Programación II: Taller 4

Programa de Estudios Superiores

Banco de Guatemala

Instrucciones

- Pueden resolver este taller usando **Julia** o **Python**
- Deben entregar las gráficas de los resultados en un **pdf** y los **códigos** utilizados
- La entrega se hará subiendo los archivos a la sub-carpeta **PS4** de cada grupo en el repositorio de GitHub del curso
- El limite de entrega es el **domingo** a la **media noche**

Problema de Ahorro Óptimo

Leo Messi ha decidido retirarse y jugar sus últimos años en su amada Argentina. Su residencia ha cambiado pero sus preferencias no: Leo deriva utilidad únicamente únicamente del consumo de mates (C_t) y para saber cuantos consumir, aplica la misma previsión perfecta que tan útil le es en el fútbol.

Específicamente, Leo sabe con exactitud su horizonte de vida en años, T, su ingreso, en mates, en cada periodo (Y_t). El stock de mates que Leo no consuma en un año (A_t) los presta al Banco Central Argentino a una tasa R. Si lo desea, Leo puede endeudarse con Banco Central Argentino hasta por ϕ mates, es decir, $A_t \geq -\phi$ (note que si $\phi \to \infty$, Leo no tiene restricciones de liquidez: Puede contraer toda la deuda que desee). Finalmente, Leo desearía dejar a su hijo Thiago una herencia de $A_T = \bar{A}$ mates.

Dadas unas secuencias de ingreso $\{Y_t\}_{t=0}^{T}$, y un valor para la tasa de interés bruta R y un stock de mates inicial A_{-1}, el problema de Leo Messi es:

$$
\begin{aligned}
\max_{\{C_t, A_t\}} \quad & \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\
s.t. \quad & Y_t + RA_{t-1} - C_t - A_t \geq 0 \\
& A_t \geq -\phi; \quad C_t \geq 0; \quad A_T = \bar{A}
\end{aligned}
$$

Donde σ es el coeficiente de aversión al riesgo de Leo y $\beta \in (0,1)$ es su factor de descuento intertemporal, el cual refleja el hecho de que Leo prefiere consumir un mate hoy que un mate mañana.

Asuma que $\beta = 0.98$, $\sigma = 1.5$, $T = 70$, $A_T = 0$ (Leo en el fondo no quiere dejar nada a Thiago) y $A_{-1} = 0$ (siendo el alma caritativa que es, donó toda su riqueza antes de comenzar su retiro).

1. Escriba un programa que encuentre la senda óptima de C_t y A_t de Leo Messi a lo largo de su vida, dadas unas sendas de ingreso $\{Y_t\}_{t=0}^{T}$, un valor para la tasa de interés bruta R y un valor de ϕ.

2. Asuma que $Y_t = \bar{Y} = 1$ para todo t y que $\phi \to \infty$. En una misma gráfica, muestre las sendas de C_t y A_t cuando

   (a) $R = \frac{1}{\beta}$

   (b) $R = \frac{1}{\beta} - 0.02$

   (c) $R = \frac{1}{\beta} + 0.02$

3. Asuma que Argentina ha declarado default (como siempre), por lo que Leo ya no cuenta con acceso a los mercados de deuda. Esto es, $\phi = 0$. Asuma de nuevo que $Y_t = \bar{Y} = 1$ y muestre, en una misma gráfica, las sendas de C_t y A_t cuando

   (a) $R = \frac{1}{\beta}$

   (b) $R = \frac{1}{\beta} - 0.02$

   (c) $R = \frac{1}{\beta} + 0.02$

4. Asuma ahora que Y_t es un proceso AR(1):

$$Y_t = \mu\,(1-\rho) + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t; \qquad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$$

   con $Y_1 = \mu = 1$, $\rho = 0.8$ y $\sigma_\varepsilon = 0.2$. Asuma además que $R = \frac{1}{\beta} - 0.02$.

   (a) En una misma gráfica, muestre las sendas de C_t y A_t para una realización de Y_t cuando $\phi \to \infty$

   (b) Repita el ejercicio anterior para la misma senda de ingreso simulada cuando $\phi = 0$

   (c) Repita los dos puntos anteriores para $N = 10.000$ realizaciones diferentes de Y_t. Calcule el valor de C_t promedio para cada t entre todas las realizaciones y grafiquelo.