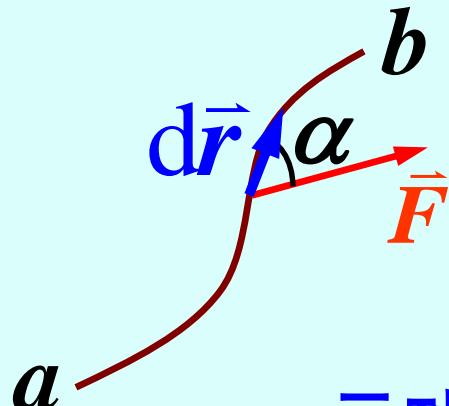


# 第8节 功 功率

## 一、功的定义

力在位移方向上的分量与该位移大小的乘积。



设质点在力  $\vec{F}$  的作用下发生无限小位移  $d\vec{r}$ , 则功 (元功) 为:

$$dA = F \cos \alpha \cdot |d\vec{r}| = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

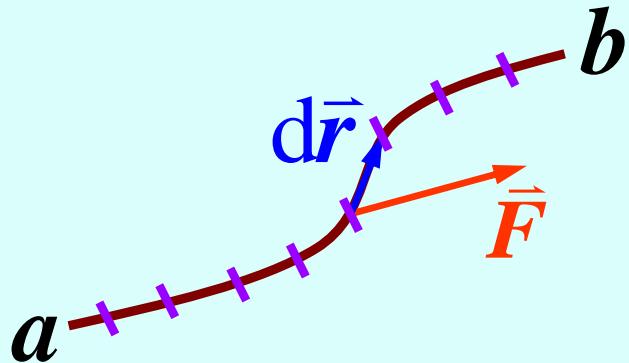
**元功**等于质点所受的力和它的元位移的**点积**。

功为**标量**, 它没有方向, 但有正负:

- 1、当  $0 \leq \alpha < \pi/2$  时,  $dA > 0$ , 力对质点做正功;
- 2、当  $\pi/2 < \alpha \leq \pi$  时,  $dA < 0$ , 力对质点做负功;
- 3、当  $\alpha = \pi/2$  时, 力对质点不做功。

## 二、变力的功

等于力沿轨道的线积分，与过程有关。

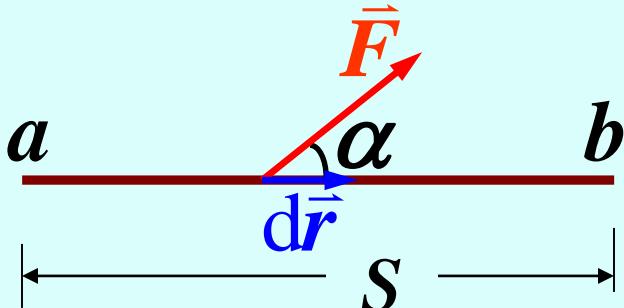


$$A_{ab} = \int_L^b dA = \int_L^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

功为过程量。

功的计算与参考系有关。

## 三、恒力沿直线做功



$$\begin{aligned} A_{ab} &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F |d\vec{r}| \cos \alpha \\ &= FS \cos \alpha \end{aligned}$$

## 四、几个力的功

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \dots) \cdot d\vec{r} \\ &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots \end{aligned}$$

五、功的单位：焦耳 (J)。1 J = 1 N m。



六、功率：为衡量力做功的快慢程度的物理量



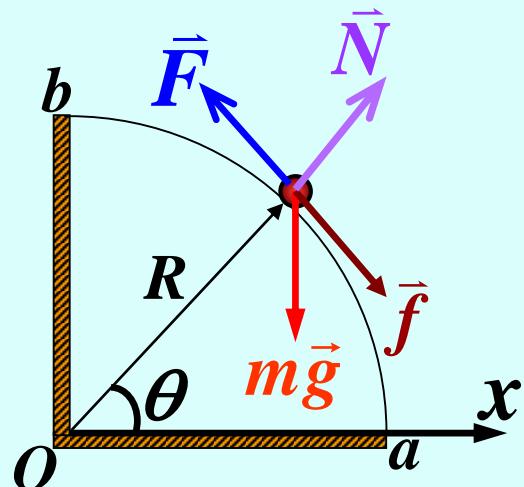
$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F v \cos \alpha$$

功率愈大，做同样的功所花费的时间就愈少，做功的效率也愈高。

功率的单位为瓦特 (1 W = 1 J/s)。

**例1.** 一细绳将质量为 $m$ 的物体沿半径为 $R$ 的 $1/4$ 圆柱面由 $a$ 点缓慢移动到 $b$ 点，摩擦系数为 $\mu$ ，求拉力所做的功。

**解：**作示力图。



由于缓慢移动，物体受力平衡，有：

$$\text{摩擦力大小: } f = mg\mu \sin \theta$$

拉力大小:

$$F = mg\mu \sin \theta + mg \cos \theta$$

$$\text{拉力的元功: } dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = FRd\theta$$

物体由 $a$ 点移动到 $b$ 点的过程中拉力做功

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg(\mu \sin \theta + \cos \theta) \cdot R d\theta = mgR(\mu + 1)$$

## 第9节 动能 动能定理

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

设质点在合外力作用下由初始位置  $a$  经某一路径到达终了位置  $b$ 。

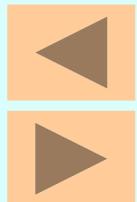
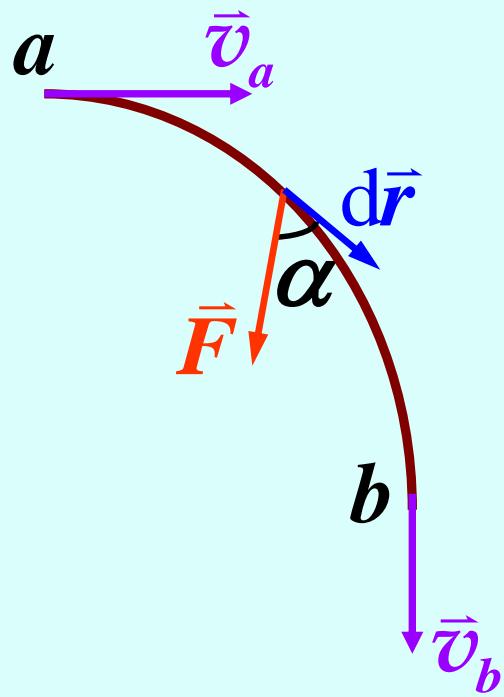
合外力的元功为:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \alpha \cdot |d\vec{r}|$$

切向运动方程:

$$F_t = F \cos \alpha = m a_t = m \frac{dv}{dt}$$

$$dA = m \frac{dv}{dt} \cdot |d\vec{r}| = m v dv$$



合外力做的总功为:  $A_{ab} = \int_{v_a}^{v_b} mv dv$

$$dA = mv dv$$

$$A_{ab} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$



定义质点的**动能**:  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  动能为状态量。

质点的**动能定理**:

$$A_{ab} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k$$



**力的空间累积效应**: 引起了质点动能的改变。

动能的单位与功的单位相同, 为 J。

动能定理适用于惯性系, 非惯性系应考虑惯性力的功。

**例2.** 一链条总长为 $l$ , 质量为 $m$ 。放在桌面上并使其下垂, 下垂的长度为 $a$ , 设链条与桌面的滑动摩擦系数为 $\mu$ , 令链条从静止开始运动, 则: (1) 到链条离开桌面的过程中, 摩擦力对链条做了多少功? (2) 链条离开桌面时的速率是多少?

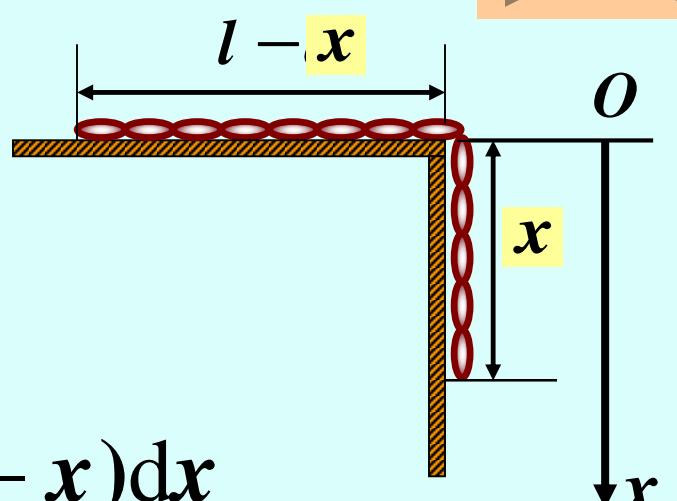


**解:** 建坐标系如图

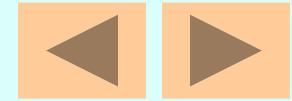
$$f = \mu \frac{m}{l} (l - x)g$$

$$A_f = \int_a^l \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^l -\frac{\mu mg}{l} (l - x) dx$$

$$= - \left[ \frac{\mu mg}{l} \left( lx - \frac{1}{2} x^2 \right) \right]_a^l = - \frac{\mu mg}{2l} (l - a)^2$$



## (2)对链条应用动能定理：



$$A = A_G + A_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\because v_0 = 0 \quad \therefore A_G + A_f = \frac{1}{2}mv^2$$

$$A_G = \int_a^l \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_a^l \frac{mg}{l} x dx = \frac{mg(l^2 - a^2)}{2l}$$

$$\text{前已得出: } A_f = -\frac{\mu mg(l-a)^2}{2l}$$

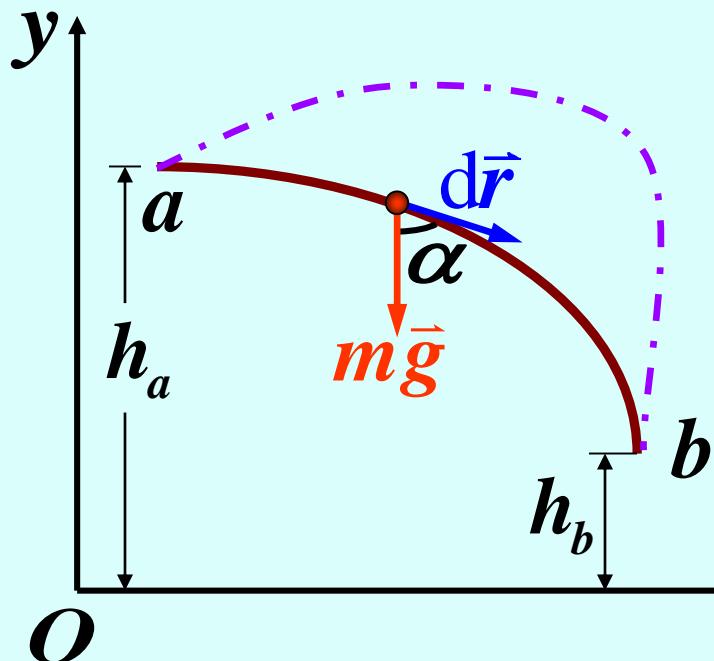
$$\therefore \frac{mg(l^2 - a^2)}{2l} - \frac{\mu mg(l-a)^2}{2l} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}} \left[ (l^2 - a^2) - \mu(l-a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

# 第10节 保守力 势能

按力做功的特点可把力分为**保守力**和**非保守力**。

## 一、几种常见的保守力的功

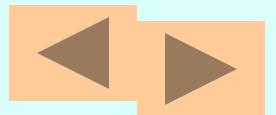


### 1. 重力的功：

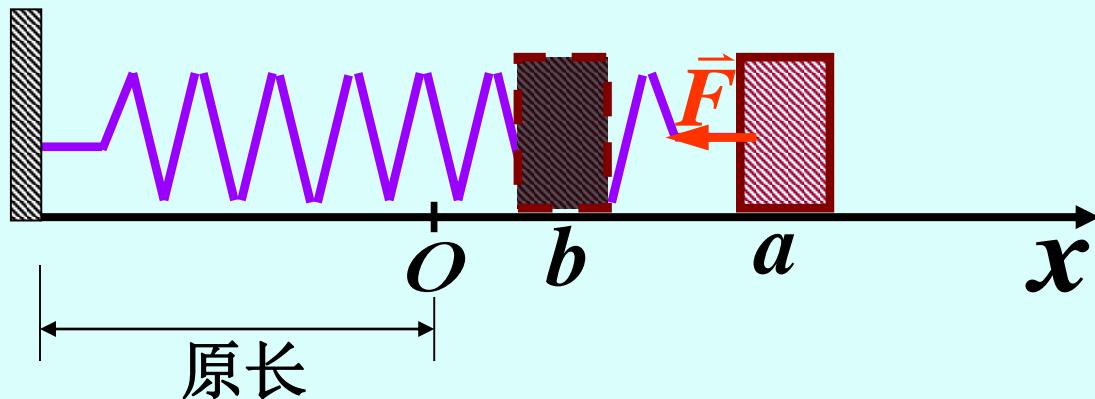
$$\begin{aligned}
 A_{ab} &= \int_a^b m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_a^b mg |d\vec{r}| \cos\alpha \\
 &= \int_{h_a}^{h_b} -mg dy \\
 &= -(mgh_b - mgh_a)
 \end{aligned}$$

若改变质点经过的路径，但不改变始末位置，所得结果不变。

**重力的功与路径无关！**



## 2. 弹力的功:



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

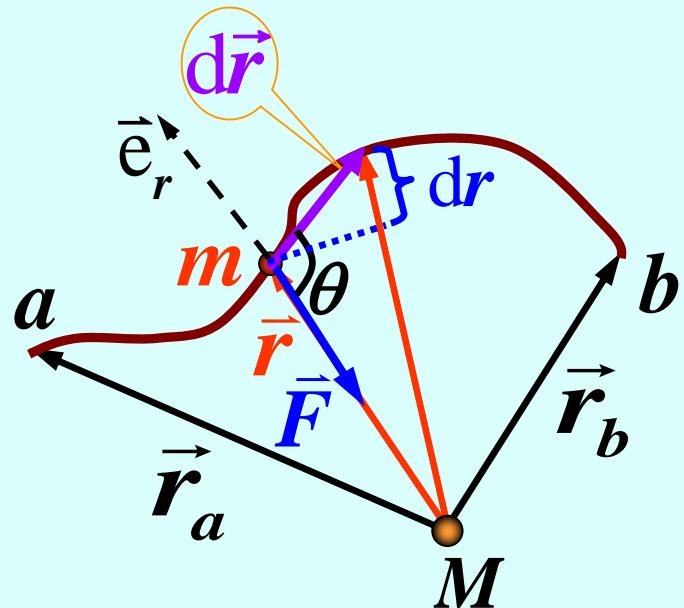
$$d\vec{r} = dx\vec{i}$$

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} -kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

若质点由位置  $a$  到位置  $b$  是沿另外一种路径，则弹性力的功仍与上式相同。

弹力的功与路径无关！

### 3. 万有引力的功：



$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$$

元功：

$$\begin{aligned} dA &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} \\ &= -G \frac{Mm}{r^2} |\vec{dr}| \cos(\pi - \theta) \\ &= -G \frac{Mm}{r^2} dr \end{aligned}$$

$$A_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} -G \frac{Mm}{r^2} dr = - \left[ \left( -G \frac{Mm}{r_b} \right) - \left( -G \frac{Mm}{r_a} \right) \right]$$

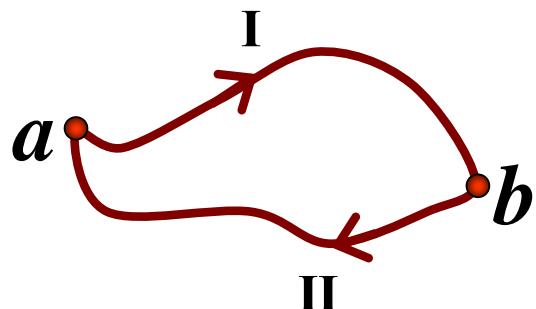
结果只取决于物体的始、末位置。

万有引力的功与路径无关！

# 重力、弹力、万有引力是保守力。

一切有心力都是保守力，有保守力作用的场称为保守场。

## 4. 保守力做功与路径无关的数学表达式



当质点在保守力的作用下沿闭合路径绕行一周：

$$\int_{aI}^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{aII}^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{bII}^a \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{aI}^b \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{bII}^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

保守力所做的功为：

即：  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

保守力沿任一闭合路径的功为零，即保守力的环流等于零。



## 二、势能

存在一个由质点的位置决定的函数——**势能函数**  
它说明质点在保守力场中每一位置都储存着一种能  
量——**势能**。

定义**保守力所做的功等于势能增量的负值**：

$$A_{ab} = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_p$$

为**势能差**的定义。

要确定质点在任一给定位置的势能值，应选某一参  
考位置，规定质点在参考位置时的势能为零，以它  
作为**势能零点**，则任意位置的势能就确定了。

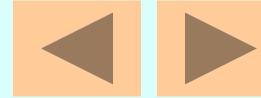
如选位置  $b$  为势能零点，即  $E_{pb} = 0$ ，则：

$$E_{pa} = A_{ab} = \int_a^{\text{零点}} \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{r}$$



$$E_{\text{pa}} = \int_a^{\text{零点}} \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{r}$$

讨论:



1. 势能是标量，为状态函数。
2. 势能的单位与功的单位相同，也是焦耳 (J)。
3. 只要有保守力，就可引入相应的势能。非保守力不能引入势能。
4. 势能仅有相对意义，所以必须指出零势能参考点。**两点间的势能差是绝对的。**
5. 势能是属于具有保守力相互作用的质点系统的。
6. 常用的几种势能函数：



## 1) 重力势能:

选地面为重力势能零值面，则质点在任一距地面高度  $h$  处的重力势能为：

$$E_p = mgh$$

## 2) 弹性势能:

选弹簧无形变时的长度 ( $x=0$ ) 处弹性势能为零，弹簧具有任一伸长  $x$  时的弹性势能为：

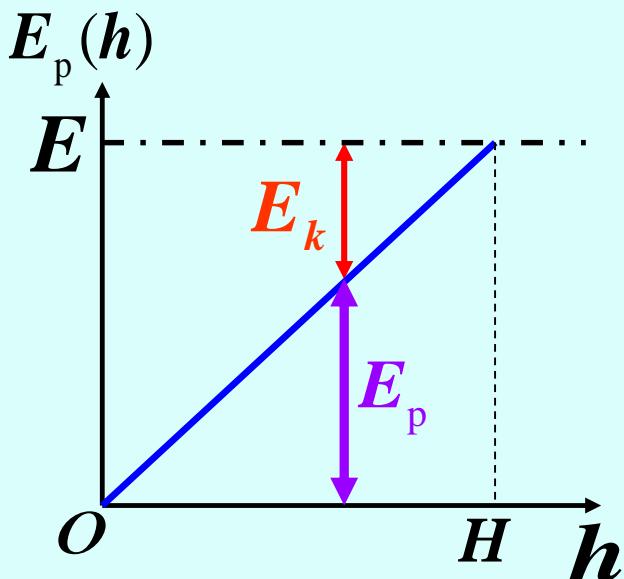
$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

## 3) 万有引力势能:

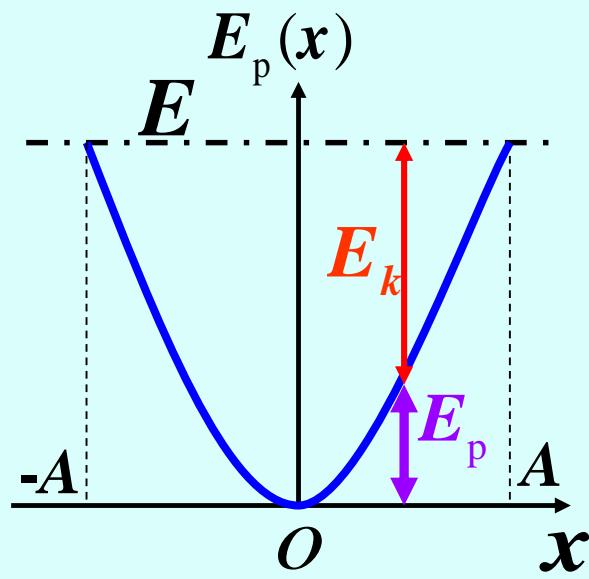
选距引力中心无限远处势能为零，质点距引力中心任一距离  $r$  时的万有引力势能为：

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}$$

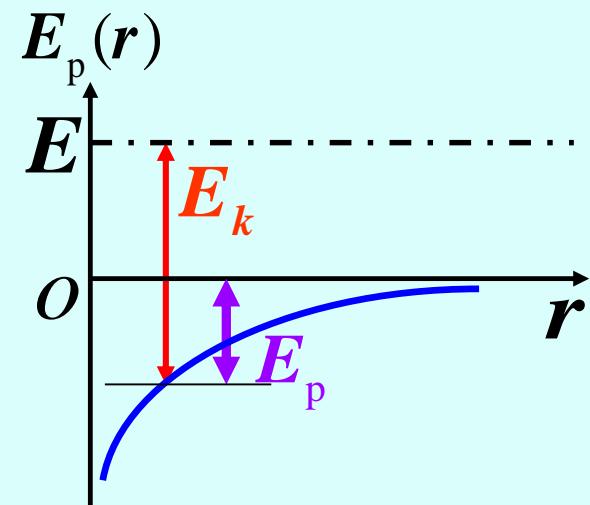
### 三、势能曲线：势能随位置变化的曲线。



重力势能曲线



弹性势能曲线



万有引力势能曲线

由势能曲线可以确定质点的运动范围、  
能量的转换关系。

#### 四、由势能函数求保守力：

$$E_{\text{pa}} = \int_a^{\text{零点}} \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{r}$$

$$F_l = -\frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial l}, \quad l = x, y, z$$

保守力沿某坐标轴的分量等于势能对此坐标轴的导数的负值。



# 第11节 功能原理 机械能守恒定律

## 一、质点系的动能定理

$$A_{ab} = E_{kb} - E_{ka}$$

对质点系中的第*i*个质点，质点的动能定理：

$$A_{i\text{外}} + A_{i\text{内}} = E_{k_{ib}} - E_{k_{ia}}$$



$$\sum_i A_{i\text{外}} + \sum_i A_{i\text{内}} = \sum_i E_{k_{ib}} - \sum_i E_{k_{ia}}$$

$\neq 0$

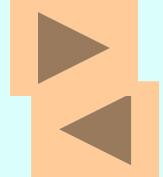
质点系的动能定理：

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_{k_b} - E_{k_a}$$

内力能改变系统的总动能，动能定理适用于惯性系，非但不能改变系统的总动量。惯性系应考虑惯性力的功。

## 二、功能原理

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_{k_b} - E_{k_a}$$



$$A_{\text{外}} + (A_{\text{保守内力}} + A_{\text{非保守内力}}) = E_{k_b} - E_{k_a}$$

因为:  $A_{\text{保守内力}} = -(E_{pb} - E_{pa})$

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保守内力}} = (E_k + E_p)_b - (E_k + E_p)_a$$

动能与势能之和  $E = E_k + E_p$  称为**机械能**。

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保守内力}} = E_b - E_a = \Delta E \quad \text{——功能原理}$$

质点系在运动过程中，其机械能的增量等于外力的功和非保守内力的功的总和。

功能原理适用于惯性系。

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保守内力}} = E_b - E_a = \Delta E$$

### 三、机械能守恒定律

若  $A_{\text{外}} + A_{\text{非保守内力}} = 0$ , 则有:  $E_b - E_a = 0$

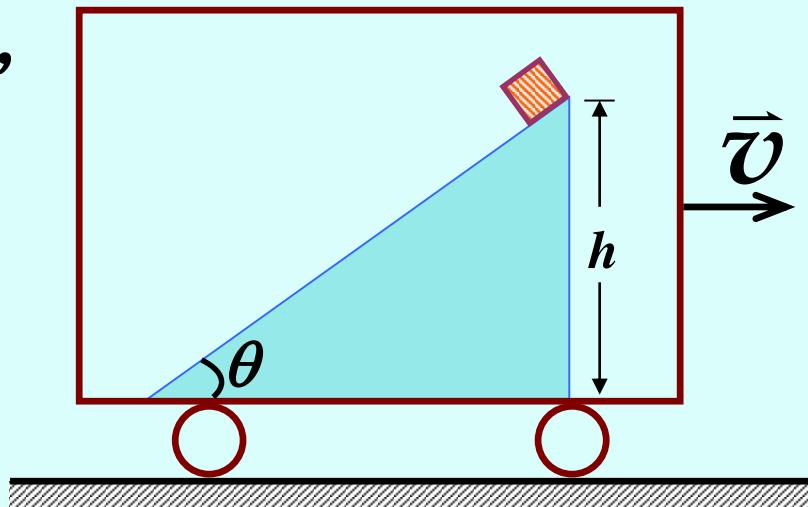
即:  $E = E_k + E_p = \text{恒量}$

当只有保守内力做功时, 质点系的总机械能保持恒定。

——质点系的机械能守恒定律。

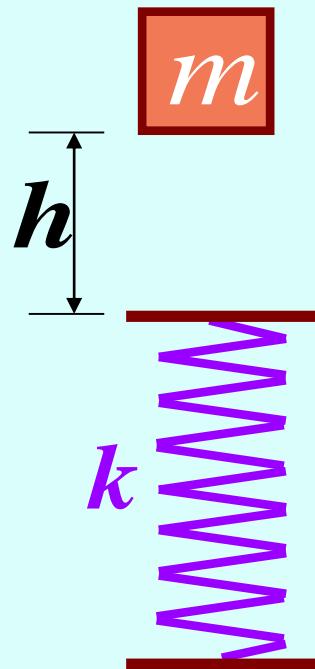
机械能守恒定律适用于惯性系,  
还与不同的惯性系有关。

车厢参考系中成立,  
地面参考系中不成立。



**例3.** 如图，物体从静止落向弹簧，求物体可能获得的最大动能。

**解：**设物体落到弹簧上时，弹簧被压缩 $x$ 。取物体、弹簧、地球为系统，系统不受外力，而内力为重力和弹簧的弹力，故系统机械能守恒。



$$mgh = -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + E_k$$

$$E_k = -\frac{1}{2}kx^2 + mg(x + h)$$

求极值：令： $\frac{dE_k}{dx} = 0 \rightarrow x = \frac{mg}{k}$

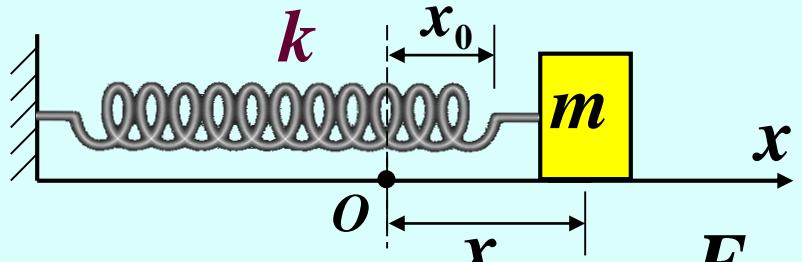
$$E_{k\max} = mgh + \frac{m^2g^2}{2k}$$



# 关于弹性势能

$$E_{pa} = \int_a^{\text{零点}} \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{r}$$

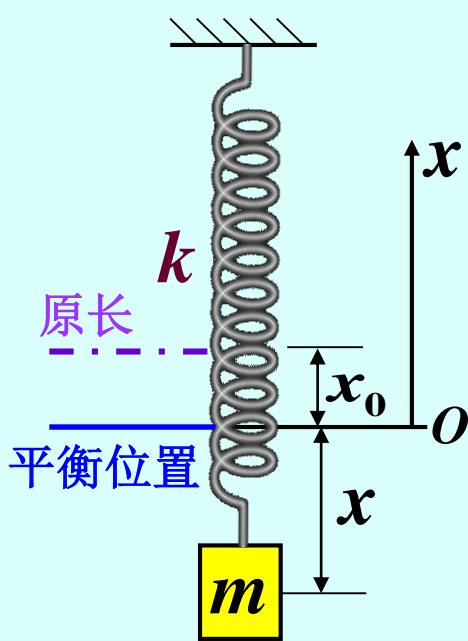
(1) 水平弹簧振子：



取  $x_0$  处为弹性势能零点：

$$E_{px} - E_{px_0} = (E_{px} - E_{po}) - (E_{px_0} - E_{po})$$

(2) 竖直弹簧振子：



取振子的平衡位置为势能零点：

$$\begin{aligned} E_{px} &= \int_x^0 k(-x + x_0)dx = \frac{1}{2}kx^2 - kx_0x \\ E_{px} - E_{po} &= (E_{px} - E_{px_0}) - (E_{po} - E_{px_0}) \\ &= \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \end{aligned}$$

## 习题2-60

解:  $G \frac{Mm}{R_0^2} = m \frac{v_0^2}{R_0}$  ..... (1)

飞船在火箭点燃前或后  
对星体的**角动量守恒**。

对近星体点或远星体点有:

$$mv_0 R_0 = mv r \quad (2)$$

飞船在椭圆轨道上运动**机械能守恒**。



$$\frac{1}{2}m(v_0^2 + v_r^2) - G \frac{Mm}{R_0} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} \dots\dots (3)$$

$$v_0^2 R_0^2 \left(\frac{1}{r}\right)^2 - 2v_0^2 R_0 \left(\frac{1}{r}\right) + (v_0^2 - v_r^2) = 0 \quad \frac{1}{r} \text{ 的两根即为所求}$$

