Determina el valor de todos los numeros reales α tal que para todo entero positivo n se cumple que

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \ldots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

es un multiplo de n

1. Demuestra que $\alpha = 0$ es una solucion

La ~~formula~~ de arriba es equivalente

a

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot \alpha$$

para todo n el resultado de esa multiplicacion si $\alpha = 0$ sera 0 que es multiplo de n $(n \cdot 0)$

2. Demuestra que $\alpha = 1$ no es una solucion

si $\alpha = 1$ entonces

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot \alpha = \frac{n(n+1)}{2}$$

~~para~~ Esa ecuacion solo sera multiplo de n si n es impar porque este caso

$$n = 2K+1$$

y acaba siendo

$$(2K+1) \cdot \frac{(2K+1+1)}{2}$$

$$(2K+1) \cdot \frac{\cancel{2}(K+1)}{\cancel{2}}$$

$$(2K+1) \cdot (K+1)$$. que es multiplo de $2K+1 = n$

Cosa que no se cumple si n es par, $n = 2K$

$$\frac{(2K)(2K+1)}{2} = (K)(2K+1)$$ que no es multiplo de ~~2K~~ al ser impar $(2K+1)$ 2Kon

3. Demuestra que $\alpha = 2$ es una solución

$$\frac{(n)(n+1)}{2} \cdot \alpha \quad \text{si } \alpha = 2 \text{ entonces}$$

$$\frac{(n)(n+1)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = (n)(n+1)$$ que es multiplo de n

4. Demuestra que $\alpha = 2K+1$ para todo K entero, no es una solución

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot \alpha = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2K+1)}{2}$$

Sucede igual que en la demostración para $\alpha = 1$
Si n es par entonces $n+1$ es impar
Y la multiplicación de 2 impares sigue siendo impar y n se expresa como
$2b$ Y se acaba simplificando en el 2
al ser par
que deja como resultado
un numero no multiplo de n

5. Demuestra que $\alpha = 2K$ para todo entero, es una solución

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot \alpha = \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2K$$

$$\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}K = n(n+1) \cdot K$$

$n(n+1) \cdot K$ es multiplo de n

6. Demuestra que $\alpha = \frac{1}{2}$ no es una solución

si $\alpha = \frac{1}{2}$ entonces para $n=2$

$\lfloor \tfrac{1}{2} \rfloor + \lfloor 1 \rfloor = 0 + 1 = 1$

y 1 no es multiplo de $n=2$
entonces no cumple para todo entero positivo N

7. Demuestra que $\forall\, \alpha \in (0,1]$ no es una solución [Demostración para $\alpha \in (0,1)$ porque ya se demostró para 1

si $\alpha \in (0,1]$ y $n \cdot \alpha \geq 1$
la suma de todos ~~los~~ los valores ~~hasta~~ n sera 0
porque ~~...~~ $\lfloor \alpha \cdot (n-x) \rfloor = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}^+$ ~~$\forall$~~ $\cdot\, x < n$ ~~...~~

hasta $\lfloor \alpha \cdot n \rfloor$ que es igual a 1
entonces $0+1=1$ que solo es multiplo
de si mismo y ~~...~~
~~...~~ no cumple ~~para~~ ningun n

8. Demuestra que todo $\alpha \in [-1,0)$ no es una solución

Para $\alpha = -1$

$\lfloor -1 \rfloor + \lfloor -2 \rfloor + \dots \lfloor -n \rfloor = -(1+2+3+4+\dots+n)$
$\to \frac{(n)(n+1)}{2}$ y se demostro
anteriormente que $\frac{(n)(n+1)}{2}$ solo es multiplo de n si $n = 2k+1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Demostración para $\alpha \in (-1,0)$

Cuando $\lfloor n \cdot \alpha \rfloor = -2$ todos los valores hasta
n es el primer entero tal que $\lfloor n\alpha \rfloor = -2$
entonces todos los enteros menores a n multiplicados por α
seran igual a -1 y la suma sera $-2 + (-1)(n-1)$

$-2 + (-1)(n-1) = -2 + 1 - n = -1 - n$ que no
cumple ser multiplo de n para cualquier entero n

9. todo número real es representable de la forma $2K+\beta$ donde $K \in \mathbb{Z}$ y $\beta \in [-1,1]$

~~$\alpha = 2$~~ $x = 2K+\beta$

si x es entero

si x es impar se puede representar como $2K+1$ o $2K-1$

si x es par se puede representar con $2K+0$

si x ~~no~~ es entero
NO

si $\lfloor x \rfloor$ es par la parte entera se puede representar con $2K$ y β la parte decimal $\boxed{2K+\beta}$ / $\beta \in (0,1)$

si $\lfloor x \rfloor$ es impar la parte entera con $2K$ ~~y la ... con β~~ ~~de la forma $2K+\beta$~~ y lo que le falta a x para llegar a $\lceil x \rceil$ como β

~~$\lceil x \rceil$~~ $\lceil x \rceil$

de forma $2K+\beta$ / $\beta \in$

---

10 $\alpha = 2K+\beta$ tal que K es entero y $\beta \in [-1,1]$ nunca es solución a menos que $\beta = 0$

si $\beta = 0$ $\alpha = 2K$ y ya se demostró que es solución en 4.

10. $\alpha = 2K+\beta$ donde K entero y $\beta \in [-1,1]$

Se demostró que $\alpha = 2K+0$ es siempre solución en (9) entonces $\beta \in [-1,0)(0,1]$

si n entero $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

$\lfloor 2K+\beta \rfloor + \lfloor 2(2K+\beta) \rfloor + \dots + \lfloor n(2K+\beta) \rfloor =$

$2K + \lfloor \beta \rfloor + 2\cdot 2K + \lfloor 2\beta \rfloor + \dots + 2Kn + \lfloor n\beta \rfloor =$

$\frac{2K(n)(n+1)}{2} + \lfloor \beta \rfloor + \lfloor 2\beta \rfloor + \dots + \lfloor n\beta \rfloor$

$K(n)(n+1)$ es múltiplo de n y ya se demostró en (8) y (9) que si $\beta \in [-1,0),(0,1]$ no siempre es múltiplo de n y al sumarlo con un múltiplo de n no da múltiplo de n

$K(n)(n+1)$