Matemática 4 - 2024

TP5 - Estructuras Algebraicas - Teoría de Grupos

1. Determinar cuales de las siguientes operaciones están bien definidas sobre el conjunto A dado. Analizar las propiedades en los casos afirmativos

   (a) $A = N$, $a * b = 3ab$

   (b) $A = Z$, $a * b = \frac{a+b}{3+ab}$

   (c) $A = R$, $x * y = x + y - xy$

   (d) $A = \{0, 1, 2, 3\}$,

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	1	2	0	2
3	2	3	1	1

2. Demostrar que:

   (a) Dado $M = \{m \in N : m > 0\}$, $(M, +)$ es un semigrupo pero no es un monoide

   (b) El conjunto de un solo elemento $M = \{e\}$ con la operación definida por $e * e = e$ es un monoide

   (c) Dado un conjunto no vacío A, el conjunto de las partes de A $P(A)$ con la operación *intersección* de conjuntos es un monoide conmutativo

3. Demostrar que si para una operación asociativa $*$ en A existe un elemento neutro e y un elemento del conjunto, a, tiene inverso entonces éste es único.

4. Sea R una relación de *congruencia* sobre un semigrupo $(S, *)$ demostrar que $(S/R, \circledast)$ (el conjunto cociente y la operación inducida por $*$ sobre las clases de equivalencia) es un semigrupo llamado ***Semigrupo Cociente***

5. Analizar si las siguientes son estructuras de grupo:
   (a) $(Z,+)$, los enteros con la suma usual
   (b) $(Z,\cdot)$, los enteros con el producto usual
   (c) $(R^2,+)$, los pares ordenados de reales con la suma usual
   (d) $(M_{2x2},+)$ las matrices de 2x2 con la suma usual de matrices
   (e) $(P(A),\cup)$, A cualquier conjunto y $P(A)$ indica el conjunto de partes de A

6. Probar que en todo Grupo el único elemento ***idempotente*** es el neutro

7. Mostrar que en todo grupo vale la *propiedad cancelativa*

8. Sea $(G,*)$ un grupo tal que todo elemento es su propio inverso, probar que G es abeliano

9. Dado un grupo $(G,*)$, probar que G es abeliano si y sólo si para cualquier x,y en G vale que: $(x*y)^2 = x^2 * y^2$

10. Dados los Grupos $(G,*)$ y $(F,\diamondsuit)$ se define en el conjunto $G \times F$ la ley $\bullet$ tal que $(x,y) \bullet (z,t) = (x*z, y\diamondsuit t)$. Probar que $(G \times F, \bullet)$ es Grupo (***Grupo Producto***)

11. Estudiar si son Subgrupos de los grupos indicados:
    (a) Los enteros pares de $(Z,+)$
    (b) Las matrices simétricas de 2x2

12. Demostrar que si H y K son subgrupos de $(G,*)$ entonces $H \cap K$ es un subgrupo de $(G,*)$

13. Sea $(G,*)$ un grupo, sea $a \in G$ y sea H un subgrupo de G. Demostrar que el conjunto $aHa^{+1} = \{a*h*a^{-1} : h \in H\}$ es un subgrupo de G.

14. Probar que todo grupo cíclico es abeliano

15. Sea G un grupo cíclico de orden n, Si m es divisor de n entonces el elemento a^m y sus potencias generan un subgrupo

16. Sea $(G,*)$ un grupo, sea $a \in G$ y sea H un subgrupo de G. Si $a,b \in G$, probar que la relación dada por $a \equiv b$ mod(H) si $a*b^{-1} \in H$ es una relación de equivalencia

Ejercicios Adicionales

1. Determinar si $a * b = mcm[a, b]$ está bien definida en $A = N$, y en caso afirmativo analizar las propiedades

2. Probar que $GL(n, K) = \{A \in K^{n \times n}; det(A) \neq 0, con\ K\ cuerpo\}$ (conjunto de las matrices de orden n invertibles) es un grupo con el producto usual

3. Demostrar que si $(G, *)$ es un grupo abeliano, entonces $(a * b)^n = a^n * b^n$ para todo n entero

4. Dado un grupo $(G, *)$ y sea $a \in G$, se considera el conjunto **normalizador** $N(a) = \{x \in G / \forall a \in G : a * x = x * a\}$. Probar que $N(a)$ es un Subgrupo de G.