Preliminares - Vectores

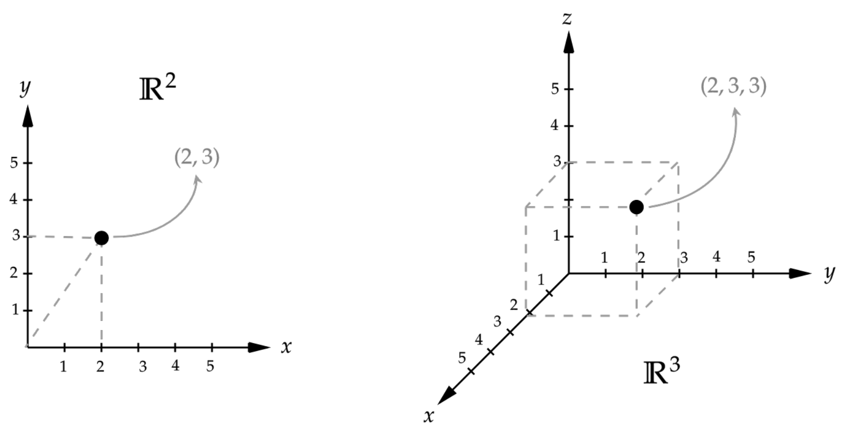
Este documento tiene el objetivo de proveer un acercamiento inicial al concepto de vector y su interpretación geométrica en el plano $\mathbb{R}^2$ y en el espacio $\mathbb{R}^3$.

1 Puntos y Vectores

Primeramente recordemos el concepto de **punto** en el plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$) y en el espacio ($\mathbb{R}^3$)

> **Definición 1.1.** *Definimos a un* ***punto*** *P del plano $\mathbb{R}^2$ como el par ordenado de números reales (a_1, a_2). Tanto a a_1 como a a_2 se los conoce como* ***coordenadas cartesianas de*** *P. Si consideramos a los ejes cartesianos x e y, y a cuya intersección llamamos* ***origen****, podemos renombrar a a_1 como la* ***componente x*** *de P y a a_2 como la* ***componente x*** *de P.*
> *Pensando ahora en el espacio $\mathbb{R}^3$, podemos extender la definición anterior de punto, considerando que un* ***punto*** *Q en el espacio es una terna ordenada (a_1, a_2, a_3) de valores reales. a_3 representa entonces la 3ra componente o coordenada de Q que se encuentra sobre un nuevo eje, al cual solemos llamar z.*

Gráficamente podemos ver a los puntos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ de la siguiente forma:

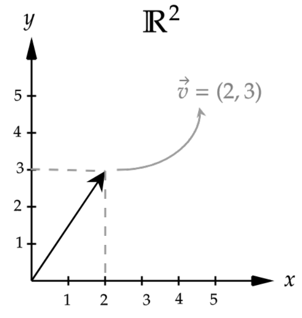


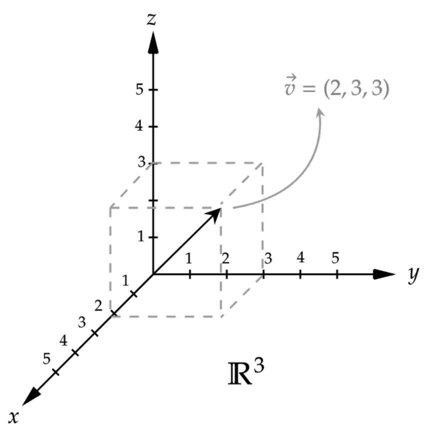
Teniendo esto en cuenta introduciremos a continuación la definición geométrica de un vector.

Definición 1.2. *Definimos a un* ***vector*** $\mathbf{v}$ *o* $\vec{v}$ *en el plano* $\mathbb{R}^2$*, como una tupla ordenada* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$*, donde* v_1 *y* v_2 *son numeros reales. A diferencia de los puntos, representamos graficamente a un vector mediante un segmento de recta dirigido ("flecha") que parte de un punto inicial (cola) hasta un punto final (punta). La* ***magnitud****,* ***sentido*** *y* ***dirección*** *del vector lo caracterizan y diferencian del resto. Si se elige al origen de coordenadas como punto inicial del vector, se dice que es un* ***vector en posición canónica****. Estos vectores tienen como punto inicial a* $O = (0,0)$ *y como punto terminal a* $P = (x, y)$ *y se los anota como* $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$*. De esta forma existe una relación bi-unívoca entre vectores y los puntos del plano, por lo que identificaremos a cada vector con las coordenadas del punto donde termina, es decir,* $\mathbf{v} = (x, y)$
Particularmente cuando hablamos de vectores, si $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$*, decimos que* a_1 *y* a_2 *son las* ***componentes*** *del vector* $\mathbf{v}$*.*

Podemos extender la noción de vector en el plano al espacio $\mathbb{R}^3$*, considerando una tercera componente o coordenada. Por ejemplo:* $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$

De forma gráfica, podemos ver a dos vectores que tienen como comienzo al origen de coordenadas:





Definición 1.3. *Considerando los vectores que* ***no*** *parten del origen de coordenadas, es decir, que no estan en posición canónica, podemos definirlos como aquellos vectores* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ *que tienen un punto inicial* $A = (a_1, a_2)$ *y uno terminal* $B = (b_1, b_2)$*, y donde* $v_1 = b_1 - a_1$ *y* $v_2 = b_2 - a_2$*. Se los anota de la forma* $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$
En el caso de considerar el espacio, tenemos que un vector es de la forma $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *y parte de un punto* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *y otro terminal* $B = (b_1, b_2, b_3)$*. De forma análoga, también tenemos que* $v_3 = b_3 - a_3$*.*
Notamos en estos casos que no podemos representar al vector simplemente con su punto terminal, sino que debemos proveer el inicial también. En efecto, los vectores en posición canónica son un caso especial de estos vectores "generales" o libres.

2 Operaciones algebraicas con vectores

En esta sección definiremos las operaciones básicas que pueden realizarse con los vectores y sus interpretaciones geométricas en el plano (por simplicidad no contemplaremos las interpretaciones en el espacio, pero resultan análogas).

Comencemos con la relación elemental de **igualdad** entre dos vectores:

Definición 2.1. *Dados dos vectores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *y* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$*, decimos que son* ***iguales****, y lo anotamos como* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$*, si y sólo si* $u_1 = v_1$*,* $u_2 = v_2$*. Es decir, dos vectores son iguales si y sólo si son iguales componente a componente.*

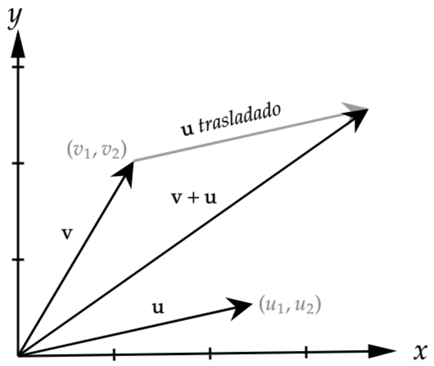
Tomando en cuenta esta relación, pasaremos a definir las distintas operaciones algebráicas básicas para vectores en el plano. Estas definiciones se extienden de forma análoga para los vectores del espacio

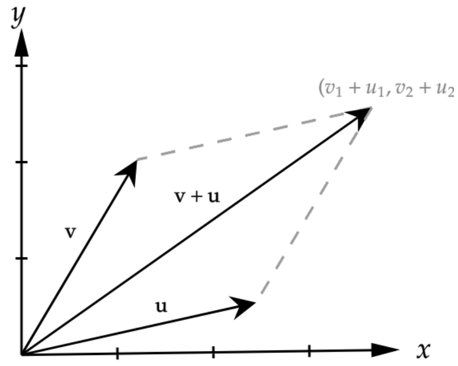
Suma:

Dados dos vectores del plano $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $\mathbf{u} = (v_1, v_2)$, definimos la suma entre ellos como:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

Gráficamente, si trasladamos el vector $\mathbf{u}$ de forma tal que su cola quede en la punta del vector $\mathbf{v}$, el vector suma es aquel con punto de inicio en la cola de $\mathbf{v}$ y punto terminal en el nuevo vector trasladado de $\mathbf{u}$:





Podemos observar, que el resultado de la suma de dos vectores es otro vector que tiene la misma magnitud que la diagonal del paralelogramo que se forma al trasladar los vectores originales.

Producto por escalar:

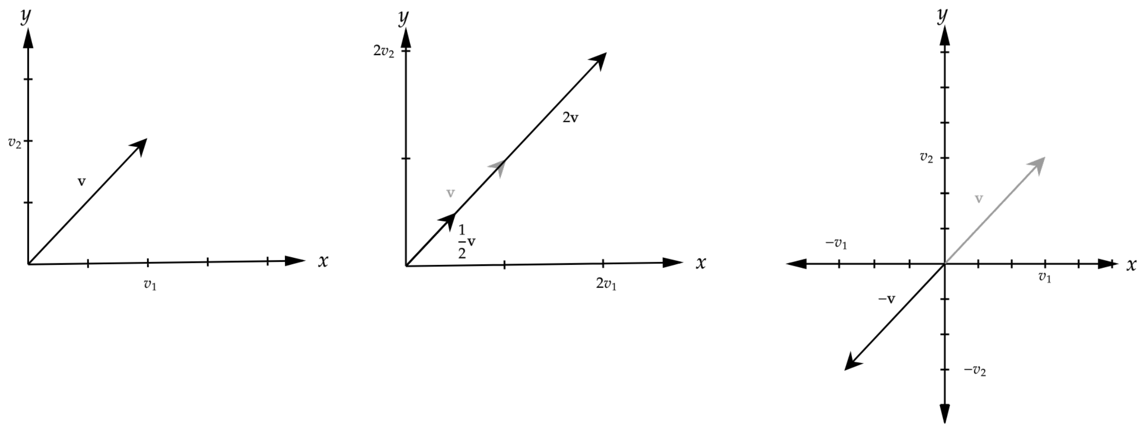
Dados un vector en el plano $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y un escalar real $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos al **producto por escalar** como:

$$\alpha.\mathbf{v} = \alpha.(v_1, v_2) = (\alpha.v_1, \alpha.v_2)$$

De forma geométrica, podemos interpretar al producto por escalar como una contracción o extensión del vector $\mathbf{v}$ en $|\alpha|$ unidades.

- Si $|\alpha| > 1$, equivale a "estirar" el vector $|\alpha|$ unidades en ambas coordenadas.
- Si $0 < |\alpha| < 1$, equivale a "contraer" el vector $|\alpha|$ unidades en ambas coordenadas.

- Si $\alpha < 0$, equivale a la extension o contraccion del vector por $|\alpha|$ unidades pero en sentido contrario, con la misma direccion.



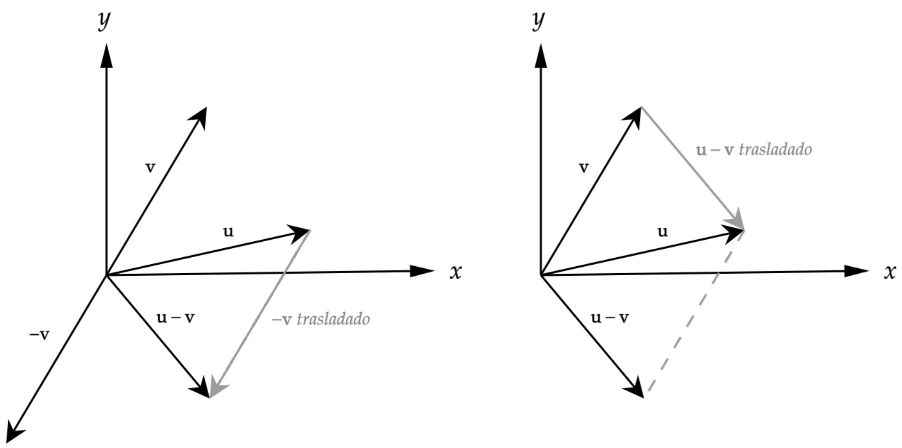
<u>Resta:</u>

> Dados dos vectores en el plano $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $\mathbf{u} = (v_1, v_2)$, definimos la resta entre ellos como:
> $$\mathbf{v} - \mathbf{u} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2)$$

De forma geométrica, podemos dar dos interpretaciones que estan relacionadas. En primer lugar, y de forma más intuitiva, podemos pensar a la resta como la suma de un vector $\mathbf{v}$ y el opuesto de $\mathbf{u}$, esto es, $-\mathbf{u}$. Como hemos definido para el producto, multiplicar un vector por el escalar -1 equivale a invertir el sentido del vector. Luego podemos proceder con la misma interpretacion geometrica de la suma (posicionar la cola del segundo en la punta del primero).

También podemos pensarlo de la siguiente forma: Como $\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}$ quiere decir que, según la interpretación geométrica de la suma de vectores, el vector resta $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es aquel que se le suma a $\mathbf{a}$ para llegar a $\mathbf{b}$. Finalmente, podríamos pensar a $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, con lo que podemos obtener el vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ invirtiendo el sentido de $\mathbf{b} - \mathbf{a}$

A continuación mostramos de forma geométrica la primera y segunda interpretación (a la izquierda y derecha respectivamente) de la resta de vectores.



De esta última operación podemos destacar una gran utilidad, la definición de un vector entre dos puntos dados. Como hemos interpretado geométricamente, y como podemos ver en el gráfico de la derecha, dados dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, la resta del segundo con el primero $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ da como resultado el vector con punto inicial en $\mathbf{a}$ y terminal en $\mathbf{b}$. Consecuentemente, podemos definir lo siguiente:

Definición 2.2. *Dados dos puntos en el espacio $P = (x, y, z)$ y $P' = (x', y', z')$, podemos definir al* ***vector entre los puntos*** *P* ***y*** *P' (comienza en P y termina en P') como la resta de los vectores en posición canónica asociados a ambos puntos. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}'$ los vectores con inicio en el origen de coordenadas y punto terminal en P y P' respectivamente, la resta:*

$$\mathbf{a}' - \mathbf{a} = (x', y', z') - (x, y, z) = (x' - x, y' - y, z' - z)$$

resulta ser el vector $\overrightarrow{PP'}$.

Nota: *De forma análoga ocurre para los vectores en el plano. Simplemente los puntos y vectores tienen una coordenada menos.*

3 Vectores base unitarios

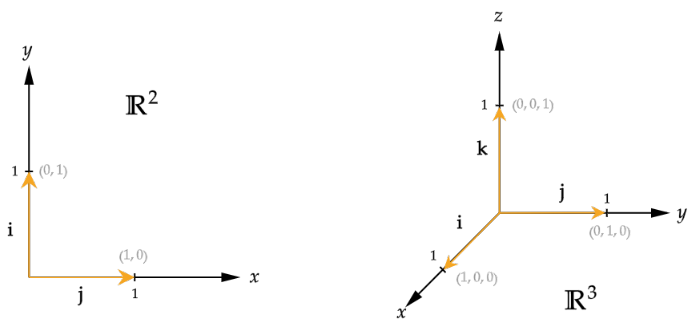
A la hora de describir los vectores del espacio muchas veces es conveniente expresarlos en términos de sumas y productos por escalar de 3 vectores base o también conocidos como **versores**: **i**, **j** y **k**. Estos 3 segmentos de recta dirigidos tienen longitud 1 y son paralelos a cada uno de los ejes, x, y y z respectivamente:

- $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ (Paralelo al eje x)
- $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ (Paralelo al eje y)
- $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ (Paralelo al eje z)

De forma análoga se pueden definir a estos vectores unitarios para el plano, donde solo se toman 2 ejes coordenados,y :

- $\mathbf{i} = (1, 0)$ (Paralelo al eje x)
- $\mathbf{j} = (0, 1)$ (Paralelo al eje y)

Podemos ver su representación gráfica a continuación:



Notemos que dado un vector cualquiera en posición canónica $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, podemos expresarlo en términos de sumas y productos por escalar de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

ya que se cumple

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Con esta forma de expresar a los vectores, es posible pensar a un vector cualquiera primero como extensiones o contracciones de los vectores unitarios **i**, **j** y **k** , y luego una suma de ellos.

4 Magnitud y Distancia

Cuando hemos nombrado a **i**, **j** y **k** como vectores **unitarios**, hemos hecho referencia su **magnitud**. Esto es la *longitud* del vector en el espacio. La semirecta que une dos puntos siempre puede pensarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo y, como sabemos del Teorema de Pitágoras, es posible calcular su longitud (la distancia euclidea entre los puntos) como:

$$hipotenusa = \sqrt{cateto_1^2 + cateto_2^2}$$

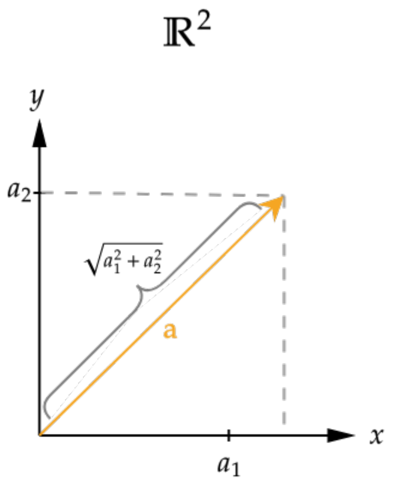
En términos de vectores:

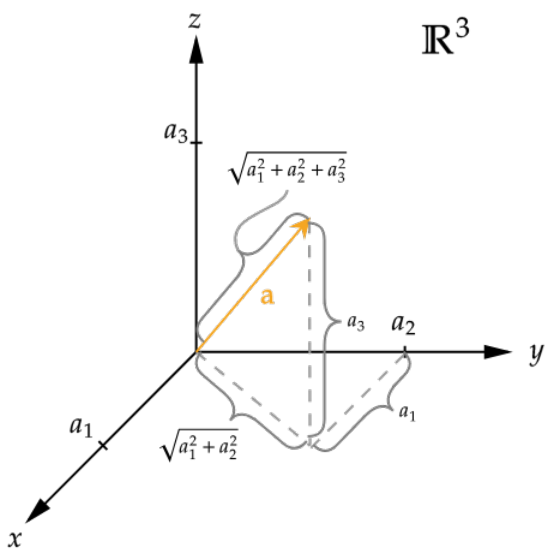
Definición 4.1. *Dado un vector en el plano* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$*, definimos a su* ***magnitud, longitud*** *o* ***norma*** *como:*

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

De forma análoga, y extendiendo el Teorema de Pitágoras a 3 dimensiones, definimos la ***magnitud*** *de un vector* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *en el espacio como:*

$$||\mathbf{b}|| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$





Definición 4.2. *A aquellos vectores cuya magnitud es igual a 1, es decir,* $||\mathbf{a}|| = 1$*, decimos que son* ***vectores unitarios****.*

A cualquier vector dado $\mathbf{a}$ podemos **normalizarlo**, esto es, obtener un vector con la misma direccion, punto de origen y sentido, pero con magnitud igual a 1. Para convertir a un vector en unitario, o normalizarlo, solo basta con dividirlo por su magnitud (aplicando la operación de producto por escalar):

$$\text{Sea } \mathbf{a} \text{ un vector cualquiera} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} \text{ es un vector unitario}$$

Veamos una demostración sencilla de esta propiedad para los vectores del plano: Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ un vector en el plano y $||\mathbf{a}||$ su magnitud, calculemos la norma del nuevo vector

$$\frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} = \left(\frac{a_1}{||\mathbf{a}||}, \frac{a_2}{||\mathbf{a}||} \right)$$

$$\left|\left| \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} \right|\right| = \sqrt{\left(\frac{a_1}{||\mathbf{a}||} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{||\mathbf{a}||} \right)^2} = \sqrt{\frac{a_1^2}{(\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2} + \frac{a_2^2}{(\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}} = \sqrt{1} = 1$$

Una vez introducida la noción de magnitud de un vector y ayudandonos con la definición de resta, podemos definir la **distancia entre los puntos terminales de dos vectores a** y **b**. Como hemos visto en la sección 2, dados dos vectores cualesquiera $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ podemos obtener un vector paralelo a aquel que une los puntos terminales de estos dos primeros. Vimos que $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es el vector paralelo al que tiene punto inicial en el terminal de $\mathbf{a}$ y punto terminal en el de $\mathbf{b}$. Luego, como la magnitud no varía al trasladar un vector, podemos interpretar a $||\mathbf{b} - \mathbf{a}||$ como la distancia entre los puntos terminales de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

5 Producto interno y Ángulo entre vectores

Supongamos que queremos hallar el ángulo mínimo que se forma entre dos vectores del espacio $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$. En esta última sección introduciremos la operación de **producto punto** o **producto escalar**, que son una forma de **producto interno**, que hará posible el cálculo del ángulo.

Definición 5.1. *Sean dos vectores* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *en* $\mathbb{R}^3$*, definimos al* ***producto escalar*** *o* ***producto punto*** *entre ellos como:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

Esta operacion de producto escalar es definida para vectores en general $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{u}$ *con cualquier cantidad de componentes como sigue:*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} v_i.u_i = v_1.u_1 + \cdots + v_n.u_n$$

Notar que el resultado de esta operación entre vectores da como resultado **un escalar** en $\mathbb{R}$, no un vector. Luego, destaquemos algunas propiedades de la operación que surgen de su definición:

Propiedades 5.2. *Sean* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *y* $\mathbf{c}$ *vectores en* $\mathbb{R}^n$ *y* α, β *escalares en* $\mathbb{R}$*, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \qquad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0} \qquad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
3. $\alpha.(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \alpha.\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *y* $\beta.(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \beta.\mathbf{b}$
4. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ *y* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
5. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

Veamos una relación importante entre la norma de un vector y la operación de producto punto. Recordando ambas definiciones, podemos observar que dado un vector cualquiera del espacio (por simplicidad) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1.a_1 + a_2.a_2 + a_3.a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}\right)^2 = ||\mathbf{a}||^2$$

De esta forma llegamos a que, siempre podemos calcular la magnitud de un vector **a** en terminos del producto escalar:

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

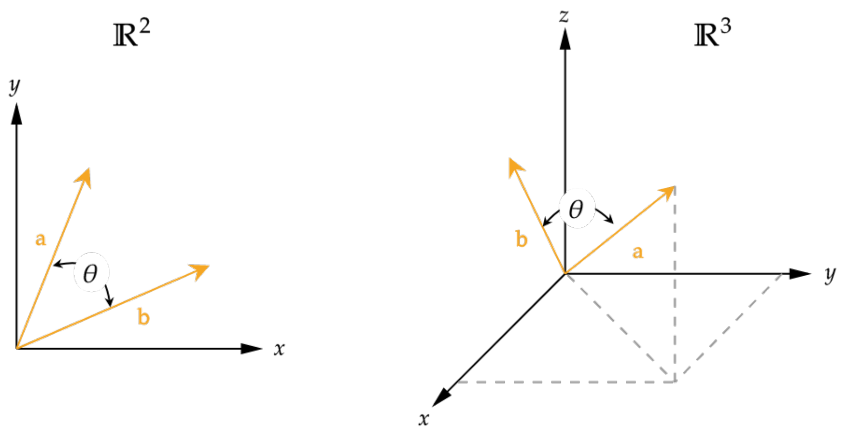
Presentemos finalmente la razón por la que el producto escalar entre vectores nos sirve para calcular el ángulo mínimo entre ellos:

Teorema 5.3. *Sean* **a** *y* **b** *dos vectores en el espacio* $\mathbb{R}^3$ *(también vale para cualquier dimensión), y sea* θ *el ángulo entre dichos vectores, donde* $0 \leq \theta \leq \pi$*, se cumple la siguiente igualdad:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\, ||\mathbf{b}||\, \cos(\theta)$$

Tomando esta igualdad, podemos derivar que el ángulo entre dos vectores tiene la forma:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\, ||\mathbf{b}||}\right)$$



Una última observación con respecto al producto escalar, es que el signo del resultado de esta operación siempre dependerá del signo del resultado del coseno del ángulo y se cumple que:

Propiedades 5.4. *Sean* **a**, **b** *dos vectores:*

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0 \quad si \quad \theta < \frac{\pi}{2} = 90^o$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad si \quad \theta = \frac{\pi}{2} = 90^o$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0 \quad si \quad \theta > \frac{\pi}{2} = 90^o$