TP5 – Estructuras Algebraicas - Morfismos

Agustina Sol Rojas

Ejercicio 1.

Analizar si las siguientes funciones son homomorfismos entre las estructuras algebraicas indicadas y en caso afirmativo hallar nucleó e imagen.

a) $f: G \to F$ dada por $f(x) = 2^x$ y siendo los grupos $G = (R, +)$ los reales con la suma usual, $F = (R_0, \cdot)$ los reales sin el 0 con el producto usual.

<u>Verificación de neutro a neutro:</u>

El neutro de la suma en los reales es el 0. El neutro del producto en los reales sin el 0 es el 1.

$f(0) = 2^0 = 1$

<u>Verificación de morfismo:</u>

Es homomorfismos ya que sucede $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ para todo $a, b \in G$:

$f(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = f(a) \cdot f(b)$

$Nu(f) = 0$

$Img(f) =$ los reales positivos pares sin el 0.

b) $f: G \to F$ dada por $f(x) = -x$ y siendo los grupos $G = (Z, *)$ los enteros con la operación $a * b = a + b + ab$, $F = (Z, \circ)$ los enteros con la operación $a \circ b = a + b - ab$.

No es homomorfismos ya que no se cumple $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ para todo $a, b \in G$:

$$f(a * b) = f(a + b + ab) = -(a + b + ab) = -a - b - ab \neq a + b - ab$$
$$= f(a) \circ f(b)$$

c) $f: (P(A), \cup) \to (P(A), \cap)$ dada por $f(X) = X^c$ (siendo A cualquier conjunto, $P(A)$ indica el conjunto de partes de A y X^c el complemento de un conjunto).

Verificación de neutro a neutro:

Neutro de la unión $\to \emptyset$

Neutro de la intersección $\to A$

$f(\emptyset) = \emptyset^c = A$

Verificación de morfismo:

Es homomorfismos ya que sucede $f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y)$ para todo $X, Y \in P(A)$:

$f(X \cup Y) = (X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c = f(X) \cap f(Y)$

$Nu(f) = \emptyset$

$Img(f) = A$

Ejercicio 2.

Sea $f: G \to H$ un homomorfismo de grupos. Demostrar que el nucleó y la imagen de f son subgrupos de G y H respectivamente.

1. $Nu(f)$ subgrupo de G

   Elemento neutro:

   Como siempre vale que $f(e_1) = e_2$, el neutro de G pertenece al núcleo.

   Operación bien definida y elemento inverso:

   Como $a, b \in Nu(f)$ entonces $f(a) = e_2 = f(b)$ Ahora, como f es morfismo,

   $f(a * b^{-1}) = f(a) \otimes f(b^{-1}) = f(a) \otimes \left(f(b)\right)^{-1} = e_2 \otimes (e_2)^{-1} = e_2 \otimes e_2 = e_2$

2. $Img(f)$ subgrupo de H

   Elemento neutro:

   Como f es morfismo siempre vale que $f(e_1) = e_2$, el neutro de H pertenece al núcleo.

Operación bien definida y elemento inverso:

Como $a, b \in Img(f)$ entonces $\exists x, y \in G$ tal que $f(x) = a$ y $f(y) = b$. Ahora, como f es morfismo, $a \otimes b^{-1} = f(x) \otimes f(y)^{-1} = f(x) \otimes f(y^{-1}) = f(x * y^{-1})$. Como $f(x * y^{-1}) = a \otimes b^{-1}$, $a \otimes b^{-1} \in H$.

Ejercicio 3.

Sea $(G,*)$ un grupo. Demostrar que la función $f: G \to G$ definida por $f(a) = a^2$ es un homomorfismo si y sólo si G es abeliano (recordar un ejercicio de grupos abelianos de la primera parte del TP 5.

1. $f: G \to G$ es un homomorfismo $\to$ G es abeliano
   i. Como $f: G \to G$ es un homomorfismo se da que $f(a * b) = f(a) * f(b)$
   ii. Aplicamos la función y nos deja los siguiente aplicando la asociatividad de G al ser grupo:
      a. $(a * b)^2 = a^2 * b^2$
      b. $(a * b) * (a * b) = a * a * b * b$
      c. $a * b * a * b = a * a * b * b$
   iii. Multiplicamos ambos lados por a^{-1} y como G es grupo se cumple que $a^{-1} * a = e$:
      a. $(a^{-1} * a) * b * a * b = (a^{-1} * a) * a * b * b$
      b. $e * b * a * b = e * a * b * b$
      c. $b * a * b = a * b * b$
   iv. Multiplicamos ambos lados por b^{-1} y como G es grupo se cumple que $b * b^{-1} = e$:
      a. $b * a * (b * b^{-1}) = a * b * (b * b^{-1})$
      b. $b * a * e = a * b * e$
      c. $b * a = a * b$
   v. $*$ es conmutativa en G, por lo tanto G es abeliano.

2. G es abeliano $\to$ $f: G \to G$ es un homomorfismo
   i. Como G es abeliano se da que $*$ es asociativa y conmutativa, existe elemento neutro y todos los elementos de G tienen inverso.
   ii. Sea $a, b \in G$ se da:

$$f(a * b) = (a * b)^2 = (a * b) * (a * b) = a * b * a * b = a * a * b * b = (a * a) * (b * b) = a^2 * b^2 = f(a) * f(b)$$

iii. Por lo tanto para todo $a, b \in G$ se da que $f(a * b) = f(a) * f(b)$, haciendo que $f: G \rightarrow G$ es un homomorfismo.

Ejercicio 4.

Si H_1,H_2 son dos subgrupos de un grupo conmutativo G, probar que la aplicación $f: H_1 \times H_2 \rightarrow G$ dada por $f(a, b) = ab$, es un morfismo de grupos.

1. Como $H_1 \times H_2$ son subgrupos de G, $H_1 \times H_2$ es un grupo con la operación definida por:
   i. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$
2. Teniendo en cuenta que G es un grupo conmutativo desarrollamos:
   $$f\big((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)\big) = f(a_1 a_2, b_1 b_2) = (a_1 a_2) \cdot (b_1 b_2) = (a_1 b_1) \cdot (a_2 b_2) = f(a_1, b_1) \cdot f(a_2, b_2)$$
3. Como vale $f\big((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)\big) = f(a_1, b_1) \cdot f(a_2, b_2)$, $f: H_1 \times H_2 \rightarrow G$ es un morfismo de grupos

Ejercicio 5.