

Ciencias de Datos con R: Fundamentos Estadísticos

Ana M. Bianco, Jemina García y Mariela Sued

Vectores Aleatorios Discretos

Vector Aleatorio (muchas observables juntas)

Vector Aleatorio: muchas variables aleatorias juntas

$$X_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \quad k \text{ variables aleatorias}$$

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k) \quad \text{vector aleatorio}$$

$$\mathbf{X} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Ya vimos esta situación: problema de alturas!
¿Quiénes eran las variables?

Vectores Aleatorios Discretos

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria X es una función definida sobre el espacio muestral \mathcal{S} que toma valores en los reales:

$$X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

La función de distribución acumulada F_X de la variable (aleatoria) X está definida por:

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = F(t)$$

Notemos que $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

p_{XY} : Puntual Conjunta

Función de probabilidad puntual conjunta:

$$p_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Género/Carrera	Biología	Física	Computación	Química	Matemática
Femenino	0.15	0.06	0.12	0.05	0.10
Masculino	0.10	0.12	0.15	0.10	0.05

Table: p_{XY} función de probabilidad puntual conjunta

Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que la persona elegida sea

- a) de género femenino y de Biología.
 - b) de género femenino.
 - c) de Biología.
 - d) de Biología o de género femenino.
 - e) de Biología sabiendo que es de género femenino.
- etc.

p_{XY} : Puntual Conjunta

Función de probabilidad puntual conjunta:

$$p_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$$

Ojo!!! usamos , en lugar de \cap !!!

X/Y	1	2	3	4	5
1	0.15	0.06	0.12	0.05	0.10
0	0.10	0.12	0.15	0.10	0.05

Table: p_{XY} función de probabilidad puntual conjunta

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} p_{XY}(x, y)$$

$$\mathbb{P}(X = Y) = \dots \quad \mathbb{P}(X < Y) = \dots$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \dots \quad \mathbb{P}(Y = 5) = \dots$$

Conjunta y Marginales.

Función de probabilidad puntual conjunta:

$$p_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

X/Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$p_X(\cdot)$
x_1	0.15	0.06	0.12	0.05	0.10	0.48
x_2	0.10	0.12	0.15	0.10	0.05	0.52
$p_Y(\cdot)$	0.25	0.18	0.27	0.15	0.15	1.00

Table: p_{XY} función de probabilidad puntual conjunta

Marginales:

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_y p_{XY}(x, y)$$

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_x p_{XY}(x, y)$$

Distribución Bivarida Discreta

Función de probabilidad puntual conjunta:

$$p_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

X/Y	y_1	y_2	\dots	y	\dots	$p_X(\cdot)$
x_1	$p_{XY}(x, y)$					
x_2						
\cdot						
x						
\cdot						
$p_Y(\cdot)$						

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{(x, y) \in A} p_{XY}(x, y)$$

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_y p_{XY}(x, y)$$

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_x p_{XY}(x, y)$$

Ojo al piojo

X/Y	0	1	$p_X(\cdot)$
0	0.07	0.23	0.30
1	0.53	0.17	0.70
$p_Y(\cdot)$	0.60	0.40	1.00

X/Y	0	1	$p_X(\cdot)$
0	0.01	0.29	0.30
1	0.59	0.11	0.70
$p_Y(\cdot)$	0.60	0.40	1.00

X/Y	0	1	$p_X(\cdot)$
0	0.18	0.12	0.30
1	0.42	0.28	0.70
$p_Y(\cdot)$	0.60	0.40	1.00

Condicionando: Género, Carrera

Género/Carrera	Biología	Física	Computación	Química	Matemática
Femenino	0.15	0.06	0.12	0.05	0.10
Masculino	0.10	0.12	0.15	0.10	0.05

- ¿Cuál es la probabilidad de que estudie Biología?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Biología sabiendo que es de género femenino?

Condicionando: $X = \text{Género}$, $Y = \text{Carrera}$

X/Y	1	2	3	4	5
1	0.15	0.06	0.12	0.05	0.10
0	0.10	0.12	0.15	0.10	0.05

- ¿Cuál es la probabilidad de que estudie Biología?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Biología sabiendo que es de género femenino?
- Probabilidad puntual condicional:

$$p_{Y|X=x}(y) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)}$$

Condicionando: $X = \text{Género}$, $Y = \text{Carrera}$

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea de ***** sabiendo que es de género femenino?

Y	1	2	3	4	5
$p_{Y X=1}(\cdot)$	0.15/0.48	0.06/0.48	0.12/0.48	0.05/0.48	0.10/0.48

Condicionando: $X = \text{Género}$, $Y = \text{Carrera}$

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea de ***** sabiendo que es de género femenino?

Y	1	2	3	4	5
$p_{Y X=1}(\cdot)$	0.15/0.48	0.06/0.48	0.12/0.48	0.05/0.48	0.10/0.48

Condicionando: $X = \text{Género}$, $Y = \text{Carrera}$

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea de ***** sabiendo que es de género femenino?

Y	1	2	3	4	5
$p_{Y X=1}(\cdot)$	0.15/0.48	0.06/0.48	0.12/0.48	0.05/0.48	0.10/0.48

- Probabilidad puntual condicional:

$$p_{Y|X=x}(y) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)}$$

Y	y_1	y_2	\dots	y	\dots
$p_{Y X=x}(\cdot)$	$\frac{p_{XY}(x, y_1)}{p_X(x)}$	$\frac{p_{XY}(x, y_2)}{p_X(x)}$	\dots	$\frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)}$	\dots

Conjunta, Marginal y Condicional

- Probabilidad marginal:

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x, y)$$

- Probabilidad puntual condicional:

$$p_{Y|X=x}(y) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)}$$

- *Regla Multiplicativa*

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_{Y|X=x}(y)$$

Conjunta, Marginal y Condicional

- Probabilidad marginal:

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x, y)$$

- Probabilidad puntual condicional:

$$p_{Y|X=x}(y) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)}$$

- Probabilidad puntual condicional:

$$p_{X|Y=y}(x) = \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

- *Regla Multiplicativa*

$$\begin{aligned} p_{XY}(x, y) &= p_X(x) p_{Y|X=x}(y) \\ p_{XY}(x, y) &= p_Y(y) p_{X|Y=y}(x) \end{aligned}$$

Independencia

- Definición: X e Y se dicen independientes sii

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B) \quad \text{para todo } A, B$$

- Lema: X e Y son independientes si y solo si

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \text{ , para todo } x, y$$

La conjunta es el producto de las marginales

- Bajo independencia, las marginales determinan la conjunta.