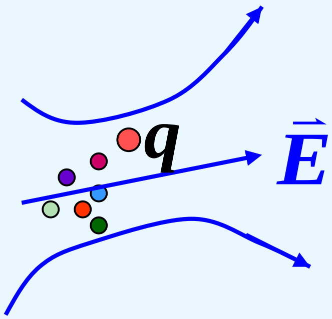
第4节 静电场的环路定理

一、静电场对带电体的作用力



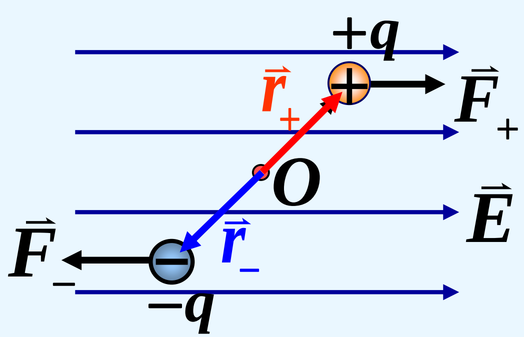
1. 点电荷（系）处在外电场$\vec{E}$中

单个q受电场力： $\vec{F}=q\vec{E}$ （$\vec{E}$为q所在点的场强）

点电荷系受电场力： $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_k$

$$=q_1\vec{E}_1+q_2\vec{E}_2+\cdots+q_k\vec{E}_k=\sum_i q_i\vec{E}_i$$

2. 电偶极子处在均匀电场中

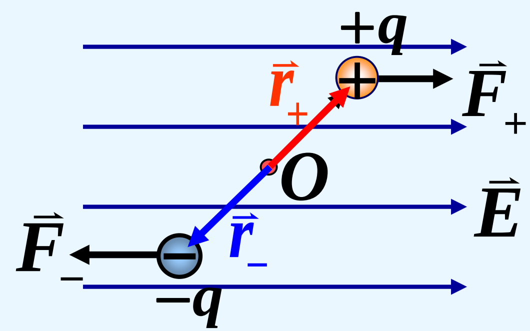


已知：电场为$\vec{E}$，偶极子的电荷为q。

受力

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_+&=q\vec{E}\\ \vec{F}_-&=-q\vec{E}\end{aligned}\right\}\vec{F}_{合}=\vec{F}_++\vec{F}_-=0$$

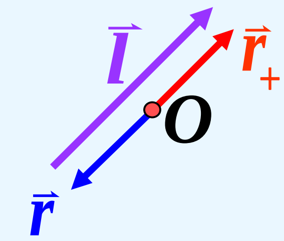
受力 $\left.\begin{aligned}\vec{F}_+ &= q\vec{E}\\ \vec{F}_- &= -q\vec{E}\end{aligned}\right\}\ \vec{F}_{合} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$



相对O点的力矩：

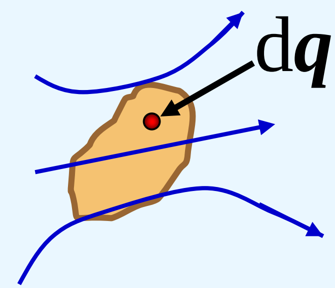
$$\vec{M} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = q\vec{r}_+ \times \vec{E} - q\vec{r}_- \times \vec{E}$$

$$= q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{E} = q\vec{l} \times \vec{E}$$



即：$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \begin{cases} |\vec{M}| = pE\sin\theta \quad \text{方向？} \otimes \\ \text{效果：使电偶极矩转向电场方向} \end{cases}$

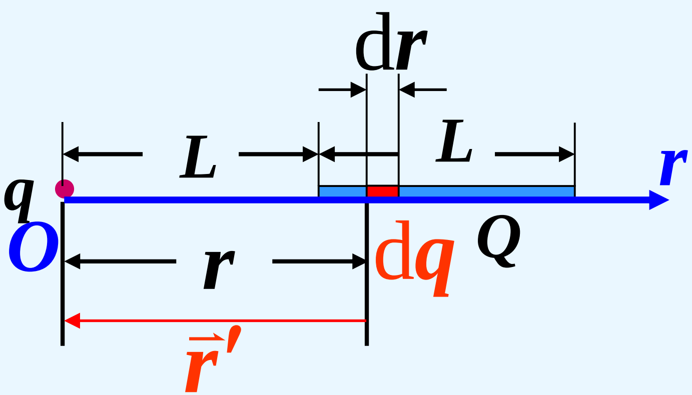
3. 连续分布的带电体在外电场中受力



$\mathrm{d}q$ 受力：$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q \cdot \vec{E}$

带电体受合力：$\vec{F} = \int \vec{E}\,\mathrm{d}q$

例1. 已知一点电荷q，与一均匀带电Q的细棒相距L。求其相互作用力。



解： *a.* 电荷对细棒的作用

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

取电荷元 dq： $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}r$

其所在处的电场：$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

dq 受力： $\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q\vec{E}$

Q棒受力： $\vec{F} = \int \vec{E}\mathrm{d}q = \int \dfrac{q\lambda \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ 方向水平向右

$$\therefore F = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_L^{2L}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 L^2}$$

b. 细棒对电荷的作用

点电荷q处的电场：$\vec{E}' = \int \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\vec{e}_{r'} = -\int_L^{2L}\dfrac{\lambda \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = -\dfrac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0 L}\vec{e}_r$

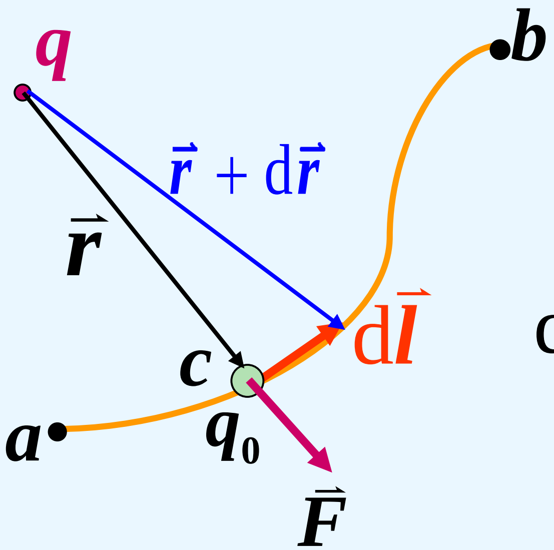
q受力： $\vec{F}' = q\vec{E}' = -\dfrac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 L^2}\vec{e}_r$

$$\boxed{\vec{F}' = -\vec{F}}$$

二、静电场力的功

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

1. 单个点电荷产生的电场中



将电荷q_0从电场的a点移动到b点。

在任意点c，位移$\mathrm{d}\vec{l}$、受力$\vec{F}=q_0\vec{E}$

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

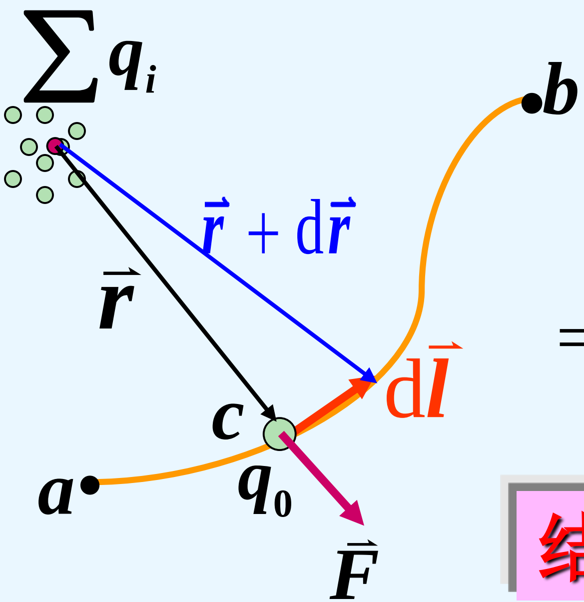
$$\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=r\mathrm{d}r$$

$$A=\int_{r_a}^{r_b}\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

单个点电荷产生的电场中，电场力作功与路径无关。

2. 点电荷系产生的电场中

任意点c处的电场为：$\vec{E}=\sum\vec{E}_i=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_k$



$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\int(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_k)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\int\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}+q_0\int\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\cdots+q_0\int\vec{E}_k\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

每一项都与路径无关

结论：

(1)静电场力作功与路径无关，静电场力是保守力，**静电场是保守力场。**

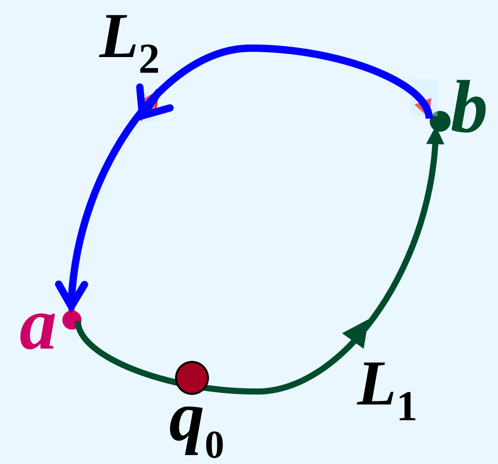
(2) 作功A与q_0的大小成正比，移动单位正电荷作功：$\dfrac{A}{q_0}=\boxed{\int\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}$

电场强度的线积分

三、静电场的环路定理

由静电场的保守性：在任意电场中，将q_0从$a \xrightarrow[\text{经}L_2]{\text{经}L_1} b$

$$\int_{a \atop L_1}^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a \atop L_2}^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



若q_0沿任意闭合路径运动一周，

电场力作功：

$$A = \oint q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}} = 0$$

静电场的环流

$$\boxed{\oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0}$$

静电场环路定理： 在静电场中，场强沿任意闭合路径的线积分等于零。

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$

或：沿闭合路径移动单位正电荷，电场力作功为0。

或**环流定理**。

注 若一矢量场的任意环路积分始终为0，则称该矢量场为**无旋场**。$\nabla\times\vec{E} = 0$

静电场两个基本性质：

$$\begin{cases} \text{高斯定理：}\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_{S内} q_i & \text{———有源场} \\ \text{环路定理：}\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 & \text{———无旋场} \end{cases}$$

第5节 电势差和电势

复习：保守力做功与路径无关 ⟶ 势能。

$$A_{ab} = E_{pa} - E_{pb}$$

类似，静电场的保守性，即存在一个由电场中各点的位置所决定的标量函数 ⟶ 电势能。

一、电势差、电势

在静电场中，点电荷q_0经任意路径从a 点到达b 点，电场力做功为:

$$A_{ab} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

定义：**静电场力做的功等于静电势能的减少量：**

$$\boxed{A_{ab} = W_a - W_b = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$\boxed{A_{ab} = W_a - W_b = q_0 \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} = q_0(V_a - V_b)$$

即：$W_a = q_0 V_a$， $W_b = q_0 V_b$

V_a、V_b分别称为a、b两点的电势

定义电势差：$$\boxed{V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

即：将单位正电荷从$a \to b$静电场力作的功。

表明：场强总是从电势高处指向电势低处。

定义电势：$$\boxed{V_P = \int_P^{V=0} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

电场中任意点P的电势为：将单位正电荷从P点沿任意路径移到电势零点时，静电力所做的功。

电势差或电势的单位：伏特(V)或焦耳/库仑(J/C)

电势零点的选取：

$$V_P = \int_P^{V=0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- 电荷分布在有限空间，
  取无穷远为 $V=0$ 点；$V_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$
- 电荷分布在无限空间，
  取有限远点为$V=0$ 点；
- 一般工程上，
  选大地或设备外壳为$V=0$点。

电势差与电势的零点选取无关，但电场中各点的电势却与零点选取有关。

电势的重要应用： 借助电势差求电场力的功：

$$A = q\int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q(V_a - V_b)$$

$$V_P=\int_P^{V=0}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

二、电势的计算

1. 按定义求

条件：场强分布已知或易求。

步骤：①选定电势零点；

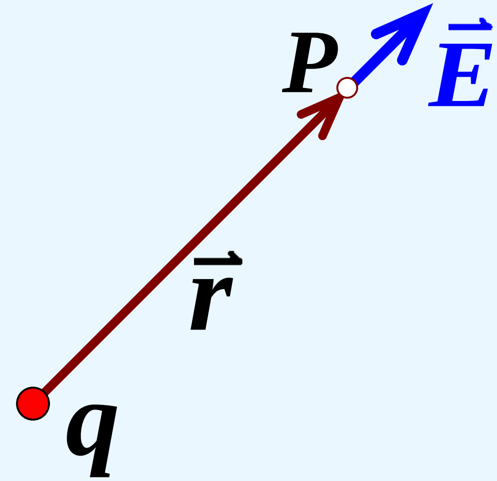
②求电场分布；

③由定义 $V=\int_P^{V=0\text{处}}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$，

选一条简单路径，计算 $\vec{E}$ 的线积分。

$$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=E\mathrm{d}l\cos\theta$$

例1. 点电荷电场中的电势分布



解：选无穷远处为电势零点。

场强分布： $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

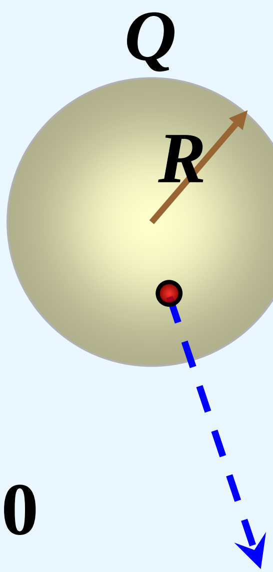
按电势的定义：

$$V_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

正点电荷的电势为正，离电荷越远，电势越低。

负点电荷的电势为负，离电荷越远，电势越高。

例2. 真空中一半径为R的球面，均匀带电Q，求电场空间任意一点P的电势V=？



解： 由高斯定理已求得电场分布：

$$\begin{cases} r < R & E = 0 \\ r > R & \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \end{cases}$$

设 $r \to \infty$，$V=0$

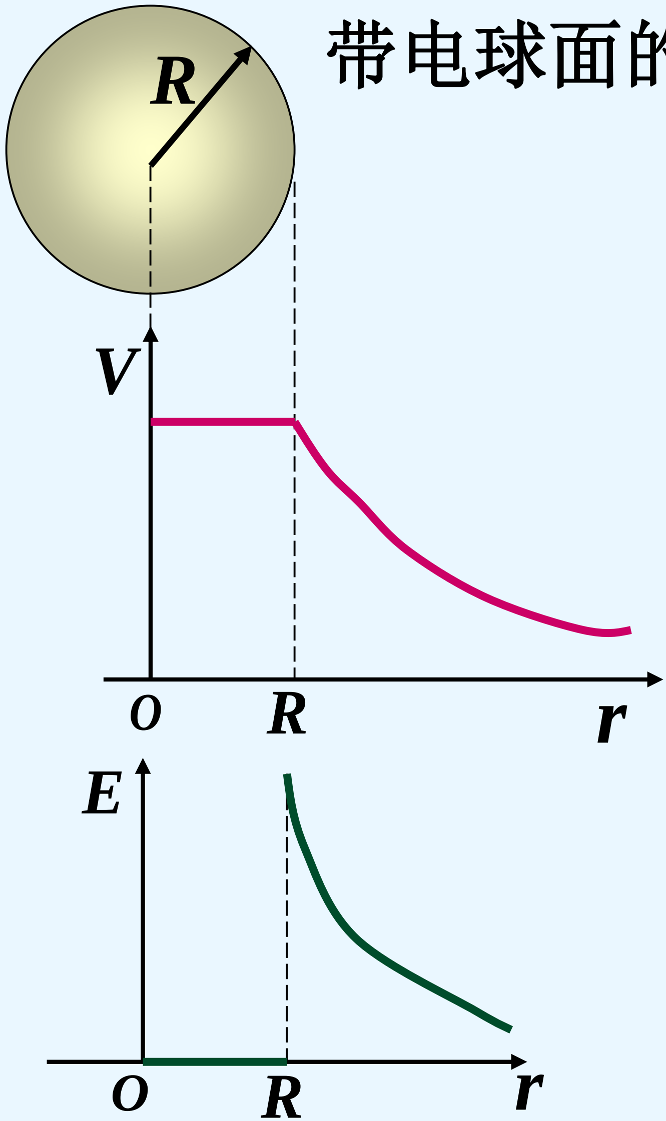
P点处在球外 $r>R$

$$V_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

P点处在球内 $r<R$ 　 $V_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$ $\cancel{\xrightarrow{E=0}} = 0$

$$V_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \overbrace{\int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{l}}^{0} + \int_R^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

分段积分！



带电球面的电势分布：
$$\begin{cases} r < R & V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ r \ge R & V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

结论：

(1) 球内电势处处相等，均为：

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

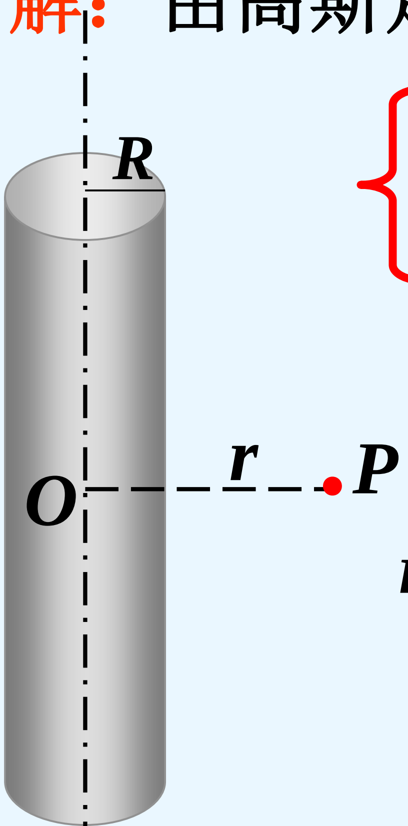
带电球壳是等势体。

(2) 球面处V是连续。

在球面处场强不连续，
而电势是连续的。

例3. 半径为 R的无限长带电圆柱体，电荷体密度为ρ，求离轴为r处的 V=？

解： 由高斯定理求得电场分布：



$$\begin{cases} r < R & \vec{E} = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r} = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r \\[2ex] r \geq R & \vec{E} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \end{cases}$$

设 $r= R$处，$V= 0$

$r \geq R$

$$V_P = \int_P^{V=0} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^R \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

$$V_P = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R} < 0$$

$r < R$，$V = \int_r^R \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} r dr = \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2) > 0$

$r = 0$处，$V= V_{\max} = \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}R^2$

当电荷分布扩展到无穷远时，电势零点不能选在无穷远处。

2. 用叠加法求V

（1）点电荷的电势：

$$\boxed{V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

点电荷系的电势：

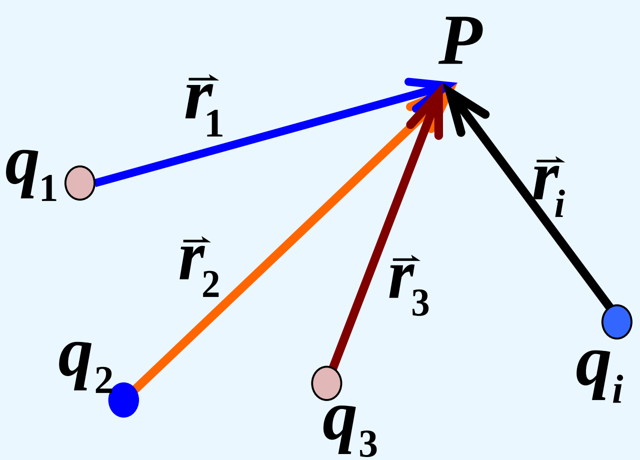
任意点P处的电势：

$$V_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_P^{\infty}\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_i\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_P^{\infty}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_P^{\infty}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\cdots+\int_P^{\infty}\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=V_1+V_2+\cdots+V_i$$

$$=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\cdots+\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$



$$V=\sum_i V_i=\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$ ⟸ 电势叠加原理

表述：一个电荷系的电场中,任一点的电势等于每一个带电体单独存在时在该点所产生电势的代数和。

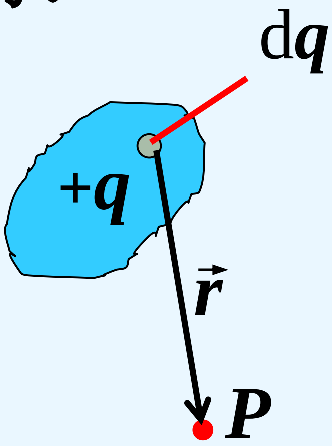
（2）连续带电体的电势：

取电荷元dq，其在任意点P处的电势：

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

则P点的电势：

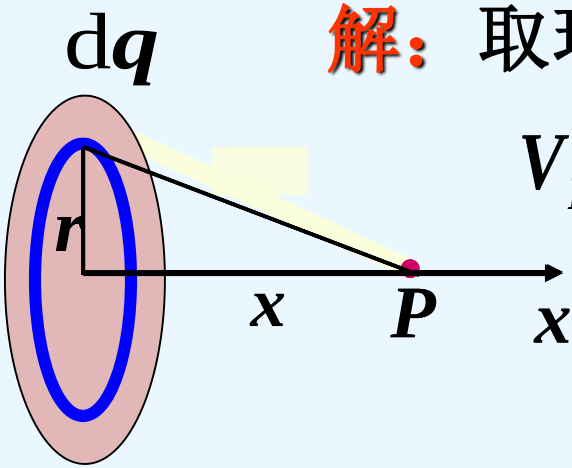
$$V=\int \mathrm{d}V=\int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



注：电势是标量，积分是标量叠加。

∴ 电势叠加比电场叠加要简便。

例4. 计算均匀带电q的圆环轴线上任意一点P的电势V=?



解: 取环上电荷元dq，其在P点产生的电势

$$V_P = \int \mathrm{d}V = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

讨论: (1)当$x = 0$，$V_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

(2)当$x >> R$，$V_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

相当于点电荷

(3)若是一带电圆盘? $\mathrm{d}V = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}}$

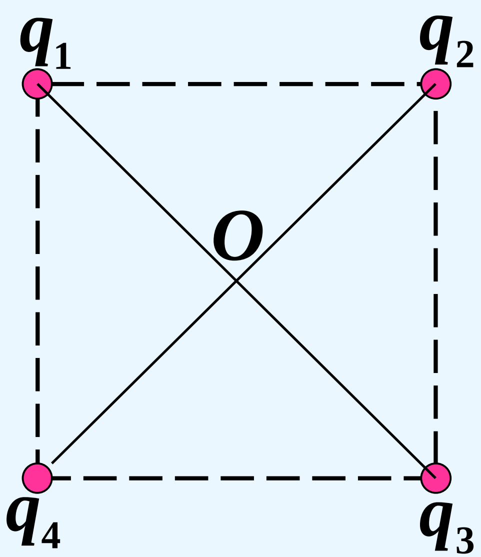
$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$

$$V = \int \mathrm{d}V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)$$

例5. 点电荷$q_1=q_2=q_3=q_4=4\times10^{-9}$C,放置在一正方形的四个顶角上，各顶角距中心5 cm。

求 (1)中心O点的电势；

(2)将$q_0=1\times10^{-9}$C从无穷远移到O点，电场力作的功。



解： (1) 各点电荷在O点处的电势

$$V_1=V_2=V_3=V_4=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

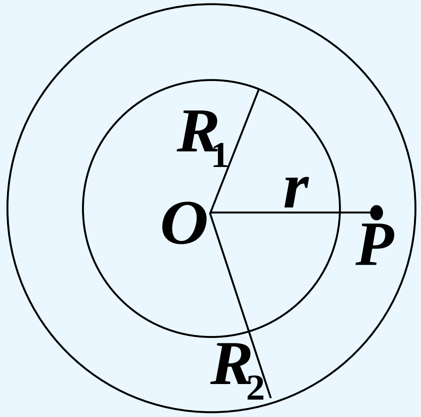
$$V_O=4V_1=\frac{q}{\pi\varepsilon_0 r}=2.88\times10^3\ \text{V}$$

(2)

$$A=q_0(V_\infty-V_O)$$

$$=-q_0V_o=-2.88\times10^{-6}\ \text{J}$$

例6. 如图所示，两个同心的均匀带电球面，内球面半径为R_1、带电Q_1，外球面半径为R_2、带电Q_2。设无穷远处为电势零点，则在两球面之间、距离球心为r处的P点的电势为________。



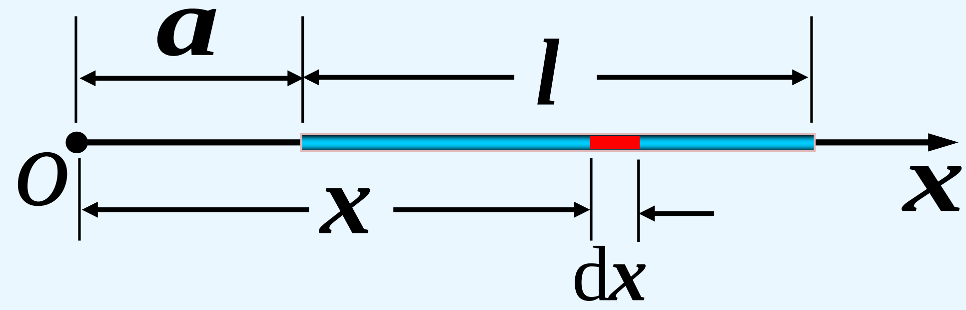
解： 均匀带电球面的电势分布：

$$\begin{cases} r < R & V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ r \geq R & V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

由电势叠加，P点的电势：

$$V_P = V_{1外} + V_{2内} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

例7. 长为 l 的不均匀带电直线，电荷线密度为 $\lambda=\lambda_0(x-a)$ ，取无穷远处为电势零点，求坐标原点O的电势。



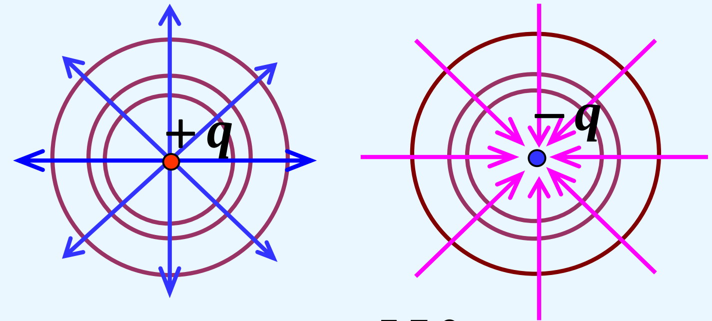
解： 在任意位置 x 处取长度元dx，其带电量

$$\mathrm{d}q=\lambda_0(x-a)\mathrm{d}x$$

它在O点的电势：$\mathrm{d}V=\dfrac{\lambda_0(x-a)\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x}$

O点总电势 $V=\int_a^{a+l}\mathrm{d}V=\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[l-a\ln\dfrac{a+l}{a}\right]$

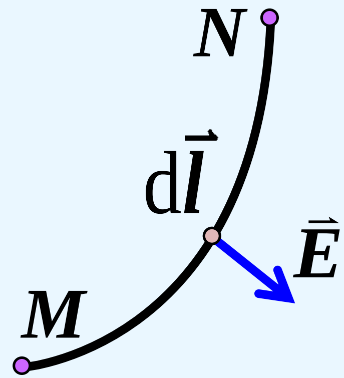
三、等势面



等势面： 由电场中电势相等的点组成的面。

两个相邻等势面的电势差相等。

等势面的性质：



1. 等势面与电场线处处正交。

证明： 移动单位正电荷从等势面上

M点到N点：
$$\mathrm{d}A = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = E\,\mathrm{d}l\cos\theta = 0 \qquad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

2. 在同一等势面上移动电荷，电场力的功恒等于0。

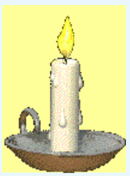
3. 电场线的方向总是指向电势降低的方向。

4. 等势面较密集的地方，场强较大。
   等势面较稀疏的地方，场强较小。

四、电势梯度

梯度： 物理量随空间的变化率。

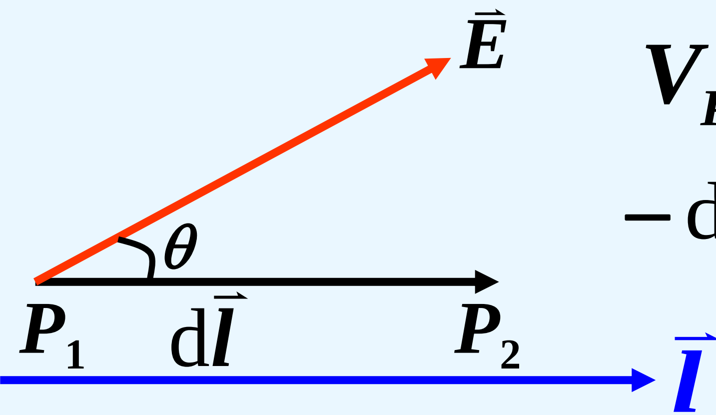
$\vec{E}$ 与 V ⟶ 描述电场各点性质的物理量



$$V_P = \int_P^{V=0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$ ⟵ 表示$\vec{E}$与V的积分关系。

$\vec{E}$与V的微分关系？

在电场中取相距$d\vec{l}$的两点P_1、P_2： $V_{P_1} - V_{P_2} = \vec{E} \cdot d\vec{l}$



$$V_{P_2} = V_{P_1} + dV \qquad V_{P_1} - V_{P_2} = -dV$$

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl \cos\theta = E_l dl$$

即：$E_l = -\dfrac{dV}{dl}$

$\dfrac{dV}{dl}$是电势函数V沿$d\vec{l}$方向的空间变化率

结论： (1) $\vec{E}$沿某方向的分量

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$$ → 电势在此方向空间变化率的负值

负号表示，场强的方向为指向电势降低的方向。

(2) 若电势函数用直角坐标表示时：$V=V(x, y, z)$

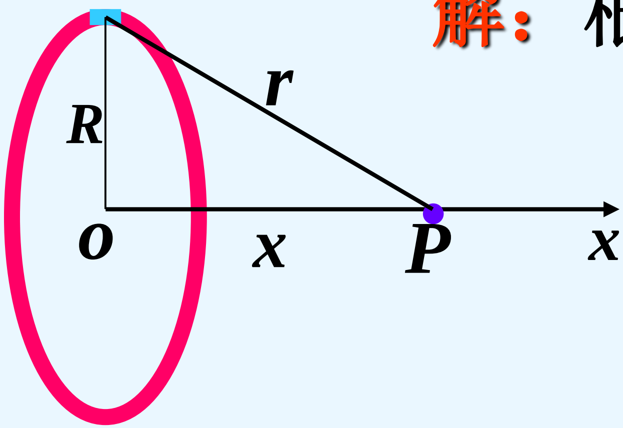
则：
$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

梯度算符
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

得：
$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}V = -\nabla V}$$

例8.求均匀带电q,半径为R的圆环轴线上任意一点的场强。



解：根据电势叠加，P点的电势

$$V_P=\int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

P点的电场：$\frac{\partial V}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial z}=0$

$$\therefore\quad E_P=E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

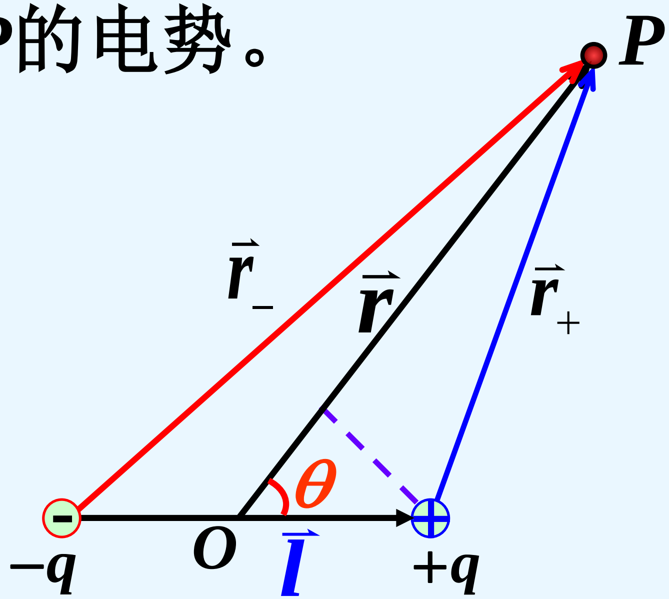
方向沿x轴。

注：(1) $\vec{E}=-\mathrm{grad}V$ 决定于V在该点的空间变化率，而与该点的V值大小无关。

(2) E的又一单位：V/m= N/C

(3)求E的三种方法
- 点电荷电场叠加
- 高斯定理求对称场
- 电势梯度法

例9. 计算电偶极子场中任一点P的电势。



解： $V_P=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$

当 $r>>l$ 可做如下近似：

$$r_+=r-\frac{l}{2}\cos\theta$$

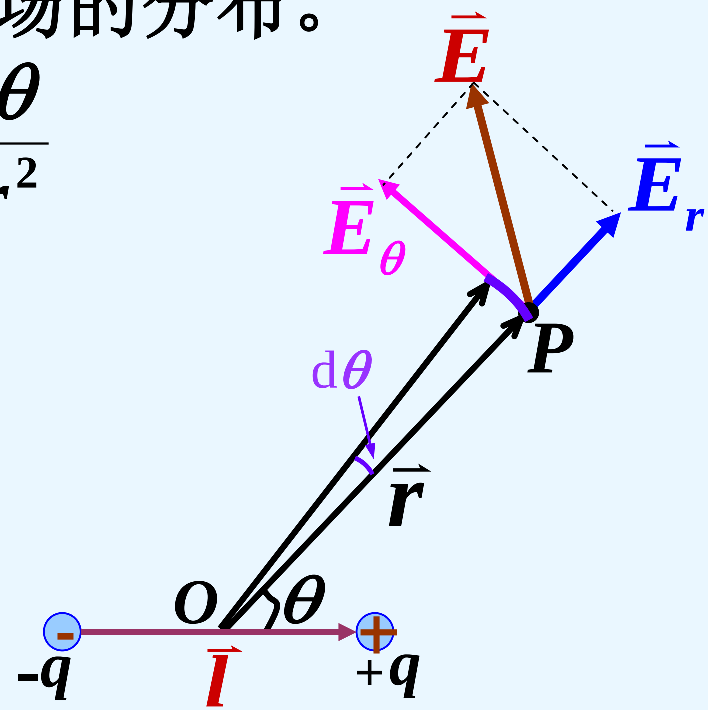
$$r_-=r+\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$V_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+r_-}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\cos^2\theta\right)}$$

$$p\cos\theta=\vec{p}\cdot\vec{e}_r \qquad =\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例10. 由电偶极子的电势，求其电场的分布。

电偶极子的电势：$V(r,\theta)=\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



$$E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta=-\frac{\partial V}{r\partial\theta}=\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

电偶极子中垂线上一点的场强：

$$\theta=\frac{\pi}{2},\quad E_r=0,\quad E_\theta=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\qquad \vec{E}=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

电偶极子联线上一点的场强：

$$\theta=0,\quad E_r=\frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3},\quad E_\theta=0\qquad \vec{E}=\frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$