
CAPÍTULO 1

DISEÑO DEL CONTROLADOR

Diversas técnicas de control nos permiten alcanzar el objetivo trazado de lograr que el cuadricóptero siga alguna de las trayectorias especificadas en el capítulo ???. En lo que respecta al control lineal y de acuerdo a la bibliografía estudiada, dos técnicas son principalmente utilizadas, control PID¹ y LQR². Ambas técnicas presentan ventajas y desventajas. En el trabajo realizado en ?? se propone el control de un cuadricóptero utilizando un controlador PID. La gran mayoría de controladores en aplicaciones industriales son de este tipo, la principal ventaja que presentan es que se trata de un diseño que tiene una estructura simple y es adecuado para la gran mayoría de procesadores ya que el costo computacional del mismo es prácticamente nulo. En dicha técnica de control la señal de entrada a la planta es una función del error entre el estado deseado y el estado estimado.

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1.1)$$

donde $e(t) = X_d - \hat{X}$.

Es fundamental en esta técnica de control la determinación de las constantes. En ?? se limitan las trayectorias a trayectorias de hovering. En ese supuesto, se realizan algunas aproximaciones que permiten reducir el sistema físico a las siguientes ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g + (\cos \varphi \cos \psi) \frac{U_1}{M} \\ \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \frac{U_4}{I_{zz}} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Donde U_1, U_2, U_3 y U_4 son combinaciones lineales de los cuadrados de las velocidades angulares de cada motor. En este caso se puede tratar cada variable por separado, ya que cada variable es afectada por una sola entrada, siendo relativamente sencillo determinar las constantes K_p, K_I y K_d en función de donde se desea ubicar los polos del sistema realimentado. Con esta estrategia se pierde la posibilidad de controlar las otras 8 variables de estado, limitándose entonces a un cuadricóptero que puede realizar exclusivamente movimientos en la dirección vertical y giros en

¹Proporcional, integral y derivativo

²Linear quadratic regulator

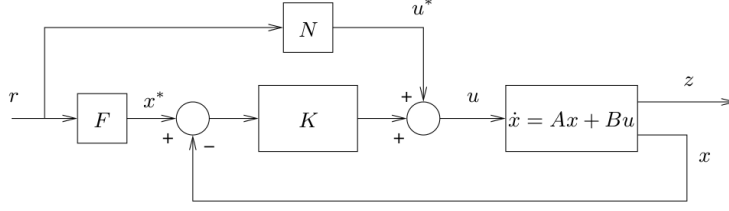


Figura 1.1: Sistema realimentado

torno a su eje vertical.

Si se intenta controlar el sistema de interés en este trabajo utilizando esta técnica, nos enfrentaríamos al problema de determinar al menos una matriz de realimentación (si trabajamos solamente con un controlador proporcional). Dicha matriz, debe ser de 12×4 , es decir que se deben determinar los 48 elementos de la matriz de forma de lograr que la respuesta del sistema sea la deseada. Esta tarea no resulta sencilla, ya que es extremadamente dificultoso comprender exactamente la influencia de cada parámetro de la matriz de realimentación en la ubicación de los polos en el sistema realimentado incluso para asegurar algo elemental y necesario como la estabilidad del sistema.

Por dicho motivo se optó por explorar el camino propuesto por otros trabajos como ??, donde la técnica elegida para realizar el control del cuadricóptero es LQR.

1.1. Conceptos generales sobre LQR

Consideremos el sistema realimentado de la figura 1.1, con $X(t) \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ el vector de estados del sistema y $u(t) \in \mathcal{M}_{m \times 1}$ las entradas. r es el setpoint del cual, multiplicando por dos matrices adecuadas pueden obtenerse los valores deseados de entrada u^* y de las variables de estado X^* . El objetivo que nos planteamos es el de obtener una matriz de realimentación K para el sistema utilizando la técnica de LQR.

El problema de encontrar un regulador óptimo puede plantearse de la siguiente forma; se trata de encontrar la matriz de transferencia $C(s)$ que minimice la siguiente función de costo:

$$J_{LQR} = \int_0^\infty X'(t)QX(t) + u'(t)Ru(t)dt \quad (1.3)$$

Donde Q y R son matrices simétricas definidas positivas de dimensiones $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente. Cabe aclarar que esta es la formulación para el problema LQR continuo y de horizonte infinito.

El primer término de la integral corresponde a la energía de los estados controlados y el segundo a la energía de la señal de control. En función de como se escogen las matrices Q y R , se obtienen resultados distintos. Por ejemplo si la norma de Q es pequeña la forma más efectiva de reducir J_{LQR} es utilizar señales de control de norma pequeña a expensas de tener grandes variaciones en los estados controlados. Si bien existen diversos métodos para determinar las matrices Q y R , gran parte del

trabajo es iterativo y se realiza a ensayo y error

En la versión de realimentación de estados del problema LQR se asume que se disponen de medidas de todas las variables del vector de estados. En este caso, el controlador óptimo LQR es una matriz de ganancia K tal que:

$$u(t) - u^*(t) = -K(X(t) - X^*(t)) \quad (1.4)$$

Donde $K \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Para el caso bajo análisis se tiene que:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (1.5)$$

Donde P es la solución a la ecuación algebraica de Riccati.

La propiedad esencial del controlador LQR es que la respuesta del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable, es decir que la parte real de los valores propios de la matriz $A - BK$ es negativa, mientras se cumplan las siguientes condiciones:

- El sistema es controlable
- El sistema es observable

1.2. Consideraciones particulares respecto del sistema a controlar

Como se explico en capítulos anteriores, se tienen una nueva estimación del vector de estados cada $10ms$ esto nos permite realizar acciones de control con esta misma tasa de muestreo. De acuerdo a las constantes de tiempo que involucra el sistema físico se puede afirmar que es un tiempo de acción adecuado para trabajar. A modo de ejemplo consideremos la variable ω_{q_z} . De acuerdo a las velocidades angulares de los motores que se utilizarán ($109rads^{-1} < w_i < 387rads^{-1}$) y suponiendo que nos encontramos trabajando a la velocidad angular de equilibrio ($334,28rads^{-1}$) La aceleración angular máxima que puede darse es de $20,2rads^{-2}$. En el tiempo de muestreo implica un cambio en la velocidad angular de $11,5^\circ s^{-1}$ y un cambio en el ángulo de Yaw de $0,058^\circ$. Estas pequeñas variaciones nos indican que el tiempo de acción escogido es adecuado. Esto será confirmado posteriormente con las simulaciones realizadas.

Al tener un tiempo de respuesta rápido (en relación a las constantes del sistema) se podría resolver el problema utilizando la técnica de control LQR pensando en un sistema continuo, por más que nuestro sistema sea un sistema discreto. Sin embargo los métodos más sencillos para determinar la matriz de realimentación se encontraron utilizando algoritmos basados en LQR discreto. Esto fue determinante a la hora de escoger la técnica de control.

Por otra parte, el problema LQR tiene una versión de horizonte finito y una versión de horizonte infinito. A lo largo del tiempo iremos cambiando el setpoint del sistema cada ciertos intervalos de tiempo. Por dicho motivo, el horizonte de nuestro

sistema es en sentido estricto de horizonte finito. Sin embargo, las constantes de tiempo involucradas nos permiten asumir que se trata de un sistema de horizonte infinito, lo cual nos permite simplificar las ecuaciones con las que se trabaja.

1.3. Discretización del sistema

Como se explicó en el capítulo ?? se trabajará con tres tipos de trayectoria: hovering, vuelos en línea recta y círculos. En cada uno de estos casos tenemos un sistema lineal de la forma

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (1.6)$$

La forma que toma el sistema continuo al ser convertido a tiempo discreto es:

$$X_{k+1} = \Phi X_k + \Gamma u_k \quad (1.7)$$

Donde:

$$\Phi = e^{AT_s} \quad \Gamma = \int_0^{T_s} e^{As} ds B \quad (1.8)$$

Estas relaciones surgen de discretizar el sistema considerando muestreadores de orden cero. Por más detalles de este proceso puede consultarse ??.

El problema de encontrar un regulador óptimo también puede ser planteado en un sistema discreto si reescribimos la ecuación 1.3.

$$J_{dlqr} = \sum_0^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \quad (1.9)$$

En el trabajo realizado en ?? se propone un algoritmo iterativo para obtener la matriz de realimentación que minimiza J_{dlqr} . Debido a las pequeñas diferencias encontradas entre este algoritmo y la función *lqr* de *MatLab* se optó por reproducir exactamente dicho algoritmo.

1.4. Controlabilidad y observabilidad

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad son fundamentales para asegurar la estabilidad del sistema en lazo cerrado controlado con la técnica de LQR.

Sea el sistema lineal representado por la ecuación 1.10

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du \end{aligned} \quad (1.10)$$

Donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $C \in \mathcal{M}_{p \times n}$ y $D \in \mathcal{M}_{p \times m}$.

Consideremos la matrices $S \in \mathcal{M}_{n \times nm}$ definida como:

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (1.11)$$

El sistema es controlable si y solo si el rango de S es n.

Consideremos la matriz $V \in \mathcal{M}_{pn \times n}$ definida como:

$$V = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

El sistema es observable si y solo si el rango de V es n .

El sistema bajo estudio es originalmente no lineal, en el capítulo ?? se estudió en torno a que tipos de trayectorias se puede aproximar el problema de controlar el cuadricóptero por el problema de controlar un sistema lineal invariante en el tiempo. Si bien no todas las trayectorias son posibles el conjunto de trayectorias es infinito ya que por ejemplo para cada trayectoria en línea recta las velocidades que se pueden manejar si bien se encuentran en un rango acotado son continuas y por ende infinitas.

En resumen, es imposible evaluar las condiciones de controlabilidad y observabilidad para todos los casos. Sin embargo, se evaluar en distintas trayectorias y confiar en que para las trayectorias no testeadas el resultado sea el mismo. En las trayectorias en las cuales se decidió verificar estas dos propiedades los resultados fueron los deseados.

Podemos afirmar que el sistema linealizado es controlable y observable en algunas de las trayectorias definidas. Asumiremos que este comportamiento es replicable para las restantes trayectorias. En diversos trabajos, por ejemplo en ??, se utiliza como técnica de control una matriz de realimentación obtenida gracias al LQR. Los resultados obtenidos en dicho trabajo son correctos y no se reportan comportamientos inestables, por lo tanto parece razonable asumir que nuestro sistema se encuentra en las mismas condiciones.

1.5. Matriz de realimentación

Como se explicó anteriormente, la matriz de realimentación es obtenida numéricamente gracias al algoritmo presentado en ??, dicha matriz depende del sistema lineal con el cual se representa cada trayectoria. Por lo tanto para cada trayectoria tendremos que calcular una nueva matriz de realimentación. Lo fundamental es entonces determinar adecuadamente las matrices Q y R definidas en ?? de forma de obtener trayectorias adecuadas.