S1G1 Diskrete Mathematik: Kostenminimale Flüsse

Andreas Gwilt

13. Juni 2017

1 Wichtige Definitionen, Sätze

1.1 Problemstellung

Def. Gegeben sei ein Digraph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ und Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$. Ein **b-Fluss** in (G, u) ist eine Funktion $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \le u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta_-(v)} f(e) = b(v)$ für alle $v \in V(G)$.

Minimum-Cost-Flow-Problem

Instanz:	Ein Digraph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$.
Aufgabe:	Bestimme eine b-Fluss f mit minimalen Kosten $c(f) := \sum_{e \in E(G)} f(e)c(e)$ (oder entscheide, dass es keinen solchen gibt).

1.2 Ein Optimalitätskriterium

Def. Sei G ein gerichteter Graph. Dann ist $\overset{\leftrightarrow}{G} := (V(G), E(G) \cup \{\overleftarrow{e} | e \in E(G)\})$.

Def (Residualgraph)**.** Sei G ein Digraph mit Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ und ein b-Fluss f. Dann definieren wir die **Residualkapazitäten** $u_f : E(\overset{\leftrightarrow}{G}) \to \mathbb{R}_+$ durch $u_f(e) := u(e) - f(e)$ und $u_f(\overleftarrow{e})$ für alle $e \in E(G)$ und die **Residualkosten** $c_f : E(\overset{\leftrightarrow}{G}) \to \mathbb{R}$ durch $c_f(e) := c(e)$ und $c_f(\overleftarrow{e}) := -c(e)$ für alle $e \in E(G)$.

Der **Residualgraph** ist der Graph G_f definiert durch $V(G_f) := V(G)$ und $E(G_f) := \{e \in E(\overset{\leftrightarrow}{G}) | u_f(e) > 0\} = \{e \in E(G) | f(e) < u(e)\} \,\dot\cup\, \{\overleftarrow{e} | e \in E(G), f(e) > 0\}$.

Ein **f-augmentierender Kreis** ist ein Kreis in G_f.

Satz (Klein, 1967)**.** *Sei (G, u, b, c) eine Instanz der* Minimum-Cost-Flow-Problems*. Ein b-Fluss f hat genau dann minimale Kosten, wenn es keinen f-augmentierenden Kreis mit negativem Gesamtgewicht gibt (i.e. G_f ist konservativ).*

1.3 Zwei Algorithmen

Minimum-Mean-Cycle-Cancelling-Algorithmus (Klein, 1967)

1. Bestimme einen b-Fluss f (z.B. mit Edmonds-Karp).

2. Bestimme einen Kreis C in G_f mit minimalem durchschnittlichem Kantengewicht.
   If C hat nichtnegatives Gesamtgewicht (oder G_f ist azyklisch) **then stop**.

3. Berechne $\gamma := \min_{e \in E(C)} u_f(e)$. Augmentiere f entlang C um γ. **Go to** 2.

Satz 1.1. *Sei (G, u, b, c) eine Instanz des* Minimum-Cost-Flow-Problems *und f ein b-Fluss mit minimalen Kosten. Sei b ein kürzester (bzgl. c_f) s-t-Weg in G_f (für irgendwelche $s, t \in V(G)$). Sei f' der durch Augmentierung von f entlang P um den Wert $\gamma \leq \min_{e \in P} u_f(e)$ entstehender Fluss. Dann ist f' ein kostenminimaler Fluss zu den Balancen b' mit*

$$b'(v) = \begin{cases} b(v) + \gamma & : v = s \\ b(v) - \gamma & : v = t \\ b(v) & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Sukzessive-Kürzeste-Wege-Algorithmus

1 Setze $b' \leftarrow b$ und $f(e) \leftarrow 0$ für alle $e \in E(G)$.

2 **If** $b' = 0$ **then stop, else:**

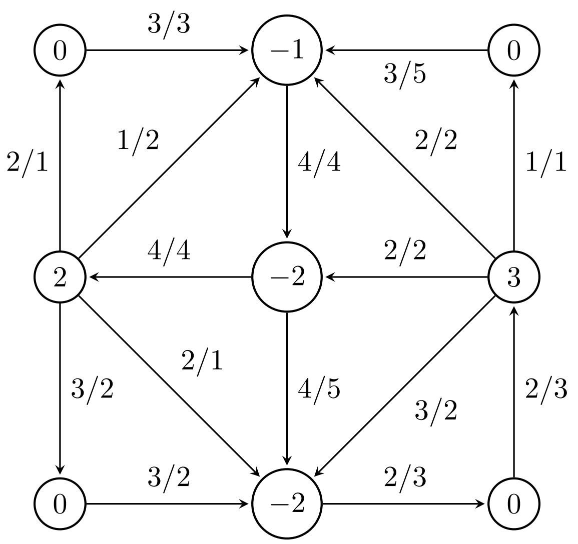
Wähle einen Knoten s mit $b'(s) > 0$.
Wähle einen Knoten t mit $b'(t) < 0$, so dass t von s aus in G_f erreichbar ist.
If es gibt kein solches t **then stop**. (Es gibt keinen b-Fluss)

3 Bestimme einen s-t-Weg P in G_f mit minimalen Kosten bzgl. c_f.

4 Berechne $\gamma \leftarrow \min\{\min_{e \in E(P)} u_f(e), b'(s), -b'(t)\}$.
Setze $b'(s) \leftarrow b'(s) - \gamma$ und $b'(t) \leftarrow b'(t) + \gamma$. Augmentiere f entlang P um γ.
Go to 2

2 Aufgaben

Aufgabe 1: Finde einen b-Fluss in dem beigelegten Graphen:



Aufgabe 2: Was sind die Kosten von f_1 und f_2 (auf der Tafel)? Wo unterscheiden sie sich?

Aufgabe 3: Macht euch klar, dass Augmentierung entlang eines solchen Kreises C um $\gamma \leq \min\{u_f(e) | e \in C\}$ wieder einen b-Fluss f' ergibt mit

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \gamma & : e \in C \\ f(e) - \gamma & : \overleftarrow{e} \in C \\ f(e) & : \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4: Ist der folgende b-Fluss minimal? Wenn nicht, welcher Kreis in G_f hat negative Kosten? (Legende: $u(e), c(e), f(e)$)