Matemática 4- 2024

TP 5 (Continuación 2) - Morfismos

1. Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos entre las estructuras algebraicas indicadas y en caso afirmativo hallar núcleo e imagen.

   (a) $f : G \to F$ dada por $f(x) = 2^x$ y siendo los grupos $G = (R, +)$ los reales con la suma usual, $F = (R_0, \cdot)$ los reales sin el 0 con el producto usual

   (b) $f : G \to F$ dada por $f(x) = -x$ y siendo los grupos $G = (Z, *)$ los enteros con la operación $a*b = a+b+ab$, $F = (Z, \circ)$ los enteros con la operación $a \circ b = a+b-ab$

   (c) $f : (P(A), \cup) \to (P(A), \cap)$ dada por $f(X) = X^c$ (siendo A cualquier conjunto, $P(A)$ indica el conjunto de partes de A y X^c el complemento de un conjunto)

2. Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Demostrar que el núcleo y la imagen de f son subgrupos de G y H respectivamente.

3. Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que la función $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(a) = a^2$ es un homomorfismo si y sólo si G es abeliano (recordar un ejercicio de grupos abelianos de la primera parte del TP 5)

4. Si H_1, H_2 son dos subgrupos de un grupo conmutativo G, probar que la aplicación $f : H_1 \times H_2 \to G$ dada por $f(a, b) = ab$, es un morfismo de grupos.

5. Si $f : G_1 \to G_2$ es un morfismo de grupos entonces es monomorfismo si y sólo si $Nu(f) = \{e_1\}$.

6. Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que la función $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(a) = a^{-1}$ es un isomorfismo si y sólo si G es abeliano

7. Sea R una relación de *congruencia* sobre un semigrupo $(S, *)$ y $(S/R,)$ el semigrupo cociente correspondiente.
   Demostrar que la función $f_R : S \longrightarrow S/R$ definida por $f_R(a) = \overline{a}$ es un homomorfismo.

8. Sea z un número complejo. ¿Cuándo será un isomorfismo de grupos la aplicación $f : C \to C$ siendo C el conjunto de los números complejos, dada por $f(x) = z.x$?

9. Probar que hay un isomorfismo entre en grupo de las matrices 2x2 con la suma habitual de matrices y el grupo de cuaternas reales R^4 con la suma usual

10. Probar que todo grupo cíclico de orden m es isomorfo a $(Z_m, +)$