DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y AUTOMÁTICA

FACULTAD DE INGENIERÍA – UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN

Informe de Practica de Gabinete Nº2

Muestreo y Transformada de Fourier

Asignatura: Procesamiento Digital de Señales

Ingeniería Electrónica

Autor:

Avila, Juan Agustin – Registro 26076

1º Semestre

Año 2020

1 Ejercicio 1

Encontrar una representación con una frecuencia digital F ≤1/ 2 para las siguientes señales:

1.1 $X_1[n] = \cos[(3/2)\ \pi\ n]$

$$x_1[n] = \cos[(3/2)\ \pi\ n]$$

$$x_1[n] = \cos[2\pi\ (3/4)\ n]$$

$$x_1[n] = \cos[2\pi\ (1 - 1/4)\ n]$$

$$x_1[n] = \cos[2\pi\ (-1/4)\ n]$$

Como la función coseno es par, se puede reescribir de la siguiente manera:

$$x_1[n] = \cos[2\pi\ (1/4)\ n]$$

1.2 $X_1[n] = \mathrm{sen}[(6/7)\ \pi\ n]$

$$x_2[n] = \mathrm{sen}[(6/7)\ \pi\ n]$$

$$x_2[n] = \mathrm{sen}[2\pi\ (3/7)\ n]$$

1.3 $X_1[n] = \cos[(3/4)\ \pi\ n] + \mathrm{sen}[(8/5)\ \pi\ n]$

$$x_3[n] = \cos\left[(3/4)\pi\ n\right] + \mathrm{sen}[(8/5)\ \pi\ n]$$

$$x_3[n] = \cos[2\pi\ (3/8)\ n] + \mathrm{sen}[2\pi\ (4/5)\ n]$$

Se observa que la función coseno ya tiene una F menor a ½, por lo tanto solo se corrige la función seno

$$x_3[n] = \cos[2\pi\ (3/8)\ n] + \mathrm{sen}[2\pi\ (1 - 1/5)\ n]$$

$$x_3[n] = \cos[2\pi\ (3/8)\ n] + \mathrm{sen}[2\pi\ (-1/5)\ n]$$

Siendo que la función seno es impar, se puede reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$x_3[n] = \cos\left[2\pi\ (3/8)\ n\right] - \mathrm{sen}[2\pi\ (1/5)\ n]$$

2 Ejercicio 2

Establecer cuál es la mínima frecuencia de muestreo en Hz, aplicando el criterio de Nyquist (cumplimiento estricto del teorema de muestreo) en las siguientes señales:

2.1 $X_1(t) = 8\ \mathrm{sen}(400\ \pi\ t)$

$$x_1(t) = 8\ \mathrm{sen}(400\ \pi\ t)$$

$$x_1(t) = 8\ \mathrm{sen}(2\pi\ 200\ t)$$

La frecuencia de la señal es de 200Hz, por lo tanto para el cumplimiento estricto del teorema de nyquist, su frecuencia de muestreo debe ser el doble de la frecuencia, por lo tanto Sf=400Hz

2.2 X_2(t) = 3 sen(300 π t – π/5) + 4 cos(300 π t)

$$x_2(t) = 3\,\mathrm{sen}\left(300\,\pi\,\mathrm{t} - \frac{\pi}{5}\right) + 4\cos(300\,\pi\,t)$$

$$x_2(t) = 3\,\mathrm{sen}\left(2\pi\,150\,\mathrm{t} - \frac{\pi}{5}\right) + 4\cos(2\pi\,150\,t)$$

La frecuencia de ambas componentes de la señal es de 150Hz, por lo tanto para el cumplimiento estricto del teorema de nyquist, su frecuencia de muestreo debe ser el doble de la frecuencia, por lo tanto Sf=300Hz.

2.3 X_3(t) = 8 sen(200 π t + π/3) + cos(500 π t – π/3)

$$x_3(t) = 8\,\mathrm{sen}\left(200\,\pi\,\mathrm{t} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos(500\,\pi\,t - \frac{\pi}{3})$$

$$x_3(t) = 8\,\mathrm{sen}\left(2\pi\,100\,\mathrm{t} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos(2\pi\,250\,t - \frac{\pi}{3})$$

En este caso la frecuencia de los componentes de la señal no es igual. Por lo tanto, para cumplir con el teorema de Nyquist, la frecuencia de muestreo debe ser el doble que la mayor frecuencia presente (en este caso 250Hz) por lo tanto Sf=500Hz.

2.4 X_4(t) = 2 cos(150 π t) sen(600 π t)

$$x_4(t) = 2\cos(150\,\pi\,\mathrm{t})\,\mathrm{sen}(600\,\pi\,\mathrm{t})$$

Por identidades trigonométricas, esta ecuación se puede replantear como:

$$x_4(t) = sen(450\,\pi\,\mathrm{t}) + \mathrm{sen}(750\,\pi\,\mathrm{t})$$

$$x_4(t) = sen(2\pi\,225\,\mathrm{t}) + \mathrm{sen}(2\pi\,375\,\mathrm{t})$$

En este caso la frecuencia de los componentes de la señal no es igual. Por lo tanto, para cumplir con el teorema de Nyquist, la frecuencia de muestreo debe ser el doble que la mayor frecuencia presente (en este caso 375Hz) por lo tanto Sf=750Hz.

3 Ejercicio 3

Una sinusoide x(t) = A sen(2π f0 t) es muestreada a dos veces la frecuencia de Nyquist en cuatro períodos. ¿Cuántas muestras son adquiridas?

Si muestrea al doble de la frecuencia de Nyquist, significa que muestrea 4 veces (2*2f0) por periodo, por lo tanto en cuatro periodos se toman 16 muestras.

4 Ejercicio 4

Una sinusoide x(t) = sen(2π 75 t) es muestreada a una velocidad de cinco muestras cada tres períodos:

4.1 ¿Existe aliasing?

Si, ya que la frecuencia de muestreo no llega a la frecuencia de Nyquist (5/3 es menor a 2)

4.2 ¿Cuál es la frecuencia digital de la señal muestreada?

$$F = \frac{f}{Sf} = \frac{75Hz}{125Hz} = 0{,}6$$

4.3 En caso de que exista aliasing, determinar el número de muestras a tomar en tres períodos, considerando la mínima frecuencia de muestreo para que no exista aliasing (frecuencia de Nyquist).

Para que no exista aliasing, la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia de la señal muestreada. Por lo tanto, se deben tomar dos muestras por periodo. Por lo tanto, se deben tomar 6 muestras en 3 periodos. En este caso Sf=2*75Hz=150Hz.

5 Ejercicio 5

Un tono de audio se muestrea y da la siguiente señal discreta x(n) = cos(2.7 n π). Que frecuencia en Hz se escucha, cuando la señal analógica se reconstruye a partir de una frecuencia de muestreo de 1khz?

La señal muestreada tiene un Ω de 2.7π, que se podría rescribir de la siguiente manera:

$$x[n] = \cos(2\pi\ 1.35\ \mathrm{n})$$

Por lo tanto, su frecuencia digital es 1,35 y se sabe que:

$$F = {}^{f_0}\!/_{Sf}$$

$$1{,}35 = \frac{f_0}{1000Hz}$$

$$f_0 = 1350Hz$$

Por lo tanto la señal reconstruida tendrá una frecuencia de 1,35KHz

6 Ejercicio 6

Encontrar la DTFT Xp(F) . Evaluar su amplitud para F = 0, F = 1/2 y F = 1, considerando la siguiente secuencia: {x[n]} {1,2,3,2,1}

La ecuación que define la DTFT es la siguiente:

$$X_p(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi nF}$$

Desarrollando la sumatoria para la función x[n] se llega a la siguiente ecuación:

$$X_p(F) = 1e^{-j2\pi(-2)F} + 2e^{-j2\pi(-1)F} + 3e^{-j2\pi(0)F} + 2e^{-j2\pi(1)F} + 1e^{-j2\pi(2)F}$$

Con esto, se evalua la amplitud para las distintas frecuencias:

Para F=0:

$$X_p(0) = 1e^{-j2\pi(-2)0} + 2e^{-j2\pi(-1)0} + 3e^{-j2\pi(0)0} + 2e^{-j2\pi(1)0} + 1e^{-j2\pi(2)0}$$

$$X_p(0) = 1*1 + 2*1 + 3*1 + 2*1 + 1*1 = 9$$

Para F=0,5:

$$X_p(0{,}5) = 1e^{-j2\pi(-2)0{,}5} + 2e^{-j2\pi(-1)0{,}5} + 3e^{-j2\pi(0)0{,}5} + 2e^{-j2\pi(1)0{,}5} + 1e^{-j2\pi(2)0{,}5}$$

$$X_p(0{,}5) = 1e^{j2\pi} + 2e^{j\pi} + 3e^{0} + 2e^{-j\pi} + 1e^{-j2\pi}$$

$$X_p(0{,}5) = 3 + 2*\frac{e^{j2\pi} + e^{-j2\pi}}{2} + 4*\frac{2e^{j\pi} + 2e^{-j\pi}}{2}$$

$$X_p(0{,}5) = 3 + 2\cos(2\pi) + 4\cos(\pi) = 3 + 2 - 4 = 1$$

Para F=1

$$X_p(1) = 1e^{-j2\pi(-2)1} + 2e^{-j2\pi(-1)1} + 3e^{-j2\pi(0)1} + 2e^{-j2\pi(1)1} + 1e^{-j2\pi(2)1}$$

$$X_p(1) = 1e^{j4\pi} + 2e^{j2\pi} + 3e^{0} + 2e^{-j2\pi} + 1e^{-j4\pi}$$

$$X_p(1) = 3 + 2*\frac{e^{j4\pi} + e^{-j4\pi}}{2} + 4*\frac{2e^{j2\pi} + 2e^{-j2\pi}}{2}$$

$$X_p(1) = 3 + 2\cos(4\pi) + 4\cos(2\pi) = 3 + 2 + 4 = 9$$

7 Ejercicio 7

Encontrar la función de transferencia Hp(F) del siguiente sistema usando DTFT: y[n] − (1/4) y[n−2] = 2.x[n]

Se procede aplicando la TFTD:

$$Y(F) - \frac{1}{4}\,Y(F)e^{-j2\pi 2F} = 2X(F)$$

$$Y(F) * (\,1 - \frac{1}{4}e^{-j2\pi 2F}) = 2X(F)$$

$$Y(F) = \frac{2X(F)}{1 - \frac{1}{4}e^{-j2\pi 2F}}$$

$$\frac{Y(F)}{X(F)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j2\pi 2F}}$$

$$H_p(F) = \frac{Y(F)}{X(F)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j2\pi 2F}}$$