Analisis Kompleksitas

Tim Olimpiade Komputer Indonesia

Pendahuluan

Melalui dokumen ini, kalian akan:

- Memahami konsep analisis kompleksitas.
- Mampu menganalisis kompleksitas untuk memperkirakan *runtime* eksekusi program.

Bagian 1

Perkenalan Analisis Algoritma

Analisis Algoritma

- Diberikan dua algoritma untuk menyelesaikan permasalahan yang sama. Algoritma mana yang lebih cepat?
- Pengukuran seberapa cepatnya suatu algoritma biasa dinyatakan dalam kompleksitas waktu.
- Kompleksitas waktu: banyaknya komputasi yang perlu dilakukan dari awal eksekusi sampai berakhirnya algoritma.

Contoh Soal: Membajak Sawah

Deskripsi:

- Pak Dengklek memiliki N bibit tanaman yang akan ia semai di sawahnya.
- Untuk itu, ia akan membajak sawahnya supaya sawahnya bisa memuat N tanaman.
- Sawah yang akan dibajak harus memiliki bentuk persegi panjang, tersusun atas R baris dan C kolom petak-petak. Setiap petak bisa memuat maksimal sebuah tanaman.
- Tentukan nilai R dan C supaya semua petak yang ada ditanami tanaman!
- Jika ada lebih dari satu kemungkinan jawaban, minimalkan selisih R dengan C.
- Jika masih ada lebih dari satu kemungkinan jawaban, cetak yang mana saja.

Contoh Soal: Membajak Sawah (lanj.)

Batasan:

- $1 \leq N \leq 10^9$.

Format Masukan:

- Sebuah baris berisi bilangan bulat, yaitu N.

Format Keluaran:

- Sebuah baris berisi dua bilangan bulat, yaitu R dan C.

Contoh Soal: Membajak Sawah (lanj.)

Contoh Masukan

```
35
```

Contoh Keluaran

```
7 5
```

Solusi 1: Coba Semua Kemungkinan

- Untuk setiap R dan C yang mungkin, coba hitung apakah $R \times C$ sama dengan N.
- Jika ya, cari yang selisih $|R - C|$ minimal.
- Cukup mencoba untuk $1 \leq R \leq N$ dan $1 \leq C \leq N$.

Solusi 1: Coba Semua Kemungkinan (lanj.)

Bagian implementasi:

```
readln(N);
R := 1;
C := N;
for i := 1 to N begin
  for j := 1 to N do begin
    if (i*j = N) then begin
      if (abs(R-C) > abs(i-j)) then begin
      R := i;
      C := j;
      end;
    end;
  end;
end
writeln(R, ' ', C);
```

Solusi 1: Coba Semua Kemungkinan (lanj.)

- Misalkan untuk $N = 100$, secara kasar diperlukan 100×100 komputasi untuk mencari nilai R dan C yang tepat.
- Jadi secara umum bisa diperkirakan bahwa untuk suatu nilai N, diperlukan N^2 komputasi.
- Solusi ini dikatakan memiliki kompleksitas waktu sebesar $O(N^2)$ (dibaca "O-N-kuadrat").
- Pertanyaan: apakah solusi ini cukup cepat? Bagaimana jika $N = 10^9$?

Cerita Sampingan: Meramal Waktu Eksekusi

- Terdapat sebuah perkiraan kasar bahwa komputer mampu melakukan 100 juta (10^8) komputasi dalam 1 detik.
- Tentu saja, perkiraan ini masih sangat kasar. Waktu untuk melakukan 10^8 operasi penjumlahan tidak sama dengan waktu untuk melakukan 10^8 operasi modulo.
- Jenis bahasa pemrograman juga mempengaruhi waktu eksekusi algoritma, misalnya bahasa C cenderung lebih cepat daripada Java.
- Bagaimanapun juga, konvensi ini umum digunakan pada dunia pemrograman kompetitif dan sesuai untuk bahasa Pascal, C, dan C++.

Solusi 1: Terlalu lambat!

- Untuk N yang bisa mencapai 10^9, diperlukan sekitar $10^{18}/10^8 = 10^{10}$ detik.
- Waktu tersebut setara dengan sekitar 317 tahun!
- Adakah solusi lebih efisien?

Solusi 2: Coba Semua Kemungkinan R

- Tidak perlu memeriksa semua R dan C, cukup coba saja semua kemungkinan R untuk $1 \leq R \leq N$.
- Jika untuk suatu nilai R, diketahui N habis dibagi R, maka C dipastikan ada, yaitu N/R.

Solusi 2: Coba Semua Kemungkinan R (lanj.)

Bagian implementasi:

```
readln(N);
R := 1;
C := N;
for i := 1 to N begin
  if (N mod i = 0) then begin
    j := N div i;
    if (abs(R-C) > abs(i-j)) then begin
      R := i;
      C := j;
    end;
  end;
end;
writeln(R, ' ', C);
```

Solusi 2: Coba Semua Kemungkinan R (lanj.)

- Solusi ini bekerja dengan lebih cepat.
- Untuk suatu nilai N, kasarnya cukup dilakukan N komputasi untuk mencari nilai R dan C yang tepat.
- Solusi ini dikatakan memiliki kompleksitas waktu sebesar $O(N)$.
- Untuk $N = 10^9$, diperlukan sekitar 10 detik eksekusi algoritma.

Solusi 3: Batasi R sampai $\sqrt{N}$

- Persoalan ini sebenarnya meminta kita memfaktorkan N, supaya dua bilangan hasil faktorisasi sedekat mungkin.
- Untuk memeriksa seluruh faktor bilangan, cukup batasi sampai $\sqrt{N}$ saja.
- Contoh: untuk $N = 100$, faktorisasi yang mungkin adalah:
  - 1×100
  - 2×50
  - 4×25
  - 5×20
  - 10×10
  - 20×5
  - 25×4
  - ... (faktorisasi selanjutnya hanya mengulang yang sudah ada)

Solusi 3: Batasi R sampai $\sqrt{N}$ (lanj.)

Bagian implementasi:

```
readln(N);
R := 1;
C := N;

i := 1;
while (i*i <= N) do begin
  if (N mod i = 0) then begin
    j := N div i;
    if (abs(R-C) > abs(i-j)) then begin
      R := i;
      C := j;
    end;
  end;
  i := i + 1;
end
writeln(R, ' ', C);
```

Solusi 3: Batasi R sampai $\sqrt{N}$ (lanj.)

- Kompleksitas solusi menjadi hanya $O(\sqrt{N})$.
- Untuk $N = 10^9$, hanya diperlukan sekitar 32.000 komputasi, jauh di bawah 100 juta.
- Solusi ini bekerja dengan cepat bahkan untuk N yang besar.

Ulasan Contoh Soal

- Untuk menyelesaikan suatu permasalahan, bisa jadi ada beberapa solusi, masing-masing dengan kompleksitasnya tersendiri.
- Dari ketiga solusi yang telah dijelaskan, solusi ketiga sudah pasti paling diharapkan untuk bisa menyelesaikan permasalahan.
- Untuk mengukur seberapa efisien suatu algoritma, bisa digunakan notasi Big-Oh untuk kompleksitas waktu.

Notasi Big-Oh

- Biasa digunakan pada ilmu komputer untuk menyatakan pertumbuhan nilai suatu fungsi terhadap ukuran masukan yang diberikan.
- Dalam kasus ini, fungsi yang dimaksud adalah fungsi banyaknya komputasi yang diperlukan jika diberikan suatu ukuran masukan.
- Kita tidak akan menggali terlalu dalam tentang hal-hal matematis di balik notasi Big-Oh ini, hanya kulit luarnya saja.

Aturan Sederhana Notasi Big-Oh

1. Konstanta bisa diabaikan.
   Contoh: $O(3N^2)$ bisa ditulis $O(N^2)$ saja.
   Alasan: kita hanya tertarik dengan **pertumbuhan fungsinya**, bukan nilai fungsi sebenarnya.

2. Cukup ambil suku yang mendominasi.
   Contoh: $O(N^3 + N^2)$ bisa ditulis $O(N^3)$ saja.
   Alasan: untuk N yang besar, suku N^3 akan jauh lebih besar daripada suku N^2, sehingga N^2 menjadi tidak signifikan.

Kelompok Kompleksitas

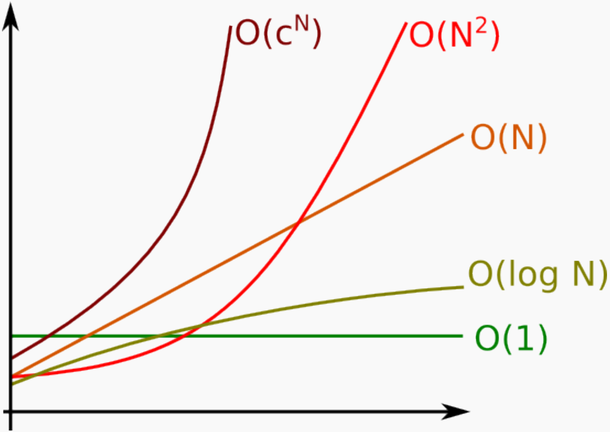
Biasanya kompleksitas dikelompokkan menurut kelasnya sebagai berikut:

- *Constant*: $O(1)$
  Komputasi yang dilakukan tidak bergantung pada besarnya input. Contoh: program untuk mencari nilai harga mutlak suatu angka.
- *Logarithmic*: $O(\log N)$
  Komputasi yang dilakukan proporsional terhadap nilai logaritma dari input.

Kelompok Kompleksitas (lanj.)

- *Linear*: $O(N)$
  Komputasi yang dilakukan proporsional secara linier terhadap input.
- *Polynomial*: $O(\sqrt{N})$, $O(N^2)$, $O(N^3), \ldots$
  Komputasi yang dilakukan proporsional secara polinomial terhadap input.
- *Exponential*: $O(N!)$, $O(2^N)$, $O(N^N), \ldots$
  Komputasi yang dilakukan proporsional secara eksponensial terhadap input. Biasanya dihindari karena terlalu lambat.

Kelompok Kompleksitas (lanj.)



Bagian 2

Menghitung Kompleksitas

Menghitung Kompleksitas

- Wajib dilakukan sebelum mengimplementasikan suatu algoritma.
- Tujuannya untuk memperkirakan apakah solusi ini cukup efisien untuk menyelesaikan persoalan yang ada.
- Dengan sedikit latihan, Anda dapat menghitung kompleksitas dari algoritma sederhana.

Contoh 1: Soal

Hitung kompleksitas waktu potongan program berikut:

```
total := 0;
for i := 1 to N do begin
  for j := 1 to N do begin
    total := total + 1;
  end;
end;
```

Contoh 1: Jawaban

- Sederhana, jawabannya adalah $O(N^2)$.

Contoh 2: Soal

Hitung kompleksitas waktu potongan program berikut:

```
total := 0;
for i := 1 to N do begin
  for j := i to N do begin
    total := total + 1;
  end;
end;
```

Contoh 2: Jawaban

- Banyaknya operasi "total := total + 1" yang dilakukan adalah $N + (N-1) + (N-2) + ... + 2 + 1 = \frac{N(N+1)}{2}$.
- Kompleksitasnya $O\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)$, tetapi cukup ditulis $O(N^2)$ saja.

Contoh 3: Soal

Hitung kompleksitas waktu potongan program berikut:

```
total := 0;
for i := 1 to N do begin
  for j := 1 to M do begin
    total := total + 1;
  end;
end;
```

Contoh 3: Jawaban

- Kali ini terdapat dua variabel pada input, yaitu N dan M.
- Kompleksitasnya adalah $O(NM)$.

Contoh 4: Soal

Hitung kompleksitas waktu potongan program berikut:

```
val := N;
while (val > 0) do begin
  val := val div 3;
end;
```

Contoh 4: Jawaban

- Banyaknya operasi yang dilaksanakan setara dengan panjang dari barisan $\frac{N}{3}, \frac{N}{9}, \frac{N}{27}, ..., 1$.
- Panjang dari barisan tersebut sebenarnya adalah logaritma basis 3 dari N, atau bisa dituliskan kompleksitasnya $O(\log_3 N)$.
- Namun sebenarnya $\log_3 N = \frac{\log N}{\log 3}$.
- Berhubung $\log 3$ adalah konstanta, jadi cukup ditulis $O(\log N)$ saja.

Contoh 5: Soal

Hitung kompleksitas waktu potongan program berikut:

```
counter := 1;
while (counter*counter < N) do begin
  counter := counter + 1;
end;
```

Contoh 5: Jawaban

- Nilai variabel *counter* akan terus bertambah, hingga kuadratnya lebih dari N.
- Misalkan jika $N = 81$, maka *counter* akan berhenti setelah nilainya melebihi 9.
- Kompleksitas sebenarnya adalah $O(\sqrt{N})$.

Penutup

- Pelajari lebih lanjut tentang perhitungan kompleksitas melalui latihan yang diberikan.
- Terdapat notasi lainnya yang tidak kita bahas di sini, seperti Big-Theta (Θ), Big-Omega (Ω), Little-Oh (o), dan sebagainya. Silakan Anda pelajari jika tertarik untuk mengetahui lebih lanjut.