第5节　冲量与动量定理

一、动量： 表示物体运动状态的物理量。

定义：$\vec{p}=m\vec{v}$　　**矢量**　千克·米/秒（kg ·m / s）

动量与参考系和坐标系的选择有关。

二、冲量： 描述**力的时间累积作用**的物理量。

1. 恒力的冲量：$\vec{I}=\vec{F}\Delta t$　矢量，牛顿·秒（N ·s）。

2. 变力的冲量：　元冲量 $\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\mathrm{d}t$　$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\mathrm{d}t$

三、动量定理

牛顿第二定律：$\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ 改写为:

$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$ ——质点动量定理的**微分形式**

对上式积分：

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

——质点动量定理的**积分形式**

动量定理适用于惯性参考系，

在非惯性系中必须考虑惯性力的冲量。

四、平均冲力

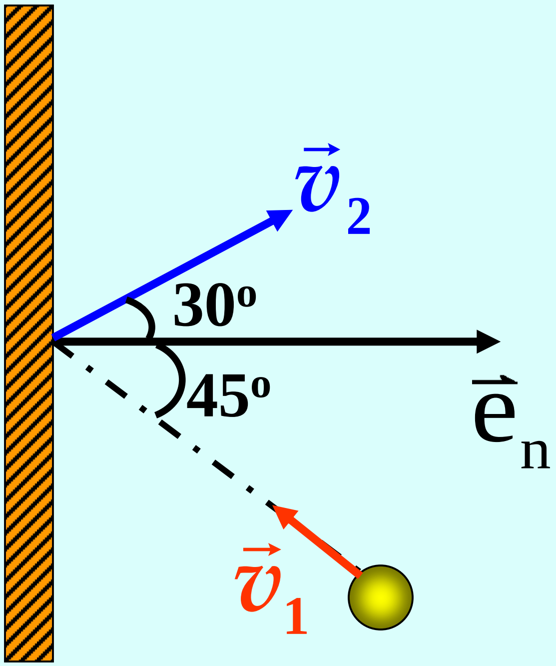
动量定理常用于碰撞和打击等过程。在这些过程中，物体间相互作用时间很短，但力却很大，且随时间变化，这种力叫**冲力**。

冲力的瞬时值很难确定，为了对冲力的大小有一个估计，引入**平均冲力**，它为冲力对碰撞时间的平均值：

$$\bar{\vec{F}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = \frac{\vec{I}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

分量式：$\bar{F}_x \Delta t = I_x = \Delta p_x$

例1. 质量为2.5g的乒乓球以10m/s的速率飞来，被板推挡后，又以20m/s的速率飞出。设两速度在垂直于板面的同一平面内，且它们与板面法线的夹角分别为45°和30°，求：（1）乒乓球得到的冲量；（2）若撞击时间为0.01s，求板施于球的平均冲力的大小和方向。



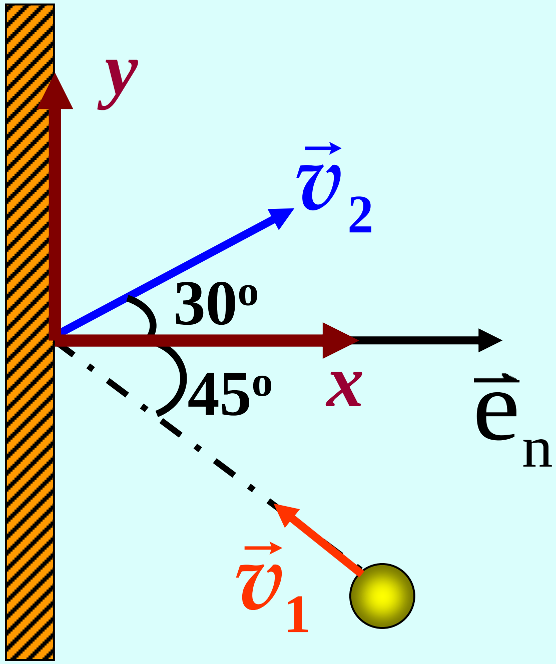
解： 取挡板和球为研究对象，由于作用时间很短，忽略重力影响。设挡板对球的冲力为 $\vec{F}$，

则有：$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\mathrm{d}t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

取坐标系如图，有：

$$I_x = \int F_x \mathrm{d}t = m v_2 \cos 30^\circ - (-m v_1 \cos 45^\circ) = \bar{F}_x \Delta t$$

$$I_y = \int F_y \mathrm{d}t = m v_2 \sin 30^\circ - m v_1 \sin 45^\circ = \bar{F}_y \Delta t$$



$$I_x = 0.061\ \mathrm{N\cdot s}\ ,\ I_y = 0.007\ \mathrm{N\cdot s}$$

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = 6.14 \times 10^{-2}\ \mathrm{N\cdot s}$$

$$\tan\alpha = \frac{I_y}{I_x} = 0.1148 \qquad \alpha = 6.54^\circ$$

α为 $\vec{I}$ 与x轴的夹角。

$$\bar{F}_x = 6.1\ \mathrm{N}\ ,\ \bar{F}_y = 0.7\ \mathrm{N} \qquad \bar{F} = \sqrt{\bar{F}_x^2 + \bar{F}_y^2} = 6.14\ \mathrm{N}$$

第6节　质点系的动量定理　动量守恒定律

一、质点系的动量定理

质点系： 由有相互作用的若干个质点组成的系统。

内力： 系统内各质点间的相互作用力。

外力： 系统外质点对系统内质点的作用力。

对由 n 个质点组成的质点系的第 i 个质点：

$$\vec{F}_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_i \qquad \vec{F}_i = \vec{F}_{i内} + \vec{F}_{i外}$$

对质点系所有的质点有：

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_{i内}}_{0} + \vec{F}_{i外})\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\vec{p}_i$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i}$$

质点系动量定理的微分形式

$$\boxed{\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}}$$

在t_1到t_2这段时间内：

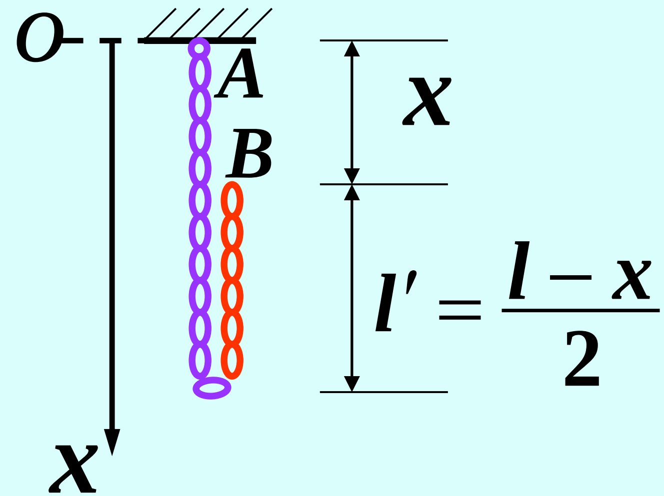
$$\left(\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\mathrm{d}t\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i1}$$

质点系动量定理的积分形式

系统的动量定理表明，一个系统的**总动量**的变化仅决定于系统所受的外力，而**与系统的内力无关**。因此，

在有些问题中，可以通过选择研究对象把一些比较复杂或未知的相互作用力化为内力来处理，从而使问题简化。

例2. P_{36} 例2—10： $\boxed{\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}}$



用质点系（**整段绳**）的动量定理。

受力：重力、支点拉力；

右半部自由落体的速度为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gx}$$

系统的总动量为：

$$p = \frac{l-x}{2}\lambda\sqrt{2gx}$$

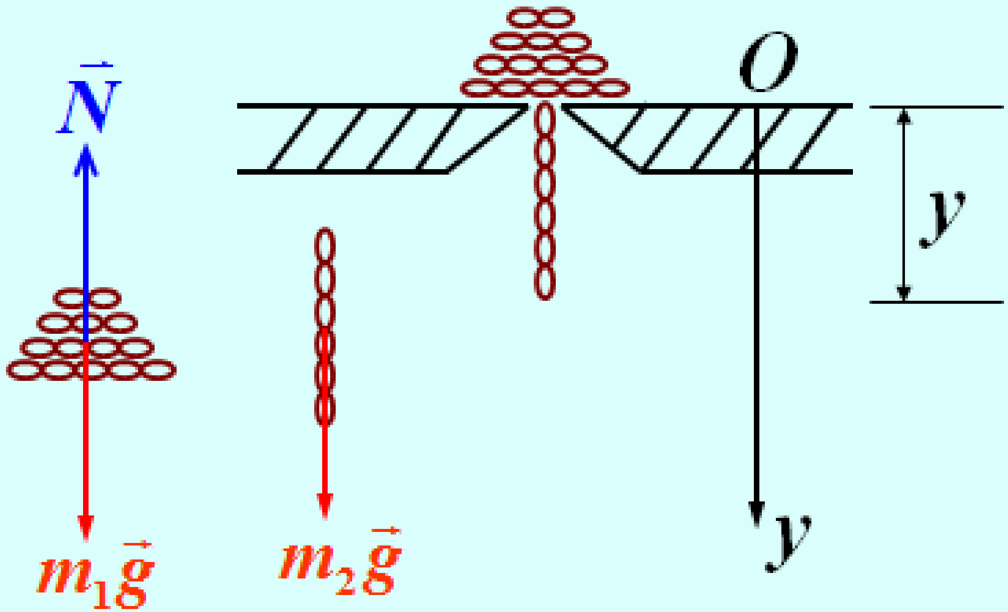
$\mathrm{d}t$ 时间后，系统动量的增量：

$$\mathrm{d}p = \left(-\frac{\lambda}{2}\sqrt{2gx} + \frac{l-x}{2}\lambda\frac{g}{\sqrt{2gx}}\right)\mathrm{d}x$$

由动量定理 $\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$，得：$(mg - T)\mathrm{d}t = \mathrm{d}p$

例3. 落链的速度。

均匀柔软链条由自身重量开始落下，求链条下落速度与落下距离之间的关系。



解： 对整个链条：

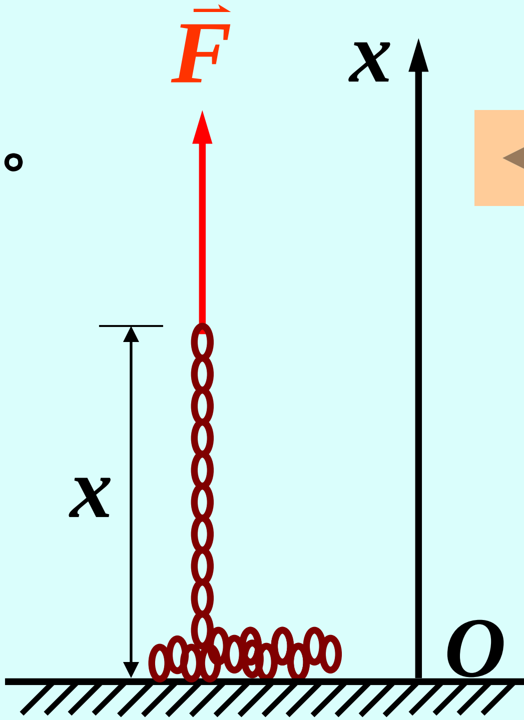
$$F = m_2 g = \lambda y g \qquad \mathrm{d}p = \mathrm{d}(m_2 v) = \lambda \mathrm{d}(yv) \qquad F\mathrm{d}t = \mathrm{d}p$$

$$\lambda y g \mathrm{d}t = \lambda \mathrm{d}(yv) \qquad (\mathrm{d}y) y g = \frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}y$$

$$y g \mathrm{d}y = \mathrm{d}(yv) \cdot v \qquad y^2 g \mathrm{d}y = \mathrm{d}(yv) \cdot (yv)$$

$$\int_0^y g y^2 \mathrm{d}y = \int_0^{yv} (yv) \mathrm{d}(yv) \qquad v = \sqrt{\frac{2}{3} g y}$$

例4. 一长为l、密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为λ，将其卷成一堆放在地面上。若手握链条的一端，以匀加速度a将其上提，当绳端提离地面高度为x时，$x < l$，求手的提力。



解： 以地面为原点，向上为x轴正方向。

设t时刻，链条运动端距原点高度为x，其速率为v。

解法1、以整个链条为研究对象：

系统t时刻总动量为：$p=\lambda x v$

系统受力：拉力$\vec{F}$沿x轴正向；重力$\lambda x\vec{g}$沿x轴负方向

地面上的链条受支持力和重力（平衡）。

据质点系动量定理：

$$F-\lambda xg=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

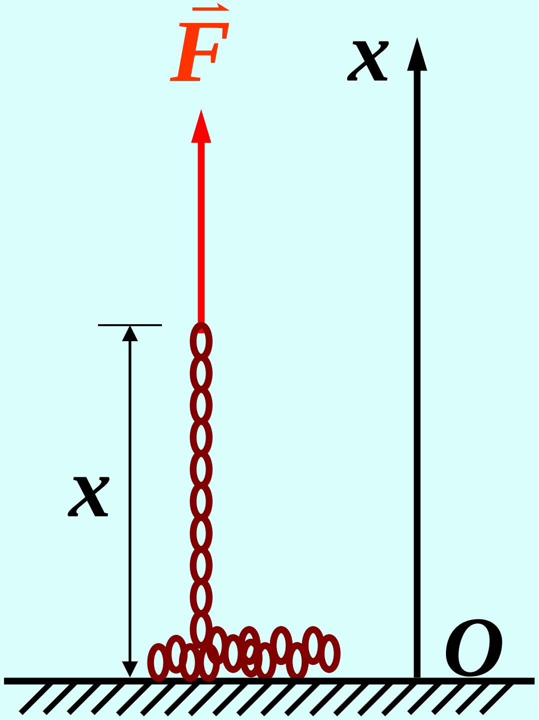
$$\boldsymbol{p}=\lambda xv$$

即：

$$F-\lambda xg=\lambda\frac{\mathrm{d}(xv)}{\mathrm{d}t}=\lambda xa+\lambda v^2$$

又因匀加速提起：$v^2=2ax$

所以 $F=3\lambda xa+\lambda xg$



$$\boxed{F - x\lambda g = \lambda x a + \lambda v^2}$$

解法2、研究被拉起的部分

设t时刻链条运动端距原点高度为x，速度为v，

经过Δt 后距原点的高度为$x+\Delta x$，速度为$(v+\Delta v)$。

该段链条受拉力和重力，据质点系动量定理有：

$$(F - x\lambda g)\Delta t = \lambda(x + \Delta x)\cdot(v + \Delta v) - \lambda x v$$

两边除以Δt 并令$\Delta t \to 0$，利用：$v = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

忽略高阶小量$\Delta v \cdot \Delta x$有：

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F - x\lambda g = \lambda v^2 + \lambda x a$$

二、质点系的动量守恒定律

$$\boxed{\left(\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\mathrm{d}t\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i2}-\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i1}}$$

当 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\mathrm{d}t=0$ 时 $\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i2}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_{i1}=$ 恒矢量

即：$\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i2}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i1}=$ 恒矢量

说明当质点系不受外力，或虽受外力，但外力的矢量和为零时，系统的总动量保持不变（守恒）。

应用动量守恒定律时，应注意：

1. 系统总动量守恒，但每个质点的动量可能变化。

2. 在碰撞、打击、爆炸等相互作用时间极短的过程中，外力比系统的内力小得多，往往可忽略外力。

可认为过程前后系统的总动量守恒。

3. 动量守恒可在某一方向上成立。

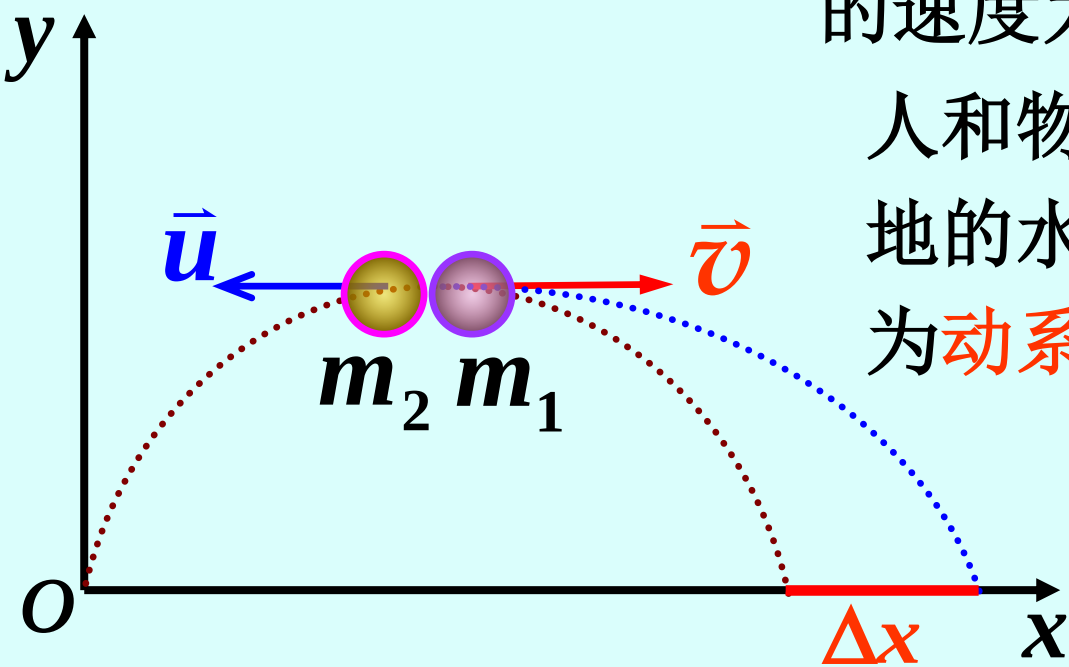
如当 $\sum_{i=1}^{n} F_{i外x} = 0$ 时 $\sum_{i=1}^{n} p_{ix} =$ 恒矢量

4. 定律中的速度应是对同一惯性系的速度，动量和应是同一时刻的动量之和。

5. 动量守恒定律在**微观**、**高速**领域仍适用。是自然界最基本的普适定律之一。

6. 动量守恒定律只适用于惯性系。

例5. P_{53} :2—28　**解：** 人和物体分离前沿水平方向的速度为：$v_{0x}=v_0\cos\theta$



人和物体分离时，设物体对地的水平速度为 $\vec{v}'$。以人为动系，物体为运动物体。

速度变换式：

$$\vec{v}'=\vec{u}+\vec{v}$$

$$v'=-u+v$$

人和物体分离前后，只受到竖直方向的重力作用，沿水平方向动量守恒。

$$(m_1+m_2)v_0\cos\theta=m_1v+m_2(v-u)$$

$$v=v_0\cos\theta+\underbrace{\frac{m_2}{(m_1+m_2)}u}_{\Delta v}$$

$$\Delta x=\Delta v\cdot v_0\sin\theta/g$$

三、变质量问题——火箭飞行原理

设t时刻火箭质量为m，取为研究的质点系。

t时刻动量：$\vec{p}_1 = m\vec{v}$

(此处$\mathrm{d}m<0$)

$t+\mathrm{d}t$时刻动量：$\vec{p}_2 = (m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})+(-\mathrm{d}m)\vec{v}'$

$(\vec{v}'=\vec{u}+\vec{v})$

系统受外力：$\vec{F}$

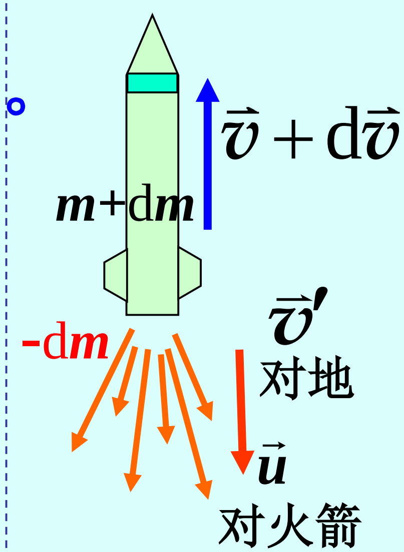
由动量定理：$\vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

$$= (m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) + (-\mathrm{d}m)(\vec{u}+\vec{v}) - m\vec{v}$$

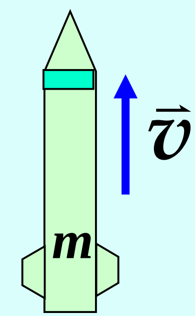
$$= m\mathrm{d}\vec{v} - \vec{u}\mathrm{d}m$$

火箭发动机的推力

火箭方程：$\vec{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \boxed{\vec{u}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$ 密歇尔斯基方程



$t+\mathrm{d}t$ 时刻



t 时刻

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

自由空间：$\vec{F} = 0$

$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{u}\dfrac{\mathrm{d}m}{m}$　　选$\vec{v}$ 的方向为x轴正向，标量式为

$\displaystyle\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = \int_{m_0}^{m} -u\frac{\mathrm{d}m}{m}$　　$v - v_0 = -u\ln\dfrac{m}{m_0}$

$v = v_0 + u\ln\dfrac{m_0}{m}$　　**质量比越大，火箭获得的速度越大** ⟹ **多级火箭**

火箭发动机的推力：$F_{推} = u\boxed{\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$　燃烧速率

如 $u = 2000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 300\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$，　$F_{推} = 6\times10^{5}\ \mathrm{N}$

例6. 在无作用力的空间中，卫星扫过静止的星际碎片（碎片附着于卫星上）时，它的质量变化率为 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=kv$ 。这里M是任意t时刻卫星的质量，v是任意t时刻卫星的速率，k为常量，它取决于卫星扫过体积的截面积。求卫星的加速度。

解：　由密歇尔斯基方程：$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}-\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$

写其沿任意t时刻卫星运动方向的一维标量式：

$$0=M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-(-v)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

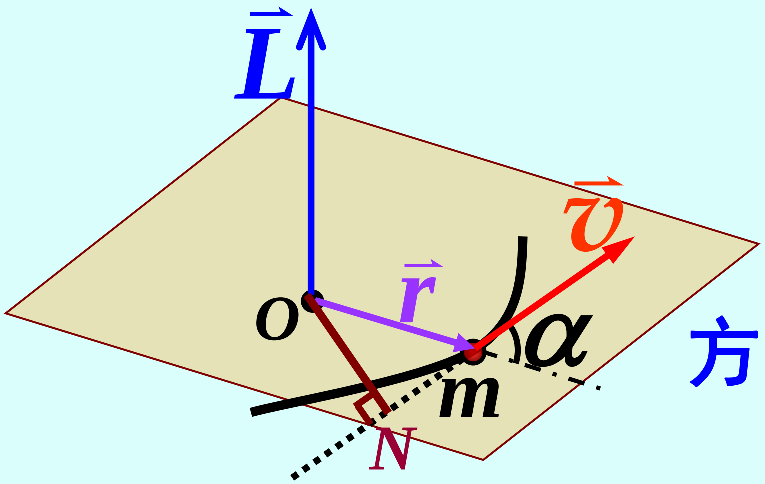
得卫星的加速度：$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{v}{M}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\frac{kv^2}{M}$

第7节　角动量定理　角动量守恒定律

一、质点的角动量

描写质点**转动状态**的物理量。

1. 定义： 质点对定点O的角动量：

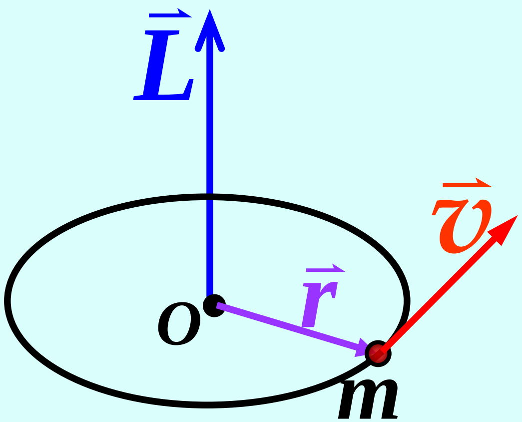


$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$$ **矢量**

大小： $L = rp\sin\alpha$

方向： 垂直于 $\vec{r}$ 和 $\vec{p}$ 所决定的平面，指向用右手螺旋法则确定。

单位： kg·m^2/s

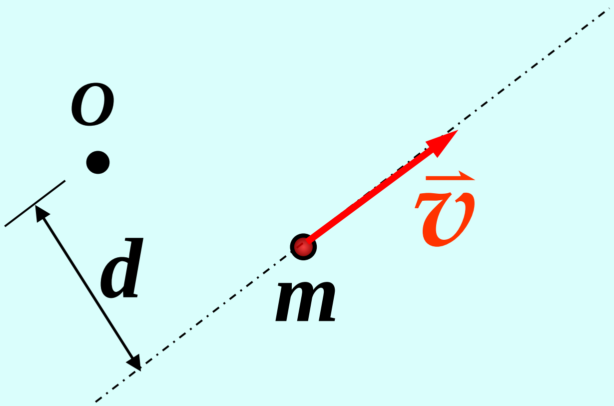


2. 圆周运动质点对圆心的角动量：

$$L=rp=mrv=mr^2\omega$$

$$\boxed{\vec{L}=mr^2\vec{\omega}}$$

角动量与参考系以及定点O有关。



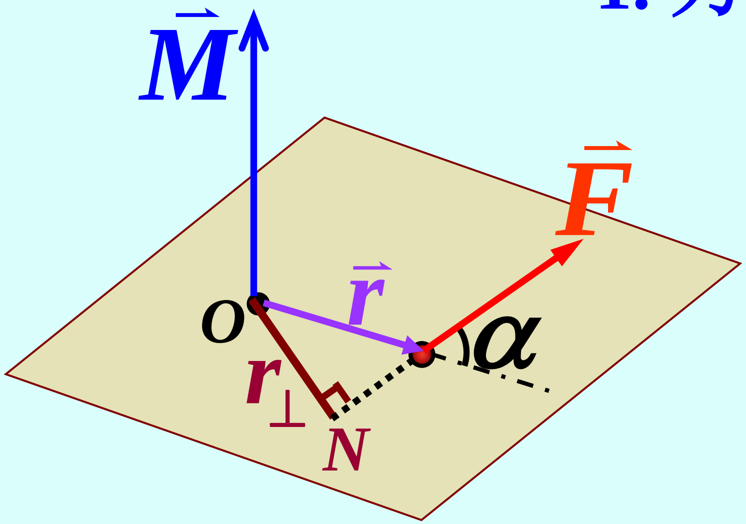
$$L = mvd$$

例7. 一质量为m的质点沿着一条空间曲线运动，该曲线在直角坐标下的矢径为：

$$\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$$ 其中a、b、ω 皆为常数，求该质点对原点的角动量。

答案： $\vec{L} = mab\omega\vec{k}$

二、角动量定理



1. 力矩： 力对定点O的力矩定义为：

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$ **矢量**

大小： $M=rF\sin\alpha=r_\perp F$

$r_\perp$称为**力臂**。

方向由右手螺旋法则确定。

力矩与参考点O有关。

当力的作用线通过参考点时，力对该参考点的力矩为零。

单位： 牛顿·米(N m)。

2. 质点的角动量定理：

由角动量的定义求其对时间的导数：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{v}\times(m\vec{v})+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}$$

即：$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

说明质点所受的**合外力**对**定点**的**力矩**等于质点对**同一定点**的**角动量对时间的变化率**。

质点的角动量定理的**微分形式**：$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\mathrm{d}t$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

质点的角动量定理的**积分形式**：

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} \mathrm{d}\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

式中$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t$是在 t_1 到 t_2 这段时间内作用在质点上的合力矩对某一定点的**冲量矩**。单位为牛顿·米·秒。

在 t_1 到 t_2 时间内作用在质点上的**合力矩**对某一定点的**冲量矩**等于质点在这段时间内对同一定点的**角动量的增量。**

角动量定理只适用于惯性系。在非惯性系中，必须考虑惯性力的力矩。

三、质点的角动量守恒定律

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

当 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$时，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$， $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=$ 常矢量

当质点所受的**合外力对定点的力矩等于零**时，质点对该点的**角动量守恒**。

分量式： 若 $M_l=0$，则 $L_l=$常量

角动量守恒定律是自然界又一条基本的普适定律。

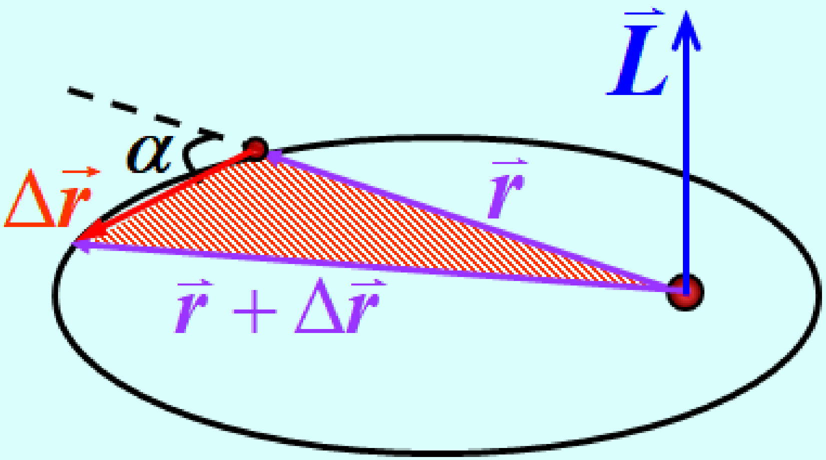
四、有心力

质点所受的力的作用线始终通过某固定点，该力为**有心力**，该点称为**力心**。

由于有心力对力心的力矩为零，**质点对该力心的角动量一定守恒。**

可用以研究质点绕固定点运动的情况，如行星、卫星的运动，电子绕原子核的运动等。

例 8. P_{38}：2－13



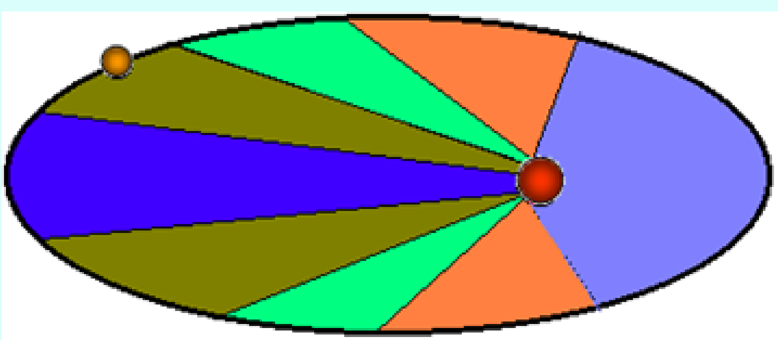
行星对太阳中心的角动量守恒：

行星绕太阳的运动是平面运动。

$$L = mvr\sin\alpha = m\frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t}r\sin\alpha$$

$$= 2m\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}|\Delta\vec{r}|r\sin\alpha}{\Delta t}$$

$$= 2m\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = 2m\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \text{常量}$$



五、质点系的角动量定理和角动量守恒定律

质点系对定点的角动量：

$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i$$

对时间求导：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$$

质点的角动量定理：$\boxed{\vec{M}_i=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}}$

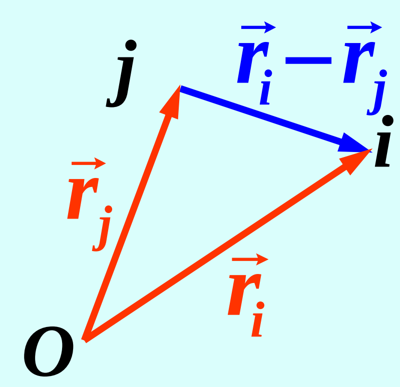
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \vec{r}_i\times(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})$$

一对内力矩矢量和：

$$\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}$$
$$=(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{f}_{ij}$$

$$=\underbrace{\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i}_{\text{合外力矩 }\vec{M}}+\underbrace{\sum_i \vec{r}_i\times(\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})}_{\text{内力矩的矢量和}}$$

$=0$

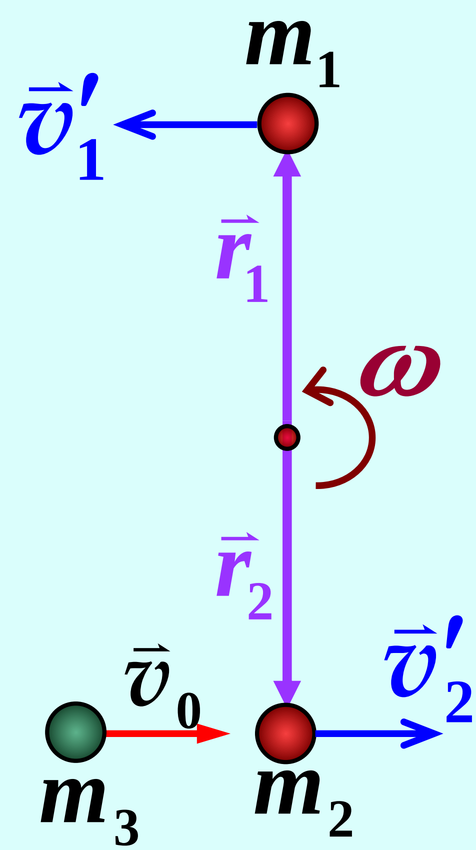


$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$ ——质点系的角动量定理

若 $\vec{M}=0$，则 $\vec{L}=$常矢量 。 质点系的角动量守恒定律

仍有分量式成立：若 $M_l=0$，则 $L_l=$常量

例9. 两小钢球固定在长为 a 的轻质硬杆的两端，杆可绕其中心轴自由转动。杆原来静止。另一泥球以水平速度 $\vec{v}_0$ 垂直于杆的方向与 m_2 发生碰撞，碰后两者粘在一起。设 $m_1=m_2=m_3$，求碰撞后杆转动的角速度。



对轴的角动量守恒！

$$m_3 v_0 r_2=(m_3+m_2)v_2' r_2+m_1 v_1' r_1$$

$$\frac{a}{2}v_0=2\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\omega+\left(\frac{a}{2}\right)^2\omega$$