TP5 – Estructuras Algebraicas - Morfismos

Agustina Sol Rojas

Ejercicio 1.

Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos entre las estructuras algebraicas indicadas y en caso afirmativo hallar nucleó e imagen.

a) $f: G \to F$ dada por $f(x) = 2^x$ y siendo los grupos $G = (R, +)$ los reales con la suma usual, $F = (R_0, \cdot)$ los reales sin el 0 con el producto usual.

<u>Verificación de neutro a neutro:</u>

El neutro de la suma en los reales es el 0. El neutro del producto en los reales sin el 0 es el 1.

$f(0) = 2^0 = 1$

<u>Verificación de morfismo:</u>

Es homomorfismos ya que sucede $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ para todo $a, b \in G$:

$f(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = f(a) \cdot f(b)$

$Nu(f) = 0$

$Img(f) =$ los reales positivos pares sin el 0.

b) $f: G \to F$ dada por $f(x) = -x$ y siendo los grupos $G = (Z,*)$ los enteros con la operación $a * b \ = \ a + b + ab$, $F = (Z, \circ)$ los enteros con la operación $a \ \circ \ b = a + b - ab$.

No es homomorfismos ya que no se cumple $f(a * b) = f(a) \ \circ \ f(b)$ para todo $a, b \in G$:

$$f(a * b) = f(a + b + ab) = -(a + b + ab) = -a - b - ab \neq a + b - ab$$
$$= f(a) \ \circ \ f(b)$$

c) $f : (P(A),\cup) \to (P(A),\cap)$ dada por $f(X) = X^c$ (siendo A cualquier conjunto, $P(A)$ indica el conjunto de partes de A y X^c el complemento de un conjunto).

<u>Verificación de neutro a neutro:</u>

Neutro de la unión → $\emptyset$

Neutro de la intersección → A

$f(\emptyset) = \emptyset^c = A$

<u>Verificación de morfismo:</u>

Es homomorfismos ya que sucede $f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y)$ para todo $X, Y \in P(A)$:

$f(X \cup Y) = (X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c = f(X) \cap f(Y)$

$Nu(f) = \emptyset$

$Img(f) = A$

Ejercicio 2.

Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Demostrar que el nucleó y la imagen de f son subgrupos de G y H respectivamente.

1. $Nu(f)$ subgrupo de G

   //

2. $Img(f)$ subgrupo de H

   //