TP6 – Espacios Vectoriales – Transformaciones Lineales

Agustina Sol Rojas

Ejercicio 1.

Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio:

a) R^3

- $(R^3, +, \cdot)$
  - "+" es cerrado en R^3:
    - Se cumple que $\forall a, b \in R^3, a + b \in R^3$.
      - Esto se cumple debido a que la suma es una operación cerrada en R.
        - $a_i + b_i = c_i \in R$.
          - Por lo tanto $(c_1, c_2, c_3) \in R^3$.
  - "·" es cerrado en R^3:
    - Se cumple $\forall a \in R^3 \ y \ \forall k \in R, k \cdot a \in R^3$.
      - Esto se cumple debido a que el producto es una operación cerrada en R.
        - $k \cdot a_i = b_i \in R$.
          - Por lo tanto $(b_1, b_2, b_3) \in R^3$.
  - "+" es conmutativa en R^3:
    - Se cumple $\forall a, b \in R^3, a + b = b + a$.
      - Esto se cumple debido a que la suma es una operación conmutativa en R.
  - "+" es asociativa en R^3:
    - Se cumple $\forall a, b, c \in R^3, (a + b) + c = a + (b + c)$.
      - Esto se cumple debido a que la suma es una operación asociativa en R.

- Existencia del elemento neutro para "+" en R^3:
  - Se cumple que $\exists e \in R^3 : a + e = e + a = a, \forall a \in R^3$ y ese $e = (0,0,0)$.
    - Esto se cumple debido a que el 0 es el neutro de la suma en R.
- Existencia del opuesto en R^3:
  - Se cumple que $\forall a \in R^3, \exists a' \in R^3 : a + a' = a' + a = e$ y ese $a' = -a$.
    - Esto se cumple debido a que el $a + (-a) = -a + a = 0$ para cualquier $a \in R$.
- "$\cdot$" es asociativa en R^3:
  - Se cumple que $\forall \alpha, \beta \in R\ y\ \forall a \in V, (\alpha\beta) \cdot a = \alpha(\beta \cdot a)$.
    - $a = (a_1, a_2, a_3)$
    - $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \big((\alpha \cdot \beta) \cdot a_1, (\alpha \cdot \beta) \cdot a_2, (\alpha \cdot \beta) \cdot a_3\big) = \big(\alpha \cdot (\beta \cdot a_1), \alpha \cdot (\beta \cdot a_2), \alpha \cdot (\beta \cdot a_3)\big) = \alpha \cdot (\beta \cdot a_1, \beta \cdot a_2, \beta \cdot a_3) = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$
    - Esto se cumple debido a que el producto es una operación asociativa en R.
- "$\cdot$" es distributiva respecto a la suma de escalares:
  - Se cumple que $\forall \alpha, \beta \in R\ y\ \forall a \in R^3, (\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$.
    - $a = (a_1, a_2, a_3)$
    - $(\alpha + \beta) \cdot a = \big((\alpha + \beta) \cdot a_1, (\alpha + \beta) \cdot a_2, (\alpha + \beta) \cdot a_3\big) = (\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot a_1, \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot a_2, \alpha \cdot a_3 + \beta \cdot a_3) = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$
    - Esto se cumple debido a que el producto es una operación distributiva respecto a la suma en R.
- "$\cdot$" es distributiva respecto a la suma de vectores:
  - Se cumple que $\forall \alpha \in R\ y\ \forall a, b \in R^3, \alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$.
    - $a = (a_1, a_2, a_3)$
    - $b = (b_1, b_2, b_3)$
    - $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot \big((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)\big) = \alpha \cdot (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = \big(\alpha \cdot (a_1 + b_1), \alpha \cdot (a_2 + b_2), \alpha \cdot (a_3 + b_3)\big) = (\alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot b_1, \alpha \cdot a_2 + \alpha \cdot b_2, \alpha \cdot a_3 + \alpha \cdot b_3) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3) + (\alpha \cdot b_1, \alpha \cdot b_2, \alpha \cdot b_3) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$
    - Esto se cumple debido a que el producto es una operación distributiva respecto a la suma en R.
- Existencia del elemento neutro para "$\cdot$" en R^3:
  - Se cumple que $\forall a \in R^3, \exists e \in R : e \cdot a = a \cdot e = a$ y ese $e = 1$.

- Esto se cumple debido a que el 1 es el neutro del producto en R.

b) Las matrices reales de $2x2$

c) Los polinomios de grado menor o igual a 3 (P_3). ¿El conjunto de los polinomios de grado 3, también es un espacio vectorial?

Ejercicio 2.

Sea V un Espacio Vectorial, demostrar que si $\alpha. v = 0_V$ entonces $\alpha = 0$ o $v = 0_V$ (o ambos son nulos).

- $\alpha. v = 0_V$
    - Sea $\alpha = 0$.
        - Como para todo $v \in V$, se cumple $0. v = 0_V$ se cumple que $a. v = 0_V$ ya que si $\alpha = 0$, entonces $\alpha. v = 0. v = 0_V$
    - Sea $v = 0_V$
        - Como para todo escalar α vale que $\alpha. 0_V = 0_V$ se cumple que $a. v = 0_V$, ya que si $v = 0_V$, entonces $\alpha. v = \alpha. 0_V = 0_V$

Ejercicio 3.

Decidir si los siguientes conjuntos son subespacios (justificar):

a) $S = \{(x, 0) : x \in R\}$

- $S \subset R^2$
    1. $S \neq \emptyset$
        i. Como $0 \in R$, se da que $(0,0) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.
    2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$
        i. $s_1 = (x_1, 0)$ con $x_1 \in R$
        ii. $s_2 = (x_2, 0)$ con $x_2 \in R$
        iii. $s_1 + s_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_3, 0)$ con $x_3 \in R$ ya que la suma es cerrada en R
        iv. Por lo tanto $s_1 + s_2 \in S$.
    3. $Dado\ k \in K\ y\ \forall s \in S \rightarrow k. s \in S$

i. $s = (x, 0)$ con $x \in R$.

ii. $k.s = (k.x, k.0) = (k.x, 0) = (y, 0)$ con $y \in R$ ya que el producto es cerrado en R.

iii. Por lo tanto $k.s \in S$.

b) $S = \{(1, y) : y \in R\}$

- $S \subset R^2$

1. $S \neq \emptyset$

   i. Como $0 \in R$, se da que $(1,0) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.

2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$

   i. $s_1 = (1,1)$ con $1 \in R$

   ii. $s_2 = (1,0)$ con $0 \in R$

   iii. $s_1 + s_2 = (1,1) + (1,0) = (2,1)$ como $2 \neq 1$, $s_1 + s_2 \notin S$

   iv. Por lo tanto no se cumple $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$

- No contiene a 0_V

c) $S = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 0\}$

- $S \subset R^2$

1. $S \neq \emptyset$

   i. Como $(0,0) \in R^2$ y $0 + 0 = 0$ se da que $(0,0) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.

2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$

   i. $s_1 = (x_1, y_1)$ con $x_1 + y_1 = 0$ y $(x_1, y_1) \in R^2$

   ii. $s_2 = (x_2, y_2)$ con $x_2 + y_2 = 0$ y $(x_2, y_2) \in R^2$

   iii. $s_1 + s_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

      a. $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$

   iv. Por lo tanto $s_1 + s_2 \in S$.

3. $Dado\ k \in K\ y\ \forall s \in S \rightarrow k.s \in S$

   i. $s = (x, y)$ con $x + y = 0$ y $(x, y) \in R^2$

   ii. $k.s = k.(x, y) = (k.x, k.y)$

      a. $k.x + k.y = k(x + y) = k.0 = 0$

   iii. Por lo tanto $k.s \in S$.

d) $S = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 1\}$

- $S \subset R^2$

1. $S \neq \emptyset$

   i. Como $(1,0) \in R^2$ y $1 + 0 = 1$ se da que $(1,0) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.

2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$
   i. $s_1 = (x_1, y_1)$ con $x_1 + y_1 = 1$ y $(x_1, y_1) \in R^2$
   ii. $s_2 = (x_2, y_2)$ con $x_2 + y_2 = 1$ y $(x_2, y_2) \in R^2$
   iii. $s_1 + s_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
      a. $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 1 + 1 = 2$
   iv. Por lo tanto no se cumple $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$

- No contiene a 0_V

e) $S = \{(x, y, z) \in R^3 : z = x - y\}$

- $S \subset R^3$

1. $S \neq \emptyset$
   i. Como $(3,2,1) \in R^3$ y $3 - 2 = 1$ se da que $(3,2,1) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.
2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$
   i. $s_1 = (x_1, y_1, z_1)$ con $x_1 - y_1 = z_1$ y $(x_1, y_1, z_3) \in R^3$
   ii. $s_2 = (x_2, y_2, z_2)$ con $x_2 - y_2 = z_2$ y $(x_2, y_2, z_2) \in R^3$
   iii. $s_1 + s_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
      a. $z_1 + z_2 = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$
   iv. Por lo tanto $s_1 + s_2 \in S$.
3. $Dado\ k \in K\ y\ \forall s \in S \rightarrow k.s \in S$
   i. $s = (x, y, z)$ con $z = x - y$ y $(x, y, z) \in R^3$
   ii. $k.s = k.(x, y, z) = (k.x, k.y, k.z)$
      a. $k.z = k.(x - y) = k.x - k.y$
   iii. Por lo tanto $k.s \in S$.

f) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x + y + w = 1\}$

- $S \subset R^4$

1. $S \neq \emptyset$
   i. Como $(0,0,3,1) \in R^4$ y $0 + 0 + 1 = 1$ se da que $(0,0,3,1) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.
2. $\forall s_1, s_2 \in S \rightarrow s_1 + s_2 \in S$
   i. $s_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ con $x_1 + y_1 + w_1 = 1$ y $(x_1, y_1, z_1, w_1) \in R^4$
   ii. $s_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ con $x_2 + y_2 + w_2 = 1$ y $(x_2, y_2, z_2, w_2) \in R^4$
   iii. $s_1 + s_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$
      a. $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (w_1 + w_2) = (x_1 + y_1 + w_1) + (x_2 + y_2 + w_2) = 1 + 1 = 2$

iv. Por lo tanto no se cumple $\forall s_1, s_2 \in S \to s_1 + s_2 \in S$

- No contiene a 0_V

g) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x + y - w = 0, z + 3y = 0\}$

- $S \subset R^4$

1. $S \neq \emptyset$
   i. Como $(0,0,0,0) \in R^4$ y $0 + 0 - 0$ y $0 + 3.0 = 0$ se da que $(0,0,0,0) \in S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.
2. $\forall s_1, s_2 \in S \to s_1 + s_2 \in S$
   i. $s_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ con $x_1 + y_1 - w_1 = 0, z_1 + 3y_1 = 0$ y $(x_1, y_1, z_1, w_1) \in R^4$
   ii. $s_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ con $x_2 + y_2 - w_2 = 0, z_2 + 3y_2 = 0$ y $(x_2, y_2, z_2, w_2) \in R^4$
   iii. $s_1 + s_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$
      a. $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (w_1 + w_2) = (x_1 + y_1 - w_1) + (x_2 + y_2 - w_2) = 0 + 0 = 0$
      b. $(z_1 + z_2) + 3(y_1 + y_2) = (z_1 + 3y_1) + (z_2 + 3y_2) = 0 + 0 = 0$
   iv. Por lo tanto $s_1 + s_2 \in S$.
3. $Dado\ k \in K\ y\ \forall s \in S \to k.s \in S$
   i. $s = (x, y, z, w)$ con $x + y - w = 0, z + 3y = 0$ y $(x, y, z, w) \in R^4$
   ii. $k.s = k.(x, y, z, w) = (k.x, k.y, k.z, k.w)$
      a. $k.x + k.y - k.w = k(x + y - w) = k.0 = 0$
      b. $k.z + 3k.y = k(z + 3y) = k.0 = 0$
   iii. Por lo tanto $k.s \in S$.

h) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in R\right\}$

- $S \subset R^{4X4}$

1. $S \neq \emptyset$
   i. Como $3,2,1 \in R$ se da que $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} S$, por lo tanto $S \neq \emptyset$.
2. $\forall s_1, s_2 \in S \to s_1 + s_2 \in S$
   i. $s_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix}$ con $a_1, b_1, c_1 \in R$
   ii. $s_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$ con $a_2, b_2, c_2 \in R$

iii. $s_1 + s_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in S$ ya que la suma es cerrada en R.

iv. Por lo tanto $s_1 + s_2 \in S$.

3. $Dado\ k \in K\ y\ \forall s \in S \rightarrow k.s \in S$
   i. $s = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in R$
   v. $k.s = k.\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a & k.b \\ k.a & k.c \end{pmatrix} \in S$ ya que el producto es cerrado en R.

Ejercicio 4.

Decidir si los siguientes subconjuntos son generadores de R^3:

a) $S = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3)\}$

- Cualquier $v \in R^3$ puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de S.
  1. $v = (x, y, z) = x.(1,0,0) + y.(0,1,0) + z.(0,0,1)$

b) $S = \{(1, 0, 1); (1, 1, 1); (0, 0, 1)\}$

- Se debe determinar si es posible encontrar escalares $\alpha, \beta, \gamma \in R$ tales que $v = \alpha.(1,0,1) + \beta.(1,1,1) + \gamma.(0,0,1)$ para cualquier $v \in R^3$
  - $v = (x, y, z) = \alpha.(1,0,1) + \beta.(1,1,1) + \gamma.(0,0,1) = (\alpha, 0, \alpha) + (\beta, \beta, \beta) + (0,0,\gamma) = (\alpha + \beta, \beta, \alpha + \beta + \gamma)$
  - Esto nos deja:
    - $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$
  - Teniendo en cuenta que $y = \beta$ y reemplazando en la igualdades de x y z nos queda:
    - $x - y = \alpha$
    - $z = \alpha + y + \gamma$
  - Reemplazando α en z nos queda:
    - $z = (x - y) + y + \gamma$

- $z - x = \gamma$

- Por lo tanto:
  - $\begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y \\ \gamma = z - x \end{cases}$
- Como existen escalares $\alpha, \beta, \gamma \in R$ tales que $v = \alpha.(1,0,1) + \beta.(1,1,1) + \gamma.(0,0,1)$ para cualquier $v \in R^3$, S es generador de R^3.

c) $S = \{(1,0,1); (0,1,0)\}$

- Se debe determinar si es posible encontrar escalares $\alpha, \beta \in R$ tales que $v = \alpha.(1,0,1) + \beta.(0,1,0)$ para cualquier $v \in R^3$
  - $v = (x, y, z) = \alpha.(1,0,1) + \beta.(0,1,0) = (\alpha, 0, \alpha) + (0, \beta, 0) = (\alpha, \beta, \alpha)$
  - Esto nos deja:
    - $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$
  - Teniendo en cuenta que $x = z$, S solo permite generar los vectores en donde la primera coordenada es igual a la tercera, no todo R^3.
    - Si $x \neq z$, no existe solución para α y β.

Ejercicio 5.

Analizar si el siguiente conjunto puede generar el subespacio de las matrices simétricas de 2×2 $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

1. Una matriz simétrica 2×2 tiene la siguiente forma:

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in R$$

2. Se debe determinar si es posible encontrar escalares $\alpha, \beta, \gamma \in R$ tales que $v = \alpha.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para cualquier $v \in A$ (siendo A el conjunto de matrices simétricas 2×2).
   i. $v = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$
   ii. Esto nos deja:

a. $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \gamma \end{cases}$

iii. Esto corresponde exactamente a una matriz simétrica y como α, β, γ pueden tomar cualquier valor real, se pueden generar todas las matrices simétricas 2×2.

Ejercicio 6.

Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1, 0, 1); (1, 1, 0)\}$

1. $(x, y, z) = \alpha.(1,0,1) + \beta.(1,1,0) = (\alpha, 0, \alpha) + (\beta, \beta, 0) = (\alpha + \beta, \beta, \alpha)$.
2. Los vectores generan el subespacio $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x = z + y\}$

Ejercicio 7.

Dar el subespacio generado por los vectores $\{(1, 1, 1); (1, -1, 0)\}$

1. $(x, y, z) = \alpha.(1, 1, 1) + \beta.(1, -1, 0) = (\alpha, \alpha, \alpha) + (\beta, -\beta, 0) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha)$.
2. $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = \alpha \end{cases}$
3. Reemplazando a α por z en x:
   i. $x - z = \beta$
4. Reemplazando a β por $x - z$ en y:
   i. $y = z - (x - z) \rightarrow y = 2z - x$
5. Esto nos deja que $y = 2z - x$. Por lo tanto los vectores generan el subespacio $S = \{(x, y, z) \in R^3 : y = 2z - x\}$

Ejercicio 8.

Decidir si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

a) $S = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (1,2,3)\}$

1. Realizamos lo siguiente para saber si son todos los c_i nulos:

    a. $(0,0,0) = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) + c_4(1,2,3) = (c_1, 0,0) + (0, c_2, 0) + (0,0, c_3) + (c_4, 2c_4, 3c_4) = (c_1 + c_4, c_2 + 2c_4, c_3 + 3c_4)$
    b. $\begin{cases} c_1 + c_4 = 0 \\ c_2 + 2c_4 = 0 \\ c_3 + 3c_4 = 0 \end{cases}$
2. Resolviendo este sistema de tres ecuaciones obtenemos que $c_1 = -c_4$, $c_2 = -2c_4$, $c_3 = -3c_4$ para cualquier $c_4 \in R$.
    a. Si $c_4 = 1$ se tiene de acuerdo a lo anterior dicho:
        1. $\begin{cases} -1 + 1 = 0 \\ -2 + 2 = 0 \\ -3 + 3 = 0 \end{cases}$
    b. Se puede ver como existen escalares no nulos tales que la combinación lineal da como resultado el vector nulo.
3. Esto demuestra que los vectores de S son linealmente dependientes.

b) $S = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$

1. Realizamos lo siguiente para saber si son todos los c_i nulos:
    a. $(0,0,0) = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (c_1, 0,0) + (0, c_2, 0) + (0,0, c_3) = (c_1, c_2, c_3)$
    b. $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$
2. Como solamente se llega al vector nulo a partir de que todos los escalares son nulos los vectores de S son linealmente independientes.

c) $S = \{(1,0); (0,1); (2,3)\}$

1. Realizamos lo siguiente para saber si son todos los c_i nulos:
    a. $(0,0) = c_1(1,0) + c_2(0,1) + c_3(2,3) = (c_1, 0) + (0, c_2) + (2c_3, 3c_3) = (c_1 + 2c_3, c_2 + 3c_3)$
    b. $\begin{cases} c_1 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases}$
2. Resolviendo este sistema de tres ecuaciones obtenemos que $c_1 = -2c_3$, $c_2 = -3c_3$ para cualquier $c_3 \in R$.
    a. Si $c_3 = 1$ se tiene de acuerdo a lo anterior dicho:
        1. $\begin{cases} -2 + 2 = 0 \\ -3 + 3 = 0 \end{cases}$

b. Se puede ver como existen escalares no nulos tales que la combinación lineal da como resultado el vector nulo.

3. Esto demuestra que los vectores de S son linealmente dependientes.

d) $S = \{(1,-3); (1,-1)\}$

1. Realizamos lo siguiente para saber si son todos los c_i nulos:
   a. $(0,0) = c_1(1,-3) + c_2(1,-1) = (c_1, -3c_1) + (c_2, -c_2) = (c_1 + c_2, -3c_1 - c_2)$
   b. $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -3c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$
   c. Despejando la primera ecuación nos queda:
      i. $c_2 = -c_1$
   d. Reemplazando c_2 en la segunda y despejando nos queda:
      i. $-3c_1 + c_1 = 0$
      ii. $-2c_1 = 0$
      iii. $c_1 = 0$
   e. Reemplazando c_1 en $c_2 = -c_1$ nos queda:
      i. $c_2 = 0$
2. Como solamente se llega al vector nulo a partir de que todos los escalares son nulos los vectores de S son linealmente independientes.

e) $S = \{(0,2,-1); (1,7,1); (1,3,-1); (0,0,0)\}$

1. Como está incluido el vector nulo $(0,0,0)$ siempre habrá una combinación lineal no trivial de los vectores que dé como resultado el vector nulo:
   a. Por ejemplo:
      i. $c_1 = c_2 = c_3 = 0$
      ii. $c_4 = 1$
      iii. $0.(0,2,-1) + 0.(1,7,1) + 0.(1,3,-1) + 1.(0,0,0) = (0,0,0)$
   b. Se puede ver como existe una combinación lineal donde los escalares no son todos nulos y aun así se obtiene el vector nulo como resultado.
2. Por lo tanto los vectores de S son linealmente dependientes.

f) $S = \{(4,1,0,0); (-3,0,1,0); (1,0,0,1)\}$

1. Realizamos lo siguiente para saber si son todos los c_i nulos:
    a. $(0,0,0,0) = c_1(4,1,0,0) + c_2(-3,0,1,0) + c_3(1,0,0,1) = (4c_1, c_1, 0,0) + (-3c_2, 0, c_2, 0) + (c_3, 0,0, c_3) = (4c_1 - 3c_2 + c_3, c_1, c_2, c_3)$
    b. $\begin{cases} 4c_1 - 3c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$
    c. Reemplazando en la primera ecuación nos queda:
        i. $4.0 - 3.0 + 0 = 0$
        ii. $0 - 0 + 0 = 0$
2. Como solamente se llega al vector nulo a partir de que todos los escalares son nulos los vectores de S son linealmente independientes.

g) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

1. Realizamos lo siguiente para saber si son todos los c_i nulos:
    a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 2c_2 \\ c_1 & c_1 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$
    c. Despejando la segunda ecuación tenemos:
        i. $c_2 = 0$
2. Como solamente se llega al vector nulo a partir de que todos los escalares son nulos los vectores de S son linealmente independientes.

h) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

1. Realizamos lo siguiente para saber si son todos los c_i nulos:
    a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 \\ c_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 & c_3 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$
    c. Reemplazando c_1 en la segunda y tercera ecuación tenemos:

i. $0 + c_2 = 0$

ii. $c_2 = 0$

2. Como solamente se llega al vector nulo a partir de que todos los escalares son nulos los vectores de S son linealmente independientes.

Ejercicio 9.

Analizar si un conjunto de vectores que contiene al vector nulo puede ser linealmente independiente. Justificar.

No, no puede ser linealmente independiente puesto que el vector nulo siempre se puede escribir como una combinación lineal de los demás vectores, con todos los escalares en esa combinación igual a cero.

Es decir, como el vector nulo es el resultado de una posible combinación lineal de los otros vectores, el conjunto no es linealmente independiente.

También esta lo que pasa en el punto e) del ejercicio anterior, al estar el vector nulo presente en el conjunto, el vector nulo se puede escribir como una combinación lineal sin que todos los escalares sean igual a 0.

Ejercicio 10.

Si el conjunto de vectores $M = \{u, v, w\}$ de V es linealmente independiente, mostrar que el conjunto $\{u, u + 2v, u + 2v + 3w\}$ es linealmente independiente.

1. $0 = c_1.u + c_2(u + 2v) + c_3(u + 2v + 3w) = c_1.u + c_2.u + c_2.2.v + c_3.u + c_3.2.v + c_3.3.w = (c_1 + c_2 + c3).u + (c_2.2 + c_3.2).v + (c_3.3).w$
2. Como sabemos que $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente queda lo siguiente:
   a. $\begin{cases} c_1 + c_2 + c3 = 0 \\ 2c_2 + 2c_3 = 0 \\ 3c_3 = 0 \end{cases}$
   b. Despejando c_3 queda
      i. $c_3 = 0$
   c. Sustituyendo en la segunda ecuación queda:
      i. $2c_2 + 0 = 0$

ii. $c_2 = 0$

d. Sustituyendo en la primera queda:

i. $c_1 = 0$

3. Como solamente se llega al vector nulo a partir de que todos los escalares son nulos los vectores son linealmente independientes.

Ejercicio 11.

Analizar si los siguientes conjuntos de vectores pueden ser base de R^2.

a) $\{(2,-1);(1,3)\}$

Sabemos que la dimensión de R^2 es 2 y la cantidad de vectores de la base candidata es 2. Como ambos son iguales, basta con probar o que los vectores son linealmente independientes o que generan R^2.

1. Linealmente independientes:
    a. $(0,0) = c_1(2,-1) + c_2(1,3) = (2c1,-c_1) + (c_2, 3c_2) = (2c_1 + c_2, -c_1 + 3c_2)$
    b. $\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases}$
    c. Despejando c_2 queda
        i. $c_2 = -2c_1$
    d. Reemplazando en la segunda ecuación:
        i. $-c_1 - 6c_1 = 0$
        ii. $-7c_1 = 0$
        iii. $c_1 = 0$
    e. Reemplazando en la primer en $c_2 = -2c_1$ queda:
        i. $c_2 = 0$
2. Como solamente se llega al vector nulo a partir de que todos los escalares son nulos los vectores son linealmente independientes.
3. Por lo tanto es una base de R^2.

b) $\{(2,1);(1,1);(3,2)\}$

Sabemos que la dimensión de R^2 es 2 y la base tiene 3 vectores. Como la cantidad de vectores de la base es mayor a la dimensión de R^2, los vectores son linealmente dependientes, por lo tanto el conjunto de vectores no forma una base de R^2.

c) $\{(1,-1);(1,0)\}$

Sabemos que la dimensión de R^2 es 2 la cantidad de vectores de la base candidata es 2. Como ambos son iguales, basta con probar o que los vectores son linealmente independientes o que generan R^2.

1. Linealmente independientes:
   a. $(0,0) = c_1(1,-1) + c_2(1,0) = (c_1,-c_1) + (c_2,0) = (c_1 + c_2,-c_1)$
   b. $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 = 0 \end{cases}$
   c. Despejando la última ecuación queda:
      i. $c_1 = 0$
   d. Despejando la primer ecuación queda:
      i. $c_2 = 0$
2. Como solamente se llega al vector nulo a partir de que todos los escalares son nulos los vectores son linealmente independientes.
3. Por lo tanto es una base de R^2.

d) $\{(1,2));(2,4)\}$

Sabemos que la dimensión de R^2 es 2 y la cantidad de vectores de la base candidata es 2. Como ambos son iguales, basta con probar o que los vectores son linealmente independientes o que generan R^2.

1. Linealmente independientes:
   No lo son puesto que $(2,4) = 2.(1,2)$
2. Por lo tanto no son una base de R^2.

Ejercicio 12.

Dar las coordenadas de $v = (1,2)$ en los conjuntos que en el ejercicio anterior resultaron ser bases.

$\{(2,-1);(1,3)\}$

1. $(1,2) = c_1(2,-1) + c_2(1,3) = (2c_1, -c_1) + (c_2, 3c_2) = (2c_1 + c_2, -c_1 + 3c_2)$
2. $\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases}$
3. Despejando la primer ecuación:
   a. $c_2 = 1 - 2c_1$
4. Reemplazando en la segunda ecuación:
   a. $-c_1 + 3(1 - 2c_1) = 2$
   b. $-c_1 + 3 - 6c_1 = 2$
   c. $-c_1 - 6c_1 = -1$
   d. $-7c_1 = -1$
   e. $c_1 = \frac{1}{7}$
5. Reemplazando en $c_2 = 1 - 2c_1$
   a. $c_2 = 1 - 2.\frac{1}{7}$
   b. $c_2 = \frac{5}{7}$
6. Las coordenadas de v en la base $\{(2,-1);(1,3)\}$ son $\left(\frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)$

$\{(1,-1);(1,0)\}$

1. $(1,2) = c_1(1,-1) + c_2(1,0) = (c_1, -c_1) + (c_2, 0) = (c_1 + c_2, -c_1)$
2. $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \quad -c_1 = 2 \end{cases}$
3. Despejando $-c1$ en la segunda ecuación nos queda:
   a. $c_1 = -2$
4. Reemplazando en la primer ecuación:
   a. $-2 + c_2 = 1$
   b. $c_2 = 3$
5. Las coordenadas de v en la base $\{(1,-1);(1,0)\}$ son $(-2,3)$

Ejercicio 13.

Hallar una base para cada conjunto del ejercicio 3 que sea un subespacios.

a) $S = \{(x, 0) : x \in R\}$

$(x, y) = (x, 0) = x(1,0)$

$B = \{(1,0)\}$

b) $S = \{(x, y) \in R^2 : x + y = 0\}$

$(x, y) = (x, -x) = x(1, -1)$

$B = \{(1, -1)\}$

c) $S = \{(x, y, z) \in R^3 : z = x - y\}$

$(x, y, z) = (x, y, x - y) = (x, 0, x) + (0, y, -y) = x(1,0,1) + y(0,1, -1)$

$B = \{(1,0,1); (0,1, -1)\}$

d) $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 : x + y - w = 0, z + 3y = 0\}$

$x + y - w = 0 \rightarrow x = -y + w$

$z + 3y = 0 \rightarrow z = -3y$

$(x, y, z, w) = (-y + w, y, -3y, w) = (-y, y, -3y, 0) + (w, 0,0, w)$

$= y(-1,1, -3,0) + (1,0,0,1)$

$B = \{(-1,1, -3,0); (1,0,0,1)\}$

e) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in R\right\}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

Ejercicio 14.

Analizar si las siguiente aplicaciones entre espacios vectoriales son transformaciones lineales.

a) $L: R^2 \to R^3$ definida por $L(x, y) = (x, y, x + y)$

1. $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
    a. $v_1 = (x_1, y_1)$
    b. $v_2 = (x_2, y_2)$
    c. $L(v_1 + v_2) = L\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = L\big((x_1 + x_2, y_1 + y_2)\big) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) = (x_1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2) = L(x_1, y_1) + L(x_2, y_2) = L(v_1) + L(v_2)$
2. $L(\alpha . v) = \alpha . L(v)$
    a. $v = (x, y)$
    b. $L(\alpha . v) = L\big(\alpha . (x, y)\big) = L\big((\alpha . x, \alpha . y)\big) = (\alpha . x, \alpha . y, \alpha . x + \alpha . y) = \big(\alpha . x, \alpha . y, \alpha(x + y)\big) = \alpha(x, y, x + y) = \alpha . L(x, y, x + y)$
3. Es una transformación lineal.

b) $L: R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (x + z, y + z)$

1. $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
    a. $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$
    b. $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$
    c. $L(v_1 + v_2) = L\big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\big) = L((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = (x_1 + x_2 + z_1 + z_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2) = (x_1 + z_1, y_1 + z_1) + (x_2 + z_2, y_2 + z_2) = L((x_1, y_1, z_1)) + L((x_2, y_2, z_2)) = L(v_1) + L(v_2)$
2. $L(\alpha . v) = \alpha . L(v)$
    a. $v = (x, y)$
    b. $L(\alpha . v) = L\big(\alpha . (x, y, z)\big) = L\big((\alpha . x, \alpha . y, \alpha . z)\big) = (\alpha . x + \alpha . z, \alpha . y + \alpha . z) = \big(\alpha(x + z), \alpha(y + z)\big) = \alpha(x + z, y + z) = \alpha . L(x, y, z)$
3. Es una transformación lineal.

c) $L: R^3 \to R^3$ definida por $L(x, y, z) = (x - 2, y + 3x, 1)$

1. $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
   a. $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$
   b. $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$
   c. $L(v_1 + v_2) = L\big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\big) = L((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = (x_1 + x_2 - 2, y_1 + y_2 + 3(x_1 + x_2), 1) \neq (x_1 + x_2 - 4, y_1 + y_2 + 3(x_1 + x_2), 2) = (x_1 - 2, y_1 + 3x_1, 1) + (x_2 - 2, y_2 + 3x_2, 1) = L(v_1) + L(v_2)$
2. No es una transformación lineal.

d) $L: R^{2x2} \to R^{2x2}$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$

1. $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
   a. $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$
   b. $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$
   c. $L(v_1 + v_2) = L\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & -x_1 - x_2 \\ y_1 + y_2 & -w_1 - w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & -x_1 \\ y_1 & -w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & -x_2 \\ y_2 & -w_2 \end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = L(v_1) + L(v_2)$
2. $L(\alpha . v) = \alpha . L(v)$
   a. $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$
   b. $L(\alpha . v) = L\left(\alpha . \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} \alpha . x & \alpha . y \\ \alpha . z & \alpha . w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha . z & -(\alpha . x) \\ \alpha . y & -(\alpha . w) \end{pmatrix} = \alpha . \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix} = \alpha . L\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \alpha . L(v)$
3. Es una transformación lineal.

e) $L: R^{2x2} \to R^{2x2}$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ y & 1 \end{pmatrix}$

1. $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
   a. $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$

b. $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$

c. $L(v_1 + v_2) = L\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \end{pmatrix}\right) =$

$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -x_1 - x_2 \\ y_1 + y_2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -x_1 - x_2 \\ y_1 + y_2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 \\ y_1 & 1 \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} x_2 & -x_2 \\ y_2 & 1 \end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = L(v_1) + L(v_2)$

2. No es una transformación lineal.

f) $L: R^{2x2} \to R^2$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x + z, y + w)$

1. $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
   a. $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$
   b. $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}$
   c. $L(v_1 + v_2) = L\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \end{pmatrix}\right) =$

   $(x_1 + x_2 + z_1 + z_2, y_1 + y_2 + w_1 + w_2) = (x_1 + z_1, y_1 + w_1) + (x_2 +$

   $z_2, y_2 + w_2) = L\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = L(v_1) + L(v_2)$
2. $L(\alpha . v) = \alpha . L(v)$
   a. $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$
   b. $L(\alpha . v) = L\left(\alpha . \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} \alpha . x & \alpha . y \\ \alpha . z & \alpha . w \end{pmatrix}\right) = (\alpha . x + \alpha . z, \alpha . y + \alpha . w) =$

   $(\alpha . (x + z), \alpha . (y + w)) = \alpha . (x + z, y + w) = \alpha . L\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \alpha . L(v)$
3. Es una transformación lineal.

g) $L: R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (0,0)$

1. $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
   a. $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$
   b. $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$
   c. $L(v_1 + v_2) = L((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = L((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) =$

   $(0,0) = (0,0) + (0,0) = L((x_1, y_1, z_1)) + L((x_2, y_2, z_2)) = L(v_1) + L(v_2)$
2. $L(\alpha . v) = \alpha . L(v)$

a. $v = (x, y, z)$

b. $L(\alpha. v) = L(\alpha.(x, y, z)) = L((\alpha. x, \alpha. y, \alpha. z)) = (0,0) = (\alpha. 0, \alpha. 0) = \alpha.(0,0) = \alpha. L((x, y, z)) = \alpha. L(v)$

3. Es una transformación lineal.

Ejercicio 15.

Hallar el núcleo e imagen de cada una de las transformaciones lineales del punto anterior y las dimensiones de cada uno de esos subespacios.

a) $L: R^2 \to R^3$ definida por $L(x, y) = (x, y, x + y)$

1. Núcleo:
   a. Si $v \in Nu(L)$ entonces $L(v) = (0,0,0)$,
      i. $v = (x, y)$
      ii. $(0,0,0) = L(v) = L((x, y)) = (x, y, x + y)$
      iii. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$
      iv. $v = (x, y) = (0,0)$
      v. Por lo tanto $Nu(L) = \{(0,0)\}$
   b. Base Núcleo
      i. $(0,0) = c_1(0,0) \to B_N = \{(0,0)\}$
   c. Dimensión Núcleo
      i. 0
2. Imagen:
   a. Se tomará cualquier $w \in R^3$ tal que $(a, b, c) = w = L(x, y) = (x, y, x + y)$
      i. Esto nos deja que:
         1. $\begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = x + y \end{cases}$
      ii. Por lo tanto la imagen es:
         1. $Im(L) = \{(a, b, c) \in R^3 : c = a + b\}$
   b. Base Imagen
      i. $(a, b, a + b) = (a, 0, a) + (0, b, b) = a(1,0,1) + b(0,1,1) \to B_I = \{(1,0,1); (0,1,1)\}$

c. Dimensión Imagen:

i. 2

3. Dimensión R^2

a. $dim(Nu(L)) + \dim(Im(L)) = \dim(V)$

b. $0 + 2 = 2$

b) $L: R^3 \rightarrow R^2$ definida por $L(x, y, z) = (x + z, y + z)$

1. Núcleo:

a. Si $v \in Nu(L)$ entonces $L(v) = (0{,}0)$:

i. $v = (x, y, z)$

ii. $(0{,}0) = L(v) = L((x, y, z)) = (x + z, y + z)$

iii. $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

1. Resolviendo la primera y segunda ecuación nos queda que:

a. $x = -z$

b. $y = -z$

iv. $v = (x, y, z) = (-z, -z, z)$

v. Por lo tanto $Nu(L) = \{(-z, -z, z)\}$

b. Base Núcleo

i. $(-z, -z, z) = z(-1, -1{,}1) \rightarrow B_N = \{(-1, -1{,}1)\}$

c. Dimensión Núcleo

i. 1

2. Imagen:

a. Se tomará cualquier $w \in R^2$ tal que $(a, b) = w = L(x, y, z) = (x + z, y + z)$

i. Esto nos deja que:

1. $\begin{cases} a = x + z \\ b = y + z \end{cases}$

2. Como cualquier real puede ser la suma de otros dos a y b

ii. Por lo tanto la imagen es:

1. $Im(L) = \{(a, b) \in R^2 : a, b \in R\} = R^2$

b. Base Imagen

i. $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1{,}0) + b(0{,}1) \rightarrow B_I = \{(1{,}0); (0{,}1)\}$

c. Dimensión Imagen:

i. 2

3. Dimensión R^2

a. $dim\big(Nu(L)\big) + \dim\big(Im(L)\big) = \dim(V)$

b. $1 + 2 = 3$

c) $L: R^{2x2} \to R^{2x2}$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$

1. Núcleo:
   a. Si $v \in Nu(L)$ entonces $L(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:
      i. $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$
      ii. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = L(v) = L\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$
      iii. $\begin{cases} z = 0 \\ -x = 0 \\ y = 0 \\ -w = 0 \end{cases}$
         1. Resolviendo la segunda y cuarta ecuación nos queda que:
            a. $x = 0$
            b. $w = 0$
      iv. $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
      v. Por lo tanto $Nu(L) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$
   b. Base Núcleo
      i. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to B_N = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$
   c. Dimensión Núcleo
      i. 0
2. Imagen:
   a. Se tomará cualquier $w \in R^{2x2}$ tal que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = w = L\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$
      i. Esto nos deja que:
         1. $\begin{cases} a = z \\ b = -x \\ c = y \\ d = -w \end{cases}$
         2. Esto lo cumple cualquier real $a, b, c\ y\ d$
      ii. Por lo tanto la imagen es:

1. $Im(L) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2}: a, b, c, d \in R\right\} = R^{2x2}$

b. Base Imagen

i. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to B_I = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

c. Dimensión Imagen:

i. 4

3. Dimensión R^2

a. $dim\big(Nu(L)\big) + \dim\big(Im(L)\big) = \dim(V)$

b. $0 + 4 = 4$

d) $L: R^{2x2} \to R^2$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x + z, y + w)$

e) $L: R^3 \to R^2$ definida por $L(x, y, z) = (0,0)$

1. Núcleo:

a. Si $v \in Nu(L)$ entonces $L(v) = (0,0)$:

i. $v = (x, y, z)$

ii. $(0,0) = L(v) = L((x, y, z)) = (0,0)$

iii. Como $L(v) = (0,0)$ para cualquier $v \in R^3$ $Nu(L) = R^3$

b. Base Núcleo

i. $(x, y, z) = (x, 0,0) + (0, y, 0) + (0,0, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \to B_N = \{(1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)\}$

c. Dimensión Núcleo

i. 3

2. Imagen:

a. Se tomará cualquier $w \in R^2$ tal que $(a, b) = w = L((x, y, z)) = (0,0)$

i. Esto nos deja que:

1. $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

ii. Por lo tanto la imagen es:

1. $Im(L) = \{(0,0)\}$

b. Base Imagen

i. $(0,0) = c_1(0,0) \to B_I = \{(0,0)\}$

c. Dimensión Imagen:

i. 0

3. Dimensión R^2

a. $dim(Nu(L)) + \dim(Im(L)) = \dim(V)$

b. $3 + 0 = 3$

Ejercicio 16.

Mostrar que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal

- Sean U, V, W espacios vectoriales.
- Sean las siguientes dos transformaciones lineales:
  - $T_1: U \to V$
  - $T_2: V \to W$
- Se quiere demostrar que la composición de T_1 y T_2 es la transformación:
  - $T: U \to W$ definida como $T(u) = T_2(T_1(u))$, para todo $u \in U$.

Demostración:

1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

a. Por definición de composición se tiene que:

i. $T(u_1 + u_2) = (T_2 T_1(u_1 + u_2))$

b. Como T_1 es transformación lineal se sabe que:

i. $T_1(u_1 + u_2) = T_1(u_1) + T_2(u_2)$

c. Continuando con a. queda:

i. $(T_2 T_1(u_1 + u_2)) = \left(T_2\left(T_1(u_1) + \left(T_1(u_2)\right)\right)\right)$

d. Como T_2 es transformación lineal se sabe que:

i. $T_2(u_1 + u_2) = T_2(u_1) + T_2(u_2)$

e. Continuando con c. queda:

i. $\left(T_2\left(T_1(u_1) + \left(T_1(u_2)\right)\right)\right) = T_2(T_1(u_1)) + T_2(T_1(u_2))$

f. Por definición de composición se tiene que:

i. $T_2(T_1(u_1)) = T(u_1)$

ii. $T_2(T_1(u_2)) = T(u_2)$

g. Esto nos deja que $T_2(T_1(u_1)) + T_2(T_1(u_2)) = T(u_1) + T(u_2)$

h. Por lo tanto $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
   a. Por definición de composición se tiene que:
      i. $T(\alpha u) = T_2(T_1(\alpha u))$
   b. Como T_1 es transformación lineal se sabe que:
      i. $T_1(\alpha u) = \alpha T_1(u)$
   c. Continuando con a. queda:
      i. $T_2(T_1(\alpha u)) = T_2(\alpha T_1(u))$
   d. Como T_2 es transformación lineal se sabe que:
      i. $T_2(\alpha u) = \alpha T_2(u)$
   e. Continuando con c. queda:
      i. $T_2(\alpha T_1(u)) = \alpha T_2(T_1(u))$
   f. Por definición de composición se tiene que:
      i. $\alpha T_2(T_1(u)) = \alpha T(u)$
   g. Por lo tanto $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
3. Por lo tanto T, compuesto por T_1 y T_2, es una transformación lineal.

Ejercicio 17.

a) Es la aplicación identidad una transformación lineal? en caso de serlo hallar núcleo e imagen.

- *La transformación* ***Identidad*** $\forall v \in V,\ I : V \to V$ *definida por* $I(v) = v$.

$$I(\alpha.v_1 + \beta.v_2) = \alpha.v_1 + \beta.v_2 = I(\alpha.v_1) + I(\beta.v_2) = \alpha.I(v_1) + \beta.I(v_2)$$

b) Es la aplicación nula una transformación lineal? en caso de serlo hallar núcleo e imagen.

- La transformación **Nula** $\forall v \in V,\ N : V \to V$ definida por $N(v) = 0_V$.

$$N(\alpha.v_1 + \beta.v_2) = 0_V = 0_V + 0_V = \alpha.0_V + \beta.0_V = \alpha.N(v_1) + \beta.N(v_2)$$

Ejercicio 18.

Sean $C = C[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a,b]$ en R y $L: C \to R$ definida por $L(f) = \int_a^b f(x)dx$ Mostrar que L es una transformación lineal.

1. $L(f+g) = L(f) + L(g)$
   $$L(f+g) = \int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx = L(f) + L(g)$$
2. $L(\alpha f) = \alpha L(f)$
   $$L(\alpha f) = \int_a^b \big(\alpha f(x)\big)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx = \alpha L(f)$$
3. D es una transformación lineal.

Ejercicio 19.

Sean $C = C[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a,b]$ en R y sea $D: C \to C$ dado por $D(f) = f'$ (esto es, para cada función $f \in C$ el operador Derivación, D, devuelve la derivada f' de f). Mostrar que D es una transformación lineal.

1. $D(f+g) = D(f) + D(g)$
   $D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$
2. $D(\alpha f) = \alpha D(f)$
   $D(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha (f)' = \alpha D(f)$
3. D es una transformación lineal.

Ejercicio 20.

Demostrar que dada cualquier transformación lineal $L: V \to W$ (con V, W espacios vectoriales), el núcleo y la imagen de L forman un subespacio de V y W respectivamente.

1. $Nu(L)$ es un subespacio de V:
   a. $Nu(L) \neq \emptyset$
      i. $Nu(L) \neq \emptyset$ ya que siempre se cumple que $L(0) = 0$, para toda transformación lineal entonces al menos $0_V \in Nu(L)$

b. $\forall v_1, v_2 \in Nu(L) \rightarrow v_1 + v_2 \in Nu(L)$

i. Sean $v_1, v_2 \in Nu(L)$

1. $L(v_1) = 0 = L(v_2)$

ii. Como $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = 0 + 0 = 0$

1. Esto vale ya que L es una transformación lineal

iii. Por lo tanto $(v_1 + v_2) \in Nu(L)$

c. $Dado\ \alpha \in R\ y\ \forall v \in Nu(L) \rightarrow \alpha.v \in Nu(L)$

i. Sean $\alpha \in R$ y $v \in Nu(L)$

ii. Como $L(\alpha.v) = \alpha.L(v) = \alpha.0 = 0$

1. Esto vale ya que L es una transformación lineal

iii. Por lo tanto $\alpha.v \in Nu(L)$

2. $Im(L)$ es un subespacio de W:

a. $Im(L) \neq \emptyset$

i. $L(0_V) = 0_W$, esto muestra que dado $0_W \in W$ existe un $v = 0_V \in V$ tal que $L(v) = w = 0_W$ entonces la imagen de L contiene al neutro de W e $Im(L) \neq \emptyset$

b. $\forall w_1, w_2 \in Im(L) \rightarrow w_1 + w_2 \in Im(L)$

i. Sean $w_1, w_2 \in Im(L)$

ii. Se sabe que existen $v_1, v_2 \in V$ tal que $L(v_1) = w_1$ y $L(v_2) = w_2$

iii. Si tomamos $v_1 + v_2 \in V$ (ya que es un espacio vectorial y la suma es cerrada) vale que $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = w_1 + w_2$

1. Esto vale ya que L es una transformación lineal

iv. Por lo tanto $(w_1 + w_2) \in Im(L)$

c. $Dado\ \alpha \in R\ y\ \forall w \in Im(L) \rightarrow \alpha.w \in Im(L)$

i. Sean $\alpha \in R$ y $w \in Im(L)$

ii. Se sabe que existe un $v \in V$ tal que $L(v) = w$

iii. Si tomamos $\alpha.v \in V$ (ya que es un espacio vectorial y el producto por un escalar es cerrado) vale que $L(\alpha.v) = \alpha.L(v) = \alpha.w$

1. Esto vale ya que L es una transformación lineal

iv. Por lo tanto $\alpha.w \in Im(L)$

Ejercicio 21.

a) Hallar $L: R^2 \rightarrow R^2$ sabiendo que:

$L(1,0) = (1,-2),\ \ L(0,1) = (1,-1)$

1. Dado $(x, y) \in R^2$ se escribira el vector en la base $(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$ y se aplicara la transformación lineal L para encontrar su valor:
    a. $L(x, y) = L\big(x(1,0) + y(0,1)\big) = xL\big((1,0)\big) + yL\big((0,1)\big) = x(1,-2) + y(1,-1) = (x, -2x) + (y, -y) = (x + y, -2x - y)$
2. $L(x, y) = (x + y, -2x - y)$

b) Hallar $L: R^3 \to R^2$ sabiendo que :

$L(1,0,0) = (1,0),\ \ L(0,1,0) = (-1,-6),\ \ L(0,0,1) = (0,4)$

1. Dado $(x, y, z) \in R^3$ se escribira el vector en la base $(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$ y se aplicara la transformación lineal L para encontrar su valor:
    a. $L(x, y, z) = L(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xL\big((1,0,0)\big) + yL\big((0,1,0)\big) + z(0,0,1) = x(1,0) + y(-1,-6) + z(0,4) = (x, 0) + (-y, -6y) + (0,4z) = (x - y, -6y + 4z)$
2. $L(x, y, z) = (x - y, -6y + 4z)$

c) Hallar $L: R^2 \to R^2$ sabiendo que:

$L(1,1) = (4,2),\ \ L(0,3) = (1,0)$

1. Dado $(x, y) \in R^2$ se escribira el vector en la base $(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$ y se aplicara la transformación lineal L para encontrar su valor:
    a. El vector $(1,0)$ se lo puede escribir como una combinación lineal de $(1,1)$ y $(0,3)$:
        i. $(1,0) = a(1,1) + b(0,3) = (a, a) + (0,3b) = (a, a + 3b)$
        ii. $\begin{cases} a = 1 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$
        iii. $a = 1$ y $b = -\frac{1}{3}$
        iv. Por lo tanto $(1,0) = 1(1,1) - \frac{1}{3}(0,3)$
    b. El vector $(0,1)$ se lo puede escribir como una combinación lineal de $(1,1)$ y $(0,3)$:
        i. $(0,1) = a(1,1) + b(0,3) = (a, a) + (0,3b) = (a, a + 3b)$
        ii. $\begin{cases} a = 0 \\ a + 3b = 1 \end{cases}$

iii. $a = 0$ y $b = \frac{1}{3}$

iv. Por lo tanto $(1,0) = 0(1,1) + \frac{1}{3}(0,3)$

c. Ahora obtenemos $L(1,0)$ y $L(0,1)$ sustituyendo con lo anterior:

i. $L(1,0) = L\left(1(1,1) - \frac{1}{3}(0,3)\right) = L(1,1) - \frac{1}{3}L(0,3) = (4,2) - \frac{1}{3}(1,0) = (4,2) + \left(-\frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{11}{3}, 2\right)$

ii. $L(0,1) = L\left(\frac{1}{3}(0,3)\right) = \frac{1}{3}L(0,3) = \frac{1}{3}(1,0) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

d. $L(x,y) = L\big(x(1,0) + y(0,1)\big) = xL\big((1,0)\big) + yL\big((0,1)\big) = x\left(\frac{11}{3}, 2\right) + y\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{11}{3}x, 2x\right) + \left(\frac{1}{3}y, 0\right) = \left(\frac{11}{3}x + \frac{1}{3}y, 2x\right) = \left(\frac{11x+y}{3}, 2x\right)$

2. $L(x,y) = \left(\frac{11x+y}{3}, 2x\right)$

d) Hallar $L: R^3 \to R^3$ sabiendo que :

$L(1,1,1) = (1,2,3), \;\; L(0,1,0) = (1,-1,0), \;\; L(-1,-1,1) = (5,4,3)$

1. Dado $(x,y,z) \in R^3$ se escribira el vector en la base $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$ y se aplicara la transformación lineal L para encontrar su valor:

a. El vector $(1,0,0)$ se lo puede escribir como una combinación lineal de $(1,1,1)$, $(0,1,0)$ y $(-1,-1,1)$:

i. $(1,0,0) = a(1,1,1,) + b(0,1,0) + c(-1,-1,1) = (a,a,a) + (0,b,0) + (-c,-c,c) = (a-c, a+b-c, a+c)$

ii. $\begin{cases} a - c = 1 \\ a + b - c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$

iii. Despejando la última ecuación nos queda que $c = -a$

iv. Reemplazando en la primer ecuación nos queda que:

1. $a = \frac{1}{2}$

v. Reemplazando en $c = -a$ nos queda que:

1. $c = -\frac{1}{2}$

vi. Reemplazando en la segunda nos queda:

1. $\frac{1}{2} + b - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
2. $\frac{1}{2} + b + \frac{1}{2} = 0$
3. $1 + b = 0$
4. $b = -1$

vii. Por lo tanto $(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,1) + -1(0,1,0) + -\frac{1}{2}(-1,-1,1)$

b. El vector $(0,1,0)$ se lo puede escribir como una combinación lineal de $(1,1,1)$, $(0,1,0)$ y $(-1,-1,1)$:

i. $(1,0,0) = a(1,1,1,) + b(0,1,0) + c(-1,-1,1) = (a,a,a) + (0,b,0) + (-c,-c,c) = (a-c, a+b-c, a+c)$

ii. $\begin{cases} a-c=0 \\ a+b-c=1 \\ a+c=0 \end{cases}$

iii. Despejando la última ecuación nos queda que $c=-a$

iv. Reemplazando en la primer ecuación nos queda que:

1. $a=0$

v. Reemplazando en $c=-a$ nos queda que:

1. $c=0$

vi. Reemplazando en la segunda nos queda:

1. $b=1$

vii. Por lo tanto $(0,1,0) = 0(1,1,1) + 1(0,1,0) + 0(-1,-1,1)$

c. El vector $(0,0,1)$ se lo puede escribir como una combinación lineal de $(1,1,1)$, $(0,1,0)$ y $(-1,-1,1)$:

i. $(1,0,0) = a(1,1,1,) + b(0,1,0) + c(-1,-1,1) = (a,a,a) + (0,b,0) + (-c,-c,c) = (a-c, a+b-c, a+c)$

ii. $\begin{cases} a-c=0 \\ a+b-c=0 \\ a+c=1 \end{cases}$

iii. Despejando la primer ecuación nos queda que $c=a$

iv. Reemplazando en la última ecuación nos queda que:

1. $a=\frac{1}{2}$

v. Reemplazando en $c=a$ nos queda que:

1. $c=\frac{1}{2}$

vi. Reemplazando en la segunda nos queda:

1. $\frac{1}{2}+b-\frac{1}{2}=0$
2. $b=0$

vii. Por lo tanto $(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,1) + 0(0,1,0) + \frac{1}{2}(-1,-1,1)$

d. Ahora obtenemos $L(1,0,0)$, $L(0,1,0)$ y $L(0,0,1)$sustituyendo con lo anterior:

i. $L(1,0,0) = L\left(\frac{1}{2}(1,1,1) - 1(0,1,0) - \frac{1}{2}(-1,-1,1)\right) = \frac{1}{2}L(1,1,1) - L(0,1,0) - \frac{1}{2}L(-1,-1,1) = \frac{1}{2}(1,2,3) - (1,-1,0) - \frac{1}{2}(5,4,3) = \left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right) + (-1,1,0) + \left(-\frac{5}{2},-2,-\frac{3}{2}\right) = (-3,0,0)$

ii. $L(0,1,0) = L\big((0,1,0)\big) = (1,-1,0)$

iii. $L(1,0,0) = L\left(\frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(-1,-1,1)\right) = \frac{1}{2}L\big((1,1,1)\big) + \frac{1}{2}(-1,-1,1) = \frac{1}{2}(1,2,3) + \frac{1}{2}(5,4,3) = \left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{5}{2},2,\frac{3}{2}\right) = (3,3,3)$

e. $L(x,y,z) = L(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = xL\big((1,0,0)\big) + yL\big((0,1,0)\big) + zL\big((0,0,1)\big) = x(-3,0,0) + y(1,-1,0) + z(3,3,3) = (-3x,0,0) + (y,-y,0) + (3z,3z,3z) = (-3x+y+3z,-y+3z,3z)$

2. $L(x,y,z) = (-3x+y+3z,-y+3z,3z)$

Ejercicio 22.

Hallar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales en las bases indicadas:

a) $L: R^3 \to R^2$ definida por $L(x,y,z) = (z-y, z-x)$ con las bases canónicas de R^3 y R^2.

1. Bases canónicas de R^3 y R^2:
   a. R^3
      i. $\{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$
   b. R^2
      i. $(1,0); (0,1)\}$
2. Evaluamos como actúa L sobre los vectores de la base canónica de R^3 y escribimos el vector resultante en la base canónica de R^2:
   a. $L(1,0,0) = (0,-1) = 0(1,0) + (-1)(0,1)$
   b. $L(0,1,0) = (-1,0) = -1(1,0) + 0(0,1)$
   c. $L(0,0,1) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$
3. Con las coordenadas de cada vector formamos las columnas de la matriz y así obtenemos:
   a. $[L]B_{R^3}B_{R^2} = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $L: R^3 \to R^3$ definida por $L(x, y, z) = (3x + z, y - x, 2z + 2y)$ con la base canónica de R^3.

1. Bases canónicas de R^3 y R^2:
   a. R^3
      i. $\{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$
2. Evaluamos como actúa L sobre los vectores de la base canónica de R^3 y escribimos el vector resultante en la base canónica de R^3:
   a. $L(1,0,0) = (3, -1,0) = 3(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + 0(0,0,1)$
   b. $L(0,1,0) = (0,1,2) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,2)$
   c. $L(0,0,1) = (1,0,2) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 2(0,0,1)$
3. Con las coordenadas de cada vector formamos las columnas de la matriz y así obtenemos:
   a. $[L]B_{R^3}B_{R^2} = A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $L: R_{2x2} \to R^2$ definida por $L\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x + y, z + w)$ con B la base canónica de las matrices de R^{2x2} y $B_1 = \{(1,1; (-1,5)\}$ una base de R^2

1. Base canónica de R^{2x2} y R^2:
   a. R^{2x2}
      i. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
   b. R^2
      i. $B_1 = \{(1,1); (-1,5)\}$
2. Evaluamos como actúa L sobre los vectores de la base canónica de R^{2x2} y escribimos el vector resultante en la base canónica de R^2:
   a. $L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0) = \alpha(1,1) + \beta(-1,5) = (\alpha, \alpha) + (-\beta, 5\beta) = (\alpha - \beta, \alpha + 5\beta)$
      i. $\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$
         1. Despejo en la segunda ecuación $\alpha = -5\beta$
         2. Reemplazo en la primer ecuación $-5\beta - \beta = 1 \to -6\beta = 1 \to \beta = -\frac{1}{6}$

3. Reemplazo en lo de 1. $\alpha = \frac{5}{6}$

b. $L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0) = \alpha(1,1) + \beta(-1,5) = (\alpha, \alpha) + (-\beta, 5\beta) =$
$(\alpha - \beta, \alpha + 5\beta)$

i. $\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$

1. Despejo en la segunda ecuación $\alpha = -5\beta$
2. Reemplazo en la primer ecuación $-5\beta - \beta = 1 \rightarrow -6\beta = 1 \rightarrow \beta = -\frac{1}{6}$
3. Reemplazo en lo de 1. $\alpha = \frac{5}{6}$

c. $L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1) = \gamma(1,1) + \delta(-1,5) = (\gamma, \gamma) + (-\delta, 5\delta) = (\gamma - \delta, \gamma + 5\delta)$

i. $\begin{cases} \gamma - \delta = 0 \\ \gamma + 5\delta = 1 \end{cases}$

1. Despejo en la primer ecuación $\gamma = \delta$
2. Reemplazo en la segunda ecuación $\gamma + 5\delta = 1 \rightarrow 6\delta = 1 \rightarrow \delta = \frac{1}{6}$
3. Reemplazo en lo de 1. $\gamma = \frac{1}{6}$

d. $L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,1) = \gamma(1,1) + \delta(-1,5) = (\gamma, \gamma) + (-\delta, 5\delta) = (\gamma - \delta, \gamma + 5\delta)$

i. $\begin{cases} \gamma - \delta = 0 \\ \gamma + 5\delta = 1 \end{cases}$

1. Despejo en la primer ecuación $\gamma = \delta$
2. Reemplazo en la segunda ecuación $\gamma + 5\delta = 1 \rightarrow 6\delta = 1 \rightarrow \delta = \frac{1}{6}$
3. Reemplazo en lo de 1. $\gamma = \frac{1}{6}$

3. Con las coordenadas de cada vector formamos las columnas de la matriz y así obtenemos:

a. $[L]B_{R^{2x2}}B_I = A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$