Cuadrados mínimos

Álgebra Lineal Computacional

Computación + Datos
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

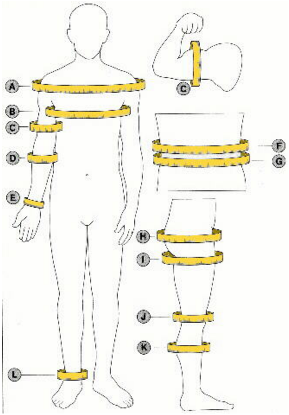
1er Cuatrimestre 2025

Motivación

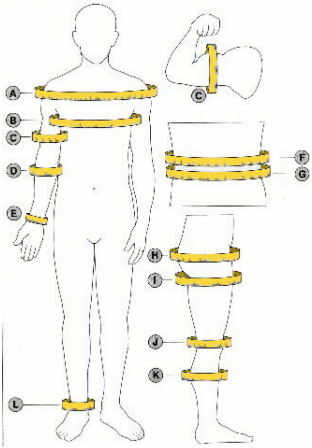
Supongan que queremos diseñar ropa a medida para las personas que *viven* en Argentina. ¿Cómo harían?

Motivación

Supongan que queremos diseñar ropa a medida para las personas que *viven* en Argentina. ¿Cómo harían?



Motivación



- Supongan que realizan D mediciones distintas, para las dimensiones del cuerpo que quieran.
- Un primer desafío sería elegir *niveles* o *categorías* para cada medida.
- Si por cada dimensión generamos N categorias (como S,M,L,XL), el número de talles sería N^D.
- ¿Tendría sentido generar esos N^D talles? ¿Por qué?

Un modelo *poco inclusivo* de talles de ropa

- Una idea muy sencilla es que hay una *escala* de la cual dependen todas las demás dimensiones, S.
- Si dimensiones del cuerpo son proporcionales a S,

$$h = aS + b$$
$$d = bS + d$$

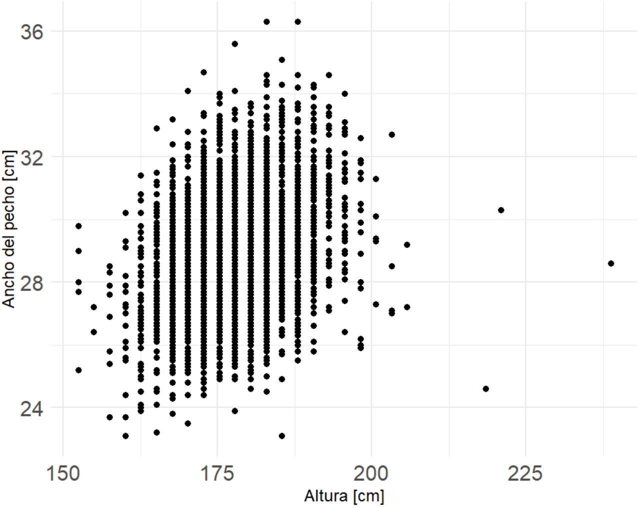
o directamente

$$d = \alpha h + \beta$$

(h altura, d distancia entre hombros).

Un modelo *poco inclusivo* de talles de ropa

Siguiendo esta lógica obtenemos este gráfico para el ancho del pecho en función de la alturaa (datos de ANSUR II):



Momento para pensar...

- ¿Cómo formularíamos la solución a este problema (pre
  cuadrados mínimos)?

Momento para pensar...

- ¿Cómo formularíamos la solución a este problema (pre cuadrados mínimos)?
- ¿Por qué no funcionaría directamente invertir una matriz? ¿Cómo es el sistema que obtendremos?

Momento para pensar...

- ¿Cómo formularíamos la solución a este problema (pre cuadrados mínimos)?
- ¿Por qué no funcionaría directamente invertir una matriz? ¿Cómo es el sistema que obtendremos?
- Cuadrados mínimos buscaría resolver

$$min_x ||Ax - b||$$

  ¿Cómo interpretamos esto en el contexto de nuestro problema?

Momento para pensar...

- ¿Cómo formularíamos la solución a este problema (pre cuadrados mínimos)?
- ¿Por qué no funcionaría directamente invertir una matriz? ¿Cómo es el sistema que obtendremos?
- Cuadrados mínimos buscaría resolver

$$min_x ||Ax - b||$$

  ¿Cómo interpretamos esto en el contexto de nuestro problema?
- Tomamos a

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 1 \\ \dots & \dots \\ h_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = (\alpha, \beta)^t$$

$$b = (d_1, \dots, d_n)^t$$

Aplicando cuadrados mínimos

La solución está dada por:

$$A^tAx = A^tb$$
$$V\Sigma^t\Sigma V^tx = V\Sigma^tU^tb$$
$$x = V(\Sigma^t\Sigma)^{-1}\Sigma^tU^tb$$

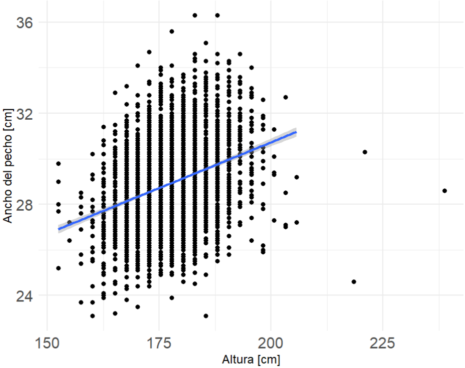
x resulta de proyectar b en las dos primeras componentes (u_1 y u_2), escalar con $(\Sigma^t\Sigma)^{-1}\Sigma^t$ y reescribir la base dada por V.

Aplicando cuadrados mínimos

La solución está dada por:

$$A^t A x = A^t b$$
$$V \Sigma^t \Sigma V^t x = V \Sigma^t U^t b$$
$$x = V (\Sigma^t \Sigma)^{-1} \Sigma^t U^t b$$

x resulta de proyectar b en las dos primeras componentes (u_1 y u_2), escalar con $(\Sigma^t \Sigma)^{-1} \Sigma^t$ y reescribir la base dada por V.

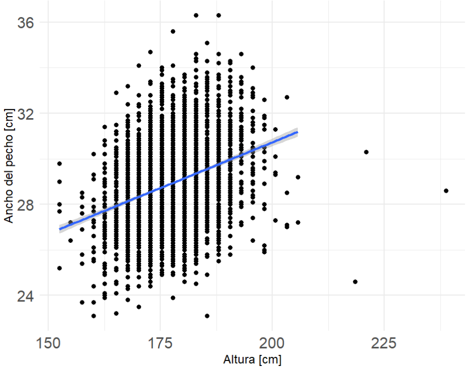


Aplicando cuadrados mínimos

La solución está dada por:

$$A^t A x = A^t b$$
$$V \Sigma^t \Sigma V^t x = V \Sigma^t U^t b$$
$$x = V (\Sigma^t \Sigma)^{-1} \Sigma^t U^t b$$

x resulta de proyectar b en las dos primeras componentes (u_1 y u_2), escalar con $(\Sigma^t \Sigma)^{-1} \Sigma^t$ y reescribir la base dada por V.



- En este caso, obtenemos $d = 0{,}08h + 14{,}67cm$

Todo muy bonito, *pero la remera no me entra*

El error del modelo lo definimos como la cantidad que minimizamos:

$$||b - Ax|| = 110{,}39 cm$$

¿Significa esto que esperamos pifiarle en 110 cm al tamaño del pecho?

Todo muy bonito, *pero la remera no me entra*

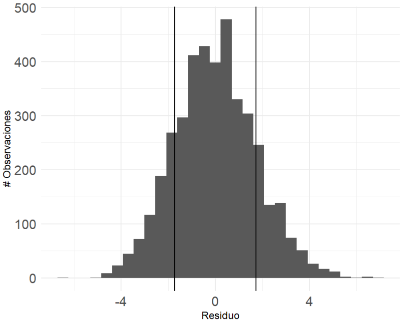
El error del modelo lo definimos como la cantidad que minimizamos:

$$||b - Ax|| = 110{,}39cm$$

¿Significa esto que esperamos pifiarle en 110 cm al tamaño del pecho?

- El error de estimación para la persona i lo calculamos como $d_i - (\alpha h_i + \beta)$.
- Si calculan $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i - (\alpha h_i + \beta)$ veran que es igual a 0.
- En cambio, $\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(d_i - (\alpha h_i + \beta))^2} = 1{,}72cm$, el *desvio estandar* representa mejor lo que queremos medir.

¿Es común que los talles no sirvan?



- Es razonable que el 68 % de los casos caigan dentro de la banda de error.
- Esa información puede servir para tomar decisiones informadas (*en problemas más complejos también*).

En el tintero, para pensar...

- ¿Qué pasa si la función no es lineal en las dimensiones del cuerpo?
- ¿Qué pasa si queremos predecir múltiples dimensiones a la vez?
- ¿Es una buena medida el error que proponemos en contextos de predicción?
- ¿Cuántos datos tenemos que tener para que tenga sentido usar cuadrados mínimos?

Para el laboratorio

- Calculen los *factores de escala* entre las distintas partes del cuerpo. Comparen el modelo $y = ax + b$ con el modelo $\log y = a \log x + b$.
- Averigüen hasta que punto se puede pensar a una persona como algo que se *infla* y *desinfla* manteniendo la misma forma conforme aumenta su tamaño.
- ¿Da el análisis respaldo al concepto de *proporciones humanas* usado en el arte?