
CAPÍTULO 1

DISEÑO DEL CONTROLADOR

Dentro del “mundo” del control lineal, existen diversas técnicas que nos permiten alcanzar el objetivo trazado de lograr que el cuadricóptero siga alguna de las trayectorias especificadas en el capítulo ???. Algunas de las técnicas más utilizadas se centran en el diseño de controladores PID¹ o LQR². Ambas técnicas presentan ventajas y desventajas. En el trabajo realizado en ??? se propone el control de un cuadricóptero utilizando un controlador PID. La gran mayoría de controladores en aplicaciones industriales son de este tipo, la principal ventaja que presentan es que se trata de un diseño que tiene una estructura simple y es adecuado para la gran mayoría de procesadores ya que el costo computacional del mismo es prácticamente nulo. El concepto principal es que la señal de entrada a la planta es una función del error entre el estado deseado y el estado estimado.

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1.1)$$

donde $e(t) = X_d - \hat{X}$.

Es fundamental en esta técnica de control la determinación de las constantes. En ??? se limitan las trayectorias a trayectorias de hovering. En ese supuesto, se realizan algunas aproximaciones que permiten reducir el sistema físico a las siguientes ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g + (\cos \varphi \cos \psi) \frac{U_1}{M} \\ \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \frac{U_4}{I_{zz}} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Donde U_1, U_2, U_3 y U_4 son combinaciones lineales de los cuadrados de las velocidades angulares de cada motor. En este caso se puede tratar cada variable por separado, ya que cada variable es afectada por una sola entrada, siendo relativamente sencillo determinar las constantes K_p, K_I y K_d en función de donde se desea ubicar los polos del sistema realimentado. Con esta estrategia se pierde la posibilidad de controlar las otras 8 variables de estado, limitándose entonces a un cuadricóptero que puede realizar exclusivamente movimientos en la dirección vertical y giros en

¹Proporcional, integral y derivativo

²Linear quadratic regulator

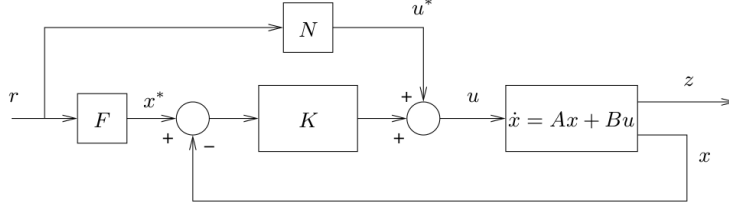


Figura 1.1: Sistema realimentado

torno a su eje vertical.

Si se intenta controlar el sistema de interés en este trabajo utilizando esta técnica, nos enfrentaríamos al problema de determinar al menos una matriz de realimentación (si trabajamos solamente con un controlador proporcional). Dicha matriz, debe ser de 12×4 , es decir que se deben determinar los 48 elementos de la matriz de forma de lograr que la respuesta del sistema sea la deseada. Esta tarea no resulta sencilla, ya que es extremadamente dificultoso comprender exactamente la influencia de cada parámetro de la matriz de realimentación en la ubicación de los polos en el sistema realimentado incluso para asegurar algo elemental y necesario como la estabilidad del sistema.

Por dicho motivo se optó por explorar el camino propuesto por otros trabajos como ??, donde la técnica elegida para realizar el control del cuadricóptero es LQR.

1.1. Conceptos generales sobre LQR

Consideremos el sistema realimentado de la figura 1.1, con $X(t) \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ el vector de estados del sistema y $u(t) \in \mathcal{M}_{m \times 1}$ las entradas. r es el setpoint del cual, multiplicando por dos matrices adecuadas pueden obtenerse los valores deseados de entrada U^* y de las variables de estado X^* . El objetivo que nos planteamos es el de obtener una matriz de realimentación K para el sistema utilizando la técnica de LQR.

El problema de encontrar un regulador óptimo de horizonte infinito puede plantearse de la siguiente forma; se trata de encontrar la matriz de transferencia $C(s)$ que minimice la siguiente función de costo:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} X'(t)QX(t) + U'(t)RU(t)dt \quad (1.3)$$

Donde Q y R son matrices simétricas definidas positivas de dimensiones $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente.

El primer término de la integral corresponde a la energía de los estados controlados y el segundo a la energía de la señal de control. En función de como se escogen las matrices Q y R , se obtienen resultados distintos. Por ejemplo si la norma de Q es pequeña la forma más efectiva de reducir J_{LQR} es utilizar señales de control de norma pequeña a expensas de tener grandes variaciones en los estados controlados. Si bien existen diversos métodos para determinar las matrices Q y R , gran parte del trabajo es iterativo y se realiza a ensayo y error.

En la versión de realimentación de estados del problema LQR se asume que se disponen de medidas de todas las variables del vector de estados. En este caso, el controlador óptimo LQR es una matriz de ganancia K tal que:

$$U(t) - U^*(t) = -K(X(t) - X^*(t)) \quad (1.4)$$

Donde $K \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Para el caso bajo análisis se tiene que:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (1.5)$$

Donde P es la solución a la ecuación algebraica de Riccati.

La propiedad esencial del controlador LQR es que la respuesta del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable, es decir que la parte real de los valores propios de la matriz $A - BK$ es negativa, mientras se cumplan las siguientes condiciones:

- El sistema es controlable
- El sistema es observable

1.2. Consideraciones particulares respecto del sistema a controlar

Como se explico en capítulos anteriores, se tienen una nueva estimación del vector de estados cada $10ms$ esto nos permite realizar acciones de control con esta misma tasa de muestreo. De acuerdo a las constantes de tiempo que involucra el sistema físico se puede afirmar que es un tiempo de acción adecuado para trabajar.

Al tener un tiempo de respuesta rápido (en relación a las constantes del sistema) se podría resolver el problema utilizando la técnica de control LQR pensando en un sistema continuo, por más que nuestro sistema sea un sistema discreto. Sin embargo los algoritmos de determinación de la solución a la ecuación algebraica de Riccati más sencillos que se encontraron corresponden a la solución de la formulación discreta del problema planteado en 1.3. Por otra parte, dicha formulación corresponde al caso en el cual se trabaja con un horizonte infinito, es decir se busca alcanzar un determinado punto de operación y el setpoint no será modificado. Estrictamente, esta no es la situación en la cual nos encontramos dado que es de interés concatenar diversas trayectorias, por ende el punto de operación sí debe ser modificado, sin embargo se puede suponer que cada trayectoria se realizará por un tiempo ampliamente superior al tiempo del transitorio entre dos trayectorias. Por dicho motivo, aproximar el problema a un problema de horizonte infinito es acertado ya que simplifica enormemente la formulación del problema.

1.2.1. Discretización del sistema

Como se explicó en el capítulo ?? se trabajará con tres tipos de trayectoria: hovering, vuelos en línea recta y círculos. En cada uno de estos casos tenemos un sistema lineal de la forma

$$\dot{X} = AX + BU \quad (1.6)$$

La forma que toma el sistema continuo al ser convertido a tiempo discreto es:

$$X_{k+1} = \Phi X_k + \Gamma U_k \quad (1.7)$$

Donde:

$$\Phi = e^{AT_s} \quad \Gamma = \int_0^{T_s} e^{As} ds B \quad (1.8)$$

Estas relaciones surgen de discretizar el sistema considerando muestreadores de orden cero. Por más detalles de este proceso puede consultarse ??.

El problema de encontrar un regulador óptimo también puede ser planteado en un sisetma discreto si reescribimos la ecuación 1.3.

$$J_{DLQR} = \sum_0^{\infty} X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k \quad (1.9)$$

En el trabajo realizado en ?? se propone un algoritmo iterativo para obtener la matriz de realimentación que minimiza J_{DLQR} . Debido a las pequeñas diferencias encontradas entre este algoritmo y la función *lqrd* de *MatLab* se optó por reproducir exactamente dicho algoritmo.

1.2.2. Agregado de integradores

El esquema de la figura 1.1 funciona a la perfección solamente en el caso en que la caracterización del sistema sea perfecta. Los valores de setpoint fueron determinados analíticamente en función de los parámetros determinados, de forma que por ejemplo, para la trayectoria de hovering la velocidad angular de los motores es aquella que produce una fuerza igual al peso del sistema. Errores en la caracterización del sistema llevan a que el punto (o trayectoria) de equilibrio no sea posible. Supongamos que el valor de ω^* para la trayectoria de hovering es inferior al realmente necesario para mantener al sistema en un punto. Supongamos además que inicialmente $X = X^*$. En este caso la entrada al sistema es la velocidad angular ω^* , sin embargo estamos suponiendo que esta fuerza no es suficiente para mantener al sistema en equilibrio, por lo tanto la posición vertical disminuye. La realimentación proporcional produce un aumento en la velocidad angular de los motores hasta que para cierto valor de altura la entrada al sistema es aquella que produce el equilibrio. En este caso se obtiene un nuevo punto de equilibrio distinto al deseado. En el ejemplo considerado se obtiene una altura inferior a la deseada.

Realizando diversas pruebas se ha comprobado que según el nivel de batería disponible un mismo comando I^2C corresponde a distintos valores de velocidad angular. Para resolver este problema se plantea el camino de medir el voltaje en la batería durante el vuelo, sin embargo este camino no parece práctico ya que se debería caracterizar la relación entre velocidad angular y comando I^2C para todo el rango de voltajes en que la batería puede operar. Este camino no parece pertinente, quedando incluso sujeto a la exactitud con la cual se realizan las medidas.

Surge entonces la necesidad de agregar al controlador cierta robustez frente a errores de caracterización del sistema o frente a variaciones del mismo, por ejemplo

la tensión de la batería o un cambio en la masa del sistema³ Esto último es fundamental si se planea utilizar el cuadricóptero por ejemplo para transportar alguna carga útil.

El camino a explorar es el de agregar un bloque integrador. El esquema de controlador es ahora el de la figura ???. Para explicar la utilidad del mismo, continuaremos trabajando con el ejemplo de una trayectoria de hovering en la cual ω^* está subestimado. En dichas condiciones se obtiene un nuevo punto de equilibrio con altura inferior a la deseada. Si realimentamos la integral de la diferencia de altura tenemos una entrada que aumenta con el tiempo hasta que la diferencia de altura sea cero. En este punto el término correspondiente a la integral de la diferencia de altura se mantiene constante en un valor positivo y el término correspondiente a la realimentación proporcional es cero, compensando el error en el modelado.

El agregado de un bloque integrador lo podemos entender como una ampliación del vector de estados. La salida del bloque integrador verifica que $\dot{X}_I = X$. Donde X_I corresponde a los estados integrados. La dinámica del sistema puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} U \quad (1.10)$$

En la ecuación 1.10 lo que se obtiene es un nuevo sistema lineal de mayor dimensión. Lo que buscaremos ahora es encontrar una matriz de realimentación para el sistema 1.10 buscando minimizar la función de costos definida en 1.9.

1.3. Controlabilidad y observabilidad

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad son fundamentales para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado controlado con la técnica de LQR.

Sea el sistema lineal representado por la ecuación 1.11

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (1.11)$$

Donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $C \in \mathcal{M}_{p \times n}$ y $D \in \mathcal{M}_{p \times m}$.

Consideremos la matrices $S \in \mathcal{M}_{n \times nm}$ definida como:

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (1.12)$$

El sistema es controlable si y solo si el rango de S es n.

³Para realizar pruebas se disponen de baterías de diverso tamaño (y peso), no parece práctico modificar constantemente la masa del sistema según la batería con la que se realiza una determinada prueba.

Consideremos la matriz $V \in \mathcal{M}_{pn \times n}$ definida como:

$$V = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

El sistema es observable si y solo si el rango de V es n .

El sistema bajo estudio es originalmente no lineal, en el capítulo ?? se estudió en torno a que tipos de trayectorias se puede aproximar el problema de controlar el cuadricóptero por el problema de controlar un sistema lineal invariante en el tiempo. Si bien no todas las trayectorias son posibles, el conjunto de trayectorias es infinito. Es imposible evaluar las condiciones de controlabilidad y observabilidad para todos los casos. Sin embargo, se puede evaluar en distintas trayectorias y confiar en que para las trayectorias no testeadas el resultado sea el mismo.

En una primer aproximación se analizaron diversas trayectorias para el sistema lineal sin los estados agregados correspondientes a la inclusión de integradores. Las matrices de controlabilidad y observabilidad para todas las trayectorias testeadas son de rango 12. Esto implica que los controladores que surgen de la técnica de control LQR son estables. Sin embargo es de interés, por los motivos presentados en la sección anterior, poder agregar al controlador una dependencia del pasado (integradores), esto nos lleva a cuestionarnos que estados integrados pueden ser incluidos en el sistema manteniendo la condición de controlabilidad. La condición de observabilidad se cumple trivialmente ya que siempre se tiene una estimación de las integrales de los estados.

Los únicos estados que pueden integrarse sin perder la controlabilidad del sistema son las tres posiciones (x, y, z) y el ángulo de Yaw (θ). En resumen, el vector de estados controlados es el siguiente:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \\ \varphi \\ \theta \\ v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \\ \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \\ x_I \\ y_I \\ z_I \\ \theta_I \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

1.4. Matriz de realimentación

Como se explicó anteriormente, la matriz de realimentación es obtenida numéricamente gracias al algoritmo presentado en ??, dicha matriz depende del sistema lineal con el cual se representa cada trayectoria. Por lo tanto para cada trayectoria tendremos que calcular una nueva matriz de realimentación. Lo fundamental es entonces determinar adecuadamente las matrices Q y R definidas en 1.9 de forma de obtener trayectorias adecuadas. Estas matrices fueron determinadas en forma iterativa, modificando los parámetros hasta obtener un comportamiento satisfactorio en cuanto a tiempos de respuesta y robustez.

Se entiende que los parámetros fundamentales a controlar son los ángulos de Euler, si el control sobre estos no se hace en forma rápida la performance del sistema puede verse afectada. Las condiciones de vuelo determinadas dependen de que los ángulos de Pitch y de Roll se encuentren perfectamente ajustados. Consideremos la condición de hovering a modo de ejemplo, si estos ángulos no son nulos se tiene un sistema que acelera indefinidamente en alguna dirección. Por lo tanto parece importante darle un peso superior al control de estas variables de estado respecto a las restantes. Las matrices de realimentación se construyen a partir de:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$