本节课作业

P75: 11-T9~T12

已学内容回顾

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

由初始条件 (x_0, v_0)

定A, ϕ

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$$

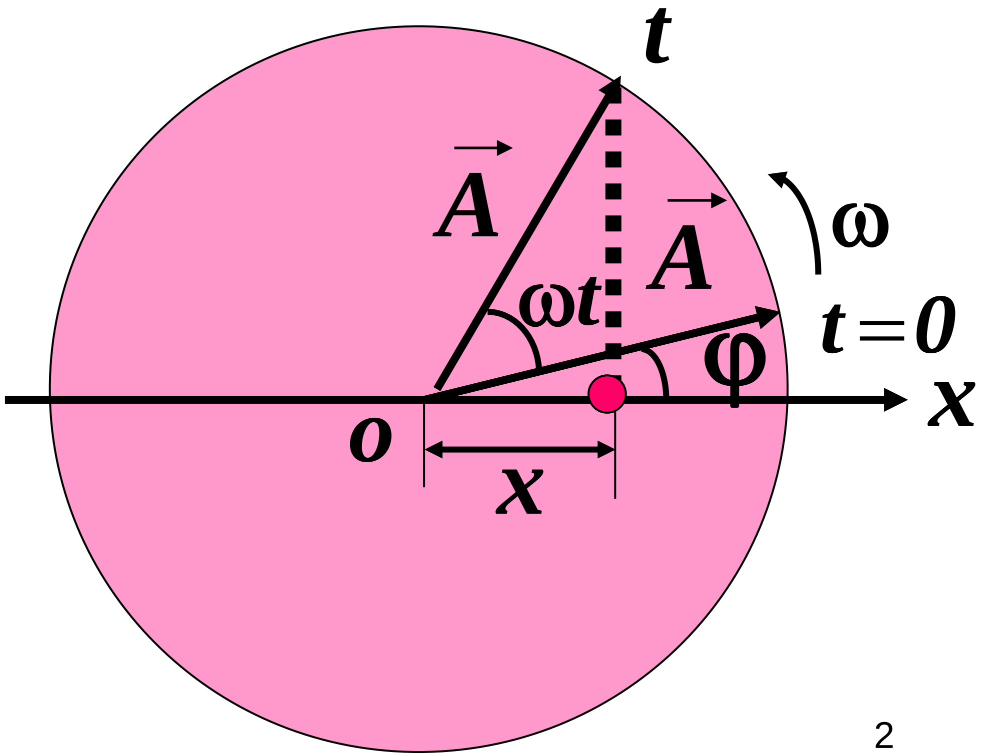
$$tg\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

然后根据v_0的正负

决定ϕ的取舍!

$$v_0 = -A\omega\sin\phi$$

旋转矢量表示法

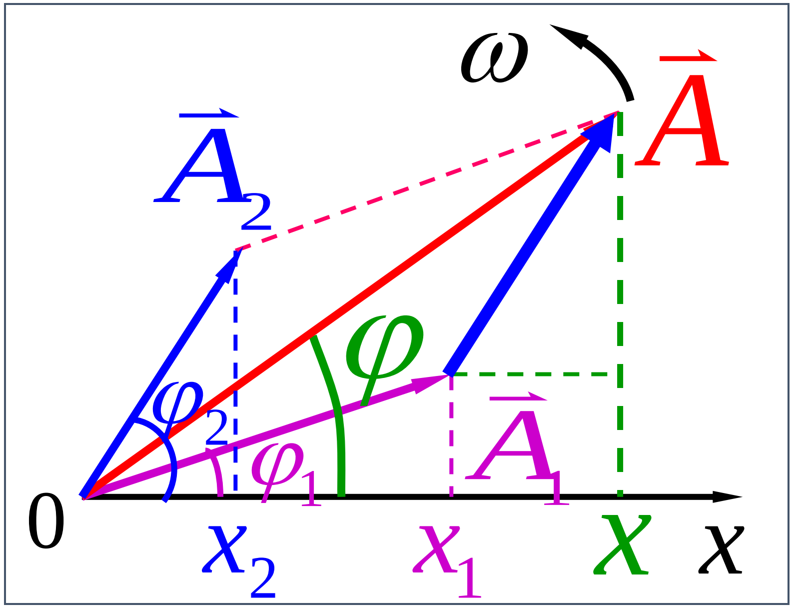


已学内容回顾

简谐运动 ⟷ 复杂振动（合成 / 分解）

一、两个同方向同频率简谐运动的合成

合振动的振幅：
同相增强，反相减弱

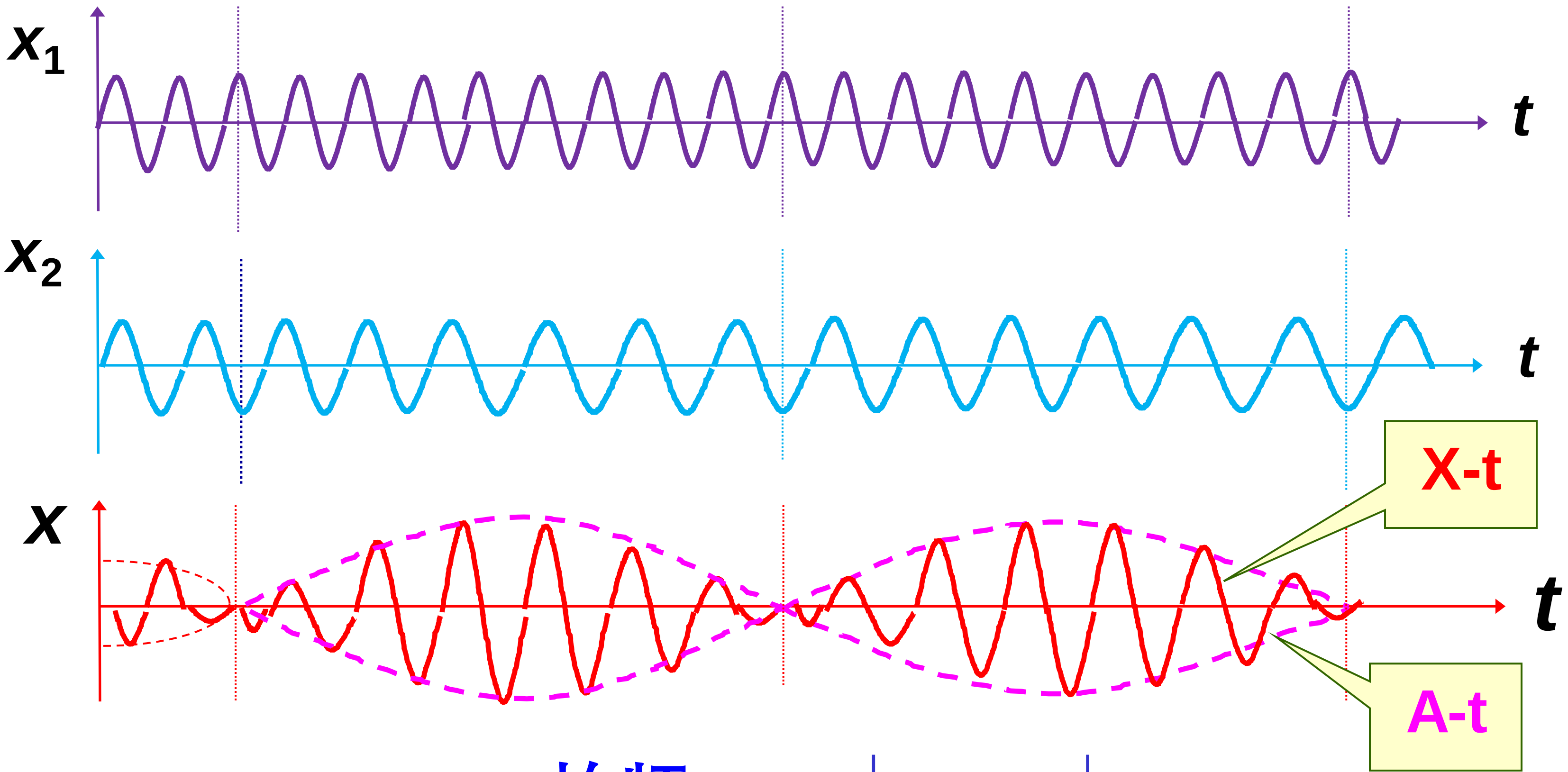


$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

已学内容回顾

一、两个同方向、同频率简谐运动的合成

二、同振动方向、不同频率的两个简谐振动的合成



拍频 $\nu = \left|\nu_2 - \nu_1\right|$

三、振动方向相互垂直频率相等的两个谐振动的合成

设一个物体在x方向参与振动 $x = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$

在y方向参与振动 $y = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$

求取物体的运动轨迹：

$$x = A_1(\cos\varphi_1\cos\omega_0 t - \sin\varphi_1\sin\omega_0 t)$$

$$y = A_2(\cos\varphi_2\cos\omega_0 t - \sin\varphi_2\sin\omega_0 t)$$

反解出 $\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t$ 代入 $\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t = 1$

得出椭圆方程

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

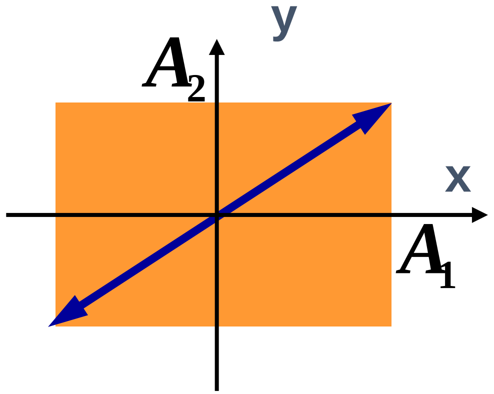
讨论几种特殊情况：

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

1）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=0$

$$\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$y=\frac{A_2}{A_1}x \qquad 斜率：tg\theta=\frac{A_2}{A_1}$$



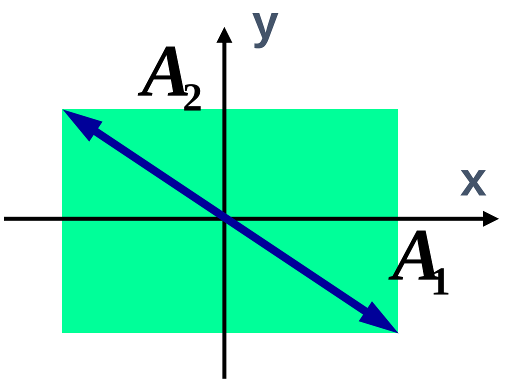
距原点的位移： $S=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

$$=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

2）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pi$

$$\left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x \qquad 斜率：tg\theta=-\frac{A_2}{A_1}$$



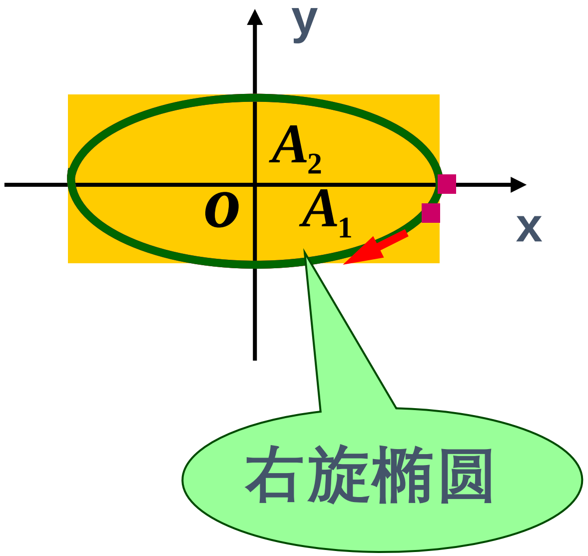
位移、频率、振幅同上，质点沿 $y=-\frac{A_2}{A_1}x$ 直线振动

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

3） $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$

则有：

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$



轨迹为一正椭圆长短轴分别为$2A_1$、$2A_2$

若$A_1=A_2$，就是一个圆。

问题：振动方向?

设$\varphi_2=\varphi_1+\frac{\pi}{2}$

$$x=A_1\cos(\omega_o t+\varphi_1)$$

$$y=A_2\cos(\omega_o t+\varphi_1+\frac{\pi}{2})=-A_2\sin(\omega_0 t+\varphi_1)$$

当 $\omega_o t+\varphi_1=0$ 时： $x=A_1$，$y=0$

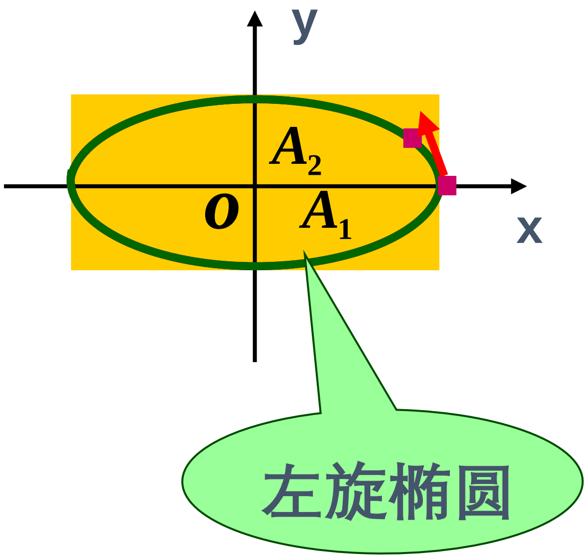
而$\omega_o(t+\Delta t)+\varphi_1$时： $x>0$， $y<0$

振动为顺时针方向

4) $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{3\pi}{2}$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

则有： $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$



轨迹为一正椭圆长短轴分别为$2A_1$、$2A_2$

若$A_1=A_2$，就是一个圆。

问题：振动方向？

设$\varphi_2=\varphi_1+\frac{3\pi}{2}$

$$x=A_1\cos(\omega_o t+\varphi_1)$$

$$y=A_2\cos(\omega_o t+\varphi_1+\frac{3\pi}{2}) \quad =A_2\sin(\omega_0 t+\varphi_1)$$

当 $\omega_o t+\varphi_1=0$ 时： $x=A_1, y=0$

而$\omega_o(t+\Delta t)+\varphi_1$时： $x>0, y>0$

振动为逆时针方向

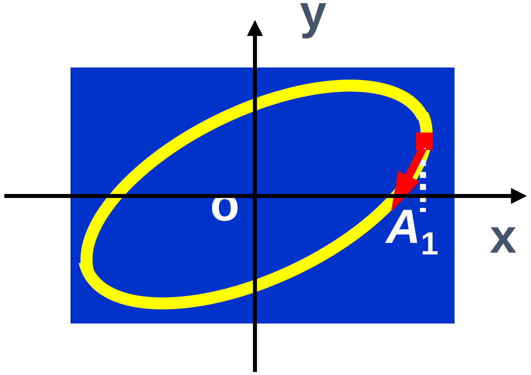
5）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\varphi$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

φ为其它任意值

轨迹是任意一个斜椭圆

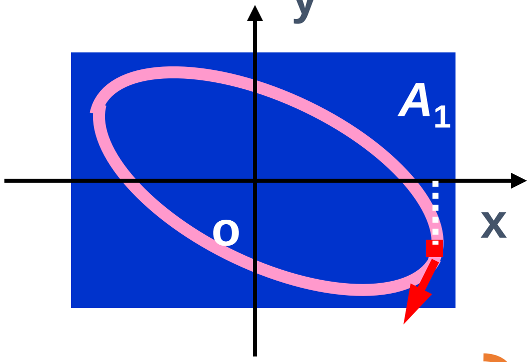
左旋or右旋?



为便于讨论：令$\varphi_1=0$,

$$\begin{cases} x=A_1\cos\omega_o t \\ y=A_2\cos(\omega_o t+\varphi) \end{cases}$$

$\pi/2<\varphi<\pi$



当 $0<\varphi<\pi/2$， $t=0$ 时：

$x=A_1$, $y=A_2\cos\varphi$

又：$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-\omega_o A_1\sin\omega_o t\big|_{t=0}=0$

$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=-\omega_o A_2\sin(\omega_o t+\varphi)\big|_{t=0}=-\omega_o A_2\sin\varphi<0$

右旋椭圆

例 若 $\begin{cases} x = A_1 \cos\omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \pi/4) \end{cases} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi/4$

求（1）合振动的轨迹

（2）已知A,ω,φ,m求质点在任一位置所受的力

解：（1）

$$x = A_1 \cos\omega t,\ y = \frac{A_2}{\sqrt{2}}(\cos\omega t - \sin\omega t),$$

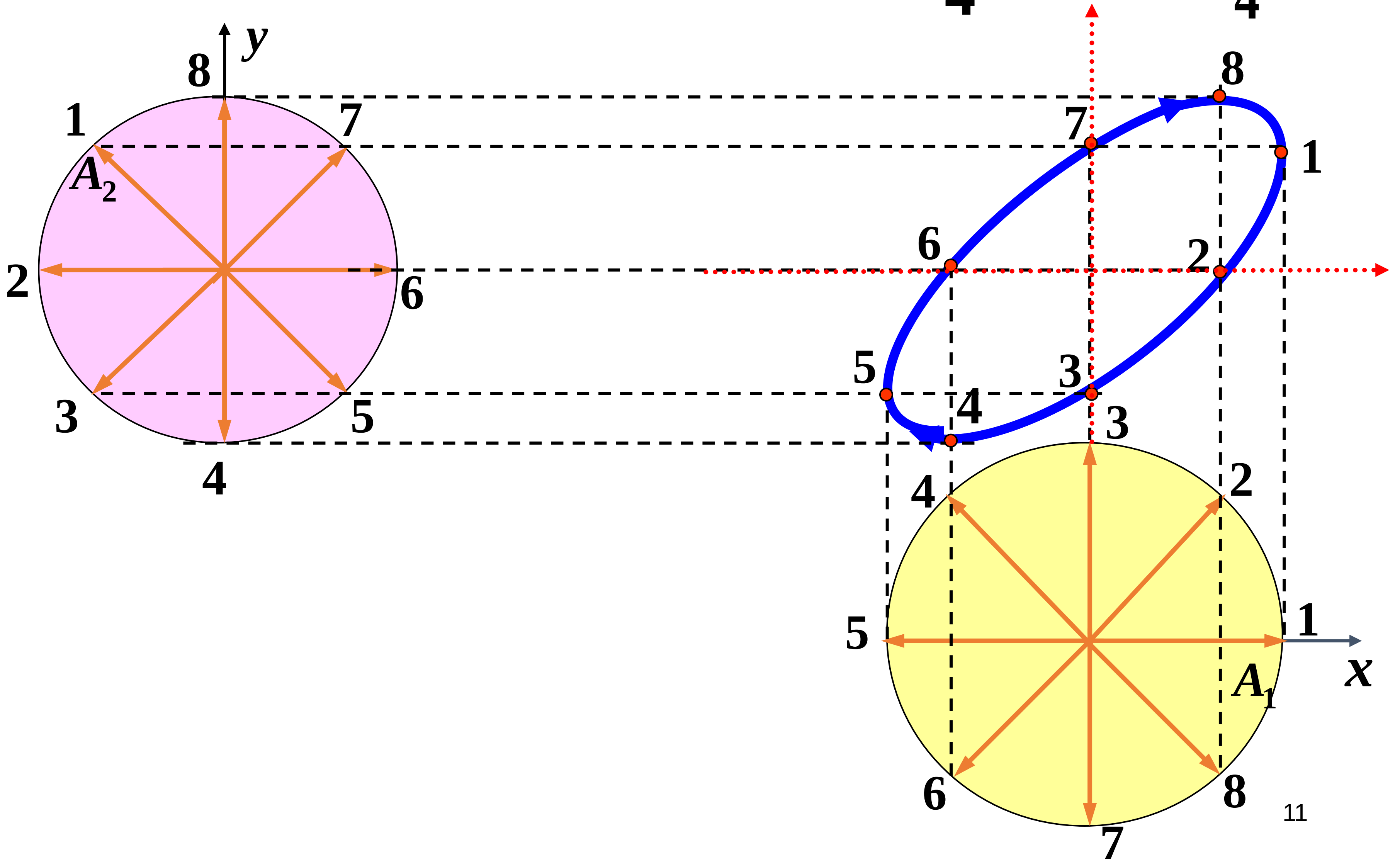
$$\cos\omega t = x/A_1,\ \sin\omega t = -\frac{\sqrt{2}}{A_2}y + \frac{1}{A_1}x,$$

故运动轨迹为

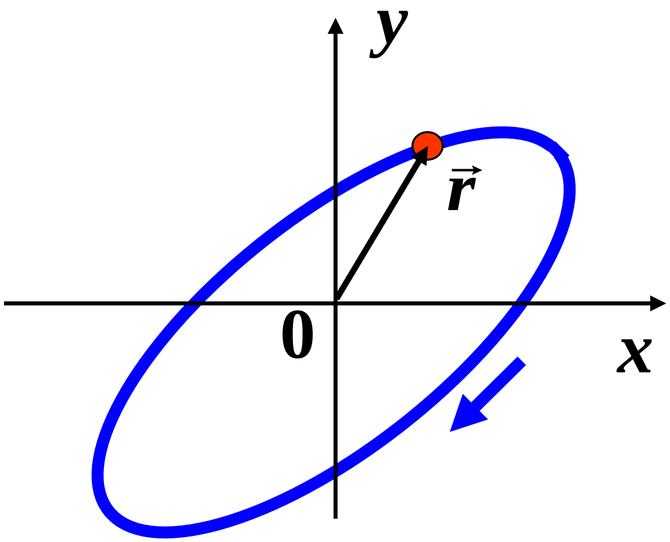
$$(x/A_1)^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{A_2}y + \frac{1}{A_1}x)^2 = 1$$

解：（1）几何作图法

$$x = A_1\cos\omega t \quad y = A_2\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$$



$$\boxed{\begin{aligned} x &= A_1\cos\omega t \\ y &= A_2\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}}$$



（2）求质点在任一位置所受的力

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$= m\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{F} = m\{[-A_1\omega^2\cos\omega t]\vec{i} + [-A_2\omega^2\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})]\vec{j}\}$$

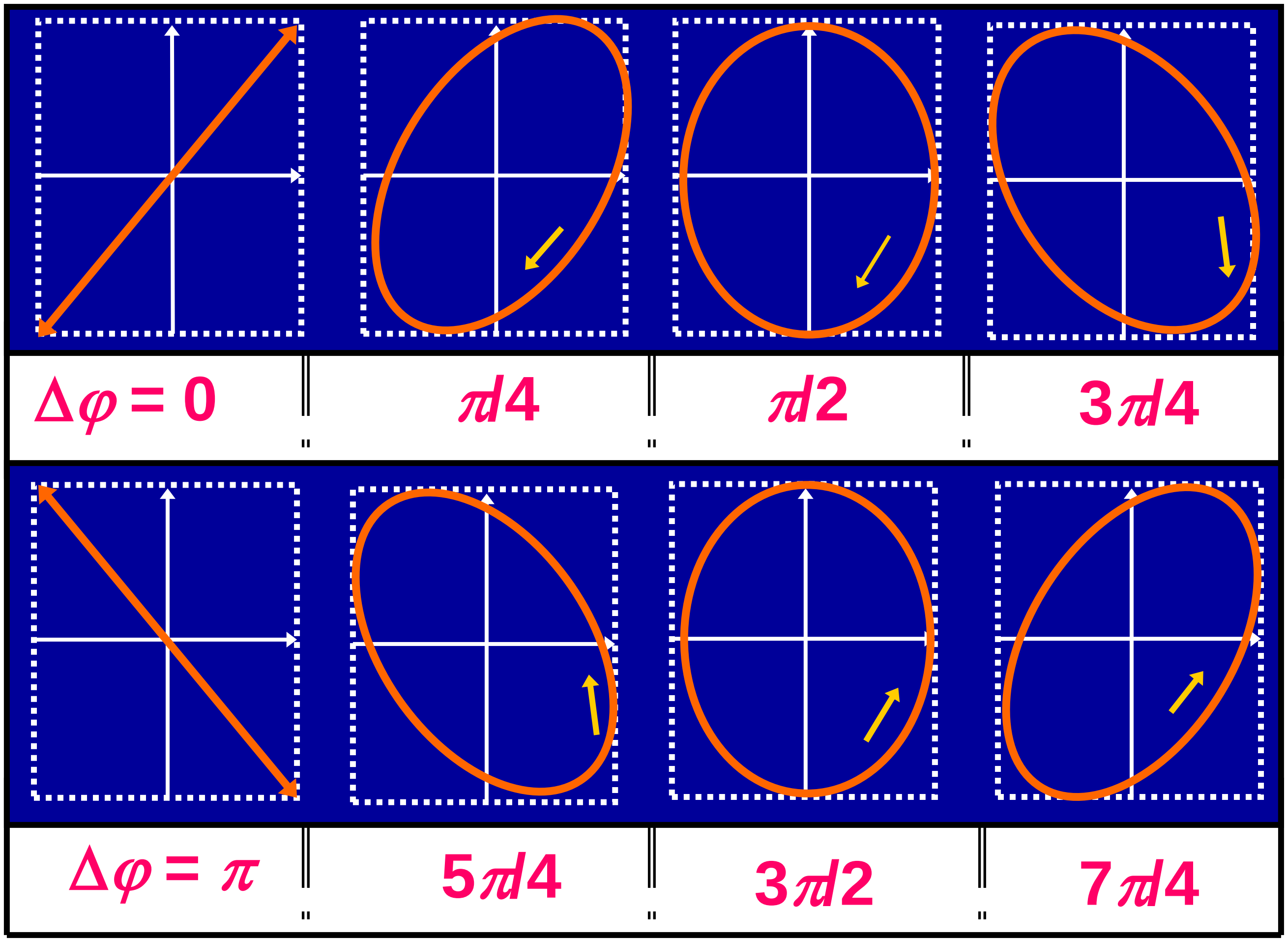
$$= -m\omega^2\{A_1\cos\omega t\,\vec{i} + A_2\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\vec{j}\}$$

$$= -m\omega^2(\,x\vec{i} + y\vec{j}\,)$$

$$= -m\omega^2\vec{r}$$

小结：

$\Delta\varphi$ 为任意值时，合振动的轨迹为一般椭圆



四、振动方向垂直、不同频率的谐振动的合成

设两振动为： $x = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ $y = A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

一般情况很复杂，下面介绍两种简单情况：

1） 两频率相差很小

$$\Delta\phi=(\omega_2 t+\varphi_2)-(\omega_1 t+\varphi_1)=(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)$$

$\Delta\phi$ 随 $(\omega_2-\omega_1)t$ 不断地变化，

$\Delta\phi$ 将从 $0 \rightarrow \pi/2 \rightarrow \pi \rightarrow 3\pi/2 \rightarrow 2\pi$

合振动的轨迹，将依次从直线→斜椭圆→正椭圆→斜椭圆→直线→...不停地变化下去

2） 两频率成简单的整数比

合成运动轨迹为闭合曲线——其运动也有周期性

频率之比 = 切点数的反比 即： $\dfrac{\omega_x}{\omega_y}=\dfrac{N_y}{N_x}$

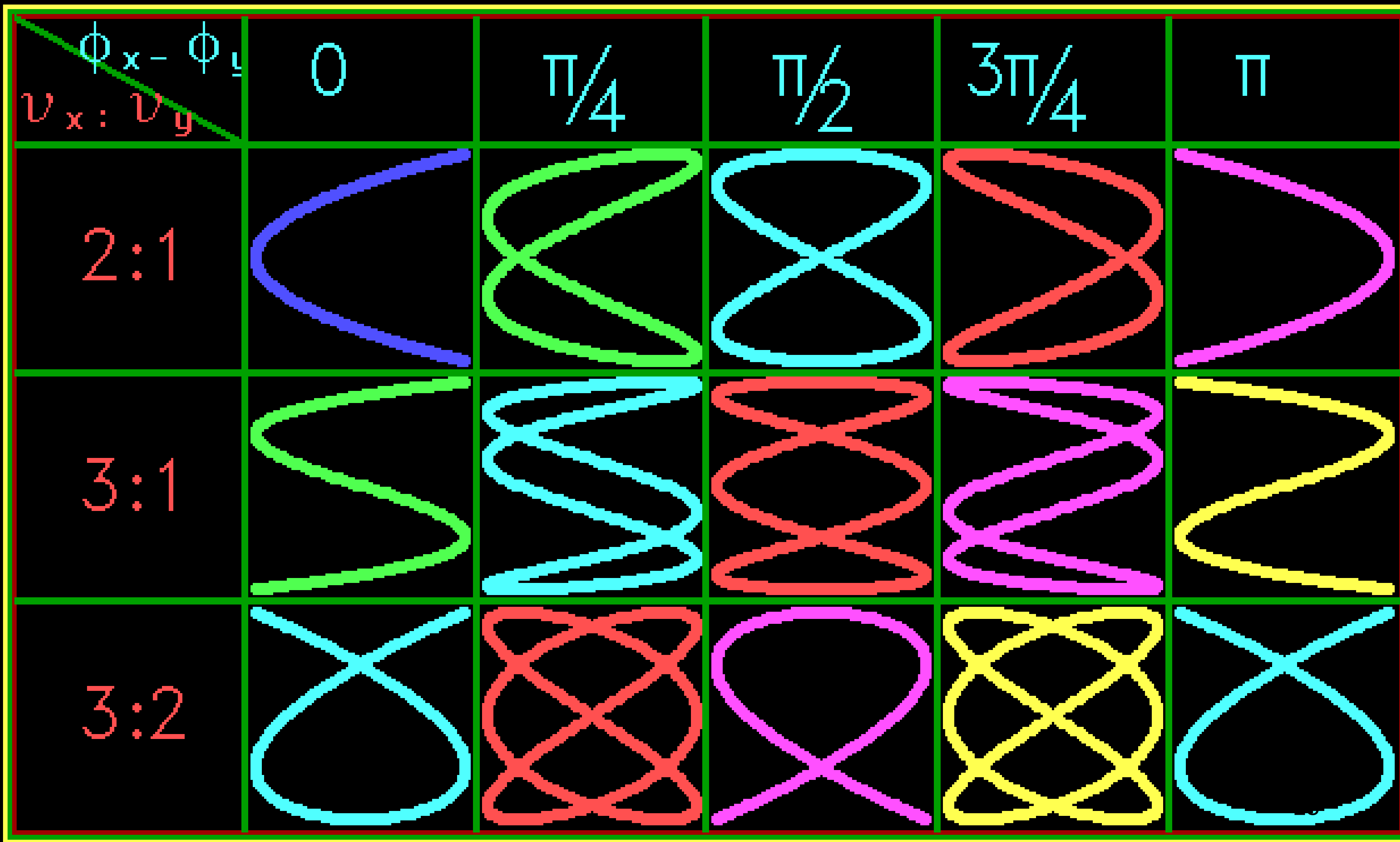
不同频率之比的曲线构成——李萨如图

$$\frac{N_x}{N_y} = \frac{\omega_y}{\omega_x}$$

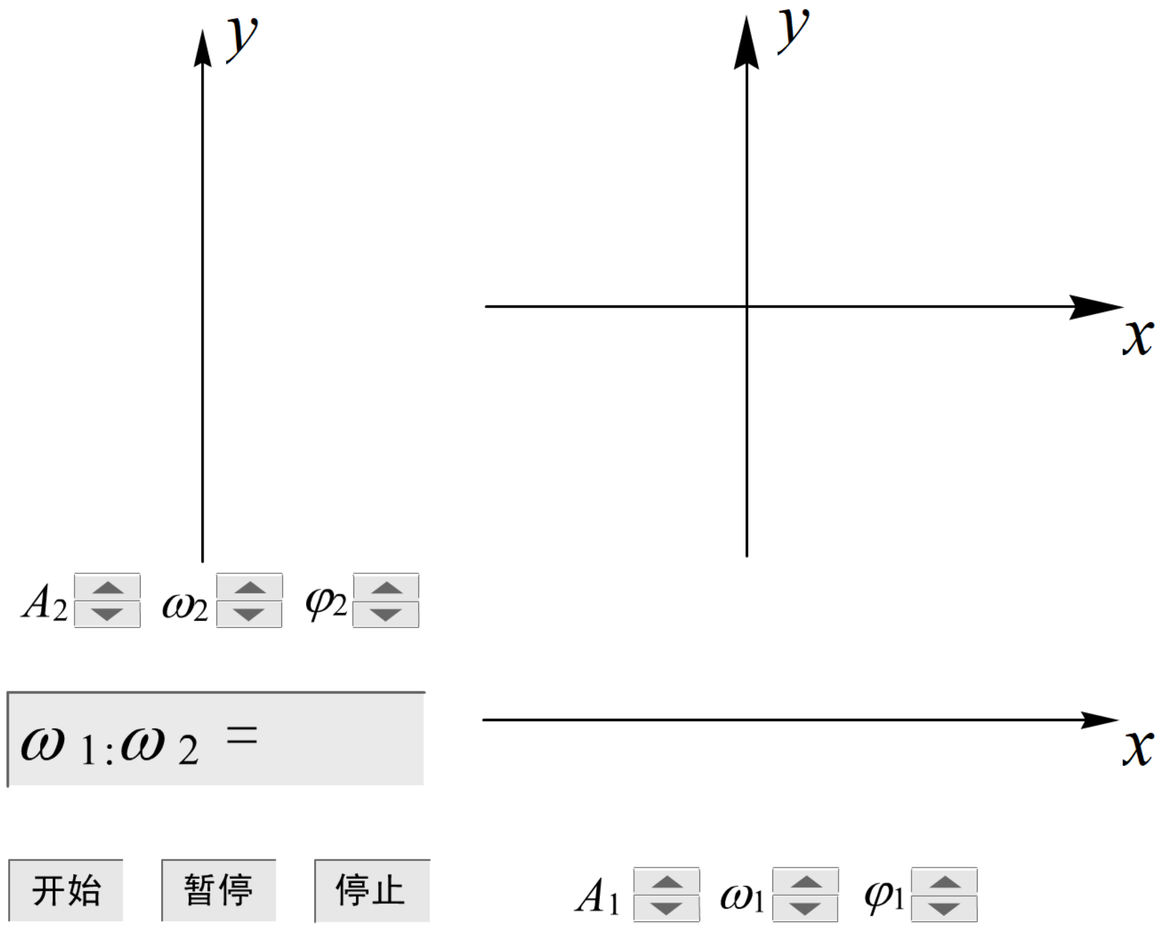
利萨如图形

由切点数之比及已知频率可测未知频率。

利萨如图形的一些例子：

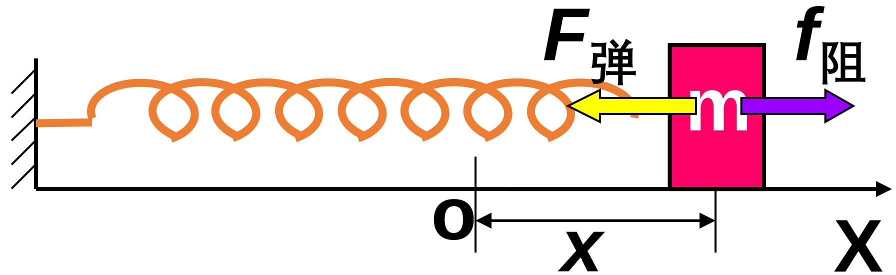


李萨如图



第5节 阻尼振动和受迫振动

1. 谐振子的阻尼振动



1）动力学方程

$$F_{弹}=-kx \qquad f_{阻}=-\gamma v=-\gamma\frac{dx}{dt} \qquad F=F_{弹}+f_{阻}$$

根据牛顿定律：$F=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 则：$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx-\gamma\dfrac{dx}{dt}$

即：$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$ ——动力学方程

其中：$\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$ $\qquad 2\beta=\dfrac{\gamma}{m}$

β——阻尼系数

2）运动学特征

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

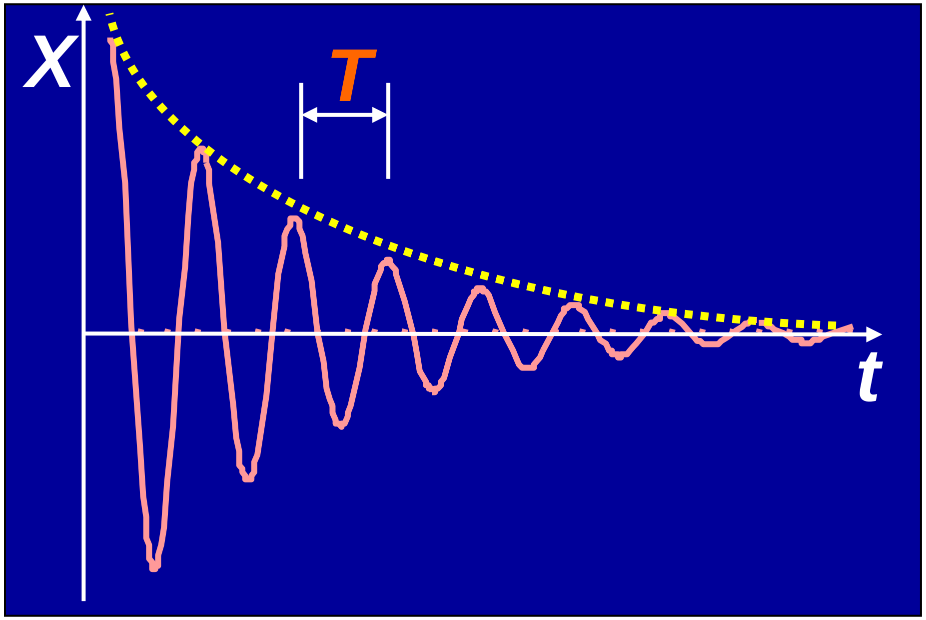
(1) 阻尼较小时，$\beta<\omega_0$，称为**弱阻尼**

解：$\boxed{x(t)=A_0 e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t+\varphi_0)}$

特点

振幅： $A=A_0 e^{-\beta t}$ **频率：** $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$

*振幅随 t 按指数衰减



经一周期两振幅之比：

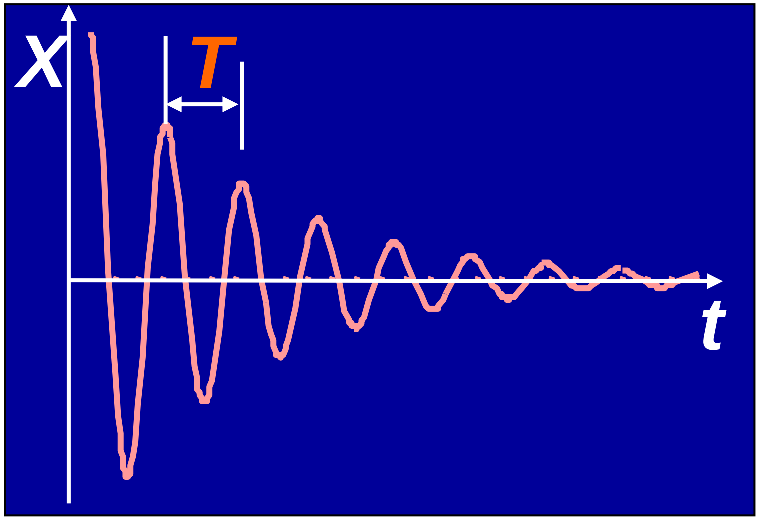
$$\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}}=e^{\beta T}=\lambda$$

—— **阻尼减缩因子**

特点

*振幅随 t 按指数衰减;

**是准周期运动;



位相改变2π所经历的时间~~周期

出现两次极大的时间间隔：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0-\beta^2}}>\dfrac{2\pi}{\omega_0}=T_0$

周期变长，振动变慢！

*** 机械能E 随振幅A的减小而衰减 $E\propto A^2$

(2) 阻尼较大时$\beta > \omega_0$，称为过阻尼

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

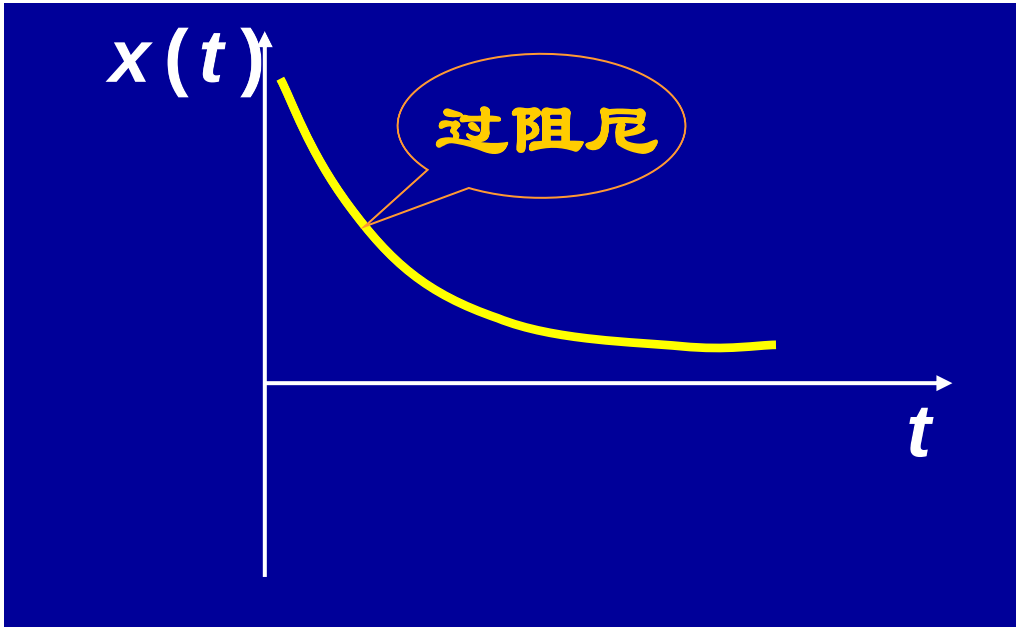
解：
$$x(t) = C_1 e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$$

其中C_1、C_2是积分常数，由初始条件来决定。

振动特点

*非周期运动

*无振动发生



运动一开始，便逐渐回到平衡位置。

(3) $\beta = \omega_0$，称为临界阻尼

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

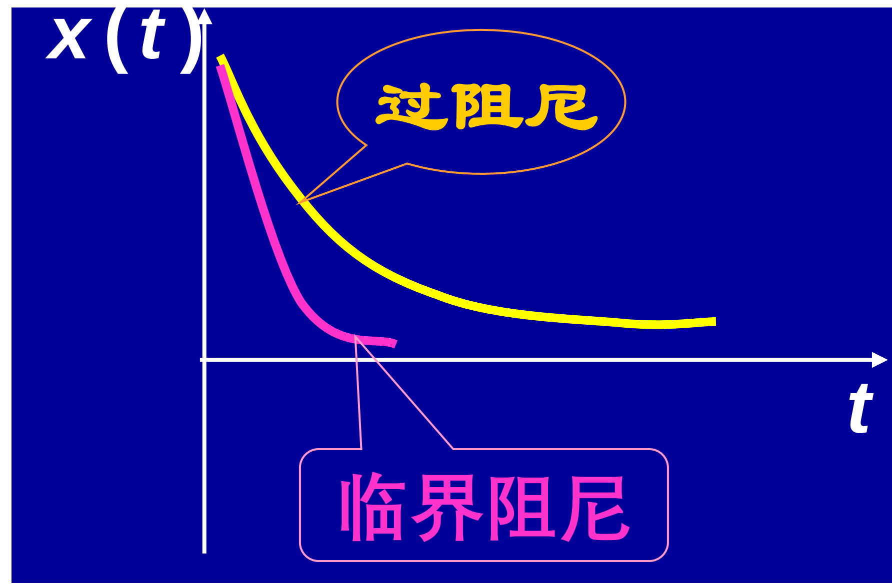
解： $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$

C_1、C_2由初始条件决定

振动特点

*非周期运动

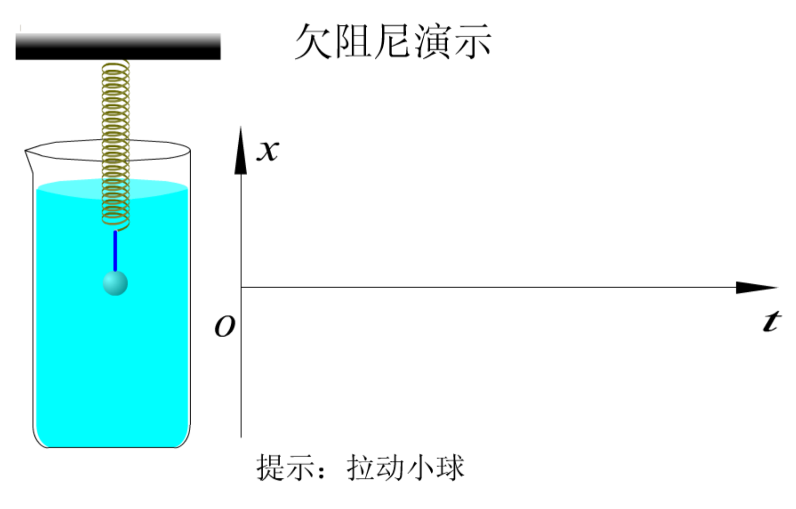
*无振动发生

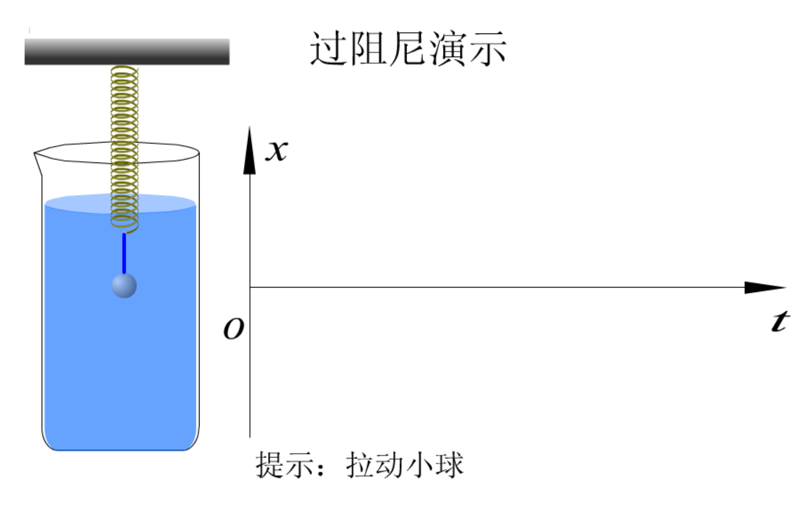


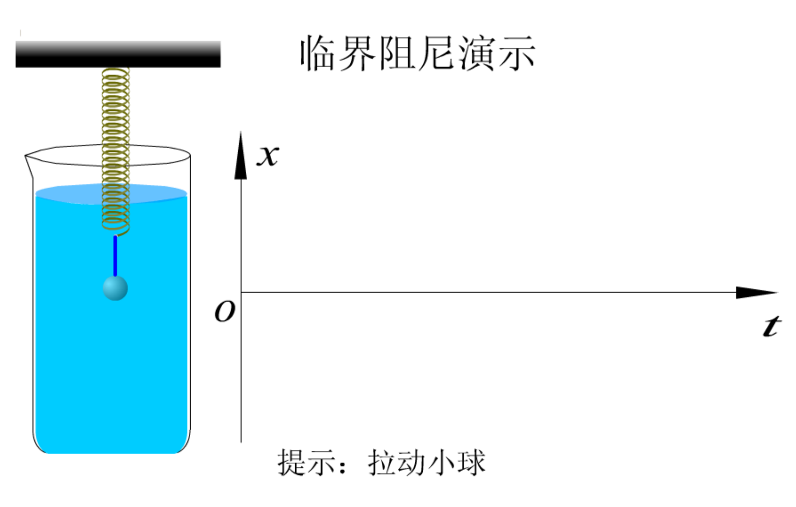
但很快回到平衡位置。

是从有周期性因子 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ 到无周期性的临界点。

动画演示







$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0-\beta^2}}$$