CAPÍTULO 1

LINELIZACIÓN Y PUNTOS DE OPERACIÓN

Independientemente del sistema bajo estudio, a la hora de elegir la técnica de control a utilizar se plantean diversas posibilidades. Parece razonable intentar resolverel problema planteado utilizando las técnicas más sencillas que se disponen, al menos en una primera aproximación. En caso de que dicha solución no fuese satisfactoria se puede optar por una técnia con un mayor grado de complejidad.

Las técnicas de control más sencillas y con las que se tiene mayor experiencia se basan en el estudio de sistemas lineales invariantes en el tiempo (SLIT). Sin embargo el MVE obtenido en el captulo **??** es no lineal. Se propone entonces resolver el problema del control del cuadricóptero aproximando el sistema por un sistema lineal invariante en el tiempo. Es claro que el sistema no puede ser linealizado en cualquier trayectoria o punto de operación. En este capítulo nos concentraremos en determinar bajo que condiciones es posible aproximar el sistema por un modelo lineal.

1.1. Concepto general

Consideremos un sistema que se rige por la siguiente evolución de su vector de estados.

$$x\dot{(t)} = f(X(t), u(t)) \tag{1.1}$$

Donde $x(t)$ es el vector de estados del sistema y $u(t)$ el vector de las entradas. Supongamos en una primera instancia que tanto $x(t)$ y $u(t)$ son de dimensión uno. Consideremos además el punto de operación definido por $x^*(t)$ y $u^*(t)$. Si realizamos un desarrollo de Taylor de órden uno en torno al punto de operación se tiene que:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f(x^*(t), u^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{u=u^*}^{x=x^*}(x(t) - x^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{u=u^*}^{x=x^*}(u(t) - u^*) \tag{1.2}$$

Si definimos $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$ y $\tilde{u}(t) - u^*(t)$ tenemos que:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{u=u^*}^{x=x^*}\tilde{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{u=u^*}^{x=x^*}\tilde{u}(t) \tag{1.3}$$

Este mismo concepto puede generalizarse en caso de que tanto el vector de estados como las entradas sean vectores de dimensión mayor a uno, n y m respectivamente. En este caso lo que se tiene es que:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A(t)\tilde{X}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \tag{1.4}$$

Donde $A(t)$ es una matriz de $n \times n$ y $B(t)$ es de $n \times m$, tales que $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{u=u^*}^{x=x^*}$ y $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}|_{u=u^*}^{x=x^*}$

En el caso en que todos los coeficientes de las matrices A y B son constantes podemos afirmar que estamos en presencia de un sistema lineal invariante en el tiempo.

1.2. Puntos de operación

Lo que buscamos ahora es encontrar las trayectorias que permiten que la linealización de nuestro sistema en torno a estas resulte en un sistema invariante en el tiempo.

Para lograr este cometido, se debe cumplir que todos los elementos de las matrices **??** y **??** sean constantes. Se desprende del análisis de dichas matrices que los puntos de operación que cumplen esta condición quedan restrictos a un subconjunto tal que:

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \dot{\theta} = \dot{v}_{qx} = \dot{v}_{qy} = \dot{v}_{qz} = \dot{\omega}_{qx} = \dot{\omega}_{qy} = \dot{\omega}_{qz} = \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_4 = 0 \tag{1.5}$$

Veremos luego que, realizando un cambio de variable como se explica en **??**, se puede ampliar el conjunto de trayectorias posibles, pudiendo agregar aquellas para las cuales $\dot{\theta} \neq 0$. Estas consideraciones nos llevan a concluir que el conjunto de trayectorias permitidas[1] es aquel en el cual tanto la velocidad del centro de masa, como la velocidad angular son constantes en el tiempo. Las trayectorías que cumplen con estas condiciones son tres:

- Hovering
- Vuelo en linea recta a velocidad constante
- Vuelo en círculo a velocidad constante

En los tres casos se tienen que cumplir las restricciones de 1.6.

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{qx} \\ \dot{v}_{qy} \\ \dot{v}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{qx} \\ \dot{\omega}_{qy} \\ \dot{\omega}_{qz} \end{pmatrix} = 0 \tag{1.6}$$

Cada una de las trayectorias posibles tiene además sus particularidades, a continuación nos encargaremos justamente de determinar las restricciones específicas de cada trayectoria posible.

[1]por las restricciones que hemos impuesto de trabajar con un sistema lineal invariante en el tiempo

Hovering

En el caso del reposo mecánico no solo debe cumplirse las condiciones establecidas en 1.6 si no que además las velocidades del centro de masa y las velocidades angulares deben ser iguales a cero.

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \tag{1.7}$$

El sistema que tenemos es independiente de la posición, lo cual es razonable ya que el reposo puede lograrse en cualquier punto del espacio. Dado que la velocidad y velocidad angular del sistema fue definida como cero tenemos por despejar 7 variables: los ángulos de Euler, y las velocidades angulares de los motores.

Al imponer las condiciones de 1.7 las ecuaciones **??** y **??** del MVE se cumplen trivialmente. Por lo tanto tenemos solamente las seis ecuaciones correspondientes a las derivadas de las velocidades y de las velocidades angulares. Estas últimas no dependen de θ, por lo tanto podemos afirmar que el reposo también se da para cualquier ángulo de Yaw. Lo cual también parece razonable ya que el sistema presenta simetría respecto del eje $\vec{k_q}$. Del análisis de las ecuaciones 1.7 se obtiene rápidamente que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \tag{1.8}$$

Se deduce además que:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 334{,}28 rad/s \tag{1.9}$$

Vuelo en linea recta a velocidad constante

Para lograr el vuelo en linea recta a velocidad constante se tienen que cumplir las condiciones de 1.6 al igual que en el caso anterior. La particularidad del vuelo en linea recta es que la velocidad del centro de masa es una constante distinta de cero. Queda claro que lo que tenemos es que:

$$\begin{pmatrix} v_{qx} \\ v_{qy} \\ v_{qz} \end{pmatrix} = cte \quad \begin{pmatrix} \omega_{qx} \\ \omega_{qy} \\ \omega_{qz} \end{pmatrix} = 0 \tag{1.10}$$

Al imponer que $\vec{\omega} = 0$ la ecuación **??** se verifica trivialmente y las ecuaciones **??** y **??** quedan idénticas al caso del sistema en reposo. Por lo tanto, tendremos también para el movimiento en linea recta que:

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 334{,}28 rad/s \tag{1.11}$$

Hasta aquí no hemos considerado la ecuación que relaciona las velocidades lineales en el sistema inercial con las velocidades lineales expresadas en el sistema del cuadricóptero. Al considerando el resultado obtenido sobre φ y ψ dichas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{q_x} \cos\theta - v_{q_y} \sin\theta \\ \dot{y} &= v_{q_y} \sin\theta + v_{q_y} \cos\theta \\ \dot{z} &= v_{q_z} \end{aligned} \tag{1.12}$$

El vuelo en linea recta nos ofrece la posibilidad de fijar los restantes 4 parámetros de la trayectoria. Estos parámetros serán determinados por el generador de trayectorias con el objetivo de realizar alguna maniobra en particular.

1.2.1. Vuelo en círculos

Dado que queremos un sistema invariante en el tiempo para poder trabajar con el no nos es posible, con las ecuaciones desarrolladas hasta este instante realizar movimientos con velocidades angulares distintas de cero. Si se viola esta condición se tiene que al menos alguno de $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ o $\dot{\theta}$ es distinto de cero. Por lo tanto tenemos al menos algún ángulo de Euler variante en el tiempo. Para poder obtener un movimiento circular se debe realizar el cambio de variable en el MVE en lo que respecta a las ecuaciones de la derivada de la posición propuesto en **??**.
El cambio de variables en cuestión consiste en expresar la posición (exclusivamente para los movimientos circulares) en la base del cuadricóptero. Supongamos que el cuadricóptero se encuentra realizando un movimiento tal, que su proyección sobre el plano horizontal ($Z = 0$) es circular. Podemos describir la posición en todo momento tomando como origen el centro de dicho círculo. Como se observa en la figura **??** la posición en dicho plano se puede expresar como $R\vec{i_1}$. Donde R, es el radio del círculo e $\vec{i_1}$ es el primer vector de la base que se obtiene al realizar la primera rotación de Euler. A continuación expresaremos la posición en la base solidaria al cuadricóptero. Para lograr dicho objetivo se debe multiplicar $R\vec{i_1}$ por la matriz cambio de base $H_2^q H_1^2$. Estas matrices son las definidas en **??**. La posición ($\vec{r}_q$) expresada en dicha base es entonces:

$$\vec{r}_q = H_2^q H_1^2 R\vec{i_1} = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

La ventaja que se obtiene con esta forma de expresar la posición es que la misma es independiente de uno de los tres ánglos de Euler: θ. Este cambio es una gran ventaja ya que bajo este modelo de variables de estado se puede lograr la invariancia temporal a pesar de que este ángulo no sea constante.

Nos interesa ahora derivar la posición para terminar de completar el modelo del sistema. Dado que la posición se encuentra expresada en el sistema del cuadricóptero tendremos que:

$$\frac{d\vec{r}_q}{dt} = \frac{\not{d}\vec{r}_q}{dt} + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_q = \vec{v}_q + \vec{\omega}_q \times \vec{r}_q \tag{1.14}$$

Por lo tanto tendremos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_q \\ \dot{y}_q \\ \dot{z}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_x} + \omega_{q_y} z_q - \omega_{q_z} y_q \\ v_{q_y} + \omega_{q_z} x_q - \omega_{q_x} z_q \\ v_{q_z} + \omega_{q_x} y_q - \omega_{q_y} x_q \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Este modelo nos permitirá realizar el control basándonos en técnicas de control lineal para una trayectoria circular en el plano $z = 0$.

Es fundamental aclarar que las ecuaciones derivadas hasta aquí serán utilizadas exclusivamente para la linealización del sistema y no para determinar los valores de los parámetros a controlar. Para esto último continuaremos utilizando el modelo de **??**. El movimiento circular queda determinado exclusivamente por dos parámetros la velocidad (V_I) y la velocidad angular ($\dot{\theta}$), estos serán considerados conocidos ya que es trabajo del generador de rutas o del usuario determinar que movimiento se desea realizar. Se desea determinar 12 parámetros, ocho de las doce variables de estado (No nos interesa fijar ni ángulo de Yaw ni la posición) y las cuatro velocidades angulares de los motores. Se deben tener en cuenta evidentemente las restricciones establecidas en 1.6 sobre las derivadas de las velocidades del centro de masa y de las velocidades angulares. En lo que respecta a las derivadas de los ángulos de Euler se debe cumplir que $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$ además $\dot{\theta}$ debe ser igual al valor impuesto.

Dado que la velocidad debe ser de módulo constante, podemos considerar por ejemplo las tres primeras ecuaciones del MVE asumiendo $\theta = 0$. Dado que estamos considerando movimientos circulares con la proyección sobre el plano horizontal del vector $\vec{j}_q$ tangente al círculo, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} v_{q_x} \cos\varphi + v_{q_y} \sin\varphi \sin\psi + v_{q_z} \sin\varphi \cos\psi \\ v_{q_y} \cos\psi - v_{q_z} \sin\psi \\ -v_{q_x} \sin\varphi + v_{q_y} \cos\varphi \sin\psi + v_{q_z} \cos\varphi \cos\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_{I_{hor}} \\ V_{I_{vert}} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Tenemos entonces un sistema donde se desean determinar doce incógnitas y se dispone de doce ecuaciones. Dicho sistema no será resuelto en forma analítica, por el contrario se resolverá en forma numérica a la hora de planificar la trayectoria.

Se ha dado un paso fundamental en camino de lograr controlar el cuadricóptero, se han definido tres tipos de trayectorias las cuales es posible tratar desde el "mundo" del control lineal. Las trayectorías definidas ofrecen una amplia gama de posibilidades, ya que concatenando las mismas se pueden obtener prácticamente cualquier movimiento, a excepción de maniobras que involucren variaciones en más de un ángulo de Euler a la vez. El subconjunto de trayectorias con el que se puede trabajar es considerado ampliamente satisfactorio y por ende se da por concluido el análisis sobre los puntos de operaciones y la linealización del sistema.