Estrategias de apuestas

Delmonti Agustín
Universidad Tecnológica Nacional Rosario
Zeballos 1341, S2000
agus.delmonti@gmail.com

Trilla Melody
Universidad Tecnológica Nacional Rosario
Zeballos 1341, S2000
trillamelo@gmail.com

Abril 2020

Resumen

En el siguiente trabajo se presentan diferentes estrategias para apuestas en la ruleta. Se demuestra con simulaciones y modelos porqué estas estrategias que si bien pueden otorgar un gran beneficio a corto plazo a costo de un gran riesgo, a la larga fallan y ceden a los parámetros reales del juego. La proposición es que cualquier estrategia, bien o mal fundada, siempre pierde y la casa siempre gana a la larga.

1. Introducción

Matemáticamente, ningún sistema de apuestas puede alterar los resultados esperados a largo plazo característicos del juego, con pruebas aleatorias e independientes, aunque pueden aumentar las probabilidades de ganar a corto plazo a costa de un mayor riesgo [1]. Dado que cada apuesta en la ruleta tiene un valor esperado negativo, no importa lo que el jugador haga, a la larga se espera que este termine con una cantidad negativa de dinero después de un número finito de apuestas. Solo se puede ganar si no hay un límite superior para la cantidad de apuestas que se puedan hacer.

A esto se le agregan los distintos tipos de ruletas que benefician las ganancias de la casa introduciendo el 0 y el doble 0, y los limites superiores e inferiores de las mesas impuestos por los casinos para mitigar y limitar la cantidad de tiradas en aquellas estrategias de carácter progresivas.

En este trabajo se simulan algunas de las estrategias basadas en la progresión de tamaño de apuestas mas conocidas, como la Martingala y Fibonacci (progresión negativa), y Paroli (progresión positiva).

2. Caminata aleatoria

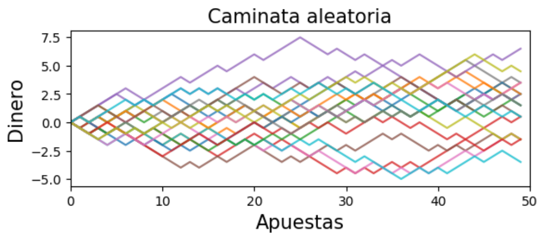
Supongamos que optamos por una estrategia inicial ingenua en la que apostamos siempre la misma cantidad de dinero a una apuesta con payback 2:1. Si la ruleta es justa, se tiene una probabilidad $p = \frac{18}{36} = 0{,}5$ de ganar y $1 - p$ de perder. Si este proceso se repite varias veces obtenemos los arboles en la figura 1a con una probabilidad $p = 0{,}5$ de bifurcación. En otras palabras, la probabilidad de hacer un movimiento ascendente en cualquier paso es p, sin importar lo que haya sucedido en el pasado, y la probabilidad de hacer un movimiento hacia abajo es $1 - p$.

Este proceso estocástico o aleatorio que describe una ruta que consiste en una sucesión de pasos aleatorios se denomina **caminata aleatoria** o **Random Walk**.[2]

Si aumentamos la cantidad de simulaciones podemos observar en la figura 1b, que para la ruleta justa, la esperanza de tener resultados positivos después de 50 apuestas es de 0.5 (el 50 % de los apostadores salen victoriosos) y la esperanza de la ganancia es de \$0.

En el caso de una ruleta real de casino, las probabilidades de ganar difieren a causa de introducir el doble 0 y 0. Si tomamos el caso de la *ruleta america-*

(a) 20 caminatas aleatorias de longitud 50.



(b) 2000 caminatas aleatorias de longitud 50. A la derecha la distribución de la muestra.

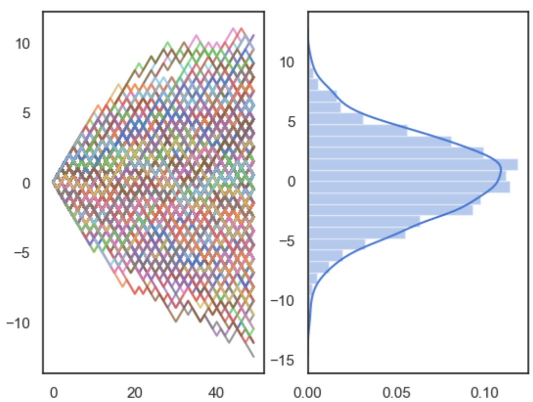
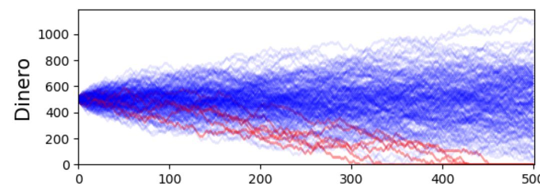


Figura 1: Caminata aleatoria de una ruleta justa

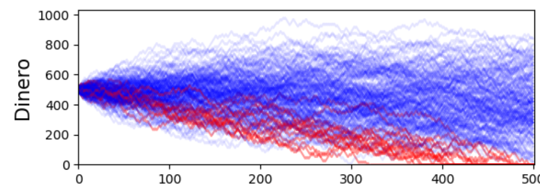
na, la probabilidad de ganar $p = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} \approx 0{,}473$. Si bien este parece un cambio insignificante en la probabilidad pues esta se acerca a 0.5, a continuación se demuestra que por el contrario, es un cambio radical en las chances de ganar del apostador.

Supongamos que comenzamos con n unidades monetarias y hacemos una secuencia de apuestas. Por cada apuesta, se gana \$1 con probabilidad p, y se pierde \$1 con probabilidad $1-p$. La simulación termina si se alcanza la banca-rota, en cuyo caso se pierde, o cuando se alcanza $T = n + m$ unidades monetarias, es decir, cuando se gana m. Para evaluar la *performance* de los modelos en las simulaciones definimos las siguientes 2 eventos aleatorios para medir: B como la cantidad de jugadores empleando la estrategia que se fueron a banca-rota en 500 apuestas y X como la cantidad de jugadores empleando la estrategia que ganaron algún margen cualquiera de dinero después de 500 apuestas. Estas medidas se encuentran resumidas en la Tabla 1.

(a) Ruleta clásica justa.



(b) Ruleta estilo europea.



(c) Ruleta estilo americana.

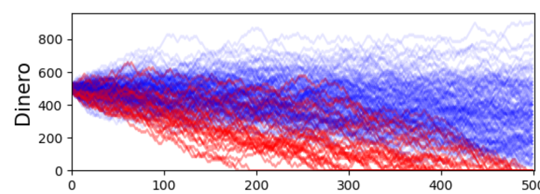


Figura 2: Caminata aleatoria. 200 simulaciones de 500 apuestas. En rojo aquellas simulaciones donde el jugador entró en banca-rota

Se puede observar en la figura 2 en rojo, como aumenta la proporción de jugadores que caen en banca-rota en los casos de ruleta clásica (2c), ruleta Europea (2b)y la ruleta Americana (2c). Existe un **segado** muy grande hacia abajo provocado por la introducción de los 0 y doble 0. Esta comparación se puede ver cuantitativamente en la Tabla 1.

3. Apuestas progresivas

3.1. Sistemas de apuestas progresivas

El caso de la caminata aleatoria estudiado anteriormente nos establece que cualquier estrategia que utilicemos a la larga cede a los parámetros del juego y no es de sorprender que los sistemas de apuestas

	% banca-rotas	% ganadores
Clasica	2.295 %	48.04 %
Europea	7.865 %	25.99 %
Americana	19.9 %	10.05 %

Cuadro 1: Caminata aleatoria por ruleta. 20k simulaciones de 500 apuestas.

	Positiva	Negativa
Aumentar	Al ganar	Al perder
Disminuir	Al perder	Al ganar

Cuadro 2: Progresiones según resultado de apuesta anterior

progresivas se comporten de la misma manera. Los sistemas de apuestas progresivas al dependen fuertemente de rachas lo que significa que se puede ganar de dinero a corto plazo a costa de un riesgo mayor, pero en realidad no hacen nada para influir en sus posibilidades a largo plazo.

La clave de la diferencia se encuentra en variar el tamaño de la apuesta con el objetivo de minimizar las perdidas o maximizar las ganancias en el caso de que el jugador gane o pierda múltiples veces de forma consecutiva. La forma exacta en que ajusta sus apuestas depende del sistema que se utilice y de si es una progresión negativa o una progresión positiva. Estos escalados de apuestas se determinan en función de *si su apuesta anterior ha ganado o perdido.*

Estos sistemas suelen ser utilizados en la mayoría de los juegos de casino, en particular la ruleta y Blackjack, debido a la sencillez de su razonamiento en la lógica. En general, las apuestas son en aquellas con **pagos potenciales** o **payback** de dinero par, es decir **2:1**, como rojo o negro, impar o par, bajos o low (1-18) o altos o high (19-36).

La falacia del jugador. Es importante entender que la progresión o escalado de las apuestas es por el mero hecho de poder cubrir o mitigar las perdidas en el caso de que el jugador pierda múltiples apuestas consecutivas y no por el hecho de que que si el jugador ha perdido varias veces consecutivas entonces la próxima tirada debe ser ganadora.

La creencia errónea de que si un evento en particular ocurre con más frecuencia de lo normal durante el pasado, es menos probable que ocurra en el futuro (o viceversa) se denomina **la falacia del jugador** (**gambler's fallacy**). La probabilidad de tales eventos **no depende de lo que sucedió en el pasado**, es decir que no existen las rachas de victorias. Tales eventos, que tienen la calidad de independencia histórica, se denominan **estadísticamente independientes**. La falacia se asocia comúnmente con el juego, donde se puede creer, por ejemplo, que la próxima tirada de dados es más que probable que sea seis porque recientemente ha habido menos de la cantidad habitual de seis o si en un lanzamiento de moneda ha salido cara 4 veces entonces la siguiente debe ser cruz (en definitiva la probabilidad de cara o cruz es siempre 0.5).[3]

Principio de imposibilidad de un sistema de juego exitoso. Establece que en una secuencia aleatoria, la selección metódica de subsecuencias no cambia la probabilidad de elementos específicos. Esto quiere decir que en una secuencia de lanzamiento de monedas es aleatoria con probabilidades independientes de $p = 0{,}5$ para cara o cruz, apostar por cara cada tercer, séptimo o veintundécimo lanzamiento no cambia las probabilidades de ganar en el largo plazo. Como consecuencia matemática de la teoría de la computabilidad, las estrategias de apuestas más complicadas (como una martingala) **tampoco pueden alterar las probabilidades a largo plazo**.[4]

> "Por ejemplo, si nos sentamos en la mesa de ruleta en Montecarlo y apostamos al rojo solo si el número ordinal del juego es, por ejemplo, el cuadrado de un número primo, la posibilidad de ganar (es decir, la posibilidad de la etiqueta roja) es la misma que en la secuencia completa de todos los juegos. Y si apostamos por cero solo si han aparecido quince números sucesivos quince veces seguidas, la posibilidad de que la etiqueta cero permanezca sin cambios en esta subsecuencia. . . El banquero en la ruleta actúa sobre esta suposición de aleatoriedad y tiene éxito. El jugador que cree que puede diseñar

un sistema para mejorar sus posibilidades se encuentra con desilusión."(von Mises, 1964, 108)

3.2. Martingale

Como cualquier **sistema de progresión negativa**, la Martingala implica aumentar las apuestas cuando se pierde. Se basa en la teoría de que hay una baja probabilidad de que el jugador pierda una gran cantidad de apuestas consecutivas, de que eventualmente éste ganará, mitigando todo el dinero perdido en las derrotas consecutivas y volviendo a la cantidad inicial. Por más sólida que parezca esta lógica, en última instancia la estrategia es defectuosa. La estrategia se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Iniciar con una apuesta base.
2. Duplicar la apuesta cuando se pierde.
3. Apostar la unidad base después de cada victoria.

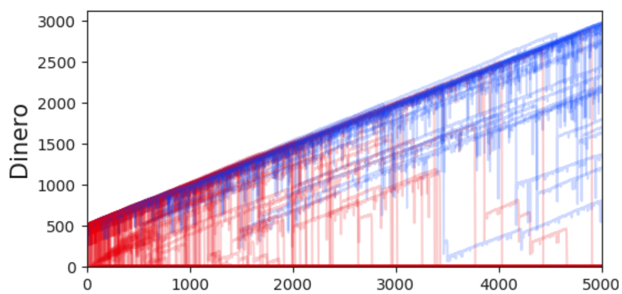
La unidad base utilizada puede ser de cualquier cantidad, aunque es una buena idea mantenerla pequeña por razones que se harán evidentes más adelante.

Como ejemplo, supongamos que desea utilizar la estrategia con una unidad de apuesta base de \$5 y se apuesta a los impares. Por lo tanto, la primera apuesta sería de \$5 a los impares. Si surgiera un número impar, la apuesta se mantendría en \$5. Si apareciera un número par, se duplicaría la apuesta a \$10. En el ultimo caso si volviera a aparecer un número par, se duplicaría la apuesta a \$20.

El principio de la estrategia es que al duplicar, cuando finalmente se gane, se recuperará todas las pérdidas y se obtiene una ganancia exactamente igual a la unidad base, sin importar cuántas apuestas seguidas se pierdan o cuál sea la unidad base. Este sistema puede funcionar a corto plazo. Incluso puede funcionar durante un período prolongado de tiempo si el jugador evita las largas rachas perdedoras.

En la Figura 3 se observa 200 simulaciones. Los jugadores empiezan con un capital de \$500 y una apuesta inicial de \$5 y existe un limite de mesa superior de \$1024. Los jugadores apuestan hasta llegar a la banca-rota (en rojo) o hasta jugar una cantidad n de veces (en azul).

(a) n = 5k. 87.5 % jugadores en banca-rota.



(b) n = 100. 22.1 % jugadores en banca-rota.

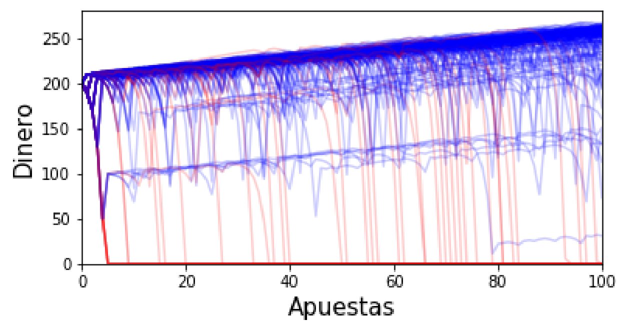


Figura 3: 200 simulaciones de Martingala. p=18/37 limite_mesa = 1024. En rojo, aquellos jugadores que perdieron todo su dinero.

Racha de derrotas. El mayor inconveniente del sistema Martingale es que no se necesitan muchas apuestas perdedoras seguidas para que las apuestas requeridas sean muy altas. El escalado de las apuestas crece de forma exponencial rápidamente según según la Ecuación 1 la cual describe cuanto se tendría que apostar en la tirada $r + 1$ si se ha perdido r veces consecutivas, con a_0 siendo la apuesta base. Además, los casinos implementan limites superior e inferior en el monto de las apuestas, lo que significa que si se escala demasiado hay una probabilidad de no recuperar el dinero perdido. Una racha de derrotas consecutivas es de hecho mucho mas probable de lo que la gente piensa y puede llevar al jugador a la banca-rota fácilmente. En la Figura 3 se puede observar fácilmente como algunos jugadores entran en rachas de derrotas y su capital cae bruscamente.

$$a(r) = a_0 2^r \tag{1}$$

Las probabilidades de ganar cada apuesta son siempre las mismas, independientemente de lo que haya sucedido antes. Como se explicó antes, el jugador puede caer en la falacia de pensar que el hecho de que haya visto aparecer un número par diez veces seguidas en la mesa de ruleta hace más probable que en el próximo giro caiga en un numero impar, o de que si ha perdido 5 veces seguidas entonces piense que la próxima es la ganadora, perdiendo así el doble de dinero.

Si la probabilidad de ganar en una apuesta 2:1 cualquiera es p y estos son eventos independientes, entonces podemos calcular la probabilidad de perder r veces seguidas según la Ecuación 5.

$$P(X = r) = (1 - p)^r \tag{2}$$

Suponiendo que en una mesa existe un monto inferior para entrar al juego de \$32 y un monto superior de apuesta de \$2048, podemos calcular la cantidad de derrotas consecutivas que se necesitan para entrar en banca-rota y la probabilidad de este evento en una ruleta europea, con las Ecuaciones 1 y 5.

$$32(2^r) > 2048 \Rightarrow r > 6 \tag{3}$$

$$P(X = 6) = (1 - \frac{18}{37})^6 = 0{,}0183 \tag{4}$$

Es decir, de 1000 tiradas 18.33 % de las veces el jugador alcanza el limite máximo de apuestas impuesto en la mesa, haciendo que el jugador entre en peligro inminente de banca-rota por una sucesión de 6 apuestas perdidas consecutivas. En las simulaciones de la Figura 3a, 87.5 % de los jugadores terminaron en banca-rota, mientras que en la Figura 3b, solo fue un 22.1 %. Podemos ver que mientras mas juegue la persona, mas probabilidad de entrar en alguna racha de perdidas y llegar a la banca-rota tiene.

Cota superior. El jugador se impone un limite superior o un monto objetivo a ganar y en el caso de llegar a este, se retira con lo ganado. La idea detrás de esto es que el jugador entre al juego con un valor en mente para no caer en la tentación de seguir apostando y terminar en banca-rota.

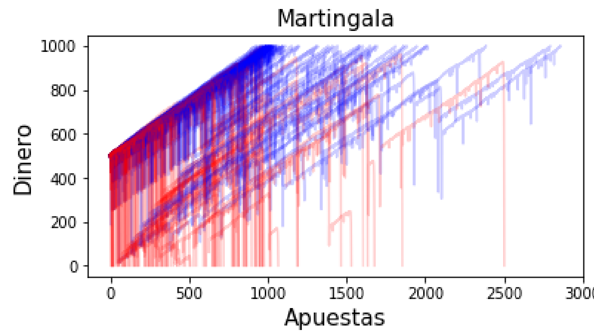


Figura 4: Estrategia Martingala con cota superior. n = 5k limite_mesa = 1024. 57.0 % jugadores terminaron en banca-rota (rojo).

En las simulaciones de la Figura 4, 57.0 % de los jugadores terminaron en banca-rota, a comparación de los 87.5 % de aquellos sin cota superior(3b).

3.3. Paroli

El sistema de apuestas Paroli es sistema de **apuestas progresivas positiva**, lo que significa que se debe aumentar las apuestas después de una victoria. La estrategia de Paroli permite generar pequeñas ganancias de forma consistente y se evita el riesgo de pérdidas sustanciales a causa de que no hay progresiones tan rápidas como la Martingala en las rachas de derrotas.

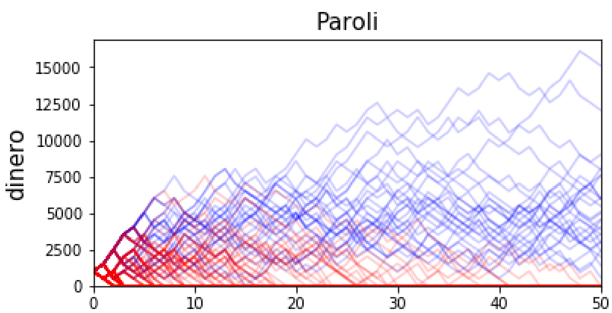
La estrategia consta de los siguientes pasos:

1. Determinar una apuesta base.
2. Duplicar la apuesta después de un triunfo.
3. Luego de 3 triunfos consecutivos, volver al monto original.

Para comenzar la progresión, se apuesta una unidad base con un resultado simple, como por ejemplo el color negro. El jugador continua con la misma apuesta, sin variar nunca la cantidad apostada. Después de cada ganancia, el jugador duplica la apuesta. Si la apuesta pierde el jugador volverá a apostar la unidad base. Sin embargo, si la apuesta de dos unidades gana, la siguiente apuesta se doblará de nuevo a 4 unidades (apuesta final de la progresión, gane o pierda).

La idea de parar luego de 3 victorias es debido a que ganar tres veces consecutivas, si bien no es un evento particularmente infrecuente, una racha más larga que eso es mucho menos probable. La teoría es que debería poder hacer esto varias veces durante una sesión, y para el jugador las ganancias de estas mini rachas ganadoras deberían ser mayores que todas las pérdidas combinadas.

(a) n = 50. 70.5 % jugadores en banca-rota.



(b) Paroli con cota superior. n = 50. 64.0 % jugadores en banca-rota.

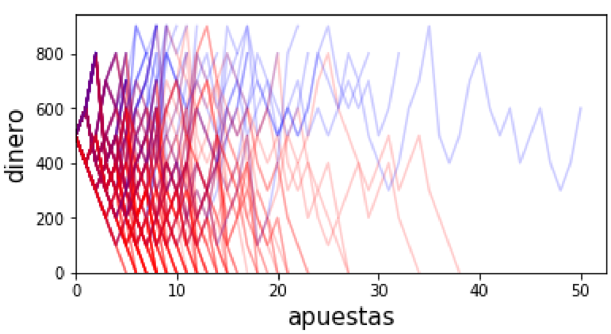


Figura 5: 200 simulaciones de Paroli. p=18/37 limite_mesa = 1024. Apuesta inicial \$100. En rojo, aquellos jugadores que perdieron todo su dinero.

La estrategia de Paroli solo funciona en un relativo corto plazo. A largo plazo, como el resto de todas las estrategias, pierde a causa de los parámetros reales del juego.

Estrategia	% banca-rotas	
	sin cota superior	con cota superior
Martingale ($a_0 = 10$)	87.3 %	60.67 %
Paroli ($a_0 = 100$)	72.47 %	58.33 %

Cuadro 3: Comparación de banca-rotas según estrategia empleada (20k simulaciones longitud 50). p=18/37, Capital inicial 500, limite_mesa = 1024

Racha de victorias. En cualquier ruleta no justa la probabilidad de ganar p es menor que la de perder $1-p$, por la adición de el 0 y el doble 0. Esto hace que las rachas de victorias sean mucho menos frecuentes que las rachas de derrotas.

Si la probabilidad de ganar en una apuesta 2:1 cualquiera es p y estos son eventos independientes, entonces podemos calcular la probabilidad de ganar r veces seguidas, es decir tener una racha de victorias de longitud r, según la Ecuación 5.

$$P(X = r) = p^r \tag{5}$$

4. Conclusión

Podemos concluir que no existe estrategia alguna a largo plazo que pueda ganar en un juego no justo (donde la probabilidad de ganar en una apuesta simple es menor a la de perder). La ruleta, al ser un juego con memoria probabilística nula, es decir donde los eventos son independientes y las probabilidades de ganar en una tirada no dependen del resultado de la tirada anterior, cualquier estrategia que inventemos, por mas rebuscada que sea, se comportará como una caminata aleatoria sesgada hacia la casa y fallará a largo plazo.

Podemos utilizar entonces estrategias de apuestas progresivas para mitigar las perdidas, que si bien a la larga también fallan, en el corto plazo se puede generar ganancia a costa de un mayor riesgo de irse a la banca-rota.

Referencias

[1] Betting strategy. Betting strategy — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accedido 22 de Abril de 2020].

[2] Random walk. Random walk — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accedido 26 de Abril de 2020].

[3] Wikipedia contributors. Gambler's fallacy — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 30-April-2020].

[4] Impossibility of a gambling system. Impossibility of a gambling system — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accedido 22 de Abril de 2020].