UBP
UNIVERSIDAD BLAS PASCAL

Diplomatura en Asesoramiento Financiero

Módulo / Armado de carteras de inversión y medición de riesgos

Índice

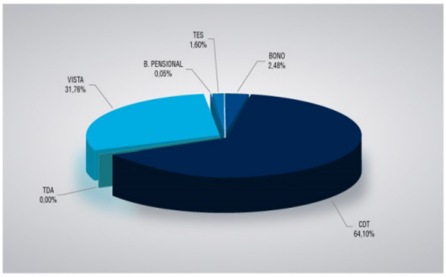
Módulo / Armado de carteras de inversión y medición de riesgos

| presentación

Bienvenido al Módulo Armado de Carteras de Inversión y Medición de Riesgos.

Lo invito a ver en la plataforma el video presentación de la materia.

Como habrá visto en el video, este trayecto pretende abordar conceptos fundamentales que un administrador de portafolios debe conocer a la hora de armar una cartera de inversión para sus clientes. Los mismos tendrán que ver con el análisis de los retornos, así como de los riesgos de un portafolio en contraposición con lo que tener posiciones en forma individual puede implicar.



Principalmente vamos a desarrollar los siguientes temas:

- Unidad 1: Aprender a calcular medidas básicas para el entendimiento de los retornos y riesgos de los activos a incluir en un portafolio.
- Unidad 2: Entender desde distintas ópticas (conceptual, matemática, gráfica) el criterio de la diversificación de un portafolio y sus efectos. Entender los criterios de media-varianza propuestos por Markowitz para analizar portafolios.
- Unidad 3: Comprender qué efecto genera la inclusión del activo libre de riesgo en el mundo de Markowitz y derivar la CML a partir de portafolios de separación.
- Unidad 4: Entender el modelo de pricing de activos que propone la SML. Comparar este modelo contra los modelos anteriores de CML.

| objetivos

- Conocer las principales teorías modernas de armado de portafolios de inversión.
- Aprender a calcular medidas básicas para el entendimiento de los retornos y riesgos de los activos a incluir en un portafolio.
- Entender los criterios de media-varianza propuestos por Markowitz para analizar portafolios.
- Entender desde distintas ópticas (conceptual, matemática, gráfica) el criterio de la diversificación de un portafolio y sus efectos.
- Comprender qué efecto genera la inclusión del activo libre de riesgo en el mundo de Markowitz y derivar la CML a partir de portafolios de separación.
- Entender el modelo de pricing de activos que propone la SML y así comparar este modelo contra los modelos anteriores de CML.

Unidad 1

- Cálculo de Rdto de 1 activo
- Fuentes de series temporales
- La media. Fórmula de cálculo de la media
- El riesgo
- La varianza
- Fórmula de cálculo de la varianza
- Rendimiento de un Activo
- Rentabilidad simple o no continua
- Rentabilidad continúa
- Retorno medio de un activo
- Varianza del retorno de un activo
- Matriz de retornos y dispersiones
- Gráfico de retorno y dispersión

Unidad 2

- Bala de Markowitz
- Frontera eficiente
- Índice de Retorno sobre Riesgo
- La diversificación
- Riesgo diversificable y no diversificable
- Cantidad óptima de activos para alcanzar el riesgo de mercado
- Portafolio Eficiente
- Retorno de un portafolio
- Covarianza y coeficiente de correlación
- Riesgo de un portafolio de 2 activos
- Generalización de la fórmula de riesgo de un portafolio a N activos
- Matriz de varianzas y covarianzas
- Cómo anualizar los datos
- Efecto de la diversificación
- Efecto sobre el riesgo de agregar activos al portafolio
- Portafolio de mínima varianza
- Diversificación entre acciones y bonos en Argentina
- Formas que puede tomar la frontera eficiente
- Frontera eficiente cuando las ventas en corto son permitidas
- Activo libre de riesgo

Unidad 3

- Inclusión del activo libre de riesgo en el modelo de Markowitz: Portafolios de separación & CML
- Dos derivaciones: imposibilidad de tomar crédito y tasa diferencial para tomar
- Criterio media-varianza en la selección de activos
- Cálculo del retorno y riesgo del portafolio obtenido
- Posición de los portafolios construidos en el gráfico de retorno-riesgo
- Portafolios de separación

Unidad 4

- SML O SINGLE INDEX MODEL
- ○ Requisitos
- ○ Supuestos
- ○ Variancia y covarianza de retornos de activos en el SML model
- ○ El retorno de un portafolio
- ○ Y el riesgo de un portafolio
- ○ Cálculo del beta del portafolio
- ○ Cálculo del alpha del portafolio
- Estimar beta
- Errores en las betas
- Betas ajustadas
- Correlación de activos a partir de las betas
- El modelo de mercado
- CAPM / SUPUESTOS
- Derivación del modelo CAPM
- Equilibrio del modelo por arbitraje
- Security Market Line (SML)
- Punto de contacto entre la CML y la SML
- Comparación entre CML (Markowitz) y SML

Material Obligatorio

- Contenidos desarrollados en cada unidad del presente módulo.

Material complementario

- BODIE, KANE, Y MARCUS (2005). The Capital Asset Pricing Model. Mc Graw Hill
- BODIE, KANE y MARCUS (2004). Principios de inversiones. Quinta edición. Mc Graw Hill
- MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. En: The Journal of Finance, Vol. 7, N°1, Marzo de 1952.
- FRANK K. KELLY AND KEITH C. BROWN (2003). Investment Analysis and Portfolio management. South-Western.
- CFA LEVEL I – Study Notes. CFA Institute.
- CFA LEVEL II – Study Notes. CFA Institute.

| glosario

Arbitraje

Operación que permite obtener una ganancia sin incurrir en los riesgos que implican los movimientos del mercado. Por ejemplo, tomemos el caso de las acciones de una compañía que son negociadas en dos bolsas diferentes. Por algún motivo, liquidez por ejemplo, los precios de esta acción pueden ser diferentes en estas dos bolsas. Por lo tanto, un inversionista que tenga acceso a las dos bolsas podría comprar la acción donde está más barata y venderla donde está más cara, ganando la diferencia, sin incurrir en los riesgos de la oscilación de precios, por tratarse de una acción de la misma empresa.

Alpha

Alfa es el término utilizado para describir el exceso de rentabilidad de una inversión para un nivel de riesgo determinado. Un alfa elevado indica un buen comportamiento en relación con el mercado.

Beta

La Beta describe la sensibilidad de la rentabilidad de un fondo con respecto a la rentabilidad del mercado. El mercado tiene una beta de 1 dado que se mueve en línea consigo mismo. Una cartera posicionada más agresivamente tiene una beta superior a uno, de manera que si el mercado sube como se prevé, la cartera subirá más que el mercado; una beta superior implica rentabilidades potenciales más altas, pero también un mayor riesgo. El portfolio manager posiciona la cartera con una beta inferior a uno si cree que el mercado puede bajar, de manera que el precio del fondo caiga menos que el mercado; una beta más baja implica rentabilidades esperadas más bajas, pero también un menor riesgo.

CAPM

Son las siglas en inglés para Capital Asset Pricing Model. Es la teoría de distribución de activos para una cartera, desarrollada por el premio Nobel William Sharpe. Para decidir la distribución de activos más eficiente, toma en cuenta las relaciones entre los retornos y los riesgos esperados de los diferentes activos. El CAPM relaciona el retorno esperado del activo con su riesgo no diversificable.

Correlación

La correlación mide la relación existente entre las inversiones de una cartera y el índice de referencia. Una correlación perfecta se da cuando las inversiones se comportan exactamente de la misma forma. La correlación perfecta está representada por 1; una correlación perfecta negativa por -1. Una correlación superior a 0,7 nos indica una fuerte correlación; entre 0,4 y 0,69 la correlación es modesta. Si ésta es inferior a 0,3 no existe apenas correlación. Si la correlación es -1, lo que nos indica es que los activos se mueven consistentemente en dirección opuesta. Las carteras que combinan activos con correlaciones bajas proporcionan ventajas de diversificación o reducción de riesgo, sin potencialmente disminuir la rentabilidad total de la cartera.

Diversificación

Es el efecto de la reducción del riesgo de mercado, conseguido por la elección de activos con baja correlación entre sí en un mismo portafolio.

Rentabilidad Media

Es utilizada para comparar las rentabilidades de un activo o portafolio en distintos períodos de tiempo de manera consistente. La unidad de tiempo en la que se mide puede variar. Es posible por ej. Obtenerla a partir de datos diarios, semanales o mensuales. A su vez, es posible siempre anualizar los datos de frecuencias menores una vez calculada la media.

SML

La Security market line (SML) es la línea que representa los distintos niveles de retorno esperado para cada nivel de riesgo sistémico de todos los activos de un mercado. Es un subproducto del CAPM.

S&P500

Es un índice calculado por Standard & Poor`s que mide la rentabilidad de una cartera formada por 500 acciones de empresas americanas de primera línea de diversos sectores de la economía americana. Las acciones son ponderadas en la cartera por su valor de mercado.

Ventas en corto o short sale

Es una operación de venta en descubierto con títulos valores obtenidos en préstamo.

Volatilidad Anualizada

La volatilidad es una medida utilizada para evaluar el riesgo de un activo o portafolio. Describe la banda de rentabilidades más probables a obtener por el mismo. En términos estadísticos, es la desviación estándar anualizada de la distribución de la rentabilidad. Una volatilidad superior en las rentabilidades mensuales significa que existe una banda mayor de rentabilidades probables en el futuro, o una mayor incertidumbre respecto a la rentabilidad a obtener. La mayoría de los inversores equipararían esta mayor incertidumbre a un mayor riesgo.

Bienvenido a la primera unidad, lo invito a ver en la plataforma el video presentación de los temas.

Cálculo de Rendimiento de 1 activo

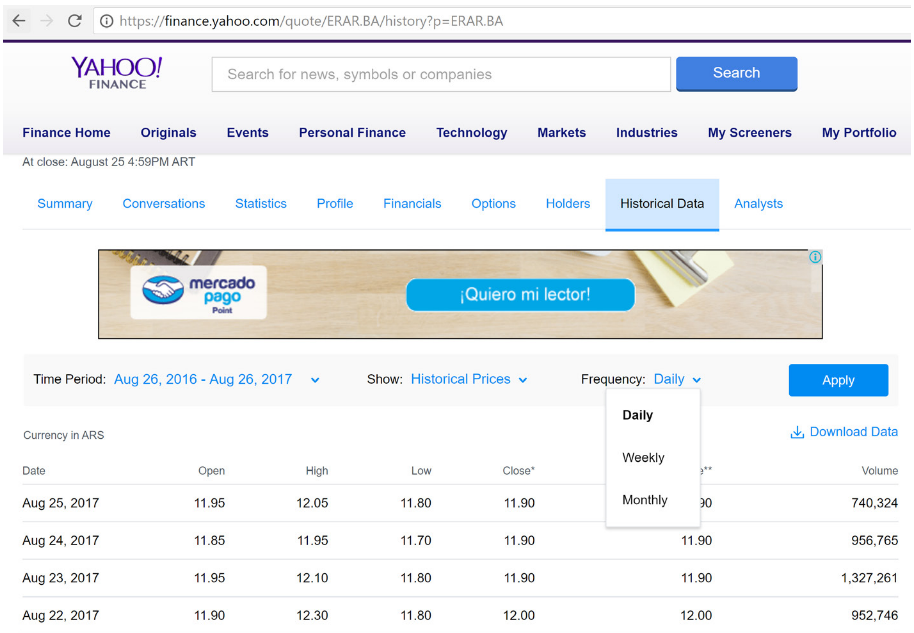
Para calcular el rendimiento esperado de un activo, nos basaremos en lo mejor que tenemos disponible para hacer una apreciación sobre la evolución de dicho activo, la series históricas de precios del mismo activo.

Una serie temporal de precios es el conjunto de observaciones que puede hacerse respecto de una variable determinada en un período regular de tiempo, un minuto, un día, un mes, etc. Cuando uno intenta determinar el valor que podría adoptar una determinada variable, debe considerar toda la historia de observaciones para poder aproximarse a su verdadero valor.

¿De dónde obtener las series temporales de un activo?

Existen muchas plataformas pagas como Bloomberg, IQfeed, Reuters, que le permitirán al administrador de portafolios hacerse de las series de precio histórico de los activos. Sin embargo, sin necesidad de una suscripción paga algunos sitios como finance.yahoo.com permiten obtener las series históricas de prácticamente todas las acciones del mundo.

Para ello, es necesario ingresar a la pestaña “Historical Prices” luego de buscar un determinado activo en el sitio de finance.yahoo.com. Una vez allí podrán elegirse las fechas desde y hasta cuando se busca la serie, la periodicidad y también si uno desea conocer la serie de pagos de dividendos y splits. En la imagen a continuación se presenta el sitio.



La media:

La media de una variable aleatoria X es aquel valor de la variable donde se suponen concentradas las probabilidades.

Fórmula de cálculo de la media:

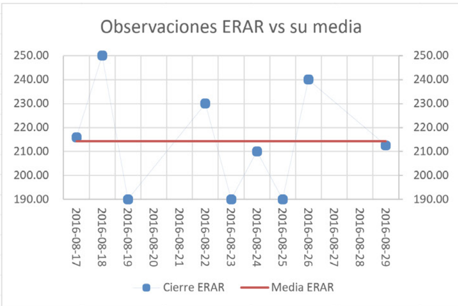
Siendo:
X= la variable aleatoria

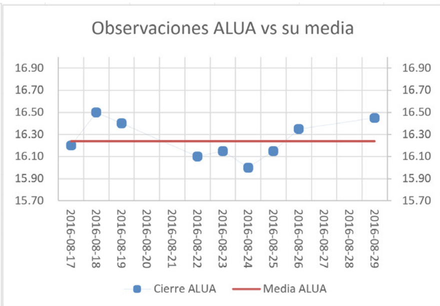
Nota: si las probabilidades de ocurrencia de las observaciones son iguales, es decir , podemos reescribir la fórmula de la siguiente manera:

Dicho de una forma más simple, sumamos todas las observaciones de las cuales dispones y las dividimos por la cantidad de observaciones.

El riesgo

Supongamos dos activos, Siderar (ERAR.BA) y Aluar (ALUA.BA) e imaginemos que descargamos sus series históricas y nos encontramos con estas dos gráficas donde podemos ver, en rojo la media de las observaciones y en azul, cada una de las observaciones (precios de cierre) que ha tenido el activo. Observen las imágenes que representan estos casos.





A simple vista podríamos concluir que las observaciones de ERAR se separan más de su media que las de ALUA. Por este motivo, podríamos decir que la media de ALUAR tiene más fuerza predictiva que la de ERAR. O dicho de otro modo, que el riesgo de ERAR es mayor al de ALUAR.

La varianza

La forma matemática de medir estas diferencias respecto de la media es “la varianza”. La varianza es un promedio ponderado de las distancias a la media elevadas al cuadrado.

¿Por qué elevadas al cuadrado?

Si simplemente sumáramos las distancias entre cada observación y la media, dado que algunas observaciones se encuentran por encima de la misma y otras por debajo, algunas serían positivas y otras negativas. Al sumarlas, se cancelarían, tendiendo el número final a cero. De manera que la varianza utiliza el artilugio matemático de elevar al cuadrado las diferencias para que las diferencias negativas al multiplicarse por sí, den un número positivo, y que al sumarlas no se cancelen. Esto se da por el hecho de que al elevar al cuadrado una diferencia negativa, nos da un número positivo.

Date	Cierre ERAR	Media ERAR	Dif. A la Media	Dif. Cuadráticas
2016-08-17	215.90	214.32	1.6	2.5
2016-08-18	250.00	214.32	35.7	1,273.3
2016-08-19	190.00	214.32	(24.3)	591.3
2016-08-22	230.00	214.32	15.7	246.0
2016-08-23	190.00	214.32	(24.3)	591.3
2016-08-24	210.00	214.32	(4.3)	18.6
2016-08-25	190.00	214.32	(24.3)	591.3
2016-08-26	240.00	214.32	25.7	659.6
2016-08-29	212.50	214.32	(1.8)	3.3
SUMA			(0.4)	3,977.2

$[X_i - E(X)]^2$

La suma de las diferencias, al ser cuadráticas, no se cancela

Tiende a cero

Fórmula de cálculo de la varianza:

Una vez calculadas las diferencias cuadráticas de cada observación respecto de su propia media, lo único que restará será multiplicar cada una de esas observaciones por su probabilidad de ocurrencia y sumarlas.

Siendo:

X= la variable aleatoria

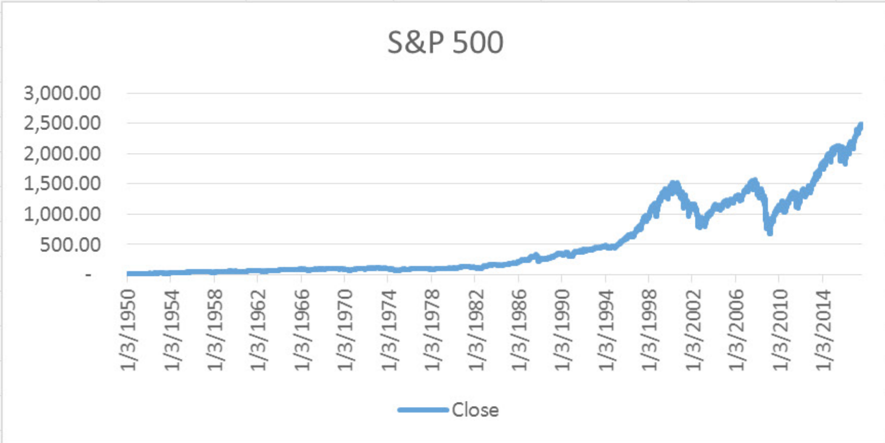
Nuevamente, si las probabilidades de ocurrencia de las observaciones son iguales, es decir , podemos reescribir la fórmula de la siguiente manera:

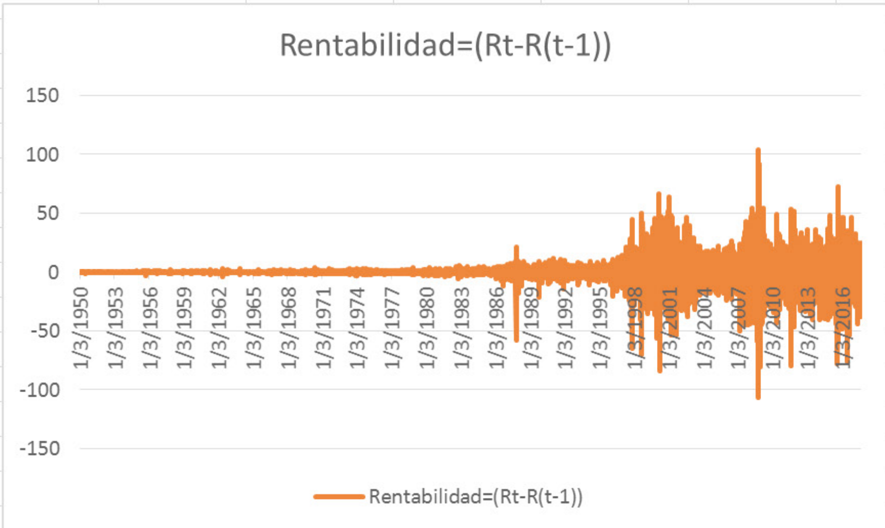
Rendimiento de un Activo

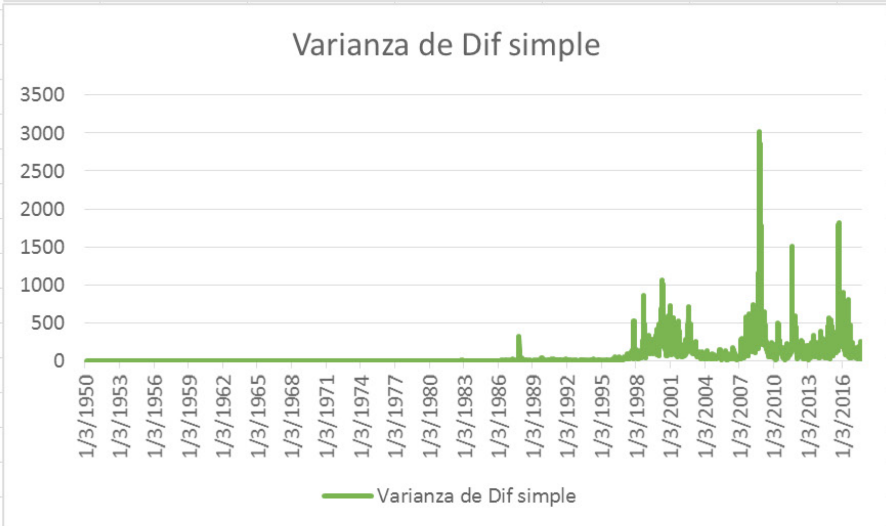
Lo primero que podríamos intentar a la hora de definir la ganancia o pérdida que nos ha arrojado un activo es calcular la resta simple entre el valor actual o de venta (y un valor anterior o de compra (de la siguiente manera:

Sin embargo esta primera forma de calcular el retorno importa dos inconvenientes. En primer lugar, dificulta las comparaciones ya que depende de la unidad en que están medidos los precios. Por ejemplo, en el caso anterior en que veíamos las acciones de ERAR cotizando en la zona de los 200 pesos y las de ALUAR más cercanas a la zona de los 16 pesos. Una suba de $1 en ambos papeles, a primera vista daría la sensación de que la ganancia es idéntica con esta fórmula. Sin embargo, estamos olvidando que hemos tenido que invertir mucho más ($200) en la acción de ERAR que en la de ALUA ($16). De manera que preferiremos calcular las rentabilidades a partir de alguno de los dos métodos porcentuales que se explicarán a continuación.

El segundo de los problemas es que existe una "proporcionalidad" de las varianzas respecto del nivel de precios. Como podrá observar en el siguiente gráfico para el S&P 500. A medida que unitariamente el índice S&P 500 pasa de valer 16 dólares a 2440, las diferencias entre las observaciones y la media se hacen en términos absolutos cada vez más grandes, haciendo crecer con ello la varianza (riesgo) sin sentido producto del paso del tiempo, cuando en realidad no se ha producido un cambio de riesgo en el activo específico. Cuando ello ocurre, se dice que la serie es "heteroscedastica".







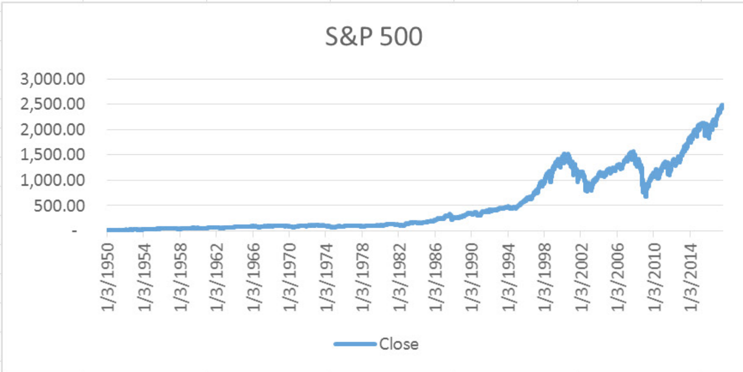
De manera que, para evitar la heteroscedasticidad de la varianza, utilizaremos alguna de las dos fórmulas porcentuales para calcular la rentabilidad.

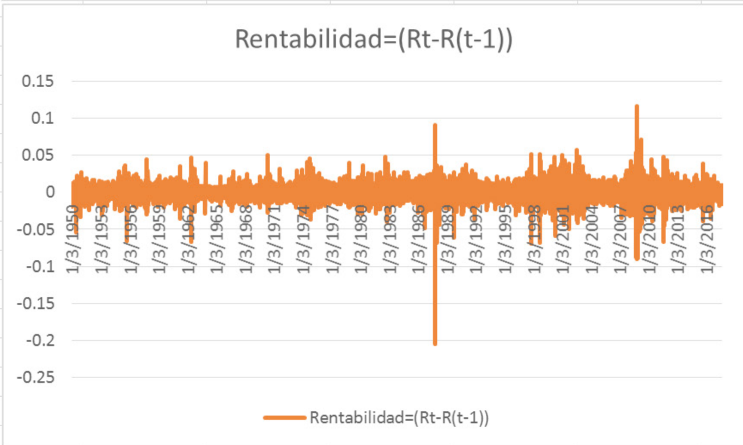
Rentabilidad simple o no continua:
Para calcular la rentabilidad simplemente calcularemos la diferencia simple entre el precio actual y un momento anterior, vista anteriormente, pero esta vez como porcentaje por del valor anterior.

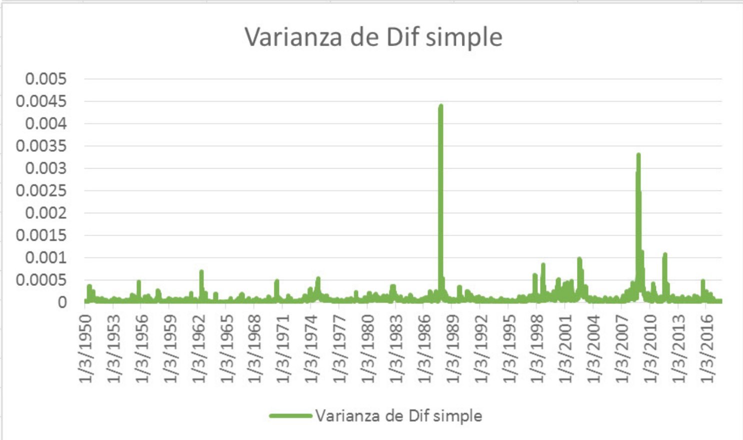
Siendo:

El período t podrá ser de la frecuencia que deseemos, diario, semanal, mensual, etc.
Y, si simplificamos podremos arribar a:

Como podrá observar en los gráficos calculados a partir de la varianza de las rentabilidades, si calculamos la varianza ahora, esta ya no dependerá del valor unitario que tenga el índice S&P500 con el correr del tiempo. Se logra de esta forma una estabilización de la varianza.

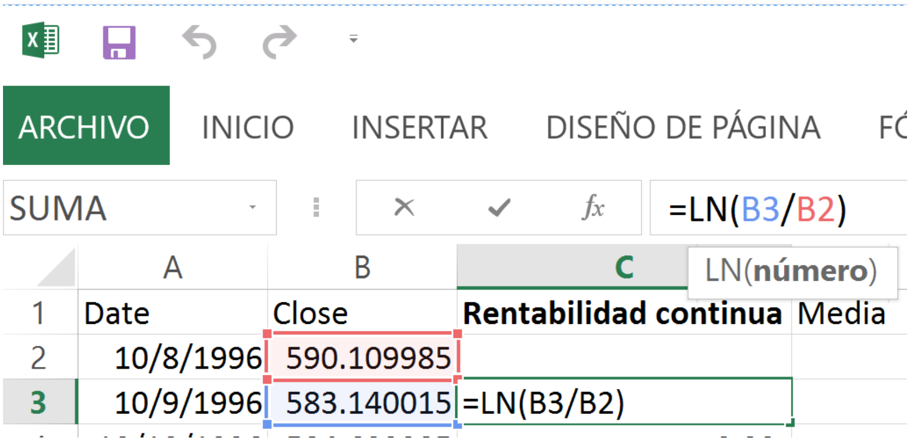






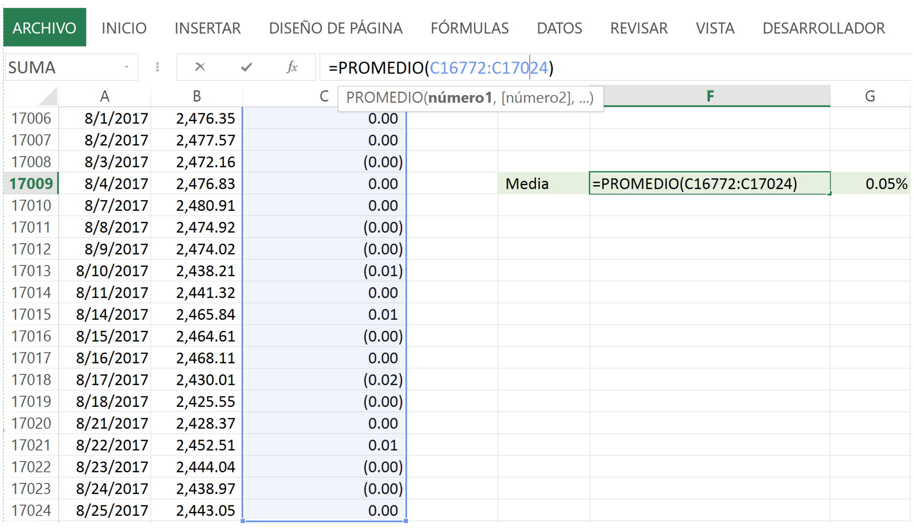
Rentabilidad continúa:
Sin embargo, la fórmula de rentabilidad preferida por los financistas es la de capitalización continua. Esto se debe a que nos permite expresar las rentabilidades sobre más de un período en función de las rentabilidades unitarias.
La fórmula para el caso de la rentabilidad continua es:

En caso de querer realizarlo en el Excel, lo debemos escribir como:



Retorno medio de un activo
Es momento de que comencemos a integrar conceptos. Hemos visto por un lado cómo es el cálculo de un valor esperado o media de una variable y por otro cómo calcular el rendimiento de un activo i para un momento dado del tiempo t. Ahora es momento de mezclar ambas fórmulas, calcularemos la media del retorno para una cantidad de períodos de tiempo n.
La fórmula a utilizar será:

Por ejemplo, calculemos el retorno continuo para 252 ruedas diarias (cantidad de ruedas en 1 año) para el índice Merval y luego promediarlo. Obtendremos al 25/8 un retorno continuo de 0.05% diario.



	A	B	C	E	F	G
17006	8/1/2017	2,476.35	0.00			
17007	8/2/2017	2,477.57	0.00			
17008	8/3/2017	2,472.16	(0.00)			
17009	8/4/2017	2,476.83	0.00	Media	=PROMEDIO(C16772:C17024)	0.05%
17010	8/7/2017	2,480.91	0.00			
17011	8/8/2017	2,474.92	(0.00)			
17012	8/9/2017	2,474.02	(0.00)			
17013	8/10/2017	2,438.21	(0.01)			
17014	8/11/2017	2,441.32	0.00			
17015	8/14/2017	2,465.84	0.01			
17016	8/15/2017	2,464.61	(0.00)			
17017	8/16/2017	2,468.11	0.00			
17018	8/17/2017	2,430.01	(0.02)			
17019	8/18/2017	2,425.55	(0.00)			
17020	8/21/2017	2,428.37	0.00			
17021	8/22/2017	2,452.51	0.01			
17022	8/23/2017	2,444.04	(0.00)			
17023	8/24/2017	2,438.97	(0.00)			
17024	8/25/2017	2,443.05	0.00			

Varianza del retorno de un activo
Como hemos visto anteriormente. No todas las observaciones de una variable aleatoria, caen sobre la media. Ello implica un riesgo, que en el caso de un activo, a medida que aumenta, nos indicaría una menor probabilidad de que la media de retorno se cumpla. Ese riesgo, vamos a medirlo con la varianza de retornos, que calcularemos mezclando la función de varianza vista anteriormente con la de retornos y que identificaremos con la letra griega sigma .

Por otro lado, debe tenerse en cuenta que, como hemos utilizado un artilugio matemático de elevar al cuadrado las diferencias entre las observaciones de los retornos y el retorno medio, para evitar que la sumatoria de los mismos tienda a cero, ahora contamos con una medida cuadrática. Para llevarla nuevamente a términos simples, como tenemos medido el retorno, tendremos que calcular la raíz de toda esta función. Así obtendremos la dispersión standard de los retornos.

Matriz de retornos y dispersiones
Ahora que hemos podido calcular el retorno para cada activo en forma individual y su riesgo (dispersión) en iguales unidades que el retorno. Nos encontramos en el vértice de lo que ha sido el desarrollo del criterio media varianza de selección de activos para un portafolio del economista norteamericano Harry Markowitz. Su paper “Portfolio Selection” de 1952, donde introdujo el criterio media-varianza para la selección de activos, también conocido como “Modern Portfolio Theroy”, le valió el premio Nobel de Economía en 1990.
Inicialmente, lo que podremos hacer es calcular, tal como lo hemos visto en los puntos anteriores la media y dispersión para un conjunto de activos. Lo primero que haremos será obtener la serie histórica (en este caso utilizaremos la periodicidad semanal) para un conjunto de 13 acciones del mercado argentino. Una vez descargadas a una planilla, calcularemos la rentabilidad logarítmica para cada una de las semanas de nuestra muestra.
Una vez que contamos con las rentabilidades semanales para toda la historia de precios que hemos obtenido, calcularemos la media y luego el desvío standard. Finalmente, anualizaremos la media multiplicándola por las 52 semanas que hay en el año y el desvío standard. Para anualizar el desvío debemos multiplicar por la raíz de 52.
Se multiplica por raíz de 52 ya que:

$$\sigma^2_{T\,dias} = \sigma^2_{t\,dia1} + \sigma^2_{t\,dia2} + \ldots + \sigma^2_{diat}$$

Suponiendo varianza Cte.

$$\sigma^2_{T\,dias} = T\sigma^2_{dia1}$$

$$\sigma_{Tdias} = \sigma_{dia1}\sqrt{T}$$

Así obtendremos los siguientes datos:

	Ret. Medio Continuo Anualizado	**Desvío Standard (riesgo)**
FRAN.BA	15.67%	52.63%
AGRO.BA	28.34%	54.37%
GGAL.BA	22.26%	53.47%
CRES.BA	21.93%	43.72%
CAPU.BA	31.15%	58.97%
CECO2.BA	13.75%	51.46%
MOLI.BA	21.29%	46.01%
MIRG.BA	34.09%	46.85%
SAMI.BA	26.51%	48.63%
ERAR.BA	23.81%	50.98%
COME.BA	20.41%	60.81%
TECO2.BA	17.60%	50.17%
YPFD.BA	13.42%	48.71%

Gráfico de retorno y dispersión

A partir de los mismos podríamos construir un gráfico cuyo eje de ordenadas muestre los retornos y el eje de abscisas muestre las dispersiones. Desde luego que el sector preferido para que una acción se sitúe será el cuadrante superior izquierdo. Es decir, donde se encuentran los activos de mayor retorno y menor riesgo.

Cierre de la unidad

Hemos visto cómo calcular el retorno y dispersión para un activo individualmente considerado. Este es el primer paso para la construcción de un portafolio, y será la base a partir de la cual en las siguientes unidades llegaremos al concepto de retorno y riesgo pero a nivel de portafolio.

A su vez, hemos presentado el gráfico cartesiano de retorno y dispersión, encontrando la dirección de cada activo en dicho mapa. Y, este también será el mundo en el cual nos moveremos hacia delante, cuando incorporemos portafolios al gráfico.

Primeros pasos para el armado de un portafolio

Cuando uno comienza a analizar un portafolio, el primer paso será entender los riesgos y rendimientos individuales y conjuntos de los activos que tenemos a disposición para invertir. La idea de esta actividad es que pueda practicar, encontrar y entender cómo trabajar con esta información.

1- Obtenga una serie histórica de 12 activos.

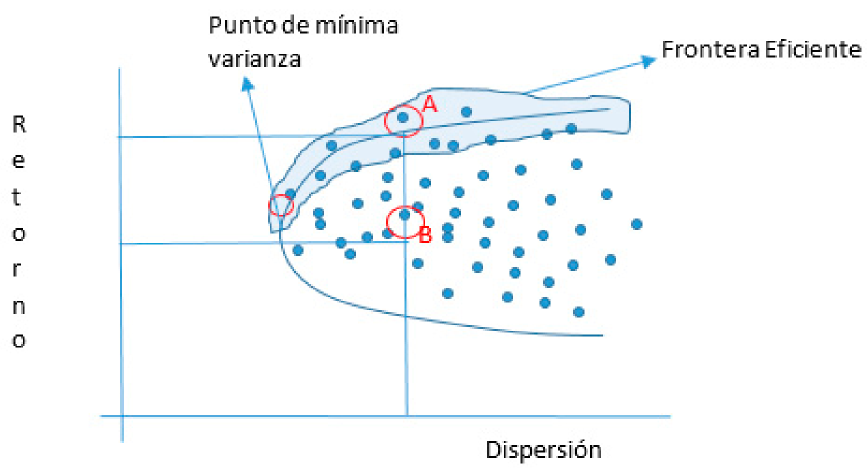
2- Construya las series de rendimientos logarítmicos.

3- Calcule media y varianza para cada rendimiento individual.

4- Calcule la matriz de varianzas y covarianzas.

Bala de Markowitz

Markokitz extendió el análisis que nosotros estamos haciendo para 13 acciones del mercado argentino para una gran cantidad de activos. De esta forma llegó a la conclusión que si ploteamos el universo de activos riesgosos en un gráfico de retorno y dispersión como el anterior, los mismos se dispondrán en una forma de bala.
Si por ejemplo analizamos el activo A y el B dentro de dicha bala podremos fácilmente concluir que el activo A es mejor que el B puesto que tiene un retorno esperado mayor a igual nivel de riesgo.



Frontera eficiente

Marcada en celeste en el gráfico anterior, es la combinación de activos que, para un nivel dado de rentabilidad, proporcionan el mínimo riesgo 0, o dicho de otro modo, para un nivel dado de riesgo, proporcionan la máxima rentabilidad.

A su vez, en un extremo de la frontera encontraremos siempre al activo (o portafolio) que ofrece la mínima varianza. Allí es donde tendrá su extremo menos riesgoso la frontera eficiente. Y en el otro extremo encontraremos al activo de máximo retorno. De manera que, la frontera eficiente es el subset de activos que proporcionan el mayor retorno para cada nivel de riesgo y se encuentra comprendida entre el activo de mínima varianza y el de máximo retorno.

Índice de Retorno sobre Riesgo

El análisis previo es posible expresarlo en números si realizamos un índice que mida las unidades de retorno que aporta cada activo por cada unidad de riesgo que uno asume al comprarlo. Al mismo lo daremos en llamar Tetha () y nos dará una aproximación inicial de las preferencias que tendremos respecto de incorporar los activos en nuestro portafolios.

De manera que nuestro índice de retorno sobre riesgo quedará expresado como:

$$\theta = \frac{\bar{R_i}}{\sigma_i}$$

Así si calculamos el índice para las 13 acciones argentinas que seleccionamos, podremos ver cómo quedará a priori nuestra tabla de activos preferidos:

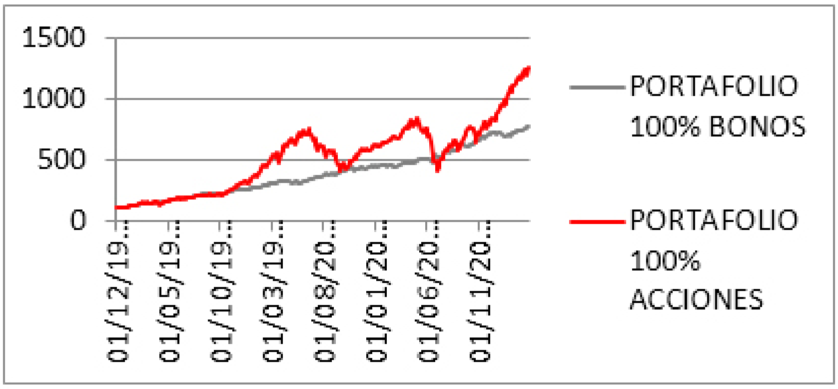
	Desvío Standard (riesgo)	Ret. Medio Continuo Anualizado	$\theta = \frac{\overline{R_i}}{\sigma_i}$	Orden de preferencia
MIRG.BA	46.85%	34.09%	0.73	1
SAMI.BA	48.63%	26.51%	0.55	2
CAPU.BA	58.97%	31.15%	0.53	3
AGRO.BA	54.37%	28.34%	0.52	4
CRES.BA	43.72%	21.93%	0.50	5
ERAR.BA	50.98%	23.81%	0.47	6
MOLI.BA	46.01%	21.29%	0.46	7
GGAL.BA	53.47%	22.26%	0.42	8
TECO2.BA	50.17%	17.60%	0.35	9
COME.BA	60.81%	20.41%	0.34	10
FRAN.BA	52.63%	15.67%	0.30	11
YPFD.BA	48.71%	13.42%	0.28	12
CECO2.BA	51.46%	13.75%	0.27	13

La diversificación

La diversificación del portafolio, implica la posibilidad de incorporar activos a nuestro portafolio con el objetivo de bajar el riesgo total. Cada título que incorporemos a nuestro portafolio tendrá un perfil de riesgo individual. Sin embargo, como hemos dicho, el riesgo de un portafolio no es simplemente el riesgo de cada activo multiplicado por la participación que tenga en el portafolio, sino también cómo se comporta cada activo respecto de sus vecinos en el portafolio.

Un portafolio bien diversificado por ende tendrá activos disímiles, e inclusive que se comporte inversamente (es decir, cuando uno suba que el otro baje) y esto hará que el riesgo total de nuestro portafolio termine siendo menor a la suma de las partes. Es decir, que el riesgo total pueda verse reducido por la interacción de los activos que compensan sus riesgos dentro del portafolio, de manera que el riesgo final a asumir sea menor a la suma de los riesgos individuales.

Como podemos ver en el gráfico a continuación, un portfolio 100% en acciones importará un retorno muy elevado, pero también un alto riesgo. Por otro lado, un portafolio 100% de bonos importará un retorno menor pero también un consiguiente menor riesgo. Un portafolio bien diversificado mezclará estos y otros tipos de activos para intentar alcanzar una combinación óptima de retorno y riesgo.



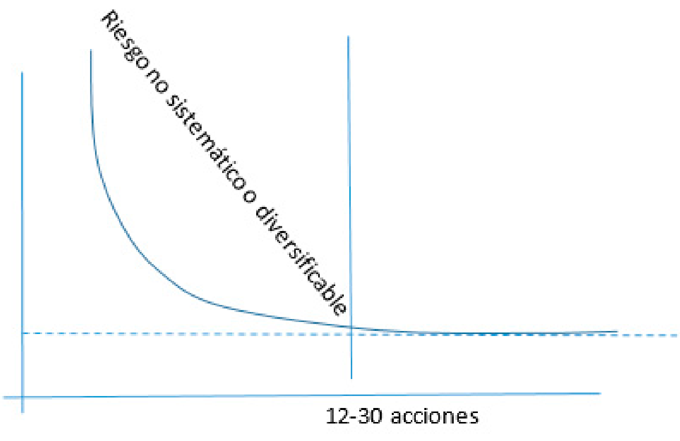
Fuente: invertirOnline.com

Para lograr esta diversificación óptima, deberemos pensar en colocar en nuestro portafolio una cantidad lo suficientemente grande de activos de distinto comportamiento.

Riesgo diversificable y no diversificable

Cuando diversificas entre activos disímiles es posible bajar el riesgo del portafolio. El riesgo que es posible reducir se denomina riesgo no sistemático o diversificable. Este riesgo es el específico de las firmas, que se diluye a medida que incorporamos más y más activos en el portafolio. Sin embargo, la curva de riesgo se hace asintótica al eje de abscisas pero en un nivel superior al cero en el eje de ordenadas. Lo cual, indica que existe un riesgo que no es posible diversificar por más que sigamos agregando más y más activos a nuestro portafolio. Este es el riesgo sistémico, de mercado o no diversificable.

El concepto de riesgo sistemático no solo es aplicable a portafolios sino también a activos individuales. Existen acciones con mayor riesgo sistemático que otras. Por ejemplo, activos de consumo discrecional como pueden ser los bienes de lujo, son muy sensibles al ciclo económico y por ende tienen un riesgo de mercado o sistemático más elevado que otras cuyo valor no depende tanto del ciclo económico como pueden ser las empresas de servicios públicos.



De esta forma podemos decir que el riesgo total, medido por el desvío estándar es la sumatoria del riesgo individual de la firma más el riesgo de mercado.

$$\sigma = riesgo\ de\ la\ firma + riesgo\ de\ mercado$$

¿Es necesario comprar todos los activos del mercado para reducir el riesgo del portafolio al nivel no diversificable?

No, algunos estudios demuestran que si incrementas a un nivel de entre 12 y 18 acciones en tu portafolio el mismo podría obtener hasta el 90% de la diversificación máxima posible. Otros estudios indican que el nivel óptimo para alcanzar dicha reducción del riesgo no sistemático es de 30 acciones.

Beta, es otra medida de riesgo sistemático que discutiremos más adelante.

Portafolio Eficiente

Retorno de un portafolio

El retorno de un portafolio puede calcularse simplemente como la suma ponderada de los retornos de los activos individuales que forman parte del portafolio multiplicado por la participación de cada uno de ellos en el mismo (que daremos en llamar . De esta forma la fórmula de retorno de un portafolio puede calcularse como:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} X_i * \bar{R}_i$$

Covarianza y coeficiente de correlación

A diferencia del cálculo del retorno de un portafolio, su riesgo no puede calcularse simplemente como el promedio ponderado directo de los riesgos de los activos que de él forman parte. Esto se debe a que, como hemos dicho anteriormente, debe tenerse en cuenta el efecto conjunto de los activos entre sí.

Así como la varianza es la medida matemática que utilizamos para medir la dispersión de las observaciones del retorno de un activo contra su propia media, ahora utilizaremos una medida muy similar, denominada covarianza, para indagar el comportamiento de a pares de activos.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[R_{a,t} - E(R_i)\right]^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[R_{a,t} - E(R_a)\right]}{n} * \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[R_{a,t} - E(R_a)\right]}{n}$$

Por ende, si lo extrapolamos a un par de activos, nos interesará ver cuál es el comportamiento del activo b ante su propia media, ante un determinado comportamiento de a versus su propia media.

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[R_{a,t} - E(R_a)]}{n} * \frac{\sum_{i=1}^{n}[R_{b,t} - E(R_b)]}{n}$$

Siendo una medida cuadrática, la covarianza podría resultar en un número muy grande positivo o negativo, que prima facie es difícil de interpretar. Por ello, es que para estandarizar su valor, buscaremos calcular a partir de él el coeficiente de correlación. El mismo estandariza el valor de la covarianza a un número entre 1 y -1. Identificaremos al coeficiente de correlación con la letra griega

$$\rho_{a,b} = \frac{\sigma_{a,b}}{\sigma_a \sigma_b} \text{ siendo } -1 < \rho_{a,b} < 1$$

- Signo
  - \+ relación directa
  - (-) Relación inversa
- Valor
  - 1 relación lineal fuerte
  - 0 relación lineal débil

Está claro que si dos activos tienen un coeficiente de correlación de 1, en el fondo desde el punto de vista de sus variaciones de rendimientos, se comportan como si fueran el mismo activo. Mientras que si tuvieran un valor de -1 se comportan exactamente como activos opuestos, es decir, cuando uno sube el otro baja en la misma proporción. Por otro lado, si el coeficiente de correlación es cercano a cero, son activos que no tienen una vinculación lineal y se comportan de forma bastante independiente uno de otro, al menos linealmente.

Riesgo de un portafolio de 2 activos

Está claro a esta altura que el calcular el riesgo de un portafolio es un tanto más difícil que calcular su rentabilidad por el hecho de que debemos considerar como se relacionan los activos entre si dentro del portafolio a través de sus covariancias. Por ello es que iremos por partes e inicialmente calcularemos el riesgo de un portafolio de 2 activos para luego extender la fórmula a uno de N activos.

La varianza de un portafolio P, que llamaremos no es otra cosa que el valor esperado de la desviación cuadrática de los retornos del portafolio respecto del retorno esperado del portafolio. Lo antedicho podemos escribirlo de la siguiente manera:

$$\sigma_p^2 = E\left[R_p - E(R_p)\right]^2$$

Sabiendo que:

$$R_p = \sum_{j=1}^{n} X_j R_j \qquad \text{Y que:} \qquad E\left(R_p\right) = \sum_{j=1}^{n} X_j\, E(R_j)$$

Reemplazamos en la fórmula de σ_p^2 y obtenemos:

$$\sigma_p^2 = E\left[\sum_{j=1}^{n} X_j R_j - \sum_{j=1}^{n} X_j\, E(R_j)\right]^2$$

Sacando factor común $\sum_{j=1}^{n} X_j$ obtenemos que:

$$\sigma_p^2 = E\left[\sum_{j=1}^{n} X_j (R_j - E(R_j))\right]^2$$

Supongamos ahora que contamos con dos activos (1 y 2), es decir, nuestra variable “j” tomará el valor de 1 y 2. Podemos escribir la fórmula anterior como:

$$\sigma_p^2 = E\left[\underbrace{X_1\left(R_{1,j} - E(R_1)\right)}_{X} + \underbrace{X_2\left(R_{2,j} - E(R_2)\right)}_{Y}\right]^2$$

Esta ecuación tiene la forma $(X+Y)^2 = X^2 + XY + YX + Y^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

Con lo cual, podemos reescribirla como:

$$\sigma_p^2 = \mathrm{E}\left[\left(X_1\left(R_{1,j} - E\left(R_1\right)\right)\right)^2 + 2X_1X_2\left(R_{1,j} - E\left(R_1\right)\right)\left(R_{2,j} - E\left(R_2\right)\right) + \left(X_2\left(R_{2,j} - E\left(R_2\right)\right)\right)^2\right]$$

O lo que es lo mismo:

$$\sigma_p^2 = \mathrm{E}\left[X_1{}^2\left(R_{1,j} - E(R_1)\right)^2 + 2X_1X_2\left(R_{1,j} - E(R_1)\right)\left(R_{2,j} - E(R_2)\right) + X_2{}^2\left(R_{2,j} - E(R_2)\right)^2\right]$$

Y aplicando las dos reglas:

- El valor esperado de la suma de una serie de retornos es igual a la suma de los valores esperados de cada retorno
- El valor esperado de una constante por un retorno es igual a la constante por el retorno esperado

Tenemos que:

$$\sigma_p^2 = \underbrace{X_1{}^2E\left(R_{1,j} - E(R_1)\right)^2}_{\text{Varianza del activo 1}} + \underbrace{2X_1X_2E\left(R_{1,j} - E(R_1)\right)\left(R_{2,j} - E(R_2)\right)}_{\text{Covarianza del activo 1 y}} + \underbrace{X_2{}^2E\left(R_{2,j} - E(R_2)\right)^2}_{\text{Varianza del activo 2}}$$

De manera que podemos expresar la fórmula cómo:

$$\sigma_p^2 = X_1{}^2\sigma_1^2 + 2X_1X_2\sigma_{1,2}^2 + X_2{}^2\sigma_2^2$$

Es importante en este punto notar que la covarianza del activo 1 y 2 (surge del valor esperado del producto de dos desvíos (. Cuando estemos en presencia de activos con correlación negativa, sería de esperar que si el primer término es negativo, el segundo sea positivo y viceversa. Esto hará que toda la multiplicación y por ende la covarianza sean negativos. De manera que todo el segundo término de la ecuación será negativo (). Esto hará que el riesgo total del portafolio sea menor a la suma del riesgo proporcional de los activos individuales en él incluidos.

Generalización de la fórmula de riesgo de un portafolio a N activos

Partiendo de la fórmula que hemos despejado para calcular el riesgo de un portfolio de 2 activos, es posible que generalicemos la misma para un portafolio más amplio de n activos.

Partimos de la fórmula de riesgo del portafolio de 2 activos:

$$\sigma_p^2 = X_1{}^2\sigma_1^2 + 2X_1X_2\sigma_{1,2}^2 + X_2{}^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j{}^2\sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} X_jX_i\sigma_{j,i}^2$$

Si bien la fórmula anterior puede llegar a asustar, simplemente está diciendo que el riesgo del portafolio es la sumatoria del riesgo individual de cada uno de los activos en el incluido proporcional a su participación en el portafolio, más los riesgos conjuntos de todos los activos en él incluidos y medidos por la covarianza. Esta última parte, que se lee como la sumatoria de la sumatoria de j=1 hasta n, e i=1 hasta n, cuando i es distinto de j, lo único que está diciendo es que, cuando i sea igual a j, no hay que considerar el desvío puesto que estaríamos hablando de una varianza, lo cual ya está incorporado en el primer término de la fórmula. En esta última parte sólo tenemos en cuenta las covarianzas y dos veces. Puesto que consideramos la covarianza del activo J con I y luego la del activo I con J.

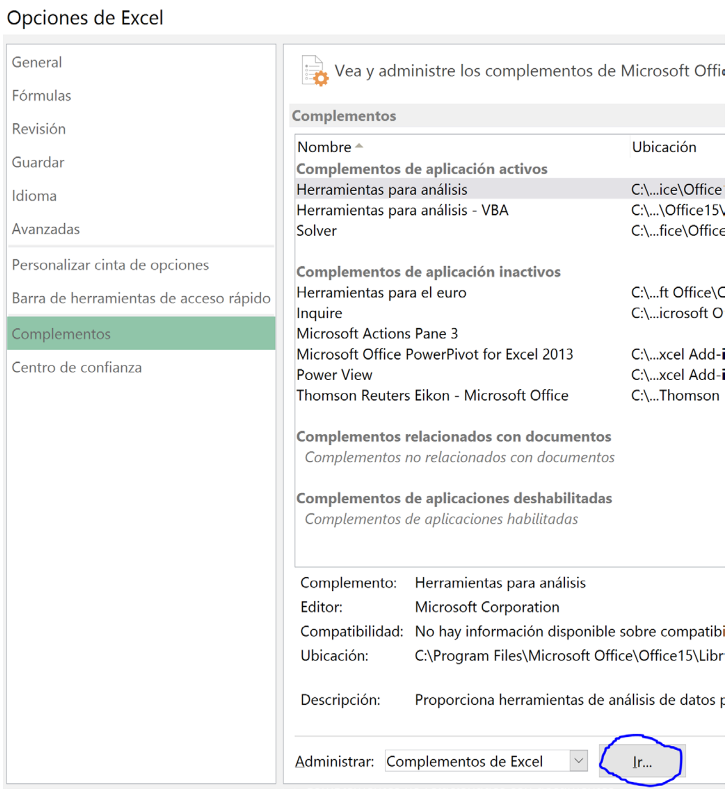
Desde luego no hay que olvidar tampoco que ésta es una fórmula cuadrática y que, para calcular el riesgo en los mismos términos simples que el retorno debemos aplicarle la raíz a ambos términos de la ecuación, quedando:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} X_j{}^2\sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} X_jX_i\sigma_{j,i}^2}$$

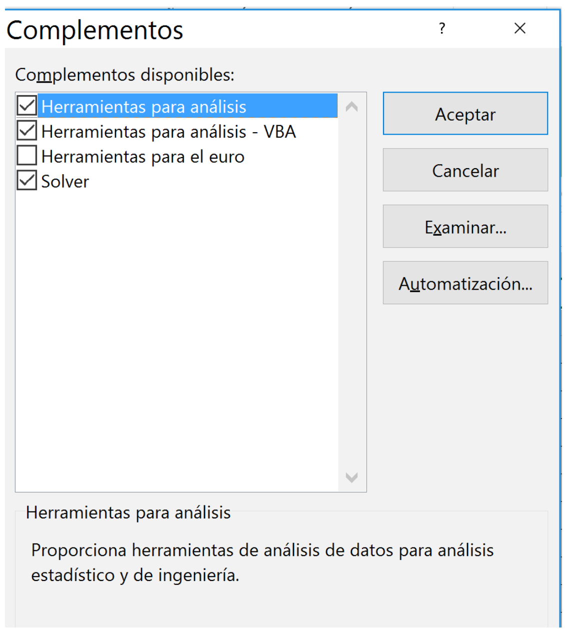
Matriz de varianzas y covarianzas

En el Excel, con las 13 acciones argentinas para las cuales oportunamente hemos descargado las series históricas de precios semanales, calculado sus retornos en cada momento del tiempo y sus retornos esperados a partir de la media de esos retornos. También habíamos calculado las dispersiones individuales, pero, en este punto se nos hace claro que si queremos calcular el riesgo del portafolio deberíamos contar no sólo con las varianzas, sino también con las covarianzas entre los distintos activos que estamos analizando.

Para calcular las covarianzas de los distintos activos a analizar en nuestro portfolio a partir del Excel, lo primero que debemos hacer es habilitar el complemento “análisis de datos”. Para ello, en versiones del Excel 2013 en adelante, debemos ir a “Archivo” y allí hacer click en “opciones”. Se desplegará una ventana como la siguiente, en la cual debermos hacer click en el botón “ir” de la sección “administrar complementos de excel”, así como se muestra en la imagen a continuación:

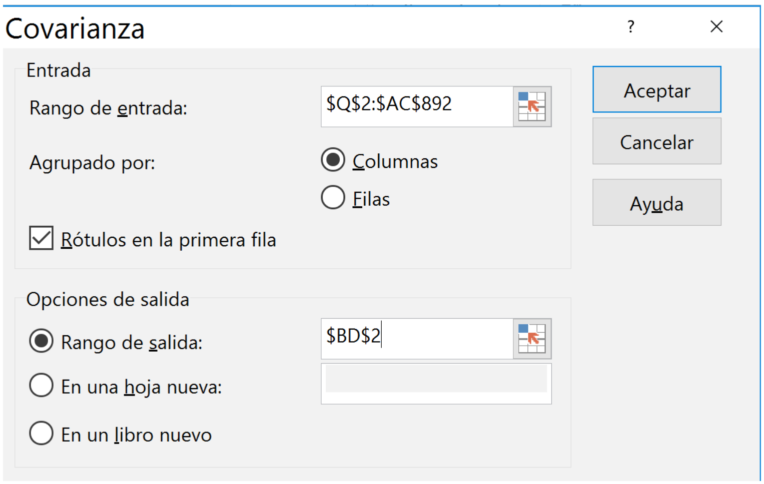


Una vez allí, debemos cerciorarnos de tener tildada la sección “herramienta para el análisis”. (ver imagen a continuación).

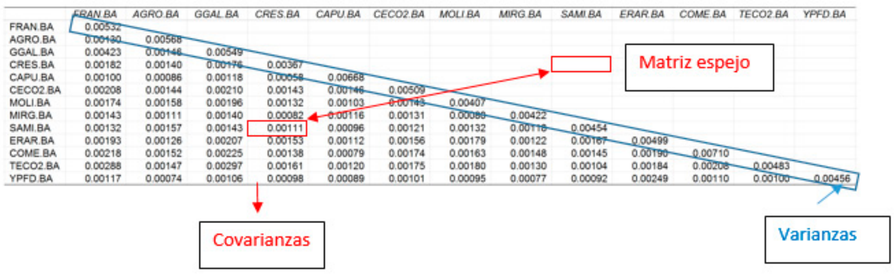


Al hacerlo, podremos ver que en la sección “datos” de la cinta de herramientas encontraremos el módulo que nos permitirá calcular la matriz de varianzas y covarianzas.

Daremos click en el botón que hemos habilitado y nos desplegará una serie de opciones. De las cuales elegiremos “covarianza” y que, al hacerlo, nos llevará a una pantalla donde nos permitirá elegir como rango de entrada, las series de datos (retornos logarítmicos históricos) que hemos calculado previamente y como rango de salida el lugar donde queremos que nos arroje el resultado.



Como resultado obtendremos una matriz que contendrá la mitad de los datos. Esto se debe a que típicamente al ser la covarianza entre el activo A y B, la misma que entre el activo B y A, la matriz es una matriz espejo. Es decir, de un lado de la matriz tendremos datos con covarianzas, en la diagonal del centro se ubicarán las varianzas de los activos y el resto aparecerá vacía ya que el dato sería el mismo que del otro lado de la diagonal.



	FRAN.BA	AGRO.BA	GGAL.BA	CRES.BA	CAPU.BA	CECO2.BA	MOLI.BA	MIRG.BA	SAMI.BA	ERAR.BA	COME.BA	TECO2.BA	YPFD.BA
FRAN.BA	0.00532												
AGRO.BA	0.00130	0.00568											
GGAL.BA	0.00423	0.00146	0.00549										
CRES.BA	0.00182	0.00140	0.00176	0.00367									
CAPU.BA	0.00100	0.00086	0.00118	0.00058	0.00668								
CECO2.BA	0.00208	0.00144	0.00210	0.00143	0.00146	0.00509							
MOLI.BA	0.00174	0.00158	0.00196	0.00132	0.00103	0.00143	0.00407						
MIRG.BA	0.00143	0.00111	0.00140	0.00082	0.00116	0.00131	0.00080	0.00422					
SAMI.BA	0.00132	0.00157	0.00143	0.00111	0.00096	0.00121	0.00132	0.00118	0.00454				
ERAR.BA	0.00193	0.00126	0.00207	0.00153	0.00112	0.00156	0.00179	0.00122	0.00167	0.00499			
COME.BA	0.00218	0.00152	0.00225	0.00138	0.00079	0.00174	0.00163	0.00148	0.00145	0.00190	0.00710		
TECO2.BA	0.00288	0.00147	0.00297	0.00161	0.00120	0.00175	0.00180	0.00130	0.00104	0.00184	0.00208	0.00483	
YPFD.BA	0.00117	0.00074	0.00106	0.00098	0.00089	0.00101	0.00095	0.00077	0.00092	0.00249	0.00110	0.00100	0.00456

Aquí reside una de las críticas al modelo de media varianza. El excesivo número de inputs. Con la llegada de las planillas de cálculo se ha hecho menos importante esta crítica. Pero inicialmente cuando requería un cálculo más manual, tengamos en cuenta que existen **números totales en la matriz, de los cuales N son varianzas y N(N-1) covarianzas.**

Cómo anualizar los datos

Muchas veces, como en este caso trabajamos con una frecuencia de datos distinta a la anual, pero para expresar los resultados, por convención preferimos hacerlo en términos anuales. Para ello es necesario saber cómo anualizar los distintos datos de: media, varianza y covarianza:

De donde partimos	Frecuencia en el año	Dato anualizado
$\bar{R}_i$ Contínua (Frecuencia Semanal)	52	$\bar{R}_i$ * 52
σ_i^2 (Frecuencia Diaria)	252	σ_i^2 * 252
σ_i (Frecuencia Mensual)	12	$\sigma_i * \sqrt{52}$
$\sigma_{i,j}^2$ (Frecuencia semanal)	52	$\sigma_{i,j}^2 * 52$

Efecto de la diversificación

Es difícil en un mercado encontrar activos que se encuentren negativamente correlacionados. En general suelen tener una correlación por pequeña que esta sea, positiva. Más allá de que los activos que incluyamos en nuestro portafolio tengan una correlación positiva entre sí, es posible demostrar que el sólo hecho de incrementar el número de activos dentro de nuestro portafolio reducirá el riesgo total del mismo. Lo cual a priori es entendible ya que dependeremos cada vez menos de la suerte de una empresa en particular y más del mercado en sí (riesgo sistemático).

La forma de demostrar la anterior aseveración es suponiendo que contamos con activos independientes, motivo por el cual . Por ende la segunda parte de la ecuación de riesgo del portafolio es cero. A su vez, suponemos que alocaremos iguales cantidades a cada uno de los activos totales (N= cantidad de activos en el portafolio) dentro de nuestro portafolio. De manera que cada activo se llevará 1/N en términos de porcentaje del portafolio. Si tenemos en cuenta esto y reemplazamos en la fórmula de riesgo del portafolio el porcentaje invertido en cada activo () por 1/N la misma queda reducida a:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{N}\right]^2 \sigma_j^2$$

Lo cual demuestra que si aumentamos N, el riesgo total de nuestro portafolio bajará. Ahora bien, si tuviéramos activos levemente correlacionados, no podremos eliminar el segundo término de la fórmula, con lo cual tendremos:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{N})^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (\frac{1}{N})(\frac{1}{N}) \sigma_{j,i}^2$$

Si sacamos factor común de 1/N del primer término y (N-1)/N del segundo:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j^2}{N} + \frac{(N-1)}{N} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\sigma_{j,i}^2}{N(N-1)}$$

Podemos ver que claramente la primer sumatoria, no es otra cosa que el promedio de las varianzas de los activos del portafolio. El segundo término, si bien más difícil de interpretar, también es un promedio. La sumatoria de las covarianzas está dividida por la cantidad total de covarianzas (N(N-1)) que tiene nuestra matriz de varianzas y covarianzas. Puesto que, recordemos, cuando j es igual a i, se trata de una varianza, que ya hemos considerado en el primer término.

Si reemplazamos en la fórmula las sumatorios por promedios tendremos:

$$\sigma_p^2 = \underbrace{\frac{1}{N}\overline{\sigma^2}}_{\text{(a)}} + \underbrace{\frac{(N-1)}{N}\overline{\sigma_{j,i}^2}}_{\text{(b)}}$$

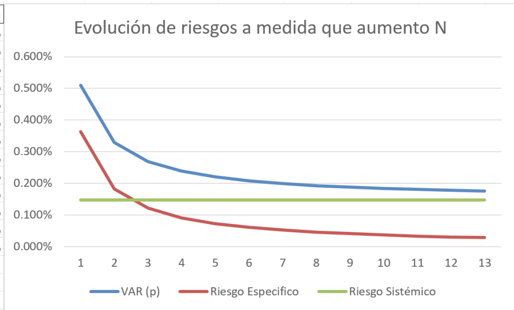
La contribución del riesgo individual de los activos tiende a cero a medida que aumenta la cantidad de activos en el portafolio (N).	La contribución del riesgo conjunto (representado por la covarianza) de los activos tiende al riesgo sistémico (promedio de la covarianza = $\overline{\sigma_{j,i}^2}$) a medida que aumenta la cantidad de activos en el portafolio (N).

Nuevamente podemos ver que, pese a tener correlaciones positivas, incrementar la cantidad de activos dentro del portafolio de todas formas reduce el riesgo, puesto que la contribución de riesgo individual tiende a cero y el riesgo total tiende al riesgo sistemático.

Efecto sobre el riesgo de agregar activos al portafolio

Si calculamos la media de las varianzas individuales de los 13 activos que hemos elegido, veremos que la misma es de 0.51%. De manera que, si tuviéramos un sólo activo en nuestro portafolio, el riesgo que tendríamos sería el de ese activo, es decir, en promedio sin individualizar ningún activo, de tener un portafolio de 1 activo tendríamos esa varianza de 0.51%. Por otro lado, el promedio de las covarianzas de los 13 activos elegidos es de 0.147%. De manera que, queda claro que a medida que aumentemos la cantidad de activos en nuestro portafolio, el riesgo específico se irá diluyendo y el riesgo total del portafolio convergerá al valor de la covarianza promedio (línea azul en el siguiente gráfico).

N	VAR (p)	Riesgo Especifico	Riesgo Sistémico
1	0.510%	0.363%	0.147%
2	0.329%	0.181%	0.147%
3	0.268%	0.121%	0.147%
4	0.238%	0.091%	0.147%
5	0.220%	0.073%	0.147%
6	0.208%	0.060%	0.147%
7	0.199%	0.052%	0.147%
8	0.193%	0.045%	0.147%
9	0.187%	0.040%	0.147%
10	0.183%	0.036%	0.147%
11	0.180%	0.033%	0.147%
12	0.177%	0.030%	0.147%
13	0.175%	0.028%	0.147%

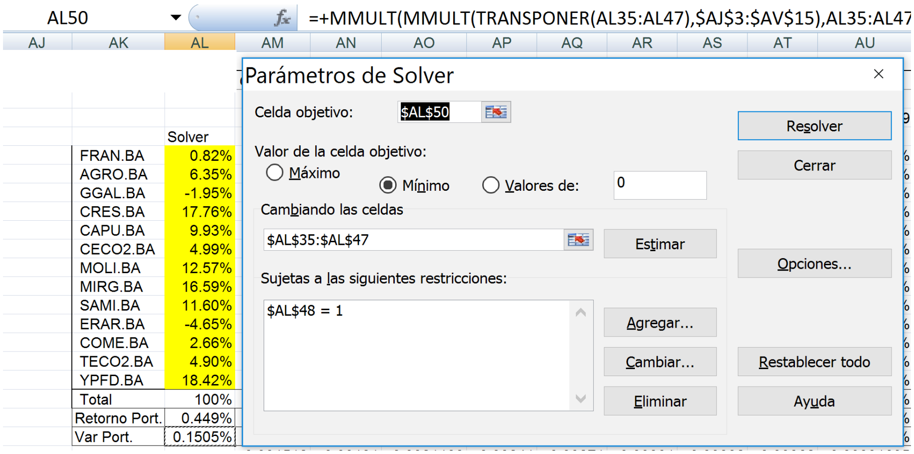


Dicho esto, la posibilidad real de reducción del riesgo de un portafolio depende del promedio de correlaciones de los activos que incluya en él. Algunos mercados tienen mayor nivel de correlación en sus acciones que otros. Aquí es donde el administrador deberá entender que si incluye otro tipo de activos, como bonos, podrá reducir el promedio de covarianza total y con ello el riesgo del portafolio. O bien podrá incluir acciones de otros mercados con un nivel de correlación menor a su portafolio local ya que se mueven por otros drivers políticos y macroeconómicos.

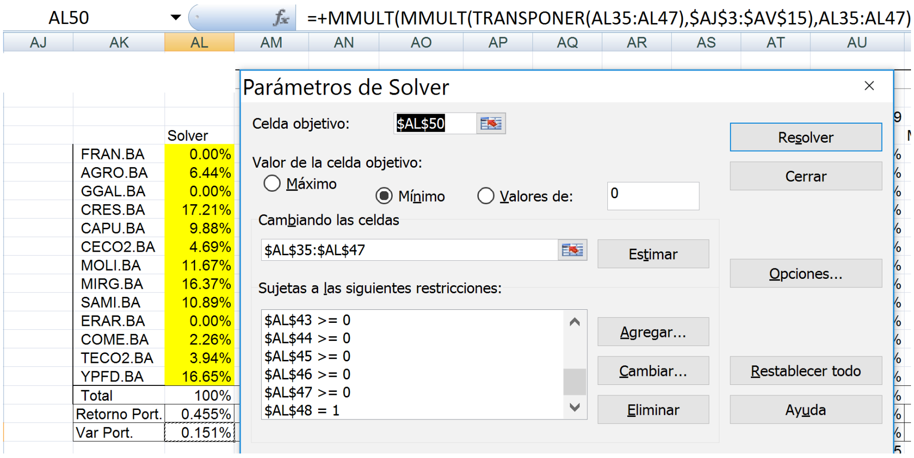
Portafolio de mínima varianza

Busquemos ahora cuál sería nuestro portafolio de mínima varianza para los 13 activos seleccionados. Lo primero que debemos hacer es tener activado el complemento "Solver" en el Excel, de igual manera que se explicó anteriormente al momento de activar el complemento "análisis de datos" para calcular la matriz de varianzas y covarianzas.

Luego lo que haremos será fijar nuestra celda objetivo del Solver. Seleccionaremos la celda donde hemos calculado la Varianza de nuestro portafolio y le pediremos al complemento que calcule el mínimo de la misma. Para ello, le indicaremos que modifique las celdas donde tenemos los porcentajes a invertir en cada activo. Y la pondremos como restricción que la suma de los porcentajes debe equivaler a 1.



También, en caso de que no deseemos permitir las ventas en corto dentro de nuestro portafolio, podremos agregarle la restricción de que cada porcentaje a invertir deba ser superior a cero.



Podemos ver que si comparamos ambos portafolios, con short sales y sin short sales, los resultados son muy similares. Pero si prestamos atención a los casos de ERAR y GGAL notaremos que nuestro optimizado sin short sales aloca 0% a aquellos activos que en el caso de permitir las ventas en corto, hubiera vendido.

	C/Short	S/Short
FRAN.BA	0.82%	0.00%
AGRO.BA	6.35%	6.44%
GGAL.BA	-1.95%	0.00%
CRES.BA	17.76%	17.20%
CAPU.BA	9.93%	9.88%
CECO2.BA	4.99%	4.66%
MOLI.BA	12.57%	11.63%
MIRG.BA	16.59%	16.38%
SAMI.BA	11.60%	10.89%
ERAR.BA	-4.65%	0.00%
COME.BA	2.66%	2.28%
TECO2.BA	4.90%	3.97%
YPFD.BA	18.42%	16.66%
Total	100%	100.00%
Retorno Port.	0.449%	0.46%
Var Port.	0.1505%	0.1512%

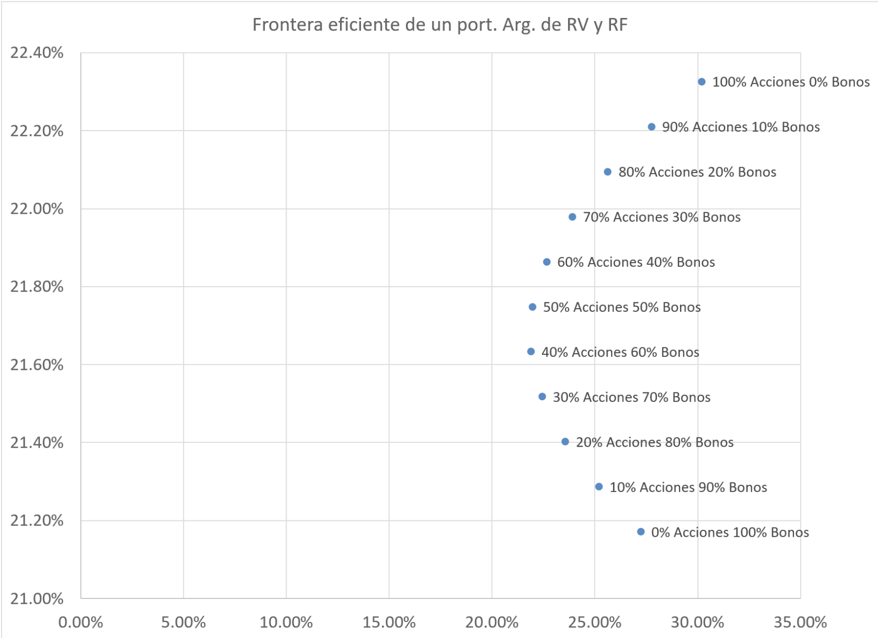
Diversificación entre acciones y bonos en Argentina

Podemos hacer el ejercicio de calcular el riesgo de un portafolio invertido en acciones y un índice de bonos. Aquí es importante tener en cuenta que para calcular el rendimiento histórico debemos tomas las series ajustadas, por dividendos para el caso de acciones y por cupones de interés en el caso de bonos. En virtud de que la disponibilidad pública de series de bonos con pagos de cupones es bastante limitada, sobre todo para el largo plazo, en virtud de que los bonos van venciendo, es que decidimos tomar un índice como el índice de bonos del IAMC (Instituto Argentino de Mercados de Capitales) cuya serie histórica se remonta a 1995. Desde el punto de vista de la inversión, si quisiéramos replicarlo, deberíamos comprar un fondo común de inversión que tuviera como benchmark a este índice.

Calculamos los datos de retorno, volatilidad, y covarianza para un portafolio invertido equitativamente en cada una de las 13 acciones que venimos siguiendo y otro invertido en un conjunto de bonos como el índice de bonos del IAMC.

Portaf. 13 Acciones				
σ^2_{rv}	9.10%		ρ rv, rf =	16.834576%
Rrv	22.33%			
			Covar=	1.38205%
Portaf. Bonos IAMC				
σ^2_{rf}	7.40%			
Rrv	21.17%			

Distrib. Portafolio	$\overline{R}_i$	σ^2_p	σ_p	R/σ
100% Acciones 0% Bonos	22.33%	9.10%	30.17%	0.740
90% Acciones 10% Bonos	22.21%	7.70%	27.74%	0.801
80% Acciones 20% Bonos	22.10%	6.56%	25.62%	0.862
70% Acciones 30% Bonos	21.98%	5.71%	23.89%	0.920
60% Acciones 40% Bonos	21.86%	5.12%	22.64%	0.966
50% Acciones 50% Bonos	21.75%	4.82%	21.95%	0.991
40% Acciones 60% Bonos	21.63%	4.79%	21.88%	0.989
30% Acciones 70% Bonos	21.52%	5.03%	22.42%	0.960
20% Acciones 80% Bonos	21.40%	5.55%	23.55%	0.909
10% Acciones 90% Bonos	21.29%	6.34%	25.17%	0.846
0% Acciones 100% Bonos	21.17%	7.40%	27.21%	0.778



Formas que puede tomar la frontera eficiente

Hasta aquí sabemos que cuanto menor sea la correlación de los activos que incluyamos en el portafolio, menor será el desvío estándar de nuestro portafolio. Cuando dos activos están directamente correlacionados de manera inversa, siempre es posible encontrar alguna combinación de los dos activos que genere un portafolio de cero riesgo.

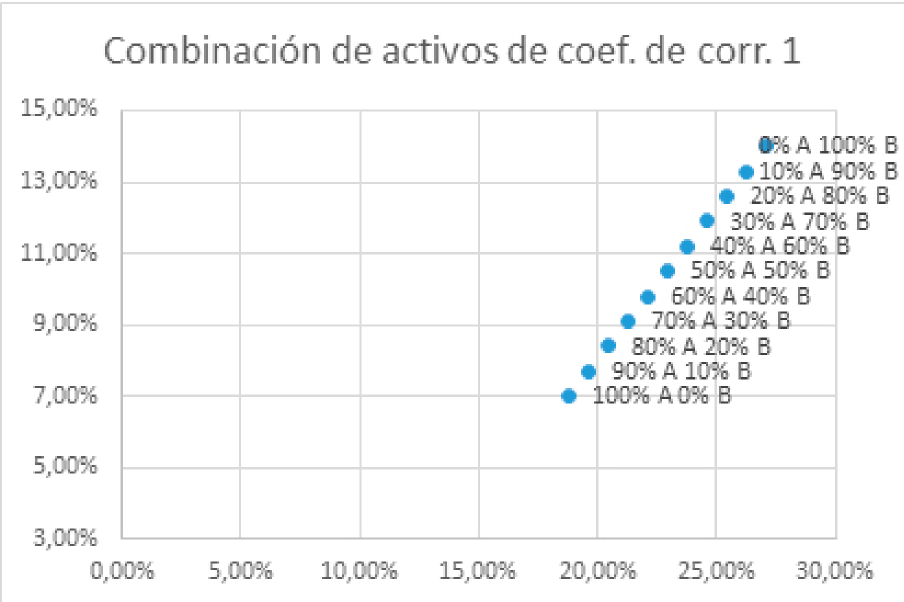
Como puede observarse en el siguiente gráfico, el hecho de que el activo A y B tengan una covarianza de -1 genera que en el caso de invertir 60% en A, que ofrece el menor retorno y riesgo, y 40% en B que ofrece retornos y riesgos mayores, se logra un portafolio de riesgo cero.

ACTIVO A	
σ_A^2	3.54%
Rrv	7.00%
ACTIVO B	
σ_A^2	7.35%
Rrv	14.00%
ρ A, B =	-1
Covar=	-5.10%

Cuando el coeficiente de correlación entre los activos es igual a 1, tanto el retorno como el riesgo del portafolio se vuelven una expresión lineal de los riesgos individuales de los activos en él incluidos. De manera que todas las posibles combinaciones de dichos activos residen en una línea recta entre ellos.

Como podemos ver en el siguiente gráfico, E y F se encuentran directa y perfectamente correlacionados. Lo cual determina que, en el extremo opuesto de la correlación que vimos anteriormente, nos encontramos siempre con una línea recta.

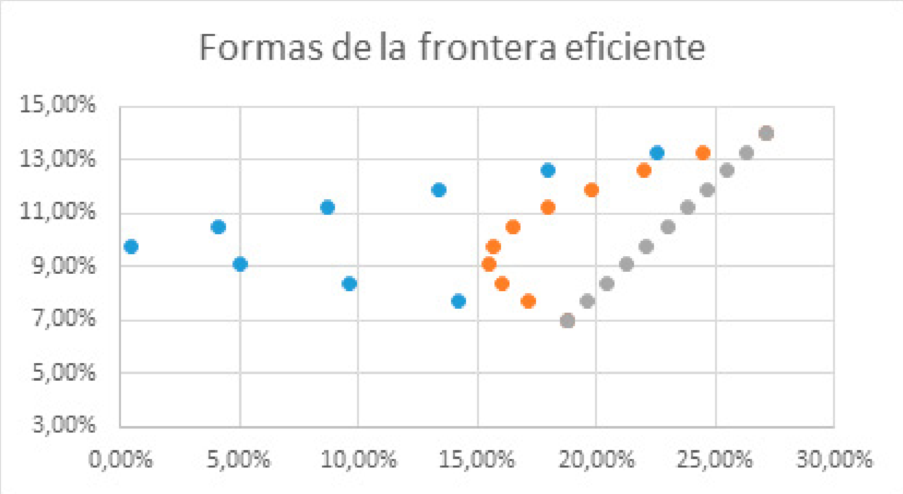
ACTIVO E	
σ_E^2	3.54%
Rrv	7.00%
ACTIVO F	
σ_F^2	7.35%
Rrv	14.00%
ρ A, B =	1
Covar=	5.10%



Cuando tenemos una correlación -1 es posible encontrar un portafolio de riesgo cero entre los dos portafolios riesgosos, generándose una forma de frontera de apariencia triangular. Y, cuando tenemos la situación inversa, nos encontramos con una forma de frontera lineal entre los dos activos riesgosos que forman parte de nuestro portafolio. Queda claro entonces que en cualquier situación intermedia, incluida cuando los activos son independientes, tendremos una forma cóncava de la frontera. Bajo ningún concepto la frontera puede tomar una forma convexa.

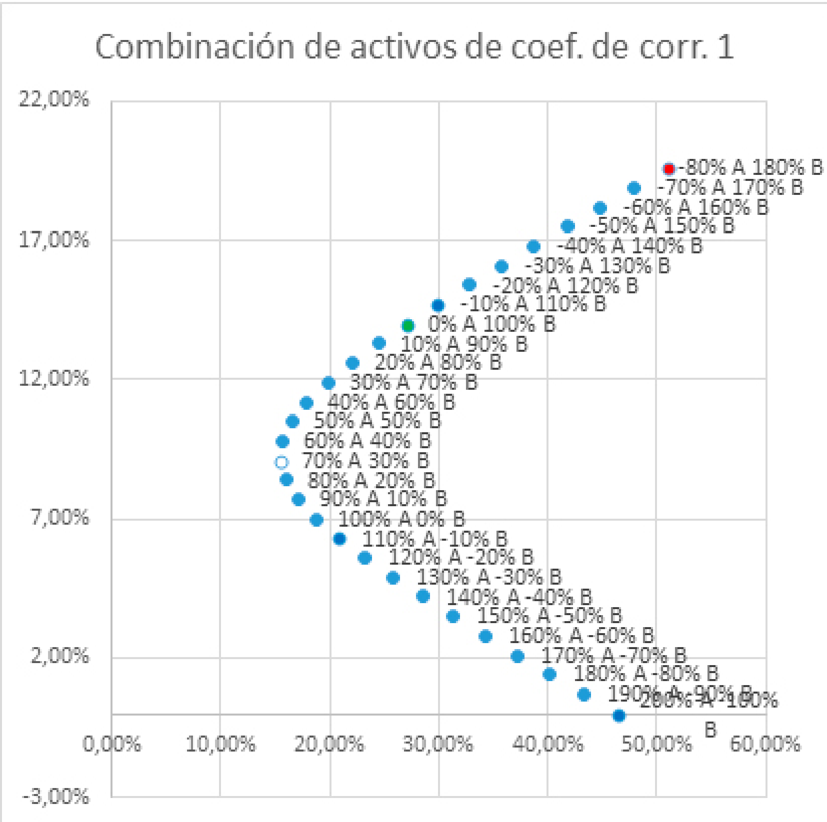
Lo dicho se puede observar en el siguiente gráfico donde para dos activos C y D que son independientes entre sí, la frontera reside en medio de las fronteras donde la correlación es directa e inversa.

Frontera eficiente cuando las ventas en corto son permitidas



Al permitirse las ventas en corto, la frontera eficiente puede extenderse más allá del activo de mayor retorno. A su vez, también se extiende por debajo la curva total, pero esta parte es subóptima. Recordemos que siempre, nuestra frontera eficiente debe considerarse desde el activo de menor riesgo y el de mayor retorno o, como en el caso de que las ventas en corto estén permitidas, el infinito.

Como puede verse en el gráfico a continuación la frontera eficiente se extiende desde el portafolio de menor retorno (en blanco) hasta el punto verde cuando las ventas en corto no son permitidas. Y, más allá hasta el infinito cuando sí lo son.

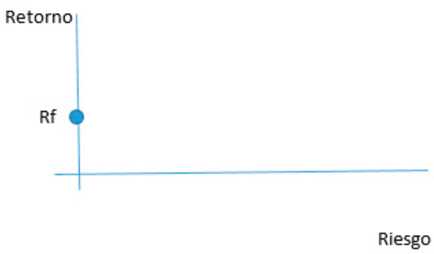


Activo libre de riesgo

El activo libre de riesgo, por definición es un activo cuyo . Es decir no existe divergencia alguna entre lo esperado como retorno y el retorno a recibir. Lo cual es lo mismo que decir que . Ejemplos de activos libres de riesgo, por excelencia son aquellos emitidos por los Bancos Centrales de los países en su moneda local. Por ej. En nuestro mercado las LEBACS. O también bonos del Tesoro en países desarrollados que no tienen ricas historias de cumplimiento en el largo plazo, como pueden ser los bonos del tesoro. En algunos casos, si bien con mayor riesgo, la tasa del plazo fijo es también utilizada como una referencia libre de riesgo.

La ubicación del activo libre de riesgo en el gráfico de retorno-varianza es muy simple ya que sus coordenadas son .

$$[0\ ,\ R_f].$$



Cierre de la unidad

Hemos interpretado la bala de Markowitz para identificar los activos que en forma individual se comportan mejor en términos de retorno por unidad de riesgo. Luego, hemos extendido el análisis de riesgo y retorno que en la unidad anterior calculábamos a nivel individual, para el portafolio de manera agregada. Lo cual nos ha llevado a entender que el retorno del portafolio puede ser menos que la suma del riesgo de los activos que incluyamos en él producto de la incorporación de las covarianzas.

La interpretación de las covarianzas, a través del coeficiente de correlación de los activos ha recibido especial atención. Esta es la base de la diversificación de un portafolio. A través de ella es que podemos encontrar portafolios con distintas posiciones en nuestro eje cartesiano. Podríamos decir que el arte de la administración de un portfolio radica en gran medida en que el portfolio manager maneje el arte de la diversificación.

Cerramos la unidad definiendo al activo libre de riesgo y su posición en el eje cartesiano. Este activo, al incorporarse al análisis de activos riesgosos de Markowitz, nos dará acceso en las próximas unidades a un nuevo mundo de portafolios.

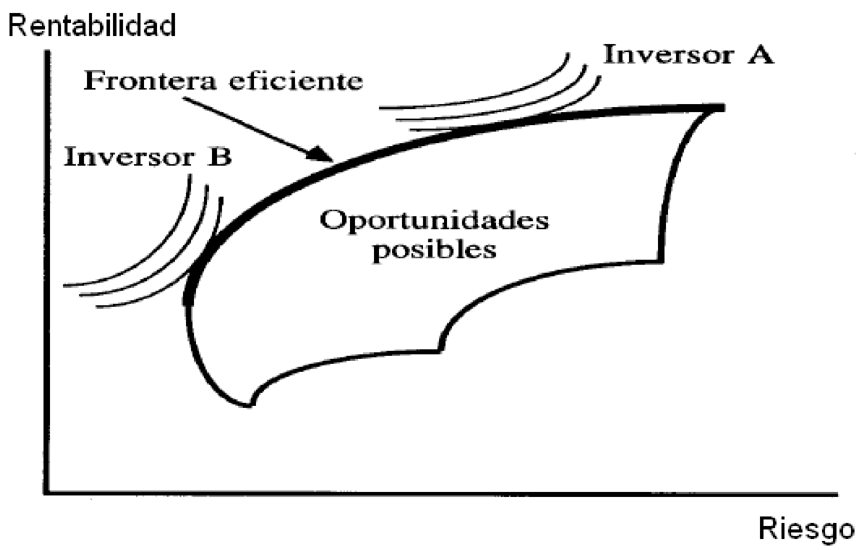
Entendiendo el riesgo y rendimiento de un portafolio

Al llevar el análisis del nivel individual de los activos, al nivel del portafolio agregado, se presentan nuevos desafíos a considerar. El objetivo de esta actividad es que el alumno pueda entender las distintas variables a considerar en términos de riesgo y rendimiento a la hora de armar un portafolio de inversión.

1- Calcule a partir de un portafolio equitativamente distribuido el riesgo y rendimiento esperado de su portafolio.

2- Construya el portafolio tangente a la frontera eficiente.

3- Sabiendo que los inversores tendrán distintas preferencias de riesgo, construya, a partir de los datos, el portafolio óptimo para cada curva de utilidad de los inversores:



Inclusión del activo libre de riesgo en el modelo de Markowitz: Portafolios de separación & CML

Al introducir un activo libre de riesgo en el modelo, se abren nuevas posibilidades. Hasta aquí analizamos un conjunto de inversiones riesgosas, que quedan comprendidas dentro de la bala de Markowitz, de la cual, su borde por sobre el portafolio de mínima varianza es la frontera eficiente. Sin embargo, la introducción al modelo de un activo de riesgo cero, que puede ser combinado con un portafolio riesgoso, nos permite acequiar portafolios más allá de la bala.

Introducir un activo libre de riesgo puede implicar según cómo lo utilicemos la posibilidad de invertir en él, prestando a la tasa libre de riesgo, o bien tomar prestado también a dicha tasa.

Supongamos ahora que invertimos una fracción X en un portafolio bien diversificado que tenga todos los activos del mercado (y que llamaremos M) en la proporción en la que cada inversor tiene en su portafolio de manera agregada. Nuestra fracción X a invertir podrá ser mayor o menor a 1. Para ser mayor indefectiblemente deberé pedir prestado a la tasa libre de riesgo, y si es menor, el excedente podré invertirlo en el activo libre de riesgo. En cualquier caso, el porcentaje alocado de nuestro portafolio al activo libre de riesgo será: (1-X).

De manera que puedo reemplazar en la fórmula de retorno del portafolio de separación estas dos proporciones:

$$R_s = (1 - X)R_f + X\overline{R_m}$$

A su vez, si reemplazamos los porcentajes en la ecuación del riesgo del portafolio:

$$\sigma_s = \sqrt{\underbrace{(1 - X)^2\sigma_f}_{} + X^2\sigma_m^2 + \underbrace{2X(1 - X)\sigma_m\sigma_f\rho_{f,m}}_{}}$$

Estos dos términos tienden a cero puesto que $\sigma_f = 0$

Por ende nuestra ecuación de riesgo queda reducida a:

$$\sigma_s = \sqrt{X^2\sigma_m^2}$$

Y simplificando el cuadrado con la raíz:

$$\sigma_s = X\sigma_m$$

Despejando X obtenemos:

$$X = \frac{\sigma_s}{\sigma_m}$$

Ahora podemos regresar a la fórmula de retorno y sustituir la definición de X a la que hemos arribado:

$$R_s = \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_m}\right)R_f + \frac{\sigma_s}{\sigma_m}\overline{R_m}$$

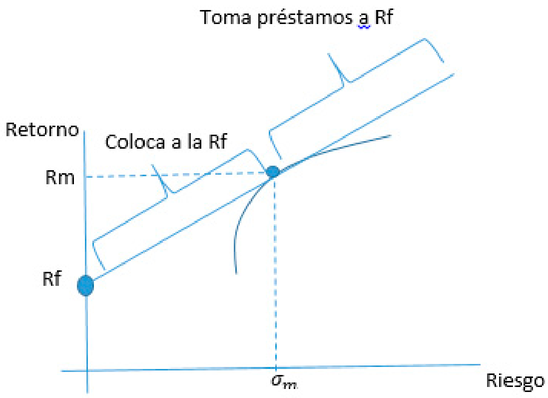
Reorganizando los términos, podemos escribir la fórmula como:

$$R_s = \underbrace{R_f}_{\text{Ordenada al origen}} + \underbrace{\left(\frac{\overline{R_m} - R_f}{\sigma_m}\right)}_{\text{Pendiente}}\sigma_s$$

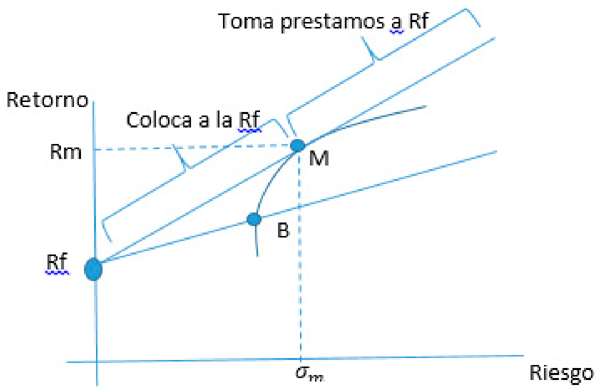
La fórmula de retorno del portafolio de separación para a tener una estructura de línea recta: y=a+xb

Todos los posibles retornos de un portafolio de separación residen en una línea recta. Donde aquellos portafolios que están entre la ordenada al origen (Rf,0) y el portafolio de mercado (Rm,) tendrán combinaciones de estos. Los que se encuentre más allá del portafolio de mercado, tendrán dicho portafolio y endeudamiento a la tasa libre de riesgo. Queda claro que ahora existen para el inversor todo un universo nuevo de portafolios asequibles más allá de la frontera eficiente, y que son superadores de ésta, salvo en el punto marcado por el portafolio de mercado.

La pendiente puede ser interpretada como el precio del mercado para el riesgo de todo los portafolios eficientes. Mientras que es el monto de riesgo que asumo. Por su parte, que Rf es el retorno requerido por postergar consumo.

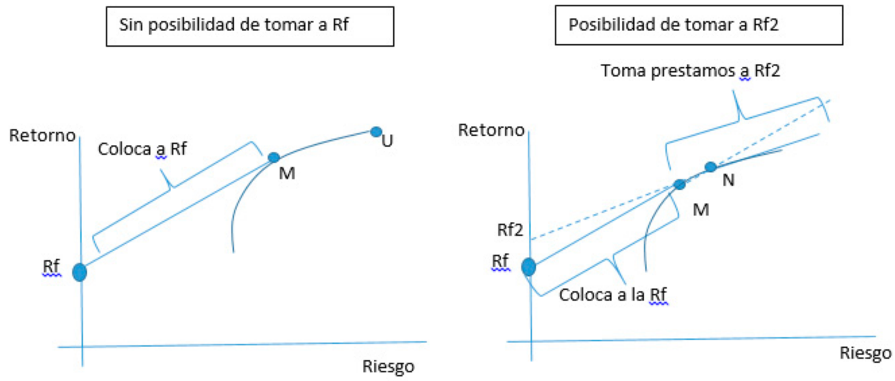


El inversor podría combinar la tasa libre de riesgo con cualquier portafolio que se encuentre en la frontera eficiente. Por ejemplo podría tener una combinación con el portafolio B como se muestra en el gráfico a continuación. Sin embargo, a medida que mueva la línea del retorno en el sentido opuesto de las agujas del reloj, cada vez conseguirá portafolios mejores en el sentido de que superarán siempre en retorno el nivel de riesgo del inversor. En el punto M la recta de retornos se hará tangente a la curva de la frontera eficiente y esa será la recta límite y con mejores retornos a cualquier nivel de riesgo que el resto.



Dos derivaciones: imposibilidad de tomar crédito y tasa diferencial para tomar

Existen dos derivaciones de esta gráfica de retorno y dispersión. Una cuando los inversores no tienen la posibilidad de endeudarse a la tasa libre de riesgo (grafico 1) y otra cuando al tomar crédito deben hacerlo a una tasa diferencial (gráfico 2). En la primera de las situaciones pueden existir inversores agresivos que independientemente de la imposibilidad decidan alocar su dinero en portafolios entre M y U. En la segunda circunstancia, existe un nuevo punto de tangencia, N a partir del cual los inversores pueden tomar dinero a una tasa Rf2 que es superior a Rf. Esto genera una línea de pendiente inferior a la construida entre Rf y el portafolio M.



Criterio media-varianza en la selección de activos

En resumen, hasta aquí hemos podido calcular el retorno y riesgo de un activo individualmente considerado. A su vez, hemos calculado un índice () para determinar, a priori nuestras preferencias en términos de unidades de retorno por unidad de riesgo dentro de ese grupo de activos. Luego, hemos pasado al universo del portafolio, donde descubrimos que el retorno del mismo es el proporcional que aportan los activos individuales que en él incluyamos. Sin embargo, también descubrimos que el riesgo de un portafolio no es simplemente el riesgo que aportan los activos individuales por su participación, sino que es mucho más que eso. Y que es allí donde el efecto de la diversificación tiene sentido y permite, bajar el riesgo total del portafolio a un nivel menor al que aportan la sumatoria de los riesgos de los activos en él incluidos. Sobre todo, si logramos identificar activos que tengan correlaciones inversas.

Dicho esto, ahora podríamos hacer a nivel del portafolio lo mismo que hicimos al nivel individual de un activo. Es decir, construir un índice Tetha (). Esta vez lo haremos agregándole el activo libre de riesgo, para descartar aquellos activos que tengan riesgo y rindan menos que este. A su vez, ahora nos es posible ver que tetha no es otra cosa que la pendiente de la recta que une al activo libre de riesgo con el portafolio riesgoso de la frontera eficiente de Markowitz. Dado que el portafolio óptimo es aquel tangente a la frontera eficiente, lo que necesitamos descubrir es la recta que posee mayor pendiente. Es decir, debemos maximizar la función de Theta para conocer la posición del portafolio eficiente por donde pasará la recta. Así compararemos el exceso de retorno esperado del portafolio por sobre el activo libre de riesgo versus su riesgo. Es decir:

$$\theta = \frac{\overline{R_p} - R_f}{\sigma_p}$$

Al maximizar esta función hallaremos la mayor pendiente posible, y con ello el portafolio que se ubique en el punto tangente de la frontera eficiente.

Si en la fórmula anterior reemplazamos y por sus respectivas fórmulas, nos encontramos con una ecuación de múltiples incógnitas, ya que no conocemos cuánto vamos a invertir en cada activo (X_i). .

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i * (\bar{R}_i - R_f)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} {X_j}^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} X_j X_i \sigma_{j,i}^2}}$$

Es decir, no podemos despejar para hallar cuáles son las proporciones óptimas que debemos invertir en cada activo, sino es a través del álgebra y uso de matrices. La solución que encuentra el máximo a la ecuación anterior tiene por ende, la siguiente forma:

$$[Z_i] = [\sigma]^{-1} * [\bar{R}_i - Rf]$$

Siendo:

$$X_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}$$

$$[\sigma]^{-1} = \textit{la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas}$$

$$[\bar{R}_i] = \textit{la matriz de retornos de los activos individualmente considerados}$$

Es decir, aquí es donde la matriz espejo de varianzas y covarianzas que anteriormente calculamos juega su rol protagónico para resolver la maximización de la ecuación de. Debemos calcular su inversa, para luego multiplicarla por la matriz de los retornos para alcanzar un nueva matriz con una serie de estimadores, que nos permitirán en base a su proporción respecto del resto de los estimadores de la matriz, calcular las proporciones que invertiremos en cada activo () en nuestro portafolio de mínima varianza.

De manera que el primer paso será rellenar la matriz de varianzas y covarianzas en forma de espejo. Una forma simple es copiando y transponiendo cada columna vertical al horizontal, para que nos quede la matriz completa de la siguiente manera.

Matriz de Varianzas y Covarianzas

	FRAN.BA	*AGRO.BA*	*GGAL.BA*	*CRES.BA*	*CAPU.BA*	*CECO2.BA*	*MOLI.BA*	*MIRG.BA*	*SAMI.BA*	*ERAR.BA*	*COME.BA*	*TECO2.BA*	*YPFD.BA*
FRAN.BA	0.00532	0.00130	0.00423	0.00182	0.00100	0.00208	0.00174	0.00143	0.00132	0.00193	0.00218	0.00288	0.00117
AGRO.BA	0.00130	0.00568	0.00146	0.00140	0.00086	0.00144	0.00158	0.00111	0.00157	0.00126	0.00152	0.00147	0.00074
GGAL.BA	0.00423	0.00146	0.00549	0.00176	0.00118	0.00210	0.00196	0.00140	0.00143	0.00207	0.00225	0.00297	0.00106
CRES.BA	0.00182	0.00140	0.00176	0.00367	0.00058	0.00143	0.00132	0.00082	0.00111	0.00153	0.00138	0.00161	0.00098
CAPU.BA	0.00100	0.00086	0.00118	0.00058	0.00668	0.00146	0.00103	0.00116	0.00096	0.00112	0.00079	0.00120	0.00089
CECO2.BA	0.00208	0.00144	0.00210	0.00143	0.00146	0.00509	0.00143	0.00131	0.00121	0.00156	0.00174	0.00175	0.00101
MOLI.BA	0.00174	0.00158	0.00196	0.00132	0.00103	0.00143	0.00407	0.00080	0.00132	0.00179	0.00163	0.00180	0.00095
MIRG.BA	0.00143	0.00111	0.00140	0.00082	0.00116	0.00131	0.00080	0.00422	0.00118	0.00122	0.00148	0.00130	0.00077
SAMI.BA	0.00132	0.00157	0.00143	0.00111	0.00096	0.00121	0.00132	0.00118	0.00454	0.00167	0.00145	0.00104	0.00092
ERAR.BA	0.00193	0.00126	0.00207	0.00153	0.00112	0.00156	0.00179	0.00122	0.00167	0.00499	0.00190	0.00184	0.00249
COME.BA	0.00218	0.00152	0.00225	0.00138	0.00079	0.00174	0.00163	0.00148	0.00145	0.00190	0.00710	0.00208	0.00110
TECO2.BA	0.00288	0.00147	0.00297	0.00161	0.00120	0.00175	0.00180	0.00130	0.00104	0.00184	0.00208	0.00483	0.00100
YPFD.BA	0.00117	0.00074	0.00106	0.00098	0.00089	0.00101	0.00095	0.00077	0.00092	0.00249	0.00110	0.00100	0.00456

Una vez hecho esto, nos posicionamos en la celda donde queremos que quede el primer dato de nuestra matriz inversa y allí pondremos la fórmula: =MINVERSA(). Dentro del paréntesis seleccionaremos el rango donde se encuentra la matriz a invertir. Luego marcaremos en gris todas las celdas de destino para nuestra matriz invertida como se indica en la imagen a continuación. Por último, debemos marcar en gris toda la fórmula, en este caso “=MINVERSA(AR3:BD15)” y en simultáneo apretar las teclas “Ctrl”, “Shift” y “Enter” de nuestro teclado.

=MINVERSA(AR3:BD15)

AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB	BC	BD
Matriz de Varianzas y Covarianzas													
	FRAN.BA	*AGRO.BA*	*GGAL.BA*	*CRES.BA*	*CAPU.BA*	*CECO2.BA*	*MOLI.BA*	*MIRG.BA*	*SAMI.BA*	*ERAR.BA*	*COME.BA*	*TECO2.BA*	*YPFD.BA*
FRAN.BA	0.00532	0.00130	0.00423	0.00182	0.00100	0.00208	0.00174	0.00143	0.00132	0.00193	0.00218	0.00288	0.00117
AGRO.BA	0.00130	0.00568	0.00146	0.00140	0.00086	0.00144	0.00158	0.00111	0.00157	0.00126	0.00152	0.00147	0.00074
GGAL.BA	0.00423	0.00146	0.00549	0.00176	0.00118	0.00210	0.00196	0.00140	0.00143	0.00207	0.00225	0.00297	0.00106
CRES.BA	0.00182	0.00140	0.00176	0.00367	0.00058	0.00143	0.00132	0.00082	0.00111	0.00153	0.00138	0.00161	0.00098
CAPU.BA	0.00100	0.00086	0.00118	0.00058	0.00668	0.00146	0.00103	0.00116	0.00096	0.00112	0.00079	0.00120	0.00089
CECO2.BA	0.00208	0.00144	0.00210	0.00143	0.00146	0.00509	0.00143	0.00131	0.00121	0.00156	0.00174	0.00175	0.00101
MOLI.BA	0.00174	0.00158	0.00196	0.00132	0.00103	0.00143	0.00407	0.00080	0.00132	0.00179	0.00163	0.00180	0.00095
MIRG.BA	0.00143	0.00111	0.00140	0.00082	0.00116	0.00131	0.00080	0.00422	0.00118	0.00122	0.00148	0.00130	0.00077
SAMI.BA	0.00132	0.00157	0.00143	0.00111	0.00096	0.00121	0.00132	0.00118	0.00454	0.00167	0.00145	0.00104	0.00092
ERAR.BA	0.00193	0.00126	0.00207	0.00153	0.00112	0.00156	0.00179	0.00122	0.00167	0.00499	0.00190	0.00184	0.00249
COME.BA	0.00218	0.00152	0.00225	0.00138	0.00079	0.00174	0.00163	0.00148	0.00145	0.00190	0.00710	0.00208	0.00110
TECO2.BA	0.00288	0.00147	0.00297	0.00161	0.00120	0.00175	0.00180	0.00130	0.00104	0.00184	0.00208	0.00483	0.00100
YPFD.BA	0.00117	0.00074	0.00106	0.00098	0.00089	0.00101	0.00095	0.00077	0.00092	0.00249	0.00110	0.00100	0.00456
Matriz Inversa de Varianzas y Covarianzas													
	FRAN.BA	*AGRO.BA*	*GGAL.BA*	*CRES.BA*	*CAPU.BA*	*CECO2.BA*	*MOLI.BA*	*MIRG.BA*	*SAMI.BA*	*ERAR.BA*	*COME.BA*	*TECO2.BA*	*YPFD.BA*
FRAN.BA	=MINVERSA												
AGRO.BA													
GGAL.BA													
CRES.BA													
CAPU.BA													
CECO2.BA													
MOLI.BA													
MIRG.BA													
SAMI.BA													
ERAR.BA													
COME.BA													
TECO2.BA													
YPFD.BA													

Eso hará que la fórmula introducida tome la forma de matriz y arroje el resultado en las celdas que hemos marcado previamente. Nos daremos cuenta de que la fórmula ha tomado la forma de matriz ya que ahora aparecerá entre corchetes:

{=MINVERSA(AR3:BD15)}

AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA	BB	BC	BD
Matriz de Varianzas y Covarianzas													
	FRAN.BA	*AGRO.BA*	*GGAL.BA*	*CRES.BA*	*CAPU.BA*	*CECO2.BA*	*MOLI.BA*	*MIRG.BA*	*SAMI.BA*	*ERAR.BA*	*COME.BA*	*TECO2.BA*	*YPFD.BA*
FRAN.BA	0.00532	0.00130	0.00423	0.00182	0.00100	0.00208	0.00174	0.00143	0.00132	0.00193	0.00218	0.00288	0.00117
AGRO.BA	0.00130	0.00568	0.00146	0.00140	0.00086	0.00144	0.00158	0.00111	0.00157	0.00126	0.00152	0.00147	0.00074
GGAL.BA	0.00423	0.00146	0.00549	0.00176	0.00118	0.00210	0.00196	0.00140	0.00143	0.00207	0.00225	0.00297	0.00106
CRES.BA	0.00182	0.00140	0.00176	0.00367	0.00058	0.00143	0.00132	0.00082	0.00111	0.00153	0.00138	0.00161	0.00098
CAPU.BA	0.00100	0.00086	0.00118	0.00058	0.00668	0.00146	0.00103	0.00116	0.00096	0.00112	0.00079	0.00120	0.00089
CECO2.BA	0.00208	0.00144	0.00210	0.00143	0.00146	0.00509	0.00143	0.00131	0.00121	0.00156	0.00174	0.00175	0.00101
MOLI.BA	0.00174	0.00158	0.00196	0.00132	0.00103	0.00143	0.00407	0.00080	0.00132	0.00179	0.00163	0.00180	0.00095
MIRG.BA	0.00143	0.00111	0.00140	0.00082	0.00116	0.00131	0.00080	0.00422	0.00118	0.00122	0.00148	0.00130	0.00077
SAMI.BA	0.00132	0.00157	0.00143	0.00111	0.00096	0.00121	0.00132	0.00118	0.00454	0.00167	0.00145	0.00104	0.00092
ERAR.BA	0.00193	0.00126	0.00207	0.00153	0.00112	0.00156	0.00179	0.00122	0.00167	0.00499	0.00190	0.00184	0.00249
COME.BA	0.00218	0.00152	0.00225	0.00138	0.00079	0.00174	0.00163	0.00148	0.00145	0.00190	0.00710	0.00208	0.00110
TECO2.BA	0.00288	0.00147	0.00297	0.00161	0.00120	0.00175	0.00180	0.00130	0.00104	0.00184	0.00208	0.00483	0.00100
YPFD.BA	0.00117	0.00074	0.00106	0.00098	0.00089	0.00101	0.00095	0.00077	0.00092	0.00249	0.00110	0.00100	0.00456
Matriz Inversa de Varianzas y Covarianzas													
	FRAN.BA	*AGRO.BA*	*GGAL.BA*	*CRES.BA*	*CAPU.BA*	*CECO2.BA*	*MOLI.BA*	*MIRG.BA*	*SAMI.BA*	*ERAR.BA*	*COME.BA*	*TECO2.BA*	*YPFD.BA*
FRAN.BA	534.131278	13.7377093	-331.06844	-50.034654	11.4181668	-31.82388	0.0800546	-25.340751	-4.9152156	4.35506963	-14.715314	-76.352164	-23.912339
AGRO.BA	13.7377093	222.854331	-5.6009612	-38.635204	-2.5865183	-19.29264	-41.449628	-19.201581	-40.580835	4.46681236	-11.051203	-19.630481	-0.8106667
GGAL.BA	-331.06844	-5.6009612	528.146716	-9.0060464	-10.204774	-22.578894	-41.784207	-3.4959863	-14.452052	-35.697809	-14.363365	-77.19276	24.2134777
CRES.BA	-50.034654	-38.635204	-9.0060464	381.519983	10.8279736	-33.902532	-29.875376	1.6876351	-20.492362	-34.783462	-7.8424913	-35.052317	-16.447675
CAPU.BA	11.4181668	-2.5865183	-10.204774	10.8279736	169.325461	-29.606128	-15.454333	-25.945207	-11.950915	-4.4909033	6.3865193	-17.377744	-14.372633
CECO2.BA	-31.82388	-19.29264	-22.578894	-33.902532	-29.606128	271.171918	-18.198747	-26.340951	-8.9526883	-10.460673	-16.091664	-12.483955	-8.2225975
MOLI.BA	0.0800546	-41.449628	-41.784207	-29.875376	-15.454333	-18.198747	359.278816	16.6308944	-30.464141	-54.047953	-18.309528	-44.807916	1.86984605
MIRG.BA	-25.340751	-19.201581	-3.4959863	1.6876351	-25.945207	-26.340951	16.6308944	294.508211	-33.98523	-17.554669	-24.693223	-21.095475	-4.8804917
SAMI.BA	-4.9152156	-40.580835	-14.452052	-20.492362	-11.950915	-8.9526883	-30.464141	-33.98523	285.722962	-48.661101	-15.340946	20.9907432	0.15420989
ERAR.BA	4.35506963	4.46681236	-35.697809	-34.783462	-4.4909033	-10.460673	-54.047953	-17.554669	-48.661101	355.938901	-20.173548	-27.700797	-142.01159
COME.BA	-14.715314	-11.051203	-14.363365	-7.8424913	6.3865193	-16.091664	-18.309528	-24.693223	-15.340946	-20.173548	182.86487	-25.585713	-3.4579634
TECO2.BA	-76.352164	-19.630481	-77.19276	-35.052317	-17.377744	-12.483955	-44.807916	-21.095475	20.9907432	-27.700797	-25.585713	364.558082	4.31327988
YPFD.BA	-23.912339	-0.8106667	24.2134777	-16.447675	-14.372633	-8.2225975	1.86984605	-4.8804917	0.15420989	-142.01159	-3.4579634	4.31327988	305.941568

Suponemos una tasa libre de riesgo del 18% anual, que llevamos al 0.32% semanal.

El siguiente paso será multiplicar la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas que hemos obtenido por la matriz de excesos de retornos esperados de los activos para obtener la matriz . Para hacerlo utilizaremos el mismo procedimiento que para invertir la matriz de varianzas y covarianzas, pero esta vez utilizaremos la fórmula “MMULT()”.

Matriz de Varianzas y Covarianzas

	FRAN.BA	AGRO.BA	GGAL.BA	CRES.BA	CAPU.BA	CECO2.BA	MOLI.BA	MIRG.BA	SAMI.BA	ERAR.BA	COME.BA	TECO2.BA	YPFD.BA
FRAN.BA	0.005	0.001	0.004	0.002	0.001	0.002	0.002	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.001
AGRO.BA	0.001	0.006	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001	0.001
GGAL.BA	0.004	0.001	0.005	0.002	0.001	0.002	0.002	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.001
CRES.BA	0.002	0.001	0.002	0.004	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001
CAPU.BA	0.001	0.001	0.001	0.001	0.007	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
CECO2.BA	0.002	0.001	0.002	0.001	0.001	0.005	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.001
MOLI.BA	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.004	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.001
MIRG.BA	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.004	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
SAMI.BA	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.005	0.002	0.001	0.001	0.001
ERAR.BA	0.002	0.001	0.002	0.002	0.001	0.002	0.002	0.001	0.002	0.005	0.002	0.002	0.002
COME.BA	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.002	0.002	0.001	0.001	0.002	0.007	0.002	0.001
TECO2.BA	0.003	0.001	0.003	0.002	0.001	0.002	0.002	0.001	0.001	0.002	0.002	0.005	0.001
YPFD.BA	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.001	0.005

	[E(Ri)]	[E(Ri)-Rf]
FRAN.BA	0.30%	-0.02%
AGRO.BA	0.55%	0.23%
GGAL.BA	0.43%	0.11%
CRES.BA	0.42%	0.10%
CAPU.BA	0.60%	0.28%
CECO2.BA	0.26%	-0.05%
MOLI.BA	0.41%	0.09%
MIRG.BA	0.66%	0.34%
SAMI.BA	0.51%	0.19%
ERAR.BA	0.46%	0.14%
COME.BA	0.39%	0.07%
TECO2.BA	0.34%	0.02%
YPFD.BA	0.26%	-0.06%

Matriz Inversa de Varianzas y Covarianzas

	FRAN.BA	AGRO.BA	GGAL.BA	CRES.BA	CAPU.BA	CECO2.BA	MOLI.BA	MIRG.BA	SAMI.BA	ERAR.BA	COME.BA	TECO2.BA	YPFD.BA
FRAN.BA	534.13	13.74	(331.07)	(50.03)	11.42	(31.82)	0.08	(25.34)	(4.92)	4.36	(14.72)	(76.35)	(23.91)
AGRO.BA	13.74	222.85	(5.60)	(38.64)	(2.59)	(19.29)	(41.45)	(19.20)	(40.58)	4.47	(11.05)	(19.63)	(0.81)
GGAL.BA	(331.07)	(5.60)	528.15	(9.01)	(10.20)	(22.58)	(41.78)	(3.50)	(14.45)	(35.70)	(14.36)	(77.19)	24.21
CRES.BA	(50.03)	(38.64)	(9.01)	381.52	10.83	(33.90)	(29.88)	1.69	(20.49)	(34.78)	(7.84)	(35.05)	(16.45)
CAPU.BA	11.42	(2.59)	(10.20)	10.83	169.33	(29.61)	(15.45)	(25.95)	(11.95)	(4.49)	6.39	(17.38)	(14.37)
CECO2.BA	(31.82)	(19.29)	(22.58)	(33.90)	(29.61)	271.17	(18.20)	(26.34)	(8.95)	(10.46)	(16.09)	(12.48)	(8.22)
MOLI.BA	0.08	(41.45)	(41.78)	(29.88)	(15.45)	(18.20)	359.28	16.63	(30.46)	(54.05)	(18.31)	(44.81)	1.87
MIRG.BA	(25.34)	(19.20)	(3.50)	1.69	(25.95)	(26.34)	16.63	294.51	(33.99)	(17.55)	(24.69)	(21.10)	(4.88)
SAMI.BA	(4.92)	(40.58)	(14.45)	(20.49)	(11.95)	(8.95)	(30.46)	(33.99)	285.72	(48.66)	(15.34)	20.99	0.15
ERAR.BA	4.36	4.47	(35.70)	(34.78)	(4.49)	(10.46)	(54.05)	(17.55)	(48.66)	355.94	(20.17)	(27.70)	(142.01)
COME.BA	(14.72)	(11.05)	(14.36)	(7.84)	6.39	(16.09)	(18.31)	(24.69)	(15.34)	(20.17)	182.86	(25.59)	(3.46)
TECO2.BA	(76.35)	(19.63)	(77.19)	(35.05)	(17.38)	(12.48)	(44.81)	(21.10)	20.99	(27.70)	(25.59)	364.56	4.31
YPFD.BA	(23.91)	(0.81)	24.21	(16.45)	(14.37)	(8.22)	1.87	(4.88)	0.15	(142.01)	(3.46)	4.31	305.94

	Matriz [Zi]	
FRAN.BA	=+MMUL	-60.58%
AGRO.BA	0.27	31.58%
GGAL.BA	0.43	49.45%
CRES.BA	0.24	27.83%
CAPU.BA	0.36	41.77%
CECO2.BA	(0.47)	-54.57%
MOLI.BA	0.02	2.50%
MIRG.BA	0.80	92.05%
SAMI.BA	0.17	19.89%
ERAR.BA	0.29	33.06%
COME.BA	(0.04)	-5.14%
TECO2.BA	(0.25)	-29.16%
YPFD.BA	(0.42)	-48.68%
Suma:	0.87	100.0%

Dado que estaremos multiplicando una matriz de 13 filas por 13 columnas, por una de 13 filas y 1 columna, el resultado será una matriz de estimadores de 1 columna por 13 filas. Obtenida esa matriz, sumaremos todo su contenido para luego obtener finalmente el porcentaje a invertir en cada activo a partir de la división de cada por como se muestra a continuación.

	Matriz [Zi]	Matriz [Xi]
FRAN.BA	(0.53)	=AY18/AY31
AGRO.BA	0.27	31.58%
GGAL.BA	0.43	49.45%
CRES.BA	0.24	27.83%
CAPU.BA	0.36	41.77%
CECO2.BA	(0.47)	-54.57%
MOLI.BA	0.02	2.50%
MIRG.BA	0.80	92.05%
SAMI.BA	0.17	19.89%
ERAR.BA	0.29	33.06%
COME.BA	(0.04)	-5.14%
TECO2.BA	(0.25)	-29.16%
YPFD.BA	(0.42)	-48.68%
Suma:	0.87	100.0%

Trasladada la fórmula a todos los activos, podremos ordenarlos y así ver nuestro orden de preferencias y porcentajes a invertir en cada activo para alcanzar nuestro portafolio óptimo de mínima varianza. Nótese que para alcanzar el mismo es necesario no sólo tener posiciones compradas en algunos activos sino también tener posiciones vendidas en cortos en otros como FRAN, CECO2, YPFD y TECO2.

Si analizamos el resultado a la luz de lo que era a priori nuestra selección de activos, sin tener en cuenta las correlaciones, veremos que hay ciertas similitudes, como que por ejemplo MIRG, el activo que entrega mayor retorno por unidad de riesgo es el preferido en ambos ordenamientos. O los activos que a priori estaban al final de la tabla de las preferencias, son los que el criterio media-varianza de selección de activos de Markowitz está sugiriendo ahora vender en corto. Sin embargo, la inclusión de las covarianzas, ha impactado en el ordenamiento de ciertos activos, como por ejemplo SAMI que cayó de un 2do lugar de preferencia a priori a un 4to lugar o CRES que pasó de un 5to lugar de preferencia a priori a ser el 2do activo con más peso en nuestro portafolio.

	Matriz [Zi]	Matriz [Xi]		Desvío Standard (riesgo)	Ret. Medio Continuo Anualizado	$\theta=$ (R_	Orden de preferencia
MIRG.BA	0.7994	92.05%	MIRG.BA	46.85%	34.09%	0.72768011	1
GGAL.BA	0.4294	49.45%	SAMI.BA	48.63%	26.51%	0.54515692	2
CAPU.BA	0.3627	41.77%	CAPU.BA	58.97%	31.15%	0.52830449	3
ERAR.BA	0.2871	33.06%	AGRO.BA	54.37%	28.34%	0.52121124	4
AGRO.BA	0.2742	31.58%	CRES.BA	43.72%	21.93%	0.50157489	5
CRES.BA	0.2417	27.83%	ERAR.BA	50.98%	23.81%	0.46700308	6
SAMI.BA	0.1727	19.89%	MOLI.BA	46.01%	21.29%	0.46279198	7
MOLI.BA	0.0217	2.50%	GGAL.BA	53.47%	22.26%	0.41640153	8
COME.BA	(0.0447)	-5.14%	TECO2.BA	50.17%	17.60%	0.35081523	9
TECO2.BA	(0.2532)	-29.16%	COME.BA	60.81%	20.41%	0.33570943	10
YPFD.BA	(0.4228)	-48.68%	FRAN.BA	52.63%	15.67%	0.29778772	11
CECO2.BA	(0.4739)	-54.57%	YPFD.BA	48.71%	13.42%	0.27544113	12
FRAN.BA	(0.5261)	-60.58%	CECO2.BA	51.46%	13.75%	0.26730198	13
Suma:	0.87	100.0%					

Si queremos restringir el modelo sólo a posiciones largas, lo único que debemos hacer es sumar solamente los valores positivos de la matriz y luego al calcular la matriz hacerlo sólo para los valores que den mayor a cero como se muestra a continuación. Si bien el ordenamiento será igual que en el caso anterior, siendo MIRG la más preferida seguida por GGAL, CAPU, etc. En todos los casos los porcentaje a invertir serán inferiores, puesto que en el caso que permitíamos ventas en corto (short sales) teníamos un 198.14% más de dinero para invertir producto de esas ventas. A su vez.

	Matriz [Zi]	Matriz [Xi]	Matriz [Xi] sin short sale	Matriz Xi=1/N		Desvío Standard (riesgo)	Ret. Medio Continuo Anualizado	$\theta=$ (R_	Orden de preferencia
MIRG.BA	0.7994	92.05%	30.87%	7.69%	MIRG.BA	46.85%	34.09%	0.72768011	1
GGAL.BA	0.4294	49.45%	16.59%	7.69%	SAMI.BA	48.63%	26.51%	0.54515692	2
CAPU.BA	0.3627	41.77%	14.01%	7.69%	CAPU.BA	58.97%	31.15%	0.52830449	3
ERAR.BA	0.2871	33.06%	11.09%	7.69%	AGRO.BA	54.37%	28.34%	0.52121124	4
AGRO.BA	0.2742	31.58%	10.59%	7.69%	CRES.BA	43.72%	21.93%	0.50157489	5
CRES.BA	0.2417	27.83%	9.34%	7.69%	ERAR.BA	50.98%	23.81%	0.46700308	6
SAMI.BA	0.1727	19.89%	6.67%	7.69%	MOLI.BA	46.01%	21.29%	0.46279198	7
MOLI.BA	0.0217	2.50%	0.84%	7.69%	GGAL.BA	53.47%	22.26%	0.41640153	8
COME.BA	(0.0447)	-5.14%	0.00%	7.69%	TECO2.BA	50.17%	17.60%	0.35081523	9
TECO2.BA	(0.2532)	-29.16%	0.00%	7.69%	COME.BA	60.81%	20.41%	0.33570943	10
YPFD.BA	(0.4228)	-48.68%	0.00%	7.69%	FRAN.BA	52.63%	15.67%	0.29778772	11
CECO2.BA	(0.4739)	-54.57%	0.00%	7.69%	YPFD.BA	48.71%	13.42%	0.27544113	12
FRAN.BA	(0.5261)	-60.58%	0.00%	7.69%	CECO2.BA	51.46%	13.75%	0.26730198	13
Suma:	0.87	100.0%	100.0%	100.0%					

Cálculo del retorno y riesgo del portafolio obtenido

Para calcular el retorno y riesgo del portafolio debemos utilizar las fórmulas anteriormente definidas, que en Excel las escribimos como:

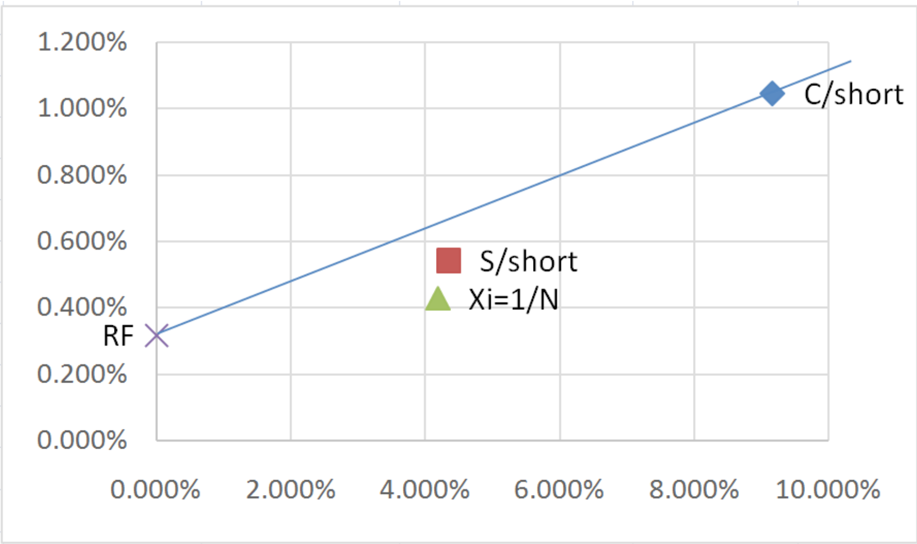
Rp = SUMAPRODUCTO($[MATRIZ\ X_i]$, $[MATRIZ\ \bar{R}_i]$)
σp=MMULT(MMULT(TRANSPONER($[MATRIZ\ X_i]$),$[MATRIZ\ VAR\ Y\ COVAR]$),$[MATRIZ\ X_i]$)

Recordar que en la fórmula de como trabajamos con matrices, debemos utilizar las teclas CTRL+SHIFT+ENTER en simultáneo al momento de confirmar las fórmula en la celda.

En este caso vemos que el exceso de retorno esperado del portafolio, permitiendo los short sales es de 1.047% semanal con una varianza de 0.839%, siendo su Theta 0.795. Al comparar la misma contra el portafolio sin short sale o el portafolio equitativamente distribuido, podemos comprobar que es la más grande. Esto la convierte en la tangente de la frontera de Markowitz para este set de activos riesgosos y por ello pasará por allí la recta proveniente de Rf.

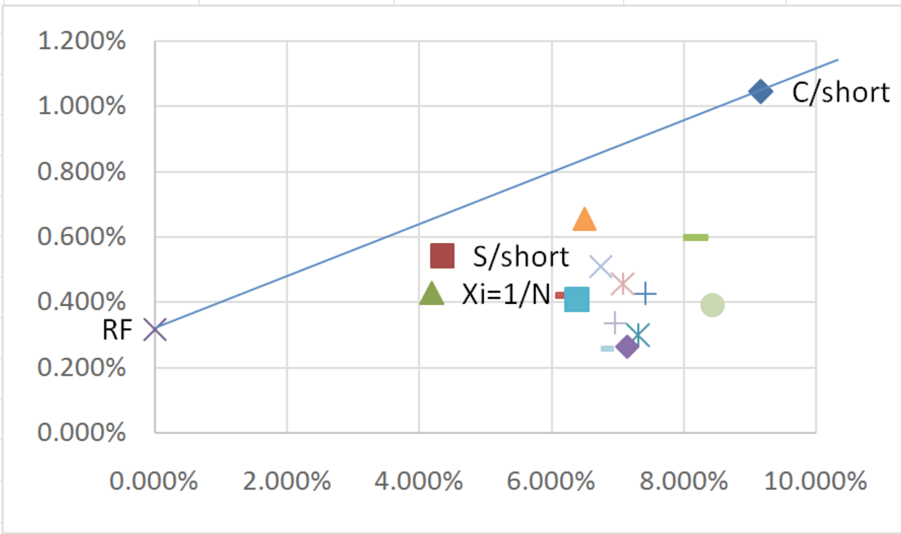
Rp = =+SUMAPRODUCTO(AV2:AV14,BA18:BA30)
σp==+MMULT(MMULT(TRANSPONER(BA18:BA30),AG3:AS15),BA18:BA30)

Datos Sem.	C/short	S/short	Xi=1/N
Retorno Port.	1.047%	0.543%	0.429%
Var Port.	0.839%	0.189%	0.175%
Desv. Port.	9.157%	4.349%	4.184%
Theta	0.0795	0.0516	0.0265



Posición de los portafolios construidos en el gráfico de retorno-riesgo

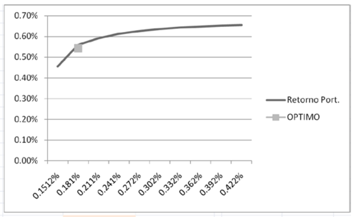
Podemos ver cómo el portafolio construido nos ha permitido obtener la mayor tangente de la frontera. A su vez, al eliminar la posibilidad del short sale, vemos que ese portafolio ofrece un retorno que es subóptimo, sin embargo, mejor relación exceso de retorno sobre riesgo que uno equitativamente distribuido.



Es posible construir la curva completa de Markowitz para entender dónde está posicionado este portafolio óptimo obtenido. Para ello, en base a lo que ya sabemos, calcularemos con el solver un portafolio de mínima varianza, cuyas restricciones serán prohibir el short sale y que la sumatoria de lo invertido en cada activo de 1. Luego, calcularemos un portafolio de máximo retorno (celda objetivo del solver), con iguales restricciones. Obviamente, el resultado del solver será alocar 100% al activo que ofrece el mayor retorno, en este caso: MIRG. Luego calcularemos la diferencia entre el portafolio más riesgoso (0.422%) y más rentable, y el de mínima varianza (0.1512%). Y dividiremos esa diferencia por 9 para armar los escenarios intermedios, sumándole a cada escenario un poco más de riesgo que el anterior (0.03%).

Una vez que tenemos los riesgos objetivo de nuestros portafolios, simplemente volveremos a calcular el solver, buscando el máximo retorno, pero esta vez, agregando la restricción de que nuestro riesgo debe equivaler al valor dado en cada caso. Obtenidos los portafolios y máximos retornos para cada nivel de riesgo dado, podemos graficar el resultado. Al introducir el portafolio óptimo sin short sales antes calculado, vemos que se posicionas sobre la tangente de la curva.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Min.Var									Max Ret.
FRAN.BA	0.00%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
AGRO.BA	6.44%	12%	15%	16%	13%	6%	0%	0%	0%	0%
GGAL.BA	0.00%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
CRES.BA	17.20%	14%	7%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
CAPU.BA	9.88%	17%	20%	22%	23%	22%	20%	12%	5%	0%
CECO2.BA	4.66%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
MOLI.BA	11.63%	7%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
MIRG.BA	16.38%	35%	45%	53%	63%	72%	80%	88%	95%	100%
SAMI.BA	10.89%	12%	13%	8%	1%	0%	0%	0%	0%	0%
ERAR.BA	0.00%	3%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
COME.BA	2.28%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
TECO2.BA	3.97%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
YPFD.BA	16.66%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Total	100.00%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Retorno Port.	0.46%	0.560%	0.592%	0.613%	0.627%	0.637%	0.644%	0.649%	0.653%	0.656%
Var Port.	0.1512%	0.181%	0.211%	0.241%	0.272%	0.302%	0.332%	0.362%	0.392%	0.422%



Diferencia 0.0300%

Portafolios de separación

El teorema de la separación plantea la posibilidad de elegir el portafolio óptimo de activos riesgosos para el inversor sin necesidad de conocer su perfil de inversor.

PASOS PARA CALCULAR FORMULA DE FRONTERA EFICIENTE M/RF

1- DETECTAR EL PORTAFOLIO RIESGOSO TANGENTE (M)

2- OBTENER EL RETORNO ESPERADO E(RM) Y RIESGO DE PORTAFOLIO TANGENTE (σM)

3- USAR ESOS DOS DATOS JUNTO A RF PARA CALCULAR PENDIENTE DE FRONTERA CON LA FÓRMULA:

4- USAR LA PENDIENTE PARA CALCULAR LA RECTA DE LA FRONTERA EFICIENTE

Cierre de la unidad

Al agregar la posibilidad de invertir en un activo libre de riesgo al mundo de portafolios riesgosos de Markowitz se nos abre todo un mundo de nuevos portafolios que residen por encima de la frontera eficiente. Esta situación da lugar a que el inversor pueda mezclarlo con un portafolio eficiente óptimo, que se encuentra en la tangente de la frontera con el activo libre de riesgo. Hemos descrito en detalle el procedimiento para acceder a dicho portafolio eficiente óptimo.
Así el inversor podrá acceder a portfolios de separación que residirán en una línea recta de forma y=ax+b. Su portfolio podrá estar invertido una parte en el portafolio óptimo y otra en el activo libre de riesgo. O bien, podrá tomar a la tasa libre de riesgo e invertir más que el 100% de su potencial en el portafolio óptimo. Cuando el portafolio óptimo sea el portafolio de merado, dicha línea se denominará Capital market line (CML), la cual será vista más en detalle en la próxima unidad.

actividad 1

Accediendo a un mundo nuevo de portafolios a partir del acceso al activo libre de riesgo

La inclusión del activo libre de riesgo habilita toda una serie de portafolios nuevos. Una frontera eficiente superior a la que Markowitz sólo con activos riesgosos ha identificado. El desafío para Usted es intentar construirla.

1- Incorpore el activo libre de riesgo a su modelo

2- Construya la CML

SML O SINGLE INDEX MODEL

Dado que el modelo de Markowitz requiere muchos inputs (calcular todos los retornos, desvíos y covarinzas) se desarrolló una simplificación basada en que el movimiento conjunto de los activos está influenciado por un índice que tienen en común.

De esta forma, se puede expresar el retorno de un activo en función al retorno de un mercado o índice cómo:

$$\boldsymbol{R_i = \alpha_i + \beta_i R_m}$$

Siendo:

$\boldsymbol{\alpha_i}$ = Es una variable random, que representa el comportamiento del activo independiente al comportamiento del mercado. Se puede subdividir en una parte explicada ($\boldsymbol{\alpha_i}$) y una parte aleatoria, no explicada ($\boldsymbol{e_i}$):

$$\boldsymbol{\alpha_i = \alpha_i + e_i}$$

β_i = Es la pendiente de la recta y una constante que describe el cambio esperado en R_i dado un cambio en R_m

R_m = es la tasa de retorno del índice de mercado.

Podemos reescribir la fórmula del retorno como:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

Y como el valor esperado del error (e_i) es cero, y, α_i y β_i son constante, el valor esperado del retorno sería:

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i \overline{R_m}$$

Requisitos:

Que esté incorrelacionado con

Supuestos:

El supuesto clave es que es independiente de . Es decir el único motivo por el cual varían juntas las acciones es el mercado, no hay otros efectos (por ej sectoriales).

Variancia y covarianza de retornos de activos en el SML model:

La varianza de un activo en el modelo, al igual que el retorno, tiene una parte propia σ_{ei}^2 y otra dependiente del mercado $\beta_i^2\sigma_m^2$.

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2$$

La covarianza de un activo en el modelo depende únicamente del riesgo del mercado. No tiene una parte de riesgo individual.

$$\sigma_{i,j} = \beta_i\beta_j\sigma_m^2$$

El retorno de un portafolio:

El retorno puede ser calculado para cualquier portafolio si contamos con α_i y β_i para cada acción y un estimativo de $\overline{R_m}$

$$\overline{R_p} = \sum_{i=1}^{n} X_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} X_i\beta_i\overline{R_m}$$

El retorno de un portafolio:

El retorno puede ser calculado para cualquier portafolio si contamos con y para cada acción y un estimativo de $\overline{R_m}$

$$\overline{R_p} = \sum_{i=1}^{n} X_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} X_i\beta_i\overline{R_m}$$

Y el riesgo de un portafolio:

Para calcular el riesgo debemos contar con un estimativo de σ_{ei}^2 y σ_m^2.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2{\beta_i}^2{\sigma_m}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} X_iX_j\beta_i\beta_j\sigma_m^2 + \sum_{i=1} X_i^2\sigma_{ei}^2$$

Si bien se precisan estimativos para todas esas variables, el número es considerablemente inferior a la cantidad que se precisa para el modelo tradicional de Markowitz.

Una forma alternativa de representar la ecuación anterior es:

$$\sigma_p^2 = \underbrace{\beta_p{}^2 \sigma_m{}^2}_{\text{Riesgo no diversificable}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sigma_{ei}^2}_{\text{Riesgo diversificable}}$$

Dado que es diversificable, podemos utilizar como la medida de riesgo no diversificable par aun activo.

Cálculo del beta del portafolio

El beta del portafolio es simplemente el promedio de los betas individuales de los activos que lo componen. El beta del mercado o índice es 1, y por ende su alpha es cero. Por ende, las acciones que tenga un beta superior a 1 son consideradas más riesgosas que el mercado y las que tengan uno menor, menos volátiles que aquel.

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} X_i \beta_i$$

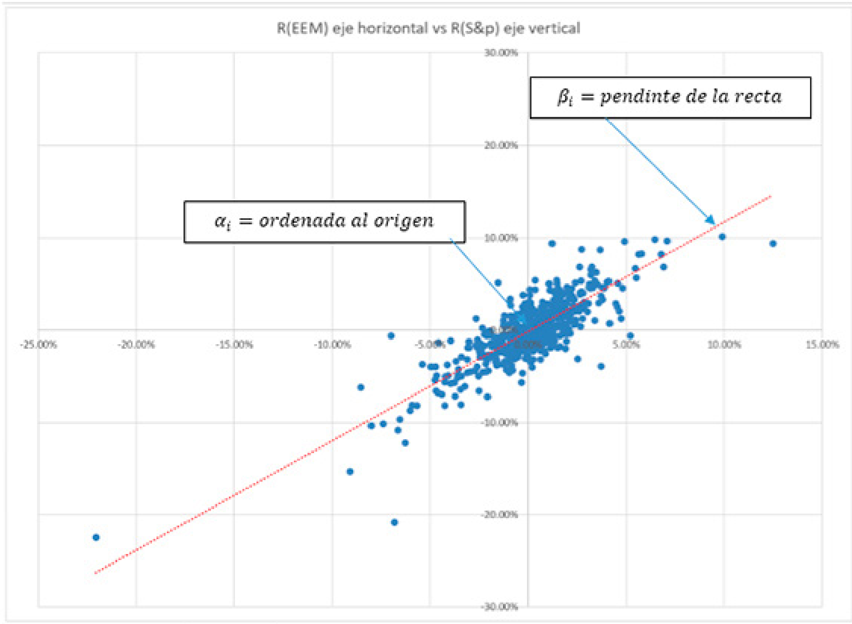
Cálculo del alpha del portafolio

El alpha del portafolio es simplemente el promedio de los alphas individuales de los activos que lo componen.

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} X_i \alpha_i$$

Estimar beta

Para estimar beta normalmente utilizamos una regresión. Beta es la pendiente de una regresión entre los retornos del activo i en el momento t y los retornos del mercado en igual momento del tiempo. A su vez, alpha es la ordenada al origen de dicha regresión.



Otra forma:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}^2}{\sigma_m^2}$$

Por otro lado una forma alternativa de calcular alpha es:

$$\alpha_i = \bar{R}_i + \beta_i \overline{R_m}$$

Errores en las betas

Los y calculados con la regresión son estimaciones de los verdaderos y de la acción, mientras que las estimaciones por fórmula son sujetas a error. La complejidad de calcularlas radica también en que no son estables en el tiempo, sino que van cambiando, a medida que cambian las características fundamentales de la firma. Sobre todo si cambia su estructura de capital.

A su vez, betas calculados sobre portafolios con gran cantidad de activos son más predictivos respecto de los futuros betas que betas calculados sobre acciones de manera individual. Esto se debe a que las subas o bajas de los betas de un período a otro tienden a cancelarse adentro de un portfolio.

Cuando calculamos betas para una acción y nos da un beta muy grande, tenemos una alta chance de que tengamos un error positivo producto de la muestra tomada. Cuando el beta nos da muy pequeño, se elevan las chances de que el error sea negativo. En sucesivos cálculos de la beta, podemos comprobar esto si la beta cae hacia 1 en el primer caso o sube hacia 1 en el segundo.

Betas ajustadas

Es posible correr una regresión entre las betas de un período y las betas del siguiente para ver la tendencia de las betas de ajustar hacia 1. Esto tiendo a bajar niveles muy bajos de beta y a subir niveles muy altos de betas.

Otra forma es tomar medio beta histórico y sumárselo a medio beta promedio. Esto mueve a la beta, medio camino hacia el promedio.

Los betas ajustados en papers de Klemkosky y Martin, han demostrado ser más precisos que los betas sin ajustar.

Correlación de activos a partir de las betas

Una forma en que las betas pueden ser utilizadas es para estimar la correlación futura de acciones.

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\beta_i \beta_j \sigma_m^2}{\sigma_i \sigma_j}$$

Una forma de ver qué tan buenos son los betas, es testeando qué tan bien han predicho la correlación futura de los activos. Si bien el modelo de índice único fue hecho para simplificar el modelo histórico de matriz de correlación, en varios papers se ha visto que el mismo ha hecho un mejor trabajo que la información histórica de la matriz de covarianzas.

El modelo de mercado

Es idéntico al modelo de índice único, sólo que el supuesto de que es independiente de no se hace.

CAPM

El modelo de CAPM se basa en una serie de supuestos, creado por los autores del equilibrio general del modelo Sharpe-Lintner & Mossin:

1- No hay costos de transacción

2- Los activos son infinitamente divisibles

3- Ausencia de impuestos

4- Competencia perfecta: un individuo NO puede afectar el precio con su sola acción.

5- Los inversores toman decisiones sólo en base a los valores esperados y desvíos standares de los retornos de sus portafolios.

6- Ventas en corto ilimitadas.

7- Posibilidad ilimitada de tomar y colocar a la tasa libre de riesgo

8- Expectativas homogéneas: los inversores se concentran en los mismos parámetros (media, varianza y horizonte) y tienen las mismas expectativas sobre ellos.

9- Todos los activos tienen mercado: inclusive el capital humano, se puede comprar y vender.

Derivación del modelo CAPM

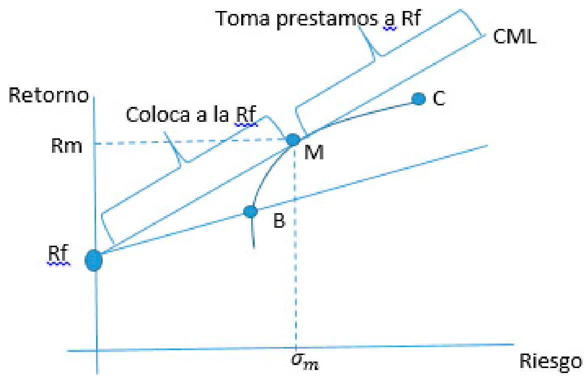
En un mundo de activos riesgosos, donde los inversores pueden comprar y vender en corto también, todos los posibles portafolios se encontrarán dentro de una bala. Dentro de la cual, los que estén comprendidos en el borde entre el portafolio B y C serán los más eficientes, y representan la frontera eficiente.

Cuando introducimos el activo libre de riesgo y la posibilidad de prestar y tomar a esa tasa. El mundo se amplia y la frontera pasa a ser la línea recta que parte en la ordenada al origen que coincide con el retorno del activo libre de riesgo, y por el portafolio tangente a la frontera eficiente.

Si todos los inversores tienen expectativas homogéneas, y todos compran el portafolio M, dicho portafolio, en equilibrio, es el portafolio de mercado. Este portafolio de mercado está compuesto de todos los activos riesgosos en la proporción en la cual su capitalización bursátil o valor de mercado participa del total de los activos.

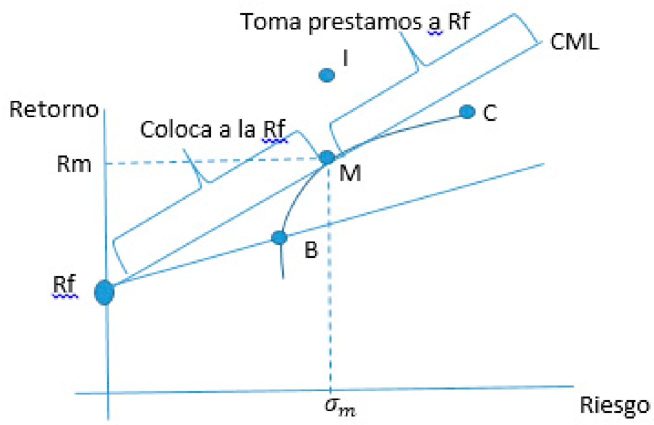
La línea recta que va de Rf al infinito, pasando por M, es conocida como Capital Market Line (CML). Todos los inversores tendrán portafolios en algún lugar de la CML.

Dado que supusimos que los inversores están sólo preocupados por dos variables, retorno y riesgo, y que dado que tienen el portafolio de mercado han diversificado el riesgo no sistemático, las únicas dimensiones que nos preocupan son el retorno esperado y la beta.



Equilibrio del modelo por arbitraje

Ningún activo puede residir fuera de la CML por el principio de arbitraje. Supongamos que aparece el activo I (de imposible) que paga un retorno superior al retorno del portafolio de mercado para igual nivel de riesgo. Por principio de arbitraje, ese activo no podría durar mucho allí, ya que todos saldrían a vender M en corto y comprar I, haciendo bajar el precio de M y subir el precio de I, por ende, bajando el retorno de I y subiendo el de M, hasta que todos resida en la misma línea nuevamente.

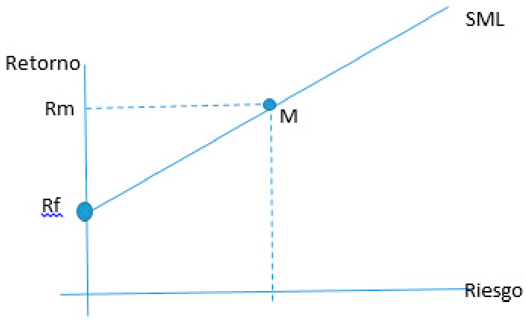


Security Market Line (SML)

Es un subproducto del CAPM. Un mecanismo de pricing que sirve para calcular la rentabilidad de cualquier cosa.

Todos los portafolios residen en la línea que pasa por el activo libre de riesgo y el portafolio de mercado. La ecuación que la describe es:

$$\overline{R_i} = \alpha + b\,\beta_i$$



Un punto de esta línea es el activo libre de riesgo. Este tiene un beta de cero, ya que uno no asume riesgo sistemático. Por ende:

$$R_f = \alpha + b\,(0)$$

$$R_f = \alpha$$

El segundo punto de esta línea es el portafolio de mercado. El mismo tiene un beta de 1. Entonces:

$$\overline{R_m} = \alpha + b\,(1)$$

Despejamos b, y nos queda:

$$\overline{R_m} - \alpha = b$$

Reemplazamos α por Rf en la fórmula anterior y obtenemos:

$$\overline{R_m} - R_f = b$$

Reemplazamos α y b en la fórmula de la recta $\overline{R_i} = \alpha + b\,\beta_i$ y obtenemos:

$$\boxed{\overline{R_i} = R_f + (\overline{R_m} - R_f)\,\beta_i}$$

Recuerde esta fórmula. Es la famosa SML. Si bien es simple, describe el retorno esperado para todos los activos en la economía. ¡Todos!

Esta ecuación valida la conclusión de que el riesgo sistemático es el único importante para determinar los retornos esperados y que el riesgo no sistemático no importa ya que se puede diversificar.

A la hora de administrar inversiones nos deja una importantísima moraleja: no tiene sentido correr riesgo específico si puede ser diversificado, ya que no serán compensados por ello.

Punto de contacto entre la CML y la SML

Partiendo de la ecuación de la SML, y sabiendo que:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2}$$

Podemos remplazar en la fórmula de la SML y obtendremos:

$$\bar{R}_i = R_f + \underbrace{\frac{(\overline{R_m} - R_f)}{\sigma_m}}_{\text{Pendiente}} \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m}$$

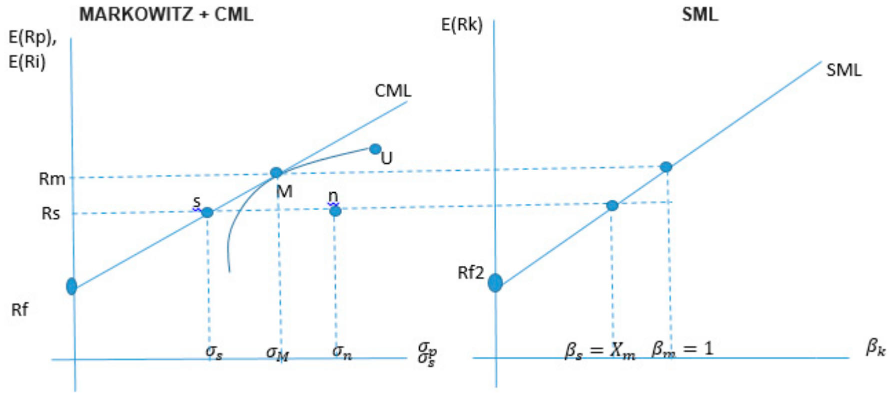
Ordenada: precio por postergar consumo

Pendiente: Precio que se paga por el riesgo

Monto que aporta de riesgo un activo al portafolio de mercado. Es el valor relevante de riesgo para un activo.

La interpretación es idéntica a la hecha en la CML. La pendiente puede ser interpretada como el precio del mercado para el riesgo de todo los portafolios eficientes. Mientras que es el monto de riesgo que asumo. Por su parte, que Rf es el retorno requerido por postergar consumo.

Comparación entre CML (Markowitz) y SML



<table>
<tr>
<td>Markowitz:
- Sólo activos riesgosos
- N balas o zonas de eficiencia (tantos como agentes económicos). No supone expectativas homogéneas.</td>
<td rowspan="2">SML
- $\beta_S = X_f\beta_f + X_m\beta_m$
- $\beta_S = X_f(0) + X_m(1) = X_m$
- El portafolio de separación (s) está dentro de la SML
- El riesgo total de S y N es distinto. Pero el sistemático, es igual, están en el mismo punto en la SML. No importa el riesgo no sistemático porque se diversifica.
- Es el mundo del pricing = arbitraje. No puedo pedirle cuál es el mejor portafolio. No puede haber ningún portafolio por sobre ni por debajo de la SML, porque lo salgo a comprar si está por encima, subo su precio y bajo su retorno. Lo inverso si está por debajo.</td>
</tr>
<tr>
<td>CML:
Agregamos:
1- Expectativas homogéneas
2- Rf
3- Equilibrio de Mercado
Obtengo la CML y los portafolios de separación (S).
CML = Teoría de decisión de portafolios eficientes. Señalo los mejores portafolios y los peores quedan debajo de la frontera.</td>
</tr>
</table>

Cierre de la unidad

En esta unidad final hemos detallado los supuestos que se requieren para transformar el modelo de Markowitz en el de CML. Hemos calculado las betas, y considerado sus debilidades, para luego arribar a la línea de la CML. Este modelo al indexar todo contra un benchmark que es el portfolio de mercado reduce considerablemente la cantidad de cálculos a realizar respecto del modelo tradicional de Markowitz.

Finalmente derivamos la Security Market Line, una línea en la que, por el principio de arbitraje, residen en ella todos los activos posibles. A diferencia de los modelos anteriores, que se utilizan para alocar activos en el portafolio, la SML se utiliza para valuar activos. Nos da el precio que debe tener cada activo de acuerdo al riesgo sistemático que posee.

Bibliografía utilizada para la realización:

BODIE, KANE, Y MARCUS (2005). The Capital Asset Pricing Model. Mc Graw Hill

BODIE, KANE y MARCUS (2004). Principios de inversiones. Quinta edición. Mc Graw Hill

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. En: The Journal of Finance, Vol. 7, N°1, Marzo de 1952.

FRANK K. KELLY AND KEITH C. BROWN (2003). Investment Analysis and Portfolio management. South-Western.

CFA LEVEL I – Study Notes. CFA Institute.

CFA LEVEL II – Study Notes. CFA Institute.

| unidad 4 | *actividades*

actividad 1

La conexión con el mundo del pricing de los activos

La SML nos lleva a un mundo nuevo, por fuera del de la locación de activos. Este es el mundo del pricing, es decir, de la valuación. Queremos saber aquí cuánto debemos pagar por el riesgo sistémico que nos ofrece cada activo.

1- Calcule la beta de cada uno de los activos seleccionados.

2- Determine el rendimiento esperado de cada uno de los activos en función a SML.

3- Calcule el beta de un portafolio bien diversificado de bonos y uno de acciones internacionales contra el índice S&P 500

| *evaluación*

La evaluación del módulo se encuentra disponible en la sección destinada a tal fin dentro de la plataforma.