本节课作业

P65: **10-T14~T17**

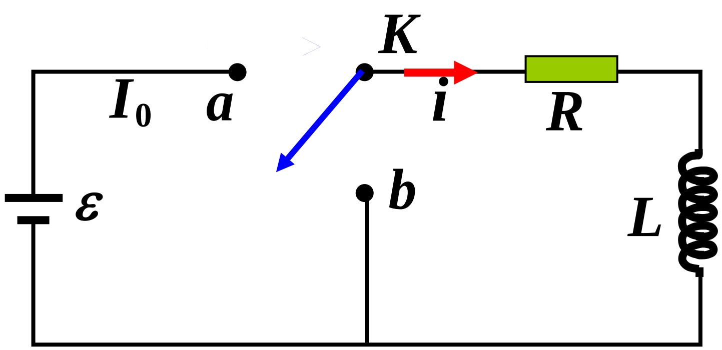
上节课的主要内容

●自感 $L = \Psi / I$ $\qquad \varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

●互感 $\Psi_2 = M i_1$ $\qquad \varepsilon_M = -M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $\qquad M_{12} = M_{21} = M$

$\Psi_1 = M i_2$

●自感电路



$$i = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

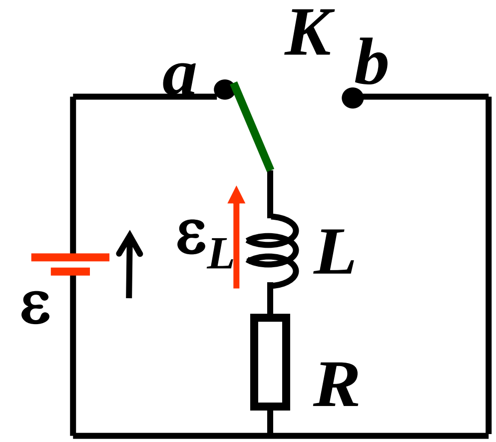
$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

●磁能

七. 磁场的能量

1. LR电路中的能量转换



电路在建立稳定电流的过程中
电源力克服自感电动势 ε_L做功

$\xrightarrow{\text{能量}}$ 储存 L中

$A = q\Delta V$

当电流以$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t>0$变化时，电流变化$\mathrm{d}i$，
电源克服ε_L做功为$\mathrm{d}A$： $\mathrm{d}A=-\varepsilon_L\mathrm{d}q=-\varepsilon_L i\mathrm{d}t$

$i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

$$\because \varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \therefore \mathrm{d}A=Li\mathrm{d}i$$

$$A=\int\mathrm{d}A=\int_0^I Li\mathrm{d}i=\frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{\text{储存}} \boxed{W=\frac{1}{2}LI^2}$$

电流稳定后，去掉电源，电流i 从$I\to0$，ε_L做功，释放存在线圈内的能量，把能量传给电阻，以热能形式散发：

$$Q=\int Ri^2\mathrm{d}t=\int R(I^2e^{-2\frac{R}{L}t})\mathrm{d}t$$

$$\boxed{i=Ie^{-\frac{R}{L}t}}$$

$$=RI^2\int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}LI^2\int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}\mathrm{d}(-\frac{2R}{L}t)=\frac{1}{2}LI^2$$

2. 磁能与磁能密度

由上可得，通有电流I的自感线圈中储能： $W=\frac{1}{2}LI^2$

类比电能存在电场中，可认为，磁能储存在磁场中。

那么，磁能W_m与 磁场（$\vec{B}$ 、$\vec{H}$ ），如何联系？

以长直螺线管为例： 已知，长螺线管n、l、S、I。

在前面已求得： $L=\frac{\Psi}{I}=\mu_0 n^2 lS.$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 lS\cdot I^2=\frac{1}{2}(\mu_0 n^2 I^2)lS=\frac{B^2}{2\mu_0}Sl=\frac{B^2}{2\mu_0}V$$

∵管内为均匀磁场，单位体积储存的能量为：

$$w_m=\frac{W_m}{V}=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ 磁场强度

以上结论对任意形式的磁场都成立。

一般地，非均匀场： $W_m=\int w_m \mathrm{d}V=\int_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V$

3. 磁能与自感系数

$$\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

若已知$L\rightarrow$ $W_m=\frac{1}{2}LI^2$ 反之，已知$W_m\rightarrow L$ 。

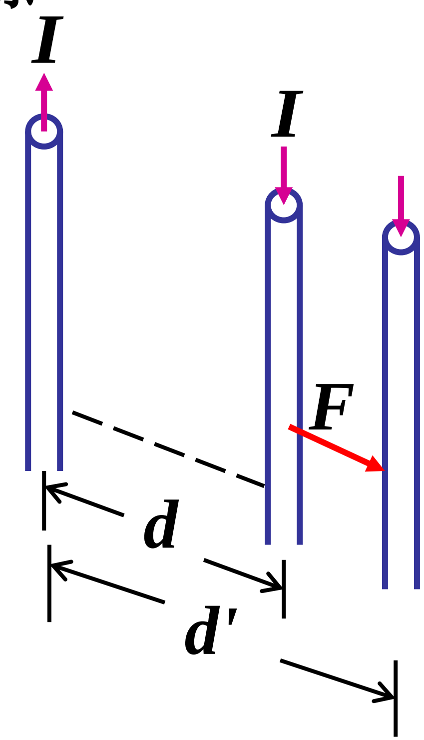
例： 两根平行输电线相距为 d，半径为 a，若维持 I 不变。

（可求得 ，单位长度上的自感 $L=\frac{\mu_0}{\pi}ln\frac{d}{a}$ ）

求：1）当$d\rightarrow d'$时，磁力做的功。

2）磁能增加或减少多少，说明能量来源?

解： 1）单位长度受力 $F=IlB=I\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



$$A=\int_d^{d'}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_d^{d'}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}ln\frac{d'}{d}>0$$

2）$\Delta W=W_{d'}-W_d=\frac{1}{2}L'I^2-\frac{1}{2}LI^2$

$$=\frac{1}{2}I^2\frac{\mu_0}{\pi}\left(\ln\frac{d'}{a}-\ln\frac{d}{a}\right)$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}\ >0$$

能量从何而来?

$$\boxed{A_{磁力}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}}\qquad\boxed{\Delta W=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}}$$

导线移动时，会产生感应电动势ε_i。而要维持I不变，电源力必须克服ε_L做功，从而将外电源的能量转变为磁能增量和磁力做功两部分。以下给出定量证明：

$$\varepsilon_L=-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}^{\nearrow 0}-I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\qquad\boxed{\Psi=Li}$$

外电源克服ε_L做功，

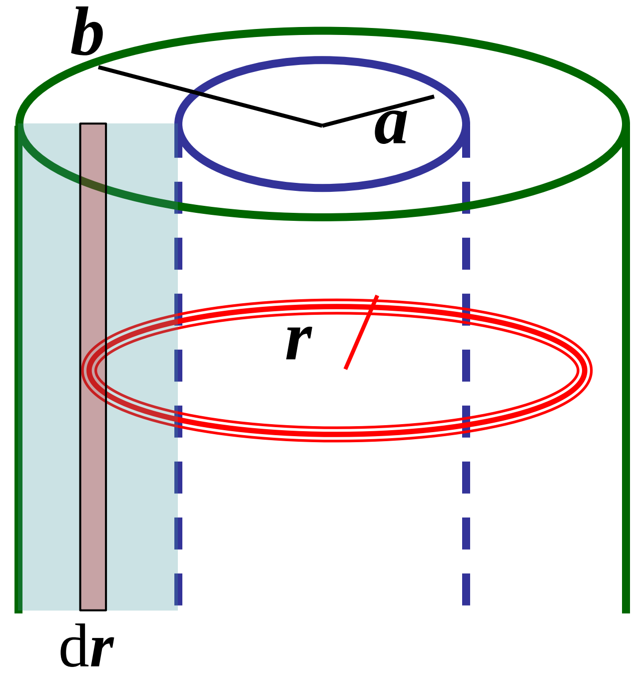
$$A_{外}=-\int\varepsilon_L\mathrm{d}q=\int I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\cdot I\mathrm{d}t=\int_L^{L'}I^2\mathrm{d}L=I^2(L'-L)$$

$$=I^2\left(\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d'}{a}-\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}\right)\qquad\boxed{L=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}.}$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{\pi}\ln\frac{d'}{d}$$

$$=A_{磁力}+\Delta W$$ 能量守恒

例： 同轴电缆，两圆柱面半径分别为a、b，充满磁介质μ，求单位长度W_m与L。



解： 设电缆通有电流I，

则两圆柱面间的磁场为：

$$B=\frac{\mu I}{2\pi r},\ H=\frac{B}{\mu}=\frac{I}{2\pi r}$$

$$\phi=\int_s \vec{B}\cdot d\vec{s}=\int_a^b \frac{\mu I}{2\pi r}dr$$

$$=\frac{\mu I}{2\pi}h\cdot\ln\frac{b}{a}$$

$$L=\frac{\mu}{2\pi}h\cdot\ln\frac{b}{a}$$

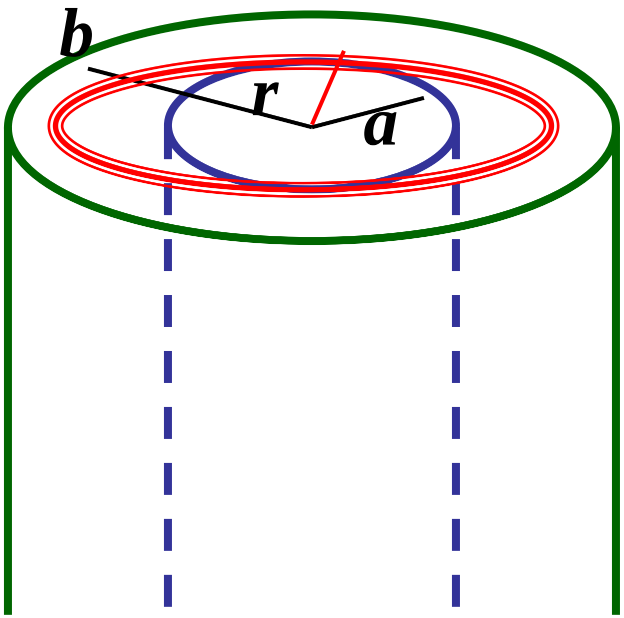
$$W_m=\int\frac{1}{2}B\cdot H dV=\frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$\boxed{W_m=\frac{1}{2}LI^2} \qquad W_m \rightarrow L \qquad L=\frac{2W_m}{I^2}$$

例： 同轴电缆，两圆柱面半径分别为a、b，充满磁介质μ，求单位长度W_m与L。

解： 设电缆通有电流I，

则两圆柱面间的磁场为：



$$B=\frac{\mu I}{2\pi r},\ H=\frac{B}{\mu}=\frac{I}{2\pi r}$$

$$W_m=\int\frac{1}{2}B\cdot H\,\mathrm{d}V$$

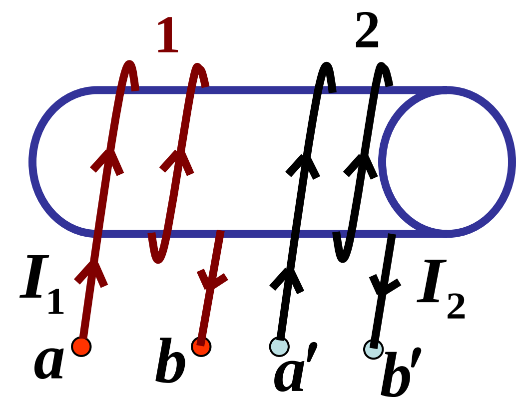
$$=\int\frac{1}{2}\frac{\mu I}{2\pi r}\frac{I}{2\pi r}2\pi r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$L=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{2\mu I^2}{4\pi I^2}\ln\frac{b}{a}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$W_m=\int w_m\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V$$

例：通过计算载流回路的磁场能量，证明两回路间的互感系数相等。



证明： 设线圈1、2开始时均是开路状态。

先接通线圈1的电源，使其电流由0增加到I_1。

在此过程中，电源克服线圈1的自感电动势做功储存到磁场中的能量为：

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

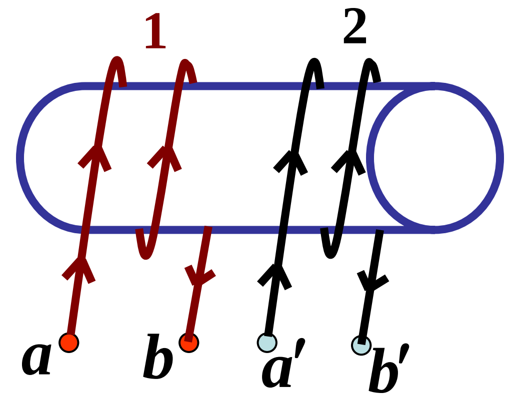
再接通线圈2的电源，使其电流由0增加到I_2，则线圈2中储存的磁场能量为：

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

在线圈2中的电流增大过程中，会在线圈1中产生互感电动势：

$$\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

例： 通过计算载流回路的磁场能量，证明两回路间的互感系数相等。



调节线圈1的外接电源来克服此互感电动势做功，以使线圈1的电流保持为I_1不变。

则由外接电源做功储存到磁场中的能量为：

$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$W_{21} = \int -\varepsilon_{21} I_1 \mathrm{d}t = \int M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} I_1 \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{I_2} M_{21} I_1 \mathrm{d}i_2 = M_{21} I_1 I_2$$

系统的磁场中储存的总能量为：

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2}$$

同理，先接通线圈2的电源，再接通线圈1的电源。

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{12} = M_{21}}$$

八、麦克斯韦方程组

$(\vec{D}=\varepsilon\vec{E})$

$(\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu})$

1. 静电场、稳恒磁场的普遍规律及推广

静电场

$$\left\{\begin{array}{l}\oint\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum q_i \\ \oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l}\Longrightarrow\ \oint\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum q_i \\ \Longrightarrow\ \oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\end{array}$$

稳恒磁场

$$\left\{\begin{array}{l}\oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0 \\ \oint\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\sum I_i\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l}\Longrightarrow\ \oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0 \\ \Longrightarrow\end{array}$$

$\vec{E}$、$\vec{B}$不随时间变化 $\xrightarrow{\text{推广}}$ $\vec{E}$、$\vec{B}$随时间变化

麦克斯韦完成了此推广，得到了麦克斯韦方程组。

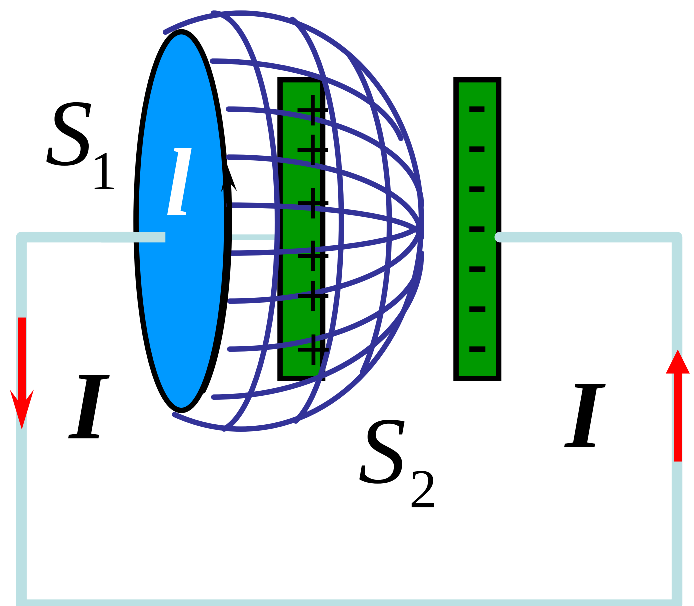
那么，如何做？

2. 位移电流

安培环路定理 $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_i$

以L为边界作曲面s_1、s_2，

对回路L，由安培环路定理得



$$s_1: \oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=I$$

$$s_2: \oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=0$$

相矛盾！

怎么办？

麦克斯韦大胆假设：

，且 $I_D=I$.

位移电流

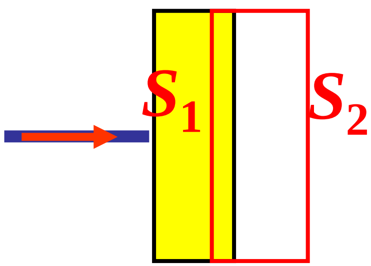
则对于 s_2： $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_D=I$

矛盾不复存在。问题是：I_D 到底是什么？

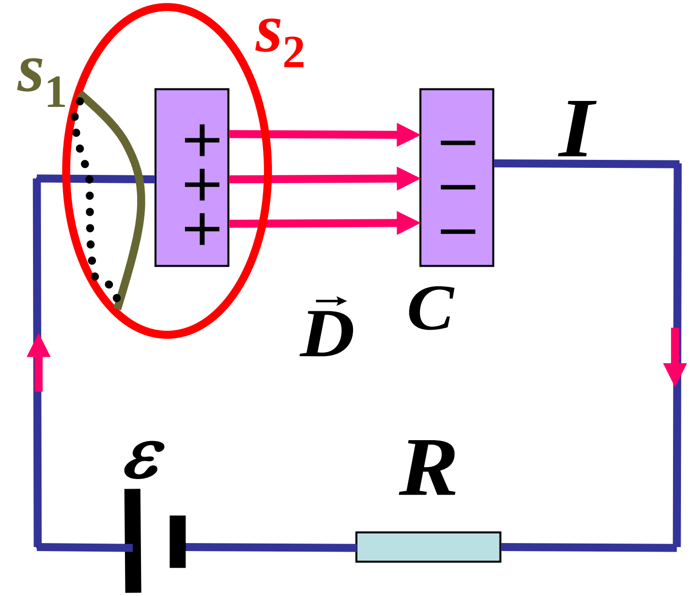
安培环路定理 $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_i$

在电容的充放电过程中，考虑左极板。

如图取高斯面，则由



$$\Phi_D=\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_i$$



可得：

0

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_{S_1}\vec{D}\cdot d\vec{S}+\int_{S_2}\vec{D}\cdot d\vec{S}=\Phi_{S_2}=q_{\text{极板}}$$

$$\boxed{I=\int \vec{j}\cdot d\vec{S}}$$

而穿过S_1的电流： $I=\frac{dq}{dt}=\frac{dq_{\text{极板}}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\int_{S_2}\vec{D}\cdot d\vec{S}\right)$

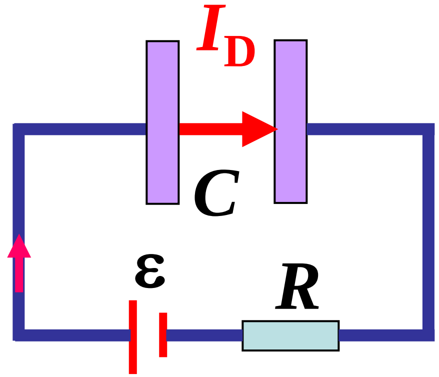
有电流的量纲

若S_2面不随时间t变化： $I=\int_{S_2}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\frac{d\Phi_{S_2}}{dt}$

$$\boxed{\vec{j}_D=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

定义： $I_D=\frac{d\Phi_D}{dt}=\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ 位移电流 显然，$I_D=I$.

定义位移电流： $I_D=\dfrac{d\Phi_D}{dt}=\int\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$



位移电流密度： $\vec{j}_D=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\left.\begin{array}{lllll}\text{电容充电：} & q\uparrow & D\uparrow & \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}//\vec{D} & \vec{j}_D//\vec{D}\ //I \\ \text{电容放电：} & q\downarrow & D\downarrow & \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\uparrow\downarrow\vec{D} & \vec{j}_D\uparrow\downarrow\vec{D}\uparrow\downarrow I\end{array}\right\}\ \vec{j}//I$$

$$\boxed{I=\int\vec{j}\cdot d\vec{S}}$$

结论：在电容器中，$I_{D总}=I$，极板中断的电流由I_D接替，保持电流的连续性。

$$\boxed{\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\neq 0,\ \vec{j}_D\neq 0}$$

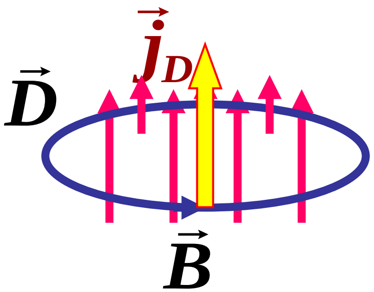
● 位移电流的性质

1）I_D的实质是变化的电场， I_D不产生焦耳热

2）I_D在激发磁场方面与I等效

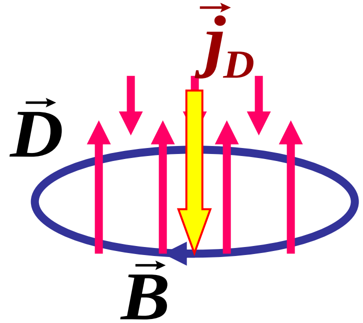
在极板间没有传导电流，但有I_D： $\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_D$

3）I_D激发的磁场$\vec{B}$与其成右手螺旋关系：



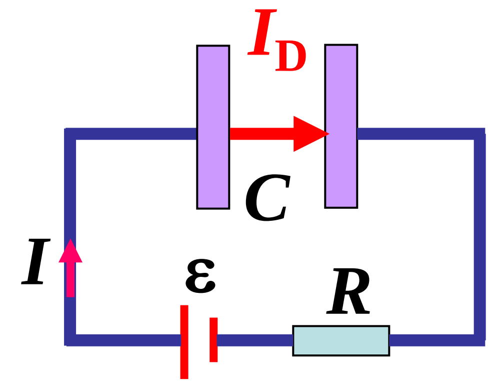
$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} > 0$

$\vec{j}_D // \vec{D}$



$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} < 0$

$\vec{j}_D \uparrow\downarrow \vec{D}$



3. 全电流定理

传导电流 + 位移电流 = 全电流

在非稳恒情况，往往是传导电流I与位移电流同时存在，两者之和的总的电流总是闭合的。

一般情况下的安培定律：

$$\boxed{\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}} \Longrightarrow$$

全电流定理

或：$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + I_D$

即：磁场强度$\vec{H}$沿任意闭合环路的积分等于穿过此环路的传导电流与位移电流的代数和。

例: 一空气平行板电容器，略去边缘效应。

1）充电完毕后，断开电源，然后拉开两极板。
此过程中两极板间是否有 j_D? $\longrightarrow$ $j_D=0$

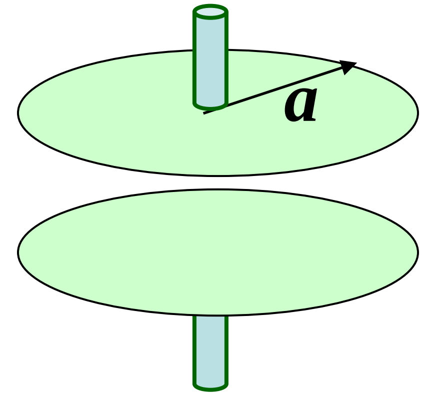
2）充电完毕后，仍接通电源，然后拉开两极板。
此过程中两极板间是否有 j_D? 为什么?

$j_D \neq 0$ $\quad \because V = E \cdot d$ $\quad V$不变，$d\uparrow$，$E\downarrow$ $\quad D$改变

$$I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

例:一圆形平行板电容器，两极板的半径为a。设其正在充放电，电荷按规律$Q=Q_0\sin\omega t$变化，忽略边缘效应求：两极板间任意点的j_D和B?

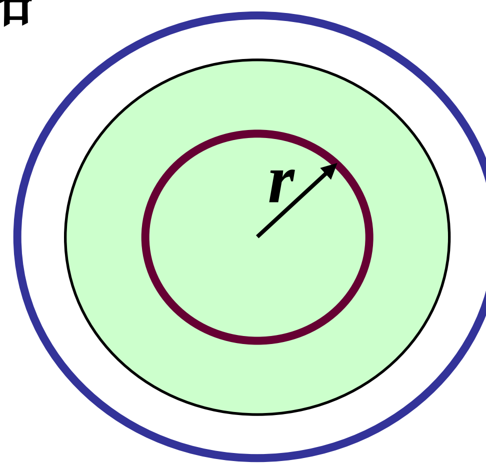


解:(1)平行板之间的电场为: $D=\sigma=\dfrac{Q}{S}$

$$j_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\omega Q_0}{S}\cos\omega t$$

j_D均匀分布在横截面上，与传导电流同向。

(2) 在极板间取半径为r的同心圆环为积分回路



根据全电流定理: $\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=I+I_D$

$r<a$时

$$\left.\begin{aligned}&\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=H\cdot 2\pi r\\&I+I_D=\int\vec{j}_D\cdot d\vec{S}=j_D\cdot\pi r^2\end{aligned}\right\}\ H=\frac{r}{2}j_D$$

0

$$B=\mu_0 H=\frac{\mu_0\omega Q_0}{2\pi a^2}r\cos\omega t$$

$r>a$时 $I+I_D=\int\vec{j}_D\cdot d\vec{S}=j_D\cdot\pi a^2$

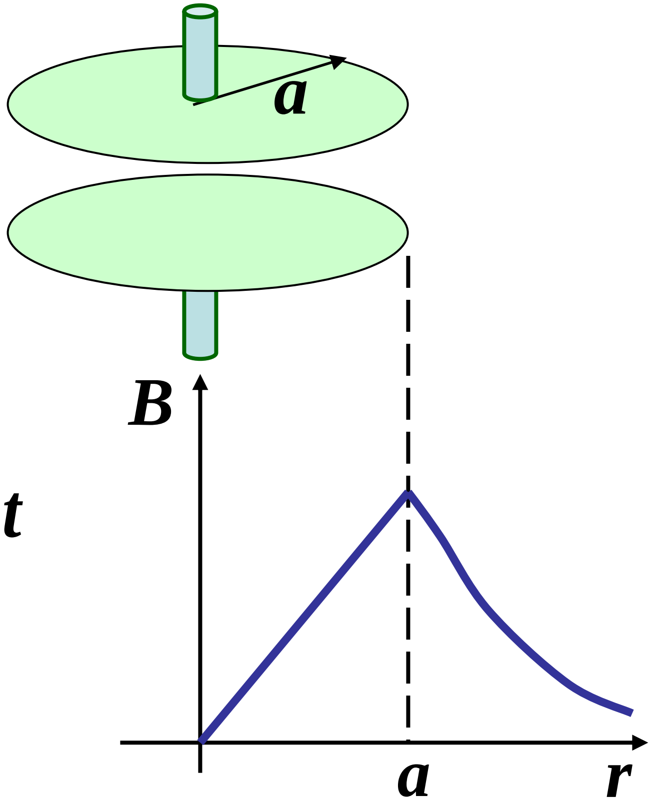
0

$$H=\frac{a^2}{2r}j_D\qquad B=\frac{\mu_0\omega Q_0}{2\pi r}\cos\omega t$$

$$\boxed{\vec{j}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$$

$$\begin{cases} B = \dfrac{\mu_0 j_D}{2} r & (r < a) \\ B = \dfrac{\mu_0 a^2 j_D}{2r} & (r > a) \end{cases}$$

$$j_D = \frac{\omega Q_0}{\pi a^2} \cos \omega t$$



$$r = a \quad B = B_{max} = \frac{\mu_0 j_D}{2} a = \frac{\mu_0 \omega Q_0}{2\pi a} \cos \omega t$$

一般，变化的电场产生的磁场很小。

如：a=5cm，$\dfrac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}$，若$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$=$10^{12}$ V/ms

B_{max}=3×10^{-7} T

地球表面地磁场的大小约5×10^{-5} T

例：加在平行板电容器极板上的电压变化率为1.0×10^6V/s. 在电容器内产生1.0A的位移电流，则该电容器的电容是多少？

解：

$$I_D=\int\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\left.\begin{aligned}&=S\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}\\&E=V/d\end{aligned}\right\}\therefore I_D=\frac{\varepsilon S}{d}\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\left.\begin{aligned}&I_D=\frac{\varepsilon S}{d}\frac{\partial V}{\partial t}\\&C=\frac{\varepsilon S}{d}\end{aligned}\right\}\therefore I_D=C\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\therefore\quad C=1uF$$

4、麦克斯韦方程组

★静电场和稳恒磁场的基本实验规律

(1) $\oint \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \sum q_i$

(2) $\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = 0$

(3) $\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = 0$

(4) $\oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = I$

★感应电场的新理论

(5) $\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

★位移电流的新思想

(6) $\oint \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = I_D = \frac{d\phi_D}{dt} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

麦克斯韦电磁理论建立的基础

麦克斯韦方程组：

$$
\begin{cases}
(1)\ \oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_i \\
(2)\ \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\
(3)\ \oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\
(4)\ \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \int \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}
\end{cases}
$$

***a*. 各方程的物理意义：**

(1)在任何电场中，通过任何闭合曲面的电通量等于该闭合曲面内自由电荷的代数和。 ——有源场

(2)在任何磁场中，通过任何闭合曲面的磁通量恒等于0。 ——无源场

(3)在一般电场中，电场强度$\vec{E}$沿任意闭合环路的积分，等于穿过该环路磁通量随时间变化率的负值。 ——有旋场

(4)磁场强度*H*沿任意闭合环路的积分，等于穿过该环路传导电流和位移电流的代数和。 ——有旋场

麦克斯韦方程组是电磁场理论的基础，其正确性已被大量实验所证实。麦克斯韦方程组已成为现代电子学、无线电学等学科的理论基础。

麦克斯韦预言了电磁波的存在，并计算出电磁波在真空的速度大小为：

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\approx 3\times 10^8\,\mathrm{m/s}$$

b. 麦克斯韦方程组的微分形式（自学）

$$\left\{\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\&\nabla\cdot\vec{B}=0\\&\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\&\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\right.$$