CAPÍTULO 1

CÁLCULOS NECESARIOS PARA LA LINEALIZACIÓN DEL SISTEMA

Tal como se explica en el capítulo **??** se lineliza el MVE obtenido en **??**, esto es, aproximar el sistema no lineal por un sistema lineal de la forma:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \tag{1.1}$$

Donde $A(t)$ y $B(t)$ son tales que $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{\substack{x=x^* \\ u=u^*}}$ y $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}|_{\substack{x=x^* \\ u=u^*}}$

1.1. Linealización para cualquier trayectoria

Para una trayectoria genérica al linealizar el sistema se obtienen las matrices:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Las entradas de la matriz de 1.2 representan matrices de 3×3 mientras que las entradas de la matriz 1.3 representan matrices de 3×4. Es importante conocer las entradas de las matrices anteriores, al menos en lo que respecta a las dependencias de cada una de ellas con las variables de estado.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} f_{A_{12_1}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_2}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_3}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) \\ f_{A_{12_4}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_5}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_6}}(\psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) \\ f_{A_{12_7}}(\psi, \varphi, v_{qy}, v_{qz}) & f_{A_{12_8}}(\psi, \varphi, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} f_{A_{13_1}}(\psi,\varphi,\theta) & f_{A_{13_2}}(\psi,\varphi,\theta) & f_{A_{13_3}}(\psi,\varphi,\theta) \\ f_{A_{13_4}}(\psi,\varphi,\theta) & f_{A_{13_5}}(\psi,\varphi,\theta) & f_{A_{13_6}}(\psi,\varphi,\theta) \\ f_{A_{13_7}}(\varphi) & f_{A_{13_8}}(\psi,\varphi) & f_{A_{13_8}}(\psi,\varphi) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} f_{A_{22_1}}(\psi,\varphi,\omega_{qy},\omega_{qz}) & f_{A_{22_2}}(\psi,\varphi,\omega_{qy},\omega_{qz}) & 0 \\ f_{A_{22_4}}(\psi,\omega_{qy},\omega_{qz}) & 0 & 0 \\ f_{A_{22_7}}(\psi,\varphi,\omega_{qy},\omega_{qz}) & f_{A_{22_8}}(\psi,\varphi,\omega_{qy},\omega_{qz}) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

$$A_{24} = \begin{pmatrix} 1 & f_{A_{24_2}}(\psi,\varphi) & f_{A_{24_3}}(\psi,\varphi) \\ 0 & f_{A_{24_5}}(\psi) & f_{A_{24_6}}(\psi) \\ 0 & f_{A_{24_8}}(\psi,\varphi) & f_{A_{24_9}}(\psi,\varphi) \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & g\cos\varphi & 0 \\ -g\cos\varphi\cos\psi & g\sin\varphi\sin\psi & 0 \\ g\cos\varphi\sin\psi & g\sin\varphi\cos\psi & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{qz} & -\omega_{qy} \\ -\omega_{qz} & 0 & \omega_{qx} \\ \omega_{qy} & -\omega_{qx} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 0 & -v_{qz} & v_{qy} \\ v_{qz} & 0 & -v_{qx} \\ -v_{qy} & v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

$$A_{42} = Mgd \begin{pmatrix} -\frac{\cos\varphi\cos\psi}{Ixx} & \frac{\sin\varphi\sin\psi}{Ixx} & 0 \\ 0 & -\frac{\cos\phi}{Iyy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_{zzm}}{I_{xx}}(\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4) + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\omega_{qz} & \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\omega_{qy} \\ \frac{I_{zzm}}{I_{yy}}(\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4) + \frac{-I_{xx}+I_{zz}}{I_{yy}}\omega_{qz} & 0 & \frac{-I_{xx}+I_{zz}}{I_{yy}}\omega_{qx} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ f_{B31_9}(\omega_1) & f_{B31_10}(\omega_2) & f_{B31_11}(\omega_3) & f_{B31_12}(\omega_4) \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

$$B_{41} = \begin{pmatrix} 0 & f_{B41_2}(\omega_2) & 0 & f_{B41_4}(\omega_4) \\ f_{B41_5}(\omega_1) & 0 & f_{B41_6}(\omega_3) & 0 \\ f_{B41_9}(\omega_1) & f_{B41_10}(\omega_2) & f_{B41_11}(\omega_3) & f_{B41_11}(\omega_4) \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

1.2. Linealización para la condición de hovering

Con las condiciones **??** y **??** obtenidas en el capítulo **??** se pueden obtener las matrices A y B en el caso particular de hovering. Además puede verificarse que todas las entradas de dichas matrices son constantes y que por lo tanto estamos frente a un sistema lineal invariante en el tiempo.

$$A_{hov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{hov_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & A_{hov_{32}} & 0 & 0 \\ 0 & A_{hov_{42}} & & 0 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

$$B_{hov} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{hov_{31}} \\ B_{hov_{41}} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Donde Id es la matriz identidad y las matrices $A_{hov_{13}}$,$A_{hov_{32}}$, $B_{hov_{31}}$, $A_{hov_{41}}$ y $A_{hov_{42}}$ son:

$$A_{hov_{13}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{hov_{32}} = \begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

$$A_{hov42} = Mgd \begin{pmatrix} -\frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_{zz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$B_{hov_{31}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}5\times10^{-2}s^{-2} & 1{,}5\times10^{-2}s^{-2} & 1{,}5\times10^{-2}s^{-2} & 1{,}5\times10^{-2}s^{-2} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

$$B_{hov_{41}} = \begin{pmatrix} 0 & 2{,}9\times10^{-1}s^{-2} & 0 & -2{,}9\times10^{-1}s^{-2} \\ -2{,}9\times10^{-1}s^{-2} & 0 & 2{,}9\times10^{-1}s^{-2} & 0 \\ 5{,}0\times10^{-2}s^{-2} & -5{,}0\times10^{-2}s^{-2} & 5{,}0\times10^{-2}s^{-2} & -5{,}0\times10^{-2}s^{-2} \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Dado que fue impuesto que θ fuese constante para este movimiento, tenemos efectivamente un sistema lineal invariante en el tiempo.

1.3. Vuelo en linea recta a velocidad constante

Las matrices A y B obtenidas para esta situación de vuelo son:

$$A_{rec} = \begin{pmatrix} 0 & A_{rec_{12}} & A_{rec_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & A_{rec_{32}} & 0 & A_{rec_{34}} \\ 0 & A_{rec_{42}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

$$B_{rec} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{rec_{31}} \\ B_{rec_{41}} \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

Donde $A_{rec_{13}} = A_{hov_{13}}$, $A_{rec_{32}} = A_{hov_{32}}$, $A_{rec_{42}} = A_{hov_{42}}$, $B_{rec} = B_{hov}$ y

$$A_{rec_{12}} = \begin{pmatrix} v_{qz}\sin\theta & v_{qz}\cos\theta & -v_{qy}\cos\theta - v_{qx}\sin\theta \\ -v_{qz}\cos\theta & v_{qz}\sin\theta & v_{qx}\cos\theta - v_{qy}\sin\theta \\ v_{qy} & -v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

$$A_{hov_{32}} = \begin{pmatrix} 0 & -v_{qz} & v_{qy} \\ v_{qz} & 0 & -v_{qx} \\ -v_{qy} & v_{qx} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

1.4. Vuelo a velocidad angular constante

Luego de las modificaciones introducidas en el MVE en la sección **??** se procede a linealizar el sistema obtenido.

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{cir_{11}} & 0 & Id & A_cir_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

Las matrices obtenidas son todas idénticas a las obtenidas en la linealización del MVE original a excepción de las matrices $A_{cir_{11}}$ y $A_{cir_{14}}$. Estas tienen la forma:

$$A_{circ_{11}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{qz} & \omega_{qy} \\ \omega_{qz} & 0 & -\omega_{qx} \\ -\omega_{qy} & \omega_{qx} & 0 \end{pmatrix} \quad A_{cir_{14}} = \begin{pmatrix} 0 & z_z & -y_q \\ -z_q & 0 & x_q \\ y_q & -x_q & 0 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$