
CAPÍTULO 1

MODELO FÍSICO

Resulta imprescindible para controlar el cuadricóptero comprender cabalmente su comportamiento. Con esta óptica, lo que se busca es obtener el modelo más sencillo que sea capaz de representar adecuadamente al sistema. El objetivo de esta sección es el de realizar el desarrollo de dicho modelo. La forma de modelar el sistema elegida es un Modelo de Variables de Estado, de ahora en más MVE. Lo que se busca es obtener una representación del sistema de la forma $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}, t)$, donde \vec{x} es el vector de estados del sistema, \vec{u} es el vector que representa las entradas del sistema y t es el tiempo.

Al tratarse de una plataforma comercial no se dispone de todos los parámetros fundamentales para el desarrollo de dicho modelo. Por ejemplo, no se conoce como es la respuesta de los motores (tanto velocidad como empuje), el tensor de inercia del sistema, etc. Sí bien algunos parámetros como las masas de las distintas partes que componen el sistema y las distancias involucradas en el desarrollo que se hará a continuación son sencillas de obtener, se tuvieron que realizar experimentos y cálculos más sofisticados para la completa caracterización del sistema. Estos aspectos no serán desarrollados en profundidad a lo largo de este trabajo, pero pueden consultarse los valores de las constantes obtenidas en el anexo ??, mientras que el cálculo de los tensores de inercia de interés y la obtención de la respuesta de los motores se encuentran desarrollados en profundidad en los anexos ?? respectivamente.

En la presente sección nos limitaremos a obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del cuadricóptero.

Para el estudio en cuestión se considerará el cuadricóptero según las convenciones expresadas en la figura 1.1. Por un lado se definen las coordenadas "del mundo" (i_I, j_I, k_I) , un sistema de referencia inercial fijo. Las magnitudes correspondientes a la base de este referencial se notarán con el subíndice I . Por otro lado se utilizará el sistema de referencia (i_q, j_q, k_q) solidario al cuadricóptero. En este caso las magnitudes medidas en ese referencial se notarán con el subíndice q . En la figura 1.1 se pueden apreciar ambos sistemas de referencia.

En la presente sección se utilizarán las herramientas de la mecánica clásica a fin de obtener un modelo, que como tal, no es una representación exacta de la realidad.

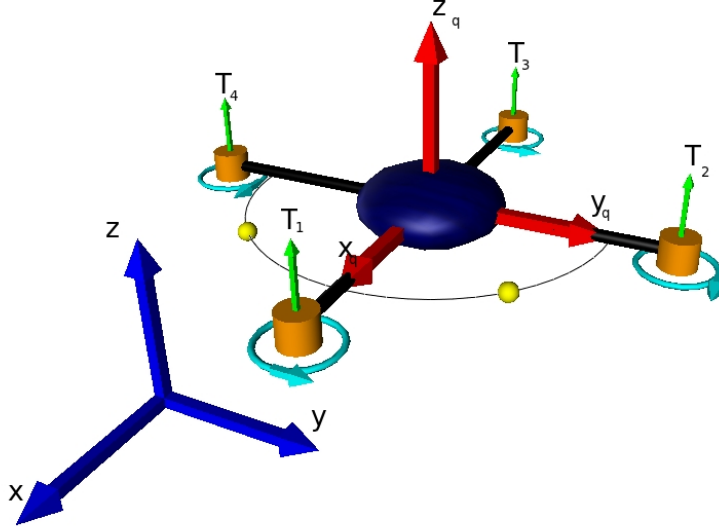


Figura 1.1: Modelo del cuadricóptero

Se realizarán diversas hipótesis que permiten conocer el sistema en forma aproximada, pero perfectamente adecuada para las condiciones en las cuales se operará el cuadricóptero.

1.1. Hipótesis de trabajo

Previo al desarrollo del modelo es muy importante esclarecer las hipótesis en las cuales opera el cuadricóptero. Una vez definidas las mismas se puede tener presente que aproximaciones son factibles de realizar.

No debe perderse de vista que el cuadricóptero con el que se trabaja fue diseñado para ser comandado a través de un control remoto. Por dicho motivo es razonable que sus características sean tales que le permitan a una persona volarlo desde el suelo. Parece perfectamente razonable que se haya diseñado el sistema para volar por tiempos limitados, distancias relativamente cortas y a bajas velocidades, para permitirle al operador un control manual más sencillo. Asimismo, estas consideraciones permiten introducir diversas simplificaciones en el modelado.

1.1.1. La Tierra como sistema de referencia inercial

Evidentemente la Tierra **no** es un sistema de referencia inercial ya que la misma se encuentra sometida a la traslación en torno al Sol y a una rotación en sobre su eje. El radio promedio de la órbita Heliocéntrica (R_H) es de $1,5 \times 10^8 Km$, dicha órbita se recorre en 365 días lo que nos da una velocidad promedio de:

$$V_T = \frac{1,5 \times 10^{11} m}{365 \times 24 \times 60 \times 60 s} \approx 4,8 \times 10^3 m s^{-1}$$

Esta velocidad implica que la aceleración de transporte de la Tierra es de aproximadamente:

$$a_T = \frac{V_T^2}{R_H} \approx 15,36 \times 10^{-5} m s^{-2}$$

1.1.2. Curvatura de la Tierra

1.1.3. Atracción gravitacional

1.1.4. Presión atmosférica

1.1.5. Fuerzas aerodinámicas

1.2. Sistema de referencia

Como ya se mencionó, a lo largo del presente desarrollo se trabajará constantemente con dos sistemas de referencia: uno inercial¹ solidario a la tierra (S_I) y otro solidario al cuadróptero (S_q) como se muestra en la figura 1.1. El sistema S_I es un sistema local donde la dirección \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} corresponden a las direcciones Este, Norte y hacia arriba. El sistema S_q se puede obtener realizando tres rotaciones compuestas del sistema S_I , dichas rotaciones se muestran en la figura 1.2. Los ángulos θ , ϕ y ψ son conocidos como ángulos de Euler.

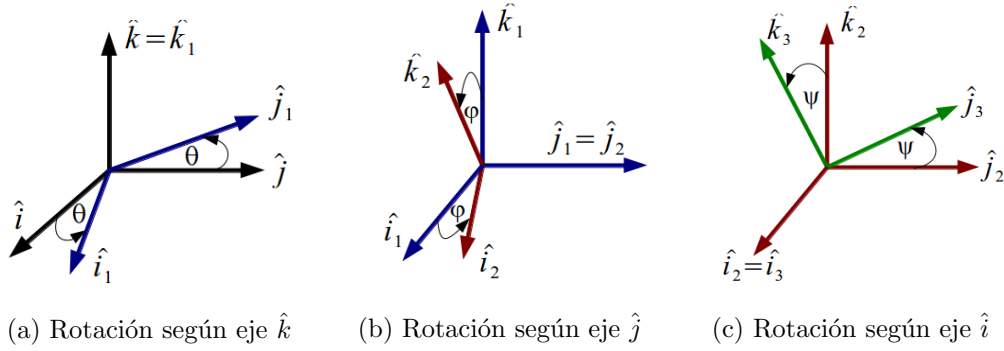


Figura 1.2: Rotaciones

La importancia del sistema S_q radica en las simplificaciones que introduce a la hora de escribir las ecuaciones, ya que por ejemplo en dicho sistema el empuje de las hélices, los torques que introducen y velocidades angulares de los motores del cuadricóptero tienen siempre la misma dirección. Asimismo cabe agregar que el sistema de navegación incluirá entre otros un acelerómetro y un giroscopo IMU (Inertial Measurement Unit). Dichos dispositivos miden la aceleración y la velocidad angular del sistema en un sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero, es decir en el sistema S_q . Si bien no es fundamental expresar las ecuaciones del sistema en este marco de referencia resulta conveniente hacerlo ya que gran parte de la información vendrá dada en este sistema. Considerar este sistema implica una simplificación del procesamiento de los datos obtenidos por la IMU.

Las tres transformaciones pueden representarse matricialmente de la siguiente forma:

$$H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} H_2^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

¹En esta sección se consideran sistemas inerciales en el sentido clásico

La transformación de las coordenadas del sistema inercial al sistema solidario al cuadricóptero se obtiene realizando el producto de las tres matrices de rotación definidas.

$$H_I^q = H_2^q.H_1^2.H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi \sin \psi - \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \phi \sin \psi \\ \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix}$$

A su vez, la transformación inversa puede obtenerse multiplicando las coordenadas del sistema S_q por la matriz H_q^I . Dicha matriz puede obtenerse de la siguiente forma:

$$H_q^I = (H_2^q.H_1^2.H_I^1)^{-1} = (H_I^1)^{-1}.(H_1^2)^{-1}.(H_2^q)^{-1} = H_1^I.H_2^1.H_q^2$$

1.3. Cinemática

Además de la relación entre las coordenadas de un sistema y del otro, es interesante conocer la relación que existe entre la velocidad angular del sistema y las derivadas de los ángulos de Euler. Sea $\vec{\omega}$ la velocidad angular del cuadricóptero (y por ende la del sistema S_q). La expresión de la velocidad angular en el sistema de referencia del cuadricóptero es la siguiente:

$$\vec{\omega} = w_{q1}\vec{i}_q + w_{q2}\vec{j}_q + w_{q3}\vec{k}_q$$

Donde w_{q1} , w_{q2} y w_{q3} son las proyecciones ortogonales de la velocidad angular en el sistema S_q . Por como fue construido el sistema de referencia solidario al cuadricóptero y utilizando el teorema de adición de velocidades angulares, se deduce trivialmente que la velocidad angular del cuadricóptero puede escribirse como:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} + \dot{\phi}\vec{j}_1 + \dot{\psi}\vec{i}_2$$

El vector \vec{i}_2 es invariante respecto de la tercer rotación, es decir que $\vec{i}_2 = \vec{i}_q$. Por otra parte, multiplicando los vectores \vec{k} y \vec{j}_1 por las matrices $H_1^2.H_2^q$ y H_2^q respectivamente se puede obtener la velocidad angular del cuadricóptero en el sistema de coordenadas referido a el. Operando se obtiene:

$$w_{q1}\vec{i}_q + w_{q2}\vec{j}_q + w_{q3}\vec{k}_q = (\dot{\psi} + \dot{\theta} \sin \phi)\vec{i}_q + (\dot{\phi} \cos \psi + \dot{\theta} \cos \phi \sin \psi)\vec{j}_q + (\dot{\theta} \cos \phi \cos \psi - \dot{\phi} \sin \psi)\vec{k}_q$$

De esta ecuación se obtienen tres relaciones entre las velocidades angulares respecto de cada eje principal del sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero con las derivadas de los ángulos de Euler. Podemos re escribir dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{q1} + \omega_{q3} \tan \phi \cos \psi + \omega_{q2} \tan \phi \sin \psi \\ \omega_{q2} \cos \psi - \omega_{q3} \sin \psi \\ \omega_{q3} \frac{\cos \psi}{\cos \phi} + \omega_{q2} \frac{\sin \psi}{\cos \phi} \end{pmatrix}$$

Realizando un razonamiento similar se deduce la relación que existe entre la velocidad del sistema expresada en el marco de referencia inercial con la velocidad expresada en el sistema de referencia solidario al cuadricóptero. La velocidad en el sistema de referencia inercial no es otra cosa que la derivada de la posición (\vec{r}).

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})'$$

Al igual que con la velocidad angular se puede escribir la velocidad absoluta del cuadricóptero en el sistema S_q . Lo que se tiene es que $v = v_{q1}\vec{i}_q + v_{q2}\vec{j}_q + v_{q3}\vec{k}_q$. Donde v_{q1}, v_{q2} y v_{q3} son las proyecciones ortogonales de la velocidad absoluta en el sistema solidario al cuadricóptero. Igualando ambas expresiones de la velocidad se obtiene:

$$\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v1\vec{i}_q + v2\vec{j}_q + v3\vec{k}_q$$

Para transformar las coordenadas de un sistema de referencia al otro alcanza con multiplicar por una de las matrices de cambio de base definidas previamente. En particular nos interesa tener una expresión para las derivadas de la posición en el sistema S_I , por esta razón se multiplica la expresión de la velocidad en el sistema S_q por la matriz H_q^I . Operando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q1} \cos \phi \cos \theta + v_{q2}(\cos \theta \sin \phi \sin \psi - \cos \phi \sin \theta) + v_{q3}(\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \phi) \\ v_{q1} \cos \phi \sin \theta + v_{q2}(\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \phi \sin \psi) + v_{q3}(\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \theta \sin \psi) \\ -v_{q1} \sin \phi + v_{q2} \cos \phi \sin \psi + v_{q3} \cos \phi \cos \psi \end{pmatrix}$$

Hasta aquí hemos obtenido simplemente relaciones cinemáticas; por un lado entre la velocidad angular del sistema S_q y las derivadas de los ángulos de Euler, por el otro se tiene el vínculo entre la velocidad absoluta del sistema y la velocidad absoluta expresada en el sistema S_q y los ángulos de Euler. Sin embargo aún no conocemos cuales son las Fuerzas y Momentos presentes en el sistema, ni que efectos producen sobre el mismo. Es aquí que nos detendremos en el análisis cinemático para considerar la dinámica del sistema.

1.4. Dinámica del Sistema

Existen diversas formas de atacar el problema de la dinámica de un sistema, en particular se puede encarar el problema desde la mecánica analítica o realizando consideraciones energéticas, sin embargo en este caso se elije trabajar con las ecuaciones cardinales.

1.4.1. Primera Cardinal

La primer cardinal indica que en un sistema inercial la suma de las fuerzas externas a un objeto es igual a su masa total por su aceleración. Esto se puede escribir:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$$

Anteriormente fue expresado el interés de trabajar en el sistema solidario al cuadricóptero. El vector aceleración se puede obtener derivando la velocidad. Para realizar la derivada de un vector expresado en un sistema móvil puede utilizarse la siguiente formula:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

En la ecuación anterior $\frac{d}{dt}$ representa la derivada temporal, mientras que $\frac{d}{dt}$ representa la derivada temporal respecto del sistema móvil. Por otra parte $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema móvil respecto al inercial. Operando se obtiene:

$$\vec{a} = (\dot{v}_{q1} + v_{q3}\omega_{q2} - v_{q2}\omega_{q3})\vec{i}_q + (\dot{v}_{q2} + v_{q1}\omega_{q3} - v_{q3}\omega_{q1})\vec{j}_q + (\dot{v}_{q3} + v_{q2}\omega_{q1} - v_{q1}\omega_{q2})\vec{k}_q$$

Operando se puede reescribir la primer cardinal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{q1} \\ \dot{v}_{q2} \\ \dot{v}_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q2}\omega_{q3} - v_{q3}\omega_{q2} \\ v_{q3}\omega_{q1} - v_{q1}\omega_{q3} \\ v_{q1}\omega_{q2} - v_{q2}\omega_{q1} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^4 F_{ext}$$

1.4.2. Segunda Cardinal

La segunda cardinal indica que la derivada del momento angular de un sistema respecto a un punto Q es igual al torque externo que se ejerce sobre el mismo más un término que depende de la velocidad de dicho punto. La ecuación queda:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = M_Q^{ext} + M\vec{v}_G \times \dot{\vec{r}}_Q$$

Asumiendo simetría del sistema, se puede considerar que el centro de masa del sistema se encuentra en el centro de la esfera principal del mismo. Esto no es completamente cierto ya que existen algunas asimetrías en el sistema, a modo de ejemplo se puede nombrar que la batería del UAV queda por fuera de la esfera y los apoyos también, sin embargo en una primera aproximación del modelo se asume la simetría respecto al plano que intersecta la esfera en el ecuador. Realizada dicha suposición y planteando la segunda cardinal en el centro de masa obtenemos una expresión más sencilla:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = M_G^{ext}$$

Por otra parte el momento angular del sistema se compone del momento angular del cuadricóptero y el momento angular de cada motor. Consideraremos el cuadricóptero sin los motores como un primer rígido y los motores como cuatro rígidos independientes.

El momento angular de un rígido respecto a un punto Q puede calcularse como:

$$\vec{L}_Q = M_i(G_i \vec{r}_Q) \times \vec{V}_Q + \Pi_Q \vec{\Omega}_i$$

Donde M_i , G_i , Π_Q y $\vec{\Omega}_i$ son la masa de cada rígido, su centro de masa, su tensor de inercia y su velocidad angular respectivamente.

Como se propuso anteriormente, se elije calcular el momento angular en el centro de masa del cuadricóptero. Asumiendo que los cuatro motores son idénticos podemos escribir el momento angular del cuadricóptero sin los motores como:

$$\vec{L}_{O'} = (M - 4M_m)(O' \vec{r}_{O'}) \times \vec{V}_{O'} + \Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q = \Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q$$

Del mismo modo el momento angular del primer motor queda:

$$\vec{L}_{O'_q} = M_m \vec{L}_{\vec{x}'} \times \vec{V}_{O'} + \Pi_{O'_Mx}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\Omega}_i$$

Se observa que al sumar el primer término de cada momento angular de los motores el resultado es cero. La simetría asumida del sistema es la que nos permite

simplificar nuevamente las ecuaciones. Por otra parte aplicando el teorema de adición de las velocidades angulares se deduce que la velocidad angular de cada motor es $\vec{\Omega}_i = \vec{\omega}_q + \omega_i \vec{k}'$, donde ω_i es la velocidad con la que gira cada motor respecto de su eje principal. Nuevamente asumiendo que todos los motores son idénticos se tiene:

$$\begin{aligned} L_{O'} &= \Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{O'_{Mx}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (2\vec{\omega}_q + \omega_1 \vec{k}' + \omega_3 \vec{k}') + \Pi_{O'_{My}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (2\vec{\omega}_q - \omega_2 \vec{k}' - \omega_4 \vec{k}') = \\ &= \Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{O'_{Mx}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\omega_1 + \omega_3) \vec{k}' - \Pi_{O'_{My}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\omega_2 + \omega_4) \vec{k}' \end{aligned}$$

Tanto las velocidades angulares como los tensores de inercia que componen la ecuación anterior se encuentran expresados en la base solidaria al cuadricóptero. Para realizar dicha derivada se utiliza nuevamente la fórmula de la derivada de un vector:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Lo que se obtiene de dicha derivada es:

$$\begin{aligned} \frac{dL_Q}{dt} &= \Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \dot{\vec{\omega}}_q + \Pi_{O'_{Mx}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_3) \vec{k}' - \Pi_{O'_{My}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_4) \vec{k}' + \\ &+ \vec{\omega}_q \times (\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{O'_{Mx}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\omega_1 + \omega_3) \vec{k}' - \Pi_{O'_{My}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\omega_2 + \omega_4) \vec{k}') \end{aligned}$$

A partir del cálculo de esta derivada y de los momentos externos hallados anteriormente, podemos escribir la segunda cardinal. Teniendo en cuenta que $I_{zzmx} = I_{zzmy}$ y que $I_{xx} = I_{yy}$ y operando con dicha ecuación se la puede llevar a la forma:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{q1} \\ \dot{\omega}_{q2} \\ \dot{\omega}_{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{q2}\omega_{q3}(I_{yy} - I_{zz}) + \omega_{q2}I_{zzm}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ \omega_{q1}\omega_{q3}(-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{q1}I_{zzm}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ -I_{zzm}(\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4) \end{pmatrix} + M_G^{ext}$$

1.5. Fuerzas y momentos involucradas

Para completar el análisis del sistema es fundamental conocer las expresiones de las fuerzas y los momentos involucrados. Por un lado se debe considerar la acción del peso en el sistema. Además debemos conocer con precisión las fuerzas y momentos que introducen las hélices del cuadricóptero ya que son estos los elementos sobre los cuales se pueden realizar las acciones de control. Finalmente consideraremos también el efecto del viento. Esta última es una fuerza que no puede conocerse a priori y será considerada como una perturbación en el sistema. Recordamos que las bajas velocidades a las que el sistema se mueve nos permiten despreciar las fuerzas aerodinámicas, a excepción de aquellas que tienen como origen el giro de las hélices.

1.5.1. Peso

Como ya se aclaró anteriormente, debido a la pequeña variación de la altura, el peso del cuadricóptero será considerado constante. Esta fuerza se aplica sobre el centro de masa del sistema, cabe recordar que en el presente análisis se considera la segunda cardinal en torno a dicho punto. Por lo tanto la distancia entre el eje en el cual se calculan los momentos y el punto de aplicación es cero. Recordando que:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$$

se deduce trivialmente que el momento del peso es cero. La expresión para el peso es:

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

Insistimos en el hecho que nos interesa conocer las fuerzas en el sistema solidario al cuadricóptero. Para expresar esta fuerza en dicho sistema se multiplica el peso por la matriz H_I^q . Lo que se obtiene es:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \sin \psi \\ -\cos \phi \cos \psi \end{pmatrix} Mg$$

1.5.2. Fuerzas y momentos de las hélices

La teoría de fluidos que explica el comportamiento de las hélices es compleja y ampliamente difundida por lo que no es de interés desarrollarla en profundidad en este trabajo. Diversa bibliografía puede ser consultada en donde se explican adecuadamente los fenómenos involucrados en las fuerzas aerodinámicas presentes en una hélice. Sin embargo si parece pertinente realizar un breve resumen de dichas fuerzas. Para el presente análisis consideraremos una hélice rotando en sentido antihorario, el razonamiento para una hélice rotando en sentido opuesto es análogo. En la figura 1.3 se observan dos vistas de la misma hélice. En la figura 1.3a puede observarse una hoja de la hélice. En la figura 1.3b se representa una vista transversal de la hélice con las fuerzas aerodinámicas involucradas.

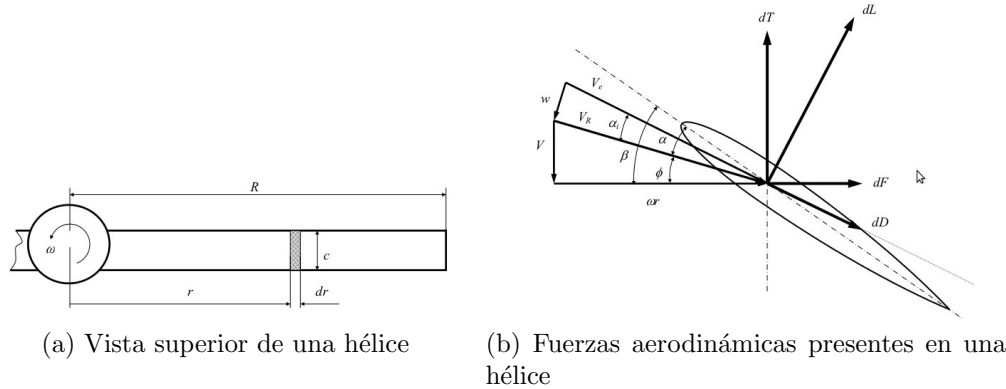


Figura 1.3: Vistas de una hélice y diagrama de fuerzas aerodinámicas presentes

La *Blade Element Theory* (BET) intenta explicar las fuerzas presentes en la hélice considerando en primer lugar las fuerzas en un elemento de área infinitesimal de

la hélice. Una vez halladas estas fuerzas se integra sobre el total de la superficie obteniendo así las fuerzas y momentos totales. Como se explica en ??, las fuerzas presentes sobre un elemento de área de la hélice son la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*, dichas fuerzas se encuentran representadas en la figura 1.3 como dL y dD respectivamente. La forma que tienen dichas fuerzas es:

$$dL = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_L c r^2 dr$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_D c r^2 dr$$

Donde ρ_A es la densidad del aire, ω_p la velocidad angular de la hélice, r la distancia del elemento de hélice al eje de la hélice, c es la longitud promedio de la cuerda de la hélice², C_L y C_D son coeficientes adimensionados.

La fuerza infinitesimal de empuje (dT) puede escribirse en función de las fuerzas de *lift* y de *drag* de la siguiente forma:

$$dT = dL \cos \phi_I - dD \sin \phi$$

Realizando la aproximación que ϕ es un ángulo pequeño y que la fuerza de *lift* es al menos un orden mayor que la de *drag* se puede afirmar que:

$$dT = dL$$

El empuje por lo tanto puede calcularse como la integral de dT respecto de r . Considerando que la hélice consta de dos hojas, se obtiene que:

$$T = \frac{1}{3} \rho_A C_L c R_P^3 \omega_p^2 \quad (1.1)$$

Donde R_P es el radio de la hélice. En todo momento tenemos dos fuerzas (una sobre cada hoja de la hélice) en dirección vertical y hacia arriba. Si nos referimos a la configuración de la figura 1.3b, el momento de las fuerzas dT es hacia la izquierda para la hoja considerada, sin embargo para la otra hoja este momento será hacia la derecha. Se puede concluir entonces que el torque neto que aporta esta fuerza en torno al eje de rotación de la hélice es nulo.

Intentaremos ahora obtener la resultante de las fuerzas horizontales sobre la hélice y el torque de dichas fuerzas. Comenzaremos por analizar que sucede con las sumas de las fuerzas, para luego proceder a calcular el momento de las mismas. Consideremos ahora la fuerza dF como la que se muestra en la figura 1.3b. Como se observa en la figura dicha fuerza es hacia la derecha. Si consideramos la fuerza horizontal sobre la otra hoja de la hélice, se obtiene una fuerza hacia la izquierda. Por lo tanto la suma de las fuerzas horizontales es nula. Sin embargo los momentos de las fuerzas en una y otra hoja de la hélice no se anulan, el momento que producen ambas es en la dirección de k_q . Por lo tanto el momento total será la suma de los momentos infinitesimales en toda la superficie de una hoja de la hélice multiplicado por la cantidad de hojas, es decir 2.

²segmento imaginario que une el borde de ataque con el borde de fuga

En primer lugar escribimos la fuerza horizontal como una composición de la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*.

$$dF = dD \cos \phi + dL \sin \phi \approx dD + dL \left(\frac{V}{\omega_p r} \right)$$

En esta ecuación V y $\omega_p r$ representan la velocidad del flujo de aire en las direcciones vertical y horizontal respectivamente. Operando se obtiene el momento total de la hélice en la dirección entrante:

$$Q = \frac{1}{4} \rho_A c R_P^4 (C_D + K) \omega_p^2 \quad (1.2)$$

En resumen, la teoría BET nos permite afirmar que sobre cada hélice del cuadricóptero que rota en sentido antihorario se aplicará una fuerza en la dirección \vec{k}_q cuyo módulo se expresó en la ecuación 1.1 y un momento en la dirección \vec{k}_q cuyo módulo es lo expresado en la ecuación 1.2. Para una hélice rotando en sentido antihorario se obtiene exactamente los mismos resultados excepto que el momento es en sentido opuesto.

Hasta aquí sabemos que sucede las fuerzas y momentos aplicados sobre una hélice. Nos concentraremos ahora en estudiar como influyen estas fuerzas y momentos en el cuadricóptero. Para lo que sigue continuaremos trabajando con las convenciones adoptadas en 1.1.

A partir de lo estudiado anteriormente se deduce trivialmente que el empuje de las hélices puede expresarse en el sistema S_q como:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \vec{T}_i = \sum_{i=1}^{i=4} T_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se determinó que las fuerzas de empuje no introducen un momento neto en el eje de las mismas. Sin embargo no debemos perder de vista que la segunda cardinal fue planteada en el centro de masa del sistema, por lo tanto respecto de dicho punto las fuerzas sí introducen un momento que puede calcularse como $M1 = L\vec{x}' \times T1\vec{k}_q$ para el motor 1. La expresión del momento es análoga para los restantes motores.

Debemos considerar además el momento obtenido para cada hélice en la dirección \vec{k}_q . Cabe recordad que se dedujo que para hélices rotando en sentido anti- horario se tiene un momento positivo, mientras que para una hélice rotando en sentido horario el momento es negativo. Realizando estas consideraciones es posible afirmar que la suma total de los momentos es:

$$M_G^{ext} = \begin{pmatrix} L(T2 - T4) \\ L(T3 - T1) \\ Q_1 - Q2 + Q3 - Q4 \end{pmatrix}$$

1.6. Consideraciones adicionales sobre el modelo

Previo a construir el modelo en variables de estado es importante realizar algunas consideraciones adicionales.

1.6.1. Fuerzas y momentos de los motores

Resulta importante conocer la relación que existe entre la velocidad angular de los motores y las fuerzas y torques aerodinámicos presentes. En base al estudio realizado se podrían conocer dichas relaciones calculando los parámetros que dependen de la geometría de la hélice, sin embargo este estudio resulta tedioso y la mayor parte de los métodos existentes para determinar dichos parámetros con buena precisión son destructivos. Por lo tanto se optó por obtener dichas respuestas en forma experimental. El proceso detallado puede consultarse en el anexo ???. En dichos experimentos se obtuvo que:

$$T = 3,7646 \times 10^{-5} \omega^2 - 9,0535 \times 10^{-4} \omega + 0,0170$$

$$Q = 5,4746 \times 10^{-7} \omega^2 + 7,4924 \times 10^{-5} \omega - 5,7275 \times 10^{-4}$$

Estos resultados parecen adecuados respecto de lo desarrollado teóricamente ya que ambas respuestas son cuadráticas.

1.6.2. Aproximaciones finales

1.7. Modelo en variables de Estado

Luego de realizados los estudios sobre la cinemática y dinámica del sistema y luego de comprender cabalmente las fuerzas y momentos involucrados se procede a construir el modelo en variables de estado.

Se debe aclarar que la elección realizada del vector de estados se debe exclusivamente a la conveniencia práctica que se encuentra al trabajar con las variables expresadas en el sistema del cuadricóptero. Esta conveniencia se ve reflejada en dos aspectos, en primer lugar las simplificaciones que introduce trabajar con estas variables en el marco de un desarrollo teórico de las ecuaciones que gobiernan al sistema, por otra parte, al disponer de sensores montados sobre el cuadricóptero, los mismos medirán las velocidades angulares y lineales en el sistema S_q . Bajo esta elección parece razonable escoger el vector de estados de la siguiente manera:

$$X = \{x, y, z, v_{q1}, v_{q2}, v_{q3}, \theta, \phi, \psi, \omega_{q1}, \omega_{q2}, \omega_{q3}\}$$

Las fuerzas y momentos dependen todos de las velocidades angulares de las hélices, luego de las simplificaciones realizadas el vector entrada se compone simplemente de las velocidades de las hélices es decir que:

$$u = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

El modelo en variables de estado es por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_{q1} \cos \phi \cos \theta + v_{q2} (\cos \theta \sin \phi \sin \psi - \cos \phi \sin \theta) + v_{q3} (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \phi) \\
\dot{y} &= v_{q1} \cos \phi \sin \theta + v_{q2} (\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \phi \sin \psi) + v_{q3} (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \theta \sin \psi) \\
\dot{z} &= -v_{q1} \sin \phi + v_{q2} \cos \phi \sin \psi + v_{q3} \cos \phi \cos \psi \\
\dot{\psi} &= \omega_{q1} + \omega_{q3} \tan \phi \cos \psi + \omega_{q2} \tan \phi \sin \psi \\
\dot{\phi} &= \omega_{q2} \cos \psi - \omega_{q3} \sin \psi \\
\dot{\theta} &= \omega_{q3} \frac{\cos \psi}{\cos \phi} + \omega_{q2} \frac{\sin \psi}{\cos \phi} \\
\dot{v}_{q1} &= v_{q2} \omega_{q3} - v_{q3} \omega_{q2} + Mg \sin \phi \\
\dot{v}_{q2} &= v_{q3} \omega_{q1} - v_{q1} \omega_{q3} - Mg \cos \phi \sin \psi \\
\dot{v}_{q3} &= v_{q1} \omega_{q2} - v_{q2} \omega_{q1} - Mg \cos \phi \cos \psi + \sum_{i=1}^4 T_i \\
\dot{\omega}_{q1} &= \frac{\omega_{q2} \omega_{q3} (I_{yy} - I_{zz}) + \omega_{q2} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{xx}} + \frac{L(T_2 - T_4)}{I_{xx}} \\
\dot{\omega}_{q2} &= \frac{\omega_{q1} \omega_{q3} (-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{q1} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{yy}} + \frac{L(T_3 - T_1)}{I_{yy}} \\
\dot{\omega}_{q3} &= \frac{-I_{zzm} (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4)}{I_{zz}} + \frac{Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4}{I_{zz}}
\end{aligned} \tag{1.3}$$