PDF´s Videos
Repaso Esperanza - Varianza
Variables Aleatorias Continuas

Mariela Sued (marielasued@gmail.com)
Manuela Cerdeiro (cerdeiro@dm.uba.ar)
Florencia Statti (florencia.statti@ic.fcen.uba.ar)

2020

Videos Clase 4 - Esperanza y Varianza

Ruleta

http://www.casinosantafe.com.ar/casino/reglamento-ruleta-americana/

Referencia del gráfico:

1. “Pleno” apuesta a un número incluyendo 0 – paga 35 a 1.

¿Apostamos una ficha?

- Si acierto: me devuelven 36 fichas (35+la mía)
- Si pierdo: se llevan mi ficha

¿Apostamos una ficha?

- Si acierto: Gano 35
- Si pierdo: Gano -1

Ganancia

Ganancia	-1	35
Probabilidad	36/37	1/37

- m_{-1} cantidad de veces que pierdo en m jugadas.
- m_{35} cantidad de veces que gano en m jugadas.

$$\frac{m_{-1}}{m} \longrightarrow \ldots$$

$$\frac{m_{35}}{m} \longrightarrow \ldots$$

Una larga noche en el casino...

[1] $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$

[20] $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$ $\color{red}{35}$ $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$

[39] $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$

[58] $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$

[77] $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$

[96] $-1 -1 -1 -1$ $\color{red}{35}$ $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$

[115] $-1 -1 -1 -1 -1 -1$ $\color{red}{35}$ $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$

[134] $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$ $\color{red}{35}$ $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$

[153] $-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1$

Ganancia media en $m = 29$ partidas

- Resultado en cada jugada:

$$r_1 = -1, r_2 = -1, r_3 = -1, \ldots, r_{27} = -1, \ldots, r_{28} = 35, r_{29} = -1$$

- Suma de los ganado: $r_1 + r_2 + \cdots + r_{29} = (-1) \times 28 + 35 \times 1$

- Ganancia promedio:

$$\frac{1}{29}(r_1 + r_2 + \cdots + r_{29)} = (-1) \times \frac{28}{29} + 35 \times \frac{1}{29}$$

- $m = 29$, $m_{-1} = 28$, $m_{35} = 1$

$$(-1) \times \frac{m_{-1}}{m} + 35 \times \frac{m_{35}}{m}$$

¿Qué esperamos que pase con el límite de la ganancia promedio?

$$
\begin{aligned}
promedio(m) &= \frac{1}{m}\left[(-1)\times m_{-1} + 35\times m_{35}\right] \\
&= (-1)\times\frac{m_{-1}}{m} + 35\times\frac{m_{35}}{m}
\end{aligned}
$$

$$\frac{m_{-1}}{m} \longrightarrow p(-1) = \frac{36}{37} \quad \text{y} \quad \frac{m_{35}}{m} \longrightarrow p(35) = \frac{1}{37}$$

$$
\begin{aligned}
promedio(m) \longrightarrow \quad & (-1)\times p(-1) + 35\times p(35) \\
&= (-1)\times\frac{36}{37} + 35\times\frac{1}{37} \\
&= \frac{-1}{37}
\end{aligned}
$$

Esperanza - Definición

- X variable aleatoria: valor del experimento (X : Ganancia)
- x_i posibles valores que toma X. ($\{-1, 35\}$)
- $p(x_i)$ probabilidad de obtener el valor x_i
- $p(x_i) \geq 0$, $p(x_1) + p(x_2) + \cdots = \sum p(x_i) = 1$

Posibles valores	x_1	x_2	x_3	...
Probabilidad	$p_X(x_1)$	$p_X(x_2)$	$p_X(x_3)$	...

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) \quad &:= x_1 p_X(x_1) + x_2 p_X(x_2) + \dots \\ &= \sum_{i \geq 1} x_i p_X(x_i)\end{aligned}$$

Vocabulario

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \sum_{i \geq 1} x_i p(x_i) \quad (\mu)$$

- Esperanza
- Media
- "Valor esperado "*

* $\mathbb{E}(X)$ puede no estar en el rango de X.

Esperanza- Definición

Dada una variable aleatoria discreta X con $\mathbb{R}g(X) = \{x_1, x_2, \cdots\}$ y función de probabilidad puntual $p_X(x_i)$, definimos la esperanza de X mediante la fórmula,

$$\mathbb{E}(X) \ = \ \sum_{i \geq 1} x_i \, p_X(x_i) \ ,$$

siempre que $\sum_{i \geq 1} |x_i| \, p_X(x_i) < \infty$.

Esperanza - Ejemplo

- Dada la v.a. X con función de probabilidad dada por la siguiente tabla, calcule $\mathbb{E}(X)$.

t	-5	-2	-1	1	2	6
$p_X(t)$	$2/24$	$6/24$	$4/24$	$1/24$	$7/24$	$4/24$

Esperanza - Ejemplo

- Dada la v.a. X con función de probabilidad dada por la siguiente tabla, calcule $\mathbb{E}(X)$.

t	-5	-2	-1	1	2	6
$p_X(t)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

- Veamos como hacerlo en R

```
rango <- c(-5,-2,-1,1,2,6)
puntuales <- c(2/24,6/24,4/24,1/24,7/24,4/24)
esperanza <- sum (rango*puntuales)
```

$\mathbb{E}\{g(X)\}$ - Ejemplo

t	-5	-2	-1	1	2	6
$p_X(t)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

$Y := X^2$

u	1	4	25	36
$p_Y(u)$	5/24	13/24	2/24	4/24

Lema (The Rule of the Lazy Statistician, L. W.)

Sea X una variable aleatoria que toma los valores x_i con función de probabilidad puntual dada por $p_X(x_i)$. Entonces, para toda función g tenemos que

$$\mathbb{E}\{g(X)\} = \sum_{i \geq 1} g(x_i)\, p_X(x_i)\ .$$

Ejemplos

- Dada la v.a. X con función de probabilidad dada por la siguiente tabla, calcule $\mathbb{E}(X)$.

t	-5	-2	-1	1	2	6
$p_X(t)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

Ejemplos

- Dada la v.a. X con función de probabilidad dada por la siguiente tabla, calcule $\mathbb{E}(X)$.

t	-5	-2	-1	1	2	6
$p_X(t)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

- Veamos como hacerlo en R

```
rango <- c(-5,-2,-1,1,2,6)
puntuales <- c(2/24,6/24,4/24,1/24,7/24,4/24)
esperanza_del_cuadrado <- sum (rango^2*puntuales)
esperanza_del cubo <- sum (rango^3*puntuales)
esperanza_del_seno <- sum (sin(rango)*puntuales)
```

Propiedades de la Esperanza

Corolario 1:

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}(X) + b$$

Más en general, aún:

Corolario 2:

$$\mathbb{E}[(g_1(X) + g_2(X)] \;=\; \mathbb{E}[(g_1(X)] + \mathbb{E}[g_2(X)]\;.$$

Destaquemos que:

- $\mathbb{P}(X = c) = 1$, entonces $\mathbb{E}(X) = c$.
- si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- si $X \geq 0$ y $\mathbb{E}(X) = 0$, entonces $X = 0$.

Esperanza de famosas

- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ entonces $\mathbb{E}(X) = np$
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, entonces $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Esperanza- Otra Interpretación

- Dada X discreta que toma valores $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$. queremos resumir en único número a la variable aleatoria.
- Buscamos entonces la 'mejor'constante a que 'resuma'o 'aproxime'a nuestra variable aleatoria.
- ¿Qué quiere decir 'mejor aproxime '? ¿Cómo comparo diferentes valores de a?

Esperanza- Otra Interpretación

- Dada X discreta que toma valores $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$. queremos resumir en único número a la variable aleatoria.
- Buscamos entonces la 'mejor'constante a que 'resuma'o 'aproxime'a nuestra variable aleatoria.
- ¿Qué quiere decir 'mejor aproxime '? ¿Cómo comparo diferentes valores de a?

t	-1	1	4	5	7	10
$p_X(t)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

Problema

- Dada X discreta que toma valores $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, con puntual p_X, queremos resumir en único número a la variable aleatoria.
- Buscamos entonces la 'mejor'constante a que 'resuma'a nuestra variable aleatoria.
- ¿Qué quiere decir 'mejor aproxime '? ¿Cómo comparo diferentes valores de a?

t	-1	1	4	5	7	10
$\|t-a\|$	$\|-1-a\|$	$\|1-a\|$	$\|4-a\|$	$\|5-a\|$	$\|7-a\|$	$\|10-a\|$
$p_X(t)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

Problema

- Dada X discreta que toma valores $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$. queremos resumir en único número a la variable aleatoria.
- Buscamos entonces la 'mejor'constante a que 'resuma'o 'aproxime'a nuestra variable aleatoria.
- ¿Qué quiere decir 'mejor aproxime '? ¿Cómo comparo diferentes valores de a?
  Reemplazamos al valor absoluto por algo más suave

x	-1	1	4	5	7	10
$(x-a)^2$	$(-1-a)^2$	$(1-a)^2$	$(4-a)^2$	$(5-a)^2$	$(7-a)^2$	$(10-a)^2$
$p_X(x)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

Problema

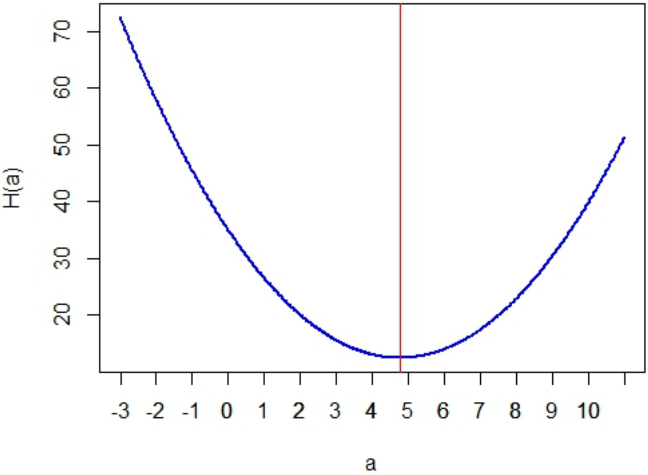
x	-1	1	4	5	7	10
$(x-a)^2$	$(-1-a)^2$	$(1-a)^2$	$(4-a)^2$	$(5-a)^2$	$(7-a)^2$	$(10-a)^2$
$p_X(x)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

Consideremos

$$\begin{aligned} H(a) &= (-1-a)^2\frac{2}{24} + (1-a)^2\frac{6}{24} + (4-a)^2\frac{4}{24} \\ &\quad +(5-a)^2\frac{1}{24} + (7-a)^2\frac{7}{24} + (10-a)^2\frac{4}{24} \end{aligned}$$

- Implementar la función $H(a)$ y graficarla entre -3 y 11. ¿Qué forma tiene $H(a)$? ¿Dónde alcanza su mínimo?

Gráfico de $H(a)$



En general

Dada X discreta que toma valores $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ con probabilidad $p_X(x_i)$

$$H(a) \; = \; \sum_{i=1}^{k} (x_i - a)^2 \, p_X(x_i) \; .$$

Buscamos entonces el valor de a que minimiza la función $H(a)$.

En general

Dada X discreta que toma valores $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ con probabilidad $p_X(x_i)$

$$H(a) \; = \; \sum_{i=1}^{k} (x_i - a)^2 \, p_X(x_i) \; .$$

Buscamos entonces el valor de a que minimiza la función $H(a)$.
$H'(a) = 0$.

$$H'(a) = \sum_{i=1}^{k} \, -2(x_i - a) \, p_X(x_i) \; ,$$

por lo tanto, H se minimiza en

$$a \; = \; \sum_{i=1}^{k} \, x_i \, p_X(x_i) \; .$$

Tenemos así que $a = \mathbb{E}(X)$ es la constante que mejor aproxima a nuestra variable aleatoria X.

¿Qué precio pagamos?

$$H(a) \;=\; \sum_{i=1}^{k}(x_i - a)^2 \, p_X(x_i) \; .$$

¿Cuánto se paga por reemplazar a X por $\mu_X = \mathbb{E}(X)$?

$$H(\mu_X) \;=\; \sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu_X)^2 \, p_X(x_i) \; .$$

Notemos que usando The Rule of the Lazy Statistician

$$H(\mu_X) \;=\; \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]$$

que recibe el nombre de varianza de X.

Varianza

- X v.a. $\mathbb{E}(X) = \mu$. La varianza de X, está definida mediante la fórmula
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big[(X-\mu)^2\Big] .$$
- Fórmula alternativa:
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \Big(\mathbb{E}(X)\Big)^2 .$$
- X v.a. Desvío estandar:
$$SD(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Varianza - Ejemplo

- Dada la v.a. X con función de probabilidad dada por la siguiente tabla, calcule $\mathbb{E}(X)$.

t	-5	-2	-1	1	2	6
$p_X(t)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

Varianza - Ejemplo

- Dada la v.a. X con función de probabilidad dada por la siguiente tabla, calcule $\mathbb{E}(X)$.

t	-5	-2	-1	1	2	6
$p_X(t)$	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

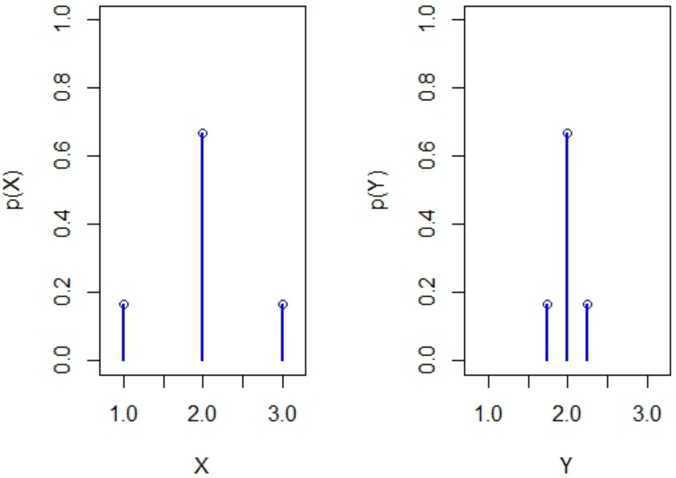
- Veamos como hacerlo en R

```r
rango <- c(-5,-2,-1,1,2,6)
puntuales <- c(2/24,6/24,4/24,1/24,7/24,4/24)
esperanza <- sum (rango*puntuales)
esperanza_del_cuadrado <- sum (rango^2*puntuales)
varianza <- esperanza_del_cuadrado - esperanza^2
```

Esperanza y Varianza de famosas

- $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ entonces $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, entonces $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$

$\mathbb{V}(X) = 0.3333$ y $\mathbb{V}(Y) = 0.020833$



Propiedades

1. $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

2. $\mathbb{V}(X) = 0 \to X = \mathbb{E}(X)$

3. $SD(aX) = |a|SD(X)$

Videos Clase 5 - Variables Aleatorias Continuas

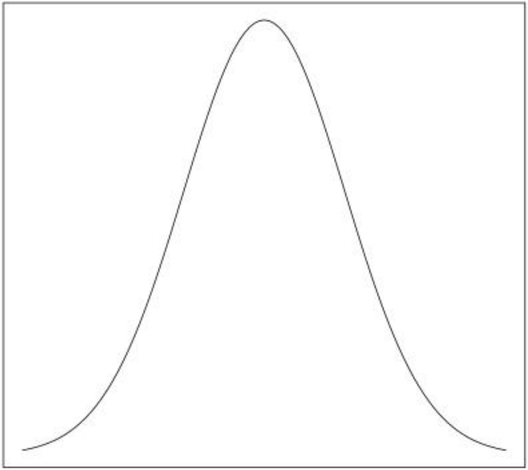
Densidad

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice densidad si

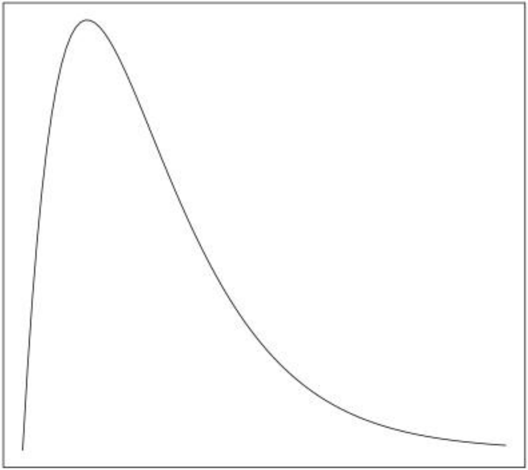
- $f(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du = 1$

En esta materia, las densidades integran uno.

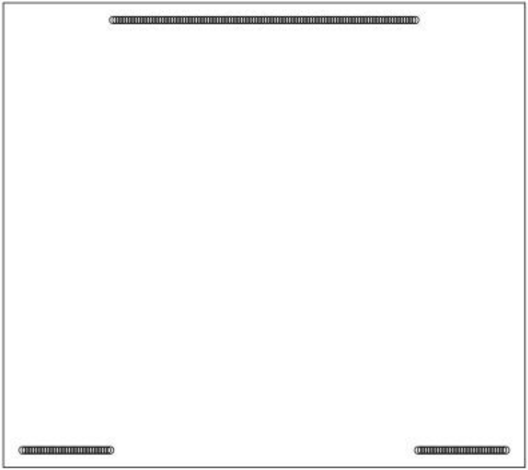
Densidades



Densidades



Densidades



Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria X se dice continua sii existe una densidad

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tal que

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(u)\, du.$$

En particular,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du\ .$$

En tal caso, diremos que f_X es la función de densidad de la variable aleatoria X.

Variables Aleatorias Continuas

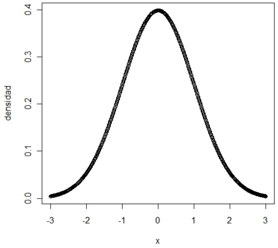
Una variable aleatoria X se dice continua sii existe una densidad

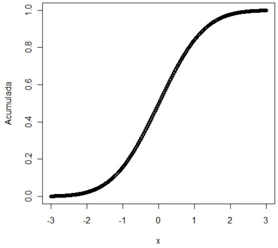
$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{tal que} \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(u)\, du.$$

Dibujamos?

Variables aleatorias continuas

- Función de densidad: $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- $\mathbb{P}(X = t) = 0$ para todo t.
- $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(u)\, du$.
- Función de distribución acumulada:
  $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du$





Importante: F_X vs. f_X - ida y vuelta a mano

1. Si conozco f_X recupero la acumulada haciendo $F_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\, du$
2. Si conozco F_X, recupero la densidad f_X haciendo $f_X(x) = F'_X(x)$

Dibujamos?

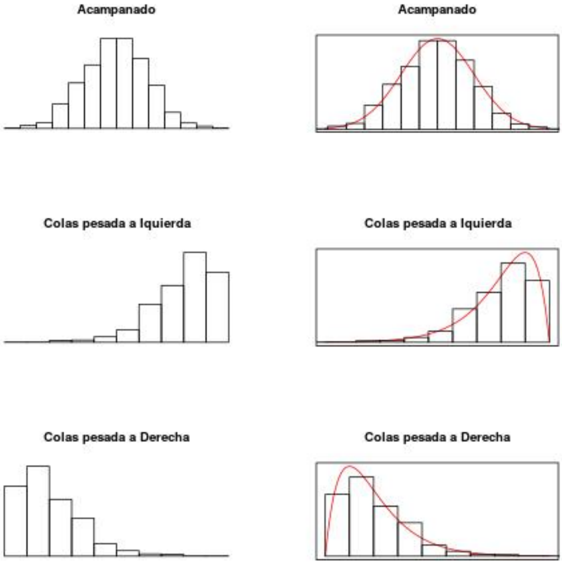
Ejemplo:

Una barra de 12 pulgadas sujeta por ambos extremos, debe someterse a una creciente cantidad de esfuerzo hasta que se rompa. Sea $Y =$ distancia desde el extremo izquierdo hasta dónde ocurre la rotura. Supongamos que la densidad de Y es la siguiente

$$f_Y(y) = \begin{cases} ay\left(1 - \frac{y}{12}\right) & \text{si } 0 \leq y \leq 12 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1. Hallar a.
2. Calcular $P(Y \leq 4), P(6 < Y); P(4 \leq Y < 6)$.
3. Hallar $F_Y(y)$.

Densidades - Histogramas (¿Qué? - Volveremos...)



Percentiles

Dada una variable aleatoria continua X y dado $p \in (0, 1)$ definimos el $100p-$ (o p-ésimo) ésimo percentil de X como el valor x_p que verifica

$$F_X(x_p) = p \, .$$

- Cuando $p = 1/2$, el valor para el cual la acumulada vale $1/2$ se dice mediana.
- Los percentiles asociados a $p = 1/4$ y $p = 3/4$ se dicen cuartiles.

Percentiles

Dada una variable aleatoria continua X y dado $p \in (0,1)$ definimos el $100p-$ ésimo percentil de X como el valor x_p que verifica

$$F_X(x_p) \; = \; p \; .$$

Dibujamos?

Esperanza

Dada una variable aleatoria continua X con función de densidad f_X, definimos la esperanza de X como

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} u\, f_X(u)\, du\ .$$

siempre que $\int_{-\infty}^{\infty} |u|\; f_X(u)\; du\; < \infty$.

Ejemplo de Esperanza

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{24} y \left(1 - \frac{y}{12}\right) & \text{si } 0 \leq y \leq 12 \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $\mathbb{E}(Y)$

Esperanza - Propiedad

Lema (The Rule of the Lazy Statistician, L. W.) Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f_X. Entonces, para toda función g tenemos que

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\; f_X(u)\, du\ .$$

Aplicación

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{24} y \left(1 - \frac{y}{12}\right) & \text{si } 0 \leq y \leq 12 \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $\mathbb{E}(Y^2)$.

Esperanza y Varianza: sigue todo igual

- Definición: $\mathbb{E}(X) = \int u f_X(u) du$.

- Propiedad: $\mathbb{E}[g(X)] = \int g(u) f_X(u) du$.

- Corolario: Linealidad $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}(X) + b$.

- Definición: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]$, donde $\mu_X = \mathbb{E}(X)$, medida de dispersión.

- Propiedad: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

- Desvío estandar: $SD(X) = \sqrt{V(X)}$,

$$SD(aX + b) = |a| SD(X)$$

La función indicadora - Ejemplo

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{24} y \left(1 - \frac{y}{12}\right) & \text{si } 0 \leq y \leq 12 \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función Indicadora (del intervalo $[0,12]$)

$$I_{[0,12]}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [0,12] \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Escribimos f_Y de manera simplificada

$$f_Y(y) = \frac{1}{24} y \left(1 - \frac{y}{12}\right) I_{[0,12]}(y)$$

La función indicadora - Ejemplo

Función Indicadora (del intervalo A)

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$I_{\{x \in A\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Videos Clase 6 - Variables Aleatorias Continuas Famosas

Continuas famosas: Motivación Uniforme

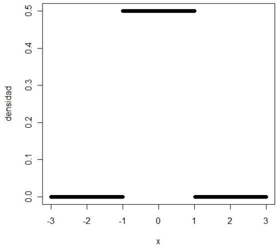
¿Qué hace el comando rnd (random) de la calculadora?

Continuas famosas: Uniforme

- Densidad: existen $a < b$ de forma tal que

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Notación con indicadora $\quad f_X(x) = \dfrac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$



Uniforme - Acumulada

- Densidad: $f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$, $a < b$.
- La acumulada:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

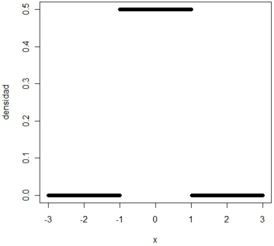
  Dibujamos?

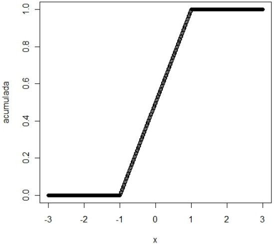
Uniforme - Acumulada

- densidad: existen $a < b$ de forma tal que

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$





Uniforme - Esperanza y Varianza

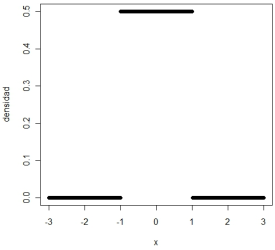
- Densidad: existen $a < b$ de forma tal que

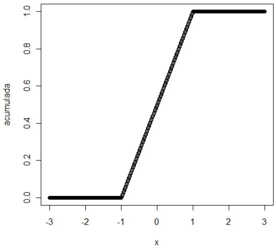
$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

- Esperanza y varianza del uniforme.

Uniforme - Esperanza y Varianza

Uniforme - Percentiles





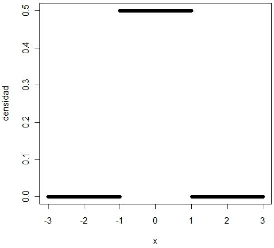
Uniforme - Resumen.

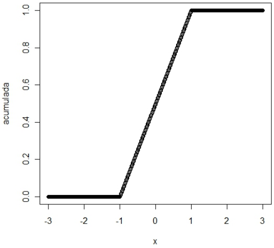
- densidad: existen $a < b$ de forma tal que

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Notación: $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.





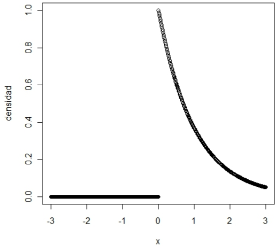
La uniforme en R

- densidad: dunif(x,a,b)$= f_X(x)$, cuando $X \sim \mathcal{U}(a,b)$.
- acumulada: punif(x,a,b)$= \mathbb{P}(X \leq x)$
- simulación I : runif(1,a,b) genera un posible resultado de X, cuando $X \sim \mathcal{U}(a,b)$
- runif(1,0,1) es un random en el $(0,1)$
- simulación II (muchas): runif(N,a,b) genera N posibles resultados de X, $X \sim \mathcal{U}(a,b)$

Continuas famosas: Exponencial

- Densidad:$\lambda > 0$ de forma tal que

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x).$$



Exponencial - Acumulada

- Densidad: existe $\lambda > 0$ tal que

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x).$$

- La acumulada:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

Dibujamos?

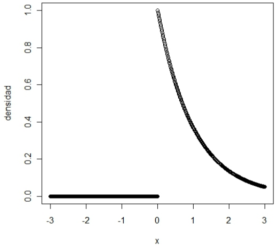
Exponencial - Acumulada

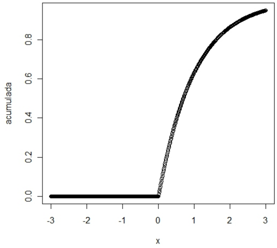
- Densidad: existe $\lambda > 0$ tal que

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x).$$

- La acumulada:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$





Propiedad - pérdida de memoria

Propiedad: perdida de memoria. $P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$

Exponencial - Esperanza y Varianza

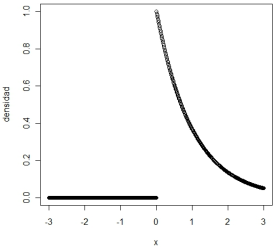
- Densidad: existen $a < b$ de forma tal que

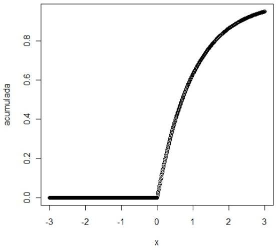
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x).$$

- Esperanza y varianza de la exponencial.

Exponencial - Esperanza y Varianza

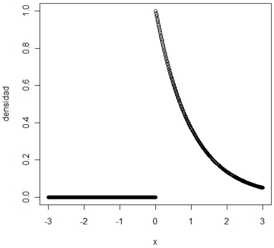
Exponencial - Percentiles

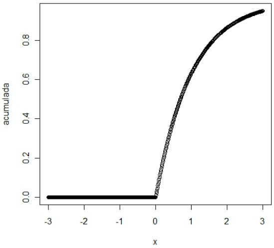




Exponencial - Resumen

- densidad:$\lambda > 0$ de forma tal que
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x).$$
- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.





- Notación: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$,
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$
- Propiedad: perdida de memoria.
$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$

La exponencial en R

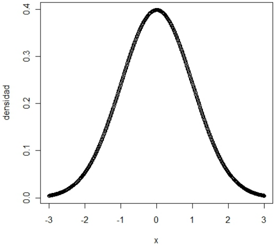
- densidad: dexp(x,lambda)$= f_X(x)$, cuando $X \sim \mathcal{E}$(lambda).
- acumulada: pexp(x,lambda)$= \mathbb{P}(X \leq x)$
- simulación I : rexp(1,lambda) genera un posible resultado de X, cuando $X \sim \mathcal{E}$(lambda)
- simulación II (muchas): rexp(N,lambda) genera N posibles resultados de X, $X \sim \mathcal{E}$(lambda)

Normal: Ejemplos (Miller)

- *Nivel de iones de sodio en orina (usando un electrodo selectivo)*
- *Concentración de mercurio en una gas comercial*
- *Concentración de plomo en el torrente sanguíneo de niños de una escuela cercana a ruta de gran caudal*
- *El producto de solubilidad del sulfato de bario*

LA normal (estandar)

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$



LA normal (estandar)

- Densidad Normal estandar

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

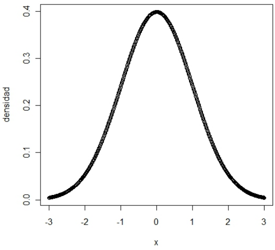
- Función de distribución acumulada

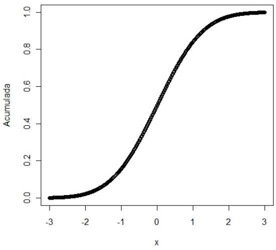
$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u) du$$

  no se puede calcular analíticamente!!!!!

- Hay tabla con valores de $F_Z(u)$ (con aproximaciones numéricas)
- $\phi(z) = F_Z(z)$ se llama función phi.

Normal estandar: densidad y acumulada





Distribucion Normal

- Z normal estandart si

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

- f_Z simétrica en el origen: $f_Z(z) = f_Z(-z)$
- Siendo f_Z simétrica, tenemos que $F_Z(-u) = 1 - F_Z(u)$
- $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)du$ no se puede calcular.
- Hay tabla con valores de $F_Z(u)$ para $u > 0$.
- $\phi(z) = F_Z(z)$ se llama función phi.
- $\mathbb{E}(Z) = 0$, $\mathbb{V}(Z) = 1$.

$X = 3Z + 1$ - Hallar la densidad de X

$X = 3Z + 1$ - Hallar la densidad de X

$X = 3Z + 1$ - Hallar la densidad de X

$X = 3Z + 1$

- $F_X(x) =$

- $f_X(x) =$

- $\mathbb{E}(X) =$

- $V(X) =$

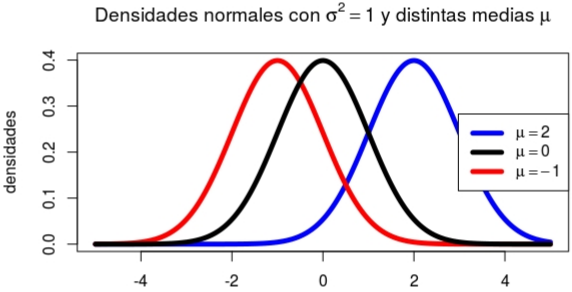
Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- Z normal estandar, Sea $X := \sigma Z + \mu$

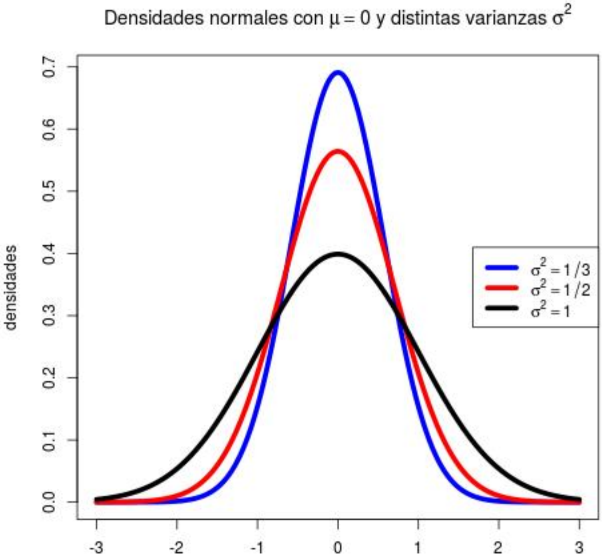
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- $F_X(x) = \phi\left((x-\mu)/\sigma\right)$
- $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.
- X normal con media μ y desvío σ (o varianza σ^2) : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- $dnorm(x, mu, sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- $pnorm(x, mu, sigma) = P(X \leq x)$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

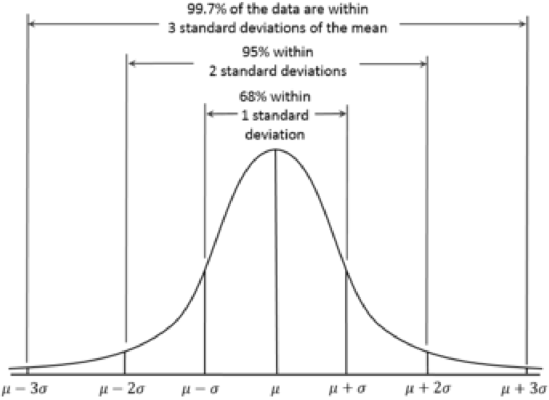
Continuas famosas: Normal



Continuas famosas: Normal



Regla Normal



Para pensar

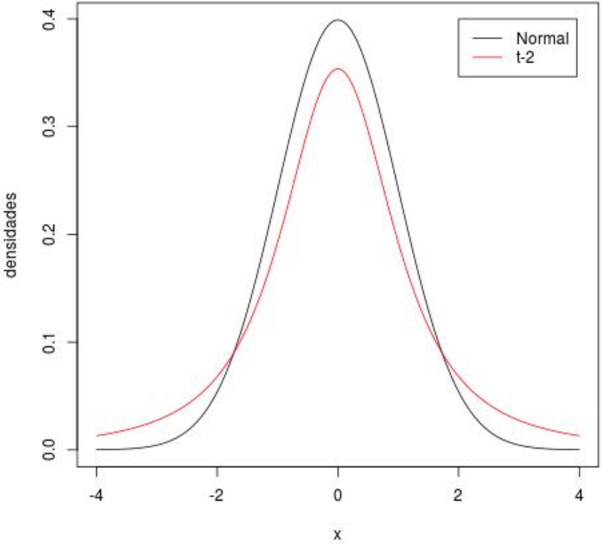
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ¿qué distribución tiene $Y = aX + b$?

Estandarización: Z- scores

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- *express* X *in terms of its deviation from the mean in units of the standard deviation (Miller)*
- *expresar* X *en términos de su desviación respecto de su media en unidades de desvío estandard*

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \equiv \quad \frac{X-\mu}{\sigma} = Z,\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Ojo! no toda campana es normal



Modelo de mediciones

1. μ: magnitud que se desea determinar.
2. X: resultado de una medición.
3. ε representa el error de la medición.
4. La medición se relaciona con el error y la magnitud de interés mediante el modelo
$$X = \mu + \varepsilon$$
5. Error (solo) aleatorio : $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$.
6. $\sigma^2 = Var\,(\varepsilon)$ representa la precisión del método de medición empleado.

Para pensar: Halle $\mathbb{E}(X)$ y $Var(X)$.

Modelo de medición - Errores Normales- Ejemplo Juguete

$$X = \mu + \varepsilon \,, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

1. Obtenga la distribución de X, su esperanza y su varianza.

   Asuma que la desviación estándar $\sigma = 0.2$ y que $\mu = 3$

2. Calcule la probabilidad de que la medición X diste de la verdadera magnitud $\mu = 3$ en menos de 0.3 unidades.

3. ¿Fué necesario conocer el valor de μ para realizar este cálculo?

Modelo de medición - Errores Normales

$$X = \mu + \varepsilon\ , \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

1. Obtenga la distribución de X, su esperanza y su varianza.
2. Asuma que la desviación estándar $\sigma = 0.2$. Calcule la probabilidad de que la medición diste de la verdadera magnitud μ en menos de 0.3 unidades. Note que no fue necesario conocer el valor de μ para realizar este cálculo.
3. Obtenga una expresión para la probabilidad de que la medición diste de la verdadera magnitud μ en menos de 0.3 unidades en función de σ. Estudie su monotonía. Interprete este comportamiento.