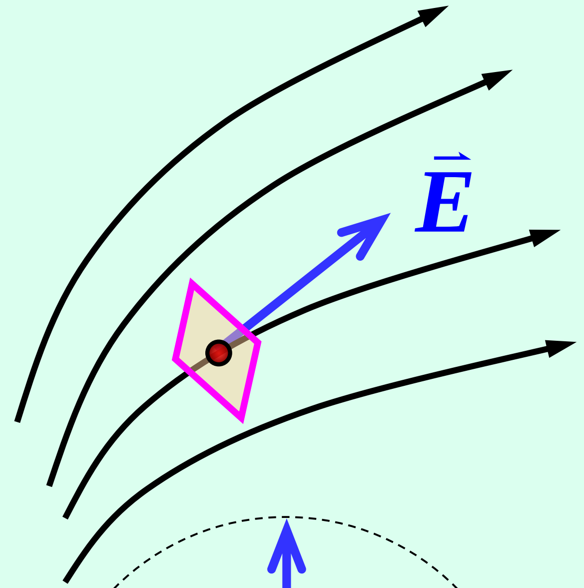
第3节　静电场的高斯定理

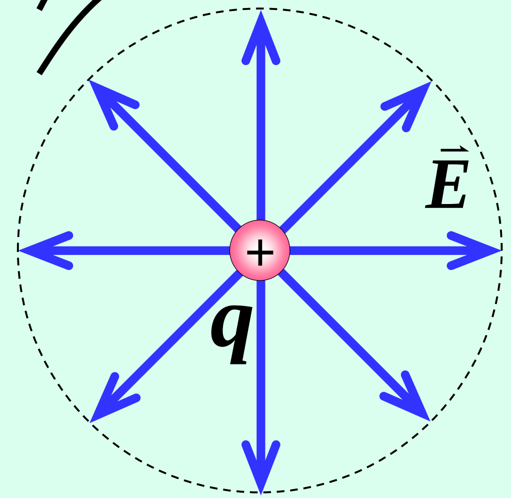
一、电场线

为形象地描述电场分布而在电场中引入的一系列假想曲线。



1. 定义

方向： 电场线上各点的切线方向表示电场中该点场强的方向；



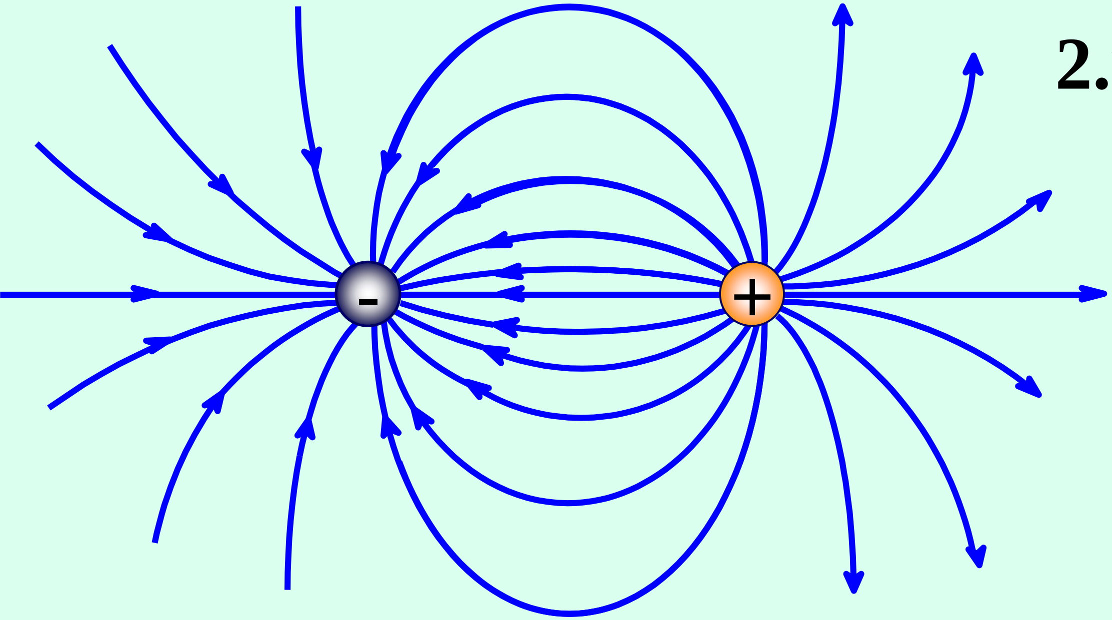
大小： 垂直于电场线的单位面积上的电场线的条数。

$$E = \boxed{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}}$$

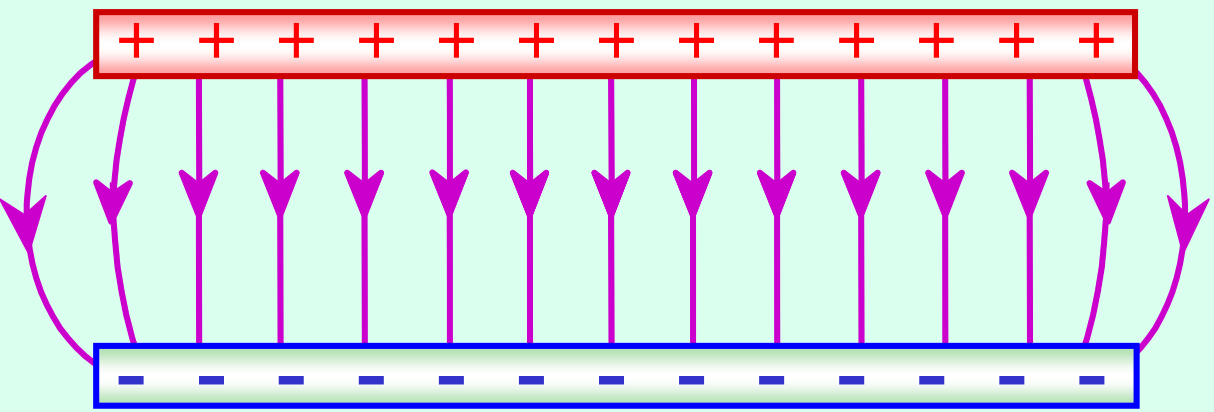
电场线数密度

$\mathrm{d}N$：穿过$\mathrm{d}S_{\perp}$的电场线条数

2.静电场电场线的性质：



①起始于正电荷，终止于负电荷，有头有尾，不会在无电荷处中断。



②电场线不会形成闭合曲线。

③在没有电荷的空间，任何两条电场线不会相交。

注意：引入电场线，只是为了形象地表示电场，电场实际上是分布于空间各点的。

二、电通量

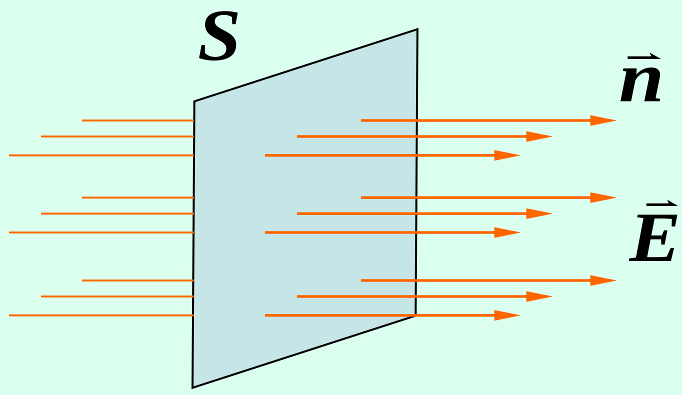
$$E = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}} \Rightarrow E = \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$

1. 定义：通过任一给定面的电场线的条数 Φ_E 。

2. 表述

1）$\vec{E}$为均匀场

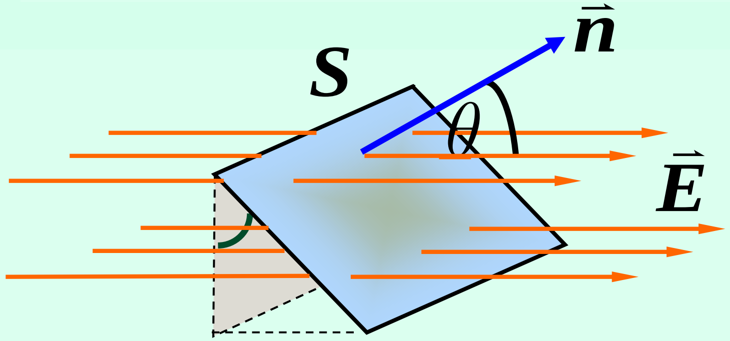
设场中有一平面S



①S面$\perp\vec{E}$ 或 其面法线 $\vec{n} \parallel \vec{E}$

$$\Phi_E = E \cdot S$$

②若$\vec{n}$与$\vec{E}$的方向成θ角

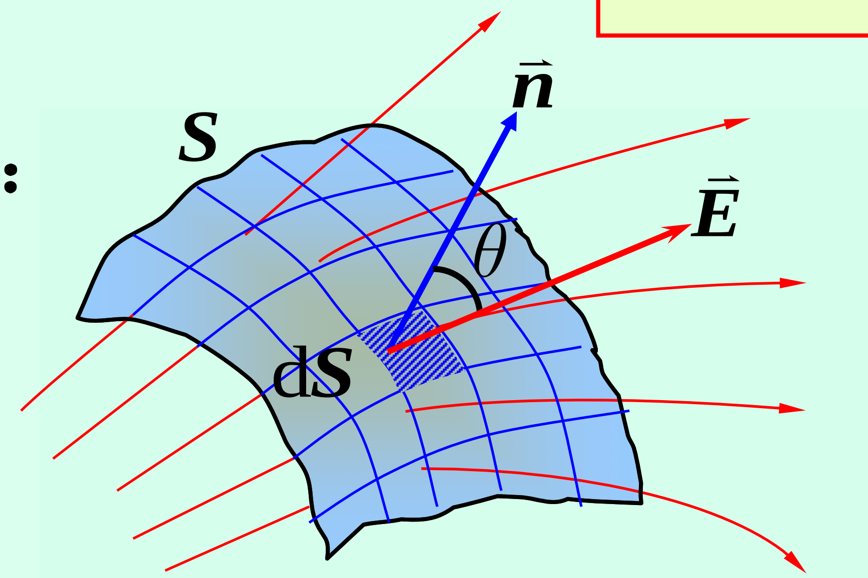


$$\Phi_E = E \cdot S_{\perp} = ES\cos\theta$$

均匀场中通过平面S的电通量：$\Phi_E = ES\cos\theta$

$$\boxed{E = \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}S_\perp}}$$

2）$\vec{E}$为非均匀场



取面积元dS，其上的电通量：

$$\mathrm{d}\Phi_E = E\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

定义**矢量面元：**

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{n}$$

大小等于面元的面积，方向取其法线方向。

dS上的电通量：$\mathrm{d}\Phi_E = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$　**标量**，有正、负！

曲面S上的总通量：$\Phi_E = \int \mathrm{d}\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

Φ_E的单位：$\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}$

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

当S为闭合曲面时：

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

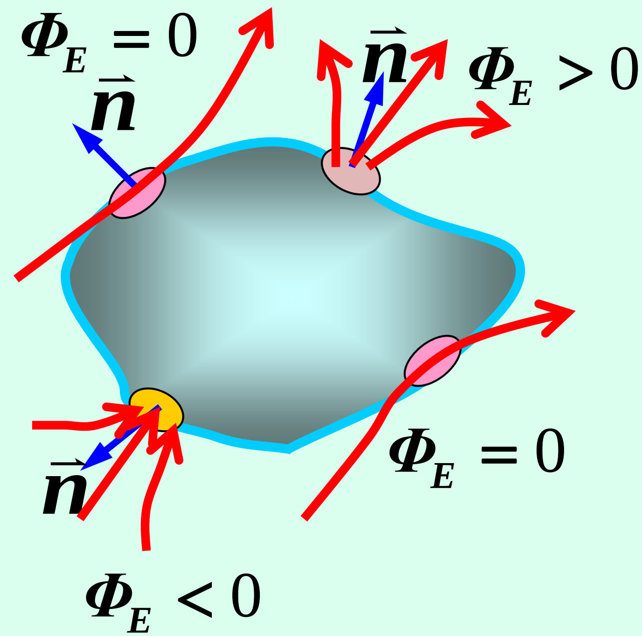
对闭合面的法线方向规定：

自内向外为法线的正方向。

① $\vec{E}$线从曲面内向外穿出：$\Phi_E > 0$

② $\vec{E}$线从曲面外向内穿入：$\Phi_E < 0$

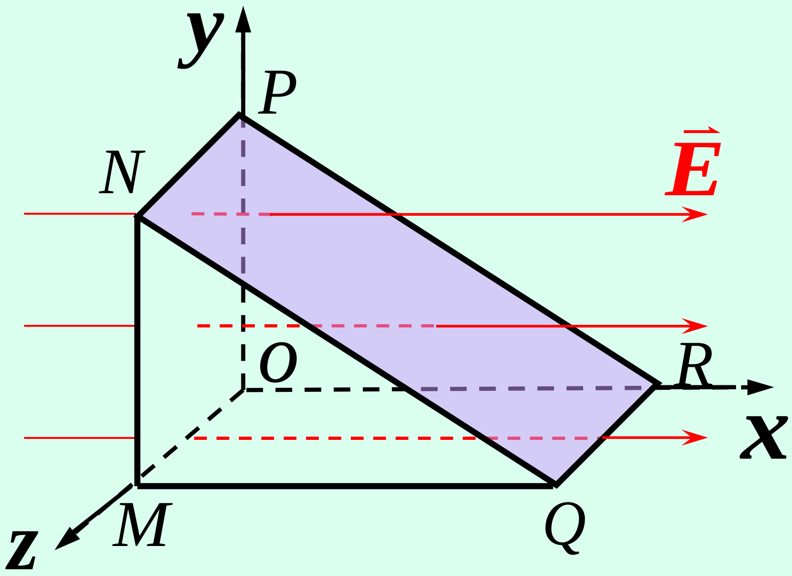
③ $\vec{E}$线与曲面相切：$\Phi_E = 0$



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

表示净穿出（或净穿入）闭合曲面的电场线的总条数。

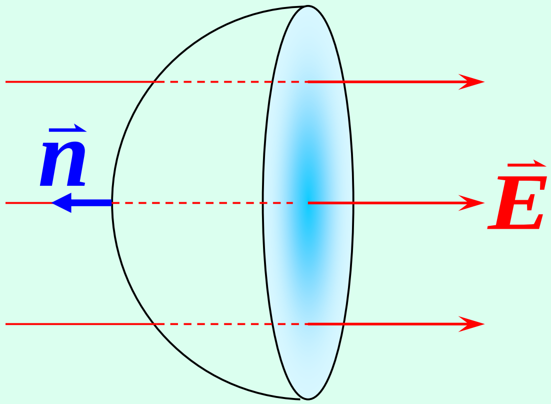
例1. 三棱柱体放置在如图所示的匀强电场中，求通过此三棱柱体的电场强度通量。



$$\Phi_E = 0$$

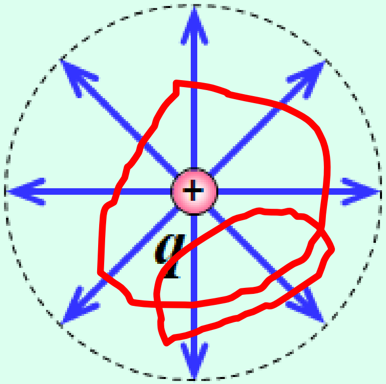
$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

例2. 半径为R的半球面放置在如图所示的匀强电场中，求通过此半球面的电场强度通量。



$$\Phi_E = -E\pi R^2$$

三、真空中静电场的高斯定理



——静电场的基本规律之一

1. 高斯定理

通过任意闭合曲面S的电通量 $\propto$ S面包围的电荷的代数和

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

$$\int_V \rho\,\mathrm{d}V$$

若S内的电荷是连续分布的，则

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i}$$ ——高斯定理

可根据库仑定律，并借助立体角的概念加以证明。

注意：① Φ_E 只决定于S 面包围的电荷，S 面外的电荷对Φ_E 无贡献。

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

② 定理中$\vec{E}$ 是闭合曲面S（高斯面）上的场强，它是由全部电荷（S内外）共同产生的合场强。

2. 高斯定理的意义：

给出了静电场的重要性质 ——静电场是**有源场**

正负电荷就是场源 $\begin{cases}\sum q_i>0, & \Phi_E>0, \text{ 电场线穿出}S \\ \sum q_i<0, & \Phi_E<0, \text{ 电场线穿入}S\end{cases}$

正电荷是电场的源头，负电荷是电场的尾闾。

对于静止电荷的电场，库仑定律和高斯定理等价。

对于运动电荷的电场，库仑定律不再正确，而高斯定理仍然有效。

高斯定理是关于电场的普遍定理。

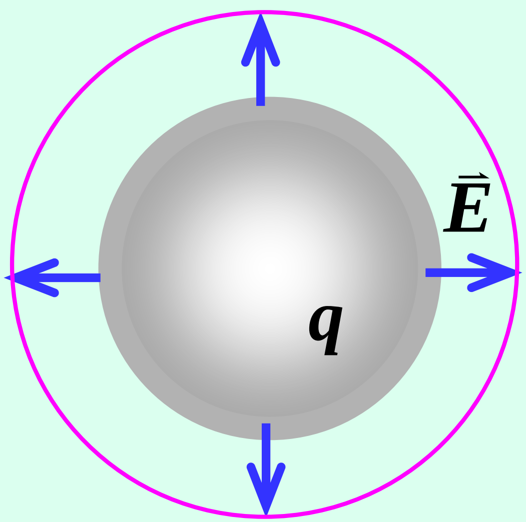
3. 利用高斯定理求静电场的分布

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

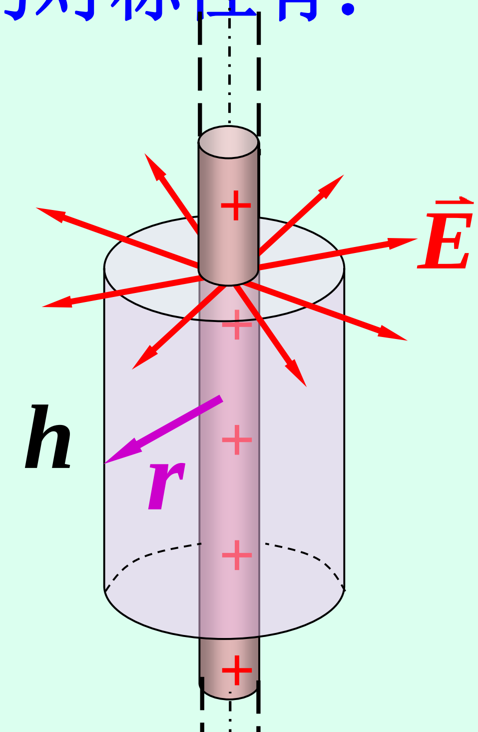
当场源电荷分布具有某种对称性时，应用高斯定理，选取适当的高斯面，使面积分中的$\vec{E}$能以标量形式提出来，即可求出场强。

$$\Phi_E = \oint_S E\cos\theta \, \mathrm{d}S$$

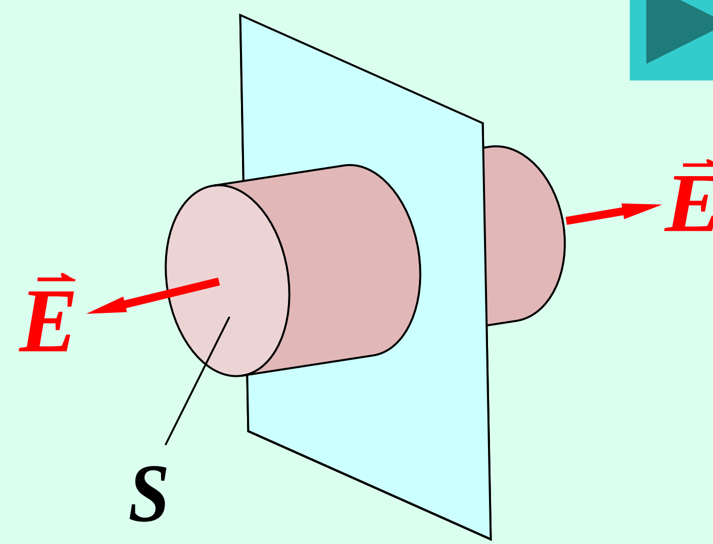
常见的电荷分布的对称性有：



球对称

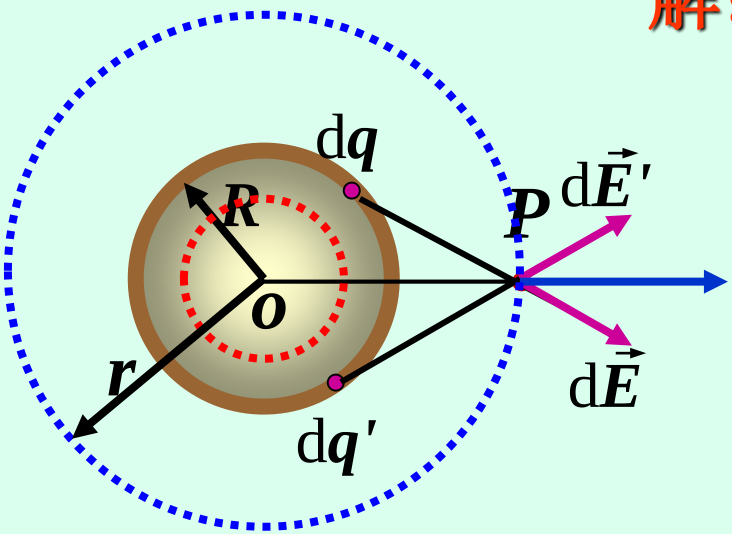


轴对称



面对称

例3. 求均匀带电球面的电场分布。设半径为R，电量为$+q$。



解： 取以r为半径的同心高斯球面S

$$r > R$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

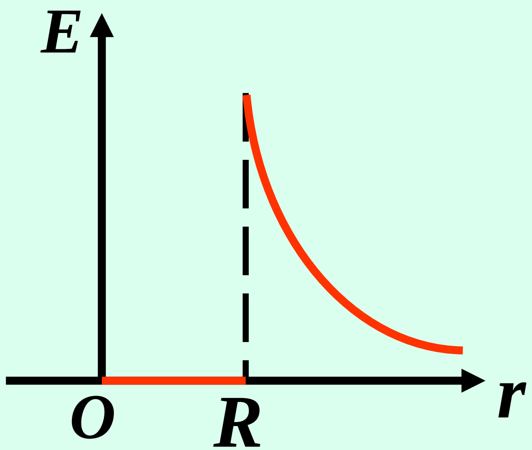
$$\boxed{\therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

方向沿$\vec{r}$

若$r < R$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i = 0 \qquad \therefore E = 0$$

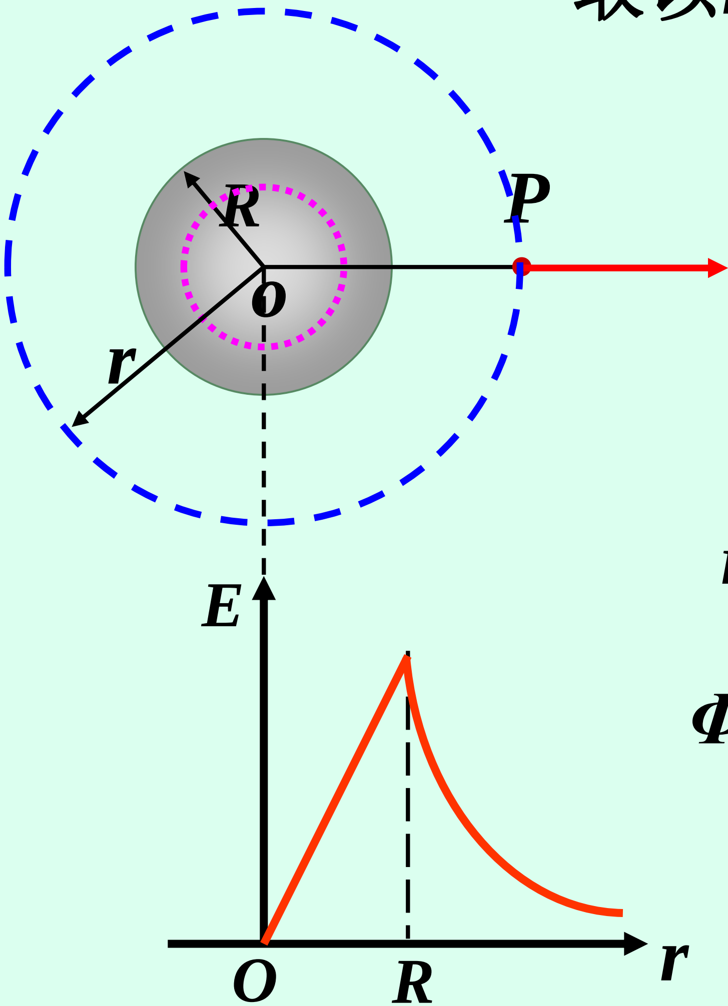


一般地，场强为空间的不连续函数

例4.求均匀带电球体的电场分布。设半径为R，电量为$+q$。

解：场强具有与场源同心的球对称性。

取以r为半径的同心球面S为高斯面



$r \geq R$ $\qquad \Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{方向沿} \vec{r}$$

$r \leq R$ $\qquad \Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \cdot dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

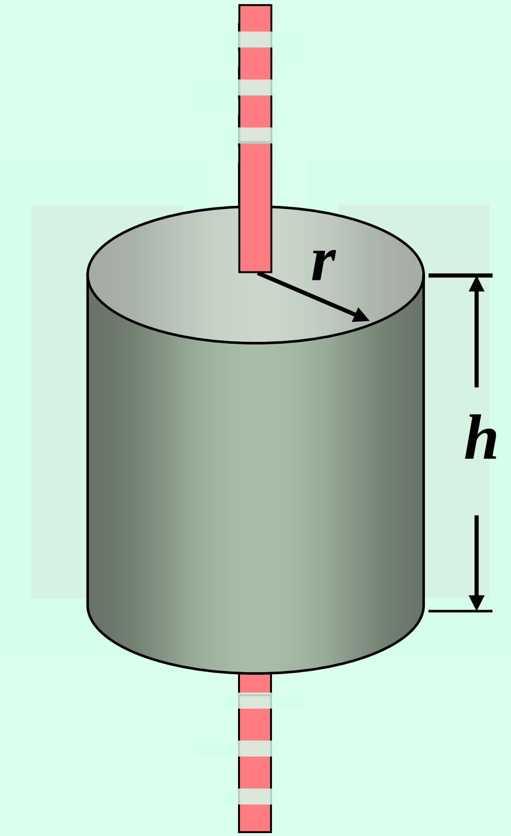
$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3} \qquad \boxed{\therefore E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$$

方向沿$\vec{r}$

可见点电荷的电场在 $r \to 0$ 时，$E \cancel{\to} \infty$

例5. 求均匀带电的无限长圆柱细棒的电场分布，已知线电荷密度λ。

解： 该电场分布具有轴对称性。



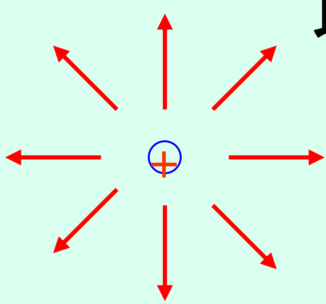
取以棒为轴，r为半径，高为h的圆柱形封闭面为高斯面 S(高斯柱面)。

通过该面的电通量：

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{侧面} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \overset{0}{\cancel{\int_{上底} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}} + \overset{0}{\cancel{\int_{下底} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}}$$

$$= \int_{侧面} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\int_{侧面} \mathrm{d}S = E\cdot 2\pi r\cdot h$$

此闭合面包含的电荷总量：$\sum\limits_{内} q_i = \lambda h$

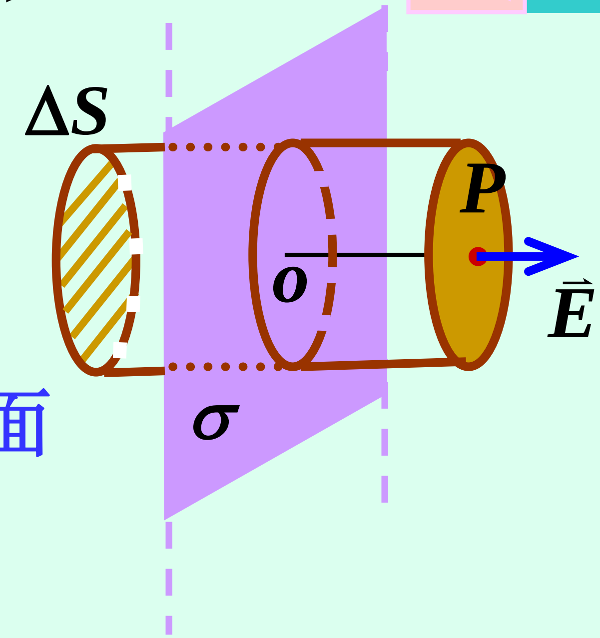


$$E\cdot 2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda h$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

方向？

例6. 求无限大均匀带电平板的场强分布。
设面电荷密度为σ 。



解：*P* 点的场强方向垂直于带电面。

离平面等远处的场强大小都相等。

选一轴垂直于带电平面的圆筒式封闭面作为高斯面 *S*，带电平面平分此圆筒，场点 *P*位于它的一个底面上。

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\substack{left\\face}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{\substack{right\\face}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2E\Delta S$$

$$2E\cancel{\Delta S} = \frac{\sigma\cancel{\Delta S}}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

方向垂直于带电平面。

当$\sigma>0$时，场强方向指离平面。
当$\sigma<0$时，场强方向指向平面。

静电场的高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$

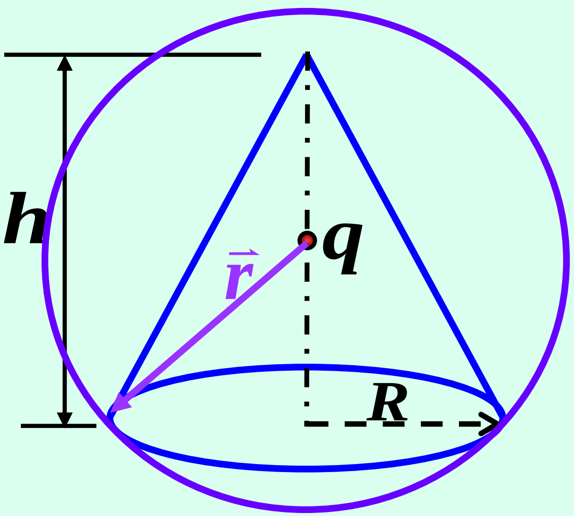
小结：

1. Φ_E 只仅由S 面内的电荷决定，而 $\vec{E}$ 是总场；

2. 是电场的普遍定理，表明静电场是**有源场**；

3. 为电通量的计算提供了一种方法；

例. 真空中有一高h，底面半径R 的圆锥体，在其顶点与底面中心连线的中点上有一点电荷q，求通过该圆锥体侧面的电通量。



$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{q}{\varepsilon_0}\cdot\frac{2\pi r(r-h/2)}{4\pi r^2}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i}$$

4. 高斯定理求解对称电场步骤：

（1）由电荷分布的对称性分析电场分布的对称性；

（2）由对称性取合适的高斯面；

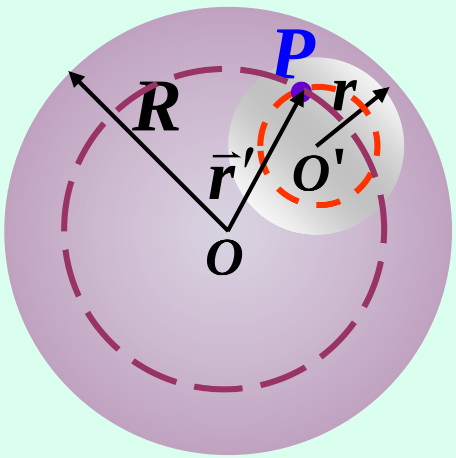
球对称——选与带电体同心的球面

轴对称——选与带电体同轴圆柱面

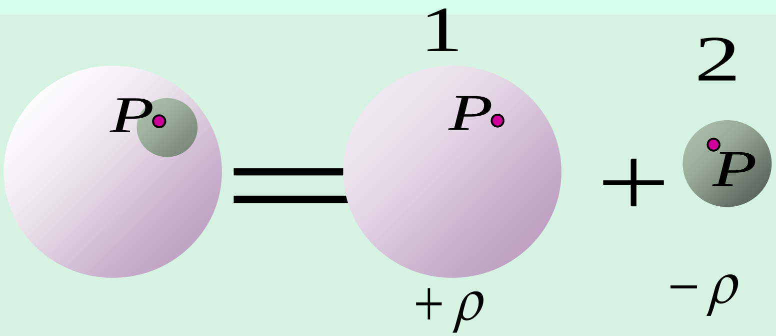
面对称——选轴与带电平面垂直，两底与平面等距的圆柱面

（3）由$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$求出场强的大小，说明其方向。

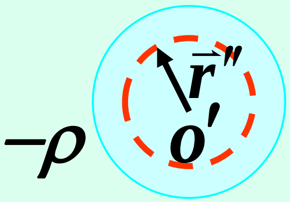
例7.一半径为R、电荷密度为ρ的均匀带电球内有一半径为r的空腔，两球心相距a。证明空腔内为均匀电场。



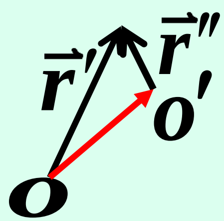
解：补偿法



均匀带电球体内 $\boxed{\vec{E}_{内}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}}$



$$\vec{E}'=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}' \qquad \vec{E}''=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}''$$



$$\boxed{\vec{r}'-\vec{r}''=\overrightarrow{OO'}}$$

P点的合场强：

$$\vec{E}=\vec{E}'+\vec{E}''=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r}'-\vec{r}''\right)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

即腔内为均匀电场，方向由 $O\rightarrow O'$

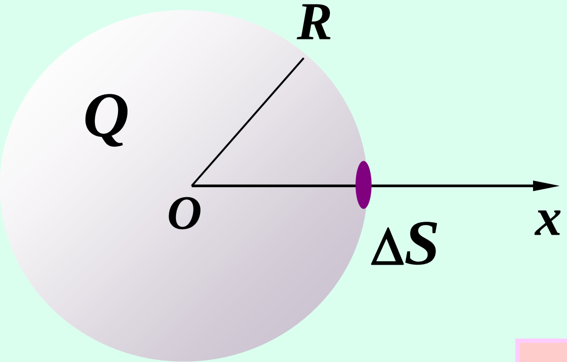
例8. 真空中一半径为R的均匀带电球面$(Q>0)$，今在球面上挖去一小块面积ΔS（连同电荷），试求:

(1) 球心O处的场强E_O。

(2) ΔS处球面外临近球面处的电场$E_{\Delta S}$ 。

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}}$$

解： **补偿法** + 场强叠加原理



(1) 球心O处的场强

$$\vec{E}_O = \vec{E}_{完整球面(\sigma)} + \vec{E}_{\Delta S(-\sigma)}$$

等效为点电荷 $-\sigma\Delta S$ 所产生。 沿x轴正方向

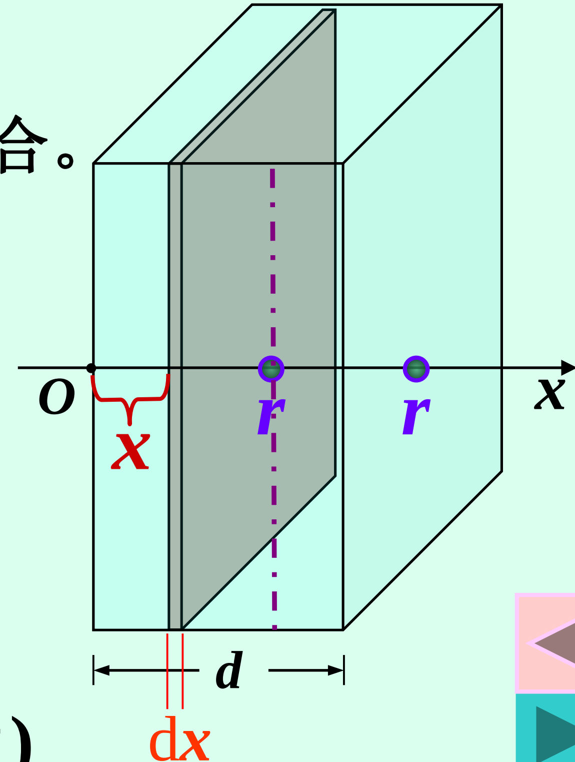
(2) $\vec{E}_{\Delta S} = \vec{E}_{完整球面(\sigma)} + \vec{E}_{\Delta S(-\sigma)}$

此时小块面积 ΔS可近似看成无限大平面！

$$E_{\Delta S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

沿x轴正方向

例9. 一厚度为d的无限大非导体平板，其电荷密度 $\rho(x)=kx$, $(k>0)$ ，求板内、外任意点的电场强度。



解: 将平板看成许多无限大均匀带电平面的组合。

x处厚度为dx的无限大均匀带电平面在r处的电场大小为:

$$\mathrm{d}E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{1}{2\varepsilon_0}\times\frac{\Delta S\times \mathrm{d}x\times\rho}{\Delta S}=\frac{k}{2\varepsilon_0}x\mathrm{d}x$$

对板内区间$(0<r<d)$:

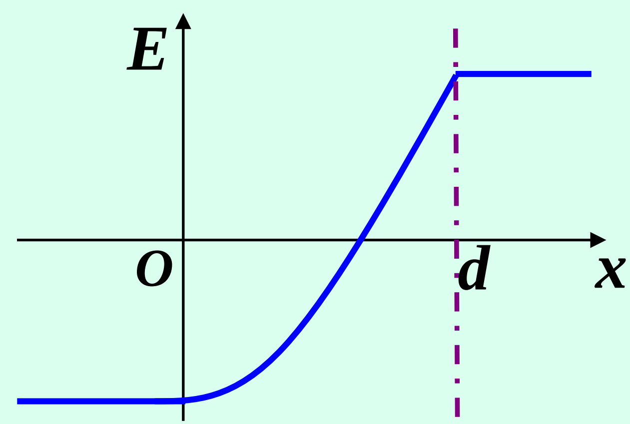
$$E_1=\int_0^r\frac{k}{2\varepsilon_0}x\mathrm{d}x-\int_r^d\frac{k}{2\varepsilon_0}x\mathrm{d}x=\frac{k}{4\varepsilon_0}(2r^2-d^2)$$

对板外区间$(r>d)$:

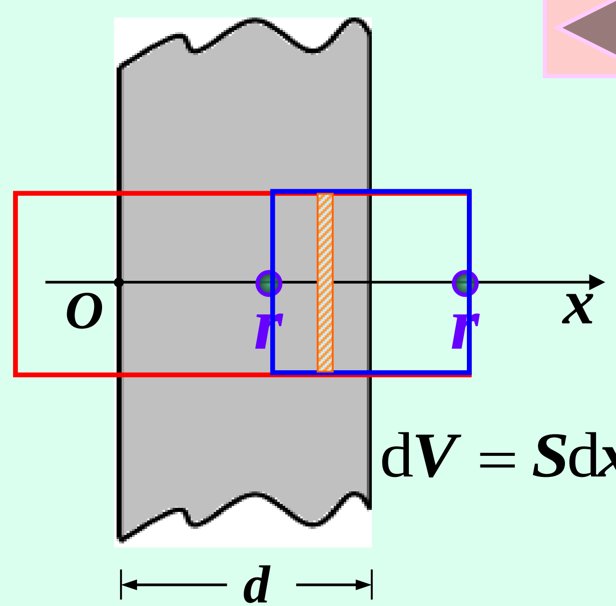
$$E_2=\int_0^d\frac{k}{2\varepsilon_0}x\mathrm{d}x=\frac{k}{4\varepsilon_0}d^2$$

$r<0$: $E_3=-\dfrac{k}{4\varepsilon_0}d^2$

能否用高斯定理求解?



例9. 一厚度为d的无限大非导体平板，其电荷密度 $\rho(x)=kx$, $(k>0)$ ，求板内、外任意点的电场强度。



解： 对板外区间，场强为方向垂直于带电平板的匀强电场。

作轴与平板垂直，底面积为S的圆柱面为高斯面，由高斯定理：

$$2E_1S=\frac{q_{内}}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\times\int_0^d kxS\mathrm{d}x=\frac{kS}{2\varepsilon_0}d^2$$

$$\vec{E}_1=\begin{cases}\dfrac{kd^2}{4\varepsilon_0}\vec{i} & (x\geq d)\\[2ex] -\dfrac{kd^2}{4\varepsilon_0}\vec{i} & (x\leq 0)\end{cases}$$

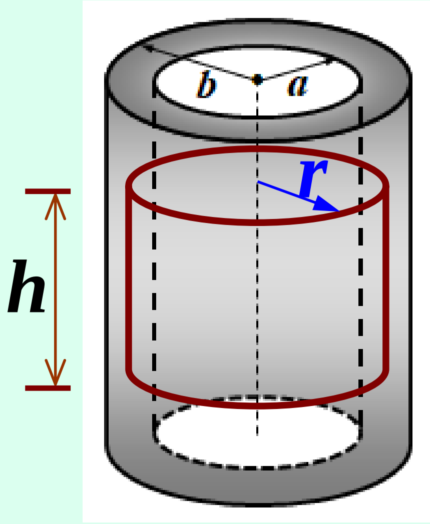
对板内区间，场强的方向垂直于带电平板。作图示高斯面：

$$E_1S-E_2S=\frac{q_{内}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{内}=\int_r^d kxS\mathrm{d}x=\frac{kS}{2}(d^2-r^2)$$

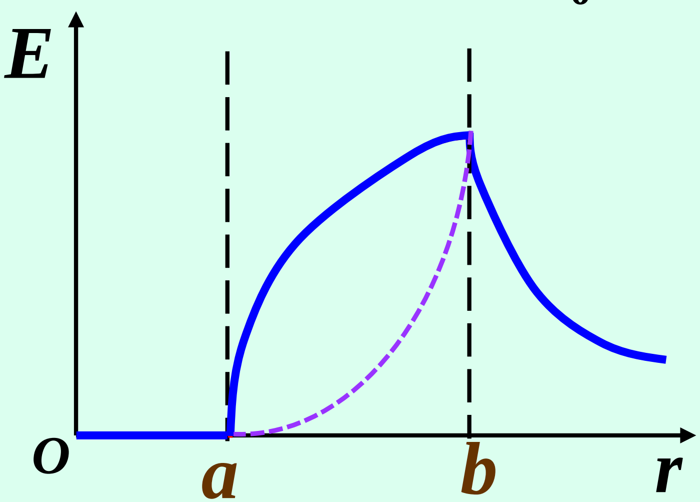
$$E_2=\frac{k}{4\varepsilon_0}(2r^2-d^2)$$

例10. 无限长均匀带电圆筒，内外半径分别为a、b，电荷体密度为ρ。试定性地画出空间各处的场强的大小E与场点到圆筒中心轴线的距离r的关系曲线。



$r < a$： $E = 0$　　$r > b$： $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$　　$\lambda = \rho\cdot\pi(b^2 - a^2)$

$(a < r < b)$： $E\cdot 2\pi r h = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_a^r \rho 2\pi r h \mathrm{d}r$　　$E = \dfrac{\rho(r^2 - a^2)}{2\varepsilon_0 r}$



$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = k + \frac{ka^2}{r^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{2ka^2}{r^3} < 0$$

该区间内曲线为凸。