

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## MODELO FÍSICO

Resulta imprescindible para controlar el quadcopter comprender cabalmente su comportamiento. Con esta óptica, lo que se busca es obtener el modelo más sencillo que sea capaz de representar adecuadamente al sistema. El objetivo de esta sección es el de realizar el desarrollo de dicho modelo. La forma de modelar el sistema elegida es un Modelo de Variables de Estado, de ahora en más MVE.

Al tratarse de una plataforma comercial no se tienen datos sobre algunos de los parámetros fundamentales para el desarrollo de dicho modelo. Por ejemplo, no se conoce como es la respuesta de los motores (tanto velocidad como empuje), el tensor de inercia del sistema, etc. Por lo tanto dividiremos el análisis del modelo en varias etapas. La primera de ellas consiste en obtener las constantes del sistema, luego se procede a caracterizar la respuesta de los motores, a continuación se desarrolla el modelo teórico, finalmente en la última sección se presentan los resultados obtenidos con dicho modelo y se contrastan con la realidad.

### 1.1. Constantes del sistema

### 1.2. Caracterización de los motores

### 1.3. Desarrollo teórico

#### 1.3.1. Sistema de Referencia

A lo largo del presente desarrollo se trabajará constantemente con dos sistemas de referencia; uno inercial<sup>1</sup> solidario a la tierra ( $S_I$ ) y otro solidario al quadcopter ( $S_q$ ). El sistema  $S_q$  se puede obtener realizando tres rotaciones compuestas del sistema  $S_I$ , dichas rotaciones se muestran en la figura 1.1.

La importancia del sistema  $S_q$  radica en las simplificaciones que introduce a la hora de escribir las ecuaciones, ya que por ejemplo en dicho sistema el empuje de las helices, los torques que introducen y velocidades angulares de los motores del quadcopter tienen siempre la misma dirección.

---

<sup>1</sup>En esta sección se consideran sistemas inerciales en el sentido clásico

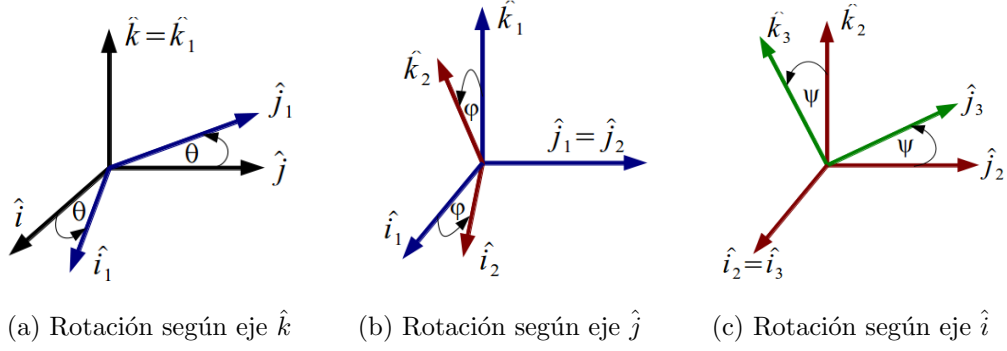


Figura 1.1: Rotaciones

Las tres transformaciones pueden representarse matricialmente de la siguiente forma:

$$H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} H_2^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

La transformación de las coordenadas del sistema inercial al sistema solidario al quadcopter se obtiene realizando el producto de las tres matrices de rotación definidas.

$$H_I^q = H_I^1 \cdot H_1^2 \cdot H_2^q = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \\ -\cos \psi \sin \theta - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \cos \theta - \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \phi \sin \psi \\ \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\cos \theta \sin \psi - \cos \psi \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix}$$

Además de la relación entre las coordenadas de un sistema y del otro, es útil conocer la relación que existe entre la velocidad angular del sistema y las derivadas de los ángulos de Euler. Por como fue construido el sistema de referencia solidario al quadcopter, se deduce trivialmente que la velocidad angular del mismo se puede escribir como:

$$\vec{\omega} = w_{q1}\vec{i}_q + w_{q2}\vec{j}_q + w_{q3}\vec{k}_q = \dot{\theta}\vec{k} + \dot{\phi}\vec{j}_1 + \dot{\psi}\vec{i}_2$$

Al realizar la última rotación el vector  $\vec{i}_2$  no se modifica. Por otra parte, multiplicando los vectores  $\vec{k}$  y  $\vec{j}_1$  por las matrices  $H_1^2 \cdot H_2^q$  y  $H_2^q$  respectivamente se puede obtener la velocidad angular del quadcopter en el sistema de coordenadas referido a el. Lo que tenemos entonces es:

$$\vec{\omega} = w_{q1}\vec{i}_q + w_{q2}\vec{j}_q + w_{q3}\vec{k}_q = (\dot{\psi} + \dot{\theta} \sin \phi)\vec{i}_q + (\dot{\phi} \cos \psi + \dot{\theta} \cos \phi \sin \psi)\vec{j}_q + (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi)\vec{k}_q$$

De esta ecuación se obtienen tres relaciones entre las velocidades angulares respecto de cada eje principal del sistema de coordenadas solidario al quadcopter con las derivadas de los ángulos de Euler. Podemos re escribir dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{q1} - \omega_{q3} \tan \phi \cos \psi - \omega_{q2} \tan \phi \sin \psi \\ \omega_{q2} \cos \psi - \omega_{q3} \sin \psi \\ \omega_{q3} \frac{\cos \psi}{\cos \phi} + \omega_{q2} \frac{\sin \psi}{\cos \phi} \end{pmatrix}$$

De la misma forma deduciremos la relación que existe entre la velocidad del sistema expresada en el marco de referencia inercial con la velocidad expresada en

el sistema de referencia solidario al quadcopter. Lo que tenemos es que:

$$\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_1\vec{i}_q + v_2\vec{j}_q + v_3\vec{k}_q$$

Para pasar del un sistema de referencia al otro alcanza con multiplicar por la matriz de cambio de base definida previamente. Operando se obtiene la siguiente relación entre las magnitudes de interés.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q1} \cos \phi \cos \theta - v_{q2} (\cos \phi \sin \theta + \cos \theta \sin \phi \sin \psi) + v_{q3} (\sin \psi \sin \theta - \cos \psi \cos \theta \sin \phi) \\ v_{q1} \cos \phi \sin \theta + v_{q2} (\cos \psi \cos \theta - \sin \theta \sin \phi \sin \psi) - v_{q3} (\cos \theta \sin \psi + \cos \psi \sinh \theta \sin \phi) \\ v_{q1} \sin \phi + v_{q2} \cos \phi \sin \psi + v_{q3} \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix}$$

Detendremos en este punto el análisis cinemático para considerar la dinámica del sistema. Para resolver el problema de la dinámica del sistema se consideran las ecuaciones cardinales.

### 1.3.2. Primera Cardinal

La primer cardinal indica que en un sistema inercial la suma de las fuerzas externas a un objeto es igual a su masa total por su aceleración. Esto se puede escribir:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$$

El vector aceleración se puede obtener derivando la velocidad. Para realizar la derivada de un vector expresado en un sistema móvil puede utilizarse la siguiente formula:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Operando se obtiene que:

$$\vec{a} = (\dot{v}_{q1} + v_{q3}\omega_{q2} - v_{q2}\omega_{q3})\vec{i}_q + (\dot{v}_{q2} + v_{q1}\omega_{q3} - v_{q3}\omega_{q1})\vec{j}_q + (\dot{v}_{q3} + v_{q2}\omega_{q1} - v_{q1}\omega_{q2})\vec{k}_q.$$

Las fuerzas que actúan sobre el sistema son los empujes de cada turbina y el peso. Los empujes ( $T_i$  con  $i = 1, 4$ ) son en el sentido de  $\vec{k}_q$  mientras que el peso es en el sentido de  $\vec{k}$ . Para obtener el peso en el sistema  $S_q$  alcanza con realizar el cambio de base del sistema  $S_I$  al sistema solidario al quadcopter. El empuje de los motores puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \vec{T}_i = \sum_{i=1}^{i=4} T_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Operando, se puede reescribir la primer cardinal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{q1} \\ \dot{v}_{q2} \\ \dot{v}_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q2}\omega_{q3} - v_{q3}\omega_{q2} \\ v_{q3}\omega_{q1} - v_{q1}\omega_{q3} \\ v_{q1}\omega_{q2} - v_{q2}\omega_{q1} \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \sin \psi \\ \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^4 T_i$$

### 1.3.3. Segunda Cardinal

La segunda cardinal indica que la derivada del momento angular de un sistema respecto a un punto (Q) es igual al torque externo que se ejerce sobre el mismo más un término que depende de la velocidad de dicho punto. La ecuación queda:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = M_Q^{ext} + M\vec{v}_G \times \vec{r}_Q$$

Asumiendo simetría del sistema, se puede considerar que el centro de masa del sistema se encuentra en el centro de la esfera principal del mismo. Esto no es com-

pletamente cierto ya que la batería del UAV queda por fuera de la esfera y los apoyos también, sin embargo se puede asumir en una primera aproximación del modelo que si lo es. De esta forma si planteamos la segunda cardinal en el centro de masa obtenemos:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = M_G^{ext}$$

Si nombramos a las turbinas como se observa en el esquema ?? se obtiene rápidamente que:

$$M_G^{ext} = L \begin{pmatrix} T3 - T1 \\ T2 - T4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte el momento angular del sistema se compone del momento angular del quadcopter y de cada motor. Consideraremos el quadcopter sin los motores como un primer rígido y los motores cada uno como un rígido independiente.

EL momento angular de un rígido respecto a un punto Q puede calcularse como:

$$\vec{L}_{Q_i} = M_i(\vec{G_i} - \vec{Q}) \times \vec{V}_Q + \Pi_{Q_i} \vec{\Omega}_i$$

Donde  $M_i$ ,  $G_i$ ,  $\Pi_{Q_i}$  y  $\vec{\Omega}_i$  son la masa de cada rígido, su centro de masa, su tensor de inercia y su velocidad angular respectivamente.

Como se propuso anteriormente, se elige calcular el momento angular en el centro de masa del quadcopter. Asumiendo que los cuatro motores son idénticos podemos escribir el momento angular del quadcopter sin los motores como:

$$\vec{L}_{G_q} = (M - 4M_m)(\vec{G} - \vec{G}) \times \vec{V}_G + \Pi_{G_q} \vec{\omega}_q = \Pi_{G_q} \vec{\omega}_q$$

Del mismo modo el momento angular del primer motor queda:

$$\vec{L}_{G_{m1}} = M_m \vec{L}_{x'} \times \vec{V}_G + \Pi_{G_{m1}} \vec{\Omega}_i$$

Por la configuración del sistema se observa que al sumar el primer término de cada momento angular de los motores el resultado es cero. Por otra parte la velocidad angular de cada motor es  $\vec{\Omega}_i = \vec{\omega}_q + \omega_i \vec{k'}$ , donde  $\omega_i$  es la velocidad con la que gira cada motor respecto de su eje principal. Nuevamente asumiendo que todos los motores son idénticos se tiene:

$$\vec{L}_G = \Pi_{G_q} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_m} (4\vec{\omega}_q + \sum_{i=1}^{i=4} \omega_i \vec{k'}) = (\Pi_{G_q} + 4\Pi_{G_m}) \vec{\omega}_q + \Pi_{G_m} \sum_{i=1}^{i=4} \omega_i \vec{k'}$$

Uno de los términos de la segunda cardinal es la derivada del momento angular. Tanto los tensores de inercia como las velocidades angulares se encuentran expresadas en el sistema relativo. Para realizar dicha derivada se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

En la ecuación anterior  $\frac{d}{dt}$  representa la derivada temporal, mientras que  $\frac{d}{dt}$  re-

presenta la derivada temporal respecto del sistema móvil. Por otra parte  $\vec{\Omega}$  es la velocidad angular del sistema móvil respecto al inercial. Lo que se obtiene de dicha derivada es:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = (\Pi_{G_q} + 4\Pi_{G_m})\dot{\vec{\omega}}_q + \Pi_{G_m} \sum_{i=1}^{i=4} \dot{\omega}_i \vec{k}_i + \vec{\omega}_q \times ((\Pi_{G_q} + 4\Pi_{G_m})\vec{\omega}_q + \Pi_{G_m} \sum_{i=1}^{i=4} \omega_i \vec{k}_i)$$

En la ecuación anterior se puede hacer la siguiente simplificación:  $\Pi_G = (\Pi_{G_q} + 4\Pi_{G_m})$ , donde  $\Pi_G$  es el momento de inercia de todo el sistema en su centro de masa.

A partir del cálculo de esta derivada y de los momentos externos hallados anteriormente, podemos escribir la segunda cardinal. Operando con dicha ecuación se la puede llevar a la forma:

## ASUMO QUE LOS TENSORES DE INERCIA SON TODOS DIAGONALES

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_{q1} \\ \dot{\omega}_{q2} \\ \dot{\omega}_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_{q2}\omega_{q3}(I_{yy}-I_{zz})+(T_3-T_1)+\omega_{q2}I_{zzm}(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{I_{xx}} \\ \frac{\omega_{q1}\omega_{q3}(-I_{xx}+I_{zz})+(T_2-T_4)+\omega_{q1}I_{zzm}(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{I_{yy}} \\ \frac{\omega_{q1}\omega_{q2}(I_{xx}-I_{yy})-I_{zzm}(\dot{\omega}_1+\dot{\omega}_2+\dot{\omega}_3+\dot{\omega}_4)}{I_{zz}} \end{pmatrix}$$

### 1.3.4. Modelo en variables de Estado

### 1.3.5. Algunas consideraciones adicionales sobre el modelo