TP1 - Cálculo en dos o más variables

Ejercicio 1.

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

$x^2 + y^2 = 0$

$(x,y) = (0,0)$

$D = \{(x,y): (x,y) \in R^2 - (0,0)\}$

b. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - z^2$

$D = \{(x,y,z): x \in R \,\hat{}\, y \in R \,\hat{}\, z \in R\}$

c. $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2-9}$

$x^2 + y^2 - 9 = 0$

$x^2 + y^2 = 9$ Circunferencia de radio 3 centrada en (0,0).

$D = \{(x,y): x \in R \,\hat{}\, y \in R \,\hat{}\, x^2 + y^2 \neq 9\}$

d. $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+1}$

Nunca puede ser 0 porque a algo positivo se le suma algo positivo

$D = \{(x,y): x \in R \,\hat{}\, y \in R\}$

e. $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2-z^2}$

$y^2 - z^2 = 0$

$y^2 = z^2$

$\sqrt{y^2} = \sqrt{z^2}$

$|y| = |z|$

$D = \{(x,y,z): x \in R \,\hat{}\, y \in R \,\hat{}\, z \in R \,\hat{}\, y \neq z \,\hat{}\, y \neq -z\}$

f. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$9 - x^2 - y^2 < 0$

$-x^2 - y^2 < -9$

$x^2 + y^2 > 9$

$D = \{(x, y): x \in R \,\hat{}\, y \in R \,\hat{}\, x^2 + y^2 \leq 9\}$

g. $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}$

$D = \{(x, y): x \in R \,\hat{}\, y \in R\}$

h. $f(x, y) = \log(16 - x^2 - 16y^2)$

$16 - x^2 - 16y^2 \leq 0$

$1 - \frac{x^2}{16} - y^2 \leq 0$

$-\frac{x^2}{16} - y^2 \leq -1$

$\frac{x^2}{16} + y^2 \geq 1$

$D = \{(x, y): x \in R \,\hat{}\, y \in R \,\hat{}\, \frac{x^2}{16} + y^2 < 1\}$

Ejercicio 2.

Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

a. $f(x, y) = \log(9 - x^2 - 9y^2)$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)

$f(1,0) = \log(9 - 1^2 - 9 * 0^2) =$

$= \log(9 - 1 - 0) =$

$= \log(8) \approx 0{,}90309$

$f(1,1) = \log(9 - 1^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 1 - 9) =$

$= \log(-1) = Indefinido$

$(1,1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(0,1) = \log(9 - 0^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 0 - 9) =$

$= \log(0) = Indefinido$

$(0,1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(-1,1) = \log(9 - (-1)^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 1 - 9) =$

$= \log(-1) = Indefinido$

(-1,1) $\notin \mathrm{Dom}(f)$

b. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1); (2,2)

$f(1,0) = \sqrt{4 - 1^2 - 4 * 0^2} =$

$= \sqrt{4 - 1 - 0} =$

$= \sqrt{3} = 1{,}732$

$f(1,1) = \sqrt{4 - 1^2 - 4 * 1^2} =$

$= \sqrt{4 - 1 - 4} =$

$= \sqrt{-1} = Indefinido$

$(1,1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(0,1) = \sqrt{4 - 0^2 - 4 * 1^2} =$

$= \sqrt{4 - 0 - 4} =$

$= \sqrt{0} = 0$

$f(-1,1) = \sqrt{4 - (-1)^2 - 4 * 1^2} =$

$= \sqrt{4 - 1 - 4} =$

$= \sqrt{-1} = Indefinido$

(-1,1) $\notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(2,2) = \sqrt{4 - 2^2 - 4 * 2^2} =$

$= \sqrt{4 - 4 - 16} =$

$= \sqrt{-16} = Indefinido$

$(2,2) \notin \mathrm{Dom}(f)$

c. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)

$f(1,0) = e^{1^2+0^2} =$

$= e^{1+0} =$

$= e^1 = e$

$f(1,1) = e^{1^2+1^2} =$

$= e^{1+1} =$

$= e^2 \approx 7{,}38096$

$f(0,1) = e^{0^2+1^2} =$

$= e^{0+1} =$

$= e^1 = e$

$f(-1,1) = e^{(-1)^2+1^2} =$

$= e^{1+1} =$

$= e^2 \approx 7{,}38096$

Ejercicio 3

Calcular los siguientes límites, o demostrar que no existe

a. $\underset{(x,y)\to(3,1)}{lim} 5x - x^2 + 3y^2 =$

$= 5 * 3 - 3^2 + 3 * 1^2 =$

$= 15 - 9 + 3 = 9$

El límite existe y es 9.

b. $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} (\frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) =$

$=(\frac{7*0^2-2*0^2}{0+0^2} + 1) = Indeterminado$

Iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{7x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} + 1\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{7x^2 - 2 * 0^2}{x^2 + 0^2} + 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{7x^2}{x^2}+1\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{7\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+1\right) = 8$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2}+1\right)\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{7*0^2-2y^2}{0^2+y^2}+1\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{-2\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}}+1\right) = -1$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe.

c. $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z} =$

$= \ e^{1+1^2-0} = \ e^2 \approx 7{,}38906$

El límite existe y es aproximadamente 7,38906.

d. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin(x+y+z) =$

$= \sin(0+0+0) = 0$

e. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4} =$

$$= \frac{0^4}{0^4+0^4} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^4}{x^4+y^4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{x^4+0^4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{x^4}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+y^4}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0^4}{0^4 + y^4}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^4}\right) = 0$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe.

f. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

$$= \frac{(0 * 0)}{\sqrt{0^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{0}{0} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x * 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{\cancel{\sqrt{x^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0 * y}{\sqrt{0^2 + y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\cancel{\sqrt{y^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y}\right) = 0$$

Recta y = mx:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x * (mx)}{\sqrt{x^2 + (mx)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{m * x^2}{\sqrt{x^2 + m^2 * x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{m * x^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{m * x^2}{|x| * \sqrt{(1+m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left| \frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}} \right| \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} |x| \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} =$$

$$= 0 * \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} = 0$$

Curva y = x²:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x * x^2}{\sqrt{x^2 + (x^2)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x^4}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x|\sqrt{(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} * \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left| \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} \right| * \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x * \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)}} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \cos(\theta) * \sin(\theta) =$$

$$= 0 * \cos(\theta) * \sin(\theta) = 0$$

Por lo tanto el límite siempre existe y es 0 independientemente del valor de θ.

g. $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\cancel{(x-y)^2}}{\cancel{x-y}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} x - y = 0$$

El límite existe y es 0.

Ejercicio 4

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida en todo R2 , redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

a. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos(\theta))^3}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}|r| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}|r| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}|r| * r * \cos^3(\theta) =$$

*r no puede ser negativo al tratarse del radio de una circunferencia por lo que se puede sacar el módulo |r| y dejar solo r.

$$= \lim_{r\to 0} r^2 * \cos^3(\theta) =$$

$$= 0^2 * \cos^3(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0,0) = 1$ por lo tanto no se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R². La función puede ser redefinida para extender su continuidad de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

De este modo se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,09} f(x,y) = f(0,0)$ y por lo tanto la función es continua en todo R².

b. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+0^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\cancel{\sqrt{x^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{\sqrt{0^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{\cancel{\sqrt{y^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y}\right) = 0$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe, por lo tanto no se cumple $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R^2. Como el límite no existe se trata de una discontinuidad inevitable por lo que no se puede redefinir la función.

c. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)\ \ y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))^2}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \cos^2(\theta) =$$

*r no puede ser negativo al tratarse del radio de una circunferencia por lo que se puede sacar el módulo |r| y dejar solo r.

$$= \lim_{r\to 0} r * \cos^2(\theta) =$$

$$= 0 * \cos^2(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0,0) = 0$ por lo tanto se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ haciendo que la continuidad este definida en todo R^2.

d. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Como el $Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$ se evaluará la continuidad en el punto (0,0) (el punto que genera problemas).

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\cancel{r^2}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos(\theta) * \sin(\theta) = \cos(\theta) * \sin(\theta)$$

Como el valor del límite depende de θ , el mismo no existe, por lo tanto no se cumple $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R^2.

Como el límite no existe se trata de una discontinuidad inevitable por lo que no se puede redefinir la función.

Además $f(0,0) = \frac{0*0}{0^2+0^2} = \frac{0}{0}$ por lo tanto $\nexists f(0,0)$.

e. $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Como el $Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$ se evaluará la continuidad en el punto (0,0) (el punto que genera problemas).

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * (r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r^2\sin^2(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{\cancel{r^2}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r * \frac{\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r * \cos(\theta) * \sin^2(\theta) =$$

$$= 0 * \cos(\theta) * \sin^2(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0,0) = \frac{0*0^2}{0^2+0^2} = \frac{0}{0}$ por lo tanto $\nexists f(0,0)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R². La función puede ser redefinida para extender su continuidad de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$