CAPÍTULO 1

MODELO FÍSICO

Resulta imprescindible para controlar el cuadricóptero comprender cabalmente su comportamiento. Con esta óptica, lo que se busca es obtener el modelo más sencillo que sea capaz de representar adecuadamente al sistema. El objetivo de esta sección es el de realizar el desarrollo de dicho modelo. La forma de modelar el sistema elegida es un Modelo de Variables de Estado, de ahora en más MVE.

Al tratarse de una plataforma comercial no se dispone de todos los parámetros fundamentales para el desarrollo de dicho modelo. Por ejemplo, no se conoce como es la respuesta de los motores (tanto velocidad como empuje), el tensor de inercia del sistema,etc.

Dado que el avance del proyecto no es tal como para haber obtenido dichos parámetros se realizará el desarrollo en función de los mismos.

Para el estudio en cuestión se considerará el cuadricóptero según las convenciones expresadas en la figura 1.1:

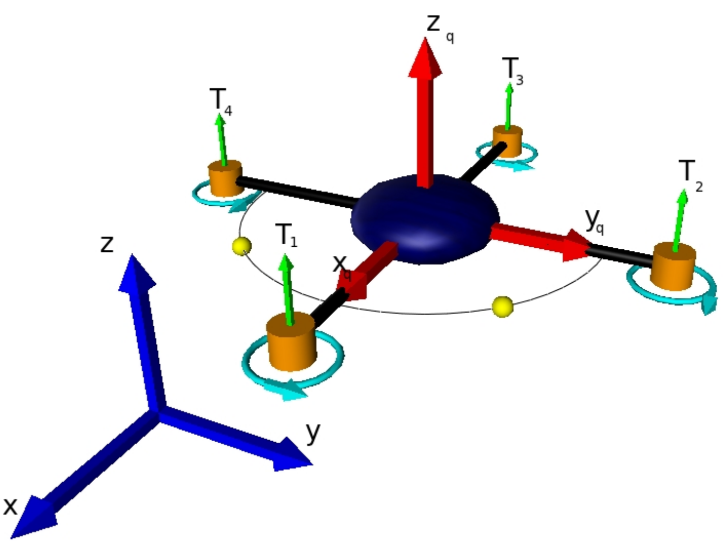


Figura 1.1: Modelo del cuadcóptero

Por un lado se definen las coordenadas ´´del mundo" (i_I, j_I, k_I), un sistema de referencia inercial fijo. Las magnitudes correspondientes a la base de este referencial se notarán con el subíndice I. Por otro lado se utilizará el sistema de referencia (i_q, j_q, k_q) solidario al cuadricóptero. En este caso las magnitudes medidas en ese referencial se notarán con el subíndice q. En la figura 1.1 se pueden apreciar ambos sistemas de referencia.

1.1. Constantes del sistema

En una primera aproximación podemos descomponer al cuadricóptero en una esfera maciza en el centro, cuatro varillas y cuatro motores considerados como cilindros.

1.1.1. Dimensiones

Bajo estas suposiciones las cantidades de interés en lo que refiere a las dimensiones de sistema son:

- Radio de la esfera central (R)
- Largo de las varillas (L)
- Radio de los motores(r)

1.1.2. Masa del sistema

La masa de los objetos que componen al sistema son:

	Masa por elemento	**Cantidad**	**Masa total**
Esfera Central	M_E	1	M_E
Varilla	M_V	4	$4M_V$
Motores	M_M	4	$4M_M$
Masa Total	M		

Cuadro 1.1: Masas de los objetos que componen al sistema

1.1.3. Tensor de inercia del sistema

El tensor de inercia del sistema puede calcularse como la suma de los tensores de inercia de los rígidos que lo componen. Se considera como fue expresado anteriormente el centro del cuadricóptero como una esfera maciza. El tensor de inercia de dicha esfera puede calcularse a partir de la definición misma de tensor de inercia, sin embargo por ser una forma geométrica de vasto uso en el campo de la mecánica su tensor de inercia se encuentra ya tabulado. Sucede lo mismo con las restantes formas geométricas que componen al sistema.

En el caso de la esfera se tiene que el tensor de inercia respecto de su centro de masa es:

$$\Pi_{G_E}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_E \begin{pmatrix} \frac{2R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2R^2}{5} \end{pmatrix}$$

En este caso el centro de masa del sistema corresponde al centro de masa de la esfera a partir de ciertas suposiciones que se realizan sobre la simetría del sistema. Por dicho motivo podemos afirmar que $\Pi_{G_E}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = \Pi_{O\prime_E}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}$, siendo $O\prime$ el centro de la esfera.

Por otra parte el tensor de inercia de una varilla, cuya longitud coincide con el versor $\vec{i_q}$, respecto a su centro de masa tiene la forma:

$$\Pi_{G_{Vx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_V \begin{pmatrix} \frac{L^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}$$

Sin embargo resulta mucho más interesante obtener el tensor de inercia expresado respecto del centro de masa del sistema. Para realizar dicho cambio se utiliza el Teorema de Steiner. Dicho teorema afirma que: $\Pi_Q = \Pi_G + J_Q^{M,G}$, donde los términos de $J_Q^{M,G}$ pueden calcularse como: $(J_Q^{M,G})_{\alpha\beta} = M(G-Q)^2\delta_{\alpha\beta} - M(G-Q)_\alpha M(G-Q)_\beta$. El término $\delta_{\alpha\beta}$ es conocido como Delta de Kronecker. Su valor es uno si $\alpha = \beta$ y cero si $\alpha distinto \beta$. En el caso en consideración dicha matriz resulta en:

$$J_{O\prime}{}^{M_{Vx},G} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{L}{2}+R)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{L}{2}+R)^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el momento de inercia total de dicha varilla es:

$$\Pi_{O\prime_{Vx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_V \begin{pmatrix} \frac{L^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12} + (\frac{L}{2}+R)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{12} + (\frac{L}{2}+R)^2 \end{pmatrix}$$

Análogamente, el tensor de inercia de una varilla cuya longitud se encuentra respecto de la dirección $\vec{j_q}$ respecto del centro de masa del sistema es:

$$\Pi_{O\prime_{Vy}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_V \begin{pmatrix} \frac{L^2}{12} + (\frac{L}{2}+R)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{12} + (\frac{L}{2}+R)^2 \end{pmatrix}$$

Sucede algo similar en lo que respecta a los motores. Tendremos un tensor de inercia para los motores que se encuentran sobre la dirección $\vec{i_q}$ y otro para los motores que se encuentran sobre la dirección $\vec{j_q}$. Aproximando cada motor por un cilindro obtenemos en el primer caso el tensor de inercia tiene el valor:

$$\Pi_{O\prime_{Mx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4} + (L+R+r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + (L+R+r)^2 \end{pmatrix}$$

En el otro caso se tiene que:

$$\Pi_{O\prime_{My}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{r^2}{4} + (L+R+r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + (L+R+r)^2 \end{pmatrix}$$

Llamaremos por conveniencia I_{zz_m} al termino $\frac{r^2}{2} + (L + R + r)^2$. El tensor de inercia del sistema completo puede calcularse como:

$$\Pi_{O\prime}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = \Pi_{O\prime_E}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} + 2\Pi_{O\prime_{Vx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} + 2\Pi_{O\prime_{Vy}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} + 2\Pi_{O\prime_{Mx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} + 2\Pi_{O\prime_{My}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}$$

.

Podemos escribir dicho tensor de inercia como:

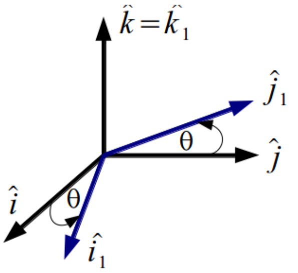
$$\Pi_{O\prime_{My}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

1.2. Desarrollo teórico

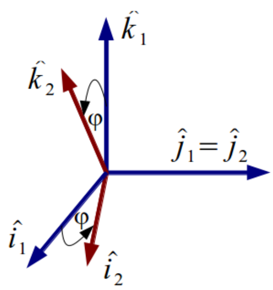
El desarrollo teórico de la dinámica del sistema consta de algunas consideraciones que si bien no son exactas se considera a priori que son una buena aproximación del sistema y que simplifican considerablemente el desarrollo del modelo en cuestión. En particular la geometría que fue supuesta permite que todos los tensores de inercia sean diagonales en el sistema relativo al cuadricóptero. Se realizaron algunas pruebas primarias que arrojan resultados alentadores respecto del modelo realizado, dichas pruebas no fueron lo suficientemente exhaustivas como para darlas por válidas y por ende no se incluyen en esta ocasión.

1.2.1. Sistema de Referencia

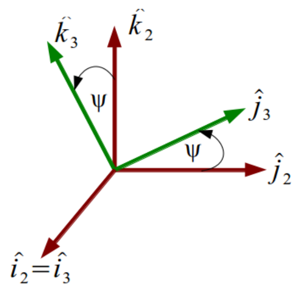
Como ya se mencionó, a lo largo del presente desarrollo se trabajará constantemente con dos sistemas de referencia: uno inercial[1] solidario a la tierra (S_I) y otro solidario al cuadcóptero (S_q) como se muestra en la figura 1.1. El sistema S_q se puede obtener realizando tres rotaciones compuestas del sistema S_I, dichas rotaciones se muestran en la figura 1.2.



(a) Rotación según eje $\hat{k}$



(b) Rotación según eje $\hat{j}$



(c) Rotación según eje $\hat{i}$

Figura 1.2: Rotaciones

La importancia del sistema S_q radica en las simplificaciones que introduce a la hora de escribir las ecuaciones, ya que por ejemplo en dicho sistema el empuje de las hélices, los torques que introducen y velocidades angulares de los motores del quadcopter tienen siempre la misma dirección.

[1]En esta sección se consideran sistemas inerciales en el sentido clásico

Las tres transformaciones pueden representarse matricialmente de la siguiente forma:

$$H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} H_2^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

La transformación de las coordenadas del sistema inercial al sistema solidario al cuadricóptero se obtiene realizando el producto de las tres matrices de rotación definidas.

$$H_I^q = H_2^q.H_1^2.H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi\sin\psi - \cos\psi\sin\theta & \cos\psi\cos\theta + \sin\phi\sin\psi\sin\theta & \cos\phi\sin\psi \\ \sin\psi\sin\theta + \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi\sin\theta - \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi \end{pmatrix}$$

A su vez, para pasar de las coordenadas del sistema (S_q) a las del sistema (S_I) se debe multiplicar por la matriz H_q^I que puede calcularse como:

$$H_q^I = (H_2^q.H_1^2.H_I^1)^{-1} = (H_I^1)^{-1}.(H_1^2)^{-1}.(H_2^q)^{-1} = H_1^I.H_2^1.H_q^2$$

1.2.2. Cinemática

Además de la relación entre las coordenadas de un sistema y del otro, es útil conocer la relación que existe entre la velocidad angular del sistema y las derivadas de los ángulos de euler. Por como fue construido el sistema de referencia solidario al cuadricóptero, se deduce trivialmente que la velocidad angular del mismo se puede escribir como:

$$\vec{\omega} = w_{q1}\vec{i_q} + w_{q2}\vec{j_q} + w_{q3}\vec{k_q} = \dot{\theta}\vec{k} + \dot{\phi}\vec{j_1} + \dot{\psi}\vec{i_2}$$

Al realizar la última rotación el vector $\vec{i_2}$ no se modifica. Por otra parte, multiplicando los vectores $\vec{k}$ y $\vec{j_1}$ por las matrices $H_1^2.H_2^q$ y H_2^q respectivamente se puede obtener la velocidad angular del cuadricóptero en el sistema de coordenadas referido a el. Lo que tenemos entonces es:

$$\vec{\omega} = w_{q1}\vec{i_q} + w_{q2}\vec{j_q} + w_{q3}\vec{k_q} = (\dot{\psi} + \dot{\theta}\sin\phi)\vec{i_q} + (\dot{\phi}\cos\psi + \dot{\theta}\cos\phi\sin\psi)\vec{j_q} + (\dot{\theta}\cos\phi\cos\psi - \dot{\phi}\sin\psi)\vec{k_q}$$

De esta ecuación se obtienen tres relaciones entre las velocidades angulares respecto de cada eje principal del sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero con las derivadas de los ángulos de euler. Podemos re escribir dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{q1} + \omega_{q3}\tan\phi\cos\psi + \omega_{q2}\tan\phi\sin\psi \\ \omega_{q2}\cos\psi - \omega_{q3}\sin\psi \\ \omega_{q3}\frac{\cos\psi}{\cos\phi} + \omega_{q2}\frac{\sin\psi}{\cos\phi} \end{pmatrix}$$

De la misma forma deduciremos la relación que existe entre la velocidad del sistema expresada en el marco de referencia inercial con la velocidad expresada en el sistema de referencia solidario al cuadricóptero. Lo que tenemos es que:

$$\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v1\vec{i_q} + v2\vec{j_q} + v3\vec{k_q}$$

Para pasar del un sistema de referencia al otro alcanza con multiplicar por la matriz de cambio de base definida previamente. Operando se obtiene la siguiente relación entre las magnitudes de interés.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q1}\cos\phi\cos\theta + v_{q2}(\cos\theta\sin\phi\sin\psi - \cos\phi\sin\theta) + v_{q3}(\sin\psi\sin\theta + \cos\psi\cos\theta\sin\phi) \\ v_{q1}\cos\phi\sin\theta + v_{q2}(\cos\psi\cos\theta + \sin\theta\sin\phi\sin\psi) + v_{q3}(\cos\psi\sin\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\psi) \\ -v_{q1}\sin\phi + v_{q2}\cos\phi\sin\psi + v_{q3}\cos\phi\cos\psi \end{pmatrix}$$

Detendremos en este punto el análisis cinemático para considerar la dinámica del sistema.

1.2.3. Dinámica del Sistema

Existen diversas formas de atacar el problema de la dinámica de un sistema, en particular se puede encarar el problema desde la mecánica analítica o realizando consideraciones energéticas, sin embargo en este caso se elije trabajar con las ecuaciones cardinales.

Primera Cardinal

La primer cardinal indica que en un sistema inercial la suma de las fuerzas externas a un objeto es igual a su masa total por su aceleración. Esto se puede escribir:

$$\sum \vec{F_{ext}} = M\vec{a}$$

Debido a que el sistema estará dotado de un acelerómetro que medirá la aceleración respecto de los ejes del sistema solidario al cuadricóptero, parece más interesante obtener la primera cardinal en función de dicha aceleración y no de la aceleración expresada en el sistema de referencia inercial. El vector aceleración se puede obtener derivando la velocidad. Para realizar la derivada de un vector expresado en un sistema móvil puede utilizarse la siguiente formula:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\prime\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

En la ecuación anterior $\frac{d}{dt}$ representa la derivada temporal, mientras que $\frac{d\prime}{dt}$ representa la derivada temporal respecto del sistema móvil. Por otra parte $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema móvil respecto al inercial. Operando se obtiene:

$$\vec{a} = (\dot{v_{q1}} + v_{q3}\omega_{q2} - v_{q2}\omega_{q3})\vec{i_q} + (\dot{v_{q2}} + v_{q1}\omega_{q3} - v_{q3}\omega_{q1})\vec{j_q} + (\dot{v_{q3}} + v_{q2}\omega_{q1} - v_{q1}\omega_{q2})\vec{k_q}$$

Las fuerzas que actúan sobre el sistema son los empujes de cada turbina y el peso. Los empujes (T_i con $i = 1.,4$) son en el sentido de $\vec{k_q}$ mientras que el peso es en el sentido de $\vec{k}$. Para obtener el peso en el sistema S_q alcanza con realizar el cambio de base del sistema S_I al sistema solidario al cuadricóptero. Esto se logra multiplicando el vector correspondiente a la fuerza del peso $(0, 0, -Mg)^T$ por la matriz de cambio de base H_I^q. El empuje de los motores puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \vec{T_i} = \sum_{i=1}^{i=4} T_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Operando se puede reescribir la primer cardinal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{v_{q1}} \\ \dot{v_{q2}} \\ \dot{v_{q3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q2}\omega_{q3} - v_{q3}\omega_{q2} \\ v_{q3}\omega_{q1} - v_{q1}\omega_{q3} \\ v_{q1}\omega_{q2} - v_{q2}\omega_{q1} \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi\sin\psi \\ -\cos\phi\ cos\psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{4} T_i$$

Segunda Cardinal

La segunda cardinal indica que la derivada del momento angular de un sistema respecto a un punto Q es igual al torque externo que se ejerce sobre el mismo más un término que depende de la velocidad de dicho punto. La ecuación queda:

$$\frac{d\vec{L_Q}}{dt} = M_Q^{ext} + M\vec{v_G} \times \dot{\vec{r_Q}}$$

Asumiendo simetría del sistema, se puede considerar que el centro de masa del sistema se encuentra en el centro de la esfera principal del mismo. Esto no es completamente cierto ya que la batería del UAV queda por fuera de la esfera y los apoyos también, sin embargo se puede asume en una primera aproximación del modelo que si lo es. De todas formas si planteamos la segunda cardinal en el centro de masa obtenemos:

$$\frac{d\vec{L_G}}{dt} = M_G^{ext}$$

Si nombramos a las turbinas como se observa en el esquema 1.1 se obtiene rápidamente que:

$$M_G^{ext} = L \begin{pmatrix} T2 - T4 \\ T3 - T1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte el momento angular del sistema se compone del momento angular del cuadricóptero y de cada motor. Consideraremos el cuadricóptero sin los motores como un primer rígido y los motores como cuatro rígidos independientes.

EL momento angular de un rígido respecto a un punto Q puede calcularse como:

$$\vec{L_Q} = M_i(\vec{G_i - Q}) \times \vec{V_Q} + \Pi_Q\vec{\Omega_i}$$

Donde M_i, G_i, Π_Q y $\vec{\Omega_i}$ son la masa de cada rígido, su centro de masa, su tensor de inercia y su velocidad angular respectivamente.

Como se propuso anteriormente, se elije calcular el momento angular en el centro de masa del cuadricóptero. Asumiendo que los cuatro motores son idénticos podemos escribir el momento angular del cuadricóptero sin los motores como:

$$\vec{L_{O\prime}} = (M - 4M_m)(\vec{O\prime - O\prime}) \times \vec{V_{O\prime}} + \Pi_{O\prime_q}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}\vec{w_q} = \Pi_{O\prime_q}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}\vec{\omega_q}$$

Del mismo modo el momento angular del primer motor queda:

$$\vec{L_{O\prime_q}} = M_m L\vec{x\prime} \times \vec{V_{O\prime}} + \Pi_{O\prime_{Mx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}\vec{\Omega_i}$$

Por la configuración del sistema se observa que al sumar el primer término de cada momento angular de los motores el resultado es cero. Por otra parte la velocidad angular de cada motor es $\vec{\Omega_i} = \vec{\omega_q} + \omega_i \vec{k\prime}$, donde ω_i es la velocidad con la que gira cada motor respecto de su eje principal. Nuevamente asumiendo que todos los motores son idénticos se tiene:

$$\vec{L_{O\prime}} = \Pi_{O\prime_q}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}\vec{\omega_q} + \Pi_{O\prime_{Mx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}(2\vec{\omega_q} + \omega_1\vec{k\prime} + \omega_3\vec{k\prime}) + \Pi_{O\prime_{My}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}(2\vec{\omega_q} - \omega_2\vec{k\prime} - \omega_4\vec{k\prime}) =$$

$$= \Pi_{O\prime}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}\vec{\omega_q} + \Pi_{O\prime_{Mx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}(\omega_1 + \omega_3)\vec{k\prime} - \Pi_{O\prime_{My}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}(\omega_2 + \omega_4)\vec{k\prime}$$

Uno de los términos de la segunda cardinal es la derivada del momento angular. Tanto los tensores de inercia como las velocidades angulares se encuentran expresadas en el sistema relativo. Para realizar dicha derivada se puede utilizar la fórmula de la derivada de un vector:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\prime\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Lo que se obtiene de dicha derivada es:

$$\frac{d\vec{L_Q}}{dt} = \Pi_{O\prime}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}\dot{\vec{\omega_q}} + \Pi_{O\prime_{Mx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}(\dot{\omega_1} + \dot{\omega_3})\vec{k\prime} - \Pi_{O\prime_{My}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}(\dot{\omega_2} + \dot{\omega_2})\vec{k\prime} +$$

$$+ \vec{\omega_q} \times (\Pi_{O\prime}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}\vec{\omega_q} + \Pi_{O\prime_{Mx}}^{\{\vec{i_q},\vec{j_q},\vec{k_q}\}}(\omega_1 + \omega_3)\vec{k\prime} - \Pi_{O\prime_{My}}(\omega_2 + \omega_4)\vec{k\prime})$$

A partir del cálculo de esta derivada y de los momentos externos hallados anteriormente, podemos escribir la segunda cardinal. Teniendo en cuenta que los terminos I_{zz_mx} y I_{zz_my} son identcos y operando con dicha ecuación se la puede llevar a la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega_{q1}} \\ \dot{\omega_{q2}} \\ \dot{\omega_{q3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_{q2}\omega_{q3}(I_{yy} - I_{zz}) + L(T_2 - T_4) + \omega_{q2} I_{zz_m}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{xx}} \\ \frac{\omega_{q1}\omega_{q3}(-I_{xx} + I_{zz}) + L(T_3 - T_1) + \omega_{q1} I_{zz_m}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{yy}} \\ \frac{\omega_{q1}\omega_{q2}(I_{xx} - I_{yy}) - I_{zz_m}(\dot{w_1} - \dot{w_2} + \dot{w_3} - \dot{w_4})}{I_{zz}} \end{pmatrix}$$