DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y AUTOMÁTICA

FACULTAD DE INGENIERÍA – UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN

Informe de Laboratorio N°4

Transformada de Fourier en tiempo discreto - Propiedades

Asignatura: Procesamiento Digital de Señales

Ingeniería Electrónica

Autor:

Avila, Juan Agustin – Registro 26076

1º Semestre

Año 2020

1 Introducción.

1.1 La DTFT y sus propiedades

La DTFT es el dual de la serie de Fourier (Transformada de Fourier continua para señales periódicas) en casi todos los aspectos. Las ecuaciones que gobiernan esta transformada son las siguientes:

- $X(F)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi nF}$
- $x[n]=\int_{-1/2}^{1/2} X(F)e^{j2\pi nF}dF$

La primera de ellas es la ecuación que define la DTFT propiamente. La segunda ecuación nos permite recuperar la señal discreta a partir del espectro principal comprendido entre -0.5≤F≤0.5.
La rutina **`freqz`** puede ser usada para encontrar y graficar la magnitud y fase de la DTFT. La sintaxis es:

```
>> h = freqz(n, d, W)
```

donde:
`n:` numerador de la función de transferencia *H(F)* en potencias descendentes de . $e^{j2\pi F}$
`d:` denominador de la función de transferencia *H(F)* en potencias descendentes de . $e^{j2\pi F}$
`W:` es un arreglo de frecuencias en radianes en el cual la DTFT es evaluada.
La magnitud y fase en radianes son obtenidas mediante **`abs(h)`** y **`angle(h)`**. La rutina **`angle`** restringe la fase al rango –ω a ω. Esto provoca que en la fase saltos de 2π sí la fase verdadera supera este rango. El comando **`unwrap`** devuelve la fase al estado original.
Cuando la frecuencia de muestreo es un valor conocido, otra manera de emplear la rutina **`freqz`** puede ser la siguiente:

```
>> h = freqz(n, d, f, S)
```

En este caso **`f`** será un arreglo de frecuencias analógicas sobre el que se desea evaluar la DTFT, y **`S`** será el valor de la frecuencia de muestreo. Si se desea representar gráficamente la respuesta en frecuencia tanto del módulo como de la fase, pueden emplearse los siguientes comandos:

```
>> plot(f,abs(h)); % Módulo en función de la frecuencia. Si se reemplaza f
por f/S se graficará en función de la frecuencia digital F
>> plot(f,angle(h)); % Fase en función de la frecuencia.
```

Debido a que el comando **`freqz`** está pensado para trabajar con arreglos del tipo “función de transferencia”, es decir con numerador y denominador, se debe hacer una adecuación para aplicarlo a vectores.
La variable “**`n`**” contendrá los coeficientes del vector “**`x`**” a transformar, mientras que la variable “**`d`**” será un vector que indicará qué elemento de “**`n`**” corresponde para el instante cero (0).
Si el primer elemento de “**`n`**” corresponde al instante cero (es decir que “**`x`**” es un vector causal), el valor de “**`d`**” será simplemente “1”.
En el caso de que “x” sea un vector “no causal”, “d” será un arreglo de igual longitud que “x” conteniendo un “1” en la posición correspondiente al instante cero, y completando el resto con ceros.

2 Actividades.

2.1 Representacion grafica de la DTFT

Empleando el comando freqz, encuentre la DTFT de las siguientes señales sobre 0<F<1 a 500 intervalos. Evalue X(F) para F=0, F=0.25 y F=0.5.

a) x[n] = {1,2,3,2,1}
b) x[n] = {1,2,2,1}
c) x[n] = {-1,2,0,-2,1}

d) x[n] = {-1,-2,2,1}

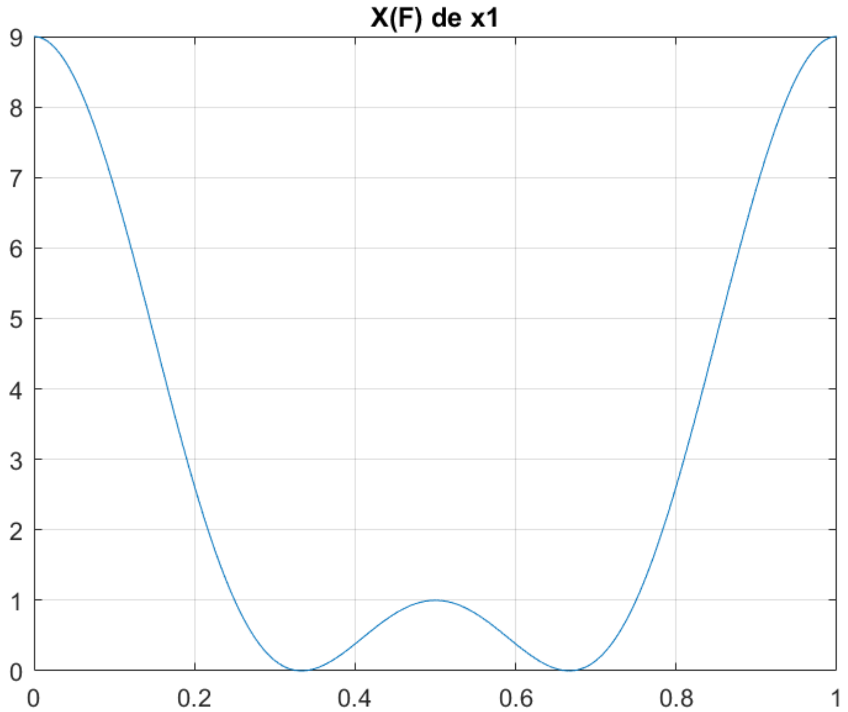
Para la realización de este punto, se genero una función en matlab:

```
function grafF(x,nombre)
    f=500;
    F=0:1/f:1;
    W=2*pi*F;
    X=freqz(x,1, W);
    F1=0;
    F2=.25;
    F3=.5;
    F1v=abs(X(find(F==F1)));
    F2v=abs(X(find(F==F2)));
    F3v=abs(X(find(F==F3)));
    disp("Para "+nombre+":")
    disp("El valor de "+nombre+" para F=0 es "+F1v)
    disp("El valor de "+nombre+" para F=0.25 es "+F2v)
    disp("El valor de "+nombre+" para F=0.5 es "+F3v)
    figure();
    plot(F,abs(X)); grid on;
    title("X(F) de "+nombre);
end
```

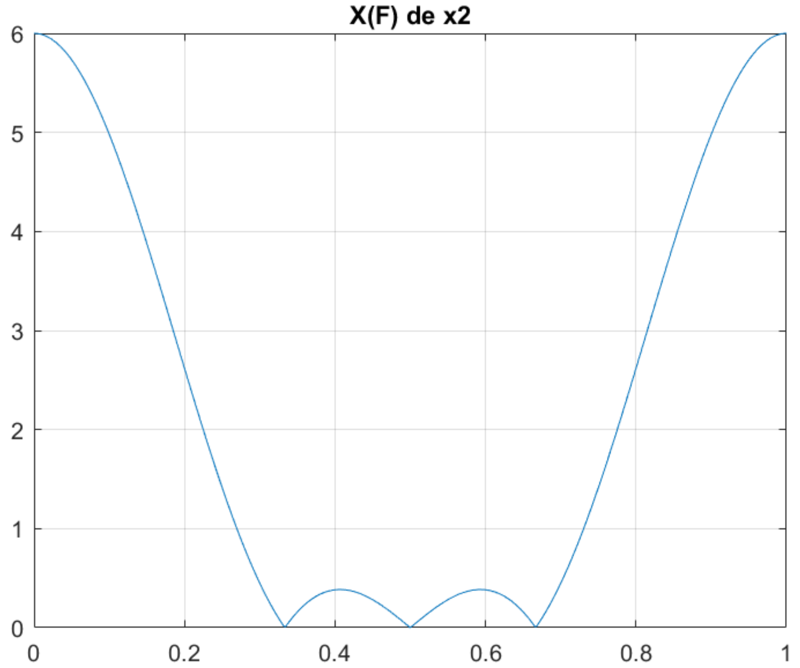
Y se evaluaron las cuatro funciones:

```
%% Punto 1
x1=[1 2 3 2 1];
x2=[1 2 2 1];
x3=[-1 2 0 2 -1];
x4=[-1 -2 2 1];
grafF(x1,"x1");
grafF(x2,"x2");
grafF(x3,"x3");
grafF(x4,"x4");
```

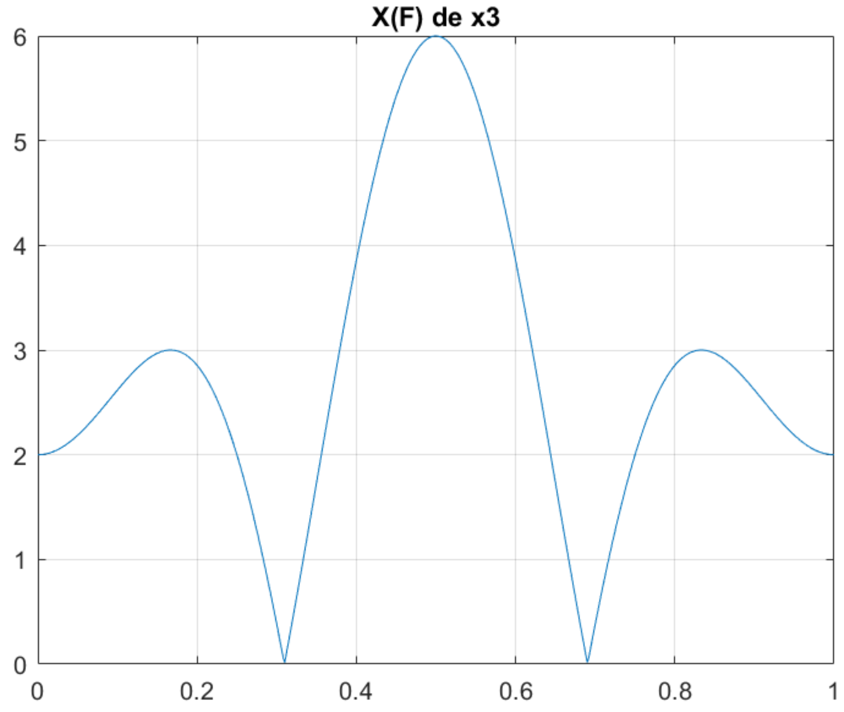
Los resultados obtenidos son los siguientes:



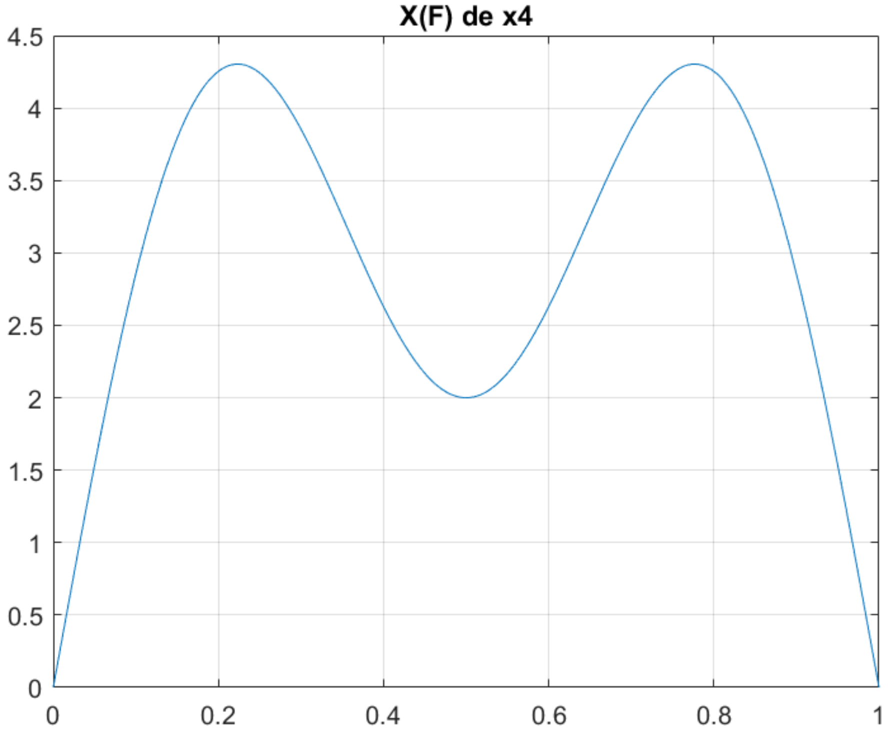
Para x1:
El valor de x1 para F=0 es 9
El valor de x1 para F=0.25 es 1
El valor de x1 para F=0.5 es 1



Para x2:
El valor de x2 para F=0 es 6
El valor de x2 para F=0.25 es 1.4142
El valor de x2 para F=0.5 es 1.2246e-16



Para x3:
El valor de x3 para F=0 es 2
El valor de x3 para F=0.25 es 2
El valor de x3 para F=0.5 es 6



Para x4:
El valor de x4 para F=0 es 0
El valor de x4 para F=0.25 es 4.2426
El valor de x4 para F=0.5 es 2

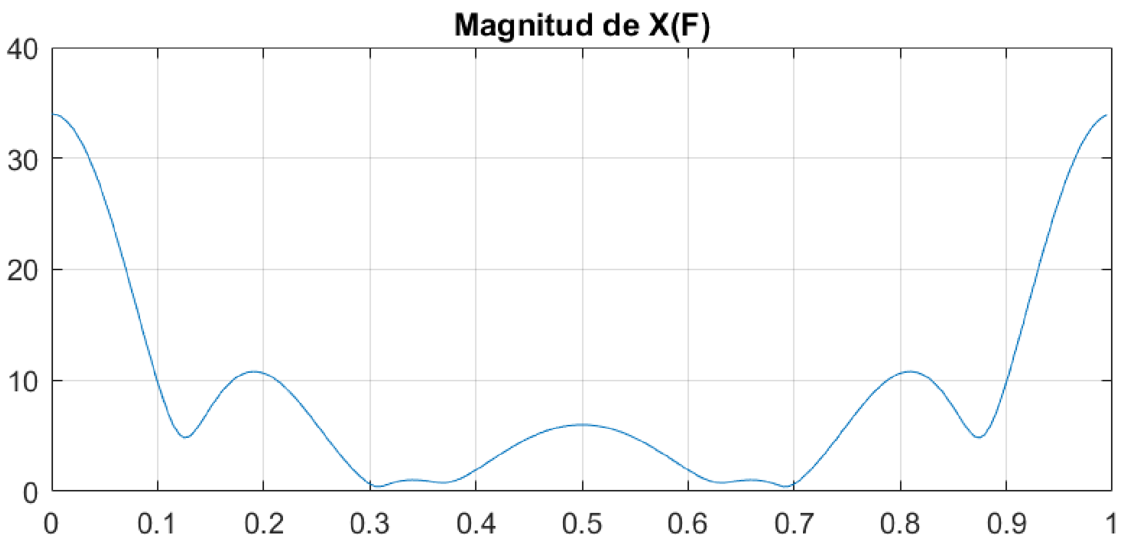
2.2 Fase y la propiedad de desplazamiento en el tiempo

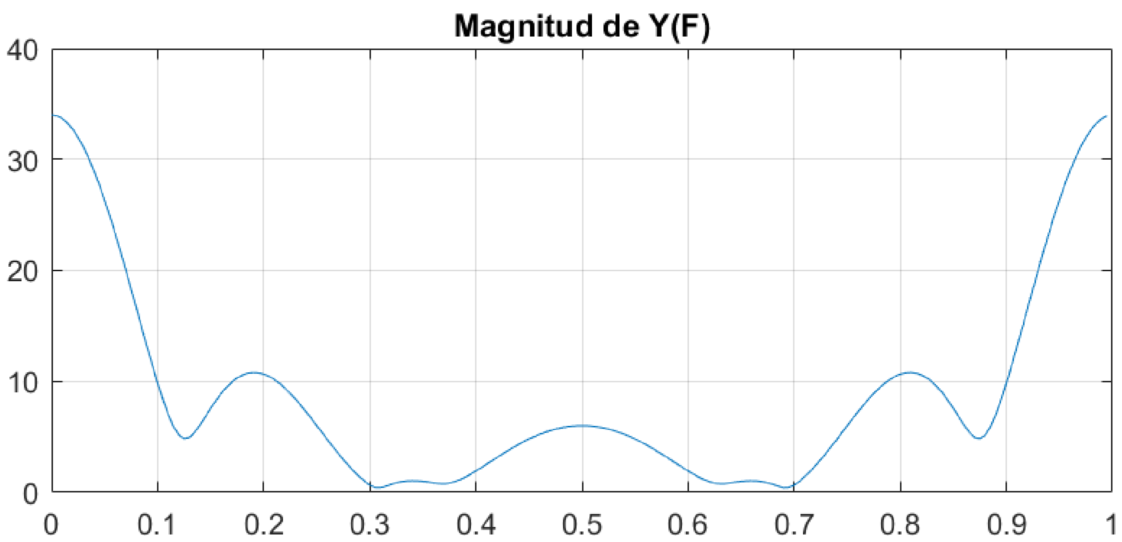
Sea x[n]={1,6,6,6,2,4,4,4,1}, -4<n<4.

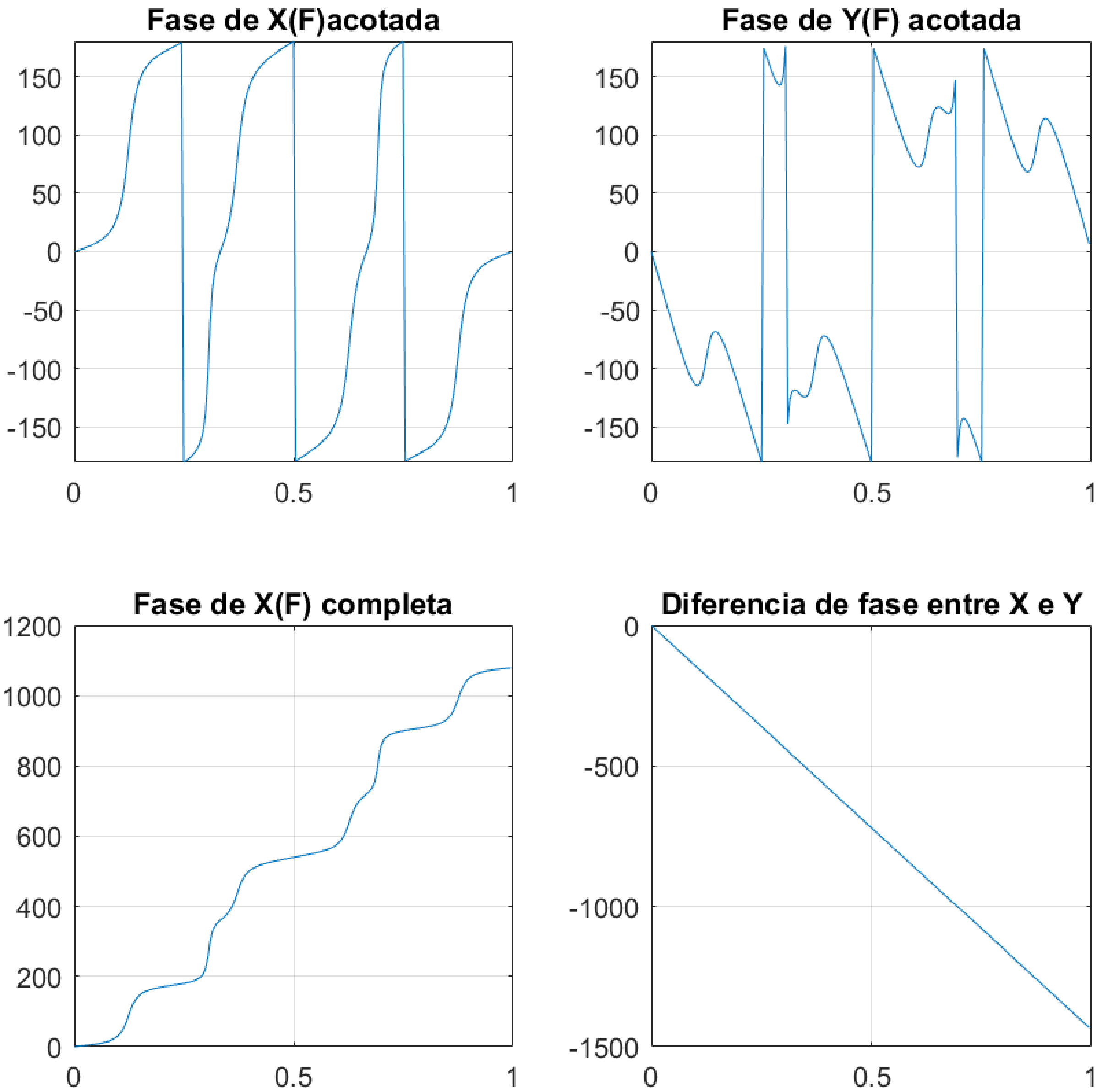
Obtener la DTFT de x[n] e y[n]= x[n-D]. Siendo D = valor necesario y suficiente para que y[n] sea no causal, sobre 0<F<1 a 200 intervalos y graficar el resultado.

```
>>n=-3:3; x=[3 3 3 3 2 2 2];
>>F=(0:199)/200;
>>W=2*pi*F;
>>X=freqz(x,[zeros(1,3) 1 zeros(1,3)], W);
>>Y=freqz(x,[1 zeros(1,6)], W);
>>figure (1);
>>subplot(211),plot(F,abs(X));subplot(212),plot(F,abs(Y));
>>figure (2);
>>subplot(221),plot(F,180*angle(X)/pi);subplot(222),plot(F,180*angle(Y)/pi)
;
>>subplot(223),plot(F,180*unwrap(angle(X))/pi);
>>phi=unwrap(angle(Y)-angle(X));subplot(224),plot(F,phi);
```

Poner grillas y títulos a cada uno de los graficos y responder lo siguiente:







Por definición $\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(F)$ y $\mathrm{DTFT}[x(n-D)] = X(F)e^{-j2\pi FD}$

Por lo tanto:

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi nF} \tag{1}$$

$$Y(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-D]e^{-j2\pi(n-D)F} \tag{2}$$

Y siendo D el desplazamiento para que la función sea causal

2.2.1 Según la teoría |X(F)| e |Y(F)|, deben ser idénticas? ¿Las gráficas obtenidas concuerdan con la teoría? Explicar.

Analizando las ecuaciones (1) y (2), la magnitud de |X(F)| e |Y(F)| son idénticas ya que x[n] es el mismo en las dos ecuaciones. La grafica obtenida concuerda con la teoría.

2.2.2 Según la teoría ∠X(F) e ∠Y(F) deben ser idénticas? ¿Las gráficas obtenidas concuerdan con la teoría? explicar.

Analizando las ecuaciones (1) y (2), se observa que las fases de X (F) e Y(F) no son idénticas, ya que $\emptyset_x = -2\pi nF$ y $\emptyset_y = -2\pi(n-D)F = \emptyset_x + 2\pi DF$. Las gráficas obtenidas concuerdan con la teoría, ya que se comprueba que las dos graficas de fase son distintas.

2.2.3 En el subplot(223) son removidos todos los saltos de fase? Cuales? Explicar

Son removidos los saltos de fase de -360º cuando el valor de la fase supera los 180º. Los saltos propios de la transformada cuando el valor de x[n] cambia no son removidos.

2.2.4 Es la fase DTFT de X(F) lineal? ¿El resultado concuerda con la teoría? Explicar

Por la ecuación (1), la fase de X[F] está dada por $e^{-j2\pi nF}$. Por lo tanto, no es lineal ya que depende del valor de n que no es constante. El resultado de la gráfica concuerda con la teoría.

2.2.5 ¿Es la diferencia de fase $\emptyset(F) = \angle\mathbf{Y}(\mathbf{F}) - \angle\mathbf{X}(\mathbf{F})$ lineal? ¿Es este el resultado teóricamente correcto? Explicar

Si, ya que la fase de Y(F) es igual a la fase de X(F) más un valor constante proporcional al desplazamiento. Es decir:

$$\emptyset(F) = \angle\mathrm{Y(F)} - \angle\mathrm{X(F)} = 2\pi(n-D)F - 2\pi nF = 2\pi DF$$

2.2.6 Use los datos del subplot(224) para encontrar el retardo D. Sus resultados ¿Validan la propiedad del desplazamiento?

```
deltaphi=phi(length(phi))-phi(1);
deltaF=F(length(F))-F(1);
D=(-deltaphi/deltaF)/(2*pi)
```

D = 4

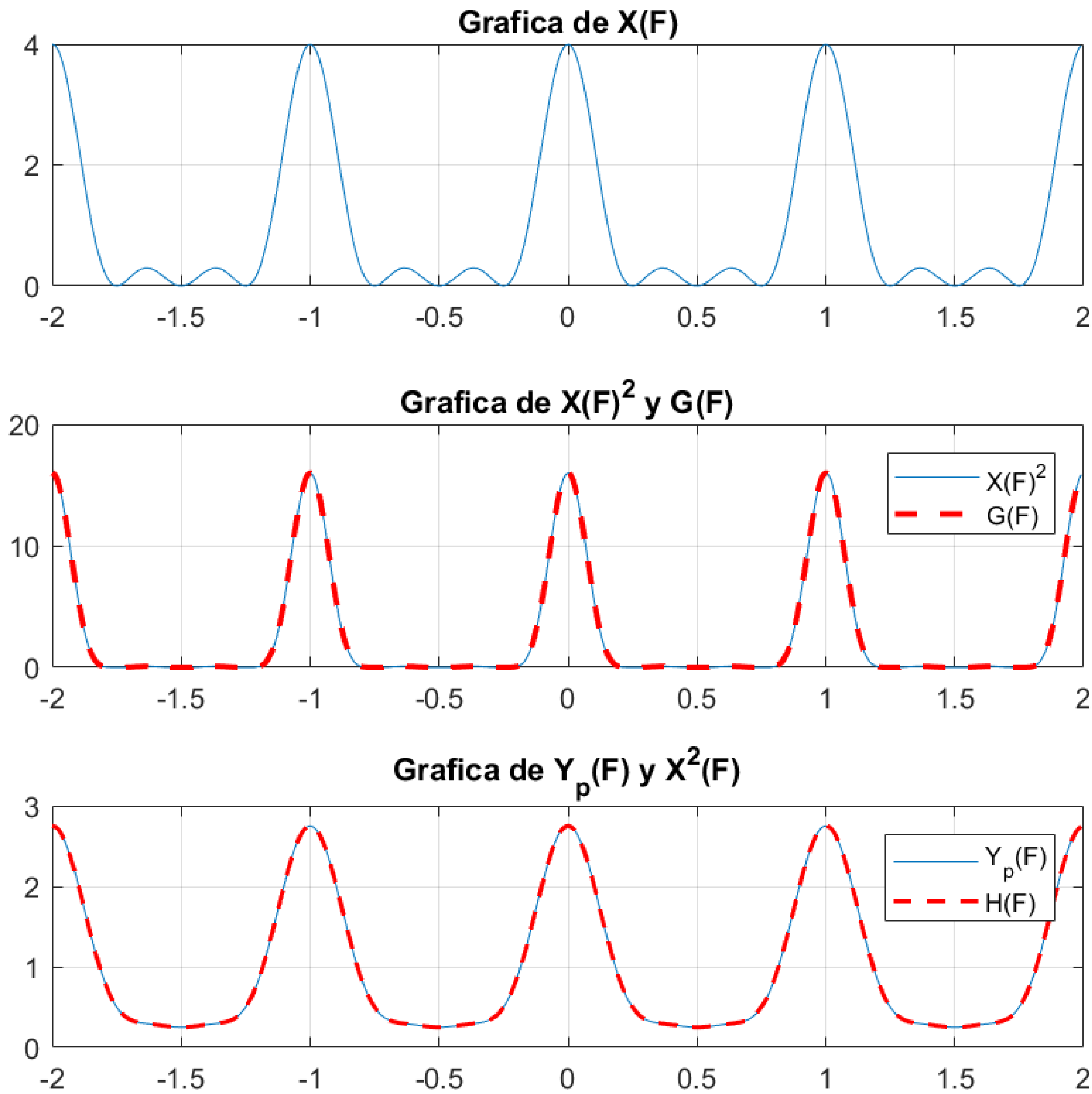
Lo que valida la propiedad de desplazamiento.

2.3 Periodicidad, convolucion y multiplicación

Sea x[n]=tri((n-4)/4), 0<n<8. Obtener la DTFT de x[n], g[n]=x[n]*x[n] y h[n]=x^2[n] sobre -2< F < 1.99 a intervalos de 0.01 y graficar los resultados, usar el siguiente código:

```
>>n=0:8;
>>x=tri((n-4)/4);
>>F=-2:0.01:1.99;W=2*pi*F;
>>X=freqz(x, [1 zeros(1,8)], W);
>>G=freqz(conv(x,x), [1 zeros(1,16)],W);
>>H=freqz(x.*x,[1 zeros(1,8)], W);
>>subplot(221), plot(F,abs(X));subplot(222), plot(F,abs(X).^2,F,abs(G),':')
>>Yp=convp(X,X)/length(X);
>>subplot(223), plot(F,abs(Yp),F,abs(H),':')
```

Poner grillas y títulos a cada uno de los graficos y responder lo siguiente:



2.3.1 ¿Es |X(F)| periódica?¿Con que periodo?

Si es periódica, con un periodo de 1Hz.

2.3.2 ¿Son |X(F)|^2 y |G(F)| idénticas? Explicar este resultado

En la segunda gráfica se observa que |X[F]|^2 y |G[F]| son idénticas, y esto se debe a una propiedad de la DTFT por la cual la convolución de señales en el dominio temporal también puede expresarse como el producto de las mismas señales en el dominio frecuencial.

2.3.3 ¿Son |Y_p(F)|^2 y |H(F)| idénticas? Explicar este resultado

En la tercer gráfica se observa que |YP[F]| y |H[F]| son idénticas, y esto se debe a una propiedad de la DTFT por la cual la multiplicación de señales en el dominio temporal también puede expresarse como la convolución de las mismas señales en el dominio frecuencial.