

Automática y Máquinas Eléctricas

INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

FACULTAD DE INGENIERÍA - UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

**CONTROL DE ACCIONAMIENTO DE CA
CON MOTOR SÍNCRONO DE IMANES
PERMANENTES**

Emanuel Agüero, Agustín Lezcano

Julio de 2021, Mendoza, Argentina

Índice

1. Modelado, Análisis y Simulación dinámica del sistema físico a “Lazo Abierto” (Sin Controlador externo de Movimiento)	2
1.1. Subsistema mecánico completo	2
1.2. Modelo dinámico del sistema físico completo	4
1.2.1. Subsistema electromagnético acoplado	4
1.2.2. Subsistema térmico acoplado	6
1.2.3. Modelo Global no lineal (NL)	6
1.2.4. Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)	7
1.2.5. Linealización por realimentación NL	8
1.2.6. Implementación en modelo NL completo de ley de control mínima para cumplir $i_{ds}^r \equiv 0$	9
1.2.7. Modelo de la dinámica residual equivalente para i_{ds}^r al aplicar Ley de control mínima	10
1.2.8. Comparación del modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs. el modelo dinámico global LPV	11
1.2.9. Modelo LTI equivalente aumentado: Funciones de transferencia	12
1.3. Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado	12
1.4. Observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado	13
1.5. Controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado	14
1.6. Simulación dinámica en dominio del tiempo: comparación de modelo NL completo desacoplado con Ley de control NL vs LTI equivalente aumentado	14
2. Diseño, Análisis y Simulación con CONTROLADOR de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque equivalente (Control Vectorial)	17
2.1. Incorporación de consigna de torque	20
2.2. Controlador externo de movimientos: posición/velocidad	21
2.3. Observador de estado de orden reducido	23
2.4. Simulación	24
2.4.1. Seguimiento de consignas de movimiento	25
2.4.2. Rechazo a perturbaciones	26
2.5. Verificación de desempeño y/o mejoras	28
2.5.1. Especificaciones de operación	28
2.5.2. Desempeño del Observador	33
2.5.3. Comportamiento térmico del motor	35
2.5.4. Comportamiento de Sensores	36
3. Conclusiones	37

Resumen

En el presente trabajo se desarrollará el control de accionamiento de corriente alterna de un motor sincrónico de imanes permanentes (**PMSM** por sus siglas en inglés) perteneciente a una articulación de un brazo robótico de tipo SCARA.

Introducción

En este trabajo se realizó el control de accionamiento de corriente alterna de un motor síncrono de imanes permanentes (PMSM), perteneciente a una articulación de un brazo robótico de tipo SCARA. Para el presente caso de estudio no se realizó un análisis dinámico del sistema completo, es decir que se consideró el control de 1 eje (descentralizado) de la articulación “hombro” del robot referido a una base inercial y con parámetros equivalentes variables según la posición y velocidad instantánea de la articulación “codo”. La alimentación del motor será dado por una fuente de corriente continua, un inversor trifásico y un reductor de engranajes planetario. Se cuenta con tres sensores de corriente instantánea, un sensor de posición en el eje y un sensor de temperatura en el bobinado del motor. Se espera poder realizar un control de manera tal que el sistema cumpla la consignas de manera correcta y sea robusto.

El presente trabajo cuenta con dos partes, una de la representación y modelado del sistema a lazo abierto, teniendo en cuenta las simplificaciones y consideraciones previamente mencionadas y luego corroborando la validez del modelo adoptado mediante los análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad. La segunda parte corresponde al diseño y análisis del control del sistema en lazo cerrado, es decir la implementación de un controlador de movimiento en Cascada con Modulador de torque equivalente.

1. Modelado, Análisis y Simulación dinámica del sistema físico a “Lazo Abierto” (Sin Controlador externo de Movimiento)

1.1. Subsistema mecánico completo

Para el modelo del subsistema mecánico equivalente del sistema a controlar se tuvieron en cuenta las siguientes simplificaciones:

- Control del eje del hombro descentralizado con parámetros equivalentes inerciales
- No se considera la dinámica no lineal acoplada del robot
- Caja reductora reversible

Teniendo en cuenta lo previamente mencionado, se obtienen las siguientes ecuaciones:

- Carga mecánica

$$J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) = T_q(t) - b_l \cdot \omega_l(t) - T_l(t) \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_l(t) \equiv \omega_l(t) \Leftrightarrow \theta_l(t) = \int_0^t \omega_l(\xi) \cdot d\xi + \theta_l(0) \quad (2)$$

Donde la variable ω indica la velocidad angular desarrollada por el motor en el tiempo determinado t y a su vez T_q es el torque a la salida del tren de engranajes y T_l es el torque resistente proporcionado por la carga. Los términos J_l y b_l representan el momento de inercia equivalente y el amortiguamiento viscoso o de fricción respectivamente. Los valores nominales para la fricción, torque de carga e inercia van a tener distintos valores dependiendo de la posición del brazo, entonces se tienen en cuenta las posibles variaciones:

$$J_l \approx (0,2520 \pm 0,1260)kg.m^2$$

$$b_l \approx (0 \pm 0,0630) \frac{N.m}{rad/s}$$

$$T_l(t) \approx (0 \pm 6,28)N.m$$

- Máquina eléctrica: motor trifásico síncrono con excitación por imanes permanentes (PMSM) con esta-
tor conexión en estrella (simétrico y equilibrado) con el punto neutro no accesible (“flotante”). Estas
ecuaciones están dadas considerando el movimiento del rotor referido al estator (estacionario), por lo
tanto es un sistema inercial de referencia.

$$J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d(t) \quad (3)$$

$$\dot{\theta}_m(t) \equiv \omega_m(t) \Leftrightarrow \theta_m(t) = \int_0^t \omega_m(\xi) \cdot d\xi + \theta_m(0) \quad (4)$$

- Transmisión rígida: Estas ecuaciones vinculan la salida al eje del motor síncronico con la carga del
sistema (a través de la salida del eje de la caja reductora). La caja reductora reversible con sistema de
engranajes planetarios tiene la siguiente relación de reducción: $r = 314,3008 : 1$.

$$\omega_l(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t) \quad (5)$$

$$T_q(t) = r \cdot T_d(t) \quad (6)$$

Haciendo uso de las ecuaciones anteriores se puede llegar a una expresión equivalente para el modelado
del subsistema mecánico.

Al despejar T_q de la ecuación 1 y haciendo uso de la relacion 6 se puede reemplazar este resultado en la
ecuación 3, resultando en la siguiente expresión:

$$T_q(t) = J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) + b_l \cdot \omega_l(t) + T_l(t) \quad (7)$$

Como $T_q = T_d \cdot r$ entonces se puede reemplazar T_q por T_d en la ecuación anterior:

$$T_d(t) = \frac{1}{r} \cdot (J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) + b_l \cdot \omega_l(t) + T_l(t)) \quad (8)$$

Reemplazamos la ecuación 8 en 3:

$$J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - \frac{1}{r} \cdot (J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) + b_l \cdot \omega_l(t) + T_l(t)) \quad (9)$$

Sabiendo que $\omega_l = \frac{1}{r} \cdot \omega_m$ y operando algebraicamente se obtiene:

$$(J_m + \frac{J_l}{r^2}) \cdot \ddot{\theta}_m(t) = -(b_m + \frac{b_l}{r^2}) \cdot \dot{\theta}_m(t) + T_m - \frac{T_l(t)}{r} \quad (10)$$

Podemos denominar relaciones equivalentes: $J_{eq} = J_m + \frac{J_l}{r^2}$ y $b_{eq} = b_m + \frac{b_l}{r^2}$:

$$\ddot{\theta}_m(t) = \frac{-b_{eq}}{J_{eq}} \cdot \dot{\theta}_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \cdot T_m - \frac{1}{r \cdot J_{eq}} \cdot T_l(t) \quad (11)$$

A continuación se despeja y se obtienen las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_m(t) &= \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) &= -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \cdot T_m - \frac{1}{r \cdot J_{eq}} \cdot T_l(t) \end{aligned}$$

El modelo se representa en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} & -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \end{cases} \quad (12)$$

Siendo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_l(t) \end{bmatrix}$$

El modelo obtenido se puede representar mediante diagramas de bloques como se puede observar en la
figura 1.

Esta simplificación del sistema puede realizarse debido a que el tren de transmisión se considera rígido,
por lo tanto no existe elasticidad torsional ni juego entre el motor y la carga.

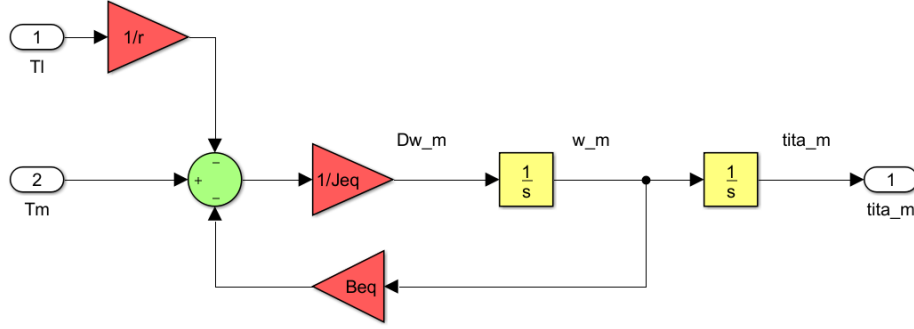


Figura 1: Subsistema mecánico

1.2. Modelo dinámico del sistema físico completo

Se incorporan los subsistemas electromagnético y térmico acoplados al subsistema mecánico para comprender el modelo dinámico del sistema físico completo.

1.2.1. Subsistema electromagnético acoplado

Para poder vincular las ecuaciones previamente mencionadas al resto del sistema se introducen las siguientes definiciones, que caracterizan al subsistema electromagnético. Dicho sistema es un modelo idealizado en coordenadas eléctricas $qd\theta$ fijas al rotor. Este modelo viene dado a partir de las transformaciones de Park.

Las transformaciones de Park (directa e inversa) sirven para pasar desde el sistema de coordenadas abc al sistema $qd\theta$. Definimos que el eje q es el eje en cuadratura, que está a 90° eléctricos del campo rodante del estator; el eje d es el eje directo, que está en fase con el campo rodante del estator y coincide mecánicamente con el eje del rotor; el eje θ es ortogonal a ambos y tiene un valor distinto de 0 cuando el sistema no está equilibrado. En el presente caso de estudio al estar equilibrado el sistema el valor del eje θ es 0. Una ventaja que brinda el uso de este sistema es que se fija un valor de L_d y L_q y es más fácil operar con estos valores, ya que las inductancias en el otro sistema no son constantes y dependen de la posición del campo.

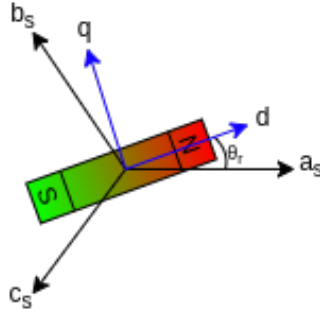


Figura 2: Diagrama fasorial abc y qd0

El torque máximo se da cuando el flujo del campo magnético del rotor está a 90° del campo magnético del estator, es decir, es máximo en el eje q , y 0 en el eje d . En esta situación el torque por Ampere es máximo.

La transformación de Park directa tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(t)) & \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta_r(t)) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

La transformación de Park inversa se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(t)) & \sin(\theta_r(t)) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

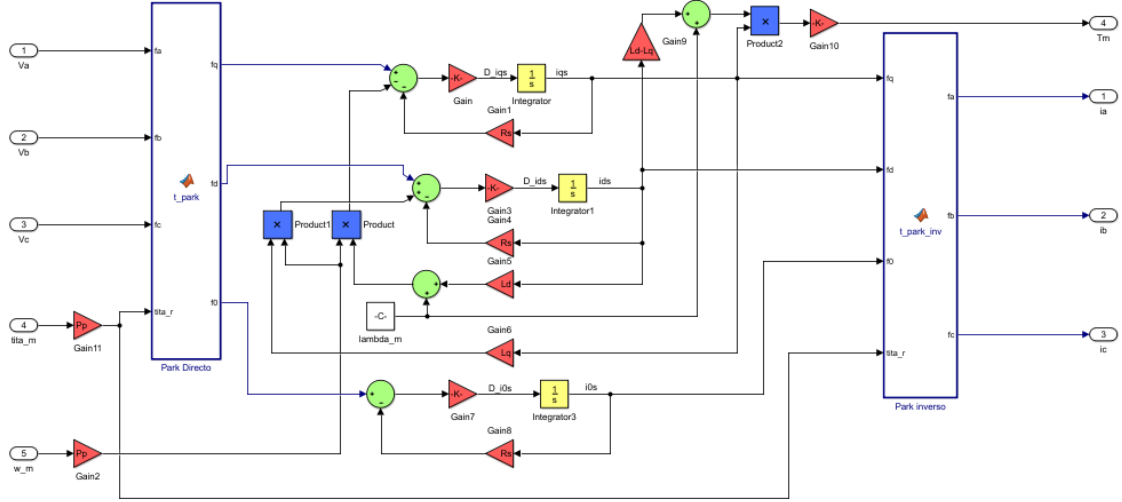


Figura 3: Subsistema Electromagnético

Coordenadas eléctricas de entrehierro qd0 fijas al rotor:

$$\dot{\theta}_r(t) \equiv \omega_r(t) \Leftrightarrow \theta_r(t) = \int_0^t \omega_r(\xi) \cdot d\xi + \theta_r(0) \quad (15)$$

$$\theta_r(t) \equiv P_p \cdot \theta_m(t) \therefore \omega_r(t) = P_p \cdot \omega_m(t) \quad (16)$$

En la ecuación 15 se relaciona la velocidad angular de la coordenada eléctrica con la posición eléctrica instantánea y la ecuación 16 se relacionan posición y velocidad mecánicas con las análogas eléctricas. La ecuación 17 es la del torque electromagnético, donde P_p es la cantidad de pares de polos de la máquina (en este caso 3), λ'_m representa el flujo concatenado de la máquina, que corre paralelo al rotor. Las inductancias L_d y L_q no son iguales. Se puede observar también que la ecuación es no lineal ya que depende tanto de $i_{ds}^r(t)$ como de $i_{qs}^r(t)$.

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p [\lambda'_m + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (17)$$

Habiendo hecho uso de las transformaciones de Park, se plantea el balance de tensiones eléctricas equivalentes de estator (referido a coordenadas qd0 fijas en rotor):

$$v_{qs}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda'_m + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t) \quad (18)$$

$$v_{ds}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \quad (19)$$

$$v_{0s}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t) + L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \quad (20)$$

Siendo los primeros términos de los segundos miembros de las ecuaciones 18, 19 y 20 las caídas óhmicas referidas al estator; en este caso se considera a $R_s(t)$ igual en todas las fases debido a que el sistema está en equilibrio. Los segundos términos corresponden a las caídas de tensión inducida que existen en cada eje. Se puede observar en el tercer miembro de $v_{ds}^r(t)$ y $v_{qs}^r(t)$ respectivamente que estas caídas dependen también de las variables de estado de los otros ejes (están “cruzadas”), o sea que el sistema resultante es no lineal (Ver Figura 3). El flujo depende de las corrientes y estas a su vez dependen del tiempo al ser corriente alterna, a su vez el flujo depende de la posición puntual del campo respecto al campo rodante (en grados eléctricos), de ahí se incluye el valor de ω_r . El valor de $v_{0s}^r(t)$ y el valor de $i_{0s}^r(t)$ representan cualquier desequilibrio que puede presentarse en el sistema.

1.2.2. Subsistema térmico acoplado

A continuación se presenta un modelo simplificado equivalente de primer orden, considerando solo las pérdidas eléctricas resistivas por efecto Joule en bobinado de estator y despreciando las perdidas magnéticas en el núcleo. También se considera a la transferencia de calor por conducción y convección natural (sin ventilación forzada):

La potencia de pérdidas calóricas se puede expresar en función de las corrientes de fase o, haciendo uso de la transformación de Park, de las corrientes i_{qs} , i_{ds} e i_{0s} :

$$P_{sperd}(t) = R_s(t) \cdot (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) = \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^r{}^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) \quad (21)$$

A su vez, el balance térmico del estator tiene la siguiente forma:

$$P_{sperd}(t) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \quad (22)$$

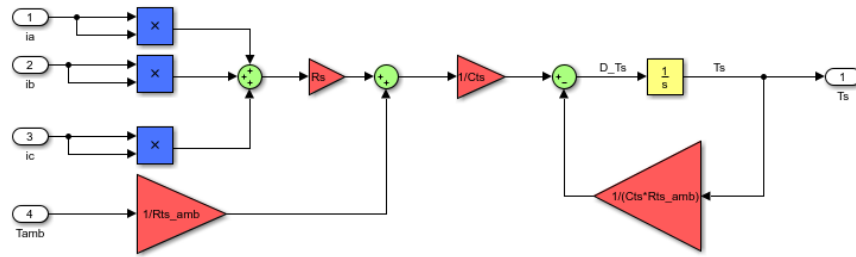


Figura 4: Subsistema térmico

1.2.3. Modelo Global no lineal (NL)

Para acoplar el subsistema electromagnético al mecánico, se parte de la ecuación 17 y se reemplaza en la ecuación 11:

$$\ddot{\theta}_m(t) = \frac{-b_{eq}}{J_{eq}} \cdot \dot{\theta}_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m' + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \right) - \frac{1}{r \cdot J_{eq}} \cdot T_l(t) \quad (23)$$

De las ecuaciones del balance de tensiones se despejan las derivadas de las corrientes:

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot (v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m \cdot [\lambda_m' + L_d \cdot i_{ds}^r(t)]) \quad (24)$$

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot (v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)) \quad (25)$$

$$\frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \cdot (v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)) \quad (26)$$

En las ecuaciones que definen el sistema los parámetros que la conforman tienen los siguientes valores:

P_p : 3 (nro. de pares de polos)

$$J_m \approx 3,1 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$b_m \approx 1,5 \times 10^{-5} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad/s}}$$

$$\lambda_m' \approx 0,01546 \text{ Wb} - \text{t} \quad \frac{\text{V}}{\text{rad/s}}$$

$$L_q \approx 5,8 \quad mH$$

$$L_d \approx 6,6 \quad mH$$

$$L_{ls} \approx 0,8 \quad mH$$

En las ecuaciones 24 y 25 se tienen productos entre variables de estado por lo tanto el sistema es no lineal. El primer término del segundo miembro es un campo vectorial.

Se pueden expresar las ecuaciones que componen al sistema en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m \\ \dot{\omega}_m \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ \frac{-b_{eq}}{J_{eq}} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \right) \\ -\frac{\lambda_m^r}{L_q} \cdot P_p \cdot \omega_m(t) - \frac{R_s(t)}{L_q} \cdot i_{qs}^r(t) - \frac{L_d}{L_q} \cdot P_p \cdot i_{ds}^r(t) \cdot \omega_m(t) \\ -\frac{R_s(t)}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) + \frac{L_d}{L_d} \cdot P_p \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_m(t) \\ -\frac{R_s(t)}{L_{ls}} \cdot i_{0s}^r(t) \\ \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs}^r)^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^r{}^2(t) \right] \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \\ T_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb} \end{bmatrix}$$

Cabe destacar que el primer término está representado en forma de vector, evitando representarlo en forma matricial ya que contiene productos de variables de estado. El vector de estados $x(t)$, el vector de entrada $u(t)$, el vector de salida $y(t)$ y las condiciones iniciales se representan de la siguiente forma:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \theta_m(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0}^r \end{bmatrix}$$

1.2.4. Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)

Como las ecuaciones que definen al sistema tienen componentes no lineales se busca otra forma para poder trabajar en el sistema. Se parte de que el sistema es cuasiestacionario en ciertos puntos (puntos de trabajo) y se consideran pequeñas variaciones que dependen linealmente del tiempo pero de muy pequeña amplitud, esto es:

$$z(t) = Z_0(t) + \Delta z(t)$$

La variable de estado $z(t)$ tiene la parte cuasi-estacionaria Z_0 y la parte lineal de pequeña amplitud Δz . Se realiza una expansión en serie de Taylor con truncamiento al primer orden.

El sistema que desarrollado entonces se dividirá en dos partes, el análisis del punto de operación y las pequeñas variaciones lineales:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{m0} = \omega_{m0}(t) \\ \dot{\omega}_{m0}(t) = \frac{-b_{eq}}{J_{eq}} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \right) - \frac{1}{r \cdot J_{eq}} \cdot T_l(t) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot (v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m \cdot [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)]) \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot (v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)) \\ \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \cdot (v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)) \\ \frac{dT_{s0}}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot (i_{qs0}^r)^2(t) + i_{ds0}^r{}^2(t) + 2 \cdot i_{0s0}^r{}^2(t) \right] - \frac{1}{R_{ts} - amb} \cdot (T_{s0} - T_{amb}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{\theta}_{m0} = \Delta \omega_{m0}(t) \\ \Delta \dot{\omega}_{m0} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot (-b_{eq} \cdot \Delta \omega_m(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot ([\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \Delta i_{ds}^r(t)) - \frac{1}{r} \cdot \Delta T_l(t)) \\ \Delta \dot{i}_{qs0}^r(t) = \frac{1}{L_q} \cdot (\Delta v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - P_p \cdot [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \Delta \omega_m) - P_p \cdot \omega_m \cdot L_d \cdot \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta \dot{i}_{ds0}^r(t) = \frac{1}{L_d} \cdot (\Delta v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + P_p \cdot [L_q \cdot i_{qs}^r(t)] \cdot \Delta \omega_m) + P_p \cdot \omega_m \cdot L_q \cdot \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta \dot{i}_{0s0}^r(t) = \frac{1}{L_{ls}} \cdot (\Delta v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{0s}^r(t)) \\ \Delta \dot{T}_s = \frac{1}{C_{ts}} \cdot [3 \cdot R_s \cdot (i_{qs0}^r(t) \cdot \Delta i_{qs0}^r(t) + i_{ds0}^r(t) \cdot \Delta i_{ds0}^r(t) + 2 \cdot i_{0s0}(t) \cdot \Delta i_{0s0}(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (\Delta T_{s0} - \Delta T_{amb})] \end{cases}$$

Se pueden expresar las variaciones en forma matricial:

$$\frac{d\Delta X(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r(t)]}{2 \cdot J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{qs0}^r(t)}{2 \cdot J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-P_p \cdot [L_d \cdot i_{ds0}^r(t) + \lambda_m^r]}{L_q} & \frac{-R_s(t)}{L_q} & \frac{-P_p \cdot \omega_m \cdot L_d}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P_p \cdot L_q \cdot i_{qs0}^r(t)}{L_d} & \frac{P_p \cdot L_q \cdot \omega_{m0}}{L_d} & -\frac{R_s}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-R_s(t)}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{qs0}^r(t) & \frac{3 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{ds0}^r(t) & \frac{6 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{0s0}^r(t) & \frac{1}{C_{ts-amb}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_{m0} \\ \Delta \omega_{m0} \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{0s}^r(t) \\ \Delta T_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_l(t) \\ \Delta v_{qs}^r(t) \\ \Delta v_{ds}^r(t) \\ \Delta v_{0s}^r(t) \\ \Delta T_{amb} \end{bmatrix} \quad (28)$$

1.2.5. Linealización por realimentación NL

Modelo LTI (lineal invariante en el tiempo) equivalente imponiendo especificación $i_{ds}^r \equiv 0$ Para poder linealizar el sistema anterior y modelarlo como LTI se introducirá una restricción que es $i_{ds}^r(t) = 0$, lo cual permite desacoplar el eje directo y trabajar de manera similar a un motor de corriente continua. El máximo par se obtiene cuando el flujo del campo magnético está en fase con el eje en cuadratura, es decir a 90° eléctricos del flujo del campo rodante. para esto se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las fases están equilibradas, por lo tanto la corriente circulante en el neutro es 0. Esto lleva a la siguiente conclusión:

$$\begin{aligned} i_{as} + i_{bs} + i_{cs} &= i_n = 0 \\ i_{0s}(t) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)) \Rightarrow i_{0s} = 0 \\ \therefore \frac{di_{0s}}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, según la ecuación 26 y teniendo en cuenta los resultados anteriores, se llega a la conclusión que $v_{0s}^r = 0$.

- La temperatura de los bobinados tiene influencia sobre la resistencia del bobinado del estator. De la ecuación de $R_s(t)$ se despeja la parte constante y la que depende de la temperatura T_s :
 $R_s(t) = (R_{sREF} - R_{sREF} \cdot \alpha_{Cu} \cdot T_{sREF}) + R_{sREF} \cdot \alpha_{Cu} \cdot T_s(t)$. La variación de esta resistencia al variar la temperatura se considera insignificante para un rango amplio de temperaturas, por lo tanto se puede despreciar esta variación sobre la resistencia R_s y desacoplar el subsistema térmico.
- Se asume la hipótesis de que el estado inicial de $i_{ds}^r(t)$ es igual a 0.

Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado el sistema de ecuaciones resultante tendrá la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{-b_{eq}}{J_{eq}} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \cdot (\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t)) - \frac{1}{r \cdot J_{eq}} \cdot T_l(t) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot (v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m \cdot \lambda_m^r) \end{cases} \quad (29)$$

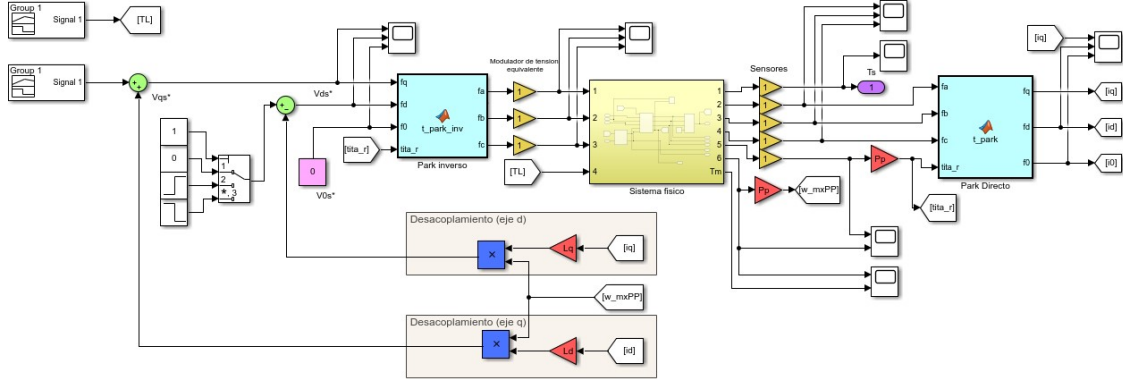


Figura 6: Sistema NL con desacoplamiento y linealización por realimentación directa no lineal de estado parcial

1.2.7. Modelo de la dinámica residual equivalente para i_{ds}^r al aplicar Ley de control mínima

Hasta ahora se asumió que $i_{ds}^r(t) = 0$ al aplicar la ley de control mínima. A continuación se analizará el caso que $i_{ds}^r(t) \neq 0$ en el modelo LTI equivalente. Previamente se compensó el acoplamiento residual NL con el eje q al cumplirse la ley de control mínima.

$$v_{ds}^r(t) = R_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \quad (34)$$

Para cumplir con la ley de control mínima, los primeros dos términos del segundo miembro se anulan entre sí.

$$R_s \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) \quad (35)$$

Aplicando transformada de Laplace (que es en el dominio de la frecuencia) se puede analizar la estabilidad del eje d encontrando el polo de la dinámica residual:

$$I_{ds}^r(s) \cdot s + \frac{R_s}{L_d} \cdot I_{ds}^r(s) = 0 \quad (36)$$

Esta función de transferencia es de primer orden con un polo en $-\frac{R_s}{L_d}$ que al tener componente real negativa indica que se trata de un sistema estable. Esta estabilidad se explica dada la naturaleza disipativa de R_s . De esta manera, si la condición inicial es distinta de 0, el sistema es estable y ésta decae a 0 y más rápido cuanto mayor sea R_s .

$$I_{ds}^r(s) \cdot s + \frac{R_s}{L_d} \cdot I_{ds}^r(s) = V_{ds}(s)$$

$$\left(s + \frac{R_s}{L_d}\right) \cdot I_{ds}^r(s) = V_{ds}$$

$$G(s) = \frac{I_{ds}^r(s)}{V_{ds}} = \frac{1}{s + \frac{R_s}{L_d}}$$

La función de transferencia de primer orden tiene comportamiento de filtro pasa-bajo es decir que a bajas frecuencias tiene una respuesta de cierta amplitud y a mayores frecuencias la amplitud es cada vez menor. En este modelo no se tiene en cuenta el acoplamiento NL porque se usa la ley de control mínima dada por la ecuación 31 que lo desacopla, en términos matemáticos el acoplamiento no lineal es de signo contrario que la ley de control mínima. El mismo se puede despreciar porque se aplica esta ley y v_{ds}^r se hace 0 rápidamente.

A su vez, para desacoplar totalmente el acoplamiento residual no lineal en el eje q se implementa una **Ley de control complementaria mínima**. De la ecuación 24:

$$v_{qs}^r(t) = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + P_p \cdot \omega_m \cdot [\lambda_m' + L_d \cdot i_{ds}^r(t)]$$

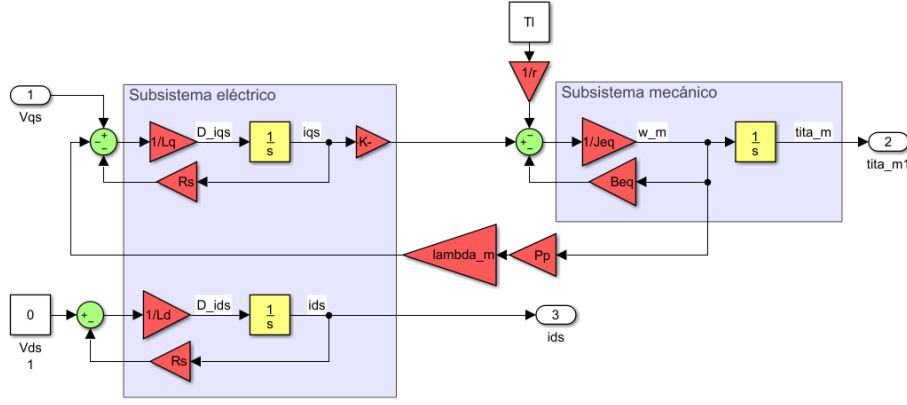


Figura 7: Sistema LTI equivalente aumentado

Por lo tanto se busca compensar los efectos inductivos no lineales, lo cual conduce a que la ecuación de la ley de control complementaria mínima para el eje q es:

$$v_{qs}^{r*}(t) = P_P \cdot \omega_m \cdot L_d \cdot i_{ds}^r(t)$$

1.2.8. Comparación del modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs. el modelo dinámico global LPV

Se puede trazar un paralelismo entre el modelo LTI desarrollado previamente con el modelo LPV del sistema. Se partió de la definición del sistema LPV que define al comportamiento del sistema como una suma entre un estado cuasiestacionario en puntos de trabajo más pequeñas variaciones lineales de pequeña amplitud. Del sistema de ecuaciones 28 se puede comparar la matriz del modelo dinámico local LTI y compararla con la matriz obtenida en incisos anteriores (Ec. 29).

Para trabajar con las restricciones impuestas (la corriente en el eje d igual a 0 y la corriente en el eje q igual a 0 por ser un sistema en equilibrio) se compara el sistema LTI con el LPV. Dadas las condiciones mencionadas anteriormente, las variaciones locales del sistema LPV quedan de la siguiente manera:

$$\frac{d\Delta X(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_P \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r(t)]}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & \frac{-P_P \cdot [L_d \cdot i_{ds0}^r(t) + \lambda_m^r]}{L_q} & \frac{-R_s(t)}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_{m0} \\ \Delta \omega_{m0} \\ \Delta i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_l(t) \\ \Delta v_{qs}^r(t) \end{bmatrix}$$

Los términos resaltados en rojo serán 0 por las condiciones mencionadas previamente, comparando con las ecuaciones del sistema LTI se puede concluir que el modelo LTI es un caso particular del sistema LPV, y se ratifica lo mencionado anteriormente: las pequeñas variaciones del sistema LPV tienen un comportamiento lineal.

Para operar la máquina en puntos diferentes al caso estudiado se pueden encontrar distintos puntos de operación y tener diferentes comportamientos al variar $i_{ds0}^r(t)$:

- $i_{ds0}^r(t) = 0$: funcionamiento normal, solo se tiene el flujo concatenado de los imanes.
- $i_{ds0}^r(t) < 0$: **Field weakening**. Este modo de trabajo se usa para elevar la velocidad del motor y se basa en el debilitamiento del campo magnético. La corriente $i_{ds0}^r(t)$ tiene el mismo sentido que el flujo magnético del rotor, se debilita el campo y la máquina "se embala". Este modo de operación produce incremento de velocidad y decremento de torque.
- $i_{ds0}^r(t) > 0$: **Field forcing**. De manera similar a field weakening solo que se produce un reforzamiento del campo, se produce mayor torque y menor velocidad.

Lo mencionado anteriormente se explica mediante la ecuación 17. Como $L_d > L_q$ entonces se puede ver que el par es directamente proporcional a la corriente $i_{ds0}^r(t)$, y como la potencia es $P = T_m \cdot \omega$ y se trabaja a potencia constante al aumentar la corriente aumenta el par y disminuye la velocidad y viceversa por lo que se puede concluir que la variación de corriente en el eje d es directamente proporcional al par e inversamente proporcional a la velocidad angular.

1.2.9. Modelo LTI equivalente aumentado: Funciones de transferencia

Para poder analizar la estabilidad del sistema se puede realizar un análisis de los polos a lazo abierto del mismo. Partiendo del sistema de ecuaciones 29 y pasando las mismas al dominio de la frecuencia se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} s \cdot \Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s^2 \cdot \Theta_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [-b_{eq} \cdot \Omega_m(s) + \frac{3}{2} \cdot \lambda'_m \cdot I_{qs}^r(s) - \frac{T_l}{r}] \\ s \cdot I_{qs}^r = \frac{1}{L_q} \cdot [V_{qs}^r - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - P_p \cdot \lambda'_m \cdot \Omega_m(s)] \end{cases} \quad (37)$$

Despejando $I_{qs}^r(s)$ de la tercera ecuación del sistema 37 y reemplazandola en la segunda se obtiene

$$I_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q \cdot s + R_s} \cdot [V_{qs}(s) - P_p \cdot \lambda'_m \cdot \Omega_m(s)]$$

$$s^2 \cdot \Theta_m = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [-b_{eq} \cdot s \Theta_m + \frac{3}{2} \cdot \lambda'_m \cdot (\frac{1}{L_q \cdot s + R_s} \cdot [V_{qs}(s) - P_p \cdot \lambda'_m \cdot s \cdot \Theta_m(s)]) - \frac{T_l(s)}{r}]$$

Sabiendo que $\Omega(s) = s \cdot \Theta(s)$ y operando de manera algebraica en las ecuaciones que definen el sistema 37 se obtienen las siguientes funciones de transferencia:

$$G_{Vqs}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}(s)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda'_m}{(J_{eq} \cdot L_q) \cdot s^3 + (J_{eq} \cdot R_s + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s^2 + (b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'^2_{mr}) \cdot s}$$

$$G_{Tl}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{L_q \cdot s + R_s}{(J_{eq} \cdot L_q) \cdot s^3 + (J_{eq} \cdot R_s + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s^2 + (b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'^2_{mr}) \cdot s}$$

Se observa que G_{Tl} aporta un polo en $s = -\frac{R_s}{L_q}$. Como r es una constante los denominadores de ambas funciones de transferencia son proporcionales y por lo tanto los polos son los mismos.

1.3. Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado

Para hallar las frecuencias naturales se debe llegar a una ecuación de la forma:

$$s^2 + 2 \cdot \zeta \omega_m \cdot s + \omega_m^2 = 0$$

Entonces tomando factor común s y teniendo en cuenta el denominador de las funciones de transferencia se define:

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega_m = \frac{1}{(J_{eq} \cdot L_q)} \cdot (J_{eq} \cdot R_s + b_{eq} \cdot L_q)$$

$$\omega_m^2 = \frac{1}{(J_{eq} \cdot L_q)} \cdot (b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'^2_{mr})$$

Se puede ver que uno de los polos es $s = 0$ o sea un integrador puro.

Los valores que se obtienen son los siguientes:

- Para valores nominales de los parámetros del sistema:

$$\begin{cases} \omega_{nat} = 314,5047 \text{ kg.m}^2 & \zeta = 0,2838 & s_1 = 0 & s_{2,3} = -89,26 \pm 301,57i \end{cases}$$

- Valores inferiores de tolerancia:

$$\begin{cases} \omega_{nat} = 357,3817 \text{ kg.m}^2 & \zeta = 0,2506 & s_1 = 0 & s_{2,3} = -89,57 \pm 345,97i \end{cases}$$

- Valores superiores de tolerancia:

$$\begin{cases} \omega_{nat} = 284,1034 \text{ kg.m}^2 & \zeta = 0,3135 & s_1 = 0 & s_{2,3} = -89,06 \pm 269,78i \end{cases}$$

Los polos y ceros del sistema se muestran a continuación:

El sistema es subamortiguado al ser $\zeta < 1$ y se puede concluir que el sistema tiene una respuesta levemente más rápida para valores inferiores de tolerancia. Por lo visto anteriormente el sistema es estable, ya que sus polos están ubicados en el semiplano negativo. Hay un polo en el origen (que es un integrador puro) que podría llegar a dar inestabilidad al sistema pero en este caso al ser el resto de los polos negativos, y estar este integrador a la salida del sistema no compromete su estabilidad.

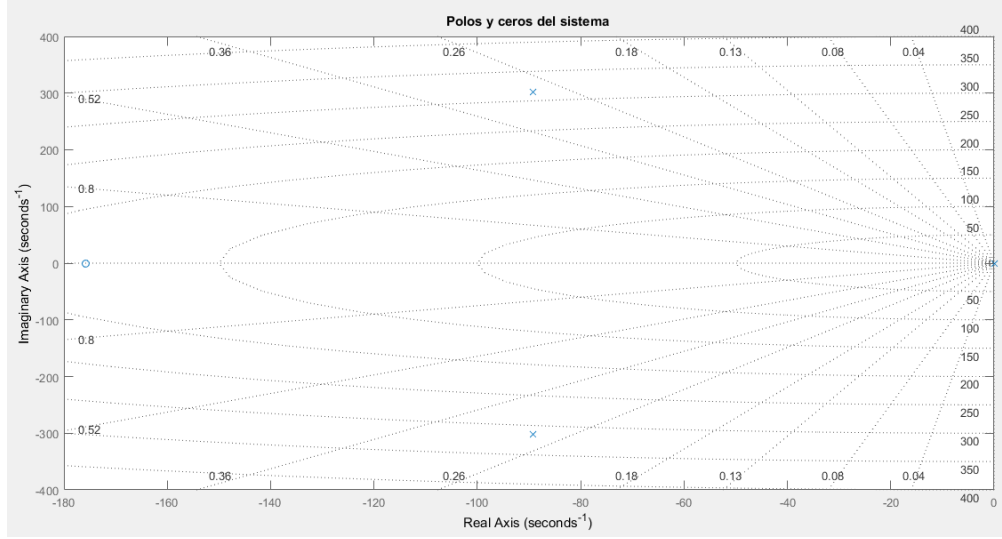


Figura 8: Polos y ceros de la función de transferencia para valores nominales

1.4. Observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado

Para el análisis de la observabilidad completa de estado se utiliza el criterio de Kalman. Según este criterio un sistema es observable si con el sistema en el estado inicial es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito; para este análisis se compara el rango de la matriz de observabilidad y el número de variables de estado y si son iguales el sistema es totalmente observable.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} = n \Rightarrow \text{El sistema es observable}$$

Si se cumple esto existe un observador que permite reconstruir todo el estado de la salida. Para el sistema LTI la matriz de observabilidad es la siguiente:

$$\mathcal{O}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{(3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m)}{(2 \cdot J_{eq})} \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad es de rango 3, entonces el sistema es completamente observable.

Se analizará además, la observabilidad desde el estado $\omega_m(t)$; siendo medida desde un tacogenerador en vez de medir posición con encoder. Para esto, consideramos la matriz $C = [0 \ 1 \ 0]$ y reevaluamos el criterio de Kalman para este caso:

$$\mathcal{O}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{(3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m)}{(2 \cdot J_{eq})} \\ 0 & \frac{(3 \cdot P_p^2 \cdot \lambda'^2_{mr} + 2 \cdot b_{eq}^2)}{(2 \cdot J_{eq}^2)} & -\frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m \cdot (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})}{(2 \cdot L_q \cdot J_{eq}^2)} \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz de observabilidad tomando ω_m como salida medida es igual a 2, por lo tanto el sistema no es completamente observable a partir de ω_m , es decir que no se puede reconstruir el estado completo a partir de la velocidad angular del motor y hay una variable de estado que no se puede estimar ("se pierde"). El estado que no se puede observar es la posición angular ya que no se tiene una posición inicial de referencia. Adicionando el eje d al sistema LTI para llegar al LTI equivalente aumentado el sistema ya no es observable porque no se puede estimar el valor de la corriente $i'_{ds}(t)$ ya que la misma está desacoplada del resto del sistema. Se recuerda la matriz de salida para que el sistema sea observable:

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

1.5. Controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado

Para el análisis de la controlabilidad completa de estado se utiliza el criterio de Kalman, el cual consiste en que dada una matriz denominada Matriz de Controlabilidad se puede determinar si existe alguna ley de control que permite ubicar todos los polos; para este análisis se compara el rango de la matriz de controlabilidad y el número de variables de estado y si son iguales el sistema es totalmente controlable.

Al obtener la matriz de controlabilidad y su rango, que es igual a 3, se puede determinar que el sistema es observable ya que es el orden de la matriz A.

$$C = [B \quad A \cdot B \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot B] = n \Rightarrow \text{El sistema es controlable}$$

El sistema es controlable porque el rango de esta matriz es igual a 3.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m r}{2 \cdot L_q \cdot J_{eq}} \\ 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m r}{2 \cdot L_q \cdot J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m r}{2 \cdot L_q^2 \cdot J_{eq}^2} \cdot (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & \frac{3 \cdot L_q^2 \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m r^2 + 2 \cdot R_s^2 \cdot J_{eq}^2}{2 \cdot L_q^3 \cdot J_{eq}^3} \end{bmatrix}$$

Si se considera el sistema LTI aumentado el sistema no es completamente controlable ya que el rango de la matriz de controlabilidad es menor a 4 y el sistema tiene 4 variables de estado. Se propone como solución agregar otra entrada de control que será $v_{ds}^r(t)$.

Al agregar esta variable de control la matriz resultante será una matriz rectangular de 4 filas y 8 columnas. El rango necesario para que sea controlable es 4. la matriz es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m r}{2 \cdot L_q \cdot J_{eq}} & 0 & -\frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m r \cdot (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})}{2 \cdot L_q^2 \cdot J_{eq}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m r}{(2 \cdot L_q \cdot J_{eq})} & 0 & -3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m r \cdot \frac{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})}{(2 \cdot L_q^2 \cdot J_{eq}^2)} & 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda'_m r \cdot (3 \cdot L_q^2 \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m r^2 + 2 \cdot L_q^2 \cdot b_{eq}^2 + 2 \cdot L_q \cdot R_s \cdot b_{eq} \cdot J_{eq} + 2 \cdot R_s^2 \cdot J_{eq}^2)}{4 \cdot L_q^3 \cdot J_{eq}^3} & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & -\frac{R_s}{L_q^2} & 0 & \frac{3 \cdot L_q^2 \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m r^2 + 2 \cdot R_s^2 \cdot J_{eq}^2}{2 \cdot L_q^3 \cdot J_{eq}^3} & 0 & -\frac{3 \cdot b_{eq} \cdot L_q^3 \cdot P_p^2 \cdot \lambda'_m r^2 + 6 \cdot L_q^2 \cdot P_p^2 \cdot R_s \cdot J_{eq} \cdot \lambda'_m r^2 + 2 \cdot R_s^3 \cdot J_{eq}^3}{2 \cdot L_q^4 \cdot J_{eq}^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & -\frac{R_s}{L_d^2} & 0 & \frac{R_s^2}{L_d^3} & 0 & -\frac{R_s^3}{L_d^4} \end{bmatrix}$$

El rango obtenido para esta matriz es de 4, por lo tanto el sistema es completamente controlable.

1.6. Simulación dinámica en dominio del tiempo: comparación de modelo NL completo desacoplado con Ley de control NL vs LTI equivalente aumentado

Se impone una consigna de pulso de tensión de estator en eje q de $+19,5966V_{cc}$ entre 0,1 y 0,7 segundos, superpuesta con un doble pulso de torque de carga: $+6,28N.m$ entre 0,3 y 0,5 segundos, y $-6,28N.m$ entre 0,5 y 0,9 segundos. A continuación se comparan las respuestas del estado interno para los dos modelos desarrollados anteriormente. En ambos modelos no se encuentran diferencias significativas entre el modelo no lineal y el LTI, salvo en cuanto a la temperatura ya que para el desarrollo de este último no se tuvo en cuenta la acoplamiento del subsistema térmico. Ya que no se encontraron grandes diferencias entre ambos modelos se procede a detallar los valores de tiempos de establecimiento, crecimiento y sobrepicos tanto de la velocidad angular como de las corrientes en coordenadas $qd0$ y abc referidas al estator.

Al observar los cuadros 1 y 2 se pueden apreciar las causas de los transitorios en cada tramo de tiempo. Se puede deducir que la variación de los parámetros depende de cual es la causa que lo genera. En primer lugar se puede ver que para la corriente en el eje q los tiempos de crecimiento son menores cuando la perturbación generada es debida a la corriente pero los tiempos de establecimiento son mayores, esto da la pauta de que la corriente $i_{qs}^r(t)$ es más sensible a los cambios de tensión y los transitorios que se generan son mayores ya que tarda mas tiempo en establecerse. En cuanto a ω se puede concluir que su respuesta a la carga es más rápida que al cambio de tensión (a los cambios en la consigna) aunque el tiempo de establecimiento de la velocidad es bastante similar para ambos casos. Del gráfico 9 se puede ver que la influencia del voltaje sobre la velocidad es superior que los cambios en el torque de carga.

Al realizar un análisis sobre las curvas paramétricas de Torque-velocidad (figura 22) se se concluye que el motor parte del reposo (velocidad y torque iguales a 0) y entra en fase de motorización llegando a un pico del valor de par para luego llegar al valor máximo de velocidad angular con el mínimo torque, en este momento ocurre el sobrepico de velocidad generado por el flanco ascendente del pulso de tensión y la velocidad se

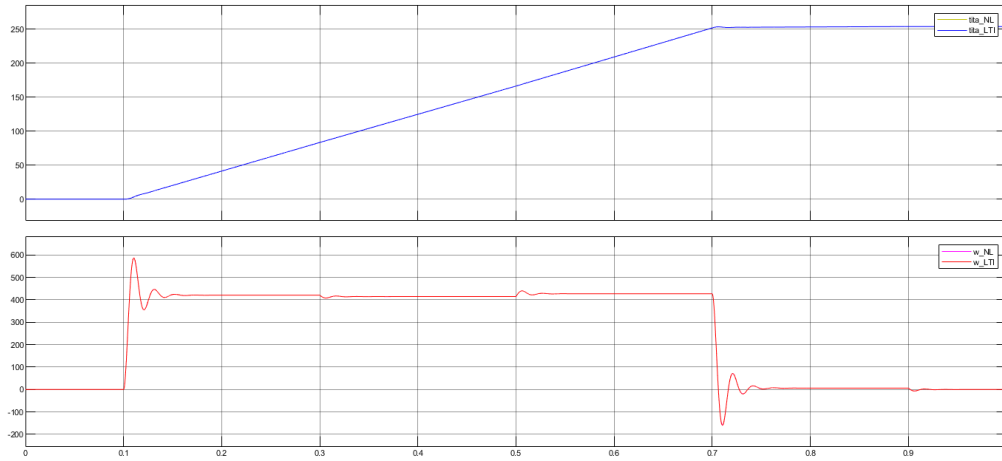


Figura 9: Posición y velocidad angular para $i_{ds}^r(0) = 0A$

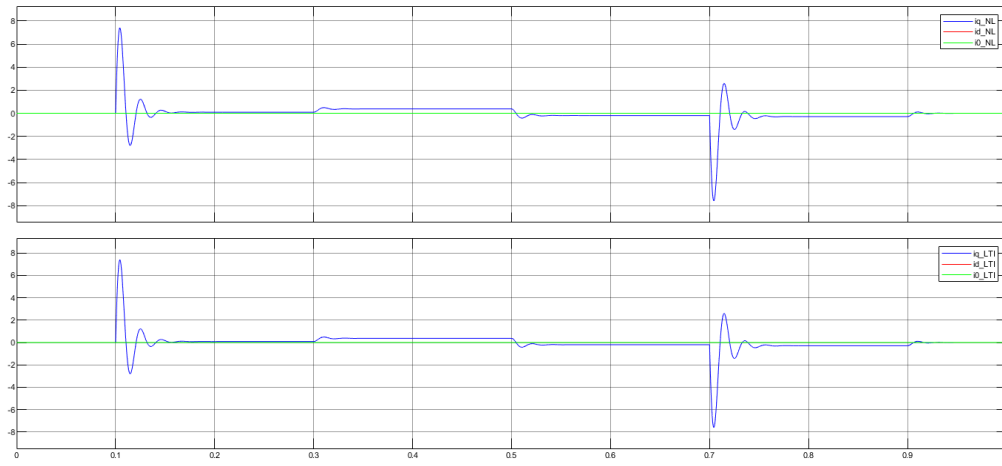


Figura 10: Corrientes estáticas referidas al rotor en coordenadas $qd0$ para $i_{ds}^r(0) = 0A$

$i_{qs}^r(t)$				
TIEMPO	ESTABLECIMIENTO	CRECIMIENTO	SOBREPICO	CAUSA
0,1 s	89,8 ms	21,662 μs	7,404	Voltaje
0,3 s	53,846 ms	4,14 ms	0,489	Torque
0,5 s	56,340 ms	4,122 ms	-0,421	Torque
0,7 s	101,761 ms	21,412 μs	-7,5912	Voltaje
0,9 s	45,782 ms	4,171 ms	0,113	Torque

Cuadro 1: Valores obtenidos de $i_{qs}^r(t)$ para consigna de tensión y carga definida

$\omega_m(t)$				
TIEMPO	ESTABLECIMIENTO	CRECIMIENTO	SOBREPICO	CAUSA
0,1 s	53,343 ms	4,133 ms	586	Voltaje
0,3 s	60 ms	1,388 ms	408	Torque
0,5 s	52,200 ms	1,5 ms	440	Torque
0,7 s	45,827 ms	4,139 ms	-159,2759	Voltaje
0,9 s	51,791 ms	1,498 ms	-6,46	Torque

Cuadro 2: Valores obtenidos de ω para consigna de tensión y carga definida

establece alrededor del punto de operación a bajo torque. En este período se pasa del primer al segundo

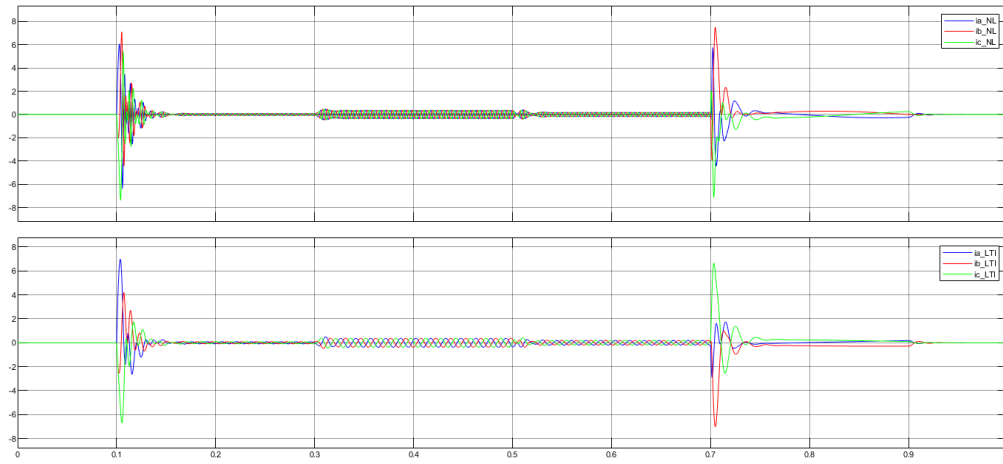


Figura 11: Corrientes estat3ricas referidas al rotor en coordenadas abc para $i_{ds}^r(0) = 0A$

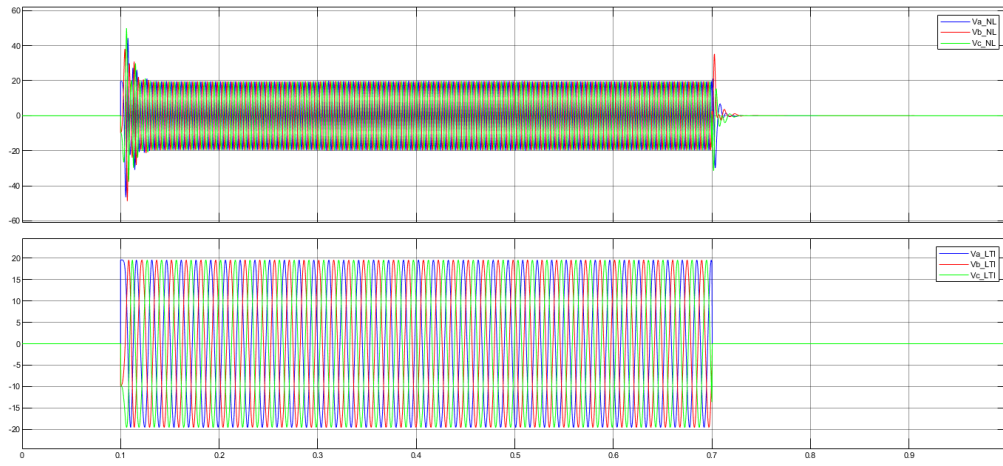


Figura 12: Voltajes estat3ricos referidos al rotor en coordenadas abc para $i_{ds}^r(0) = 0A$

cuadrante de operaci3n, motorizaci3n y frenado regenerativo respectivamente. Cabe destacar que en este per3odo hay variaciones de velocidad y torque en menor escala que son generadas por los cambios en la carga.

En el flanco de bajada de la consigna de tensi3n se puede observar una gran variaci3n de velocidad y torque disminuyendo ambos a valores negativos por lo que se encuentra en el tercer cuadrante, motorizaci3n inversa, hasta que luego actuar en el 3ltimo cuadrante (frenado en sentido inverso) y establecerse nuevamente en el valor final.

Posteriormente se han dado condiciones iniciales a $i_{ds}^r(0) = \pm 0,5A$ y se ve el comportamiento exponencial de las corrientes que tienden a establecerse en 0 nuevamente seg3n la constante de tiempo definida por $\frac{R_s}{L_d}$ (desarrollado en el apartado 1.2.7) ya que fueron aplicadas las leyes de control m3nimas. Las diferencias entre los modelos LTI y no lineal para posici3n y velocidad angulares son indistinguibles, en tanto que para tensiones de fase abc tienen un comportamiento similar exceptuando que en el modelo no lineal hay transitorios generados que luego son compensados y las tensiones establecen en los mismos valores que para el LTI. Estos valores de corriente responden a la consigna de pulso de tensi3n.

Finalmente se genera una consigna de tensi3n $v_{ds}^r(t) = \pm 1,9596V_{cc}$ en el tiempo $t = 0,5s$, es decir se aplica *field forcing* (para $v_{ds}^r(t) = 1,9596V_{cc}$) y *field weakening* a $v_{ds}^r(t) = -1,9596V_{cc}$ a fin de comparar los efectos que produce en ambos sistemas.

Al comparar el comportamiento tanto de la velocidad angular ω como del torque no se observan grandes cambios al aplicar las dos estrategias contrario a lo que se esperaba que eran cambios distinguible de campo se esperas en la velocidad y el torque ya que se trabaja a velocidad constante, por lo tanto para el reforzamiento de campo se esperaban menores velocidades angulares y mayor torque en oposici3n al comportamiento esperado para debilitamiento de campo. Este comportamiento puede ser debido a que para los

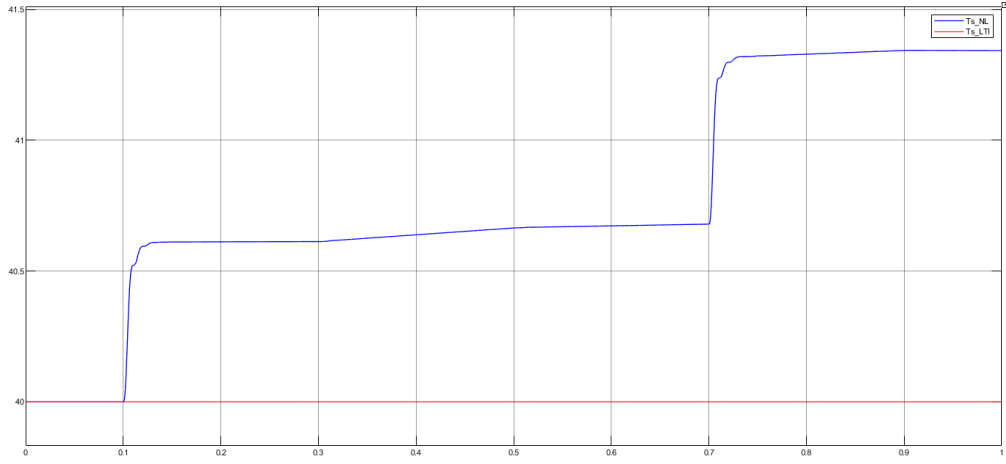


Figura 13: Temperatura para $i_{ds}^r(0) = 0A$

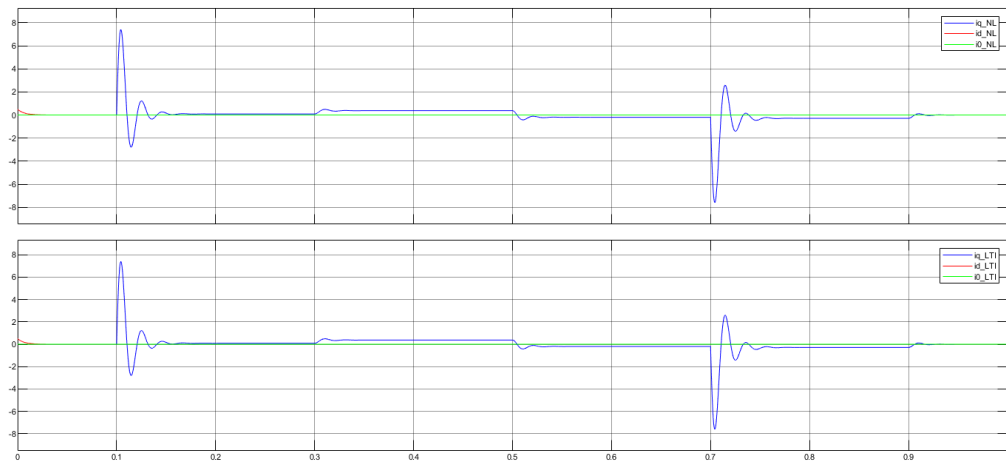


Figura 14: Corrientes estáticas referidas al rotor en coordenadas $qd0$ para $i_{ds}^r(0) = +0,5A$

modelos desarrollados se tuvieron en cuenta algunas simplificaciones y no se puede ver un cambio evidente.

Por otro lado si se observan cambios en el comportamiento de las corrientes y tensiones estáticas y en $qd0$ (ver figuras)

2. Diseño, Análisis y Simulación con CONTROLADOR de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque equivalente (Control Vectorial)

Se busca controlar el torque electromagnético mediante la manipulación del torque, para ello se deben desacoplar las caídas naturales del sistema para poder realizar un control de manera directa. Se da una consigna de tensión y se realimenta el sistema con las compensaciones de las caídas naturales; este es un lazo de interno corriente y torque. El segundo lazo de control es uno de velocidad/posición y es un lazo externo, se realiza un control de tipo PID. Para actuar sobre el sistema desde la fuente de corriente continua se debe pasar la señal mediante un modulador de tensión ideal, que es un inversor trifásico, compuesto por puentes de MOSFET o IGBT. Para lograr esto se deben tener en cuenta algunas simplificaciones. La primer es que el modulador de tensión es ideal, matemáticamente:

$$v^{r*}(t) \approx 1 \cdot v^r(t)$$

La segunda simplificación que se debe considerar es que todas las variables de estado son accesibles, esto permite que puedan ser realimentadas. En los apartados posteriores se implementará un observador de estado

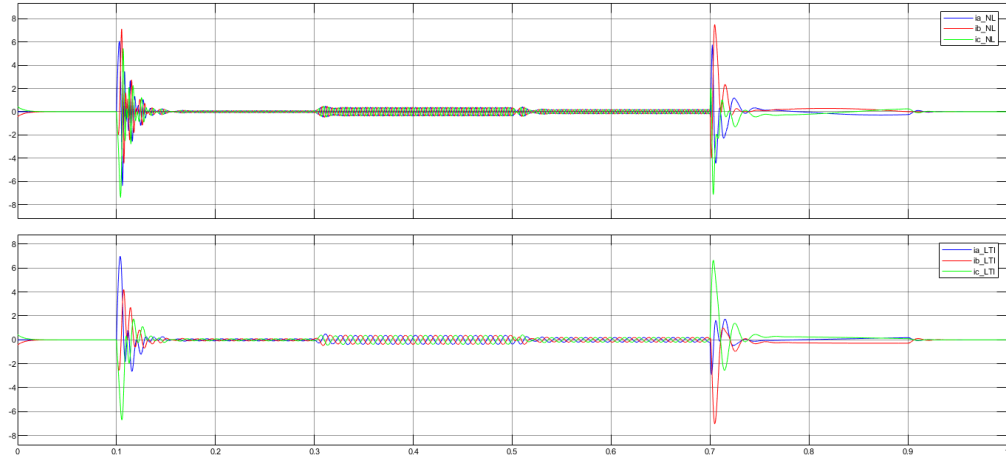


Figura 15: Corrientes estatóricas referidas al rotor en coordenadas abc para $i_{ds}^r(0) = +0,5A$

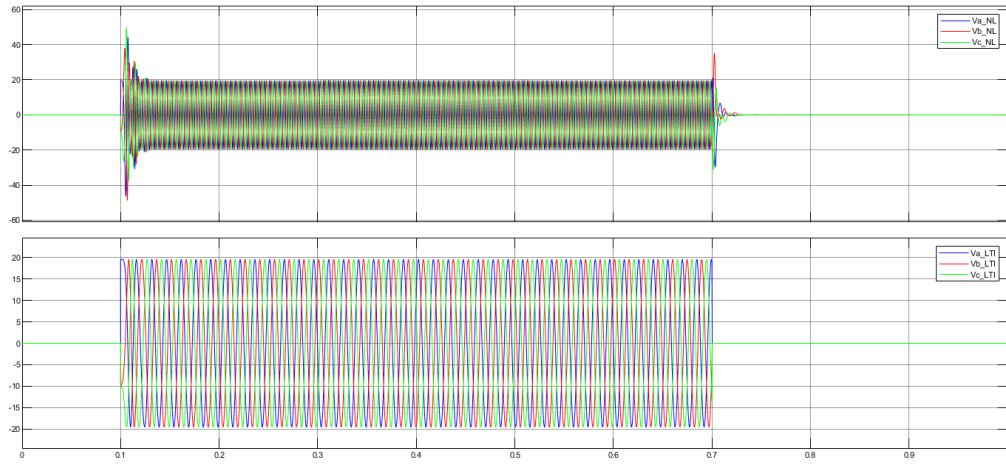


Figura 16: Voltajes estatóricos referidos al rotor en coordenadas abc para $i_{ds}^r(0) = +0,5A$

para la velocidad ya que no se cuenta con un sensor de velocidad.

Para poder actuar de manera directa sobre el torque electromagnético y así poder responder ante los cambios de carga se realiza una realimentación de las no linealidades y también de las caídas óhmicas. La entradas del modulador de torque son las corrientes $qd0$ y a la salida se encuentran las consignas de tensión $qd0$ que luego son transformadas mediante la transformación de Park a coordenadas abc que luego pasan por el modulador de tensión equivalente, el cual ingresa al sistema físico.

La tensión a la entrada del modulador de tensión es igual a la tensión de referencia $v^{r*'}(t)$ más las compensaciones por por caídas naturales del sistema, es decir las caídas óhmicas y de tensiones inducidas.

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = v_{qs}^{r*'}(t) + R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_m(t) \cdot P_p \\ v_{ds}^{r*}(t) = v_{ds}^{r*'}(t) + R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_m(t) \cdot P_p \\ v_{0s}^{r*}(t) = v_{0s}^{r*'}(t) + R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t) \end{cases}$$

Como el modulador de torque es ideal se puede reemplazar $v^{r*}(t)$ por $v^r(t)$, además despejando esta última en las ecuaciones 24, 25, 26 y ubicándolas en el sistema anterior se cancelan los términos no lineales y las caídas óhmicas. Finalmente los respectivos valores de las consignas de tensión son:

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*'}(t) = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ v_{ds}^{r*'}(t) = L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ v_{0s}^{r*'}(t) = L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \end{cases}$$

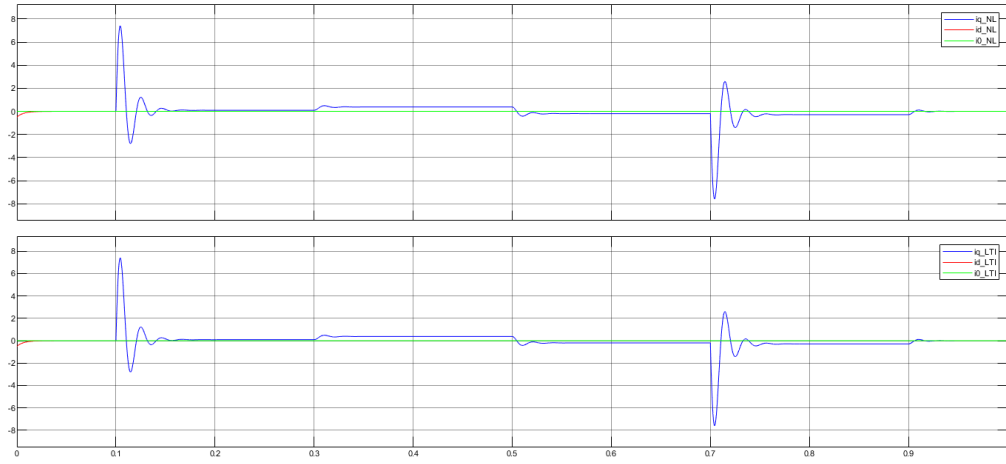


Figura 17: Corrientes estatóricas referidas al rotor en coordenadas $qd0$ para $i_{ds}^r(0) = -0,5A$

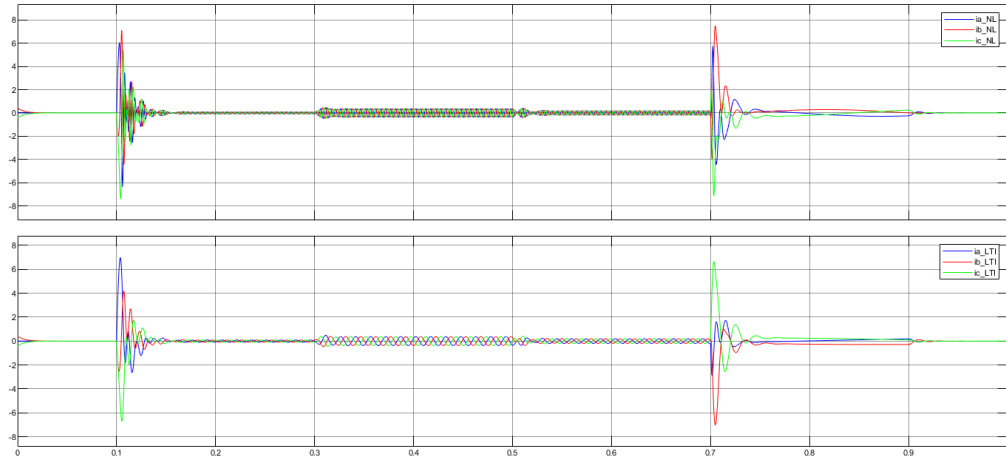


Figura 18: Corrientes estatóricas referidas al rotor en coordenadas abc para $i_{ds}^r(0) = -0,5A$

Esta tensión de referencia es en realidad una diferencia de corrientes multiplicado por una ganancia proporcional y como el resultado de esta operación es un voltaje esta ganancia tiene unidades de resistencia.

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*'}(t) = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = R_q \cdot (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \\ v_{ds}^{r*'}(t) = L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = R_d \cdot (i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)) \\ v_{0s}^{r*'}(t) = L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = R_0 \cdot (i_{0s}^{r*}(t) - i_{0s}^r(t)) \end{cases} \quad (38)$$

Los valores de estas ganancias se obtienen mediante la asignación de polos.

$$\frac{L_q}{R_q} \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + i_{qs}^r(t) = i_{qs}^{r*}(t)$$

$$\left(\frac{L_q}{R_q} \cdot s + 1 \right) \cdot i_{qs}^r(t) = i_{qs}^{r*}(t)$$

$$G_{iq} = \frac{i_{qs}^r(t)}{i_{qs}^{r*}(t)} = \frac{1}{\frac{L_q}{R_q} \cdot s + 1}$$

$$p_q = -\frac{R_q}{L_q} = -5000$$

Se realiza un desarrollo similar para el eje d y 0 . Los valores de las ganancias proporcionales son:

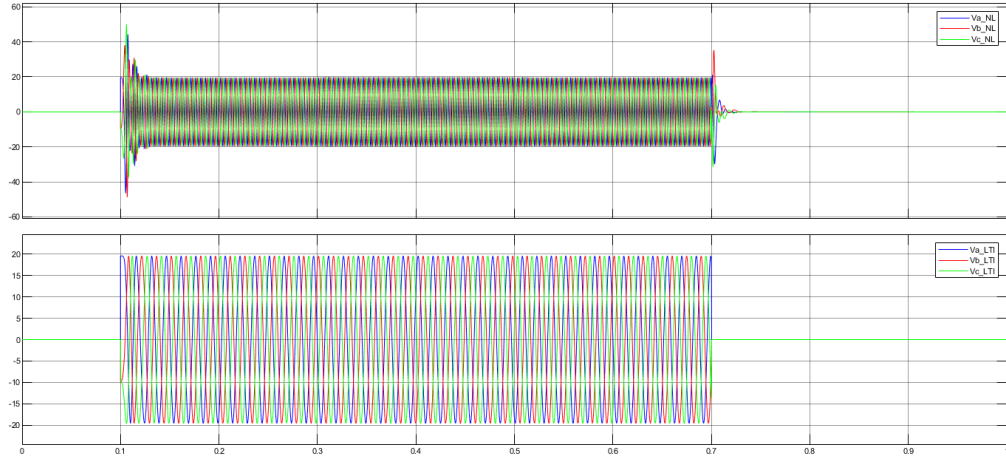


Figura 19: Voltajes estáticos referidos al rotor en coordenadas abc para $i_{ds}^r(0) = -0,5A$

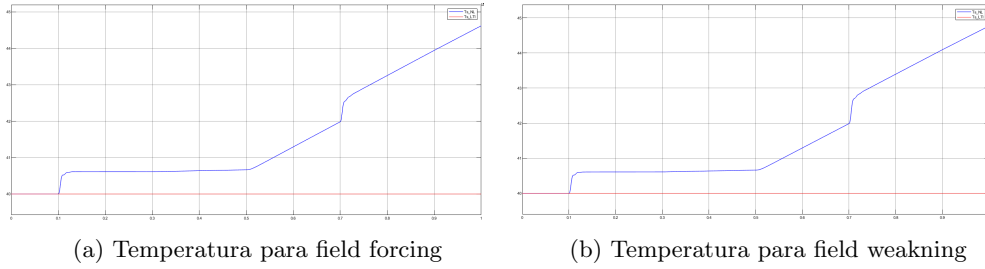


Figura 20: Temperatura para field forcing-weakning

$$\begin{cases} R_q = 29\Omega \\ R_d = 33\Omega \\ R_0 = 4\Omega \end{cases}$$

La constante de tiempo asociada a cada polo es: $\tau = -\frac{1}{\rho} = 2 \cdot 10^{-3}s$

2.1. Incorporación de consigna de torque

Se agrega ahora una consigna de torque. De la ecuación 17

$$T_m^*(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p [\lambda_m'^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^{*r}(t)] \cdot i_{qs}^{*r}(t)$$

Despejando se obtiene a continuación el valor de $i_{qs}^{*r}(t)$ para que sea la consigna que va a ingresar al modulador de corriente.

$$i_{qs}^{*r}(t) = \frac{T_m^*(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p [\lambda_m'^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^{*r}(t)]}$$

De esta manera se puede ver que $T_m^*(t)$ es ahora la variable manipulada. Cabe destacar que el torque es $T_m^*(t) = T_m^{*'}(t) + B_{eq} \cdot \omega_m$. Esta ecuación es un caso general, manipulando $i_{ds}^{*r}(t)$ de tal manera de usar valores positivos o negativos se puede hacer *field-forcing* y *field-weakening* respectivamente. Para el caso especial de $i_{ds}^{*r}(t) = 0$ la corriente de entrada se reduce a:

$$i_{qs}^{*r}(t) = \frac{T_m^*(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r}$$

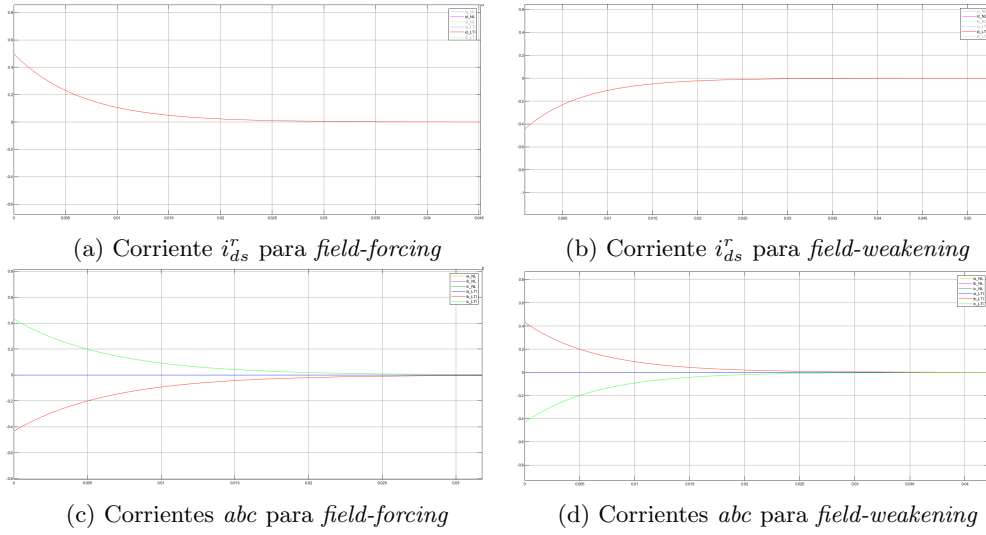


Figura 21: Comparación del comportamiento de las corrientes estáticas para $i_{ds}^r(0) \neq 0$

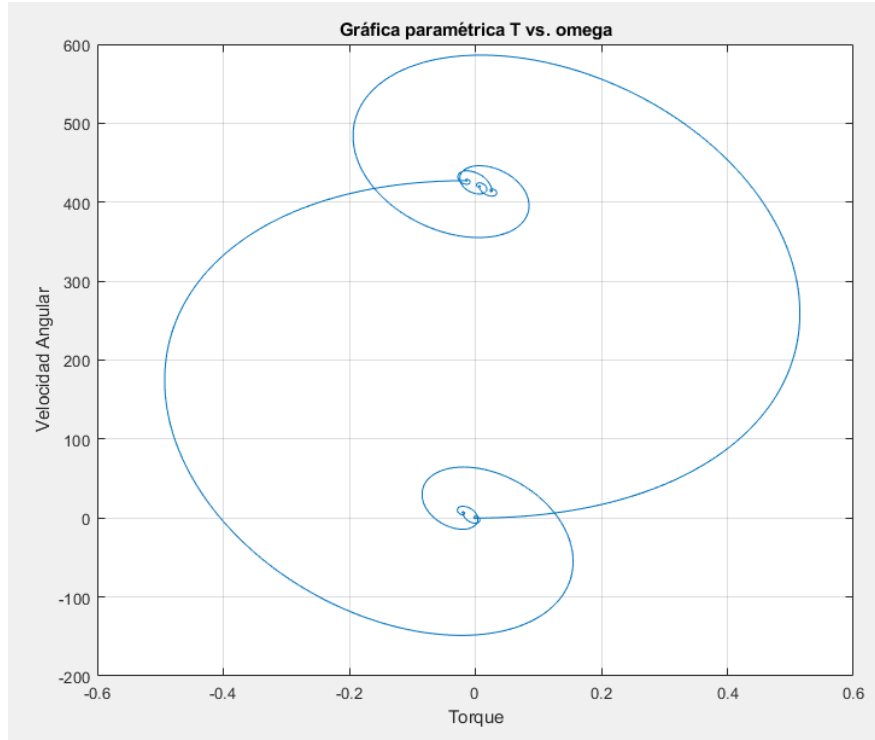


Figura 22: Curvas paramétricas T vs. ω

2.2. Controlador externo de movimientos: posición/velocidad

Posteriormente se procede a dar consignas específicas de posición/velocidad para el motor y las mismas serán $T_m^{*'}(t)$. Se usará un controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo, ver figura 23) para cumplir con el perfil planteado que es un perfil trapezoidal de posición.

Si bien se desea seguir un perfil de posición, se evita el uso de una consigna de posición θ ya que de esa manera se necesitaría usar un derivador y eso implica la posibilidad de amplificar el ruido a la entrada ya que la señal puede oscilar a alta frecuencia y la derivación es sensible a estos ruidos. La solución para esto es derivar el perfil de posición y obtener el perfil de velocidad.

Según este método los polos del sistema tendrán la misma frecuencia, por lo tanto en el diagrama de Laplace los mismos formarán una circunferencia.

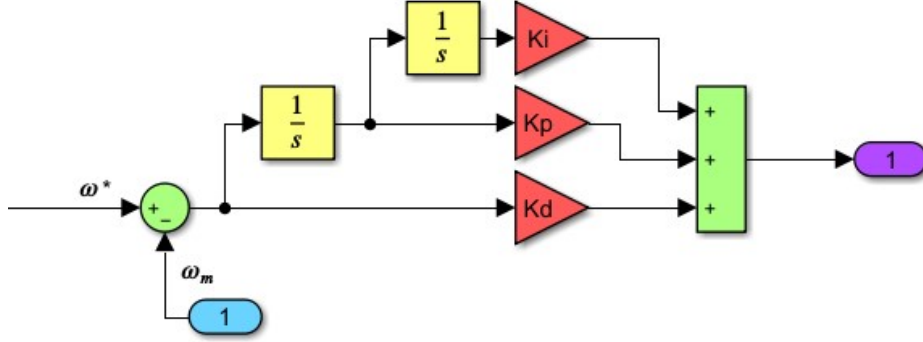


Figura 23: Controlador PID

La ecuación del controlador tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} T_m' = e_\omega \cdot K_d + e_\theta \cdot K_p + K_i \cdot \int e_\theta \cdot dt \\ e_w = \omega_m(t) - \tilde{\omega}_m(t) \end{cases} \quad (39)$$

El modelo mecánico simplificado del sistema es:

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m = T_m^* - T_l$$

Se considera que modulador de torque tiene un ancho de banda infinito, por lo tanto su función de transferencia actúa como una ganancia unitaria, entonces $T_m^* = G_{Tl}(s) \cdot T_m^{*'} \Rightarrow T_m^* \approx T_m^{*'}$.

Reemplazando en la ecuación 39 y sabiendo que $e_\omega = \frac{d(e_\theta)}{dt}$ luego se puede representar la ecuación en el dominio de Laplace:

$$\begin{cases} J_{eq} \cdot s \cdot \Omega_m = T_m^* - T_l = K_d(\Omega_m^*(s) - \Omega_m(s)) + K_p(\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)) + \frac{K_i}{s}(\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)) - T_l \\ \Theta_m \cdot s = \Omega_m \end{cases} \quad (40)$$

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \Theta_m = [K_d \cdot (\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)) + K_p \cdot (\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)) + \frac{K_i}{s} \cdot \Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)] - T_l$$

Operando se obtiene

$$\Theta_m \cdot \left[J_m \cdot s^2 + K_d \cdot s + K_p + \frac{K_i}{s} \right] = \Theta_m^*(s) \cdot \left[s^2 + K_d \cdot s + K_p + \frac{K_i}{s} \right]$$

Las funciones de transferencia resultantes son:

$$G_{Tl}(s) = -\frac{s}{J_{eq} \cdot s^3 + K_d \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i} \quad G_{\theta^*}(s) = \frac{K_d \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i}{J_{eq} \cdot s^3 + K_d \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i} \quad (41)$$

Es importante destacar que el rechazo a perturbaciones se da cuando $K_i \neq 0$, en caso contrario no hay rechazo a perturbaciones y hay un error de estado estacionario.

- $K_i \neq 0 \Rightarrow G_{\theta^*}(s) = 1 \wedge G_{Tl}(s) = 0$ (con rechazo total a perturbaciones)
- $K_i = 0 \Rightarrow G_{\theta^*}(s) = 1 \wedge G_{Tl}(s) = -\frac{1}{K_p}$ (sin rechazo a perturbaciones)

De esta manera se observa que la acción integral compensa las perturbaciones de carga constante en estado estacionario.

Se desea calcular las constantes del controlador PID. Para el método Sintonía Serie se plantea que los polos tengan la misma frecuencia (ω_{pos}) para obtener un filtro de Butterworth de tercer orden. Para realizar el método de asignación de polos se parte del siguiente polinomio deseado:

$$p(s) = (s + \omega_{pos}) \cdot (s^2 + 2 \cdot \zeta \omega_{pos} + \omega_{pos}^2)$$

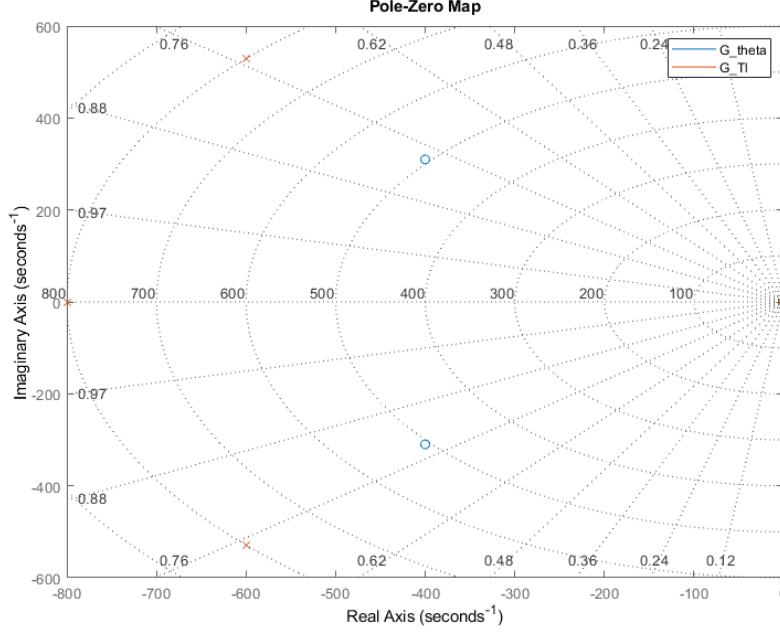


Figura 24: Polos del controlador PID

Reemplazando los valores obtenidos anteriormente en este polinomio y desarrollando el polinomio del denominador se obtienen los polos del controlador PID:

$$s_1 = -800 \frac{rad}{s} \quad s_{2,3} = -600 \pm 529,15i \frac{rad}{s} \quad (42)$$

Las ganancias del controlador se obtienen de la siguiente forma, según el método de Sintonía Serie y para un $n = 2,5$ y un $\omega_{pos} = 800 \frac{rad}{s}$:

- $K_d = J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos} = 0,0113$
- $K_p = K_d \cdot \omega_{pos} = 9,0416$
- $K_i = K_p \cdot \frac{\omega_{pos}}{n} = 2893,3$

Siendo n:

$$n \equiv 2 \cdot \zeta + 1 \quad (43)$$

2.3. Observador de estado de orden reducido

Se agrega un observador de estado de orden reducido teniendo en cuenta el sistema mecánico tal como está definido en las ecuaciones 12. Como no se cuenta con un sensor de velocidad (un tacogenerador) y es necesario realimentar el sistema con el valor de la velocidad se procede a realizar un observador de estado de orden reducido, teniendo en cuenta el subsistema mecánico. Esto se puede realizar ya que el sistema es observable desde θ como se comprobó anteriormente. Para poder estimar el valor de la velocidad angular se debe expandir el sistema, es decir aumentar la cantidad de variables de estado de un valor n a $2 \cdot n$. Las variables estimadas pueden tener un error dependiendo de cómo esté planteado el modelo y los parámetros estimados del mismo. Se puede destacar que para un sistema sin perturbación (considerando el modelo bien estimado) el mismo va a responder de manera casi inmediata a las variaciones de las variables de estado de la planta pero si la planta tiene una perturbación el mismo puede llegar a tener un error de estado estacionario, por lo que ese deberían agregar integradores dependiendo del perfil de la perturbación.

Cabe destacar que para que el observador responda correctamente a las variaciones del sistema se buscará que lo haga de manera rápida, por lo tanto es necesario que los polos del mismo sean negativos y de valor absoluto mayor a los de la planta (más a la izquierda en el plano s). Lo mencionado anteriormente indica que

el ancho de banda del observador debe ser muy grande para poder responder de manera fiable, he aquí una situación de compromiso ya que dependiendo del sensor puede ser conveniente usar valores estimados para los parámetros para que el sensor no ingrese ruido al sistema y deteriore el funcionamiento del mismo.

Los dos polos del observador son reales iguales y se ubican en el plano de Laplace en $p = -3200 \frac{rad}{s}$, para no inferir demasiado con el controlador de estado. Las variables deberían aproximarse, de manera que se las compara en cada instante de tiempo produciendo un determinado error y se lo magnifica como ganancia. El torque de entrada al observador se lo tomó una vez compensado el término $b_{eq} \cdot \omega_m$, por lo que será igual a cero.

Las ecuaciones de estado del subsistema mecánico tienen la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}$$

De esta manera, la ecuación de estado del observador será:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K_e \cdot e_y(t) \\ e_y(t) = y(t) - \tilde{y}(t) \\ \tilde{y}(t) = C \cdot \tilde{x}(t) \end{cases}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A \cdot \tilde{x} + B \cdot u(t) + K_e(C \cdot x(t) - C \cdot \tilde{x}(t))$$

Las ecuaciones de estado quedan:

$$\dot{\tilde{\theta}}_m(t) = \tilde{\omega}_m(t) + K_{e\theta}(\theta_m(t) - \tilde{\theta}_m(t))\dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot T_m^{*'}(t) + K_{e\omega}(\theta_m(t) - \tilde{\theta}_m(t)) \quad (44)$$

Reordenando:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - K_e \cdot C) \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K_e \cdot C \cdot x(t)$$

Siendo las matrices y vectores:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & C &= [1 \quad 0] & K_e &= \begin{bmatrix} K_{e\theta} \\ K_{e\omega} \end{bmatrix} \\ A' &= A - K_e \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{e\theta} \\ K_{e\omega} \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} -K_{e\theta} & 1 \\ -K_{e\omega} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}}_m(t) \\ \dot{\tilde{\omega}}_m(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -K_{e\theta} & 1 \\ -K_{e\omega} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_m(t) \\ \tilde{\omega}_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot T_m^{*'} + \begin{bmatrix} K_{e\theta} \\ K_{e\omega} \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se calculan los valores propios:

$$|s \cdot I - A'| = \begin{vmatrix} s + K_{e\theta} & -1 \\ K_{e\omega} & s \end{vmatrix} = (s + K_{e\theta}) \cdot s + K_{e\omega} = s^2 + (K_{e\theta})s + (K_{e\omega})$$

Se desea ubicar los polos del observador en $-3200 \frac{rad}{s}$:

$$p_{obs1,2}(s) = (s + 3200)^2 = s^2 + 6400s + 3200^2$$

Igualando miembro a miembro se obtienen los valores de $K_{e\theta}$ y $K_{e\omega}$:

$$K_{e\theta} = 6400$$

$$K_{e\omega} = 3200^2$$

2.4. Simulación

Al modelo NL de la sección 1 se le agregó un modulador de torque, el controlador de movimiento mediante PID y un observador, de manera que resulta en el modelo NL completo. El modelo NL completo se observa en la figura 26. A continuación se realizan simulaciones específicas y se sacan conclusiones de las mismas.

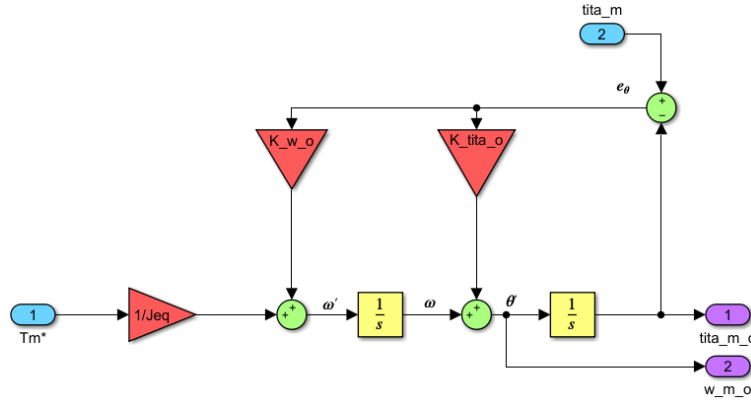


Figura 25: Observador de orden reducido de subsistema mecánico

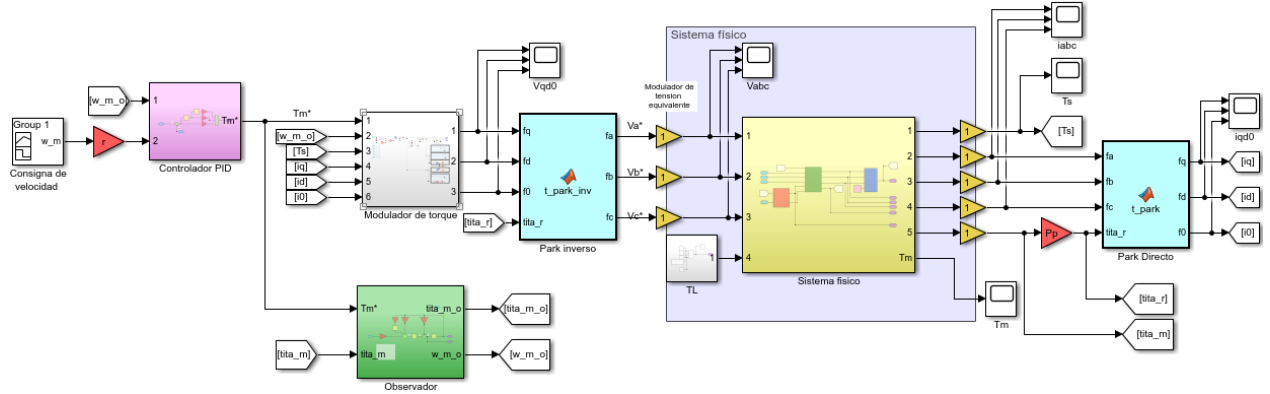


Figura 26: Modelo NL completo

2.4.1. Seguimiento de consignas de movimiento

Se analizará el comportamiento del sistema para una un perfil trapezoidal de posición para la articulación del hombro del robot. Como las consignas son posiciones articulares $q^*(t)$ se debe multiplicar las mismas por la razón de reducción r . La consigna consiste en que el hombro realice una vuelta completa y luego regrese a la posición de origen. Para realizar la consigna de posición especificada y según lo dicho anteriormente se dará una consigna de velocidad al controlador PID. Para la simulación se considera un escalón de carga de 6,28 N.m a los 3 segundos.

En la figura 28 se observa que se cumple el perfil deseado de consigna. Tanto la posición angular medida, como la consigna y la observada son muy similares, salvo que existen pequeñas diferencias cuando hay saltos abruptos tipo escalón en la velocidad del sistema, tal como se observa en las figuras 29 y 30.

Idealmente la consigna de velocidad angular es cuadrada y finita pero en la realidad para que se cumpla se necesitan aceleraciones muy altas (teóricamente infinitas) para partir de 0 a un valor finito (en este caso $\dot{q}^*(t = 5s) = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{5s}$). Estas especificaciones son demasiado exigentes y el motor alcanza altas tensiones y corrientes para poder cumplir con el escalón de velocidad y sus valores sobrepasan los valores límites de trabajo, siendo esto perjudicial para la máquina. De seguirse estas consignas el motor trabajaría exigido y la temperatura se elevaría, siendo imposible que el motor trabaje de esta manera en régimen permanente. Cabe destacar que este aumento excesivo de las corrientes y tensiones es teórico ya que en realidad la fuente se satura y no puede cumplir con las especificaciones de tensión, entregando lo máximo posible.

Se pueden observar en el gráfico 31 las tensiones y corrientes estáticas generadas al dar una consigna de posición con perfil trapezoidal.

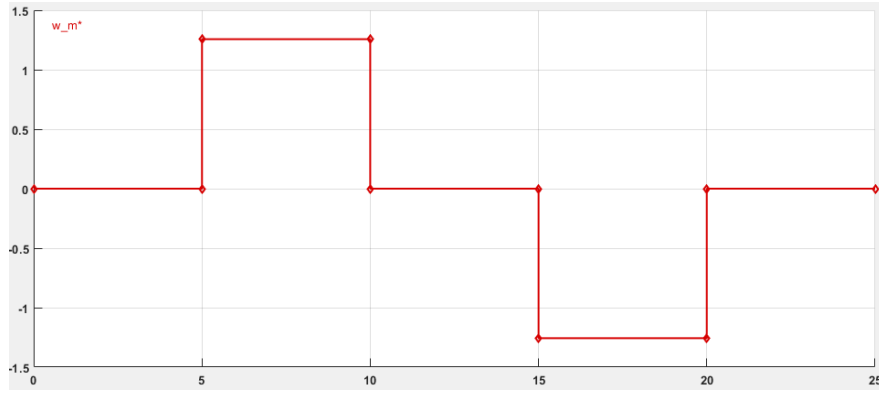


Figura 27: Consigna de velocidad para cumplir perfil trapezoidal de posición

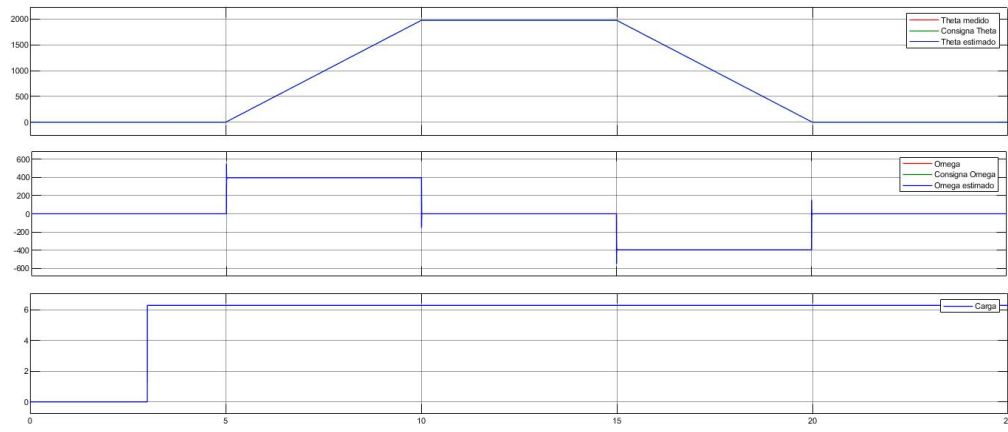


Figura 28: Posición angular, velocidad angular y carga

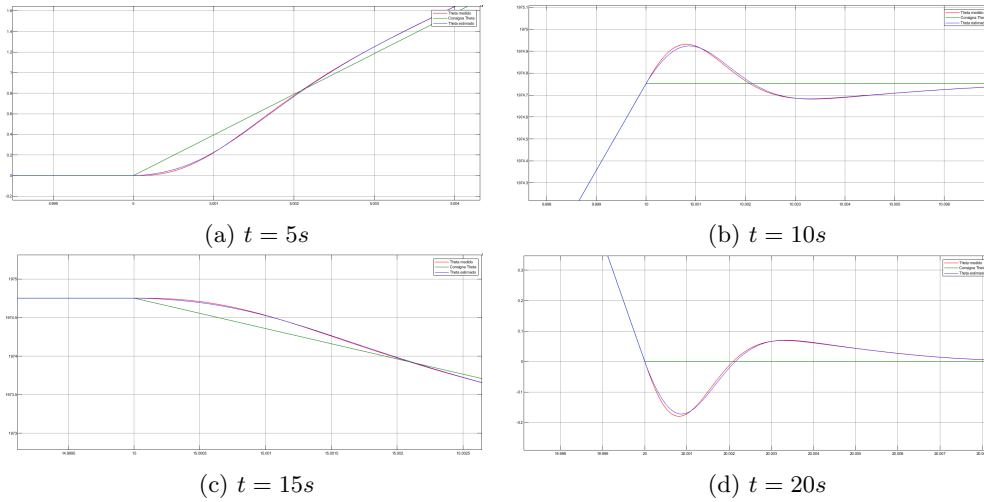


Figura 29: Oscilación de posición angular en vértices de perfil trapezoidal

2.4.2. Rechazo a perturbaciones

Se realiza ahora un análisis de la respuesta a una perturbación de carga. En este caso se toma una carga escalón de $6,28 \text{ Nm}$ a los 3 segundos, como se aprecia en la figura 33.

En las figuras 35 y 39 se observa que tanto la posición angular como la velocidad angular tienden a rechazar las perturbaciones. Se puede contemplar que en el momento que aparece la perturbación existe un error de estado estacionario entre la posición angular medida y la estimada. El torque motor no es el requerido

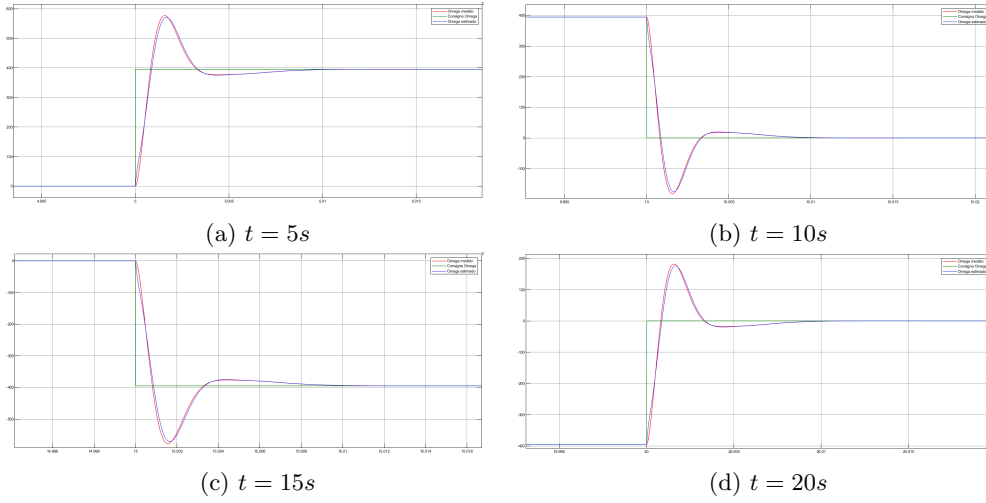


Figura 30: Oscilación de velocidad angular en vértices de perfil trapezoidal

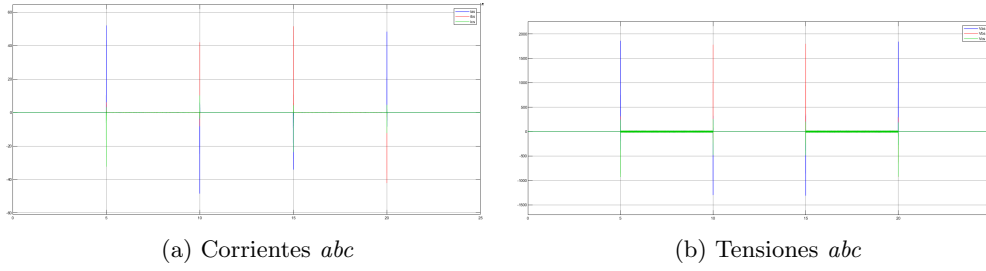


Figura 31: Comportamiento de corrientes y tensiones estáticas

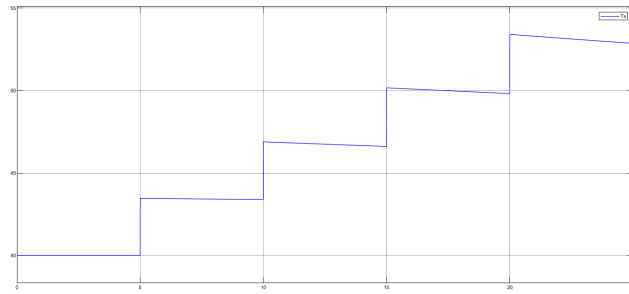


Figura 32: Variación de temperatura

para poder vencer la entrada de perturbación. Además, este error se debe a que en el observador no se tiene en cuenta la influencia del torque de carga de perturbación.

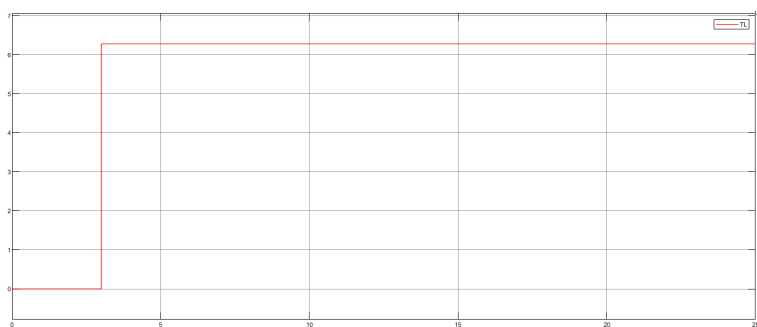


Figura 33: Carga escalón de 6,28 Nm

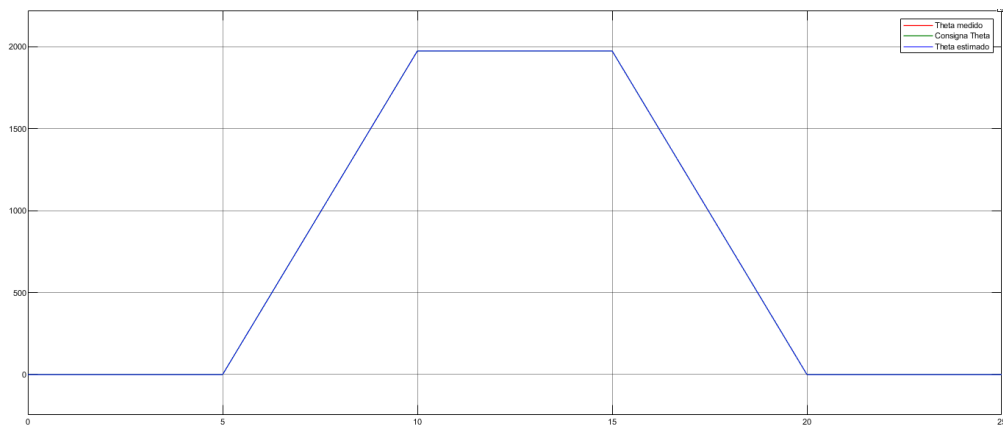


Figura 34: Comportamiento del perfil posición angular ante perturbación escalón

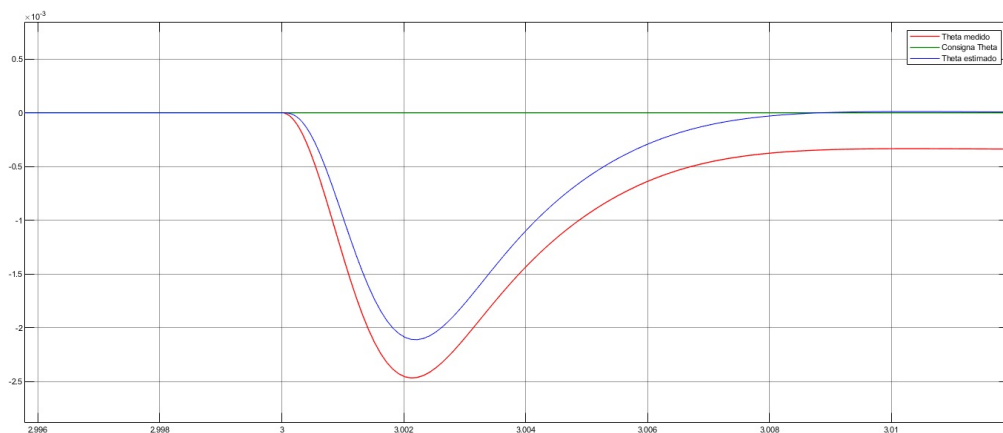


Figura 35: Posición angular a $t = 3s$ ante perturbación escalón

2.5. Verificación de desempeño y/o mejoras

2.5.1. Especificaciones de operación

En la tabla 3 se observan los valores máximos alcanzados por los distintos parámetros durante el seguimiento de la consigna. Se puede observar que los valores de corrientes y tensiones superan a los valores de especificación como se dijo anteriormente. En cuanto a los valores de torque motor se observa que también superan el valor límite para la aceleración, el cual es: $T_{qmax} = 29,42 N.m$. También se puede observar que los picos de corriente superan ampliamente al valor límite de corriente que es $I_{Smax} = 2A_{CArms}$. El valor de

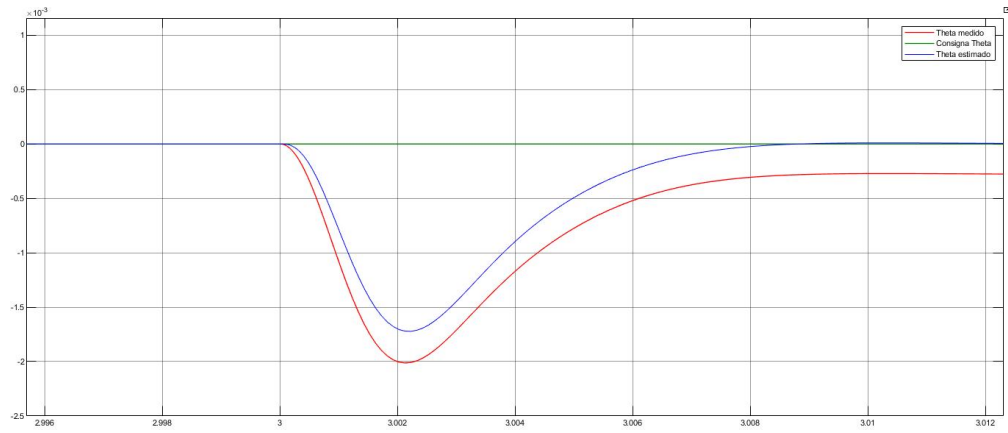


Figura 36: Posición angular con variación superior de parámetros de carga

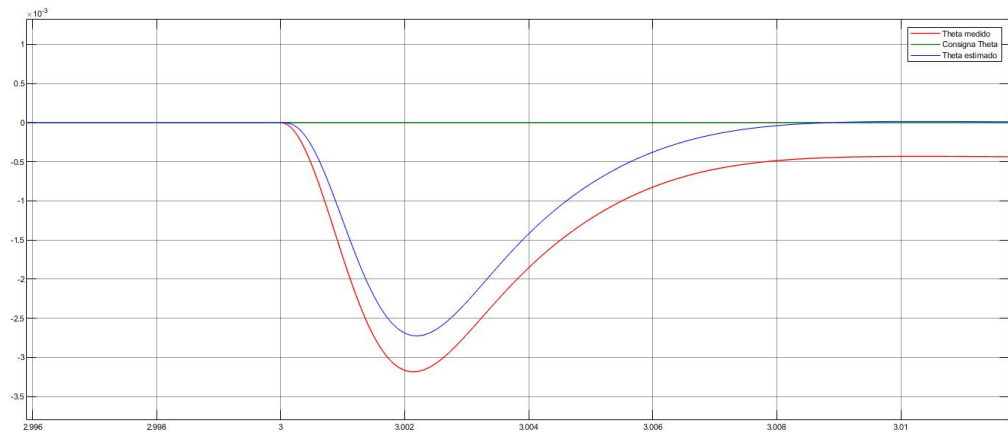


Figura 37: Posición angular con variación inferior de parámetros de carga

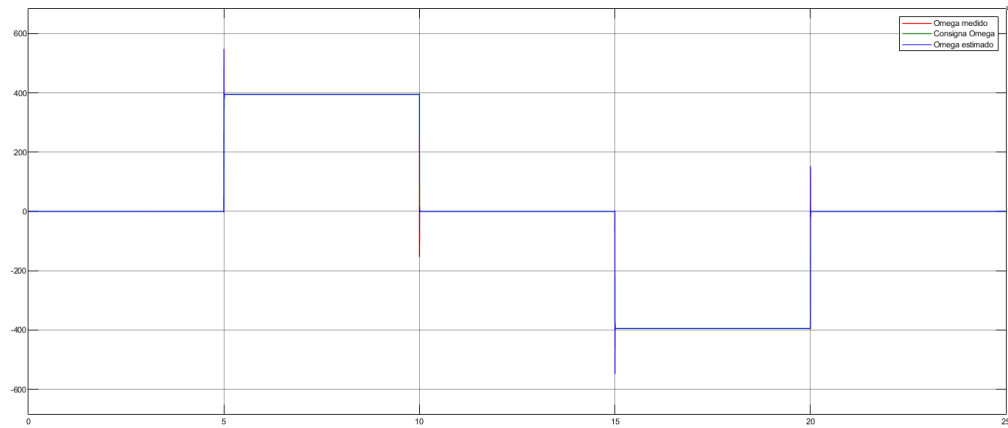


Figura 38: Comportamiento del perfil de velocidad angular ante perturbación escalón

tensión nominal por cada fase es $V_{sfnom} = \frac{V_{slnom}}{\sqrt{3}}$ ya que la conexión es en estrella.

$$V_{sfnom} = \frac{V_{slnom}}{\sqrt{3}} = \frac{24V_{CArms}}{\sqrt{3}} = 13,8564V_{CArms}V_{CA} = 19,5989V_{pico}$$

La temperatura máxima es $62,95^{\circ}C$, se mantiene dentro de los límites de carga.

Se verifica que si se usa el perfil de velocidad planteado anteriormente no se cumplen las especificaciones de operación, especialmente en cuanto a corrientes y tensiones estáticas que superan ampliamente las

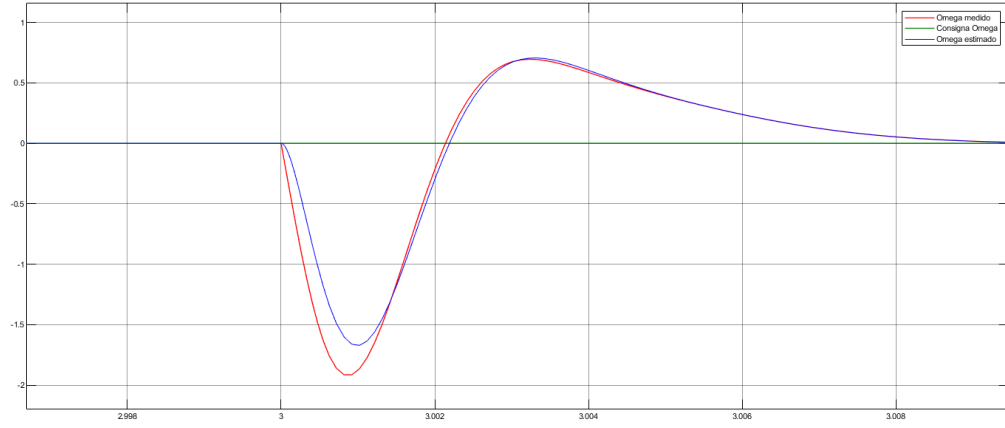


Figura 39: Velocidad angular a $t = 3s$ ante perturbación escalón

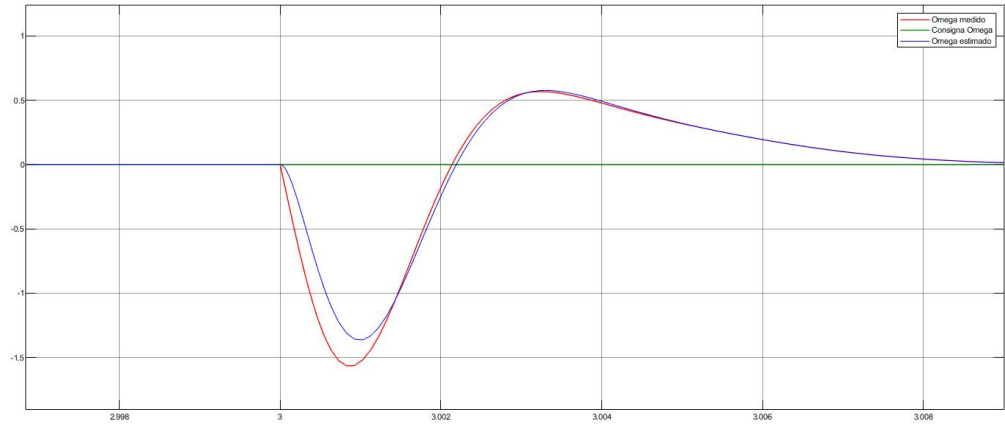


Figura 40: Velocidad angular con variación superior de parámetros de carga

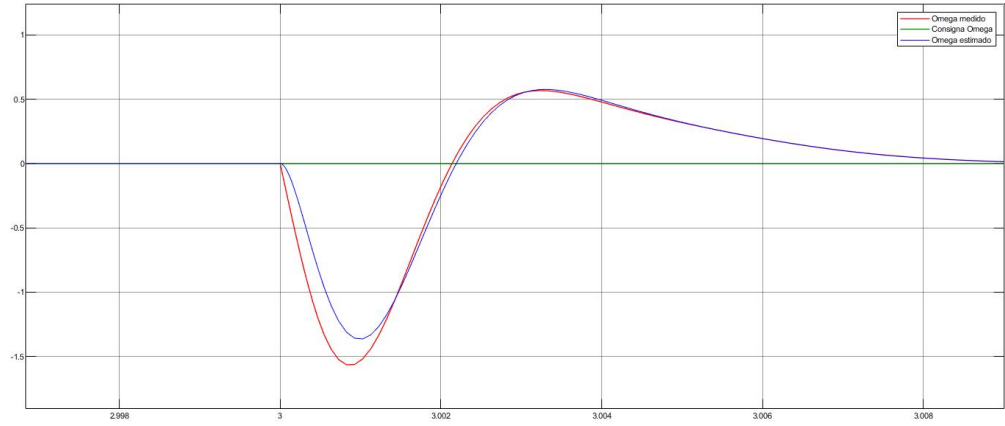


Figura 41: Velocidad angular con variación inferior de parámetros de carga

especificaciones de operación. Esto se debe a que la consigna de velocidad es muy exigente. Lo que se propone para solucionar esto es "suavizar" los vértices del perfil de posición, esto se genera al hacer la consigna de velocidad trapezoidal en lugar de cuadrada. Para este caso se propone que el tiempo de las rampas de subida y de bajada sean de $t_{rampa} = 0,3s$. Al hacer esto si se mantiene la consigna de velocidad se modificará la posición final y entonces el brazo del robot no se comportará como se espera. Para solucionar esto se parte de que las integrales de las velocidades de consigna cuadrada y modificada deben ser iguales, es decir, se debe llegar a la posición $2 \cdot \pi \cdot r$ para el eje). La integral de velocidad cuadrada se divide en 2 áreas de $5s$ de base y $\frac{2 \cdot \pi}{5}$ de altura. Para calcular la integral de la velocidad trapezoidal, se divide cada área en 3: rampa

Parámetro	Límite	Carga superior	Nominal	Carga inferior
$\omega_m(rad/s)$	691,15	548,4	548,4	548,4
$T_m(Nm)$	0,093	4,478	3,657	2,837
$i_{abc}(A)$		64,11	52,36	40,61
$V_{abc}(V)$		2281	1861	1441
$T_s(^{\circ}C)$	115	62,95	56,11	50,85

Cuadro 3: Valores límites y máximos de parámetros con variación de parámetros de carga para perfil trapecoidal de posición sin corrección

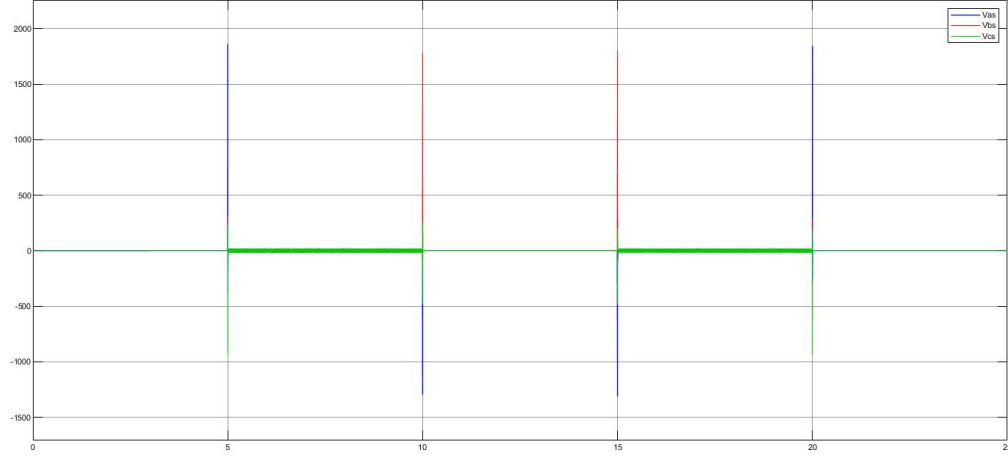


Figura 42: V_{abc} sin corrección

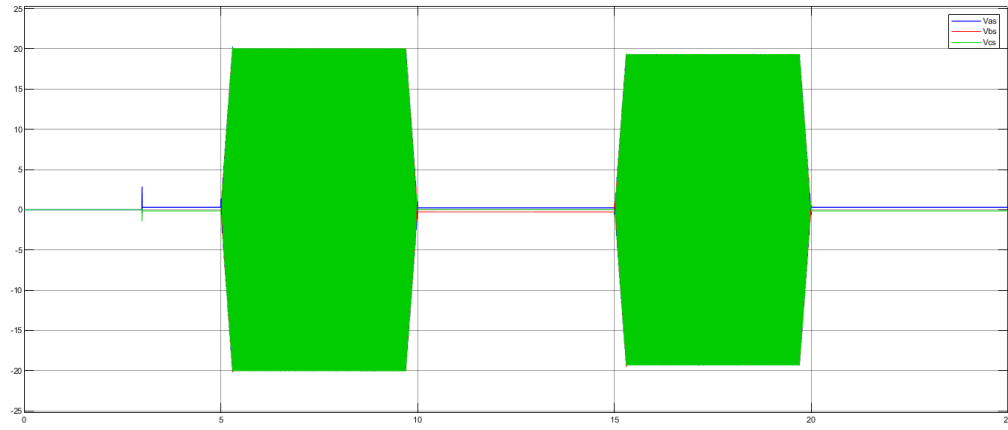


Figura 43: V_{abc} con corrección

de subida (de base t_{rampa}), rectángulo (de base t_B) y rampa de bajada (de base t_{rampa}).

- Integral de velocidad cuadrada: $5s \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5} \frac{rad}{s} \cdot r$
- Integral de velocidad trapecoidal: $2 \cdot \left(\frac{0,3s \cdot \omega_{corregido}}{2} \right) + t_B \cdot \omega_{corregido}$

$$2 \cdot t_{rampa} + t_B = 5s$$

$$t_B = 4,4s$$

$$2 \cdot \pi \cdot r = (0,3 + t_B) \cdot \omega_{corregido}$$

$$\omega_{corregido} = 420,1724 \frac{rad}{s}$$

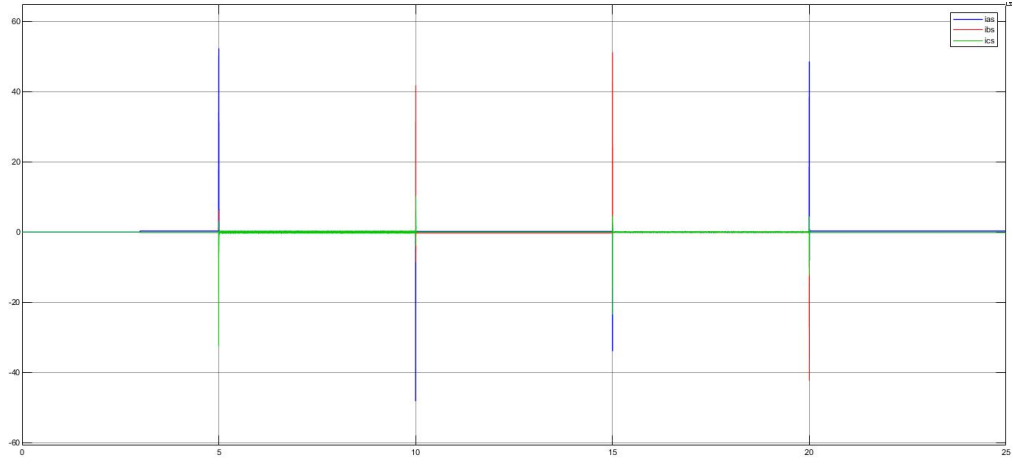


Figura 44: i_{abc} sin corrección

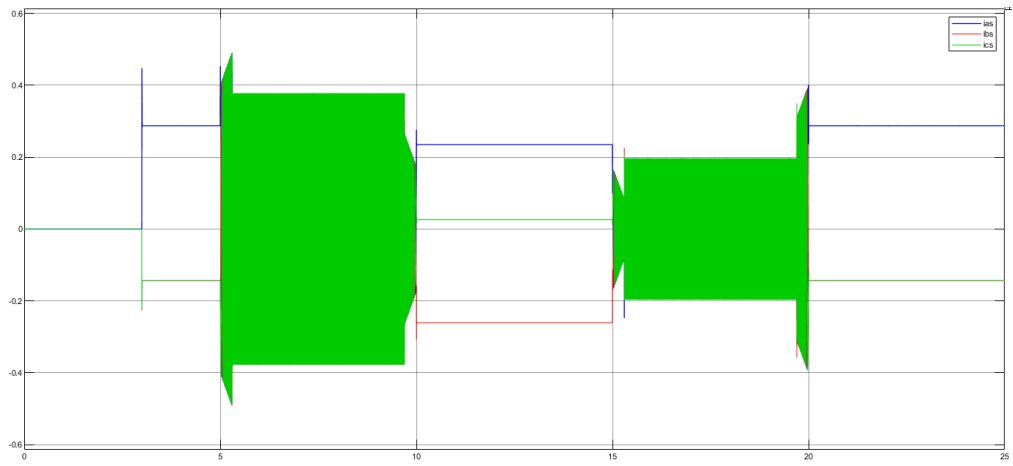


Figura 45: i_{abc} con corrección

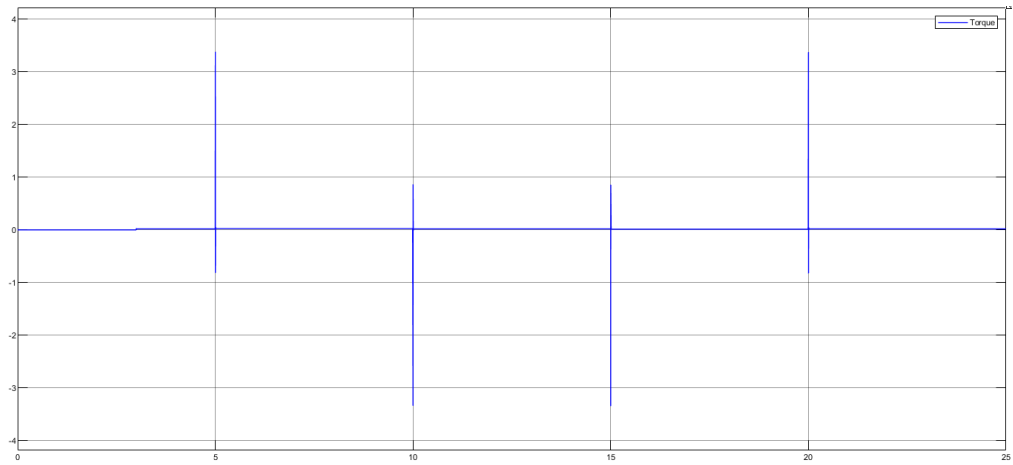


Figura 46: T_m sin corrección

La velocidad a la que alcanzará el eje al seguir la consigna especificada anteriormente será de $420,1724 \frac{rad}{s}$, la cual está dentro de los valores nominales de velocidad ya que la velocidad nominal es:

$$\omega_{m_{nom}} = r \cdot \omega_{l_{nom}} = 691,15 \frac{rad}{s}$$

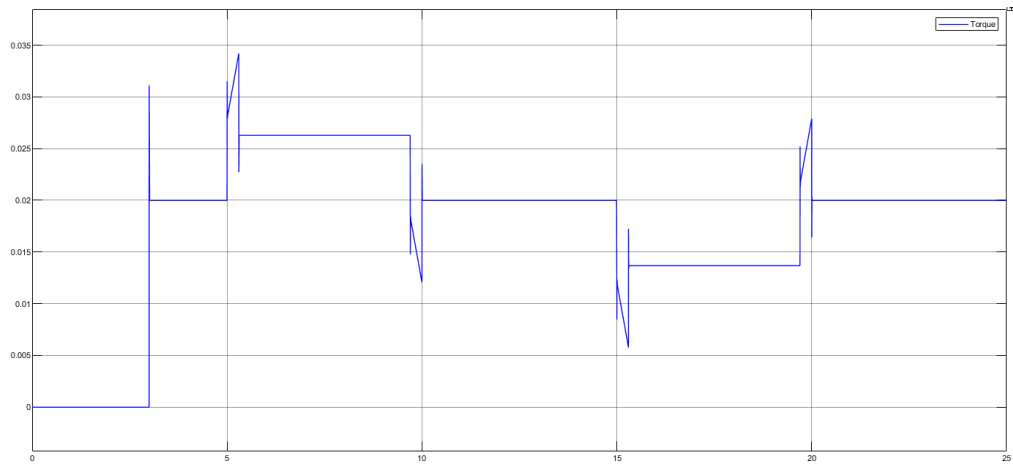


Figura 47: T_m con corrección

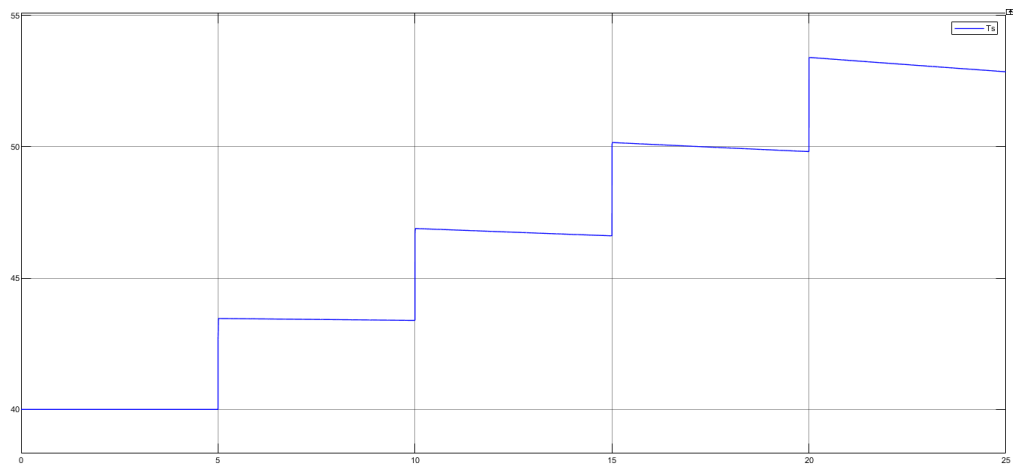


Figura 48: T_s sin corrección

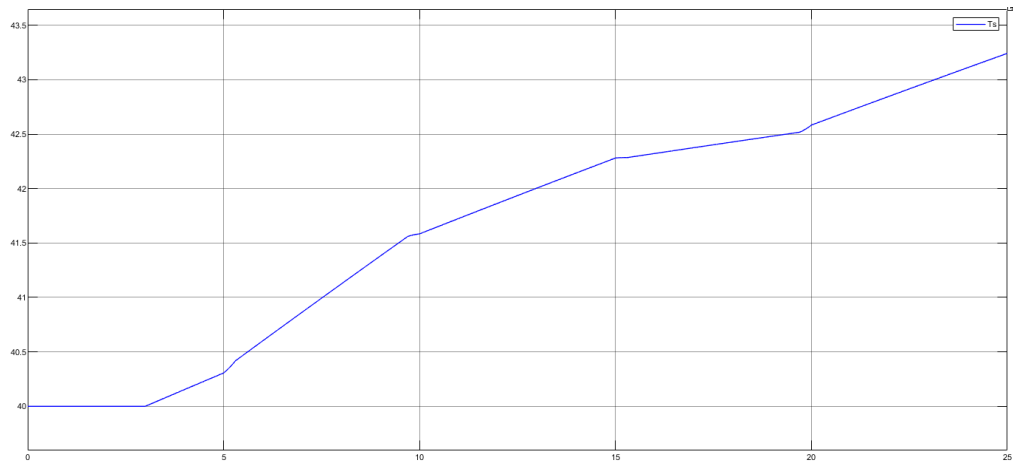


Figura 49: T_s con corrección

2.5.2. Desempeño del Observador

Al aplicar una perturbación de carga de tipo escalón se observa que el valor tanto de la posición como de la velocidad tienen un error de estado estacionario pero el error entre la velocidad angular del sistema y del observador es una diferencia muy pequeña, esto se debe en parte a que la incidencia del torque al que es

sometido el sistema es pequeña al estar influida por la caja reductora.

Esto se debe a que el estimador no tiene rechazo a perturbaciones porque no se realimenta la perturbación. Una manera de solucionar esto es realimentando la perturbación al modelo de la planta del observador, pero esta es una solución muy costosa. Otra manera para solucionarlo sin necesidad de utilizar un sensor es agregando un integrador en el modelo de la planta del observador. De esta forma, se toma el valor del error de salida, lo magnifica con una ganancia K_{io} y lo integra.

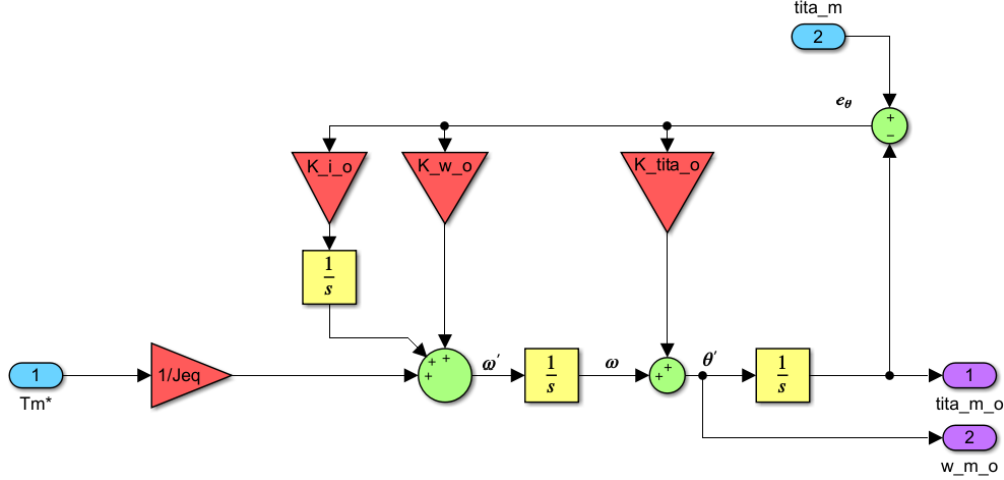


Figura 50: Observador con integrador

Al agregar un integrador se expande el orden sistema, agregando así un nuevo polo. Se define una nueva variable:

$$z(t) = K_i \cdot \int e_\theta \cdot dt$$

Por lo tanto, haciendo uso de la ecuación 44 el sistema del estimador será ahora:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \tilde{\omega}_m + K_{\theta o} \cdot e_\theta(t) \\ \dot{\tilde{\omega}}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot T_m^{*'}(t) + K_{\omega o} \cdot e_\theta(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) = K_{io} \cdot e_\theta(t) \end{cases}$$

Ordenando, el sistema matricialmente:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot T_m^{*'} + \begin{bmatrix} K_{\theta o} \\ K_{\omega o} \\ K_{io} \end{bmatrix} \cdot e_\theta$$

Para obtener los valores de las ganancias se busca el determinante de:

$$A' = A - K_e \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{\theta o} \\ K_{\omega o} \\ K_{io} \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\det(s \cdot I - A') = \begin{vmatrix} s + K_{\theta o} & -1 & 0 \\ K_{\omega o} & s & -1 \\ K_{io} & 0 & s \end{vmatrix}$$

Se busca que los polos del observador sean iguales y reales. Se desea ubicarlos en $-3200 \frac{rad}{s}$, por lo tanto el polinomio deseado es:

$$p_{obs1,2,3}(s) = (s + 3200)^3 = s^3 + 3 \cdot 3200s^2 + 3 \cdot 3200^2s + 3200^3$$

$$\begin{cases} K_{\theta o} = 9600 \\ K_{\omega o} = 3,072 \cdot 10^7 \\ K_{io} = 3,2768 \cdot 10^{10} \end{cases}$$

2.5.3. Comportamiento térmico del motor

Se evaluó el comportamiento térmico del motor sometido a una secuencia repetitiva de trabajo. Se consideró la misma consigna que anteriormente, el perfil trapezoidal de velocidad corregido. El tiempo de operación definido fue de 1200 segundos (20 minutos). Se aplicó el escalón de carga como en el caso anterior.

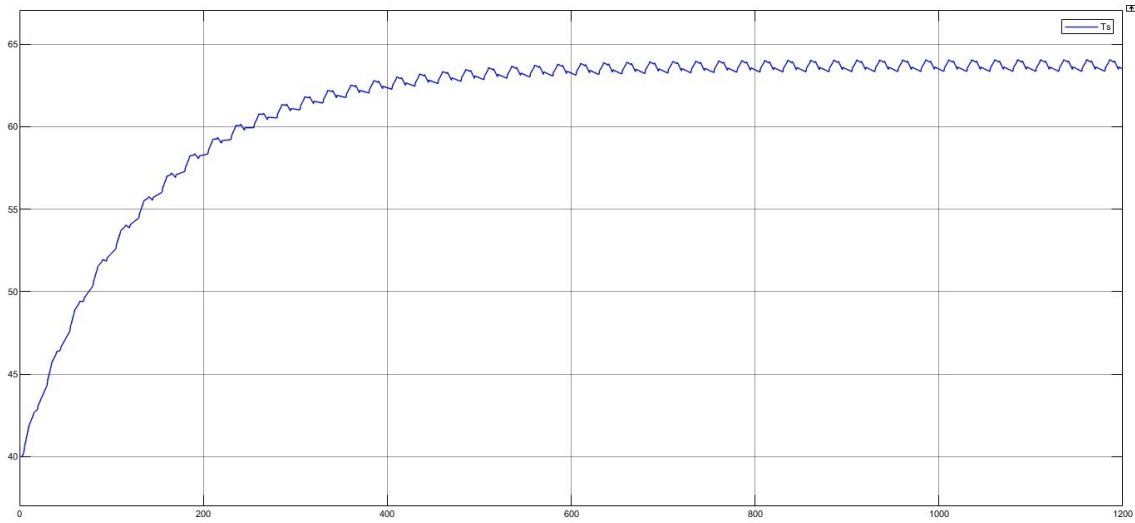


Figura 51: Temperatura alcanzada con escalón de carga de 6,28 N.m

Se puede apreciar que durante los primeros ciclos la temperatura crece abruptamente hasta estabilizarse en un valor asintótico. Se cumplen las especificaciones de operación y la temperatura del motor se verifica, por lo tanto el modelo funciona correctamente. Posteriormente se realizó un análisis del comportamiento térmico que, tal como se esperaba, alcanza temperaturas menores que con carga y se mantiene dentro de los límites establecidos

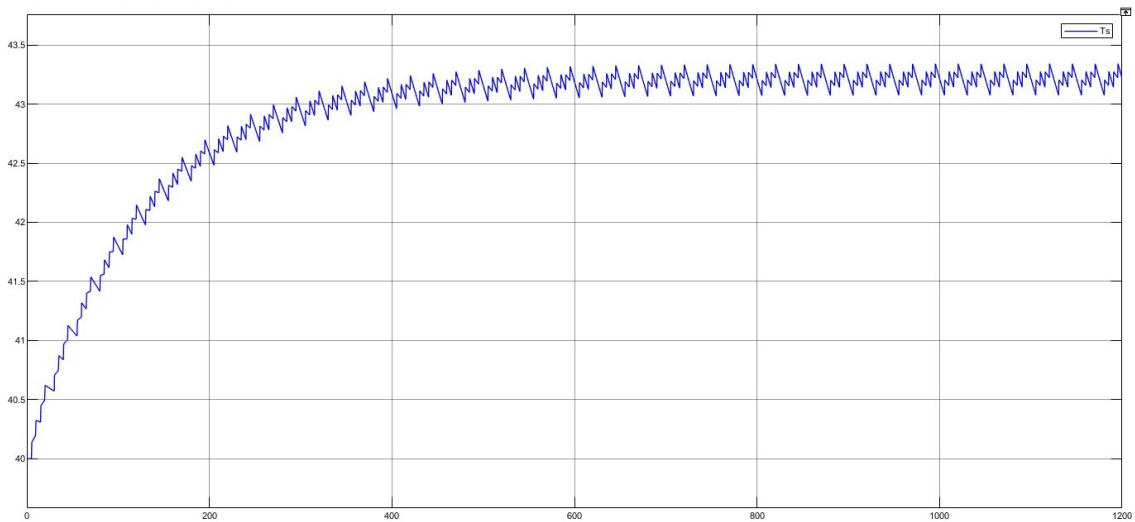


Figura 52: Temperatura alcanzada sin escalón de carga

2.5.4. Comportamiento de Sensores

Ahora se realizará una comparación del comportamiento del sistema cuando se tienen en cuenta sensores no ideales, es decir tienen ancho de banda finito y no se comportan como ganancias unitarias sino que filtran las señales de alta frecuencia.

La representación de estos sensores será dada con una función de transferencia con los siguientes parámetros:

- Sensores de corriente $i_{as}(t)$, $i_{bs}(t)$, $i_{cs}(t)$: modelo LP (filtro pasa bajos) en SS (espacio de estados) de 2° orden, $\omega_n = 6000 \frac{rad}{s}$ y $\zeta = 1$.
- Sensor de posición angular $\theta_m(t)$: modelo LP en SS de 2° orden, $\omega_n = 2000 \frac{rad}{s}$ y $\zeta = 1$.
- Sensor de temperatura $T_s^\circ(t)$: modelo LP en SS de 1° orden, $\tau = 20s$

Las funciones de transferencia tienen la siguiente forma:

Función de Transferencia de 1° orden:

$$\frac{1}{\tau \cdot s + 1}$$

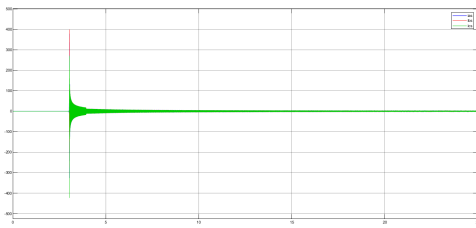
Función de Transferencia de 2° orden:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

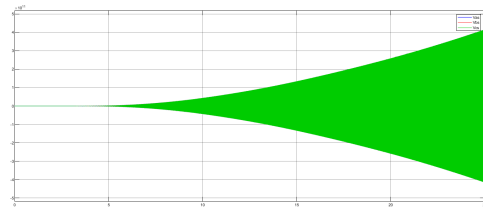
Al considerar los sensores no ideales se pudo observar que el desempeño del sistema no es satisfactorio ya que filtra muchas señales de alta frecuencia y eso da lugar a que haya más error en las realimentaciones, a su vez al no tener valores precisos de posición el modelo de la planta del observador tampoco funciona correctamente y esto afecta al comportamiento del Control PID. Al notar una degradación muy importante en los valores sensados se propone corregir los mismos modificando su ancho de banda. El uso de sensores no ideales genera un retraso en las señales, por lo que hay un desfase entre los valores reales y los medidos por el sistema. Se busca que los polos de estas funciones de transferencias sean de valor absoluto más grande y negativos para poder obtener una respuesta más rápida.

Se proponen los siguientes valores:

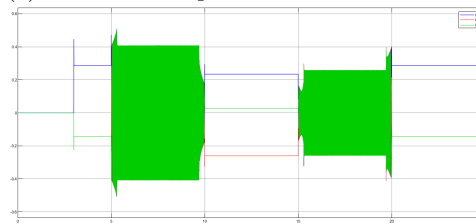
- Sensores de corriente $i_{as}(t)$, $i_{bs}(t)$, $i_{cs}(t)$: $\omega_n = 9000 \frac{rad}{s}$ y $\zeta = 1$.
- Sensor de posición angular $\theta_m(t)$: $\omega_n = 9000 \frac{rad}{s}$ y $\zeta = 1$.
- Sensor de temperatura $T_s^\circ(t)$: $\tau = 0,01s$.



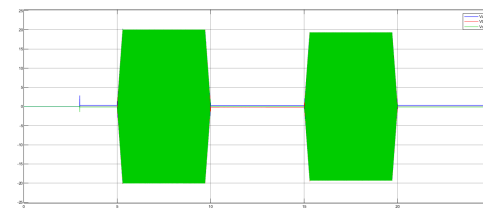
(a) Corrientes abc para sensores con $\omega_n = 6000$



(b) Tensiones abc para sensores con $\omega_n = 6000$



(c) Corrientes abc para sensores con $\omega_n = 9000$



(d) Tensiones abc para sensores con $\omega_n = 9000$

Figura 53: Valores de corrientes y tensiones según el ancho de banda de los sensores

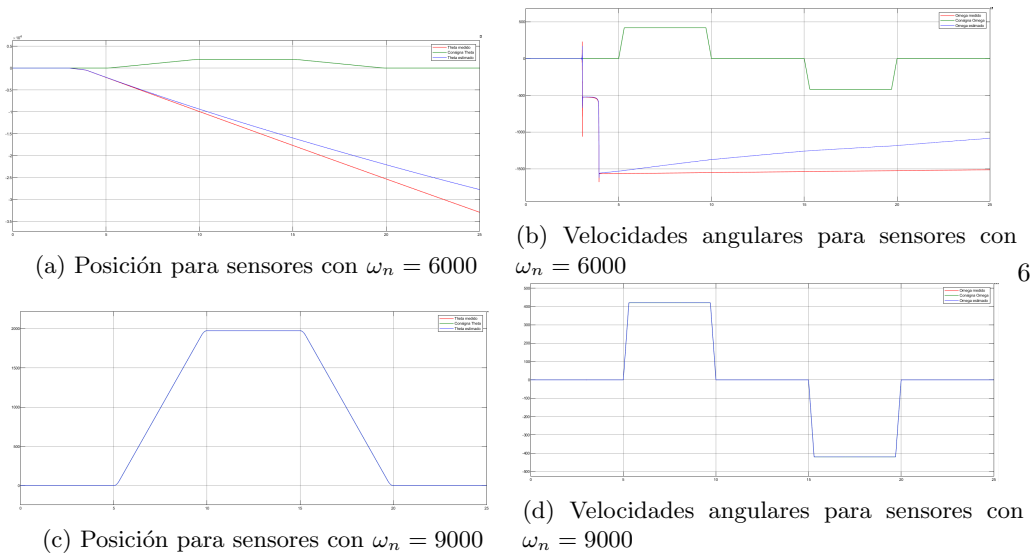


Figura 54: Valores de θ y ω según el ancho de banda de los sensores

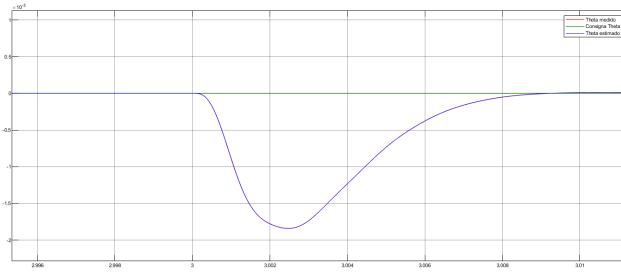


Figura 55: Posición del brazo para sensores con ancho de banda modificado

Se puede observar, (figura 55) también que incluso ante perturbaciones de carga el motor se aleja poco de la consigna de posición y prácticamente no hay diferencias entre el θ_m estimado y el medido.

Finalmente se observa la evolución de la temperatura del motor respecto al tiempo con el nuevo valor de τ y se concluye que el sensor actúa más rápidamente y de manera bastante aproximada a los valores reales.

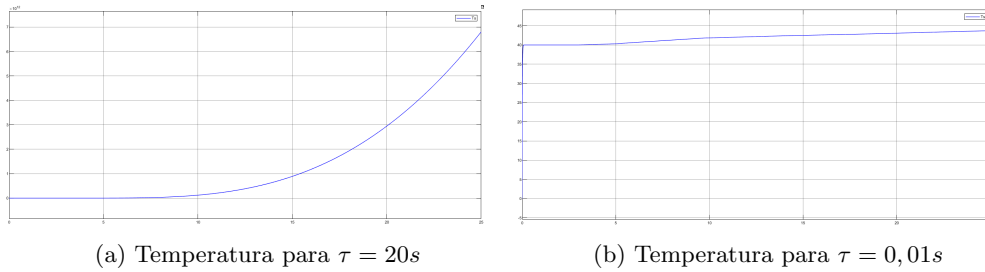


Figura 56: Variaciones de temperatura según el ancho de banda de los sensores

3. Conclusiones

Mediante este trabajo se logró el control de una articulación de un brazo robótico de manera satisfactoria. El diseño del mismo es robusto y cumple con las especificaciones de operación y sigue correctamente la consigna de posición dada. Cabe destacar que para esto se modificó la consigna para obtener una aproximación más suave.

Se vió también la importancia de tener un estimador, ya que se pudo reemplazar un sensor de velocidad por

el valor de velocidad angular estimado. Se agregó un integrador en la planta del estimador para poder evitar el error de estado estacionario generado por una perturbación escalón. El control PID funciona correctamente, se dieron consignas de velocidad para evitar el posible error generado al usar un derivador en el control.

El desarrollo de este trabajo integrador sirvió tanto para consolidar los conceptos aprendidos durante el cursado de la materia como para comprender de manera integral algunos métodos de control y su implementación en la práctica. También se comprendió que muchas veces el modelo teórico no puede ser llevado a la práctica o que su éxito depende de otras variables prácticas o económicas, por lo que se deben llevar a cabo otras implementaciones.

Referencias

- [1] Julian Gabriel. *Guía de trabajo para el Proyecto Global Integrador*. Universidad Nacional de Cuyo, 2020.
- [2] Gabriel Julian. *Material de clases*. Universidad Nacional de Cuyo, 2020.
- [3] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. 5.^a ed. Prentice Hal, 2010. ISBN: 978-0136156734.