Institut Supérieur de Comptabilité et
d'Administration d'Entreprises 2020-2021

TD S1 Mathématiques
1ère Année Finance Comptabilité et 1ère Année Banque Assurance
Série 2

Exercice 1 : Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ (2x+b)^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue, montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$.

Exercice 3 : Les fonctions suivantes sont elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

(a) $f(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, **(b)** $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

Exercice 4 : Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

(a) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ **(d)** $f(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 5 : Donner la dérivée n-ième de chacune des fonctions suivantes :

1. $$f_1(x) = \frac{1}{1-x}.$$
2. $$f_2(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$
3. $$f_3(x) = (x^2+1)e^{2x}.$$
4. $$f_4(x) = \cos(x)e^x.$$
5. $$f_5(x) = x^2(1+x)^n.$$

Exercice 6 :

1. En dérivant n fois $e^{3x} = e^x \times e^{2x}$, montrer que $3^n = \sum_{k=0}^{N} 2^k C_n^k$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)e^{x\sqrt{3}}$. Montrer que $f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$.

Correctiɡ TD 02 :

Youssef sidi_aly

$3A_2$

Exo1 :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ (2x+b)^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

f est continue si :

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = f(-2) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$$

$$9 = a = (b-4)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 9}$$

$$(b-4)^2 = 9$$

$$(b-4)^2 - 3^2 = 0$$

$$(b-4-3)(b-4+3) = 0$$

$$(b-7)(b-1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 7} \text{ ou } \boxed{b = 1}$$

$(9;1)$ ou $(9;7)$

Exo2 :

$f : [0,1] \to [0,1]$

f. Continue

$\exists\, c \in [0,1] \ / \ f(c) = c$

On pose : $g(x) = f(x) - x$

continue.

$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$

$f(0) \in [0,1]$ $\quad$ $f(1) \in [0,1]$

$0 \leq f(x)$ $\quad$ $f(1) \leq 1$

$f(1) - 1 \leq 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$

donc $g(0) \cdot g(1) \leq 0$

d'après la théreme de BELZANO

$\exists\, c \in [0,1] \ / \ g(c) = 0$

$\Rightarrow f(c) - c = 0$

$\Rightarrow \boxed{f(c) = c}$

Exo3 :

1) $f(x) = \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$D_f : \mathbb{R}^*$

$$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$$

$$0|\sin(x)| \leq |\sin(x)| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin(x)| \cdot 1$$

D'après Gendarme :

$$\boxed{\lim_{0} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$$

On pose :

$g(x)$ une fct continue sur $\mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

g est un prolongement par continuité de f.

2) $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1+x}$$

$\lim_{1} g(x) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ g est prolongable en 1

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{-1^+} g(x) = -\infty \\ \lim_{-1^-} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{g n'est pas prolongable en } -1$$

. alors g n'est pas prolongable sur $\mathbb{R}$.

. g prolongable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Exo4 :

a)
$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \sin(\frac{1}{x})$

. Pas de limite, alors f n'est continue en 0.

. alors f n'est dérivable en 0.

b)
$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$

. alors f est continue en 0

. f est ~~dérivable~~ continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0} \frac{x \sin(\frac{1}{x})}{x}$

$\lim_{0} \sin(\frac{1}{x})$ pas de limite

. f n'est pas dérivable en 0

. f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$

c)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$

alors f est continue en 0

" " " sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x}$

$\lim_{0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$

. f est dérivable en 0

" " " sur $\mathbb{R}$

d)
$$f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{0} x \sin(x) \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0$

f est continue en 0
" " " sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{0} \frac{\cancel{x}\sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}}$$

$$\lim_{0} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

f est dérivable en 0
" " " sur $\mathbb{R}$.

Exos : Dérivée n-ième.

1

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2\times 1}{(1-x)^3}$$

$$f^{3}(x) = \frac{3\times 2\times 1}{(1-x)^4}$$

$$\boxed{f^{n}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$$

* pour $n = 1$

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \checkmark$$

* on suppose :

$$f^{n}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

* pour $n+1$

$$f^{n+1}(x) = \left(f^{n}(x)\right)' = \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)'$$

$$= \frac{n!\,(n+1)\,\cancel{(1-x)^{n}}}{\cancel{(1-x)^{n}}\,(1-x)^{n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{(n+1)+1}}$$

$$\boxed{f^{n}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{N}}$$

2

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-3\times 2\times 1}{(1+x)^4}$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}}$$

* pour $n = 1$

$$f^{(1)}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

* on suppose :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}$$

* pour $n+1$:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{n}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}\right)'$$

Page 03

$$= \frac{-(-1)^n \cdot n! \cdot (n+1)\cancel{(1+x)^n}}{\cancel{(1+x)^{n}} \cdot (1+x)^{n+2}}$$

$$\boxed{= \frac{(-1)^{n+1} \, (n+1)!}{(1+x)^{(n+1)+1}}}$$

alors

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{N}}$$

———— o ————

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A+B+(A-B)x}{(1-x)(1+x)}$$

$$\begin{cases} A+B = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \; ; \; B = \frac{1}{2} \\ A-B = 0 \Rightarrow A = B \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

———— o ————

Exo5 : suite

Page 04

③ $f(x) = (x^2+1)e^{2x}$

Formule de LEIBNITZ:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C_n^n = C_n^0 = 1$$

$$f(x) = (x^2+1)e^{2x}$$

$(x^2+1)^{(0)} = x^2+1$ | $(e^{2x})^{0} = e^{2x}$

$(x^2+1)^{(1)} = 2x$ | $(e^{2x})^{(1)} = 2e^{2x}$

$(x^2+1)^{(2)} = 2$ | $\vdots$

$(x^2+1)^{(3)} = 0$ | $(e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x}$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2+1)^{(k)} \cdot (e^{2x})^{(n-k)}$$

$$f^{(n)}(x) = C_n^0 (x^2+1)^{0} \cdot (e^{2x})^{n} + C_n^1 (x^2+1)^{(1)} (e^{2x})^{(n-1)} + C_n^2 (x^2+1)^{(2)} (e^{2x})^{(n-2)} + C_n^3 (x^2+1)^{(3)} \cdot (e^{2x})^{n-3}$$

$$= (x^2+1)\,2^n e^{2x} + n\,2x \cdot 2^{n-1} e^{2x} + \frac{n(n-1)}{4} \cdot 2 \cdot 2^{n-2} \cdot e^{2x}$$

$$\boxed{= 2^n e^{2x}\left(x^2+1+nx+\frac{n(n-1)}{4}\right)}$$

④ $f(x) = \cos(x) \cdot e^{x}$

$$f(x) = e^{x} \cdot \mathrm{Re}\,(e^{ix})$$

$$= Re\left(e^{ix}\cdot e^{x}\right)$$

$$= Re\left(e^{(1+i)x}\right)$$

$$f^{(n)}(x) = Re\left((1+i)^n e^{(1+i)x}\right)$$

$$= Re\left(\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)^n e^{(1+i)x}\right)$$

$$= Re\left((\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}\cdot e^{ix}\cdot e^{x}\right)$$

$$= (\sqrt{2})^n e^{x} Re\left(e^{\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)i}\right)$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^{x} \cos\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)}$$

Exo6 :

$$f(x) = e^{3x}$$

$$f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x} \quad (1)$$

$$f(x) = e^{x}\cdot e^{2x}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{2x}\right)^{(k)}\cdot\left(e^{x}\right)^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k e^{2x} e^{x}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k e^{3x} \quad (2)$$

$$(1) = (2)$$

$$3^n \cancel{e^{3x}} = \cancel{e^{3x}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k$$

$$\boxed{3^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k}$$

(2) $$f(x) = \sin(x)\, e^{x\sqrt{3}}$$

$$= Im\left(e^{ix}\right) e^{x\sqrt{3}}$$

$$= Im\left(e^{x\sqrt{3}}\cdot e^{ix}\right)$$

$$= Im\left(e^{(\sqrt{3}+i)x}\right)$$

$$f^{(n)}(x) = Im\left((\sqrt{3}+i)^n e^{(\sqrt{3}+i)x}\right)$$

$$= Im\left(2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^n e^{(\sqrt{3}+i)x}\right)$$

$$= 2^n e^{\sqrt{3}x}\, Im\left(e^{ni\frac{\pi}{6}}\cdot e^{ix}\right)$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}x} \sin\left(x+n\frac{\pi}{6}\right)}$$

FIN TD 02