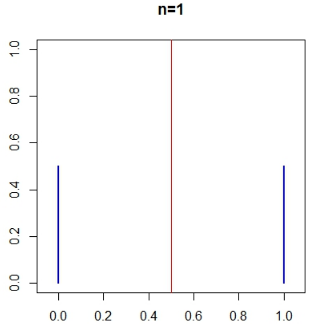
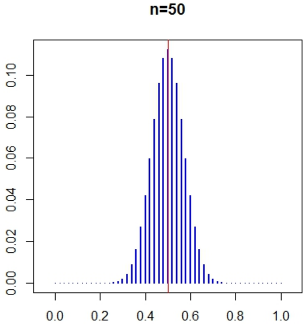
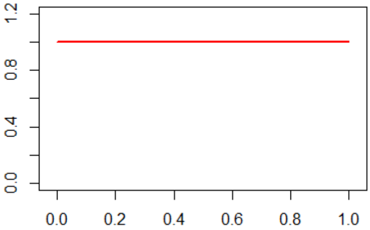
Volvamos un poco para atrás: promediemos

Caso Binomial: mirando la distribución



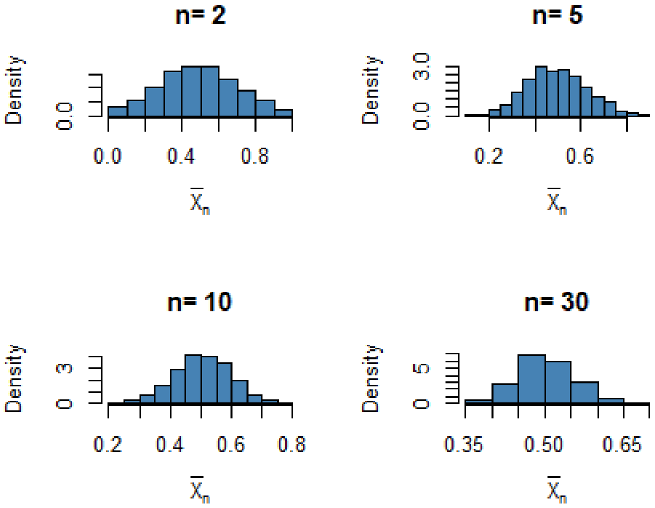


Caso Uniforme: $\mathcal{U}(0, 1)$

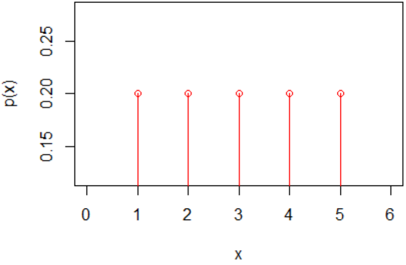


¿Qué distribución tiene el promedio de 2 v.a. $\mathcal{U}(0, 1)$ independientes?
¿Y el promedio de 5 ? ¿Y el promedio de 30 ?

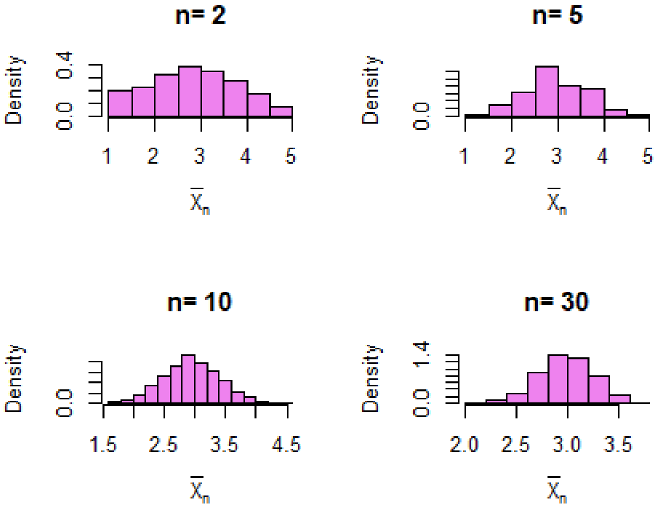
Caso Uniforme: Promediamos n



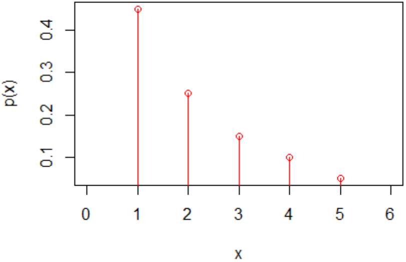
Caso discreto simétrico



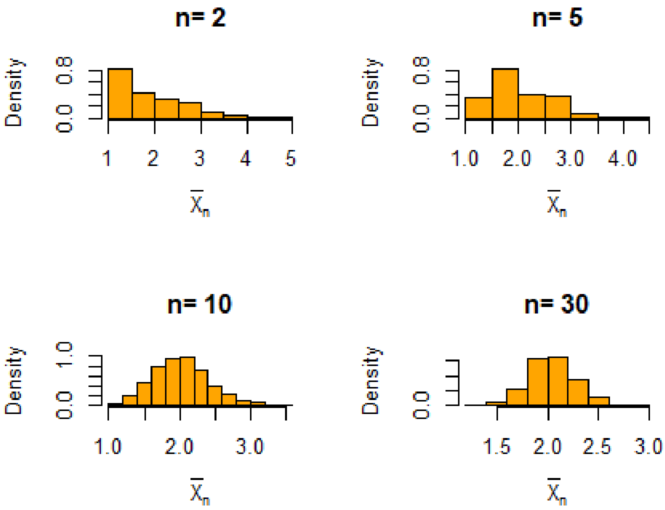
Otro caso: Promediamos n



Caso discreto asimétrico



Otro caso: Promediamos n



Teorema Central del Límite (TCL):

Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[X]=\mu$ y $\mathbb{V}[X]=\sigma^2$, entonces tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n-\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}}\leq x\right)\underset{n\to\infty}{\to}\phi(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\ ,$$

Teorema Central del Límite (TCL):

Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[X] = \mu$ y $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$, entonces tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)/n}} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

Teorema Central del Límite (TCL):

Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[X] = \mu$ y $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$, entonces tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(\bar{X_n})}} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)/n}} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

Teorema Central del Límite (TCL):

Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[X]=\mu$ y $\mathbb{V}[X]=\sigma^2$, entonces tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n-\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}}\leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\ ,$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n-\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)/n}}\leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n-\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\sigma^2/n}}\leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n-\mu)\leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

Teorema Central del Límite (TCL): en resumen

Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[X] = \mu$ y $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$, entonces tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

Teorema Central del Límite (TCL): en resumen

Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[X]=\mu$ y $\mathbb{V}[X]=\sigma^2$, entonces tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x) \; \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x) \; \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Teorema Central del Límite (TCL):

Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[X] = \mu$ y $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$, entonces tenemos que

En términos de la suma

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \phi(x) \; \forall x \in \mathbb{R} \; ,$$

Teorema Central del Límite (TCL):

Notación sintética

Sean $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ v.a. i.i.d. con $E[X]=\mu$ y $V[X]=\sigma^2$, entonces para n suficientemente grande

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n-\mu)\overset{a}{\sim} Z$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\overset{a}{\sim} Z$$

donde $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$

Algunos otros ejemplos

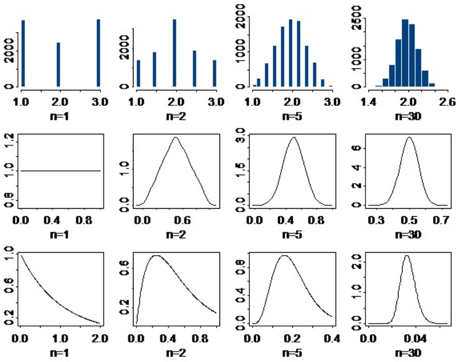


Figura 2: Distribución de $\bar{x}$ para distintas distribuciones cuando n=2, 5 y 30.
a) Distribución discreta, b) Distribución Uniforme, c) Distribución Exponencial