CAPÍTULO 1

CÁLCULO DE LOS TENSORES

1.1. Magnitudes a considerar

Según el modelo considerado explicado en **??** dividiremos el sistema en una esfera central, cuatro cilindros y cuatro varillas (también cilíndricas). Las magnitudes que debemos conocer para calcular los momentos de inercia del sistema son:

- Radio de la esfera central $R = 8 \times 10^{-2}m$
- Largo de las varillas $L = 26 \times 10^{-2}m$
- Radio de los motores $r = 1{,}65 \times 10^{-2}m$
- Altura de los motores $h = 3{,}5 \times 10^{-2}m$

Además nos interesa conocer las distancias de cada uno de los elementos del sistema al centro de masa del cuadricóptero.

- Distancia entre el centro de masa de la varilla y el centro de masa del cuadricóptero $d_v = 14 \times 10^{-2}m$
- Distancia del eje de los motores al centro de masa del cuadricóptero $d_m = 0{,}29m$

Por último las masas de los elementos en cuestión son:

- Masa de la esfera central $M_E = 1{,}037kg$
- Masa de las varillas $M_v = 0{,}013kg$
- Masa de los motores $M_m = 0{,}113kg$

1.2. Tensor de inercia del sistema

El tensor de inercia del sistema puede calcularse como la suma de los tensores de inercia de los rígidos que lo componen. Se considera como fue expresado anteriormente el centro del cuadricóptero como una esfera maciza. El tensor de inercia de dicha esfera puede calcularse a partir de la definición misma de tensor de inercia, sin embargo por ser una forma geométrica de vasto uso en el campo de la mecánica su tensor de inercia se encuentra ya tabulado. Sucede lo mismo con las restantes formas geométricas que componen al sistema. Los tensores utilizados pueden obtenerse en [?]. En el caso de la esfera se tiene que el tensor de inercia respecto de su centro de masa es:

$$\Pi_{G_E}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_E \begin{pmatrix} \frac{2R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2R^2}{5} \end{pmatrix}$$

En este caso el centro de masa del sistema corresponde al centro de masa de la esfera a partir de ciertas suposiciones que se realizan sobre la simetría del sistema. Por dicho motivo podemos afirmar que $\Pi_{G_E}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = \Pi_{O\prime_E}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}$, siendo $O\prime$ el centro de la esfera.

Por otra parte el tensor de inercia de una varilla, cuyo eje principal coincide con el versor $\vec{i_q}$, respecto a su centro de masa tiene la forma:

$$\Pi_{G_{Vx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}$$

Sin embargo resulta mucho ms interesante obtener el tensor de inercia expresado respecto del centro de masa del sistema. Para realizar dicho cambio se utiliza el *Teorema de Steiner*. Dicho teorema afirma que: $\Pi_Q = \Pi_G + J_Q^{M,G}$, donde los términos de $J_Q^{M,G}$ pueden calcularse como: $(J_Q^{M,G})_{\alpha\beta} = M(G-Q)^2\delta_{\alpha\beta} - M(G-Q)_\alpha M(G-Q)_\beta$. El término $\delta_{\alpha\beta}$ es conocido como Delta de Kronecker. Su valor es uno si $\alpha = \beta$ y cero si $\alpha \neq \beta$. En el caso en consideración dicha matriz resulta en:

$$J_{O\prime}{}^{M_{Vx},G} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{L}{2} + d_v)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{L}{2} + d_v)^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el momento de inercia total de dicha varilla es:

$$\Pi_{O\prime_{Vx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 \end{pmatrix}$$

Análogamente, el tensor de inercia de una varilla cuyo eje principal se encuentra respecto de la dirección $\vec{j_q}$ respecto del centro de masa del sistema es:

$$\Pi_{O\prime_{Vy}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_V \begin{pmatrix} \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} + (\frac{Ld_v}{2})^2 + d_v^2 \end{pmatrix}$$

Sucede algo similar en lo que respecta a los motores. Tendremos un tensor de inercia para los motores que se encuentran sobre la dirección $\vec{i_q}$ y otro para los motores que se encuentran sobre la dirección $\vec{j_q}$. El momento de inercia de un cilindro en su centro de masa es:

$$\Pi_{G_M}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

La entrada $(3,3)$ de la matriz de la ecuación 1.1 la pasaremos a llamar I_{zzm}

Por lo tanto el momento de inercia respecto del centro de masa del sistema para un cilindro que se encuentra en la dirección $\vec{i_q}$ es:

$$\Pi_{O\prime_{Mx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} + d_m^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + d_m^2 \end{pmatrix}$$

En el caso de un cilindro que se encuentra en la dirección $\vec{j_q}$ se tiene que::

$$\Pi_{O\prime_{My}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{3r^2+h^2}{12} + d_m^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + d_m^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el tensor de inercia del sistema, se calcula como la suma de los tensores de inercia de las partes que lo componen:

$$\Pi_{O\prime}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = \Pi_{O\prime_E}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} + 2\Pi_{O\prime_{Vx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} + 2\Pi_{O\prime_{Vy}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} + 2\Pi_{O\prime_{Mx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} + 2\Pi_{O\prime_{My}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}$$

Dado que todos los tensores de inercia considerados hasta el momento son diagonales, podemos escribir el tensor de inercia del sistema como:

$$\Pi_{O\prime}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

1.3. Resultados

En base al análisis realizado hasta el momento se obtienen los siguientes valores:

- $I_{zmm} = 1{,}54 \times 10^{-5} kgm^2$
- $I_{xx} = I_{yy} = 2{,}32 \times 10^{-2} kgm^2$
- $I_{zz} = 4{,}37 \times 10^{-2} kgm^2$