离散数学

--组合计数基础

计数基础、鸽巢原理、排列组合

2025年9月22日星期一

章节目录

1. 计数基础
2. 鸽巢原理
3. 排列和组合
4. 二项式系数和恒等式
5. 广义排列和组合

1. 计数基础

小节目录[1]

1.1 乘法规则

1.2 加法规则

1.3 减法规则

1.4 除法规则

1.5 树状图

基本计数原理：乘法规则

乘法法则: 假定一个过程可以分解为两个任务。如果完成第一个任务有 n_1 种方式，在第一个任务完成之后有 n_2 种方式完成第二个任务，那么完成这个过程就有 $n_1 \cdot n_2$ 种方法

示例：长度为七的位串有多少种?

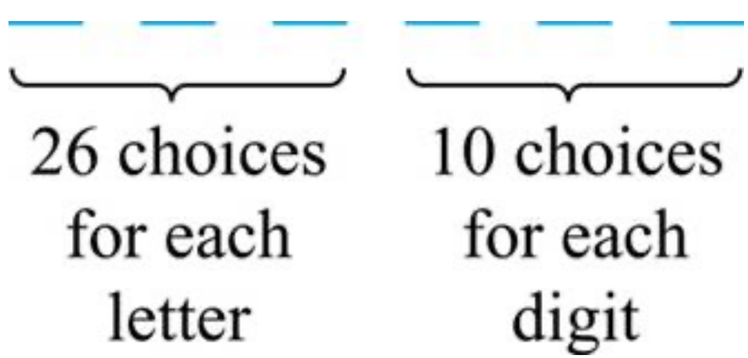
解答：由于每个比特位可以是 0 或 1，所以答案是 $2^7 = 128$

乘法规则

示例：如果每个车牌包含三个大写英文字母，后跟三个数字，可以制作多少种不同的车牌？

解答：根据乘法法则，

有 $26\cdot 26\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 17,576,000$ 种不同的车牌组合.



计数函数

计数函数：从一个有 m 个元素的集合到一个有 n 个元素的集合共有多少个函数?
解答：由于函数表示为对定义域中的每个 m 在值域中选择一个 n 元素，乘法法则告诉我们有 $n \cdot n \cdots n = n^m$ 个这样的函数

计数一对一函数：从一个有 m 个元素的集合到一个有 n 个元素的集合共有多少个一对一函数？
解答：假设定义域中的元素为 $a_1, a_2, \ldots, a_m$。选择 a_1 的值有 n 种方式，选择 a_2 的值有 n−1 种方式，依此类推。乘法法则告诉我们有 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 个这样的函数.

计数有限集合的子集

计数有限集合的子集：使用乘法法则证明有限集合 S 的不同子集数量为 $2^{|S|}$

解答：当 S 的元素按任意顺序排列时，S 的子集与长度为 |S| 的位串之间存在一一对应关系。当第 i 个元素在子集中时，位串的第 i 个位置为 1，否则为 0

根据乘法法则，有 $2^{|S|}$ 个这样的位串，因此有 $2^{|S|}$ 个子集

集合中的乘法规则

如果 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 是有限集，那么这些集合的笛卡尔积中的元素数量是每个集合元素数量的乘积

在笛卡尔积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ 中选择一个元素的任务是通过在 A_1 中选择一个元素、A_2 中选择一个元素，…，以及 A_m 中选择一个元素来完成

根据乘法法则，可以得出:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|.$$

基本计数原理：加法规则

加法法则：如果完成一项任务有 n_1 种方式或 n_2 种方式，并且 n_1 和 n_2 的方式之间没有重叠，那么完成任务的方式总共有 $n_1 + n_2$ 种

示例：数学系必须选择一名学生或一名教师作为大学委员会的代表。如果数学系有 37 名教师和 83 名数学专业的学生，且没有人既是教师又是学生，那么可以有多少种选择代表的方式

解答：根据加法法则，选择代表的方式有 37 + 83 = 120 种.

集合中的加法规则

加法法则可以用集合的术语来表述：当 A 和 B 是不相交集合时，$|A \cup B| = |A| + |B|$

更一般地,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$$
$$\text{when } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for all } i, j.$$

对于集合之间有公共元素的情况，将在后面讨论

结合加法规则和乘法规则

示例：假设编程语言中的语句标签可以是单个字母或一个字母后跟一个数字。找出可能的标签数量.

解答：使用乘法法则和加法法则.

$$26 + 26 \cdot 10 = 286$$

计数密码

结合加法法则和乘法法则可以解决更复杂的问题

示例：计算机系统中的每个用户都有一个密码，密码长度为 6 到 8 个字符，每个字符是大写字母或数字。每个密码必须至少包含一个数字。计算可能的密码数量?

Solution:设 P 为密码的总数量，P_6、P_7 和 P_8 分别为长度为 6、7 和 8 的密码数量.

- 根据加法法则，有 $P = P_6 + P_7 + P_8$.
- 为了计算每种长度的密码数量，我们首先找出由字母和数字组成的指定长度的密码数量，然后减去仅由字母组成的密码数量:

  $P_6 = (26+10)^6 - (26)^6 = 2{,}176{,}782{,}336 - 308{,}915{,}776 = 1{,}867{,}866{,}560.$

  $P_7 = 36^7 - 26^7 =$

  $78{,}364{,}164{,}096 - 8{,}031{,}810{,}176 = 70{,}332{,}353{,}920.$

  $P_8 = 36^8 - 26^8 =$

  $2{,}821{,}109{,}907{,}456 - 208{,}827{,}064{,}576 = 2{,}612{,}282{,}842{,}880.$

因此, $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2{,}684{,}483{,}063{,}360.$

网络地址

IPv4（Internet Protocol Version 4）使用 32 位地址.

Bit Number	0	1	2	3	4	8	16	24	31
Class A	0	netid				hostid			
Class B	1	0	netid				hostid		
Class C	1	1	0	netid				hostid	
Class D	1	1	1	0	Multicast Address				
Class E	1	1	1	1	0	Address			

A类地址：用于最大型的网络，格式为 0，后跟一个 7 位的网络标识符（netid）和一个 24 位的主机标识符（hostid）.
B类地址：用于中型网络，格式为 10，后跟一个 14 位的网络标识符和一个 16 位的主机标识符.
C类地址：用于最小型的网络，格式为 110，后跟一个 21 位的网络标识符和一个 8 位的主机标识符.

- D类地址和E类地址不被分配作为互联网中计算机的地址。仅有A类、B类和C类地址可用
- 1111111（二进制）不能作为A类网络的网络标识符
- 主机标识符全为0或全为1的地址在任何网络中都不可用

Jump to long description

计数网络地址

示例：互联网上有多少不同的IPv4地址可供计算机使用?

解答：使用加法法则和乘法法则。设 x 为可用的地址数量， x_A, x_B, 和 x_C分别表示各类地址的数量

- A类地址, x_A: $2^7 - 1 = 127$ netids. $2^{24} - 2 = 16,777,214$ hostids.
  $x_A = 127 \cdot 16,777,214 = 2,130,706,178$.
- B类地址, x_B: $2^{14} = 16,384$ netids. $2^{16} - 2 = 16,534$ hostids.
  $x_B = 16,384 \cdot 16, 534 = 1,073,709,056$.
- C类地址, x_C: $2^{21} = 2,097,152$ netids. $2^8 - 2 = 254$ hostids.
  $x_C = 2,097,152 \cdot 254 = 532,676,608$.
- 因此，可用的IPv4地址总数为
- $x = x_A + x_B + Xc$
  $= 2,130,706,178 + 1,073,709,056 + 532,676,608$
  $= 3, 737,091,842$.

今天的IPv4地址远远不够用了！新的IPv6协议解决了地址数量不足的问题.

基本计数原理：减法规则

减法法则：如果完成某项任务有 n_1 种方式或 n_2 种方式，那么完成任务的总方式数量为 $n_1 + n_2$ 减去以两类方式中执行这个任务相同的方式

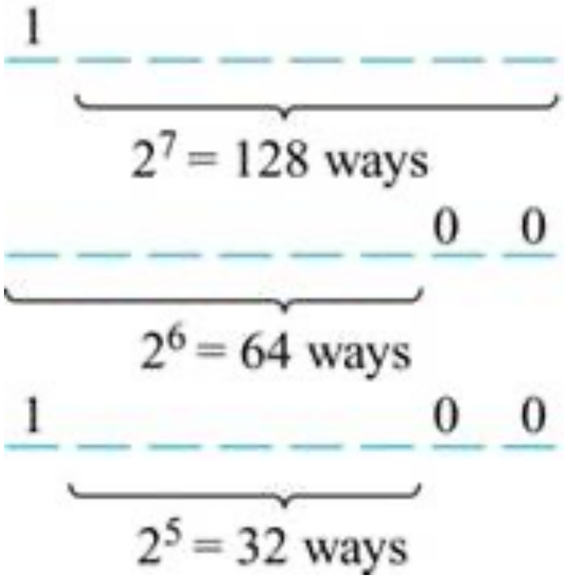
这也称为**容斥原理**（principle of inclusion-exclusion）：

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

计数比特串

示例：长度为八的二进制串有多少个要么以1开始，要么以00结束?

解答：使用减法法则



- 以1开头的长度为八的二进制串数量

$2^7 = 128$

- 以00结尾的长度为八的二进制串数量

$2^6 = 64$

- 既以1开头又以00结尾的长度为八的二进制串数量: $2^5 = 32$

因此，符合条件的二进制串总数为$128 + 64 - 32 = 160$

Jump to long description

基本计数原理：除法规则

除法法则：如果某项任务可以通过 n种方式完成，且对于每一种方式 w，正好有 d 种方式对应于方式 w，那么完成这项任务的方式总数为 n/d

以集合的形式重述：如果有限集合 A 是 n 个两两不相交的子集的并集，每个子集有 d 个元素，那么 $n=|A|/d$

以函数的形式重述：如果 f 是从有限集合 A 到有限集合 B 的函数，且对于每个 $y \in B$，有正好 d 个值 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$，那么 $|B|=|A|/d$

示例：围绕圆桌有多少种不同的方式排列四个人？当每个人的左邻右舍相同时，两个排列视为相同?

解答： 给座位编号，从1到4，顺时针方向排列。选择座位1有4种选择坐人的方式，座位2有3种方式，座位3有2种方式，座位4只有1种方式。因此，四个人的排列方式总共有 4!=24 种。但是，由于当每个人的左邻和右舍相同时，两个排列被视为相同，所以对于每个座位1的选择，我们会得到相同的排列

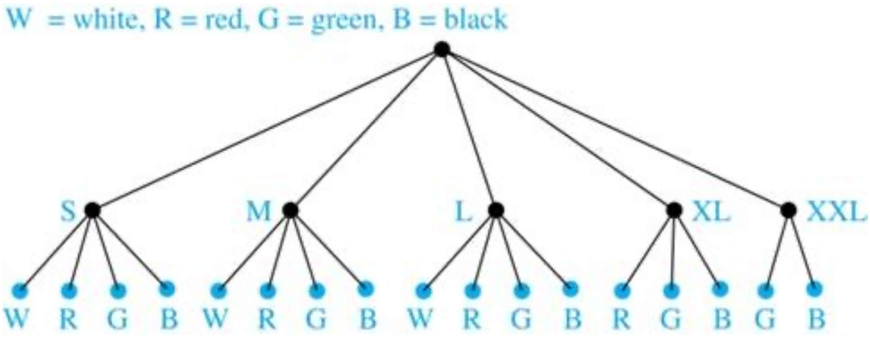
因此，按照除法法则，不同的排列方式有： 24/4=6

树状图

树状图：我们可以通过使用树状图解决许多计数问题，其中分支代表可能的选择，叶子代表可能的结果

示例：假设 “I Love Discrete Math” T恤有五种不同的尺码：S、M、L、XL 和 XXL。每个尺码都有四种颜色（白色、红色、绿色和黑色），除了 XL 只有红色、绿色和黑色，XXL 只有绿色和黑色。校园书店至少需要存多少件T恤，才能确保每个尺码和颜色都有一件?

解答：绘制树状图.



因此，书店至少需要存17 件T恤

2. 鸽巢原理

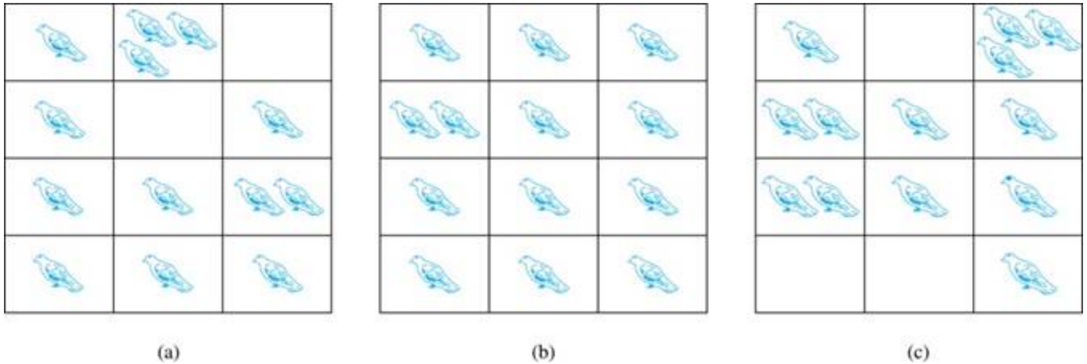
小节目录

2.1 鸽巢原理

2.2 广义鸽巢原理

鸽巢原理[1]

如果有 20 只鸽子栖息在 19 个鸽笼中，那么必定至少有一个鸽笼里有超过 1 只鸽子



鸽巢原理：如果 k 是一个正整数，并且将 k+1 个物体放入 k 个盒子中，那么至少有一个盒子包含2个或更多的物体

证明：我们使用反证法进行证明。假设没有一个盒子里有超过一个物体，那么所有盒子里的物体总数最多为 k。但这与我们有 k+1 个物体的假设相矛盾。因此，至少有一个盒子必须包含2个或更多的物体

鸽巢原理2

推论 1：从一个具有 k+1 个元素的集合到一个具有 k 个元素的集合的函数 f 不是一对一函数

证明：使用鸽巢原理

- 为 f 的值域中的每个元素 y 创建一个盒子
- 将所有使得 $f(x)$=y的定义域中的元素 x 放入对应的盒子中
- 因为定义域中有 k+1 个元素，而值域中只有 k 个盒子，所以至少有一个盒子里会有2个或更多的元素

因此，函数 f 不能是一对一函数

鸽巢原理3

示例：在任意367人的群体中，必定至少有两人有相同的生日，因为只有366种可能的生日.

示例：证明对于每一个整数 n，存在一个数是n 的倍数且在它的十进制表示中只出现0和1

解：设 n 为一个正整数。考虑 n+1 个整数：1, 11, 111, ..., 111...1（最后一个数的十进制有 n+1 个1）。一个整数除以 n 时，可能的余数有 n 种。根据鸽巢原理，当这些 n+1 个整数除以 n 时，至少有两个整数的余数相同。这两个整数之差的十进制表示中只含有0 和1，且它能被n 整除

广义鸽巢原理1

广义鸽巢原理：如果将 N 个物体放入 k 个盒子中，则至少有一个盒子包含至少 $\lceil N/k \rceil$ 个物体

证明：我们使用反证法进行证明。假设没有任何一个盒子包含超过 $\lceil N/k \rceil-1$个物体。这样，每个盒子最多有 $\lceil N/k \rceil-1$ 个物体。由于有 k 个盒子，因此总的物体数量至多为

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k}\right\rceil -1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k}+1\right)-1\right) = N,$$

我们用到的不等式是 $\lceil N/k \rceil < \lceil N/k \rceil + 1$。这与我们有 N 个物体的事实矛盾

示例：在100人中，至少有 ⌈100/12⌉=9个人是在同一个月份出生的

广义鸽巢原理2

示例：a) 从一副标准的52张牌中至少要选出多少张牌，才能保证至少有三张同一花色的牌?

b)要保证至少选出三张红心，必须选出多少张牌?

解答：a）我们假设有四个盒子，分别代表四种花色。根据广义鸽巢原理，至少有一个盒子会包含 $\lceil N/4 \rceil$ 张牌。当 $\lceil N/4 \rceil \geq 3$ 时，至少选出三张同一花色的牌。使得 $\lceil N/4 \rceil \geq 3$的最小整数 N 是：$N=2\cdot 4+1=9$ 因此，至少需要选出 9 张牌 才能保证至少有三张同一花色的牌

b)一副牌中有13张红心和39张非红心牌。如果我们选出41张牌，可能会有39张非红心牌和2张红心牌。然而，当我们选出42张牌时，必须至少有三张红心。（**注意**：这里不使用广义鸽巢原理）

3. 排列组合

小节总结[3]

3.1 排列

3.2 组合

3.3 组合证明

排列

定义：一组不同对象的排列是这些对象的有序排列。集合中 r 个元素的有序排列称为 r-排列

示例：设 S={1,2,3}

- 有序排列 3,2 是 S 的一个 2-排列.

具有 n 个元素的集合的 r-排列的数量记为 $P(n,r)$.

- 对于 S={1,2,3}， 2-排列有：1,2; 1,3; 2,1; 2,3; 3,1; 和 3,2。因此，P(3,2)=6.

排列数量的公式

定理 1: 如果 n 是正整数，且 r 是满足 $1 \le r \le n$ 的整数，那么对于一个有 n 个不同元素的集合，其 r-排列的数量为

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$$

证明：使用乘法法则。第一个元素有 n 种选择，第二个元素有 $n-1$ 种选择，依此类推，直到最后一个元素有 $n-(r-1)$ 种选择

注意：当 $r=0$ 时，$P(n,0)=1$，因为只有一种方法来排列 0 个元素

推论 1：如果 n 和 r 是满足 $1 \leqslant r \leqslant n$ 的整数，那么

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

通过计数排列解决计数问题[1]

示例：从参加比赛的 100 个不同的人中，选择一个一等奖、一个二等奖和一个三等奖的方式有多少种?

解:

$$P(100,3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970{,}200$$

通过计数排列解决计数问题2

示例：假设一位女销售员需要访问八个不同的城市。她必须从指定的城市开始她的行程，但可以以任何顺序访问其余七个城市。那么，这位女销售员在访问这些城市时有多少种可能的顺序?

解：第一个城市是固定的，剩下的七个城市可以任意排列。因此，这些顺序的数量为:

$$P(7,7) = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

如果她想找到访问所有城市的最短路径，她必须考虑 5040 条路径

通过计数排列解决计数问题3

示例：包含字符串 ABC 的字母 ABCDEFGH 的排列有多少种?

解：我们可以将字符串 ABC 看作一个整体，所以问题相当于排列六个对象：ABC、D、E、F、G 和 H.

$$P(6,6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

组合[1]

定义: 集合元素的一个 **r-组合**是从集合中无序选择 r 个元素。因此，r-组合是一个包含 r 个元素的子集。具有 n 个不同元素的集合的 r-组合的数量记作 C(n, r)，也记作：$\binom{n}{r}$ 并且称为二项式系数

示例：设集合 S 为 {a, b, c, d}，则 {a, c, d} 是集合 S 的一个 3-组合，它与 {d, c, a} 是相同的，因为顺序不重要.

$C(4,2) = 6$

因为集合 {a, b, c, d} 的 2-组合有六个子集$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, 和 $\{c, d\}$.

组合₂

定理 2：当 n ≥ r ≥ 0 时，具有 n 个元素的集合的 r-组合 的数量等于

$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

证明：根据乘法法则*P*(*n*, *r*) = *C*(*n*,*r*) · *P*(*r*,*r*). 因此

$$C(n,r)=\frac{p(n,r)}{P(r,r)}=\frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

组合3

示例：从一副标准的 52 张牌中，可以发出多少种五张牌的扑克手牌？另外，从 52 张牌中选择 47 张牌有多少种方法?

解：由于发牌的顺序无关紧要，因此五张牌的组合数是:

$$C(52,5)=\frac{52!}{5!47!}$$

$$=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=26\cdot 17\cdot 10\cdot 49\cdot 12=2,598,960$$

选择 47 张牌的不同方式是

$$\boxed{C(52,47)}=\frac{52!}{47!5!}=\boxed{C(52,5)}=2,598,960$$

组合$_4$

推论2：设 n 和 r 为非负整数，且 $r \leq n$. 则 $C(n, r) = C(n, n - r)$.

证明：由定理2可得

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

and

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)!\left[n-(n-r)\right]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

因此, $C(n, r) = C(n, n - r)$.

组合证明[1]

定义1：一个组合证明是指使用以下方法之一来证明恒等式的证明

- **双计数证明**使用计数论证来证明恒等式两边以不同的方式计算相同的对象
- **双射证明**展示了恒等式两边所计数的对象集合之间存在双射关系

组合证明$_2$

以下是两种组合证明

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$

当 r 和 n 为非负整数且 $r<n$ 时:

- **双计数证明**：根据定义，集合 S 中包含 r 个元素的子集数量为 $C(n,r)$。集合 S 的每个子集 A 也可以通过指定不在 A 中的元素来描述，即那些属于补集 $\bar{A}$ 的元素。由于 S 中包含 r 个元素的子集的补集包含 $n-r$ 个元素，集合 S 中包含 r 个元素的子集数量也为 $C(n,n-r)$
- **双射证明**：设 S 是一个包含 n 个元素的集合。将集合 S 的子集 A 映射到其补集 $\bar{A}$ 的函数是一个双射，连接了 S 中具有 r 个元素的子集与具有 $n-r$ 个元素的子集。由于这两个集合之间存在双射，它们必须具有相同的元素数量

组合 5

示例：从一个由10名成员组成的网球队中选择5名球员前往另一所学校进行比赛，有多少种选择方式

解：根据定理2，组合的数量为

$$C(10,5)=\frac{10!}{5!5!}=252.$$

示例：一组30人已接受训练成为宇航员，准备执行首次火星任务。选择6人组成执行任务的队伍有多少种方式?

解：根据定理2，可能的队伍数量为

$$C(30,6)=\frac{30!}{6!24!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=593,775$$

4. 二项式系数与恒等式

小节目录4

4.1 二项式定理

4.2 帕斯卡恒等式与三角形

4.3 其他涉及二项式系数的恒等式

二项式表达式的幂次

定义：二项式表达式是两个项的和，例如$x + y$.

- 我们可以使用计数原理来找出 $(x + y)^n$展开式中的系数，其中 n 是一个正整数.
- 为了说明这个想法，我们首先来看 $(x + y)^3$的展开过程.
- $(x + y)$ $(x + y)$ $(x + y)$展开成多个项的和，每一项是从三个和中各取一个项的乘积.
- 出现的项有 $x^3, x^2y, x y^2, y^3$.问题是这些项的系数是什么?
  - 为了得到 x^3，必须从每个中选择一个 x。只有一种方式做到这一点。因此，x^3的系数是1.
  - 为了得到 x^2y，必须从三个中选择两个 x。有$\binom{3}{2}$ 种选择方式，因此 x^2y 的系数是 3
  - 为了得到 xy^2，我们必须从三个中选择一个 x 。有 $\binom{3}{1}$ 种选择方式，因此 xy^2的系数是 3
  - 为了得到 y^3，必须从每个中选择一个 y。只有一种方式做到这一点。因此，y^3的系数是 1

我们已经使用计数论证展示了$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3x y^2 + y^3$.
接下来，我们介绍二项式定理，它给出了 $(x + y)^n$ 展开式中各项的系数.

二项式定理

二项式定理：设 x 和 y 为变量，n 为非负整数。那么:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

证明：我们使用组合推理。$(x+y)^n$展开式中的项是 $x^{n-j}y^j$形式的，其中 $j=0,1,2,\ldots,n$。为了形成项 $x^{n-j}y^j$，必须从 n 个（x+j）中选择 $n-j$ 个 x。因此，项 $x^{n-j}y^j$的系数是$\binom{n}{n-j}$，也等于$\binom{n}{j}$.

使用二项式定理

示例：在$(2x - 3y)^{25}$ 的展开式中， $x^{12}y^{13}$的系数是多少?

解答：我们将表达式视为$(2x +(-3y))^{25}$ 。根据二项式定理$(2x +(-3y))^{25}$.

$$\left(2x+(-3y)\right)^{25}=\sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}2x^{25-j}(-3y)^{j}.$$

因此，在展开式中 $x^{12}y^{13}$的系数是在 $j=13$ 时得到的

$$\binom{25}{13}2^{12}(-3)^{13}=\frac{25!}{13!12!}2^{12}3^{13}.$$

一个有用的恒等式

定理 1: 当 $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$

证明（使用二项式定理）： 设 x=1和 y=1，根据二项式定理，我们得到:

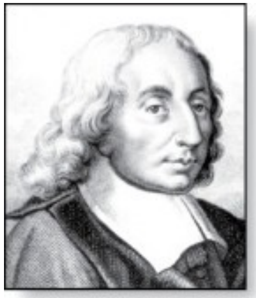
$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

证明（组合）： 考虑一个包含 n 个元素的集合.包含零个元素的子集有$\binom{n}{0}$个，包含1个元素的子集有$\binom{n}{1}$个

包含2个元素的子集有$\binom{n}{2}$个，包含n个元素的子集有$\binom{n}{n}$个 因此总共有 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

由于我们知道一个包含 n 个元素的集合有 2^n个子集，因此我们可以得出结论 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$

帕斯卡恒等式



Blaise Pascal
(1623-1662)

帕斯卡恒等式: 如果 n 和 k 是整数，且满足 $n \geq k \geq 0$，那么 $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$

证明（组合方法）: 设 T 是一个集合，且 $|T|=n+1$, 设 $a \in T$，并令 $S=T-\{a\}$. T有 $\binom{n+1}{k}$ 个子集有k个元素.

每个包含 k 个元素的子集要么满足以下两种情况之一:

- 包含元素 a，并且包含其他 $k-1$ 个元素, 或者
- 不包含元素 a，并且只包含 S中的 k 个元素.

  这里有

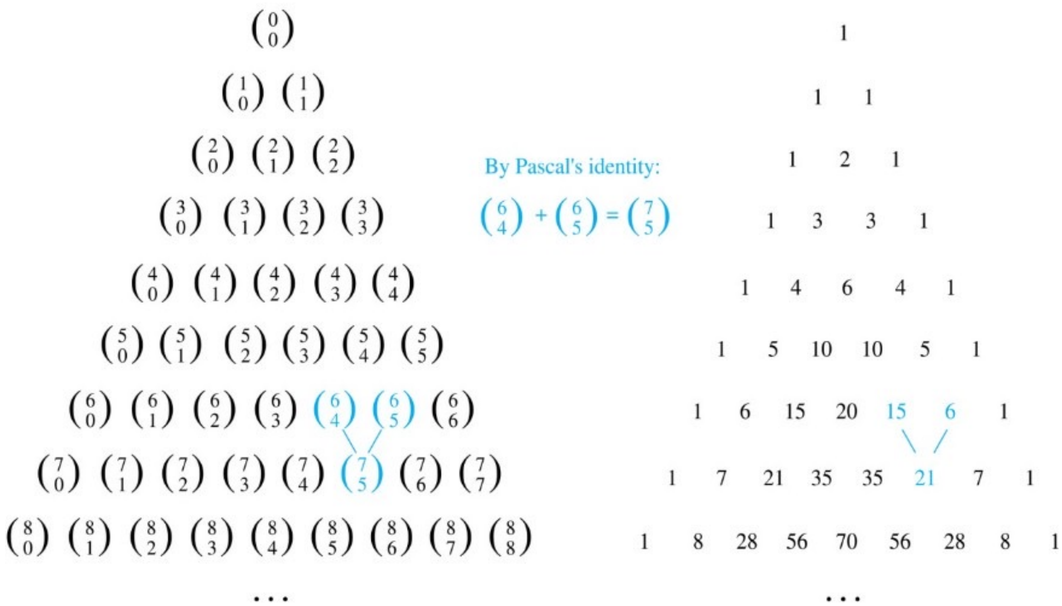
- $\binom{n}{k-1}$ 个子集有k个元素并且有元素a , 因为这里有 $\binom{n}{k-1}$ 个子集有S的k-1个元素
- $\binom{n}{k}$个子集有k个元素并且不含有元素a, 因为这里有 $\binom{n}{k}$ 个子集有S的k个元素.

因此, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

帕斯卡三角形

帕斯卡三角形的第 n 行由二项式系数$\binom{n}{k}$,

组成。*其中*$k = 0,1,\ldots,n$.



(a) (b)

根据帕斯卡恒等式，将两个相邻的二项式系数相加，结果是下一个行中这两个系数之间的二项式系数

5. 广义排列和组合

小节目录5

5.1 带重复的排列

5.2 带重复的组合

5.3 具有不可区别物体的集合的排列

5.4 把物体放入盒子

带重复的排列

定理 1：允许重复的情况下，从 n个对象的集合中选取 r 个对象的排列数为n^r.

证明：在允许重复的情况下，对于每个排列中的 r 个位置，都有 n 种选择。因此，使用乘法原理，排列的总数为 n^r.

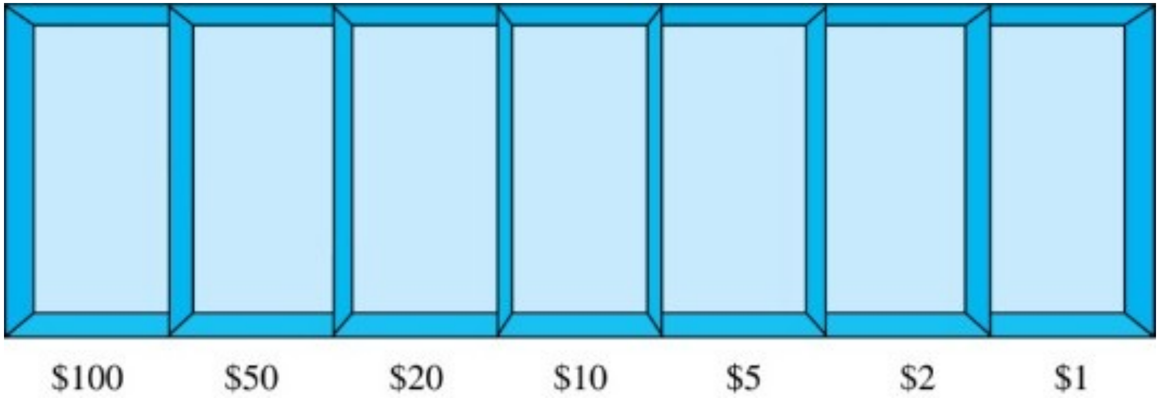
例子：从英文字母的大写字母（共 26 个字母）中形成长度为 r 的字符串有多少种?

解答：由于每个位置可以是 26 个字母中的任意一个，且允许重复，因此每个位置都有 26 种选择。因此，长度为 r 的字符串的总数是 26^r

带重复的组合[1]

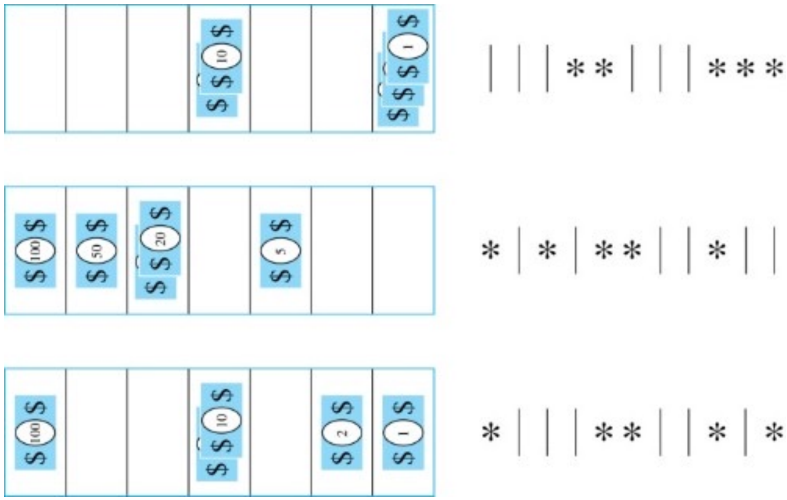
例子：从包含1美元、2美元、5 美元、10 美元、20 美元、50美元及100美元的钱袋中选 5 张纸币，有多少种方式?假定不管纸币被选的次序，同种币值的纸币都是不加区别的，并且至少每种纸币有5张?

解：将选择的钞票放置在现金盒中的适当位置



带重复的组合2

一些可能的放置五张钞票的方法:



选择五张钞票的方式对应于在一行中排列六个条形符号和五个星号的方式.

这相当于从一个 11 个对象的集合中选择 5 个对象的无序选择。因此，共有

$$C(11,5)=\frac{11!}{5!6!}=462$$

种方法从七种钞票中选择五张.

Jump to long description

带重复的组合 3

定理 2： 当允许元素重复时，从一个包含 n 个元素的集合中选择 r 个元素的组合数是

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1).$$

证明： 当允许重复时，一个包含 n 个元素的集合的每个 r 组合可以用一个包含 $n-1$ 个竖线和 r 个星号的列表表示。n-1条竖线标记了 n 个单元。当集合的第i个元素出现在组合中时，包含1颗星。这种列表的数量是 $C(n+r-1,r)$，因为每个列表是在 $n+r-1$ 个位置中选择 r 个位置放置星号（剩下的放置竖线）。这也等于 $C(n+r-1,n-1)$，即将 $n-1$ 个竖线放置在 $n+r-1$ 个位置的方法数

带重复的组合[4]

例子: 下列方程有多少个解

$$x1 + x2 + x3 = 11$$

其中x_1 , x_2 和 x_3 是非负整数?

解: 每个解对应于从一个包含三个元素的集合中选择 11 个物品的方法；即 x_1个类型一的元素， x_2个类型二的元素， x_3个类型三的元素。根据定理 2，可以得出共有

$$C(3+11-1,11) = C(13,11) = C(13,2) = \frac{13 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 78$$

个解

带重复的组合5

例子：假设一家饼干店有四种不同的饼干。选择六块饼干有多少种不同的方式?

解：选择六块饼干的方式数等于从一个包含四个元素的集合中选择六个元素的组合数。根据定理 2，选择的方式数是

$$C(9,6)=C(9,3)=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=84$$

以下是有关排列和组合的总结，包括有重复和无重复的情况

TABLE 1 Combinations and Permutations With and Without Repetition.

Type	*Repetition Allowed?*	*Formula*
r-permutations	No	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinations	No	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
r-permutations	Yes	n^r
r-combinations	Yes	$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

具有不可区别物体的集合的排列[1]

例子：通过重新排列单词 "SUCCESS" 的字母，可以组成多少个不同的字符串.

解答：有七个可能的位置供三个 S、两个 C、一个 U 和一个 E 使用.

- 三个 S 可以有 $C(7,3)$ 种不同的放置方式，剩下四个位置.
- 两个 C 可以有 $C(4,2)$ 种不同的放置方式，剩下两个位置.
- U 可以有 $C(2,1)$种不同的放置方式，剩下一个位置.
- E 可以有 $C(1,1)$ 种放置方式.

根据乘法原理，不同字符串的总数是:

$$\begin{aligned} C(7,3)C(4,2)C(2,1)C(1,1) &= \frac{7!}{3!4!}\cdot\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{2!}{1!1!}\cdot\frac{1!}{1!0!} \\ &= \frac{7!}{3!2!1!1!} \\ &= 420 \end{aligned}$$

这种推理可以推广为以下定理 →

具有不可区别物体的集合的排列2

定理 3： 设类型1 的相同的物体有n_1个，类型2 的相同的物体有n_2个，……，类型k的相同的物体有n_k个，那么n 个物体的不同排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

证明： 根据乘法规则，总的排列数是:

$C(n, n_1)\ C(n - n_1, n_2) \cdots C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_k, n_k)$ 因为:

- 类型 1 的 n_1 个物体可以在 n 个位置中以 $C(n, n_1)$ 种方式放置，剩下 $n - n_1$个位置
- 然后，类型 2 的 n_2 个物体可以在剩下的 $n - n_1$ 个位置中以 $C(n - n_1, n_2)$种方式放置，剩下 $n - n_1 - n_2$个位置
- 以此类推，直到类型 k 的 n_k个物体有$C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_k, n_k)$种方式放置

将这个乘积转化为所需的结果如下:

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\ \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2!)}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

把物体放入盒子[1]

许多计数问题可以通过枚举把不同物体放入不同盒子的方式数来解决（这些放入盒子的物体的次序是无关紧要的）

- 物体可能彼此不同（可区别）或相同（不可区别）
- 盒子可能带有标签（可区别）或不带标签（不可区别）

把物体放入盒子$_2$

可区别物体和可区别盒子

- 将 n 个可区别物体分配到 k 个可区别盒子中的方法有$n!/(n_1!n_2!\cdots n_k!)$.
- **例子：**将 52 张牌分发给四个玩家，每人 5 张牌的分发方式有 52!/(5!5!5!5!32!)种

不可区别物体和可区别盒子

- 将 r 个不可区别物体放入 n 个可区别盒子中的方法有$C(n + r - 1, n - 1)$
- **例子：**将 10 个不可区分物体放入 8 个可区分盒子中的方法有$C(8 + 10 - 1, 10) = C(17,10) = 19{,}448$

把物体放入盒子3

可区别物体和不可区别盒子

- **例子：**将四名员工分配到三个不可区别办公室的方法有 14 种
- 对于将 n 个可区分物体分配到 j 个不可区分盒子中的方式，没有简单的封闭公式

不可区别物体和不可区别盒子

- **例子：**将六本相同的书放入四个相同盒子的方法有 9 种
- 将 n 个不可区分物体分配到 k 个不可区分盒子中的方式数等于 $p_k(n)$，即将 n 写成至多 k 个递增正整数之和的方式数
- 对此数值也没有简单的封闭公式

6*. 母函数与指数型母函数

6.1 母函数

6.2 指数型母函数

母函数

母函数方法是一套非常有用的方法，应用极广。这套方法的系统叙述，最早见于Laplace（拉普拉斯）在1812年的名著—概率解析理论。

我们来看如下的例子：两个骰子掷出6点，有多少种选法？

注意到，出现1，5有两种选法，出现2，4也有两种选法，而出现3，3只有一种选法，按加法法则，共有2+2+1=5种不同选法。

或者，第一个骰子除了6以外都可选，有5种选法，一旦第一个选定，第二个骰子就只有一种可能的选法，按乘法法则有5×1=5种。

母函数

但碰到用三个或四个骰子掷出n点，上述两方法就不胜枚举了。

设想把骰子出现的点数1,2,...,6和$t, t^2, \ldots, t^6$对应起来，则每个骰子可能出现的点数与$(t+t^2+\ldots+t^6)$中t的各次幂一一对应。

若有两个骰子，则

$$(t+t^2+\ldots+t^6)(t+t^2+\ldots+t^6)=t^2+2t^3+3t^4+4t^5+5t^6+\ldots.$$

其中t^6的系数为5，显然来自于

$$t^1\cdot t^5=t^6,\ t^2\cdot t^4=t^6,\text{"}t^3\cdot t^3=t^6,\ t^4\cdot t^2=t^6,\ t^5\cdot t^1=t^6.$$

这表明，**掷出6点的方法一一对应于得到t^6的方法**。

母函数

故使两个骰子掷出*n*点的方法数等价于求

$$\boxed{f(t) = (t + t^2 + \ldots + t^6)^2}$$

中 t^n 的系数。

这个函数 $f(t)$ 称为**母函数**。

母函数方法的基本思想：

把离散数列和幂级数一一对应起来，把离散数列间的相互结合关系对应成为幂级数间的运算关系，最后由幂级数形式来确定离散数列的构造。

母函数

例子：$e_1 + e_2 + e_3 = 17$， e_1, e_2, 和 e_3 有多少种正整数解，其中$2 \le e_1 \le 5$, $3 \le e_2 \le 6$, and $4 \le e_3 \le 7$.

解: $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)\,(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)\,(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$

$3x^{17}$

母函数

再来看下面的例子：

$$\begin{aligned}&(1+a_1x)(1+a_2x)\cdots(1+a_nx)\\ &=1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+\\ &\qquad(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)x^2\\ &\qquad\qquad+\cdots+a_1a_2\cdots a_nx^n,\end{aligned}$$

若令$a_1=a_2=\ldots=a_n=1$，则有

$$(1+x)^n=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots+C(n,n)x^n.$$

这就是二项式展开定理。

母函数

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}\Rightarrow$$

$$[C(n,0)+C(n,1)x+\cdots+C(n,n)x^n]$$
$$\cdot[C(m,0)+C(m,1)x+\cdots+C(m,m)x^m]$$
$$=C(m+n,0)+C(m+n,1)x+\cdots+C(m+n,m+n)x^{m+n}$$

比较等号两端项对应系数，可以得到恒等式：

$$C(m+n,r)=C(m,0)C(n,r)+$$
$$C(m,1)C(n,r-1)\ +\cdots+C(m,r)C(n,0).$$

母函数

$$(1+x)^n(1+1/x)^m = x^{-m}(1+x)^{m+n} \Rightarrow$$

$$[C(n,0)+C(n,1)x+\cdots+C(n,n)x^n]$$
$$\cdot[C(m,0)+C(m,1)x^{-1}+\cdots+C(m,m)x^{-m}]$$
$$= x^{-m}[C(m+n,0)+C(m+n,1)x+C(m+n,2)x^2$$
$$+\cdots+C(m+n,m+n)x^{m+n}$$

比较等式两端的常数项，可以得到恒等式：

$$C(m+n,m) = C(n,0)C(m,0)+C(n,1)C(m,1)$$
$$+\cdots+C(n,m)C(m,m).$$

母函数

又如在等式

$$(1+x)^n = C(n,0) + C(n,1)x + \cdots + C(n,n)x^n$$

中令x=1 可得

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,n) = 2^n.$$

两端对x求导可得：

$$n(1+x)^{n-1} = C(n,1) + 2C(n,2)x + \cdots + nC(n,n)x^{n-1},$$

再令x=1 可得

$$C(n,1) + 2C(n,2) + 3C(n,3) + \cdots + nC(n,n) = n2^{n-1}.$$

类似还可以得到

$$C(n,1) + 2^2C(n,2) + \cdots + n^2C(n,n) = n(n+1)2^{n-2}.$$

母函数

还可以类似地推出一些等式，但通过上面一些例子已可见函数$(1+x)^n$在研究序列$C(n,0),C(n,1),\ldots,C(n,n)$的关系时所起的作用。

定义：对于序列$a_0,a_1,a_2,\ldots$，函数

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

称为序列$a_0,a_1,a_2,\ldots$的**母函数**。

例如函数$(1+x)^n$就是序列$C(n,0),C(n,1),\ldots,C(n,n)$的母函数。

如若已知序列，则对应的母函数可根据定义给出。反之，如果已经求出序列的母函数$G(x)$，则该序列也随之确定。

母函数

例2 有红球两个，白球、黄球各一个，试求有多少种不同的组合方案。

设 r，w，y 分别代表红球，白球，黄球。

$$(1+r+r^2)(1+w)(1+y)$$
$$=1+(r+y+w)+(r^2+ry+rw+yw)$$
$$+(r^2y+r^2w+ryw)+r^2yw.$$

(1) 取一个球的组合数为3，即分别取红，白，黄。

(2) 取两个球的组合数为4，即两个红的，一红一黄，一红一白，一白一黄。

(3) 取三个球的组合数为3，即两红一黄，两红一白，一红一黄一白。

(4) 取四个球的组合数为1，即两红一黄一白。

母函数

例3 某单位有8个男同志，5个女同志，现要组织一个由数目为偶数的男同志和数目不少于2的女同志组成的小组，试求有多少种组成方式？

令a_n为从8位男同志中抽取出n个的允许组合数。由于要男同志的数目必须是偶数。故

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 0, a_0 = 1, a_2 = C(8,2) = 28,$$

$$a_4 = C(8,4) = 70, a_6 = C(8,6) = 28, a_8 = 1.$$

因此序列$a_1, a_2, \ldots, a_8$对应的母函数为：

$$A(x) = 1 + 28x^2 + 70x^4 + 28x^6 + x^8.$$

母函数

类似可得女同志的允许组合数对应的母函数为

$$B(x)=10x^2+10x^3+5x^4+x^5.$$

$$\begin{aligned}C(x)&=A(x)B(x)\\&=(1+28x^2+70x^4+28x^6+x^8)\\&\quad\cdot(10x^2+10x^3+5x^4+x^5)\\&=10x^2+10x^3+285x^4+281x^5+840x^6\\&\quad+728x^7+630x^8+350x^9+150x^{10}\\&\quad+38x^{11}+5x^{12}+x^{13}\end{aligned}$$

其中x^k的系数就是组成符合要求的k人小组的数目。

整数的拆分

所谓正整数拆分即把正整数分解成若干正整数的和。

相当于把n个无区别的球放到n个无标志的盒子，盒子允许空着，也允许放多于一个球。

整数拆分成若干整数的和，办法不一，不同拆分法的总数叫做拆分数。

拆分可以分为无序拆分和有序拆分；不允许重复的拆分和允许重复的拆分。

整数的拆分

	有序	无序
不允许重复的拆分	4 = 4 4 = 1+3 4 = 3+1	4 = 4 4 = 1+3
允许重复的拆分	4 = 4 4 = 1+3 4 = 3+1 4 = 2+2 4 = 2+1+1 4 = 1+2+1 4 = 1+1+2 4 = 1+1+1+1	4 = 4 4 = 1+3 4 = 2+2 4 = 2+1+1 4 = 1+1+1+1

整数的拆分

例4 若有1克、2克、3克、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？有几种可能方案？

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$

$$=1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6$$

$$+2x^7+x^8+x^9+x^{10}.$$

从右端的母函数知可称出从1克到10克，系数便是方案数。

例如右端有$2x^5$项，即称出5克的方案有2种：

5=2+3=1+4。

类似的，称出6克的方案也有2种：6=2+4=1+2+3

整数的拆分

例5 求用1分、2分、3分的邮票贴出不同数值的方案数。

注意邮票允许重复，因此母函数为：

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)$$

以x^4为例，其系数为4，即4拆分成1，2，3之和的允许重复的拆分数为4：

$$\begin{aligned}4 &= 1+1+1+1\\ &= 1+1+2\\ &= 1+3\\ &= 2+2。\end{aligned}$$

整数的拆分

例6 若有1克砝码3枚、2克砝码4枚、4克砝码2枚，问能称出那几种质量？各有几种方案？

母函数为：

$$\begin{aligned}G(x)&=(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^4+x^8)\\&=1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7\\&\quad+5x^8+5x^9+5x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+4x^{13}\\&\quad+3x^{14}+3x^{15}+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}.\end{aligned}$$

即可称出1至19克的质量，不同的方案数即为对应项前面的系数。

整数的拆分

例7 把整数N无序拆分成整数$a_1,a_2,\ldots,a_n$的和，且不允许重复，求不同的拆分数。

这个问题对应于求不定方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=N,$$

$$x_i=0,1,\quad i=1,2,\ldots n,$$

的不同解的个数。

令b_N表示不同的拆分数，则其对应的母函数为：

$$G(x)=(1+x^{a_1})(1+x^{a_2})\ldots(1+x^{a_n}).$$

特殊的，当$a_i=i$时，对应的母函数为：

$$G(x)=(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n).$$

整数的拆分

例8 把整数 N 无序拆分成整数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的和，允许重复，求不同的拆分数。

这个问题对应于求不定方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = N,$$
$$x_i = 0,1,\cdots \quad i = 1,2,\ldots n,$$

的不同解的个数。

令 b_N 表示不同的拆分数，则其对应的母函数为：

$$G(x) = (1 + x^{a_1} + x^{2a_1} + \ldots.)(1 + x^{a_2} + x^{2a_2} + \ldots)$$
$$\cdot\ldots\cdot(1 + x^{a_n} + x^{2a_n} + \ldots.)$$

整数的拆分

$$G(x) = (1 + x^{a_1} + x^{2a_1} + \ldots.)(1 + x^{a_2} + x^{2a_2} + \ldots)$$

$$\cdot \ldots \cdot (1 + x^{a_n} + x^{2a_n} + \ldots.)$$

$$= \frac{1}{(1 - x^{a_1})(1 - x^{a_2}) \cdot \ldots \cdot (1 - x^{a_n})}.$$

特殊的，当a_i=i时，对应的母函数为：

$$G(x) = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)\ldots(1 - x^n)}.$$

整数的拆分

例9 把整数N无序拆分成奇整数的和，允许重复，求不同的拆分数。

这相当于在上例中把a_i取成奇数，因此拆分数对应的母函数为：

$$G_0(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)\cdots(1-x^{2n+1})\cdots}.$$

例10 把整数N无序拆分成2的幂次的和，求不同的拆分数。

这相当于把N拆分成1,2,4,8,...的和，但**不允许重复**。因此拆分数对应的母函数为：

$$G_t(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})\cdots$$

整数的拆分

例11 把整数*N*无序拆分1,2,...,*m*的和，允许重复，求不同的拆分数。若要求*m*至少出现一次呢？

若无要求，由例8可知其母函数为：

$$G_m(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}.$$

若要求*m*至少出现一次，则拆分数对应的母函数为：

$$\bar{G}_m(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)$$
$$\cdots(x^m+x^{2m}+\cdots)$$
$$=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}.$$

整数的拆分

显然有

$$\bar{G}_m(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} - \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

$$= G_m(x) - G_{m-1}(x).$$

这个等式的组合意义很明显：整数*n*拆分成1到*m*的和的拆分数减去拆分成1到*m*-1的和的拆分数，即为至少出现一个*m*的拆分数。

整数的拆分

定理1 整数拆分成不同整数的和的拆分数(不允许重复)等于剖分成奇数的剖分数(允许重复)。

设b_N表示N剖分成不同正整数和的剖分数，则其对应的母函数为：

$$G(x)=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)\cdots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)\cdots\left(1-x^{2n+1}\right)\cdots}.$$

整数的拆分

定理2 N 拆分成其他数之和但重复数不超过2，其拆分数等于它拆分成不被3整除的数的和的拆分数

设b_N表示N剖分成重复数不超过2的正整数之和的剖分数，则其对应的母函数为：

$$G(x)=(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)\cdots$$

$$=\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^{12}}{1-x^4}\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots=\prod_{3不整除k}\frac{1}{1-x^k}.$$

整数的拆分

定理3 *N* 被拆分成一些重复次数不超过*k*次的整数的和，其拆分数等于被拆分成不被*k*+1除尽的数的和的拆分数

定理4 对任意整数*N*，它被无序拆分成2的幂次的和的拆分方式一定唯一。

$$G_t(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})\cdots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

整数的拆分

例12 若有1、2、4、8、16克的砝码各一枚，问能称出那几种质量？有几种可能方案？

$$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$$

$$= \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^8}{1-x^4}\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\frac{1-x^{32}}{1-x^{16}}$$

$$= \frac{1-x^{32}}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^{31}.$$

这说明用这些砝码可以称出从1克到31克的质量，而且方案都是唯一的。

实际上这说明整数的二进制表示是唯一的。