TP4 – Relaciones entre conjuntos

Agustina Sol Rojas

Ejercicio 1.

Sean los conjuntos A = {1, 0, −1} y B = {4, 3, 2, 1}. Decide si las siguientes corresponden a relaciones de A en B. Justifica.

a. R = {(1; 1),(0; 2)}
   - $(1;1) \in A \times B$
   - $(0;2) \in A \times B$
   - Por lo tanto $R \subseteq A \times B$

b. R = {(−1; 1),(1; −1)}
   - $(-1;1) \in A \times B$
   - $(1;-1) \notin A \times B$
   - Por lo tanto no se da que $R \subseteq A \times B$.
     - R no es una relación de A en B

c. R = {(−1; 1),(−1; 2),(−1; 3)}
   - $(-1;1) \in A \times B$
   - $(-1;2) \in A \times B$
   - $(-1;3) \in A \times B$
   - Por lo tanto $R \subseteq A \times B$.

d. R = {(4; 1)}
   - $(4;1) \notin A \times B$
   - Por lo tanto no se da que $R \subseteq A \times B$.
     - R no es una relación de A en B

e. R = ∅
   - $\emptyset \notin A \times B$
   - Por lo tanto no se da que $R \subseteq A \times B$.

Ejercicio 2.

Sea A = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}, B = Z y la relación de A en B que viene definida en la forma: xRy si y sólo si y es el cuadrado de x. Escribe R por extensión. Define R^{-1} por comprensión y por extensión.

R por extensión:

$$R = \{(-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$$

R^{-1} por comprensión:

$$R\char`^(-1) = \{(y, x) : (x, y) \in \ R\}$$

$$R\char`^(-1) = \{(y, x) : (y \ \in A) \quad 〖(\_\char`^)(x \ \in B) 〗 \char`^ \ (x\char`^2 = y)\}$$

R^{-1} por extensión:

$$R\char`^(-1) = \{(9, -3), (4, -2), (1, -1), (0,0), (1,1), (4,2), (9,3)$$

Ejercicio 3.

Sean los conjuntos A = {a, b, c, d, e} , V = {vocales} y B = {1, 2, 3}. Decide si las siguientes corresponden a relaciones. Justifica

a. R = {(a, a, a); (a, b, c); (b, c, d)} en A × A × A
   - $(a, a, a) \in A \times A \times A$
   - $(a, b, c) \in A \times A \times A$
   - $(b, c, d) \in A \times A \times A$
   - Por lo tanto $R \subseteq A \times A \times A$.

b. R = {(a, a, a); ((c, e, 2); (a, b, 1)} en A × V × B
   - $(a, a, a) \notin A \times V \times B$
   - $(c, e, 2) \in A \times V \times B$
   - $(a, b, 1) \notin A \times V \times B$
   - Por lo tanto no se da que $R \subseteq A \times V \times B$.

c. R = {(a, b, 1); (e, c, 2) : (i, j, 3)} en V × A × B
   - $(a, b, 1) \in V \times A \times B$
   - $(e, c, 2) \in V \times A \times B$
   - $(i, j, 3) \notin V \times A \times B$
   - Por lo tanto no se da que $R \subseteq V \times A \times B$.

d. R = {(a, z, 3); ((b, i, 2); (c, x, 1)} en A × V × B
   - $(a, z, 3) \notin A \times V \times B$
   - $(b, i, 2) \in A \times V \times B$
   - $(c, x, 1) \notin A \times V \times B$
   - Por lo tanto no se da que $R \subseteq V \times A \times B$.

Ejercicio 4.

Sea A = {1, 2, 3} y la relación R en A × A × A definida en la forma: (x, y, z) ∈ R si y sólo si x < y & y < z , siendo < el ”menor” usual entre números reales. Escribe R por extensión

$$R = (\{1,2,3\})$$

Ejercicio 5.

Para cada una de las siguientes relaciones: dar tres pares que pertenezcan y tres pares que no; indicar si son reflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas.

a. En el conjunto de los números reales
   - xRy si y sólo si x ≥ 4 & y ≥ 5.
     - Pares que pertenecen:
       i. (4,5)
       ii. (4,6)
       iii. (4,7)
     - Pares que no pertenecen:
       i. (3,5)
       ii. (3,6)
       iii. (3,7)
     - No es reflexiva puesto que no se da que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que xRx

        i. Contraejemplo: $4 \in \mathbb{R}$ pero $(4,4) \notin R$
    - No es simétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en $\mathbb{R}$ vale que xRy implica yRx
        i. Contraejemplo: $(4,5) \in R \rightarrow \ (5,4) \in R$
            1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es simétrica.
    - No es antisimetrica puesto que no se cumple que para todo x, y en $\mathbb{R}$ vale que xRy e yRx implican que $x = y$
        i. Contraejemplo: $(5,6)$ ^ $(6,5) \in R \rightarrow \ 5 = 6$
            1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es asimetrica.
    - Si es transitiva puesto que para todo x, y, z en $\mathbb{R}$ vale que xRy e yRz implican que xRz
        i. Si vale xRy se cumple que $x \geq 4 \ e \ y \geq 5$
        ii. Si vale yRz se cumple $y \geq 4 \ y \ z \geq 5$
        iii. En el caso xRz como por i. se cumple que $x \geq 4$ y por ii. se cumple que $z \geq 5$, entonces vale yRz
        iv. Por lo tanto siempre que el antecedente sea verdadero, teniendo en cuenta lo dicho en iii. el consecuente será verdadero y siempre que el antecedente sea falso, teniendo en cuenta lo dicho en iii. el consecuente será falso. En ambos casos la implicación es verdadero y por lo tanto la relación es transitiva.
- xRy si y sólo si y ≤ x ≤ y + 3.
    - Pares que pertenecen:
        i. (3,1)
        ii. (3,2)
        iii. (4,2)
    - Pares que no pertenecen:
        i. (3,3)
        ii. (4,4)
        iii. (5,6)

- No es reflexiva puesto que no se da que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que xRx
    i. Contraejemplo: $3 \in \mathbb{R}$ pero $(3,3) \notin R$
- No es simétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en $\mathbb{R}$ vale que xRy implica yRx
    i. Contraejemplo: $(3,1) \in R \rightarrow\ (1,3) \in R$
        1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es simétrica.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo x, y en $\mathbb{R}$ vale que xRy e yRx implican que $x = y$
    i. Si vale xRy se cumple que $y \leq x \leq y + 3$.
    ii. Hay casos donde vale xRy pero no valdrá yRx puesto que si $x > y$ vale $x \leq y \leq x + 3$ pero nunca se dará $x \leq y$, por lo tanto no se cumplirá $x \leq y \leq x + 3$
    iii. Esto hace que el antecedente sea siempre falso ya que no ocurre que para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ vale xRy e yRx por lo tanto la implicación se cumple trivialmente.
- No es transitiva puesto que no se cumple que para todo x, y, z en $\mathbb{R}$ vale que xRy e yRz implican que xRz
    i. Contraejemplo: $(9,6) \in R$ ^ $(6,3) \in R\ \rightarrow\ (9,3) \in R$
        1. Se puede ver que el antecedente es verdadero, pero el consecuente es falso, ya que no se cumple que $3 \leq 9 \leq 3 + 3$ por lo que la implicación es falsa, entonces la relación no es transitiva.

b. Sean A = {1, 2, 3, 4} y P(A) el conjunto de partes de A

P(A) = $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,1\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,1,\{3,2\},\{3,3\},\{3,4\},\{4,1\},\{4,2\},\{4,3\},\{4,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

- en P(A) , XRX si y sólo si X ∩ Y = Ø
    - Pares que pertenecen:
        i. ({1,2},{4})
        ii. ({1,3},{2,4})
        iii. ({1},{2,2})
    - Pares que no pertenecen:

        i. ({1},{1})
        ii. ({1,3},{3})
        iii. ({1},{1,2})
    - No es reflexiva puesto que no se da que para todo $X \in P(A)$ vale que XRX
        i. Contraejemplo: $\{1\} \in P(A)$ pero $(\{1\},\{1\}) \notin R$
    - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo X, Y en $P(A)$ vale que XRY implica YRX
        i. Si vale XRY se cumple que $X \cap Y = \emptyset$.
        ii. Como la intersección es conmutativa si vale $X \cap Y = \emptyset$ también vale $Y \cap X = \emptyset$.
        iii. Si vale $Y \cap X = \emptyset$, se cumple que YRX.
        iv. Por lo tanto XRY implica YRX.
    - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo X, Y en $P(A)$ vale que XRY e YRX implican que $X = Y$
        i. Contraejemplo: $(\{1\},\{2\}) \in R$ ^ $(\{2\},\{1\}) \in R \rightarrow \{1\} = \{2\}$
    - No es transitiva puesto que no se cumple que para todo X, Y, Z en $P(A)$ vale que XRY e YRZ implican que XRZ
        i. Contraejemplo: $(\{1,4\},\{2\}) \in R$ ^ $(\{2\},\{1,3,4\}) \in R \rightarrow (\{1,4\},\{1,3,4\}) \in R$
            1. $\{1,4\} \cap \{1,3,4\} = \emptyset$
            2. $\{1,4\} = \emptyset \rightarrow absurdo$
- en P(A) , XRY si y sólo si X ⊂ Y
    - *Cuando practique para el parcial lo hago...*

Ejercicio 6.

Determinar si las siguientes relaciones definidas en A = {a, b, c, d} son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas

- R0 = ∅
    - No es reflexiva puesto que no se da que para todo $x \in A$ vale que $xR0x$
        - Contraejemplo: a $\in A$ pero $(a, a) \notin R0$

- Si es simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que $xR0y$ implica $yR0x$
  - Como nunca se cumple $xR0y$ puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, el consecuente siempre será falso, por lo tanto la simetría se cumple trivialmente.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que $xR0y$ e $yR0x$ implican que $x = y$
  - Como nunca se cumple $xR0y$ ni $yR0x$ puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, el consecuente siempre será falso, por lo tanto la simetría se cumple trivialmente.
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que $xR0y$ e $yR0z$ implican que $xR0z$
  - Como nunca se cumple $xR0y$ ni $yR0z$ puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, el consecuente siempre será falso, por lo tanto la simetría se cumple trivialmente.

- R1 = {(a, a); (a, b); (d, c); (c, d)}
  - No es reflexiva puesto que no se da que para todo $x \in A$ vale que $xR1x$
    - Contraejemplo: b ∈ A pero $(b, b) \notin R1$
  - No es simétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que $xR1y$ implica $yR1x$
    - Contraejemplo: $(a, b) \in R1 \rightarrow \ (b, a) \in R1$
      - $(b, a) \notin R$
  - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que $xR1y$ e $yR1x$ implican que $x = y$
    - Contraejemplo: $(d, c) \in R1$ ^ $(c, d) \in R1 \rightarrow c = d$
      - $c = d \rightarrow absurdo$
  - No es transitiva puesto que no se cumple que para todo x, y, z en A vale que $xR1y$ e $yR1z$ implican que $xR1z$
    - Contraejemplo: $(d, c) \in R1$ ^ $(c, d) \in R1 \rightarrow (d, d) \in R1$
      - $(d, d) \notin R1$
- R2 = {(a, a); (b, b); (a, b); (b, a); (d, d); (c, c)}
  - Si es reflexiva puesto que se da que para todo $x \in A$ vale que $xR2x$.
    - $a \in A$ y vale $aR2a$.
    - $b \in A$ y vale $bR2b$.

        - $c \in A$ y vale $cR2c$.
        - $d \in A$ y vale $dR2d$.
    - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que $xR2y$ implica $yR2x$.
        - $aR2a \rightarrow aR2a$
        - $bR2b \rightarrow bR2b$
        - $cR2c \rightarrow cR2c$
        - $dR2d \rightarrow dR2d$
        - $aR2b \rightarrow bR2a$
    - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que $xR2y$ e $yR2x$ implican que $x = y$
        - Contraejemplo: $(a, b) \in R2$ ^ $(b, a) \in R2 \rightarrow a = b$
            - $a = b \rightarrow absurdo$
    - Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que $xR2y$ e $yR2z$ implican que $xR2z$
        - $(a, b) \in R2$ ^ $(b, a) \in R2 \rightarrow (a, a) \in R2$
- R3 = {(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)}
    - No es reflexiva puesto que no se da que para todo $x \in A$ vale que $xR3x$
        - Contraejemplo: c $\in A$ pero $(c, c) \notin R3$
    - Si es simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que $xR3y$ implica $yR3x$.
        - $aR3a \rightarrow aR3a$
        - $bR3b \rightarrow bR3b$
        - $cR3c \rightarrow cR3c$
        - $dR3d \rightarrow dR3d$
        - $aR3b \rightarrow bR3a$
    - No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que $xR3y$ e $yR3x$ implican que $x = y$
        - Contraejemplo: $(a, b) \in R3$ ^ $(b, a) \in R3 \rightarrow a = b$
            - $a = b \rightarrow absurdo$
    - No es transitiva puesto que no se cumple que para todo x, y, z en A vale que $xR2y$ e $yR2z$ implican que $xR2z$
        - Contraejemplo: $(a, b) \in R2$ ^ $(b, c) \in R2 \rightarrow (a, c) \in R2$
            - $(a, c) \notin R3$
- R4 = A × A

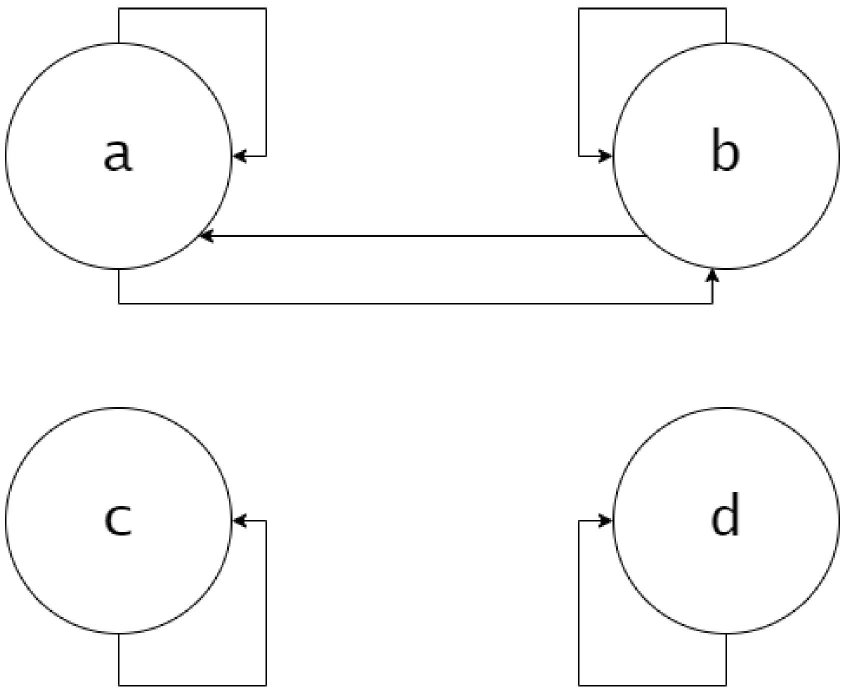
- *Cuando practique para el parcial lo hago...*

Ejercicio 7.

Escribir la matriz y los dígrafos asociados a las relaciones anteriores

Solo hago R2 para no perder tiempo

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



Ejercicio 8.

Sea A = {a, b, c, d}

a. Dar un ejemplo de una relación R no reflexiva en A

$$R = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$$

b. Dar un ejemplo de una relación R simétrica en A

$$R = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}$$

c. Dar un ejemplo de una relación R no transitiva en A

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$$

d. Dar un ejemplo de una relación R no simétrica en A

$$R = \{(a, b), (c, d)\}$$

e. Dar un ejemplo de una relación R antisimétrica en A

$$R = \{(a, a), (b, b)(a, b), (c, d)\}$$

Ejercicio 9.

Demostrar que si R es simétrica y transitiva y aRb para ciertos a y b, entonces aRa y bRb.

1. Como R es simétrica y vale aRb, entonces se cumple bRa.
2. Como R es transitiva y vale aRb y bRa ,entonces se cumple aRa.
3. Como R es transitiva y vale bRa y aRb, entonces se cumple bRb.

Ejercicio 10.

Sea A un conjunto arbitrario. Sea R = ΔA (diagonal de A) . Analizar qué propiedades tiene R.

- Si es reflexiva puesto que se da que para todo $x \in A$ vale que xRx.
- Si es simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy implica yRx.
    - Para los $a, b \in A$ tal que $a = b$, vale tanto aRb y bRa por lo tanto la implicación $aRb \rightarrow bRa$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
    - Para los $a, b \in A$ tal que $a \neq b$, no vale ni aRb ni bRa por lo tanto la implicación $aRb \rightarrow bRa$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
    - Para los $a, b \in A$ tal que $a = b$, vale tanto aRb y bRa por lo tanto la implicación aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
    - Para los $a, b \in A$ tal que $a \neq b$, no vale ni aRb ni bRa por lo tanto la implicación aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz
    - Para los $a, b, c \in A$ tal que $a = b = c$, vale tanto aRb, bRc y aRc por lo tanto la implicación aRb ^ $bRc \rightarrow aRc$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
    - Para los $a, b, c \in A$ tal que $a \neq b \neq c$, no vale ni aRb, ni bRc ni aRc por lo tanto la implicación aRb ^ $bRc \rightarrow aRc$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son falsos.

Ejercicio 11

Proponer una relación en el conjunto de los números naturales. Mostrar que propiedades tiene (reflexividad, simetría, etc...)

La divisibilidad es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Demostración en el apunte.

Ejercicio 12

Proponer una relación en el conjunto de los alumnos de Informática. Mostrar que propiedades tiene (reflexividad, simetría, etc...)

$$R = \{(x, y) : el\ alumno\ x\ tiene\ el\ mismo\ promedio\ que\ el\ alumno\ y\}$$

Es reflexiva, simétrica, y transitiva:

- Si es reflexiva puesto que para todo $x \in A$ vale que xRx
  - Todos los alumnos van a tener el mismo promedio que ellos mismos.
- Si es simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy implica yRx.
  - Sean a y b dos alumnos distintos, si ambos tienen el mismo promedio se cumple tanto aRb como bRa, por lo tanto $aRb \rightarrow bRa$ es verdadera.
- No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
  - Sean a y b dos alumnos distintos, si ambos tienen el mismo promedio se cumple tanto aRb como bRa, pero no se cumple aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$, ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso haciendo a la implicación falsa.
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz
  - Sean a, b y c tres alumnos distintos, si los tres tienen el mismo promedio se cumple tanto aRb como bRc como aRa, por lo tanto aRb ^ $bRc \rightarrow aRc$.

Ejercicio 13.

Dada una relación binaria R sobre un conjunto A, se define la relación complemento de R, $\overline{\mathrm{R}}$ por: $\overline{\mathrm{aRb}}$ si y sólo si a no está relacionada con b por R

- Dar un ejemplo de una relación R y su complemento.

$A = \aleph$

$R = \{(x, y): y\ es\ el\ cuadrado\ de\ x\}$

$\bar{R} = \{(x, y): y\ no\ es\ el\ cuadrado\ de\ x\}$

$A = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a, b), (c, d)\}$

$\bar{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, a), (d, c), (a, c), (c, a), (a, d),$
$(d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b)\}$

- Probar que si $R \subset S$ entonces $\bar{S} \subset \bar{R}$

1. $(x, y) \in \bar{S} \to (x, y) \notin S$ por definición de complemento.

2. $(x, y) \in \bar{R} \to (x, y) \notin R$ por definición de complemento.

3. $R \subset S \to si\ (x, y) \in R \to (x, y) \in S$ por definición subconjunto.

4. $(x, y) \notin S \to (x, y) \notin R$ por contrarrecíproca en 3.

5. $(x, y) \notin S \to (x, y) \in \bar{S}$ por definición de complemento

6. $(x, y) \notin R \to (x, y) \in \bar{R}$ por definición de complemento

7. $(x, y) \in \bar{S} \to (x, y) \in \bar{R}$ reemplazo 4. Con 5 y 6.

8. $(x, y) \in \bar{S} \to (x, y) \in \bar{R} \to \bar{S} \subset \bar{R}$ por definición subconjunto.

Ejercicio 14.

Dada R una relación binaria sobre A, probar que:

a. R es reflexiva si y sólo si R^{-1} también lo es

1. R es reflexiva → R^{-1}es reflexiva

   i. $(x, x) \in R \to xRx$
      a. Si R es reflexiva, para todo $x \in A$ vale xRx.
   ii. $xRx \to xR^{-1}x$
      a. Por definición de inverso.
   iii. $xR^{-1}x \to (x, x) \in R^{-1}$

   Como para todo $x \in A$ vale $xR^{-1}x$, R^{-1} es reflexiva.

2. R^{-1}es reflexiva → R es reflexiva

   i. $(x, x) \in R^{-1} \to xR^{-1}x$
      a. Si R^{-1} es reflexiva, para todo $x \in A$ vale $xR^{-1}x$.
   ii. $xR^{-1}x \to xRx$
      a. Por definición de inverso.
   iii. $xRx \to (x, x) \in R$

   Como para todo $x \in A$ vale xRx, R es reflexiva.

b. R es simétrica si y sólo si R^{-1} = R

1. R es simétrica → $R^{-1} = R$

   i. $(x, y) \in R \to xRy$
   ii. $xRy \to yRx$
      a. Si R es simétrica, para todo para todo x, y en A vale que xRy implica yRx
   iii. $yRx \to (y, x) \in R$
   iv. $yRx \to xR^{-1}y$
      a. Por definición de inverso.
   v. $xR^{-1}y \to (x, y) \in R^{-1}$
   vi. $R \subseteq R^{-1}$

   i. $(a, b) \in R^{-1} \to aR^{-1}b$

ii. $aR^{-1}b \to bRa$

a. Por inverso.

iii. $bRa \to aRb$

a. Si R es simétrica, para todo para todo a, b en A vale que bRa implica aRb

iv. $aRb \to (a, b) \in R$

v. $R^{-1} \subseteq R$

2. $R^{-1} = R \to R$ es simétrica

i. $(x, y) \in R \to (x, y) \in R^{-1}$

a. Por hipótesis $R^{-1} = R$

ii. $(x, y) \in R^{-1} \to (y, x) \in R$

a. Por inverso.

iii. $(x, y) \in R \to xRy$

iv. $(y, x) \in R \to yRx$

v. Se partio desde xRy y se llego a yRx por lo tanto se demostró que $xRy \to yRx$ entonces R es simétrica.

c. R es simétrica si y sólo si R^{-1} y $\overline{R}$ también lo son

d. R es antisimétrica si y sólo si R ∩ R−1 ⊂ ΔA

Ejercicio 15.

Se dice que una relación R sobre un conjunto A es asimétrica si cada vez que a está relacionado con b no se da que b esté relacionado con a

Dar un ejemplo de una relación asimétrica

$A = (a, b, c, d)$

$R = \{(a, b), (c, d)\}$

Ejercicio 16.

Probar que dada una relación R sobre un conjunto A, R es asimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$

1. R es asimétrica → $R \cap R^{-1} = \emptyset$
    i. $(x, y) \in R \to (y, x) \notin R$
        a. Se cumple para todo x, y en A por definición de asimétrica
    ii. $(x, y) \in R \to (y, x) \in R^{-1}$
        a. Por inverso.
    iii. Como para todo x, y en A $(y, x) \notin R$ ^ $(y, x) \in R^{-1} \to R \cap R^{-1} = \emptyset$
2. $R \cap R^{-1} = \emptyset$ → R es asimétrica
    i. $(y, x) \in R^{-1} \to (y, x) \notin R$
        a. Por $R \cap R^{-1} = \emptyset$
    ii. $(y, x) \in R^{-1} \to (x, y) \in R$
        a. Por inverso.
    iii. Como para todo x, y en A se da que $(x, y) \in R$ ^ $(y, x) \notin R$, R es asimétrica.

Ejercicio 17.

Sean R y S dos relaciones en A. Probar que:

a. Si $R \subset S$ entonces $R^{-1} \subset S^{-1}$.
b. Si R y S son reflexivas entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son.
c. Si R y S son simétricas entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son.

Ejercicio 18.

Establecer las propiedades de las siguientes relaciones en H el conjunto de los seres humanos:

a. Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x es hermano de y

- No es reflexiva puesto que no se cumple que para todo $x \in A$ vale que xRx
    - Una persona no puede ser hermano de sí mismo.
- Si es simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy implica yRx.
    - Sean a y b dos personas distintas, si son hermanos se cumple tanto aRb como bRa, por lo tanto $aRb \to bRa$ es verdadera.

- No es antisimétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
    - Sean a y b dos personas distintas, si son hermanos se cumple tanto aRb como bRa, pero no se cumple aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$, ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso haciendo a la implicación falsa.
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz
    - Sean a, b y c tres personas distintas, si son hermanos se cumple tanto aRb como bRc como aRa, por lo tanto aRb ^ $bRc \rightarrow aRc$.

b. Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x es hijo de y

- No es reflexiva puesto que no se cumple que para todo $x \in A$ vale que xRx
    - Una persona no puede ser hija de si misma.
- No simétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que xRy implica yRx.
    - Sean a y b dos personas distintas, si a es hijo de b se cumple aRb pero no se cumple bRa, puesto que una persona no puede ser hija de su hijo, por lo que no se cumple $aRb \rightarrow bRa$, ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, haciendo a la implicación falsa.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
    - Sean a y b dos personas distintas, si a es hijo de b se cumple aRb pero no se cumple bRa, puesto que una persona no puede ser hija de su hijo, esto hace que aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$ se cumpla trivialmente, ya que el antecedente es falso (aRb ^ bRa).
- No es transitiva puesto que no se cumple que para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz
    - Sean a, b y c tres personas distintas, si a es hijo de b se cumple aRb y si b es hijo de c se cumple bRc, pero no se cumple aRc (a seria nieto de c) por lo tanto no se cumple aRb ^ $bRc \rightarrow aRc$ ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, haciendo a la implicación falsa.

c. Se dice que una persona a es descendiente de una persona b si es hijo, nieto, bisnieto, etc..

R es la relación en H definida por xRy si y sólo si x es descendiente de y.

- No es reflexiva puesto que no se cumple que para todo $x \in A$ vale que xRx
  - Una persona no puede ser descendiente de sí misma (thats a mf paradoja del viaje del tiempo????????????????)
- No simétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que xRy implica yRx.
  - Sean a y b dos personas distintas, si a es descendiente de b se cumple aRb pero no se cumple bRa, puesto que una persona ser descendiente de su descendiente, por lo que no se cumple $aRb \rightarrow bRa$, ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, haciendo a la implicación falsa.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
  - Sean a y b dos números naturales tal que $a = b$, se cumple claramente tanto aRb como bRa esto hace que aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$ se cumpla trivialmente, ya que el antecedente es falso (aRb ^ bRa).
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz
  - Sean a, b y c tres personas distintas, si a es descendiente de b se cumple aRb y si b es descendiente de c se cumple bRc, por lo que se termina cumpliendo que a es descendiente de c (ejemplo a es hijo de b, b es hijo de c, a es nieto de c, a es descendiente de c) aRc por lo tanto se cumple aRb ^ $bRc \rightarrow aRc$.

Ejercicio 19.

Establecer las propiedades de las siguientes relaciones:

a. Sea N el conjunto de los números naturales.
   Sea ≤ la relación en N dada por x ≤ y si y sólo si x es menor o igual a y

- Si es reflexiva puesto que se cumple que para todo $x \in A$ vale que xRx
  - Todo numero es igual a sí mismo.
- No simétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que xRy implica yRx.

    - Contraejemplo: $(4,5) \in R \rightarrow (5,4) \in R$
        - Si se cumple que $4 \leq 5$ pero no se cumple $5 \leq 4$ haciendo que el antecedente sea verdadero pero el consecuente falso, por lo tanto la implicación es falsa.
- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
    - Sean $a, b \in N$ tal que $a = b$, vale tanto aRb y bRa por lo tanto la implicación aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
    - Sean $a, b \in N$ tal que $a \neq b$ y a es estrictamente menor que b, vale aRb pero no bRa por lo tanto la implicación aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$ se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
    - Sean $a, b \in N$ tal que $a \neq b$ y b es estrictamente menor que a, vale bRa pero no aRb por lo tanto la implicación aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$ se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz
    - Sean a, b y $c \in N$, si $a \leq b$ se cumple aRb y si $b \leq c$ se cumple bRc, haciendo que también se cumpla aRc (si $b \leq c$ y $a \leq b$, claramente $a \leq c$) por lo tanto se cumple aRb ^ $bRc \rightarrow aRc$.
    - Si no se cumple $a \leq b$ o $b \leq c$, aRb ^ $bRc \rightarrow aRc$ se sigue cumpliendo.

b. Sea N el conjunto de los números naturales.
   Sea | la relación en N dada por x|y si y sólo si x divide a y

- Si es reflexiva puesto que se cumple que para todo $x \in A$ vale que xRx
    - Todo número se divide a sí mismo.
        - Sean $a \in N$, se cumple $a|a$ ya que $\exists\ c \in N: a = c * a$ y ese $c = 1$.
- No es simétrica puesto que no se cumple que para todo x, y en A vale que xRy implica yRx.
    - Contraejemplo: $(4,8) \in R \rightarrow (8,4) \in R$
        - Si se cumple que $4|8$ ya que $\exists\ c \in N: 8 = c * 4$ y ese $c = 2$ pero no se cumple $8|4$ ya que $\nexists\ k \in N: 4 = k * 8$ haciendo que el antecedente sea verdadero pero el consecuente falso, por lo tanto la implicación es falsa.

- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy e yRx implican que $x = y$
  - Sean $a, b \in N$ tal que $a = b$, vale tanto aRb, ya que $a|b$ ya que $\exists\ c \in N: b = c * a$ y ese $c = 1$, como bRa (misma demostración) por lo tanto la implicación aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
  - Sean $a, b \in N$ tal que $a \neq b$ y $a|b$, vale aRb pero no bRa (observar contraejemplo de simetría) por lo tanto la implicación aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$ se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
  - Sean $a, b \in N$ tal que $a \neq b$ y $b|a$ vale bRa pero no aRb (observar contraejemplo de simetría) por lo tanto la implicación aRb ^ $bRa \rightarrow a = b$ se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz
  - Sean a, b y $c \in N$, si $a|b$ se cumple aRb y si $b|c$ se cumple bRc, haciendo que también se cumpla aRc por lo tanto se cumple aRb ^ $bRc \rightarrow aRc$.
    - Demostración:
      - Si $a|b\ \exists\ i \in N: b = i * a$
      - Si $b|c\ \exists\ k \in N: c = k * b$
      - $c = k * b = k * (i * a) = (k * i) * a = n * a$
        - $n = (k * i)$
      - Como $\exists\ n \in N: c = n * a,\ a|c$

c. Igual al anterior pero en el conjunto de los enteros.

- Es todo lo mismo que la anterior, salvo que no es antisimétrica:
  - Contraejemplo: $4R-4$ ^ $-4R4 \rightarrow 4 = -4$

Ejercicio 20.

Dado un conjunto de números reales A probar que la relación sobre A × A dada por (a,b)R(c,d) si y sólo si a ≤ c y b ≤ d es un orden. ¿Es total?

- Si es reflexiva puesto que se cumple que para todo $(a, b) \in A \times A$ vale que $(a, b)R(a, b)$
  - Todo número es igual a sí mismo (siempre se cumple $a \leq a$ y $b \leq b$)

- Si es antisimétrica puesto que se cumple que para todo $(a,b),(c,d)$ en $A \times A$ vale que $(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(a,b)$ implican que $(a,b) = (c,d)$
    - Sean $(a,b),(c,d) \in A \times A$ tal que $(a,b) = (c,d)$, vale tanto $(a,b)R(c,d)$ y $(c,d)R(a,b)$ por lo tanto la implicación $(a,b)R(c,d)$ ^ $(c,d)R(a,b) \rightarrow (a,b) = (c,d)$ se cumple ya que tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos.
    - Sean $(a,b),(c,d) \in A \times A$ tal que $(a,b) \neq (c,d)$, a es estrictamente menor que c y c es estrictamente menor que d, vale $(a,b)R(c,d)$ pero no $(c,d)R(a,b)$ por lo tanto la implicación $(a,b)R(c,d)$ ^ $(c,d)R(a,b) \rightarrow (a,b) = (c,d)$ se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
    - Sean $(a,b),(c,d) \in A \times A$ tal que $(a,b) \neq (c,d)$, b es estrictamente menor que a, d es estrictamente menor que c, vale $(c,d)R(a,b)$ pero no $(a,b)R(c,d)$ por lo tanto la implicación $(a,b)R(c,d)$ ^ $(c,d)R(a,b) \rightarrow (a,b) = (c,d)$ se cumple trivialmente (ya que el antecedente es falso).
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo $(a,b),(c,d),(e,f)$ en $A \times A$ vale que $(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,f)$ implican que $(a,b)R(e,f)$
    - Sean (a,b), (c,d) y $(e,f) \in A \times A$, si $a \leq c$ y $b \leq d$ se cumple $(a,b)R(c,d)$ y si $c \leq e$ y $d \leq f$ se cumple $(c,d)R(e,f)$, haciendo que también se cumpla $(a,b)R(e,f)$ (si $a \leq c$ y $b \leq d$ y $c \leq e$ y $d \leq f$, claramente $a \leq e$ y $b \leq f$) por lo tanto se cumple $(a,b)R(c,d)$ ^ $(c,d)R(e,f) \rightarrow (a,b)R(e,f)$.
    - Si no se cumple $a \leq c$ y $b \leq d$ o $c \leq e$ y $d \leq f$, $(a,b)R(c,d)$ ^ $(c,d)R(e,f) \rightarrow (a,b)R(e,f)$ se sigue cumpliendo.
- La relación de orden es total si para todo par (a,b) y (c,d) en $A \times A$ siempre se cumple que $(a,b)R(c,d)$ o $(c,d)R(a,b)$.
    - Contraejemplo: Sea $(a,b) = (1,2)$ y $(c,d) = (2,1)$:
        - No se cumple $a \leq c$ y $b \leq d \rightarrow 1 \leq 2$ y $2 \leq 1$
        - No se cumple $c \leq a$ y $d \leq b \rightarrow 2 \leq 1$ y $1 \leq 2$

Ejercicio 21.

Analizar qué tipo de orden es el usual en el conjunto de los números reales. ¿qué pasa con los números complejos?¿están ordenados?

Los números reales están ordenados por su orden usual $\leq$. Este orden $\leq$ en $\mathbb{R}$ es total. Los números complejos no tienen un orden natural como los reales. Una manera de intentar ordenarlos es tratarlos como pares de números reales (la parte real y la parte imaginaria) y aplicar un producto de relaciones para definir un posible orden:

a. Orden producto:
   Si se piensa en $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se puede definir una relación de orden producto usando el orden usual $\leq$ en $\mathbb{R}$. Así, para dos números complejos $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$ (donde $a, c \in \mathbb{R}$ son las partes reales y $b, d \in \mathbb{R}$ son las partes imaginarias), se diría que:
   $$(a, b) \leq (c, d) \text{ } si \text{ } y \text{ } solo \text{ } si \text{ } a \leq c \text{ } y \text{ } b \leq d$$
   Este es un orden parcial ya que no todos los pares de números complejos serian comparables (por ejemplo si $a < c$ y $b > d$, (a, b) y (c, d) no son comparables.

b. Orden lexicográfico:
   Se podría aplicar la relación de orden lexicográfico en $\mathbb{C}$, considerando $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$. Se diría que:
   $$(a, b)L(c, d) \text{ } si \text{ } y \text{ } solo \text{ } si \text{ } a < c \text{ } o \text{ } (a = c \text{ } y \text{ } b \leq d)$$
   Este es un orden total, ya que se pueden comparar cualquier par de números complejos. Primero se comparan las partes reales y si son iguales, se comparan las imaginarias.

Ejercicio 22.

Probar que el orden lexicográfico es un orden total

Ejercicio 23.

Sea S = {a, b, c} y sea A = P(S) el conjunto de partes de S. Mostrar que A está parcialmente ordenado por el orden ⊂ (inclusión de conjuntos). Hallar el diagrama de Hasse.

- $P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- No es reflexiva puesto que no se cumple que para todo $X \in A$ vale que XRX
    - Contraejemplo: $\{a\} \subset \{a\}$ no se cumple.

- Como no es reflexiva, A no está parcialmente ordenado por el orden ⊂.

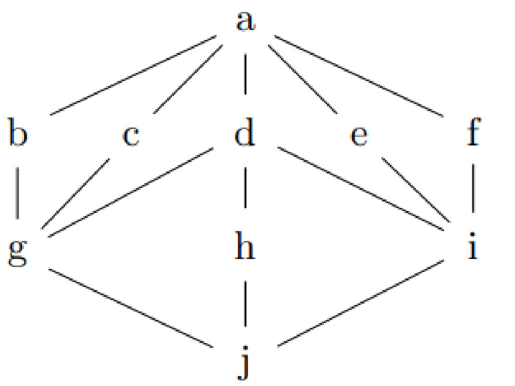
Ejercicio 24.

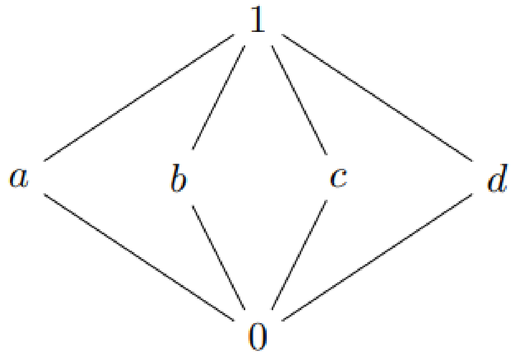
Sea D12 = {1,2,3,4,6,12} (el conjunto de los divisores de 12). Hallar el diagrama de

Hasse de D12 con la relación ”divide”.

Ejercicio 25.

Describa las parejas ordenadas por las relaciones de cada uno de los siguientes diagramas de Hasse. Determinar, si existen, los elementos máximo, mínimo y cotas inferiores y superiores





Primer diagrama:

- $j \leq g, j \leq h, j \leq i, g \leq b, g \leq c, g \leq d, h \leq d, i \leq d, i \leq e, i \leq f, b \leq a, c \leq a, d \leq a, e \leq a, f \leq a.$
- Elemento máximo a, elemento mínimo j.
- Cota superior del subconjunto {g,c} es a
- Cota inferior del subconjunto {g,c} es j

Segundo diagrama:

- $0 \leq a, 0 \leq b, 0 \leq c, 0 \leq d, a \leq 1, b \leq 1, c \leq 1, d \leq 1.$
- Elemento máximo 1, elemento mínimo 0.
- Cota superior del subconjunto {a} es 1
- Cota inferior del subconjunto {a} es 0

Ejercicio 26.

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A. Sean a,b ∈ A, entonces [a] = [b] si y sólo si aRb

Creo que es esta pregunta, no se la verdad...

Lema 2.19. *Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces para todos par a, b de elementos de A vale que $\bar{a} = \bar{b}$ si y sólo si aRb*

Supongamos que $\bar{a} = \bar{b}$,como R es reflexiva aRa entonces $a \in \bar{a} = \bar{b}$, luego $a \in \bar{b}$ y aRb
Ahora suponemos que aRb y probaremos que las clases son iguales:
Sea $z \in\in \bar{a}$, entonces zRa pero como R es de equivalencia, por transitividad y la hipótesis general aRb tenemos que zRb, luego $\bar{a} \subset \bar{b}$. De la misma manera podemos ver que vale la otra inclusión y por lo tanto, $\bar{a} = \bar{b}$.

Ejercicio 27.

Determinar si cada una de las siguientes colecciones de conjuntos es una partición para el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

- {{4, 5, 6}; {1, 8}; {2, 3, 7}}:
  - Si es una partición ya que:
    - Ninguna de las partes de la partición es vacío.
    - Las partes no tienen elementos en común.
    - La unión de todas las partes da el conjunto A.
- {{4, 5}; {1, 3, 4}; {6, 8}; {2, 7}}
  - No es una partición ya que las partes {4, 5} y {1, 3, 4} tienen un elemento en común.
- {{1, 3, 4}; {2, 6}; {5, 8}}
  - No es una partición ya que la unión de las partes no da el conjunto A, puesto que falta el elemento 7.

Ejercicio 28.

Considerando el conjunto A de los alumnos que cursan Mate 4, indicar cuáles de las siguientes son particiones de A.

a. P = {{alumnos que aprobaron CADP}; {alumnos que aprobaron OC};{alumnos que no aprobaron ISO ni Redes}}

No es una partición de A porque las partes {alumnos que aprobaron CADP} y {alumnos que no aprobaron ISO ni Redes} tienen alumnos en común.

b. P = {{alumnos que están cursando Programación Distribuida }; {alumnos que cursan Sistemas y Organización}; {alumnos que están cursando Lógica e Inteligencia Artificial}}
   No es una partición de A porque las partes {alumnos que están cursando Programación Distribuida } y {alumnos que están cursando Lógica e Inteligencia Artificial} (yo).

Ejercicio 29.

Sean A = {1, 2, 3, 4} y R = {(1, 1),(1, 2),(2, 1),(2, 2),(3, 3),(3, 4),(4, 3),(4, 4)}.

Mostrar que R es una relación de equivalencia y hallar las clases de equivalencia.

¿Cuál es la partición que induce R sobre A?

R es una relación de equivalencia si es:

- Si es reflexiva puesto que se cumple que para todo $x \in A$ vale que xRx.
  - $(1,1) \in R$.
  - $(2,2) \in R$.
  - $(3,3) \in R$.
  - $(4,4) \in R$.
- Si simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy implica yRx. Todas las siguientes implicaciones se cumplen:
  - $(1, 2) \in R \rightarrow (2,1) \in R$
  - $(3, 4) \in R \rightarrow (4,3) \in R$
  - Y también para $(1,1) \in R \rightarrow (1,1) \in R$ y así… para todas los elementos que son emparejados consigo mismo.
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz. Todas las siguientes implicaciones se cumplen:
  - $(1, 2) \in R$ ^ $(2,1) \in R \rightarrow (1,1) \in R$
  - $(2, 1) \in R$ ^ $(1,2) \in R \rightarrow (2,2) \in R$

- $(1,1) \in R$ ^ $(1,2) \in R \rightarrow (1,2) \in R$
  - $(2,1) \in R$ ^ $(1,1) \in R \rightarrow (2,1) \in R$
  - $(2,2) \in R$ ^ $(2,1) \in R \rightarrow (2,1) \in R$
  - Y siguiendo…

Clases de equivalencia:

$\bar{1} = \{1,2\}$

$\bar{3} = \{3,4\}$

La partición que induce R sobre A es $P = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$

- Se verifica que es una partición ya que:
  - Ninguna parte de P es vacio.
  - Ninguna parte de P tiene elementos en común con otra.
  - La unión de todas las partes da el conjunto A.

Ejercicio 30.

Dados el conjunto A = {a, b, c, d, e} y una partición P = {{a, c}; {b}; {d, e}} . Escribir por extensión la relación de equivalencia sobre A inducida por P.

$R = \{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c),(b,b),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)\}$

Ejercicio 31.

Sean A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y R = {(1, 1),(1, 2),(2, 1),(2, 2),(3, 3),(4, 4),(4, 5),(5, 4),(5, 5),(6, 6)}.

Mostrar que R es una relación de equivalencia y determinar las clases de equivalencia.

¿Qué partición de A induce R?

- Si es reflexiva puesto que se cumple que para todo $x \in A$ vale que xRx.

- Si simétrica puesto que se cumple que para todo x, y en A vale que xRy implica yRx.
- Si es transitiva puesto que se cumple que para todo x, y, z en A vale que xRy e yRz implican que xRz.

Clases de equivalencia:

$\bar{1} = \{1,2\}$

$\bar{3} = \{3\}$

$\bar{4} = \{4,5\}$

$\bar{6} = \{6\}$

La partición que induce R sobre A es $P = \{\{1,2\}, \{3\}. \{4,5\}, \{6\}\}$

- Se verifica que es una partición ya que:
  - Ninguna parte de P es vacio.
  - Ninguna parte de P tiene elementos en común con otra.
  - La unión de todas las partes da el conjunto A.

Ejercicio 31.

Sea ~ una relación definida en Z × (Z0) dada por: (a, b) ~ (c, d) si y sólo si ad = bc Probar que es de equivalencia. Hallar la clase de equivalencia del elemento (1, 4) . Mostrar que puede identificarse cada clase de equivalencia con un número racional (Esta es la forma de construir al conjunto de los racionales como conjunto cociente).

Ejercicio 32.

Hallar las clases de equivalencia módulo 3 y 5 de los números 387, 25 y 649.

Para el modulo 3 existen3 clases de equivalencia, $\bar{0}, \bar{1}$ y $\bar{2}$, que son los posibles restos en la división por 3.

$387 = 129 * 3 + 0$

$25 = 8 * 3 + 1$

$649 = 216 * 3 + 1$

$387 \in \overline{0}$

$25 \in \overline{1}$

$649 \in \overline{1}$

Para el modulo 5 existen 5 clases de equivalencia, $\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}$ y $\overline{4}$ que son los posibles restos en la división por 5.

$387 = 77 * 5 + 2$

$25 = 5 * 5 + 0$

$649 = 216 * 5 + 4$

$387 \in \overline{2}$

$25 \in \overline{0}$

$649 \in \overline{4}$

Ejercicio 34.

Hallar las respectivas clases de 13, 6, 11 y -49 módulo 4

$13 = 3 * 4 + 1$

$6 = 1 * 4 + 2$

$11 = 2 * 4 + 3$

$-49 = -12 * 4 - 1$

Como el resto no puede ser negativo vamos a sumar y restar por 4:

$-49 = -12 * 4 - 1 + (4 - 4)$

$-49 = -12 * 4 + 3 - 4$

$-49 = (-12 * 4 - 4) + 3$

$-49 = 4 * (-12 - 1) + 3$

$-49 = 4 * (-13) + 3$

$13 \in \overline{1}$

$6 \in \overline{2}$

$11 \in \overline{3}$

$-49 \in \overline{3}$

Ejercicio 35.

Averiguar si son congruentes módulo 3 entre sí los siguientes pares de números: (2, 1024), (101, 512), (1501, 1348).

Teniendo en cuenta que dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos en su división por m son iguales.

- (2, 1024)
    - $2 = 0 * 3 + 2$
    - $1024 = 341 * 3 + 1$
    - Como no tienen el mismo resto no se cumple $2 \equiv_3 1024$
- (101, 512)

- $101 = 33 * 3 + 2$
- $512 = 170 * 3 + 2$
- Como tienen el mismo resto se cumple $101 \equiv_3 512$

- (1501, 1348)
  - $1501 = 500 * 3 + 1$
  - $1348 = 449 * 3 + 1$
  - Como tienen el mismo resto se cumple $1501 \equiv_3 1348$

Ejercicio 36.

Analizar para qué valores de m se hacen verdaderas las siguientes congruencias: 5 $\equiv_m$ 4, 1 $\equiv_m$0, 1197 $\equiv_m$ 286, 3 $\equiv_m$ −3

- 5 $\equiv_m$ 4,
  - 5 $\equiv_m$ 4 si y solo si $m|5 - 4$, es decir, $\exists\ k \in Z: 5 - 4 = k * m$
  - $5 - 4 = k * m \rightarrow 1 = k * m$
  - Los únicos valores que hacen verdadero a $1 = k * m$ son:
    - $m = 1$ y $k = 1$
    - $m = -1$ y $k = -1$
  - Por lo tanto los valores de m que hacen verdadera la congruencia son ± 1
- 1 $\equiv_m$0,
  - 1 $\equiv_m$ 0 si y solo si $m|1 - 0$, es decir, $\exists\ k \in Z: 1 - 0 = k * m$
  - $1 - 0 = k * m \rightarrow 1 = k * m$
  - Los únicos valores que hacen verdadero a $1 = k * m$ son:
    - $m = 1$ y $k = 1$
    - $m = -1$ y $k = -1$
  - Por lo tanto los valores de m que hacen verdadera la congruencia son ± 1
- 1197 $\equiv_m$ 286,
  - 1197 $\equiv_m$ 286 si y solo si $m|1197 - 286$, es decir, $\exists\ k \in Z: 1197 - 286 = k * m$
  - $1197 - 286 = k * m \rightarrow 911 = k * m$
  - Como 911 es primo los únicos valores que hacen verdadero a $911 = k * m$ son:
    - $m = 911$ y $k = 1$
    - $m = 1$y $k = 911$

        - $m = -911$ y $k = -1$
        - $m = -1$ y $k = -911$
    - Por lo tanto los valores de m que hacen verdadera la congruencia son ± 911 y ± 1
- $3 \equiv_m -3$,
    - $3 \equiv_m -3$ si y solo si $m|3 + 3$, es decir, $\exists\ k \in Z: 3 + 3 = k * m$
    - $3 + 3 = k * m \to 6 = k * m$
    - Como $6 = 1 * 2 * 3$ los únicos valores que hacen verdadero a $6 = k * m$ son:
        - $m = 2$ y $k = 3$
        - $m = 3$ y $k = 2$
        - $m = -2$ y $k = -3$
        - $m = -3$ y $k = -2$
        - $m = 6$ y $k = 1$
        - $m = 1$ y $k = 6$
        - $m = -6$ y $k = -1$
        - $m = -1$ y $k = -6$
    - Por lo tanto los valores de m que hacen verdadera la congruencia son ± 2, ± 3 y ± 6

Ejercicio 37.

Probar que la relación de congruencia módulo m es una relación de equivalencia

Ejercicio 38.

Probar todo número es congruente, módulo n, con el resto de su división por n

Ejercicio 39.

Probar que dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos de su división por m son iguales.

Ejercicio 40.

Probar las siguientes propiedades para todo a, b, c ∈ Z :

a. a ≡n a

Como la relación de congruencia es una relación de equivalencia, se cumple $a \equiv_n a$.

- $\equiv_n$ es reflexiva ya que para a entero vale $que\ n|a - a$ ya que $a - a = 0 * n$

b. a ≡n b ⇒ b ≡n a

Como la relación de congruencia es una relación de equivalencia, se cumple $a \equiv_n b \rightarrow b \equiv_n a$.

- $\equiv_n$ es simétrica ya que suponiendo que $a \equiv_n b$, $n|a - b$, es decir, $\exists\ un\ k \in Z : a - b = k * n$.
  Como $b - a = -(a - b) = -(k * n) = -k * n$. Luego $\exists\ un - k \in Z : b - a = -k * n$, por lo tanto $n|b - a$, es decir $b \equiv_n a$

c. a ≡n b y b ≡n c ⇒ a ≡n c

Como la relación de congruencia es una relación de equivalencia, se cumple $a \equiv_n b \wedge b \equiv_n c \rightarrow a \equiv_n c$.

- $\equiv_n$ es transitiva ya que suponiendo que $a \equiv_n b$, $n|a - b$, es decir, $\exists\ un\ k \in Z : a - b = k * n$ y suponiendo que $b \equiv_n c, n|b - c, \exists\ un\ d \in Z : b - c = d * n$.
  Como $a - c = a + (-b + b) - c = a - b + b - c = k * n + d * n = n * (k + d) = n * i$ con $i = (k + d) \in Z$. Como $\exists\ un\ i \in Z : a - c = i * n, n|a - c$, es decir $a \equiv_n c$

d. a ≡n b ⇔ a + c ≡n b + c

- $a \equiv_n b \rightarrow a + c \equiv_n b + c$

  i. Suponiendo que $a \equiv_n b$, entonces $n|a - b$, por lo tanto, $\exists\ un\ k \in Z : a - b = k * n$.

ii. $a + c \equiv_n b + c$ se puede escribir como $n|(a + c) - (b + c)$, esto se puede escribir como $n|a + c - b - c$, que se puede escribir como $n|a - b$

iii. Como $n|(a + c) - (b + c) = n|a - b$ y se sabe por hipótesis que como $n|a - b$ se cumple que $\exists\ un\ k \in Z : a - b = k * n$ entonces $\exists\ un\ k \in Z : (a + c) - (b + c) = k * n$

- $a + c \equiv_n b + c \rightarrow a \equiv_n b$

  i. Suponiendo que $a + c \equiv_n b + c$, entonces $n|(a + c) - (b + c)$, por lo tanto, $\exists\ un\ i \in Z : (a + c) - (b + c) = i * n.$

  ii. $a + c \equiv_n b + c$ se puede escribir como $n|(a + c) - (b + c)$, esto se puede escribir como $n|a + c - b - c$, que se puede escribir como $n|a - b$

  iii. Como $n|a - b = n|(a + c) - (b + c)$ y se sabe por hipótesis que como $n|(a + c) - (b + c)$ se cumple que $\exists\ un\ i \in Z : (a + c) - (b + c) = i * n$ entonces $\exists\ un\ i \in Z : a - b = k * n$

e. a ≡n b ⇒ ac ≡n bc

- Suponiendo que $a \equiv_n b$, entonces $n|a - b$, por lo tanto, $\exists\ un\ k \in Z : a - b = k * n.$
- $ac \equiv_n bc$ se puede escribir como $n|ac - bc.$
- $ac - bc = c * (a - b) = c * (k * n) = (c * k) * n = d * n.$ Con $d = (c * k) \in Z.$
- Como $\exists\ d \in Z : ac - bc = d * n$, se cumple que $n|ac - bc$, entonces se cumple $ac \equiv_n bc.$

f. a ≡n b ⇒ (a, n) = (b, n)

- Suponiendo que $a \equiv_n b$, entonces $n|a - b$, por lo tanto, $\exists\ un\ k \in Z : a - b = k * n.$
- Si en $a - b = k * n$ sumamos a b en ambos lados nos queda $a = k * n + b$
- $(a, n) = am + nt\ con m, t \in Z$ haciendo uso de la Identidad de Bézout.

- Reemplazando a por $k * n + b$ queda $(a, n) = (k * n + b) * m + nt = mkn + bm + nt = mkn + nt + bm = n(mk + t) + bm = nd + bm = (b, n)$. Con $d = (mk + t) \in Z$ y $m \in Z$. Entonces nos queda $(a, n) = (b, n)$.

g. a ≡n 0 ⇔ n|a

- $a \equiv_n 0 \rightarrow n|a$

  i. Suponiendo que $a \equiv_n 0$, por definición de congruencia módulo esto significa que $n|a - 0$.

  ii. Como $a - 0 = a$, esto implica que $n|a - 0 = n|a$.

- $n|a \rightarrow a \equiv_n 0$

  i. Suponiendo que se cumple que $n|a$.

  ii. Como $a = a - 0$ $n|a = n|a - 0$. Esto ultimo se puede escribir como $a \equiv_n 0$.