

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## DISEÑO DEL CONTROLADOR

Dentro del “mundo” del control lineal, existen diversas técnicas que permiten alcanzar el objetivo trazado de lograr que el cuadricóptero siga alguna de las trayectorias especificadas en el capítulo ???. Algunas de las técnicas más utilizadas se centran en el diseño de controladores PID<sup>1</sup> o LQR<sup>2</sup>. Ambas técnicas presentan ventajas y desventajas. En el trabajo realizado en [?] se propone el control de un cuadricóptero utilizando un controlador PID. La gran mayoría de controladores en aplicaciones industriales son de este tipo, la principal ventaja que presentan es que se trata de un diseño que tiene una estructura simple y es adecuado para la gran mayoría de procesadores ya que el costo computacional del mismo es prácticamente nulo. El concepto principal es que la señal de entrada a la planta es una función del error entre el estado deseado y el estado estimado.

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1.1)$$

donde  $e(t) = X_d - \hat{X}$ , siendo  $X_d$  el vector de estados deseado y  $\hat{X}$  el estado estimado.

En [?] se limitan las trayectorias a trayectorias de hovering. En ese supuesto, se realizan algunas aproximaciones que permiten reducir el sistema físico a las siguientes ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g + (\cos \varphi \cos \psi) \frac{U_1}{M} \\ \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \frac{U_4}{I_{zz}} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Donde  $U_1, U_2, U_3$  y  $U_4$  son combinaciones lineales de los cuadrados de las velocidades angulares de cada motor. En este caso se puede tratar cada variable por separado, ya que cada variable es afectada por una sola entrada, siendo relativamente sencillo determinar las constantes  $K_p, K_I$  y  $K_d$  en función de donde se desea ubicar los polos del sistema realimentado. Con esta estrategia se pierde la posibilidad de controlar las otras 8 variables de estado, limitándose entonces a un cuadricóptero

---

<sup>1</sup>Proporcional, integral y derivativo

<sup>2</sup>Linear quadratic regulator

que puede realizar exclusivamente movimientos en la dirección vertical y giros en torno a su eje vertical.

Si se intenta controlar el sistema de interés en este trabajo utilizando esta técnica, surge el problema de determinar al menos una matriz de realimentación (si se trabaja solamente con un controlador proporcional) de  $12 \times 4$ , es decir que se deben determinar los 48 elementos de la matriz de forma de lograr que la respuesta del sistema sea la deseada. Esta tarea no resulta sencilla, ya que es extremadamente difícil comprender exactamente la influencia de cada parámetro de la matriz de realimentación en la ubicación de los polos en el sistema realimentado incluso para asegurar algo elemental y necesario como la estabilidad del sistema.

Por dicho motivo se opta por explorar el camino propuesto por otros trabajos como [?], donde la técnica elegida para realizar el control del cuadricóptero es LQR.

## 1.1. Conceptos generales sobre LQR

Sea el sistema realimentado de la figura 1.1, con  $X(t) \in \mathcal{M}_{n \times 1}$  el vector de estados del sistema y  $U(t) \in \mathcal{M}_{m \times 1}$  las entradas.  $r$  es el setpoint a partir del cual, multiplicando por dos matrices adecuadas pueden obtenerse los valores deseados de entrada  $U^*$  y de las variables de estado  $X^*$ . El objetivo planteado es el de obtener una matriz de realimentación  $K$  para el sistema utilizando la técnica de LQR.

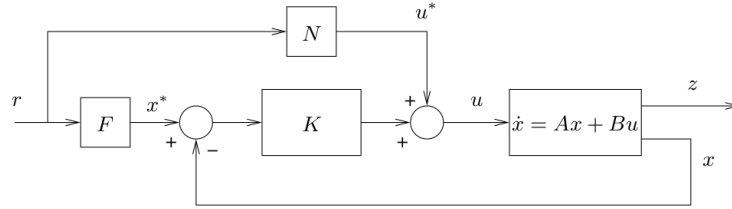


Figura 1.1: Sistema realimentado

El problema de encontrar un regulador óptimo de horizonte infinito se puede plantear de la siguiente forma: Se trata de encontrar la matriz de transferencia  $C(s)$  que minimice la siguiente función de costo:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} X'(t)QX(t) + U'(t)RU(t)dt \quad (1.3)$$

Donde  $Q$  y  $R$  son matrices simétricas definidas positivas de dimensiones  $n \times n$  y  $m \times m$  respectivamente.

El primer término de la integral corresponde a la energía de los estados controlados y el segundo a la energía de la señal de control. En función de como se escogen las matrices  $Q$  y  $R$ , se obtienen resultados distintos. Por ejemplo si la norma de  $Q$  es pequeña la forma más efectiva de reducir  $J_{LQR}$  es utilizar señales de control de norma pequeña a expensas de tener grandes variaciones en los estados controlados. Si bien existen diversos métodos para determinar las matrices  $Q$  y  $R$ , gran parte del trabajo es iterativo y se realiza a ensayo y error.

En la versión de realimentación de estados del problema LQR se asume que se disponen de medidas de todas las variables del vector de estados. En este caso, el controlador óptimo LQR es una matriz de ganancia  $K$  tal que:

$$U(t) - U^*(t) = -K(X(t) - X^*(t)) \quad (1.4)$$

Donde  $K \in \mathcal{M}_{m \times n}$ . Para el caso bajo análisis se tiene que:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (1.5)$$

Donde  $P$  es la solución a la ecuación algebraica de Riccati.

La propiedad esencial del controlador LQR es que la respuesta del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable, es decir que la parte real de los valores propios de la matriz  $A - BK$  es negativa, mientras se cumplan las siguientes condiciones:

- El sistema es controlable
- El sistema es observable

## 1.2. Consideraciones particulares respecto del sistema a controlar

Como se explicó en capítulos anteriores, se tiene una nueva estimación del vector de estados cada un cierto tiempo  $T^3$ , lo cual nos permite realizar acciones de control con esta misma tasa de muestreo.

Al tener un tiempo de respuesta rápido (en relación a las constantes del sistema) se podría resolver el problema utilizando la técnica de control LQR pensando en un sistema continuo, por más que el sistema sea discreto. Los algoritmos de determinación de la solución a la ecuación algebraica de Ricatti más sencillos que se encontraron corresponden a la solución de la formulación discreta del problema planteado en 1.3. Por otra parte, dicha formulación corresponde al caso en el cual se trabaja con un horizonte infinito, es decir se busca alcanzar un determinado punto de operación y el setpoint no será modificado. Estrictamente, esta no es la situación que se presenta dado que es de interés concatenar diversas trayectorias, por ende el punto de operación sí debe ser modificado, sin embargo se puede suponer que cada trayectoria se realizará por un tiempo ampliamente superior al tiempo del transitorio entre dos trayectorias. Por dicho motivo, aproximar el problema a un problema de horizonte infinito es acertado ya que simplifica enormemente la formulación del problema.

### 1.2.1. Discretización del sistema

Como se explicó en el capítulo ?? se trabaja con tres tipos de trayectorias: hovering, vuelos en línea recta y círculos. En cada uno de estos casos se tiene un sistema lineal de la forma

$$\dot{X} = AX + BU \quad (1.6)$$

---

<sup>3</sup>El período elegido en la implementación final es de 10ms.

La forma que toma el sistema continuo al ser convertido a tiempo discreto es:

$$X_{k+1} = \Phi X_k + \Gamma U_k \quad (1.7)$$

donde:

$$\Phi = e^{AT_s} \quad \Gamma = \int_0^{T_s} e^{As} ds B \quad (1.8)$$

Estas relaciones surgen de discretizar el sistema considerando muestreadores de orden cero. Por más detalles de este proceso puede consultarse [?].

El problema de encontrar un regulador óptimo también puede ser planteado en un sistema discreto si reescribimos la ecuación 1.3.

$$J_{DLQR} = \sum_0^{\infty} X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k \quad (1.9)$$

En el trabajo realizado en [?] se propone un algoritmo iterativo para obtener la matriz de realimentación que minimiza  $J_{DLQR}$ . Se comparó este algoritmo con la función *lqrd* de *MatLab* obteniéndose resultados similares con ambos. Por dicho motivo se optó por reproducir exactamente el algoritmo de [?].

### 1.2.2. Agregado de integradores

El esquema de la figura 1.1 funciona a la perfección en el caso en que la caracterización del sistema sea perfecta. Los valores de setpoint fueron determinados analíticamente en función de los parámetros determinados, de forma que por ejemplo, para la trayectoria de hovering la velocidad angular de los motores es aquella que produce una fuerza igual al peso del sistema. Errores en la caracterización del sistema llevan a que el punto (o trayectoria) de equilibrio no sea alcanzable. Bajo la hipótesis que el valor de  $\omega^*$  para la trayectoria de hovering es inferior al realmente necesario para mantener al sistema en reposo y que inicialmente  $X = X^*$  la fuerza de empuje no es suficiente para mantener al sistema en equilibrio, por lo tanto la posición vertical disminuye. La realimentación proporcional produce un aumento en la velocidad angular de los motores hasta que para cierto valor de altura la entrada al sistema es aquella que produce el equilibrio. En este caso se obtiene un nuevo punto de equilibrio distinto al deseado. En el ejemplo considerado se obtiene una altura inferior a la deseada.

Realizando diversas pruebas se ha comprobado que según el nivel de batería disponible un mismo comando  $I^2C$  corresponde a distintos valores de velocidad angular. Para resolver este problema se plantea el camino de medir el voltaje en la batería durante el vuelo, sin embargo este camino no parece práctico ya que se debería caracterizar la relación entre velocidad angular y comando  $I^2C$  para todo el rango de voltajes en que la batería puede operar. Este camino no parece pertinente, quedando incluso sujeto a la exactitud con la cual se realizan las medidas.

Surge entonces la necesidad de agregar al controlador cierta robustez frente a errores de caracterización del sistema o frente a variaciones del mismo, por ejemplo

la tensión de la batería o un cambio en la masa del sistema<sup>4</sup> Esto último es fundamental si se planea utilizar el cuadricóptero por ejemplo para transportar alguna carga útil.

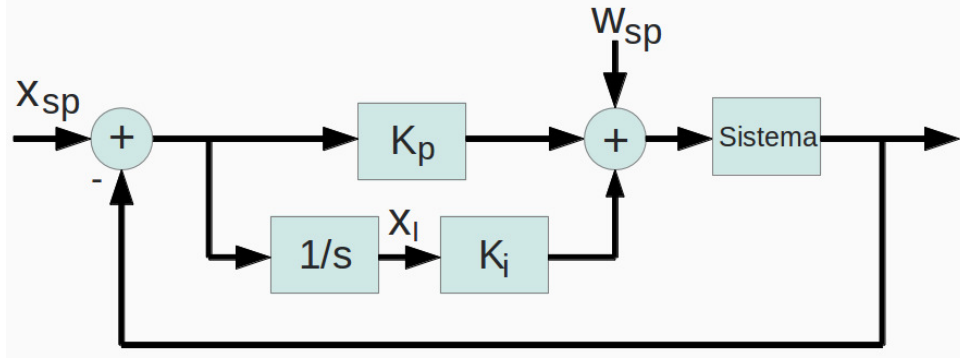


Figura 1.2: Diagrama de bloques final utilizado

El camino a explorar es el de agregar un bloque integrador. El esquema del controlador es ahora el de la figura 1.2. Para explicar la utilidad del mismo, se continúa razonando con el ejemplo de una trayectoria de hovering en la cual  $\omega^*$  está subestimado. En dichas condiciones se obtiene un nuevo punto de equilibrio con altura inferior a la deseada. Si se realimenta la integral de la diferencia de altura se tiene una entrada que aumenta con el tiempo hasta que la diferencia de altura sea cero. En este punto el término correspondiente a la integral de la diferencia de altura se mantiene constante en un valor positivo y el término correspondiente a la realimentación proporcional es cero, compensando el error en el modelado.

El agregado de un bloque integrador se puede entender como una ampliación del vector de estados. La salida del bloque integrador verifica que  $\dot{X}_I = X$ . Donde  $X_I$  corresponde a los estados integrados. La dinámica del sistema puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} U \quad (1.10)$$

En la ecuación 1.10 lo que se obtiene es un nuevo sistema lineal de mayor dimensión. Lo que se busca es encontrar una matriz de realimentación para el sistema 1.10 minimizando la función de costos definida en 1.9.

### 1.3. Controlabilidad y observabilidad

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad son fundamentales para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado controlado con la técnica de LQR.

Sea el sistema lineal representado por la ecuación 1.11:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (1.11)$$

<sup>4</sup>Para realizar pruebas se disponen de baterías de diverso tamaño (y peso), no parece práctico modificar constantemente la masa del sistema según la batería con la que se realiza una determinada prueba.

## 1 Diseño del controlador

donde  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n \times m}$ ,  $C \in \mathcal{M}_{p \times n}$  y  $D \in \mathcal{M}_{p \times m}$ .

La matriz de controlabilidad  $S \in \mathcal{M}_{n \times nm}$  se define como:

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (1.12)$$

El sistema es controlable si y solo si el rango de  $S$  es  $n$ .

La matriz de observabilidad  $V \in \mathcal{M}_{pn \times n}$  se define como:

$$V = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

El sistema es observable si y solo si el rango de  $V$  es  $n$ .

El sistema bajo estudio es originalmente no lineal. En el capítulo ?? se estudió en torno a que trayectorias se puede aproximar el problema de controlar el cuadricóptero por el problema de controlar un sistema lineal invariante en el tiempo. Si bien no todas las trayectorias son posibles, el conjunto de trayectorias es infinito. Notar que por ejemplo dos vuelos en línea recta a dos velocidades distintas son, en realidad, dos trayectorias distintas. Evidentemente, es imposible evaluar las condiciones de controlabilidad y observabilidad para todos los casos. Sin embargo, se puede evaluar en algunas trayectorias y confiar en que para las trayectorias no testeadas el resultado sea el mismo.

En una primer aproximación se analizaron diversas trayectorias para el sistema lineal sin los estados agregados correspondientes a la inclusión de integradores. Las matrices de controlabilidad y observabilidad para todas las trayectorias testeadas son de rango 12. Esto implica que los controladores que surgen de la técnica de control LQR son estables. Sin embargo es de interés, por los motivos presentados en la sección anterior, poder agregar al controlador una dependencia del pasado (integradores), esto implica cuestionarse que estados integrados pueden ser incluidos en el sistema manteniendo la condición de controlabilidad. La condición de observabilidad se cumple trivialmente ya que siempre se tiene una estimación de las integrales de los estados.

Los únicos estados que pueden integrarse sin perder la controlabilidad del sistema son las tres posiciones  $(x, y, z)$  y el ángulo de Yaw ( $\theta$ ). En resumen, el vector de estados controlados es el siguiente:

$$X = (x, y, z, \psi, \varphi, \theta, v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}, \omega_{qx}, \omega_{qy}, \omega_{qz}, x_I, y_I, z_I, \theta_I)^T \quad (1.14)$$

Observabilidad y controlabilidad pueden ser testeadas ejecutando en *MatLab*:

- `rank(observ(A,C));`
- `rank(ctrb(A,B));`

Las funciones `obsv` y `ctrb` computan las matrices de observabilidad y controlabilidad respectivamente. Si el rango de las mismas es igual a  $n$  el sistema es observable y controlable. En la documentación de *MatLab* se aclara que la función `obsv` no es siempre adecuada para realizar este test, se recomienda la función `obsvf`. Esta función devuelve una descomposición en estados observables e inobservables, la transformación necesaria para obtener dicha descomposición y un vector  $k$  que contiene la cantidad de estados observables identificados en cada iteración. La suma de dicho vector resulta en la cantidad de estados observables. Se debe ejecutar en *MatLab*:

- `[ABAR,BBAR,CBAR,T,k] = obsvf(A,B,C);`
- `sum(k);`

## 1.4. Matriz de realimentación

Como se explicó anteriormente, la matriz de realimentación es obtenida numéricamente gracias al algoritmo presentado en [?]. Dicha matriz depende del sistema lineal con el cual se representa cada trayectoria. Por lo tanto para cada trayectoria se debe calcular una nueva matriz de realimentación. Lo fundamental es entonces determinar adecuadamente las matrices  $Q$  y  $R$  presentadas en 1.9 de forma de obtener trayectorias adecuadas. Estas matrices fueron determinadas en forma iterativa, modificando los parámetros hasta obtener un comportamiento satisfactorio en cuanto a tiempos de respuesta y robustez.

Se entiende que los parámetros fundamentales a controlar son los ángulos de Euler, si el control sobre estos no se hace en forma rápida la performance del sistema puede verse afectada. Las condiciones de vuelo determinadas dependen de que los ángulos de Pitch y de Roll se encuentren perfectamente ajustados. A modo de ejemplo si estos ángulos no son nulos se tiene un sistema que acelera indefinidamente en alguna dirección. Por lo tanto parece importante darle un peso superior al control de estas variables de estado respecto a las restantes. Las matrices de realimentación se construyen a partir de una matriz ( $Q$ ) diagonal, cuyos elementos son:

$$\text{diag}(Q) = \{1, 1, 1, 10^3, 10^3, 10^3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \quad (1.15)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$