
CAPÍTULO 1

ELECCIÓN DE HARDWARE

La elección del Hardware significa una parte muy importante del Proyecto, ya que las decisiones tomadas condicionan el resto del mismo. Una mala elección de alguno de los componentes puede resultar en complicaciones no previstas a la hora de la ejecución, causando contratiempos inesperados y trabajo excesivo. Es necesario, entonces, el estudio detallado de cada uno de los componentes a utilizar, comparando características, rendimientos y utilidades.

Elegir adecuadamente el Hardware necesario agiliza las etapas siguientes de todo el Proyecto. Resulta fundamental la toma de buenas decisiones, las cuales deben estar basadas en un previo estudio de cada etapa del proyecto, sus requerimientos, un estudio comparativo de las posibles soluciones y el conocimiento cabal de los componentes a utilizar.

1.1. Elección de plataforma física: Cuadricópteros

A la hora de la planificación del Proyecto se plantean dos opciones que se diferencian básicamente en el punto de partida. Ambas tienen como objetivo principal diseñar e integrar un sistema de control que permita al cuadricóptero mantener un vuelo autónomo, pero una de ellas consta además del diseño y el armado del mismo. Esta última incluye desafíos de ingeniería mecánica, conocimientos de resistencia, flexibilidad y peso de materiales, así como también diversas complicaciones a la hora de fabricar y armar las partes.

Teniendo en cuenta que se trata de un proyecto con tiempo acotado y su objetivo se centra en el control del vehículo, la necesidad de partir de hardware ya construido resulta imperiosa. Por ello se realiza un estudio sobre las opciones que el mercado ofrece en esta materia. Desafortunadamente, las opciones no son muy numerosas, disponiendo de cuadricópteros comerciales controlados a control remoto. Todos ellos incluyen un pequeño sistema de control integrado del cuál no es posible obtener información, ya que se trata de software privativo. Las opciones que el mercado ofrece son:

- Gauí 330X

- XAircraft X650
- Turbo Ace X720

Se procede a la comparación de los equipos mencionados y se analizan algunos aspectos fundamentales y críticos, como puede ser por ejemplo el peso del dispositivo y la carga útil que puede soportar.

Motor

Al estudiar las posibilidades nos encontramos con que en todos los casos los motores se controlan con modulación por ancho de pulsos, de ahora en más **PWM** por sus siglas en inglés, técnica en la cual se modifica el ciclo de trabajo de una señal periódica para controlar la cantidad de energía que se entrega a una carga.

En la tabla 1.1 se muestran las características de los motores de los 3 cuadricópteros considerados.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Motor	Hélices de 8 pulgadas, 4 motores brushless con 4 ESCs de 10A	Hélices de 12 pulgadas, 4 motores brushless con 4 ESCs de 10A. Las hélices impulsadas por el motor tienen una eficiencia de 9g/W bajo carga nominal.	Hélices de 12 pulgadas, 4 motores brushless con 4 ESCs de 10A. Las hélices impulsadas por el motor tienen una eficiencia de 12g/W bajo carga nominal.

Cuadro 1.1: Comparación motores

Los motores *Brushless* son motores eléctricos alimentados con corriente continua. Tienen un sistema de conmutación eléctrico y presentan relaciones lineales entre *Corriente* y *Torque* y entre *Frecuencia* y *velocidad*. Son comúnmente utilizados en vehículos radio-controlados por su gran eficiencia, potencia, durabilidad y su bajo peso en comparación con los tradicionales motores *Brushed*. Sin embargo, los motores de CC *Brushless* son mucho más complicados de controlar, ya que la fase varía con la rotación del motor. Para controlarlos debe utilizarse un dispositivo llamado *Controlador eléctrico de velocidad*, o **ESCs**. Comúnmente los ESCs se clasifican según su corriente máxima, por ejemplo 10 amperes o 10A.

Como se puede ver en la tabla 1.1, todos los dispositivos utilizan motores similares y la única diferencia radica en que la eficiencia de los motores del *Turbo Ace X720* es mayor.

Tiempo de vuelo

El tiempo de vuelo puede resultar crítico según la aplicación considerada. En la tabla 1.2 se muestran los datos que se obtuvieron para los 3 cuadricópteros considerados.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Tiempo de vuelo	Con batería de 2200mAh vuela entre 7 y 20 minutos	Vuela 12 minutos con batería de 2200mAh y carga menor a 1,5kg	Con batería de 2200mAh vuela 15 minutos a carga nominal y puede llegar a la media hora de vuelo con una batería de 10,000mAh

Cuadro 1.2: Comparación Tiempo de vuelo

Como se puede apreciar los tiempos de vuelo son similares en los 3 dispositivos, por lo que no será un factor determinante a la hora de tomar la decisión.

Un factor determinante en el tiempo de vuelo es la batería a utilizar. Deben considerarse 2 aspectos importantes: la capacidad de la batería y su peso. Si bien una batería con mayor capacidad permitirá mayor autonomía de vuelo, es claro que su peso también aumentará, lo cual a su vez, causará un mayor consumo. Los 3 cuadricópteros en consideración incluyen una batería de 3 celdas de Litio de 2200 mAh.

Peso

La carga útil que el dispositivo pueda soportar juega un papel fundamental. Vale recordar que, además de toda la instrumentación que incluye el cuadricóptero, se incorporará un microprocesador, una batería independiente para su alimentación, un giróscopo, un acelerómetro, un GPS y alguna interfaz para la comunicación. A su vez es interesante conservar la posibilidad de integrar una cámara fotográfica convencional ya que puede ser de gran utilidad para numerosas aplicaciones. La fuerza que los motores pueden realizar es acotada, por lo que el peso del dispositivo influye directamente en la carga útil del mismo.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Peso	700g	Versión de fibra de vidrio: 1100g. Versión de fibra de carbono: 950g.	990g
Carga útil	500g	Versión de fibra de vidrio: 700g. Versión de fibra de carbono: 850g.	1300g

Cuadro 1.3: Comparación peso y carga útil

Como se puede ver en la tabla 1.3, no cabe duda que el dispositivo que puede cargar con más peso es el *Turbo Ace X720*, lo cual constituye una ventaja considerable de este dispositivo frente a los otros.

Instrumentación

Toda la instrumentación que los dispositivos brindan está originalmente destinada al manejo mediante el control remoto. Todos ellos incluyen un acelerómetro y un giróscopo de 3 ejes y traen algún sistema de estabilización incluido, de forma tal

de facilitar el control.

Como ya se mencionó, se añadirá al cuadricóptero la instrumentación necesaria para su control automático, por lo cual la instrumentación incluida en el dispositivo carece de gran importancia. Sin embargo, resulta interesante conservar la posibilidad de controlarlo mediante el control remoto, ya que puede ser útil tanto en determinadas aplicaciones, como para evitar eventualidades en las primeras pruebas donde se testean los algoritmos de control desarrollados. El algoritmo de control deberá poder alternar entre estos dos modos de vuelo dándole prioridad al control remoto, de modo de conservar la integridad física del dispositivo ante fallas en los algoritmos de control.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Instrumen- tación	Sistema de estabilización integrado <i>GU344</i> : incluye giróscopo de 3 ejes y acelerómetro.	Giróscopo de 3 ejes y acelerómetro. Puede usar hasta 13 sensores para chequear actitud de vuelo, altitud, dirección, posición, temperatura, consumo energético, etc.	Giróscopo y acelerómetro de 3 ejes integrados. Se vende por separado el módulo GPS que incluye barómetro como medidor de altitud y brújula electrónica.

Cuadro 1.4: Comparación instrumentación

En la tabla 1.4 se muestra un resumen de la instrumentación incluida en cada cuadricóptero.

Control

El control mediante el mando remoto requiere de cierta práctica y habilidad para ejecutarlo de buena forma, por lo cual todos los algoritmos de control integrados que el dispositivo incluya significarán una interesante ventaja. Por otro lado se debe tener en cuenta que el control remoto se utilizará en reducidos casos, siendo el control automático el verdadero interés del proyecto. Es importante tener en cuenta que dichos algoritmos encarecen el precio del dispositivo y no serán utilizados con mucha frecuencia.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Control	-	Software de configuración incluido. Dispositivo de control de 4 velocidades diseñado todo en 1. Soporta protocolos <i>Ultra PWM</i> y control de frecuencia hasta $500Hz$. Posee algoritmos de control de vuelo incorporados que hacen q sea mas fácil volarlo	Nivelación automática con control de altitud

Cuadro 1.5: Comparación control

Si bien el *XAircraft X650* es el que tiene más algoritmos de control implementados que facilitan su mando, se considera que el dispositivo que se adecuía más a

nuestras necesidades es el *Turbo Ace X720*. Tiene un pequeño sistema de estabilización que ayuda a la hora de su control, pero no incluye demasiado software ni hardware que no será utilizado y encarecen al producto, como el *XAircraft X650*.

Dimensiones

Las dimensiones de los 3 cuadricópteros considerados se pueden apreciar en la tabla 1.6.

	GAUI 330X	XAircraft X650	Turbo Ace X720
Dimensiones	33 cm entre ejes diagonalmente opuestos	61.5 cm entre ejes diagonalmente opuestos	61.5 cm entre ejes diagonalmente opuestos

Cuadro 1.6: Comparación dimensiones

Como se puede ver el *GAUI* es el más pequeño, mientras que los otros dos tienen el mismo tamaño aproximadamente.

En la figura 1.1 se pueden apreciar fotografías de los 3 equipos considerados.



Figura 1.1: Fotos de las posibles plataformas a utilizar

1.1.1. Definición de la plataforma - Cuadricóptero

- El *Turbo Ace X720* tiene hélices de 12 pulgadas y el grupo hélice motor proporciona una eficiencia de 12 g/W , superando a los otros dos cuadricópteros considerados.
- La carga útil que puede transportar el *Turbo Ace X720* es la mayor de todos los cuadricópteros considerados.
- El *Turbo Ace X720* trae un sistema de nivelación automática y estabilización que resultará útil al momento de controlarlo con el mando remoto. Además no incluye excesivas utilidades para este mando, las cuales no serían utilizadas y contribuirían a encarecer el precio.

Por todas las razones expuestas anteriormente y los análisis comparativos realizados se concluye que la opción que mejor se adecúa a nuestro proyecto es el **Turbo Ace X720**.

1.2. Inteligencia

Además de la plataforma física, deben seleccionarse componentes electrónicos capaces de procesar la información proveniente de los sensores, computar y ejecutar los algoritmos de control y generar las señales necesarias para transmitir las instrucciones a los motores.

Será necesario, entonces, seleccionar uno (o varios) componentes capaces de desarrollar las tareas mencionadas. Para ello, el sistema elegido deberá contar con:

- Un microprocesador con suficiente poder de cómputo.
- Un sistema de entradas y salidas que permita interactuar con la instrumentación y con el sistema de control de motores.
- Un sistema de memoria no volátil que permita mantener cargado el programa de control.
- Elementos de comunicación para establecer conexión con un PC.
- Un sistema de potencia que brinde energía al sistema con una autonomía suficiente.

Dado que el sistema utilizará motores brushless, es necesario contar con un sistema capaz de generar señales PWM, ya sea mediante software, hardware o ambas, para controlar los motores.

También será necesario que el sistema seleccionado tenga una interfaz UART que permita la comunicación con los sensores involucrados.

Es evidente que la elección de la inteligencia no puede realizarse en forma independiente, sino que estará fuertemente condicionada por la elección del resto de la arquitectura del sistema final. Por ello, las decisiones tomadas serán afectadas considerablemente por las características del resto de los componentes del sistema.

Teniendo en cuenta las restricciones anteriores, se seleccionaron varias arquitecturas posibles en una primera etapa. Se realizó un primer estudio de las diversas posibilidades ofrecidas, manejándose varias opciones.

Varias de ellas fueron descartadas por no cumplir todos los requisitos arriba mencionados. De las opciones que sí verificaban dichos requisitos fueron descartadas aquellas que implicaban más de un componente, optándose por considerar las opciones que fueran capaces de proveer todas las prestaciones arriba mencionadas integradas en una única placa.

Una vez realizado un primer análisis de las vastas posibilidades disponibles en el mercado se pre-seleccionaron las siguientes opciones:

1. Beagleboard XM
2. Gumstix Overo Fire

A continuación se desarrollarán y compararán las características fundamentales de ambas opciones, permitiendo así la selección de alguno de ellos en virtud de los requisitos del sistema que se desea implementar.

Procesadores: CPU y DSP

Es claro que el procesador es un componente determinante, pues será el encargado de computar completamente los algoritmos de control. También se encargará de manejar parte de la comunicación con la instrumentación y elementos de control. Finalmente, deberá ser capaz de manejar información proveniente de los canales de comunicación establecidos con un PC.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
CPU	ARM Cortex A8 1Ghz, 256KB L2 cache, 1200 MIPS	ARM Cortex A8 720Mhz, 256KB L2 cache, 1200 MIPS
DSP	TMS320C64x+, 800Mhz	TMS320C64x+, 520Mhz

Cuadro 1.7: Procesadores

Resulta evidente que ambas opciones presentan los mismos procesadores, con la salvedad que ambos procesadores de la Beagleboard presentan una mayor frecuencia de reloj.

Memoria

La memoria disponible en el sistema (tanto estática como volátil) resulta de vital importancia, pues será allí que se guardará la información del programa de control, configuraciones, etc. Adicionalmente, es necesario contar con suficiente memoria volátil a la hora de procesar datos y ejecutar los algoritmos de control.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Volátil(RAM)	512Mb	256Mb
Estática	Sin memoria interna. Soporta microSD de hasta 4Gb	256Mb de memoria interna

Cuadro 1.8: Memoria

La superioridad de la Beagleboard en cuanto a memoria resulta evidente a partir del análisis anterior.

Dimensiones y peso

Si bien no resulta una característica determinante, es conveniente que las dimensiones y peso de la placa elegida sean lo menores posibles, de forma de no ocupar gran parte de la carga útil del cuadricóptero con electrónica asociada a la inteligencia implementada.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Dimensiones	85.09x87.63mm	17x58mm
Peso	36g	5.6g

Cuadro 1.9: Dimensiones y Peso

En cuanto a dimensiones y peso, la placa Gumstix Overo Fire parece ser más adecuada.

Programación y Sistema Operativo

Es importante tener en cuenta como será realizada la programación de los sistemas considerados (dónde se almacena el programa, hardware necesario para la programación, etc.) En particular, es conveniente poder contar con algún sistema operativo que facilite la tareas de programación, testeo y debugging.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Sistema Operativo	Booteable desde microSD	Booteable desde microSD
Programación	A través de SO. Puerto JTAG de 14 pines	A través de SO

Cuadro 1.10: Programación y Sistema Operativo

Es claro que la placa Beagleboard parece ser mejor en cuanto a sus prestaciones de programación.

Alimentación y Energía

La forma en que la placa elegida es alimentada, así como el grado de autonomía que pueda lograrse con la misma deben ser tenidos en cuenta.

Lograr un nivel de autonomía lo suficientemente grande permitirá que el sistema se mantenga en vuelo durante un tiempo mayor. Idealmente, la autonomía de la alimentación de la inteligencia no debería ser el factor determinante del tiempo de vuelo del dispositivo.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Alimentación	BeagleJuice. Sistema de alimentación diseñado específicamente para la Beagleboard. (Dimensiones idénticas a la misma. Conector estándar para BeagleBoard).	Alimentado desde una Daughter board: Zippy Flightmax 2200mAh 3S1P
Voltaje. Intensidad de Corriente. Capacidad	5V, 1.5A, 4500mAh	11.1V, 44A (= 2200mA x 1P x 20C), 2200mAh 20C
Autonomía	6.5 horas	No especificado
Dimensiones	85.09x87.63x10mm	102x37x24mm
Peso	40g	180g

Cuadro 1.11: Alimentación

Pareciera ser evidente que la Beagleboard resulta superior en cuanto a alimentación disponible, dado que el pack de baterías BeagleJuice fue diseñado específicamente para brindar alimentación a la misma.

Puertos e I/Os

Los puertos disponibles para entradas, salidas y/o comunicación serán también un factor determinante a la hora de definir la arquitectura del sistema, pues es imperativo que el sistema de control pueda comunicarse con los sensores, el sistema de control de motores, etc.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Puertos	<ul style="list-style-type: none"> ■ 14 pin JTAG ■ UART ■ 28 pin expansion port ■ LCD ■ DVI-D ■ S-VIDEO ■ Stereo in/out ■ USB-OTG ■ RS232 ■ EHCI ■ 4 USBs ■ 10/100Mbps Ethernet 	<ul style="list-style-type: none"> ■ wifi ■ bluetooth ■ 2x70 pin expansion board port ■ 27 pin camara port

Cuadro 1.12: Puertos

Cada opción presenta ventajas y desventajas con respecto a los puertos disponibles. Si bien la Beagleboard parece tener una mayor variedad de puertos, la Gumstix Overo Fire cuenta con puertos WiFi y Bluetooth integrados, lo cual resulta ser una ventaja considerable en términos de comunicación.

Comunicación

Es deseable que el sistema posea algún tipo de comunicación inalámbrica integrada.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
WiFi	No	Sí
Bluetooth	No	Sí

Cuadro 1.13: Comunicación

La Gumstix Overo Fire resulta claramente superior en este aspecto.

Precio

El precio resulta ser, evidentemente, un factor importante a tener en cuenta.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Precio	149USD	220USD

Cuadro 1.14: Precio

Dada la diferencia de precios, sería deseable utilizar la Beagleboard, siempre y cuando esto no vaya en detrimento del desempeño final del sistema.

Otras características

Se presentan, a continuación, algunas características propias relevantes de cada uno de los sistemas propuestos.

	Beagleboard XM	Gumstix Overo Fire
Otras características	<ul style="list-style-type: none"> ■ Existencia de Camera Boards integrables directamente en un puerto dedicado ■ Existencia de la biblioteca OpenCV de visión computacional, optimizada para ser utilizada por Beagleboard 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Existencia de gran variedad de daughter boards con diversas funcionalidades

Cuadro 1.15: Otras características

Si se tiene en cuenta el objetivo secundario planteado (desarrollar un algoritmo de tracking visual), la Beagleboard parece ser más adecuada.

1.2.1. Definición de la inteligencia

En virtud del análisis anterior puede asegurarse que:

- La placa Beagleboard parece ser superior en los siguientes aspectos:
 - Procesadores
 - Memoria
 - Programación y Sistema Operativo
 - Alimentación
 - Puertos e I/Os
 - Precio
- La placa Gumstix Overo Fire parece ser superior en los siguientes aspectos:
 - Dimensiones y Peso
 - Comunicación
- Cada placa presenta sus características únicas, lo cual provee ventajas y desventajas para ambas arquitecturas posibles. Si se tiene en cuenta el objetivo secundario del proyecto, it est, la implementación de un sistema capaz de realizar tracking visual mediante una cámara, un sistema basado en la placa Beagleboard parecería ser más adecuado.

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, se optó por construir el sistema en base a una arquitectura basada en la placa Beagleboard.

1.3. Comunicación

La inteligencia debe comunicarse con dos bloques del sistema: el de los sensores y el de los motores sobre los cuales se actúa. Además es necesario comunicar a la inteligencia con una PC con el objetivo de programar tanto los algoritmos de control como los rumbos del sistema.

1.3.1. Comunicación con PC

La placa elegida posee diversos puertos USB, por dicho motivo se pueden utilizar dichos puertos para obtener una comunicación directa con la PC. Dicha comunicación sirve para programar el sistema en una primera etapa, sin embargo no parece la forma más adecuada de comunicarse con el cuadricóptero mientras el mismo se encuentra en el aire para reprogramar una ruta, o para modificar algún detalle de un algoritmo. Por dicho motivo se opta por alguna comunicación de tipo inalámbrica. Las opciones que consideradas fueron: WiFi, Bluetooth y GSM. Al poseer en la inteligencia un kernel de linux, la comunicación vía WiFi es muy sencilla de implementar. Por dicho motivo se opta por este tipo de comunicación. Al disponer de diversos puertos USB en la inteligencia se opta por un módulo WiFi USB.

1.3.2. Comunicación con instrumentación

En lo que respecta a la comunicación con la instrumentación se disponen de diversas opciones. Se tiene la posibilidad de comunicarse a través de un protocolo serie, I2C o incluso puertos USB. Por dicho motivo este aspecto no será analizado cabalmente en esta sección sino que se realizará al momento de analizar las opciones de comunicación.

1.3.3. Comunicación con motores

Los motores, tal como se explicó anteriormente, son comandados mediante señales PWM. Por lo tanto, la comunicación entre la inteligencia y los motores será cableada. La señal de entrada de los ESCs se conectará directamente a los pines de salida de la inteligencia donde se programan los PWM.

1.4. Instrumentación

Para poder controlar el sistema es importante poder conocer los valores que toman las variables del mismo. Como se verá en el capítulo sobre el desarrollo del modelo físico del cuadricóptero, las variables que es necesario conocer son:

- La aceleración en las tres coordenadas
- La velocidad angular del sistema

Por dicho motivo parece imprescindible dotar al sistema de sensores capaces de medir dichas magnitudes.

1.4.1. Acelerómetro

Previo a definir el acelerómetro, su principio básico de funcionamiento y su interés en la aplicación presentada, se debe realizar una discusión física sobre la caída libre como sistema de referencia.

En la física clásica, la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre una masa es proporcional a la intensidad del campo gravitatorio en la posición en la cual se encuentra.

La teoría general de la relatividad es una teoría métrica de la gravitación. Los fenómenos que en la mecánica clásica se le atribuyen a la acción de la fuerza de gravedad, corresponden a movimientos inerciales en una geometría curvada del espacio-tiempo en la teoría de la relatividad general.

Por lo tanto, desde el punto de vista de la física clásica, un sistema de referencia en caída libre es un sistema acelerado por la fuerza de la gravedad, y como tal, es no inercial.

Por el contrario, desde el punto de vista de la física relativista, el sistema está acelerado en el espacio, pero no en el espacio-tiempo, por lo tanto el sistema de referencia es inercial.

Saldada esta discusión se define un acelerómetro como un dispositivo capaz de medir su aceleración propia en el marco de referencia de la caída libre relativista. Esto implica que el dispositivo no mide siempre su cambio de velocidad en el espacio. Por ejemplo, la medida de un acelerómetro en caída libre será cero a pesar de que su velocidad crezca, de la misma forma se puede observar que un acelerómetro en reposo respecto de la Tierra, no dará una medida nula, sino que por el contrario medirá como aceleración g .

Existen diversos tipos de acelerómetro, en este caso se eligió trabajar con un acelerómetro contenido en un circuito integrado (tecnología MEMS). Las razones de esta elección son fundamentalmente tamaño y peso (críticos en la aplicación) y económicos. Los mismos son más pequeños, livianos y baratos que otras tecnologías. Dicho acelerómetro procesa las medidas y las convierte a una salida eléctrica; la forma de dicha salida depende si el integrado es analógico o digital.

Los acelerómetros basados en tecnologías MEMS miden cambios internos de la transferencia de calor causada por la aceleración, ofreciendo ventajas significativas sobre

el empleo de una estructura tradicional sólida de masas de prueba. Ya que la masa de prueba en el diseño de los sensores MEMS son moléculas de gas, las estructuras móviles mecánicas son eliminadas dentro del acelerómetro.

Un acelerómetro de tres ejes no es otra cosa que un acelerómetro capaz de medir su aceleración propia en tres ejes de coordenadas.

Resulta fundamental dotar al cuadricóptero de un acelerómetro, el mismo será utilizado para obtener la aceleración lineal en cada instante. Integrando esta información se puede obtener la velocidad con la que se desplaza el sistema y por ende se puede obtener la posición del mismo conociendo la posición de partida. Este instrumento no provee toda la información necesaria para realizar el control del sistema. El sistema presenta 6 grados de libertad: las tres coordenadas de su centro de masa y los tres ángulos que determinan su orientación. En particular, el acelerómetro no detecta giros, por lo tanto es incapaz de aportarnos toda la información necesaria. Es imprescindible entonces dotar al cuadricóptero de un giróscopo.

1.4.2. Giróscopo

Un giróscopo es un instrumento que mide la velocidad angular del sistema en un marco de referencia inercial como el definido en la sección anterior. Las mismas restricciones sobre tamaño, peso y costos que se aplicaban para el acelerómetro se aplican aquí. Por dicho motivo se vuelve a optar por un instrumento de tecnología MEMS.

Desde el punto de vista teórico, procesando la información obtenida a partir del acelerómetro y del giróscopo se puede conocer en todo momento la posición del sistema y su orientación a partir de las condiciones iniciales.

En la práctica, sin embargo, esto no sucede así. Todas las medidas realizadas tienen un cierto error. Para obtener la orientación y la posición a cada instante se deben integrar las medidas obtenidas, por lo tanto, se integra también el error. Esto produce una acumulación de errores que afecta de forma considerable el resultado final luego de cierta cantidad de muestras.

Parece razonable, entonces, poder cotejar los datos que se obtienen mediante este método con datos obtenidos mediante otras fuentes. Es a partir de esta problemática que surge la necesidad de contar con un GPS. Se puede, cada cierto intervalo de tiempo, observar en cuanto difieren los resultados obtenidos integrando las medidas de los sensores con los datos que aporta el GPS, logrando de esta forma corregir los errores debido al *integration drift*.

1.4.3. GPS

La elección del GPS se basó casi totalmente en lograr la simplicidad del sistema. Existían muchas opciones, placas de diversos tamaños, con diversos tamaños de antenas, pero todas con similares especificaciones.

Las placas candidatas a estar a cargo de la inteligencia contaban con interfaces

USB, por lo que se optó por comprar un dongle GPS, cuyas especificaciones son similares a las del resto de las opciones, y se puede comunicar via USB. Existen drivers para dicho GPS en linux, por lo que la comunicación con el mismo no debería ser un problema.

Se optó por utilizar un GPS *Canmore GT-730F*.



Figura 1.2: Canmore GT-730F

1.4.4. Definición de instrumentación

En la secciones 1.4.1 y 1.4.2 se detalló el porqué de la elección de la tecnología MEMS para el acelerómetro y el giróscopo. Las razones fundamentales son el costo, tamaño y peso de los instrumentos, siendo los últimos dos críticos en la aplicación. A partir de esta definición surgen dos posibilidades, integrar los instrumentos diseñando un PCB o adquirir uno en el cual se encuentren los dos sensores. Al diseñar un PCB se reduce el costo de la instrumentación. El precio de cada chip ronda los 5 U\$, sumado al precio de algunas resistencias, capacitores y otros materiales necesarios para la construcción del PCB (Placa de cobre, percloruro, estaño, etc) hacen un total muy inferior al costo de comprar una placa ya armada (más de 60 U\$). Sin embargo, el proceso de diseño del PCB extiende los plazos en gran medida, se debe diseñar el circuito, construir y verificar su funcionamiento. El proceso mencionado tendrá probablemente una duración superior a las dos semanas, lo cual implica un retraso en varios aspectos del proyecto, ya que diversas tareas previamente definidas dependen fuertemente del funcionamiento de la instrumentación. Por otra parte el peso que representa el costo de adquirir una placa en la que se incluyan ambos sensores (acelerómetro y giróscopo) en el presupuesto total es muy bajo (4%).

En base al análisis realizado se opta por adquirir una placa ya diseñada que contenga los sensores necesarios. Existe una gran diversidad de soluciones de instrumentación en el mercado. Debido a los requerimientos del proyecto se descartaron muchas de ellas. Las opciones consideradas finalmente se resumen en la siguiente tabla. La característica común a todas ellas es que pueden medir 6 grados de libertad, la misma cantidad de variables del sistema a controlar (tres coordenadas correspondientes a la posición del centro de masa, roll, yaw, pitch).

Los criterios que se fijaron para definir la instrumentación fueron los siguientes:

- Rango de medidas de los sensores
- Capacidad de cómputo

- Facilidad de programación (algunas placas incluyen microprocesadores)
- Comunicación disponible
- Compatibilidad con el resto del sistema
- Costo

En lo que respecta al rango de medida de los acelerómetros se definió que el mismo fuera de 3g. Dicha elección está fundamentada en que se planea un vuelo en el cual no se precisen considerar aceleraciones que sean muy superiores a la de la caída libre. Asimismo, se definió como rango de medida de los giróscopos un valor superior a los 300°/s, de forma que el sistema pueda realizar un giro casi completo en cualquiera de los tres ejes en 1 segundo. Lo que se observa es que todos los acelerómetros y giroscopos de las placas de esta preselección cumplen con dicho requerimiento.

	Acelerómetro		Giróscopo	
	Rango	Sensibilidad	Rango	Sensibilidad
CHR-6d	3g	300mV/g	400°/s ó 100°/s	2.5mV/(°/s) ó 2.5mV/(°/s)
Atomic IMU	1.5g ; 6g	800mV/g 200mV/g	300°/s	3.3mV/(°/s)
IMU Digital Com- bo Board	2g ; 16g	356LSB/g 321LSB/g	2000°/s	14.375 LSB/(°/s)
IMU Analgo Com- bo Board Razor	3g	300mV/g	300°/s 1200°/s	3.3mV/(°/s) 0.83mV/(°/s)
IMU Fusion Board	2g	256 LSB/g	250°/s 2000°/s	131 LSB/(°/s) 16.4 LSB/(°/s)

Cuadro 1.16: Sensores

Resulta conveniente que la instrumentación posea un microprocesador. La razón principal para esto es que le ahorra tiempo a la inteligencia del sistema en el procesamiento de las medidas crudas de los sensores. Los sensores presentan sus medidas constantemente en forma analógica o digital dependiendo del sensor en cuestión. En caso de ser una medida analógica la misma debe ser, en primer lugar, digitalizada. Una vez que se tiene la medida digitalizada se debe realizar un procesamiento que consiste básicamente en ponerle una marca de tiempo a cada medida y asociarle una etiqueta correspondiente al sensor que la realizó. Resulta sumamente interesante que no sea el procesador principal quien se encarga de esta identificación, sino que el mismo reciba los datos pre-procesados. Por esta razón se favorecieron las placas que incluyeran un microprocesador.

	Frecuencia reloj	Largo de palabra	RAM	Flash
CHR-6d	72MHz	32 bits	20Kb	64Kb
Atomic IMU	10MHz	8 bits	2Kb	32Kb
IMU Digital Combo Board	-	-	-	-
IMU Analgo Combo Board Razor	-	-	-	-
IMU Fusion Board	-	-	-	-

Cuadro 1.17: Características de los microprocesadores

En caso de optar por una placa con microprocesador resulta fundamental que la misma sea sencilla de programar. Las razones son evidentes, ya que si los algoritmos que vienen programados de fábrica no resultan adecuados para la aplicación éstos deberían poder ser modificados fácilmente.

También parece importante que el código de fábrica sea abierto, principalmente para comprender su funcionamiento y poder procesar adecuadamente los datos que se obtengan de los sensores. Es interesante además poder modificar secciones puntuales de código, sin necesidad de reprogramar completamente el microprocesador.

La comunicación no resultó un factor crítico ya que todos los candidatos a procesador principal poseen diversas interfaces (UART, I2C, Conversores AD). Sin embargo, debido a la familiarización del grupo de proyecto con las comunicaciones serie, se prefirió dar prioridad a aquellas placas que se comunicaran via UART (en caso de que se optara por una placa con microprocesador).

En lo que respecta a compatibilidad con el sistema, se buscó que la alimentación de la placa fuera la misma que la del procesador principal. Por dicha razón lo ideal sería que la placa pueda ser alimentada a 5V.

A partir de las consideraciones anteriores, se considera que la solución más adecuada para el objetivo que se plantea en esta sección es la placa *Razor Atomic IMU*. Dicha placa cumple con los rangos de medida especificados anteriormente y posee un procesador de 8 bits con un reloj de 10MHz.

Existen ya scripts en C disponibles para programar el dispositivo. Los mismos pueden ser modificados en caso de no cumplir con todos los requerimientos necesarios. La placa dispone de un puerto JTAG para programación.

La forma que tiene la placa de presentar los datos obtenidos de los sensores es a través de un puerto serie capaz de transmitir datos con una tasa de transferencia de 115.200bps.

Cabe aclarar que la Atomic IMU es la única de las soluciones consideradas que puede ser alimentada con una fuente de tensión de 5V.

Finalmente, el costo de la misma es de los más bajos dentro de las posibilidades consideradas.

En la figura 1.3 se puede observar la placa de instrumentación escogida:



Figura 1.3: Atomic IMU

CAPÍTULO 2

MODELO FÍSICO

Resulta imprescindible para controlar el cuadricóptero comprender cabalmente su comportamiento. Con esta óptica, lo que se busca es obtener el modelo más sencillo que sea capaz de representar adecuadamente al sistema. El objetivo de esta sección es el de realizar el desarrollo de dicho modelo. La forma de modelar el sistema elegida es un Modelo de Variables de Estado, de ahora en más MVE. Lo que se busca es obtener una representación del sistema de la forma $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}, t)$, donde \vec{x} es el vector de estados del sistema, \vec{u} es el vector que representa las entradas del sistema y t es el tiempo.

Al tratarse de una plataforma comercial no se dispone de todos los parámetros fundamentales para el desarrollo de dicho modelo. Por ejemplo, no se conoce como es la respuesta de los motores (tanto velocidad como empuje), el tensor de inercia del sistema, etc. Sí bien algunos parámetros como las masas de las distintas partes que componen el sistema y las distancias involucradas en el desarrollo que se hará a continuación son sencillas de obtener, se tuvieron que realizar experimentos y cálculos más sofisticados para la completa caracterización del sistema. Estos aspectos no serán desarrollados en profundidad a lo largo de este trabajo, pero pueden consultarse los valores de las constantes obtenidas en el anexo ?? ,mientras que el cálculo de los tensores de inercia de interés y la obtención de la respuesta de los motores se encuentran desarrollados en profundidad en los anexos ?? respectivamente.

En la presente sección nos limitaremos a obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del cuadricóptero.

Para el estudio en cuestión se considerará el cuadricóptero según las convenciones expresadas en la figura 2.1. Por un lado se definen las coordenadas "del mundo" (i_I, j_I, k_I) , un sistema de referencia inercial fijo. Las magnitudes correspondientes a la base de este referencial se notarán con el subíndice I . Por otro lado se utilizará el sistema de referencia (i_q, j_q, k_q) solidario al cuadricóptero. En este caso las magnitudes medidas en ese referencial se notarán con el subíndice q . En la figura 2.1 se pueden apreciar ambos sistemas de referencia.

En la presente sección se utilizarán las herramientas de la mecánica clásica a fin de obtener un modelo, que como tal, no es una representación exacta de la realidad.

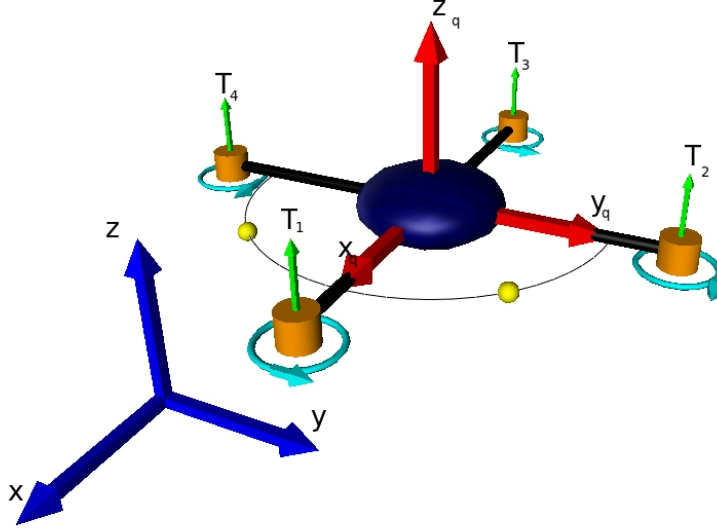


Figura 2.1: Modelo del cuadricóptero

Se realizarán diversas hipótesis que permiten conocer el sistema en forma aproximada, pero perfectamente adecuada para las condiciones en las cuales se operará el cuadricóptero.

2.1. Hipótesis de trabajo

Previo al desarrollo del modelo es muy importante esclarecer las hipótesis en las cuales opera el cuadricóptero. Una vez definidas las mismas seremos capaces de realizar las simplificaciones pertinentes.

No debe perderse de vista que el cuadricóptero con el que se trabaja fue diseñado para ser comandado a través de un control remoto. Por dicho motivo es razonable que sus características sean tales que le permitan a una persona volarlo desde el suelo. Parece perfectamente razonable que se haya diseñado el sistema para volar por tiempos limitados, distancias relativamente cortas y a bajas velocidades, para permitirle al operador un control manual más sencillo. Asimismo, estas consideraciones permiten introducir diversas simplificaciones en el modelado.

2.1.1. La Tierra como sistema de referencia inercial

Evidentemente la Tierra **no** es un sistema de referencia inercial ya que la misma se encuentra sometida a la traslación en torno al Sol y a una rotación en sobre su eje. Supongamos una partícula que se encuentra en movimiento relativo a la Tierra. Su aceleración respecto de un sistema verdaderamente inercial puede escribirse como:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C \quad (2.1)$$

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (2.2)$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (2.3)$$

En las ecuaciones anteriores \vec{a} es la aceleración de la partícula en el sistema relativo, \vec{v} es la velocidad relativa de la partícula, \vec{r} la posición relativa, $\vec{\omega}$ es la velocidad angular de la Tierra y $\vec{a}_{O'}$ es la aceleración del centro de masa de la Tierra.

El objetivo es ahora analizar si es posible considerar que $\vec{a} \approx \vec{a}'$. Si esto último se cumple se puede aproximar a la Tierra como un sistema inercial. El radio promedio de la órbita Heliocéntrica(R_H) es de $1,5 \times 10^8 Km$, dicha órbita se recorre en 365 días lo que nos da una velocidad promedio de:

$$V_T = \frac{1,5 \times 10^{11} m}{365 \times 24 \times 60 \times 60 s} \approx 4,8 \times 10^3 ms^{-1}$$

Esta velocidad implica que la aceleración del centro de masa de la Tierra($\vec{a}_{O'}$) es de aproximadamente:

$$a_{O'} = \frac{V_T^2}{R_H} \approx 15,36 \times 10^{-5} ms^{-2}$$

Por otra parte sabemos que la Tierra rota sobre su eje una vez cada 24 horas con velocidad angular constante, tenemos así que:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60 s} \approx 7,3 \times 10^{-5} rads^{-1}$$

Finalmente debemos considerar el radio promedio de la Tierra($R_T = 6,731 \times 10^6 m$), ya que las alturas que alcanzará nuestro sistema son despreciables respecto del radio de la Tierra.

Por lo tanto

$$a_T \approx 3,6 \times 10^{-2} ms^{-2}$$

Para que el término de la aceleración de Coreolis sea comparable con la aceleración de transporte las velocidades del cuadricóptero relativas a la Tierra deberían ser del orden de cientos de metros por segundo. Las velocidades evidentemente serán inferiores, por lo tanto este término puede ser despreciado.

La aceleración relativa al sistema de la Tierra difiere de aproximadamente $3,6 \times 10^{-2} ms^{-2}$ de la aceleración medida en un sistema verdaderamente inercial. Por otra parte la resolución del acelerómetro utilizado es de $4mg \approx 4,81 \times 10^{-2} ms^{-2}$. Es imposible de detectar el término de la aceleración de transporte, por dicho motivo parece razonable despreciarlo.

En resumen tenemos que:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \approx m\vec{a}'$$

Esto nos permite afirmar que la Tierra puede aproximarse como un sistema de referencia inercial.

2.1.2. Curvatura de la Tierra

El cuadricóptero no se desplazara una distancia superior a una centena de metros paralelo a la superficie de la Tierra. Supongamos entonces que el cuadricóptero se desplaza $1km$ en una dirección. Esto corresponde a recorrer un arco de círculo de

$\theta = \frac{1km}{6,731 \times 10^3 km} \approx 1,5 \times 10^{-4} rad$. Si consideramos la superficie terrestre como un plano, la distancia recorrida es:

$$d = R_T \sin(\theta) \approx 0,999999996 km$$

Como era de esperar, la diferencia entre la distancia recorrida como arco de círculo y asumiendo una aproximación local de la Tierra por un plano es despreciable. Por lo tanto trabajaremos con un sistema de coordenadas cartesiano.

2.1.3. Atracción gravitacional

Todos los objetos se encuentran relacionados entre sí por medio de la Fuerza de atracción gravitacional. Sin embargo en las cercanías de la Tierra la atracción gravitacional con el resto de los objetos es completamente despreciable. Dicha fuerza vale:

$$F_G = G \frac{M_T m}{d^2} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

Donde G es la constante gravitacional y h la altura a la cual se encuentra una partícula. Como ya se analizo anteriormente las alturas a las cuales se desenvolverá el cuadricóptero son despreciables respecto del radio de la Tierra. Por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$F_G \approx \frac{M_T m}{R_T^2} = gm$$

donde g es la constante gravitacional de la Tierra, su valor es aproximadamente $9,81 m^{s^{-2}}$

2.1.4. Fuerzas aerodinámicas

Debido a las bajas velocidades que logrará el cuadricóptero se decidió despreciar las fuerzas de tipo aerodinámicas, salvo aquellas responsables de las fuerzas y momentos de las hélices. Estas fuerzas serán analizadas con mayor profundidad en la sección 2.5.

2.2. Sistema de referencia

Como ya se mencionó, a lo largo del presente desarrollo se trabajará constantemente con dos sistemas de referencia: uno inercial¹ solidario a la tierra (S_I) y otro solidario al cuadricóptero (S_q) como se muestra en la figura 2.1. El sistema S_I es un sistema local donde la dirección \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} corresponden a las direcciones Este, Norte y hacia arriba. El sistema S_q se puede obtener realizando tres rotaciones compuestas del sistema S_I , dichas rotaciones se muestran en la figura 2.2. Los ángulos θ , φ y ψ son conocidos como ángulos de Euler.

La importancia del sistema S_q radica en las simplificaciones que introduce a la hora de escribir las ecuaciones, ya que por ejemplo en dicho sistema el empuje de las hélices, los torques que introducen y velocidades angulares de los motores del

¹En esta sección se consideran sistemas inerciales en el sentido clásico

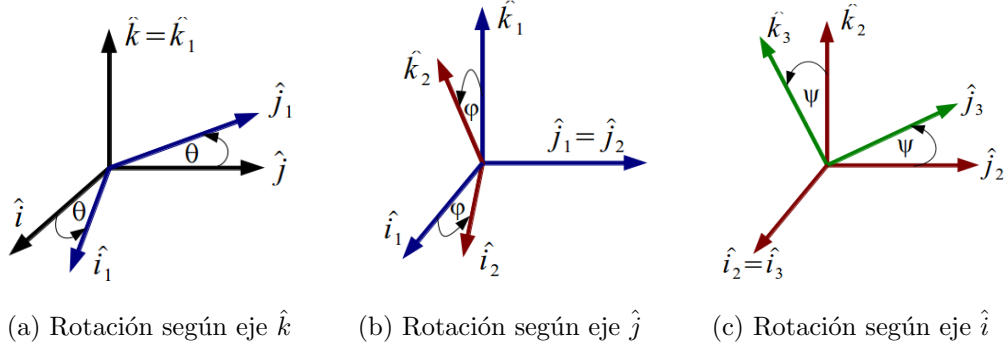


Figura 2.2: Rotaciones

cuadricóptero tienen siempre la misma dirección. Asimismo cabe agregar que el sistema de navegación incluirá entre otros un acelerómetro y un giroscopo IMU (Inertial Measurement Unit). Dichos dispositivos miden la aceleración y la velocidad angular del sistema en un sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero, es decir en el sistema S_q . Si bien no es fundamental expresar las ecuaciones del sistema en este marco de referencia resulta conveniente hacerlo ya que gran parte de la información vendrá dada en este sistema. Considerar este sistema implica una simplificación del procesamiento de los datos obtenidos por la IMU.

Las tres transformaciones pueden representarse matricialmente de la siguiente forma:

$$H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H_1^2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} H_2^q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

La transformación de las coordenadas del sistema inercial al sistema solidario al cuadricóptero se obtiene realizando el producto de las tres matrices de rotación definidas.

$$H_I^q = H_2^q.H_1^2.H_I^1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta & \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi \sin \theta - \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix}$$

A su vez, la transformación inversa puede obtenerse multiplicando las coordenadas del sistema S_q por la matriz H_q^I . Dicha matriz puede obtenerse de la siguiente forma:

$$H_q^I = (H_2^q.H_1^2.H_I^1)^{-1} = (H_I^1)^{-1}.(H_1^2)^{-1}.(H_2^q)^{-1} = H_I^I.H_1^1.H_2^2$$

2.3. Cinemática

Además de la relación entre las coordenadas de un sistema y del otro, es interesante conocer la relación que existe entre la velocidad angular del sistema y las derivadas de los ángulos de Euler. Sea $\vec{\omega}$ la velocidad angular del cuadricóptero (y por ende la del sistema S_q). La expresión de la velocidad angular en el sistema de referencia del cuadricóptero es la siguiente:

$$\vec{\omega} = w_{q_x} \vec{i}_q + w_{q_y} \vec{j}_q + w_{q_z} \vec{k}_q$$

Donde $w_{q_x'}$, $w_{q_y'}$ y $w_{q_z'}$ son las proyecciones ortogonales de la velocidad angular en el sistema S_q . Por como fue construido el sistema de referencia solidario al cuadricóptero y utilizando el teorema de adición de velocidades angulares, se deduce trivialmente que la velocidad angular del cuadricóptero puede escribirse como:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{j}_1 + \dot{\psi}\vec{i}_2$$

El vector \vec{i}_2 es invariante respecto de la tercer rotación, es decir que $\vec{i}_2 = \vec{i}_q$. Por otra parte, multiplicando los vectores \vec{k} y \vec{j}_1 por las matrices $H_1^2.H_2^q$ y H_2^q respectivamente se puede obtener la velocidad angular del cuadricóptero en el sistema de coordenadas referido a el. Operando se obtiene:

$$w_{q_x'}\vec{i}_q + w_{q_y'}\vec{j}_q + w_{q_z'}\vec{k}_q = (\dot{\psi} + \dot{\theta}\sin\varphi)\vec{i}_q + (\dot{\varphi}\cos\psi + \dot{\theta}\cos\varphi\sin\psi)\vec{j}_q + (\dot{\theta}\cos\varphi\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\psi)\vec{k}_q$$

De esta ecuación se obtienen tres relaciones entre las velocidades angulares respecto de cada eje principal del sistema de coordenadas solidario al cuadricóptero con las derivadas de los ángulos de Euler. Podemos re escribir dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{q_x'} + \omega_{q_z'}\tan\varphi\cos\psi + \omega_{q_y'}\tan\varphi\sin\psi \\ \omega_{q_y'}\cos\psi - \omega_{q_z'}\sin\psi \\ \omega_{q_z'}\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} + \omega_{q_y'}\frac{\sin\psi}{\cos\varphi} \end{pmatrix}$$

Realizando un razonamiento similar se deduce la relación que existe entre la velocidad del sistema expresada en el marco de referencia inercial con la velocidad expresada en el sistema de referencia solidario al cuadricóptero. La velocidad en el sistema de referencia inercial no es otra cosa que la derivada de la posición (\vec{r}).

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (x\dot{i} + y\dot{j} + z\dot{k})'$$

Al igual que con la velocidad angular se puede escribir la velocidad absoluta del cuadricóptero en el sistema S_q . Lo que se tiene es que $v = v_{q_z'}\vec{i}_q + v_{q_y'}\vec{j}_q + v_{q_x'}\vec{k}_q$. Donde $v_{q_z'}$, $v_{q_y'}$ y $v_{q_x'}$ son las proyecciones ortogonales de la velocidad absoluta en el sistema solidario al cuadricóptero. Igualando ambas expresiones de la velocidad se obtiene:

$$\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v1\vec{i}_q + v2\vec{j}_q + v3\vec{k}_q$$

Para transformar las coordenadas de un sistema de referencia al otro alcanza con multiplicar por una de las matrices de cambio de base definidas previamente. En particular nos interesa tener una expresión para las derivadas de la posición en el sistema S_I , por esta razón se multiplica la expresión de la velocidad en el sistema S_q por la matriz H_q^I . Operando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_z'}\cos\varphi\cos\theta + v_{q_y'}(\cos\theta\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\sin\theta) + v_{q_x'}(\sin\psi\sin\theta + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi) \\ v_{q_z'}\cos\varphi\sin\theta + v_{q_y'}(\cos\psi\cos\theta + \sin\theta\sin\varphi\sin\psi) + v_{q_x'}(\cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \cos\theta\sin\psi) \\ -v_{q_z'}\sin\varphi + v_{q_y'}\cos\varphi\sin\psi + v_{q_x'}\cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix}$$

Hasta aquí hemos obtenido simplemente relaciones cinemáticas; por un lado entre la velocidad angular del sistema S_q y las derivadas de los ángulos de Euler, por el otro se tiene el vínculo entre la velocidad absoluta del sistema y la velocidad

absoluta expresada en el sistema S_q y los ángulos de Euler. Sin embargo aún no conocemos cuales son las Fuerzas y Momentos presentes en el sistema, ni que efectos producen sobre el mismo. Es aquí que nos detendremos en el análisis cinemático para considerar la dinámica del sistema.

2.4. Dinámica del Sistema

Existen diversas formas de atacar el problema de la dinámica de un sistema, en particular se puede encarar el problema desde la mecánica analítica o realizando consideraciones energéticas, sin embargo en este caso se elije trabajar con las ecuaciones cardinales.

2.4.1. Primera Cardinal

La primer cardinal indica que en un sistema inercial la suma de las fuerzas externas a un objeto es igual a su masa total por su aceleración. Esto se puede escribir:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$$

Anteriormente fue expresado el interés de trabajar en el sistema solidario al cuadricóptero. El vector aceleración se puede obtener derivando la velocidad. Para realizar la derivada de un vector expresado en un sistema móvil puede utilizarse la siguiente formula:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

En la ecuación anterior $\frac{d}{dt}$ representa la derivada temporal, mientras que $\frac{d}{dt}$ representa la derivada temporal respecto del sistema móvil. Por otra parte $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema móvil respecto al inercial. Operando se obtiene:

$$\vec{a} = (\dot{v}_{q_z'} + v_{q_z'}\omega_{q_y'} - v_{q_y'}\omega_{q_z'})\vec{i}_q + (\dot{v}_{q_y'} + v_{q_z'}\omega_{q_z'} - v_{q_z'}\omega_{q_x'})\vec{j}_q + (\dot{v}_{q_x'} + v_{q_y'}\omega_{q_x'} - v_{q_z'}\omega_{q_y'})\vec{k}_q$$

Operando se puede reescribir la primer cardinal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{q_z'} \\ \dot{v}_{q_y'} \\ \dot{v}_{q_x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{q_y'}\omega_{q_z'} - v_{q_z'}\omega_{q_y'} \\ v_{q_z'}\omega_{q_x'} - v_{q_x'}\omega_{q_z'} \\ v_{q_x'}\omega_{q_y'} - v_{q_y'}\omega_{q_x'} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^4 F_{ext}$$

2.4.2. Segunda Cardinal

La segunda cardinal indica que la derivada del momento angular de un sistema respecto a un punto Q es igual al torque externo que se ejerce sobre el mismo más un término que depende de la velocidad de dicho punto. La ecuación queda:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = M\vec{Q}^{ext} + M\vec{v}_G \times \dot{\vec{r}}_Q$$

Asumiendo simetría del sistema, se puede considerar que el centro de masa del sistema se encuentra en el centro de la esfera principal del mismo. Esto no es completamente cierto ya que existen algunas asimetrías en el sistema, a modo de ejemplo

se puede nombrar que la batería del UAV queda por fuera de la esfera y los apoyos también, sin embargo en una primera aproximación del modelo se asume la simetría respecto al plano que intersecta la esfera en el ecuador. Realizada dicha suposición y planteando la segunda cardinal en el centro de masa obtenemos una expresión más sencilla:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = M_G^{ext}$$

Por otra parte el momento angular del sistema se compone del momento angular del cuadricóptero y el momento angular de cada motor. Consideraremos el cuadricóptero sin los motores como un primer rígido y los motores como cuatro rígidos independientes.

El momento angular de un rígido respecto a un punto Q puede calcularse como:

$$\vec{L}_Q = M_i(G_i \vec{r}_Q) \times \vec{V}_Q + \Pi_Q \vec{\Omega}_i$$

Donde M_i , G_i , Π_Q y $\vec{\Omega}_i$ son la masa de cada rígido, su centro de masa, su tensor de inercia y su velocidad angular respectivamente.

Como se propuso anteriormente, se elije calcular el momento angular en el centro de masa del cuadricóptero. Asumiendo que los cuatro motores son idénticos podemos escribir el momento angular del cuadricóptero sin los motores como:

$$\vec{L}_{O'} = (M - 4M_m)(O' \vec{r}_{O'}) \times \vec{V}_{O'} + \Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q = \Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q$$

Del mismo modo el momento angular del primer motor queda:

$$\vec{L}_{O'_q} = M_m \vec{x} \times \vec{V}_{O'} + \Pi_{O'_Mx}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\Omega}_i$$

Se observa que al sumar el primer término de cada momento angular de los motores el resultado es cero. La simetría asumida del sistema es la que nos permite simplificar nuevamente las ecuaciones. Por otra parte aplicando el teorema de adición de las velocidades angulares se deduce que la velocidad angular de cada motor es $\vec{\Omega}_i = \vec{\omega}_q + \omega_i \vec{k}$, donde ω_i es la velocidad con la que gira cada motor respecto de su eje principal. Nuevamente asumiendo que todos los motores son idénticos se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{L}_{O'} &= \Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{O'_Mx}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (2\vec{\omega}_q + \omega_1 \vec{k} + \omega_3 \vec{k}) + \Pi_{O'_My}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (2\vec{\omega}_q - \omega_2 \vec{k} - \omega_4 \vec{k}) = \\ &= \Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{O'_Mx}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\omega_1 + \omega_3) \vec{k} - \Pi_{O'_My}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\omega_2 + \omega_4) \vec{k} \end{aligned}$$

Tanto las velocidades angulares como los tensores de inercia que componen la ecuación anterior se encuentran expresados en la base solidaria al cuadricóptero. Para realizar dicha derivada se utiliza nuevamente la fórmula de la derivada de un vector:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Lo que se obtiene de dicha derivada es:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \Pi_{O'_q}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \dot{\omega}_q + \Pi_{O'_Mx}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_3) \vec{k} - \Pi_{O'_My}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_4) \vec{k} +$$

$$+\vec{\omega}_q \times (\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \vec{\omega}_q + \Pi_{O'Mx}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} (\omega_1 + \omega_3) \vec{k}' - \Pi_{O'My} (\omega_2 + \omega_4) \vec{k}')$$

A partir del cálculo de esta derivada podemos reescribir la segunda cardinal. Teniendo en cuenta que $I_{zzmx} = I_{zzmy}$ y que $I_{xx} = I_{yy}$ y operando con dicha ecuación se la puede llevar a la forma:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{qx'} \\ \dot{\omega}_{qy'} \\ \dot{\omega}_{qz'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{qy'} \omega_{qz'} (I_{yy} - I_{zz}) + \omega_{qy'} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ \omega_{qx'} \omega_{qz'} (-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{qx'} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ -I_{zzm} (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4) \end{pmatrix} + M_G^{ext}$$

2.5. Fuerzas y momentos involucradas

Para completar el análisis del sistema es fundamental conocer las expresiones de las fuerzas y los momentos involucrados. Por un lado se debe considerar la acción del peso en el sistema. Además debemos conocer con precisión las fuerzas y momentos que introducen las hélices del cuadricóptero ya que son estos los elementos sobre los cuales se pueden realizar las acciones de control. Finalmente consideraremos también el efecto del viento. Esta última es una fuerza que no puede conocerse a priori y será considerada como una perturbación en el sistema. Recordamos que las bajas velocidades a las que el sistema se mueve nos permiten despreciar las fuerzas aerodinámicas, a excepción de aquellas que tienen como origen el giro de las hélices.

2.5.1. Peso

Como ya se aclaró anteriormente, debido a la pequeña variación de la altura, el peso del cuadricóptero será considerado constante. Esta fuerza se aplica sobre el centro de masa del sistema, cabe recordar que en el presente análisis se considera la segunda cardinal en torno a dicho punto. Por lo tanto la distancia entre el eje en el cual se calculan los momentos y el punto de aplicación es cero. Recordando que:

$$M = \vec{d} \times \vec{F}$$

se deduce trivialmente que el momento del peso es cero. La expresión para el peso es:

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

Insistimos en el hecho que nos interesa conocer las fuerzas en el sistema solidario al cuadricóptero. Para expresar esta fuerza en dicho sistema se multiplica el peso por la matriz H_I^q . Lo que se obtiene es:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \psi \\ -\cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix} Mg$$

2.5.2. Fuerzas y momentos de las hélices

La teoría de fluidos que explica el comportamiento de las hélices es compleja y ampliamente difundida por lo que no es de interés desarrollarla en profundidad en este trabajo. Diversa bibliografía puede ser consultada en donde se explican adecuadamente los fenómenos involucrados en las fuerzas aerodinámicas presentes en una

hélice. Sin embargo si parece pertinente realizar un breve resumen de dichas fuerzas. Para el presente análisis consideraremos una hélice rotando en sentido antihorario, el razonamiento para una hélice rotando en sentido opuesto es análogo. En la figura 2.3 se observan dos vistas de la misma hélice. En la figura 2.3a puede observarse una hoja de la hélice. En la figura 2.3b se representa una vista transversal de la hélice con las fuerzas aerodinámicas involucradas.

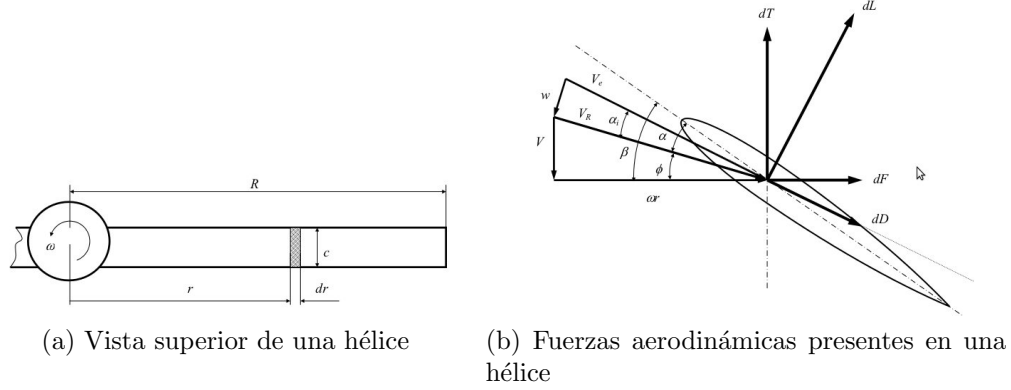


Figura 2.3: Vistas de una hélice y diagrama de fuerzas aerodinámicas presentes

La *Blade Element Theory* (BET) intenta explicar las fuerzas presentes en la hélice considerando en primer lugar las fuerzas en un elemento de área infinitesimal de la hélice. Una vez halladas estas fuerzas se integra sobre el total de la superficie obteniendo así las fuerzas y momentos totales. Como se explica en ??, las fuerzas presentes sobre un elemento de área de la hélice son la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*, dichas fuerzas se encuentran representadas en la figura 2.3 como dL y dD respectivamente. La forma que tienen dichas fuerzas es:

$$dL = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_L c r^2 dr$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho_A \omega_p^2 C_D c r^2 dr$$

Donde ρ_A es la densidad del aire, ω_p la velocidad angular de la hélice, r la distancia del elemento de hélice al eje de la hélice, c es la longitud promedio de la cuerda de la hélice ², C_L y C_D son coeficientes adimensionados.

La fuerza infinitesimal de empuje (dT) puede escribirse en función de las fuerzas de *lift* y de *drag* de la siguiente forma:

$$dT = dL \cos \varphi_I - dD \sin \varphi$$

Realizando la aproximación que φ es un ángulo pequeño y que la fuerza de *lift* es al menos un orden mayor que la de *drag* se puede afirmar que:

$$dT \approx dL$$

²segmento imaginario que une el borde de ataque con el borde de fuga

El empuje por lo tanto puede calcularse como la integral de dT respecto de r . Considerando que la hélice consta de dos hojas, se obtiene que:

$$T = \frac{1}{3} \rho_A C_L c R_P^3 \omega_p^2 \quad (2.4)$$

Donde R_P es el radio de la hélice. En todo momento tenemos dos fuerzas (una sobre cada hoja de la hélice) en dirección vertical y hacia arriba. Si nos referimos a la configuración de la figura 2.3b, el momento de las fuerzas dT es hacia la izquierda para la hoja considerada, sin embargo para la otra hoja este momento será hacia la derecha. Se puede concluir entonces que el torque neto que aporta esta fuerza en torno al eje de rotación de la hélice es nulo.

Intentaremos ahora obtener la resultante de las fuerzas horizontales sobre la hélice y el torque de dichas fuerzas. Comenzaremos por analizar que sucede con las sumas de las fuerzas, para luego proceder a calcular el momento de las mismas. Consideremos ahora la fuerza dF como la que se muestra en la figura 2.3b. Como se observa en la figura dicha fuerza es hacia la derecha. Si consideramos la fuerza horizontal sobre la otra hoja de la hélice, se obtiene una fuerza hacia la izquierda. Por lo tanto la suma de las fuerzas horizontales es nula. Sin embargo los momentos de las fuerzas en una y otra hoja de la hélice no se anulan, el momento que producen ambas es en la dirección de k_q . Por lo tanto el momento total será la suma de los momentos infinitesimales en toda la superficie de una hoja de la hélice multiplicado por la cantidad de hojas, es decir 2.

En primer lugar escribimos la fuerza horizontal como una composición de la fuerza de *lift* y la fuerza de *drag*.

$$dF = dD \cos \varphi + dL \sin \varphi \approx dD + dL \left(\frac{V}{\omega_p r} \right)$$

En esta ecuación V y $\omega_p r$ representan la velocidad del flujo de aire en las direcciones vertical y horizontal respectivamente. Operando se obtiene el momento total de la hélice en la dirección entrante:

$$Q = \frac{1}{4} \rho_A c R_P^4 (C_D + K) \omega_p^2 \quad (2.5)$$

En resumen, la teoría BET nos permite afirmar que sobre cada hélice del cuadricóptero que rota en sentido antihorario se aplicará una fuerza en la dirección \vec{k}_q cuyo módulo se expresó en la ecuación 2.4 y un momento en la dirección \vec{k}_q cuyo módulo es lo expresado en la ecuación 2.5. Para una hélice rotando en sentido antihorario se obtiene exactamente los mismos resultados excepto que el momento es en sentido opuesto.

Hasta aquí sabemos que sucede las fuerzas y momentos aplicados sobre una hélice. Nos concentraremos ahora en estudiar como influyen estas fuerzas y momentos en el cuadricóptero. Para lo que sigue continuaremos trabajando con las convenciones adoptadas en 2.1.

A partir de lo estudiado anteriormente se deduce trivialmente que el empuje de las hélices puede expresarse en el sistema S_q como:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \vec{T}_i = \sum_{i=1}^{i=4} T_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se determinó que las fuerzas de empuje no introducen un momento neto en el eje de las mismas. Sin embargo no debemos perder de vista que la segunda cardinal fue planteada en el centro de masa del sistema, por lo tanto respecto de dicho punto las fuerzas sí introducen un momento que puede calcularse como $M1 = L\vec{x}' \times T1\vec{k}_q$ para el motor 1. La expresión del momento es análoga para los restantes motores.

Debemos considerar además el momento obtenido para cada hélice en la dirección \vec{k}_q . Cabe recordad que se dedujo que para hélices rotando en sentido anti- horario se tiene un momento positivo, mientras que para una hélice rotando en sentido horario el momento es negativo. Realizando estas consideraciones es posible afirmar que la suma total de los momentos es:

$$M_G^{ext} = \begin{pmatrix} L(T2 - T4) \\ L(T3 - T1) \\ Q_1 - Q2 + Q3 - Q_4 \end{pmatrix}$$

En base al estudio realizado se podrían conocer dichas relaciones calculando los parámetros que dependen de la geometría de la hélice, sin embargo este estudio resulta tedioso y la mayor parte de los métodos existentes para determinar dichos parámetros con buena precisión son destructivos. Por lo tanto se optó por obtener dichas respuestas en forma experimental. El proceso detallado puede consultarse en el anexo ???. En dichos experimentos se obtuvo que:

$$T = 3,5296 \times 10^{-5}\omega^2 - 4,9293 \times 10^{-4}\omega$$

$$Q = 1,69 \times 10^{-6}\omega^2 - 6,42 \times 10^{-5}\omega$$

Estos resultados parecen adecuados respecto de lo desarrollado teóricamente ya que ambas respuestas son cuadráticas.

2.6. Modelo en variables de Estado

Luego de realizados los estudios sobre la cinemática y dinámica del sistema y luego de comprender cabalmente las fuerzas y momentos involucrados se procede a construir el modelo en variables de estado.

Se debe aclarar que la elección realizada del vector de estados se debe exclusivamente a la conveniencia práctica que se encuentra al trabajar con las variables expresadas en el sistema del cuadricóptero. Esta conveniencia se ve reflejada en dos aspectos, en primer lugar las simplificaciones que introduce trabajar con estas variables en el marco de un desarrollo teórico de las ecuaciones que gobiernan al sistema, por otra parte, al disponer de sensores montados sobre el cuadricóptero, los mismos medirán las velocidades angulares y lineales en el sistema S_q . Bajo esta elección parece razonable escoger el vector de estados de la siguiente manera:

$$X = \{x, y, z, v_{qx'}, v_{qy'}, v_{qz'}, \theta, \varphi, \psi, \omega_{qx'}, \omega_{qy'}, \omega_{qz'}\}$$

Las fuerzas y momentos dependen todos de las velocidades angulares de las hélices, luego de las simplificaciones realizadas el vector entrada se compone simplemente de las velocidades de las hélices es decir que:

$$u = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

El modelo en variables de estado es por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_{q_z'} \cos \varphi \cos \theta + v_{q_y'} (\cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta) + v_{q_z'} (\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) \\
\dot{y} &= v_{q_z'} \cos \varphi \sin \theta + v_{q_y'} (\cos \psi \cos \theta + \sin \theta \sin \varphi \sin \psi) + v_{q_z'} (\cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi) \\
\dot{z} &= -v_{q_z'} \sin \varphi + v_{q_y'} \cos \varphi \sin \psi + v_{q_z'} \cos \varphi \cos \psi \\
\dot{\psi} &= \omega_{q_x'} + \omega_{q_z'} \tan \varphi \cos \psi + \omega_{q_y'} \tan \varphi \sin \psi \\
\dot{\varphi} &= \omega_{q_y'} \cos \psi - \omega_{q_z'} \sin \psi \\
\dot{\theta} &= \omega_{q_z'} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} + \omega_{q_y'} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \\
\dot{v}_{q_z'} &= v_{q_y'} \omega_{q_z'} - v_{q_z'} \omega_{q_y'} + g \sin \varphi \\
\dot{v}_{q_y'} &= v_{q_z'} \omega_{q_x'} - v_{q_z'} \omega_{q_z'} - g \cos \varphi \sin \psi \\
\dot{v}_{q_x'} &= v_{q_z'} \omega_{q_y'} - v_{q_y'} \omega_{q_x'} - g \cos \varphi \cos \psi + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^4 T_i \\
\dot{\omega}_{q_x'} &= \frac{\omega_{q_y'} \omega_{q_z'} (I_{yy} - I_{zz}) + \omega_{q_y'} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{xx}} + \frac{L(T_2 - T_4)}{I_{xx}} \\
\dot{\omega}_{q_y'} &= \frac{\omega_{q_x'} \omega_{q_z'} (-I_{xx} + I_{zz}) + \omega_{q_x'} I_{zzm} (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{yy}} + \frac{L(T_3 - T_1)}{I_{yy}} \\
\dot{\omega}_{q_z'} &= \frac{-I_{zzm} (\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4)}{I_{zz}} + \frac{Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4}{I_{zz}}
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Appendices

ANEXO A

CÁLCULO DE LOS TENSORES

Bajo estas suposiciones las cantidades de interés en lo que refiere a las dimensiones de sistema son:

- Radio de la esfera central (R)
- Largo de las varillas (L)
- Radio de los motores(r)

A.0.1. Masa del sistema

La masa de los objetos que componen al sistema son:

	Masa por elemento	Cantidad	Masa total
Esfera Central	M_E	1	M_E
Varilla	M_V	4	$4M_V$
Motores	M_M	4	$4M_M$
Masa Total	M		

Cuadro A.1: Masas de los objetos que componen al sistema

A.0.2. Tensor de inercia del sistema

El tensor de inercia del sistema puede calcularse como la suma de los tensores de inercia de los rígidos que lo componen. Se considera como fue expresado anteriormente el centro del cuadricóptero como una esfera maciza. El tensor de inercia de dicha esfera puede calcularse a partir de la definición misma de tensor de inercia, sin embargo por ser una forma geométrica de vasto uso en el campo de la mecánica su tensor de inercia se encuentra ya tabulado. Sucede lo mismo con las restantes formas geométricas que componen al sistema. En el caso de la esfera se tiene que el tensor de inercia respecto de su centro de masa es:

$$\Pi_{G_E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_E \begin{pmatrix} \frac{2R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2R^2}{5} \end{pmatrix}$$

En este caso el centro de masa del sistema corresponde al centro de masa de la esfera a partir de ciertas suposiciones que se realizan sobre la simetría del sistema. Por dicho motivo podemos afirmar que $\Pi_{G_E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \Pi_{O'_E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}}$, siendo O' el centro de la esfera.

Por otra parte el tensor de inercia de una varilla, cuya longitud coincide con el versor \vec{i}_q , respecto a su centro de masa tiene la forma:

$$\Pi_{G_{V_x}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} \frac{L^2}{24} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}$$

Sin embargo resulta mucho más interesante obtener el tensor de inercia expresado respecto del centro de masa del sistema. Para realizar dicho cambio se utiliza el Teorema de Steiner. Dicho teorema afirma que: $\Pi_Q = \Pi_G + J_Q^{M,G}$, donde los términos de $J_Q^{M,G}$ pueden calcularse como: $(J_Q^{M,G})_{\alpha\beta} = M(G-Q)^2\delta_{\alpha\beta} - M(G-Q)_\alpha M(G-Q)_\beta$. El término $\delta_{\alpha\beta}$ es conocido como Delta de Kronecker. Su valor es uno si $\alpha = \beta$ y cero si $\alpha \neq \beta$. En el caso en consideración dicha matriz resulta en:

$$J_{O'}^{M_{V_x}, G} = M_V \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{L}{2} + R)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{L}{2} + R)^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el momento de inercia total de dicha varilla es:

$$\Pi_{O'_{V_x}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} \frac{L^2}{24} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3} + \frac{LR^2}{2} + R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} + \frac{LR^2}{2} + R^2 \end{pmatrix}$$

Análogamente, el tensor de inercia de una varilla cuya longitud se encuentra respecto de la dirección \vec{j}_q respecto del centro de masa del sistema es:

$$\Pi_{O'_{V_y}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_V \begin{pmatrix} \frac{L^2}{3} + \frac{LR^2}{2} + R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{3} + \frac{LR^2}{2} + R^2 \end{pmatrix}$$

Sucede algo similar en lo que respecta a los motores. Tendremos un tensor de inercia para los motores que se encuentran sobre la dirección \vec{i}_q y otro para los motores que se encuentran sobre la dirección \vec{j}_q . Aproximando cada motor por un cilindro obtenemos en el primer caso el tensor de inercia tiene el valor:

$$\Pi_{O'_{M_x}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4} + (L + R + r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + (L + R + r)^2 \end{pmatrix}$$

En el otro caso se tiene que:

$$\Pi_{O'_{M_y}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = M_M \begin{pmatrix} \frac{r^2}{4} + (L + R + r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} + (L + R + r)^2 \end{pmatrix}$$

Llamaremos por conveniencia I_{zz_m} al termino $\frac{r^2}{2} + (L + R + r)^2$. El tensor de inercia del sistema completo puede calcularse como:

$$\Pi_{O'}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \Pi_{O'_E}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'_{Vx}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'_{Vy}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'_{Mx}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} + 2\Pi_{O'_{My}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}}$$

Podemos escribir dicho tensor de inercia como:

$$\Pi_{O'_{My}}^{\{\vec{i}_q, \vec{j}_q, \vec{k}_q\}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$