DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico Nº 1

Especificación y WP

18 de julio de 2024 — Algoritmos y Estructuras de Datos

Integrantes:

Integrante	LU	Correo electrónico
Bianchi, Bruno	699/22	`bruno@brunobianchi.com.ar`
Castro Vivoda, Iván	43/22	`icastrovivoda11@gmail.com`
Chen, Santiago	114/23	`chensantiago000@gmail.com`
Herrera, Agustín	609/10	`agustin@inventati.org`

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

http://www.exactas.uba.ar

1. Especificación

1.1. redistribucionDeLosFrutos

$\texttt{proc redistribucionDeLosFrutos}$ (in recursos : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, in cooperan : $seq\langle\mathsf{Bool}\rangle$) : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$

$\texttt{requiere}$ $\{|\text{recursos}| = |\text{cooperan}|\}$

$\texttt{requiere}$ $\{|\text{recursos}| > 0\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{recursos}| \longrightarrow_L \text{recursos}[i] > 0)\}$

$\texttt{asegura}$ $\{|\text{res}| = |\text{recursos}|\}$

$\texttt{asegura}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{res}| \longrightarrow_L \text{res}[i] = \text{recursos}[i]*(1-\texttt{coopera}(\text{cooperan}[i]))+\texttt{fracRecurso}(\texttt{recursos},\texttt{cooperan}))\}$

$\texttt{aux fracRecurso}$ (recursos: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, cooperan $seq\langle\mathsf{Bool}\rangle$) : $\mathbb{R} = \frac{\sum_{i=0}^{|\text{recursos}|-1} \text{recursos}[i]*\texttt{coopera}(\text{cooperan}[i])}{|\text{recursos}|}$;

$\texttt{aux coopera}$ (coop: Bool) : $\mathbb{N}$ = if coop = true then 1 else 0 fi ;

1.2. trayectoriaDeLosFrutosIndividualesALargoPlazo

$\texttt{proc trayectoriaDeLosFrutosIndividualesALargoPlazo}$ (inout trayectorias: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in cooperan: $seq\langle\mathsf{Bool}\rangle$, in apuestas: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in pagos: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in eventos: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$)

$\texttt{requiere}$ $\{\text{trayectorias} = \text{Trayectorias}_0\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{Trayectorias}_0| \longrightarrow_L |\text{Trayectorias}_0[i]| = 1)\}$

$\texttt{requiere}$ $\{|\text{Trayectorias}_0| = |\text{cooperan}| = |\text{apuestas}| = |\text{pagos}| = |\text{eventos}|\}$

$\texttt{requiere}$ $\{|\text{Trayectorias}_0| > 0\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{eventos}| \longrightarrow_L |\text{eventos}[i]| > 0)\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{Trayectorias}_0| \longrightarrow_L \text{Trayectorias}_0[i][0] > 0)\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{apuestas}| \longrightarrow_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \le j < |\text{apuestas}[i]| \longrightarrow_L \text{apuestas}[i][j] \ge 0))\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{apuestas}| \longrightarrow_L \sum_{j=0}^{|\text{apuestas}[i]|-1} \text{apuestas}[i][j] = 1)\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{apuestas}| \longrightarrow_L |\text{apuestas}[i]| = |\text{pagos}[i]| > 1)\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{pagos}| \longrightarrow_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \le j < |\text{pagos}[i]| \longrightarrow_L \text{pagos}[i][j] > 0))\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{eventos}| \longrightarrow_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \le j < |\text{eventos}[i]| \longrightarrow_L 0 \le \text{eventos}[i][j] < |\text{apuestas}[i]|))\}$

$\texttt{asegura}$ $\{\texttt{esTrayectoria}(\text{trayectorias}, \text{Trayectorias}_0, \text{cooperan}, \text{apuestas}, \text{pagos}, \text{eventos})\}$

$\texttt{pred esTrayectoria}$ (trayectorias: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, Trayectorias_0: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, cooperan: $seq\langle\mathsf{Bool}\rangle$, apuestas: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, pagos: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, eventos: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$) {

$|\text{trayectorias}| = |\text{Trayectorias}_0| \wedge_L$

$(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{trayectorias}| \longrightarrow_L |\text{trayectorias}[i]| = |\text{eventos}[i]| + 1) \wedge_L$

$(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{trayectorias}| \longrightarrow_L \text{trayectorias}[i][0] = \text{Trayectorias}_0[i][0]) \wedge_L$

$(\forall i, j : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{trayectorias}| \wedge 0 \le j < |\text{eventos}[i]| \longrightarrow_L$

$\text{trayectorias}[i][j+1] = \text{trayectorias}[i][j] * \text{apuestas}[i][\text{eventos}[i][j]] * \text{pagos}[i][\text{eventos}[i][j]] * (1 - \texttt{coopera}(\text{cooperan}[i])) +$
$\frac{\sum_{k=0}^{|\text{trayectorias}|-1} \text{trayectorias}[k][j]*\text{apuestas}[k][\text{eventos}[k][j]]*\text{pagos}[k][\text{eventos}[k][j]]*\texttt{coopera}(\text{cooperan}[k])}{|\text{trayectorias}|})$

}

$\texttt{aux coopera}$ (coop: Bool) : $\mathbb{N}$ = if coop = true then 1 else 0 fi ;

1.3. trayectoriaExtrañaEscalera

$\texttt{proc trayectoriaExtrañaEscalera}$ (in trayectoria: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$) : Bool

$\texttt{requiere}$ $\{|\text{trayectoria}| > 1\}$

$\texttt{asegura}$ $\{res = \text{true} \leftrightarrow \texttt{cantidadMaximoLocal}(\text{trayectoria}) = 1\}$

$\texttt{aux cantidadMaximoLocal}$ (in s: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$) : $\mathbb{Z}$ =
if $s[0] > s[1]$ then 1 else 0 fi $+ \sum_{i=1}^{|s|-2}$(if $s[i] > s[i-1] \wedge s[i] > s[i+1]$ then 1 else 0 fi) + if $s[|s|-1] > s[|s|-2]$ then 1 else 0 fi ;

1.4. individuoDecideSiCooperarONo

$\texttt{proc individuoDecideSiCooperarONo}$ (in individuo: $\mathbb{N}$, in recursos: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, inout cooperan: $seq\langle\mathsf{Bool}\rangle$, in apuestas: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in pagos $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in eventos: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$)

$\texttt{requiere}$ $\{\text{cooperan} = \text{Cooperan}_0\}$

$\texttt{requiere}$ $\{|\text{recursos}| = |\text{Cooperan}_0| = |\text{apuestas}| = |\text{pagos}| = |\text{eventos}|\}$

$\texttt{requiere}$ $\{|\text{Cooperan}_0| > 1\}$

$\texttt{requiere}$ $\{0 \le \text{individuo} < |\text{Cooperan}_0|\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{eventos}| \longrightarrow_L |\text{eventos}[i]| > 0)\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{recursos}| \longrightarrow_L \text{recursos}[i] > 0)\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{apuestas}| \longrightarrow_L (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \le j < |\text{apuestas}[i]| \longrightarrow_L \text{apuestas}[i][j] \ge 0))\}$

$\texttt{requiere}$ $\{(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \le i < |\text{apuestas}| \longrightarrow_L \sum_{j=0}^{|\text{apuestas}[i]|-1} \text{apuestas}[i][j] = 1)\}$

$\texttt{requiere}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{apuestas}| \longrightarrow_L |\text{apuestas}[i]|=|\text{pagos}[i]|>1)\}$
$\texttt{requiere}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{pagos}| \longrightarrow_L (\forall j:\mathbb{Z})\ (0\le j<|\text{pagos}[i]| \longrightarrow_L \text{pagos}[i][j]>0))\}$
$\texttt{requiere}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{eventos}| \longrightarrow_L (\forall j:\mathbb{Z})\ (0\le j<|\text{eventos}[i]| \longrightarrow_L 0\le \text{eventos}[i][j]<|\text{apuestas}[i]|))\}$
$\texttt{asegura}\ \{|\text{cooperan}|=|\text{Cooperan}_0|\}$
$\texttt{asegura}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{cooperan}|\wedge i\neq \text{individuo} \longrightarrow_L \text{cooperan}[i]=\text{Cooperan}_0[i])\wedge_L$
$(\exists \text{trayectoria}_{\text{orig}}: seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle)\ ($
$\texttt{esTrayectoria}(\text{trayectoria}_{\text{orig}},\text{individuo},\text{Cooperan}_0[\text{individuo}],\text{recursos},\text{Cooperan}_0,\text{apuestas},\text{pagos},\text{eventos}))\wedge$
$(\exists \text{trayectoria}_{\text{neg}}: seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle)\ ($
$\texttt{esTrayectoria}(\text{trayectoria}_{\text{neg}},\text{individuo},\neg\text{Cooperan}_0[\text{individuo}],\text{recursos},\text{Cooperan}_0,\text{apuestas},\text{pagos},\text{eventos}))\wedge_L$
$\text{trayectoria}_{\text{orig}}[\text{individuo}][|\text{eventos}|]\ge \text{trayectoria}_{\text{neg}}[\text{individuo}][|\text{eventos}|]\leftrightarrow \text{cooperan}[\text{individuo}]=\text{Cooperan}_0[\text{individuo}]\}$

$\texttt{pred esTrayectoria}$ (trayectorias: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, ind: $\mathbb{N}$, indcoop: Bool, recursos: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, cooperan: $seq\langle\text{Bool}\rangle$, apuestas: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, pagos $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, eventos: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$) {
$(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{trayectorias}| \longrightarrow_L \text{trayectorias}[i][0]=\text{recursos}[i]\wedge(\forall j:\mathbb{Z})\ (0\le j<|\text{eventos}[i]| \longrightarrow_L$
$\text{trayectorias}[i][j+1]=\text{trayectorias}[i][j]*\text{apuestas}[i][\text{eventos}[i][j]]*\text{pagos}[i][\text{eventos}[i][j]]*$
$(1-\texttt{cooperaInd}(i,\text{ind},\text{indcoop},\text{cooperan}))+\frac{1}{|\text{cooperan}|}*$
$\sum_{k=0}^{|\text{cooperan}|-1}\text{trayectorias}[k][j]*\text{apuestas}[k][\text{eventos}[k][j]]*\text{pagos}[k][\text{eventos}[k][j]]*\texttt{cooperaInd}(k,\text{ind},\text{indcoop},\text{cooperan})))$
}
$\texttt{aux coopera}$ (coop: Bool) : $\mathbb{N}$ = if coop = true then 1 else 0 fi ;
$\texttt{aux cooperaInd}$ (k: $\mathbb{N}$, ind: $\mathbb{N}$, indcoop: Bool, cooperan: $seq\langle\text{Bool}\rangle$) : $\mathbb{N}$ =
if $k=\text{ind}$ then $\texttt{coopera}$(indcoop) else $\texttt{coopera}$(cooperan[k]) fi ;

1.5. individuoActualizaApuesta

$\texttt{proc individuoActualizaApuesta}$ (in individuo: $\mathbb{N}$, in recursos: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, in cooperan: $seq\langle\text{Bool}\rangle$, inout apuestas: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in pagos $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in eventos: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$)
$\texttt{requiere}\ \{\text{apuestas}=\text{Apuestas}_0\}$
$\texttt{requiere}\ \{|\text{recursos}|=|\text{cooperan}|=|\text{Apuestas}_0|=|\text{pagos}|=|\text{eventos}|\}$
$\texttt{requiere}\ \{|\text{Apuestas}_0|>0\}$
$\texttt{requiere}\ \{0\le \text{individuo}<|\text{Apuestas}_0|\}$
$\texttt{requiere}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{eventos}| \longrightarrow_L |\text{eventos}[i]|>0)\}$
$\texttt{requiere}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{recursos}| \longrightarrow_L \text{recursos}[i]>0)\}$
$\texttt{requiere}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{Apuestas}_0| \longrightarrow_L (\forall j:\mathbb{Z})\ (0\le j<|\text{Apuestas}_0[i]| \longrightarrow_L \text{Apuestas}_0[i][j]\ge 0))\}$
$\texttt{requiere}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{Apuestas}_0| \longrightarrow_L \sum_{j=0}^{|\text{Apuestas}_0[i]|-1}\text{Apuestas}_0[i][j]=1)\}$
$\texttt{requiere}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{Apuestas}_0| \longrightarrow_L |\text{Apuestas}_0[i]|=|\text{pagos}[i]|>1)\}$
$\texttt{requiere}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{pagos}| \longrightarrow_L (\forall j:\mathbb{Z})\ (0\le j<|\text{pagos}[i]| \longrightarrow_L \text{pagos}[i][j]>0))\}$
$\texttt{requiere}\ \{(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{eventos}| \longrightarrow_L (\forall j:\mathbb{Z})\ (0\le j<|\text{eventos}[i]| \longrightarrow_L 0\le \text{eventos}[i][j]<|\text{Apuestas}_0[i]|))\}$
$\texttt{asegura}\ \{|\text{apuestas}|=|\text{Apuestas}_0|\}$
$\texttt{asegura}\ \{(\exists \text{trayectoria}_{\text{max}}: seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle)\ (\texttt{esTrayectoria}(\text{trayectoria}_{\text{max}},\text{recursos},\text{cooperan},\text{apuestas},\text{pagos},\text{eventos}))\wedge_L$
$(\forall \text{apuesta}_{\text{posible}}: seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle)\ (\texttt{esApuestaPosible}(\text{apuesta}_{\text{posible}},\text{Apuestas}_0,\text{individuo}) \longrightarrow_L$
$(\exists \text{trayectoria}_{\text{posible}}: seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle)\ (\texttt{esTrayectoria}(\text{trayectoria}_{\text{posible}},\text{recursos},\text{cooperan},\text{apuesta}_{\text{posible}},\text{pagos},\text{eventos})$
$\wedge_L\ \text{trayectoria}_{\text{max}}[\text{individuo}][|\text{eventos}|]\ge \text{trayectoria}_{\text{posible}}[\text{individuo}][|\text{eventos}|])))\}$

$\texttt{pred esApuestaPosible}$ ($\text{apuesta}_{\text{posible}}$: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, Apuestas_0: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, individuo: $\mathbb{N}$) {
$(|\text{apuesta}_{\text{posible}}|=|\text{Apuestas}_0|\wedge_L$
$(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{apuesta}_{\text{posible}}|\wedge i\neq\text{individuo} \longrightarrow_L \text{apuesta}_{\text{posible}}[i]=\text{Apuestas}_0[i])\wedge$
$\sum_{k=0}^{|\text{apuesta}_{\text{posible}}[\text{individuo}]|-1}\text{apuesta}_{\text{posible}}[\text{individuo}][k]=1\wedge$
$(\forall j:\mathbb{Z})\ (0\le j<|\text{apuesta}_{\text{posible}}[\text{individuo}]| \longrightarrow_L \text{apuesta}_{\text{posible}}[\text{individuo}][j]\ge 0))$
}
$\texttt{pred esTrayectoria}$ (trayectorias: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, recursos: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, cooperan: $seq\langle\text{Bool}\rangle$,
apuestas: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, pagos $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, eventos: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$) {
$(\forall i:\mathbb{Z})\ (0\le i<|\text{trayectorias}| \longrightarrow_L \text{trayectorias}[i][0]=\text{recursos}[i]\wedge(\forall j:\mathbb{Z})\ (0\le j<|\text{eventos}[i]| \longrightarrow_L$
$\text{trayectorias}[i][j+1]=\text{trayectorias}[i][j]*\text{apuestas}[i][\text{eventos}[i][j]]*\text{pagos}[i][\text{eventos}[i][j]]*$
$(1-\texttt{coopera}(\text{cooperan}[i]))+\frac{1}{|\text{cooperan}|}*$
$\sum_{k=0}^{|\text{cooperan}|-1}\text{trayectorias}[k][j]*\text{apuestas}[k][\text{eventos}[k][j]]*\text{pagos}[k][\text{eventos}[k][j]]*\texttt{coopera}(\text{cooperan}[k])))$
}
$\texttt{aux coopera}$ (coop: Bool) : $\mathbb{N}$ = if coop = true then 1 else 0 fi ;

2. Demostraciones de correctitud

Verificamos formalmente la correctitud del programa y en un primer paso definimos el invariante de ciclo como:

$$I = 0 \leq i \leq |eventos| \land_L res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i),True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i),False)} \quad (1)$$

Donde apariciones:

`aux apariciones` (in s: $seq\langle T \rangle$) : $\mathbb{Z}$ $= \sum_{i=0}^{|s|-1}$(if $s[i] = e$ then 1 else 0 fi) ;

Definimos luego la precondición del ciclo

$$P_c : \{recurso > 0 \land res = recurso \land i = 0\} \quad (2)$$

2.1. Axioma 1

Axioma 1: Verificamos que $P_c \implies I$

$$\begin{gathered} recurso > 0 \land res = recurso \land i = 0 \implies \\ 0 \leq 0 \leq |eventos| \land_L res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,0),True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,0),False)} \end{gathered} \quad (3)$$

$$recurso > 0 \land res = recurso \land i = 0 \implies 0 \leq 0 \leq |eventos| \land_L res = recurso(apuesta_c * pago_c)^0 * (apuesta_s * pago_s)^0 \quad (4)$$

Lo cual es trivialmente cierto, $\therefore P_c \implies I$

2.2. Axioma 2

Axioma 2: Verificamos que $\{I \land B\}$ S $\{I\}$

$$\begin{gathered} wp(S, I) \equiv wp(if...endif; i := i + 1, I) \\ wp(S, I) \equiv wp(if...endif, wp(i := i + 1, I)) \\ wp(S, I) \equiv wp(if...endif, def(i + 1) \land I^i_{i+1}) \\ wp(S, I) \equiv (-1 \leq i \leq |eventos| - 1) \land_L ((eventos[i] = True \land wp(res = res * apuesta_c * pago_c, I^i_{i+1})) \lor (eventos[i] = False \land wp(res = res * apuesta_s * pago_s, I^i_{i+1}))) \end{gathered} \quad (5)$$

$$\begin{gathered} wp(S, I) \equiv (-1 \leq i \leq |eventos| - 1) \land_L \\ ((eventos[i] = True \land res * (apuesta_c * pago_c) = recurso * (apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i+1),True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i+1),False)}) \\ \lor (eventos[i] = False \land res * (apuesta_s * pago_s) = recurso * (apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i+1),True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i+1),False)})) \end{gathered} \quad (6)$$

$$wp(S, I) \equiv (-1 \leq i \leq |eventos| - 1) \land_L ((eventos[i] = True \land_L True) \lor (eventos[i] = False \land_L True)) \quad (7)$$

Verificamos que $I \land B \implies wp(S, I)$

$$\begin{gathered} 0 \leq i < |eventos| \land_L res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i),True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i),False)} \implies \\ (-1 \leq i \leq |eventos| - 1) \land_L ((eventos[i] = True \land_L True) \lor (eventos[i] = False \land_L True)) \\ 0 \leq i < |eventos| \implies (-1 \leq i \leq |eventos| - 1) \\ 0 \leq i < |eventos| \implies (-1 \leq i < |eventos|) \end{gathered} \quad (8)$$

$\therefore \{I \land B\}$ S $\{I\}$

2.3. Axioma 3

Axioma 3: Verificamos que $I \wedge \neg B \implies Q_c$

$$B : \{i < |eventos|\} \tag{9}$$

$$Q_c : \{res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(eventos,True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(eventos,False)}\} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}(0 \leq i \leq |eventos| \wedge_L res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i),True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i),False)}) \\ \wedge \neg(i < |eventos|) \implies res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(eventos,True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(eventos,False)}\end{gathered} \tag{11}$$

$\neg(i < |eventos|) = i \geq |eventos|$ pero $i \leq |eventos| \therefore i = |eventos|$

Luego:

$$\begin{gathered}res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,|eventos|),True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,|eventos|),False)} \\ \implies res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(eventos,True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(eventos,False)}\end{gathered} \tag{12}$$

Pero $subseq(eventos, 0, |eventos|) = eventos$

$$\begin{gathered}res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(eventos,True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(eventos,False)} \\ \implies res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(eventos,True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(eventos,False)}\end{gathered} \tag{13}$$

Que es a lo que se quería llegar. Por lo tanto, $I \wedge \neg B \implies Q_c$

Queda así demostrado que $P_c \implies wp(S, Q_c)$

2.4. Axioma 4

Axioma 4: Verificamos que $\{I \wedge B \wedge V_0 = f_v\}$ S $\{f_v < V_0\}$ es una tripla de Hoare válida

Definimos f_v como $f_v = |eventos| - i$

$$\begin{aligned}&|eventos| - i < V_0 \\ &wp(i := i+1, |eventos| - i < V_0) = def(i) \wedge |eventos| - (i+1) < V_0 \\ &wp(i := i+1, |eventos| - i < V_0) = 0 \leq i \leq |eventos| \wedge |eventos| - i - 1 < V_0 \\ &wp(i := i+1, |eventos| - i < V_0) = 0 \leq i \leq |eventos| \wedge |eventos| - i \leq V_0 \\ &wp(i := i+1, |eventos| - i < V_0) = 0 \leq i \leq |eventos| \wedge f_v \leq V_0\end{aligned} \tag{14}$$

Luego, verificamos que $I \wedge B \wedge V_0 = f_v \implies 0 \leq i \leq |eventos| \wedge f_v \leq V_0$

$$\begin{gathered}0 \leq i \leq |eventos| \wedge_L res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i),True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i),False)} \\ \wedge i < |eventos| \wedge V_0 = f_v \implies 0 \leq i \leq |eventos| \wedge f_v \leq V_0\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}0 \leq i < |eventos| \wedge V_0 = f_v \implies 0 \leq i \leq |eventos| \wedge f_v \leq V_0 \\ \therefore I \wedge B \wedge V_0 = f_v \implies 0 \leq i \leq |eventos| \wedge f_v \leq V_0\end{gathered} \tag{16}$$

2.5. Axioma 5

Axioma 5: Verificamos que $I \wedge f_v \leq 0 \implies \neg B$

$$\begin{gathered}0 \leq i \leq |eventos| \wedge_L res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i),True)} * (apuesta_s * pago_s)^{\#apariciones(subseq(eventos,0,i),False)} \\ \wedge |eventos| - i \leq 0 \implies i \geq |eventos|\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}0 \leq i \leq |eventos| \wedge |eventos| \leq i \implies i \geq |eventos| \\ i = |eventos| \implies i \geq |eventos|\end{gathered} \tag{18}$$

que es lo que se quería probar. De esta forma sabemos que el ciclo y por ende el programa, termina.

Habiendo demostrado entonces, que a partir de un estado P_c el programa es correcto y termina, es necesario ahora demostrar que siempre que se ejecute el programa y se cumpla el requiere, se llegará a un estado que implique P_c.
Es decir, demostrar que vale la tripla $\{P\}$ S $\{P_c\}$, siendo P el requiere de la especificación y S el resto del programa.

$P : \{apuesta_c + apuesta_s = 1 \wedge pago_c > 0 \wedge pago_s > 0 \wedge apuesta_c > 0 \wedge apuesta_s > 0 \wedge recurso > 0\}$

$S : res := recurso \ ; \ i := 0$

$P_c : \{recurso > 0 \wedge res = recurso \wedge i = 0\}$

$P \implies wp(S, P_c)$

$wp(res := recurso; i := 0, (recurso > 0 \wedge res = recurso \wedge i = 0))$

$wp(res := recurso, wp(i := 0, (recurso > 0 \wedge res = recurso \wedge i = 0))$

$wp(res := recurso, (recurso > 0 \wedge res = recurso \wedge 0 = 0))$

$recurso > 0 \wedge recurso = recurso \wedge 0 = 0$

$(apuesta_c + apuesta_s = 1 \wedge pago_c > 0 \wedge pago_s > 0 \wedge apuesta_c > 0 \wedge apuesta_s > 0 \wedge recurso > 0) \implies recurso > 0$

Queda entonces demostrado que $P \implies P_c$ y por consiguiente, que el programa es correcto.