TP1 - Cálculo en dos o más variables

Ejercicio 1.

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

   $x^2 + y^2 = 0$

   $(x,y) = (0,0)$

   $D = \{(x,y): (x,y) \in R^2 - (0,0)\}$

b. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - z^2$

   $D = \{(x,y,z): x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R\}$

c. $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2-9}$

   $x^2 + y^2 - 9 = 0$

   $x^2 + y^2 = 9$ Circunferencia de radio 3 centrada en (0,0).

   $D = \{(x,y): x \in R \wedge y \in R \wedge x^2 + y^2 \neq 9\}$

d. $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+1}$

   Nunca puede ser 0 porque a algo positivo se le suma algo positivo

   $D = \{(x,y): x \in R \wedge y \in R\}$

e. $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2-z^2}$

   $y^2 - z^2 = 0$

   $y^2 = z^2$

   $\sqrt{y^2} = \sqrt{z^2}$

   $|y| = |z|$

   $D = \{(x,y,z): x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R \wedge y \neq z \wedge y \neq -z\}$

f. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

   $9 - x^2 - y^2 < 0$

$-x^2 - y^2 < -9$

$x^2 + y^2 > 9$

$D = \{(x, y): x \in R \wedge y \in R \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$

g. $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}$

$D = \{(x, y): x \in R \wedge y \in R\}$

h. $f(x, y) = \log(16 - x^2 - 16y^2)$

$16 - x^2 - 16y^2 \leq 0$

$1 - \frac{x^2}{16} - y^2 \leq 0$

$-\frac{x^2}{16} - y^2 \leq -1$

$\frac{x^2}{16} + y^2 \geq 1$

$D = \{(x, y): x \in R \wedge y \in R \wedge \frac{x^2}{16} + y^2 < 1\}$

Ejercicio 2.

Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

a. $f(x, y) = \log(9 - x^2 - 9y^2)$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)

$f(1,0) = \log(9 - 1^2 - 9 * 0^2) =$

$= \log(9 - 1 - 0) =$

$= \log(8) \approx 0{,}90309$

$f(1,1) = \log(9 - 1^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 1 - 9) =$

$= \log(-1) = Indefinido$

$(1,1) \notin \text{Dom}(f)$

$f(0,1) = \log(9 - 0^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9 - 0 - 9) =$

$= \log(0) = Indefinido$

$(0,1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(-1,1) = \log(9-(-1)^2 - 9 * 1^2) =$

$= \log(9-1-9) =$

$= \log(-1) = Indefinido$

(-1,1) $\notin \mathrm{Dom}(f)$

b. $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1); (2,2)

$f(1,0) = \sqrt{4-1^2-4*0^2} =$

$= \sqrt{4-1-0} =$

$= \sqrt{3} = 1{,}732$

$f(1,1) = \sqrt{4-1^2-4*1^2} =$

$= \sqrt{4-1-4} =$

$= \sqrt{-1} = Indefinido$

$(1,1) \notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(0,1) = \sqrt{4-0^2-4*1^2} =$

$= \sqrt{4-0-4} =$

$= \sqrt{0} = 0$

$f(-1,1) = \sqrt{4-(-1)^2-4*1^2} =$

$= \sqrt{4-1-4} =$

$= \sqrt{-1} = Indefinido$

(-1,1) $\notin \mathrm{Dom}(f)$

$f(2,2) = \sqrt{4-2^2-4*2^2} =$

$= \sqrt{4-4-16} =$

$= \sqrt{-16} = Indefinido$

$(2,2) \notin \mathrm{Dom}(f)$

c. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en (1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)

$f(1,0) = e^{1^2+0^2} =$

$= e^{1+0} =$

$= e^1 = e$

$f(1,1) = e^{1^2+1^2} =$

$= e^{1+1} =$

$= e^2 \approx 7,38096$

$f(0,1) = e^{0^2+1^2} =$

$= e^{0+1} =$

$= e^1 = e$

$f(-1,1) = e^{(-1)^2+1^2} =$

$= e^{1+1} =$

$= e^2 \approx 7,38096$

Ejercicio 3

Calcular los siguientes límites, o demostrar que no existe

a. $\underset{(x,y)\to(3,1)}{lim} 5x - x^2 + 3y^2 =$

$= 5 * 3 - 3^2 + 3 * 1^2 =$

$= 15 - 9 + 3 = 9$

El límite existe y es 9.

b. $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} (\frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2} + 1) =$

$=(\frac{7*0^2-2*0^2}{0+0^2} + 1) = Indeterminado$

Iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2}+1\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{7x^2-2*0^2}{x^2+0^2}+1\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{7x^2}{x^2}+1\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{7\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+1\right) = 8$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x^2-2y^2}{x^2+y^2}+1\right)\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{7*0^2-2y^2}{0^2+y^2}+1\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{-2\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}}+1\right) = -1$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe.

c. $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z} =$

$$= e^{1+1^2-0} = e^2 \approx 7{,}38906$$

El límite existe y es aproximadamente 7,38906.

d. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin(x+y+z) =$

$$= \sin(0+0+0) = 0$$

e. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4} =$

$$= \frac{0^4}{0^4+0^4} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^4}{x^4+y^4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{x^4+0^4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{x^4}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+y^4}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0^4}{0^4 + y^4}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^4}\right) = 0$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe.

f. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

$$= \frac{(0 * 0)}{\sqrt{0^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{0}{0} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x * 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{\cancel{\sqrt{x^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0 * y}{\sqrt{0^2 + y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\cancel{\sqrt{y^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y}\right) = 0$$

Recta y = mx:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x * (mx)}{\sqrt{x^2 + (mx)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m * x^2}{\sqrt{x^2 + m^2 * x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{m * x^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{m * x^2}{|x| * \sqrt{(1+m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left| \frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}} \right| \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} |x| \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} =$$

$$= 0 * \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} = 0$$

Curva y = x²:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x * x^2}{\sqrt{x^2 + (x^2)^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x^4}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x|\sqrt{(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} * \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left| \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} \right| * \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x * \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)}} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos(\theta) * \sin(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \cos(\theta) * \sin(\theta) =$$

$$= 0 * \cos(\theta) * \sin(\theta) = 0$$

Por lo tanto el límite siempre existe y es 0 independientemente del valor de θ.

g. $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\cancel{(x-y)^2}}{\cancel{x-y}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,2)} x - y = 0$$

El límite existe y es 0.

Ejercicio 4

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida en todo R^2 , redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

a. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \ si(x,y) \neq (0,0) \\ 1 \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos(\theta))^3}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3 * \cos^3(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}|r| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}|r| * \frac{r * \cos^3(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}|r| * r * \cos^3(\theta) =$$

*r no puede ser negativo al tratarse del radio de una circunferencia por lo que se puede sacar el módulo |r| y dejar solo r.

$$= \lim_{r\to 0} r^2 * \cos^3(\theta) =$$

$$= 0^2 * \cos^3(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0,0) = 1$ por lo tanto no se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R². La función puede ser redefinida para extender su continuidad de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

De este modo se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,09} f(x,y) = f(0,0)$ y por lo tanto la función es continua en todo R².

b. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Iterados:

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+0^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\cancel{\sqrt{x^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to0}\left(\frac{0}{\sqrt{0^2+y^2}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to0}\left(\frac{0}{\cancel{\sqrt{y^2}}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to0}\left(\frac{0}{y}\right) = 0$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe, por lo tanto no se cumple $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R^2. Como el límite no existe se trata de una discontinuidad inevitable por lo que no se puede redefinir la función.

c. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \ si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La función $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todos los R^2 – (0,0) ya que está compuesta por dos funciones continuas. El numerador es un polinomio por lo tanto es continua por definición y el denominador nunca dará 0 ni negativo ya que está restringida y se trata de la suma de potencias al cuadrado (siempre da valores positivos).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)\ \ y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))^2}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 * \cos^2(\theta)}{|r|\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \left|\frac{r^2}{r}\right| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{1}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} |r| * \cos^2(\theta) =$$

*r no puede ser negativo al tratarse del radio de una circunferencia por lo que se puede sacar el módulo |r| y dejar solo r.

$$= \lim_{r\to 0} r * \cos^2(\theta) =$$

$$= 0 * \cos^2(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0,0) = 0$ por lo tanto se cumple $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ haciendo que la continuidad este definida en todo R^2.

d. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Como el $Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$ se evaluará la continuidad en el punto (0,0) (el punto que genera problemas).

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\cos(\theta) * \sin(\theta)}{\cancel{r^2}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos(\theta) * \sin(\theta) = \cos(\theta) * \sin(\theta)$$

Como el valor del límite depende de θ , el mismo no existe, por lo tanto no se cumple $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R^2.

Como el límite no existe se trata de una discontinuidad inevitable por lo que no se puede redefinir la función.

Además $f(0,0) = \frac{0*0}{0^2+0^2} = \frac{0}{0}$ por lo tanto $\nexists f(0,0)$.

e. $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Como el $Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$ se evaluará la continuidad en el punto (0,0) (el punto que genera problemas).

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * (r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r^2\sin^2(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{\cancel{r^2}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r * \frac{\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r * \cos(\theta) * \sin^2(\theta) =$$

$$= 0 * \cos(\theta) * \sin^2(\theta) = 0$$

Así queda demostrado que existe el límite y es 0 independientemente del valor de θ.

$f(0,0) = \frac{0*0^2}{0^2+0^2} = \frac{0}{0}$ por lo tanto $\nexists f(0,0)$ haciendo que la continuidad no este definida en todo R^2. La función puede ser redefinida para extender su continuidad de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ejercicio 5.

Encontrar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

a. $f(x,y) = 3x^2y + y^3$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = 6xy$

$fy(x,y) = 3x^2 + 3y^2$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

b. $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$

$Dom(f) = R^3$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y,z) = 2xy + z^2$

$fy(x,y,z) = x^2 + 2yz$

$fz(x,y,z) = y^2 + 2zx$

$Dom(fx) = R^3$

$Dom(fy) = R^3$

$Dom(fz) = R^3$

c. $f(x,y) = e^{xy} + \sin(x^2 + y)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = e^{xy}y + \cos(x^2 + y) * 2x$

$fy(x,y) = e^{xy}x + \cos(x^2 + y)$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

d. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$Dom(f) = R^2 - \{(0,0)\}$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = \frac{\left(y * (x^2 + y^2)\right) - xy * 2x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{yx^2 + y^3 - 2x^2y}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \frac{y^3 + yx^2 * (1 - 2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \frac{y^3 - yx^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

$$fy(x,y) = \frac{x * (x^2 + y^2) - xy * 2y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{xy^2 + x^3 - 2y^2x}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \frac{x^3 + xy^2 * (1-2)}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} =$$

$$= \frac{x^3 - xy^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

$Dom(fx) = R^2 - \{(0,0)\}$

$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$

e. $f(x,y) = x^2 \log(x+y)$

$Dom(f) = \{(x,y): (x,y) \in R^2 \,\hat{}\, x+y > 0\}$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = 2x * \ln(\mathrm{x}+\mathrm{y}) + \frac{x^2}{x+y}$

$fy(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$

$Dom(fx) = \{(x,y): (x,y) \in R^2 \,\hat{}\, x+y > 0\}$

$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$

f. $f(x,y) = \sum_{i=n}^{n} [y_i - (x + yx_i)]$

Paso.

Ejercicio 6.

Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x,y) = xe^{x^2y}$ en (1,log (2))

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = e^{x^2y} + e^{x^2y} * 2 * x^2 * y$$
$$fy(x,y) = x^3 * e^{x^2y}$$

$$fx(x,y) = e^{1^2\ln(2)} + e^{1^2\ln(2)} * 2 * 1^2 * \ln(2) =$$
$$= 2 + 4\ln(2) \approx 4.77258$$

$$fy(x,y) = 1^3 * e^{1^2\ln(2)} = 2$$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en (-4,3)

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$fy(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$fx(x,y) = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = -\frac{4}{5}$$
$$fy(x,y) = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$$

Ejercicio 7.

Analizar diferenciabilidad en R^2 de las siguientes funciones:

a. $f(x,y) = sen(x^2 + y^2)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo R^2 por lo que las derivadas parciales se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = cos(x^2 + y^2) * 2x$
$fy(x,y) = cos(x^2 + y^2) * 2y$

$Dom(fx) = R^2$
$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x,y)$ y $fy(x,y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2.

b. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$Dom(f) = R^2$
f es continua en todo su dominio por lo que las derivadas parciales se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$$fx(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$fy(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$Dom(fx) = R^2 - \{(0,0)\}$
$Dom(fy) = R^2 - \{(0,0)\}$

Como (0,0) no pertenece al dominio de ambas derivadas parciales, debemos analizar que pasa con respecto a la diferenciabilidad en dicho punto. Se sabe que f es continua en (0,0); ahora veremos qué pasa con respecto a las derivadas parciales en (0,0) haciendo uso de la definición.

$$fx(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim\limits_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

Como el limite puede dar dos valores, no existe el mismo haciendo que la función no tenga derivadas parciales en el punto (0,0) y por lo tanto no es diferenciable en todo R^2.

c. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \, si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Como tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas (aplicando las propiedades vistas en teoría se puede afirmar que todo polinomio es diferenciable) f es diferenciable en todos los puntos de $R^2 - (0, 0)$.
Falta ver qué pasa en el (0,0) y se analizara usando la diferenciabilidad:
f es continua en (0,0); para buscar las derivadas parciales se debe aplicar la definición.

$$fx(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$fy(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k^3} = 0$$

f es diferenciable en el punto (0,0) si lo siguiente tiende a 0:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - \{fx(x,y)(x-0) + fy(x,y)(y-0) + f(0,0)\}}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\frac{xy}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2) * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2) * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2) * (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{((r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{(r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r^3} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = \begin{cases} \lim\limits_{r\to 0+} \dfrac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = +\infty \\ \lim\limits_{r\to 0-} \dfrac{\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r} = -\infty \end{cases}$$

Como al acercarse a (0,0) por dos caminos distintos se obtienen resultados diferentes se puede concluir que el límite no existe. Por lo tanto f no es diferenciable en el punto (0,0) y en consecuencia no es diferenciable en todo R^2.

d. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\, si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Como tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas (aplicando las propiedades vistas en teoría se puede afirmar que todo polinomio es diferenciable) f es diferenciable en todos los puntos de $R^2 - (0, 0)$.

Falta ver qué pasa en el (0,0) y se analizara usando la diferenciabilidad:

f es continua en (0,0); para buscar las derivadas parciales se debe aplicar la definición.

$$fx(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$fy(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k^3} = 0$$

f es diferenciable en el punto (0,0) si lo siguiente tiende a 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \{fx(x,y)(x-0) + fy(x,y)(y-0) + f(0,0)\}}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2) * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2) * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2) * (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)\ \ y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * (r\sin(\theta))^2}{((r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r^2 * \sin^2(\theta)}{(r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos(\theta) * \sin^2(\theta)}{r^3} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos(\theta) * \sin^2(\theta)$$

Como el valor del límite depende de θ se puede concluir que el límite no existe. Por lo tanto f no es diferenciable en el punto (0,0) y en consecuencia no es diferenciable en todo R^2.

e. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Como tanto el numerador como el denominador son funciones polinómicas (aplicando las propiedades vistas en teoría se puede afirmar que todo polinomio es diferenciable) f es diferenciable en todos los puntos de $R^2 - (0, 0)$.

Falta ver qué pasa en el (0,0) y se analizara usando la diferenciabilidad:

f es continua en (0,0); para buscar las derivadas parciales se debe aplicar la definición.

$$fx(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{|h| * h} = 0$$

$$fy(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{|k| * k} = 0$$

f es diferenciable en el punto (0,0) si lo siguiente tiende a 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \{fx(x,y)(x-0) + fy(x,y)(y-0) + f(0,0)\}}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2} * \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} =$$

Como se trata de la suma de potencias, no hace falta poner el módulo puesto que nunca dará negativo.

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = Indeterminado$$

Coordenadas Polares $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta) * r\sin(\theta)}{r^2 * \cos^2(\theta) + r^2 * \sin^2(\theta)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\theta) * \sin(\theta)}{r^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos(\theta) * \sin(\theta) =$$

Como el valor del límite depende de θ se puede concluir que el límite no existe. Por lo tanto f no es diferenciable en el punto (0, 0) y en consecuencia no es diferenciable en todo R^2.

Ejercicio 8.

Hallar, en caso de que exista, el plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en el punto $(-1, 1, f(-1,1))$.

De ser posible, con ayuda de un software a su elección, muestre las gráficas de la función y el plano tangente.

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = e^{x^2+y^2} * 2x$

$fy(x,y) = e^{x^2+y^2} * 2y$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x,y)$ y $fy(x,y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2.

Ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $P0 = (x0, y0, f(x0, y0))$:

$$z = fx(x0,y0) * (x - x0) + fy(x0,y0) * (y - y0) + f(x0,y0)$$

Para hallar la ecuación del plano tangente debemos evaluar la función y sus derivadas parciales primeras en el punto $(-1, 1)$:

$fx(-1,1) = e^{(-1)^2+1^2} * 2 * (-1) = e^2 * (-2) \approx 7.38905609893 * (-2)$
≈ -14.7781121979

$fy(-1,1) = e^{(-1)^2+1^2} * 2 = e^2 * 2 \approx 7.38905609893 * 2 \approx 14.7781121979$

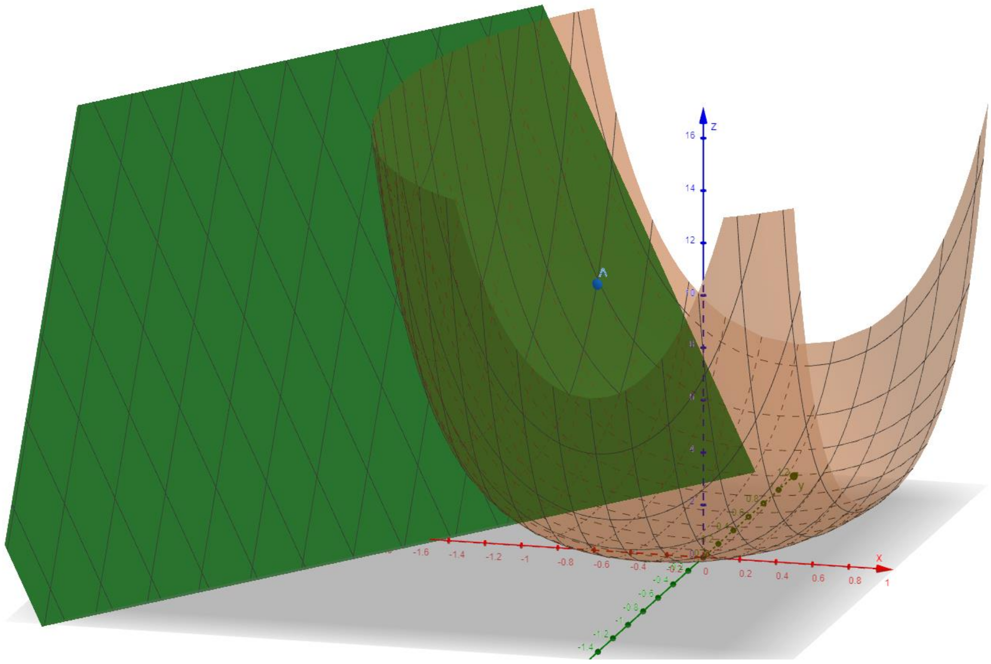
$f(-1,1) = e^{(-1)^2+1^2} = e^2 \approx 7.38905609893$

Por lo tanto, el plano tangente a la gráfica de f por el punto $(-1, 1, f(-1,1))$ es:

$z = -14.7781121979 * (x - (-1)) + 14.7781121979 * (y - 1) + 7.38905609893$

$z = e^2 * (-2) * (x - (-1)) + e^2 * 2 * (y - 1) + e^2$

<u>Gráfico de $f(x,y)$ y del plano tangente</u>



Ejercicio 9.

Encontrar la aproximación lineal de la función $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en $(1, 0)$ y utilizarla para estimar aproximadamente $f(0.98, 0.05)$.

Grafique con ayuda de software la función y su aproximación lineal.

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular usando las reglas de derivación.

$fx(x, y) = 2x + e^{xy} * y$
$fy(x, y) = 4y^3 + e^{xy} * x$

$Dom(fx) = R^2$
$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x, y)$ y $fy(x, y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2.

Para hallar la ecuación del plano tangente debemos evaluar la función y sus derivadas parciales primeras en el punto $(1, 0)$:

$fx(1, 0) = 2 * 1 + e^{1*0} * 0 = 2$

$fy(1, 0) = 4 * 0^3 + e^{1*0} * 1 = e^0 = 1$

$f(1,0) = 1^2 + 0^4 + e^{1*0} = 1 + 1 = 2$

El plano tangente a la gráfica de f por el punto $(1, 0, f(1, 0))$ es:

$z = 2 * (x - 1) + 1 * (y - 0) + 2 = 2x - 2 + y + 2 = 2x + y$

Linealización de f en el punto $P0 = (x0, y0)$:

$$L(x, y) = f(x0, y0) + fx(x0, y0) * (x - x0) + fy(x0, y0) * (y - y0)$$

La linealización de f alrededor de $(0.98, 0.05)$ está dada por la función:

$L(x, y) = 2 + 2 * (x - 1) + 1 * (y - 0) = 2 + 2x - 2 + y = 2x + y$

Por lo tanto, la aproximación lineal de f en el punto $(0.98, 0.05)$ es:

$L(0.98, 0.05) = 2 * 0.98 + 0.05 = 2.01$

Entonces $f(0.98, 0.05) \approx L(0.98, 0.05) = 2.01$

Gráfico de $f(0.98, 0.05) \approx L(0.98, 0.05)$

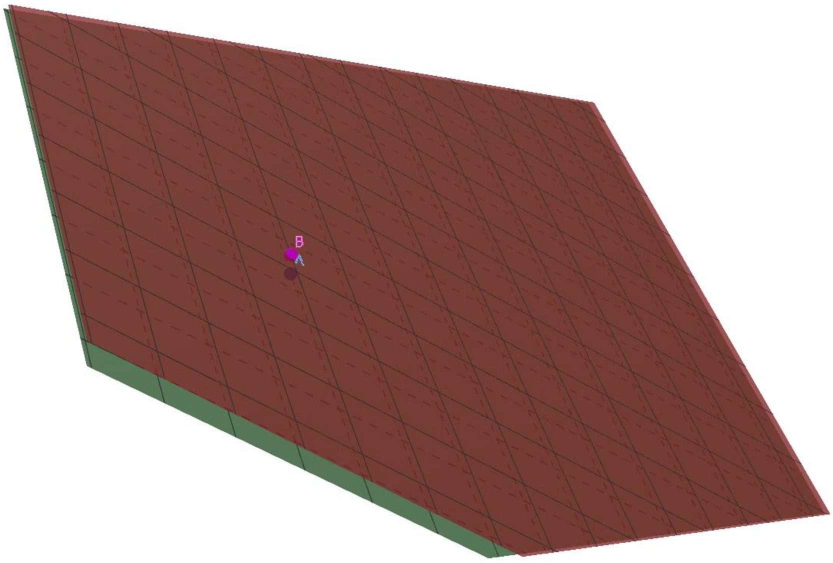
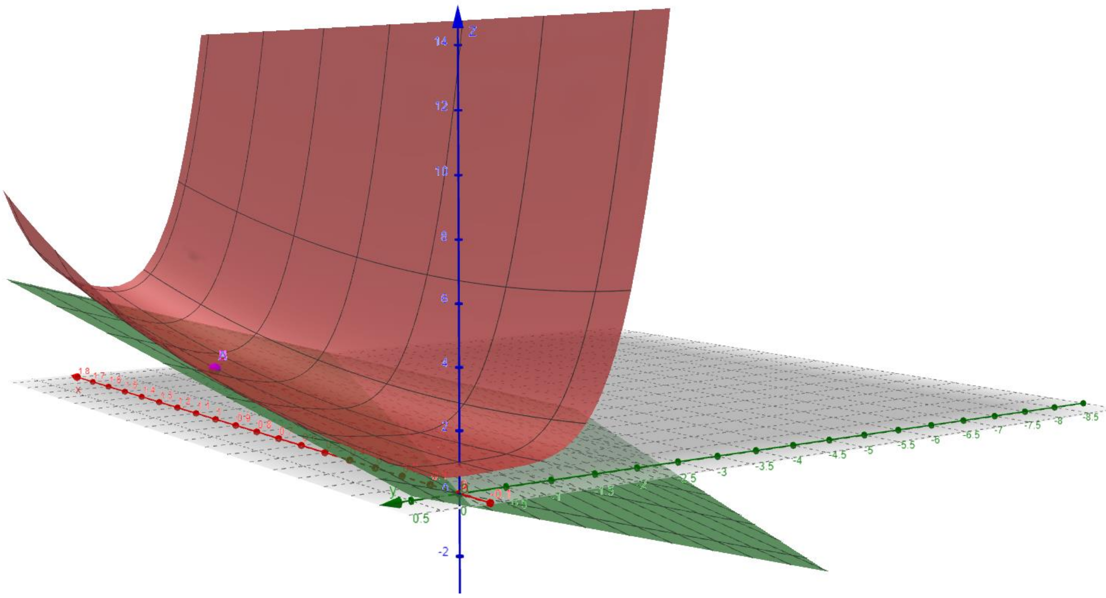


Gráfico de $f(x, y)$ y del plano tangente



Ejercicio 10.

Calcular los vectores gradientes de las siguientes funciones

a. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación.

$fx(x,y) = e^{x^2+y^2} * 2x$

$fy(x,y) = e^{x^2+y^2} * 2y$

$\nabla f(x,y) = \left(e^{x^2+y^2} * 2x,\ e^{x^2+y^2} * 2y\right)$

b. $f(x,y,z) = x * y * z$

$Dom(f) = R^3$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación.

$fx(x,y,z) = y * z$

$fy(x,y,z) = x * z$

$fz(x,y,z) = x * y$

$\nabla f(x,y,z) = (y * z, x * z, x * y)$

Ejercicio 11.

Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en los puntos y dirección de los vectores dados:

a. $f(x,y) = x^2 + 3xy^2$; $p = (1,2)\ y\ \vec{v} = (-1,-2)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x,y) = 2x + 3y^2$

$fy(x,y) = 6xy$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x,y)$ y $fy(x,y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2 por lo que se puede calcular la derivada direccional de la siguiente manera

$$D_{\vec{v}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \, . \, \vec{v}$$

$\nabla f(x,y) = (2x + 3y^2, 6xy\,)$

$Longitud\ de\ \vec{v} = (-1,-2)$:

$\left\||-1,-2|\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$Normalizacion\ de\ \vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$El\ vector\ unitario\ en\ la\ direccion\ \vec{v}\ es\ \vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Derivada direccional

$D_{\vec{v}}f(1,2) = \nabla f(1,2) \, . \, \vec{v} =$

$= (2*1 + 3*2^2, 6*1*2) \, . \, \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$

$= (14, 12) \, . \, \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$

$= \left(14 * -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(12 * -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$

$= -\frac{14}{\sqrt{5}} - \frac{24}{\sqrt{5}} = -\frac{38}{\sqrt{5}}$

b. $f(x,y) = xy^2; \quad p = (1,1)\ y\ \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x,y) = y^2$
$fy(x,y) = 2xy$

$Dom(fx) = R^2$
$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x,y)$ y $fy(x,y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2 por lo que se puede calcular como en el punto a.

$\nabla f(x,y) = (y^2, 2xy\ )$

$Longitud\ de\ \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -1\right):$

$$\left\|\left(\frac{1}{2}, -1\right)\right\| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$Normalizacion\ de\ \vec{v} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right)$$

$$El\ vector\ unitario\ en\ la\ direccion\ \vec{v}\ es\ \vec{u} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right)$$

Derivada direccional

$D_{\vec{v}}f(1{,}1) = \nabla f(1{,}1)\ .\ \vec{v} =$

$$= \ (1^2, 2)\,.\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right) =$$

$$= \left(1 * \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right) + \left(2 * -\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = -\frac{3}{2 * \sqrt{5 * \frac{1}{4}}} = \ -\frac{3}{2 * \sqrt{5} * \sqrt{\frac{1}{4}}} = -\frac{3}{2 * \sqrt{5} * \frac{1}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 12.

Encontrar las direcciones en las cuales la derivada direccional en el punto (1, 0) de $f(x, y) = x^2 + sen(xy)$ tiene el valor 1

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x, y) = 2x + cos(xy) * y$

$fy(x, y) = cos(xy) * x$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x, y)$ y $fy(x, y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2 por lo que se puede calcular como en el punto anterior.

$\nabla f(x, y) = (2x + cos(xy) * y\ , cos(xy) * x\ \ )$

Derivada direccional

$D_{\vec{v}} f(1,0) = \nabla f(1,0)\ .\ \ (x, y) = \ (2\ , cos(0)\ )\ . (x, y) = (2, 1)\ . (x, y) = 2x + y$

$2x + y$ debe ser igual 1 y además, la longitud de $\vec{v}$ debe ser 1

$||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 1^2$

$x^2 + y^2 = 1$ Como se trata de la suma de potencias, no hace falta poner el módulo puesto que nunca dará negativo.

Se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Luego de resolver el sistema de ecuaciones se llega a que las direcciones en las cuales $D_{\vec{v}}f(1{,}0)$ vale 1 son:

$\vec{v} = (0{,}1)$

$\vec{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

Ejercicio 13.

Encontrar la dirección de máximo crecimiento de las siguientes funciones en los puntos dados:

a. $f(x, y) = xe^y + 3y\,; \quad p = (1{,}0)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x, y) = e^y$

$fy(x, y) = xe^y + 3$

$Dom(fx) = R^2$

$Dom(fy) = R^2$

Como existen las derivadas parciales $fx(x, y)$ y $fy(x, y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^2), entonces f es diferenciable en todo R^2 por lo tanto f es diferenciable en el punto $(1, 0)$ por lo que la dirección de máximo crecimiento de f en $(1, 0)$ está dada por la dirección del gradiente de f en $(1, 0)$ que es la siguiente:

$\nabla f(x, y) = (e^y, xe^y + 3\,)$

$\nabla f(1,0) = (e^0, 1e^0 + 3\ ) = (1,4)$

$Longitud\ de\ (1,4)$

$\left\|(1,4)\ \right\| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$Normalizacion\ de\ (1,4)\ = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

b. $f(x,y,z) = 4x^2yz^3\ ;\quad p = (1,2,1)$

$Dom(f) = R^3$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x,y,z) = 8xyz^3$

$fy(x,y,z) = 4x^2z^3$

$fz(x,y,z) = 12x^2yz^2$

$Dom(fx) = R^3$

$Dom(fy) = R^3$

$Dom(fz) = R^3$

Como existen las derivadas parciales $fx(x,y)$ y $fy(x,y)$ y además estas son continuas en todo su dominio (R^3), entonces f es diferenciable en todo R^3 por lo tanto f es diferenciable en el punto (1, 2, 1) por lo que la dirección de máximo crecimiento de f en (1, 2, 1) está dada por la dirección del gradiente de f en (1, 2, 1) que es la siguiente:

$\nabla f(x,y,z) = (8xyz^3, 4x^2z^3, 12x^2yz^2)$

$\nabla f(1,2,1) = (8 * 1 * 2 * 1^3, 4 * 1^2 1^3, 12 * 1^2 * 2 * 1^2) = (16, 4, 24)$

Ejercicio 14.

Hallar máximos, mínimos y puntos silla de las siguientes funciones. Además calcular el valor de la misma en cada uno esos puntos

a. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x, y) = -2 - 2x$

$fxx(x, y) = -2$

$fy(x, y) = 4 - 8y$

$fyy(x, y) = -8$

$fxy(x, y) = fyx(x, y) = 0$

Los puntos críticos se dan en los puntos (x, y) cuando:

1) $fx(x, y) = 0$ y $fy(x, y) = 0$
2) $fx(x, y)\ no\ existe$
3) $fy(x, y)\ no\ existe$

Como las derivadas existen, se debe determinar cuando $fx(x, y) = 0$ y $fy(x, y) = 0$

$$fx(x, y) = -2 - 2x = 0 \rightarrow x = -1$$

$$fy(x, y) = 4 - 8y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Se tiene como punto crítico a $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

Ahora se vera si el punto crítico es un mínimo local, máximo local o punto silla.

$$H = \begin{pmatrix} fxx(x, y) & fxy(x, y) \\ fyx(x, y) & fyy(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$Determinante \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a * d - b * c$$

$$Determinante \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -2 * -8 - (0 * 0) = 16$$

Como H >0 y $fxx(x,y)<0$ entonces $f(x,y)$ tiene un máximo local en $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

b. $f(x,y) = xy - 2x - y$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x,y) = y - 2$

$fxx(x,y) = 0$

$fy(x,y) = x - 1$

$fyy(x,y) = 0$

$fxy(x,y) = fyx(x,y) = -1$

Los puntos críticos se dan en los puntos (x, y) cuando:

1) $fx(x,y) = 0$ y $fy(x,y) = 0$
2) $fx(x,y)$ *no existe*
3) $fy(x,y)$ *no existe*

Como las derivadas existen, se debe determinar cuando $fx(x,y) = 0$ y $fy(x,y) = 0$

$fx(x,y) = y - 2 = 0 \rightarrow y = 2$

$fy(x,y) = x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

Se tiene como punto crítico a (1,2)

Ahora se verá si el punto crítico es un mínimo local, máximo local o punto silla.

$$H = \begin{pmatrix} fxx(x,y) & fxy(x,y) \\ fyx(x,y) & fyy(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Determinante \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

Como H <0 entonces $f(x,y)$ tiene un punto silla en $(1,2)$

c. $f(x, y) = xsen(y)$

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x, y) = \ sen(y)$

$fxx(x, y) = 0$

$fy(x, y) = xcos(y)$

$fyy(x, y) = -xsen(y)$

$fxy(x, y) = fyx(x, y) = \cos(y)$

Los puntos críticos se dan en los puntos (x, y) cuando:

1) $fx(x, y) = 0$ y $fy(x, y) = 0$
2) $fx(x, y)\ no\ existe$
3) $fy(x, y)\ no\ existe$

Como las derivadas existen, se debe determinar cuando $fx(x, y) = 0$ y $fy(x, y) = 0$

$$fx(x, y) = sen(y) = 0 \rightarrow y = \begin{cases} 2\pi n \\ \pi + 2\pi n \end{cases}$$

$$fy(x, y) = xcos(y) = 0 \rightarrow x = 0$$

Hay varios puntos críticos que no me voy a molestar en escribir

Ahora se verá si los puntos críticos son un mínimo local, máximo local o punto silla.

$$H = \begin{pmatrix} fxx(x, y) & fxy(x, y) \\ fyx(x, y) & fyy(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(y) \\ \cos(y) & -xsen(y) \end{pmatrix}$$

$$Determinante \begin{pmatrix} 0 & \cos(y) \\ \cos(y) & -xsen(y) \end{pmatrix} = -\cos^2(y)$$

Como H < 0 entonces $f(x, y)$ tiene un punto silla en los puntos críticos.

Ejercicio 15.

El criterio de las derivadas segundas, ¿permite clasificar los puntos estacionarios de $f(x, y) = x^2 y$? En caso afirmativo, hallarlos y analizarlos.

$Dom(f) = R^2$

f es continua en todo su dominio por lo que se pueden calcular las derivadas parciales usando las reglas de derivación

$fx(x, y) = 2xy$

$fxx(x, y) = 2y$

$fy(x, y) = x^2$

$fyy(x, y) = 0$

$fxy(x, y) = fyx(x, y) = 2x$

Los puntos críticos se dan en los puntos (x, y) cuando:

1) $fx(x, y) = 0$ y $fy(x, y) = 0$
2) $fx(x, y)$ *no existe*
3) $fy(x, y)$ *no existe*

Como las derivadas existen, se debe determinar cuando $fx(x, y) = 0$ y $fy(x, y) = 0$

$fx(x, y) = 2xy = 0 \rightarrow X = \{(x, y): x = 0 \,\hat{}\, y = 0\}$

$fy(x, y) = x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

Los puntos críticos son $X \cap \{(x, y): x = 0\}$, por lo tanto son aquellos donde $x = 0$.

Ahora se verá si los puntos críticos son un mínimo local, máximo local o punto silla.

$$H = \begin{pmatrix} fxx(x, y) & fxy(x, y) \\ fyx(x, y) & fyy(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

$$Determinante \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix} = -(2x)^2$$

Como x siempre será 0, H = 0 entonces $f(x, y)$ tiene un punto silla en todos los puntos críticos.