

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## CÁLCULOS NECESARIOS PARA LA LINEALIZACIÓN DEL SISTEMA

Tal como se explica en el capítulo ?? se linealiza el MVE obtenido en ??, esto es, expresar el sistema no lineal bajo la forma:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \quad (1.1)$$

Donde  $A(t)$  y  $B(t)$  son tales que  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{x=x^*, u=u^*}$  y  $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}|_{x=x^*, u=u^*}$

### 1.1. Linealización para cualquier trayectoria

Para una trayectoria genérica al linealizar el sistema se obtienen las matrices:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Las entradas de la matriz de 1.2 representan matrices de  $3 \times 3$  mientras que las entradas de la matriz 1.3 representan matrices de  $3 \times 4$ . Es importante conocer las entradas de las matrices anteriores, al menos en lo que respecta a las dependencias de cada una de ellas con las variables de estado.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} f_{A_{12_1}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_2}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_3}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) \\ f_{A_{12_4}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_5}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_6}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) \\ f_{A_{12_7}}(\psi, \varphi, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_8}}(\psi, \varphi, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} f_{A_{13_1}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_2}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_3}}(\psi, \varphi, \theta) \\ f_{A_{13_4}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_5}}(\psi, \varphi, \theta) & f_{A_{13_6}}(\psi, \varphi, \theta) \\ f_{A_{13_7}}(\varphi) & f_{A_{13_8}}(\psi, \varphi) & f_{A_{13_8}}(\psi, \varphi) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} f_{A_{22_1}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & f_{A_{22_2}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 \\ f_{A_{22_4}}(\psi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 & 0 \\ f_{A_{22_7}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & f_{A_{22_8}}(\psi, \varphi, \omega_{qy}, \omega_{qz}) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$A_{24} = \begin{pmatrix} 1 & f_{A_{24_2}}(\psi, \varphi) & f_{A_{24_3}}(\psi, \varphi) \\ 0 & f_{A_{24_5}}(\psi) & f_{A_{24_6}}(\psi) \\ 0 & f_{A_{24_8}}(\psi, \varphi) & f_{A_{24_9}}(\psi, \varphi) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & g \cos \varphi & 0 \\ -g \cos \varphi \cos \psi & g \sin \varphi \sin \psi & 0 \\ g \cos \varphi \sin \psi & g \sin \varphi \cos \psi & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{qz} & -\omega_{qy} \\ -\omega_{qz} & 0 & \omega_{qx} \\ \omega_{qy} & -\omega_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 0 & -v_{qz} & v_{qy} \\ v_{qz} & 0 & -v_{qx} \\ -v_{qy} & v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$A_{42} = Mgd \begin{pmatrix} -\frac{\cos \varphi \cos \psi}{I_{xx}} & \frac{\sin \varphi \sin \psi}{I_{xx}} & 0 \\ 0 & -\frac{\cos \phi}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$A_{43} = Mgd \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{I_{xx}} & 0 \\ \frac{d}{I_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_{zzm}}{I_{xx}}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\omega_{qz} & \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\omega_{qy} \\ \frac{I_{zzm}}{I_{yy}}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + \frac{-I_{xx} + I_{zz}}{I_{yy}}\omega_{qz} & \frac{-I_{xx} + I_{zz}}{I_{yy}}\omega_{qx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{B_{31_9}}(\omega_1) & f_{B_{31_0}}(\omega_2) & f_{B_{31_1}}(\omega_3) & f_{B_{31_2}}(\omega_4) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$B_{41} = \begin{pmatrix} 0 & f_{B_{41_2}}(\omega_2) & 0 & f_{B_{41_4}}(\omega_4) \\ f_{B_{41_5}}(\omega_1) & 0 & f_{B_{41_6}}(\omega_3) & 0 \\ f_{B_{41_9}}(\omega_1) & f_{B_{41_0}}(\omega_2) & f_{B_{41_1}}(\omega_3) & f_{B_{41_1}}(\omega_4) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

## 1.2. Linealización para la condición de hovering

Con las condiciones ?? y ?? obtenidas en el capítulo ?? se pueden obtener las matrices A y B en el caso particular de hovering. Además puede verificarse que todas las entradas de dichas matrices son constantes y que por lo tanto estamos frente a un sistema lineal invariante en el tiempo.

$$A_{hov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{hov_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & A_{hov_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & A_{hov_{42}} & A_{hov_{43}} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$B_{hov} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{hov_{31}} \\ B_{hov_{41}} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Donde  $Id$  es la matriz identidad y las matrices  $A_{hov_{13}}, A_{hov_{32}}, B_{hov_{31}}, A_{hov_{41}}, A_{hov_{42}}$  y  $A_{hov_{43}}$  son:

$$A_{hov_{13}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{hov_{32}} = \begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$A_{hov_{42}} = Mgd \begin{pmatrix} -\frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_{zz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$A_{hov_{43}} = A_{43} \quad (1.20)$$

$$B_{hov_{31}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} & 1,5 \times 10^{-2} s^{-2} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

$$B_{hov_{41}} = \begin{pmatrix} 0 & 2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 & -2,9 \times 10^{-1} s^{-2} \\ -2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 & 2,9 \times 10^{-1} s^{-2} & 0 \\ 5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & -5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & 5,0 \times 10^{-2} s^{-2} & -5,0 \times 10^{-2} s^{-2} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Dado que fue impuesto que  $\theta$  fuese constante para este movimiento, tenemos efectivamente un sistema lineal invariante en el tiempo.

### 1.3. Vuelo en linea recta a velocidad constante

Las matrices A y B obtenidas para esta situación de vuelo son:

$$A_{rec} = \begin{pmatrix} 0 & A_{rec12} & A_{rec13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & A_{rec32} & 0 & A_{rec34} \\ 0 & A_{rec42} & A_{rec43} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$B_{rec} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{rec31} \\ B_{rec41} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Donde  $A_{rec13} = A_{hov13}$ ,  $A_{rec32} = A_{hov32}$ ,  $A_{rec42} = A_{hov42}$ ,  $A_{rec43} = A_{hov43}$ ,  $B_{rec} = B_{hov}$  y

$$A_{rec12} = \begin{pmatrix} v_{qz} \sin \theta & v_{qz} \cos \theta & -v_{qy} \cos \theta - v_{qx} \sin \theta \\ -v_{qz} \cos \theta & v_{qz} \sin \theta & v_{qx} \cos \theta - v_{qy} \sin \theta \\ v_{qy} & -v_{qz} & 0 \end{pmatrix} \quad A_{hov32} = \begin{pmatrix} 0 & -v_{qz} & v_{qy} \\ v_{qz} & 0 & -v_{qx} \\ -v_{qy} & v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

### 1.4. Vuelo a velocidad angular constante

Luego de las modificaciones introducidas en el MVE en la sección ?? se procede a linealizar el sistema obtenido.

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{cir11} & 0 & Id & A_{cir14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Las matrices obtenidas son todas idénticas a las obtenidas en la linealización del MVE original a excepción de las matrices  $A_{cir_{11}}$  y  $A_{cir_{14}}$ . Estas tienen la forma:

$$A_{circ_{11}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{qz} & \omega_{qy} \\ \omega_{qz} & 0 & -\omega_{qx} \\ -\omega_{qy} & \omega_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad A_{cir_{14}} = \begin{pmatrix} 0 & z_z & -y_q \\ -z_q & 0 & x_q \\ y_q & -x_q & 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$