

**Apuntes de Mecánica Newtoniana:**  
Sistemas de Partículas, Cinemática y Dinámica del  
Rígido.

Ariel Fernández  
Daniel Marta

Instituto de Física - Facultad de Ingeniería - Universidad de la República

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Contenidos</b>   | <b>I</b>  |
| <b>Prefacio</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1. Sistemas de Partículas</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1. Centro de masas de un sistema de partículas. . . . .                   | 3         |
| 1.1.1. Centros de masas parciales. . . . .                                  | 4         |
| 1.1.2. Sistemas con distribución continua de masa. . . . .                  | 5         |
| 1.1.3. Simetrías. . . . .   | 5         |
| 1.2. Momento lineal de un sistema de partículas. Primera cardinal. . . . .  | 6         |
| 1.3. Momento angular de un sistema de partículas. Segunda cardinal. . . . . | 8         |
| 1.3.1. Cambio de punto de aplicación de momentos. . . . .                   | 9         |
| 1.4. Energía de un sistema de partículas. . . . .                           | 10        |
| 1.4.1. Energía cinética. . . . .  | 10        |
| 1.4.2. Conservación de la energía. . . . .                                  | 11        |
| <b>2. Cinemática del Rígido</b>   | <b>13</b> |
| 2.1. Distribución de velocidades y aceleraciones. . . . .                   | 14        |
| 2.2. Rodadura sin deslizamiento. . . . .                                    | 15        |
| 2.3. Movimiento Plano. . . . .  | 17        |
| 2.3.1. <i>Ejemplo: Disco rodando sin deslizar.</i> . . . .                  | 18        |
| 2.3.2. Centro instantáneo de rotación. . . . .                              | 19        |
| 2.4. Ejemplos de movimiento del rígido en el espacio. . . . .               | 20        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 2.4.1.    | Placa cuadrada girando alrededor de un eje. . . . .            | 20        |
| 2.4.2.    | Esfera rodando sin deslizar. . . . .                           | 22        |
| 2.5.      | Ángulos de Euler. . . . .                                      | 23        |
| <b>3.</b> | <b>Cinética del Rígido</b>                                     | <b>25</b> |
| 3.1.      | Momento Angular de un Rígido. . . . .                          | 25        |
| 3.2.      | Propiedades del Tensor de Inercia. . . . .                     | 29        |
| 3.2.1.    | Cambio de base. . . . .  | 30        |
| 3.2.2.    | Ejes Principales. . . . .                                      | 31        |
| 3.2.3.    | Momentos de inercia de un rígido plano. . . . .                | 32        |
| 3.2.4.    | Simetrías. . . . .   | 34        |
| 3.2.5.    | Teorema de Steiner. . . . .                                    | 36        |
| 3.3.      | Energía cinética de un rígido. . . . .                         | 38        |
| <b>4.</b> | <b>Dinámica del Rígido</b>                                     | <b>41</b> |
| 4.1.      | Ecuaciones Cardinales. . . . .                                 | 41        |
| 4.2.      | Sistemas de Fuerzas Aplicadas. . . . .                         | 43        |
| 4.2.1.    | Sistemas Equivalentes. . . . .                                 | 43        |
| 4.2.2.    | Reducción de un sistema de fuerzas aplicado sobre un rígido. . | 45        |
| 4.2.3.    | Potencia de un sistema de fuerzas sobre un rígido. . . . .     | 47        |
| 4.3.      | Sistemas vinculados. . . . .                                   | 47        |
| 4.3.1.    | Ejemplo - Placa apoyada en una recta. . . . .                  | 48        |
| 4.4.      | Estática del Rígido. . . . .                                   | 51        |
| 4.4.1.    | Ejemplo - Barra y placa rectangular. . . . .                   | 51        |
| 4.4.2.    | Ejemplo - Escalera apoyada en una pared. . . . .               | 53        |
| 4.5.      | Dinámica del Rígido en el Plano. . . . .                       | 55        |
| 4.5.1.    | Ejemplo - Placa apoyada en un plano inclinado. . . . .         | 56        |
| 4.5.2.    | Disco y aro. . . . .   | 59        |
| 4.5.3.    | Barra en el borde de una mesa. . . . .                         | 61        |
| 4.6.      | Dinámica del Rígido en el Espacio. . . . .                     | 63        |

|  |    |
|--|----|
| 4.6.1. Masas coplanares. . . . .                           | 63 |
| 4.6.2. Placa cuadrada girando alrededor de un eje. . . . . | 64 |
| 4.6.3. Trompo simétrico pesado. . . . .                    | 66 |



# Prefacio

Las presentes notas están basadas en los apuntes de clase del Profesor Daniel Marta, de quien muchos seguimos aprendiendo. La publicación de las mismas no tiene por intención sustituir ningún buen libro de Mecánica, tan sólo pretende servir como material de apoyo para los estudiantes. En ese sentido, nos resultaría tremendamente útil saber la opinión del lector, escuchar las sugerencias y comentarios que ayuden a mejorar las notas.

*A.F.,  
Montevideo, 2009*



# Capítulo 1

## Sistemas de Partículas

### 1.1. Centro de masas de un sistema de partículas.

Consideremos un conjunto de partículas que tienen por posición  $\mathbf{P}_i$ ,  $i = 1 \dots N$ , y cuyas masas respectivas son  $m_i$  (ver figura 1.1(a)). Sea  $M$  la masa total del sistema:

$$(1.1) \quad M = \sum_{i=1}^N m_i$$

Definimos el **centro de masas**  $(G)^1$  del conjunto así:

$$(1.2) \quad G - O = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O)$$

que es independiente del origen de coordenadas ( $O$ ) que tomemos; para probar la afirmación anterior, consideremos el centro de masas a partir de otro origen  $O'$ :

$$G' - O' = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O')$$

Si a la ecuación anterior le sustraemos (1.2) nos queda:

$$G' - G + (O - O') = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (O - O') = (O - O') \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \stackrel{(1.1)}{=} (O - O') \Rightarrow G' = G$$

---

<sup>1</sup>también llamado **baricentro**



### 1.1.1. Centros de masas parciales.

En muchos casos que veremos a lo largo del curso resultará conveniente subdividir el sistema de partículas original y hallar los centros de masas de cada subsistema, para luego hallar el centro de masas del conjunto.

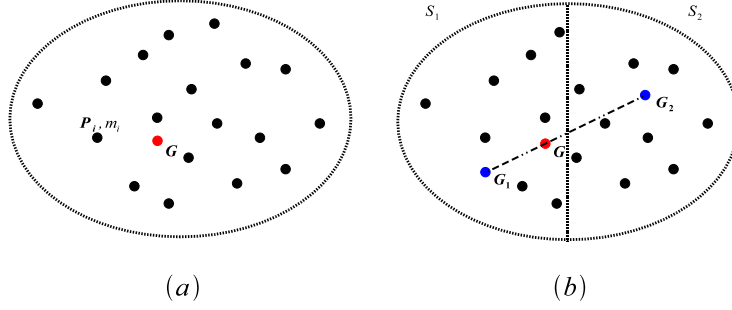


Figura 1.1: (a) Centro de masas de un sistema de partículas (b) Centros parciales de cada subsistema.

El centro de masas ( $G_1$ ) de las partículas que conforman el subsistema  $S_1$  de la figura 1.1 es:

$$G_1 - O = \frac{1}{M_1} \sum_{i \in S_1} m_i (P_i - O), \quad M_1 = \sum_{i \in S_1} m_i$$

y análogamente, el centro de masas del subsistema  $S_2$  es:

$$G_2 - O = \frac{1}{M_2} \sum_{i \in S_2} m_i (P_i - O), \quad M_2 = \sum_{i \in S_2} m_i$$

Por otro lado, descomponiendo la sumatoria en (1.2) tenemos:

$$G - O = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) = \frac{1}{M} \left( \sum_{i \in S_1} m_i (P_i - O) + \sum_{i \in S_2} m_i (P_i - O) \right)$$

y a partir de las definiciones de los centros parciales nos queda:

$$(1.3) \quad G - O = \frac{1}{M_1 + M_2} [M_1(G_1 - O) + M_2(G_2 - O)]$$

es decir, podemos hallar el centro de masas del sistema total como el centro de masas de dos partículas de masas  $M_1$  y  $M_2$  ubicadas en  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente. Considerando como origen  $O$  uno de los centros parciales, (1.3) pasa a ser:

$$G = G_1 + \frac{M_2}{M_1 + M_2} (G_2 - G_1)$$

y como  $0 < \frac{M_2}{M_1+M_2} < 1$ , el centro de masas del sistema estará sobre el segmento que une  $G_1$  con  $G_2$  (figura 1.1.(b)).

### 1.1.2. Sistemas con distribución continua de masa.

#### *Ejemplo.- Barra homogénea*

Consideremos una barra delgada de longitud  $\ell$  y masa  $m$  distribuida homogéneamente (figura 1.2). Sea  $\lambda = \frac{m}{\ell}$  la densidad lineal de masa de la barra; la masa de un diferencial de longitud  $dx$  es:  $dm = \lambda dx$ . Tomando la expresión (1.2) y considerando el pasaje al continuo:  $\sum m_i \rightarrow \int dm$  tenemos:

$$G = O + \frac{1}{m} \int dm \ x \hat{i} = O + \frac{1}{m} \int_0^\ell dx \ \lambda x \hat{i} = O + \frac{\lambda}{m} \int_0^\ell dx \ x \hat{i} = O + \frac{\ell}{2} \hat{i}$$

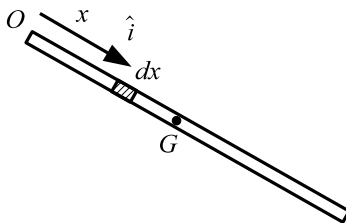


Figura 1.2: Centro de masas de una barra homogénea.

#### *Ejemplo.- Placa triangular homogénea*

Para hallar el baricentro de una placa triangular homogénea, consideremos a la misma formada por tirillas paralelas a uno de sus lados, por ejemplo el  $BC$  de la figura 1.3. Para cada una de estas tirillas, el centro de masas se encuentra en su punto medio. Esto significa que el centro de masas de los centros parciales debe estar sobre la mediana  $AM$  del triángulo. Como se puede inferir lo mismo para las descomposiciones paralelas a los otros dos lados, resulta que el baricentro está sobre la intersección de las medianas del triángulo.

### 1.1.3. Simetrías.

En los casos en que el sistema de partículas tenga alguna simetría en su distribución, la ubicación del centro de masas, o al menos su delimitación, es sencilla:

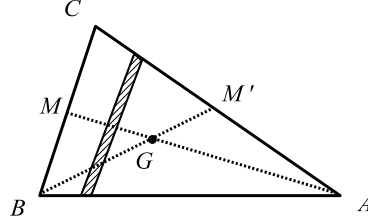


Figura 1.3: Centro de masas de una placa triangular homogénea.

- **Simetría Central.** Un sistema se dice que tiene simetría central con respecto a un punto  $O$  cuando permanece incambiado bajo cualquier *reflexión* con respecto a este punto (por reflexión entendemos el reemplazo de una partícula de masa  $m_A$  en un punto  $A$  por una partícula de masa  $m_B$  en un punto  $B$ , tal que  $B-O = -(A-O)$ ). Es inmediato probar que el centro de masas del sistema coincide con el punto  $O$ . Un ejemplo de sistema con esta simetría es una esfera sólida homogénea o una cuya densidad de masa sea función únicamente de la distancia a su centro.
- **Plano de simetría.** Es el caso en que el sistema no cambia bajo reflexiones con respecto a un plano dado. Se puede ver que el centro de masas en este caso está sobre el plano de simetría.
- **Eje de simetría.** En este caso el sistema no cambia bajo una rotación de ángulo arbitrario en torno a un eje. El centro de masas debe entonces caer sobre el eje de simetría.

## 1.2. Momento lineal de un sistema de partículas. Primera cardinal.

El momento lineal de un sistema de partículas se define como la suma de los momentos lineales de cada una de éstas:

$$(1.4) \quad \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Por otro lado, derivando (1.2) tenemos:

$$\dot{G} - \dot{O} = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\dot{P}_i - \dot{O}) = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i - \dot{O}$$

## 1.2. MOMENTO LINEAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS. PRIMERA CARDINAL.7

donde  $\vec{v}_i$  es la derivada del vector posición  $P_i$  de cada partícula seguida sobre su trayectoria, es decir, su velocidad. El centro de masas del sistema tiene su trayectoria definida a partir de la aplicación instantánea de (1.2) para cada partícula del sistema sobre su trayectoria respectiva. En esta medida, la *velocidad del centro de masas* se define como:  $\vec{v}_G = \dot{\vec{G}}$ .

A partir de la definición (1.4) nos queda entonces:

$$(1.5) \quad \vec{p} = M\vec{v}_G$$

y tenemos el momento lineal del sistema en términos de la velocidad del centro de masas.

Veamos ahora la segunda ley de Newton para el sistema de partículas. Derivando (1.4) con respecto al tiempo tenemos:

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \quad (\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i) \quad \sum_i \vec{F}_i$$

Descompondremos ahora la fuerza sobre cada partícula en términos de las internas -ejercidas por otras partículas del sistema sobre ella- y las fuerzas externas al sistema:

$$(1.6) \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

con lo que tenemos:

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \vec{R}^{(ext)} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

siendo  $\vec{R}^{(ext)}$  la *resultante* de las fuerzas externas aplicadas al sistema:

$$(1.7) \quad \vec{R}^{(ext)} \equiv \sum_i \vec{F}_i^{(ext)}$$

Como las fuerzas internas al sistema verifican el principio de acción y reacción:  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ , el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior se cancela de a pares, con lo que nos queda la **Primera Cardinal** del sistema:

$$(1.8) \quad \dot{\vec{p}} = M\vec{a}_G = \vec{R}^{(ext)}$$

En particular, si sobre el sistema de partículas la resultante de las fuerzas aplicadas es nula, el momento lineal del sistema se conserva.

### 1.3. Momento angular de un sistema de partículas. Segunda cardinal.

Análogamente al caso del momento lineal, el momento angular de un sistema de partículas con respecto a un punto  $Q$  es la suma de los momentos de cada una de las partículas respecto a ese punto:

$$(1.9) \quad \vec{L}_Q = \sum_i (P_i - Q) \times \vec{p}_i$$

La derivada temporal de la expresión anterior es:

$$\dot{\vec{L}}_Q = \sum_i (\dot{P}_i - \dot{Q}) \times \vec{p}_i + \sum_i (P_i - Q) \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i (\vec{v}_i - \dot{Q}) \times \vec{p}_i + \sum_i (P_i - Q) \times \vec{F}_i$$

Usando ahora que:  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{v}_i \times \vec{p}_i = 0$  y la descomposición (1.6) para la fuerza sobre cada partícula:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_Q &= -\dot{Q} \times \sum_i \vec{p}_i + \sum_i (P_i - Q) \times \left( \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right) \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \vec{p} \times \dot{Q} + \sum_i (P_i - Q) \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i \sum_{j \neq i} (P_i - Q) \times \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación anterior es el *momento de las fuerzas externas al sistema* con respecto al punto  $Q$ :

$$(1.10) \quad \vec{M}_Q^{(ext)} \equiv \sum_i (P_i - Q) \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

Para el tercer término consideremos la suma de a pares de las partículas:

$$(P_i - Q) \times \vec{F}_{ij} + (P_j - Q) \times \vec{F}_{ji} \stackrel{\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}}{=} (P_i - P_j) \times \vec{F}_{ij}$$

Si las fuerzas de interacción entre las partículas del sistema están en la línea de acción de las mismas (*principio de acción y reacción fuerte*), el término anterior es nulo y tenemos la **Segunda Cardinal** para un sistema de partículas:

$$(1.11) \quad \dot{\vec{L}}_Q = \vec{p} \times \dot{Q} + \vec{M}_Q^{(ext)}$$

**Observación:**

Para los casos en que se cumpla alguna de las siguientes:

- $Q = G$
- $\dot{Q} = 0$
- $\dot{Q} \parallel \vec{v}_G$

la segunda cardinal toma una forma más sencilla:

$$(1.12) \quad \dot{\vec{L}}_Q = \vec{M}_Q^{(ext)}$$

A pesar de la ventaja de eliminar las fuerzas internas en su planteo, las cardinales (1.8) y (1.11) no son en general suficientes para determinar el movimiento de un sistema de partículas; son 6 ecuaciones (3 por cada dirección en el espacio) para determinar el movimiento de  $N$  partículas, lo que implica hallar  $3N$  incógnitas, asociadas a los 3 grados de libertad de cada partícula. Sin embargo, en el caso de un sistema rígido, las dos cardinales son suficientes ya que como veremos, alcanza con especificar 6 coordenadas para dar su configuración espacial.

**1.3.1. Cambio de punto de aplicación de momentos.**

Tanto en el caso del momento angular (1.9) como en el momento de las fuerzas externas (1.10) necesitamos dar un punto de referencia ( $Q$ ). Consideremos la definición del momento de las fuerzas externas al sistema (1.10) para un punto  $Q_1$  arbitrario:

$$\vec{M}_{Q_1}^{(ext)} = \sum_i (P_i - Q_1) \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

Introducimos convenientemente un término (nulo)  $Q_2 - Q_2$  y operamos:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{Q_1}^{(ext)} &= \sum_i (P_i - Q_1 + (Q_2 - Q_2)) \times \vec{F}_i^{(ext)} \\ &= \sum_i (P_i - Q_2) \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i (Q_2 - Q_1) \times \vec{F}_i^{(ext)} \\ &\stackrel{(1.10)}{=} \vec{M}_{Q_2}^{(ext)} + (Q_2 - Q_1) \times \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \\ &\stackrel{(1.7)}{=} \vec{M}_{Q_2}^{(ext)} + (Q_2 - Q_1) \times \vec{R}^{(ext)} \end{aligned}$$

Finalmente, usando la anticonmutatividad del producto vectorial ( $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ ):

$$(1.13) \quad \vec{M}_{Q_1}^{(ext)} = \vec{M}_{Q_2}^{(ext)} + \vec{R}^{(ext)} \times (Q_1 - Q_2)$$

Análogamente:

$$(1.14) \quad \vec{L}_{Q_1} = \vec{L}_{Q_2} + \vec{p} \times (Q_1 - Q_2)$$

## 1.4. Energía de un sistema de partículas.

### 1.4.1. Energía cinética.

La energía cinética de un sistema corresponde a la suma de las contribuciones de cada una de las partículas constituyentes:

$$(1.15) \quad T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$$

Podemos escribir la posición  $P_i$  de cada partícula en términos de la posición relativa al centro de masas del sistema:

$$P_i = G + \vec{\rho}_i$$

siendo  $\vec{\rho}_i$  la posición de la partícula  $i$  relativa a  $G$ . Derivando la expresión anterior tenemos:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \dot{\vec{\rho}}_i$$

y sustituyendo en (1.15) nos queda:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_G + \dot{\vec{\rho}}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_G^2 + \dot{\vec{\rho}}_i^2 + 2\vec{v}_G \cdot \dot{\vec{\rho}}_i) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \right) \vec{v}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2 + \vec{v}_G \cdot \left( \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i \right) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2 + \vec{v}_G \cdot \left( \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i \right) \end{aligned}$$

El último término de la expresión anterior resulta ser nulo en virtud de:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \sum_i m_i P_i - \sum_i m_i G \stackrel{(1.2)}{=} MG - MG = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0$$

(dicho de otra forma, la posición del centro de masas relativa al centro de masas es el vector nulo). Finalmente, la energía cinética del sistema toma esta forma:

$$(1.16) \quad T = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2$$

conocida también como *Teorema de König* que establece que la energía cinética de un sistema de partículas se puede descomponer en la suma de (i) la energía cinética de una partícula ficticia moviéndose con el centro de masas del sistema y cuya masa es la masa total del sistema y (ii) la energía cinética del movimiento de las partículas relativo al centro de masas.

### 1.4.2. Conservación de la energía.

Partiendo de la expresión (1.15), la variación de energía cinética de un sistema de partículas es:

$$(1.17) \quad \frac{dT}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \equiv \mathcal{P}$$

donde definimos la *potencia* ( $\mathcal{P}$ ) del conjunto de fuerzas que actúan sobre el sistema. En este punto, la distinción entre fuerzas internas y externas al sistema no resulta ser la más útil; aún cuando (via el principio de acción y reacción fuerte) podamos asegurar la conservación del momento lineal y angular de un sistema de partículas, nada podemos decir acerca de la conservación de la energía del sistema, ya que estas fuerzas pueden realizar trabajo (considere el caso sencillo de dos partículas unidas mediante un resorte). Distinguiremos entonces entre (i) **fuerzas conservativas** (aquellas que derivan de un potencial) (ii) **fuerzas de potencia nula** (fuerzas no conservativas que no realizan trabajo conjunto) (iii) **fuerzas residuales** (no conservativas que realizan trabajo):

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(cons)} + \vec{F}_i^{(Pnula)} + \vec{F}_i^{(res)}$$

La potencia de este conjunto de fuerzas será, de acuerdo con (1.17):

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i^{(cons)} \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{F}_i^{(res)} \cdot \vec{v}_i$$

Usando ahora que las fuerzas conservativas provienen de una energía potencial  $U$ :

$$\vec{F}_i^{(cons)} = -\nabla_i U$$



(donde  $\nabla_i$  es el gradiente sobre las coordenadas espaciales asociadas a  $P_i$ ), la potencia es:

$$\mathcal{P} = - \sum_i \nabla_i U \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{F}_i^{(res)} \cdot \vec{v}_i = - \sum_i \nabla_i U \cdot \frac{dP_i}{dt} + \sum_i \vec{F}_i^{(res)} \cdot \vec{v}_i$$

Los términos  $\nabla_i U \cdot dP_i$  corresponden a las variaciones de  $U$  en la dirección de cambio de  $P_i$ :  $dU_i$ . La suma de todos ellos es entonces la variación de energía potencial del sistema <sup>2</sup> ( $dU$ ) y (1.17) queda:

$$(1.18) \quad \frac{dT}{dt} = - \frac{dU}{dt} + \sum_i \vec{F}_i^{(res)} \cdot \vec{v}_i \Leftrightarrow \frac{d(T+U)}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(res)} \cdot \vec{v}_i \equiv \mathcal{P}^{(res)}$$

la variación de la energía  $E = T + U$  del sistema se corresponde entonces con la potencia de las fuerzas residuales:

$$(1.19) \quad \frac{dE}{dt} = \mathcal{P}^{(res)}$$

y en la medida en que la potencia de las fuerzas residuales sea nula, la energía del sistema se conservará.

---

<sup>2</sup>asumiendo que el potencial  $U$  no depende explícitamente del tiempo

# Capítulo 2

## Cinemática del Rígido

### Introducción.

Un *cuerpo rígido* es un sistema de partículas ( $S$ ) cuyas distancias mutuas se mantienen constantes durante el movimiento del sistema:

$$\forall \quad P, Q \in S \quad \mathbf{d}_{PQ} = |P - Q| = cte.$$

A efectos de describir la posición de un sistema rígido en el espacio, son necesarias tan solo 6 coordenadas. Podemos, por ejemplo, comenzar por especificar las coordenadas cartesianas  $(x_1, y_1, z_1)$  de un punto  $\mathbf{P}_1$  del rígido. Cualquier punto  $\mathbf{P}_2$  a una distancia  $\mathbf{d}_{12}$  de  $\mathbf{P}_1$  estará sobre la superficie esférica de radio  $\mathbf{d}_{12}$  centrada en  $(x_1, y_1, z_1)$ . Podemos ubicar a  $\mathbf{P}_2$  sobre esta esfera utilizando 2 coordenadas, como ser los ángulos de coordenadas esféricas  $\theta_2$  y  $\varphi_2$  con respecto a un sistema de coordenadas centrado en  $(x_1, y_1, z_1)$ . Cualquier tercer punto  $\mathbf{P}_3$  a distancias  $\mathbf{d}_{13}$  y  $\mathbf{d}_{23}$  de  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  respectivamente, y que no pertenezca a la recta que pasa por estos puntos, estará sobre la circunferencia que resulta de intersectar la superficie esférica con centro en  $\mathbf{P}_1$  y radio  $\mathbf{d}_{13}$  con la superficie esférica con centro en  $\mathbf{P}_2$  y radio  $\mathbf{d}_{23}$ . Para ubicar a  $\mathbf{P}_3$  sobre esta circunferencia se necesita una coordenada. Se necesitan entonces 6 coordenadas para especificar las posiciones de 3 puntos del rígido no colineales. Una vez ubicados, la posición de cualquier otro punto del rígido está bien determinada.

Los puntos (arbitrarios a menos de su no colinealidad)  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$  determinan un sistema de referencia solidario al rígido, con una base ortonormal que se puede construir así:

- Uno de los versores (llamémosle  $\hat{i}$ ) de la base del sistema corresponde al vector  $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$  normalizado.

- Otro versor ( $\hat{j}$ ) se elige ortogonal al subespacio subtendido por  $\hat{i}$  y el vector  $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1$ .
- El versor restante ( $\hat{k}$ ) se define como:  $\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}$ .

Las 6 coordenadas que se necesitan para especificar la configuración del rígido pueden corresponder entonces a las 3 coordenadas de posición de un punto  $(x_1, y_1, z_1)$  del rígido y las 3 coordenadas necesarias para dar la orientación del sistema de referencia con respecto a un referencial fijo<sup>1</sup>.

## 2.1. Distribución de velocidades y aceleraciones.

Al vector velocidad angular del referencial solidario al rígido lo llamaremos también *velocidad angular del rígido*  $\vec{\omega}$  y satisface (ver capítulo sobre Cinemática de la Partícula):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{i}}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{i} \\ \frac{d\hat{j}}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{j} \\ \frac{d\hat{k}}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{k} \end{aligned}$$

Definida la velocidad angular, consideremos cómo relacionar las velocidades de dos puntos cualesquiera del rígido. Sean  $P, Q$  esos dos puntos. La relación entre la derivada absoluta y relativa al rígido para un vector  $\vec{A}$  es (ver nuevamente capítulo sobre Cinemática de la Partícula):

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Tomando  $\vec{A} = P - Q$  y usando que a partir de la definición misma de rígido la derivada relativa de  $P - Q$  es nula, se obtiene la ***distribución de velocidades de un rígido***:

$$(2.2) \quad \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P - Q)}$$

Dada la velocidad de un punto  $P$  del rígido, la velocidad de otro cualquiera del mismo rígido se puede hallar siguiendo la distribución anterior.

---

<sup>1</sup>ver Ángulos de Euler al final del capítulo

Derivando nuevamente en el tiempo, se obtiene la **distribución de aceleraciones de un rígido**:

$$(2.3) \quad \boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \times (P - Q) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - Q))}$$

## 2.2. Rodadura sin deslizamiento.

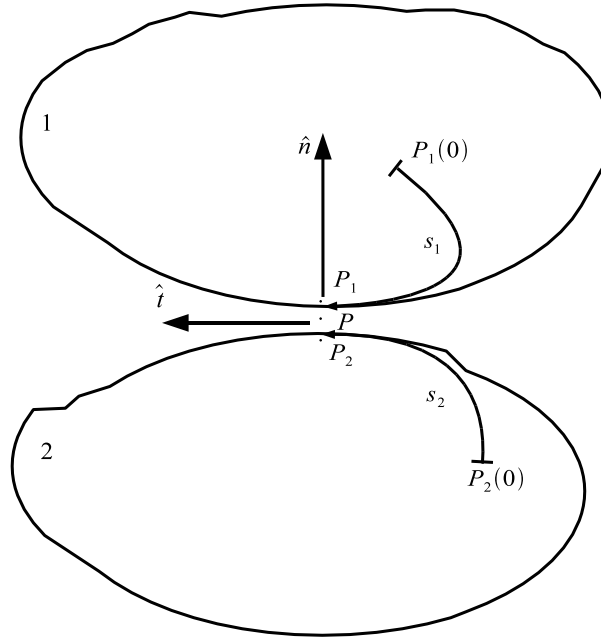


Figura 2.1: Rodadura sin deslizamiento entre dos rígidos que se muestran separados para distinguir con mayor claridad los puntos de contacto referidos en el texto.

Consideremos dos rígidos (1 y 2) como los de la figura 2.1. Diremos que los mismos están **rodando sin deslizarse** uno respecto al otro si la velocidad del punto ( $P_1$ ), del rígido 1 en contacto con 2, es igual a la velocidad del punto ( $P_2$ ), del rígido 2 en contacto con (1):

$$(2.4) \quad \vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_2}$$

Esta condición afecta implícitamente sólo a la componente tangencial de la velocidad de cada rígido, ya que aún cuando no estén rodando sin deslizar, la condición de que estén en contacto es que sus velocidades en la dirección normal sean iguales:  $(\vec{v}_{P_1} - \vec{v}_{P_2}) \cdot \hat{n} = 0$ .

**Observación:**

Cabe preguntarse en la definición (2.4) por qué se distingue entre  $P_1$  y  $P_2$  cuando *geométricamente* estamos hablando del mismo punto de contacto entre los dos rígidos. La respuesta está justamente en que geométricamente hablando  $P_1$  y  $P_2$  ocupan en el instante de análisis el mismo punto del espacio, pero en cuanto a su velocidad, que se define a partir de la *trayectoria* seguida por cada punto,  $P_1$  viene moviéndose solidario a un rígido y  $P_2$  a otro completamente distinto. Lo que establece la condición de rodadura sin deslizamiento es una relación entre las velocidades del punto de contacto de cada rígido con el otro en el instante de contacto y nada más. Particularmente, no está hablando de la velocidad del punto de contacto  $P$ , que no tiene porqué ser solidario a alguno de los dos rígidos.  $P_1$  y  $P_2$  coinciden en el instante considerado con el punto  $P$  del espacio cuya velocidad llamaremos  $\dot{P}$ .

**Nomenclatura:** Aún cuando no hayamos hecho distinción alguna entre las nomenclaturas  $\dot{P}$  y  $\vec{v}_P$  para referirnos a la velocidad de un punto, reservaremos de ahora en más  $\vec{v}_P$  para referirnos a la velocidad de los puntos pertenecientes a un rígido y usaremos  $\dot{P}$  en otro caso.<sup>2</sup>

El trazo dejado por  $P$  en el rígido 1 es una curva de largo  $s_1$ . La velocidad de  $P$  seguido desde el rígido 1 es entonces, considerando la suma de la velocidad relativa  $\vec{V}_{R_1}(P)$  al rígido y la de transporte  $\vec{V}_{T_1}(P)$ :

$$\dot{P} = \vec{V}_{R_1}(P) + \vec{V}_{T_1}(P) = \dot{s}_1 \hat{t}_1 + \vec{v}_{P_1}(P)$$

siendo  $\hat{t}_1$  el versor tangente en el punto de contacto. Igualmente, si seguimos a  $P$  desde 2 nos queda:

$$\dot{P} = \dot{s}_2 \hat{t}_2 + \vec{v}_{P_2}(P)$$

y como  $\dot{P}$  debe ser igual para las dos expresiones anteriores, y suponiendo que se verifica la condición de rodadura sin deslizamiento (2.4):

$$\begin{aligned} \hat{t}_1 &= \hat{t}_2 \\ \dot{s}_1 &= \dot{s}_2 \end{aligned}$$

Considerando que en el comienzo los orígenes ( $P_1(0)$ ,  $P_2(0)$ ) de cada curva coinciden, las longitudes de cada curva coinciden:

$$(2.5) \quad s_1 = s_2$$

---

<sup>2</sup>la aclaración previa a (1.5) ya apuntaba en este sentido a distinguir entre la velocidad de un punto con una identidad material definida como es el centro de masas  $G$ , que se define instantáneamente a partir de las velocidades de las partículas constituyentes del sistema y para la cual usamos  $\vec{v}_G$ , y la velocidad de un punto cualquiera de referencia como era el caso de  $O$ , para el cual se mantuvo  $\dot{O}$  como notación de su velocidad.

Es decir, a medida que pasa el tiempo, los puntos de cada rígido que son sucesivamente de contacto van trazando curvas de igual longitud en cada uno de ellos (ver el ejemplo de rodadura sin deslizamiento para un disco).

### 2.3. Movimiento Plano.

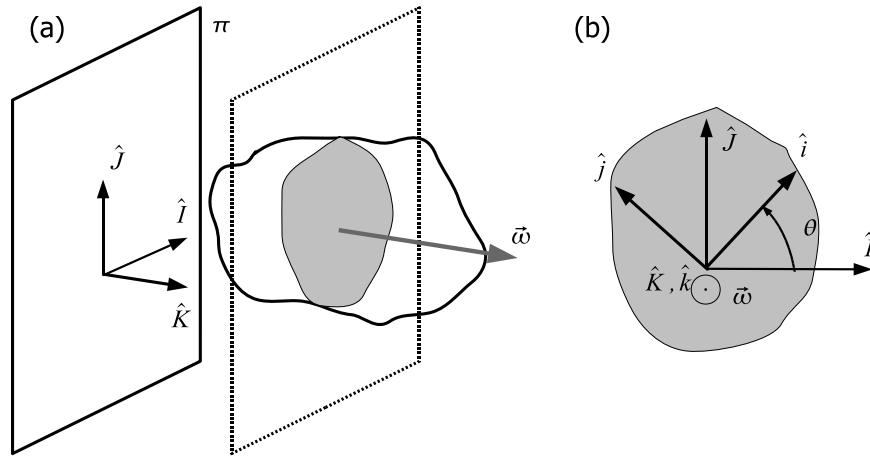


Figura 2.2: (a) Movimiento plano de un rígido (b) Problema bidimensional equivalente.

Consideremos el caso particular de un rígido que experimenta un movimiento plano (figura 2.2), es decir, dada la normal ( $\hat{K}$ ) al plano  $\pi$  con respecto al que se mantiene paralelo, uno de los versores del sistema solidario al rígido (sea  $\hat{k}$ ) se mantiene siempre paralelo a  $\hat{K}$  de manera que los puntos que pertenecen en un instante dado a una sección del rígido paralela a  $\pi$ , permanecen sobre ella. Cualquier sección del rígido a través de un plano paralelo a  $\pi$  es de por sí un rígido bidimensional. Estudiar el movimiento de este rígido bidimensional es equivalente a estudiar el movimiento del rígido en su totalidad. Además, la velocidad angular del rígido es perpendicular a la sección estudiada y se puede hallar considerando la variación de un ángulo en el tiempo (ver capítulo sobre Cinemática de la Partícula). Sea  $\theta$  el ángulo que forma el versor  $\hat{i}$  del sistema solidario al rígido con el versor  $\hat{I}$  fijo. Las

derivadas temporales de los versores del sistema rígido son:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}}{dt} &= \dot{\theta}\hat{j} \\ \frac{d\hat{j}}{dt} &= -\dot{\theta}\hat{i} \\ \frac{d\hat{k}}{dt} &= 0\end{aligned}$$

que comparando con (2.1) nos da  $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{K}$ . La velocidad angular del rígido es entonces perpendicular al plano, se halla a partir de la tasa de variación de un ángulo ( $\theta$ ) y su sentido respeta la regla de la mano derecha para el giro del rígido.

### 2.3.1. Ejemplo: Disco rodando sin deslizar.

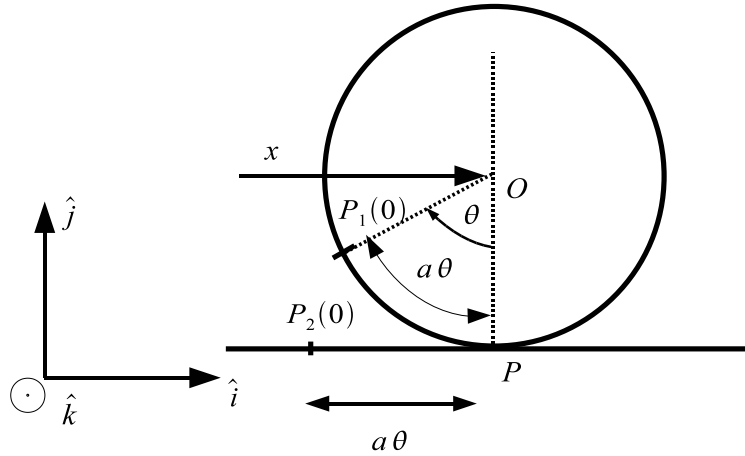


Figura 2.3: Disco rodando sin deslizar.

Consideremos como ejemplo de movimiento plano el caso de un disco de radio  $a$  que se mueve en contacto con una línea fija. En un instante dado, el punto del disco en contacto con la línea es  $P$  (ver figura 2.3). Como la línea permanece en reposo, el punto de ella que es instantáneamente de contacto tiene velocidad nula, lo que a partir de (2.4) implica  $\vec{v}_P = 0$ . Sea  $x$  la abscisa de la posición del centro del disco ( $O$ ). La velocidad del centro es:  $\vec{v}_O = \dot{x}\hat{i}$ . A partir de la distribución de velocidades entre puntos del rígido (2.2) tenemos:

$$0 = \vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (P - O) = \dot{x}\hat{i} + \vec{\omega} \times (-a\hat{j})$$

El ángulo  $\theta$  definido en la figura 2.3 corresponde al cambio de orientación de los ejes de un sistema de coordenadas solidario al disco con respecto a una dirección fija (en este caso la vertical), por lo que la velocidad angular del disco es:

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{k}$$

y tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}\hat{i} + \dot{\theta}\hat{k} \times a\hat{j} = (\dot{x} - a\dot{\theta})\hat{i} \\ &\Rightarrow \dot{x} = a\dot{\theta} \end{aligned}$$

que integrando resulta:

$$x = a\theta$$

(suponiendo  $x(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$ ). La rodadura sin deslizamiento establece entonces un vínculo entre las coordenadas  $x$  y  $\theta$  que es equivalente en este caso a (2.5).

A partir de la distribución de aceleraciones (2.3) podemos obtener la aceleración del punto de contacto:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) \\ &= \ddot{x}\hat{i} - \ddot{\theta}\hat{k} \times (-a\hat{j}) + \dot{\theta}\hat{k} \times (\dot{\theta}\hat{k} \times (-a\hat{j})) \\ &= \ddot{x}\hat{i} - a\ddot{\theta}\hat{i} + a\dot{\theta}^2\hat{j} \\ &= a\dot{\theta}^2\hat{j} \end{aligned}$$

Por otro lado, la velocidad del punto  $P$  que es instantáneamente de contacto entre el disco y la línea es:

$$\dot{P} = \dot{x}\hat{i} \neq 0$$

y su aceleración:

$$\ddot{P} = \ddot{x}\hat{i} \neq a\dot{\theta}^2\hat{j}$$

### 2.3.2. Centro instantáneo de rotación.

Así como en el ejemplo anterior existe un punto del rígido con velocidad nula (el punto de contacto) cabe preguntarse si para cualquier movimiento plano se cumplirá lo mismo. Supongamos que  $I$  es ese punto; en relación a un punto genérico  $P$  del rígido se cumple:

$$0 = \vec{v}_I = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (I - P) \Leftrightarrow \vec{v}_P = -\vec{\omega} \times (I - P)$$

Consideremos ahora el producto vectorial de la ecuación anterior con  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_P = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (I - P))$$



que usando la igualdad vectorial:

$$(2.6) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

nos queda:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_P = -(\vec{\omega} \cdot (I - P))\vec{\omega} + \vec{\omega}^2(I - P)$$

y como la velocidad angular es perpendicular al plano donde se encuentran los puntos:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{v}_P &= \vec{\omega}^2(I - P) \stackrel{si \vec{\omega} \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ I &= P + \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_P \end{aligned}$$

El punto  $I$ , que podemos hallar a partir de la velocidad de un punto cualquiera del rígido, recibe el nombre de *centro instantáneo de rotación* ya que vista desde él, la velocidad de cualquier punto del rígido se corresponde instantáneamente con la de una rotación pura con la velocidad angular del rígido y con centro en  $I$  (ver figura 2.4(a)):

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (P - I)$$

A partir de (2.7) se puede ver que  $I$  está sobre la perpendicular a  $\vec{v}_P$  que pasa por el punto  $P$ ; supongamos el caso en que conocemos la dirección de la velocidad de dos puntos ( $A$ ,  $B$ ) del rígido (como en el caso de la barra de la figura 2.4(b) que se mueve con sus dos extremos en contacto con la pared y el piso); el centro instantáneo de rotación es el punto de intersección de las perpendiculares por  $A$  y  $B$  definidas anteriormente.<sup>3</sup>

## 2.4. Ejemplos de movimiento del rígido en el espacio.

### 2.4.1. Placa cuadrada girando alrededor de un eje.

Consideremos como ejemplo de movimiento de un rígido en el espacio, una placa cuadrada homogénea de lado  $3h$  (ver figura 2.5(a)) que puede girar libremente alrededor del eje  $Ox$  horizontal, el cual a su vez gira con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor del eje  $Oy$  vertical (*examen diciembre 2007*). Nos preguntamos ahora cuál es la velocidad angular de la placa. Para especificar la configuración espacial de

---

<sup>3</sup>Note que para este caso el punto  $P$  no está sobre el cuerpo que llamamos barra sino sobre la *extensión rígida* de este cuerpo, es decir, el conjunto de puntos que se mueve manteniendo constantes las distancias a todos los puntos del rígido definido.

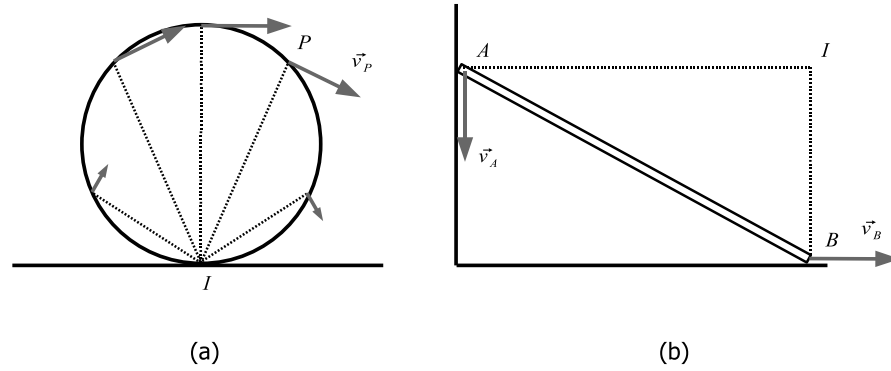


Figura 2.4: Centro instantáneo de rotación para (a) disco que rueda sin deslizar (b) barra apoyada en pared y piso.

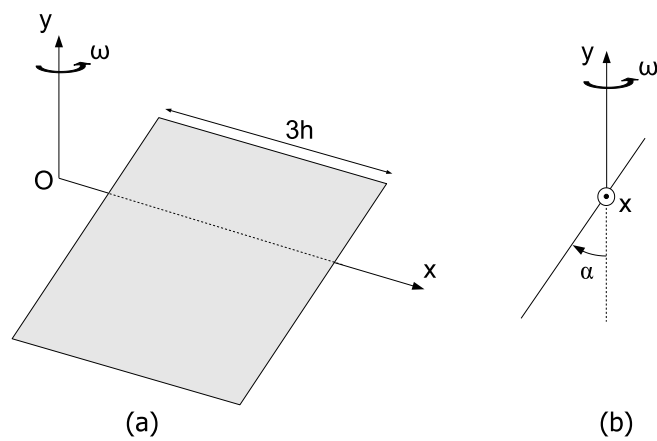


Figura 2.5: (a) Placa cuadrada girando libremente (b) Vista lateral.

la placa basta con dar, por ejemplo, el ángulo  $\alpha$  que forma la misma con respecto a la vertical (figura 2.5(b)). La velocidad angular de la placa *relativa* al sistema  $\{O, \hat{x}, \hat{y}\}$  es  $-\dot{\alpha}\hat{x}$ . Por otro lado, la velocidad angular de este sistema es  $\omega\hat{y}$ . Aplicando el Teorema de Adición de Velocidades Angulares resulta que la velocidad angular de la placa es:

$$\vec{\omega} = -\dot{\alpha}\hat{x} + \omega\hat{y}$$

### 2.4.2. Esfera rodando sin deslizar.

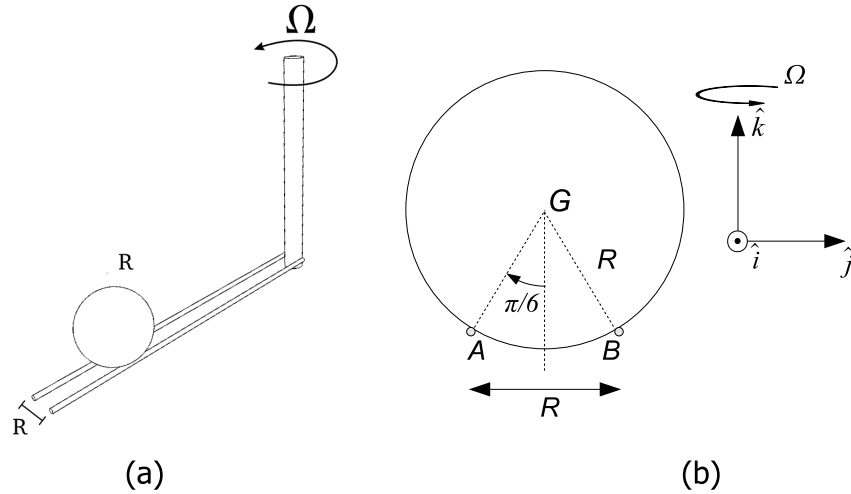


Figura 2.6: (a) Esfera rodando sin deslizar sobre varillas en movimiento (b) Sistema de coordenadas.

Consideremos ahora el caso de la figura 2.6(a) (*examen diciembre 2008*) donde una esfera de radio  $R$  rueda sin deslizar sobre dos varillas separadas una distancia  $R$ . Las varillas están en un plano horizontal y soldadas a un cilindro vertical que gira con velocidad angular  $\Omega$  constante. Nos preguntamos cómo escribir la velocidad angular de la esfera en términos de la distancia ( $x$ ) del centro de la esfera al eje del cilindro. Consideremos en primera instancia el sistema de coordenadas  $\{O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  solidario al cilindro y las varillas donde  $O$  es un punto del eje (figura 2.6(b)). Con respecto a este sistema móvil, los puntos de contacto de la esfera con las varillas ( $A$  y  $B$ ) están quietos. A partir de (2.2) resulta que la velocidad angular de la esfera *relativa* al sistema móvil debe ser colineal con  $AB$ :  $\omega_y\hat{j}$ . Si la velocidad del centro

( $G$ ) es  $\dot{x}\hat{i}$ , la condición de rodadura sin deslizamiento equivale entonces a

$$\dot{x} = R \cos \frac{\pi}{6} \omega_y$$

Apelando ahora al Teorema de Adición de Velocidades Angulares, la velocidad angular de la esfera se puede escribir como la suma de la velocidad angular relativa al sistema móvil y la velocidad angular del sistema ( $\Omega\hat{k}$ ):

$$\vec{\omega} = \omega_y \hat{j} + \Omega \hat{k}$$

lo que resulta en

$$\vec{\omega} = \frac{2\dot{x}}{\sqrt{3}R} \hat{j} + \Omega \hat{k}$$

## 2.5. Ángulos de Euler.

En los ejemplos vistos anteriormente necesitamos especificar la velocidad angular de un rígido recurriendo a la adición de velocidades angulares para sistemas convenientemente elegidos según cada problema. La descripción de la orientación de un rígido mediante los *Ángulos de Euler* permite dar sistemáticamente la velocidad angular del mismo. En la figura 2.7 se muestran estos ángulos. Sean  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  los ejes del sistema solidario al rígido y  $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$  los del sistema fijo.  $\theta$  es el ángulo entre  $\hat{k}$  y  $\hat{K}$ . Sobre la intersección de los planos  $O\hat{I}\hat{J}$  y  $O\hat{i}\hat{j}$  está la *línea de nodos*  $\hat{\xi}$  orientada de forma tal que la rotación alrededor de ella que lleva de  $\hat{K}$  a  $\hat{k}$  sea positiva.  $\varphi$  es el ángulo entre  $\hat{\xi}$  e  $\hat{I}$ . Finalmente,  $\psi$  es el ángulo entre  $\hat{i}$  y  $\hat{\xi}$ .

La sucesión de transformaciones que lleva del sistema fijo al rígido son, de acuerdo a las definiciones de los ángulos, las siguientes rotaciones simples:

- Rotación de ángulo  $\varphi$  alrededor de  $\hat{K}$ .
- Rotación de ángulo  $\theta$  alrededor de  $\hat{\xi}$ .
- Rotación de ángulo  $\psi$  alrededor de  $\hat{k}$ .

Consecuentemente, la velocidad angular del rígido se puede escribir como:

$$(2.8) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{K} + \dot{\theta} \hat{\xi} + \dot{\psi} \hat{k}$$

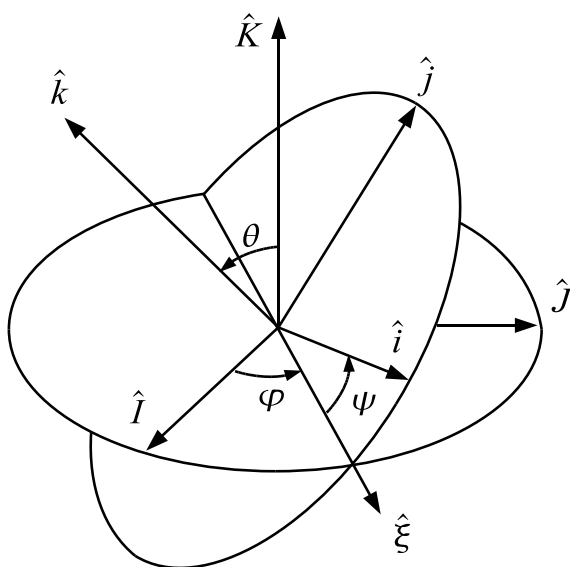


Figura 2.7: Ángulos de Euler.

# Capítulo 3

## Cinética del Rígido

### Introducción.

En el capítulo anterior estudiamos las propiedades de un rígido en cuanto al movimiento de los puntos que lo conforman sin preocuparnos por la masa de los mismos. Estudiaremos entonces ahora las propiedades de un sistema rígido en cuanto a su distribución de masa.

### 3.1. Momento Angular de un Rígido.

De acuerdo con (1.9), el momento angular de un sistema de partículas  $S$  con respecto a un punto  $Q$  es:

$$\vec{L}_Q = \sum_{i \in S} (P_i - Q) \times m_i \vec{v}_i$$

Consideremos ahora un rígido. Sea  $\vec{v}_Q$  la velocidad del punto del rígido que coincide instantáneamente con  $Q$ . A partir de la distribución de velocidades para puntos de un rígido (2.2) tenemos:

$$(3.1) \quad \vec{v}_i = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P_i - Q)$$

y el momento angular se puede escribir:

$$\begin{aligned} \vec{L}_Q &= \sum_{i \in S} (P_i - Q) \times m_i (\vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P_i - Q)) \\ &= \left[ \sum_{i \in S} m_i (P_i - Q) \right] \times \vec{v}_Q + \sum_{i \in S} m_i (P_i - Q) \times (\vec{\omega} \times (P_i - Q)) \end{aligned}$$

Usando ahora la definición de centro de masas de un sistema (1.2) se puede modificar el primer término del lado derecho de la ecuación anterior:

$$(3.2) \quad \vec{L}_Q = M(G - Q) \times \vec{v}_Q + \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q) \times (\vec{\omega} \times (P_i - Q))]$$

donde  $M$  es la masa total del rígido y  $G$  su centro de masas. Recordemos ahora la expresión para el triple producto vectorial (2.6):

$$(3.3) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Con esta relación podemos desarrollar el segundo término del lado derecho de (3.2):

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \vec{L}_Q &= M(G - Q) \times \vec{v}_Q + \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 \vec{\omega} - ((P_i - Q) \cdot \vec{\omega})(P_i - Q)] \\ &= M(G - Q) \times \vec{v}_Q + \left( \sum_{i \in S} m_i (P_i - Q)^2 \right) \vec{\omega} - \sum_{i \in S} m_i ((P_i - Q) \cdot \vec{\omega})(P_i - Q) \end{aligned}$$

### Operadores lineales y producto Tensorial.

El segundo y tercer término del lado derecho de (3.4) corresponden a una operación lineal sobre el vector velocidad angular. Para un operador lineal arbitrario  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbb{T}}$ , los elementos  $T_{\alpha\beta}$  de la matriz  $\mathbf{T}$  que lo representa en una base dada  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  son:

$$(3.5) \quad T_{\alpha\beta} = \left( \overset{\leftrightarrow}{\mathbb{T}} \hat{e}_\beta \right)_\alpha$$

de manera que la matriz  $\mathbf{T}$  resulta:

$$(3.6) \quad \mathbf{T}^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

El *producto tensorial*  $\vec{a} \otimes \vec{b}$  entre dos vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  es un operador lineal no conmutativo que se define a partir de la aplicación del mismo sobre un tercer vector  $\vec{x}$ :

$$(3.7) \quad [\vec{a} \otimes \vec{b}] \vec{x} \equiv (\vec{b} \cdot \vec{x}) \vec{a}$$

Si  $\mathbf{c}$  es la matriz que representa al producto tensorial, sus componentes serán, según (3.5) y (3.7):

$$(3.8) \quad c_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta$$

Por lo que la representación matricial del producto tensorial es:

$$(3.9) \quad \mathbf{c}^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Este conjunto ordenado de 9 elementos es la representación matricial de un *tensor* de rango 2. Veremos más adelante que no cualquier conjunto de 9 elementos define a un tensor, sino que sus propiedades de transformación bajo cambios de coordenadas lo hacen, lo mismo que sucede para un vector<sup>1</sup>.

A partir de la definición dada para el producto tensorial entre vectores, el último término del lado derecho de (3.4) se puede entonces reescribir como:

$$\sum_{i \in S} m_i ((P_i - Q) \cdot \vec{\omega})(P_i - Q) = \left[ \sum_{i \in S} m_i (P_i - Q) \otimes (P_i - Q) \right] \vec{\omega}$$

Por lo que el momento angular del rígido (3.4) resulta:

$$(3.10) \quad \boxed{\vec{L}_Q = M(G - Q) \times \vec{v}_Q + \mathbb{I}_Q \vec{\omega}}$$

donde  $\mathbb{I}_Q$  es el *tensor de inercia* del rígido con respecto al punto  $Q$ :

$$(3.11) \quad \mathbb{I}_Q = \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 \mathbb{1} - (P_i - Q) \otimes (P_i - Q)]$$

( $\mathbb{1}$  es el operador identidad). Las componentes  $\alpha\beta$  de este tensor en una base ortogonal  $\{\hat{e}_\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$  son:

$$(3.12) \quad (I_Q)_{\alpha\beta} = \sum_i \{m_i (P_i - Q)^2 \delta_{\alpha\beta} - m_i (P_i - Q)_\alpha (P_i - Q)_\beta\}$$

donde usamos la *delta de Kronecker*:

$$(3.13) \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Consideremos la aplicación particular del tensor de inercia sobre el versor  $\hat{u}$  que identifica a un eje que pasa por el punto  $Q$ . Definimos el **momento de inercia** alrededor del eje  $\hat{u}$  que pasa por  $Q$  como:

$$(3.14) \quad I_{Q, \hat{u}} = \hat{u} \cdot \mathbb{I}_Q \hat{u}$$

---

<sup>1</sup>un vector es un tensor de rango 1, así como un escalar es un tensor de rango 0



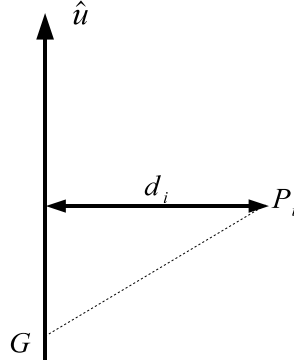


Figura 3.1: Momento de inercia.

y que como veremos a continuación es el mismo para todos los puntos del mismo eje. Para demostrar lo anterior sustituyamos la expresión (3.11) para el tensor:

$$\begin{aligned}
 \hat{u} \cdot \mathbb{I}_Q \hat{u} &= \hat{u} \cdot \left\{ \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 \mathbb{1} \hat{u} - (P_i - Q) \otimes (P_i - Q) \hat{u}] \right\} \\
 &\stackrel{(3.7)}{=} \hat{u} \cdot \left\{ \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 \hat{u} - ((P_i - Q) \cdot \hat{u})(P_i - Q)] \right\} \\
 &= \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 \hat{u} \cdot \hat{u} - ((P_i - Q) \cdot \hat{u})((P_i - Q) \cdot \hat{u})] \\
 &= \sum_{i \in S} m_i [(P_i - Q)^2 - ((P_i - Q) \cdot \hat{u})^2]
 \end{aligned}$$

Se puede ver, de acuerdo a la figura 3.1, que la expresión entre paréntesis rectos de la última igualdad corresponde a la distancia de la  $i$ -ésima partícula del rígido al eje  $\hat{u}$ :

$$(3.15) \quad I_{Q, \hat{u}} = \sum_{i \in S} m_i d_i^2$$

El momento de inercia es entonces una cantidad (definida positiva) propia de la distribución de masa alrededor de un eje dado (el punto  $Q$  sólo sirve para indicar un punto por donde pasa ese eje).

### ***Ejemplo- masas coplanares (parte I).***

El rígido de la figura 3.2 (*examen agosto 2008*) está formado por dos masas  $2m$ , separadas una distancia  $2\ell$  y montadas simétricamente con respecto al punto

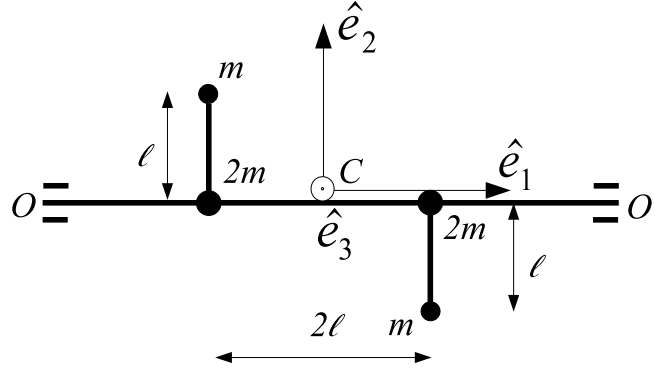


Figura 3.2: Rígido formado por cuatro masas puntuales.

medio ( $C$ ) del eje  $OO'$ , sujetas a sendas masas  $m$  por medio de barras de largo  $\ell$  perpendiculares al eje  $OO'$ . El conjunto de las cuatro masas está en un mismo plano. Tanto las barras que unen masas como el eje  $OO'$  son de masa despreciable. Sea  $\vec{r}_n = P_n - C$ , donde  $P_n$  es una de las cuatro masas del sistema. De acuerdo con (3.12), las componentes del tensor de inercia con respecto a  $C$  son:

$$(I_C)_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^4 m_n (r_n^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{n\alpha} x_{n\beta})$$

donde  $r_n^2 = x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + x_{n3}^2$ ,  $x_{n\alpha} = \vec{r}_n \cdot \hat{e}_\alpha$ . Como las masas tienen por coordenadas:

$$\begin{aligned} 2m : (\ell, 0, 0) & \quad , \quad m : (\ell, -\ell, 0) \\ 2m : (-\ell, 0, 0) & \quad , \quad m : (-\ell, \ell, 0) \end{aligned}$$

el tensor de inercia se representa por:

$$(3.16) \quad \mathbf{I}_C^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = 2m\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

### 3.2. Propiedades del Tensor de Inercia.

Las componentes del tensor de inercia según una base ortonormal arbitraria (3.12) son invariantes bajo el intercambio de índices  $\alpha, \beta$ . Esto quiere decir que de las nueve componentes que tiene, sólo seis de ellas son independientes entre sí: las tres componentes diagonales (que son los *momentos de inercia* alrededor de los ejes de la base ortonormal) y tres de las componentes no diagonales (conocidas como *productos*

de inercia). El tensor de inercia se representa entonces por una matriz simétrica en dimensión 3, tal como resulta en (3.16) del ejemplo anterior. Como cualquier matriz real y simétrica en dimensión finita se puede llevar a una forma diagonal mediante un cambio de base adecuado, comenzaremos entonces por estudiar el cambio en la representación del tensor de inercia bajo un cambio de base.

### 3.2.1. Cambio de base.

Consideremos un punto  $P$  del espacio con coordenadas  $r_\alpha$  con respecto a un sistema  $\{Q, \hat{e}_\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$ . Bajo un cambio de base que lleve de  $\{\hat{e}_\alpha\}$  a  $\{\hat{e}'_\alpha\}$ , las coordenadas de  $P$  se transforman linealmente de acuerdo a:

$$(3.17) \quad r'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 R_{\alpha\beta} r_\beta$$

siendo  $R_{\alpha\beta}$  las componentes de la matriz de cambio de base  $\mathbf{R}$ . Cualquier conjunto de 3 números reales ordenados que transforme bajo un cambio de base de acuerdo a (3.17), es un vector. La norma de este vector en la nueva base es:

$$(3.18) \quad \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \sum_{\alpha=1}^3 r'_\alpha \cdot r'_\alpha \stackrel{(3.17)}{=} \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \sum_{\beta=1}^3 r_\beta R_{\alpha\beta} \right] \left[ \sum_{\gamma=1}^3 R_{\alpha\gamma} r_\gamma \right] = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 r_\beta R_{\beta\alpha}^T R_{\alpha\gamma} r_\gamma$$

siendo  $R_{\alpha\beta}^T$  las componentes de la traspuesta de la matriz de cambio de base. Como los cambios de base (*rotaciones*) conservan la norma de los vectores:

$$(3.19) \quad \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \vec{r} \cdot \vec{r} = \sum_{\beta=1}^3 r_\beta r_\beta \stackrel{(3.13)}{=} \sum_{\beta, \gamma=1}^3 r_\beta \delta_{\beta\gamma} r_\gamma$$

se debe verificar (comparando (3.18) con (3.19)):

$$(3.20) \quad \sum_{\beta, \gamma=1}^3 R_{\beta\alpha}^T R_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \Leftrightarrow \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$$

es decir,  $\mathbf{R}$  debe ser una matriz *ortogonal*.

Veamos ahora qué sucede con el producto tensorial de dos vectores (3.7). Los elementos de matriz (3.8) de  $\vec{c}$  mantienen la misma estructura en la base transformada:  $c'_{\alpha\beta} = a'_\alpha b'_\beta$ , por lo que, de acuerdo a (3.17):

$$c'_{\alpha\beta} = a'_\alpha b'_\beta = \left[ \sum_{\gamma=1}^3 R_{\alpha\gamma} a_\gamma \right] \left[ \sum_{\delta=1}^3 b_\delta R_{\beta\delta} \right] = \sum_{\gamma, \delta=1}^3 R_{\alpha\gamma} a_\gamma b_\delta R_{\beta\delta} = \sum_{\gamma, \delta=1}^3 R_{\alpha\gamma} c_{\gamma\delta} R_{\delta\beta}^T$$

es decir:

$$(3.21) \quad \mathbf{c}' = \mathbf{R}\mathbf{c}\mathbf{R}^T$$

Cualquier conjunto de 9 elementos ordenados que transforme bajo un cambio de base  $\mathbf{R}$  de acuerdo con (3.21) será la representación matricial de un tensor de rango 2. En particular, para el tensor de inercia (3.11) tenemos que:

$$(3.22) \quad \mathbf{I}'_Q = \mathbf{R}\mathbf{I}_Q\mathbf{R}^T$$

### 3.2.2. Ejes Principales.

Mediante un cambio de base adecuado, la matriz  $\mathbf{I}_Q$  que representa al tensor de inercia se puede llevar a su *forma diagonal*  $\mathbf{D}$ :

$$(3.23) \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}\mathbf{I}_Q\mathbf{R}^T$$

o invirtiendo la transformación:

$$(3.24) \quad \mathbf{I}_Q = \mathbf{R}^T\mathbf{D}\mathbf{R}$$

La nueva base donde el tensor toma su forma diagonal está formada por los autovalores de la representación matricial del tensor, llamados también *ejes principales*  $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ , mientras que los autovalores asociados a cada uno reciben el nombre de *momentos de inercia principales* ( $I_1, I_2, I_3$ ):

$$(3.25) \quad \mathbf{D} = \mathbf{I}_Q^{\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Los momentos de inercia principales son únicos a menos del orden en que aparecen en la forma diagonal, así como los ejes principales son únicos a menos de su degeneración.

#### *Ejemplo- masas coplanares (parte II).*

Veamos cuáles son los ejes principales para el rígido de la figura 3.2. Nos proponemos diagonalizar la matriz (3.16), es decir, resolver el problema de autovalores:

$$\mathbf{I}_C^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} \hat{v} = I \hat{v}$$

que implica hallar las soluciones a la ecuación secular:

$$\left| \mathbf{I}_C^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} - I\mathbf{1} \right| = 0$$

es decir:

$$\left| \begin{pmatrix} I_0 - I & I_0 & 0 \\ I_0 & 3I_0 - I & 0 \\ 0 & 0 & 4I_0 - I \end{pmatrix} \right| = 0$$

con  $I_0 = 2m\ell^2$ . Para este caso, el problema de diagonalización se puede restringir al subespacio subtendido por  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$  ya que  $\hat{e}_3$  es eje principal (la fila y la columna que llevan el índice 3 en (3.16) tienen ceros salvo para el elemento diagonal) con autovalor  $I_3 = 4I_0$ :

$$\left| \begin{pmatrix} I_0 - I & I_0 \\ I_0 & 3I_0 - I \end{pmatrix} \right| = 0$$

cuya solución es:

$$I = (2 \pm \sqrt{2})I_0$$

Hallemos ahora los autovectores asociados a los autovalores anteriores. Supongamos que el autovector  $\hat{v}_1$  asociado al autovalor  $I_1 = (2 + \sqrt{2})I_0$  forma un ángulo  $\theta$  con  $\hat{e}_1$ :

$$\hat{v}_1 = \cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2$$

La ecuación que nos permite hallar el autovector es:

$$\begin{pmatrix} I_0 - I_1 & I_0 \\ I_0 & 3I_0 - I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 0$$

que tiene por solución:

$$\tan\theta = -(1 + \sqrt{2})$$

(el autovector restante será ortogonal a  $\hat{v}_1$  ya que corresponde a un autovalor distinto). Finalmente, la matriz ortogonal que nos permite pasar de la base original a la de ejes principales corresponde a una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $\hat{e}_3$ :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(se ve fácilmente que  $\mathbf{R}\hat{e}_1 = \hat{v}_1$ , por ejemplo).

### 3.2.3. Momentos de inercia de un rígido plano.

Consideremos un rígido plano tal como el de la figura 3.2. En (3.16) se puede observar que la suma de los dos primeros momentos de inercia corresponde al tercero;

vamos a establecer ahora la generalidad de esta propiedad para cualquier rígido plano. Consideremos los momentos de inercia de acuerdo con (3.12):

$$\begin{aligned}(I_Q)_{11} &= \sum_i \{m_i(P_i - Q)^2 - m_i(P_i - Q)_1^2\} \\(I_Q)_{22} &= \sum_i \{m_i(P_i - Q)^2 - m_i(P_i - Q)_2^2\} \\(I_Q)_{33} &= \sum_i \{m_i(P_i - Q)^2 - m_i(P_i - Q)_3^2\}\end{aligned}$$

Sea  $\hat{e}_3$  el eje perpendicular al plano del rígido y consideremos que el punto de referencia  $Q$  pertenece a este plano. El vector  $(P_i - Q)$  no tiene entonces componente según el eje  $\hat{e}_3$ :  $(P_i - Q)_3 = 0$ , por lo que  $(P_i - Q)^2 = (P_i - Q)_1^2 + (P_i - Q)_2^2$  y los momentos de inercia resultan:

$$\begin{aligned}(I_Q)_{11} &= \sum_i m_i(P_i - Q)_2^2 \\(I_Q)_{22} &= \sum_i m_i(P_i - Q)_1^2 \\(I_Q)_{33} &= \sum_i m_i \{(P_i - Q)_1^2 + (P_i - Q)_2^2\}\end{aligned}$$

de donde se ve claramente que:

$$(3.26) \quad (I_Q)_{33} = (I_Q)_{11} + (I_Q)_{22}$$

**Ejemplo - disco homogéneo (parte I).**

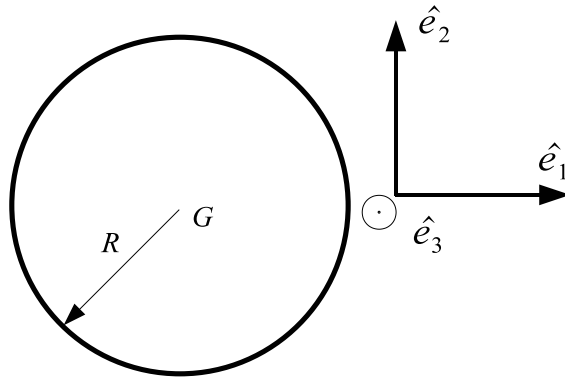


Figura 3.3: Disco homogéneo de radio  $R$ .

Consideremos el caso de un disco plano y homogéneo, de masa  $M$  y radio  $R$  y los momentos de inercia del mismo con respecto a los ejes de la base especificada en la figura 3.3 pasando centro de masa  $G$ . El momento de inercia alrededor del eje  $\hat{e}_3$  se puede obtener a partir del pasaje al continuo de (3.12), donde consideramos la sustitución:  $\sum m_i \rightarrow \int dm$ ,  $\vec{r} = P_i - Q$ ,  $(P_i - Q)_{1,2,3} = x, y, z$ :

$$I_3 = \int dm(\vec{r}^2 - z^2) = \int dm(x^2 + y^2)$$

El elemento de masa  $dm$  es  $dm = \sigma dA$ , siendo  $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$  la densidad superficial de masa y  $dA$  el elemento de área. Considerando la integración en coordenadas polares planas:  $dA = r dr d\theta$ , donde  $r^2 = x^2 + y^2$ , el momento  $I_3$  es:

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sigma dr r \cdot r^2 = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Los restantes momentos de inercia se pueden hallar sabiendo que son iguales entre sí:  $I_1 = I_2$  (pues el papel de  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  es intercambiable) y que su suma, de acuerdo con (3.26) debe dar  $I_3$ :  $I_3 = I_1 + I_2$ , por lo que:  $I_1 = I_2 = \frac{I_3}{2}$ .

### Pasaje al continuo.

Generalizando el caso tratado en el ejemplo anterior, para cualquier rígido con distribución continua de masa la representación matricial de su tensor de inercia toma la forma:

$$(3.27) \quad \mathbf{I}_Q^{\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}} = \begin{pmatrix} \int dV \rho(y^2 + z^2) & -\int dV \rho xy & -\int dV \rho xz \\ -\int dV \rho yx & \int dV \rho(x^2 + z^2) & -\int dV \rho yz \\ -\int dV \rho zx & -\int dV \rho zy & \int dV \rho(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

siendo  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  la posición de los puntos materiales del rígido vista desde  $Q$  y  $\rho(x, y, z)$  la densidad (volumétrica) de masa para el punto  $(x, y, z)$  considerado.

### 3.2.4. Simetrías.

Consideremos ahora *operaciones de cobertura* sobre un rígido, es decir, operaciones que no alteren la distribución de masa del mismo como conjunto, cambiando sí la posición de las partículas individuales. En particular veamos (i) rotaciones alrededor de un eje (ii) reflexiones en un plano.

- *Plano de simetría* El eje ( $\hat{e}_3$ ) perpendicular al plano de simetría de un rígido (figura 3.4(b)) es eje principal para el mismo. En particular, cualquier eje perpendicular a un rígido plano es principal para el mismo.

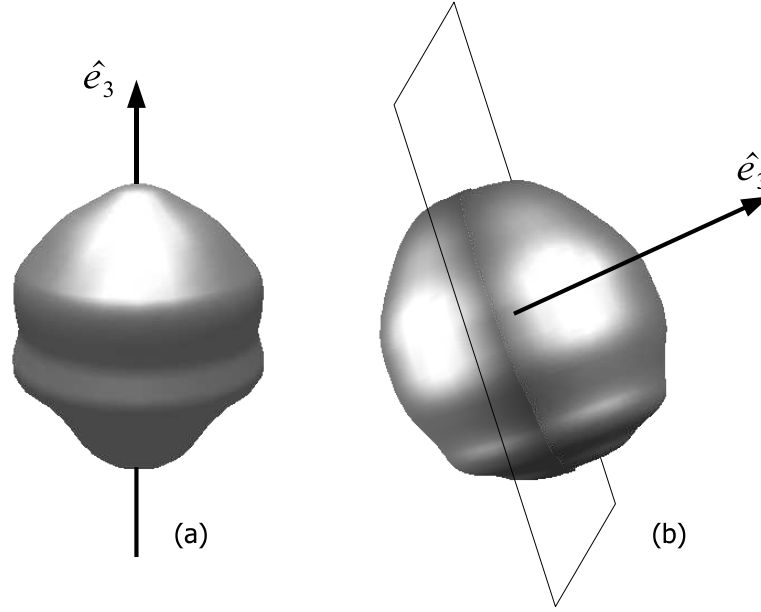


Figura 3.4: (a) Rígido de revolución (b) Rígido con simetría axial.

*dem.* Consideremos  $\hat{z}$  como eje y tomemos  $(x, y)$  como el plano de simetría del rígido:

$$\rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$$

Se puede ver que las integrales en (3.27) correspondientes a los productos de inercia  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$  se anulan, por lo que  $\hat{z}$  es principal.

- *Rígidos de revolución* Para aquellos rígidos que son invariantes bajo rotaciones de cualquier ángulo en torno a un eje (figura 3.4(a)), este eje (sea  $\hat{e}_3$ ) es principal y cualquier otro eje perpendicular a él por un punto del mismo también es principal con degeneración doble.<sup>2</sup>

*dem.* Tomemos  $\hat{z}$  nuevamente como eje; en coordenadas cilíndricas, la densidad de masa verifica:

$$\rho(r, \varphi, z) = \rho(r, z)$$

( $r$  es la distancia al eje  $\hat{z}$ ) y se puede ver que todos los productos de inercia son nulos, además de que los momentos de inercia según  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  deben ser iguales.

- *Centro de simetría* Para un rígido con un centro de simetría para las operaciones de cobertura (es decir con simetría esférica), cualquier eje que pase por este centro es principal con degeneración triple.

---

<sup>2</sup>es decir, el momento de inercia alrededor de cualquiera de estos ejes es el mismo y los posibles vectores subtienden un subespacio de dimensión 2.



*dem.* En coordenadas cilíndricas, la densidad de masa verifica:

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$$

y todos los momentos de inercia son iguales entre sí, así como los productos son nulos.

### ***Ejemplo - disco homogéneo (parte II).***

El disco de la figura 3.3 es un rígido plano y de revolución, por lo que  $\hat{e}_3$  es eje principal. Por ser un rígido de revolución,  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  son también ejes principales. El tensor de inercia tiene entonces por representación:

$$\mathbf{I}_Q^{\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}} = \begin{pmatrix} \frac{I_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix}$$

### **3.2.5. Teorema de Steiner.**

Veamos cómo cambia el tensor de inercia cuando consideramos un cambio en el punto de referencia para el mismo. En particular, veremos la relación entre los tensores para el centro de masas del rígido y para un punto arbitrario  $Q$ . El tensor de inercia referido a este punto arbitrario es, de acuerdo con (3.11):

$$\mathbb{I}_Q = \sum_i m_i [(P_i - Q)^2 \mathbb{1} - (P_i - Q) \otimes (P_i - Q)]$$

Introduzcamos ahora convenientemente un término nulo  $G - G$  de manera que:

$$\begin{aligned} (P_i - Q) &= (P_i - G) + (G - Q) \\ (P_i - Q)^2 &= (P_i - G)^2 + (G - Q)^2 + 2(P_i - G) \cdot (G - Q) \\ (P_i - Q) \otimes (P_i - Q) &= (P_i - G) \otimes (P_i - G) + (P_i - G) \otimes (G - Q) \\ &\quad + (G - Q) \otimes (P_i - G) + (G - Q) \otimes (G - Q) \end{aligned}$$

El primer término del tensor de inercia es entonces:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i (P_i - Q)^2 \mathbb{1} &= \sum_i m_i [(P_i - G)^2 + (G - Q)^2 + 2(P_i - G) \cdot (G - Q)] \mathbb{1} \\ &= \sum_i m_i (P_i - G)^2 \mathbb{1} + (G - Q)^2 \sum_i m_i \mathbb{1} + 2 \left[ \sum_i m_i (P_i - G) \right] \cdot (G - Q) \mathbb{1} \\ &\stackrel{(1,2)}{=} \sum_i m_i (P_i - G)^2 \mathbb{1} + M(G - Q)^2 \mathbb{1} \end{aligned}$$

(donde la última igualdad proviene de considerar el centro de masas desde el centro de masas mismo). De igual forma, el segundo término del tensor es:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i (P_i - Q) \otimes (P_i - Q) &= \sum_i m_i (P_i - G) \otimes (P_i - G) + \left[ \sum_i m_i (P_i - G) \right] \otimes (G - Q) \\ &\quad + (G - Q) \otimes \left[ \sum_i m_i (P_i - G) \right] + \sum_i m_i (G - Q) \otimes (G - Q) \\ &\stackrel{(1,2)}{=} \sum_i m_i (P_i - G) \otimes (P_i - G) + M(G - Q) \otimes (G - Q) \end{aligned}$$

Agrupando los dos términos, el tensor de inercia resulta:

$$\mathbb{I}_Q = \sum_i m_i (P_i - G)^2 \mathbb{1} - \sum_i m_i (P_i - G) \otimes (P_i - G) + M(G - Q)^2 \mathbb{1} - M(G - Q) \otimes (G - Q)$$

Los dos primeros términos del lado derecho de la igualdad anterior corresponden según (3.11) al tensor referido al centro de masas y tenemos entonces el **Teorema de Steiner**:

$$(3.28) \quad \mathbb{I}_Q = \mathbb{I}_G + \mathbb{J}_Q^{M,G}$$

donde:

$$(3.29) \quad \mathbb{J}_Q^{M,G} = M [(G - Q)^2 \mathbb{1} - (G - Q) \otimes (G - Q)]$$

o en términos de sus componentes:

$$(3.30) \quad \left( \mathbb{J}_Q^{M,G} \right)_{\alpha\beta} = M(G - Q)^2 \delta_{\alpha\beta} - M(G - Q)_\alpha (G - Q)_\beta$$

### **Teorema de Steiner para momentos de inercia.**

Consideremos en particular cómo vincular los momentos de inercia correspondientes a dos ejes paralelos en la dirección  $\hat{u}$  que pasan por  $G$  y un punto  $O$  respectivamente. Sean  $I_{G,\hat{u}}$  e  $I_{O,\hat{u}}$  esos momentos:

$$\begin{aligned} I_{G,\hat{u}} &= \hat{u} \cdot \mathbb{I}_G \hat{u} \\ I_{O,\hat{u}} &= \hat{u} \cdot \mathbb{I}_O \hat{u} \end{aligned}$$

A partir de (3.29) tenemos que:

$$\hat{u} \cdot \mathbb{I}_O \hat{u} = \hat{u} \cdot \mathbb{I}_G \hat{u} + M(G - O)^2 \hat{u} \cdot \mathbb{1} \hat{u} - M \hat{u} \cdot [(G - O) \otimes (G - O)] \hat{u}$$

A partir de (3.7) tenemos que:

$$\hat{u} \cdot [(G - O) \otimes (G - O)] \hat{u} = \hat{u} \cdot [((G - O) \cdot \hat{u})(G - O)] = ((G - O) \cdot \hat{u})^2$$

y por lo tanto:

$$\hat{u} \cdot \mathbb{I}_O \hat{u} = \hat{u} \cdot \mathbb{I}_G \hat{u} + M [(G - O)^2 - ((G - O) \cdot \hat{u})^2]$$

que se simplifica usando que la distancia entre los ejes verifica:

$$d^2 = (G - O)^2 - ((G - O) \cdot \hat{u})^2$$

$$(3.31) \quad I_{O,\hat{u}} = I_{G,\hat{u}} + Md^2$$

### 3.3. Energía cinética de un rígido.

Siguiendo el planteo general (ver (1.15)) visto para un sistema de partículas cualquiera, la energía cinética de un rígido es:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$$

que a partir de (3.1) resulta en:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i [\vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P_i - Q)]^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_Q^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i [\vec{\omega} \times (P_i - Q)]^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i 2\vec{v}_Q \cdot [\vec{\omega} \times (P_i - Q)] \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}_Q^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i [\vec{\omega} \times (P_i - Q)]^2 + \vec{v}_Q \cdot \left\{ \vec{\omega} \times \left[ \sum_i m_i (P_i - Q) \right] \right\} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \frac{1}{2} M \vec{v}_Q^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i [\vec{\omega} \times (P_i - Q)]^2 + M \vec{v}_Q \cdot [\vec{\omega} \times (G - Q)] \end{aligned}$$

El segundo término del lado derecho de la última igualdad se puede desarrollar usando que el producto mixto es cíclico:

$$(3.32) \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

y tomando  $\vec{A} = \vec{\omega} \times (P_i - Q)$ ,  $\vec{B} = \vec{\omega}$ ,  $\vec{C} = (P_i - Q)$ :

$$[\vec{\omega} \times (P_i - Q)]^2 = [\vec{\omega} \times (P_i - Q)] \cdot [\vec{\omega} \times (P_i - Q)] = \vec{\omega} \cdot [(P_i - Q) \times (\vec{\omega} \times (P_i - Q))]$$

Por lo que la energía cinética se puede escribir como:

$$T = \frac{1}{2}M\vec{v}_Q^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \left\{ \sum_i m_i (P_i - Q) \times [\vec{\omega} \times (P_i - Q)] \right\} + M\vec{v}_Q \cdot [\vec{\omega} \times (G - Q)]$$

Comparando ahora (3.10) con (3.2) resulta que el segundo término del lado derecho de la igualdad anterior se puede reescribir en función del tensor de inercia, por lo que finalmente tenemos:

$$(3.33) \quad \boxed{T = \frac{1}{2}M\vec{v}_Q^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \vec{\omega} + M\vec{v}_Q \cdot [\vec{\omega} \times (G - Q)]}$$

### **Casos particulares:**

- Si  $Q$  es un punto del rígido instantáneamente en reposo:  $\vec{v}_Q = 0$ , la energía cinética del sistema será la de una rotación pura, que puede escribirse a partir de (3.33) como:

$$(3.34) \quad T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \vec{\omega}$$

- Para el caso particular en que  $Q = G$ , la energía cinética nos queda como:

$$(3.35) \quad T = \frac{1}{2}M\vec{v}_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \vec{\omega}$$

Comparando (3.35) con (1.16) vemos que el término en la energía cinética del movimiento de las partículas relativo al centro de masas presente en el teorema de König corresponde en un rígido a una rotación pura en torno al centro de masas.



# Capítulo 4

## Dinámica del Rígido

### 4.1. Ecuaciones Cardinales.

Así como sucede para cualquier sistema de partículas, la **Primera Cardinal** para un rígido es (1.8):

$$(4.1) \quad \boxed{M\vec{a}_G = \vec{R}^{(ext)}}$$

donde  $\vec{R}^{(ext)}$  es la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el rígido. Por otro lado, para cualquier sistema donde las fuerzas internas verifiquen el principio de acción y reacción fuerte, tenemos la Segunda Cardinal (1.11):

$$\dot{\vec{L}}_Q = M\vec{v}_G \times \dot{Q} + \vec{M}_Q^{(ext)}$$

siendo  $\vec{M}_Q^{(ext)}$  el momento de las fuerzas externas al sistema con respecto al punto  $Q$ . Considerando la forma particular (3.10) que toma el momento angular de un rígido:

$$\vec{L}_Q = M(G - Q) \times \vec{v}_Q + \mathbb{I}_Q \vec{\omega}$$

la derivada del lado izquierdo de la Segunda Cardinal es:

$$\dot{\vec{L}}_Q = M(\vec{v}_G - \dot{Q}) \times \vec{v}_Q + M(G - Q) \times \frac{d\vec{v}_Q}{dt} + \frac{d(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})}{dt}$$

y tenemos la **Segunda Cardinal** para un rígido:

$$(4.2) \quad M(\vec{v}_G - \dot{Q}) \times \vec{v}_Q + M(G - Q) \times \frac{d\vec{v}_Q}{dt} + \frac{d(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})}{dt} - M\vec{v}_G \times \dot{Q} = \vec{M}_Q^{(ext)}$$

Para el caso en que  $Q$  sea un punto del rígido se cumple:

- $\dot{Q} = \vec{v}_Q$
- $\frac{d\vec{v}_Q}{dt} = \vec{a}_Q$

y la segunda cardinal toma esta forma simplificada:

$$(4.3) \quad \boxed{M(G - Q) \times \vec{a}_Q + \frac{d(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})}{dt} = \vec{M}_Q^{(ext)}}$$

### Observación 1:

Para tratar con el término  $\frac{d(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})}{dt}$  de (4.3) podemos considerar la relación entre derivada absoluta y relativa:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

y tomar como sistema relativo uno solidario al rígido con origen en  $Q$ :

$$\frac{d(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})}{dt} = \frac{d'(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_Q \vec{\omega} = \frac{d'\mathbb{I}_Q}{dt} \vec{\omega} + \mathbb{I}_Q \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_Q \vec{\omega} = \mathbb{I}_Q \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_Q \vec{\omega}$$

donde la última igualdad vale ya que como  $Q$  es un punto del rígido, las distancias relativas de los demás puntos del rígido a él no cambian y por lo tanto el tensor tampoco. Así, la segunda cardinal toma la siguiente forma:

$$(4.4) \quad M(G - Q) \times \vec{a}_Q + \mathbb{I}_Q \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_Q \vec{\omega} = \vec{M}_Q^{(ext)}$$

### Observación 2:

Para los casos en que el movimiento sea plano, consideramos la proyección de la segunda cardinal (4.3) con respecto al eje ( $\hat{k}$ ) perpendicular al plano:

$$M(G - Q) \times \vec{a}_Q \cdot \hat{k} + \frac{d(\mathbb{I}_Q \vec{\omega})}{dt} \cdot \hat{k} = \vec{M}_Q^{(ext)} \cdot \hat{k} = M_Q^{(ext)}$$

(donde usamos que como todas las fuerzas actúan en el plano, su momento debe ser de la forma  $M_Q^{(ext)} \hat{k}$ ). En el segundo término del lado izquierdo podemos intercambiar la derivada y el producto escalar ya que  $\hat{k}$  tiene una dirección fija:

$$M(G - Q) \times \vec{a}_Q \cdot \hat{k} + \frac{d(\mathbb{I}_Q \vec{\omega} \cdot \hat{k})}{dt} = M_Q^{(ext)}$$

Luego, como  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$  y el eje  $\hat{k}$  es principal para el tensor:

$$\frac{d(\mathbb{I}_Q \vec{\omega} \cdot \hat{k})}{dt} = \frac{d(\mathbb{I}_Q \hat{k} \cdot \hat{k} \omega)}{dt} = \frac{d(I_{Q,\hat{k}} \hat{k} \cdot \hat{k} \omega)}{dt} = I_{Q,\hat{k}} \dot{\omega}$$

(donde la última igualdad vale ya que  $Q$  es un punto del rígido y el momento de inercia para un eje que pasa por él no varía con el tiempo) y nos queda la segunda cardinal para un problema plano:

$$(4.5) \quad M(G - Q) \times \vec{a}_Q \cdot \hat{k} + I_{Q,\hat{k}} \dot{\omega} = M_Q^{(ext)}$$

## 4.2. Sistemas de Fuerzas Aplicadas.

A la hora de aplicar las ecuaciones cardinales a un rígido deberemos encontrar la resultante  $\vec{R}^{(ext)}$  y el momento  $\vec{M}_Q^{(ext)}$  de las fuerzas externas al sistema. Esto implica la *reducción* de un sistema de fuerzas:  $\mathcal{F} = \{\mathbf{P}_i, \vec{F}_i^{(ext)}\}$  dado por las fuerzas externas al sistema  $\vec{F}_i^{(ext)}$  y sus puntos de aplicación  $\mathbf{P}_i$ .

### 4.2.1. Sistemas Equivalentes.

Dos sistemas de fuerzas son *equivalentes* cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- La resultante de cada sistema es la misma.
- El momento de las fuerzas de un sistema u otro con respecto a un punto arbitrario es el mismo.

*Si se trata de un rígido, el efecto de un sistema u otro será igual.*<sup>1</sup>

Por ejemplo, consideremos el sistema de fuerzas gravitatorias actuando sobre un cuerpo cerca de la superficie de la Tierra. La fuerza sobre una partícula  $i$  es

$$\vec{F}_i = m_i \vec{g}$$

La resultante es entonces

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \vec{g} = M \vec{g}$$

---

<sup>1</sup> No vale lo mismo si el cuerpo es deformable; consideremos por ejemplo una banda elástica de cuyos extremos tiramos con fuerzas iguales y opuestas. El efecto no será claramente el mismo si empujamos con fuerzas iguales y opuestas sobre cada extremo, a pesar de que los dos sistemas son equivalentes.



(siendo  $M$  la masa total del sistema). El momento alrededor de un punto  $Q$  es

$$\begin{aligned}\vec{M}_Q &= \sum_i (P_i - Q) \times m_i \vec{g} = \sum_i (P_i - G + (G - Q)) \times m_i \vec{g} \\ &= \left[ \sum_i m_i (P_i - G) \right] \times \vec{g} + (G - Q) \times \sum_i m_i \vec{g} = (G - Q) \times M \vec{g}\end{aligned}$$

y corresponde entonces a una fuerza  $M\vec{g}$  actuando sobre el centro de masas del sistema (independientemente del punto  $Q$  elegido para referir el momento).  $M\vec{g}$  actuando sobre  $G$  es equivalente sistema original de fuerzas gravitatorias ya que da la misma resultante y el mismo momento no importa cuál sea el punto considerado.

Antes de seguir adelante introduciremos los siguientes conceptos:

**Línea de acción:** Consideremos una fuerza  $\vec{F}$  aplicada sobre un punto  $P$ . La recta que pasa por  $P$  y que contiene a  $\vec{F}$  se denomina *línea de acción* de la fuerza. Se puede ver (figura 4.1) que a efectos de calcular el momento de  $\vec{F}$  respecto a un punto  $O$  arbitrario se puede tomar cualquier punto de la línea de acción como punto de aplicación:

$$(P - O) \times \vec{F} = (P - P') \times \vec{F} + (P' - O) \times \vec{F} = (P' - O) \times \vec{F}$$

ya que  $P - P'$  es colineal con  $\vec{F}$ .

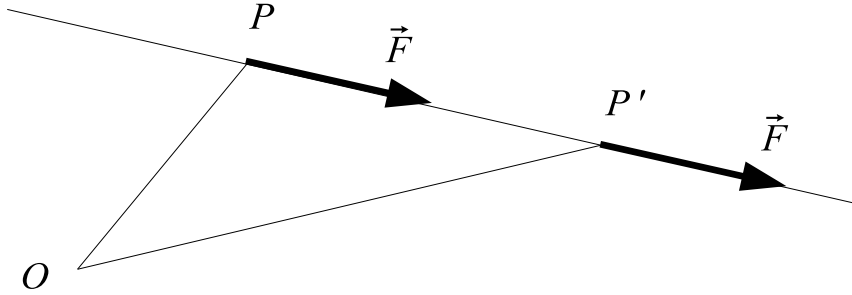


Figura 4.1: Línea de acción para una fuerza  $\vec{F}$ .

**Par:** Un *par* de fuerzas está constituido por dos fuerzas cuyas líneas de acción son paralelas, tienen igual magnitud y sentidos opuestos (figura 4.2).

El momento de este sistema visto desde  $P'$  es:

$$\vec{M}'_P = \vec{a} \times \vec{F}$$

y como este sistema tiene resultante nula, la fórmula (1.13) de cambio de aplicación de momentos nos dice que el momento del par será igual visto desde cualquier punto,

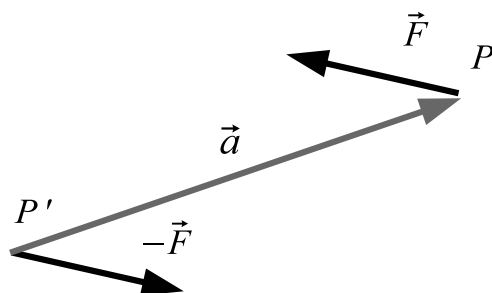


Figura 4.2: Par de fuerzas.

por lo que el subíndice en  $P'$  ya no es necesario:

$$\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}$$

Un par está caracterizado entonces por su momento  $\vec{M}$  y *todos los pares cuyo momento sea igual serán equivalentes entre sí*. En particular, cualquier sistema de fuerzas con resultante nula cuyo momento respecto a un punto arbitrario sea  $\vec{M}$ , será equivalente a un par  $\vec{M}$ .

#### 4.2.2. Reducción de un sistema de fuerzas aplicado sobre un rígido.

1. *Cualquier sistema de fuerzas aplicado  $\mathcal{F}$  se puede reducir a una fuerza aplicada en un punto arbitrario más un par (cualquiera de los cuales puede ser cero).* Sea  $\vec{R}$  la resultante de las fuerzas y  $\vec{M}_P$  el momento de ellas respecto de un punto arbitrario  $P$ . Luego, si hacemos que  $\vec{R}$  actúe en  $P$  y le sumamos un par  $\vec{M}_P$ , este sistema será equivalente al original.
2. *Todo sistema de fuerzas actuando se puede reducir a uno equivalente que contiene como máximo dos fuerzas.* Como el par considerado en el ítem anterior se puede formar con dos fuerzas, una de las cuales puede actuar en un punto arbitrario, podemos considerar la otra fuerza aplicada en el punto  $P$  y sumársela a  $\vec{R}$  para tener una sola fuerza actuando en  $P$  más la otra fuerza del par.

#### Articulaciones.

Podemos ver una aplicación de la reducción de un sistema de fuerzas para el caso de *articulaciones*. En particular vamos a concentrarnos en el caso de articulaciones lisas:

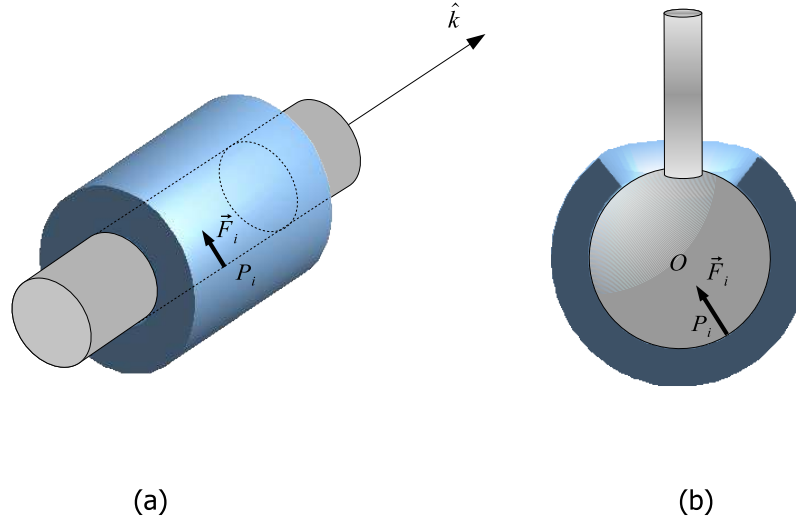


Figura 4.3: Articulaciones lisas: (a) cilíndrica (b) esférica.

- *Articulación cilíndrica lisa.* Consideremos una articulación como la de la figura 4.3(a) formada por un cilindro central cubierto por un cascarón, siendo el contacto entre ellos carente de fricción. Las fuerzas que se ejercen mutuamente están dirigidas según la dirección radial, por lo que el momento ejercido por una de las partes sobre la otra con respecto a un punto del eje no tiene componente según el eje ( $\hat{k}$ ) de la articulación:

$$\vec{M}_O \cdot \hat{k} = 0$$

y esto es independiente del punto del eje considerado ya que usando la fórmula de cambio de momentos (1.13) con respecto a otro punto  $O'$ :

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{R} \times (O' - O)$$

y proyectando según  $\hat{k}$ :

$$\vec{M}_{O'} \cdot \hat{k} = \vec{M}_O \cdot \hat{k} + (\vec{R} \times (O' - O)) \cdot \hat{k} = \vec{M}_O \cdot \hat{k} = 0$$

(donde usamos que  $(O' - O)$  está en la dirección de  $\hat{k}$ ).

- *Articulación esférica lisa.* Para el caso de una articulación como la de 4.3(b), las fuerzas ejercidas sobre la esfera central de la articulación están dirigidas en dirección a  $O$  siempre y cuando el contacto con el soporte externo sea liso. De esta forma, el momento con respecto a  $O$  es nulo:

$$\vec{M}_O = 0$$

### 4.2.3. Potencia de un sistema de fuerzas sobre un rígido.

Veamos ahora algunas consideraciones energéticas concernientes a un sistema de fuerzas que actúa sobre un rígido. En primer lugar, veamos qué sucede con las fuerzas internas al rígido. Consideremos dos puntos del rígido,  $P_i$  y  $P_j$  que interactúan mediante una fuerza  $\vec{F}_{ji}$  que verifica el principio de acción y reacción fuerte. La potencia para este par de fuerzas es:

$$\mathcal{P}_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_j = \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \stackrel{(2.2)}{=} \vec{F}_{ji} \cdot (\vec{\omega} \times (P_i - P_j)) = 0$$

(donde la última igualdad vale en virtud de que  $\vec{\omega} \times (P_i - P_j)$  es ortogonal a  $P_i - P_j$  mientras que  $\vec{F}_{ij}$  tiene la dirección de  $P_i - P_j$  por verificar el principio de acción y reacción fuerte). Esto nos dice que en un sistema rígido, las fuerzas internas no trabajan. El trabajo que nos importa corresponde entonces a los agentes externos. La potencia para el sistema de fuerzas externas al rígido es:

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \cdot \vec{v}_i$$

Consideremos ahora un punto  $Q$  solidario al rígido cuya velocidad es  $\vec{v}_Q$ . A partir de la distribución de velocidades de un rígido (2.2) tenemos entonces:

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \cdot [\vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P_i - Q)] = \left[ \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \right] \cdot \vec{v}_Q + \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \cdot [\vec{\omega} \times (P_i - Q)]$$

Usando que el producto mixto no cambia bajo permutaciones cíclicas (3.32), modificamos el segundo término de la ecuación anterior:

$$\mathcal{P} = \left[ \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \right] \cdot \vec{v}_Q + \left[ \sum_i (P_i - Q) \times \vec{F}_i^{(ext)} \right] \cdot \vec{\omega}$$

y usando ahora la definición de la resultante (1.7) de las fuerzas externas y el momento de las mismas (1.10) con respecto a un punto nos queda:

$$(4.6) \quad \boxed{\mathcal{P} = \vec{R}^{(ext)} \cdot \vec{v}_Q + \vec{M}_Q^{(ext)} \cdot \vec{\omega}}$$

## 4.3. Sistemas vinculados.

Antes de ver algunas aplicaciones de cómo determinar el estado de movimiento de un rígido a partir de las ecuaciones cardinales, necesitaremos dos principios que hacen al movimiento de sistemas donde existen vínculos que restringen los grados de libertad del mismo.

- **Principio de las reacciones vinculares.** *La acción de un vínculo puede ser sustituida por la de un sistema de fuerzas a las que llamaremos **reacciones**.*
- **Principio de pasividad.** *Si un sistema material  $\mathcal{S}$  está sometido a la acción de un sistema de fuerzas activas  $\mathcal{A}$  y a un vínculo  $\mathcal{V}$ , de tal modo que en un instante su estado de movimiento es compatible con  $\mathcal{V}$  y existe un sistema de reacciones vinculares  $\mathcal{R}$  compatibles con la permanencia de  $\mathcal{V}$ , entonces en ese instante permanece  $\mathcal{V}$ .*

#### 4.3.1. Ejemplo - Placa apoyada en una recta.

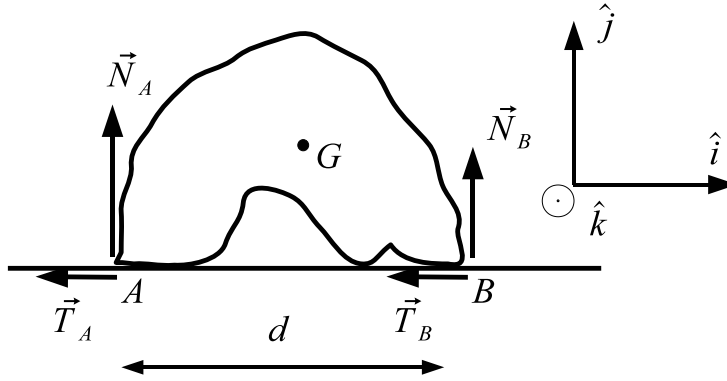


Figura 4.4: Placa apoyada sobre una recta lisa sin volcar.

Como ejemplo de los principios enunciados anteriormente veamos el caso de una placa plana de masa  $m$  obligada a desplazarse apoyándose unilateralmente sobre una recta y sin volcar (figura 4.4).  $A$  es el extremo izquierdo y  $B$  el derecho de la base de sustentación de la placa y la distancia entre ellos es  $d$ . El centro masa ( $G$ ) y la velocidad angular de la placa son:

$$G = x_G \hat{i} + y_G \hat{j}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

El vínculo es  $\mathcal{V} = \{\text{la placa se apoya en la recta unilateralmente sin volcar}\}$ , y puede representarse por un sistema  $\mathcal{R} = \{\mathbf{P}_i, \vec{R}_i\}$  donde los  $\mathbf{P}_i$  son los puntos de apoyo y  $\vec{R}_i = -T_i \hat{i} + N_i \hat{j}$ , con  $N_i > 0$  las reacciones normales de la recta sobre la placa para cada elemento de área en contacto y  $T_i = f N_i$  las tangenciales, suponiendo que la placa desliza hacia la derecha y que el contacto entre la placa y la recta tiene el mismo coeficiente de fricción  $f$  para cualquier punto. Que en un instante  $t_0$  el estado

de movimiento sea *compatible* con  $\mathcal{V}$  significa que:

$$(4.7) \quad \omega(t_0) = 0, \quad \dot{y}_G(t_0) = 0$$

Que en  $t_0$  el vínculo  $\mathcal{V}$  *permanezca* significa que no hay vuelco ni apartamiento incipientes, es decir:

$$(4.8) \quad \dot{\omega}(t_0) = 0, \quad \ddot{y}_G(t_0) = 0$$

Sean  $\vec{R}^{(a)}$ ,  $\vec{M}_O^{(a)}$  y  $\vec{R}^{(r)}$ ,  $\vec{M}_O^{(r)}$  la resultante y el momento neto respecto a un punto  $O$  de las fuerzas activas y reactivas respectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{R}^{(a,r)} &= R_1^{(a,r)} \hat{i} + R_2^{(a,r)} \hat{j} \\ \vec{M}_O^{(a,r)} &= M_O^{(a,r)} \hat{k} \end{aligned}$$

Probaremos ahora que la permanencia del vínculo en  $t_0$  es equivalente a las siguientes condiciones:

$$(4.9) \quad M_A^{(a)} - m(G - A) \times \vec{a}_G \cdot \hat{k} \leq 0$$

$$(4.10) \quad M_B^{(a)} - m(G - B) \times \vec{a}_G \cdot \hat{k} \geq 0$$

Veamos primero cómo (4.8) implica (4.9) y (4.10). Consideremos la segunda cardinal (4.3) respecto del punto  $A$ :

$$[M(G - A) \times \vec{a}_A] \cdot \hat{k} + I_{A,\hat{k}} \dot{\omega} = M_A^{(a)} + M_A^{(r)}$$

Como en el instante considerado se cumple por hipótesis que  $\omega = 0$  y  $\dot{\omega} = 0$ , usando (2.3) tenemos:  $\vec{a}_A = \vec{a}_G$  y por lo tanto:

$$M_A^{(a)} - m(G - A) \times \vec{a}_G \cdot \hat{k} = -M_A^{(r)}$$

y como todas las reacciones sobre la base están a la derecha de  $A$ , las tangenciales no tienen momento respecto al punto  $A$  y  $N_i > 0$ , es claro que  $M_A^{(r)} \geq 0$ , con lo que queda demostrada (4.9). Para probar (4.10) se procede en forma similar desde la segunda cardinal en  $B$ .

Veamos ahora cómo (4.9) y (4.10) implican (4.8). En principio podemos ver que siempre es posible construir un sistema de reactivas, compatible con la condición de que el contacto sea unilateral, tal que:

$$(4.11) \quad M_A^{(r)} = - \left\{ M_A^{(a)} - m(G - A) \times \vec{a}_G \cdot \hat{k} \right\} \geq 0$$

$$(4.12) \quad M_B^{(r)} = - \left\{ M_B^{(a)} - m(G - B) \times \vec{a}_G \cdot \hat{k} \right\} \leq 0$$

Una forma es reducir el sistema  $\mathcal{R}$  a dos reactivas,  $\vec{R}_A = -T_A\hat{i} + N_A\hat{j}$  actuando en  $A$  y  $\vec{R}_B = -T_B\hat{i} + N_B\hat{j}$  en  $B$ , las cuales deben verificar las condiciones del vínculo:  $N_{A,B} \geq 0$  y  $T_{A,B} = fN_{A,B}$ , si la placa desliza. De esta forma, (4.11) y (4.12) se describen como:

$$(4.13) \quad dN_B = - \left\{ M_A^{(a)} - m(G - A) \times \vec{a}_G \cdot \hat{k} \right\} \geq 0$$

$$(4.14) \quad dN_A = + \left\{ M_B^{(a)} - m(G - B) \times \vec{a}_G \cdot \hat{k} \right\} \geq 0$$

Sumando las ecuaciones anteriores tenemos:

$$d(N_A + N_B) = M_B^{(a)} - M_A^{(a)} + (B - A) \times \vec{a}_G \cdot \hat{k} = M_B^{(a)} - M_A^{(a)}$$

donde la última igualdad está dada porque  $A - B$  tiene la dirección de  $\vec{a}_G$ . Usando ahora la relación (1.13) para las fuerzas activas:

$$M_B^{(a)} - M_A^{(a)} = \left[ (A - B) \times \vec{R}^{(a,r)} \right] \cdot \hat{k} = -dR_2^{(a)}$$

que comparando con ecuación anterior nos da:

$$N_A + N_B = -R_2^{(a)}$$

A partir de las ecuaciones cardinales podemos ver que este sistema de reactivas es compatible con el movimiento:

$$\begin{aligned} M\ddot{y}_G &= R_2^{(r)} + R_2^{(a)} = N_A + N_B + R_2^{(a)} = 0 \\ I_{G,\hat{k}}\dot{\omega} &= M_G^{(a)} + M_G^{(r)} \stackrel{(1.13)}{=} M_A^{(a)} + M_A^{(r)} + \left[ (\vec{R}^{(a)} + \vec{R}^{(r)}) \times (G - A) \right] \cdot \hat{k} \\ &\stackrel{(4.11)}{=} M_A^{(a)} - \left\{ M_A^{(a)} - m(G - A) \times \vec{a}_G \cdot \hat{k} \right\} + m\vec{a}_G \times (G - A) \cdot \hat{k} = 0 \end{aligned}$$

*Observación:* Para el caso en que la placa no deslice, se puede demostrar en forma similar que las condiciones para el equilibrio son:

$$\begin{aligned} |R_1^{(a)}| &\leq f|R_2^{(a)}| \\ M_A^{(a)} &\leq 0 \\ M_B^{(a)} &\geq 0 \end{aligned}$$

para ello basta con tomar  $N_{A,B} \geq 0$  y que las componentes horizontales de las reactivas verifiquen:

$$\begin{aligned} T_A &= -\frac{|R_1^{(a)}|}{|R_2^{(a)}|} N_A \\ T_B &= -\frac{|R_1^{(a)}|}{|R_2^{(a)}|} N_B \end{aligned}$$

## 4.4. Estática del Rígido.

Consideremos la configuración de **equilibrio** de un rígido, es decir:

$$(4.15) \quad \vec{a}_G = 0$$

$$(4.16) \quad \dot{\vec{\omega}} = 0$$

Dado el rígido en *reposo*:  $\vec{v}_G = 0$ ,  $\vec{\omega} = 0$  en esta configuración, permanecerá en reposo. Para que el rígido esté en equilibrio es necesario y suficiente que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él sea nula así como el momento de estas fuerzas con respecto a cualquier punto:

$$(4.17) \quad \vec{R}^{(ext)} = 0$$

$$(4.18) \quad \vec{M}_Q^{(ext)} = 0 \quad \forall Q$$

A partir de la primera ecuación cardinal (4.1) es directo ver que (4.15) y (4.17) son equivalentes. Para probar la equivalencia entre (4.16) y (4.18) consideremos la segunda cardinal (4.4) desde el centro de masas:

$$\mathbb{I}_G \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_G \vec{\omega} = \vec{M}_G^{(ext)}$$

Si se cumple (4.16) y  $\vec{\omega} = 0$ , es claro de la ecuación anterior que  $\vec{M}_G^{(ext)} = 0$  (para cualquier otro punto vale también usando (1.13) y que la resultante es cero). Si partimos ahora de que  $\vec{M}_G^{(ext)} = 0$  y el sistema está en reposo ( $\vec{\omega} = 0$ ) tenemos que:

$$\mathbb{I}_G \dot{\vec{\omega}} = 0$$

Si el tensor es *invertible*<sup>2</sup> tenemos que:

$$\mathbb{I}_G^{-1} \mathbb{I}_G \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}} = 0$$

y probamos (4.16).

### 4.4.1. Ejemplo - Barra y placa rectangular.

Consideremos una barra homogénea de longitud  $4L$  y masa  $m$  está apoyada sobre una placa rectangular homogénea de altura  $2L$ , ancho  $2a$  y masa  $M$  y sobre una

---

<sup>2</sup>no será el caso del tensor asociado por ejemplo a una barra ideal, para la cual el momento de inercia alrededor del eje que coincide con la barra es cero. Esto no nos permite afirmar nada acerca de la derivada de la componente de la velocidad angular alrededor de ese eje, lo que no es igualmente de interés físico ya que esa velocidad no sería detectable en la experiencia)



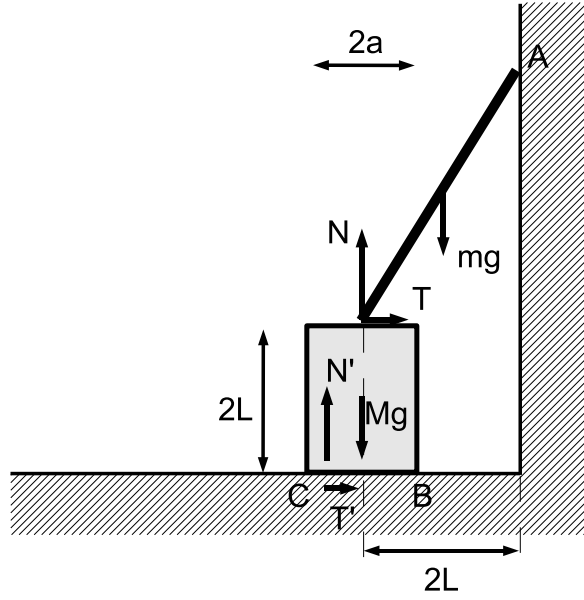


Figura 4.5: Barra y placa rectangular en equilibrio.

pared vertical. La placa está apoyada sobre un piso horizontal y está a una distancia  $2L - a$  de la pared, mientras que el punto de contacto de la barra y la placa está a una distancia  $2L$  de la misma pared. El contacto entre la placa y el piso, así como el contacto entre la placa y la barra, es rugoso y de coeficiente de frotamiento estático  $\mu$ ; el contacto entre la barra y la pared vertical es liso. En este problema (*segundo parcial 2008*) se busca encontrar las condiciones que se deben verificar para que el sistema se encuentre en equilibrio. La componente vertical de la primera cardinal y la segunda cardinal desde el punto  $A$  para la barra son respectivamente:

$$N = mg$$

$$2LN - 2\sqrt{3}LT - Lmg = 0$$

La condición de no deslizamiento de la barra es entonces:

$$|T| \leq \mu|N| \Leftrightarrow \mu \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Por otro lado, la primera cardinal para la placa es:

$$T' = T$$

$$N' = N + Mg$$

donde  $N'$  y  $T'$  son la componente normal y tangencial respectivamente de la resultante de las reactivas con el piso. La condición de no deslizamiento es:

$$|T'| \leq \mu |N'| \Leftrightarrow \mu \geq \left( \frac{m}{m+M} \right) \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

lo que significa que se debe verificar  $\mu \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$  para que no haya deslizamiento de la barra o la placa. Para que la placa no vuelque se debe verificar:

$$\begin{aligned} M_C^{(a)} &\leq 0 \\ M_B^{(a)} &\geq 0 \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo:

$$2LT - a(N + Mg) \leq 0 \Leftrightarrow a \geq \left( \frac{m}{m+M} \right) \frac{L}{\sqrt{3}}$$

#### 4.4.2. Ejemplo - Escalera apoyada en una pared.

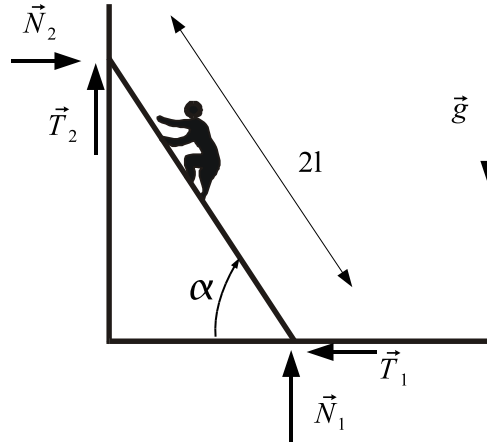


Figura 4.6: Escalera en equilibrio apoyada sobre una pared y piso rugosos.

La escalera de la figura 4.6, de masa  $m$  y longitud  $2l$  está apoyada sobre el piso, de coeficiente de frotamiento  $f_1$ , y sobre la pared vertical, de coeficiente de frotamiento  $f_2$ , formando un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal. Determinaremos el mínimo ángulo  $\alpha$  que permitiría a un pintor de masa  $2m$  subir hasta el extremo superior de la escalera sin que esta deslice. Suponemos entonces que el pintor ya

se encuentra en el extremo superior y planteamos, para la escalera en equilibrio, la primera cardinal:

$$\begin{aligned} N_1 + T_2 - 3mg &= 0 \\ T_1 - N_2 &= 0 \end{aligned}$$

y la segunda cardinal desde el punto de contacto con el piso:

$$mgl\operatorname{sen}\alpha + 2l\operatorname{sen}\alpha 2mg - 2l\operatorname{sen}\alpha N_2 - 2l\cos\alpha T_2 = 0$$

Nótese que tenemos sólo *tres* ecuaciones para *cuatro* incógnitas (las dos componentes de la reacción de la pared y el piso). Se trata de un problema *estáticamente indeterminado* o **hiperestático** y nada más se puede hallar acerca de las reacciones a partir de las condiciones de equilibrio. Si este problema ocurriese en la realidad, las cuatro incógnitas tendrían valores medibles. La falla está en el modelo elegido para resolver el problema. Los cuerpos rígidos son una idealización y si quisiésemos tratar el problema en forma realista deberíamos considerar una barra elástica, lo que está más allá del alcance de este curso.<sup>3</sup> Sin embargo, podemos aún contestar la pregunta del problema.

Las condiciones de permanencia del equilibrio en cuanto al no despegue ( $N_1 > 0$  y  $N_2 > 0$ ) y no vuelco (donde los contactos son puntuales) resultan muy simples de verificar. La condición de no deslizamiento es:

$$\begin{aligned} T_1 &\leq f_1 N_1 \\ |T_2| &\leq f_2 N_2 \end{aligned}$$

La última desigualdad involucra en realidad dos desigualdades (en la primera  $T_1$  sólo puede apuntar hacia la izquierda para asegurar el equilibrio en la horizontal), por lo que las condiciones son:

$$\begin{aligned} T_1 &\leq f_1 N_1 \\ T_2 &\leq f_2 N_2 \\ -f_2 N_2 &\leq T_2 \end{aligned}$$

que en términos de  $N_2$  son:

$$\begin{aligned} 1) \quad \operatorname{tg}\alpha &\geq \frac{1}{f_1} - \frac{mg}{N_2} \\ 2) \quad \operatorname{tg}\alpha &\geq \frac{5mg}{2N_2} - f_2 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>de hecho, el ejemplo anterior *también* es un caso hiperestático. Lo que podemos hallar es la resultante sobre el rígido, pero la distribución real de las reactivas no podemos encontrarla a menos que consideremos la a la placa como un sólido deformable.

$$3) \quad tg\alpha \leq \frac{5mg}{2N_2} + f_2$$

En un gráfico con  $N_2$  como abscisa (figura 4.7) La inecuación 1) nos dice que los valores admisibles de  $tg\alpha$  están por encima de  $\frac{1}{f_1} - \frac{mg}{N_2}$ , la 2) que están por encima de  $\frac{5mg}{2N_2} - f_2$  y la 3) que están por debajo de  $\frac{5mg}{2N_2} + f_2$ . Excluyendo las regiones no permitidas (sombreadas en la figura 4.7), la región de posibles parejas de  $N_2$  y  $tg\alpha$  tiene un extremo inferior que corresponde a la intersección de las curvas de los lados derechos de 1) y 2) y da el mínimo valor posible para  $tg\alpha$ :

$$\begin{aligned} tg\alpha_{min} &= \frac{5 - f_1 f_2}{6f_1} & \text{si } f_1 f_2 \leq 5 \\ tg\alpha_{min} &= 0 & \text{si } f_1 f_2 \geq 5 \end{aligned}$$

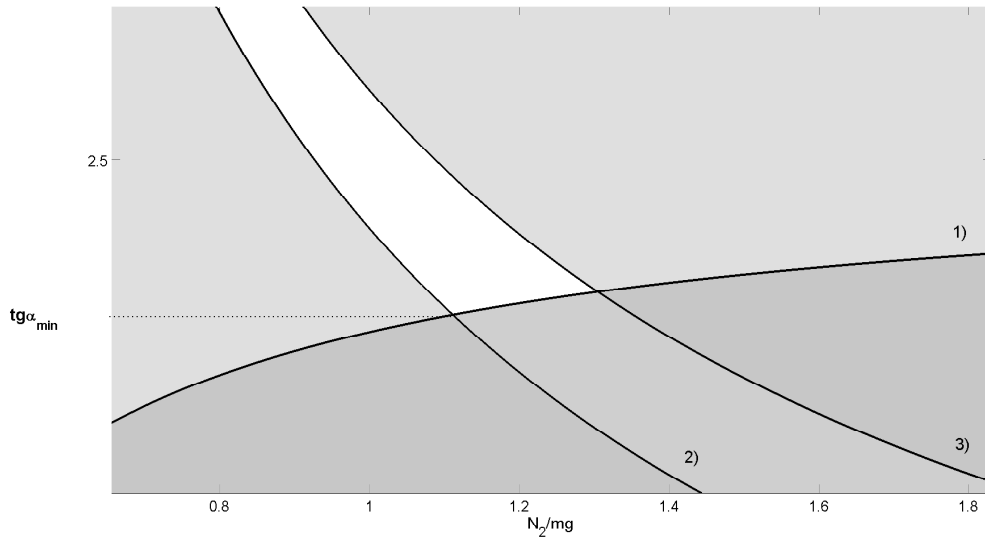


Figura 4.7: Condiciones de no deslizamiento para  $f_1 = 0,4$ ,  $f_2 = 0,2$ .

## 4.5. Dinámica del Rígido en el Plano.

Veamos algunos ejemplos del movimiento de un rígido plano.

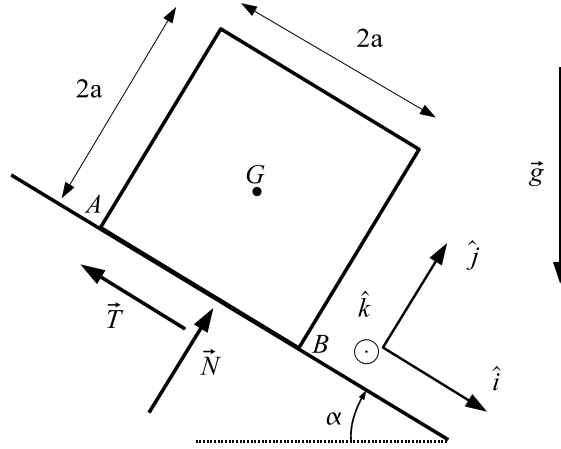


Figura 4.8: Placa apoyada unilateralmente sobre un plano inclinado.

#### 4.5.1. Ejemplo - Placa apoyada en un plano inclinado.

Considere una placa cuadrada y homogénea de lado  $2a$  y masa  $M$  que parte del reposo apoyada sobre un plano rugoso de coeficiente de frotamiento  $f$  inclinado un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal (figura 4.8).

Consideraremos los cuatro estados posibles asociados al estado de movimiento de la placa inmediatamente después de ser colocada sobre el plano:

1. *Equilibrio*. Supongamos que la placa se encuentra en equilibrio. La primera cardinal al rígido nos dice que:

$$Mg \sin \alpha - T = 0$$

$$N - Mg \cos \alpha = 0$$

donde  $N$  y  $T$  son la componente normal y tangencial respectivamente de la resultante de las reactivas. La permanencia de la placa en equilibrio implica que no se despegue, no deslice ni vuelque:

$$N \geq 0$$

$$|T| \leq f|N|$$

$$M_A^{(a)} + \left[ (G - A) \times (-R_1^{(a)} \hat{i}) \right] \cdot \hat{k} \leq 0 \Leftrightarrow M_A^{(a)} \leq 0$$

$$M_B^{(a)} + \left[ (G - B) \times (-R_1^{(a)} \hat{i}) \right] \cdot \hat{k} \geq 0 \Leftrightarrow M_B^{(a)} \geq 0$$

Donde las condiciones de no vuelco se simplifican en virtud de que la resultante de las fuerzas es cero. La primera condición (no despegue) se verifica

trivialmente. La condición de no deslizamiento, a partir de la primera cardinal implica:

$$f \geq \frac{|T|}{|N|} = tg\alpha$$

La condición de no vuelco desde  $A$  se verifica trivialmente. La de no vuelco desde  $B$  es:

$$M_B^{(a)} = Mg\cos\alpha - Mgsen\alpha \geq 0 \Rightarrow tg\alpha \leq 1$$

2. *Desliza sin volcar.* Para este caso tenemos que  $\ddot{x}_G > 0$ . Si esta condición se verifica, la placa está deslizando y la reacción tangencial es:

$$T = fN = fMg\cos\alpha$$

La condición de deslizamiento es entonces:

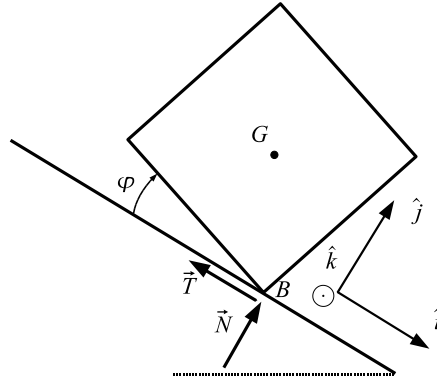
$$M\ddot{x}_G = Mgsen\alpha - T = Mg(sen\alpha - f\cos\alpha) > 0 \Rightarrow f < tg\alpha$$

El no vuelco en  $B$  es:

$$M_B^{(a)} + \left[ (G - B) \times (-R_1^{(a)}\hat{i}) \right] \cdot \hat{k} = M_B^{(a)} \left[ (a\hat{j}) \times (-M\ddot{x}_G\hat{i}) \right] \cdot \hat{k}$$

$$Mg\cos\alpha - Mgsen\alpha + Mg(sen\alpha - f\cos\alpha) \geq 0 \Rightarrow f \leq 1$$

3. *Vuelca en B sin deslizar.*



Planteamos las ecuaciones cardinales en el instante inicial:

Primera cardinal:

$$Ma\ddot{\varphi} = Mgsen\alpha - T$$

$$Ma\ddot{\varphi} = N - Mg\cos\alpha$$

Segunda cardinal desde  $B$ :

$$-\frac{8}{3}a^2\ddot{\varphi} = Mga(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

Lo que nos da:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \frac{3}{8}\frac{g}{a}(\sin\alpha - \cos\alpha) \\ T &= \frac{Mg}{8}(5\sin\alpha + 3\cos\alpha) \\ N &= \frac{Mg}{8}(3\sin\alpha + 5\cos\alpha)\end{aligned}$$

Para que la placa vuelque se debe cumplir:

$$\ddot{\varphi} > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 1$$

La condición de que no despegue ( $N > 0$ ) se verifica trivialmente mientras que el no deslizamiento implica:

$$f \geq \frac{|T|}{|N|} = \frac{3 + 5\tan\alpha}{5 + 3\tan\alpha}$$

4. *Desliza y vuelca.* Para este caso consideremos las ecuaciones cardinales en el instante inicial y la reacción tangencial para el deslizamiento ( $T = fN$ ):

$$\begin{aligned}M(\ddot{x}_B + a\ddot{\varphi}) &= Mg\sin\alpha - fN \\ Ma\ddot{\varphi} &= N - Mg\cos\alpha \\ -\frac{2}{3}a^2\ddot{\varphi} &= aN - afN\end{aligned}$$

(donde la última ecuación corresponde a la segunda cardinal desde  $G$ ) lo que nos da:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= 3\left(\frac{f-1}{5-3f}\right)\frac{g}{a}\cos\alpha \\ \ddot{x}_B &= \frac{Mg}{5-3f}[(5-3f)\sin\alpha - (5f-3)\cos\alpha] \\ N &= \frac{2Mg}{5-3f}\cos\alpha\end{aligned}$$

Para que la placa no despegue se debe cumplir:

$$N > 0 \Leftrightarrow f \leq \frac{5}{3}$$

Para que la placa vuelque tenemos (usando la condición anterior):

$$\ddot{\varphi} > 0 \Rightarrow f > 1$$

Finalmente, para que la placa deslice:

$$\ddot{x}_B > 0 \Rightarrow f < \frac{3 + 5tg\alpha}{5 + 3tg\alpha}$$

(que comprende a la condición  $f \leq \frac{5}{3}$ )

En la figura 4.9 se encuentran resumidos los resultados encontrados para cada tipo de movimiento.

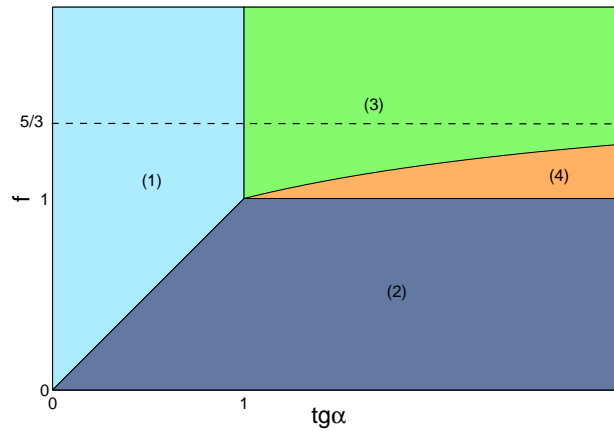


Figura 4.9: Diagrama para los distintos tipos de movimiento de una placa apoyada unilateralmente sobre un plano inclinado.

#### 4.5.2. Disco y aro.

En el siguiente problema (*examen agosto 2007*) tenemos un aro homogéneo, de masa  $m$  y radio  $r$ , en el interior del cual rueda sin deslizar un disco homogéneo de masa  $m$  y radio  $\frac{r}{3}$ . El aro puede girar libremente alrededor de su centro  $O$  (fijo). Un hilo flexible, inextensible y sin masa está enrollado en el exterior del aro y mediante el mismo se cuelga una masa  $\frac{3m}{2}$ . El ángulo  $\alpha$  indicado en la figura ubica al centro del disco con respecto a la vertical. El sistema parte del reposo. Llamemos  $\theta$  al ángulo de giro del disco con respecto a una dirección fija y  $\varphi$  al del aro. La velocidad del punto del aro en contacto con el disco es:

$$r\dot{\varphi}\hat{t}$$



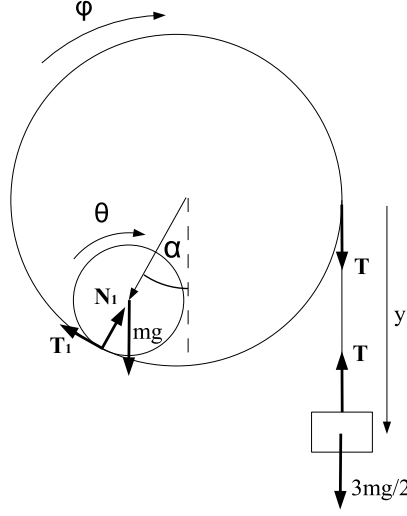


Figura 4.10: Disco rodando sin deslizar en el interior de un aro.

siendo  $\hat{t}$  la dirección tangente al aro en el punto de contacto. Por otro lado, la velocidad del punto del disco en contacto con el aro es, usando la distribución de velocidades entre el centro del disco y el punto de contacto:

$$\left[ \frac{2}{3}r\dot{\alpha} + \frac{1}{3}r\dot{\theta} \right] \hat{t}$$

y a partir de la rodadura sin deslizamiento entre el disco y el aro tenemos que:

$$\frac{2}{3}r\dot{\alpha} + \frac{1}{3}r\dot{\theta} = r\dot{\varphi}$$

El otro vínculo que tenemos es que el hilo del que cuelga la masa  $\frac{3m}{2}$  es inextensible, por lo que se verifica:

$$r\dot{\varphi} = \dot{y}$$

De ahora en más consideraremos exclusivamente el caso en el que  $\alpha$  es constante en el tiempo y veremos para qué valor de  $\alpha$  es esto posible. Las ecuaciones cardinales para el disco son:

$$(4.19) \quad N_1 = mg \cos \alpha$$

$$(4.20) \quad T_1 = mg \sin \alpha$$

$$(4.21) \quad \frac{r}{3}T_1 = \frac{m}{2} \left( \frac{r}{3} \right)^2 \ddot{\theta}$$

La segunda cardinal para el aro es:

$$(4.22) \quad r(T - T_1) = mr^2\ddot{\varphi}$$

Y la segunda ley de Newton para la masa que cuelga da:

$$(4.23) \quad \frac{3m}{2}\ddot{y} = \frac{3mg}{2} - T$$

Sustituyendo los vínculos hallados al comienzo, eliminando  $T$  entre (4.22) y (4.23) y comparando con la ecuación que surge de eliminar  $T_1$  entre (4.20) y (4.21) nos queda:

$$\text{sen}\alpha = \frac{1}{4}$$

Para que el disco y el aro rueden sin deslizar se debe verificar que:

$$|T_1| \leq f|N_1| \Leftrightarrow f \geq \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}} \Leftrightarrow f \geq \frac{1}{\sqrt{15}}$$

### 4.5.3. Barra en el borde de una mesa.

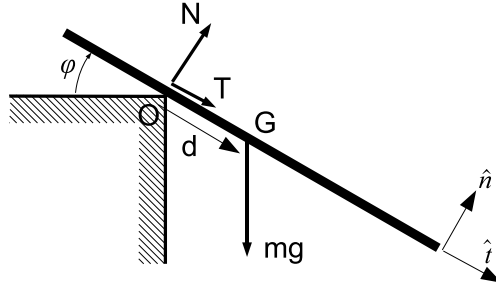


Figura 4.11: Barra en el borde de una mesa.

(segundo parcial 2008) Sobre el borde de una mesa horizontal fija se apoya una barra homogénea de longitud  $\ell$  y masa  $m$ . La barra se mueve en un plano vertical dado. El coeficiente de frotamiento estático entre la barra y la mesa es  $\mu_e = \frac{2}{\sqrt{3}}$  y el dinámico es  $\mu_d = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Inicialmente la barra está en posición horizontal de manera que un  $\frac{1}{3}$  de su longitud está en contacto con la mesa y en reposo. Lo primero que vamos a hallar es la ecuación de movimiento para la barra mientras no deslice. La segunda cardinal a la barra desde el punto  $O$  es:

$$I_O\ddot{\varphi} = mgd\cos\varphi$$

siendo  $d = \frac{\ell}{6}$  e  $I_O = I_G + m\left(\frac{\ell}{6}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{6}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{9}$  a partir del teorema de Steiner para momentos de inercia. La ecuación de movimiento se simplifica a:

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2\ell}\cos\varphi$$

Alternativamente, como la fuerza de rozamiento es de potencia nula mientras no se produzca deslizamiento, podríamos hallar la ecuación de movimiento a partir de la conservación de la energía<sup>4</sup>:

$$T + U = cte.$$

siendo  $T$  la energía cinética del rígido, que podemos calcular usando (3.34) para el punto  $O$ :

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_O \vec{\omega} = \frac{1}{2}I_O \dot{\varphi}^2$$

y  $U$  la energía potencial asociada al peso de la barra:

$$U = -mgdsen\varphi$$

Halleemos ahora el ángulo para el cual la barra comienza a deslizarse. Necesitaremos encontrar las reacciones de la mesa sobre la barra. Comencemos por escribir la aceleración del centro de masas ( $G$ ) de la barra:

$$\vec{a}_G = -d\dot{\varphi}^2\hat{t} - d\ddot{\varphi}\hat{n}$$

Luego, la primera cardinal a la barra es:

$$\begin{aligned} -md\dot{\varphi}^2 &= T + mg sen\varphi \\ -md\ddot{\varphi} &= N - mg cos\varphi \end{aligned}$$

Preintegrando la ecuación de movimiento tenemos:

$$\dot{\varphi}^2 = 3\frac{g}{\ell} sen\varphi$$

(equivalente a usar la conservación de la energía) y las reacciones sobre la barra nos quedan:

$$\begin{aligned} T &= -\frac{3}{2}mg sen\varphi \\ N &= \frac{3}{4}mg cos\varphi \end{aligned}$$

La condición de no deslizamiento es:

$$|T| \leq \mu_e |N| \Rightarrow tg\varphi \leq \frac{\mu_e}{2}$$

y el ángulo donde comienza la barra a deslizarse es entonces:

$$tg\varphi_d = \frac{\mu_e}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varphi_d = \frac{\pi}{6}$$

---

<sup>4</sup>ver (1.19)

Una vez que la barra está deslizando se cumple que  $T = -\mu_d N = -\frac{N}{\sqrt{3}}$  que *no* coincide con el valor que tenía inmediatamente antes de comenzar el deslizamiento, es decir, la fuerza de rozamiento sufre una discontinuidad. Esta discontinuidad se pondrá de manifiesto en un cambio en la aceleración del centro de masas de la barra. La primera cardinal a la barra será para este tramo del movimiento:

$$\begin{aligned} m\vec{a}_G \cdot \hat{t} &= T + mg \sin \varphi = -\frac{N}{\sqrt{3}} + mg \sin \varphi \\ m\vec{a}_G \cdot \hat{n} &= N - mg \cos \varphi \end{aligned}$$

Para hallar la nueva  $\vec{a}_G$  podemos usar que la normal no sufre ninguna discontinuidad, por lo que podemos usar el valor de  $N$  inmediatamente antes de deslizar (es decir, evaluada para el ángulo  $\varphi_d$ ):

$$\vec{a}_G = \frac{g}{8} \hat{t} - \frac{\sqrt{3}g}{8} \hat{n}$$

## 4.6. Dinámica del Rígido en el Espacio.

Consideremos ahora algunos ejemplos del movimiento de un rígido en el espacio.

### 4.6.1. Masas coplanares.

Consideremos el ejemplo de las secciones 3.1 y 3.2.2 y tomemos que los contactos en  $O$  y  $O'$  carecen de fricción. Suponiendo que el conjunto gira alrededor del eje  $OO'$  con velocidad angular constante  $\omega$ , hallaremos el momento total (referido a  $C$ ) ejercido por las articulaciones en  $O$  y  $O'$  y que será el momento reactivo  $\vec{M}_C^{(r)}$ .

La segunda cardinal (4.4) desde  $C$  (centro de masas del sistema) es:

$$\vec{M}_C^{(r)} = \mathbb{I}_C \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_C \vec{\omega}$$

siendo  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_1$ . Como la derivada relativa es nula para  $\omega$  cte.:

$$\vec{M}_C^{ext} = \omega \hat{e}_1 \times \mathbb{I}_C \omega \hat{e}_1 = 2m\ell^2 \omega^2 \hat{e}_3$$

Si en cambio considerásemos el giro alrededor de uno de los ejes principales hallados en 3.2.2, nos encontraríamos con que el momento reactivo es cero ya que  $\vec{\omega}$  y  $\mathbb{I}_C \vec{\omega}$  son colineales.

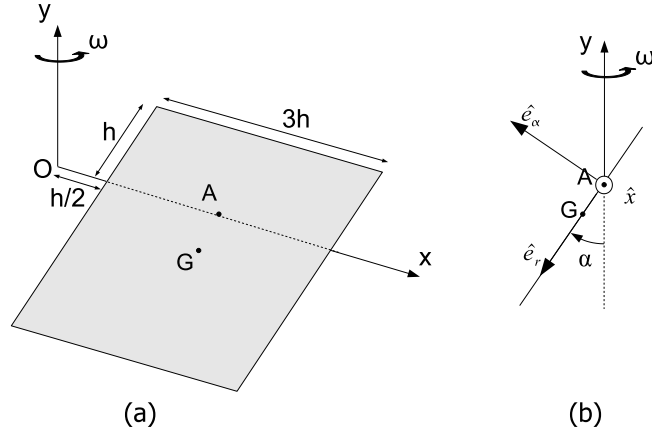


Figura 4.12: (a) Placa cuadrada girando libremente (b) Vista lateral.

#### 4.6.2. Placa cuadrada girando alrededor de un eje.

Retomamos el ejemplo de la sección 2.4.1 donde ya habíamos obtenido la velocidad angular de la placa:

$$\vec{\omega} = -\dot{\alpha}\hat{x} + \omega\hat{y}$$

Queremos ahora obtener la ecuación de movimiento para el ángulo  $\alpha$ . Sea  $G$  el centro de masas de la placa y  $A$  la proyección del mismo sobre el eje  $Ox$ . La segunda cardinal a la placa desde el punto  $A$  es (según (4.4):

$$M(G - A) \times \vec{a}_A + \mathbb{I}_A \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_A \vec{\omega} = \vec{M}_A^{(ext)}$$

Siendo  $m$  la masa del rígido. El tensor de inercia con respecto a  $G$ , escrito en la base propia de la placa es:

$$\mathbf{I}_G^{\{\hat{x}, \hat{e}_r, \hat{e}_\alpha\}} = I_G \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3mh^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde usamos el valor ( $I_G$ ) del momento de inercia alrededor del eje perpendicular a la placa que pasa por su centro. A partir del teorema de Steiner (3.28) tenemos:

$$\mathbf{I}_A^{\{\hat{x}, \hat{e}_r, \hat{e}_\alpha\}} = \mathbf{I}_G^{\{\hat{x}, \hat{e}_r, \hat{e}_\alpha\}} + m \left( \frac{h}{2} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{mh^2}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(nótese que la base que era propia para el tensor desde  $G$  sigue siéndolo desde  $A$  y esto corresponde a que  $G - A$  tiene la dirección de un eje principal original). Trabajemos

ahora sobre el término de momentos. Decir que la placa gira libremente alrededor de  $Ox$  es equivalente a plantear que la articulación que une la placa al eje es cilíndrica lisa y por tanto no ejerce ningún momento sobre la placa en la dirección  $\hat{x}$ :  $\vec{M}_A^{(art)} \cdot \hat{x} = 0$ . Esto nos sugiere considerar sólo la proyección de la segunda cardinal según  $\hat{x}$ , que involucrará exclusivamente al momento de las fuerzas activas (el peso) según esta dirección:

$$M(G - A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{x} + \mathbb{I}_A \dot{\vec{\omega}} \cdot \hat{x} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_A \vec{\omega} \cdot \hat{x} = \vec{M}_A^{(ext)} \cdot \hat{x} = \vec{M}_A^{(a)} \cdot \hat{x} = mg \frac{h}{2} \text{sen} \alpha$$

Como  $\vec{a}_A$  está dirigida según  $\hat{x}$  (ya que corresponde a un movimiento circular uniforme)  $(G - A) \times \vec{a}_A$  no tiene componente en  $\hat{x}$  y la segunda cardinal proyectada se simplifica a:

$$\mathbb{I}_A \dot{\vec{\omega}} \cdot \hat{x} + \vec{\omega} \times \mathbb{I}_A \vec{\omega} \cdot \hat{x} = mg \frac{h}{2} \text{sen} \alpha$$

Expresemos ahora  $\vec{\omega}$  en la base  $\{\hat{x}, \hat{e}_r, \hat{e}_\alpha\}$ :

$$\vec{\omega} = -\dot{\alpha} \hat{x} + \omega \hat{y} = -\dot{\alpha} \hat{x} + \omega (\text{sen} \alpha \hat{e}_\alpha - \text{cos} \alpha \hat{e}_r)$$

Su derivada es:

$$\dot{\vec{\omega}} = -\ddot{\alpha} \hat{x} + \omega \dot{\alpha} (\text{cos} \alpha \hat{e}_\alpha + \text{sen} \alpha \hat{e}_r)$$

y los términos de la segunda cardinal se pueden calcular fácilmente en la representación diagonal de  $\mathbb{I}_A$ :

$$(\mathbb{I}_A \omega)^{\{\hat{x}, \hat{e}_r, \hat{e}_\alpha\}} = \frac{mh^2}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \\ -\omega \text{cos} \alpha \\ \omega \text{sen} \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mh^2 \dot{\alpha} \\ -\frac{3mh^2}{4} \omega \text{cos} \alpha \\ \frac{7mh^2}{4} \omega \text{sen} \alpha \end{pmatrix}$$

es decir (independizándonos de la representación):

$$\mathbb{I}_A \vec{\omega} = -mh^2 \dot{\alpha} \hat{x} - \frac{3mh^2}{4} \omega \text{cos} \alpha \hat{e}_r + \frac{7mh^2}{4} \omega \text{sen} \alpha \hat{e}_\alpha$$

en forma similar:

$$\mathbb{I}_A \dot{\vec{\omega}} = -mh^2 \ddot{\alpha} \hat{x} + \frac{3mh^2}{4} \omega \dot{\alpha} \text{sen} \alpha \hat{e}_r + \frac{7mh^2}{4} \omega \dot{\alpha} \text{cos} \alpha \hat{e}_\alpha$$

y la segunda cardinal nos queda:

$$-mh^2 \ddot{\alpha} + mh^2 \omega^2 \text{cos} \alpha \text{sen} \alpha = mg \frac{h}{2} \text{sen} \alpha$$

o reagrupando:

$$\ddot{\alpha} + \text{sen} \alpha \left( \frac{g}{2h} - \omega^2 \text{cos} \alpha \right) = 0$$

Las posiciones de equilibrio del sistema corresponden a  $\ddot{\alpha} = 0$  y son  $\alpha_{eq} = 0, \pi$ ,  $\cos\alpha_{eq} = \frac{g}{2h\omega^2}$  para  $\omega^2 \geq \frac{g}{2h}$ . Las posiciones de equilibrio estables son aquellos mínimos del "potencial"  $U'$ , cuya derivada primera es:

$$\frac{dU'}{d\alpha} = \sin\alpha \left( \frac{g}{2h} - \omega^2 \cos\alpha \right)$$

y se puede ver que  $\alpha_{eq} = \pi$  es inestable,  $\alpha_{eq} = 0$  es estable para  $\omega^2 \leq \frac{g}{2h}$  y la posición de equilibrio correspondiente a  $\cos\alpha_{eq} = \frac{g}{2h\omega^2}$  es estable siempre que exista.

#### 4.6.3. Trompo simétrico pesado.

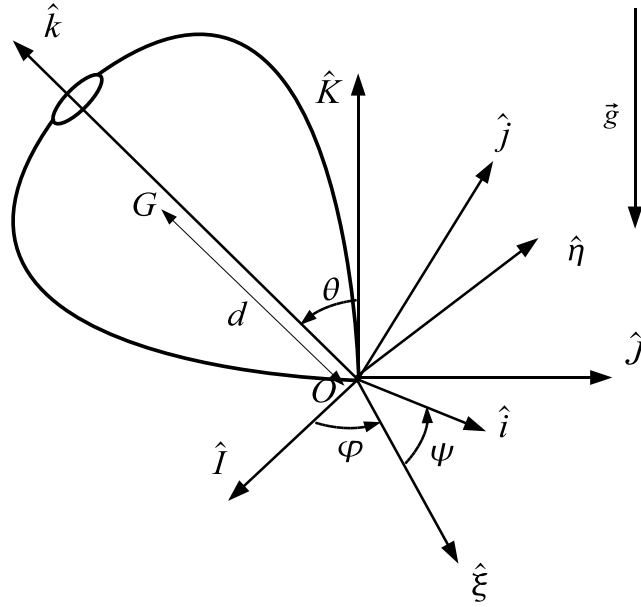


Figura 4.13: Trompo simétrico y los ángulos de Euler correspondientes.

Consideremos un rígido de revolución que se mueve unido por un punto  $O$  de su eje a una articulación esférica lisa fija (figura 4.13). Sea  $I_1$  el momento de inercia alrededor del eje  $\hat{k}$  que pasa por  $O$  e  $I_1$  el momento para cualquier eje perpendicular a  $\hat{k}$  por  $O$ . El tensor de inercia tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

tanto en la base  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ , solidaria al rígido, como en la base  $\{\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{k}\}$ , donde  $\hat{\eta} \equiv \hat{k} \times \hat{\xi}$ . En lo que sigue utilizaremos esta última. Llamaremos  $\vec{\omega}$  a la velocidad angular del rígido y  $\vec{\Omega}$  a la del sistema  $\{O, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{k}\}$ . La velocidad angular del rígido es de acuerdo con (2.8):

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{K} + \dot{\theta}\hat{\xi} + \dot{\psi}\hat{k}$$

que descomponiendo  $\hat{K}$  según  $\hat{k}$  y  $\hat{\eta}$  nos queda:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{\xi} + \dot{\varphi}\sin\theta\hat{\eta} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\hat{k}$$

Por otro lado tenemos:

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\hat{K} + \dot{\theta}\hat{\xi} = \dot{\theta}\hat{\xi} + \dot{\varphi}\sin\theta\hat{\eta} + \dot{\varphi}\cos\theta\hat{k}$$

El momento angular del trompo con respecto a  $O$  es de acuerdo con (3.10):

$$\vec{L}_O = \mathbb{I}_O\vec{\omega} = I_1\dot{\theta}\hat{\xi} + I_1\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\eta} + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\hat{k}$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden hallar aplicando la segunda cardinal (4.3) al trompo desde  $O$ :

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{(a)}$$

donde, en virtud de que la articulación es esférica lisa, el momento corresponde sólo a las fuerzas activas. La derivada temporal la podemos plantear de esta manera:

$$\frac{d^r\vec{L}_O}{dt} = \frac{d^r\vec{L}_O}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{L}_O$$

donde  $\frac{d^r}{dt}$  es la derivada relativa al sistema  $\{O, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{k}\}$ :

$$\frac{d^r\vec{L}_O}{dt} = I_1\ddot{\theta}\hat{\xi} + I_1\frac{d}{dt}[\dot{\varphi}\sin\theta]\hat{\eta} + I_3\frac{d}{dt}[\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta]\hat{k}$$

Por otro lado:

$$\vec{\Omega} \times \vec{L}_O = [I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\varphi}\sin\theta - I_1\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta]\hat{\xi} + [I_1\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\dot{\theta}]\hat{\eta}$$

El momento de las fuerzas activas es el del peso:

$$\vec{M}_O^{(a)} = (G - O) \times (-mg\hat{K}) = -mgd\hat{k} \times \hat{K} = mgd\sin\theta\hat{\xi}$$

Proyectando ahora la segunda cardinal según  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $\hat{k}$  nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$(4.24) \quad I_1\ddot{\theta} + [I_3\dot{\psi} + (I_3 - I_1)\dot{\varphi}\cos\theta]\dot{\varphi}\sin\theta = mgd\sin\theta$$

$$(4.25) \quad I_1\frac{d}{dt}[\dot{\varphi}\sin\theta] + [(I_3 - I_1)\dot{\varphi}\cos\theta - I_3\dot{\psi}]\dot{\theta} = 0$$

$$(4.26) \quad \frac{d}{dt}[\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta] = 0$$



La ecuación (4.26) indica que:

$$(4.27) \quad \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = s$$

donde  $s$  es una constante que llamamos el *spin* del trompo. Esta preintegral puede obtenerse también de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_O \cdot \hat{k}) = \dot{\vec{L}}_O \cdot \hat{k} + \vec{L}_O \cdot \dot{\hat{k}} = \vec{M}_O^{(a)} \cdot \hat{k} + \vec{L}_O \cdot \vec{\Omega} \times \hat{k}$$

usando ahora que  $\vec{M}_O^{(a)}$  no tiene componente según  $\hat{k}$  y que  $\vec{L}_O$  se puede escribir como:

$$\vec{L}_O = I_1 \vec{\Omega} + [I_3 \dot{\psi} + (I_3 - I_1) \dot{\varphi} \cos \theta] \hat{k}$$

lo que indica que  $\vec{L}_O$ ,  $\vec{\Omega}$  y  $\hat{k}$  por lo que  $\vec{L}_O \cdot \vec{\Omega} \times \hat{k} = 0$  y finalmente:

$$\frac{d}{dt}[\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta] = \frac{d}{dt}(\vec{L}_O \cdot \hat{k}) = 0$$

es decir, (4.27) está indicando que se conserva la componente del momento angular según  $\hat{k}$ . Análogamente, podemos ver que la componente del momento angular según  $\hat{K}$  es una cantidad conservada:

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_O \cdot \hat{K}) = \dot{\vec{L}}_O \cdot \hat{K} = \vec{M}_O^{(a)} \cdot \hat{K} = 0$$

Por lo tanto:

$$(4.28) \quad \vec{L}_O \cdot \hat{K} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = L_Z$$

donde  $L_Z$  es la componente vertical del momento angular. Otra cantidad conservada en el movimiento es la energía del trompo:

$$E = T + U$$

donde de acuerdo a (3.34) la energía cinética se escribe como:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_O \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O = \frac{1}{2} [I_1 \dot{\theta}^2 + I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2]$$

y la potencial es:

$$U = mgd \cos \theta$$

por lo que:

$$(4.29) \quad \frac{1}{2} [I_1 \dot{\theta}^2 + I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2] + mgd \cos \theta = E$$

El conjunto de ecuaciones (4.27), (4.28), (4.29) es equivalente al conjunto (4.24), (4.25), (4.26) por lo que se pueden considerar como las ecuaciones de movimiento del trompo.