TP1 - Cálculo en dos o más variables

Ejercicio 1.

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

   $x^2 + y^2 = 0$

   $(x,y) = (0,0)$

   $D = \{(x,y): (x,y) \in R^2 - (0,0)\}$

b. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - z^2$

   $D = \{(x,y,z): x \in R \,\hat{}\, y \in R \,\hat{}\, z \in R\}$

c. $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2-9}$

   $x^2 + y^2 - 9 = 0$

   $x^2 + y^2 = 9$ Circunferencia de radio 3 centrada en (0,0).

   $D = \{(x,y): x \in R \,\hat{}\, y \in R \,\hat{}\, x^2 + y^2 \neq 9\}$

d. $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+1}$

   Nunca puede ser 0 porque a algo positivo se le suma algo positivo

   $D = \{(x,y): x \in R \,\hat{}\, y \in R\}$

e. $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2-z^2}$

   $y^2 - z^2 = 0$

   $y^2 = z^2$

   $\sqrt{y^2} = \sqrt{z^2}$

   $|y| = |z|$

   $D = \{(x,y,z): x \in R \,\hat{}\, y \in R \,\hat{}\, z \in R \,\hat{}\, y \neq z \,\hat{}\, y \neq -z\}$

f. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

   $9 - x^2 - y^2 < 0$

$-x^2 - y^2 < -9$

$x^2 + y^2 > 9$

$D = \{(x, y): x \in R \,\hat{}\, y \in R \,\hat{}\, x^2 + y^2 \leq 9\}$

g. $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}$

$D = \{(x, y): x \in R \,\hat{}\, y \in R\}$

h. $f(x, y) = \log(16 - x^2 - 16y^2)$

$16 - x^2 - 16y^2 \leq 0$

$1 - \frac{x^2}{16} - y^2 \leq 0$

$-\frac{x^2}{16} - y^2 \leq -1$

$\frac{x^2}{16} + y^2 \geq 1$

$D = \{(x, y): x \in R \,\hat{}\, y \in R \,\hat{}\, \frac{x^2}{16} + y^2 < 1\}$

Ejercicio 2.

Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

a. $f(x, y) = \log(9 - x^2 - 9y^2)$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)

$f(1{,}0) = \log(9 - 1^2 - 9 * 0^2) =$

$= \log(9 - 1 - 0) =$

$= \log(8) \approx 0{,}90309$

$f(1{,}1) = \log(9 - 1^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 1 - 9) =$

$= \log(-1) = Indefinido$

$(1{,}1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(0{,}1) = \log(9 - 0^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 0 - 9) =$

$= \log(0) = Indefinido$

$(0,1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(-1,1) = \log(9 - (-1)^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 1 - 9) =$

$= \log(-1) = Indefinido$

(-1,1) $\notin \mathrm{Dom}(f)$

b. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1); (2,2)

$f(1{,}0) = \sqrt{4 - 1^2 - 4 * 0^2} =$

$= \sqrt{4 - 1 - 0} =$

$= \sqrt{3} = 1{,}732$

$f(1{,}1) = \sqrt{4 - 1^2 - 4 * 1^2} =$

$= \sqrt{4 - 1 - 4} =$

$= \sqrt{-1} = Indefinido$

$(1{,}1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(0{,}1) = \sqrt{4 - 0^2 - 4 * 1^2} =$

$= \sqrt{4 - 0 - 4} =$

$= \sqrt{0} = 0$

$f(-1{,}1) = \sqrt{4 - (-1)^2 - 4 * 1^2} =$

$= \sqrt{4 - 1 - 4} =$

$= \sqrt{-1} = Indefinido$

(-1,1) $\notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(2{,}2) = \sqrt{4 - 2^2 - 4 * 2^2} =$

$= \sqrt{4 - 4 - 16} =$

$= \sqrt{-16} = Indefinido$

$(2{,}2) \notin \mathrm{Dom}(f)$

c. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)

$f(1,0) = e^{1^2+0^2} =$

$= e^{1+0} =$

$= e^1 = e$

$f(1,1) = e^{1^2+1^2} =$

$= e^{1+1} =$

$= e^2 \approx 7{,}38096$

$f(0,1) = e^{0^2+1^2} =$

$= e^{0+1} =$

$= e^1 = e$

$f(-1,1) = e^{(-1)^2+1^2} =$

$= e^{1+1} =$

$= e^2 \approx 7{,}38096$

Ejercicio 3

Calcular los siguientes límites, o demostrar que no existe

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} 5x - x^2 + 3y^2 =$

$= 5 * 3 - 3^2 + 3 * 1^2 =$

$= 15 - 9 + 3 = 9$

El límite existe y es 9.

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) =$

$=(\frac{7*0^2-2*0^2}{0+0^2} + 1) = Indeterminado$

Iterados:

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\left(\frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2}+1\right)\right) =$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{7x^2-2*0^2}{x^2+0^2}+1\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{7x^2}{x^2}+1\right)=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{7\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+1\right)=8$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2}+1\right)\right)=$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{7*0^2-2y^2}{0^2+y^2}+1\right)=$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{-2\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}}+1\right)=-1$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe.

c. $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z} =$

$= e^{1+1^2-0} = e^2 \approx 7{,}38906$

El límite existe y es aproximadamente 7,38906.

d. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin(x+y+z) =$

$= \sin(0+0+0)=0$

e. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4} =$

$$= \frac{0^4}{0^4+0^4} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^4}{x^4+y^4}\right)=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{x^4+0^4}\right)=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{x^4}\right)=1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+y^4}\right)=$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{0^4}{0^4 + y^4} \right) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{0}{y^4} \right) = 0$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe.

f. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

$$= \frac{(0 * 0)}{\sqrt{0^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{0}{0} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x * 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{0}{\cancel{\sqrt{x^2}}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{0}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{0 * y}{\sqrt{0^2 + y^2}} \right) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{y}{\cancel{\sqrt{y^2}}} \right) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{0}{y} \right) = 0$$

Recta y = mx:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x * (mx)}{\sqrt{x^2 + (mx)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{m * x^2}{\sqrt{x^2 + m^2 * x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{m * x^2}{\sqrt{x^2(1 + m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{m * x^2}{|x| * \sqrt{(1 + m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} \frac{m}{\sqrt{(1 + m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left| \frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}} \right| \frac{m}{\sqrt{(1 + m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} |x| \frac{m}{\sqrt{(1 + m^2)}} =$$

$$= 0 * \frac{m}{\sqrt{(1 + m^2)}} = \ 0$$

Curva $y = x^2$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x * x^2}{\sqrt{x^2 + (x^2)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + x^4}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2(1 + x^2)}} =$$

$$= \ \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x|\sqrt{(1 + x^2)}} =$$

$$= \ \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} * \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}} =$$

$$= \ \lim_{x \to 0} \left| \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} \right| * \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}} =$$

$$= \ \lim_{x \to 0} x * \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}} =$$

$$= \ \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{(1 + x^2)}} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)\ \ y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{r\cos(\theta) * \ r\sin(\theta)}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \ \lim_{r \to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \cos(\theta) * \sin(\theta) =$$

$$= 0 * \cos(\theta) * \sin(\theta) = 0$$

Por lo tanto el límite siempre existe y es 0 independientemente del valor de θ.

g. $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\cancel{(x-y)^2}}{\cancel{x-y}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} x - y = 0$$

El límite existe y es 0.

Ejercicio 4

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida en todo R2 , redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

a. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si(x,y) \neq (0,0) \\ 1 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)\ \ y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos(\theta))^3}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}|r| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}|r| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}|r| * r * \cos^3(\theta) =$$

*r no puede ser negativo al tratarse del radio de una circunferencia por lo que se puede sacar el módulo |r| y dejar solo r.

$$= \lim_{r\to 0} r^2 * \cos^3(\theta) =$$

$$= 0^2 * \ \cos^3(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0{,}0) = 1$ por lo tanto no se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0{,}0)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R². La función puede ser redefinida para extender su continuidad de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\ si(x,y) \neq (0{,}0)\\ 0\ si\ (x,y) = (0{,}0)\end{cases}$$

De este modo se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,09} f(x,y) = f(0{,}0)$ y por lo tanto la función es continua en todo R².

b. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ si(x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+0^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\cancel{\sqrt{x^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{\sqrt{0^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{\cancel{\sqrt{y^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y}\right) = 0$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe, por lo tanto no se cumple $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R^2. Como el límite no existe se trata de una discontinuidad inevitable por lo que no se puede redefinir la función.

c. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ si(x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))^2}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \cos^2(\theta) =$$

*r no puede ser negativo al tratarse del radio de una circunferencia por lo que se puede sacar el módulo |r| y dejar solo r.

$$= \lim_{r\to 0} r * \cos^2(\theta) =$$

$$= 0 * \cos^2(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0,0) = 0$ por lo tanto se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ haciendo que la continuidad este definida en todo R².

d. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Como el $Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$ se evaluará la continuidad en el punto (0,0) (el punto que genera problemas).

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\cancel{r^2}\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\cancel{r^2}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\cos(\theta) * \sin(\theta) = \cos(\theta) * \sin(\theta)$$

Como el valor del límite depende de θ , el mismo no existe, por lo tanto no se cumple $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R^2.

Como el límite no existe se trata de una discontinuidad inevitable por lo que no se puede redefinir la función.

Además $f(0,0) = \frac{0*0}{0^2+0^2} = \frac{0}{0}$ por lo tanto $\nexists f(0,0)$.

e. $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Como el $Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$ se evaluará la continuidad en el punto (0,0) (el punto que genera problemas).

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r\cos(\theta) * (r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r\cos(\theta) * r^2\sin^2(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\cancel{r^3}\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{\cancel{r^2}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r * \frac{\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r * \cos(\theta) * \sin^2(\theta) =$$

$$= 0 * \cos(\theta) * \sin^2(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0,0) = \frac{0*0^2}{0^2+0^2} = \frac{0}{0}$ por lo tanto $\nexists f(0,0)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R². La función puede ser redefinida para extender su continuidad de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \quad si(x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ejercicio 5.

Encontrar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

a) $f(x,y) = 3x^2y + y^3$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = 6xy$

$fy(x,y) = 3x^2 + 3y^2$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

b) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$

$Dom(f) = R^3$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y,z) = 2xy + z^2$

$fy(x,y,z) = x^2 + 2yz$

$fz(x,y,z) = y^2 + 2zx$

$Dom(fx) = R^3$

$Dom(fy) = R^3$

$Dom(fz) = R^3$

c) $f(x,y) = e^{xy} + \sin(x^2 + y)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = e^{xy}y + \cos(x^2 + y) * 2x$

$fy(x,y) = e^{xy}x + \cos(x^2 + y)$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

d) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = \frac{\left(y * (x^2 + y^2)\right) - xy * 2x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{yx^2 + y^3 - 2x^2y}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \frac{y^3 + yx^2 * (1 - 2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \frac{y^3 - yx^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

$$fy(x,y) = \frac{x * (x^2 + y^2) - xy * 2y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{xy^2 + x^3 - 2y^2x}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$
$$= \frac{x^3 + xy^2 * (1-2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$
$$= \frac{x^3 - xy^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

$Dom(fx) = R^2 - \{(0,0)\}$

$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$

e) $f(x,y) = x^2 \log(x+y)$

$Dom(f) = \{(x,y): (x,y) \in R^2 \,\hat{}\, x + y > 0\}$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = 2x * \ln(\mathrm{x} + \mathrm{y}) + \frac{x^2}{x+y}$

$fy(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$

$Dom(fx) = \{(x,y): (x,y) \in R^2 \,\hat{}\, x + y > 0\}$

$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$

f) $f(x,y) = \sum_{i=n}^{n}[y_i - (x + yx_i)]$

Paso.

Ejercicio 6.

Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x,y) = xe^{x^2y}$ en $(1, \log(2))$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = e^{x^2y} + e^{x^2y} * 2 * x^2 * y$$

$$fy(x,y) = x^3 * e^{x^2y}$$

$$fx(x,y) = e^{1^2\ln(2)} + e^{1^2\ln(2)} * 2 * 1^2 * \ln(2) =$$

$$= 2 + 4\ln(2) \approx 4.77258$$

$$fy(x,y) = 1^3 * e^{1^2\ln(2)} = 2$$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en (-4,3)

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$fy(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$fx(x,y) = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = -\frac{4}{5}$$

$$fy(x,y) = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$$

Ejercicio 7.

Analizar diferenciabilidad en R^2 de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = sen(x^2 + y^2)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo R^2 por lo que las derivadas parciales se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x, y) = cos(x^2 + y^2) * 2x$

$fy(x, y) = cos(x^2 + y^2) * 2y$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales fx(x,y) y fy(x,y), y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2.

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que las derivadas parciales se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$fy(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$Dom(fx) = R^2 - \{(0,0)\}$

$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$

Como (0,0) no pertenece al dominio de ambas derivadas parciales, debemos analizar que pasa con respecto a la diferenciabilidad en dicho punto. Se sabe que f es continua en (0,0); ahora veremos qué pasa con respecto a las derivadas parciales en (0,0) haciendo uso de la definición.

$$fx(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim\limits_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

Como el limite puede dar dos valores, no existe el mismo haciendo que la función no tenga derivadas parciales en el punto (0,0) y por lo tanto no es diferenciable en todo R^2.

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Como tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas (aplicando las propiedades vistas en teoría se puede afirmar que todo polinomio es diferenciable) f es diferenciable en todos los puntos de $R^2 - (0, 0)$.
Falta ver qué pasa en el (0,0) y se analizara usando la diferenciabilidad:
f es continua en (0,0); para buscar las derivadas parciales se debe aplicar la definición.

$$fx(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$fy(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

f es diferenciable en el punto (0,0) si lo siguiente tiende a 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \{fx(x,y)(x-0) + fy(x,y)(y-0) + f(0,0)\}}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2) * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2) * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2) * (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) *\ r\sin(\theta)}{((r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) *\ r\sin(\theta)}{(r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r^3} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = \begin{cases} \lim\limits_{r\to 0+} \dfrac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = +\infty \\ \lim\limits_{r\to 0-} \dfrac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = -\infty \end{cases}$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe. Por lo tanto f no es diferenciable en el punto (0,0) y en consecuencia no es diferenciable en todo R^2.