第9章　恒定磁场

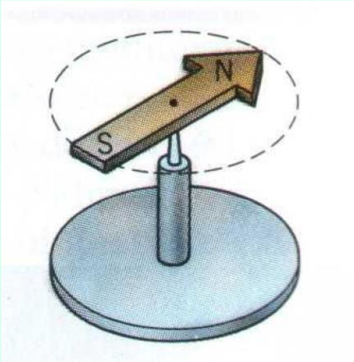
第1节 磁性与磁场

一、基本磁现象

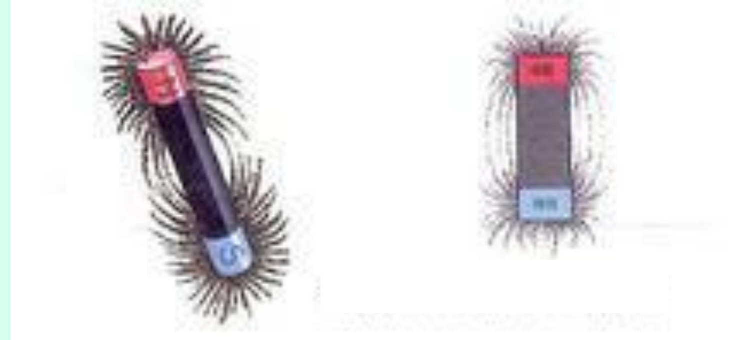
磁性(magnetism)：能吸引铁、钴和镍等物质的性质。

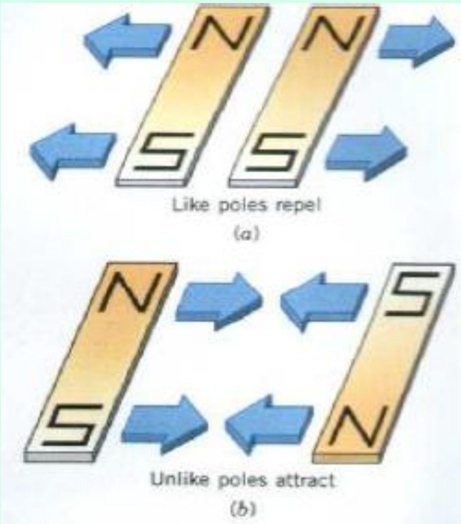
• 公元前800年，在欧洲的小城镇**Magnesia**，希腊人发现磁现象。

• 在东方，中国人很早就具有了天然的磁石知识，发明指南针。

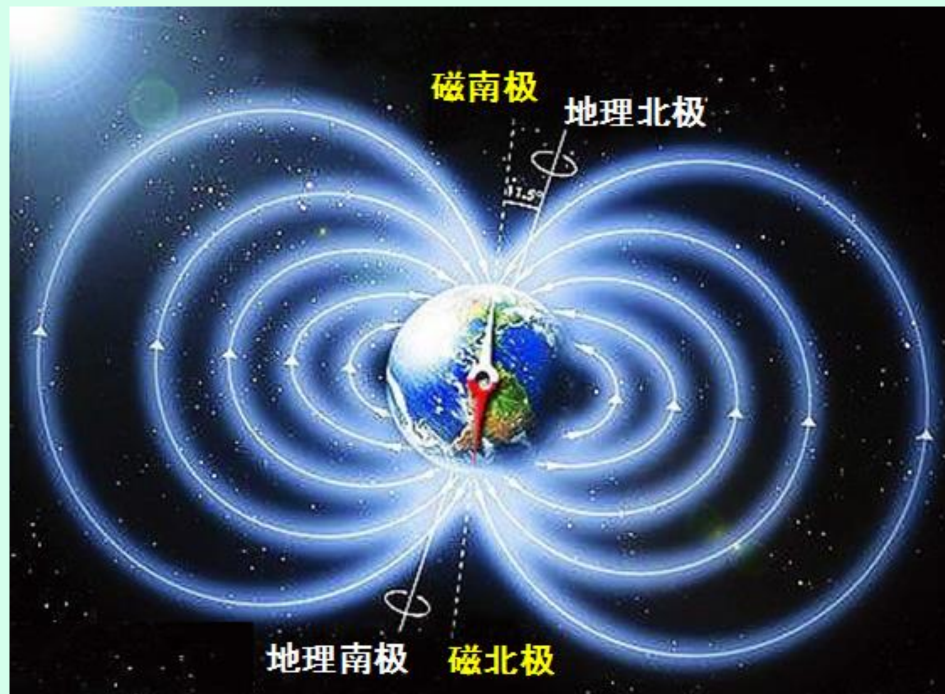


- 13世纪，认识到磁极现象。





- 16世纪，认识到地球是一个大磁体。

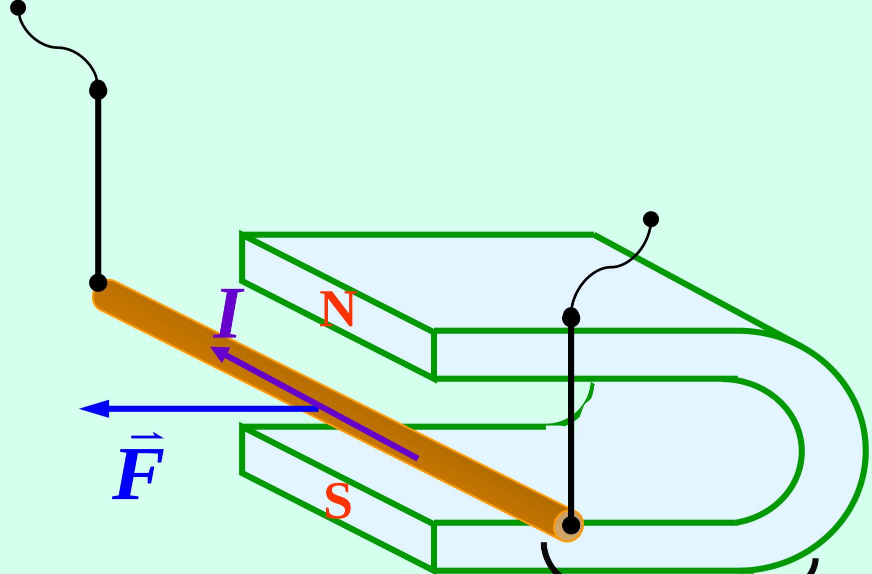


目前没有发现**磁单极**。

• 1820年，奥斯特实验：

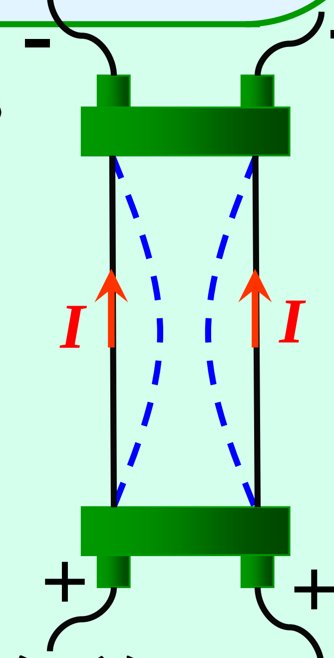
表明**电**能生**磁**。

揭示电现象和磁现象密切相关



•1821年，安培发现

- 磁铁 (旁) —— 载流导线会运动；
- 载流导线与载流导线的相互作用。



安培**分子电流**假说：组成磁铁的最小单元(磁分子)就是环形电流，这些分子环流定向地排列起来，在宏观上就会显示出N、S极。

磁相互作用表现为**运动电荷**之间的相互作用。

• 19世纪，电磁学发展的黄金时代。法拉第、亨利、麦克斯韦...

磁相互作用机制？

二、磁场

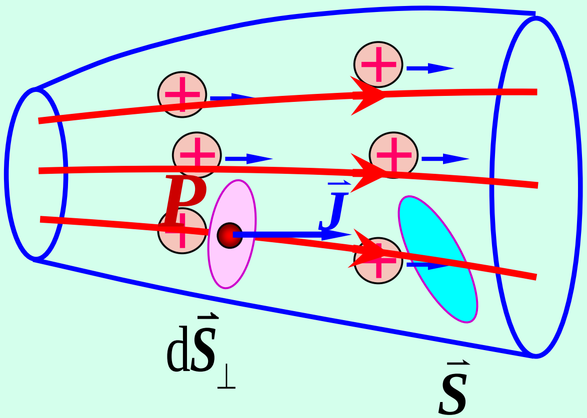
磁场的物质性

①在磁场中的运动电荷、载流导体等受磁场力作用；

②运动电荷、载流导体在磁场中运动时，磁力作功 —— 磁场具有能量。

三、电流、电流密度

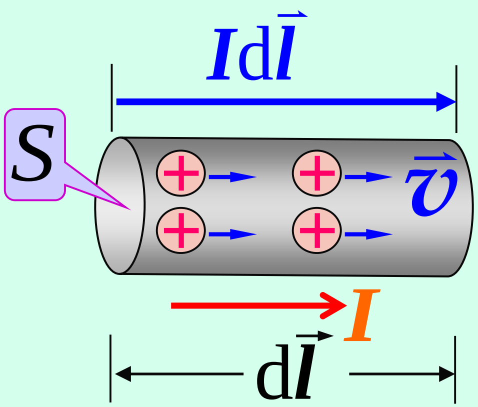
电流强度： $\boxed{I=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}$



电流密度（矢量）： $\boxed{J=\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_{\perp}}}$

方向：该点正电荷运动方向。

大小：与该点正电荷运动方向垂直的单位面积上的电流强度。



任意S的电流： $\boxed{I=\int_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$

电流元： 载有电流的一段矢量线元——$I\mathrm{d}\vec{l}$

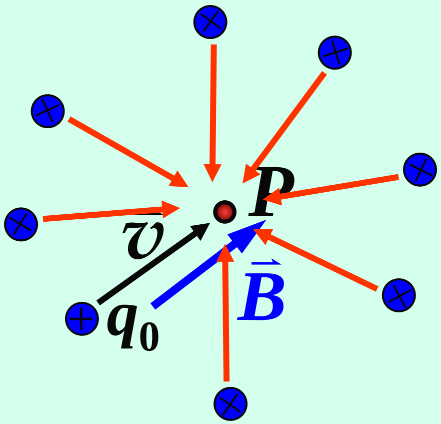
$\mathrm{d}\vec{l}$ 的方向为电流的方向。

四、磁感应强度 $\vec{B}$ ——描述磁场强弱及方向的物理量

用运动电荷q_0来检验磁场。

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

$\vec{B}$的定义:



设电荷q_0以速度$\vec{v}$进入磁场$\vec{B}$中的P点

方向：受力为零的方向。

当 q_0 沿 $\vec{v}\perp\vec{B}$ 的方向运动时， $\left|\vec{F}\right| = F_{\max}$

大小： $B=\dfrac{F_{\max}}{q_0 v}$　　单位：SI制　T(特斯拉)

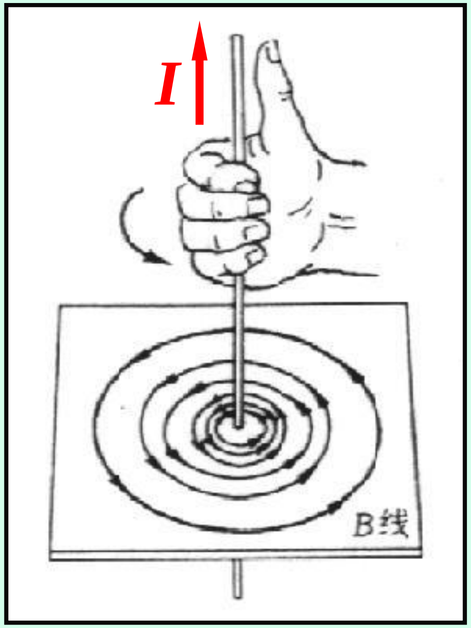
实验表明：磁场对运动电荷的力

$\boxed{\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}}$　称为洛仑兹力。

五、 磁场线 (磁感应线、B线)

磁场线上任一点切线方向是该点的磁场方向;

磁场线的疏密程度表示磁场的强弱。



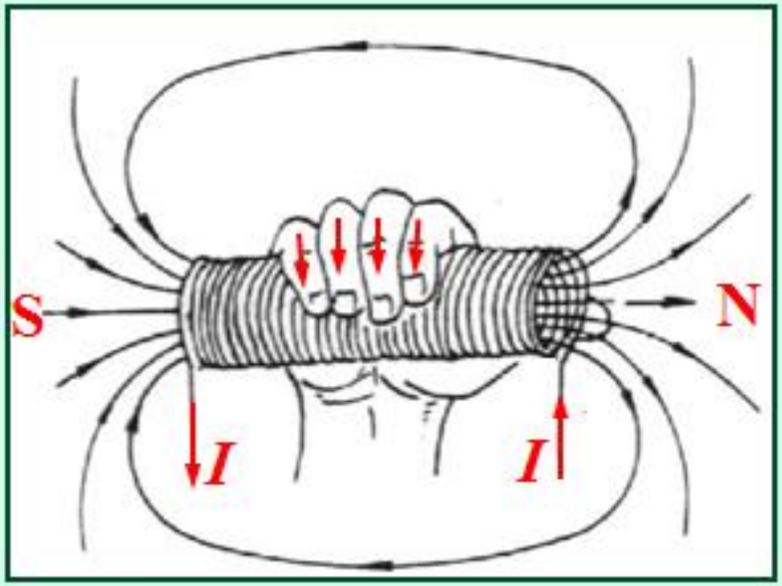
磁场线的性质:

① 磁场线是从北极出发到南极终止的、无头无尾的闭合曲线;

(磁场是有旋场)

②与电流套连;

③与电流成右手螺旋关系。



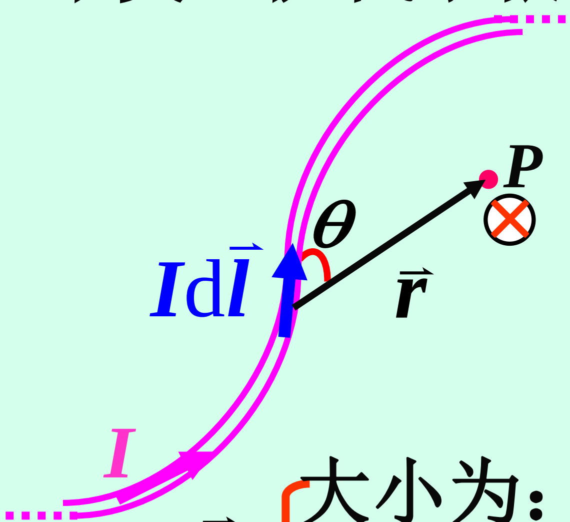
第2节　毕奥—萨伐尔定律

——电流激发磁场的规律

磁场叠加原理：任意闭合电流产生的磁感应强度为其中各个**电流元**产生的元磁感应强度的矢量叠加。

一、毕 — 萨定律

毕奥—萨伐尔根据电流磁作用的**实验结果**分析得出：



电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 在P点产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

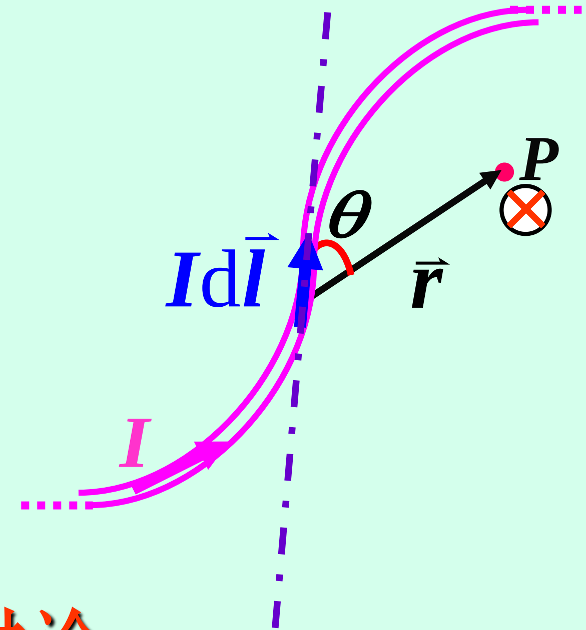
→ 毕 — 萨定律

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}$$

真空磁导率

$\mathrm{d}\vec{B}$ 大小为：$\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$

方向为：$I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}$ ，右手螺旋方向



$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

讨论：

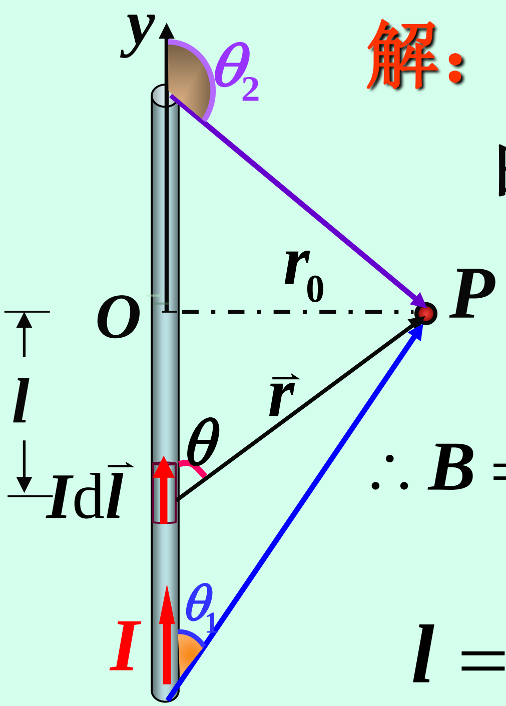
①当$\theta=0$、π时，$\mathrm{d}B=0$，即**沿电流方向上的磁场为0**。

②所有电流元$I\mathrm{d}\vec{l}$，对P点磁感应强度B的贡献为：

$$\vec{B}=\int \mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

例1. 载流长直导线，其电流强度为I，试计算导线旁任意一点P的磁感应强度$\vec{B}=?$

$\mathrm{d}\vec{B}$方向为$I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}$



解： 取任意电流元$I\mathrm{d}\vec{l}$

由毕—萨定律：$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

各电流元产生的$\mathrm{d}\vec{B}$方向垂直纸面向里

$$\therefore B=\int\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}\boxed{=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}$$

$$l=-r_0\cot\theta\qquad \mathrm{d}l=\frac{r_0}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\qquad r=\frac{r_0}{\sin\theta}$$

讨论： ①无限长直导线的磁场：

对应：$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos 0^\circ-\cos\pi)\boxed{=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}}$$

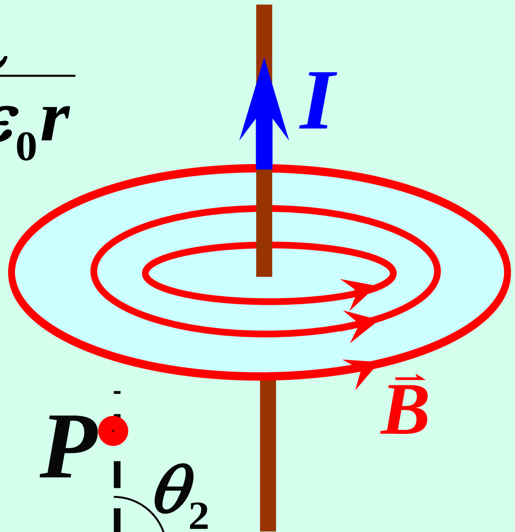
不一定要$L\to\infty$
只要 $r_0\ll L$

长直载流导线的磁场： $\boxed{B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}}$ 轴对称！

磁场大小与r成反比。 类比 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

磁场方向与电流方向成右手螺旋关系。

磁场线是垂直导线平面内的同心圆。

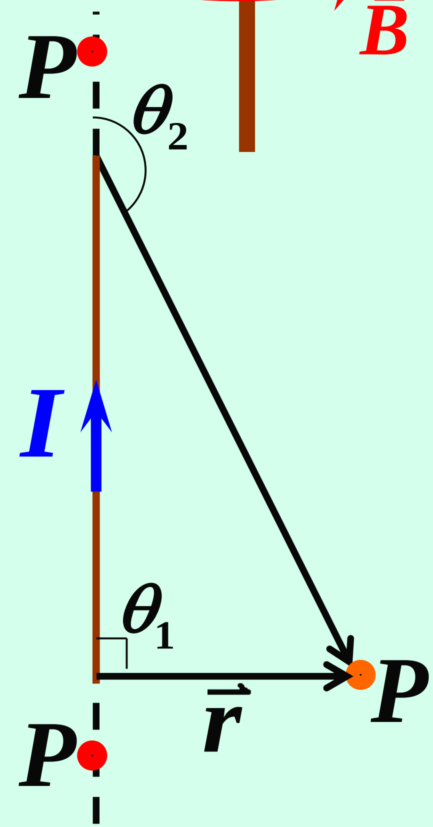


②长直载流导线端面上一点的磁场：

相当于半无限长载流导线。

即： $\theta_1=90^{\circ}$， $\theta_2=\pi$

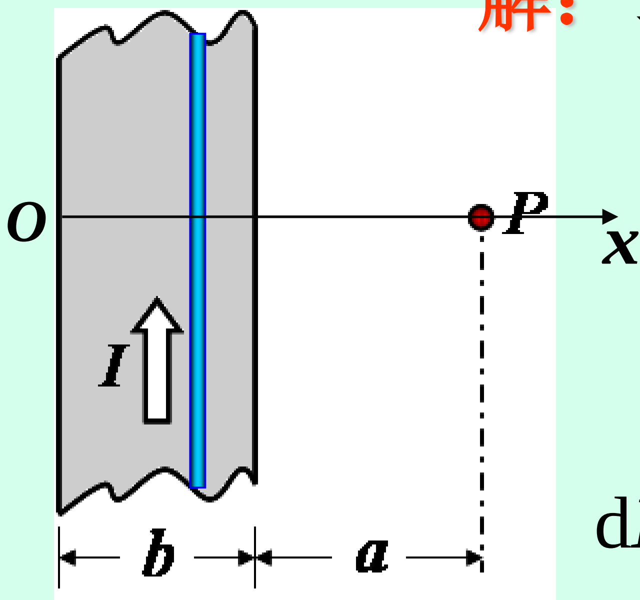
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \qquad B_{半无限}=\frac{1}{2}B_{无限}$$



③场点在直电流延长线上：

$$\left|I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}\right|=0 \qquad B=0$$

例2. 一个宽为b的长直载流平板，电流强度为I。附近有一与其共面的P点， P点距离平板近端为a，求P 点的磁感应强度。



解： 坐标x处宽为dx的窄条可视为无限长直载流导线，其电流为

$$\mathrm{d}I = \frac{I}{b}\mathrm{d}x$$

它在P点产生的磁场大小为：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi(a+b-x)} = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}x}{2\pi b(a+b-x)}$$

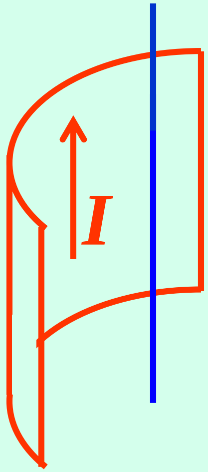
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向垂直纸面向里。

所有窄条电流产生的磁场方向相同，则P 点的磁场为：

$$B = \int \mathrm{d}B = \int_0^b \frac{\mu_0 I \mathrm{d}x}{2\pi b(a+b-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\frac{a+b}{a}$$

方向垂直纸面向里。

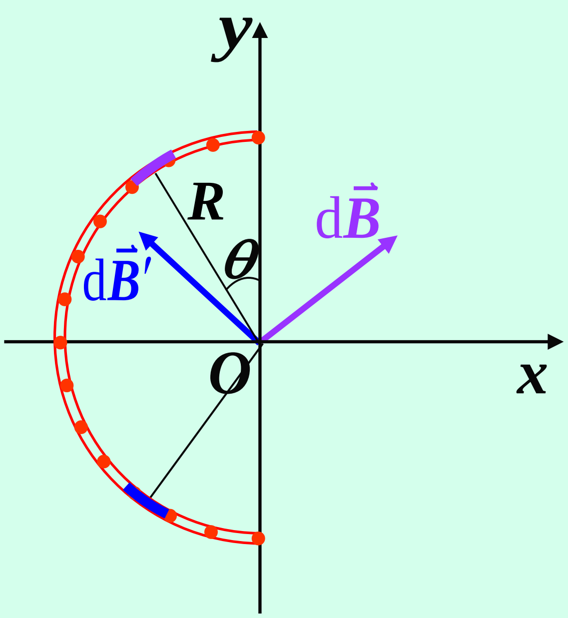


P_{264}例9-4. 求无限长半圆柱面电流（电流均匀分布）轴线上的磁场。

解：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{I}}{\pi \boldsymbol{R}} \times \boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{I}}{\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}\theta}{2\pi^2 R}$$



由对称性： $B_x = 0$

$$B = \int \mathrm{d}B_y = \int \mathrm{d}B \sin\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

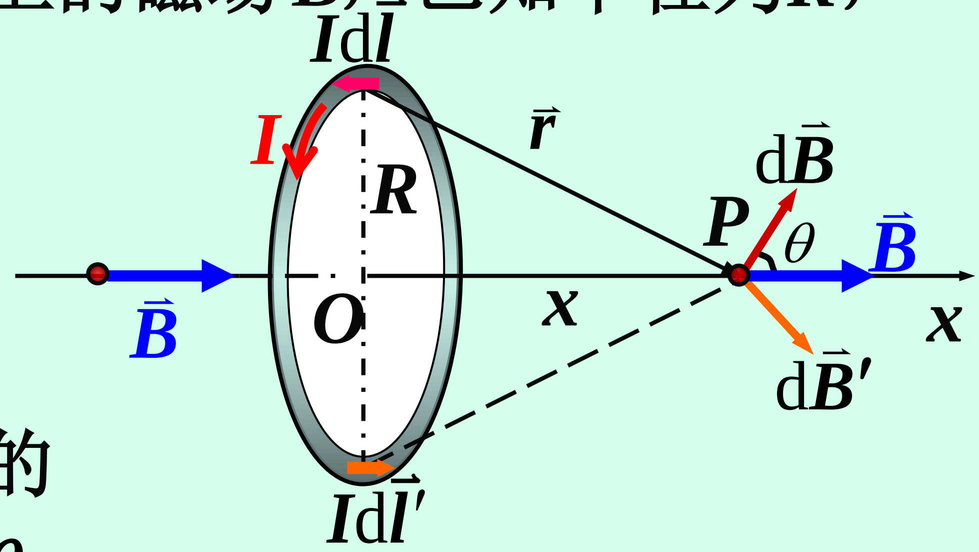
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

方向沿y轴正向

例3. 求载流圆线圈轴线上的磁场 $\vec{B}$，已知半径为R，通电电流为I。

解： 先讨论B的方向

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$



$\mathrm{d}\vec{B}$与$\mathrm{d}\vec{B}'$是对x轴对称的

$$\therefore B = \int \mathrm{d}B_x = \int \mathrm{d}B\cos\theta$$

$$\because \mathrm{d}\vec{l} \perp \vec{r} \qquad \left|I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}\right| = I\mathrm{d}l\cdot r$$

$$\cos\theta = \frac{R}{r},\quad r^2 = x^2 + R^2$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\cos\theta\mathrm{d}l}{r^2} = \frac{\mu_0 I\cos\theta}{4\pi r^2}\times 2\pi R$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}}$$

方向沿x轴正向

磁场方向与电流满足右手螺旋法则。

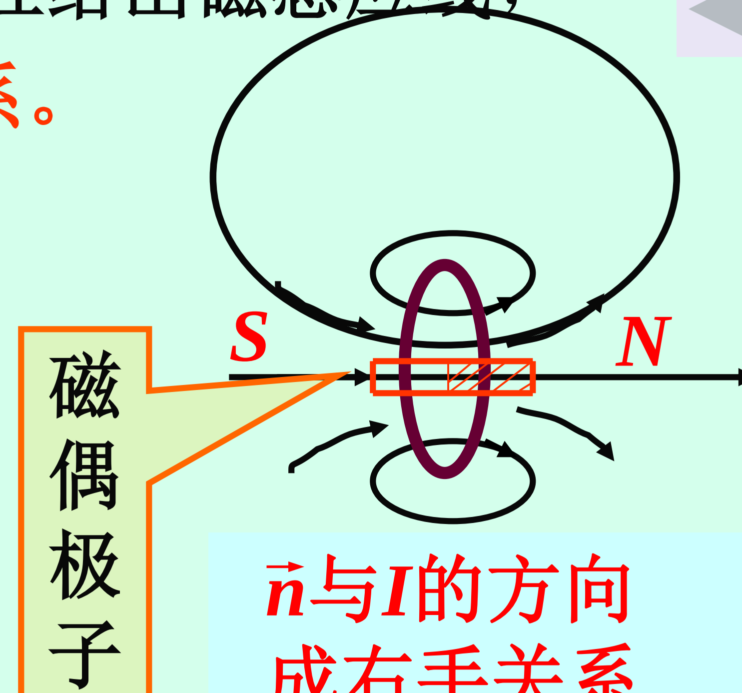
讨论： ①无论 $x>0$ 或 $x<0$，$\vec{B}$ 沿x轴正向

②当 $x=0$时，圆心处：$\boxed{B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}}$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}}$$

③轴线以外的磁场较复杂，可定性给出磁感应线，

电流与B线仍服从右手螺旋关系。



磁偶极矩：$\vec{m}=IS\vec{n}$

若有N匝线圈，总磁矩为：

$$\vec{m}=NIS\vec{n}=N\vec{m}$$

$\vec{n}$与I的方向成右手关系

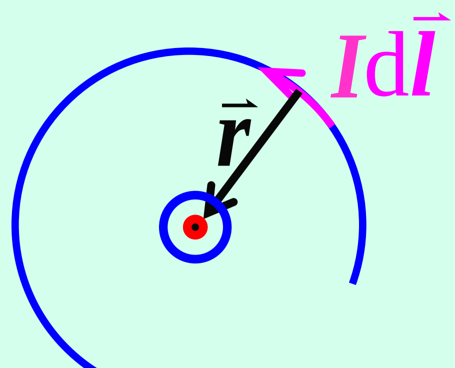
④ $x>>R$时：

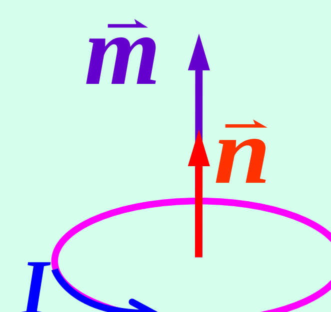
$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}=\frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3} \quad \text{即：} \vec{B}=\frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi x^3}$$

⑤圆弧电流在圆心的磁场：

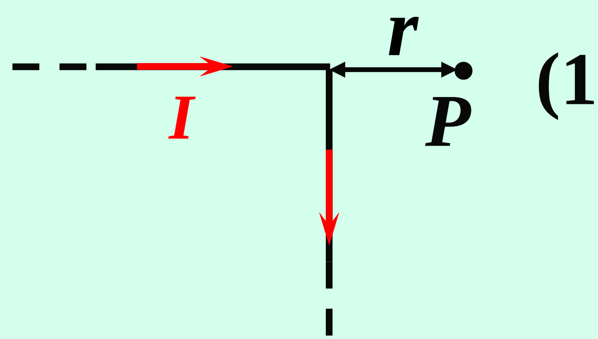
$$B=\int \mathrm{d}B=\int \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\mathrm{d}l$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\cdot \text{弧长} \qquad \text{方向？}$$



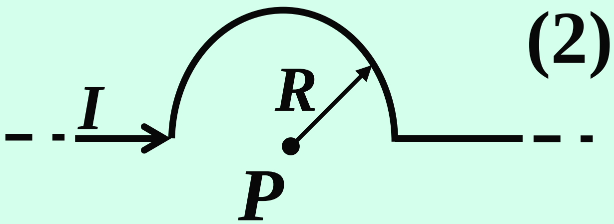


例4. 求下列电流在P点处的B=?



(1) 水平段电流在P点不产生磁场

竖直段电流：$B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}$ 向外



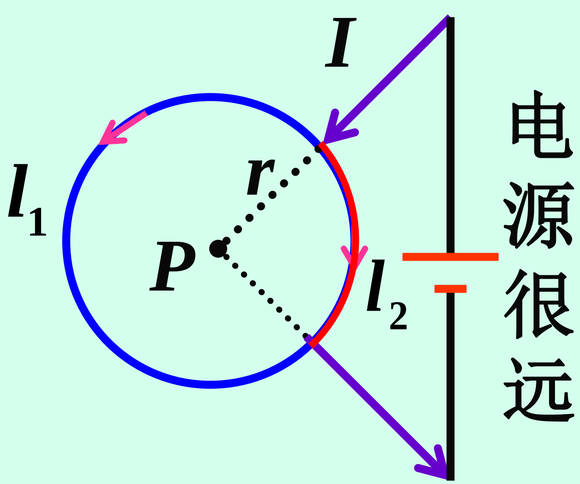
(2) 半园电流在圆心处的磁场 $B=\dfrac{\mu_0 I}{4R}$

向内

两长直导线在P处磁场为零

(3) $B_1=\dfrac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi r^2}$ 向外

$B_2=\dfrac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi r^2}$ 向里



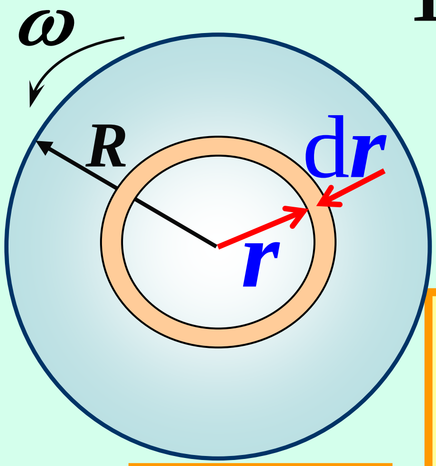
$$B_P=B_1-B_2=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left(I_1 l_1-I_2 l_2\right)$$

$\because I_1R_1=I_2R_2,\quad \because R\propto l$

$\therefore I_1 l_1=I_2 l_2, \Rightarrow B_P=0$

例5. 一个塑性圆盘，半径为R，圆盘表面均匀分布电荷q, 如果使该盘以角速度ω绕其轴旋转，试求：

1) 盘心处的磁场；　2) 圆盘的磁偶极矩



解： 1)将盘看成一系列的宽为dr的圆环构成

每一环在中心产生的磁场：$\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r}$

$$\boxed{I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}$$

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \mathrm{d}q\frac{\omega}{2\pi} = \sigma \mathrm{d}S\frac{\omega}{2\pi} = \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

$$B = \int \mathrm{d}B = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma\omega r\mathrm{d}r}{2r} = \frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$$

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 q}{2\pi R}\vec{\omega}$$

2) $$m = \int \mathrm{d}m = \int S\mathrm{d}I = \int_0^R \pi r^2 \sigma\omega r\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4$$

$$= \frac{\omega q R^2}{4} \qquad \vec{m} = \frac{qR^2}{4}\vec{\omega}$$

一、磁场计算的基本方法

毕 — 萨定律 ＋叠加原理 $\vec{B}=\int \mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

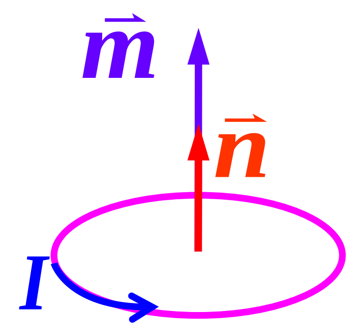
二、典型电流的磁场

1. 长直载流导线的磁场： $\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$ $B_{\text{半无限}}=\frac{1}{2}B_{\text{无限}}$

2. 圆电流在圆心的磁场： $\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}$ $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\cdot\text{弧长}$

3. 无限大均匀载流平面： $\boxed{B=\frac{\mu_0 i}{2}}$

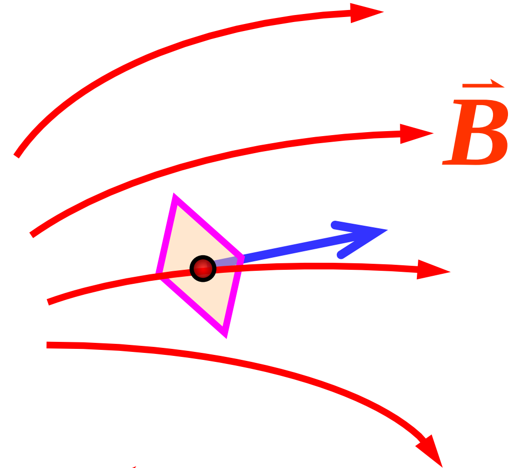
三、平面载流线圈的磁矩 $\boxed{\vec{m}=IS\vec{n}}$



第3节　磁场的高斯定理

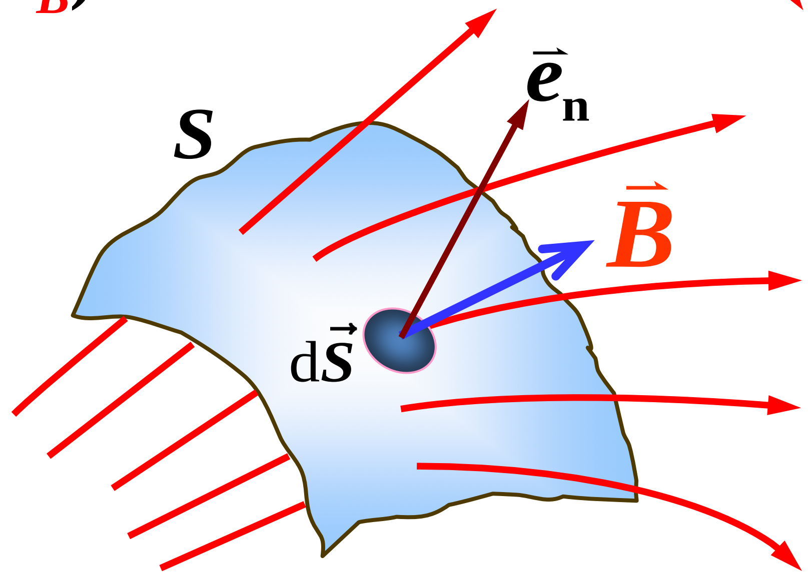
一、 磁通量

磁感应线： 规定： $\boxed{B=\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}S_\perp}}$



定义磁通量：通过磁场中任一给定面的磁感应线的总根数 (Φ_B)，

$$\mathrm{d}\Phi_B=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



S面上的总通量：

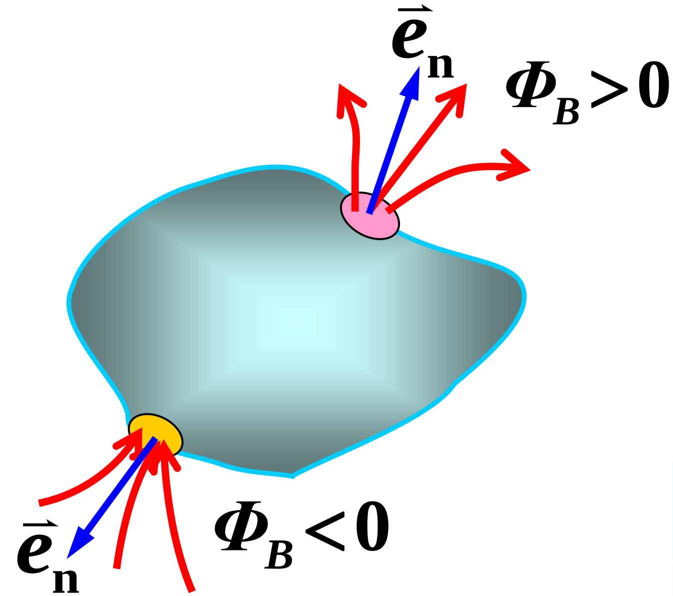
$$\Phi_B=\int\mathrm{d}\Phi_B=\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

当S为闭合曲面时：

$$\Phi_B=\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Φ_B的单位： 韦伯 (Wb)

闭合曲面：$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$



对闭合面的法线方向规定：

自内向外为法线的**正**方向。

二、稳恒磁场的高斯定理

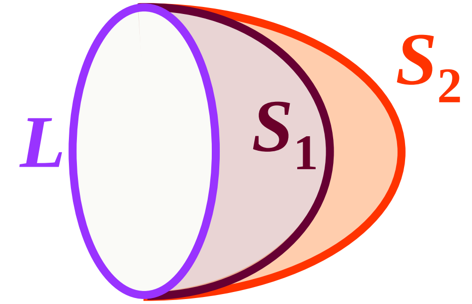
$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

通过任意闭合曲面S的磁感应通量恒等于零。

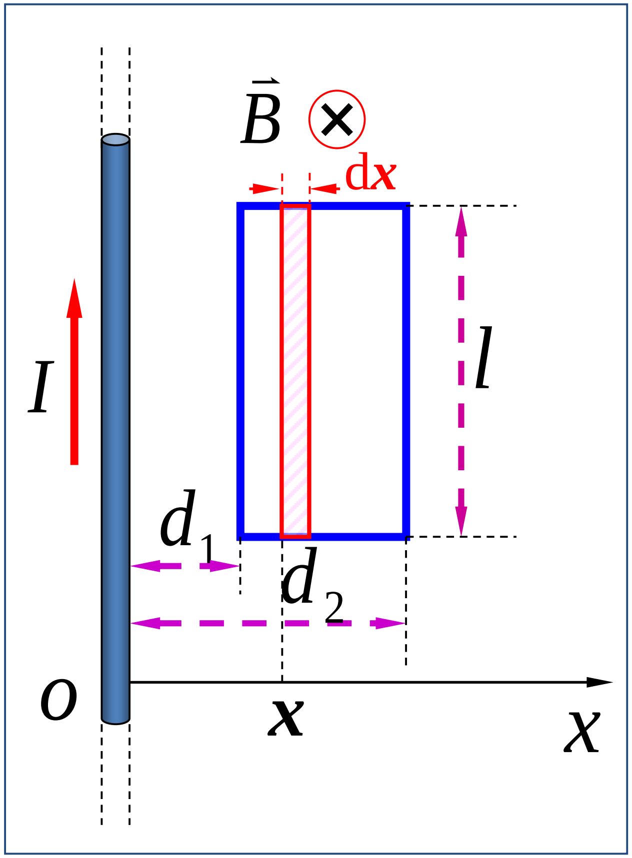
高斯定理的意义：——稳恒磁场是**无源场**

推论：

磁场中以任一闭合曲线 L为边界的所有曲面的磁通量相等。



例 如图载流长直导线的电流为 I，试求通过矩形面积的磁通量.



解 $$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_{d_1}^{d_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}$$

第4节 安培环路定理

一、 安培环路定理 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$

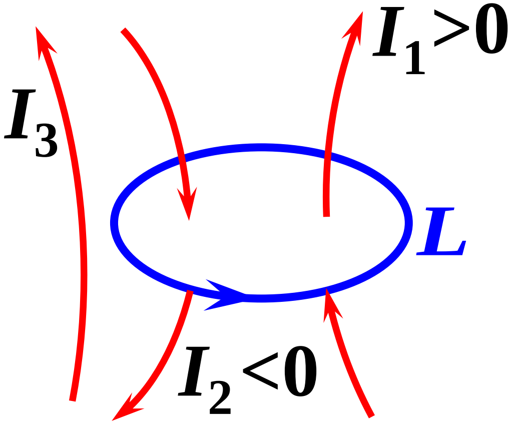
磁感应强度$\vec{B}$沿任意闭合曲线L的线积分，等于穿过这闭合曲线内所有电流的代数和的μ_0倍。

I的正负规定：

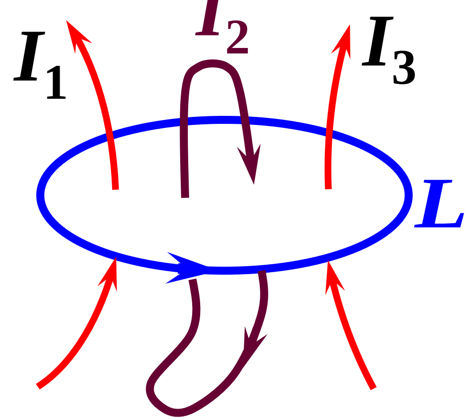
1. 当I与L的环绕方向成右手关系时，$I>0$，反之$I<0$。
2. 若I不穿过L，则I对L的环流为0。

不计穿过回路边界的电流。

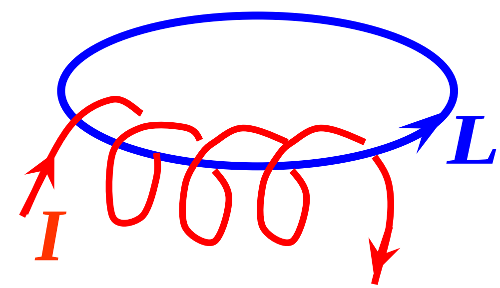
例如：



$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(I_1 - I_2)$



$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(I_1 + I_3)$



$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -4\mu_0 I$

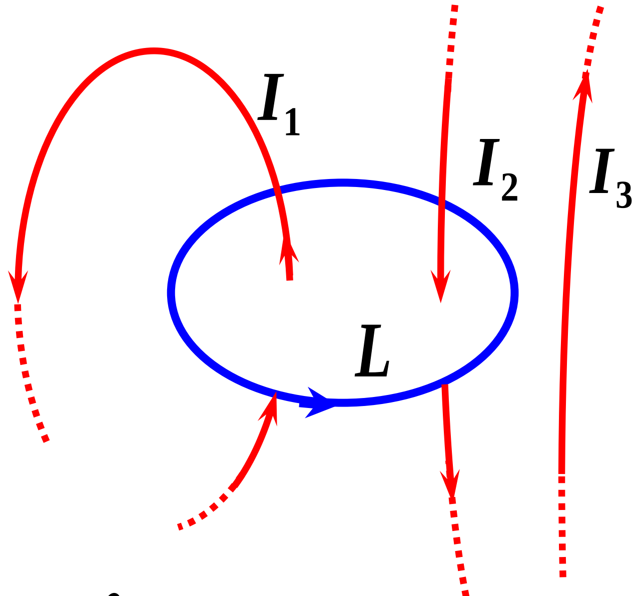
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

说明：

1. 适用于稳恒磁场的任何情况；
2. 磁场是所有电流共同激发的；
3. 对不穿过回路L的电流：

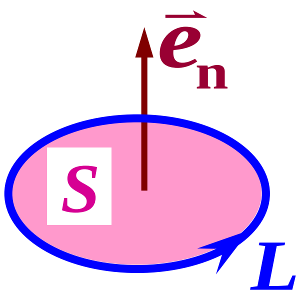
   1) 对$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$无贡献；

   2) 在空间各点（L上各点）均产生磁场。

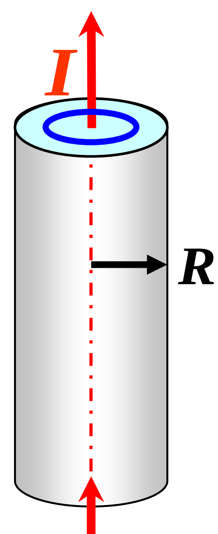


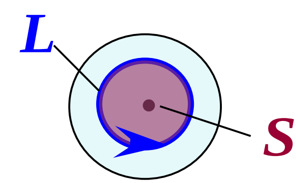
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

4. 若穿过回路的电流是连续分布：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



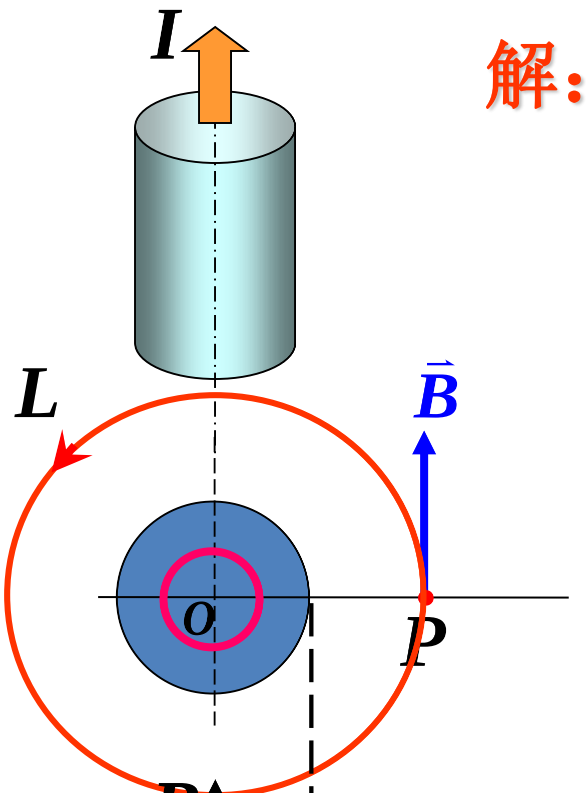


$$\int_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2$$

二、安培环路定理的应用

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

例1.半径为R的无限长圆柱载流直导线，电流I沿轴线方向流动，并且截面上电流是均匀分布。计算任意点P的B=？



解：对称性分析：**轴称性！**

过P点作半径为 $r=OP$的圆周L，

L上各点B大小相等，方向沿切线

$r>R$时　由安培环路定理得：

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B dl = B\cdot 2\pi r$$

又 $$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

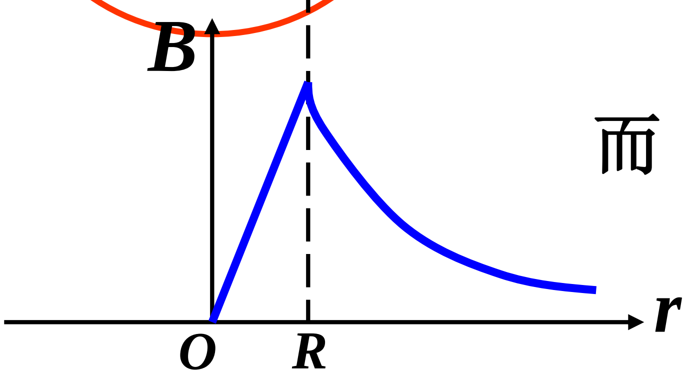
$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

若$r<R$

同理：$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r B$$

而 $$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{j}\cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

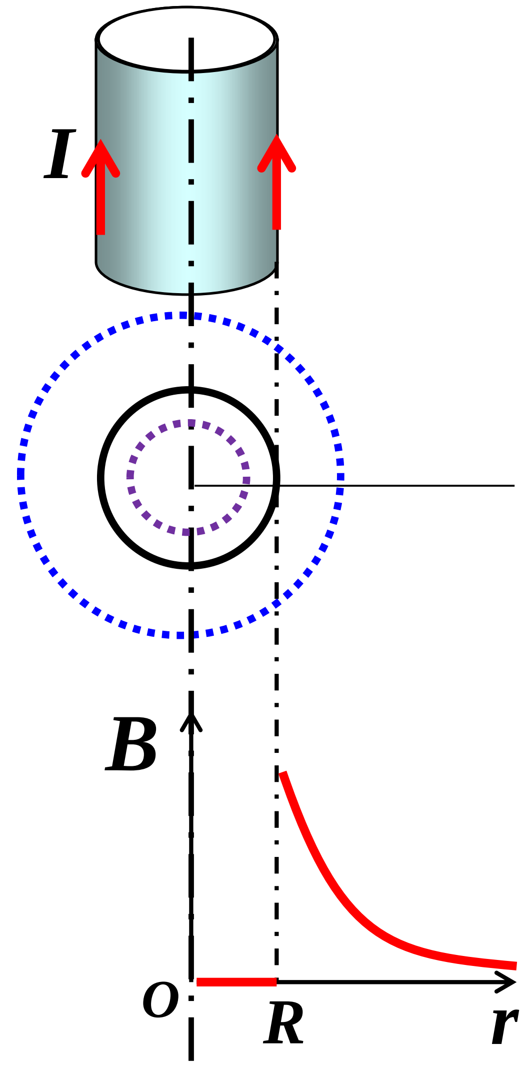


无限长圆柱面电流的磁场分布(半径为 R)?

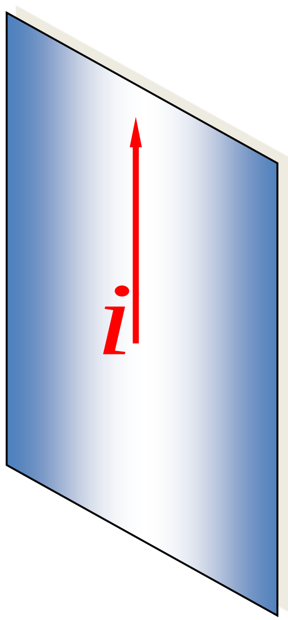
分析场结构：有轴对称性

$r < R \qquad B = 0$

$r > R \qquad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$



例2.无限大均匀载流平面（电流密度i）的$B=?$



解：由对称性可知$\vec{B}\perp\vec{i}$

并且离板等距离处的B大小相等

过P点取矩形回路$abcd\to L$

其中ab、cd与板面等距离

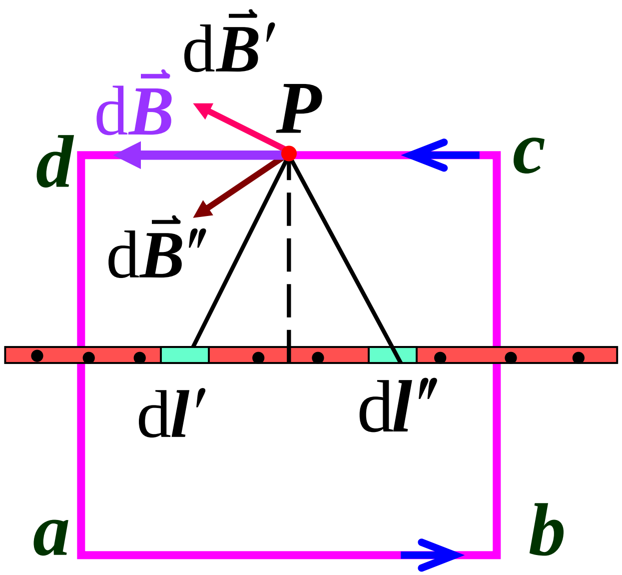
$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l}+\cancelto{0}{\int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l}}+\int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l}+\cancelto{0}{\int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l}}$$

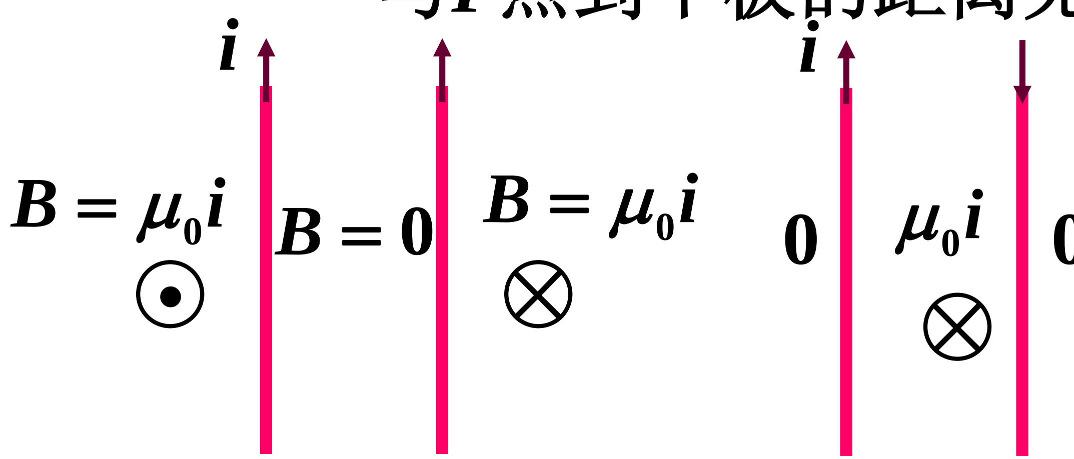
$$=B\cdot ab+B\cdot cd=2B\cdot ab$$

而 $\mu_0\sum I_i=\mu_0 i\cdot ab$

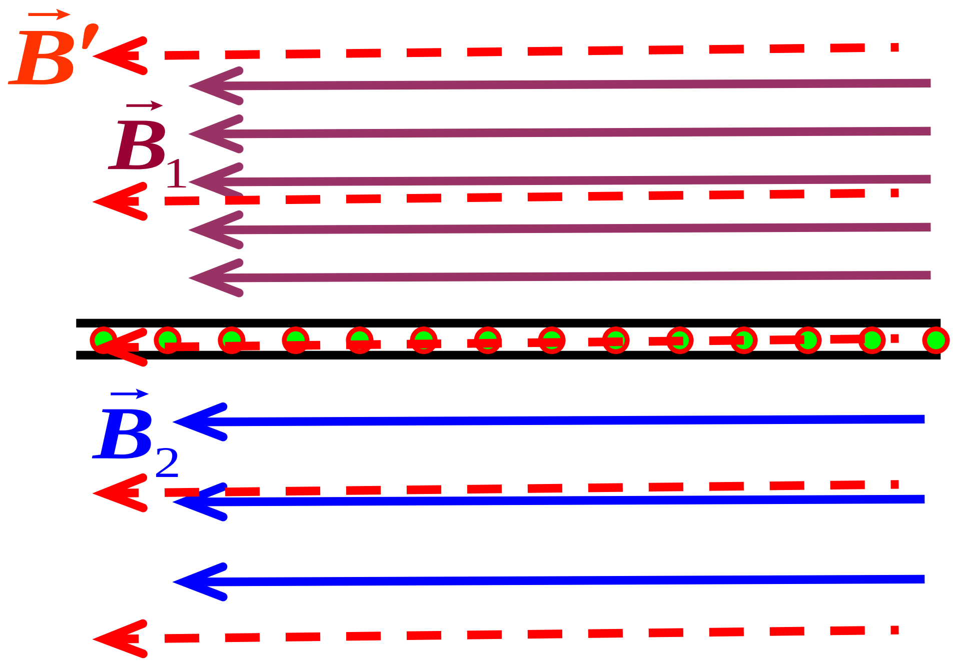
$$\boxed{B=\frac{1}{2}\mu_0 i}$$

与P点到平板的距离无关





例3. 无限大均匀载流平板置入匀强磁场中，电流方向和磁场垂直。已知平面两侧的磁感应强度分别为 $\vec{B}_1$和 $\vec{B}_2$，求载流平面的电流密度和原匀强磁场的大小和方向。



解：设电流密度为 $\vec{i}$

它在两侧产生均匀磁场

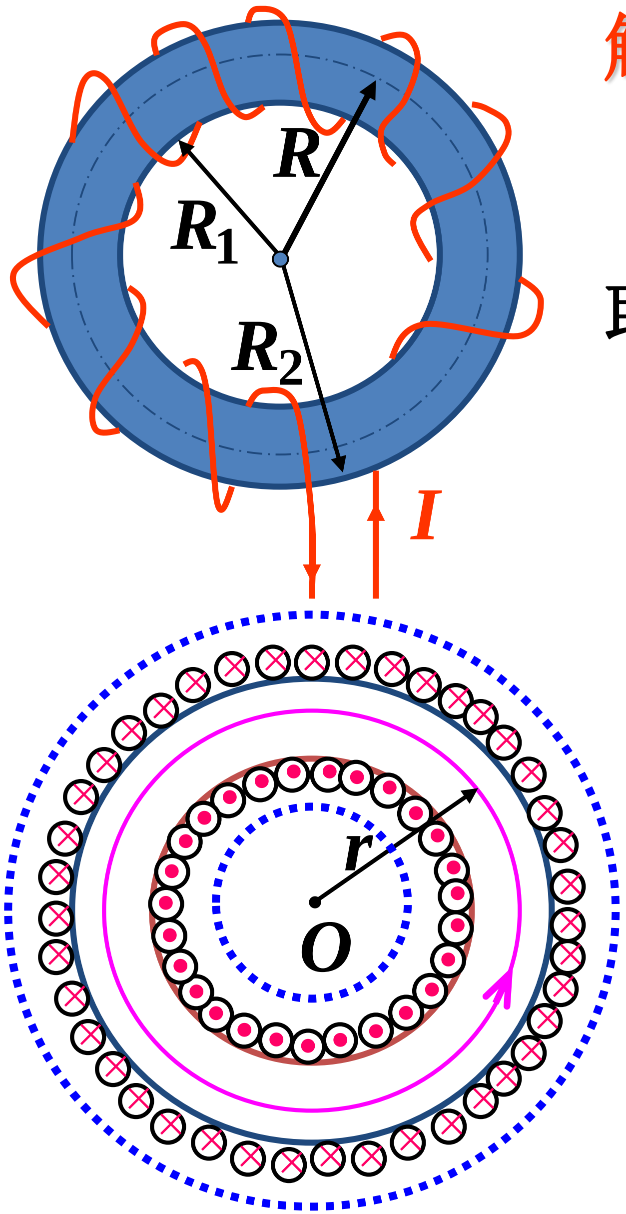
$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{2}$$

显然：

$$B_1 = B' + B_0$$

$$B_2 = B' - B_0$$

例4.求通电螺绕环的磁场分布。已知环管轴线的半径为R，环上均匀密绕N匝线圈，设通有电流I。



解：由于电流对称分布，与环共轴的圆周上，各点B大小相等，方向沿圆周切线方向。

取以管轴为中心，半径为r的圆周为L

当$R_1 < r < R_2$

$$\left.\begin{aligned}&\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B dl = B\cdot 2\pi r\\ &\text{而}\ \mu_0\sum I_i = \mu_0 NI\end{aligned}\right\}\ B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

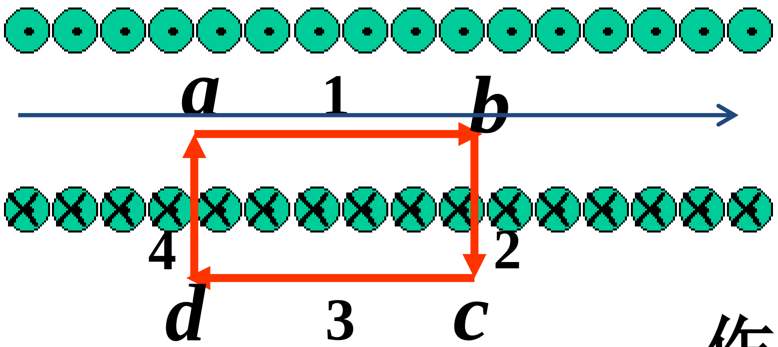
若 $r<R_1$ $\quad \because \mu_0\sum I_i = 0 \quad \therefore B = 0$

若 $r>R_2$ $\quad \because \mu_0\sum I_i = 0 \quad \therefore B = 0$

当 $R_{管截面} << R$，即 $r \approx R$ $\quad n = \dfrac{N}{2\pi R}$

$$\boxed{B = \mu_0 nI}$$

例5. 求通电长直螺线管内的磁场，已知：n、I 。

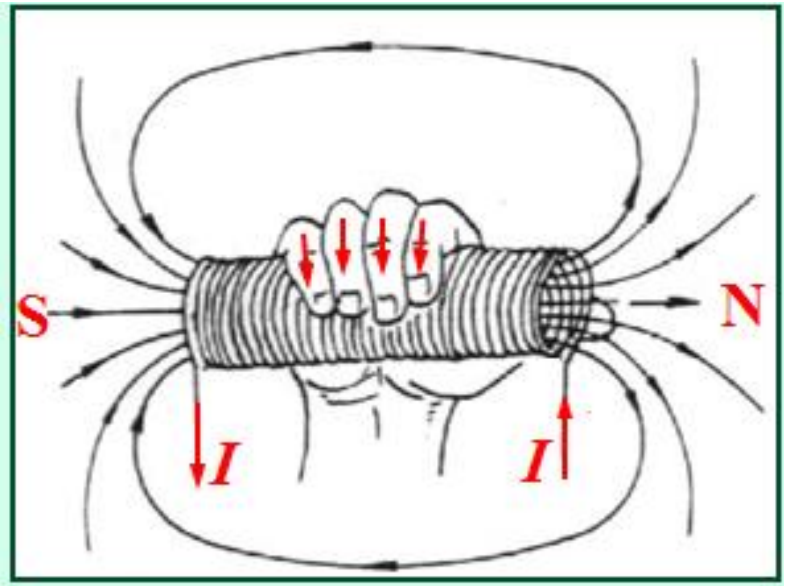


解：对称性分析：

管很长，管中央（管内各处）磁场是均匀的，方向与轴平行, 管外的磁场可忽略。

作闭合环路 $a\,b\,c\,d$ 如图

左：$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{B}_1\cdot d\vec{l} + \int_{bc} \vec{B}_2\cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{B}_3\cdot d\vec{l} + \int_{da} \vec{B}_4\cdot d\vec{l}$$



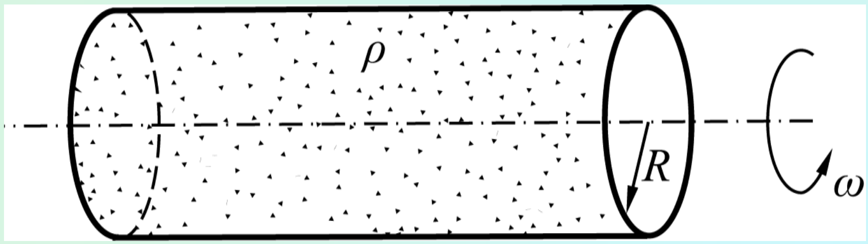
$$\therefore \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{B}_1\cdot d\vec{l} = B\overline{ab}$$

右：$$\mu_0 \sum I = \mu_0 (n\overline{ab}) I$$

安环定理：$$B\cancel{\overline{ab}} = \mu_0 n \cancel{\overline{ab}} I$$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

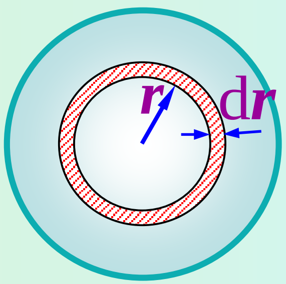
例6. 一均匀带电长直圆柱体，其长度远大于直径，所带的电荷体密度为ρ，半径为R。若圆柱体绕其轴线匀速旋转，角速度为ω，求圆柱体内（不包括两端附近）距轴线r处的磁感应强度的大小。



等效为通电长直螺线管：

$$\begin{cases} \text{管外：} B = 0 \\ \text{管内：} B = \mu_0 \boxed{nI} \end{cases}$$

单位长度电流



单位长度薄圆筒旋转时形成电流：

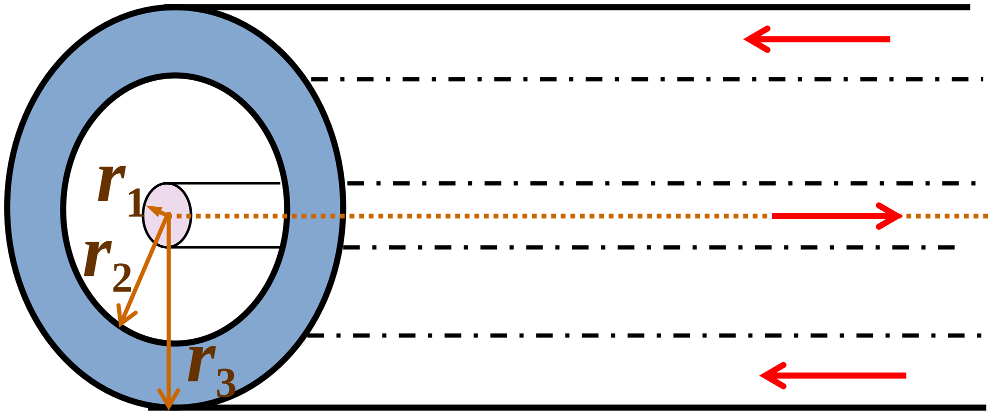
$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \times \rho 2\pi r \mathrm{d}r = \rho\omega r \mathrm{d}r$$

薄圆筒内的磁感应强度： $\mathrm{d}B = \mu_0 \mathrm{d}I = \mu_0 \rho\omega r \mathrm{d}r$

各薄圆筒电流在筒内的磁场方向均相同（水平向右），所以，

r处的磁感应强度： $B = \int_r^R \mathrm{d}B = \int_r^R \mu_0 \rho\omega r \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\mu_0\rho\omega(R^2 - r^2)$

例7. 无限长柱同轴电缆，电流 I 内去外回，均匀分布，求B的分布。



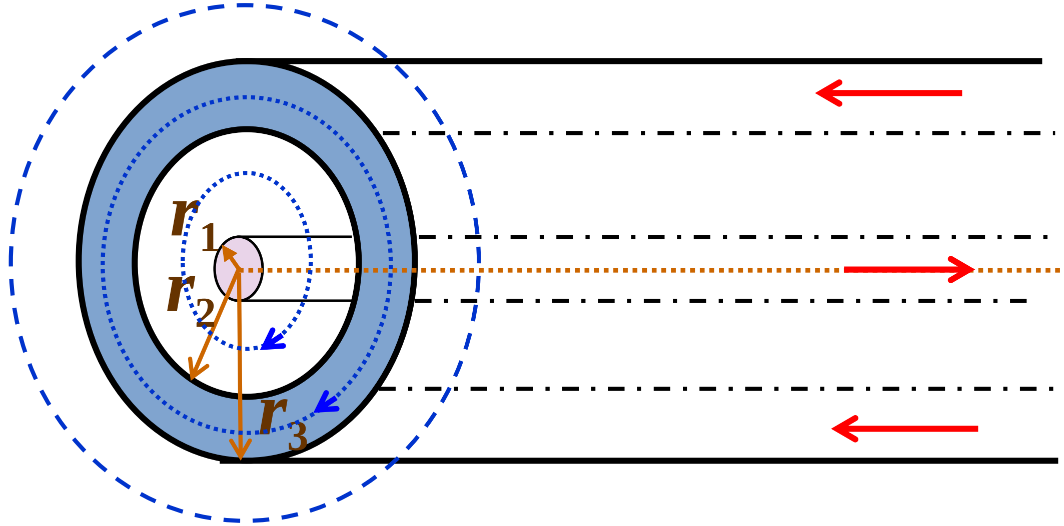
解：磁场具有轴对称分布

取与圆柱同轴的圆环安培环路

$r < r_1$ 无限长载流圆柱体内的磁场：

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}$$

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$$



$r < r_1$ $\quad B_1 = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}$

$r_1 < r < r_2$ $\quad B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$r_2 < r < r_3$ $\quad B_3(2\pi r) = \mu_0\left[I - \boxed{\dfrac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}}\cdot \pi(r^2 - r_2^2)\right]$

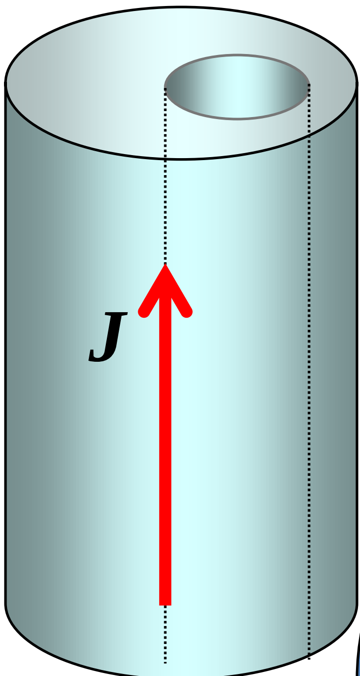
外层的电流密度

取回路如图

$$B_3 = \frac{\mu_0 I(r_3^2 - r^2)}{2\pi r(r_3^2 - r_2^2)}$$

$r > r_3$ $\quad B_4(2\pi r) = \mu_0(I - I) = 0 \qquad B_4 = 0$

例8. 一长圆柱形导体，截面半径为R 。导体内有电流均匀分布，电流密度J，沿柱轴方向流动。在导体中挖去一个与轴平行的，半径为r的圆柱体，形成一个柱形空洞。两轴间距离为d，求空柱轴线上的磁场B。

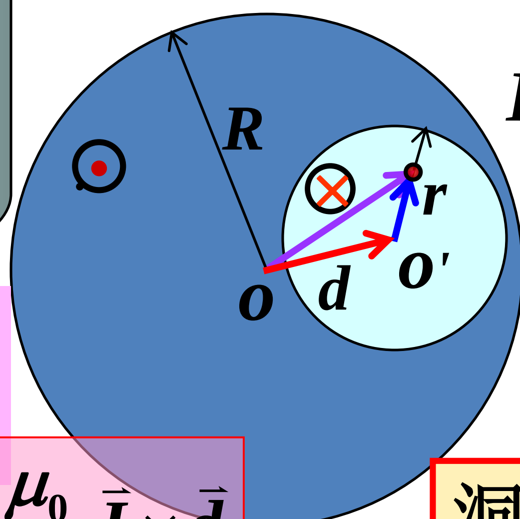


解： 柱形空洞中任一点的磁场应为导体无空洞时，通有电流密度J的磁场与空洞部分通有电流密度J' $(=-J)$的磁场的叠加。

补偿法

$$J=\frac{I}{\pi R^2}$$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}}\boxed{=\frac{\mu_0 Jr}{2}}$$



$$B_1=\frac{\mu_0}{2}Jr_1=\frac{\mu_0}{2}Jd$$

$$B_2=\frac{\mu_0}{2}J'r_2=-\frac{\mu_0}{2}Jr_2=0$$

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$$

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0}{2}\vec{J}\times\vec{r}_1$$

$$\vec{B}_2=-\frac{\mu_0}{2}\vec{J}\times\vec{r}_2$$

空洞中任一点的B ?

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{2}\vec{J}\times\vec{d}$$

洞内为均匀场

三、稳恒磁场的性质

高斯定理：$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$ → 无源场

安培环路定理：$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$ → 有旋场

四、稳恒磁场计算的两种方法

1. 毕 — 萨定律＋叠加原理

$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B}$$

2. 安培环路定理计算对称磁场