Repaso de Teoría de la Probabilidad

May 8, 2020

Video 1

Estadística

"La estadística es la ciencia de aprender de la experiencia"
Efron – Hastie

Fijando conceptos

1. Experiencia - Experimento: acción que genera un resultado
2. Datos: Resultados que genera el experimento (experimentos)
3. Experimentos:
   - determísticos: MRU...
   - aleatorios: no podemos anticipar cual será el resultado del experimento.
4. En esta materia todos los experimentos son aleatorios.
5. En adelante, con *experimento* nos referimos a uno aleatorio.

¿Probabilidades?

"La teoría de la probabilidad proporciona un buen marco para la cuantificación y manipulación de la incertidumbre"

Bishop

Definición: Espacio Muestral $\mathcal{S}$

$\mathcal{S}$: conjunto con todos los posibles resultados del experimento.

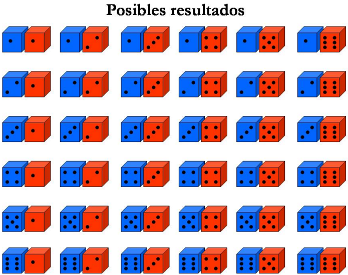
Notación - A conjunto, $\#$A denota su cardinal: cantidad de elementos que tiene A

Algunos ejemplos

- Experimento: lanzar un dado

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ , \mathcal{S} \text{ finito, } \#\mathcal{S}{=}6.$$

- Experimento: lanzamos un dado azul y otro rojo

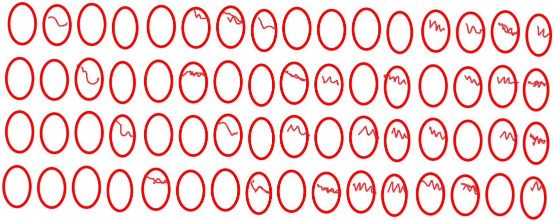


$\mathcal{S}$ finito, $\#\mathcal{S}{=}36$.

- Experimento: Examinar un lote con $n = 4$ Lamparas.
  Sana - Rota

- Experimento: Examinar un lote con $n = 4$ Lamparas. Sana - Rota

- Experimento: Examinar un lote con $n = 4$ Lamparas.
  Sana - Rota



- Experimento: Examinar un lote con $n = 4$ Lamparas.
  Sana - Rota

$$\begin{array}{lcll} \text{Sana} & \longleftrightarrow & 0 & \text{(fracaso)} \\ \text{Rota} & \longleftrightarrow & 1 & \text{(éxito)} \end{array}$$

$$\mathcal{S} = \{(0,0,0,0); (1,0,0,0); (0,1,0,0); \ldots\}$$

$$\mathcal{S} = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) : u_j \in \{0,1\}, j = 1 \ldots, 4\}$$

$$\mathcal{S} \text{ finito }, \quad \#\mathcal{S} = 2^4 = 16.$$

4 Repeticiones del experimento
2 Posibles resultados

Definición: Evento (suceso)

Dibujamos?

- Evento: conjunto formado por algunos de los resultados posibles del experimento.
- Evento: A incluído en el espacio muestral $\mathcal{S}$.

$$A \subset \mathcal{S}$$

- Notación: A,B, C
- Evento elemental: $A = \{a\}$.

Operaciones con conjuntos

- Unión: $A \cup B$ (está en A **Ó** está en B)
- Intersección: $A \cap B$ (está en A **Y** está en B)
- Complemento: A^c (**NO** está en A)
- Los eventos A y B se dicen disjuntos (incompatibles) si

$$A \cap B = \emptyset$$

Probabilidad: Motivación Frecuentista

$\mathbb{P}(A)$ *representa el porcentaje de veces que esperamos que* A *ocurra en* **infinitas** *repeticiones*

Ingredientes:

1. $\mathcal{S}$ espacio muestral: conjunto con los posibles resultados del experimento.

2. A, B, C: eventos a los cuales vamos a asignarles probabilidad.

3. $\mathbb{P}$: función de probabilidad.

Definición: Función de Probabilidad

1- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

2- $\mathbb{P}(\mathcal{S}) = 1.$

- Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \; = \; \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$ $^{(*)}$

3- $^{(*)}$ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ disjuntos dos a ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$),

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots$$

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \; .$$

Propiedades

- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Espacios numerables

1. $\mathcal{S} = \{s_i : i \geq 1\}$.
2. $p_i := \mathbb{P}\left(\{s_i\}\right)$
3. $p_i \geq 0$ y $\sum_i p_i = 1$.

   Dibujamos?

Espacios equiprobables - Espacios Muestrales finitos.

$$\mathcal{S} = \{a_1, \cdots, a_N\}$$

Todos los resultados tienen la misma chance de ocurrir:

$$\mathbb{P}(a_i) = c \text{ para } i = 1 \cdots, N \;, \; c?$$

$$1 = \mathbb{P}(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(a_i) = N\, c \;,$$

$$\to c = \frac{1}{N}.$$

Espacio equiprobable

- $\mathcal{S} = \{a_1, \cdots, a_N\}$, $\#\mathcal{S} = N$
- Equiprobabilidad: $\mathbb{P}(a_i) = \frac{1}{N}$, para todo $i = 1, \cdots, N$.
- Probabilidad de Eventos:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{a_i \in A} \mathbb{P}(a_i) = \sum_{a_i \in A} \frac{1}{N} = \frac{\#A}{N} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{total de casos}}\ .$$

Video 2

Ingredientes:

1. Experimento (aleatorio)
2. $\mathcal{S}$ espacio muestral: conjunto con los posibles resultados del experimento.
3. A, B, C: eventos a los cuales vamos a asignarles probabilidad.
4. $\mathbb{P}$: función de probabilidad.

Definición: Función de Probabilidad

1- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

2- $\mathbb{P}(\mathcal{S}) = 1.$

3- $A_1, A_2, A_3, \ldots$ disjuntos dos a ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$),

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)\ .$$

Propiedades:

- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Espacios numerables

1. $\mathcal{S} = \{s_i : i \geq 1\}$.
2. $p_i := \mathbb{P}\left(\{s_i\}\right)$
3. $p_i \geq 0$ y $\sum_i p_i = 1$.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{s_i \in A} p_i$$

Espacios equiprobables - Espacios Muestrales finitos.

- $\mathcal{S} = \{a_1, \cdots, a_N\}$, $\#\mathcal{S} = N$
- Equiprobabilidad: $\mathbb{P}(a_i) = \frac{1}{N}$, para todo $i = 1, \cdots, N$.
- Probabilidad de Eventos:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{a_i \in A} \mathbb{P}(a_i) = \sum_{a_i \in A} \frac{1}{N} = \frac{\#A}{N} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{total de casos}} .$$

Ojos y Pelos.

ojos/pelo	rubio	pelirrojo	marrón	oscuro	negro
claros	0.13	0.02	0.11	0.03	0.00
azules	0.06	0.01	0.04	0.02	0.00
castaños	0.06	0.02	0.17	0.07	0.01
oscuros	0.02	0.01	0.07	0.13	0.02

Table: Distribución de la población según color de ojos y pelo

Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que la persona elegida tenga

1. ojos castaños y pelo rubio.
2. ojos castaños.
3. pelo rubio.
4. ojos castaños o pelo rubio.
5. pelo marrón o pelo rubio.

Tabla para responder cuestionario

Distribución de la población según color de ojos y pelo

ojos/pelo	rubio	pelirrojo	marrón	oscuro	negro
claros	0.10	0.05	0.04	0.03	0.01
azules	0.06	0.01	0.04	0.02	0.03
castaños	0.06	0.02	0.16	0.07	0.05
oscuros	0.02	0.01	0.06	0.13	0.03

Se elige una persona al azar. Calcular la probabilidad de que:

1. tenga ojos azules y sea pelirroja.
2. tenga ojos azules.
3. sea pelirroja.
4. tenga ojos azules o sea pelirroja.
5. ojos oscuros u ojos claros

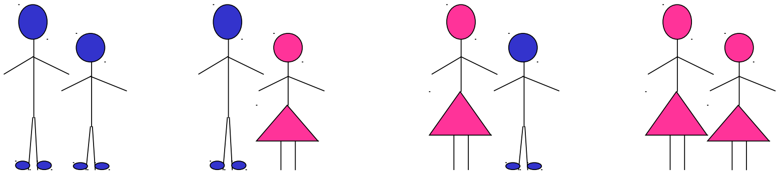
Videos 3 a 6

Probabilidad Condicional

Probabilidad Condicional: Ejemplo

- Huracán asocia gratis a familias con dos descendientes, donde al menos uno es varón.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una familia asociada gratis a Huracán tenga al menos una hija mujer?

Posibles parejas de hermanos



Probabilidad Condicional.

Dado un evento B con $\mathbb{P}(B) > 0$, queremos reasignarle probabilidad al evento A sabiendo ahora de la ocurrencia de B.
Dibujo

Definición: Probabilidad Condicional.

Dado un evento B con $\mathbb{P}(B) > 0$, definimos la probabilidad del evento A dado que B aconteció mediante la formula:

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Condicional o Interesección?

- Intersección: Hallar la probabilidad de A **Y** B
- Condicional: Hallar la probabilidad de A
    - Dado B
    - Sabiendo B
- Condicional: Hallar la probabilidad de que "un B " verifique A.
- Condicional: Hallar la probabilidad de que "un B " satisfaga A.

Ojos y Pelos.

ojos/pelo	rubio	pelirrojo	marrón	oscuro	negro
claros	0.13	0.02	0.11	0.03	0.00
azules	0.06	0.01	0.04	0.02	0.00
castaños	0.06	0.02	0.17	0.07	0.01
oscuros	0.02	0.01	0.07	0.13	0.02

1. Calcule la probabilidad de que una persona tenga ojos castaños y pelo rubio.
2. Calcule la probabilidad de que una persona de ojos castaños tenga pelo rubio.

Tabla para responder cuestionario

Distribución de la población según color de ojos y pelo

ojos/pelo	rubio	pelirrojo	marrón	oscuro	negro
claros	0.10	0.05	0.04	0.03	0.01
azules	0.06	0.01	0.04	0.02	0.03
castaños	0.06	0.02	0.16	0.07	0.05
oscuros	0.02	0.01	0.06	0.13	0.03

1. Calcule la probabilidad de que una persona tenga ojos castaños y pelo rubio.
2. Calcule la probabilidad de que una persona de ojos castaños tenga pelo rubio.
3. Calcule la probabilidad de que una persona no sea pelirroja sabiendo que tiene ojos azules
4. ¿Es más probable que una persona tenga ojos oscuros o claros?
5. Sabiendo que una persona es pelirroja, ¿es más probable que tenga ojos oscuros o claros?

Regla Multiplicativa

$$\mathbb{P}(A \cap B) \; = \; \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) \; .$$

Extracciones sin reposición.

Para pensar

- Los mails se clasifican en tres posibles categorias: *Spam*, *Baja Prioridad*, *Alta Prioridad*, con probabilidades 0.7, 0.2 y 0.1 para cada categoría, respectivamente.
- La probabilidad de que un mail *Spam* contenga la palabra **free** es 0.9.
- La probabilidad de que un mail *Baja Prioridad* contenga la palabra **free** es 0.1.
- La probabilidad de que un mail *Alta Prioridad* contenga la palabra **free** es 0.1.

1. Calcular la probabilidad de que un mail contenga la palabra **free**.
2. Calcular la probabilidad de que un mail sea un *Spam* sabiendo que contiene la palabra **free**.

Definición: Partición.

Dibujamos?

$(A_i)_{i\geq 1}$ partición de $\mathcal{S}$ si

1. Los eventos son disjuntos dos a dos: $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$.
2. Los eventos cubren el espacio muestral: $\bigcup_{i\geq 1} A_i = \mathcal{S}$.

Teorema: Ley de la Probabilidad Total

$$\mathbb{P}(C) = \sum_i \mathbb{P}(C \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)\ .$$

Teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j\geq 1} \mathbb{P}(B \mid A_j)\mathbb{P}(A_j)} \text{, para } i \geq 1.$$

Sensibilidad y Especificidad

- Diagnóstico - Análisis de Laboratorio.
- E: "la persona examinada está enferma"
- $+$: "el resultado del análisis es positivo",
- Errores de diagnóstico:
- Falso Positivo: el análisis da positivo pero el paciente está sano.
- Falso Negativo: el análisis da negativo pero el paciente está enfermo.
- Sensibilidad del test: $P(+|E)$
- Especificidad del test: $P(-|E^c)$.
- Supongamos que una prueba de laboratorio en particular es tal que

  $$P(+|E) = P(-|E^c) = 0.95.$$

  y que la probabilidad de que un paciente que se examina padezca la enfermedad es 0.005 (prevalencia de la enfermedad). Cuál es la probabilidad de que una persona cuyo análisis diagnóstico es positivo esté enferma?

Independencia

Definición: Independencia

- A y B se dicen independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Lema: Si A y B son independientes y $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$$

$^{(*)}$Independencia de varios eventos:

Una colección de eventos $A_1, .., A_n$ son independientes si para **cualquier** subcolección se verifica

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_m}) \ .$$

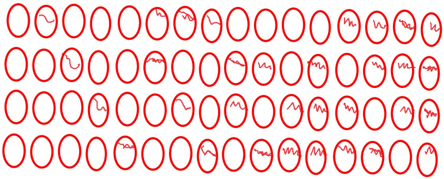
Para pensar

Un experimento con dos posibles resultados (exito-fracaso) se llama **ensayo o experimento (Bernoulli)**.

Muchos experimentos, constan de varios subexperimentos Bernoulli, repetidos de manera independiente en idénticas condiciones.

Ejemplo: para pensar

Ejemplo: Considere $n = 4$ repeticiones independientes de un ensayo con dos posibles resultados: éxito (1), con probabilidad $p = 0.8$ y fracaso (0) con probabilidad $1 - p = 0.2$.



Ejemplo: para pensar

Ejemplo: Considere $n = 4$ repeticiones independientes de un ensayo con dos posibles resultados: éxito (1), con probabilidad $p = 0.8$ y fracaso (0) con probabilidad $1 - p = 0.2$.

- Calcule la probabilidad de cada elemento del espacio muestral. ¿Es equiprobable?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos un éxito?
- ¿Cuál es la probabilidad de ocurra exactamente un éxito?
- ¿Cuál es la probabilidad de ocurran exactamente dos éxito?
- ¿Cuál es la probabilidad de ocurran a lo sumo dos éxitos?

Para pensar: caso general

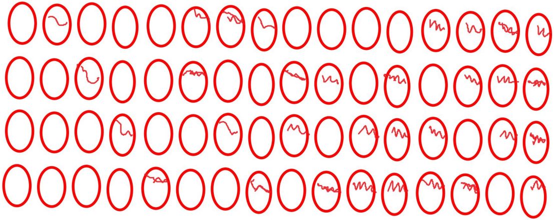
Considere n repeticiones independientes de un experimento con dos posibles resultados: éxito, con probabilidad p y fracaso con probabilidad $1-p$.

- ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ningun éxito?
- ¿Cuál es la probabilidad de ocurra exactamente un éxito?
- ¿Cuál es la probabilidad de ocurran todos éxitos?
- Indique la cantidad mínima y máxima de éxitos que pueden ocurrir.
- Considere $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$, ¿cuál es la probabilidad de ocurran exactamente x éxitos?

Videos 7 y 8

Variables Aleatorias

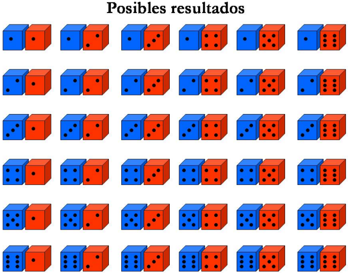
Variables Aleatorias– Ejemplo: $X =$ número de lamparas rotas.



Variable Aleatoria – Ejemplo

t	0	1	2	3	4
p_X	$(1-p)^4$	$\binom{4}{1}p(1-p)^3$	$\binom{4}{2}p^2(1-p)^2$	$\binom{4}{3}p^3(1-p)$	p^4

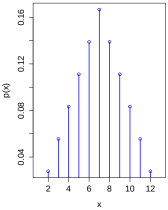
Variables Aleatorias: suma de dados equilibrados



t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Variables Aleatorias: suma de dados equilibrados

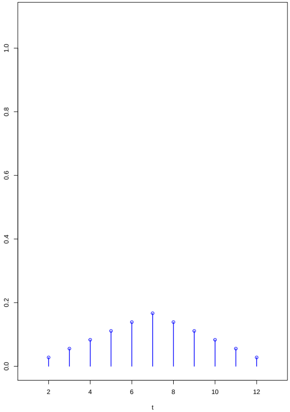
t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

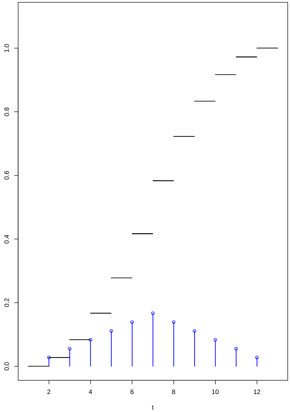


Variables Aleatorias: suma de dados equilibrados

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Función de Distribución Acumulada $\quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$

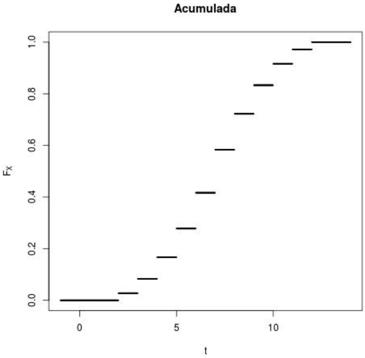




Variables Aleatorias: Puntual y Acumulada

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Acumulada: $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$



Variables Aleatorias (observable)

Una variables aleatoria X es función definida sobre el espacio muestral $\mathcal{S}$ que toma valores en los reales:

$$X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$$

Dibujamos?

Función de distribución acumulada

Dada una variables aleatoria X, definimos su función de distribución acumulada F_X siendo

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

Notemos que

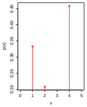
$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

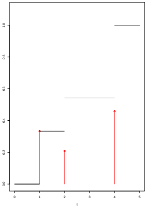
Dibujamos?

Variables Discretas: Ejemplo 0

- Función de probabilidad puntual

x	1	2	4
p_X	8/24	5/24	11/24





- Función de distribución acumulada $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$

$$F_X(t) \; = \; \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 8/24 & 1 \leq t < 2 \\ 8/24 + 5/24 & 2 \leq t < 4 \\ 8/24 + 5/24 + 11/24 & 4 \leq t \, . \end{cases}$$

Varibles Aleatorias Discretas

- X toma una cantidad *numerable* de valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$.
- Función de probabilidad puntual $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$.
- Rango$^{(*\text{ojo})}$ de X : $Rg(X) = \{x_i : p_X(x_i) > 0\}$.
- $\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x_i \in B} p_X(x_i)$
- $F_X(t) = \sum_{x_i \leq t} p_X(x_i)$.
- F_X queda unívocamente determinada por p_X.

Variables Discretas: Ejemplo 1

- Función de probabilidad puntual

x	-1	1	4	5	7	10
p_X	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

Calcule las siguiente probabilidades:

- $\mathbb{P}(X \leq 4)$
- $\mathbb{P}(X < 4)$
- $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$
- $\mathbb{P}(2 \leq X < 4)$

Variables Discretas: Ejemplo 1*

- Función de probabilidad puntual

x	-1	1	4	5	7	10
p_X	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

- Implemente una funcion **pejemplo_1** que tenga por input t y devuelva $F_X(t)$, cuando X es la variable con puntual dada en la tabla.
- Grafique F_X, para $t \in (-2, 11)$, utilizando una grilla de paso 0.01

*: Para pensar y tratar de hacer en R

Variables Discretas: Ejemplo 2*

- Función de probabilidad puntual

x	-1.3	1.8	4.2	5,5	7.4	10.3
p_Y	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- Implemente una funcion **pejemplo_2** que tenga por input t y devuelva $F_Y(t)$, cuando Y es la variable con puntual dada en la tabla.
- Grafique F_Y, para $t \in (-2, 11)$, utilizando una grilla de paso 0.01

*: Para pensar y tratar de hacer en R

Importante: F_X vs. p_X - ida y vuelta a mano

1. Si conozco p_X recupero la acumulada haciendo $F_X(t) = \sum_{x \leq t} p_X(x)$
2. Si conozco F_X, el rango de X son las discontinuidades y el tamaño del salto es la correspondiente puntual.

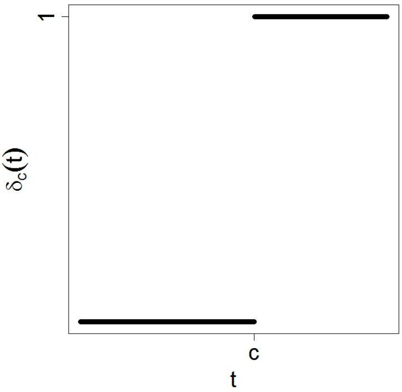
Video 9

Discretas Famosas

Variables Discretas: $X = c$

- Acumulada de una constante:

$$F_X(t) = \delta_c(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq c \end{cases}$$



Ensayos / Experimentos Bernoulli

- Dos posibles resultados: éxito ($X = 1$) o fracaso ($X = 0$).
- $Rg(X) = \{0, 1\}$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$
$$p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = p \ ,$$

- Representación alternativa de la puntual:

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \ , \quad \text{para } x \in \{0, 1\}.$$

- Parámetro: $p \in [0, 1]$

Binomial - Ejemplo

El 30% de las piezas producidas por una fábrica presentan defectos. Se examinan $n = 7$ piezas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellas estén falladas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas estén falladas?

Binomial

- n repeticiones independientes de experimento Bernoulli con probabilidad de éxito p.
- X: número de éxitos en n repeticiones.
- $Rg(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$.

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ para } 0 \leq k \leq n.$$

- Notación: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- Parámetros: n, p ($p \in [0, 1]$).

La binomial en R

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

- puntual: dbinom(x,n,p)$= \mathbb{P}(X = x)$.
- acumulada: pbinom(x,n,p)$= \mathbb{P}(X \leq x)$
- simulación I : rbinom(1,n,p) genera un posible resultado de X, cuando $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- simulación II (muchas): rbinom(N,n,p) genera N posibles resultados de X, cuando $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Puntual de Binomial: $X \sim \mathcal{B}(7, 0.3)$

El 30% de las piezas producidas por una fábrica presentan defectos. Se examinan $n = 7$ piezas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellas estén falladas?

Conteo: Poisson

$X=$ Número de visitas recibidas en el nido en media (0.5)-hora.

Distribución Poisson de parámetro $\lambda > 0$:

- $Rg(X) = \{0, 1, \dots\}$
- Puntual: $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.
- Notación: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Aproximaciones

$$\mathcal{B}(N, \lambda/N) \quad \text{aprox} \quad \mathcal{P}(\lambda)$$

$$\mathcal{B}(N, p) \quad \text{aprox} \quad \mathcal{P}(Np)$$