

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## MODELO FÍSICO

Resulta imprescindible para controlar el cuadricóptero comprender cabalmente su comportamiento. Con esta óptica, lo que se busca es obtener el modelo más sencillo que sea capaz de representar adecuadamente al sistema. El objetivo de este capítulo es el de realizar el desarrollo de dicho modelo. La forma de modelar el sistema elegida es un Modelo en Variables de Estado, de ahora en más MVE. Lo que se busca es obtener una representación del sistema de la forma  $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ , donde  $\vec{x}$  es el vector de estados del sistema,  $\vec{u}$  es el vector que representa las entradas del sistema y  $t$  es el tiempo.

Al tratarse de una plataforma comercial no se dispone de todos los parámetros fundamentales para el desarrollo de dicho modelo, a modo de ejemplo, no se conoce como es la respuesta de los motores ni el tensor de inercia del sistema. La obtención de dichos parámetros se detalla en el capítulo ?? y en el anexo ?? respectivamente. En el presente análisis nos limitaremos a obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del cuadricóptero.

### 1.1. Hipótesis de trabajo

No debe perderse de vista que el cuadricóptero con el que se trabaja fue diseñado para ser comandado a través de un control remoto. Por dicho motivo es razonable que sus características sean tales que le permitan a una persona volarlo desde el suelo. Parece perfectamente razonable que se haya diseñado el sistema para volar por tiempos limitados, distancias relativamente cortas y a bajas velocidades. Estas consideraciones permiten introducir diversas simplificaciones en el modelado.

#### 1.1.1. La Tierra como sistema de referencia inercial

La Tierra **no** es un sistema de referencia inercial ya que la misma se encuentra sometida a la traslación en torno al Sol y a una rotación en sobre su eje. Supongamos una partícula que se encuentra en movimiento relativo a la Tierra. Su aceleración respecto de un sistema verdaderamente inercial puede escribirse como:

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a_T} + \vec{a_C} \quad (1.1)$$

Donde:

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (1.2)$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (1.3)$$

En las ecuaciones anteriores  $\vec{a}'$  es la aceleración de la partícula en el sistema relativo,  $\vec{v}'$  es la velocidad relativa de la partícula,  $\vec{r}'$  la posición relativa,  $\vec{\omega}$  es la velocidad angular de la Tierra y  $\vec{a}_{O'}$  es la aceleración del centro de masa de la Tierra.  $a_T$  y  $a_C$  son la aceleración de transporte y de Coriolis respectivamente. El objetivo es ahora analizar si es posible considerar  $\vec{a} \approx \vec{a}'$ . Si esto último se cumple se puede aproximar a la Tierra como un sistema inercial.

El radio promedio de la órbita Heliocéntrica ( $R_H$ ) es de  $1,5 \times 10^8 Km$ , dicha órbita se recorre en 365 días lo que nos da una velocidad promedio de:

$$V_T = \frac{2\pi \times 1,5 \times 10^{11}m}{365 \times 24 \times 60 \times 60s} \approx 29,89 \times 10^3 ms^{-1} \quad (1.4)$$

Esta velocidad implica que la aceleración del centro de masa de la Tierra ( $\vec{a}_{O'}$ ) es de aproximadamente:

$$a_{O'} = \frac{V_T^2}{R_H} \approx 5,95 \times 10^{-3} ms^{-2} \quad (1.5)$$

Por otra parte sabemos que la Tierra rota sobre su eje una vez cada 24 horas con velocidad angular constante, tenemos así que:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60s} \approx 7,3 \times 10^{-5} rads^{-1} \quad (1.6)$$

Finalmente debemos considerar el radio promedio de la Tierra ( $R_T = 6,731 \times 10^6 m$ ), y notar que las alturas que alcanzará nuestro sistema son despreciables respecto del radio de la Tierra. Por lo tanto,

$$a_T \approx 4,18 \times 10^{-2} m^{s^{-2}} \quad (1.7)$$

Para que el término de la aceleración de Coriolis sea comparable con la aceleración de transporte las velocidades del cuadricóptero relativas a la Tierra deberían ser del orden de cientos de metros por segundo, condición que evidentemente no se cumple, por lo tanto este término puede ser despreciado.

La aceleración relativa al sistema de la Tierra difiere en aproximadamente  $4,18 \times 10^{-2} ms^{-2}$  de la aceleración medida en un sistema verdaderamente inercial. Por otra parte la resolución del acelerómetro utilizado es de  $4mg \approx 4,81 \times 10^{-2} ms^{-2}$ . Con el sensor elegido para trabajar es imposible distinguir entre ambas aceleraciones, por dicho motivo parece razonable despreciar el término de la aceleración que corresponde a la aceleración de transporte. Esto nos permite afirmar que la Tierra puede aproximarse como un sistema de referencia inercial y por lo tanto se cumple que:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \approx m\vec{a}' \quad (1.8)$$

### 1.1.2. Curvatura de la Tierra

El cuadricóptero no se desplazara una distancia superior a una centena de metros paralelo a la superficie de la Tierra. Consideremos un caso extremo en el cual el cuadricóptero se desplaza  $1km$  en una dirección. Esto corresponde a recorrer un arco de círculo de  $\theta = \frac{1km}{6,731 \times 10^3 km} \approx 1,5 \times 10^{-4} rad$ . Si consideramos la superficie terrestre como un plano, la distancia recorrida es:

$$d = R_T \sin(\theta) \approx 0,999999996km \quad (1.9)$$

Como era de esperar, la diferencia entre la distancia recorrida como arco de círculo y asumiendo una aproximación local de la Tierra por un plano es despreciable. Por lo tanto trabajaremos con un sistema de coordenadas cartesiano.

### 1.1.3. Atracción gravitacional

Todos los objetos se encuentran relacionados entre sí por medio de la Fuerza de atracción gravitacional. Sin embargo en las cercanías de la Tierra la atracción gravitacional con el resto de los objetos es completamente despreciable. Dicha fuerza vale:

$$F_G = G \frac{M_T m}{d^2} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \quad (1.10)$$

Donde  $G$  es la constante gravitacional y  $h$  la altura a la cual se encuentra una partícula. Como ya se analizo anteriormente las alturas a las cuales se desenvolverá el cuadricóptero son despreciables respecto del radio de la Tierra. Por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$F_G \approx \frac{M_T m}{R_T^2} = gm \quad (1.11)$$

donde  $g$  es la constante gravitacional de la Tierra, su valor es aproximadamente  $9,81m^{s^{-2}}$

### 1.1.4. Fuerzas aerodinámicas

Debido a las bajas velocidades que logrará el cuadricóptero se decidió despreciar las fuerzas de tipo aerodinámicas, salvo aquellas responsables de las fuerzas y momentos de las hélices. Estas fuerzas serán analizadas con mayor profundidad en la sección 1.5.

## 1.2. Sistema de referencia

A lo largo del presente desarrollo se trabajará constantemente con dos sistemas de referencia: uno inercial<sup>1</sup> solidario a la tierra ( $S_I$ ) y otro solidario al cuadricóptero ( $S_q$ ) como se muestra en la figura 1.1. El sistema  $S_I$  es un sistema local donde la dirección  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  corresponden a las direcciones Norte, Oeste y hacia arriba y el origen es la posición inicial del cuadricóptero. En la figura 1.1 se pueden apreciar ambos sistemas de referencia. El sistema  $S_q$  se puede obtener realizando tres rotaciones compuestas

---

<sup>1</sup>De acuerdo a la aproximación realizada

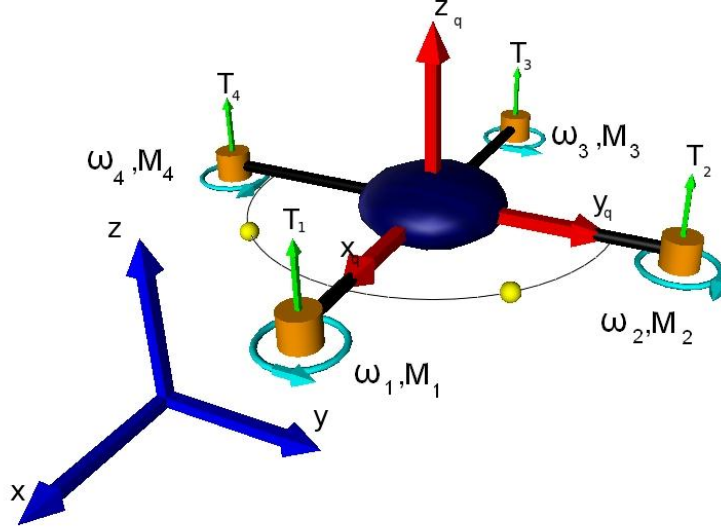


Figura 1.1: Modelo del cuadricóptero

del sistema  $S_I$ , dichas rotaciones se muestran en la figura 1.2. Los ángulos  $\theta$ ,  $\varphi$  y  $\psi$  son conocidos como ángulos de Euler.

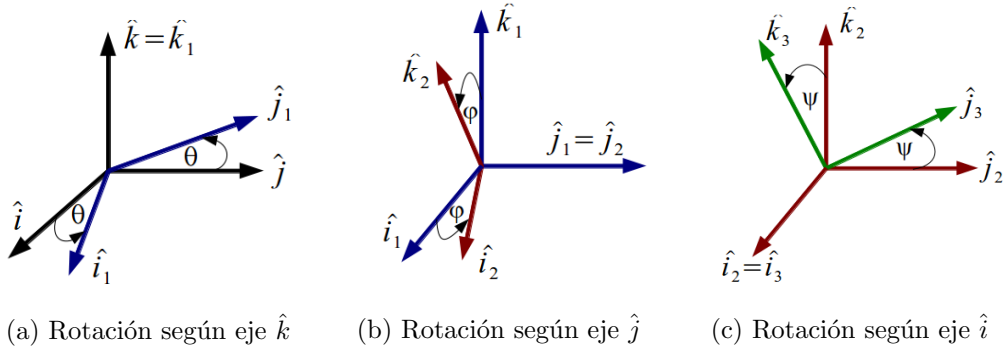


Figura 1.2: Rotaciones

La importancia del sistema  $S_q$  radica en las simplificaciones que introduce a la hora de escribir las ecuaciones, ya que por ejemplo en dicho sistema las direcciones del empuje de las hélices, de los torques que introducen y de las velocidades angulares de los motores del cuadricóptero son constantes. Asimismo, algunos de los sensores del sistema de navegación (acelerómetro, giróscopo y magnetómetro realizan medidas referenciadas al sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero, es decir en el sistema  $S_q$ . Considerar este sistema resulta en una simplificación del procesamiento de los datos obtenidos por la IMU.

Las tres transformaciones pueden representarse matricialmente de la siguiente forma:

$$H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} H_2^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

La transformación de las coordenadas del sistema inercial al sistema solidario al cuadricóptero se obtiene realizando el producto de las tres matrices de rotación definidas.

$$H_I^q = H_2^q.H_1^2.H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta & \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi \sin \theta - \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

A su vez, la transformación inversa puede obtenerse multiplicando las coordenadas del sistema  $S_q$  por la matriz  $H_q^I$ . Dicha matriz puede obtenerse de la siguiente forma:

$$H_q^I = (H_2^q.H_1^2.H_I^1)^{-1} = (H_I^1)^{-1}.(H_1^2)^{-1}.(H_2^q)^{-1} = H_I^1.H_2^1.H_q^2 \quad (1.14)$$

Los tres ángulos  $\psi$ ,  $\varphi$  y  $\theta$  serán llamados a lo largo del presente trabajo Roll, Pitch y Yaw respectivamente.

### 1.3. Cinemática

En primer lugar nos enfocaremos en comprender la relación que existe entre la velocidad angular del sistema y las derivadas de los ángulos de Euler. Sea  $\vec{\omega}$  la velocidad angular del cuadricóptero (y por ende la del sistema  $S_q$ ). La expresión de la velocidad angular en el sistema de referencia del cuadricóptero es la siguiente:

$$\vec{\omega} = w_{q_x} \vec{i}_q + w_{q_y} \vec{j}_q + w_{q_z} \vec{k}_q \quad (1.15)$$

Donde  $w_{q_x}$ ,  $w_{q_y}$  y  $w_{q_z}$  son las proyecciones ortogonales de la velocidad angular en el sistema  $S_q$ . Por como fue construido el sistema de referencia solidario al cuadricóptero y utilizando el teorema de adición de velocidades angulares, se deduce trivialmente que la velocidad angular del cuadricóptero puede escribirse como:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} + \dot{\varphi} \vec{j}_1 + \dot{\psi} \vec{i}_2 \quad (1.16)$$

El vector  $\vec{i}_2$  es invariante respecto de la tercer rotación, es decir que  $\vec{i}_2 = \vec{i}_q$ . Por otra parte, multiplicando los vectores  $\vec{k}$  y  $\vec{j}_1$  por las matrices  $H_1^2.H_2^q$  y  $H_2^q$  respectivamente se puede obtener la velocidad angular del cuadricóptero en el sistema de coordenadas referido a él. Operando se obtiene:

$$w_{q_x} \vec{i}_q + w_{q_y} \vec{j}_q + w_{q_z} \vec{k}_q = (\dot{\psi} + \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{i}_q + (\dot{\varphi} \cos \psi + \dot{\theta} \cos \varphi \sin \psi) \vec{j}_q + (\dot{\theta} \cos \varphi \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi) \vec{k}_q \quad (1.17)$$

De esta ecuación se obtienen tres relaciones entre las velocidades angulares respecto de cada eje principal del sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero y las derivadas de los ángulos de Euler. Podemos re escribir dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{q_x} + \omega_{q_z} \tan \varphi \cos \psi + \omega_{q_y} \tan \varphi \sin \psi \\ \omega_{q_y} \cos \psi - \omega_{q_z} \sin \psi \\ \omega_{q_z} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} + \omega_{q_y} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Realizando un razonamiento similar se deduce la relación que existe entre la velocidad del sistema expresada en el marco de referencia inercial con la velocidad

expresada en el sistema de referencia solidario al cuadricóptero. Sea  $\vec{r}$  la posición del centro de masa del cuadricóptero en el sistema  $S_I$ . La velocidad en dicho sistema es:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})' = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (1.19)$$

Al igual que con la velocidad angular se puede escribir la velocidad absoluta del cuadricóptero en el sistema  $S_q$ . Lo que se tiene es que  $\vec{v} = v_{q_x}\vec{i}_q + v_{q_y}\vec{j}_q + v_{q_z}\vec{k}_q$ . Donde  $v_{q_x}, v_{q_y}$  y  $v_{q_z}$  son las proyecciones ortogonales de la velocidad absoluta en el sistema solidario al cuadricóptero. Igualando ambas expresiones de la velocidad se obtiene:

$$\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_{q_x}\vec{i}_q + v_{q_y}\vec{j}_q + v_{q_z}\vec{k}_q \quad (1.20)$$

Para transformar las coordenadas de un sistema de referencia al otro alcanza con multiplicar por una de las matrices de cambio de base definidas previamente. En particular nos interesa tener una expresión para las derivadas de la posición en el sistema  $S_I$ , por esta razón se multiplica la expresión de la velocidad en el sistema  $S_q$  por la matriz  $H_q^I$  definida en la ecuación 1.14.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_x} \cos \varphi \cos \theta + v_{q_y} (\cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta) + v_{q_z} (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) \\ v_{q_x} \cos \varphi \sin \theta + v_{q_y} (\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi \sin \psi) + v_{q_z} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi) \\ -v_{q_x} \sin \varphi + v_{q_y} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z} \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Hasta aquí hemos obtenido simplemente relaciones cinemáticas; por un lado entre la velocidad angular del sistema  $S_q$  y las derivadas de los ángulos de Euler, por el otro se tiene el vínculo entre las derivadas de la posición expresadas en el sistema  $S_I$  y la velocidad absoluta expresada en el sistema  $S_q$  y los ángulos de Euler. Sin embargo aún no conocemos cuales son las Fuerzas y Momentos presentes en el sistema, ni que efectos producen sobre el mismo. Dejaremos de lado la cinemática del sistema y pasaremos a analizar la dinámica del mismo.

## 1.4. Dinámica del Sistema

Existen diversas formas de atacar el problema de la dinámica de un sistema, en particular se puede encarar el problema desde la mecánica analítica o realizando consideraciones energéticas. Se elije trabajar con las ecuaciones cardinales.

### 1.4.1. Primera Cardinal

La primer cardinal indica que en un sistema de referencia inercial la suma de las fuerzas externas a un objeto es igual a su masa total por su aceleración. Esto se puede escribir:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a} \quad (1.22)$$

Anteriormente fue expresado el interés de trabajar en el sistema de referencia solidario al cuadricóptero. El vector aceleración se puede obtener derivando la velocidad. Para realizar la derivada de un vector expresado en un sistema móvil puede utilizarse la siguiente formula:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (1.23)$$

En la ecuación anterior  $\frac{d}{dt}$  representa la derivada temporal, mientras que  $\frac{d'}{dt}$  representa la derivada temporal respecto del sistema móvil. Por otra parte  $\vec{\Omega}$  es la velocidad angular del sistema móvil respecto al inercial.

$$\vec{a} = (\dot{v}_{q_x} + v_{q_z}\omega_{q_y} - v_{q_y}\omega_{q_z})\vec{i}_q + (\dot{v}_{q_y} + v_{q_x}\omega_{q_z} - v_{q_z}\omega_{q_x})\vec{j}_q + (\dot{v}_{q_z} + v_{q_y}\omega_{q_x} - v_{q_x}\omega_{q_y})\vec{k}_q \quad (1.24)$$

Operando se puede reescribir la primer cardinal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{q_x} \\ \dot{v}_{q_y} \\ \dot{v}_{q_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_y}\omega_{q_z} - v_{q_z}\omega_{q_y} \\ v_{q_z}\omega_{q_x} - v_{q_x}\omega_{q_z} \\ v_{q_x}\omega_{q_y} - v_{q_y}\omega_{q_x} \end{pmatrix} + \frac{\vec{F}_{ext}}{M} \quad (1.25)$$

### 1.4.2. Segunda Cardinal

La segunda cardinal para un sistema de partículas toma la forma:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = M_Q^{ext} + M\vec{v}_G \times \vec{r}_Q \quad (1.26)$$

Donde  $L_Q$  y  $M_Q$  son el momento angular y el torque respecto del punto Q. En el presente trabajo los movimientos que realizará el cuadricóptero no implicarán velocidades angulares considerables respecto de otro eje distinto de  $\vec{k}_q$  (esto se desarrollará en el capítulo ??). Adicionalmente, la distancia entre el centro de masa del sistema y del centro de coordenadas del sistema  $S_q$  es pequeña (inferior a los 10cm). Estas consideraciones permiten afirmar que  $\vec{V}_G \approx \vec{r}_Q$ , podemos obtener entonces una expresión simplificada para la segunda cardinal:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = M_{O'}^{ext} \quad (1.27)$$

Por otra parte el momento angular del sistema se compone del momento angular del cuadricóptero y el momento angular de cada motor. Consideraremos el cuadricóptero sin los motores como un primer rígido y los motores como cuatro rígidos independientes.

El momento angular de un rígido respecto a un punto Q del mismo puede calcularse como:

$$\vec{L}_Q = M_i(\vec{G}_i - \vec{Q}) \times \vec{V}_Q + \Pi_Q \vec{\Omega}_i \quad (1.28)$$

donde  $M_i$ ,  $G_i$ ,  $\Pi_Q$  y  $\vec{\Omega}_i$  son la masa de cada rígido, su centro de masa, su tensor de inercia y su velocidad angular respectivamente.

La derivada de dicho momento tiene la forma:

$$\dot{\vec{L}}_Q = M_i(\vec{v}_G - \dot{\vec{Q}}) \times \vec{v}_Q + M(G - Q) \times \frac{d\vec{v}_Q}{dt} + \frac{d\Pi_Q \vec{\Omega}_i}{dt} \quad (1.29)$$

Nuevamente, asumiendo que la velocidad del centro de masa y la velocidad del origen del sistema de coordenadas  $S_q$  son similares, y agregando que las aceleraciones del centro de masa serán de valores pequeños podemos despreciar los términos  $M_i(\vec{v}_G - \dot{\vec{Q}}) \times \vec{v}_Q$  y  $M(G - Q) \times \frac{d\vec{v}_Q}{dt}$ .

Asumiendo que los cuatro motores son idénticos podemos escribir que:

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \frac{d\Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q}{dt} \quad (1.30)$$

Donde  $\Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}}$  el tensor de inercia del cuadricóptero sin considerar los motores.

Para el cálculo del momento angular del motor 1 respecto del punto  $O'$  supondremos, por simplicidad, que el motor se compone de elementos de masa discretos. En este caso, por definición de momento angular tenemos que:

$$\vec{L}_{O'_{m_1}} = \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_i \quad (1.31)$$

Donde  $\vec{r}'_i$  corresponde a la posición de cada elemento de masa ( $m_i$ ) respecto de  $O'$  y  $\vec{v}_i$  es la velocidad absoluta de cada elemento de masa. Del Teorema de Roverbal, se puede expresar dicha velocidad como:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_q \times \vec{r}'_i + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}''_i \quad (1.32)$$

En la ecuación anterior  $\vec{r}''_i$  es la posición de cada elemento de masa expresada desde el centro de masa de cada motor y  $\vec{v}_{O'}$  la velocidad del punto  $O'$ . Operando con las ecuaciones anteriores se concluye que:

$$\vec{L}_{O'_{m_1}} = M_m d_v \vec{i}_q \times \vec{v}_{O'} + \Pi_{O'_m}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_{m1}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_1 \quad (1.33)$$

Donde  $d_v$  es la distancia entre el origen del sistema solidario al cuadricóptero y el eje del motor 1, Al considerar los cuatro motores, el primer término del momento angular del motor 1 se anula con el primer término del momento angular del motor 3. Sucede lo mismo con los motores 2 y 4. Calculando en forma análoga los momentos angulares de los restantes motores se obtiene:

$$\vec{L}_{O'_{motores}} = 4\Pi_{O'_m}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_{Mm}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_4) \quad (1.34)$$

Derivando esta expresión y sumándola al resultado obtenido en 1.30 podemos escribir la derivada del momento angular del sistema como:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \frac{d'\vec{\omega}_q}{dt} + \Pi_{G_{Mm}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4) + \vec{\omega}_q \times (\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{G_{Mm}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_4)) \quad (1.35)$$

A partir del cálculo de esta derivada podemos reescribir la segunda cardinal:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{qx} \\ \dot{\omega}_{qy} \\ \dot{\omega}_{qz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{qy} \omega_{qz} (I_{yy} - I_{zz}) - \omega_{qy} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ \omega_{qx} \omega_{qz} (-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{qx} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ -I_{zzm} (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4) \end{pmatrix} + M_G^{ext} \quad (1.36)$$

## 1.5. Fuerzas y momentos involucrados

Para completar el análisis del sistema es fundamental conocer las expresiones de las fuerzas y los momentos involucrados. Por un lado se debe considerar la acción del peso en el sistema. Además debemos conocer con precisión las fuerzas y momentos que introducen las hélices del cuadricóptero ya que son estos los elementos sobre los cuales se pueden realizar las acciones de control. Recordamos que las bajas velocidades a las que el sistema se mueve nos permiten despreciar las fuerzas aerodinámicas, a excepción de aquellas que tienen como origen el giro de las hélices.



### 1.5.1. Peso

Como ya se aclaró anteriormente, debido a la pequeña variación de la altura, el peso del cuadricóptero será considerado constante y de valor

$$\vec{P} = -Mg\vec{k} \quad (1.37)$$

Insistimos en que nos interesa conocer las fuerzas en el sistema solidario al cuadricóptero. Para expresar el peso en dicho sistema se lo multiplica por la matriz  $H_I^q$ . Lo que se obtiene es:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \psi \\ -\cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} Mg \quad (1.38)$$

Debido a que el centro de masa se encuentra por debajo del origen de coordenadas de la base solidaria al cuadricóptero, el peso tiene un momento. El mismo vale:

$$\vec{M}_P = \vec{d} \times \vec{P} = - \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} dMg \quad (1.39)$$

Donde  $d$  es la distancia entre el centro de masa del sistema y el origen del sistema  $S_q$ .

### 1.5.2. Fuerzas y momentos de las hélices

La teoría de fluidos que explica el comportamiento de las hélices es compleja y ampliamente difundida por lo que no es de interés desarrollarla en profundidad en este trabajo. Diversa bibliografía puede ser consultada en donde se explican adecuadamente los fenómenos involucrados en las fuerzas aerodinámicas presentes en una hélice. Sin embargo, sí parece pertinente realizar un breve resumen de dichas fuerzas. Para el presente análisis consideraremos una hélice rotando en sentido antihorario, el razonamiento para una hélice rotando en sentido opuesto es análogo. En la figura 1.3 <sup>2</sup> se observan dos vistas de la misma hélice. En la figura 1.3a puede observarse una hoja de la hélice. En la figura 1.3b se representa una vista transversal de la hélice con las fuerzas aerodinámicas involucradas.

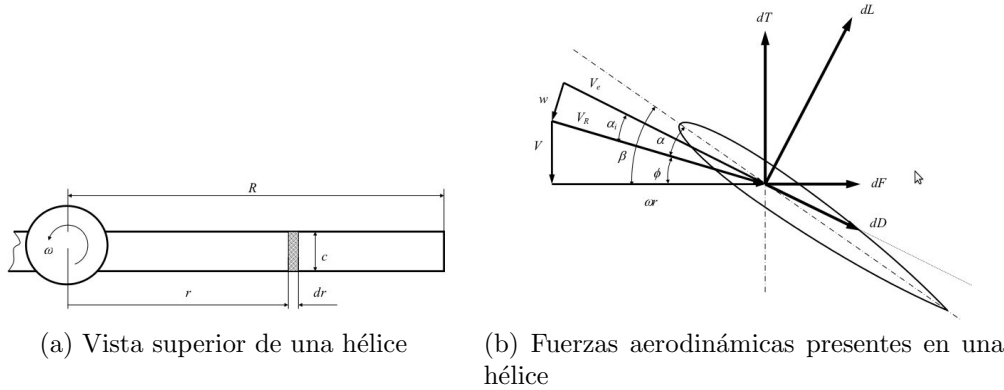


Figura 1.3: Vistas de una hélice y diagrama de fuerzas aerodinámicas presentes

<sup>2</sup>Imagen tomada de [?]

La *Blade Element Theory* (BET) intenta explicar las fuerzas presentes en la hélice considerando en primer lugar las fuerzas en un elemento de área infinitesimal de la hélice. Una vez halladas estas fuerzas se integra sobre el total de la superficie obteniendo así las fuerzas y momentos totales. Como se explica en [?], las fuerzas presentes sobre un elemento de área de la hélice son la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*, dichas fuerzas se encuentran representadas en la figura 1.3 como  $dL$  y  $dD$  respectivamente. La forma que tienen dichas fuerzas es:

$$dL = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_L c r^2 dr \quad (1.40)$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_D c r^2 dr \quad (1.41)$$

Donde  $\rho_A$  es la densidad del aire,  $\omega_p$  la velocidad angular de la hélice,  $r$  la distancia del elemento de hélice al eje de la hélice,  $c$  es la longitud promedio de la cuerda de la hélice <sup>3</sup>,  $C_L$  y  $C_D$  son coeficientes adimensionados.

La fuerza infinitesimal de empuje ( $dT$ ) puede escribirse en función de las fuerzas de *lift* y de *drag* de la siguiente forma:

$$dT = dL \cos \varphi_I - dD \sin \varphi \quad (1.42)$$

Realizando la aproximación que  $\varphi$  es un ángulo pequeño y que la fuerza de *lift* es al menos un orden mayor que la de *drag* se puede afirmar que:

$$dT \approx dL \quad (1.43)$$

El empuje por lo tanto puede calcularse como la integral de  $dT$  respecto de  $r$ . Considerando que la hélice consta de dos hojas, se obtiene que:

$$T = \frac{1}{3} \rho_A C_L c R_P^3 \omega_p^2 \quad (1.44)$$

donde  $R_P$  es el radio de la hélice. En todo momento tenemos dos fuerzas (una sobre cada hoja de la hélice) en dirección vertical y hacia arriba. Si nos referimos a la configuración de la figura 1.3b, el momento de las fuerzas  $dT$  es hacia la derecha para la hoja considerada, sin embargo para la otra hoja este momento será hacia la izquierda. Se puede concluir entonces que el torque neto que aportan estas fuerzas en el plano perpendicular al eje de rotación de la hélice es nulo.

Intentaremos ahora obtener la resultante de las fuerzas horizontales sobre la hélice y el torque de dichas fuerzas. Comenzaremos por analizar que sucede con las sumas de las fuerzas, para luego proceder a calcular el momento de las mismas. Consideremos ahora la fuerza  $dF$  como la que se muestra en la figura 1.3b. Como se observa en la figura dicha fuerza es hacia la derecha. Si consideramos la fuerza horizontal sobre la otra hoja de la hélice, se obtiene una fuerza hacia la izquierda. Por lo tanto la suma de las fuerzas horizontales es nula. Sin embargo los momentos de las fuerzas en una y otra hoja de la hélice no se anulan, el momento que producen ambas es en la dirección de  $-\vec{k}_q$ . Por lo tanto el momento total será la suma de los momentos infinitesimales en toda la superficie de una hoja de la hélice multiplicado por la cantidad de hojas, es decir 2.

---

<sup>3</sup>segmento imaginario que une el borde de ataque con el borde de fuga

En primer lugar escribimos la fuerza horizontal como una composición de la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*.

$$dF = dD \cos \varphi + dL \sin \varphi \approx dD + dL \left( \frac{V}{\omega_p r} \right) \quad (1.45)$$

En esta ecuación  $V$  y  $\omega_p r$  representan la velocidad del flujo de aire en las direcciones vertical y horizontal respectivamente. Operando se obtiene el momento total de la hélice en la dirección entrante:

$$Q = \frac{1}{4} \rho_{Ac} R_P^4 (C_D + K) \omega_p^2 \quad (1.46)$$

En resumen, la teoría BET nos permite afirmar que sobre cada hélice del cuadricóptero que rota en sentido antihorario se aplicará una fuerza en la dirección  $\vec{k}_q$  cuyo módulo se expresó en la ecuación 1.44 y un momento en la dirección  $-\vec{k}_q$  cuyo módulo es lo expresado en la ecuación 1.46. Para una hélice rotando en sentido horario se obtiene exactamente los mismos resultados excepto que el momento es en sentido opuesto.

Hasta aquí sabemos que sucede las fuerzas y momentos aplicados sobre una hélice. Nos concentraremos ahora en estudiar como influyen estas fuerzas y momentos en el cuadricóptero. Para lo que sigue continuaremos trabajando con las convenciones adoptadas en 1.1.

A partir de lo estudiado anteriormente se deduce trivialmente que el empuje de las hélices puede expresarse en el sistema  $S_q$  como:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \vec{T}_i = \sum_{i=1}^{i=4} T_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

Se determinó que las fuerzas de empuje no introducen un momento neto en el eje de las mismas. Sin embargo no debemos perder de vista que la segunda cardinal fue planteada en el centro de masa del sistema, por lo tanto respecto de dicho punto las fuerzas sí introducen un momento que puede calcularse como  $M_1 = L \vec{x}' \times T_1 \vec{k}_q$  para el motor 1.  $L$  es la distancia del centro de masa del cuadricóptero al eje del motor 1. La expresión del momento es análoga para los restantes motores.

Debemos considerar además el momento obtenido para cada hélice en la dirección  $\vec{k}_q$ . Cabe recordar que se dedujo que para hélices rotando en sentido anti-horario se tiene un momento negativo, mientras que para una hélice rotando en sentido horario el momento es positivo. Realizando estas consideraciones es posible afirmar que la suma total de los momentos es:

$$M_G^{ext} = \begin{pmatrix} L(T_2 - T_4) \\ L(T_3 - T_1) \\ -Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

En base al estudio realizado se podrían conocer dichas relaciones calculando los parámetros que dependen de la geometría de la hélice, sin embargo este estudio resulta tedioso y la mayor parte de los métodos existentes para determinar dichos parámetros con buena precisión son destructivos. Por lo tanto se optó por obtener

dichas respuestas en forma experimental. El proceso detallado puede consultarse en el capítulo ???. En dichos experimentos se obtuvo que:

$$T = 4,6016 \times 10^{-5} \omega^2 - 1,0380 \times 10^{-3} \omega \quad (1.49)$$

$$Q = 3,4734 \times 10^{-6} \omega^2 - 1,3205 \times 10^{-4} \omega \quad (1.50)$$

Estos resultados parecen adecuados respecto de lo desarrollado teóricamente ya que ambas respuestas son cuadráticas.

## 1.6. Modelo en variables de Estado

Luego de realizados los estudios sobre la cinemática y dinámica del sistema y luego de comprender cabalmente las fuerzas y momentos involucrados se procede a construir el modelo en variables de estado.

Se debe aclarar que la elección realizada del vector de estados se debe exclusivamente a la conveniencia práctica que se encuentra al trabajar con las variables expresadas en el sistema del cuadricóptero. Esta conveniencia se ve reflejada en dos aspectos, por un lado en las simplificaciones que introduce trabajar con estas variables en el marco de un desarrollo teórico de las ecuaciones que gobiernan al sistema, y por otra parte, al disponer de sensores montados sobre el cuadricóptero, los mismos medirán las velocidades angulares y las aceleraciones lineales en el sistema  $S_q$ . Bajo esta elección parece razonable escoger el vector de estados de la siguiente manera:

$$X = \{x, y, z, \theta, \varphi, \psi, v_{qz}, v_{qy}, v_{qx}, \omega_{qz}, \omega_{qy}, \omega_{qx}\} \quad (1.51)$$

donde “ $x$ ”, “ $y$ ” y “ $z$ ” representan la posición en el espacio referenciado al sistema inercial  $S_I$ , los ángulos “ $\theta$ ”, “ $\varphi$ ”, “ $\psi$ ” son los ángulos de Euler mostrados anteriormente, “ $v_{qx}$ ”, “ $v_{qy}$ ” y “ $v_{qz}$ ” las velocidades lineales en los 3 ejes referenciados a  $S_I$  y “ $\omega_{qx}$ ”, “ $\omega_{qy}$ ” y “ $\omega_{qz}$ ” las velocidades angulares en los 3 ejes referenciados al cuadricóptero.

Las ecuaciones desarrolladas hasta ahora son las que gobiernan el comportamiento mecánico del sistema y son las que serán utilizadas para el desarrollo del simulador. Dichas ecuaciones dependen tanto de la velocidad angular de las hélices como de sus derivadas. Para realizar el control resulta más sencillo poder trabajar sin dichas derivadas. La razón es que las velocidades angulares y sus derivadas no son entradas independientes. Por lo tanto no se pueden imponer valores a unas sin considerar el comportamiento de las otras. En este sentido se realiza última aproximación. El término de las derivadas de las velocidades angulares se encuentra presente exclusivamente en la ecuación 1.36. Dicho término se encuentra multiplicado por el momento de inercia de los motores. En el capítulo ?? se obtiene el orden de la variación de la velocidad angular de los motores. Adelantando el resultado de esta variación de la velocidad angular y el valor del término del tensor de inercia de los motores (ver anexo ??), se puede despreciar el término de las derivadas de las velocidades angulares respecto al término asociado a los torques en la ecuación 1.36.

Luego de realizada esta simplificación tenemos que la entrada está compuesta por el vector:

$$\boxed{u = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}} \quad (1.52)$$

Cabe aclarar que esta última simplificación se toma simplemente para el desarrollo del control, pero la misma no se realiza en el simulador (ver capítulo ??), de modo de poder verificar que efectivamente es despreciable.

El modelo en variables de estado resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{q_x} \cos \varphi \cos \theta + v_{q_y} (\cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta) + v_{q_z} (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) \\ \dot{y} &= v_{q_x} \cos \varphi \sin \theta + v_{q_y} (\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi \sin \psi) + v_{q_z} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi) \\ \dot{z} &= -v_{q_x} \sin \varphi + v_{q_y} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z} \cos \varphi \cos \psi \\ \dot{\psi} &= \omega_{q_x} + \omega_{q_z} \tan \varphi \cos \psi + \omega_{q_y} \tan \varphi \sin \psi \\ \dot{\varphi} &= \omega_{q_y} \cos \psi - \omega_{q_z} \sin \psi \\ \dot{\theta} &= \omega_{q_z} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} + \omega_{q_y} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \\ \dot{v}_{q_x} &= v_{q_y} \omega_{q_z} - v_{q_z} \omega_{q_y} + g \sin \varphi \\ \dot{v}_{q_y} &= v_{q_z} \omega_{q_x} - v_{q_x} \omega_{q_z} - g \cos \varphi \sin \psi \\ \dot{v}_{q_z} &= v_{q_x} \omega_{q_y} - v_{q_y} \omega_{q_x} - g \cos \varphi \cos \psi + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^4 T_i \\ \dot{\omega}_{q_x} &= \frac{\omega_{q_y} \omega_{q_z} (I_{yy} - I_{zz}) + \omega_{q_y} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - dMg \cos \varphi \sin \psi}{I_{xx}} + \frac{L(T_2 - T_4)}{I_{xx}} \\ \dot{\omega}_{q_y} &= \frac{\omega_{q_x} \omega_{q_z} (-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{q_x} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) - dMg \sin \varphi}{I_{yy}} + \frac{L(T_3 - T_1)}{I_{yy}} \\ \dot{\omega}_{q_z} &= \frac{-Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4}{I_{zz}} \end{aligned} \quad (1.53)$$