
CAPÍTULO 1

LINELIZACIÓN Y PUNTOS DE OPERACIÓN

Independientemente del sistema bajo estudio, a la hora de elegir la técnica de control a utilizar se plantean diversas posibilidades. Parece razonable intentar resolver el problema planteado utilizando las técnicas más sencillas que se disponen, al menos en una primera aproximación. En caso de que dicha solución no fuese satisfactoria se puede optar por una técnica con un mayor grado de complejidad.

Las técnicas de control más sencillas y con las que se tiene mayor experiencia se basan en el estudio de sistemas lineales invariantes en el tiempo (SLIT). Sin embargo el MVE obtenido en el capítulo ?? es no lineal. Se propone entonces resolver el problema del control del cuadricóptero aproximando el sistema por un sistema lineal invariante en el tiempo. Dado que el sistema no puede ser linealizado en torno a cualquier trayectoria o punto de operación nos concentraremos en determinar bajo que condiciones es posible aproximar el sistema por un SLIT.

1.1. Concepto general

Consideremos un sistema que se rige por la siguiente evolución de su vector de estados.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.1)$$

Donde $x(t)$ es el vector de estados del sistema y $u(t)$ el vector de las entradas. Supongamos en una primera instancia que tanto $x(t)$ como $u(t)$ son de dimensión uno. Consideremos además el punto de operación definido por $x^*(t)$ y $u^*(t)$. Si realizamos un desarrollo de Taylor de orden uno en torno al punto de operación se tiene que:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f(x^*(t), u^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} (x(t) - x^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} (u(t) - u^*(t)) \quad (1.2)$$

Si definimos $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$ y $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t)$ tenemos que:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} \tilde{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} \tilde{u}(t) \quad (1.3)$$

Este mismo concepto puede generalizarse en caso en el cual el vector de estados y el vector de entradas tienen dimension n y m respectivamente.

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{U}(t) \quad (1.4)$$

Donde $A(t)$ es una matriz de $n \times n$ y $B(t)$ es de $n \times m$, tales que $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}|_{X=X^*, U=U^*}$ y $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial U_j}|_{X=X^*, U=U^*}$.

En el caso en que todos los coeficientes de las matrices A y B son constantes podemos afirmar que estamos en presencia de un sistema lineal invariante en el tiempo.

1.2. Puntos de operación

Lo que buscamos ahora es encontrar las trayectorias que permiten que la linealización de nuestro sistema en torno a estas resulte en un sistema lineal invariante en el tiempo.

Para lograr este cometido, se debe cumplir que todos los elementos de las matrices ?? y ?? sean constantes. Dichas matrices corresponden a la linealización del MVE en torno a una trayectoria genérica. Se desprende del análisis de dichas matrices que los puntos de operación que cumplen esta condición quedan restringidos a un subconjunto tal que:

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \dot{\theta} = \dot{v}_{qx} = \dot{v}_{qy} = \dot{v}_{qz} = \dot{\omega}_{qx} = \dot{\omega}_{qy} = \dot{\omega}_{qz} = \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_4 = 0 \quad (1.5)$$

Veremos luego que, realizando un cambio de variable como se explica en ??, se puede ampliar el conjunto de trayectorias posibles, pudiendo agregar aquellas para las cuales $\dot{\theta} \neq 0$. Estas consideraciones nos llevan a concluir que el conjunto de trayectorias permitidas¹ es aquel en el cual tanto la velocidad del centro de masa, como la velocidad angular son constantes en el tiempo. Las trayectorias que cumplen con estas condiciones son tres:

- Hovering
- Vuelo en línea recta a velocidad constante
- Vuelo en círculo a velocidad constante

En los tres casos se tienen que cumplir las restricciones siguientes:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{qx} \\ \dot{v}_{qy} \\ \dot{v}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{qx} \\ \dot{\omega}_{qy} \\ \dot{\omega}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

Cada una de las trayectorias posibles tiene además sus particularidades, a continuación nos encargaremos justamente de determinar las restricciones específicas de cada una de ellas.

¹por las restricciones que hemos impuesto de trabajar con un sistema lineal invariante en el tiempo

1.2.1. Hovering

En el caso del reposo mecánico no solo debe cumplirse las condiciones establecidas en 1.6 si no que además las velocidades del centro de masa y las velocidades angulares deben ser iguales a cero.

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.7)$$

Dado que la velocidad y velocidad angular del sistema fue definida como cero tenemos por despejar 7 variables: los ángulos de Euler, y las velocidades angulares de los motores.

Al imponer las condiciones de 1.7 las ecuaciones ?? y ?? del MVE se cumplen trivialmente. La restricción establecida en 1.6 consta de seis ecuaciones. Estas no dependen de θ , obteniendo entonces un sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas que debe ser resuelto a fin de determinar las condiciones que permiten el hovering. Ninguna de las seis ecuaciones depende la posición, esto sumado a la independencia de la condición de hovering respecto de θ , nos permite confirmar un resultado evidente: el hovering puede lograrse en cualquier punto del espacio con cualquier ángulo de Yaw

Del análisis de las ecuaciones 1.6 se obtiene rápidamente que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad (1.8)$$

Se deduce además que:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 316,10 \text{ rad/s} \quad (1.9)$$

1.2.2. Vuelo en línea recta a velocidad constante

Para lograr el vuelo en línea recta a velocidad constante se tienen que cumplir las condiciones de 1.6 al igual que en el caso anterior. La particularidad del vuelo en línea recta es que la velocidad del centro de masa es una constante distinta de cero.

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = cte \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.10)$$

Al imponer que $\vec{\omega}_q = 0$ la ecuación ?? se verifica trivialmente y las ecuaciones ?? y ?? quedan idénticas al caso del sistema en reposo. Por lo tanto, tendremos también para el movimiento en línea recta que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 334,28 \text{ rad/s} \quad (1.11)$$

Hasta aquí no hemos considerado la ecuación que relaciona las velocidades lineales en el sistema inercial con las velocidades lineales expresadas en el sistema del cuadricóptero. Teniendo presente el resultado obtenido sobre φ y ψ dichas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{qx} \cos \theta - v_{qy} \sin \theta \\ \dot{y} &= v_{qy} \sin \theta + v_{qx} \cos \theta \\ \dot{z} &= v_{qz} \end{aligned} \quad (1.12)$$

El vuelo en línea recta nos ofrece la posibilidad de fijar los restantes 4 parámetros de la trayectoria. Estos parámetros serán determinados por el generador de trayectorias con el objetivo de realizar una recta en particular con una orientación determinada.

1.2.3. Vuelo en círculos

Con las ecuaciones desarrolladas hasta este instante nos es imposible realizar movimientos con velocidades angulares distintas de cero sin que el sistema resultante sea variante en el tiempo. Si imponemos que la velocidad angular del sistema sea distinta a cero se tiene que al menos alguno de las derivadas de los ángulos de Euler es distinta de cero. Por lo tanto tenemos al menos algún ángulo de Euler variante en el tiempo. Para poder obtener un movimiento circular se realiza el cambio de variable en el MVE en lo que respecta a las ecuaciones de la derivada de la posición propuesto en ??.

El cambio de variables en cuestión consiste en expresar la posición (exclusivamente para los movimientos circulares) en la base del cuadricóptero. Supongamos que el cuadricóptero se encuentra realizando un movimiento tal, que su proyección sobre el plano horizontal ($z = 0$) es circular. Podemos describir la posición en todo momento tomando como origen el centro de dicho círculo. Como se observa en la figura ?? la posición en dicho plano se puede expresar como $-R\vec{j}_1^2$. Donde R , es el radio del círculo y \vec{j}_1 es un vector de la base que se obtiene al realizar la primera rotación de Euler definida en ?. Multiplicando el vector $-R\vec{j}_1$ por la matriz cambio de base $H_2^q H_1^2$ definida en ?? se obtiene la posición expresada en el sistema S_q . Como \vec{j}_1 es invariante frente a la rotación H_1^2 , alcanza con multiplicar dicho vector por H_2^q obteniendo así:

$$\vec{r}_q = -H_2^q \vec{i}_1 = -R \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Al expresar la posición con este cambio de variables se obtiene la independencia de la misma respecto de dos de los tres ángulos de Euler: φ y θ . En lo que respecta al ángulo φ la independencia de esta variable no nos aporta absolutamente nada ya que para que el movimiento circular a velocidad constante sea posible dicho ángulo debe ser cero. La razón es que si el ángulo fuese diferente a cero tendríamos una componente de la fuerza en la dirección tangencial al círculo, por lo tanto una aceleración en dicha dirección.

Sin embargo, la independencia respecto de θ en la posición es un paso fundamental para lograr el vuelo en círculos ya que las únicas ecuaciones del MVE ?? que dependen de esta variable son las que refieren a la derivada de la posición. Por lo tanto, seremos capaces de desarrollar un nuevo MVE independiente del ángulo de Yaw.

²Esto es debido a que se elige que el vector \vec{i}_q sea tangente a los círculos descriptos. El razonamiento es análogo si se desea que el vector \vec{j}_q sea tangente al círculo, en este caso debe expresarse la posición del sistema como $R\vec{i}_1$

Nos interesa ahora derivar la posición para terminar de completar el modelo del sistema. Dado que la posición se encuentra expresada en el sistema del cuadricóptero tendremos que:

$$\vec{v}_q = \frac{d\vec{r}_q}{dt} = \frac{d\vec{r}_q}{dt} + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_q \quad (1.14)$$

Por lo tanto tendremos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_q \\ \dot{y}_q \\ \dot{z}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{qx} - \omega_{qy}z_q + \omega_{qz}y_q \\ v_{qy} - \omega_{qz}x_q + \omega_{qx}z_q \\ v_{qz} - \omega_{qx}y_q + \omega_{qy}x_q \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Este modelo nos permitirá realizar el control basándonos en técnicas de control lineal para trayectorias circulares en planos tales que $z = cte$.

Es fundamental aclarar que las ecuaciones derivadas hasta aquí serán utilizadas exclusivamente para la linealización del sistema y no para determinar los valores de los parámetros a controlar. Para esto último continuaremos utilizando el modelo de ???. El movimiento circular queda determinado exclusivamente por dos parámetros la velocidad (V_I) y la velocidad angular ($\dot{\theta}$), estos serán considerados conocidos ya que es trabajo del generador de rutas o del usuario determinar que movimiento se desea realizar. Se desea determinar once parámetros, siete de las doce variables de estado (No nos interesa fijar ni ángulo de Yaw ni la posición y ya fue determinado que $\varphi = 0$) y las cuatro velocidades angulares de los motores. Se deben tener en cuenta evidentemente las restricciones establecidas en 1.6 sobre las derivadas de las velocidades del centro de masa y de las velocidades angulares. En lo que respecta a las derivadas de los ángulos de Euler se debe cumplir que $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$ además $\dot{\theta}$ debe ser igual al valor impuesto. De $\dot{\psi} = 0$ se deduce trivialmente que $\omega_{q_x} = 0$

Para cada instante tendremos un ángulo de Yaw distinto, por lo tanto la velocidad horizontal a cada instante tendrá una dirección distinta, sin embargo su módulo será constante. Sin pérdida de generalidad podemos considerar la situación evaluando $\theta = 0$

$$\begin{pmatrix} v_{qx} + v_{qy} \sin \psi \\ v_{qy} \cos \psi - v_{qz} \sin \psi \\ v_{qy} \sin \psi + v_{qz} \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

De la imposición de dicha condición surge:

$$v_{qy} = -\tan^2 \psi \quad v_{qy} \quad (1.17)$$

La solución de dicha ecuación es: $v_{qy} = 0$, y por lo tanto $v_{qz} = 0$ y $v_{qx} = V_I$.

A esta altura nos resta por determinar simplemente tres de las variables de estado que permiten realizar un movimiento en circular (ψ, ω_{qy} y ω_{qz}) además de las velocidades angulares de los motores. Hasta aquí hemos utilizado cinco de las doce ecuaciones del modelo físico, por lo tanto tenemos aún siete ecuaciones. El sistema a resolver no será resuelto en forma analítica, por el contrario se resolverá en forma numérica a la hora de planificar la trayectoria.

Se ha dado un paso fundamental en camino de lograr controlar el cuadricóptero, se han definido tres tipos de trayectorias las cuales es posible tratar desde el “mundo” del control lineal. Las trayectorias definidas ofrecen una amplia gama de

posibilidades, ya que concatenando las mismas se pueden obtener prácticamente cualquier movimiento, a excepción de maniobras que involucren variaciones en más de un ángulo de Euler a la vez. El subconjunto de trayectorias con el que se puede trabajar es considerado ampliamente satisfactorio y por ende se da por concluido el análisis sobre los puntos de operaciones y la linealización del sistema.