

Guia 14

Agustin Muñoz Gonzalez

8/6/2020

1. Videos 4.

1. Sea X una variable aleatoria con rango $R_X = \{-3, -1, 4, 7\}$. En la hoja Ejercicio 1 del documento compartido ubicado en este enlace encontrará, en la fila con su apellido y nombre, los valores de probabilidad puntual $p_X(k)$ para $k = -3, -1, 7$. Con esos valores, resuelva los siguientes ítems.
 - a) Calcule la esperanza de X y complete en la columna correspondiente.
 - b) Sea $Y = 3X + X^2$. Halle $E(Y)$ y complete en la columna correspondiente.

Resolución:

```
rango_X=c(-3,-1,4,7)
puntuales_X=c(0.35,0.25,0.2,0.2)
esperanza_X=sum(rango_X*puntuales_X)
esperanza_X

## [1] 0.9

esperanza_del_cuadrado_X=sum(rango_X^2*puntuales_X)
esperanza_del_cuadrado_X

## [1] 16.4

g=function(x){
  3*x+x^2
}
rango_Y=g(rango_X)
esperanza_Y=sum(rango_Y*puntuales_X)
esperanza_Y

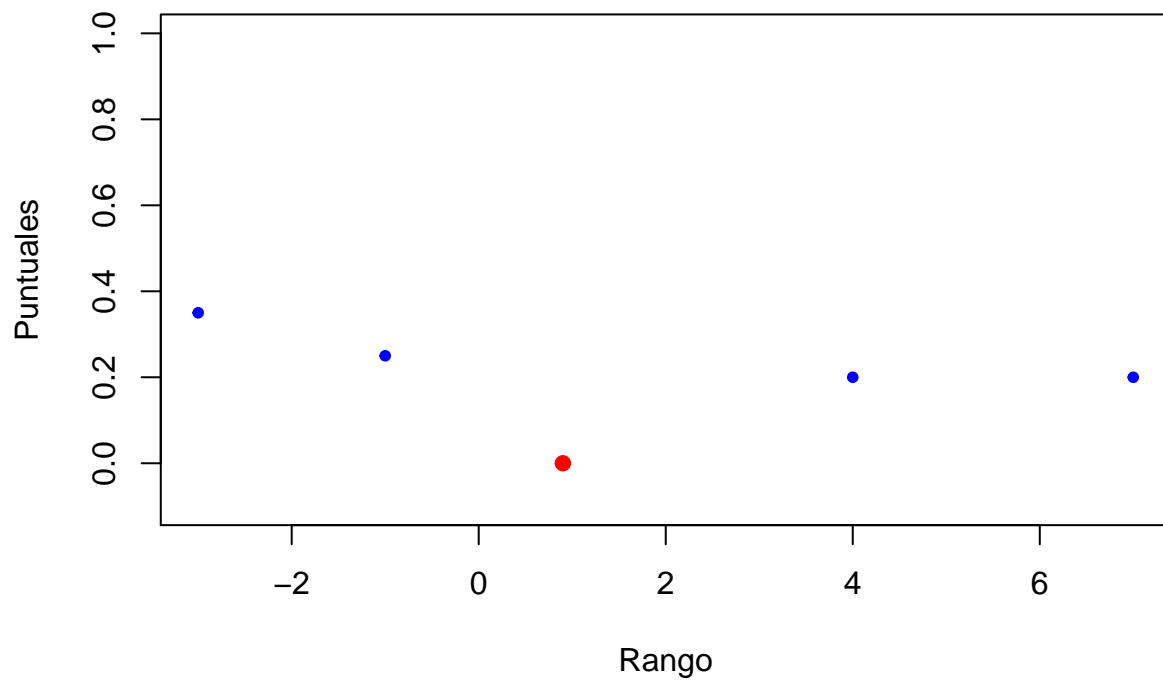
## [1] 19.1

esperanza_del_cuadrado_Y=sum(rango_Y^2*puntuales_X)
esperanza_del_cuadrado_Y

## [1] 1137.8

plot(rango_X,puntuales_X,col='blue',ylim=c(-0.1,1), pch=20,
     main='Proba puntual X', xlab = 'Rango', ylab='Puntuales')
points(esperanza_X,0,col='red', pch=19)
```

Proba puntual X



XQ NO ME GRAFICA EL OTRO PUNTO EN ROJO? XQ EL PUNTO ESTABA FUERA DEL EJE Y (ES UN PUNTO GORDITO).

2. Cierta proporción de piezas producidas por una fábrica presentan defectos. Sea X la cantidad de defectuosas al revisar un lote de n piezas. Calcular la esperanza de X utilizando los valores que le asignamos en la hoja Ejercicio 2 e incluya la respuesta en la columna D.

Resolución:

X representa la cantidad de piezas defectuosas de un lote de n piezas. En mi caso $n=7$ y el porcentaje de piezas defectuosas es del 15%, es decir, $P(X=1)=0.15$ y es un espacio equiprobable.

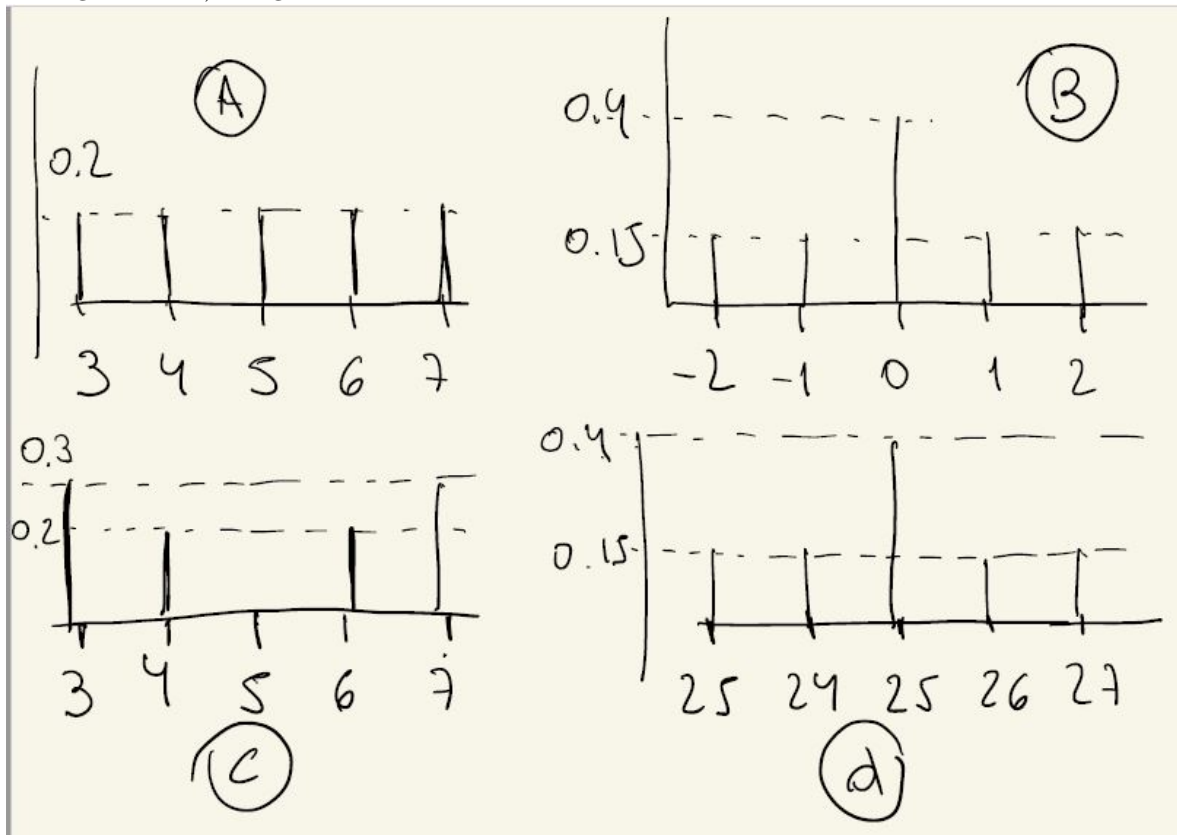
```
esperanza_2=sum((1:7)*rep(0.15,7))  
esperanza_2
```

```
## [1] 4.2
```

```
esperanza_del_cuadrado_2=sum((1:7)^2*rep(0.15,7))  
esperanza_del_cuadrado_2
```

```
## [1] 21
```

3. A continuación se muestran gráficos de probabilidades puntuales de variables aleatorias, ordene (y no haga cuentas) los gráficos de manera de observar crecimiento en la varianza de las variables.



Resolución:

Todas las variables tienen varianza 0 porque como el rango de cada una tiene punto medio y las pruebas puntuales están distribuidas de forma simétrica respecto de este punto medio, entonces la esperanza será este punto medio y luego la varianza es 0 (ya que la variable al cuadrado cumplirá lo mismo y como los rangos los elevamos al cuadrado tendremos $\text{esperanza_del_cuadrado} = \text{punto_medio}^2 = \text{esperanza_X}^2$).

EL C TIENE MÁS VARIANZA PORQUE TIENE LOS DATOS MÁS DESPARRAMADOS. B Y D SON LAS MÁS CHICAS. ES DECIR, $B = D < A < C$.

4. Calcule la varianza de la variable X definida en el ejercicio 1 y en el ejercicio 2; incluya las respuestas en las columnas incluidas a tal efecto en las hojas Ejercicio 1 Ejercicio 2, respectivamente, del documento compartido.

Resolución:

```
varianza_X=esperanza_del_cuadrado_X-esperanza_X^2  
varianza_X
```

```
## [1] 15.59
```

```
varianza_Y=esperanza_del_cuadrado_Y-esperanza_Y^2  
varianza_Y
```

```
## [1] 772.99
```

```
varianza_2=esperanza_del_cuadrado_2-esperanza_2^2  
varianza_2
```

```
## [1] 3.36
```

5. Se lanzan dos dados equilibrados y se anotan los números de las caras observadas. Sea X la variable aleatoria suma de los resultados obtenidos. Calcule probabilidad puntual, esperanza y varianza de X.

Resolución:

Si $k \leq 7$, $P(X=k) = (k-1)/36$.

Si $k \geq 8$, $P(X=k) = P(X=12-(k-2))$ porque la cantidad de casos favorables para $k \geq 8$ coincide con los casos favorables para $k \leq 6$ porque el espacio muestral es equiprobable y simétrico respecto de $k=7$.

Luego $P(X=k) = P(X=12-(k-2)) = (12-(k-2)-1)/36 = (12-(k-1))/36$, por el caso anterior ($12-(k-2) \leq 7$ si $k \geq 8$).

```
puntual_5=function(k){
  if(k<=7){(k-1)/36}else{(12-(k-1))/36}
}
rango_5=(1:12)
puntuales_5=unlist(lapply(rango_5,puntual_5), recursive = FALSE)
puntuales_5

## [1] 0.00000000 0.02777778 0.05555556 0.08333333 0.11111111 0.13888889
## [7] 0.16666667 0.13888889 0.11111111 0.08333333 0.05555556 0.02777778

# unlist(lista_de_listas, recursive=FALSE) transforma
# la lista_de_listas en una sola lista
esperanza_5=sum(rango_5*puntuales_5)
esperanza_5

## [1] 7

esperanza_del_cuadrado_5=sum(rango_5^2*puntuales_5)
esperanza_del_cuadrado_5

## [1] 54.83333

varianza_5=esperanza_del_cuadrado_5-esperanza_5^2
varianza_5

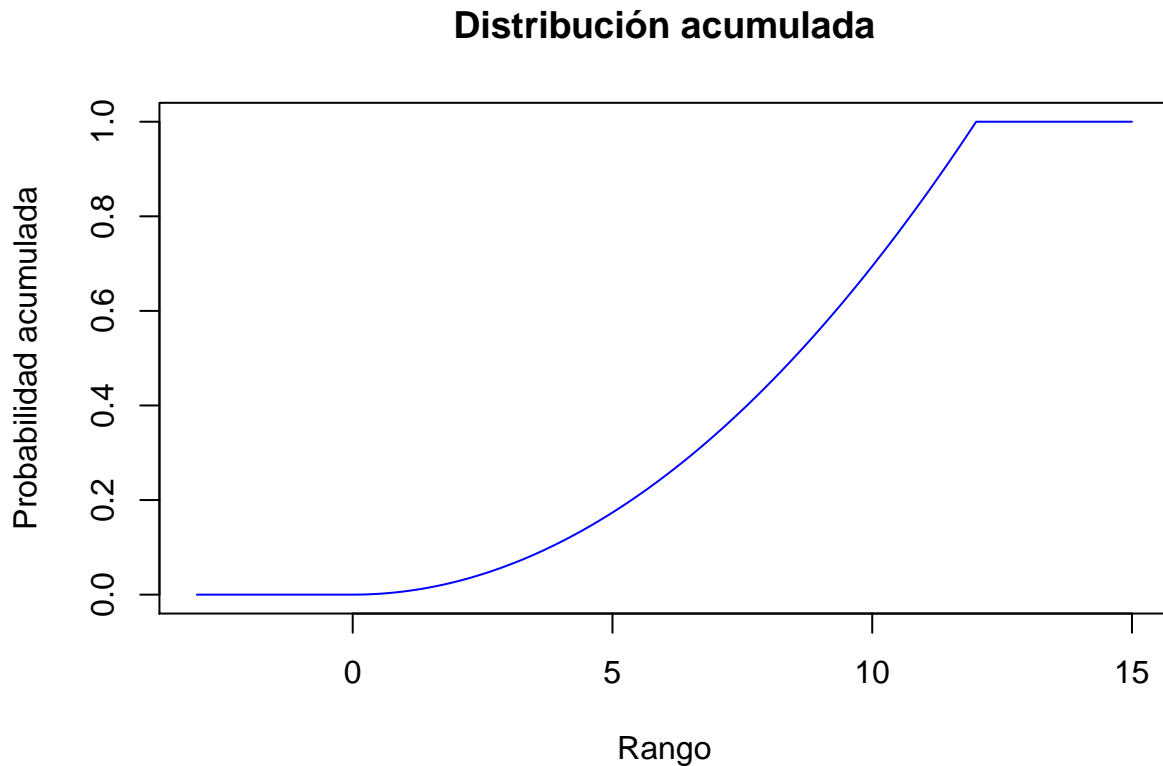
## [1] 5.833333
```

2. Videos 5.

6. En un juego de tiro al blanco, la distancia al centro (en cm.) que obtiene Juan se considera una variable aleatoria X con la siguiente función de distribución acumulada:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t^2}{144} & \text{si } 0 \leq t < 12 \\ 1 & \text{si } t \geq 12 \end{cases} = \frac{t^2}{144} \chi_{(0,12)} + \chi_{[12,\infty)}$$

```
F_X=function(t){  
  if(t<0){0}else if(0<= t & t<12){t^2/144}else{1}  
}  
grilla=seq(-3,15,0.1)  
plot(grilla,lapply(grilla, F_X),type='l',col='blue',  
      main='Distribución acumulada',  
      xlab='Rango', ylab='Probabilidad acumulada')
```



- a) Hallar la probabilidad de que un tiro de Juan diste menos de 1 cm. del blanco.

Resolución:

$P(X < 1) = P(X \leq 1)$ pues X es continua, luego $P(X < 1) = F_X(1)$.

```
F_X(1)
```

```
## [1] 0.006944444
```

- b) Hallar la probabilidad de que un tiro de Juan diste menos de 1 cm. del blanco si se sabe que dista del blanco a los sumo 2cm. Comparar con la probabilidad anterior.

Resolución:

$$P(X < 1 | X \leq 2) = \frac{P(X < 1, X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{F_X(1)}{F_X(2)}$$

`F_X(1)/F_X(2)`

[1] 0.25

Esta proba es bastante mas grande que la del item anterior

`F_X(1)/F_X(2)-F_X(1)`

[1] 0.2430556

c) Hallar $E(X)$ y $V(X)$.

Resolución:

Recordemos que $E(X) = \int t f_X(t) dt$. Calculo entonces la densidad f_X derivando la función de distribución acumulada. Tenemos

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{72} & \text{si } 0 \leq t < 12 \\ 0 & \text{si } t \geq 12 \end{cases} = \frac{t}{72} \chi_{(0,12)}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} E(X) &= \int t f_X(t) dt = \frac{1}{72} \int_0^{12} t^2 dt = \frac{1}{3 \cdot 72} \cdot 12^3 = 8; \\ E(X^2) &= \int_0^{12} t^2 f_X(t) dt = \frac{1}{72} \int_0^{12} t^3 dt = \frac{1}{4 \cdot 72} \cdot 12^4 = 72; \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 72 - 8^2 = 8. \end{aligned}$$

```
f_X=function(t){
  if(t<0){0}else if(0<= t & t<12){t/72}else{0}
}
```

d) Hallar el percentil (o cuantil) 0.90 de la distribución X .

Resolución:

Queremos a tal que $P(X \leq a) = 0.9$, es decir tal que $0.9 = F_X(a) = a^2/144$ entonces $a = \sqrt{(0.9 \cdot 144)} = 11.38$.

Bonus Track - Para seguir pensando

e) En el pub se organiza un juego que otorga un premio de $\$120 - 10X$ para cada lanzamiento al blanco, donde X es la distancia conseguida, y para participar se deben pagar $\$45$ por cada intento. Calcule la esperanza y la varianza de la ganancia neta para Juan.

Resolución:

Sea $Y = 120 - 10X - 45 = 75 - 10X$ el premio del juego.

$$\begin{aligned} E(Y) &= 75 - 10E(X) = 75 - 10 \cdot 8 = -5; \\ V(Y) &= 10^2 V(X) = 100 \cdot 8 = 800. \end{aligned}$$

f) ¿Cuál es la probabilidad de que la ganancia neta sea mayor que la ganancia neta esperada?

Resolución:

$$P(Y > E(Y)) = P(Y > -5) = P(10X < 80) = P(X < 8) = F_X(8).$$


```
F_X(8)
```

```
## [1] 0.4444444
```

g) Juan tira 12 veces al blanco, ¿cuál es la probabilidad de que dos o menos de sus tiros disten menos de 1 cm. del blanco?

Resolución:

Queremos la proba de que dos o menos de los 12 tiros disten menos de 1 cm. del blanco. Como los 12 lanzamientos son independientes y con la misma distribución podemos pensarlos como X_1, \dots, X_{12} i.i.d. y queremos entonces

$$P(X_i < 1) + P(X_i < 1, X_j < 1) = P(X_i < 1) + P(X_i < 1)P(X_j < 1) = \binom{12}{1}P(X < 1) + \binom{12}{2}P(X < 1)^2.$$

```
choose(12,1)*F_X(1)+choose(12,2)*F_X(1)^2
```

```
## [1] 0.0865162
```

3. Videos 6.

7. La cantidad de tiempo, en minutos, que una persona debe esperar el colectivo de una cierta línea los días de semana por la mañana es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0, 15]$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que espere entre 5 y 10 minutos?

Resolución:

Tenemos entonces $U = \mathcal{U}(0, 15)$. Entonces $P(5 \leq U \leq 15) = \int_5^{15} f_U(s)ds = F_U(15) - F_U(5)$ donde

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{15} & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$
$$F_U(x) = \int_a^x f_U(s)ds = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x}{15}$$

```
f_U=function(x){dunif(x,0,15)}  
F_U=function(x){punif(x,0,15)}  
# una forma  
integrate(f_U,5,15)
```

```
## 0.6666667 with absolute error < 7.4e-15
```

```
# otra forma  
F_U(15)-F_U(5)
```

```
## [1] 0.6666667
```

b) ¿Cuál es la media del tiempo de espera?

Resolución:

Queremos $E(U)$.

```
xf_U=function(x){x*f_U(x)}  
integrate(xf_U,0,15)
```

```
## 7.5 with absolute error < 8.3e-14
```

c) Aproximadamente el 80 % de las veces espera menos de minutos. Completar y justificar.

Resolución:

Queremos el valor del tiempo t que hace que el 80% de las veces que toma el colectivo, espere menos de t , es decir queremos el percentil $t_{0.8}$. O sea queremos el tiempo $t_{0.8}$ tal que $P(U \leq t_{0.8}) = 0.8$:

$$0.8 = F_U(t_{0.8}) = \frac{t_{0.8}}{15} \longrightarrow t_{0.8} = 0.8 \cdot 15 = 12.$$

```
0.8*15
```

```
## [1] 12
```

8. La medida, en centímetros, de la longitud de la cintura de los hombres en Buenos Aires sigue una distribución normal con media 75 y varianza 25. Se sabe que todos los hombres de menos de 70 cm. de cintura usan cinturón de talla 1, mientras que los de cintura entre 70 y 81 cm. usan talla 2 y los restantes talla 3.

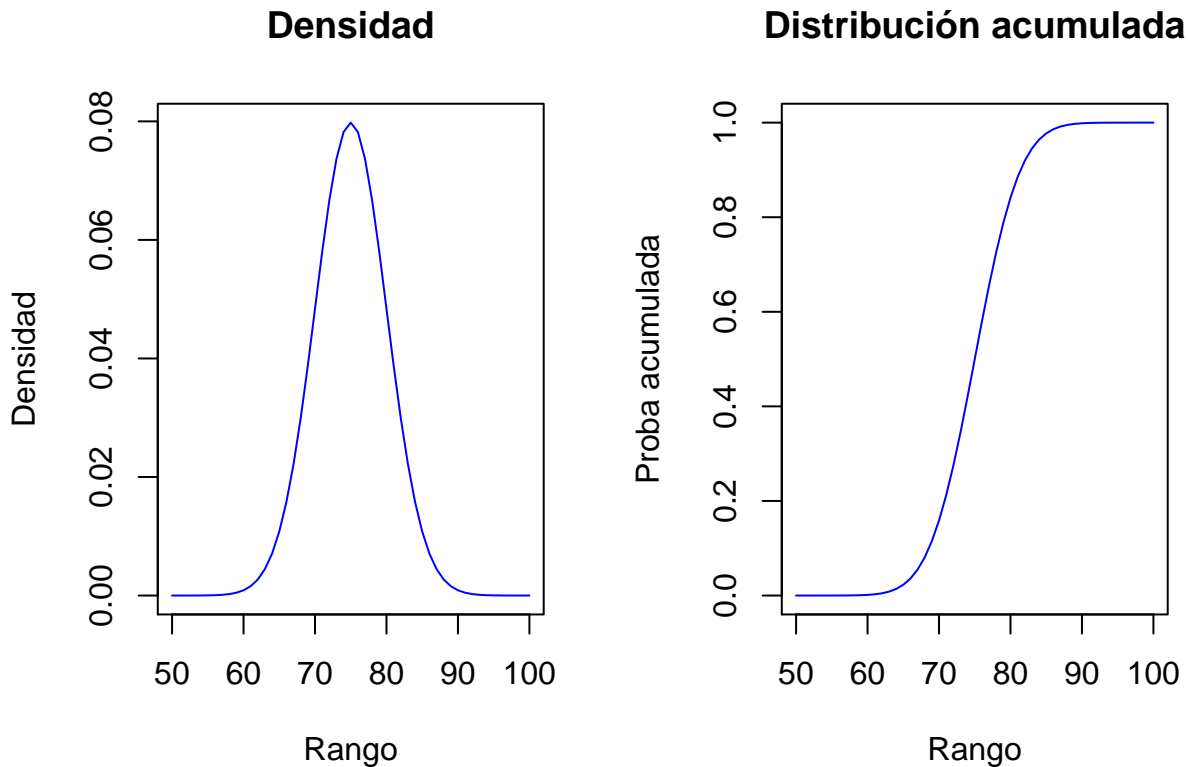
a) ¿Qué proporción de hombres usa cinturón de talla 2?

Resolución:

Tenemos entonces $N = \mathcal{N}(75, 5)$ donde

$$\begin{aligned} N \leq 70 &\longrightarrow \text{talla 1} \\ 70 < N \leq 81 &\longrightarrow \text{talla 2} \\ 81 < N &\longrightarrow \text{talla 3} \end{aligned}$$

```
f_N=function(x){dnorm(x,mean=75,sd=sqrt(25))}
F_N=function(x){pnorm(x,mean=75,sd=sqrt(25))}
par(mfrow=c(1,2))
grilla=seq(75-5*sqrt(25),75+5*sqrt(25),1)
plot(grilla,lapply(grilla,f_N),type='l',main='Densidad',
     xlab='Rango', ylab='Densidad', col='blue')
plot(grilla,lapply(grilla,F_N),type='l',main='Distribución acumulada',
     xlab='Rango', ylab='Proba acumulada', col='blue')
```



```
par(mfrow=c(1,1))
```

Nos piden calcular la proporción de hombres que usa cinturón de talla 2, es decir, $P(70 < N \leq 81) = F_N(81) - F_N(70)$.

```
F_N(81)-F_N(70)
```

```
## [1] 0.7262751
```

- b) ¿Cuál debería ser la longitud máxima de cintura del talle 1 si se quiere que el 30 % de los hombres use talle 1?

Resolución:

Queremos el percentil $x_{0.3}$, es decir, el valor $x_{0.3}$ tal que $F_N(x_{0.3}) = 0.3$:

$$0.3 = F_N(x_{0.3}) = \int_{-\infty}^{x_{0.3}} f_N(s) ds$$

Uamos el comando QNORM(CUANTIL,MU,SIGMA).

```
qnorm(0.3,mean=75,sd=5)
```

```
## [1] 72.378
```

Bonus Track - Para seguir pensando

9. Considerar nuevamente el enunciado del ejercicio 7. Ahora una persona debe tomar el colectivo a las 8:30 para llegar a tiempo a su trabajo.

a) ¿A qué hora debería llegar a la parada para tener 0,8 de probabilidad de llegar a tiempo?

Resolución:

Dada una probabilidad p lo que podemos calcular es el tiempo t_p que espera una persona el $100.p$ % de las veces. Con lo cual si queremos que una persona llegue a tiempo el $100.p$ % de las veces como ese % de veces si o si va a esperar un tiempo t_p entonces debe salir de la casa un tiempo t_p antes.

O sea, sabemos que el 80% de las veces una persona espera menos de $t_{0.8}$, entonces para que la persona llegue a tiempo el 80% de las veces necesitamos que llegue a la parada a las $8 : 30 - t_{0.8} = 8 : 30 - 12m = 8 : 18$.

b) Supongamos que la persona llega a la parada todas las mañanas a la hora calculada en el ítem anterior. ¿Cuál es la probabilidad de que no llegue tarde ningún día de una semana? ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde exactamente dos días de una semana?

Resolución:

Podemos pensar el tiempo de espera de cada día como una variable U , es decir, tenemos U_1, \dots, U_7 i.i.d. Entonces la probabilidad de que no llegue tarde ningún día de la semana es la probabilidad de que todos los días espere menos de $t_{0.8}$ (digo, como la persona está en la parada todos los días a las 8 : 18 entonces si un día espera mas de $t_{0.8}$ va a llegar tarde), es decir

$$P(U_1 \leq t_{0.8}, \dots, U_7 \leq t_{0.8}) = P(U_1 \leq t_{0.8})^7 = 0.8^7.$$

La probabilidad de que llegue tarde exactamente dos días de la semana es

$$P(U_i > t_{0.8}, U_j > t_{0.8}) = \binom{7}{2} P(U_1 > t_{0.8})^2 = \binom{7}{2} 0.2^2$$

c) Supongamos que la persona llega a la parada todas las mañanas a la hora calculada en el ítem 9 a). Sea D la variable aleatoria que cuenta el número de días laborales que deben pasar hasta que llegue tarde al trabajo por primera vez. Indicar que distribución tiene D y cuál es su esperanza.

Resolución:

Sea $D = \#$ días laborales que deben pasar hasta que llegue tarde por primera vez. Notar que D podemos pensarla como la cantidad de experimentos que hay que realizar hasta obtener un éxito, donde la probabilidad de obtener un éxito es 0.2. Es decir $D = \mathcal{G}(0.2)$ donde la esperanza sabemos que es $\frac{1}{0.2} = 5$.

10. Considerar el enunciado presentado en el ejercicio 8 y responder los siguientes puntos.

- a) Carolina sabe que la cintura de su novio mide más de 70 cm. ¿Cuál es la probabilidad de que use talla 2?

Resolución:

Sabemos que $N > 70$ entonces queremos

$$\begin{aligned} P(70 < N \leq 81 | N > 70) &= \frac{P(70 < N \leq 81, N > 70)}{P(N > 70)} \\ &= \frac{P(70 < N \leq 81)}{P(N > 70)} \\ &= \frac{F_N(81) - F_N(70)}{1 - F_N(70)} \end{aligned}$$

```
(F_N(81)-F_N(70))/(1-F_N(70))
```

```
## [1] 0.8632312
```

- b) Si en la tienda entran azarosamente hombres a comprar de un cinturón, ¿cuál es la probabilidad de que los primeros tres cinturones que se vendan sean del mismo tamaño?

Resolución:

Supongamos que en la tienda se vendieron k cinturones. Podemos modelar este fenómeno tomando N_1, \dots, N_k i.i.d. Y queremos entonces la probabilidad de que N_1, N_2, N_3 se muevan entre los mismo valores (o sea que las 3 primeras ventas son del mismo tamaño). Entonces queremos

$$P = P(N_i \leq 70, 1 \leq i \leq 3) + P(70 < N_i \leq 81, 1 \leq i \leq 3) + P(81 < N_i, 1 \leq i \leq 3).$$

Como son variables i.i.d tenemos

$$P = P(N \leq 70)^3 + P(70 < N \leq 81)^3 + P(81 < N)^3$$

```
F_N(70)^3+(F_N(81)-F_N(70))^3+(1-F_N(81))^3
```

```
## [1] 0.3886095
```