本节课作业

P63: **10-T10~T13**

上节课的主要内容

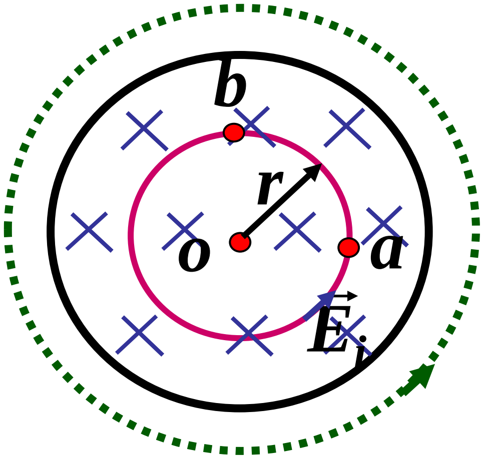
●法拉第电磁感应定律 $\boxed{\varepsilon=-\dfrac{d\Phi}{dt}}$

$$\mathrm{d}\phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{B}$$

●动生电动势 $\varepsilon_i=\int_L\vec{E}_k\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

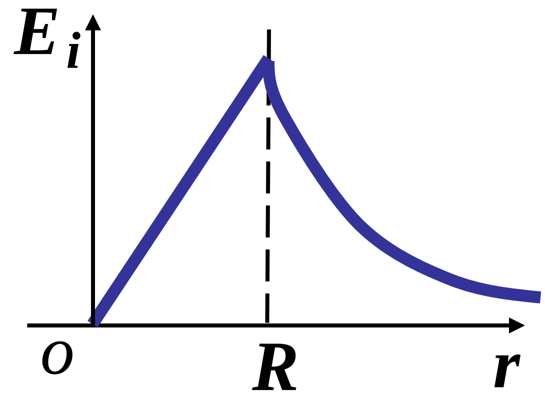
●感生电动势 $\oint\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

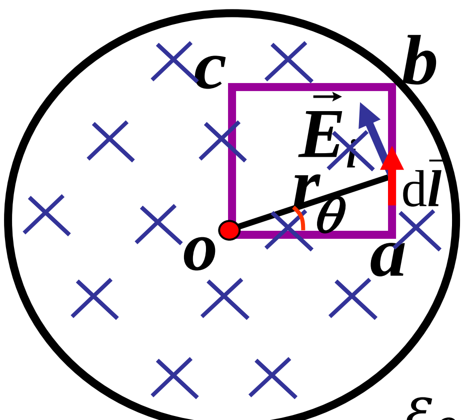
求一个轴对称磁场变化时的涡旋电场。已知磁场均匀分布在半径为R的范围内，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，而且大于零。

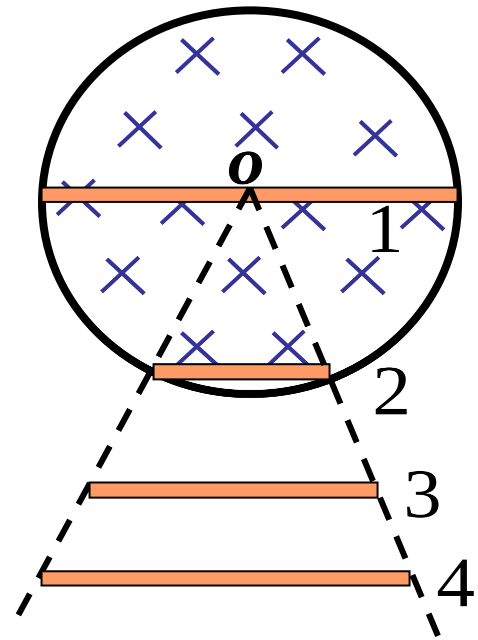


当$r<R$时：$E_i=\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

当$r>R$时：$E_i=\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$







$$\varepsilon_{oa}=\varepsilon_{oc}=0$$

$$\varepsilon_{bc}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}L^2$$

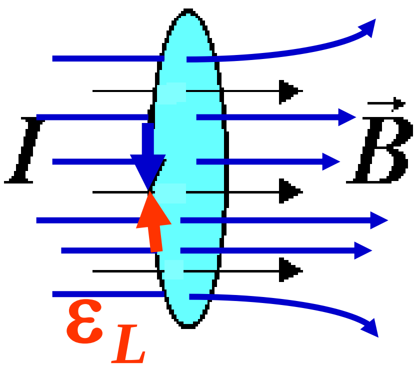
$$\varepsilon_3=\varepsilon_4>\varepsilon_2>\varepsilon_1=0$$

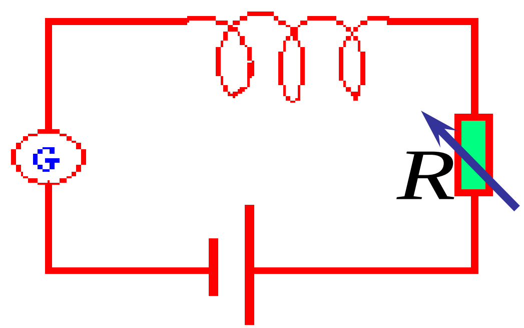
自感与互感

$$\vec{B}=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

1、自感（也称自感应）

由于通电线圈中电流发生变化导致电流产生的磁通量发生变化，而在线圈自身产生感应电动势的现象(自感)。





$$\begin{cases}\varepsilon_L=-\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\varepsilon_L=-N\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$

(1)自感电动势的大小

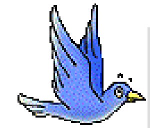
若回路中通有电流 I ，几何形状不变，空间没有铁磁质，根据毕奥—萨伐尔定律：

$$B\propto I,\varphi\propto I,\psi\propto I$$

$$\rightarrow\psi=LI$$

L称为自感系数、电感、自感

对一定几何形状的线圈，在一定的磁介质中（除铁磁质外）L 是常量。（L只与线圈几何形状和周围的磁介质有关，与电流无关）



$$\psi = LI$$

$$\varepsilon_L = -\frac{d\psi}{dt} = -(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt})$$

L 为常量时：$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}}$

(2)自感电动势的方向：反抗回路中电流的改变

$$\begin{cases} \text{电流增加时，自感电动势与原电流方向相反} \\ \text{电流减小时，自感电动势与原电流方向相同} \end{cases}$$

(3)自感系数“L”的定义：

$$\begin{cases} L = \Psi / I & \text{（普适）} \\ L = \left| -\dfrac{\varepsilon_L}{dI/dt} \right| & \text{（仅}L\text{为常量时）} \end{cases}$$

L的单位：亨利（H）

$1\ \mathrm{H} = 1000\ \mathrm{mH} = 10^6\ \mu\mathrm{H}$

注意：

（1）"L"的两个定义式只有在 L 是常量时是一致的。

（2）"L"是线圈**电磁惯性**的量度。

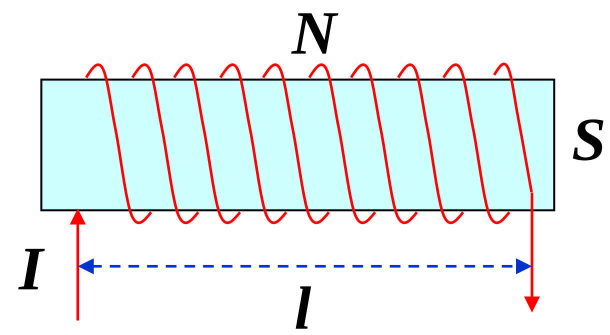
$$\begin{cases} F=ma \\ \varepsilon_L=-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

(4)自感系数 L 的计算：

例: 求细长直螺线管的自感系数（l、S、N）

假定螺线管通入电流 I，因管中各处的 $\vec{B}$ 是均匀的.

$$\psi=N\varphi=NBS=N\mu_0 nIS=\mu_0 IS\frac{N^2}{l}$$



真空中 $L=\dfrac{\psi}{I}=\mu_0 S\, {N^2}/{l}=\mu_0 n^2 V_{体}$

介质中 $\mu_0\rightarrow\mu_0\mu_r$

$$\boxed{L=\frac{\psi}{I}}$$

注意： （1）铁磁质不能用上式计算

（2）不仅线圈有自感，任何电路都有

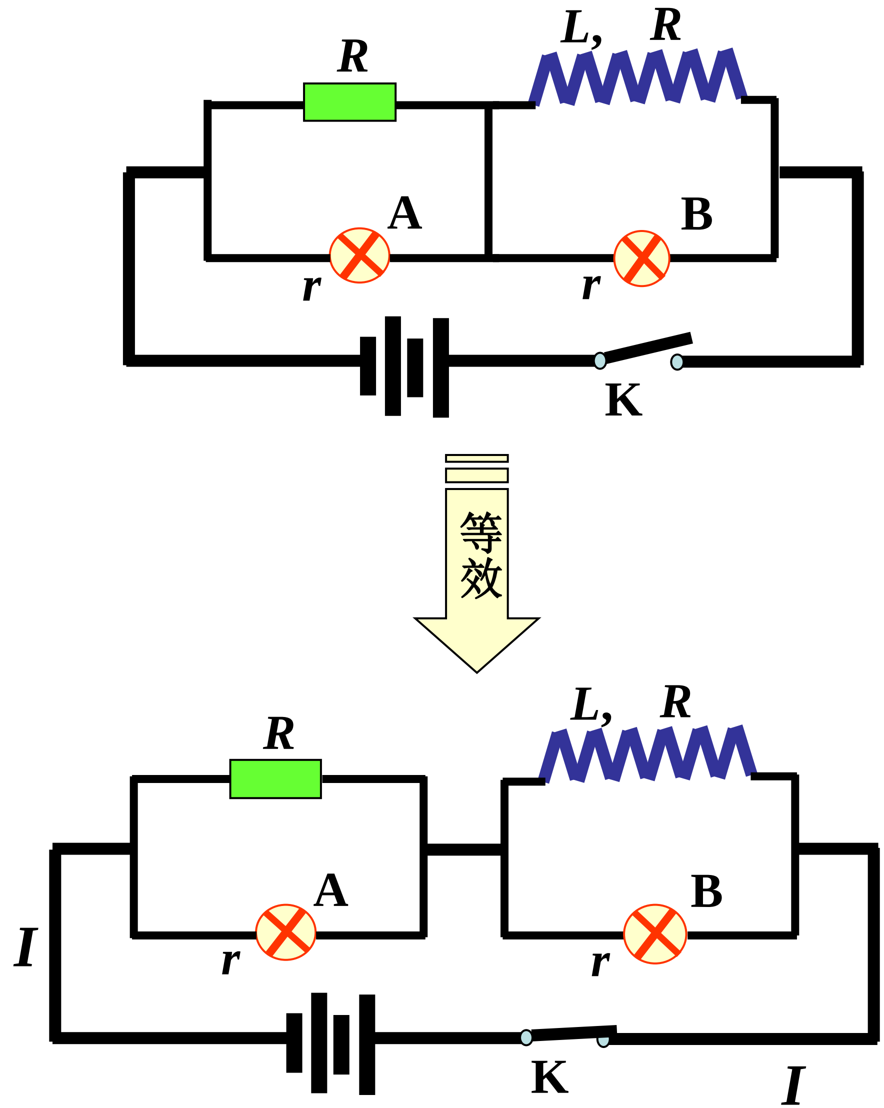
例： A、B是相同的两灯泡，内阻$r>>R$. 线圈的电阻为R，L很大。则下面正确的是[　　　].

(A) K接通时，$I_A<I_B$.

(B) K接通时，$I_A=I_B$.

(C) K断开时，A、B同时灭.

(D) K断开时，$I_A=I_B$.



解：

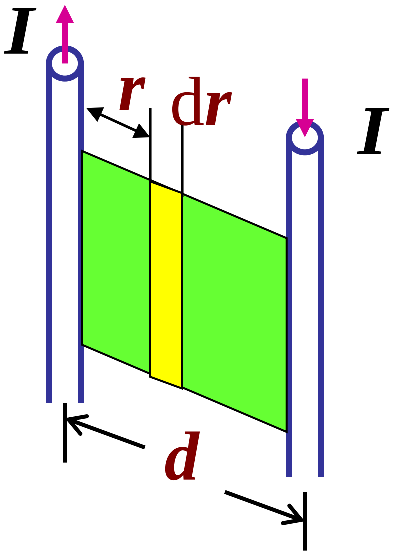
K接通时，因$r>>R$，故$I_A<<I$.

又因L很大，故 ε_L 大，
所以$I_L\approx 0$，$I_B\approx I$

故，K接通时，$I_B>I_A$.

K断开时，仍有$I_B>I_A$.

例：两根平行输电导线，中心距离为d，半径为a，求：两导线单位长度上的分布电感（$d>>a$）。



解：如图，设导线中有电流I.

单位长度上的磁通量：

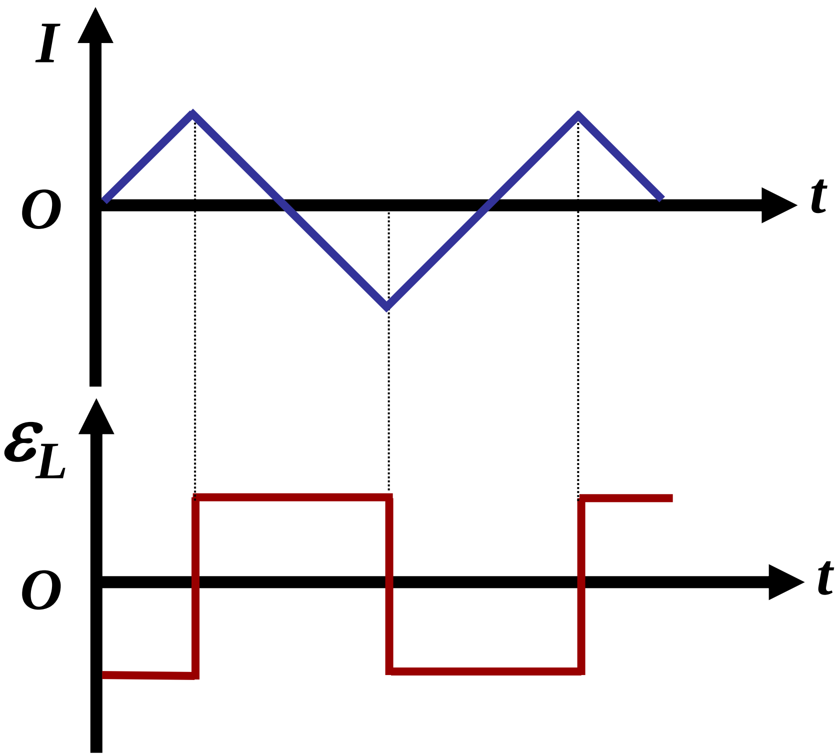
$$\Psi=\phi=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

$$=\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r+\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}\quad(d>>a)$$

例: 一线圈中通过的电流I随时间t变化的规律如图.试画出自感电动势ε_L随时间t变化的规律(以I的正方向为ε_L的正向).



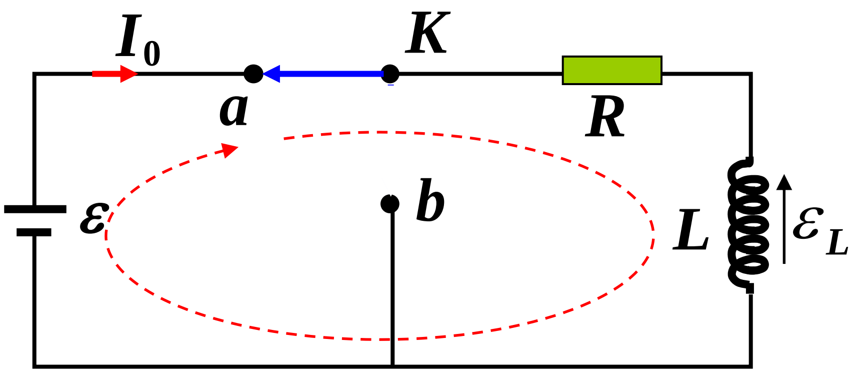
解: 根据

$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

可得左边的ε_L随t变化的曲线。

2、自感电路中电流的滋涨和衰减情况

“*LR*”电路的暂态过程：由于电感线圈对电流的阻碍作用，使电流的增减需要一个过程。



(I_0是稳定后的电流)

$I_0=\dfrac{\varepsilon}{R}$ (因为稳定时自感电动势为零)

滋涨的暂态过程：

电键拨到 *a* 后某瞬间，回路中的电流为 *i*, 电感线圈内自感电动势

$$\varepsilon_L=-L\frac{di}{dt}$$

$$V_a-iR-|\varepsilon_L|+|\varepsilon|=V_a$$

$$iR+|\varepsilon_L|-|\varepsilon|=0$$

$$iR+L\frac{di}{dt}-\varepsilon=0 \rightarrow \frac{L}{R}\frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon}{R}-i=I_0-i$$

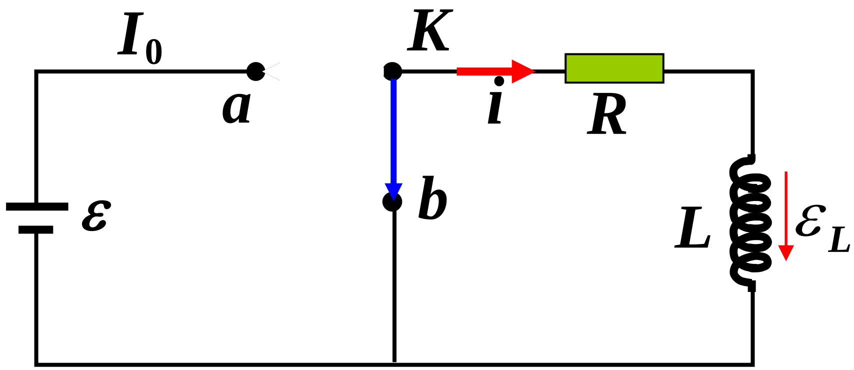
$$\therefore \frac{d(i-I_0)}{i-I_0}=-\frac{R}{L}dt$$

取 $t=0$ 时， $i=0$

$$\therefore \int_0^i \frac{d(i-I_0)}{i-I_0}=-\int_0^t \frac{R}{L}dt$$

$$\boxed{i=I_0(1-e^{-\frac{R}{L}t})}$$

衰减的暂态过程:



(I_0是稳定后的电流)

电键由 *a* 拨到 *b*后某瞬间，回路中的电流为*i*，电感线圈内自感电动势

$$\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$V_k-iR+|\varepsilon_L|=V_k \longrightarrow |\varepsilon_L|=iR$$

$$-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=iR$$

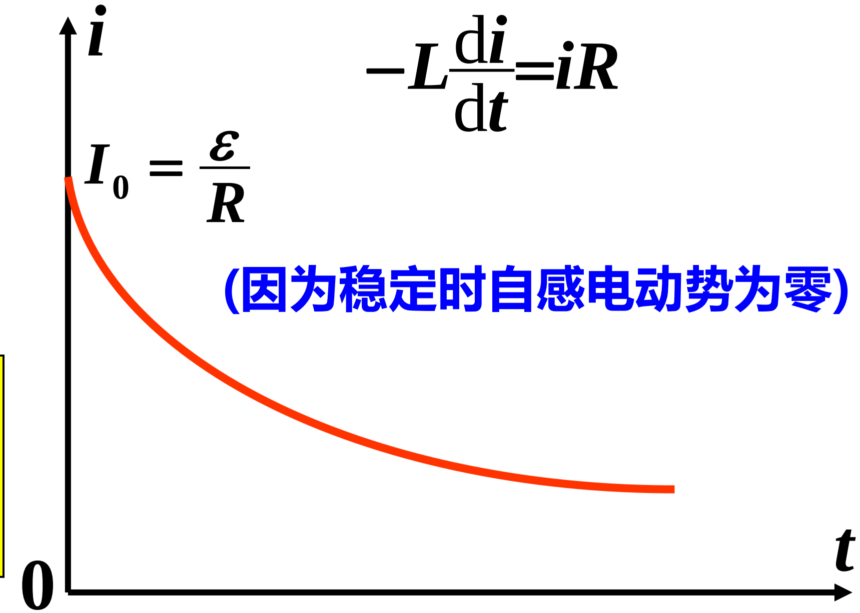
设 $t=0$ 时， $i=I_0$

$$\frac{\mathrm{d}i}{i}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

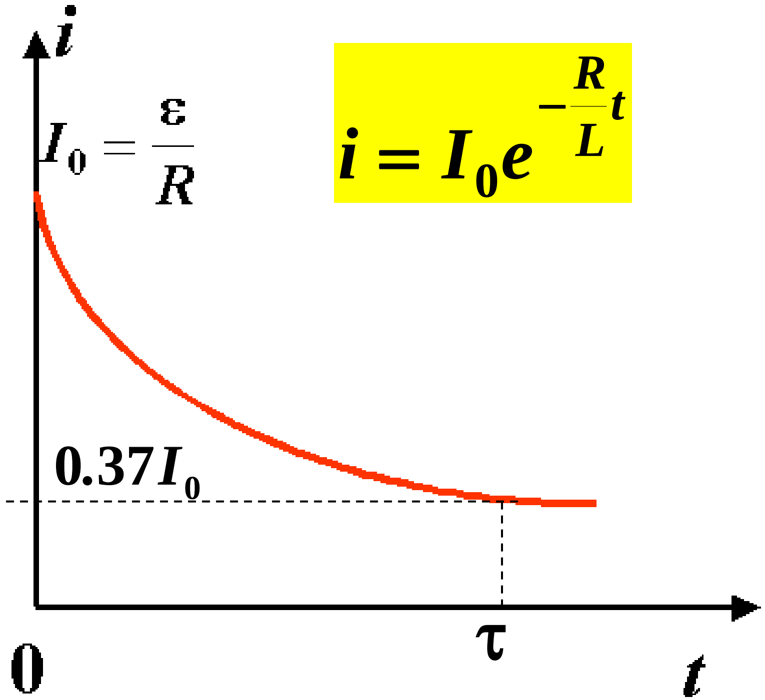
$$\int_{I_0}^{i}\frac{\mathrm{d}i}{i}=-\int_0^t\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$ln\frac{i}{I_0}=-\frac{R}{L}t$$

$$\boxed{i=I_0e^{-\frac{R}{L}t}}$$



(因为稳定时自感电动势为零)



$$i=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$$

电流 i 随时间指数形式地衰减.

当 $t=L/R$ 时， $i=I_0\frac{1}{e}$

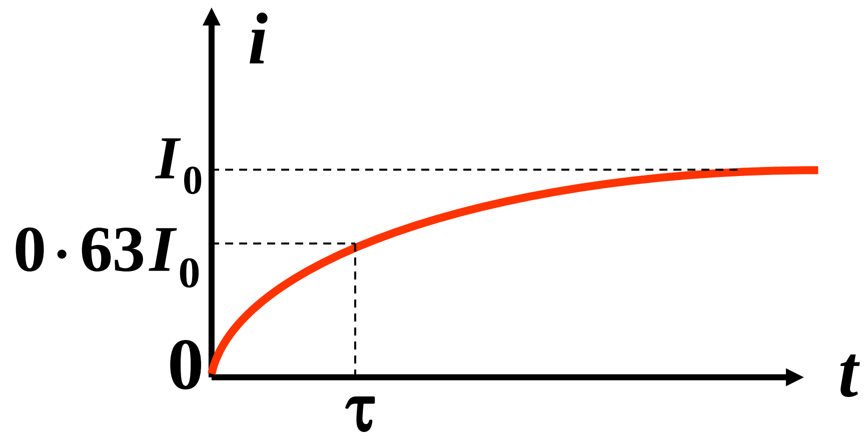
$\tau=\frac{L}{R}$ 称为电路的时间常数或弛豫时间

在L=1 亨利， R=1000 欧姆的电路中弛豫时间为1毫秒

注意

（1）滋涨的暂态过程：

$$i=I_0(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$



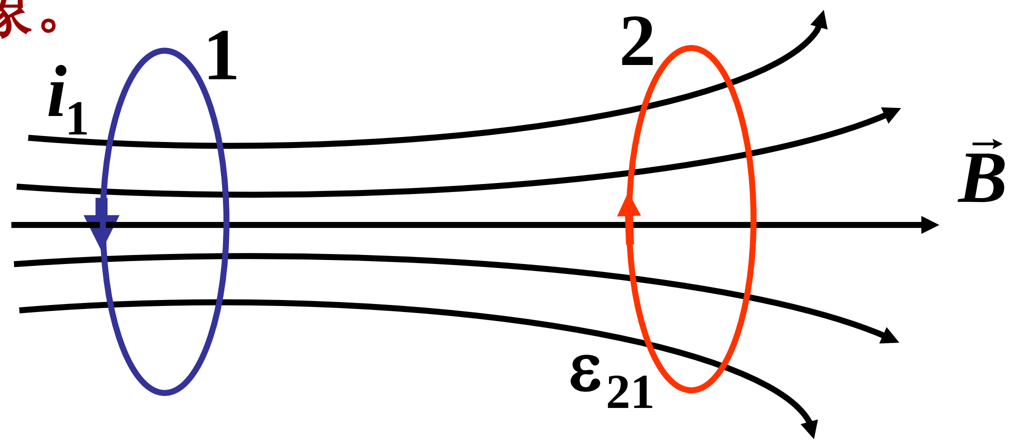
（2）断路时，必须采用逐渐增大电阻的方法

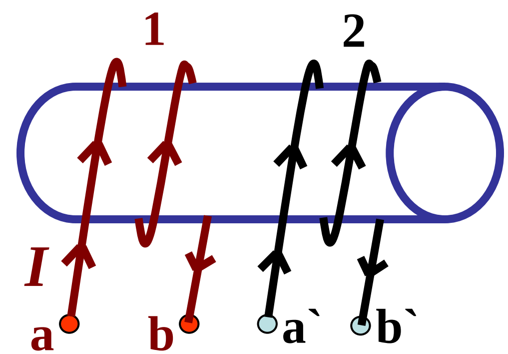
$$\boxed{i=I_0e^{-\frac{R}{L}t}} \quad \boxed{\varepsilon_L=-L\frac{di}{dt}}$$

$B \propto I, \varphi \propto I, \psi \propto I$

3、互感（也称互感应）

一个回路中的电流变化，在邻近的另一回路中产生感生电动势的现象。





根据毕奥—萨伐尔定律以及 $\varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ 知：$\psi = MI$

若两线圈的相对位置确定:

设L_1的电流为i_1在L_2中产生的磁通匝链数为ψ_2

$\because B_1 \propto i_1$， 则 $\Psi_2 \propto B_1 \propto i_1$， $\Psi_2 \propto i_1$

$\Psi_2 = M_{21} i_1$ 同理可得： $\Psi_1 = M_{12} i_2$

M_{ij}是比例系数——互感系数，简称互感。

M_{ij}与 $\left\{ \begin{array}{l} \text{两回路的位置有关} \\ \text{线圈的几何形状及介质}(\mu)\text{有关} \end{array} \right.$

互感系数M的单位： 亨利（H）

可证明对给定的一对导体回路有：$M_{12}= M_{21}=M$

物理意义：$M=\Psi /I$, 单位电流的磁场在另一线圈中产生的ψ

互感电动势：$\varepsilon_M=-\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-i\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$

当 M=常数时： $\varepsilon_M=-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$\varepsilon_2=-M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$

$\varepsilon_1=-M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$

方向？ $\updownarrow$ 楞次定律

互感的定义式:

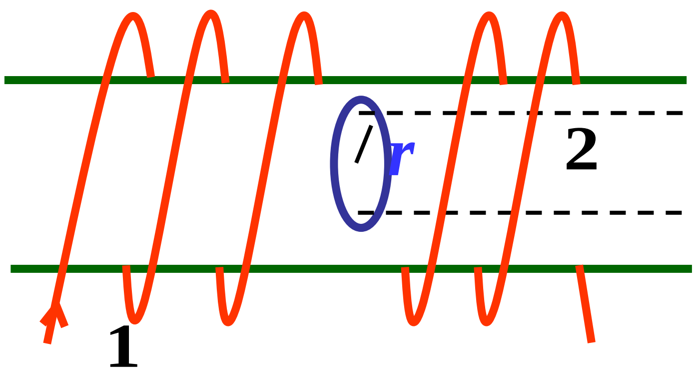
$$\varepsilon_M = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\Psi_2 = M i_1$$
$$\Psi_1 = M i_2$$

$$\longrightarrow \boxed{M = \begin{cases} \Psi_2/i_1 = \Psi_1/i_2 \\ \left|\dfrac{\varepsilon_2}{\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t}\right| = \left|\dfrac{\varepsilon_1}{\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t}\right| \end{cases}}$$ (普适)

例: 长直螺线管单位长度上有n 匝线圈，另一半径为r的圆环放在螺线管内,环平面与管轴垂直。求M。

解:



设螺线管通有i_1，则$B_1 = \mu_0 n i_1$。

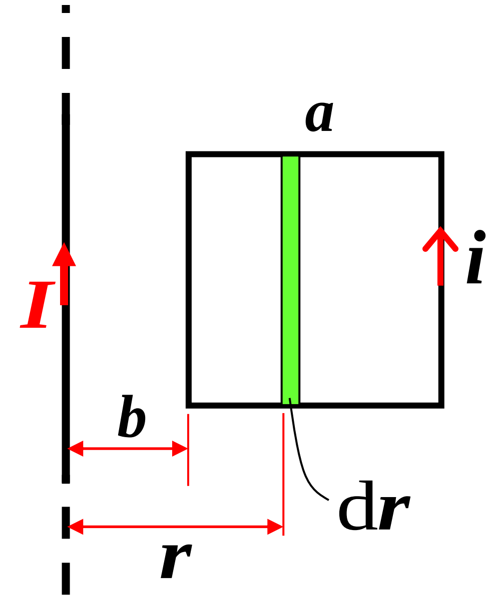
圆环中：$\psi_2 = B_1 \pi r^2 = \mu_0 n i_1 \pi r^2$

$$\therefore M = \psi_2/i_1 = \mu_0 n \pi r^2$$

● 原则上可设任一线圈产生磁场计算另一线圈的磁通量 $\psi \rightarrow M = \psi / i$。 但很多实际问题中$M$很难算出。

例： 载流正方形线圈旁有一无限长直导线。若线圈中有变化的电流i，求在无限长直导线中产生的感应电动势。

解： 直导线中的电动势是互感电动势。



$$\varepsilon = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad M = ?$$

设直导线中有电流I, 在线圈中

$$\phi = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot a\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\frac{b+a}{b}$$

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\frac{b+a}{b}$$

$$\therefore \varepsilon = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\ln\frac{b+a}{b}$$

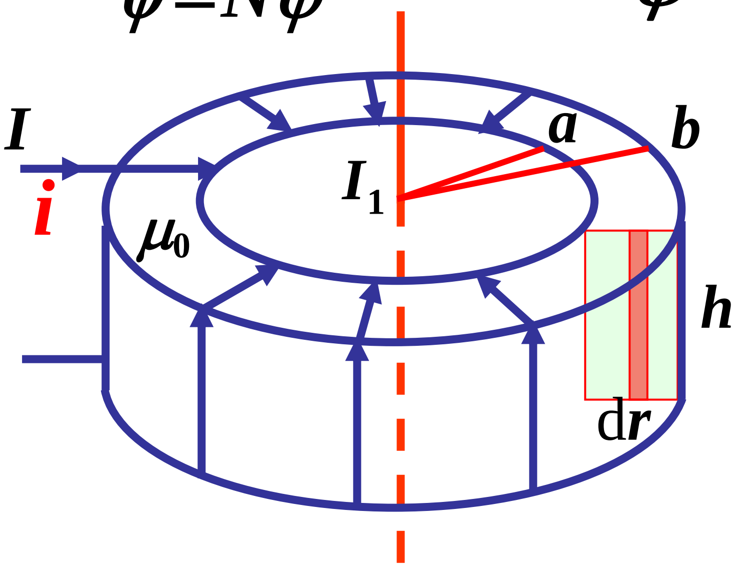
例：环形螺线管总匝数 N（如图）（1）求 L

安培环路定理

解：设线圈中通有电流 I.

$$\psi = N\varphi$$

$$\varphi = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\cdot h\,dr = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} h\cdot \ln\frac{b}{a}$$



$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\varphi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

（2）若中心有一无限长直导线，求M.

设直线中通电流 I_1 $\quad M = \psi_2 / I_1$

$$= \frac{N\varphi_2}{I_1} = \frac{N}{I_1}\cdot\int_a^b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cdot h\,dr = \frac{\mu_0 N}{2\pi} h \ln\frac{b}{a}$$

（3）若在螺绕环中通以交变 电流 $i = I_0 \cos\omega t$， 求在长直导线中的感应电动势.

$$\varepsilon = -M\frac{di}{dt} = +\frac{\mu_0 N h}{2\pi}\ln\frac{b}{a} I_0 \omega \sin\omega t$$

方向?