Repaso Practica 5 Ejercicios

Ejercicio 2.

En la clase práctica anterior se probó usando el método H:

$\{x \geq 0 \land y > 0\}$ Sdiv :: q := 0; r := x; while $r \geq y$ do r := r – y; q := q + 1 od $\{x = q \, . \, y + r \land 0 \leq r < y\}$

siendo Sdiv un programa que calcula por restas sucesivas la división entera de x sobre y en q, dejando el resto en r. Se pide ahora probar en H:

$\{x > 0 \land y = 0\}$ Sdiv {false}

es decir que el programa Sdiv no termina a partir de la precondición $(x > 0 \land y = 0)$.

p = (x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0)

a) $\{x > 0 \land y = 0\}$ q := 0; r := x; {x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0}
b) {x = y.q + r ^ r >= 0 ^ y = 0} while $r \geq y$ do r := r – y; q := q + 1 od {x = y.q + r ^ r >= 0 ^ y = 0 ^ ¬($r \geq y$)}
c) Aplicando SEC a (a) y (b) y aplicando CONS se llega a $\{x > 0 \land y = 0\}$ Sdiv {false}

Parte a)

1. {x = y.q + x ^ x > 0 ^ y = 0} r := x {x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0} (ASI)
2. {x = y.0 + x ^ x > 0 ^ y = 0} q := 0 {x = y.q + x ^ x > 0 ^ y = 0} (ASI)
3. {x = y.0 + x ^ x > 0 ^ y = 0} q := 0; r := x {x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0} (1, 2, SEC)
4. $(x > 0 \land y = 0) \rightarrow$ (x = y.0 + x ^ x > 0 ^ y = 0) (MAT)
5. $\{x > 0 \land y = 0\}$ q := 0; r := x {x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0} (3, 4, CONS)

Parte b)

6. {x = y.(q+1) + r ^ r > 0 ^ y = 0} q := q + 1 {x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0} (ASI)
7. {x = y.(q+1) + (r-y) ^ (r-y) > 0 ^ y = 0} r := r – y {x = y.(q+1) + r ^ r > 0 ^ y = 0} (ASI)
8. {x = y.(q+1) + (r-y) ^ (r-y) > 0 ^ y = 0} r := r – y ; q := q + 1 {x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0} (6, 7, SEC)
9. (x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0 ^ $r \geq y$) $\rightarrow$ {x = y.(q+1) + (r-y) ^ (r-y) > 0 ^ y = 0} (MAT)
10. {x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0 ^ $r \geq y$} r := r – y ; q := q + 1 {x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0} (8, 9, CONS)
11. {x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0} while $r \geq y$ do r := r – y; q := q + 1 od {x = y.q + r ^ r > 0 ^ y = 0 ^ ¬($r \geq y$)} (10, REP)

Parte c)

12. $\{x > 0 \wedge y = 0\}$ q := 0; r := x; while $r \geq y$ do r := r – y; q := q + 1 od $\{x = y.q + r \wedge r > 0 \wedge y = 0 \wedge \neg(r \geq y)\}$ (5, 11, SEC)
13. $(x = y.q + r \wedge r > 0 \wedge y = 0 \wedge \neg(r \geq y)) \rightarrow$ (false) (MAT)
14. $\{x > 0 \wedge y = 0\}$ q := 0; r := x; while $r \geq y$ do r := r – y; q := q + 1 od {false} (12, 13, CONS)

Ejercicio 3.

Probar: $\langle x \geq 0 \wedge y \geq 0\rangle$ Sprod :: prod := 0; k := y ; while k > 0 do prod := prod + x ; k := k – 1 od $\langle$true$\rangle$

Ayuda: Sprod calcula en la variable prod el producto entre x e y. Notar que k se decrementa en cada iteración y que se mantiene siempre mayor o igual que cero.

$p = (x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0)$

$t = k$

Inicializaciones:

1. i. $\langle x.y = x.y + prod \wedge y \geq 0\rangle$ k := y $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0\rangle$ (ASI*)
   ii. $\langle x.y = x.y + 0 \wedge y \geq 0\rangle$ prod := 0 ;$\langle x.y = x.y + prod \wedge y \geq 0\rangle$ (ASI*)
   iii. $\langle x.y = x.y + 0 \wedge y \geq 0\rangle$ prod := 0 ; k := y $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0\rangle$ (i, ii, SEC*)
   iv. $(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \rightarrow (x.y = x.y + 0 \wedge y \geq 0)$ (MAT)
   v. $\langle x \geq 0 \wedge y \geq 0\rangle$ prod := 0 ; k := y $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0\rangle$ (iii, iv, CONS*)

Prueba de las tres premisas de REP:

2. <u>$\langle p \wedge B\rangle$ S $\langle p\rangle$</u>
   i. $\langle x.y = x.(k-1) + prod \wedge (k-1) \geq 0\rangle$ k := k – 1 $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0\rangle$ (ASI*)
   ii. $\langle x.y = x.(k-1) + (prod + x) \wedge (k-1) \geq 0\rangle$ prod := prod + x $\langle x.y = x.(k-1) + prod \wedge (k-1) \geq 0\rangle$ (ASI*)
   iii. $\langle x.y = x.(k-1) + (prod + x) \wedge (k-1) \geq 0\rangle$ prod := prod + x; k := k – 1 $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0\rangle$ (i, ii, SEC*)
   iv. $(x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0 \wedge k > 0) \rightarrow (x.y = x.(k-1) + (prod + x) \wedge (k-1) \geq 0)$ (MAT)
   v. $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0 \wedge k > 0\rangle$ prod := prod + x; k := k – 1 $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0\rangle$ (iii, iv, CONS*)
3. <u>$\langle p \wedge B \wedge t = Z\rangle$ S $\langle t < Z\rangle$</u>
   i. $\langle x.y = x.(k-1) + prod \wedge (k-1) \geq 0\rangle$ k := k – 1 $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0\rangle$ (ASI*)
   ii. $\langle x.y = x.(k-1) + (prod + x) \wedge (k-1) \geq 0\rangle$ prod := prod + x $\langle x.y = x.(k-1) + prod \wedge (k-1) \geq 0\rangle$ (ASI*)
   iii. $\langle x.y = x.(k-1) + (prod + x) \wedge (k-1) \geq 0\rangle$ prod := prod + x; k := k – 1 $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0\rangle$ (i, ii, SEC*)
   iv. $(x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0 \wedge k > 0 \wedge k = Z) \rightarrow (x.y = x.(k-1) + (prod + x) \wedge (k-1) \geq 0)$ (MAT)
   v. $(k < Z) \rightarrow (x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0)$ (MAT)
   vi. $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0 \wedge k > 0 \wedge k = Z\rangle$ prod := prod + x; k := k – 1 $\langle k < Z\rangle$ (iii, iv, v, CONS*)
4. <u>$p \rightarrow t >= 0$</u>

i. $(x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0) \rightarrow (k >= 0)$ (MAT)

Conclusión de REP*: $\langle p \rangle$ while B do S od $\langle p \wedge \neg B \rangle$:

5. $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0 \rangle$ while $k > 0$ do prod := prod + x ; k := k – 1 od $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0 \wedge \neg(k > 0) \rangle$ (2, 3, 4, REP*)

Programa completo:

6. $\langle x \geq 0 \wedge y \geq 0 \rangle$ prod := 0 ; k := y; while $k > 0$ do prod := prod + x ; k := k – 1 od $\langle x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0 \wedge \neg(k > 0) \rangle$ (1v, 5, SEC*)
7. $(x.y = x.k + prod \wedge k \geq 0 \wedge \neg(k > 0)) \rightarrow (true)$ (MAT)
8. $\langle x \geq 0 \wedge y \geq 0 \rangle$ prod := 0 ; k := y; while $k > 0$ do prod := prod + x ; k := k – 1 od $\langle true \rangle$ (6,7, CONS*)

Ejercicio 4.

Probar la sensatez de la regla de invarianca vista en clase:

$$\frac{\{p\}\ S\ \{q\}}{\{r \wedge p\}\ S\ \{r \wedge q\}}$$

cuando las variables libres de r son disjuntas con las variables modificables por S.

Ayuda: Utilizar inducción sobre la longitud de las pruebas, como hicimos en clase

Dado |-H {r ^ p} S {r ^ q} hay que probar |= {r ^ p} S {r ^ q}

|-H {r ^ p} S {r ^ q} se obtiene de |-H {p} S {q} (pruebas más cortas)

Hipótesis inductiva: |= {p} S {q}. Veamos que |= {r ^ p} S {r ^ q}

- Sea σ |= {r ^ p} y asumamos que S termina desde σ en un estado σ' |= {r ^ p}
- Si σ |= p, entonces por hipótesis inductiva vale σ' |= q

Entonces |– H {r ^ p} S {r ^ q} ⟶ |= {r ^ p} S {r ^ q}

Ejercicio 5.

Probar sin recurrir a la completitud de H (es decir que la prueba debe ser sintáctica) que para todo programa S y toda aserción q se cumple:

Tr |- {false} S {q}

Ayuda: Utilizar inducción estructural sobre la forma de los programas S, similar a lo visto en clase para probar sintácticamente la fórmula {true} S {true}.

<u>Base de la inducción</u>

S :: skip

Por axioma SKIP se cumple |- {false} S {false}

Por MAT: false → q

Por CONS: |- {false} S {q}

S :: x := e

Por axioma ASI se cumple |- {false} x := e {false}

Por MAT: false → q

Por CONS: |- {false} x := e {q}

<u>Paso inductivo:</u>

S :: S1; S2

Por hipótesis inductiva |- {false} S1 {false} y |- {false} S2 {false}

Por MAT: false → q

Por SEC: |- {false} S1; S2 {false}

Por CONS: |- {false} S1; S2 {q}

S :: if B then S1 else S2 fi

Por hipótesis inductiva |- {false} S1 {false} y |-{false} S2 {false}

Por MAT: false → q

Por MAT: false ^ B → false y false ^ -B → false

Por CONS: |- {false ^ B} S1 {false} y |- {false ^ -B} S2 {false}

Por COND: |- {false} if B then S1 else S2 fi {false}

Por CONS: |- {false} if B then S1 else S2 fi {q}

S :: while B do S od

Por hipótesis inductiva |- {false} S {false}

Por MAT: false ^ B → false

Por CONS: |- {false ^ B} S {false}

Por REP: |- {false} while B do S od {false ^ -B}

Por MAT: false ^ -B → q

Por CONS: |- {false} while B do S od {q}