Clase Práctica 12/04/2019

Introducción a la computación

1^{er} cuatrimestre 2019

Ejercicio 1. *Demostrar que el siguiente algoritmo es correcto respecto de su especificación.*

- ***ENCABEZADO:*** *sucesor:* $x \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- ***PRECONDICIÓN:*** $\{x = x_0\}$
- ***POSTCONDICIÓN:*** $\{RV = x_0 + 1\}$
- ***ALGORITMO:*** $RV \leftarrow x + 1$

Resolución. Si tenemos $P = \{x = x_0\}$, $S = RV \leftarrow x + 1$, $Q = \{RV = x_0 + 1\}$, queremos ver que la poscondición mas fuerte de ejecutar S a partir de P implica Q, es decir que $sp(S, P) \Rightarrow Q$.
Recordemos la definición de $sp(z \leftarrow E, P)$:

$$sp(z \leftarrow E, P) \equiv (\exists v) z = E[z : v] \wedge P[z : v]$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
sp(S, P) &\equiv sp(RV \leftarrow x + 1, x = x_0) && \text{Por def. de S y P} \\
&\equiv (\exists y) RV = (x + 1)[RV : y] \wedge (x = x_0)[RV : y] && \text{Por def. de } sp(z \leftarrow E, P) \\
&\equiv (\exists y) RV = (x + 1) \wedge (x = x_0) && \text{RV no aparecía ni en } (x+1) \text{ ni en } x = x_0 \\
&\equiv RV = (x + 1) \wedge (x = x_0) && y \text{ no aparece en la formula} \\
&\Rightarrow RV = x_0 + 1 && \text{sustitución}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2. *Demostrar que el siguiente algoritmo es correcto respecto de su especificación.*

- ***ENCABEZADO:*** *tres:* $x \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- ***PRECONDICIÓN:*** $\{true\}$
- ***POSTCONDICIÓN:*** $\{RV = 3\}$
- ***ALGORITMO:*** $RV \leftarrow 3$

Demostración. Tenemos $P = \{true\}$, $S = RV \leftarrow 3$, $Q = \{RV = 3\}$. ¿Valdrá $sp(S, P) \Rightarrow Q$?

$$\begin{aligned}
sp(S, P) &\equiv sp(RV \leftarrow 3, true) \\
&\equiv (\exists v) RV = 3[RV : v] \wedge true[RV : v] \\
&\equiv (\exists v) RV = 3 \wedge true \\
&\equiv RV = 3 \wedge true \\
&\Rightarrow RV = 3
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3. *Demostrar que el siguiente algoritmo es correcto respecto de su especificación.*

- ***ENCABEZADO:*** $producto$: $x \in \mathbb{Z} \times y \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- ***PRECONDICIÓN:*** $\{x = x_0 \wedge y = y_0\}$
- ***POSTCONDICIÓN:*** $\{RV = x_0 * y_0\}$
- ***ALGORITMO:***

  $RV \leftarrow x$

  $RV \leftarrow RV * y$

Demostración. Tenemos $P = \{x = x_0 \wedge y = y_0\}$, $S = (RV \leftarrow x; RV \leftarrow RV * y)$, $Q = \{RV = x_0 * y_0\}$. ¿$sp(S, P) \Rightarrow Q$? Recordemos que

$$sp(S_1; S_2, P) \equiv sp(S_2, (sp(S_1, P)))$$

Luego:

$$\begin{aligned}
sp(S, P) &\equiv sp(RV \leftarrow x; RV \leftarrow RV * y, x = x_0 \wedge y = y_0) \\
&\equiv sp(RV \leftarrow RV * y, sp(RV \leftarrow x, x = x_0 \wedge y = y_0)) \\
&\equiv sp(RV \leftarrow RV * y, (\exists v) RV = x[RV : v] \wedge (x = x_0 \wedge y = y_0)[RV : v]) \\
&\equiv sp(RV \leftarrow RV * y, (\exists v) RV = x \wedge x = x_0 \wedge y = y_0) \\
&\equiv sp(RV \leftarrow RV * y, RV = x \wedge x = x_0 \wedge y = y_0) \\
&\equiv (\exists v) RV = RV * y[RV : v] \wedge (RV = x \wedge x = x_0 \wedge y = y_0)[RV : v] \\
&\equiv (\exists v) RV = v * y \wedge (v = x \wedge x = x_0 \wedge y = y_0) \\
&\Rightarrow RV = x_0 * y_0
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 4. *Demostrar que el siguiente algoritmo es correcto respecto de su especificación.*

- ***ENCABEZADO:*** $distintos$: $x \in \mathbb{Z} \times y \in \mathbb{Z} \to \mathbb{B}$
- ***PRECONDICIÓN:*** $\{x = x_0 \wedge y = y_0\}$
- ***POSTCONDICIÓN:*** $\{RV = (x_0 \neq y_0)\}$
- ***ALGORITMO:***

  if $(x \neq y)$ *{*

  $\quad RV \leftarrow true$ *}*

  else {

  $\quad RV \leftarrow false$

Demostración. Tenemos $P = \{x = x_0 \wedge y = y_0\}$, $S = \ldots$, $Q = \{RV = (x_0 \neq y_0)\}$. ¿$sp(S, P) \Rightarrow Q$? Recordemos que

$$sp(if(B) S_1 else S_2, P) \equiv sp(S_1, B \wedge P) \vee sp(S_2, \neg B \wedge P)$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
sp(S,P) &\equiv sp(S, x = x_0 \wedge y = y_0)\\
&\equiv sp(RV \leftarrow true, x \neq y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0) \vee sp(RV \leftarrow false, x = y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0)\\
&\equiv (\exists v) RV = true[RV : v] \wedge (x \neq y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0)[RV : v] \vee\\
&\vee ((\exists w) RV = false[RV : w] \wedge (x = y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0)[RV : w])\\
&\equiv RV = true \wedge (x \neq y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0) \vee (RV = false \wedge (x = y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0))\\
&\Rightarrow (RV = true \wedge (x_0 \neq y_0)) \vee (RV = false \wedge (x_0 = y_0))\\
&\Rightarrow RV = (x_0 \neq y_0)
\end{aligned}
$$

$\square$