\}) \notin R$
  - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo  $X, Y$  en  $P(A)$  vale que  $XRY$  implica  $YRX$ 
    - i. Si vale  $XRY$  se cumple que  $X \cap Y = \emptyset$ .
    - ii. Como la intersección es conmutativa si vale  $X \cap Y = \emptyset$  también vale  $Y \cap X = \emptyset$ .
    - iii. Si vale  $Y \cap X = \emptyset$ , se cumple que  $YRX$ .
    - iv. Por lo tanto  $XRY$  implica  $YRX$ .
  - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo  $X, Y$  en  $P(A)$  vale que  $XRY$  e  $YRX$  implican que  $X = Y$ 
    - i. Contraejemplo:  $(\{1\}, \{2\}) \in R \wedge (\{2\}, \{1\}) \in R \rightarrow \{1\} \neq \{2\}$
  - No es transitiva puesto que no se cumple que para todo  $X, Y, Z$  en  $P(A)$  vale que  $XRY$  e  $YRZ$  implican que  $XRZ$ 
    - i. Contraejemplo:  $(\{1,4\}, \{2\}) \in R \wedge (\{2\}, \{1,3,4\}) \in R \rightarrow (\{1,4\}, \{1,3,4\}) \notin R$ 
      - 1.  $\{1,4\} \cap \{1,3,4\} \neq \emptyset$
      - 2.  $\{1,4\} \neq \emptyset \rightarrow \text{absurdo}$
- en  $P(A)$ ,  $XRY$  si y sólo si  $X \subset Y$

## Ejercicio 6.

Determinar si las siguientes relaciones definidas en  $A = \{a, b, c, d\}$  son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas

- $R_0 = \emptyset$ 
  - No es reflexiva puesto que no se da que para todo  $x \in A$  vale que  $xR_0x$ 
    - Contraejemplo:  $a \in A$  pero  $(a, a) \notin R_0$
  - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xR_0y$  implica  $yR_0x$ 
    - Como nunca se cumple  $xR_0y$  puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, el consecuente siempre será falso, por lo tanto la simetría se cumple trivialmente.
  - Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xR_0y$  e  $yR_0x$  implican que  $x = y$ 
    - Como nunca se cumple  $xR_0y$  ni  $yR_0x$  puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, el consecuente siempre será falso, por lo tanto la simetría se cumple trivialmente.
  - Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xR_0y$  e  $yR_0z$  implican que  $xR_0z$ 
    - Como nunca se cumple  $xR_0y$  ni  $yR_0z$  puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, el consecuente siempre será falso, por lo tanto la simetría se cumple trivialmente.
- $R_1 = \{(a, a); (a, b); (d, c); (c, d)\}$ 
  - No es reflexiva puesto que no se da que para todo  $x \in A$  vale que  $xR_1x$ 
    - Contraejemplo:  $b \in A$  pero  $(b, b) \notin R_1$
  - No es simétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xR_1y$  implica  $yR_1x$ 
    - Contraejemplo:  $(a, b) \in R_1 \rightarrow (b, a) \in R_1$ 
      - $(b, a) \notin R$
  - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xR_1y$  e  $yR_1x$  implican que  $x = y$ 
    - Contraejemplo:  $(d, c) \in R_1 \wedge (c, d) \in R_1 \rightarrow c = d$ 
      - $c = d \rightarrow \text{absurdo}$

- No es transitiva puesto que no se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xR1y$  e  $yR1z$  implican que  $xR1z$ 
  - Contraejemplo:  $(d, c) \in R1 \wedge (c, d) \in R1 \rightarrow (d, d) \in R1$ 
    - $(d, d) \notin R1$
- $R2 = \{(a, a); (b, b); (a, b); (b, a); (d, d); (c, c)\}$ 
  - Si es reflexiva puesto que se da que para todo  $x \in A$  vale que  $xR2x$ .
    - $a \in A$  y vale  $aR2a$ .
    - $b \in A$  y vale  $bR2b$ .
    - $c \in A$  y vale  $cR2c$ .
    - $d \in A$  y vale  $dR2d$ .
  - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xR2y$  implica  $yR2x$ .
    - $aR2a \rightarrow aR2a$
    - $bR2b \rightarrow bR2b$
    - $cR2c \rightarrow cR2c$
    - $dR2d \rightarrow dR2d$
    - $aR2b \rightarrow bR2a$
  - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xR2y$  e  $yR2x$  implican que  $x = y$ 
    - Contraejemplo:  $(a, b) \in R2 \wedge (b, a) \in R2 \rightarrow a = b$ 
      - $a = b \rightarrow \text{absurdo}$
  - Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xR2y$  e  $yR2z$  implican que  $xR2z$ 
    - $(a, b) \in R2 \wedge (b, a) \in R2 \rightarrow (a, a) \in R2$
- $R3 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)\}$ 
  - No es reflexiva puesto que no se da que para todo  $x \in A$  vale que  $xR3x$ 
    - Contraejemplo:  $c \in A$  pero  $(c, c) \notin R3$
  - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xR3y$  implica  $yR3x$ .
    - $aR3a \rightarrow aR3a$
    - $bR3b \rightarrow bR3b$
    - $cR3c \rightarrow cR3c$
    - $dR3d \rightarrow dR3d$
    - $aR3b \rightarrow bR3a$



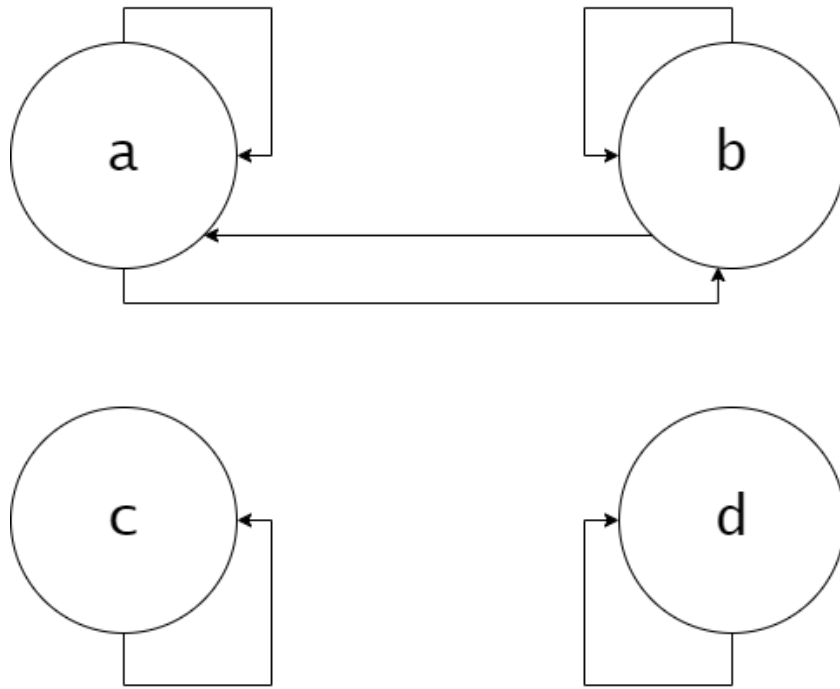
- No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xR_3y$  e  $yR_3x$  implican que  $x = y$ 
  - Contraejemplo:  $(a, b) \in R_3 \wedge (b, a) \in R_3 \rightarrow a = b$ 
    - $a = b \rightarrow \text{absurdo}$
- No es transitiva puesto que no se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xR_2y$  e  $yR_2z$  implican que  $xR_2z$ 
  - Contraejemplo:  $(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2 \rightarrow (a, c) \in R_2$ 
    - $(a, c) \notin R_3$
- $R_4 = A \times A$

## Ejercicio 7.

Escribir la matriz y los dígrafos asociados a las relaciones anteriores

Solo hago  $R_2$  para no perder tiempo

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



### Ejercicio 8.

Sea  $A = \{a, b, c, d\}$

- a. Dar un ejemplo de una relación  $R$  no reflexiva en  $A$

$$R = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$$

- b. Dar un ejemplo de una relación  $R$  simétrica en  $A$

$$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}$$

- c. Dar un ejemplo de una relación  $R$  no transitiva en  $A$

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$$

- d. Dar un ejemplo de una relación  $R$  no simétrica en  $A$

$$R = \{(a, b), (c, d)\}$$

- e. Dar un ejemplo de una relación  $R$  antisimétrica en  $A$

$$R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (c, d)\}$$

## Ejercicio 9.

Demostrar que si  $R$  es simétrica y transitiva y  $aRb$  para ciertos  $a$  y  $b$ , entonces  $aRa$  y  $bRb$ .

1. Como  $R$  es simétrica y vale  $aRb$ , entonces se cumple  $bRa$ .
2. Como  $R$  es transitiva y vale  $aRb$  y  $bRa$ , entonces se cumple  $aRa$ .
3. Como  $R$  es transitiva y vale  $bRa$  y  $aRb$ , entonces se cumple  $bRb$ .

## Ejercicio 10.

Sea  $A$  un conjunto arbitrario. Sea  $R = \Delta A$  (diagonal de  $A$ ). Analizar qué propiedades tiene  $R$ .

- Si es reflexiva puesto que se da que para todo  $x \in A$  vale que  $xRx$ .
  - En la diagonal de  $A$  cada elemento  $x$  se relaciona consigo mismo, haciendo que valga  $xRx$ .
- Si es simétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$ .
  - Para los  $a, b \in A$  tal que  $a = b$ , vale tanto  $aRb$  y  $bRa$  por lo tanto la implicación  $aRb \rightarrow bRa$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
  - Para los  $a, b \in A$  tal que  $a \neq b$ , no vale ni  $aRb$  ni  $bRa$  por lo tanto la implicación  $aRb \rightarrow bRa$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRx$  implican que  $x = y$ 
  - Para los  $a, b \in A$  tal que  $a = b$ , vale tanto  $aRb$  y  $bRa$  por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.

- Para los  $a, b \in A$  tal que  $a \neq b$ , no vale ni  $aRb$  ni  $bRa$  por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ 
  - Para los  $a, b, c \in A$  tal que  $a = b = c$ , vale tanto  $aRb$ ,  $bRc$  y  $aRc$  por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
  - Para los  $a, b, c \in A$  tal que  $a \neq b \neq c$ , no vale ni  $aRb$ , ni  $bRc$  ni  $aRc$  por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.
  - Para los  $a, b, c \in A$  tal que  $a \neq b = c$ , vale  $bRc$ , pero no vale ni  $aRb$  ni  $aRc$  por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.
  - Para los  $a, b, c \in A$  tal que  $a = b \neq c$ , vale  $aRb$ , pero no vale ni  $bRc$  ni  $aRc$  por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.

## Ejercicio 11

Proponer una relación en el conjunto de los números naturales. Mostrar que propiedades tiene (reflexividad, simetría, etc...)

La divisibilidad es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Demostración en el apunte.

## Ejercicio 12

Proponer una relación en el conjunto de los alumnos de Informática. Mostrar que propiedades tiene (reflexividad, simetría, etc...)

$$R = \{(x, y) : \text{el alumno } x \text{ tiene el mismo promedio que el alumno } y\}$$

Es reflexiva, simétrica, y transitiva:

- Si es reflexiva puesto que para todo  $x \in A$  vale que  $xRx$ 
  - Todos los alumnos van a tener el mismo promedio que ellos mismos.
- Si es simétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$ .
  - Sean  $a$  y  $b$  dos alumnos distintos, si ambos tienen el mismo promedio se cumple tanto  $aRb$  como  $bRa$ , por lo tanto  $aRb \rightarrow bRa$  es verdadera.
- No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRx$  implican que  $x = y$ 
  - Sean  $a$  y  $b$  dos alumnos distintos, si ambos tienen el mismo promedio se cumple tanto  $aRb$  como  $bRa$ , pero no se cumple  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$ , ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso haciendo a la implicación falsa.
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ 
  - Sean  $a, b$  y  $c$  tres alumnos distintos, si los tres tienen el mismo promedio se cumple tanto  $aRb$  como  $bRc$  como  $aRa$ , por lo tanto  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$ .

### Ejercicio 13.

Dada una relación binaria  $R$  sobre un conjunto  $A$ , se define la relación complemento de  $R$ ,  $\bar{R}$  por:  $\bar{aRb}$  si y sólo si  $a$  no está relacionada con  $b$  por  $R$

- Dar un ejemplo de una relación  $R$  y su complemento.

$$A = \mathbb{N}$$

$$R = \{(x, y): y \text{ es el cuadrado de } x\}$$

$$\bar{R} = \{(x, y): y \text{ no es el cuadrado de } x\}$$

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{(a, b), (c, d)\}$$

$$\bar{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, a), (d, c), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b)\}$$

- Probar que si  $R \subset S$  entonces  $\bar{S} \subset \bar{R}$

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| 1. $(x, y) \in \bar{S} \rightarrow (x, y) \notin S$  | por definición de complemento. |
| 2. $(x, y) \in \bar{R} \rightarrow (x, y) \notin R$  | por definición de complemento. |
| 3. $R \subset S \rightarrow \text{si } (x, y) \in R \rightarrow (x, y) \in S$              | por definición subconjunto.    |
| 4. $(x, y) \notin S \rightarrow (x, y) \notin R$   | por contrarrecíproca en 3.     |
| 5. $(x, y) \notin S \rightarrow (x, y) \in \bar{S}$  | por definición de complemento  |
| 6. $(x, y) \notin R \rightarrow (x, y) \in \bar{R}$  | por definición de complemento  |
| 7. $(x, y) \in \bar{S} \rightarrow (x, y) \in \bar{R}$                                     | reemplazo 4. Con 5 y 6.        |
| 8. $(x, y) \in \bar{S} \rightarrow (x, y) \in \bar{R} \rightarrow \bar{S} \subset \bar{R}$ | por definición subconjunto.    |

## Ejercicio 14.

Dada R una relación binaria sobre A, probar que:

a. R es reflexiva si y sólo si  $R^{-1}$  también lo es

1. R es reflexiva  $\rightarrow R^{-1}$  es reflexiva

- i.  $(x, x) \in R \rightarrow xRx$ 
  - a. Si R es reflexiva, para todo  $x \in A$  vale  $xRx$ .
- ii.  $xRx \rightarrow xR^{-1}x$ 
  - a. Por definición de inverso.
- iii.  $xR^{-1}x \rightarrow (x, x) \in R^{-1}$

Como para todo  $x \in A$  vale  $xR^{-1}x$ ,  $R^{-1}$  es reflexiva.

2.  $R^{-1}$  es reflexiva  $\rightarrow R$  es reflexiva

- i.  $(x, x) \in R^{-1} \rightarrow xR^{-1}x$

- a. Si  $R^{-1}$  es reflexiva, para todo  $x \in A$  vale  $xR^{-1}x$ .
- ii.  $xR^{-1}x \rightarrow xRx$ 
  - a. Por definición de inverso.
- iii.  $xRx \rightarrow (x, x) \in R$

Como para todo  $x \in A$  vale  $xRx$ ,  $R$  es reflexiva.

b.  $R$  es simétrica si y sólo si  $R^{-1} = R$

1.  $R$  es simétrica  $\rightarrow R^{-1} = R$

- i.  $(x, y) \in R \rightarrow xRy$
- ii.  $xRy \rightarrow yRx$ 
  - a. Si  $R$  es simétrica, para todo para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$
- iii.  $yRx \rightarrow (y, x) \in R$
- iv.  $yRx \rightarrow xR^{-1}y$ 
  - a. Por definición de inverso.
- v.  $xR^{-1}y \rightarrow (x, y) \in R^{-1}$
- vi.  $R \subseteq R^{-1}$

- i.  $(a, b) \in R^{-1} \rightarrow aR^{-1}b$
- ii.  $aR^{-1}b \rightarrow bRa$ 
  - a. Por inverso.
- iii.  $bRa \rightarrow aRb$ 
  - a. Si  $R$  es simétrica, para todo para todo  $a, b$  en  $A$  vale que  $bRa$  implica  $aRb$
- iv.  $aRb \rightarrow (a, b) \in R$
- v.  $R^{-1} \subseteq R$

2.  $R^{-1} = R \rightarrow R$  es simétrica

- i.  $(x, y) \in R \rightarrow (x, y) \in R^{-1}$ 
  - a. Por hipótesis  $R^{-1} = R$
- ii.  $(x, y) \in R^{-1} \rightarrow (y, x) \in R$

- a. Por inverso.
- iii.  $(x, y) \in R \rightarrow xRy$
- iv.  $(y, x) \in R \rightarrow yRx$
- v. Se partio desde  $xRy$  y se llevo a  $yRx$  por lo tanto se demostró que  $xRy \rightarrow yRx$  entonces  $R$  es simétrica.

- c.  $R$  es simétrica si y sólo si  $R^{-1}$  y  $\bar{R}$  también lo son
- d.  $R$  es antisimétrica si y sólo si  $R \cap R^{-1} \subset \Delta A$

## Ejercicio 15.

Se dice que una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  es asimétrica si cada vez que  $a$  está relacionado con  $b$  no se da que  $b$  esté relacionado con  $a$

Dar un ejemplo de una relación asimétrica

$$A = (a, b, c, d)$$

$$R = \{(a, b), (c, d)\}$$

## Ejercicio 16.

Probar que dada una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$ ,  $R$  es asimétrica si y sólo si  $R \cap R^{-1} = \emptyset$

1.  $R$  es asimétrica  $\rightarrow R \cap R^{-1} = \emptyset$ 
  - i.  $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$ 
    - a. Se cumple para todo  $x, y$  en  $A$  por definición de asimétrica
  - ii.  $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R^{-1}$ 
    - a. Por inverso.
  - iii. Como para todo  $x, y$  en  $A$   $(y, x) \notin R \wedge (y, x) \in R^{-1} \rightarrow R \cap R^{-1} = \emptyset$
2.  $R \cap R^{-1} = \emptyset \rightarrow R$  es asimétrica
  - i.  $(y, x) \in R^{-1} \rightarrow (y, x) \notin R$ 
    - a. Por  $R \cap R^{-1} = \emptyset$
  - ii.  $(y, x) \in R^{-1} \rightarrow (x, y) \in R$ 
    - a. Por inverso.
  - iii. Como para todo  $x, y$  en  $A$  se da que  $(x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R$ ,  $R$  es asimétrica.



## Ejercicio 17.

Sean  $R$  y  $S$  dos relaciones en  $A$ . Probar que:

- Si  $R \subset S$  entonces  $R^{-1} \subset S^{-1}$ .
- Si  $R$  y  $S$  son reflexivas entonces  $R \cup S$  y  $R \cap S$  también lo son.
- Si  $R$  y  $S$  son simétricas entonces  $R \cup S$  y  $R \cap S$  también lo son.

## Ejercicio 18.

Establecer las propiedades de las siguientes relaciones en  $H$  el conjunto de los seres humanos:

- Sea  $R$  la relación en  $H$  definida por  $xRy$  si y sólo si  $x$  es hermano de  $y$ 
  - No es reflexiva puesto que no se cumple que para todo  $x \in A$  vale que  $xRx$ 
    - Una persona no puede ser hermano de sí mismo.
  - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$ .
    - Sean  $a$  y  $b$  dos personas distintas, si son hermanos se cumple tanto  $aRb$  como  $bRa$ , por lo tanto  $aRb \rightarrow bRa$  es verdadera.
    - Sean  $a$  y  $b$  son la misma persona, no se cumple  $aRb$  ni  $bRa$ , por lo tanto  $aRb \rightarrow bRa$  es verdadera.
    - Sean  $a$  y  $b$  dos personas distintas, si no son hermanos no se cumple  $aRb$  ni  $bRa$ , por lo tanto  $aRb \rightarrow bRa$  es verdadera.
  - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRx$  implican que  $x = y$ 
    - Sean  $a$  y  $b$  dos personas distintas, si son hermanos se cumple tanto  $aRb$  como  $bRa$ , pero no se cumple  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$ , ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso haciendo a la implicación falsa.
  - Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ 
    - Sean  $a, b$  y  $c$  tres personas distintas, si son hermanos se cumple tanto  $aRb$  como  $bRc$  como  $aRa$ , por lo tanto  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$ .

- Sean  $a, b$  y  $c$  la misma persona no se cumple ni  $aRb$  ni  $bRc$  ni  $aRa$ , por lo tanto  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$  es verdadera trivialmente.
  - Sean  $a, b$  y  $c$  tres personas distintas, si  $a$  es hermano de  $b$ , pero  $b$  no es hermano de  $c$  se cumple  $aRb$  pero no  $bRc$ , por lo tanto  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$  es verdadera trivialmente.
  - Sean  $a, b$  y  $c$  tres personas distintas, si  $b$  es hermano de  $c$ , pero  $b$  no es hermano de  $a$  se cumple  $bRc$  pero no  $aRb$ , por lo tanto  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$  es verdadera trivialmente.
- b. Sea  $R$  la relación en  $H$  definida por  $xRy$  si y sólo si  $x$  es hijo de  $y$
- No es reflexiva puesto que no se cumple que para todo  $x \in A$  vale que  $xRx$ 
    - Una persona no puede ser hija de sí misma.
  - No simétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$ .
    - Sean  $a$  y  $b$  dos personas distintas, si  $a$  es hijo de  $b$  se cumple  $aRb$  pero no se cumple  $bRa$ , puesto que una persona no puede ser hija de su hijo, por lo que no se cumple  $aRb \rightarrow bRa$ , ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, haciendo a la implicación falsa.
  - Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRx$  implican que  $x = y$ 
    - Sean  $a$  y  $b$  dos personas distintas, si  $a$  es hijo de  $b$  se cumple  $aRb$  pero no se cumple  $bRa$ , puesto que una persona no puede ser hija de su hijo, esto hace que  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$  se cumpla trivialmente, ya que el antecedente es falso ( $aRb \wedge bRa$ ).
      - Si son la misma persona la implicación se cumple trivialmente debido a que el antecedente sería falso.
  - No es transitiva puesto que no se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ 
    - Sean  $a, b$  y  $c$  tres personas distintas, si  $a$  es hijo de  $b$  se cumple  $aRb$  y si  $b$  es hijo de  $c$  se cumple  $bRc$ , pero no se cumple  $aRc$  ( $a$  sería nieto de  $c$ ) por lo tanto no se cumple  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$  ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, haciendo a la implicación falsa.

- c. Se dice que una persona  $a$  es descendiente de una persona  $b$  si es hijo, nieto, bisnieto, etc..
- $R$  es la relación en  $H$  definida por  $xRy$  si y sólo si  $x$  es descendiente de  $y$ .
- No es reflexiva puesto que no se cumple que para todo  $x \in A$  vale que  $xRx$ 
    - Una persona no puede ser descendiente de sí misma (thats a mf paradoja del viaje del tiempo?????????????????)
  - No simétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$ .
    - Sean  $a$  y  $b$  dos personas distintas, si  $a$  es descendiente de  $b$  se cumple  $aRb$  pero no se cumple  $bRa$ , puesto que una persona ser descendiente de su descendiente, por lo que no se cumple  $aRb \rightarrow bRa$ , ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, haciendo a la implicación falsa.
  - Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRx$  implican que  $x = y$ 
    - Sean  $a$  y  $b$  dos personas distintas, si  $a$  es descendiente de  $b$  se cumple  $aRb$  pero no se cumple  $bRa$ , puesto que una persona no puede ser descendiente de su descendiente, esto hace que  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$  se cumpla trivialmente, ya que el antecedente es falso ( $aRb \wedge bRa$ ).
      - Si son la misma persona la implicación se cumple trivialmente debido a que el antecedente sería falso.
  - Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ 
    - Sean  $a, b$  y  $c$  tres personas distintas, si  $a$  es descendiente de  $b$  se cumple  $aRb$  y si  $b$  es descendiente de  $c$  se cumple  $bRc$ , por lo que se termina cumpliendo que  $a$  es descendiente de  $c$  (ejemplo  $a$  es hijo de  $b$ ,  $b$  es hijo de  $c$ ,  $a$  es nieto de  $c$ ,  $a$  es descendiente de  $c$ )  $aRc$  por lo tanto se cumple  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$ .
      - Si  $a, b$  y  $c$  son la misma persona se cumple trivialmente.
      - Si  $a, b$  y  $c$  no tienen ninguna relación de descendencia entre ellos, se cumple trivialmente.

## Ejercicio 19.

Establecer las propiedades de las siguientes relaciones:

- a. Sea  $N$  el conjunto de los números naturales.

Sea  $\leq$  la relación en  $N$  dada por  $x \leq y$  si y sólo si  $x$  es menor o igual a  $y$

- Si es reflexiva puesto que se cumple que para todo  $x \in A$  vale que  $xRx$ 
  - Todo numero es igual a sí mismo.
- No simétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$ .
  - Contraejemplo:  $(4,5) \in R \rightarrow (5,4) \in R$ 
    - Si se cumple que  $4 \leq 5$  pero no se cumple  $5 \leq 4$  haciendo que el antecedente sea verdadero pero el consecuente falso, por lo tanto la implicación es falsa.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRx$  implican que  $x = y$ 
  - Sean  $a, b \in N$  tal que  $a = b$ , vale tanto  $aRb$  y  $bRa$  por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
  - Sean  $a, b \in N$  tal que  $a \neq b$  y  $a$  es estrictamente menor que  $b$ , vale  $aRb$  pero no  $bRa$  por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$  se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
  - Sean  $a, b \in N$  tal que  $a \neq b$  y  $b$  es estrictamente menor que  $a$ , vale  $bRa$  pero no  $aRb$  por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$  se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ 
  - Sean  $a, b$  y  $c \in N$ , si  $a \leq b$  se cumple  $aRb$  y si  $b \leq c$  se cumple  $bRc$ , haciendo que también se cumpla  $aRc$  (si  $b \leq c$  y  $a \leq b$ , claramente  $a \leq c$ ) por lo tanto se cumple  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$ .
  - Si no se cumple  $a \leq b$  o  $b \leq c$ ,  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$  se sigue cumpliendo.

- b. Sea  $N$  el conjunto de los números naturales.

Sea  $|$  la relación en  $N$  dada por  $x|y$  si y sólo si  $x$  divide a  $y$

- Si es reflexiva puesto que se cumple que para todo  $x \in A$  vale que  $xRx$

- Todo número se divide a sí mismo.
  - Sean  $a \in \mathbb{N}$ , se cumple  $a|a$  ya que  $\exists c \in \mathbb{N}: a = c * a$  y ese  $c = 1$ .
- No es simétrica puesto que no se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$ .
  - Contraejemplo:  $(4,8) \in R \rightarrow (8,4) \notin R$ 
    - Si se cumple que  $4|8$  ya que  $\exists c \in \mathbb{N}: 8 = c * 4$  y ese  $c = 2$  pero no se cumple  $8|4$  ya que  $\nexists k \in \mathbb{N}: 4 = k * 8$  haciendo que el antecedente sea verdadero pero el consecuente falso, por lo tanto la implicación es falsa.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRx$  implican que  $x = y$ 
  - Sean  $a, b \in \mathbb{N}$  tal que  $a = b$ , vale tanto  $aRb$ , ya que  $a|b$  ya que  $\exists c \in \mathbb{N}: b = c * a$  y ese  $c = 1$ , como  $bRa$  (misma demostración) por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
  - Sean  $a, b \in \mathbb{N}$  tal que  $a \neq b$  y  $a|b$ , vale  $aRb$  pero no  $bRa$  (observar contraejemplo de simetría) por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$  se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
  - Sean  $a, b \in \mathbb{N}$  tal que  $a \neq b$  y  $b|a$  vale  $bRa$  pero no  $aRb$  (observar contraejemplo de simetría) por lo tanto la implicación  $aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$  se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ 
  - Sean  $a, b$  y  $c \in \mathbb{N}$ , si  $a|b$  se cumple  $aRb$  y si  $b|c$  se cumple  $bRc$ , haciendo que también se cumpla  $aRc$  por lo tanto se cumple  $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$ .
    - Demostración:
      - Si  $a|b \exists i \in \mathbb{N}: b = i * a$
      - Si  $b|c \exists k \in \mathbb{N}: c = k * b$
      - $c = k * b = k * (i * a) = (k * i) * a = n * a$ 
        - $n = (k * i)$
      - Como  $\exists n \in \mathbb{N}: c = n * a, a|c$
- c. Igual al anterior pero en el conjunto de los enteros.
- Es todo lo mismo que la anterior, salvo que no es antisimétrica:
  - Contraejemplo:  $4R -4 \wedge -4R4 \rightarrow 4 = -4$

## Ejercicio 20.

Dado un conjunto de números reales  $A$  probar que la relación sobre  $A \times A$  dada por  $(a,b)R(c,d)$  si y sólo si  $a \leq c$  y  $b \leq d$  es un orden. ¿Es total?

- Si es reflexiva puesto que se cumple que para todo  $(a, b) \in A \times A$  vale que  $(a, b)R(a, b)$ 
  - Todo número es igual a sí mismo (siempre se cumple  $a \leq a$  y  $b \leq b$ )
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo  $(a, b), (c, d) \in A \times A$  vale que  $(a, b)R(c, d)$  e  $(c, d)R(a, b)$  implican que  $(a, b) = (c, d)$ 
  - Sean  $(a, b), (c, d) \in A \times A$  tal que  $(a, b) = (c, d)$ , vale tanto  $(a, b)R(c, d)$  y  $(c, d)R(a, b)$  por lo tanto la implicación  $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(a, b) \rightarrow (a, b) = (c, d)$  se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
  - Sean  $(a, b), (c, d) \in A \times A$  tal que  $(a, b) \neq (c, d)$ ,  $a$  es estrictamente menor que  $c$  y  $c$  es estrictamente menor que  $d$ , vale  $(a, b)R(c, d)$  pero no  $(c, d)R(a, b)$  por lo tanto la implicación  $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(a, b) \rightarrow (a, b) = (c, d)$  se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
  - Sean  $(a, b), (c, d) \in A \times A$  tal que  $(a, b) \neq (c, d)$ ,  $b$  es estrictamente menor que  $a$ ,  $d$  es estrictamente menor que  $c$ , vale  $(c, d)R(a, b)$  pero no  $(a, b)R(c, d)$  por lo tanto la implicación  $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(a, b) \rightarrow (a, b) = (c, d)$  se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times A$  vale que  $(a, b)R(c, d)$  e  $(c, d)R(e, f)$  implican que  $(a, b)R(e, f)$ 
  - Sean  $(a, b), (c, d)$  y  $(e, f) \in A \times A$ , si  $a \leq c$  y  $b \leq d$  se cumple  $(a, b)R(c, d)$  y si  $c \leq e$  y  $d \leq f$  se cumple  $(c, d)R(e, f)$ , haciendo que también se cumpla  $(a, b)R(e, f)$  (si  $a \leq c$  y  $b \leq d$  y  $c \leq e$  y  $d \leq f$ , claramente  $a \leq e$  y  $b \leq f$ ) por lo tanto se cumple  $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \rightarrow (a, b)R(e, f)$ .
  - Si no se cumple  $a \leq c$  y  $b \leq d$  o  $c \leq e$  y  $d \leq f$ ,  $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \rightarrow (a, b)R(e, f)$  se sigue cumpliendo.
- La relación de orden es total si para todo par  $(a, b)$  y  $(c, d)$  en  $A \times A$  siempre se cumple que  $(a, b)R(c, d)$  o  $(c, d)R(a, b)$ .
  - Contraejemplo: Sea  $(a, b) = (1, 2)$  y  $(c, d) = (2, 1)$ :
    - No se cumple  $a \leq c$  y  $b \leq d \rightarrow 1 \leq 2$  y  $2 \leq 1$

- No se cumple  $c \leq a$  y  $d \leq b \rightarrow 2 \leq 1$  y  $1 \leq 2$

## Ejercicio 21.

Analizar qué tipo de orden es el usual en el conjunto de los números reales. ¿qué pasa con los números complejos? ¿están ordenados?

Los números reales están ordenados por su orden usual  $\leq$ . Este orden  $\leq$  en  $\mathbb{R}$  es total. Los números complejos no tienen un orden natural como los reales. Una manera de intentar ordenarlos es tratarlos como pares de números reales (la parte real y la parte imaginaria) y aplicar un producto de relaciones para definir un posible orden:

### a. Orden producto:

Si se piensa en  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , se puede definir una relación de orden producto usando el orden usual  $\leq$  en  $\mathbb{R}$ . Así, para dos números complejos  $z = (a, b)$  y  $w = (c, d)$  (donde  $a, c \in \mathbb{R}$  son las partes reales y  $b, d \in \mathbb{R}$  son las partes imaginarias), se diría que:

$$(a, b) \leq (c, d) \text{ si y solo si } a \leq c \text{ y } b \leq d$$

Este es un orden parcial ya que no todos los pares de números complejos serían comparables (por ejemplo si  $a < c$  y  $b > d$ ,  $(a, b)$  y  $(c, d)$  no son comparables).

### b. Orden lexicográfico:

Se podría aplicar la relación de orden lexicográfico en  $\mathbb{C}$ , considerando  $z = (a, b)$  y  $w = (c, d)$ . Se diría que:

$$(a, b) L (c, d) \text{ si y solo si } a < c \text{ o } (a = c \text{ y } b \leq d)$$

Este es un orden total, ya que se pueden comparar cualquier par de números complejos. Primero se comparan las partes reales y si son iguales, se comparan las imaginarias.

## Ejercicio 22.

Probar que el orden lexicográfico es un orden total

### Ejercicio 23.

Sea  $S = \{a, b, c\}$  y sea  $A = P(S)$  el conjunto de partes de  $S$ . Mostrar que  $A$  está parcialmente ordenado por el orden  $\subset$  (inclusión de conjuntos). Hallar el diagrama de Hasse.

- $P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- No es reflexiva puesto que no se cumple que para todo  $X \in A$  vale que  $XX$ 
  - Contraejemplo:  $\{a\} \subset \{a\}$  no se cumple.
- Como no es reflexiva,  $A$  no está parcialmente ordenado por el orden  $\subset$ .

### Ejercicio 24.

Sea  $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  (el conjunto de los divisores de 12). Hallar el diagrama de

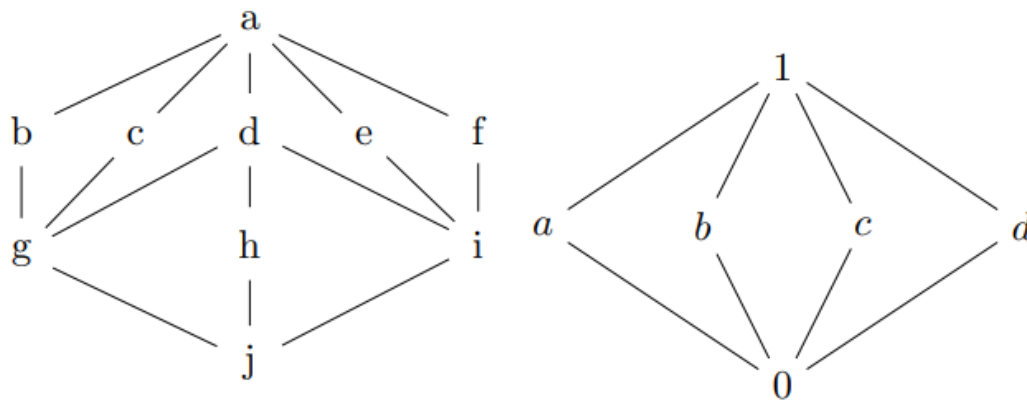
Hasse de  $D_{12}$  con la relación "divide".





## Ejercicio 25.

Describe las parejas ordenadas por las relaciones de cada uno de los siguientes diagramas de Hasse. Determinar, si existen, los elementos máximo, mínimo y cotas inferiores y superiores



Primer diagrama:

- $j \leq g, j \leq h, j \leq i, g \leq b, g \leq c, g \leq d, h \leq d, i \leq d, i \leq e, i \leq f, b \leq a, c \leq a, d \leq a, e \leq a, f \leq a.$
- Elemento máximo  $a$ , elemento mínimo  $j$ .
- Cota superior del subconjunto  $\{g, c\}$  es  $a$
- Cota inferior del subconjunto  $\{g, c\}$  es  $j$

Segundo diagrama:

- $0 \leq a, 0 \leq b, 0 \leq c, 0 \leq d, a \leq 1, b \leq 1, c \leq 1, d \leq 1.$
- Elemento máximo  $1$ , elemento mínimo  $0$ .
- Cota superior del subconjunto  $\{a\}$  es  $1$
- Cota inferior del subconjunto  $\{a\}$  es  $0$

## Ejercicio 26.

Sea  $R$  una relación de equivalencia en un conjunto no vacío  $A$ . Sean  $a, b \in A$ , entonces  $[a] = [b]$  si y sólo si  $aRb$

Creo que es esta pregunta, no se la verdad...

**Lema 2.19.** Sea  $R$  una relación de equivalencia en un conjunto  $A$ , entonces para todos par  $a, b$  de elementos de  $A$  vale que  $\bar{a} = \bar{b}$  si y sólo si  $aRb$

Supongamos que  $\bar{a} = \bar{b}$ , como  $R$  es reflexiva  $aRa$  entonces  $a \in \bar{a} = \bar{b}$ , luego  $a \in \bar{b}$  y  $aRb$ .  
Ahora suponemos que  $aRb$  y probaremos que las clases son iguales:  
Sea  $z \in \bar{a}$ , entonces  $zRa$  pero como  $R$  es de equivalencia, por transitividad y la hipótesis general  $aRb$  tenemos que  $zRb$ , luego  $\bar{a} \subset \bar{b}$ . De la misma manera podemos ver que vale la otra inclusión y por lo tanto,  $\bar{a} = \bar{b}$ .

## Ejercicio 27.

Determinar si cada una de las siguientes colecciones de conjuntos es una partición para el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

- $\{\{4, 5, 6\}; \{1, 8\}; \{2, 3, 7\}\}$ :
  - Si es una partición ya que:
    - Ninguna de las partes de la partición es vacío.
    - Las partes no tienen elementos en común.
    - La unión de todas las partes da el conjunto  $A$ .
- $\{\{4, 5\}; \{1, 3, 4\}; \{6, 8\}; \{2, 7\}\}$ 
  - No es una partición ya que las partes  $\{4, 5\}$  y  $\{1, 3, 4\}$  tienen un elemento en común.
- $\{\{1, 3, 4\}; \{2, 6\}; \{5, 8\}\}$ 
  - No es una partición ya que la unión de las partes no da el conjunto  $A$ , puesto que falta el elemento 7.

## Ejercicio 28.

Considerando el conjunto  $A$  de los alumnos que cursan Mate 4, indicar cuáles de las siguientes son particiones de  $A$ .

- a.  $P = \{\{\text{alumnos que aprobaron CADP}\}; \{\text{alumnos que aprobaron OC}\}; \{\text{alumnos que no aprobaron ISO ni Redes}\}\}$

No es una partición de A porque las partes  $\{\text{alumnos que aprobaron CADP}\}$  y  $\{\text{alumnos que no aprobaron ISO ni Redes}\}$  tienen alumnos en común.

- b.  $P = \{\{\text{alumnos que están cursando Programación Distribuida}\}; \{\text{alumnos que cursan Sistemas y Organización}\}; \{\text{alumnos que están cursando Lógica e Inteligencia Artificial}\}\}$

No es una partición de A porque las partes  $\{\text{alumnos que están cursando Programación Distribuida}\}$  y  $\{\text{alumnos que están cursando Lógica e Inteligencia Artificial}\}$  (yo).

## Ejercicio 29.

Sean  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ .

Mostrar que R es una relación de equivalencia y hallar las clases de equivalencia.

¿Cuál es la partición que induce R sobre A?

R es una relación de equivalencia si es:

- Si es reflexiva puesto que se cumple que para todo  $x \in A$  vale que  $xRx$ .
  - $(1,1) \in R$ .
  - $(2,2) \in R$ .
  - $(3,3) \in R$ .
  - $(4,4) \in R$ .
- Si simétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en A vale que  $xRy$  implica  $yRx$ . Todas las siguientes implicaciones se cumplen:
  - $(1, 2) \in R \rightarrow (2,1) \in R$
  - $(3, 4) \in R \rightarrow (4,3) \in R$
  - Y también para  $(1,1) \in R \rightarrow (1,1) \in R$  y así... para todas los elementos que son emparejados consigo mismo.

- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ . Todas las siguientes implicaciones se cumplen:
  - $(1, 2) \in R \wedge (2, 1) \in R \rightarrow (1, 1) \in R$
  - $(2, 1) \in R \wedge (1, 2) \in R \rightarrow (2, 2) \in R$
  - $(1, 1) \in R \wedge (1, 2) \in R \rightarrow (1, 2) \in R$
  - $(2, 1) \in R \wedge (1, 1) \in R \rightarrow (2, 1) \in R$
  - $(2, 2) \in R \wedge (2, 1) \in R \rightarrow (2, 1) \in R$
  - Y siguiendo...

Clases de equivalencia:

$$\bar{1} = \{1, 2\}$$

$$\bar{3} = \{3, 4\}$$

La partición que induce  $R$  sobre  $A$  es  $P = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

- Se verifica que es una partición ya que:
  - Ninguna parte de  $P$  es vacío.
  - Ninguna parte de  $P$  tiene elementos en común con otra.
  - La unión de todas las partes da el conjunto  $A$ .

## Ejercicio 30.

Dados el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y una partición  $P = \{\{a, c\}; \{b\}; \{d, e\}\}$ . Escribir por extensión la relación de equivalencia sobre  $A$  inducida por  $P$ .

$$R = \{(a, a), (a, c), (c, a), (c, c), (b, b), (d, d), (d, e), (e, d), (e, e)\}$$

## Ejercicio 31.

Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ .

Mostrar que  $R$  es una relación de equivalencia y determinar las clases de equivalencia.

¿Qué partición de A induce R?

- Si es reflexiva puesto que se cumple que para todo  $x \in A$  vale que  $xRx$ .
- Si simétrica puesto que se cumple que para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$ .
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$ .

Clases de equivalencia:

$$\bar{1} = \{1, 2\}$$

$$\bar{3} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{4, 5\}$$

$$\bar{6} = \{6\}$$

La partición que induce R sobre A es  $P = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$

- Se verifica que es una partición ya que:
  - Ninguna parte de P es vacío.
  - Ninguna parte de P tiene elementos en común con otra.
  - La unión de todas las partes da el conjunto A.

## Ejercicio 31.

Sea  $\sim$  una relación definida en  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  dada por:  $(a, b) \sim (c, d)$  si y sólo si  $ad = bc$ . Probar que es de equivalencia. Hallar la clase de equivalencia del elemento  $(1, 4)$ . Mostrar que puede identificarse cada clase de equivalencia con un número racional (Esta es la forma de construir al conjunto de los racionales como conjunto cociente).

## Ejercicio 32.

Hallar las clases de equivalencia módulo 3 y 5 de los números 387, 25 y 649.

Para el modulo 3 existen 3 clases de equivalencia,  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$  y  $\bar{2}$ , que son los posibles restos en la división por 3.

$$387 = 129 * 3 + 0$$

$$25 = 8 * 3 + 1$$

$$649 = 216 * 3 + 1$$

$$387 \in \bar{0}$$

$$25 \in \bar{1}$$

$$649 \in \bar{1}$$

Para el modulo 5 existen 5 clases de equivalencia,  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$ ,  $\bar{3}$  y  $\bar{4}$  que son los posibles restos en la división por 5.

$$387 = 77 * 5 + 2$$

$$25 = 5 * 5 + 0$$

$$649 = 216 * 5 + 4$$

$$387 \in \bar{2}$$

$$25 \in \bar{0}$$

$$649 \in \bar{4}$$

### Ejercicio 34.

Hallar las respectivas clases de 13, 6, 11 y -49 módulo 4

$$13 = 3 * 4 + 1$$

$$6 = 1 * 4 + 2$$

$$11 = 2 * 4 + 3$$

$$-49 = -12 * 4 - 1$$

Como el resto no puede ser negativo vamos a sumar y restar por 4:

$$-49 = -12 * 4 - 1 + (4 - 4)$$

$$-49 = -12 * 4 + 3 - 4$$

$$-49 = (-12 * 4 - 4) + 3$$

$$-49 = 4 * (-12 - 1) + 3$$

$$-49 = 4 * (-13) + 3$$

$$13 \in \bar{1}$$

$$6 \in \bar{2}$$

$$11 \in \bar{3}$$

$$-49 \in \bar{3}$$

### Ejercicio 35.

Averiguar si son congruentes módulo 3 entre sí los siguientes pares de números: (2, 1024), (101, 512), (1501, 1348).

Teniendo en cuenta que dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos en su división por m son iguales.

- (2, 1024)

- $2 = 0 * 3 + 2$
- $1024 = 341 * 3 + 1$
- Como no tienen el mismo resto no se cumple  $2 \equiv_3 1024$
- (101, 512)
  - $101 = 33 * 3 + 2$
  - $512 = 170 * 3 + 2$
  - Como tienen el mismo resto se cumple  $101 \equiv_3 512$
- (1501, 1348)
  - $1501 = 500 * 3 + 1$
  - $1348 = 449 * 3 + 1$
  - Como tienen el mismo resto se cumple  $1501 \equiv_3 1348$

## Ejercicio 36.

Analizar para qué valores de  $m$  se hacen verdaderas las siguientes congruencias:  $5 \equiv_m 4$ ,  $1 \equiv_m 0$ ,  $1197 \equiv_m 286$ ,  $3 \equiv_m -3$

- $5 \equiv_m 4$ ,
  - $5 \equiv_m 4$  si y solo si  $m | 5 - 4$ , es decir,  $\exists k \in \mathbb{Z}: 5 - 4 = k * m$
  - $5 - 4 = k * m \rightarrow 1 = k * m$
  - Los únicos valores que hacen verdadero a  $1 = k * m$  son:
    - $m = 1$  y  $k = 1$
    - $m = -1$  y  $k = -1$
  - Por lo tanto los valores de  $m$  que hacen verdadera la congruencia son  $\pm 1$
- $1 \equiv_m 0$ ,
  - $1 \equiv_m 0$  si y solo si  $m | 1 - 0$ , es decir,  $\exists k \in \mathbb{Z}: 1 - 0 = k * m$
  - $1 - 0 = k * m \rightarrow 1 = k * m$
  - Los únicos valores que hacen verdadero a  $1 = k * m$  son:
    - $m = 1$  y  $k = 1$
    - $m = -1$  y  $k = -1$
  - Por lo tanto los valores de  $m$  que hacen verdadera la congruencia son  $\pm 1$
- $1197 \equiv_m 286$ ,
  - $1197 \equiv_m 286$  si y solo si  $m | 1197 - 286$ , es decir,  $\exists k \in \mathbb{Z}: 1197 - 286 = k * m$
  - $1197 - 286 = k * m \rightarrow 911 = k * m$



- Como 911 es primo los únicos valores que hacen verdadero a  $911 = k * m$  son:
  - $m = 911$  y  $k = 1$
  - $m = 1$  y  $k = 911$
  - $m = -911$  y  $k = -1$
  - $m = -1$  y  $k = -911$
- Por lo tanto los valores de  $m$  que hacen verdadera la congruencia son  $\pm 911$  y  $\pm 1$
- $3 \equiv_m -3$ ,
  - $3 \equiv_m -3$  si y solo si  $m | 3 + 3$ , es decir,  $\exists k \in \mathbb{Z}: 3 + 3 = k * m$
  - $3 + 3 = k * m \rightarrow 6 = k * m$
  - Como  $6 = 1 * 2 * 3$  los únicos valores que hacen verdadero a  $6 = k * m$  son:
    - $m = 2$  y  $k = 3$
    - $m = 3$  y  $k = 2$
    - $m = -2$  y  $k = -3$
    - $m = -3$  y  $k = -2$
    - $m = 6$  y  $k = 1$
    - $m = 1$  y  $k = 6$
    - $m = -6$  y  $k = -1$
    - $m = -1$  y  $k = -6$
  - Por lo tanto los valores de  $m$  que hacen verdadera la congruencia son  $\pm 2$ ,  $\pm 3$  y  $\pm 6$

### Ejercicio 37.

Probar que la relación de congruencia módulo  $m$  es una relación de equivalencia

### Ejercicio 38.

Probar todo número es congruente, módulo  $n$ , con el resto de su división por  $n$

### Ejercicio 39.

Probar que dos enteros son congruentes módulo  $m$  si y sólo si los respectivos restos de su división por  $m$  son iguales.

### Ejercicio 40.

Probar las siguientes propiedades para todo  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ :

a.  $a \equiv_n a$

Como la relación de congruencia es una relación de equivalencia, se cumple  $a \equiv_n a$ .

- $\equiv_n$  es reflexiva ya que para  $a$  entero vale *que*  $n|a - a$  ya que  $a - a = 0 * n$

b.  $a \equiv_n b \Rightarrow b \equiv_n a$

Como la relación de congruencia es una relación de equivalencia, se cumple

$$a \equiv_n b \rightarrow b \equiv_n a.$$

- $\equiv_n$  es simétrica ya que suponiendo que  $a \equiv_n b$ ,  $n|a - b$ , es decir,  $\exists un k \in \mathbb{Z} : a - b = k * n$ .

Como  $b - a = -(a - b) = -(k * n) = -k * n$ . Luego  $\exists un -k \in \mathbb{Z} : b - a = -k * n$ , por lo tanto  $n|b - a$ , es decir  $b \equiv_n a$

c.  $a \equiv_n b$  y  $b \equiv_n c \Rightarrow a \equiv_n c$

Como la relación de congruencia es una relación de equivalencia, se cumple

$$a \equiv_n b \wedge b \equiv_n c \rightarrow a \equiv_n c.$$

- $\equiv_n$  es transitiva ya que suponiendo que  $a \equiv_n b$ ,  $n|a - b$ , es decir,  $\exists un k \in \mathbb{Z} : a - b = k * n$  y suponiendo que  $b \equiv_n c$ ,  $n|b - c$ ,  $\exists un d \in \mathbb{Z} : b - c = d * n$ .

Como  $a - c = a + (-b + b) - c = a - b + b - c = k * n + d * n = n * (k + d) = n * i$  con  $i = (k + d) \in \mathbb{Z}$ . Como  $\exists un i \in \mathbb{Z} : a - c = i * n$ ,  $n|a - c$ , es decir  $a \equiv_n c$

d.  $a \equiv_n b \Leftrightarrow a + c \equiv_n b + c$

- $a \equiv_n b \rightarrow a + c \equiv_n b + c$

i. Suponiendo que  $a \equiv_n b$ , entonces  $n|a - b$ , por lo tanto,  $\exists un k \in Z : a - b = k * n$ .

ii.  $a + c \equiv_n b + c$  se puede escribir como  $n|(a + c) - (b + c)$ , esto se puede escribir como  $n|a + c - b - c$ , que se puede escribir como  $n|a - b$

iii. Como  $n|(a + c) - (b + c) = n|a - b$  y se sabe por hipótesis que como  $n|a - b$  se cumple que  $\exists un k \in Z : a - b = k * n$  entonces  $\exists un k \in Z : (a + c) - (b + c) = k * n$

- $a + c \equiv_n b + c \rightarrow a \equiv_n b$

i. Suponiendo que  $a + c \equiv_n b + c$ , entonces  $n|(a + c) - (b + c)$ , por lo tanto,  $\exists un i \in Z : (a + c) - (b + c) = i * n$ .

ii.  $a + c \equiv_n b + c$  se puede escribir como  $n|(a + c) - (b + c)$ , esto se puede escribir como  $n|a + c - b - c$ , que se puede escribir como  $n|a - b$

iii. Como  $n|a - b = n|(a + c) - (b + c)$  y se sabe por hipótesis que como  $n|(a + c) - (b + c)$  se cumple que  $\exists un i \in Z : (a + c) - (b + c) = i * n$  entonces  $\exists un i \in Z : a - b = k * n$

e.  $a \equiv_n b \Rightarrow ac \equiv_n bc$

- Suponiendo que  $a \equiv_n b$ , entonces  $n|a - b$ , por lo tanto,  $\exists un k \in Z : a - b = k * n$ .
- $ac \equiv_n bc$  se puede escribir como  $n|ac - bc$ .
- $ac - bc = c * (a - b) = c * (k * n) = (c * k) * n = d * n$ . Con  $d = (c * k) \in Z$ .
- Como  $\exists d \in Z : ac - bc = d * n$ , se cumple que  $n|ac - bc$ , entonces se cumple  $ac \equiv_n bc$ .

f.  $a \equiv_n b \Rightarrow (a, n) = (b, n)$

- Suponiendo que  $a \equiv_n b$ , entonces  $n|a - b$ , por lo tanto,  $\exists un k \in \mathbb{Z} : a - b = k * n$ .
- Si en  $a - b = k * n$  sumamos a  $b$  en ambos lados nos queda  $a = k * n + b$
- $(a, n) = am + nt$  con  $m, t \in \mathbb{Z}$  haciendo uso de la Identidad de Bézout.
- Reemplazando  $a$  por  $k * n + b$  queda  $(a, n) = (k * n + b) * m + nt = mkn + bm + nt = mkn + nt + bm = n(mk + t) + bm = nd + bm = (b, n)$ . Con  $d = (mk + t) \in \mathbb{Z}$  y  $m \in \mathbb{Z}$ . Entonces nos queda  $(a, n) = (b, n)$ .

g.  $a \equiv_n 0 \Leftrightarrow n|a$

- $a \equiv_n 0 \rightarrow n|a$

i. Suponiendo que  $a \equiv_n 0$ , por definición de congruencia módulo esto significa que  $n|a - 0$ .

ii. Como  $a - 0 = a$ , esto implica que  $n|a - 0 = n|a$ .

- $n|a \rightarrow a \equiv_n 0$

i. Suponiendo que se cumple que  $n|a$ .

ii. Como  $a = a - 0$   $n|a = n|a - 0$ . Esto ultimo se puede escribir como  $a \equiv_n 0$ .