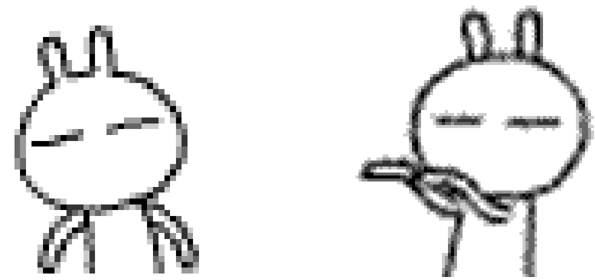
本节课作业

P71: **11-T1~T4**

振动与波动是与人类生活和科学技术密切相关的一种基本运动形式。



广义地说什么是振动?

一物理量在某一定值附近周期性变化的现象称振动。

力学量（如位移） —— 机械振动

电磁量（如I 、V、 $\vec{E}$、 $\vec{B}$）—— 电磁振动

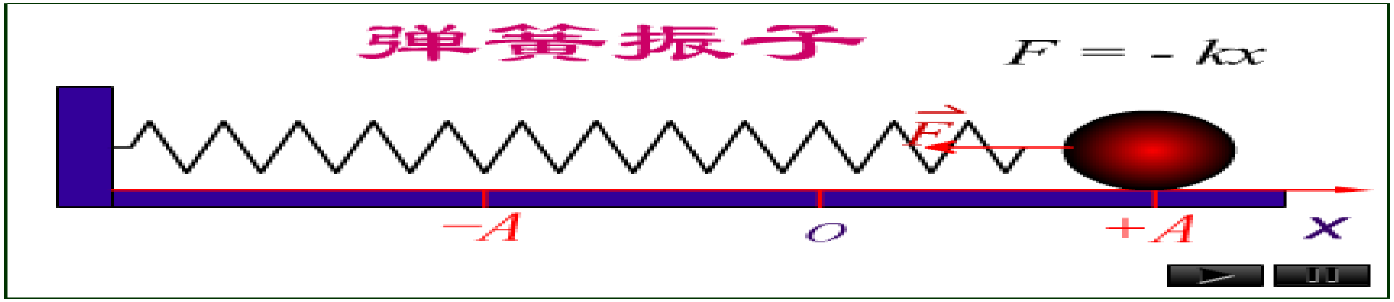
最基本、 最简单、最重要的振动是简谐振动。

一、简谐振动的特征与规律

$$F_{合} = -kx$$

$$F_{合} = ma$$

$$a = \frac{d^2x}{d^2t}$$



$$a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

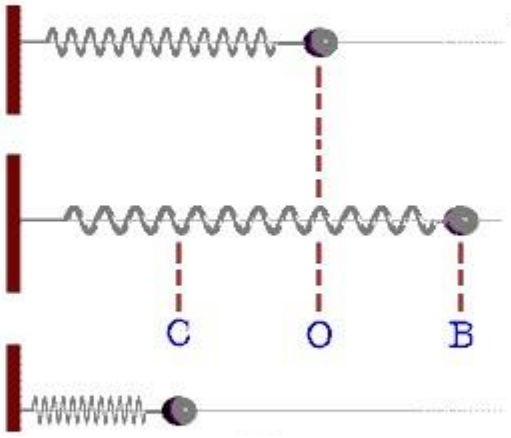
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

简谐振动的运动方程

x可代表任意物理量

解 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$ 可得



振动方程

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

***A*：振幅**，振动的最大幅度(绝对值)。

ω：圆频率，描述谐振动快慢的物理量。

由系统的性质决定，故称**固有频率**。

$\omega t+\phi$：位相，表征任一时刻 t 的振动状态。

ϕ：初位相，表征 t=0 时刻的振动状态。

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

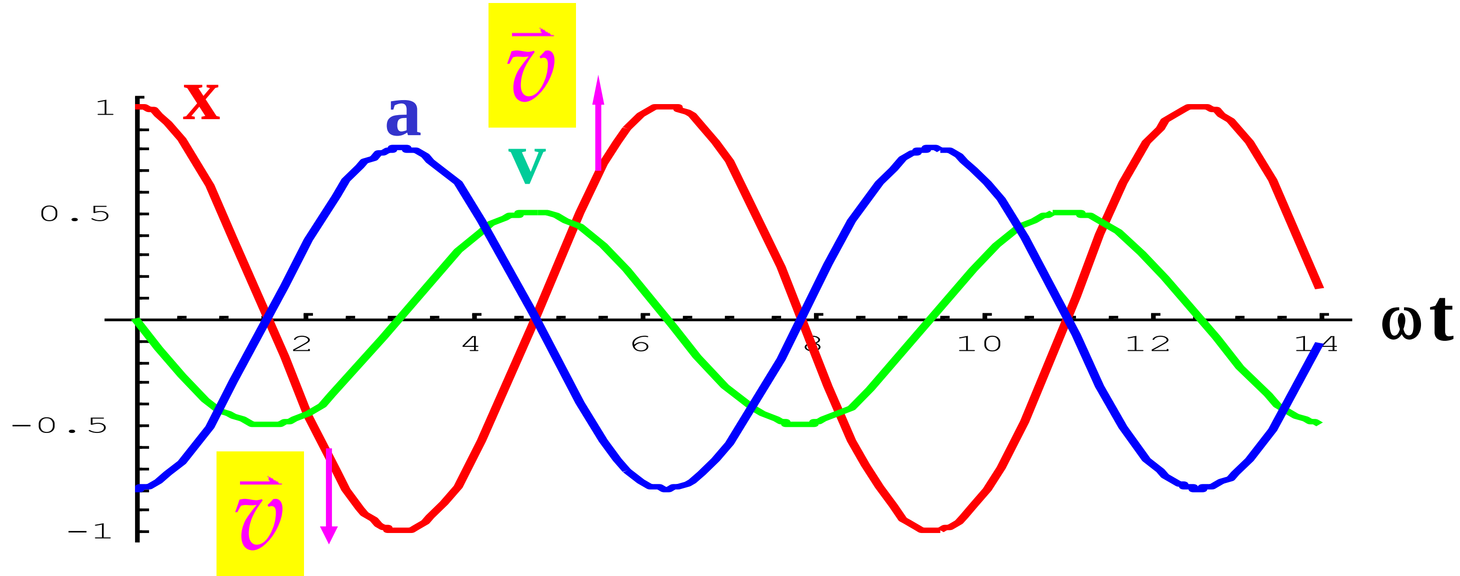
速 度 $v = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

加速度 $a = \dfrac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

当 t=0， x=x_0， v=v_0时

$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2}$ 振幅

$\phi = tg^{-1}\dfrac{-v_0}{\omega x_0}$ 初位相



- **周期 T:**

物体完成一次全振动所需的时间.

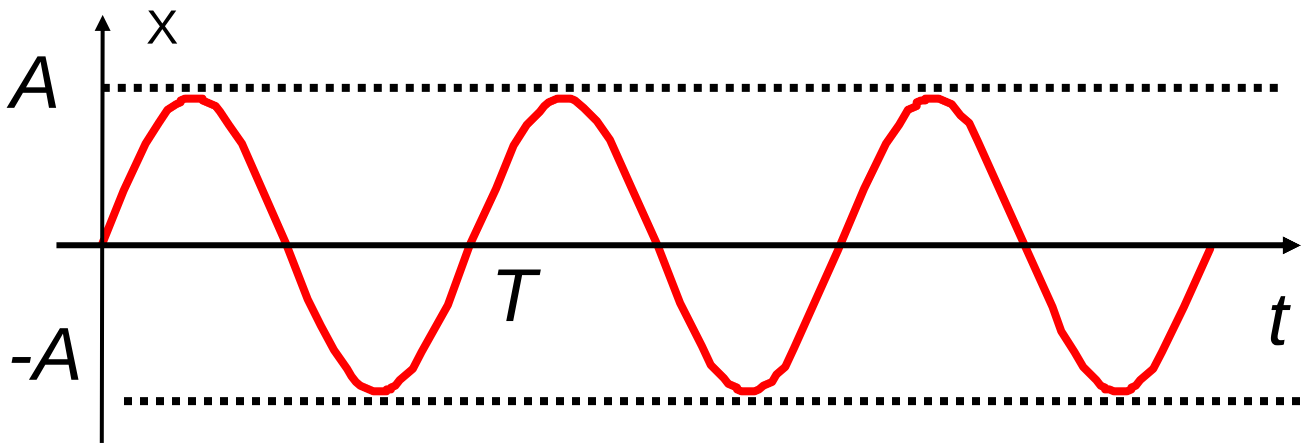
- **频率 ν:**

物体在单位时间内完成全振动的次数.

- **角频率 ω :**

$$\omega=2\pi\nu,\quad T=1/\nu=2\pi/\omega \Rightarrow \omega=2\pi/T$$

振动曲线



A、ω、ϕ 为系统的三个特征量。

$$x=A\cos(\omega t+\phi)$$

谐振动问题类型：

（1）证明为谐振动，并求周期

（2）写出振动方程

由初始条件 (x_0, v_0) 定 A, ϕ

注意：振动状态由(x, v) 描述。

若 $t=0$ ，位移x_0 ，速度v_0 （初始条件）

则可得
$$\begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2} \\ tg\phi=-\dfrac{v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

然后根据v_0的正负决定ϕ的取舍！ $v_0=-A\omega\sin\phi$

例1:某物体沿X轴(向右为正方向)作谐振动，其振动周期$T=\pi$ s，$t=0$时，$x_0=4$m，$v_0=6$m/s，且向右运动。求物体的运动方程。

解： $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ $v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$ rad/s $A=\sqrt{x_0^2+(\frac{v_0}{\omega})^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ m

$$\varphi=tg^{-1}\frac{-v_0}{\omega x_0}=tg^{-1}(-\frac{6}{4\times 2})=\begin{cases}143^o \longrightarrow \text{舍去}\\ -36.8^o\end{cases}$$

$v_0=-A\omega\sin\varphi$ 而 $v_0>0$，

所以，$\varphi=-36.8^o=-0.64$ rad

故，所求的运动方程为

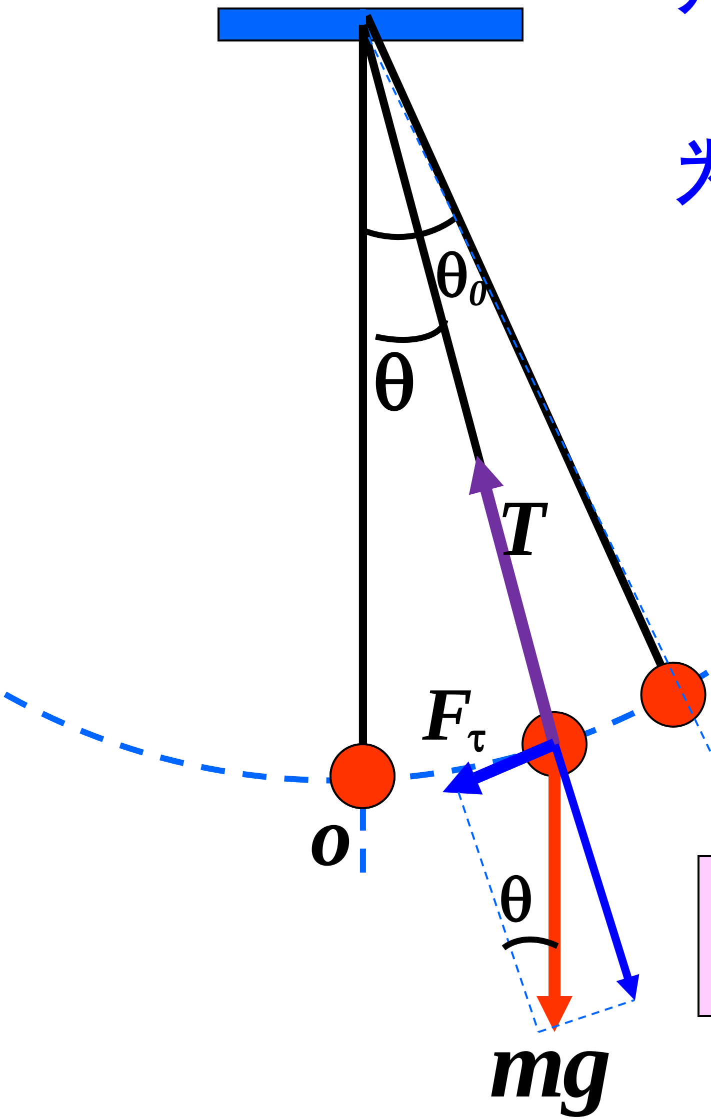
$$x=5\cos(2t-0.64)\text{m}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}\\&tg\varphi=\frac{-v_0}{\omega x_0}\end{aligned}}$$

由v_0定φ的取舍！

例2. 单摆长 l （1）证明小角度摆动为简谐振动，并求周期。

（2）若将摆拉至最大角度 θ_0 放手为计时起点，写出振动方程。

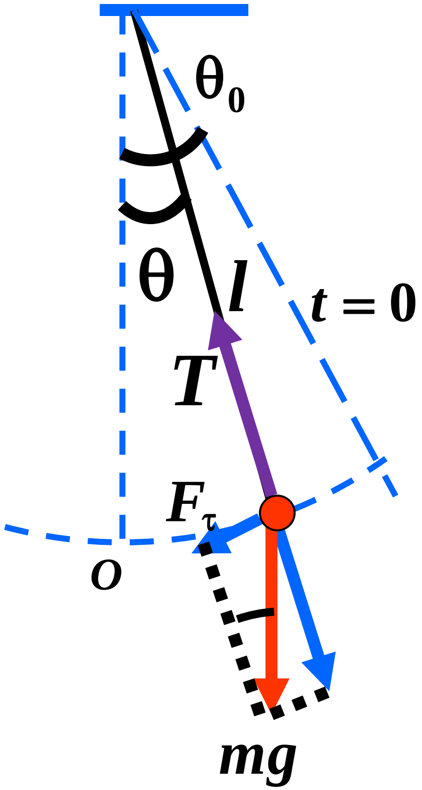


解：（1）摆沿圆弧运动，只需分析任意角位移θ处切向力：

切向力大小 $F_\tau = mg\sin\theta \approx mg\theta$

（小角度 $\sin\theta = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} \cdots \approx \theta$）

考虑方向 $F_\tau = -mg\theta$



$$F_\tau = ma_\tau = -mg\theta$$

又 $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ $\quad (v = l\dfrac{d\theta}{dt})$

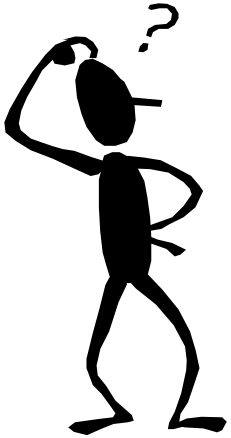
$\therefore l\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$ 即 $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$

$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} \longrightarrow \boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

（2）振动方程 $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$

$t = 0$ 初角位移 θ_0， 初角速度 $\Omega_0 = 0$

$$\begin{cases} \text{角振幅} \quad \theta_m = \sqrt{\theta_0^2 + (\dfrac{\Omega_0}{\omega})^2} = \theta_0 \\ tg\phi = -\dfrac{\Omega_0}{\omega\theta_0} = 0 \longrightarrow \varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} ? \end{cases}$$



$\varphi=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases}$ 哪一个是φ的正确值?

$$\because \theta_0=\theta_0\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi=1$$

故应取初位相 $\varphi=0$

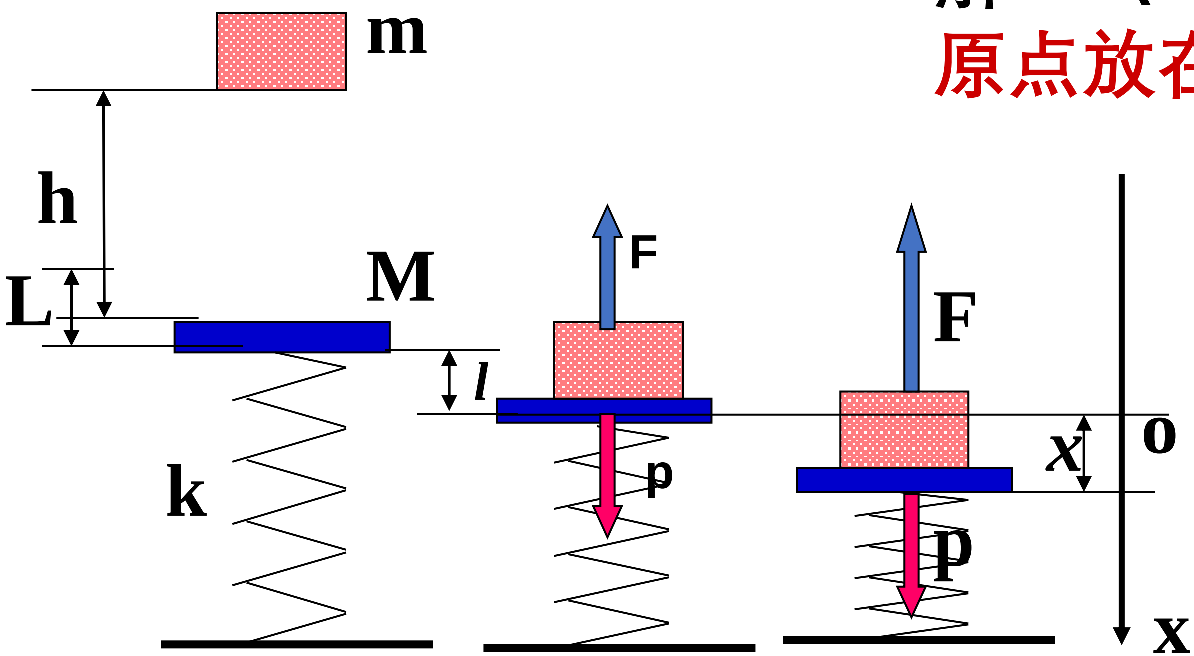
φ 取值范围（0，2π）或（-π ， π）之间。

∴ 振动方程 $\theta=\theta_0\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t)$

例3. 已知：M，m，h，k.

（1）证明物从静止落下与板粘在一起后作简谐振动，并求周期。

（2）当物与板相碰时作为记时起点，写出振动方程。

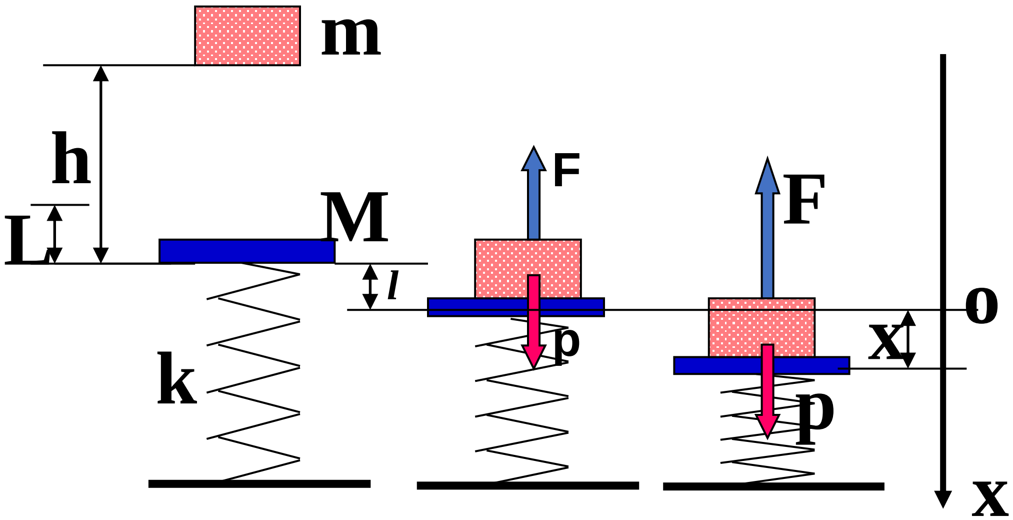


解：（1）首先选一坐标系，原点放在受力平衡处。

$$Mg = kL$$

$$(m+M)g = k(L+l)$$

任意 x 处分析受力：



任意 x 处分析受力:

$$\begin{cases} P=(M+m)g \\ F=k(L+l+x) \end{cases}$$

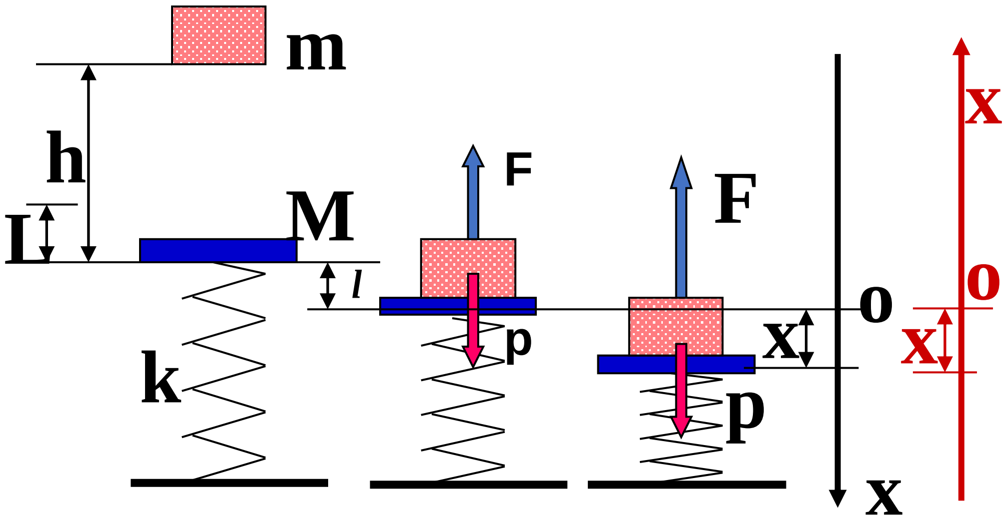
合力=?

$$F_{合}=(M+m)g-k(L+l+x)=-kx$$

由 $(M+m)\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$ 得

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{M+m}x=0$$ 即 $$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$ 为简谐振动

其中 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ $\longrightarrow$ $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$



(2) $t=0$?

$$\begin{cases} x_0 = \overset{+}{-}l = \overset{+}{-}mg/k \\ v_0 = -\dfrac{m\sqrt{2gh}}{M+m} \end{cases}$$

（注意正负号！）

代入公式得

$$A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}=\sqrt{(mg/k)^2+2ghm^2/(M+m)k}$$

$$\varphi=tg^{-1}(-v_0/\omega x_o)=tg^{-1}\sqrt{2kh/(M+m)g}$$

取III象限值

取I象限值

振动方程为

$$x=\sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{2ghm^2}{(M+m)k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t+tg^{-1}\sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}}\right)$$

讨论：若 x 轴向上为正，写方程有那些变化?

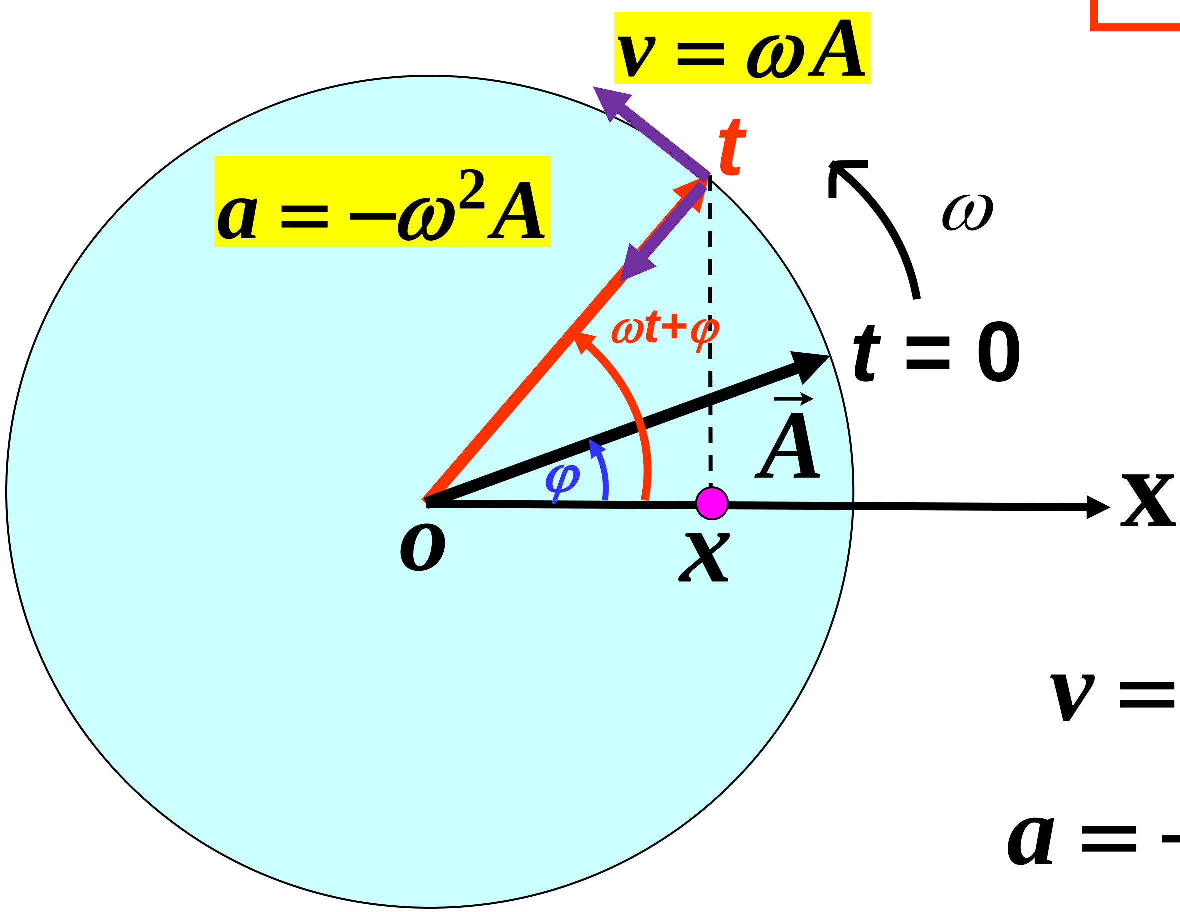
$$F_{合}=-(M+m)g+k(L+l-x)=-kx$$

第3节　谐振动的矢量图示　谐振动的能量

Vector Graph of Simple Harmonic Motion
Energy in Simple Harmonic Motion

3.1 谐振动的矢量图示

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



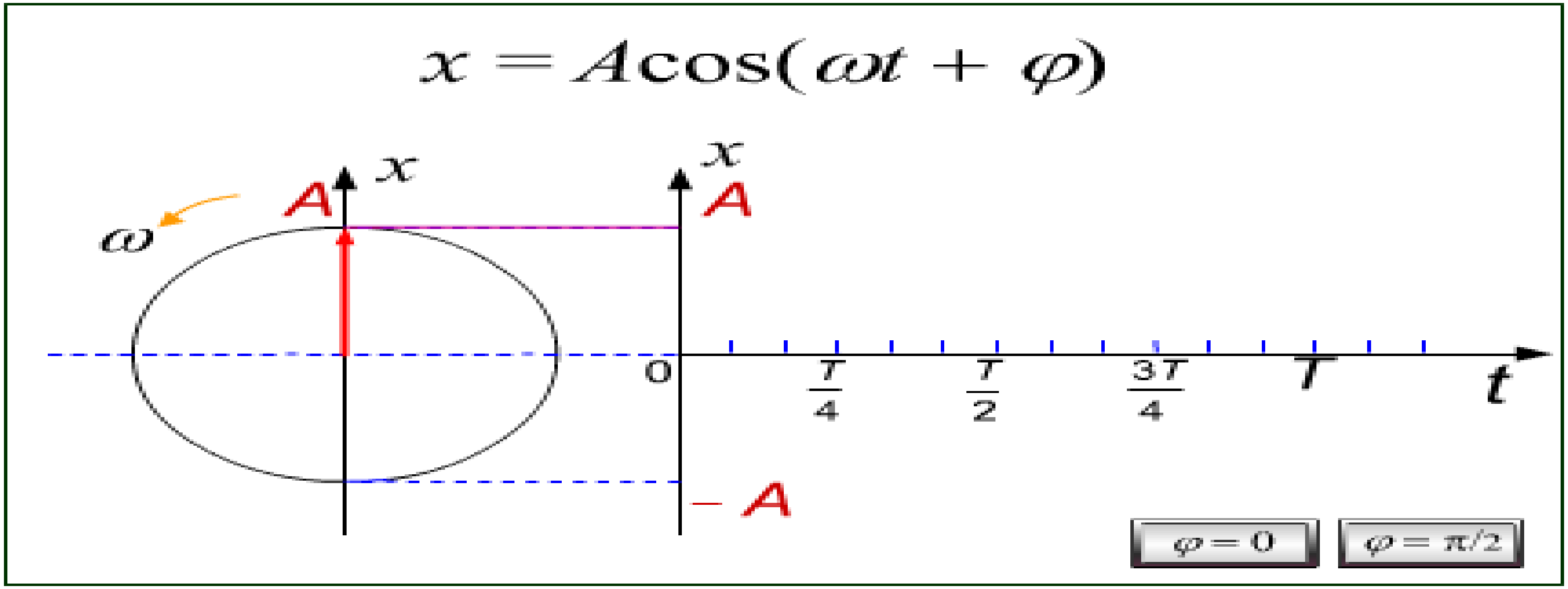
φ：初位相

$\omega t+\varphi$：位相

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

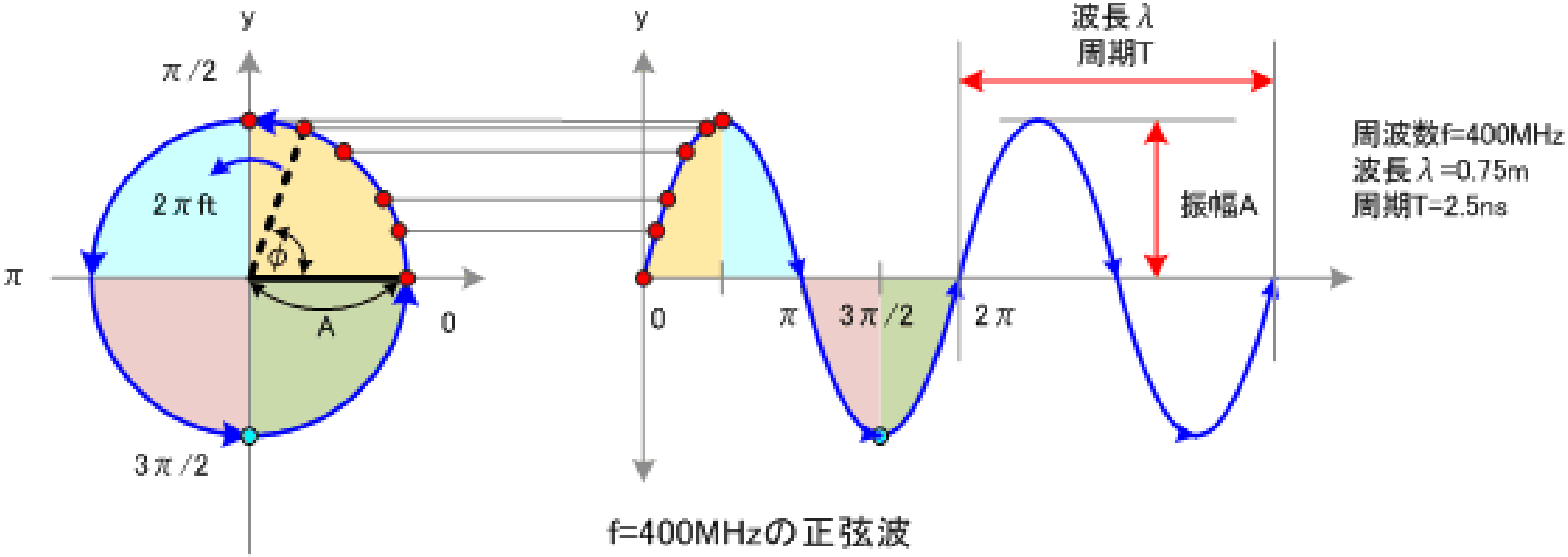
$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图



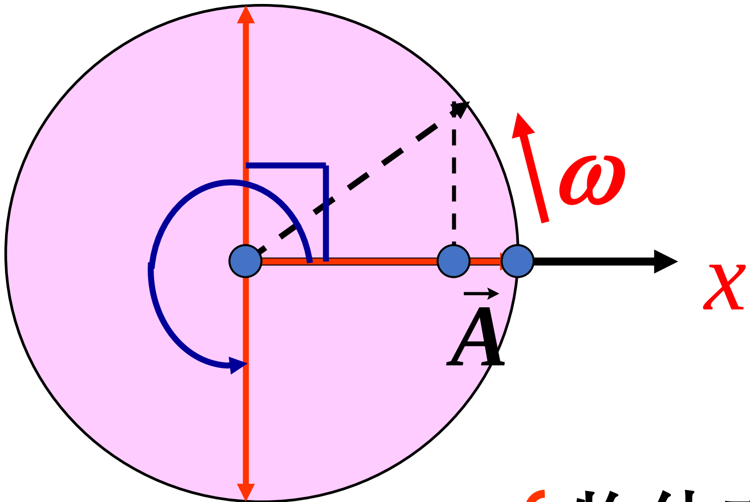
$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图



（旋转矢量旋转一周所需的时间）

利用旋转矢量很容易由相位确定简谐振动的运动状态



位相“$\omega t+\varphi$”:

表示物体任意时刻的运动状态

$\omega t+\varphi \rightarrow (x, v)$

$$\omega t+\varphi=0$$

- 物体在正向位移极大处,速度为零
- 下个时刻要向 x 轴的负方向运动

$$\omega t+\varphi=\frac{\pi}{2}$$

- 物体正越过原点,以最大速率运动
- 下个时刻要向 x 轴的负方向运动

$$\omega t+\varphi=\frac{3\pi}{2}$$

- 物体正越过原点,以最大速率运动
- 下个时刻要向 x 轴的正方向运动

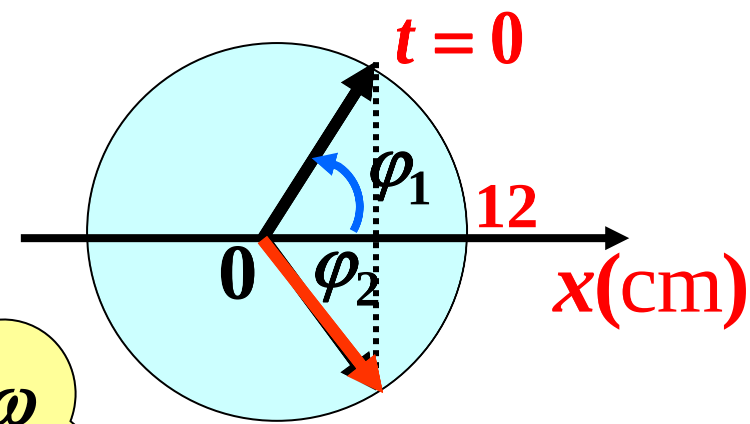
例4. 一物体沿 x 轴作简谐振动，$A = 12\text{cm}$, $T = 2\text{s}$

当$t = 0$时, $x_0 = 6$ cm, 且向x正方向运动。

求（1） 初位相φ

（2） $t = 0.5$ s 时, 物体的位置、速度、加速度

解： （1）由旋转矢量图看



$$\begin{cases} \phi_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ \phi_2 = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

（2）$t = 0.5s$ 时

ω

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 12\cos\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \times 0.5 - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 6\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = -18.9\ (\text{s}^{-1})$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -103\ (\text{cm}/\text{s}^2)$$

例4. 一物体沿 x 轴作简谐振动，A= 12cm, T = 2s

当t = 0时, x_0= 6 cm, 且向x正方向运动。

求（3）在x =-6 cm处且向 x负方向运动时，物体的速度、加速度以及从这一位置回到平衡位置需的时间。

解:（用解析法）

$$-6 = 12\cos\boxed{(\pi t - \frac{\pi}{3})}$$

$$(\cancel{\pi} t - \frac{\cancel{\pi}}{3}) = \frac{2\cancel{\pi}}{3} \Rightarrow t = 1(\mathrm{s})$$

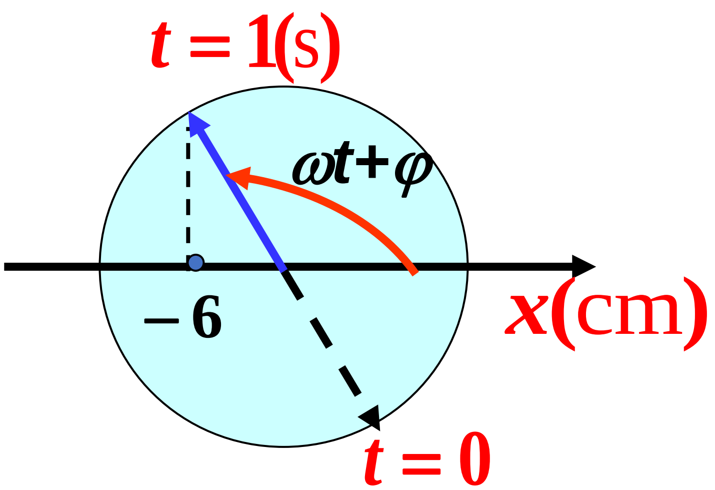
将t =1 s代入(2)中 v、a 的解析式，求得:

$$v = -12\pi\sin(\pi\times 1 - \frac{\pi}{3}) = -32.7\ (\mathrm{cm/s})$$

$$a = -12\pi^2\cos(\pi\times 1 - \frac{\pi}{3}) = 59.2\ (\mathrm{cm/s^2})$$

最简单的解法是用旋转矢量法

$x = -6cm$



与t =0 相比较知：

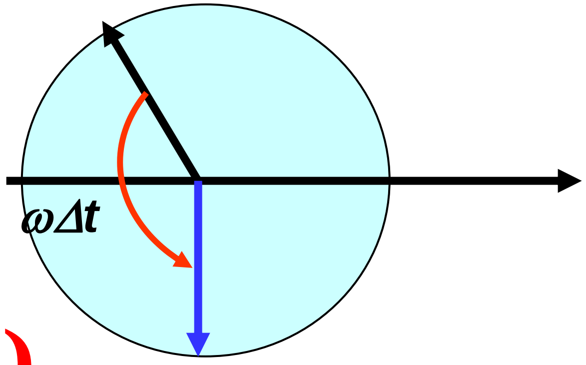
振动物体经过了$T/2$

故t =1 s 再求得 v，a

从这一位置回到平衡位置 所需的时间：

$\Delta t = ?$

$$\omega \Delta t = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$



$$\Delta t = \frac{5\pi}{6\pi} = \frac{5}{6} \approx 0.833\ (s)$$

例4. 一物体沿 x 轴作简谐振动，$A = 12\text{cm}$, $T = 2\text{s}$

当 $t = 0$ 时, $x_0 = 6$ cm, 且向 x 正方向运动。

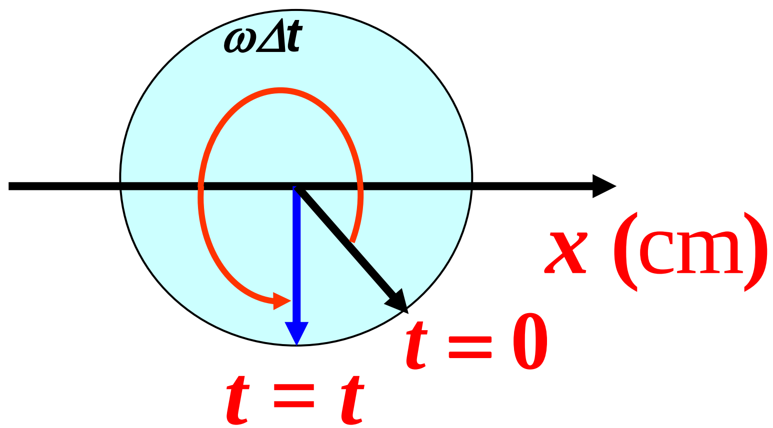
求（4）从初始时刻开始，第二次通过平衡位置的时刻 t。

解: 如图所示, $t = t$ 时物体第二次过平衡位置

$$\omega\Delta t = \frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{11}{6}\pi$$

$$t = \frac{11}{6}(\text{s})$$



位相差，同相，反相

位相差: $\begin{cases} x_1 = A_1\underline{\cos(\omega t + \varphi_1)} \\ x_2 = A_2\underline{\cos(\omega t + \varphi_2)} \end{cases}$ $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 0 \text{（或}2\pi\text{的整数倍）} & \text{步调一致，同相} \\ \pi \text{（或}\pi\text{的奇数倍）} & \text{步调相反，反相} \\ > 0 & x_2 \text{ 比 } x_1 \text{ 超前}\Delta\varphi \end{cases}$$

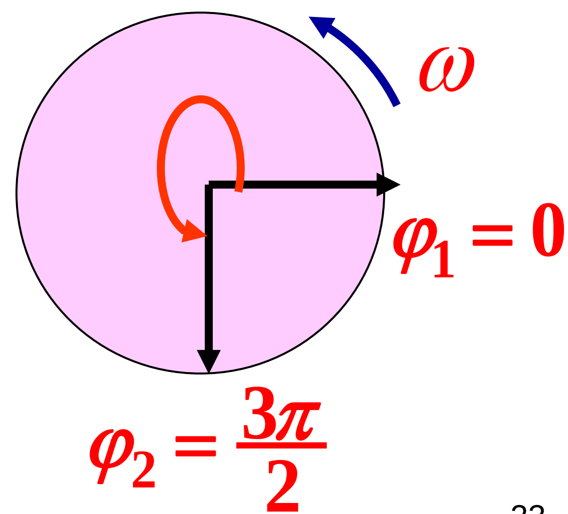
或 x_1 比 x_2 落后 $\Delta\varphi$

注意

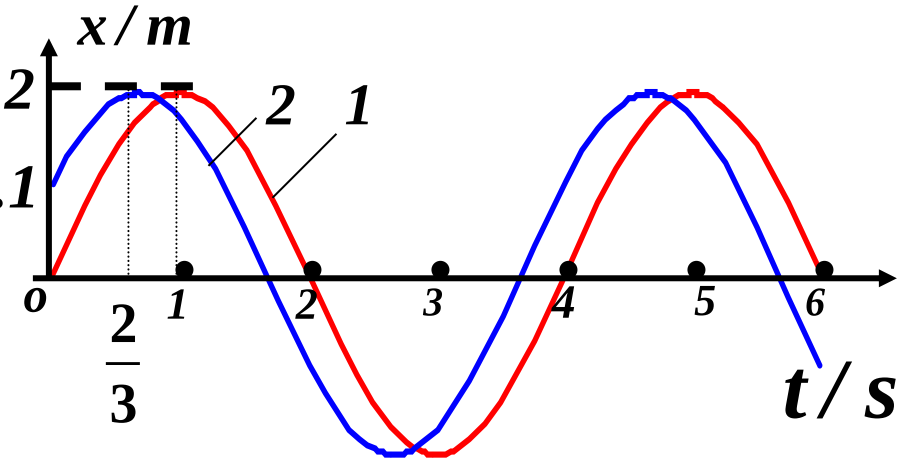
$\Delta\varphi$ 限制在 $[0,\pi]$ 以内 $\Delta\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$

一般不说 x_2 比 x_1 超前 $\dfrac{3\pi}{2}$

而说 x_1 比 x_2 超前 $\dfrac{\pi}{2}$



例5. 已知 x- t曲线(周期相同)，写出振动方程，并求它们的位相差？



解： $A = 0.2m \quad T = 4s$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}(1/s)$$

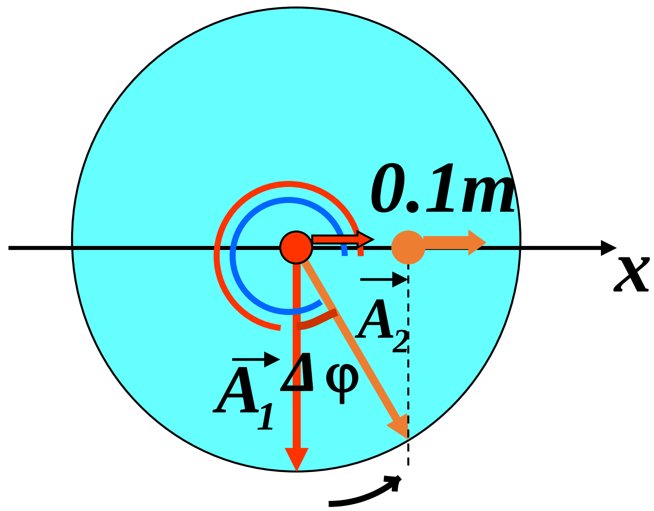
$$\phi_1 = \frac{3\pi}{2} \text{ 或 } -\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x_1 = 0.2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$\varphi_2 = \frac{5\pi}{3} \text{ 或 } -\frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{x_2 = 0.2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{3}\right)}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$



$$\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\pi/6}{\pi/2} = \frac{1}{3}s$$