第3节　刚体转动的功和能

$$\boxed{M = J\alpha}$$

一、刚体的转动动能

质点系的总动能为：

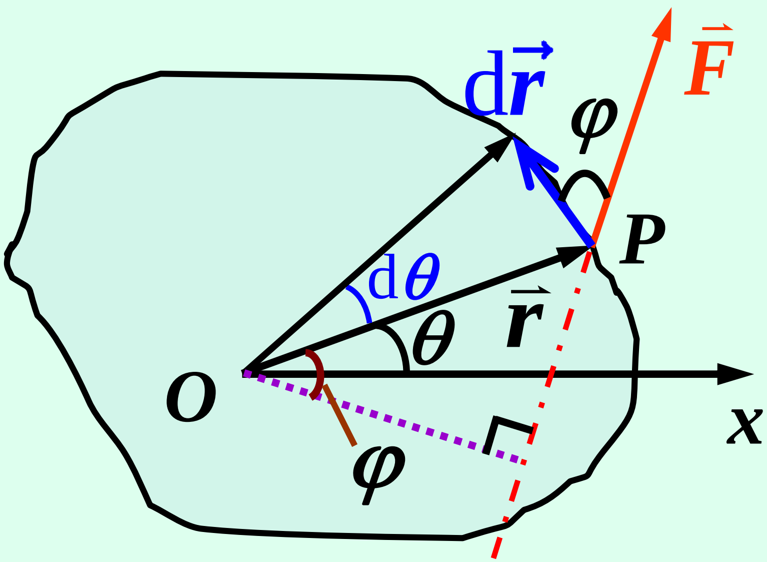
$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots = \sum \frac{1}{2}m_iv_i^2$$

对定轴转动刚体，每个质点的速度：$v_i = r_i\omega$

$$E_k = \sum\left(\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum m_ir_i^2\right)}_{J}\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}J\omega^2}$$ ——刚体的转动动能

二、力矩的功



$\vec{F}$ 的元功为:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\varphi\cdot|\mathrm{d}\vec{r}|$$

$$= \boxed{F\cos\varphi r}\,\mathrm{d}\theta$$

力对转轴的力矩

$$\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta$$ ——力矩的元功

当刚体绕定轴由角位置 θ_0 转到角位置 θ 时，合外力矩在这个过程中对刚体所做的功为

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} M\mathrm{d}\theta$$

三、刚体定轴转动的动能定理

刚体的转动动能为：$\boxed{E_k = \frac{1}{2} J\omega^2}$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\alpha\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta$$

$$A = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

得：$\boxed{A = E_{k2} - E_{k1}}$ ——**定轴转动的动能定理**

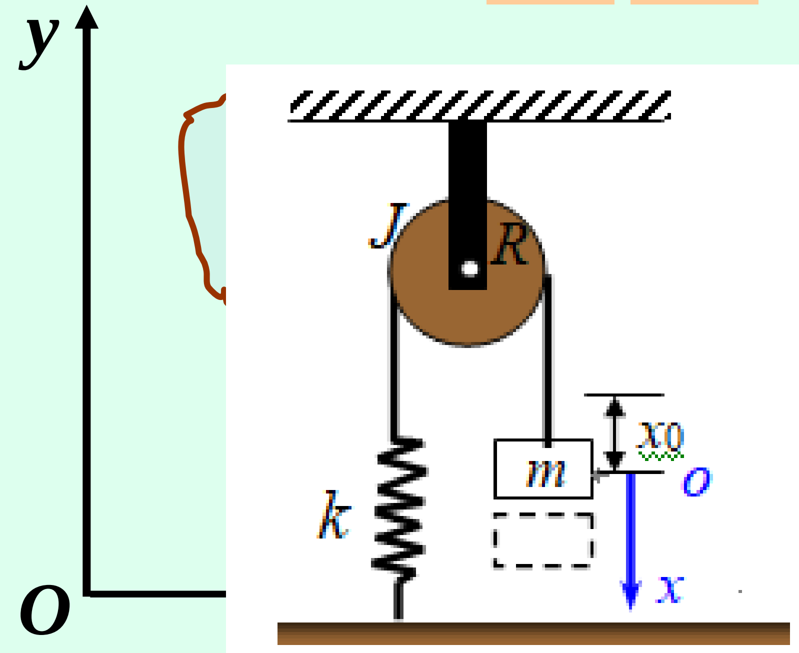
转动动能变化的原因：力矩做功。

四、刚体转动的机械能守恒

刚体在重力场中的势能:

$$E_p = \sum_i \Delta m_i g y_i$$

$$= g(\sum_i \Delta m_i y_i) = mgy_C$$



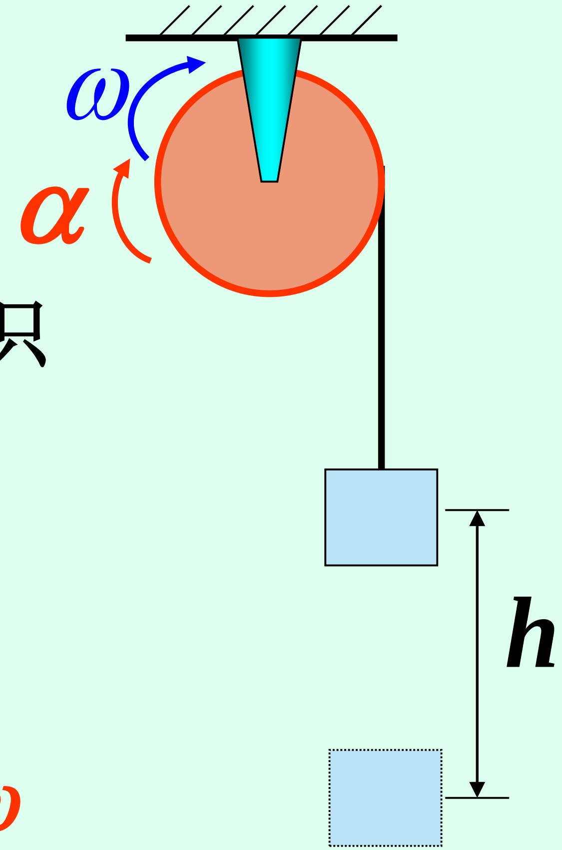
刚体的重力势能相当于它的全部质量都集中在质心时所具有的势能。

在刚体绕定轴转动的过程中, 如果只有保守的重力作功, 则刚体在重力场中的机械能守恒。

刚体绕定轴转动的机械能为: $\boxed{\frac{1}{2}J\omega^2 + mgy_C}$

上节例题另解：

例1. 求物体m由静止下落高度h时的速度和此时滑轮的角速度。



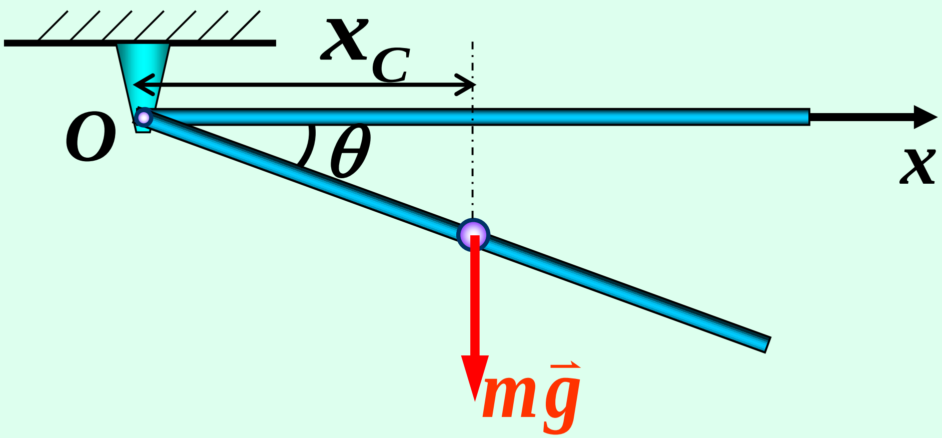
解： 取滑轮、物体和地球为系统，只有重力做功，则机械能守恒：

$$mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

刚体与物体的运动学关系为：$v = R\omega$

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$$

例2. 一根长为l 、质量为m 的均匀细直棒，其一端有一固定的光滑水平轴，因而可以在竖直平面内转动。最初棒静止在水平位置，求它由此下摆θ角时的角加速度和角速度。



解： 细棒运动过程中，仅重力做功，故机械能守恒：

$$mg \cdot \frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

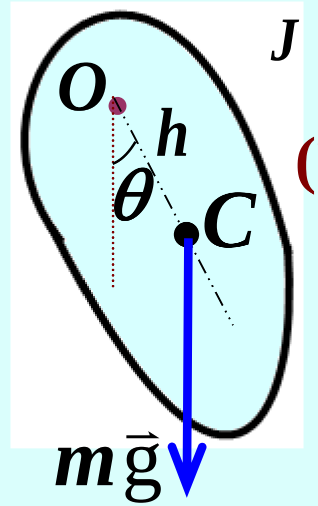
$$mgl\sin\theta = \frac{1}{3}ml^2\omega^2$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$$

$$\alpha = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

例3. 复摆： 刚体绕一固定水平轴，在重力作用下，作微小的摆动。



J (转动惯量)

(摆角很小)

$\sin\theta \approx \theta$

当角位移为 θ 时：

转动定律： $\boxed{M = J\alpha}$

$$-mgh\sin\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0} \quad \boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}}$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}J\omega^2+mgh(1-\cos\theta)=C$$

对时间求导：

$$J\cancel{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+mgh\cdot\sin\theta\cancel{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}=0$$

周期： $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgh}}$

第4节　刚体的角动量定理和角动量守恒定律

一、刚体的角动量

质点对定点的角动量为：$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$

刚体上的任意质元，绕固定轴做圆周运动，对轴的角动量为：$$L_i=r_i m_i v_i=m_i r_i^2\omega$$

刚体绕此轴的**角动量**为：

$$L=\sum_i L_i=(\sum_i m_i r_i^2)\omega \qquad \boxed{L=J\omega}$$

刚体对固定转动轴的角动量L,等于它对该轴的转动惯量J 和角速度ω 的乘积。

二、刚体的角动量定理

1. 微分形式:

质点系的角动量定理: $\vec{M} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

对定轴转动质点系，只考虑力矩和角动量平行于转轴的分量，设转轴为z 轴，取角动量定理沿z 轴的分量式有:

$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$$ 即: $$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$ 或: $$\boxed{M\mathrm{d}t = \mathrm{d}L}$$

在刚体定轴转动中:

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega) = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\alpha$$

转动定律实质是角动量定理沿转轴方向的分量式。

2. 积分形式

$$\boxed{M\mathrm{d}t = \mathrm{d}L}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = \int_{L_1}^{L_2} \mathrm{d}L = L_2 - L_1 = \Delta L$$

左边为对某个固定轴的外力矩的作用在某段时间内的积累效果（**冲量矩**），

右边为刚体对同一转轴的角动量的增量。

J 不变时（**刚体**）：$\Delta L = J\omega_2 - J\omega_1 = M\Delta t$

对恒力矩

J 改变时（**非刚体**）：$\Delta L = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$

3. 角动量守恒定律

在$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$中，

若 $M=0$ ， 则$L=$ 常量， 即$\Delta L=0$

L不变的含义为： $\boxed{L=J\omega}$

刚体： ω不变；

非刚体： $J\omega$不变。

许多现象都可以用角动量守恒来说明。

例3. 如图所示，一质量为m的子弹以水平速度 $\vec{v}_0$ 射入一静止悬于顶端长棒的下端，穿出后速度损失3/4, 求(1)子弹穿出后棒的角速度ω；(2)棒下端达到的高度h。已知棒长为l，质量为M。

解： 子弹射入过程，子弹和棒系统对轴的**角动量守恒**：

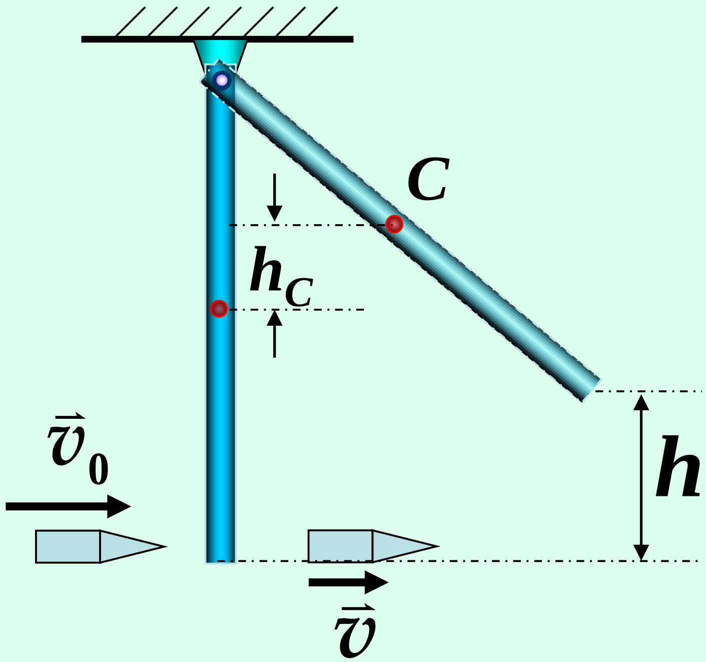
$$mv_0 l = mvl + J\omega$$

$$\omega = \frac{m(v_0 - v)l}{J} = \frac{9mv_0}{4Ml}$$

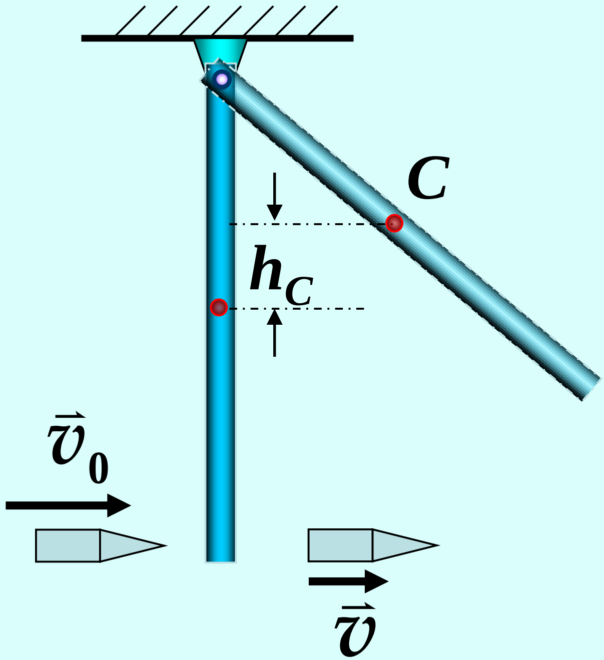
棒的摆动过程，**机械能守恒：**

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = Mgh_C$$

由此得：$h = 2h_C = \dfrac{27m^2v_0^2}{16M^2g}$



以质点与含固定轴均匀细棒的碰撞为例，碰撞前后，写**角动量守恒**表达式



①碰撞点离轴的距离、质点及刚体对轴的角动量表达式；

②钢球沿入射方向继续运动；

③钢球被反弹；

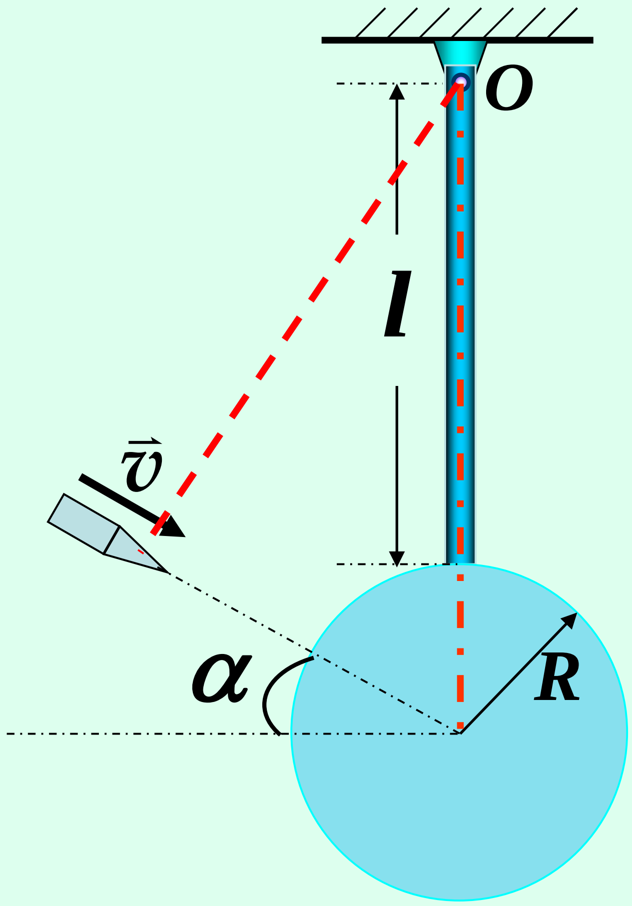
$$mv_0 l = mvl + J\omega$$

④子弹射穿细棒；

⑤子弹留在棒内；$mvd + J\omega = md^2\omega + J\omega = J'\omega$

⑥钢球或子弹以倾角 α 入射。

例4. 如图所示，求子弹嵌入球心后系统的共同角速度。已知木球、细棒对通过O轴的转动惯量总和为J。

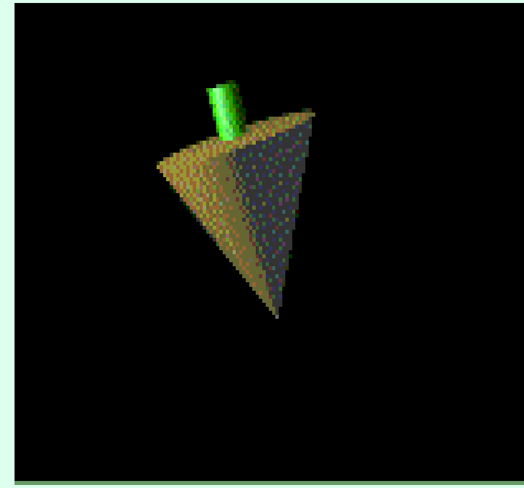


解： 选子弹、木球、细棒为系统，子弹射入时，系统所受合外力对轴的力矩为零，系统对转轴的角动量守恒。

$$mv(R+l)\cos\alpha$$

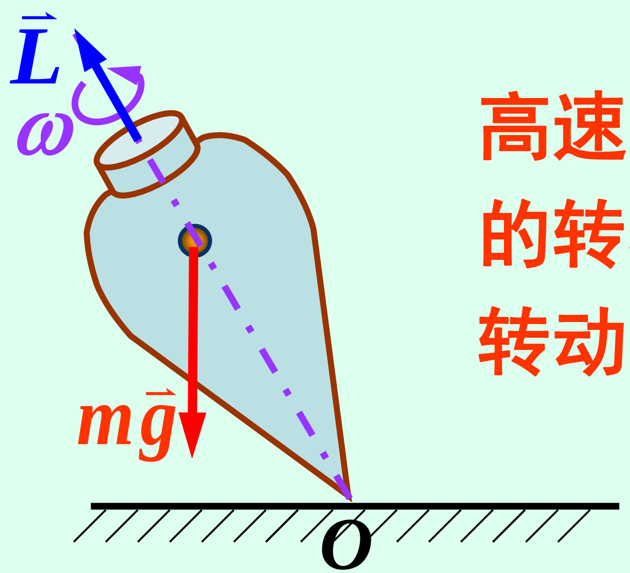
$$=\left[J+m(R+l)^2\right]\omega$$

第5节　进动

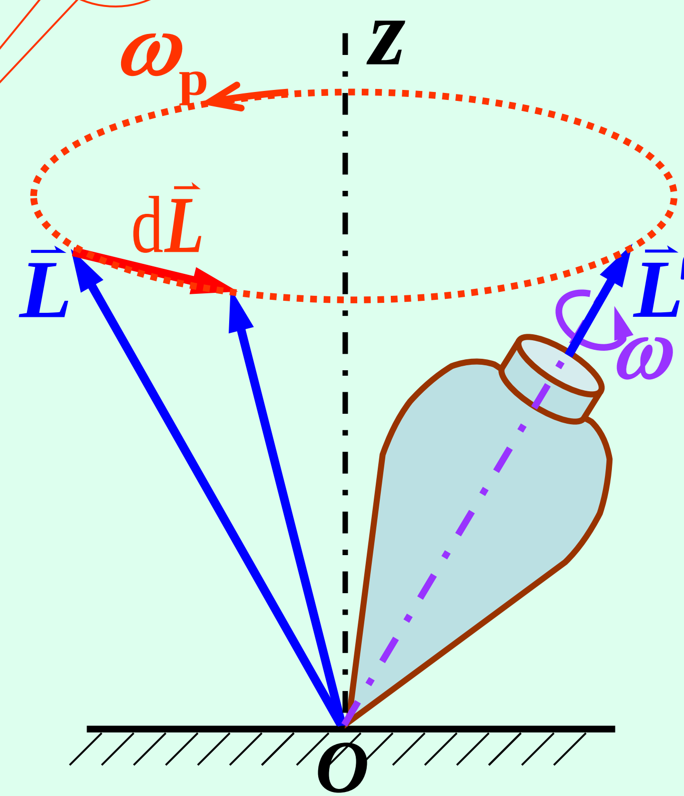


刚体的转轴不固定，如陀螺的运动。
陀螺没有转动时，重力矩使它倾倒。
陀螺高速转动时？重力矩使其进动。

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$



高速自旋物体的转轴在空间转动的现象。



进动角速度： $\omega_p = \dfrac{d\varphi}{dt}$

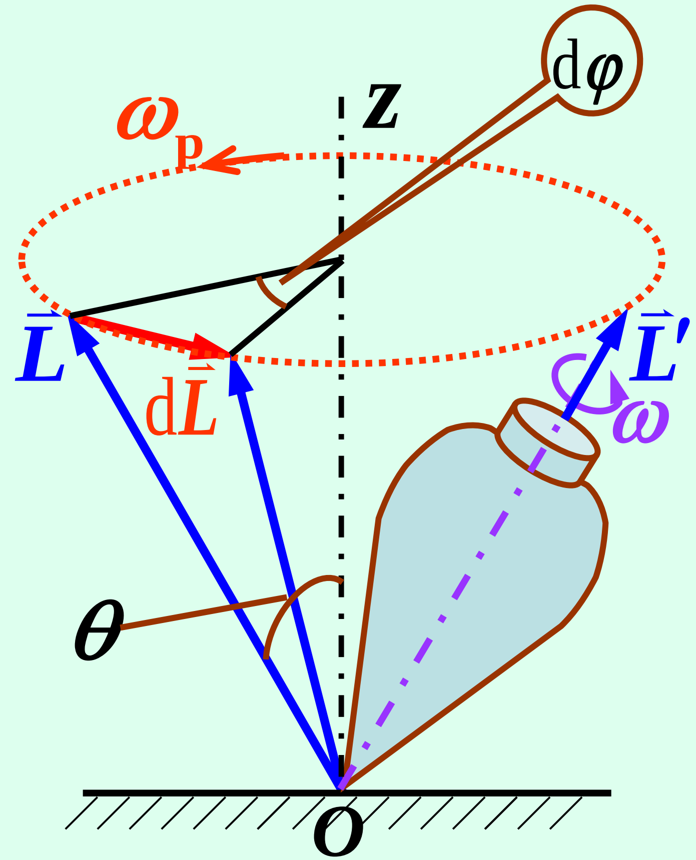
dt 时间内，角动量的增量很小：

$$dL = L\sin\theta d\varphi = J\omega\sin\theta d\varphi$$

角动量定理： $dL = M dt$

$$M dt = J\omega\sin\theta d\varphi$$

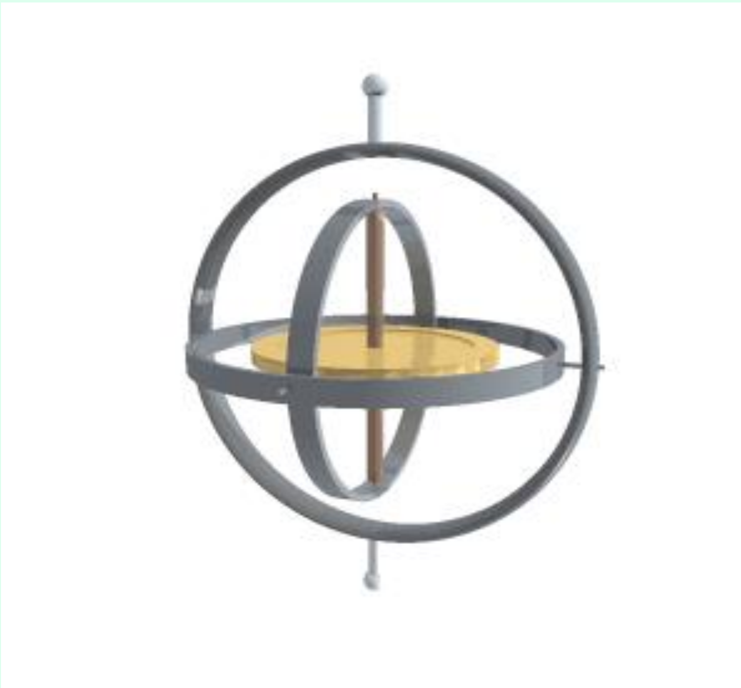
得： $\omega_p = \dfrac{M}{J\omega\sin\theta} = \dfrac{M}{L\sin\theta}$



与外力矩成正比，与角动量成反比。

进动的应用

1. 陀螺仪



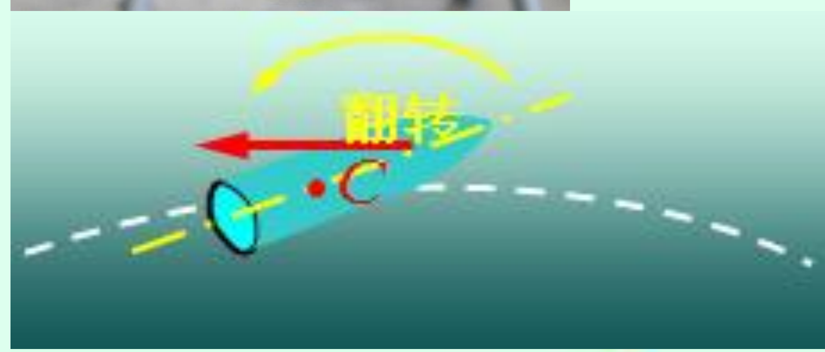
高速旋转陀螺不受外力矩作用：

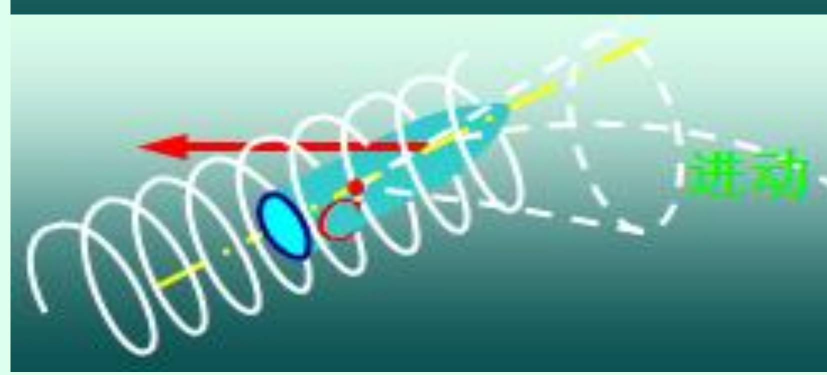
角动量守恒：自转轴方位不变

飞行体（导弹、鱼雷、航天器）的航向控制

2. 子弹飞行姿态的控制(来复线)

国产94式105毫米坦克炮的膛线



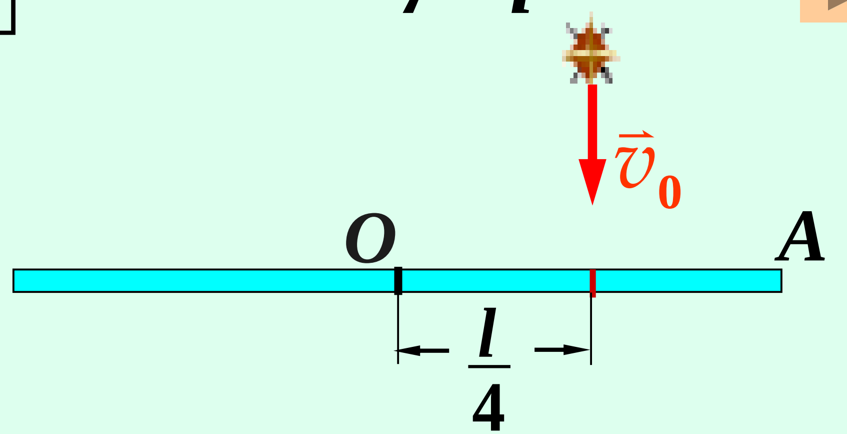


例5. 均匀细麦杆长度为l，可绕通过中心 O的水平轴在竖直平面内无摩擦地转动。当细杆静止于水平位置时，一质量与麦杆相同的小甲虫以速率 v_0垂直落在距点O为 $l/4$ 处，并立即向麦杆的端点A 爬行。求（1）甲虫刚落到麦杆上时，甲虫和麦杆一起转动的角速度?

解：虫与杆的碰撞前后，系统角动量守恒。

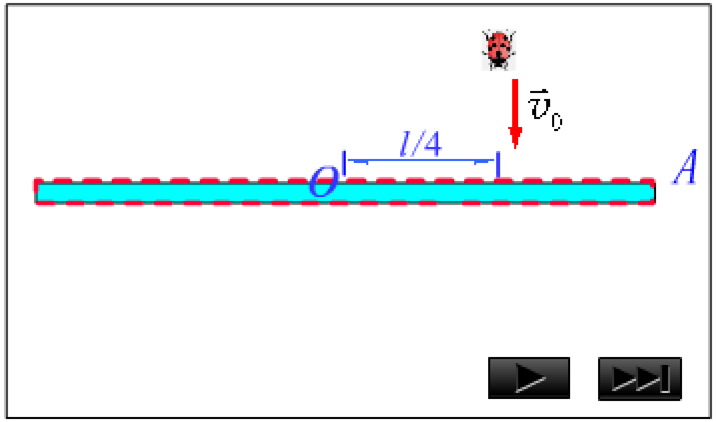
$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\omega \qquad \omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

（2）设麦杆以恒定的角速度转动，甲虫爬行的速率与时间的关系?



由角动量定理

$$\boxed{\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}}$$



$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$

$$mgr\cos\theta=\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{12}ml^2+mr^2\right)$$

$$=2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t=\frac{7l\times g}{24v_0}\cos\left(\frac{12v_0}{7l}t\right)$$

（3）设转到竖直位置时甲虫刚好爬到端点，求 v_0。

$$\frac{l}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}v\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\frac{g}{2\omega}\cos\omega t\mathrm{d}t=\frac{g}{2\omega^2}$$

得: $\omega=\sqrt{\dfrac{2g}{l}}$ 　甲虫下落时的速率: $v_0=\dfrac{7}{12}\sqrt{2gl}$