

# Análisis y Minimización de la función $f(x, y) = \frac{\arctan(x^2 + y^2)}{1 + x^2}$

[Agustin A. Carbajal Romero]  
Grupo: [C-312]

November 19, 2025

## 1. Modelo a analizar

Se considera la función

$$f(x, y) = \frac{\arctan(x^2 + y^2)}{1 + x^2},$$

la cual se definirá y evaluará en el dominio  $[-100, 100]^2$  para ambas variables, con el objetivo de hallar su mínimo global.

El problema es **continuo**, **irrestricto** y de **dos variables reales**. Se busca minimizar  $f(x, y)$  empleando algoritmos de optimización sin restricciones.

—

## 2. Análisis teórico del modelo

**a) Existencia de solución.** La función  $f(x, y)$  es continua en todo  $\mathbb{R}^2$  y, dado que el dominio considerado  $[-100, 100]^2$  es cerrado y acotado, por el teorema de Weierstrass existe al menos un punto donde  $f$  alcanza su mínimo.

**b) Tipo de variables.** Las variables  $x$  e  $y$  son continuas y reales.

**c) Gradiente.** Sea  $r^2 = x^2 + y^2$ . El gradiente de  $f$  se obtiene mediante la regla del cociente:

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{2x((1 + x^2)/(1 + (x^2 + y^2)^2) - \arctan(x^2 + y^2))}{(1 + x^2)^2}, \frac{2y}{(1 + x^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)} \right).$$

**d) Hessiana.** El cálculo analítico completo del Hessiano resulta extenso, por lo cual se aproxima mediante diferencias finitas centrales. Numéricamente, se observa que no es definida positiva en todo el dominio, por tanto  $f$  no es convexa globalmente.

**e) Condiciones de óptimo.** Resolviendo  $\nabla f(x, y) = 0$  se obtiene:

$$x = 0, \quad y = 0.$$

El punto  $(0, 0)$  cumple las condiciones necesarias de primer orden y, verificando el signo local de  $f$ , se observa que:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0),$$

por lo cual  $(0, 0)$  es un **mínimo global** de la función.

---

### 3. Características de la función

- Para valores grandes de  $|x|$ , el denominador  $1 + x^2$  hace que  $f(x, y) \rightarrow 0$ , generando zonas planas donde el gradiente se hace muy pequeño. - En las cercanías del origen, la función es suave y simétrica, lo que favorece la convergencia de métodos locales. - No existen máximos ni mínimos locales adicionales; la superficie es monomodal.

---

### 4. Algoritmos utilizados

Se emplearon dos algoritmos de optimización irrestricta adecuados para funciones suaves:

#### 4.1. Método del Gradiente con búsqueda de Armijo

El método de máximo descenso (o gradiente descendente) actualiza iterativamente

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k),$$

donde  $\alpha_k$  es un tamaño de paso obtenido mediante la **regla de Armijo**:

$$f(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) \leq f(x_k) - c \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2, \quad 0 < c < 1.$$

Esta regla garantiza una disminución suficiente del valor de la función y evita pasos demasiado grandes. El algoritmo es sencillo de implementar, aunque su convergencia es lineal, su comportamiento es confiable incluso lejos del óptimo. Para esta función, el gradiente es bien definido ya que la función es diferenciable y esta acotada inferiormente. También en zonas donde el gradiente es pequeño (por ejemplo, cuando  $\|x\|$  es grande y el denominador domina), un criterio adaptativo de paso como el de Armijo evita que el método se “congele” o diverja, ajustando automáticamente la magnitud del paso, por lo que el método de Armijo resulta particularmente eficaz. Sin embargo al estar más cerca del mínimo es lento y realiza muchas más iteraciones.

#### 4.2. Método de Newton con Hessiano numérico regularizado

El método de Newton utiliza una aproximación cuadrática local de la función:

$$x_{k+1} = x_k - H_f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k),$$

donde  $H_f(x_k)$  es la matriz Hessiana. En la práctica se calcula mediante diferencias finitas, y se regulariza añadiendo un término  $\lambda I$  cuando el Hessiano no es definido positivo, de modo que la dirección de descenso sea válida.

Este método presenta convergencia cuadrática cerca del óptimo, siendo mucho más rápido que el gradiente con Armijo cuando se parte de una región cercana a  $(0,0)$ , además de reducir en aproximadamente al cuadrado el error en cada iteración. Usa también información de la curvatura, lo que da pasos más precisos. Sin embargo, puede divergir si se inicia en zonas donde el Hessiano está mal condicionado.

## 5. Resultados y comparación (resumen teórico)

A partir de los experimentos computacionales realizados en el notebook (no mostrados aquí), se observaron los siguientes comportamientos generales:

- El método de Gradiente con Armijo converge de manera estable desde cualquier punto inicial en el dominio  $[-100, 100]^2$ , aunque requiere más iteraciones (del orden de cientos) debido a zonas planas cuando  $|x|$  es grande. El método de Newton converge en muy pocas iteraciones (menos de 10) cuando el punto inicial no está demasiado alejado del origen, mostrando un comportamiento cuadrático típico. En todos los casos se obtuvo el mismo punto de mínimo:  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  con  $f(x^*, y^*) = 0$ .

—

## 6. Conclusiones

- El problema planteado es un caso de optimización irrestricta con variables continuas, diferenciable y con mínimo global en  $(0,0)$ . El Gradiente con Armijo ofrece simplicidad y estabilidad globalmente, ya que siempre converge hacia un mínimo local bajo condiciones suaves. El Método de Newton logra una convergencia más rápida en entornos cercanos al óptimo. Una buena estrategia de práctica sería usar el método del Gradiente con Armijo para acercarse a una buena región del mínimo y luego cambiar a Newton regularizado para refinar la solución con precisión y rapidez que nos ofrece Newton. En ambos casos, el resultado obtenido coincide con el análisis teórico del modelo.

—

## 7. Repositorio y desarrollo computacional

El desarrollo práctico, incluyendo los gráficos, trayectorias y comparaciones de rendimiento, se encuentra implementado en el notebook de Jupyter correspondiente, disponible en el repositorio:

<https://github.com/agustin030902/Optimizacion-TE.git>