
CAPÍTULO 1

LINEALIZACIÓN Y PUNTOS DE OPERACIÓN

Independientemente del sistema bajo estudio, a la hora de elegir la técnica de control a utilizar se plantean diversas posibilidades. Parece razonable intentar resolver el problema planteado utilizando las técnicas más sencillas de las que se disponen, al menos en una primera aproximación. En caso de que dicha solución no fuese satisfactoria se puede optar por una técnica con un mayor grado de complejidad.

Las técnicas de control más sencillas y con las que se tiene mayor experiencia se basan en el estudio de sistemas lineales invariantes en el tiempo (SLIT). El MVE obtenido en el capítulo ?? es no lineal, por lo que se propone resolver el problema del control del cuadricóptero aproximando el sistema por un sistema lineal invariante en el tiempo. En una primera instancia se centrará el análisis en determinar bajo qué condiciones es posible aproximar el sistema por un SLIT.

1.1. Concepto general

Dado un sistema que se rige por la siguiente evolución de su vector de estados:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.1)$$

Donde $x(t)$ es el vector de estados del sistema y $u(t)$ el vector de las entradas. Suponiendo, en una primera instancia, que tanto $x(t)$ como $u(t)$ son de dimensión uno y considerando además el punto de operación definido por $x^*(t)$ y $u^*(t)$, un desarrollo de Taylor de orden uno en torno al punto de operación resulta en:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f(x^*(t), u^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} (x(t) - x^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} (u(t) - u^*(t)) \quad (1.2)$$

Definiendo $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$ y $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t)$ se obtiene que:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} \tilde{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u^*}^{x=x^*} \tilde{u}(t) \quad (1.3)$$

1 Linealización y puntos de operación

Este mismo concepto puede generalizarse al caso en el cual el vector de estados y el vector de entradas tienen dimension n y m respectivamente.

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{U}(t) \quad (1.4)$$

Donde $A(t)$ es una matriz de $n \times n$ y $B(t)$ es de $n \times m$, tales que $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}|_{X=X^*, U=U^*}$ y $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial U_j}|_{X=X^*, U=U^*}$.

En el caso en que todos los coeficientes de las matrices A y B son constantes es posible afirmar que el sistema es lineal e invariante en el tiempo.

1.2. Puntos de operación

Se buscan trayectorias tales que la linealización del sistema en torno a ellas resulte en un sistema lineal invariante en el tiempo.

Para lograr este cometido, se debe cumplir que todos los elementos de las matrices ?? y ?? del anexo ?? sean constantes. Dichas matrices corresponden a la linealización del MVE en torno a una trayectoria genérica. Se desprende del análisis de dichas matrices que los puntos de operación que cumplen esta condición quedan restringidos a un subconjunto tal que:

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \dot{\theta} = \dot{v}_{qx} = \dot{v}_{qy} = \dot{v}_{qz} = \dot{\omega}_{qx} = \dot{\omega}_{qy} = \dot{\omega}_{qz} = \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_4 = 0 \quad (1.5)$$

Luego se verá que, realizando un cambio de variable como se explica en [?], se puede ampliar el conjunto de trayectorias posibles, pudiendo agregar aquellas para las cuales $\dot{\theta} \neq 0$. Estas consideraciones llevan a concluir que el conjunto de trayectorias permitidas¹ es aquel en el cual tanto la velocidad del centro de masa, como la velocidad angular son constantes en el tiempo. Las trayectorias que cumplen con estas condiciones son tres:

- Hovering
- Vuelo en línea recta a velocidad constante
- Vuelo en círculo a velocidad constante

En los tres casos se tienen que cumplir las restricciones siguientes:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{qx} \\ \dot{v}_{qy} \\ \dot{v}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{qx} \\ \dot{\omega}_{qy} \\ \dot{\omega}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

Cada una de las trayectorias posibles tiene además sus particularidades, a continuación se determinan las restricciones específicas de cada una de ellas.

¹por la restricción de trabajar con un sistema lineal invariante en el tiempo.

1.2.1. Hovering

En el caso del reposo mecánico no solo deben cumplirse las condiciones establecidas en ?? sino que además las velocidades del centro de masa y las velocidades angulares deben ser iguales a cero:

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.7)$$

Dado que la velocidad y velocidad angular del sistema fueron definidas como cero, sólo quedan por determinar 7 variables: los ángulos de Euler y las velocidades angulares de los motores.

Al imponer las condiciones de ??, las ecuaciones ?? y ?? del MVE se cumplen trivialmente. La restricción establecida en ?? consta de seis ecuaciones. Estas no dependen de θ , obteniendo entonces un sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas que debe ser resuelto a fin de determinar las condiciones que permiten el hovering. Ninguna de las seis ecuaciones depende de la posición lo cual, sumado a la independencia de la condición de hovering respecto de θ , permite confirmar un resultado evidente: **el hovering puede lograrse en cualquier punto del espacio con cualquier ángulo de Yaw**

Del análisis de las ecuaciones ?? se obtiene que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_{hover} \quad (1.8)$$

1.2.2. Vuelo en línea recta a velocidad constante

Cabe recordar que el modelo desarrollado no incluye ninguna fuerza aerodinámica a excepción de aquellas que producen las fuerzas y los torques sobre las hélices. Bajo esta suposición las condiciones necesarias para lograr rectas y círculos difieren sensiblemente de la realidad. Para lograr el vuelo en línea recta a velocidad constante se tienen que cumplir las condiciones de ??, al igual que en el caso anterior. La particularidad del vuelo en línea recta es que la velocidad del centro de masa es una constante distinta de cero.

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = cte \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

Al imponer que $\vec{\omega}_q = 0$ la ecuación ?? se verifica trivialmente y las ecuaciones ?? y ?? quedan idénticas al caso del sistema en reposo. Por lo tanto, al igual que para el hovering, se tendrá que:

$$\varphi = 0 \quad ; \quad \psi = 0 \quad ; \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_{hover} \quad (1.10)$$

Hasta aquí no se ha considerado la ecuación que relaciona las velocidades lineales en el sistema inercial con las velocidades lineales expresadas en el sistema del cuadricóptero. Teniendo presente el resultado obtenido sobre φ y ψ dichas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{qx} \cos \theta - v_{qy} \sin \theta \\ \dot{y} &= v_{qy} \sin \theta + v_{qx} \cos \theta \\ \dot{z} &= v_{qz} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Se deduce entonces que el vuelo en línea recta queda determinado al fijar las restantes 4 variables del sistema: v_{qx} , v_{qy} , v_{qz} y θ . Estos parámetros serán determinados por el generador de trayectorias con el objetivo de realizar una recta en particular con una orientación determinada.

1.2.3. Vuelo en círculos

Con las ecuaciones desarrolladas hasta ahora no resulta posible realizar movimientos con velocidades angulares distintas de cero sin que el sistema resultante sea variante en el tiempo. Si se impone que la velocidad angular del sistema sea distinta a cero se tiene que al menos una de las derivadas de los ángulos de Euler es distinta de cero y por lo tanto se tendrá al menos un ángulo de Euler variante en el tiempo. Para poder obtener un movimiento circular se realiza el cambio de variable en el MVE en lo que respecta a las ecuaciones de la derivada de la posición propuesto en [?].

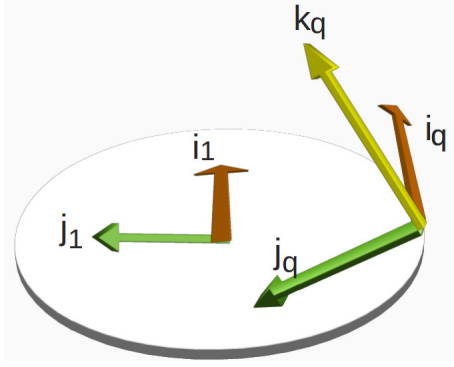


Figura 1.1: Vuelo en círculo

El cambio de variable en cuestión consiste en expresar la posición (exclusivamente para los movimientos circulares) en la base del cuadricóptero. Suponiendo que el cuadricóptero se encuentra realizando un movimiento tal que su proyección sobre el plano horizontal ($z = 0$) es circular, se puede describir la posición en todo momento tomando como origen el centro de dicho círculo. Como se observa en la figura ?? la posición en dicho plano se puede expresar como $-R\vec{j}_1^2$. Donde R , es el radio del círculo y \vec{j}_1 es un vector de la base que se obtiene al realizar la primera rotación de Euler definida en ??.

Multiplicando el vector $-R\vec{j}_1$ por la matriz cambio de base $H_2^q H_1^2$ definida en ?? se obtiene la posición expresada en el sistema S_q . Como \vec{j}_1 es invariante frente a la rotación H_1^2 , alcanza con multiplicar dicho vector por H_2^q obteniendo así:

$$\vec{r}_q = -H_2^q \vec{i}_1 = -R \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Al expresar la posición con este cambio de variables se obtiene la independencia de la misma respecto de dos de los tres ángulos de Euler: φ y θ . En lo que respecta al ángulo φ la independencia de esta variable no aporta absolutamente nada ya que para que el movimiento circular a velocidad constante sea posible dicho ángulo debe ser cero. La razón es que si el ángulo fuese diferente a cero se tendría una componente de la fuerza en la dirección tangencial al círculo, y por lo tanto una aceleración en dicha dirección.

²Esto es debido a que se elige que el vector \vec{i}_q sea tangente a los círculos descriptos. El razonamiento es análogo si se desea que el vector \vec{j}_q sea tangente al círculo, en este caso debe expresarse la posición del sistema como $R\vec{i}_1$

La independencia respecto de θ en la posición es un paso fundamental para lograr el vuelo en círculos ya que las únicas ecuaciones del MVE (??) que dependen de esta variable son las que refieren a la derivada de la posición. Por lo tanto, será posible desarrollar un nuevo MVE independiente del ángulo de Yaw.

Interesa ahora derivar la posición para terminar de completar el modelo del sistema. Dado que la posición se encuentra expresada en el sistema del cuadricóptero, se tiene que:

$$\vec{v}_q = \frac{d\vec{r}_q}{dt} = \frac{d'\vec{r}_q}{dt} + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_q \quad (1.13)$$

y por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_q \\ \dot{y}_q \\ \dot{z}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{qx} - \omega_{qy}z_q + \omega_{qz}y_q \\ v_{qy} - \omega_{qz}x_q + \omega_{qx}z_q \\ v_{qz} - \omega_{qx}y_q + \omega_{qy}x_q \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Este modelo permite realizar el control basado en técnicas de control lineal para trayectorias circulares en planos tales que $z = cte$.

Es fundamental aclarar que las ecuaciones derivadas hasta aquí serán utilizadas exclusivamente para la linealización del sistema y no para el control. Para esto último se continuará utilizando el modelo de ???. El movimiento circular queda determinado exclusivamente por dos parámetros: la velocidad (V_I) y la velocidad angular ($\dot{\theta}$), estos serán considerados conocidos ya que es trabajo del generador de rutas o del usuario determinar que movimiento se desea realizar. Se desea determinar once parámetros: siete de las doce variables de estado (No interesa fijar ni ángulo de Yaw ni la posición y ya fue determinado que $\varphi = 0$) y las cuatro velocidades angulares de los motores. Se deben tener en cuenta las restricciones establecidas en ??? sobre las derivadas de las velocidades del centro de masa y de las velocidades angulares. En lo que respecta a las derivadas de los ángulos de Euler se debe cumplir que $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$, además $\dot{\theta}$ debe ser igual al valor impuesto. De $\dot{\psi} = 0$ se deduce trivialmente que $\omega_{qx} = 0$

Para cada instante se tendrá un ángulo de Yaw distinto, por lo tanto la velocidad horizontal a cada instante tendrá una dirección distinta, y su módulo será constante. Sin pérdida de generalidad podemos considerar la situación evaluando $\theta = 0$

$$\begin{pmatrix} v_{qx} + v_{qy} \sin \psi \\ v_{qy} \cos \psi - v_{qz} \sin \psi \\ v_{qy} \sin \psi + v_{qz} \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

De la imposición de dicha condición surge:

$$v_{qy} = -\tan^2 \psi \quad v_{qy} \quad (1.16)$$

La solución de dicha ecuación es: $v_{qy} = 0$, y por lo tanto $v_{qz} = 0$ y $v_{qx} = V_I$.

La solución trivial $\psi = 0$ no es de interés para el vuelo en círculos ya que, si se impone dicha condición es imposible producir una fuerza en algún sentido distinto que según la vertical, no pudiéndose realizar una fuerza centrípeta necesaria para lograr un movimiento circular.

Resta por determinar tres de las variables de estado (ψ , ω_{qy} y ω_{qz}) y las velocidades angulares de los motores, para lo cual se utilizarán las siete ecuaciones restantes del

1 Linealización y puntos de operación

modelo físico. El sistema no será resuelto en forma analítica, sino en forma numérica a la hora de planificar la trayectoria.

Hasta aquí se han definido tres tipos de trayectorias, desde las cuales es posible definir y entender el comportamiento del cuadricóptero desde el “mundo” del control lineal, lo que significa un paso fundamental en camino de lograr controlar el cuadricóptero. Las trayectorias definidas ofrecen una amplia gama de posibilidades, ya que concatenando las mismas se pueden obtener prácticamente cualquier movimiento, a excepción de maniobras que involucren variaciones en más de un ángulo de Euler a la vez. El subconjunto de trayectorias con el que se puede trabajar es considerado ampliamente satisfactorio y por ende se da por concluido el análisis sobre los puntos de operaciones y la linealización del sistema.