Day5 DP

선린인터넷고등학교 소프트웨어과
30610 나정휘
https://JusticeHui.github.io

문제 목록

- BOJ10211 Maximum Subarray
- BOJ10844 쉬운 계단 수
- BOJ15966 군계일학
- BOJ11049 행렬 곱셈 순서
- BOJ10836 여왕벌
- BOJ5550 헌책방
- BOJ12013 248 게임
- BOJ2213 트리의 독립집합
- BOJ17435 합성함수와 쿼리
- BOJ5463 건포도
- BOJ1413 박스 안의 열쇠
- BOJ12920 평범한 배낭
- BOJ12008 262144
- BOJ6171 땅따먹기

Maximum Subarray

- Kadane's Algorithm

```
int n, a[1010];
void solve(){
  cin >> n;
  for(int i=1; i<=n; i++) cin >> a[i];

  int mx = -1e9, now = 0;
  for(int i=1; i<=n; i++){
  // now : i번째 원소를 마지막 원소로 갖는 부분 배열의 최댓값
    now = max(now, 0) + a[i];
    ans = max(ans, now);
  }
  cout << ans << "\n";
}
```

쉬운 계단 수

- D(i, j) = i번째 자리까지, 마지막 자리가 j인 경우의 수

- `D(i, j) = D(i-1, j-1) + D(i-1, j+1)`

군계일학

- 1씩 증가하는 가장 긴 부분 수열을 찾는 문제
  - LIS 비슷하게?

- D(i, v) = 1~i번째 원소에서, j로 끝나는 1씩 증가하는 최대 길이
  - `D(i, A[i]) = max{ D(i-1, A[i]), D(i-1, A[i]-1) + 1 }`
    - i번째 원소를 선택하지 않거나, i번째 원소를 선택하거나

군계일학

- 10만 * 100만짜리 테이블을 굳이 잡아야 하나?
- D(v) = 지금까지 본 원소들에서 v로 끝나는 최대 길이
  - 크기 100만짜리 테이블

```
int dp[1010101];
for(int i=1; i<=n; i++){
  int t; cin >> t;
  dp[t] = max(dp[t], dp[t-1] + 1);
}
```

행렬 곱셈 순서

- D(i, j) = i번째 행렬부터 j번째 행렬까지 곱할 때 최소 비용
  - 구간에 대한 DP

- `D(i, i+1) = R[i]*C[i]*C[i+1]`
- `D(i, j) = min{ D(i, k)+D(k+1, j) + R[i]*C[k]*C[j] }`
  - i~k번째 행렬(R[i] by C[k])을 곱할 때 최소 비용
  - k+1~j번째 행렬(R[k+1] by C[j])을 곱할 때 최소 비용
  - 2개의 행렬을 곱한 비용

여왕벌

- 풀이1. O(NM + M^2)
- 풀이2. O(N + M^2)

메모리	시간
4484 KB	268 ms
4344 KB	1560 ms

여왕벌

- 첫 번째 행&열의 값은 각 날짜마다 O(M)에 갱신 가능
  - 총 O(NM)
- 첫 행&열의 최종 값을 이용해 나머지는 DP로 채워주면 됨
  - `D(i, j) = max{ D(i-1, j), D(i, j-1) }`
  - O(M^2)
- 전처리 O(NM), DP O(M^2)

여왕벌

- border[] = { (M, 1), (M-1, 1), … , (1, 1), (1, 2), … , (1, N) }
  - border[0] ~ border[a-1]까지 0 더하고
  - border[a] ~ border[a+b-1]까지 1 더하고
  - border[a+b] ~ 에 2 더하고
- Prefix Sum!
  - 모든 쿼리에 대해 `sum[a]++; sum[a+b]++;`
  - 마지막에 `for(int i=1; ; i++) sum[i] += sum[i-1];`
- 전처리 O(N + M), DP O(M^2)

헌책방

- 동일한 장르의 책을 매입하는 경우
  - 가격이 비싼 것을 매입하는 것이 무조건 이득

- C(i, j) = i번째 장르의 책을 j권 매입할 때 최대 가격
- D(i, j) = 1..i번째 장르를 총 j권 매입할 때의 최대 가격

- C는 그리디하게 구하고, D는 DP로 구하면 됨

248 게임

- D(i, j) = i번째 수부터 j번째 수까지 **하나의 수**로 합칠 때 최댓값
  - 하나의 수로 합치지 못하면 0

- `D(i, j) = max{ D(i, k) + 1 }`
  - `if D(i, k) = D(k+1, j)`

트리의 독립집합

- 트리 DP
  - D(v, state) = v를 루트로 하는 서브 트리의 상태가 state일 때 ~~~

- D(v, flag) = v를 루트로 하는 집합에서
  - flag = 0 : v를 집합에 넣지 않을 때
  - flag = 1 : v를 집합에 넣을 때
  - 최대 독립 집합의 크기

- 역추적 파이팅!

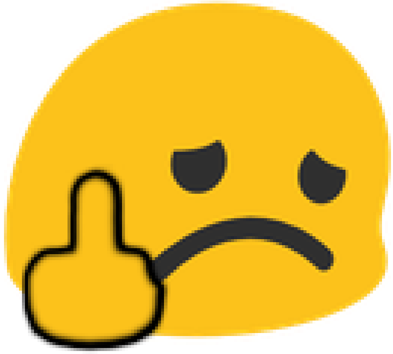
합성함수와 쿼리

- Sparse Table

- D(x, i) = $f_{2^i}(x)$
- `D(x, i) = D( D(x, i-1), i-1 )`

건포도

- 업데이트가 없을 때 직사각형 영역의 합을 구하는 방법
  - 2D Segment Tree - **구데기**
  - 2D Fenwick Tree - **구데기**
  - Merge Sort Tree - **차라리 PST를 쓴다**
  - Persistent Segment Tree - **좌표 범위도 좁은데 굳이?**



  - 2D Prefix Sum - 편안

건포도

- 2D Prefix Sum - 전처리 O(NM), 쿼리 O(1)

```
int a[55][55];
for(int i=1; i<=n; i++) for(int j=1; j<=m; j++){
  cin >> a[i][j];
}

// init
for(int i=1; i<=n; i++) for(int j=1; j<=m; j++){
  a[i][j] += a[i][j-1];
  a[i][j] += a[i-1][j];
  a[i][j] -= a[i-1][j-1];
}

// query
int x1, x2, y1, y2;
cout << a[x2][y2] - a[x2][y1-1] - a[x1-1][y2] + a[x1-1][y1-1];
```

건포도

- D(i, j, n, m) = (i, j)부터 가로 길이가 n, 세로 길이가 m인 초콜릿을 쪼개는 최소 비용

- `D(i, j, n, m) =`
  - `min{ D(i, j, k, m) + D(i+k, j, n-k, m) } +` 직사각형 영역 합
  - `min{ D(i, j, n, k) + D(i, j+k, n, m-k) } +` 직사각형 영역 합

- N = M인 경우 O(N^5)
- TL 3초 & 상수가 작아서 잘 돌아감
- N^6도 뚫린다는 소문이 있을 정도로 잘 돌아감

평범한 배낭 2

- Do You Know Knapsack Problem?

- 각 물건을 최대 하나만 가져갈 수 있는 문제는 쉽게 풀림
  - O(NM)
  - 각 물건의 개수 제한이 없어도 비슷하게 풀림

- **개수 제한 K**

평범한 배낭 2

- Naïve Solution
  - 각 물건을 K개씩 만들어주면 O(NMK) - TLE

- 각 물건을 K개씩 만들고 냅색을 하면 TLE가 날 수 밖에 없다.
  - K개보다 덜 만들 수 있을까?

평범한 배낭 2

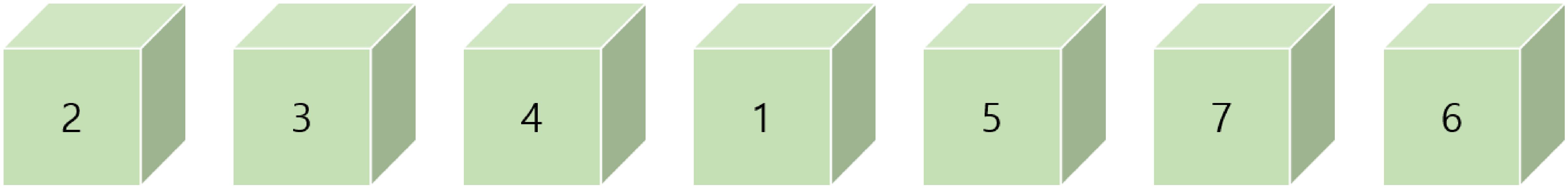
- K = 14라고 가정하자.
- 1개, 2개, 4개, 14-(1+2+4)=7개 있는 패키지를 만들면 된다.
  - 이진법
- 각 물건을 O(log K)개의 패키지로 쪼갤 수 있고
- O(NlogK)개의 패키지이므로 O(NMlogK)에 풀 수 있다.

평범한 배낭 2

- O(NM) 풀이는 https://moonrabbit2.tistory.com/3 에서 확인

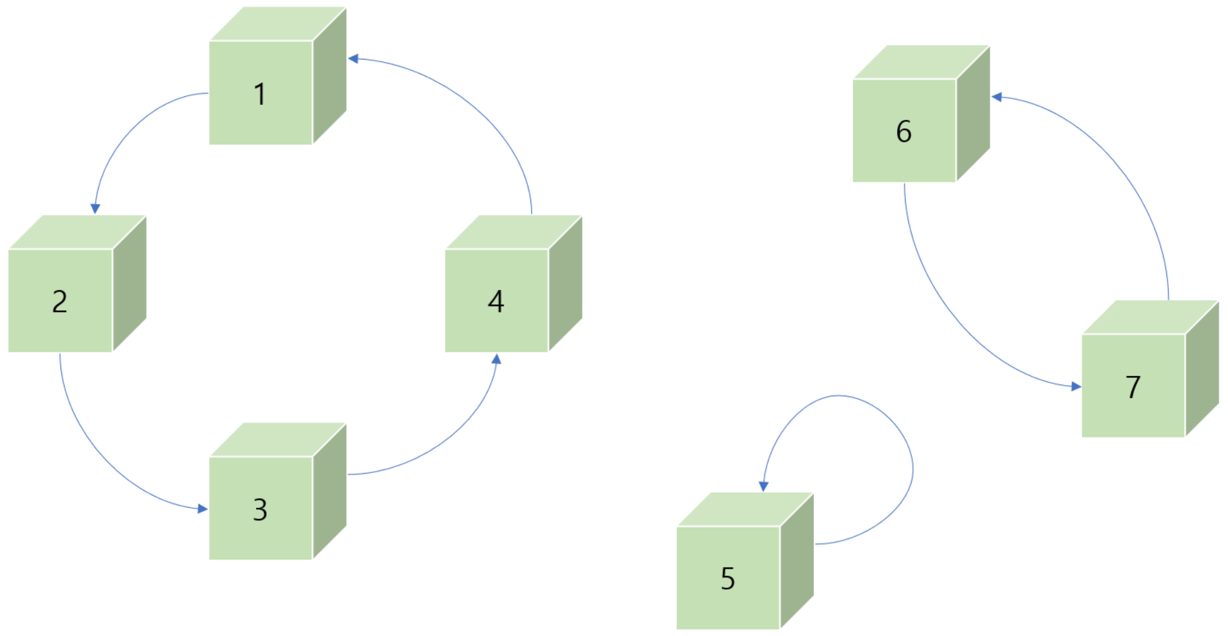
박스 안의 열쇠

- 1번 박스 -> 2번 열쇠, 2번 박스 -> 3번 열쇠, …



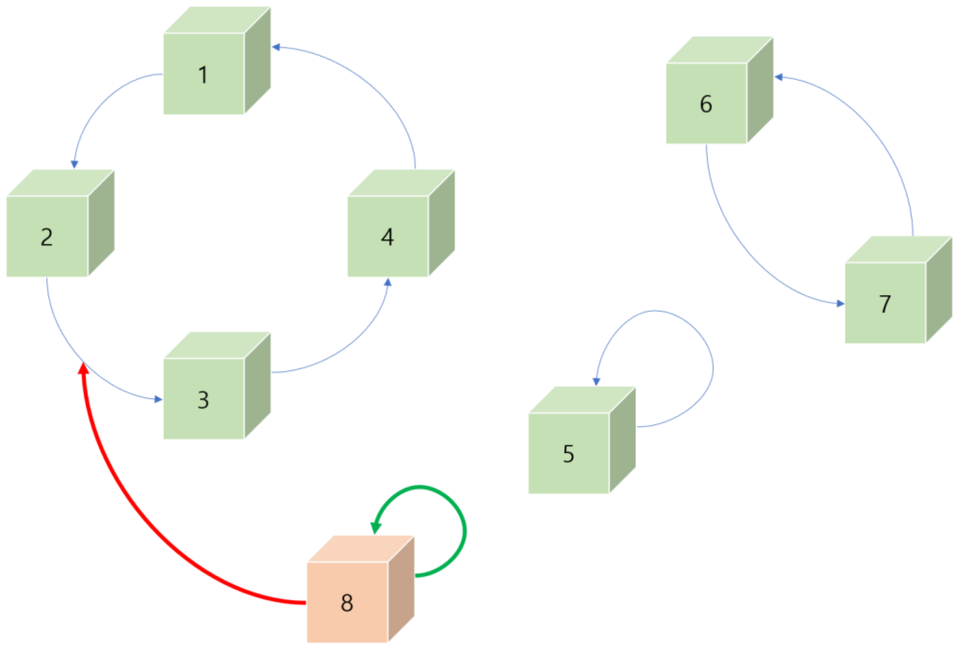
박스 안의 열쇠

- 그래프로 나타내면
- 폭탄 하나를 이용해 사이클을 모두 열 수 있다.



박스 안의 열쇠

- 새로운 8번 박스가 들어간다고 하자.
  - 기존 사이클 중 한 곳에 들어가거나 (빨간색)
  - 혼자서 해로운 사이클을 구성하거나 (초록색)



박스 안의 열쇠

- 기존 사이클에 들어가는 경우
  - 간선 중간에 들어가는 것
  - N번째 박스를 N-1개의 간선 중 하나를 선택해서 삽입

- 혼자서 새로운 사이클을 만드는 경우
  - 폭탄이 하나 더 필요함

박스 안의 열쇠

- D(i, j) = i개의 열쇠를 정확히 j개의 폭탄으로 얻는 경우의 수
- `D(i, j) = D(i-1, j)*(i-1) + D(i-1, j-1)`
- 모든 열쇠를 얻을 확률
    - (1..M)개의 폭탄으로 얻는 경우의 수 / (1..N)개의 폭탄으로 얻는 경우의 수

262144

- [i, k] 구간을 잘 합쳐서 X를 만들고
- [k+1, j] 구간을 잘 합쳐서 X를 만들었다면
  - [i, j] 구간을 잘 합쳐서 X+1을 만들 수 있다.

262144

- Sparse Table을 생각해보자.
  - 크기가 2^{i-1}인 구간 2개를 붙여서 2^{i}인 구간을 만든다.
  - ST(x, i) = x에서 시작하는 크기가 2^{i-1}인 구간의 끝점의 다음 위치

- 262144 문제는
  - (i-1)을 만들 수 있는 구간 2개를 붙여서 i를 만든다.
  - D(x, i) = x에서 시작해서 i를 만들 수 있는 구간의 끝점의 다음 위치?

262144

- (i~k)번째 원소들을 사용해서 **하나의 수** j를 만들 수 있다면
- D(i, j) = k+1로 정의
- 그러한 k가 존재하지 않는다면 0으로 초기화

- `A[i] = j -> D(i, j) = j+1`
- `D(i, j-1) = 0 -> D(i, j) = 0`
- `D(i, j) = D( D(i, j-1), j-1 )`

262144

- 배열의 각 원소는 최대 40
- 정답의 최댓값은 40 + O(log N)

땅따먹기

- W[i] > W[j] & H[i] > H[j] 이면 j는 신경 쓰지 않아도 됨

- 직사각형의 높이가 증가하도록, 너비는 감소하도록 정렬
- 연속한 직사각형을 한 번에 구매하는 것이 이득

땅따먹기

- D(i) = i번째 직사각형까지 구매했을 때의 최소 비용
- `D(i) = min{ D(j-1) + H[i] * W[j] }`
  - O(N^2)
  - 최적화 필요

땅따먹기

- `D(i) = min{ D(j-1) + H[i] * W[j] }`

- `W[j] = a, D(j-1) = b, H[i] = x` 치환
  - `D(i) = min{ ax+b }`
  - 여러 개의 직선이 주어졌을 때 임의의 x좌표에서의 최솟값

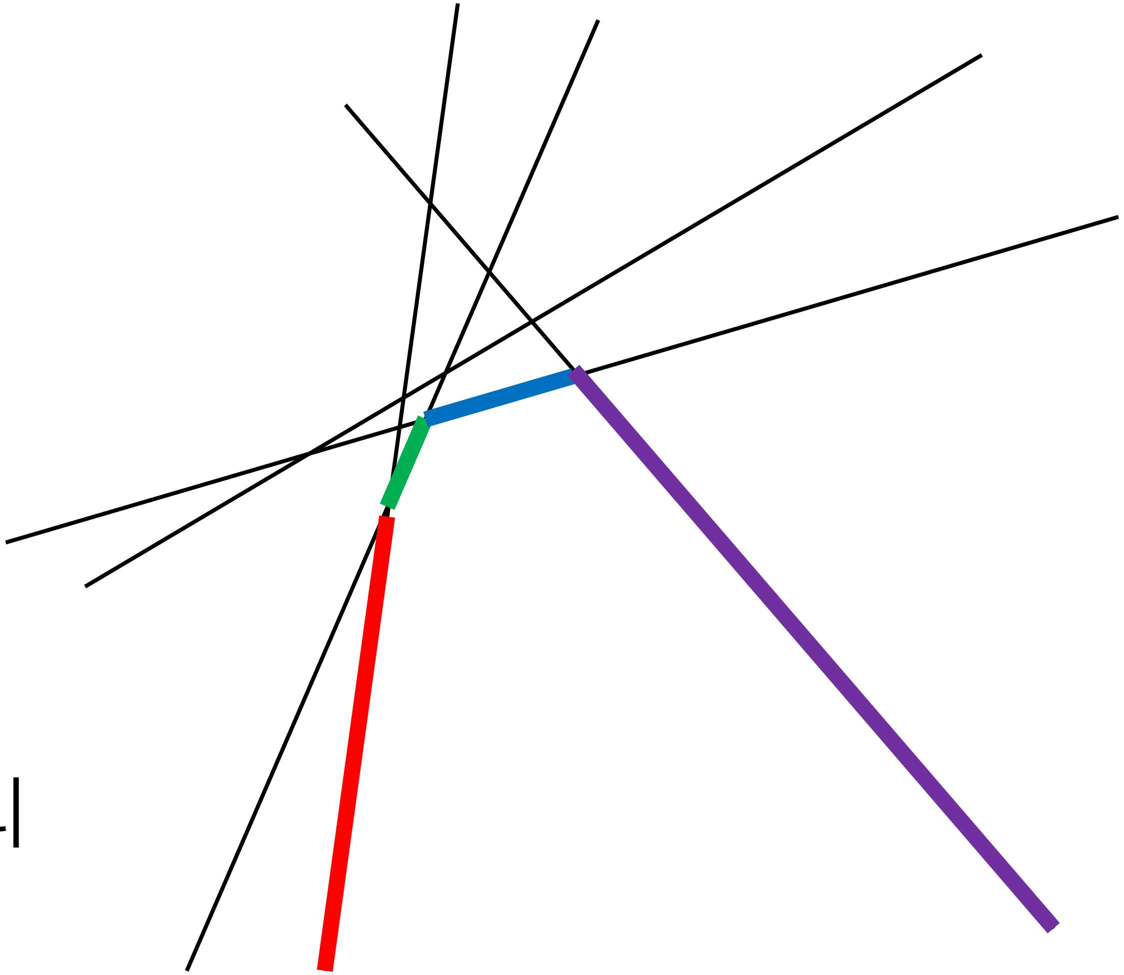
- W(기울기)는 감소, H(x좌표)는 증가

땅따먹기

- 최소가 되는 선분들을 보자
- 기울기가 감소하는 볼록 함수

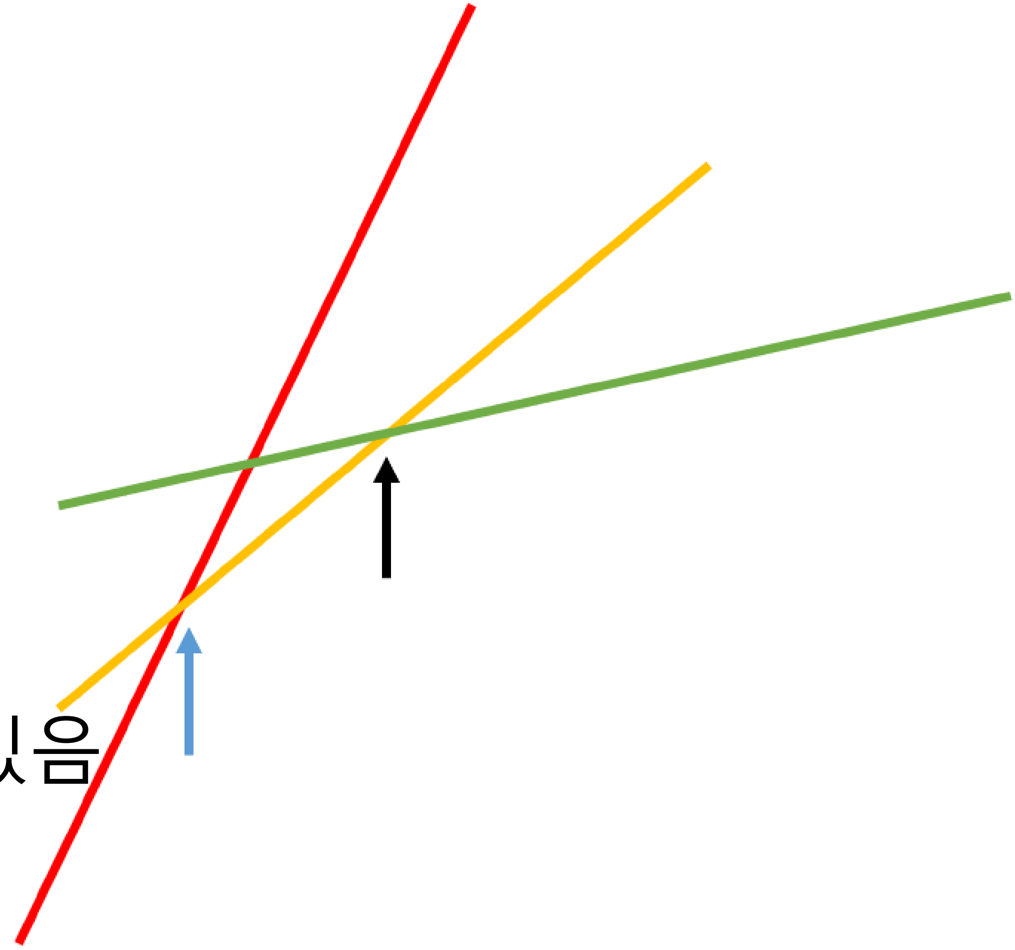
- 해야할 일
  - 최소가 되는 선분들의 집합을 관리
  - 선분 집합에서 최솟값 찾기

- 당연히 기울기가 감소하도록 관리



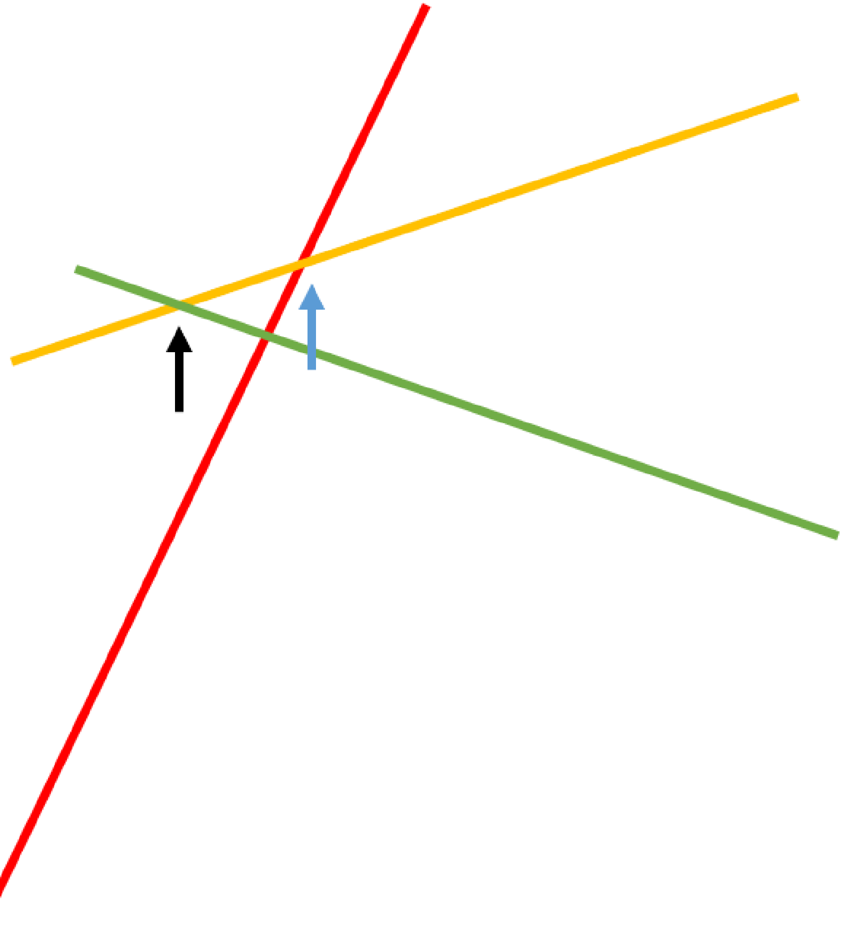
땅따먹기

- 최소가 되는 선분 집합 관리
- 빨간 직선과 노란 직선이 있을 때
  초록 직선을 삽입하는 상황
- 초록 직선이 들어와도
  노란 직선이 최소가 되는 구간이 남아있음



땅따먹기

- 최소가 되는 선분 집합 관리
- 빨간 직선과 노란 직선이 있을 때
  초록 직선을 삽입하는 상황
- 초록 직선이 들어오면
  노란 직선이 최소가 되는 구간이 없어짐

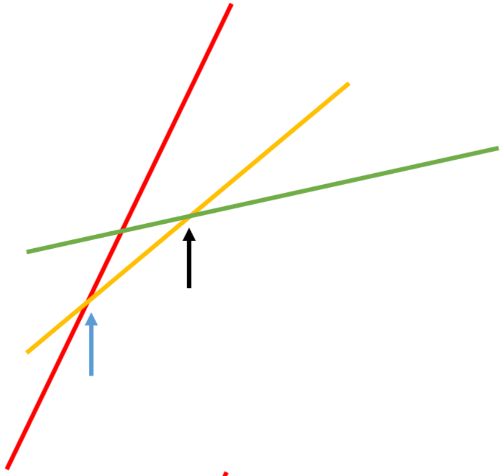


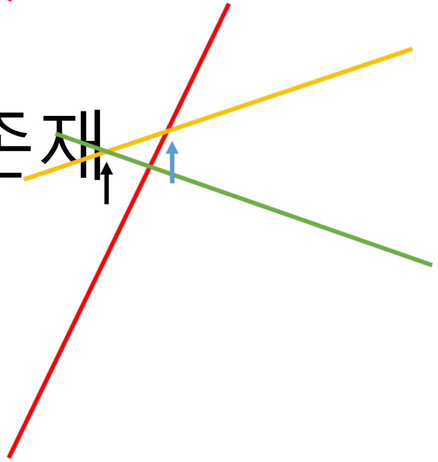
땅따먹기

- 빨간색, 노란색, 초록색 직선 : 1, 2, 3번 함수

- 1번 함수와 2번 함수의 교점의 위치 : x1
- 2번 함수와 3번 함수의 교점의 위치 : x2

- x1 < x2이면 2번 함수가 최소가 되는 구간이 존재
- x1 >= x2이면 없음





땅따먹기

- 최소가 될 수 있는 직선들의 집합을 스택으로 관리
  - while(x1 >= x2) stack.pop();
  - stack.push(line)
  - 들어오는 직선들의 기울기가 감소하지 않는다면 set이나 세그 써야함

```
void insert(int a, int b){ // ax+b
  Line line(a, b);
  while(stk.size() >= 2 &&
        cross(stk[-2], stk[-1]) > cross(stk[-1], line)){
    stk.pop_back();
  }
  stk.push_back(line);
}
```

땅따먹기

- 주어지는 x좌표에서 최솟값 찾기
  - 단, 주어지는 x좌표들은 증가한다.
- 스택에서 포인터 관리해주면 된다.
  - i번째 직선과 i+1번째 직선의 교점 <= x이면 i를 증가시킴
  - 최종적으로 가리키게 되는 직선이 최소가 됨
  - 주어지는 x좌표가 증가하지 않으면 이분 탐색 하거나 세그

```
int pt;
int query(int x){
  while(pt+1 < stk.size() &&
        cross(stk[pt], stk[pt+1]) <= x){
    pt++;
  }
  return stk[pt].a * x + stk[pt].b;
}
```