Ejercicio 5.

Probar que para todo estado σ y para todo par de aserciones p, q, se cumple:
$val(\pi(S_1, \sigma)) = val(\pi(S_2, \sigma))$ si y sólo si $\models \{p\}\ S_1\ \{q\} \leftrightarrow\ \models \{p\}\ S_2\ \{q\}$
Comentario: para facilitar la notación, se puede utilizar M(S)(σ) en lugar de val(π(S, σ)).

Resolución.

(sentido ⟶) Para todo σ, p, q: $M(S_1)(\sigma) = M(S_2)(\sigma) \longrightarrow\ \models \{p\}\ S_1\ \{q\} \leftrightarrow\ \models \{p\}\ S_2\ \{q\}$

Supongamos $M(S_1)(\sigma) = M(S_2)(\sigma)$. Veamos primero que $\models \{p\}\ S_1\ \{q\} \longrightarrow\ \models \{p\}\ S_2\ \{q\}$.

- Si $\models \{p\}\ S_1\ \{q\}$, entonces a partir de un estado $\sigma \models p$, si el programa S_1 termina lo hace en un estado $\sigma' \models q$ (y si no termina, lo hace en el estado ⊥).
- Como $M(S_1)(\sigma) = M(S_2)(\sigma)$, lo anterior se puede formular también así: a partir de un estado $\sigma \models p$, si S_2 termina lo hace en un estado $\sigma' \models q$ (y si no termina, lo hace en el estado ⊥). Esta formulación es la de $\models \{p\}\ S_2\ \{q\}$, que es lo que queríamos demostrar.

La prueba del recíproco, $\models \{p\}\ S_2\ \{q\} \longrightarrow\ \models \{p\}\ S_1\ \{q\}$, a partir de $M(S_1)(\sigma) = M(S_2)(\sigma)$, es igual a la anterior cambiando el orden de los S_i.

(sentido ⟵) Para todo σ, p, q: $\models \{p\}\ S_1\ \{q\} \leftrightarrow\ \models \{p\}\ S_2\ \{q\} \longrightarrow M(S_1)(\sigma) = M(S_2)(\sigma)$

Supongamos $\models \{p\}\ S_1\ \{q\} \leftrightarrow\ \models \{p\}\ S_2\ \{q\}$. Veamos que $M(S_1)(\sigma) = M(S_2)(\sigma)$.

- Supongamos por el absurdo que para algún estado específico σ_0, $M(S_1)(\sigma_0) \neq M(S_2)(\sigma_0)$. Llegaremos a una contradicción.
- Hay tres posibilidades para $M(S_1)(\sigma_0) \neq M(S_2)(\sigma_0)$:
  (a) $M(S_1)(\sigma_0) = \perp$ y $M(S_2)(\sigma_0) \neq \perp$.
  (b) $M(S_1)(\sigma_0) \neq \perp$ y $M(S_2)(\sigma_0) = \perp$.
  (c) $M(S_1)(\sigma_0) \neq \perp$ y $M(S_2)(\sigma_0) \neq \perp$.
- (a). Dado algún p, con $\sigma_0 \models p$, como para todo p y q vale $\models \{p\}\ S_1\ \{q\} \leftrightarrow\ \models \{p\}\ S_2\ \{q\}$, no puede ser que $M(S_1)(\sigma_0) = \perp$ y $M(S_2)(\sigma_0) \neq \perp$ (⊥ no satisface ninguna condición q).
- (b). Igual que (a) pero cambiando el orden de los S_i.
- (c). Dado algún p, con $\sigma_0 \models p$, como para todo p y q vale $\models \{p\}\ S_1\ \{q\} \leftrightarrow\ \models \{p\}\ S_2\ \{q\}$, tampoco puede ser que $M(S_1)(\sigma_0) = \sigma_1$ y $M(S_2)(\sigma_0) = \sigma_2$, con $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \perp$:
  - σ_1 y σ_2 difieren en al menos una variable x. P.ej., supongamos $\sigma_1(x) = 1$ y $\sigma_2(x) = 2$.
  - De esta manera, si por ejemplo $q = (x = 1)$, entonces $\sigma_1 \models q$ pero $\sigma_2 \not\models q$, lo que contradice la hipótesis $\models \{p\}\ S_1\ \{q\} \leftrightarrow\ \models \{p\}\ S_2\ \{q\}$.