Universidad de Sonora
Departamento de Física

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Física Computacional I

Reporte de Actividades 10, 11 y 12

Alumno: José Agustín Parada Peralta
Expediente: 219209388
Horario de clase: lunes a viernes. 10:00 - 11:00

Prof. Carlos Lizárraga Celaya

2 de mayo del 2021

Índice

1. Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) constituyen un área de las matemáticas que resulta fundamental en la comprensión y concepción de las ciencias modernas. Se pueden encontrar prácticamente en cualquier tópico de la física, partiendo de la relatividad de Einstein, siguiendo por la mecánica, la termodinámica y la física cuántica.

Es por ello, que es sumamente importante tener sólidas bases de estudio de las EDP, su clasificación, resolución numérica y algunos ejemplos importantes en la física. El presente busca ser un estudio introductorio acerca de la clasificación de las EDP, sobre todo las que se pueden distinguir de una gran familia de estas, al igual como la introducción a los métodos de resolución, específicamente numérica, y la presentación de algunas EDP de ejemplo que son ampliamente utilizadas en la física.
El estudio profundo de la ecuaciones diferenciales parciales queda fuera del rango de este trabajo. No obstante, se revisarán (como se mencionó, de forma introductoria) ciertos temas propuestos con cierto nivel de detalle.

2. Ecuaciones Diferenciales Paciales

Recordemos que una *Ecuación Diferencial* es, por definición, una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes respecto de una o más variables independientes. Este tipo de ecuaciones se puede distinguir o clasificar de varios modos distintos: por tipo, orden, linealidad, etcétera.

Enfocaremos nuestro interés en las *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Estas involucran a las derivadas parciales de una o más variables dependientes de *dos o más* variables independientes. A diferencia de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (*EDP*), las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias contienen una sola variable independiente.

Ejemplos de EDP pueden ser los siguientes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = xy; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \nabla^2 u = 0$$

(Donde ∇^2 es el operador laplaciano).

2.1. Clasificación de EDP por tipo: elíptico; hiperbólico; parabólico

Dentro de las EDP de segundo orden lineales de dos variables independientes, podemos encontrar ciertas ecuaciones cuyo estudio se ha desarrollado ampliamente desde el siglo 20: ecuaciones diferencales parciales con coeficientes constantes.

La forma general de las EDP con coeficientes constantes es:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + lu = f(x,y)\ ;\ a \neq 0 \tag{2.1}$$

Los nombres de su clasificación provienen de su similitud con la forma de las cónicas:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.2}$$

Las cónicas descritas por (2.2), se pueden diferenciar por un determinante (dado por un arreglo de las constantes que aparecen en esa ecuación) en *parábolas, elipses e hipérbolas.*
De manera similar, la ecuación (2.1) se puede clasificar en distintos tipos dependiendo del valor de las constantes involucradas. El determinante, en este caso se define como:

$$\Delta = b^2 - ac \tag{2.3}$$

Los distintos casos se corresponden como:

(a) $\Delta > 0$, se trata de una ecuación *hiperbólica.*

(b) $\Delta < 0$, se trata de una ecuación *elíptica.*

(c) $\Delta = 0$, se trata de una ecuación *parabólica.*

Para facilitar la descripción de la ecuación (2.1) de forma posterior, realizamos los cambios de ejes coordenados como sigue:

$$\begin{cases} s = \alpha x + \beta y \\ t = \gamma x + \delta y \end{cases} ; \; \frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.4}$$

Donde $\alpha, \beta, \gamma.\delta \in \mathbb{R}$.

Haciendo esto, obtenemos la nueva ecuación transformada:

$$a'\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2b'\frac{\partial^2 u}{\partial s\, \partial t} + c'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d'\frac{\partial u}{\partial s} + e'\frac{\partial u}{\partial t} + l'u(s,t) = g(s,t) \tag{2.5}$$

Donde los coeficientes a', b', c', d', e', l' están en términos de los coeficientes de la ecuación original (2.1) y de las constantes expuestas en (2.4).

Con esta nueva transformación, se puede demostrar que el determinante toma la forma:

$$\Delta' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = \Delta \left(\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right)^2$$

Se puede ver que el signo de Δ' ($sgn(\Delta')$) se queda igual que el signo de Δ, pues simplemente se multiplica por una cantidad positiva.
Entonces, la clasificación de las EDP (hiperbólico, elíptico, parabólico) se mantiene invariante respecto de las transformaciones del tipo (2.4).

2.1.1. EDP Hiperbólicas

Una EDP de la forma (2.1) se considera de tipo hiperbólica si su determinante (2.3) es positivo ($b^2 - ac > 0$).

En este caso, para facilitar la descripción, se elige una transformación de ejes coordenados dada por (2.4) tal que $a' = c' = 0$, $b' \neq 0$. Esto provoca que la ecuación se reduzca a (simplificando):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s\, \partial t} = \overline{F} \tag{2.6}$$

Donde $\overline{F}$ es un término que depende a lo más de las primeras derivadas parciales de u.

Representan, generalmente, a problemas que tienen que ver con fenómenos oscilatorios, vibraciones de cuerdas, membranas y radiaciones electromagnéticas.

2.1.2. EDP Elípticas

Una EDP de la forma (2.1) se considera de tipo elíptico si su determinante (2.3) es negativo ($b^2 - ac < 0$).

En este caso, para facilitar la descripción, se elige una transformación de ejes coordenados dada por (2.4) tal que $b' = 0$, luego, se obtiene por consecuencia que $a' = c'$. Esto provoca que la ecuación se reduzca a (simplificando):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \overline{F} \tag{2.7}$$

Donde $\overline{F}$ es un término que depende a lo más de las primeras derivadas parciales de u.

Representan, generalmente, problemas estáticos en el tiempo (tiempo - independientes).

2.1.3. EDP parabólicas

Una EDP de la forma (2.1) se considera de tipo parabólico si su determinante (2.3) es igual a 0 ($b^2 - ac = 0$).

En este caso, para facilitar la descripción, se elige una transformación de ejes coordenados dada por (2.4) tal que $a' = b' = 0$. Esto, gracias a las características de la ecuación con la que se trata y a la naturaleza de la obtención de la transformación (2.4). Esto provoca que la ecuación se reduzca a (simplificando):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \overline{F} \tag{2.8}$$

Donde $\overline{F}$ es un término que depende a lo más de las primeras derivadas parciales de u.

Aparecen con frecuencia en problemas de estudio de procesos de conducción y difusión térmicas.

3. Condiciones a la frontera

Las condiciones a la frontera, son ciertas circunstancias a las que se acata el borde (frontera) de nuestro objeto de estudio.
Junto con las condiciones iniciales, estas nos brindan información con relación sobre la existencia y unicidad de soluciones de ciertas EDP. De esta forma, existen distintos tipos de condiciones a la forntera, de los cuales, aquí se presentarán 3 de ellos.

3.1. Condición a la frontera tipo Dirichlet

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Cuya frontera denotaremos como $\partial\Omega$.

3.1.1. Tiempo - independiente

Cuando se tiene una EDP con una variable dependiente u que no depende de una variable temporal, la condición a la frontera de Dirichlet viene dada por:

$$u(\vec{x}) = g(\vec{x}) \ : \ \vec{x} \in \partial\Omega \tag{3.1}$$

Donde $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ es una función conocida.

3.1.2. Tiempo - dependiente

Complementariamente, cuando se tiene una EDP donde u es tiempo - dependiente, la condición a la frontera de Dirichlet está dada por:

$$u(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) \ : \ (\vec{x}, t) \in \partial\Omega \times I \tag{3.2}$$

Donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de números reales y $g : \partial\Omega \times I \to \mathbb{R}$ es una función conocida.

3.2. Condición a la frontera de tipo Neumann

Al igual que en las condiciones de frontera de tipo Dirichlet, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$. Las condiciones a la frontera de tipo Neumann se pueden encontrar en las formas:

3.2.1. Tiempo - independiente

Cuando tenemos una EDP donde u es estática en el tiempo (no posee una variable temporal), la condición de frontera de Neumann viene dada por una derivada normal a la frontera $\partial\Omega$:

$$\nabla u(\vec{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\vec{x}) = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\vec{x}) = h(\vec{x}); \ \vec{x} \in \partial\Omega \tag{3.3}$$

Donde el vector $\boldsymbol{n}$ representa un vector normal a la frontera de Ω.

3.2.2. Tiempo - dependiente

Similarmente para el caso tiempo - independiente, si u posee una variable temporal, su condición de Neumann en la frontera $\partial\Omega$ es:

$$\nabla u(\vec{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\vec{x}) = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\vec{x}, t) = h(\vec{x}, t); \ (\vec{x}, t) \in \partial\Omega \times I \tag{3.4}$$

Donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de números reales.

3.3. Condición a la frontera de tipo Robin (mixta)

Esta se representa como una combinación lineal de condiciones de Dirichlet y de Neumann con constantes reales.

4. Método de solución de diferencias finitas

Este método de solución de ecuaciones diferenciales parciales surge de una expansión por polinomio de Taylor de la función escalar u.

Para simplificar, trabajaremos con la expansión del polinomio para la función u unidimensional tiempo - dependiente. Es decir, una función de dos variables.

Sea $f(x)$ una fucnión de una sola variable. Sea $a \in \mathbb{R}$. El polinomio de Taylor para $f(x)$ centrada en a es:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Si definimos $h = x - a$, entonces:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots$$

AHora, consideremos el polinomio de Taylor de $f(x)$ en na forma alternativa. El polinomio de Taylor de f centrado en x para $x + h$ viene dado por:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}((x+h)-x) + \frac{f''(x)}{2!}((x+h)-x)^2 + \dots$$

Lo que se resume en:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots \tag{4.1}$$

Si despreciamos los términos que incluyen a h^2 y mayores, considerando que h es pequeña, obtenemos:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

Despejamos la derivada de f:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.2}$$

Lo que se puede llamar una aproximación hacia delante de la derivada de f. Ahora bien, si hacemos un proceso similar para $f(x-h)$, obtenemos:

$$f(x-h) = f(x) - \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots \tag{4.3}$$

De donde, despreciando los términos con h^2 o mayor potencia y despejando $f'(x)$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{4.4}$$

Asimsimo, esta la podemos llamar una aproximación hacia atrás de la derivada de f.
Si restamos (4.4) de (4.2), obtenemos la aproximación de la derivada de f esta vez centrada:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{4.5}$$

Luego, nos interesa aproximar una derivada de segundo orden. Si despreciamos los términos de h^2 y mayores de ambas ecuaciones (4.1) y (4.3) y las sumamos, tenemos:

$$f(x+h) + f(x-h) \approx 2f(x) + f''(x)h^2$$

De donde:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{4.6}$$

Una vez hecho lo anterior. Podemos proseguir a aplicarlo a la función $u(x,t)$ para tiempo y espacio por separado. Sea $h = \Delta x$ y $k = \Delta y$, entonces definimos $u(nh, mk) = u_n^m$

4.1. Diferencias finitas de primer y segundo orden en una dimensión espacial

Si aplicamos la ecuación (4.5) para la coordenada espacial de u:

$$u_x(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2h} \tag{4.7}$$

Luego, aplicamos la ecuación (4.6):

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \tag{4.8}$$

Aplicando la notación definida anteriormente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n^m \approx \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2} \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_n^m \approx \frac{u_{n+1}^m - u_{n-1}^m}{2h} \tag{4.10}$$

4.2. Diferencias finitas de primer y segundo orden en el tiempo

Si aplicamos la ecuación (4.5) para la coordenada temporal de u:

$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+k) - u(x,t-k)}{2k} \tag{4.11}$$

Luego, aplicamos la ecuación (4.6):

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx} \approx \frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} \tag{4.12}$$

Aplicando la notación definida anteriormente:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^m \approx \frac{u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}}{k^2} \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_n^m \approx \frac{u_n^{m+1} - u_n^{m-1}}{2k} \tag{4.14}$$

5. Ecuación de Calor: algoritmo de solución

La ecuación del calor unidimensional (EDP de tipo parabólico) viene dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

Aplicamos la aproximación de las derivadas parciales para obtener:

$$u_n^{m+1} \approx u_n^m + C(u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m) \tag{5.2}$$

Donde $C = \dfrac{\gamma k}{h^2}$, γ es la constante de difusión térmica y $h = \Delta x$, $k = \Delta t$.

Este método de solución para la ecuación de calor (5.1) involucra un exténcil computacional de cuatro puntos que se ve como:

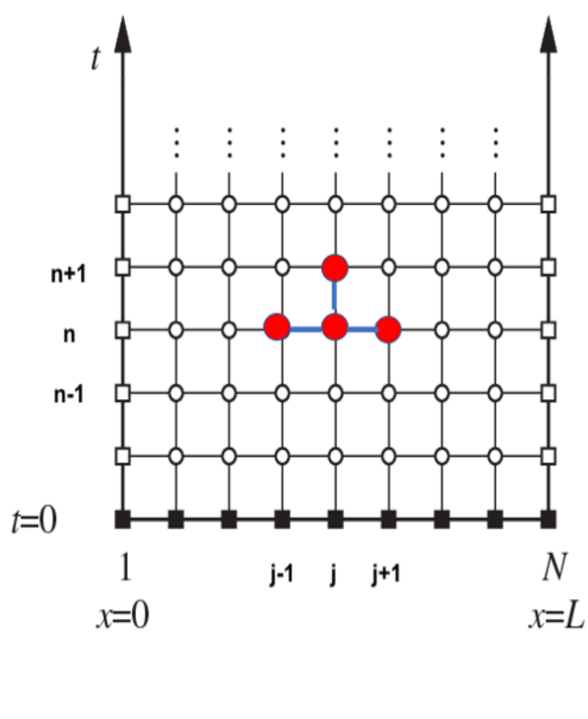

Figura 1: Sténcil computacional de 4 puntos.

6. Ecuación de Onda: algoritmo de solución

La ecuación de onda unidimensional (EDP de tipo hiperbólico) viene dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{6.1}$$

Aplicamos la aproximación de las derivadas parciales para obtener:

$$u_n^{m+1} \approx 2u_n^m - u_n^{m-1} + Q^2(u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m) + k^2 f_n^m \tag{6.2}$$

Donde $Q^2 = \dfrac{c^2k^2}{h^2}$; $f_n^m = f(nh.mk)$ representa una función de forzamiento; c es la velocidad de la onda y $h = \Delta x$, $k = \Delta t$.

Este método de solución para la ecuación de onda (6.1) involucra un sténcil computacional de cinco puntos que se ve como:

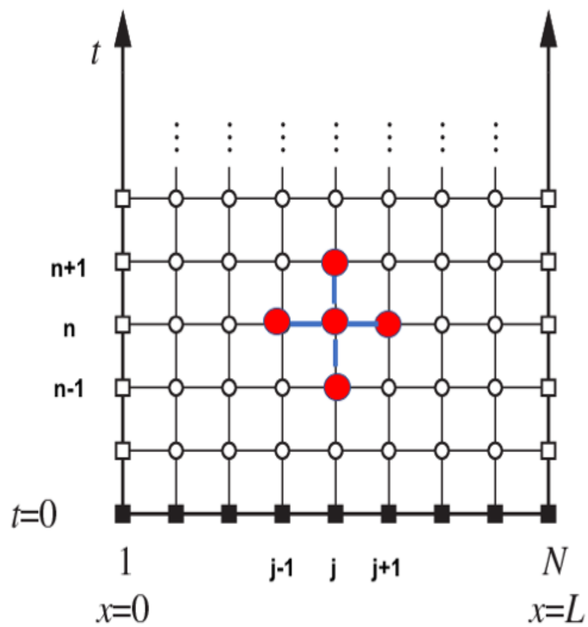

Figura 2: Sténcil computacional de 4 puntos.

Gracias a ello, no se puede aplicar la ecuación (6.2) con $m = 0$, pues se utiliza el punto u_n^{-1}, que no existe. Para ello, se utiliza una condición inicial a la que se le aplica diferencias finitas de primer orden centrada:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_n^0 \approx \frac{u_n^1 - u_n^{-1}}{2k} = 0 \tag{6.3}$$

Sustituyendo en (6.2) para $m = 0$, obtenemos:

$$u_n^1 \approx u_n^0 + \frac{Q^2}{2}(u_{n+1}^0 - 2u_n^0 + u_{n-1}^0) + \frac{k^2}{2} f_n^m \tag{6.4}$$

7. Ecuación de Poisson: algoritmo de solución

La ecuación de Poisson (EDP de tipo elíptico) tiene la forma:

$$-\nabla^2 u = f(x, y) \tag{7.1}$$

Si aplicamos las ecuaciones obtenidas de las segundas derivadas aproximadas por diferencias finitas, pero para una segunda coordenada espacial (tiempo - independiente), queda:

$$\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2} + \frac{u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}}{k^2} \approx -f_n^m$$

Si se tiene una malla de valores (x, y) espaciada de la misma forma tanto para x como para y, entonces $k = h = d$, de donde se concluye una expresión que involucra un sténcil computacional de 5 puntos. Considerando los demás valores de la malla, se puede concluir con un sistema de ecuaciones lineales de forma:

$$AU = F \tag{7.2}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} B & -I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -I & B & -I & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I & B \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

La matriz I (identidad) y B son matrices de tamaño $(M-2) \times (M-2)$, donde M es el número de puntos utilizados tanto en x como en y.

El vector F de la derecha de la ecuación en (7.2) está compuesto de los valores de la función $f(x, y)$ y las condiciones a la frontera que se tengan.

8. Conclusiones

Podemos resumir, en general, que de las grandes familias en las que se clasifican las ecuaciones diferenciales parciales, varias de las ecuaciones más comunes de la física se encuentran en esta clasificación (hiperbólico, elíptico, parabólico).

Estas mismas ecuaciones pueden poseer una solución analítica gracias al tipo al que pertenecen (mencionado con anterioridad). Sin embargo, también hemos conlcuido el uso del método numérico para resolución de EDP con condiciones que pueden ser tanto iniciales como a la frontera (de los vistos anteriormente, encontramos los tipos de Dirichlet, Neumann, Robin), el método de diferencias finitas. Este último, resultó ser tremendamente útil en la resolución numérica de las ecuaciones planteadas.

Igualmente, se utilizaron ciertas herramientas matriciales provenientes del álgebra lineal para ayudarnos en la resolución de la ecuación de Poisson (7.1), lo cual fue un poco engorroso, pero igualmente útil.

El método presentado de diferencias finitas es, también, realmente útil gracias a la poca dificultad que supone programar un código de resolución de EDP utilizándolo. Posteriorment, se puede hacer más y más complejo este código con el objetivo de hacerlo más completo, como lo fue el caso de las actividades llevadas a cabo.

Referencias bibliográficas

1. Zill, Dennis G. Culle, Michael R. Tradujo Hernán, Erika J. Cordero, Carlos R. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería Vol 1: Ecuaciones Diferenciales*. McGraw - Hill / Interamericana. Tercera Edición. México. 2008.

2. Marcela G, Claudia. *Ecuaciones diferenciales parciales*. Editorial de la Universidad de la Plata. Primera edición. Argentina. 2016.

3. López G, Gabriel. Martínez O, Hugo. *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Universidad Autónoma Metropolitana. Primera edición. México. 2013.

4. Alarcón A, Salomón. *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Universidad Técnica Federico Santa María. Chile. 2019.

5. Romero, Sixto. Moreno, Francisco J. Rodríguez, Isabel M. *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's)*. Universidad de Huelva. España. 2001.