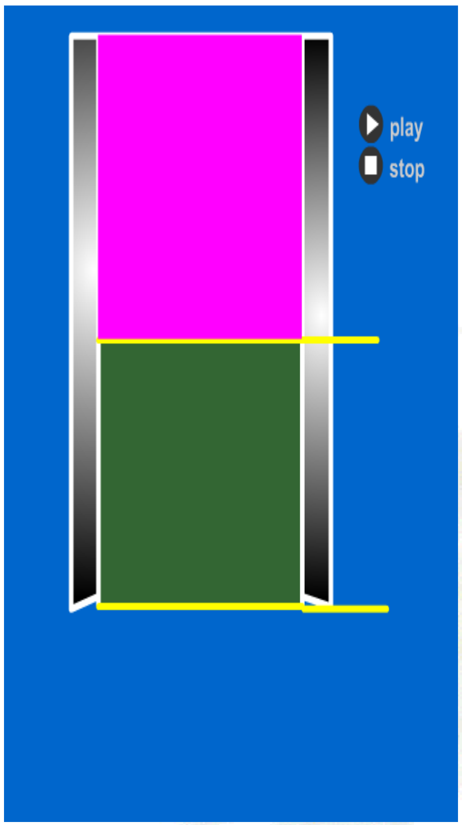
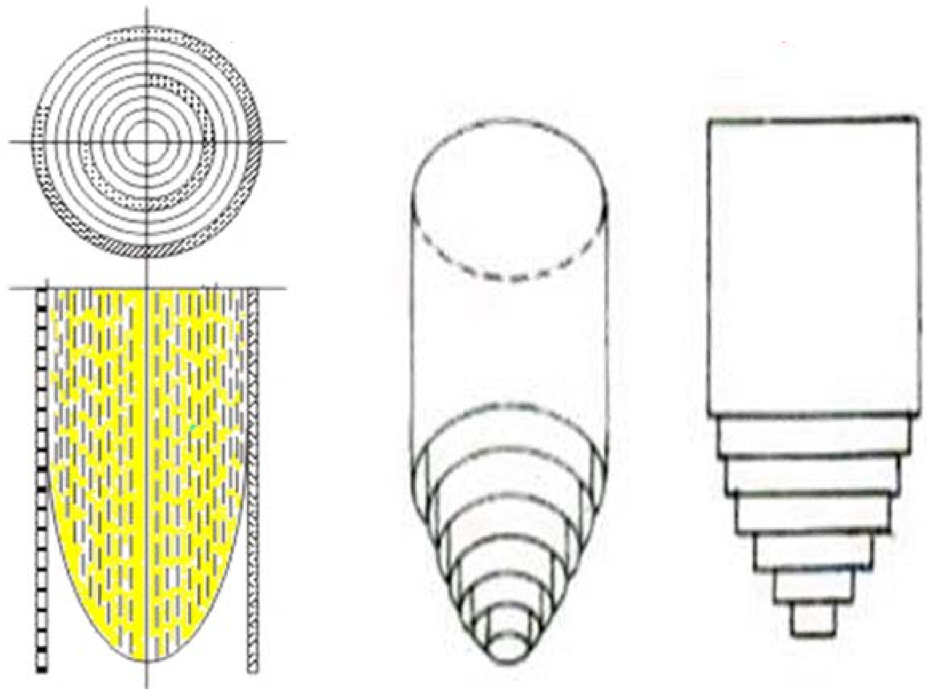
第2节　黏性流体的运动

一、牛顿黏滞定律

1. 实验：甘油在竖直圆管中的流动



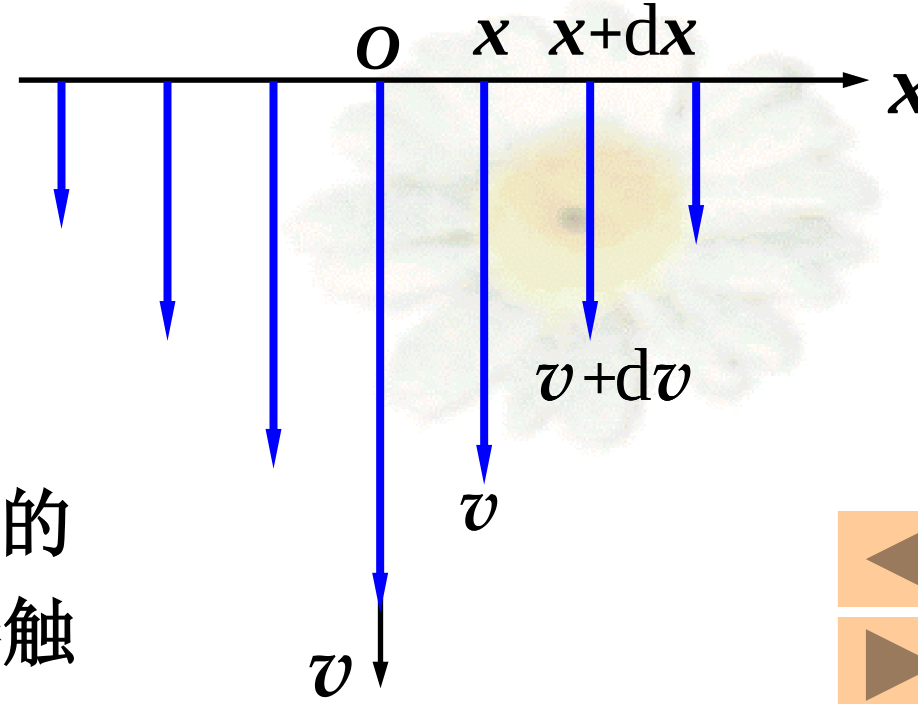


表明：甘油作分层流动——层流；

相邻流层间互施黏滞力。

2. 速度梯度 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

垂直速度方向单位间距流层的速度差



3. 牛顿黏滞定律

黏滞力 F 的大小与两流层的接触面积 S 成正比，与接触处的速度梯度成正比:

$$F = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} S$$ ——遵循此定律的流体称为牛顿流体

(1) η 称作黏度系数或黏度。 单位: Pa · s

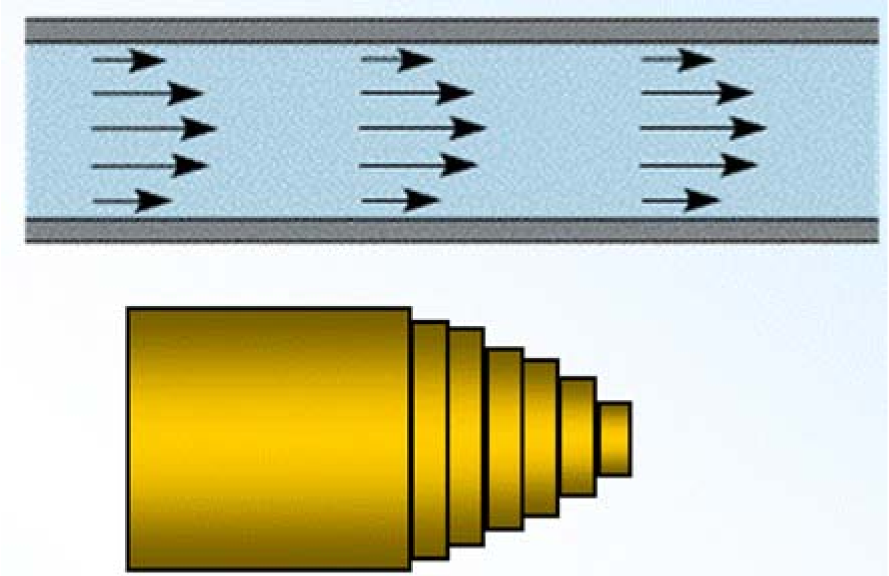
(2) η 与流体种类有关, 不同的物质有不同的黏度。

(3) η 与温度有关: 液体: $T\uparrow, \eta\downarrow$ 气体: $T\uparrow, \eta\uparrow$

二、黏性流体的运动特征

1. 层流

黏性流体分层流动，在流管中各流体层之间只做相对滑动而不混合。



同一层：v相同；

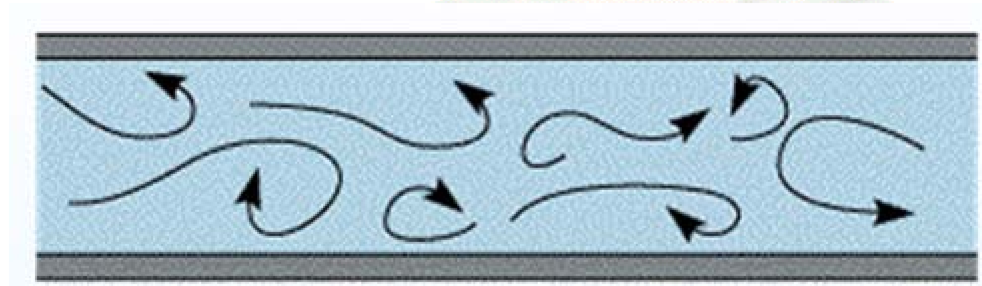
不同层：v不同。

v大的流层对v小的流层有拉力；
v小的流层对v大的流层有阻力。

相互作用的黏滞阻力

2. 湍流：

随着速度的增加，流体可能向各个方向流动，各流体层相互混淆，而且可能出现旋涡。



3. 雷诺数：

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v r}{\eta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \text{— 流体的密度；} \\ v \text{— 流速；} \\ r \text{— 圆管的半径；} \\ \eta \text{— 黏度。} \end{array} \right.$$

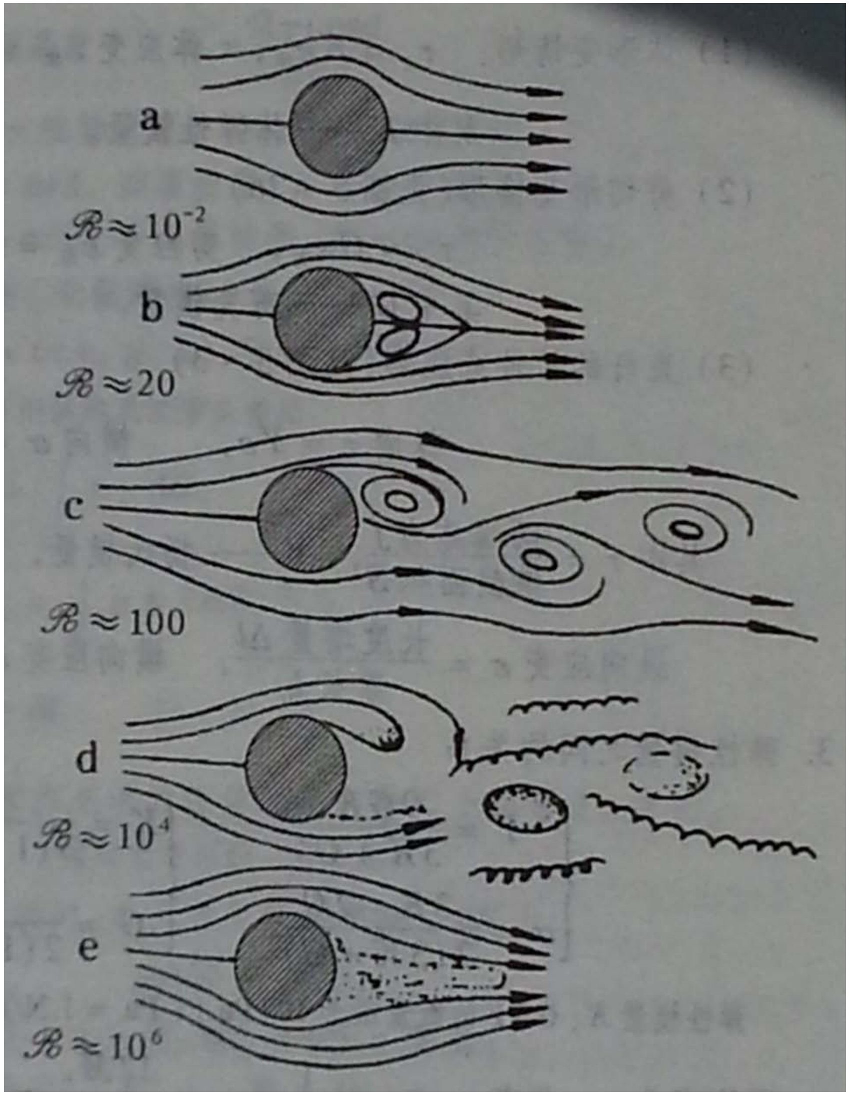
Re <1000 —层流；

1000< Re <1500 —过渡流；

Re >1500 —湍流。

Re为无量纲的纯数，流体的黏度越小，密度、流速以及管道半径越大，越容易发生湍流。即**Re**愈大，流动状态愈不稳定。

烟缕向湍流突变



不同雷诺数下的圆柱绕流

例1. 已知在0 °C时水的黏滞系数$\eta = 1.8\times10^{-3}$ Pa·s，若保证水在半径r=2.0×10^{-2} m 的圆管中作稳定的层流，要求水流速度不超过多少？

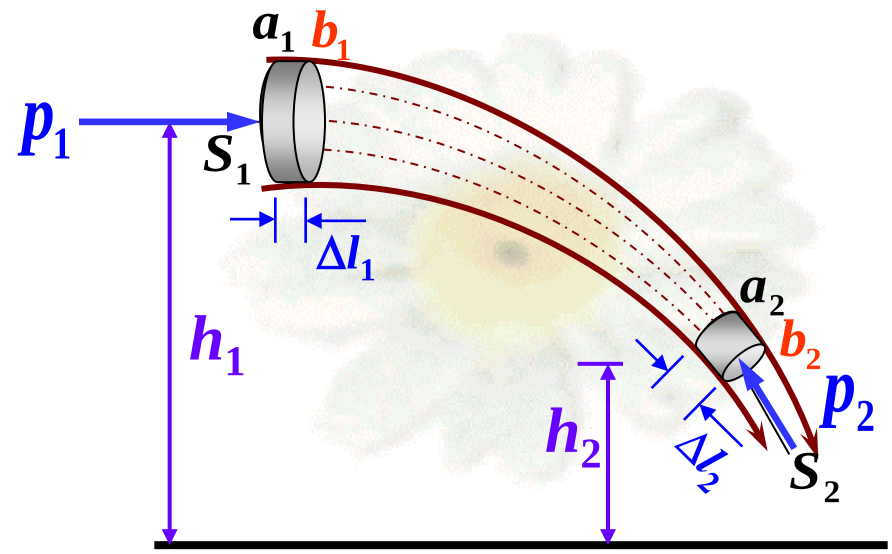
解： 保证水在圆管中作稳定的层流，雷诺数**Re**应小于**1000**，即 $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho v r}{\eta} < 1000$，则

$$v < 1000\times\frac{\eta}{\rho d} = 1000\times\frac{1.8\times10^{-3}}{1\times10^{3}\times2.0\times10^{-2}} = 0.09 \ \ \mathrm{m/s}$$

即水在圆管的流速小于0.09 m/s时才能保持稳定的层流。而通常水在管道中的流速约为每秒几米，可见水在管道中的流动一般都是湍流。

三、黏性流体的运动规律

（稳定流动）



1. 黏性流体的伯努利方程

理想流体:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

黏性流体: ——黏滞阻力对系统做功

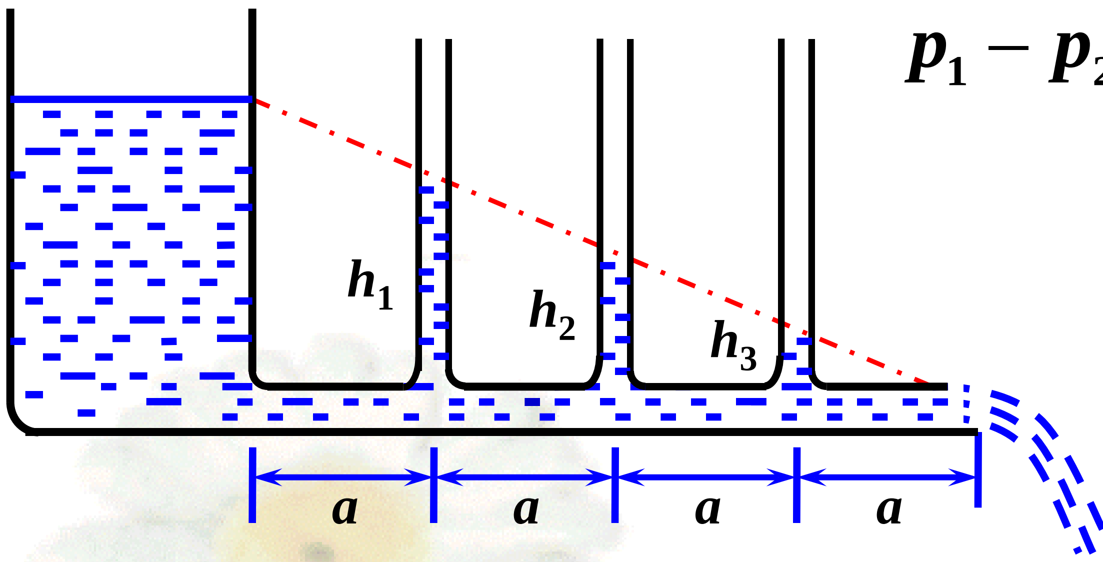
$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + w$$

w: 单位体积不可压缩的黏性流体由a_1a_2处运动到b_1b_2处的过程中，克服层与层之间的内摩擦力所做的功或所消耗的能量。

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + w$$

不可压缩的粘性流体在水平均匀圆管中的稳定流动

$$h_1 = h_2 = h, \quad v_1 = v_2 \qquad \Rightarrow p_1 - p_2 = w$$



$$p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2) = w$$

圆管中各截面处的压强不等，上游的压强比下游大。

黏性流体在水平均匀圆管中沿着流体流动方向，其压强的降落与各支管到容器的距离成正比。

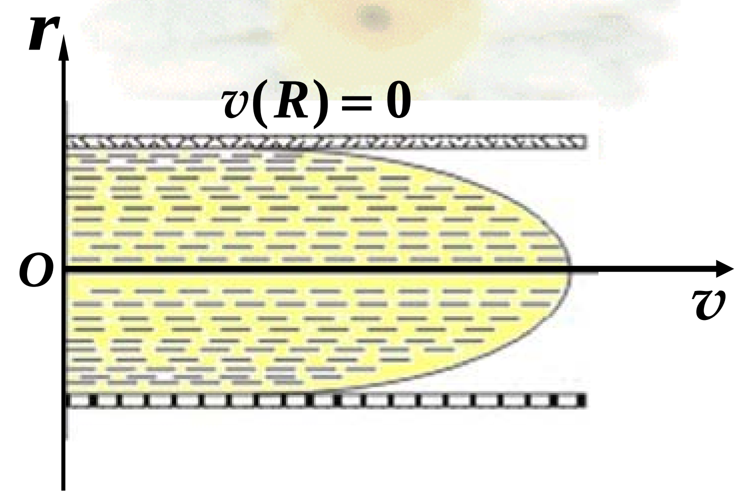
2. 泊肃叶定律

黏性流体在水平圆管中做稳定层流**流量的规律**。

雷诺数(层流)：$\mathbf{Re<1000}$；

流速(速度梯度): $r\uparrow, v\downarrow$。

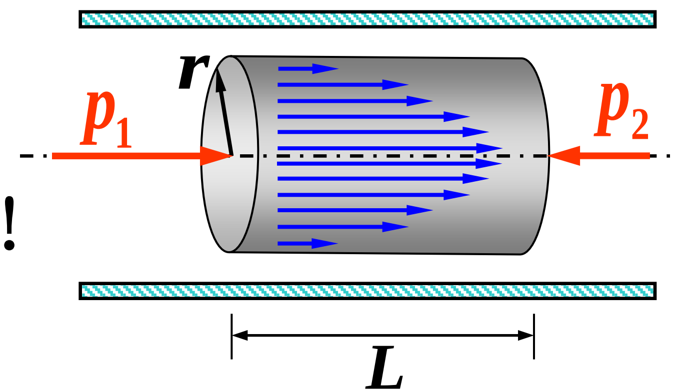
管轴： v_{max}； **管壁**： $v_{min}\to 0$。



(1) v与r的关系

取一段轴对称圆柱形流管

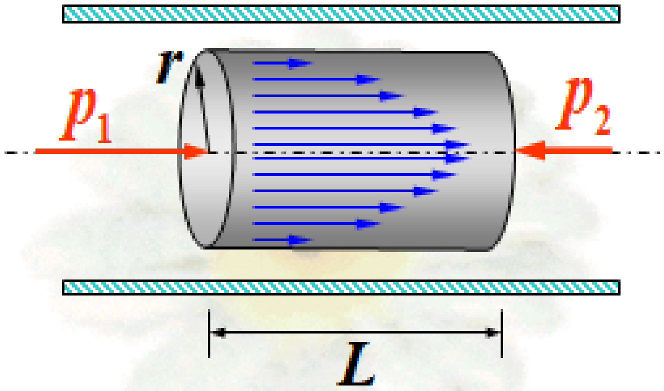
流体做稳定层流, 所受合外力为零!



两端面压力差：$F=(p_1-p_2)\pi r^2$

其它流体的粘滞阻力： $f=\eta\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}S=\eta\cdot 2\pi rL\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$

$$\left.\begin{aligned} F &= (p_1 - p_2)\pi r^2 \\ f &= \eta \cdot 2\pi r L \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \end{aligned}\right\} \quad F + f = 0$$



$$(p_1 - p_2)\pi r^2 + \eta \cdot 2\pi r L \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 0$$

$$\int_r^R \frac{(p_1 - p_2)}{2L\eta} r\,\mathrm{d}r = \int_v^0 -\,\mathrm{d}v$$

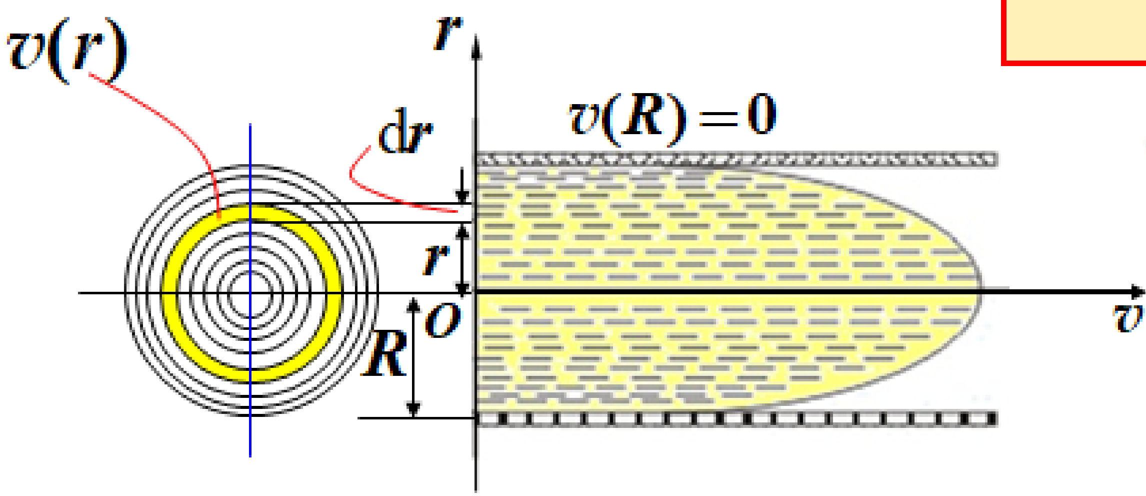
得速度分布函数为： $v(r) = \dfrac{(p_1 - p_2)}{4L\eta}(R^2 - r^2)$

v与r的关系曲线为抛物线，与实验结果一致。

管轴$r=0$处的流速（最大流速）： $v_{\max} = \dfrac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta L}$

(2) 流量的计算

$$\boxed{v(r)=\frac{(p_1-p_2)}{4L\eta}(R^2-r^2)}$$



整个流体可看成由很多薄圆筒组成。

考虑任意r处的一层，它以$v(r)$作匀速流动，$\mathrm{d}S=2\pi r\,\mathrm{d}r$

任一圆环流层的流量 $$\int \mathrm{d}Q=\int_0^R \frac{(p_1-p_2)}{4\eta L}(R^2-r^2)2\pi r\,\mathrm{d}r$$

整个管中的流量 $$\boxed{Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}}$$ ——泊肃叶定律

流量与压强梯度成正比;与管半径四次方成正比。

$$Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}$$

(3) 最大流速与平均流速

① 最大流速

$$v_{\max}=\frac{(p_1-p_2)R^2}{4\eta L}$$

② 平均流速

$$\bar{v}=\frac{Q}{S}=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{\pi R^2\times 8\eta L}=\frac{(p_1-p_2)R^2}{8\eta L}$$

$$\bar{v}=\frac{1}{2}v_{\max}$$

(4) 流阻

$$Q=\frac{\pi R^4(p_1-p_2)}{8\eta L}$$

直流电路的欧姆定律：$I=\dfrac{\Delta U}{R}$

$$Q=\frac{p_1-p_2}{R_f} \quad \Rightarrow R_f=\frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

① R_f 叫做流阻，决定于管的长度、半径和流体的黏度.

单位：Pa·s/m^3

② 流阻的串并联:

串联: $R_{f串}=R_{f1}+R_{f2}+\cdots$

并联: $\dfrac{1}{R_{f并}}=\dfrac{1}{R_{f1}}+\dfrac{1}{R_{f2}}+\cdots$

例2. 设主动脉半径$R=1.30\times10^{-2}$ m，其中血液流量$Q=1.00\times10^{-4}$ m^3/s；某一支小动脉半径为主动脉的一半，其中血液流量为主动脉流量的五分之一；已知血液黏度$\eta=3.00\times10^{-3}$ Pa·s。分别求主动脉和小动脉在$L=0.10$ m一段长度上的流阻和压强降落。

解：（1）根据流阻定义和泊肃叶定律，主动脉的流阻和压强降落分别为

$$R_f=\frac{8\eta L}{\pi R^4}=\frac{8\times3.00\times10^{-3}\times0.10}{3.14\times(1.30\times10^{-2})^4}=2.68\times10^4\,\mathrm{Pa\cdot s/m^3}$$

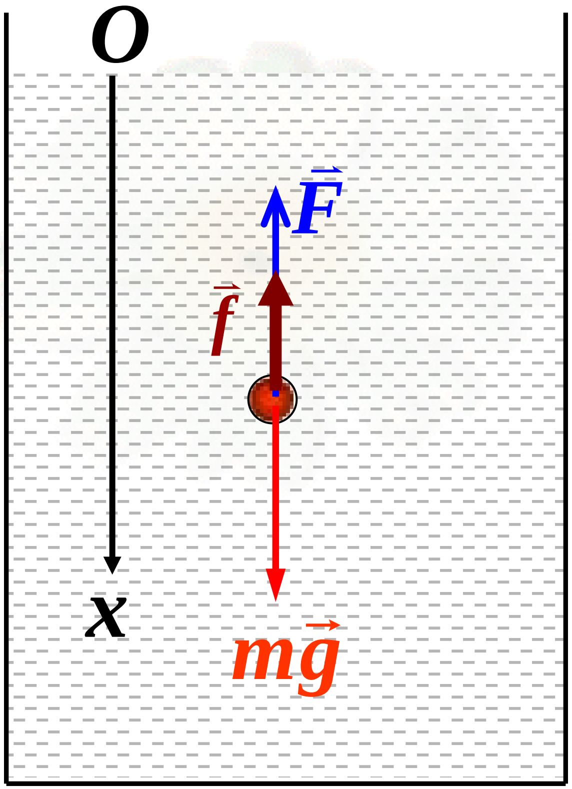
$$\Delta p=Q\cdot R_f=1.00\times10^{-4}\times2.68\times10^4=2.68\ \mathrm{Pa}$$

（2）小动脉的流阻和压强降落分别为

$$R'_f=\frac{8\eta L}{\pi R'^4}=\frac{8\times3.00\times10^{-3}\times0.10}{3.14\times(\frac{1.30}{2}\times10^{-2})^4}=4.28\times10^5\,\mathrm{Pa\cdot s/m^3}$$

$$\Delta p'=Q'\cdot R'_f=\frac{1.00}{5}\times10^{-4}\times4.28\times10^5=8.56\ \mathrm{Pa}$$

3. 斯托克斯定律



固体小球在黏性流体中运动，

实验表明：小球受黏性阻力：

$f = 6\pi\eta r v$ ——斯托克斯定律

条件: 小球的 r、v 较小, **Re<1**

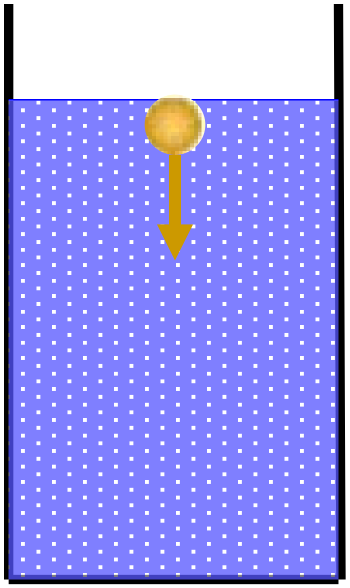
小球在黏性流体中的运动：

最终三力平衡、小球匀速下落：

$$mg = F + f$$

$$\frac{4\pi r^3}{3}\rho g = \frac{4\pi r^3 \rho'}{3} g + 6\pi \eta r v_T$$

重力　　　浮力　　　黏性阻力



收尾速度（终极速度、最终沉降速度）

$$v_T = \frac{2gr^2(\rho - \rho')}{9\eta}$$

应用:

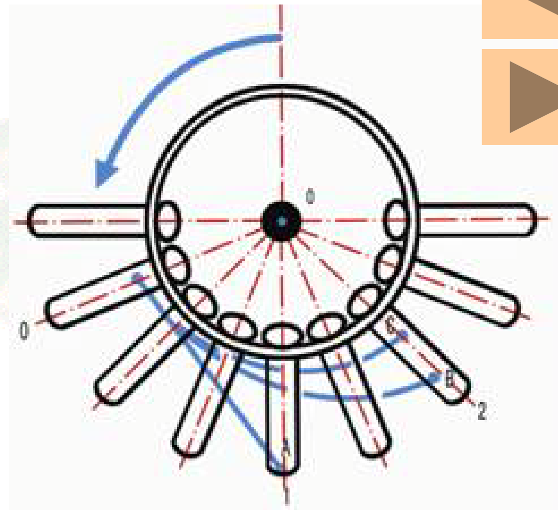
① 沉降法测量流体的黏度；$\eta = 2gr^2(\rho - \rho')/9v$

② 测量小球的半径（密立根油滴实验）；

③ 离心机的原理；

…………

$$\boxed{v_T = \frac{2gr^2(\rho-\rho')}{9\eta}}$$

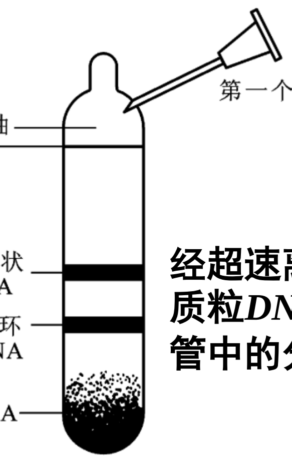


高速离心技术

——生物大分子的分离纯化与分子量鉴定

生物大分子在旋转坐标系上

$$\vec{a}'_{\mathrm{n}} = -(r'\omega^2)\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{n}}$$ 离心加速度



经超速离心后质粒*DNA* 在管中的分布

离心加速度取代 g

$$v = \frac{2}{9}\frac{r^2\left(r'\omega^2\right)}{\eta}\left(\rho-\rho'\right) = \frac{r'\omega^2}{6\pi\eta r}\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)m$$

课堂练习

1．黏滞流体在半径为r的水平管中流动，其体积流量为Q，如果在半径为$r/3$的水平管中流动，其它条件不变，则其体积流量为（ ）

A．$3Q$；　　B．$Q/3$；

C．$81Q$；　　√D．$Q/81$．

2．粘滞流体通过长度为l、管径为r的流管，流阻为R_f，若再连接长度为l、管径为$r/3$的流管，则这两段流管的总流阻为（ ）

A．$2R_f$；　　B．$9R_f$；

C．$10R_f$；　　√D．$82R_f$．