TP5 – Estructuras Algebraicas - Teoría de Grupos

Agustina Sol Rojas

Ejercicio 1.

Determinar cuáles de las siguientes operaciones están bien definidas sobre el conjunto A dado. Analizar las propiedades en los casos afirmativos

a) $A = N, a * b = 3ab$

Dado que el producto es una operación cerrada en N, para todo $a, b \in N$, se cumple que $ab \in N$. Además, como $3 \in N$, al multiplicarlo por otro número natural (nuevamente porque el producto es una operación cerrada) el resultado sigue siendo un número natural. Por lo tanto, la operación $a * b = 3ab$ está bien definida en N.

Conmutativa:

Como el producto es conmutativo en N se cumple para todo $a, b \in N$ que $a * b = 3ab = 3ba = b * a$

Asociativa:

Como el producto es asociativo y conmutativo en N se cumple para todo $a, b, c \in N$ que $(a * b) * c = (3ab) * c = 3(3ab)c = 3a(3bc) = a * (3bc) = a * (b * c)$

Elemento neutro:

Se debe probar que existe en N un elemento e tal que para todo a en N valga que $a * e = e * a = a$:

1. Teniendo en cuenta lo siguiente:
   i. $a * e = 3ae$
   ii. $e * a = 3ea$
2. Se debe encontrar un $e \in N$ tal que
   i. $3ae = a$

ii. $3ea = a$

3. Despejando las ecuaciones queda:
   i. $3e = 1$
   ii. $3e = 1$
4. Como ningún número natural multiplicado por 3 da como resultado 1, no existe un $e \in N$ tal que $a * e = e * a = a$. Por lo tanto * no tiene un elemento neutro.

Elemento inverso:

Como * no tiene elemento neutro, no tiene elemento inverso.

b) $A = Z, a * b = \frac{a+b}{3+ab}$

Contraejemplo:

1. Dados $a, b \in Z$ tal que $a = -3$ y $b = 1$:
$$-3 * 1 = \frac{-3+1}{3+(-3)\,.\,1} = -\frac{2}{3-3} = \frac{2}{0}$$
2. $\frac{2}{0} \notin Z$, por lo tanto la operación $a * b$ no está bien definida en Z.

c) $A = R, x * y = x + y - xy$

Dado que la suma y el producto son operaciones cerradas en N, para todo $x, y \in R$, se cumple que $x + y - xy \in N$. Por lo tanto, la operación $x * y = x + y - xy$ está bien definida en R.

Conmutativa:

Como el producto es conmutativo en R se cumple para todo $x, y \in R$ que $x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x$

Asociativa:

Como la suma y producto son asociativos y conmutativos en R, y además se cumple la propiedad distributiva se cumple para todo $x, y, z \in R$ que

$$x * (y * z) = x * (y + z - yz) =$$
$$= x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) =$$
$$= x + y + z - yz - xy - xz + xyz =$$

$= x + y - xy + z - xz - yz + xyz =$

$= (x + y - xy) + z - (xz + yz - xyz) =$

$= (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z$

$= (x + y - xy) * z = (x * y) * z$

<u>Elemento neutro</u>:

Se debe probar que existe en R un elemento e tal que para todo x en R valga que $x * e = e * x = x$:

1. Teniendo en cuenta lo siguiente:
   i. $x * e = x + e - xe$
   ii. $e * x = e + x - ex$
2. Se debe encontrar un $e \in N$ tal que
   i. $x + e - xe = x$
   ii. $e + x - ex = x$
3. Despejando las ecuaciones queda:
   i. $x + e - xe = x$
      $e - ex = 0$
      $e(1 - x) = 0$
      $e = 0$
   ii. $e + x - ex = x$
      $e - ex = 0$
      $e(1 - x) = 0$
      $e = 0$
4. Reemplazando en la expresión de 2. por e verificamos que se cumple lo siguiente para cualquier $x \in R$
   i. $x + 0 - x.0 = x + 0 = x$
   ii. $0 + x - 0.x = 0 + x = x$
5. Por lo tanto existe en R un elemento e tal que para todo x en R vale que $x * e = e * x = x$ y ese $e = 0$

<u>Elemento inverso</u>:

Un elemento x de R se tiene inverso si existe x' en R tal que $x * x' = x' * x = e$

1. Teniendo en cuenta lo siguiente
   i. $x * x' = x + x' - x\ .\ x'$
   ii. $x' * x = x' + x - x'.\ x$

2. Se debe encontrar un $e \in N$ tal que
   i. $x + x' - x \,.\, x' = e$
   ii. $x' + x - x'.\, x = e$
3. Despejando las ecuaciones y teniendo en cuenta que $e = 0$ queda:
   i. $x + x' - x \,.\, x' = 0$

      $x' - x \,.\, x' = -x$

      $x'(1 - x) = -x$

      $x' = \dfrac{-x}{1 - x}$
   ii. $x' + x - x'.\, x = 0$

      $x' - x'.x = -x$

      $x'(1 - x) = -x$

      $x' = \dfrac{-x}{1 - x}$
4. El inverso existe y es $\frac{-x}{1-x}$ para todo $x \neq 1 \in R$. Cuando $x = 1$ el denominador se hace cero y la expresión no puede resolverse, por lo que no existe inverso para $x = 1$.
   i. Esto último es válido.

d) $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	1	2	0	2
3	2	3	1	1

Se puede observar en el cuadro que para todo $a, b \in A$ se cumple que el resultado de $a * b \in A$.

<u>Conmutativa</u>:

La operación * sobre A es conmutativa si, para todo a y b en A, resulta $a * b = b * a$

Contraejemplo:

$2 * 0 = 1$

$0 * 2 = 0$

Se puede observar como $2 * 0 \neq 0 * 2$, por lo tanto, no es conmutativa.

Asociativa:

La operación * sobre A es asociativa si, cualesquiera sean a, b y c en A, resulta $a * (b * c) = (a * b) * c$

Contraejemplo:

$(3 * 3) * 1 = 1 * 1 = 1$

$3 * (3 * 2) = 3 * 1 = 3$

Se puede observar como $(3 * 3) * 1 \neq 3 * (3 * 2)$, por lo tanto, no es asociativa.

Elemento neutro:

Existe en A un elemento e tal que para todo x en R vale que $x * e = e * x = x$. Se puede observar en el grafico que ese elemento es 1, puesto que para todo $x \in A$ vale que $x * 1 = 1 * x = x$

Elemento inverso:

Un elemento x de R se tiene inverso si existe x' en R tal que $x * x' = x' * x = e$

1. $x = 0$

   0 no tiene inverso puesto que nunca sucede que para cualquier $x' \in A$ vale que $0 * x' = x' * 0 = 1$
2. $x = 1$

   1 tiene inverso y ese es 1 dado que $1 * 1 = 1 * 1 = 1$
3. $x = 2$

   0 no tiene inverso puesto que nunca sucede que para cualquier $x' \in A$ vale que $2 * x' = x' * 2 = 1$

   $2 * 0 = 1$, pero $0 * 2 = 0$.

   $3 * 2 = 1$, pero $2 * 3 = 2$
4. $x = 3$

   3 tiene inverso y ese es 3 dado que $3 * 3 = 3 * 3 = 1$

Ejercicio 2.

Demostrar que:

a) Dado $M = \{m \in N : m > 0\}, (M, +)$ es un semigrupo pero no es un monoide

Asociativa:

La operación $+$ sobre M es asociativa si, cualesquiera sean a, b y c en A, resulta $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Como la operación $+$ es asociativa en N, $(N, +)$ es un semigrupo. Debido a que $M \subset N$, por definición 2.7, $(M, +)$ es un semigrupo (se puede pensar como que la asociatividad se "hereda" de N).

Elemento neutro

No existe en M un elemento e tal que para todo a en M vale que $a * e = e * a = a$.

El elemento neutro de $(N, +)$ es el 0 y este es único. Por definición del conjunto M, $0 \notin M$ por lo tanto no existe un elemento neutro para la operación $+$ sobre el conjunto M.

Como no existe en M elemento neutro para $+$, $(M, +)$ no es un monoide.

b) El conjunto de un solo elemento $M = \{e\}$ con la operación definida por $e * e = e$ es un monoide

Asociativa

La operación $*$ sobre M es asociativa si, cualesquiera sean a, b y c en M, resulta $a * (b * c) = (a * b) * c$

1. Sean a, b y $c \in M$
   i. $a * (b * c) = a * e = e$
   ii. $(a * b) * c = e * c = e$
2. Como $a * (b * c) = (a * b) * c$, la operación $*$ sobre M es asociativa

Elemento neutro:

Se debe demostrar que existe en M un elemento e tal que para todo a en M valga que $a * e = e * a = a$.

1. Sea $a \in M$
   i. $a * e = e$

ii. $e * a = e$

2. Como $a \in M$ y el unico elemento de M es e, necesariamente $a = e$
3. Por lo tanto existe en M un elemento neutro para $*$

Como $*$ es asociativa y existe un elemento neutro, $(M,*)$ es un monoide.

c) Dado un conjunto no vacío A, el conjunto de las partes de A $P(A)$ con la operación intersección de conjuntos es un monoide conmutativo

Asociativa:

La operación $\cap$ sobre $P(A)$ es asociativa si, cualesquiera sean X, Y y Z en $P(A)$, resulta $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

1. Sean $X, Y, Z \in P(A)$, como la $\cap$ entre conjuntos es asociativa se cumple que $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

Elemento neutro:

Se debe demostrar que existe en $P(A)$ un elemento E tal que para todo X en $P(A)$ valga que $X \cap E = E \cap X = X$.

1. Sea X un elemento cualquiera de $P(A)$. Para que se cumpla $X \cap E = E \cap X = X$, a E deben pertenecer los mismos elementos que pertenecen a X. Los únicos conjuntos que cumplen con esto son el propio X y A. Si se toma como elemento neutro a X siendo X cualquier elemento de $P(A)$, este no va a ser único, puesto que va a haber un elemento neutro distinto para cada elemento de $P(A)$ por lo que se toma como elemento neutro a A.
2. Para cualquier $X \in P(A)$, al ser $X \subseteq A$ se cumple que:
   i. $X \cap A = X$
      a. La intersección entre un conjunto y su subconjunto da el subconjunto.
   ii. $A \cap X = X$
      a. La intersección entre un conjunto y su subconjunto da el subconjunto.

Conmutativa

La operación ∩ sobre $P(A)$ es conmutativa si, cualesquiera sean X y Y en $P(A)$, resulta $X \cap Y = Y \cap X$

1. Sean $X, Y \in P(A)$, como la ∩ entre conjuntos es conmutativa se cumple que $X \cap Y = Y \cap X$

Como ∩ es asociativa, existe un elemento neutro y es conmutativa $(P(A),\cap)$ es un monoide conmutativo.

Ejercicio 3.

Demostrar que si para una operación asociativa $*$ en A existe un elemento neutro e un elemento del conjunto, a, tiene inverso entonces este es único.

1. Sean $a, b, c \ \in A$, suponiendo que $b \neq c$ y ambos son inversos de a se cumple:
   i. $a * b = b * a = e$
   ii. $a * c = c * a = e.$
2. Como e es el elemento neutro del conjunto se cumple:
   i. $b = b * e$
3. Como por 1.i. $e = a * c$:
   i. $b * e = b * (a * c)$
4. Por asociatividad:
   i. $b * (a * c) = (b * a) * c$
5. Por hipótesis $(b * a) = e$
   i. $(b * a) * c = e * c$
6. Como e es el elemento neutro del conjunto se cumple:
   i. $e * c = c$
7. Se llego a que $b = c$, por lo tanto si para una operación asociativa $*$ en A existe un elemento neutro e un elemento del conjunto y a tiene inverso entonces este es único.

Ejercicio 4.

Sea R una relación de congruencia sobre un semigrupo $(S,*)$ demostrar que $(S/R,\circledast)$ (el conjunto cociente y la operación inducida por $*$ sobre las clases de equivalencia) es un semigrupo llamado Semigrupo Cociente

1. Teniendo en cuenta que $S/R = \{\bar{s} \ \in S\}$ y siendo $a, b \in S$, $\bar{a} \in S/R$ y $\bar{b} \in S/R$
   i. $\bar{a} \circledast \bar{b} = \overline{a * b}$
2. $\circledast$ es una operación bien definida puesto que al ser $(S,*)$ un semigrupo, $a * b$ ∈ S, y por lo tanto $\overline{a * b} \in S/R$.
3. $\circledast$ es asociativa. Sean $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in S/R$ y teniendo en cuenta que $(S,*)$ es un semigrupo (asociatividad de *):
   i. $\bar{a} \circledast \left(\bar{b} \circledast \bar{c}\right) = \bar{a} \circledast \left(\overline{b * c}\right) = \bar{a} \circledast \left(\overline{b * c}\right) = \overline{a * (b * c)} =$
   $\overline{(a * b) * c} = \left(\overline{a * b}\right) \circledast \bar{c} = (\bar{a} \circledast \bar{b}) \circledast \bar{c}$
   ii. Como se llega a que $\bar{a} \circledast \left(\bar{b} \circledast \bar{c}\right) = (\bar{a} \circledast \bar{b}) \circledast \bar{c}$, $\circledast$ es asociativa.
4. Como $\circledast$ es una operación bien definida y $\circledast$ es asociativa, $(S/R,\circledast)$ es un semigrupo llamado Semigrupo Cociente.

Ejercicio 5.

Analizar si las siguientes son estructuras de grupo:

a) $(Z, +)$, los enteros con la suma usual
b) $(Z,\cdot)$, los enteros con el producto usual
c) $(R^2, +)$, los pares ordenados de reales con la suma usual
d) $(M_{2x2}, +)$, las matrices de 2x2 con la suma usual de matrices
e) $(P(A),\cup)$, A cualquier conjunto y $P(A)$ indica el conjunto de partes de A