Parte I

Modelo Físico

Resulta imprescindible para controlar el quadcopter comprender cabalmente su comportamiento. Con esta óptica, lo que se busca es obtener el modelo más sencillo que sea capaz de representar adecuadamente al sistema. El objetivo de esta sección es el de realizar el desarrollo de dicho modelo. La forma de modelar el sistema elegida es un Modelo de Variables de Estado, de ahora en más MVE.

Al tratarse de una plataforma comercial no se tienen datos sobre algunos de los parámetros fundamentales para el desarrollo de dicho modelo. Por ejemplo, no se conoce como es la respuesta de los motores (tanto velocidad como empuje), el tensor de inercia del sistema,etc. Por lo tanto dividiremos el análisis del modelo en varias etapas. La primera de ellas consiste en obtener las constantes del sistema, luego se procede a caracterizar la respuesta de los motores, a continuacion se desarrolla el modelo teórico, finalmente en la última sección se presentan los resultados obtenidos con dicho modelo y se contrastan con la realidad.

1. Constantes del sistema

2. Caracterización de los motores

3. Desarrollo teórico

3.1. Sistema de Referencia

A lo largo del presente desarrollo se trabajará constantemente con dos sistemas de referencia; uno inercial[1] solidario a la tierra (S_I) y otro solidario al quadcopter (S_q). El sistema S_q se puede obtener realizando tres rotaciones compuestas del sistema S_I, dichas rotaciones se muestran en la figura **??**. La importancia del sistema S_q radica en las simplificaciones que introduce a la hora de escribir las ecuaciones, ya que por ejemplo en dicho sistema el empuje de las helices, los torques que introducen y velocidades angulares de los motores del quadcopter tienen siempre la misma dirección.

Las tres transformaciones pueden reprsesentarse matricialmente de la siguiente forma:

$$H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} H_2^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

La transformacion de las coordenadas del sistema inercial al sistema solidario al quadcopter se obtiene realizando el producto de las tres matrices de rotacion definidas.

$$H_I^q = H_I^1.H_1^2.H_2^q = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & \sin\phi \\ -\cos\psi\sin\theta - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\cos\theta - \sin\phi\sin\psi\sin\theta & \cos\phi\sin\psi \\ \sin\psi\sin\theta - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\psi \end{pmatrix}$$

Adem?as de la relacion entre las coordenadas de un sistema y del otro, es útil conocer la relacion que existe entre la velocidad angular del sistema y las derivadas

[1]En esta sección se consideran sistemas inerciales en el sentido clásico

de los angulos de euler. Por como fue construido el sistema de referencia solidario al quadcopter, se deduce trivialmente que la velocidad angular del mismo se puede escribir como:

$$\vec{\omega} = w_{q1}\vec{i_q} + w_{q2}\vec{j_q} + w_{q3}\vec{k_q} = \dot{\theta}\vec{k} + \dot{\phi}\vec{j_1} + \dot{\psi}\vec{i_2}$$

Al realizar la última rotaci?on el vector $\vec{i_2}$ no se modifica. Por otra parte, multiplicando los vectores $\vec{k}$ y $\vec{j_1}$ por las matrices $H_1^2.H_2^q$ y H_2^q respectivamente se puede obtener la velocidad angular del quadcopter en el sistema de coordenadas referido a el. Lo que tenemos entonces es:

$$\vec{\omega} = w_{q1}\vec{i_q} + w_{q2}\vec{j_q} + w_{q3}\vec{k_q} = (\dot{\psi} + \dot{\theta}\sin\phi)\vec{i_q} + (\dot{\phi}\cos\psi + \dot{\theta}\cos\phi\sin\psi)\vec{j_q} + (\dot{\theta}\cos\phi\cos\psi - \dot{\phi}\sin\psi)\vec{k_q}$$

De esta ecuaci?on se obtienen tres relaciones entre las velocidades angulares respecto de cada eje principal del sistema de coordenadas solidario al quadcopter con las derivadas de los angulos de euler. Podemos re escribir dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{q1} - \omega_{q3}\tan\phi\cos\psi - \omega_{q2}\tan\phi\sin\psi \\ \omega_{q2}\cos\psi - \omega_{q3}\sin\psi \\ \omega_{q3}\frac{\cos\psi}{\cos\phi} + \omega_{q2}\frac{\sin\psi}{\cos\phi} \end{pmatrix}$$

Detendremos en este punto el analisis cinematico para considerar la dinamica del mismo. Para resolver el problema de la dinamica del sistema se consideran las ecuaciones cardinales.

3.2. Primera Cardinal

La primer cardinal indica que en un sistema inercial la suma de las fuerzas externas a un objeto es igual a su masa total por su aceleracion. Esto se puede escribir: $\sum \vec{F_{ext}} = M\vec{a}$

El vector aceleracion no es otra cosa que la derivada segunda del vector posici?on del centro de masa. Por lo tanto se tiene que $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$. Las fuerzas que actuan sobre el sistema son los empujes de cada turbina y el peso. Los empujes (T_i con $i = 1.,4$) son en el sentido de $\vec{k_q}$ mientras que el peso es en el sentido de $\vec{k}$. Para obtener el empuje de los motores en el sistema S_I alcanza con realizar el cambio de base del sistema S_q al sistema inercial. El empuje de los motores puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{i=4} T_i = \sum_{i=1}^{i=4} T_i H_I^q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Operando, se puede reescribir la primer cardinal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{M}\left[\begin{pmatrix} \sin\psi\sin\theta - \cos\psi\cos\theta\sin\phi \\ -\cos\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi\cos\psi \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

3.3. Segunda Cardinal

La segunda cardinal indica que la derivada del momento angular de un sistema respecto a un punto (Q) es igual al torque externo que se ejerce sobre el mismo más un término que depende de la velocidad de dicho punto. La ecuación queda:

$$\frac{d\vec{L_Q}}{dt} = M_Q^{ext} + M\vec{v_G} \times \dot{\vec{r_Q}}$$

Asumiendo simetría del sistema, se puede considerar que el centro de masa del sistema se encuentra en el centro de la esfera principal del mismo. Esto no es completamente cierto ya que la batería del UAV queda por fuera de la esfera y los apoyos también, sin embargo se puede asume en una primera aproximación del modelo que si lo es.De esta forma si planteamos la segunda cardinal en el centro de masa obtenemos:

$$\frac{d\vec{L_G}}{dt} = M_G^{ext}$$

Si nombramos a las turbinas como se observa en el esquema **??** se obtiene rapidamente que:

$$M_G^{ext} = L \begin{pmatrix} T3 - T1 \\ T2 - T4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte el momento angular del sistema se compone del momento angular del quadcopter y de cada motor. Consideraremos el quadcopter sin los motores como un primer rigido y los motores cada uno como un rigido independiente.

EL momento angular de un rígido respecto a un punto Q puede calcularse como:

$$\vec{L_{Q_i}} = M_i(\vec{G_i - Q}) \times \vec{V_Q} + \Pi_{Q_i}\vec{\Omega_i}$$

Donde M_i, G_i, Π_{Q_i} y $\vec{\Omega_i}$ son la masa de cada rigido, su centro de masa, su tensor de inercia y su velocidad angular respectivamente.

Como se propuso anteriormente, se elije calcular el momento angular en el centro de masa del quadcopter. Asumiendo que los cuatro motores son idénticos podemos escribir el momento angular del quadcopter sin los motores como:

$$\vec{L_{G_q}} = (M - 4M_m)(\vec{G - G}) \times \vec{V_G} + \Pi_{G_q}\vec{w_q} = \Pi_{G_q}\vec{\omega_q}$$

Del mismo modo el momento angular del primer motor queda:

$$\vec{L_{G_{m1}}} = M_m L\vec{x\prime} \times \vec{V_G} + \Pi_{G_{m1}}\vec{\Omega_i}$$

Por la configuración del sistema se observa que al sumar el primer término de cada momento angular de los motores el resultado es cero. Por otra parte la velocidad angular de cada motor es $\vec{\Omega_i} = \vec{\omega_q} + \omega_i\vec{k\prime}$, donde ω_i es la velocidad con la que gira cada motor respecto de su eje principal. Nuevamente asumiendo que todos los motores son idénticos se tiene:

$$\vec{L_G} = \Pi_{G_q}\vec{\omega_q} + \Pi_{G_m}(4\vec{\omega_q} + \sum_{i=1}^{i=4}\omega_i \vec{k\prime}) = (\Pi_{G_q} + 4\Pi_{G_m})\vec{\omega_q} + \Pi_{G_m}\sum_{i=1}^{i=4}\omega_i \vec{k\prime}$$

Uno de los términos de la segunda cardinal es la derivada del momento angular. Tanto los tensores de inercia como las velocidades angulares se encuentran expresadas en el sistema relativo. Para realizar dicha derivada se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\prime\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

En la ecuación anterior $\frac{d}{dt}$ representa la derivada temporal, mientras que $\frac{d\prime}{dt}$ representa la derivada temporal respecto del sistema móvil. Por otra parte $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema móvil respecto al inercial. Lo que se obtiene de dicha derivada es:

$$\frac{d\vec{L_Q}}{dt} = (\Pi_{G_q} + 4\Pi_{G_m})\dot{\vec{\omega_q}} + \Pi_{G_m}\sum_{i=1}^{i=4}\dot{\omega}_i \vec{k\prime} + \vec{\omega_q} \times ((\Pi_{G_q} + 4\Pi_{G_m})\vec{\omega_q} + \Pi_{G_m}\sum_{i=1}^{i=4}\omega_i \vec{k\prime})$$

En la ecuación anterior se puede hacer la siguiente simplificación: $\Pi_G = (\Pi_{G_q} + 4\Pi_{G_m})$, donde Π_G es el momento de inercia de todo el sistema en su centro de masa.

A partir del cálculo de esta derivada y de los momentos externos hallados anteriormente, podemos escribir la segunda cardinal. Operando con dicha ecuación se la puede llevar a la forma:

ASUMO QUE LOS TENSORES DE INERCIA SON TODOS DIAGONALES

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega_{q1}} \\ \dot{\omega_{q2}} \\ \dot{\omega_{q3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_{q2}\omega_{q3}(I_{yy}-I_{zz}) + \cos\theta\cos\phi . L(T_3-T_1) + L(\sin\theta\cos\psi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi)(T_4-T_2) + \omega_{q2} I_{zz_m}(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{I_{xx}} \\ \frac{\omega_{q1}\omega_{q3}(-I_{xx}+I_{zz}) + \sin\theta\cos\phi . L(T_3-T_1) + L(\cos\psi\cos\theta - \sin\phi\sin\psi\sin\theta)(T_2-T_4)\omega_{q1} I_{zz_m}(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{I_{yy}} \\ \frac{\omega_{q1}\omega_{q2}(I_{yy}-I_{xx}) + \sin\phi(T_1-T_3) + \cos\phi\sin\psi(T_4-T_2) + I_{zz_m}(\dot{w_1}) + \dot{w_2} + \dot{w_3} + \dot{w_4}}{I_{zz}} \end{pmatrix}$$

3.4. Modelo en variables de Estado

3.5. Algunas consideraciones adicionales sobre el modelo