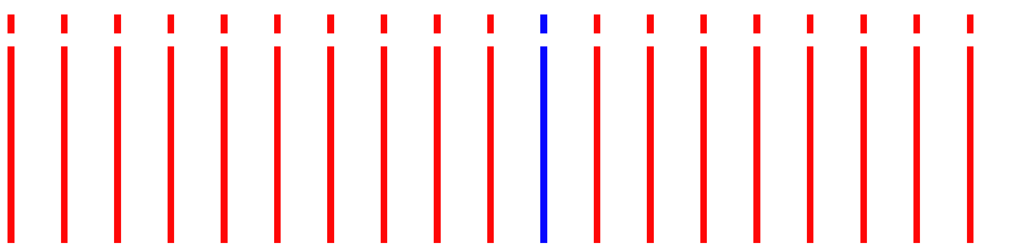
# 本节课作业

**P79: 11-T17~20**

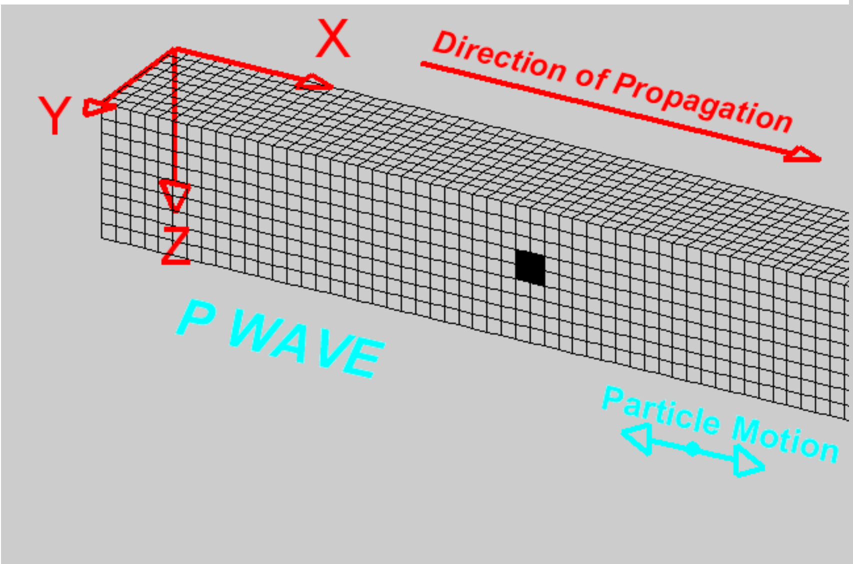
# 已学内容回顾

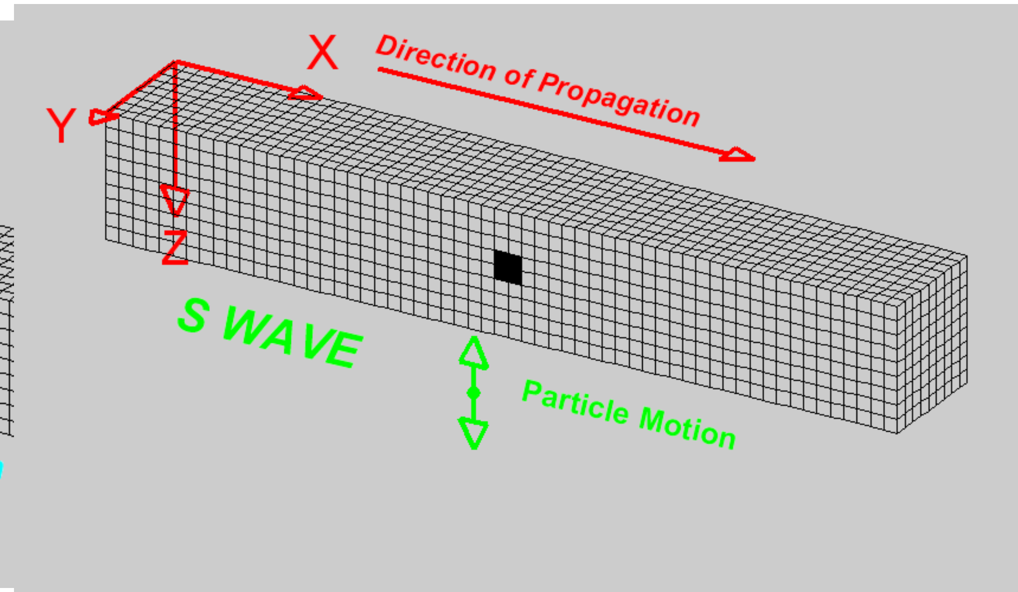
## 横波和纵波



# 地震波

主要分为两种，一种是表面波，一种是体波。表面波只在地表传递，体波能穿越地球内部。



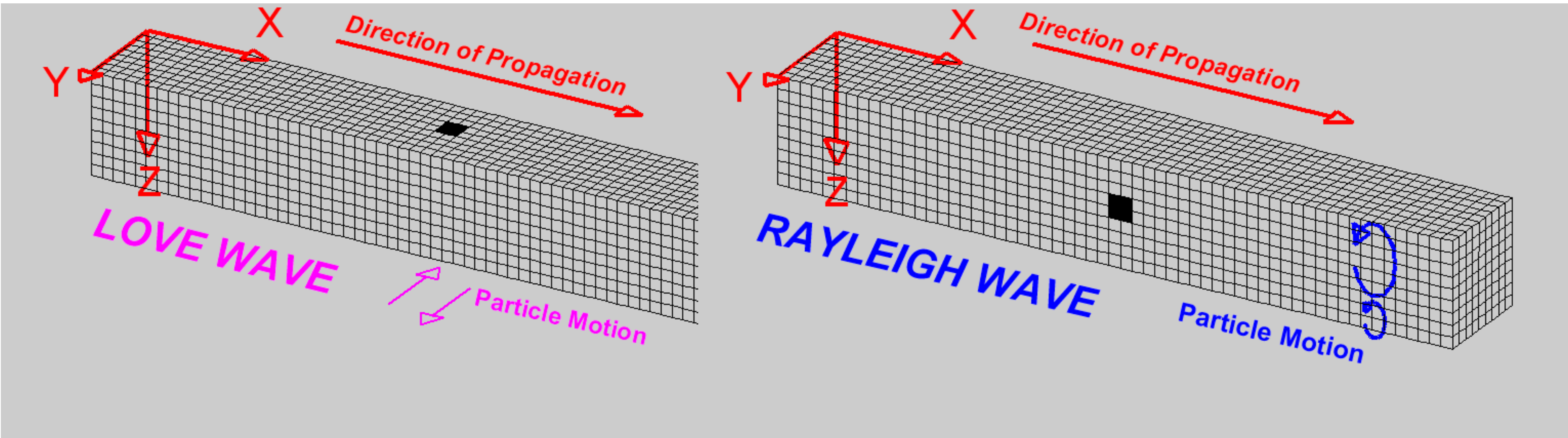




**P波**(Pressure)：在所有地震波中，前进速度最快，也最早抵达。P波能在固体、液体或气体中传递。

**S波**(Shear)：S波只能在固体中传递，无法穿过液态外地核。

**利用P波和S波的传递速度不同，利用两者之间的走时差，可作简单的地震定位。**

**表面波**（Surface Wave）：浅源地震所引起的表面波最明显。表面波有低频率、高震幅和具频散(Dispersion)的特性，只在近地表传递，是最有威力的地震波。




**洛夫波**（Love Wave）：粒子振动方向和波前进方向垂直，但振动只发生在水平方向上，没有垂直分量。

**雷利波**（Rayleigh wave）：又称为地滚波，粒子运动方式类似海浪，在垂直面上，粒子呈逆时针椭圆形振动。

# 二、波动的几何描述

## （1）波阵面（波面）

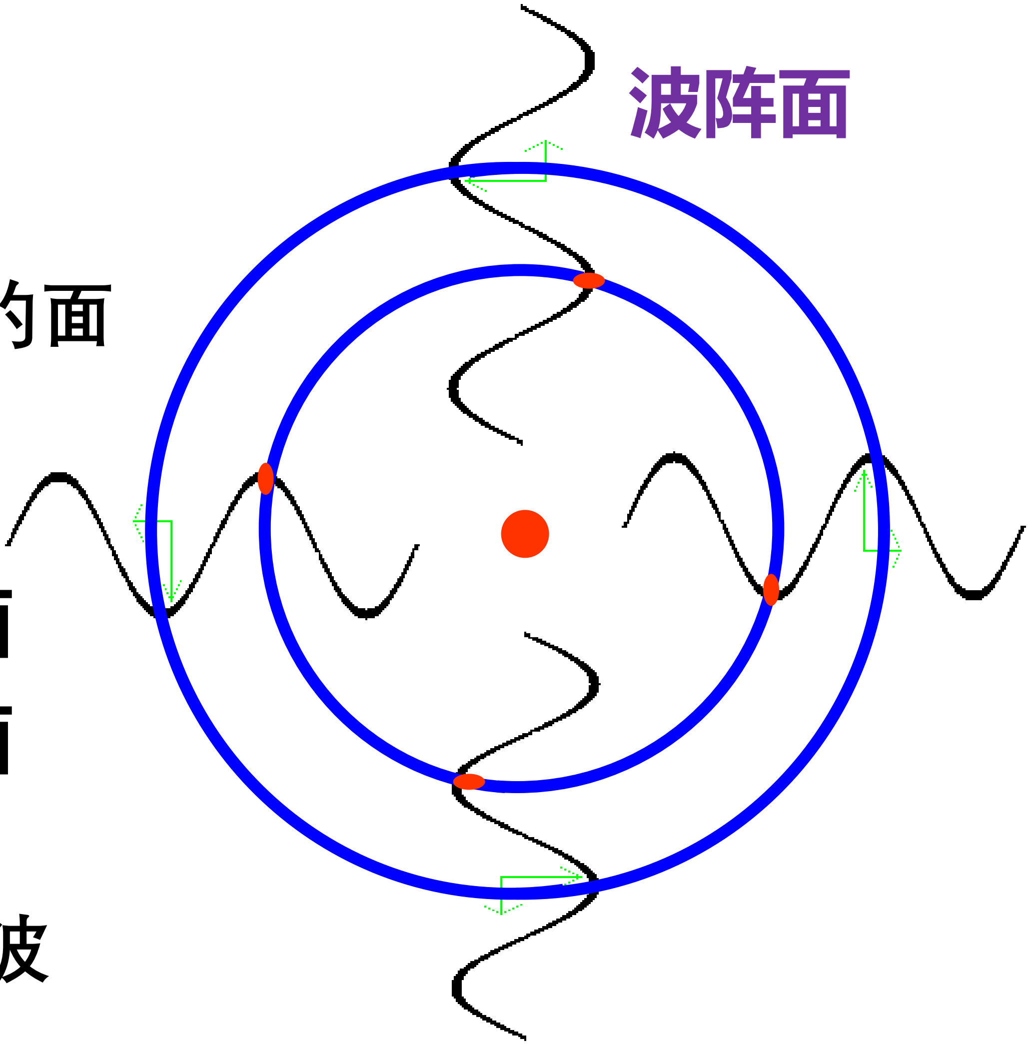
振动位相相同的点组成的面

球面波的波面是球面

平面波的波面是平面

点波源产生球面波

球面波在远处可看成平面波

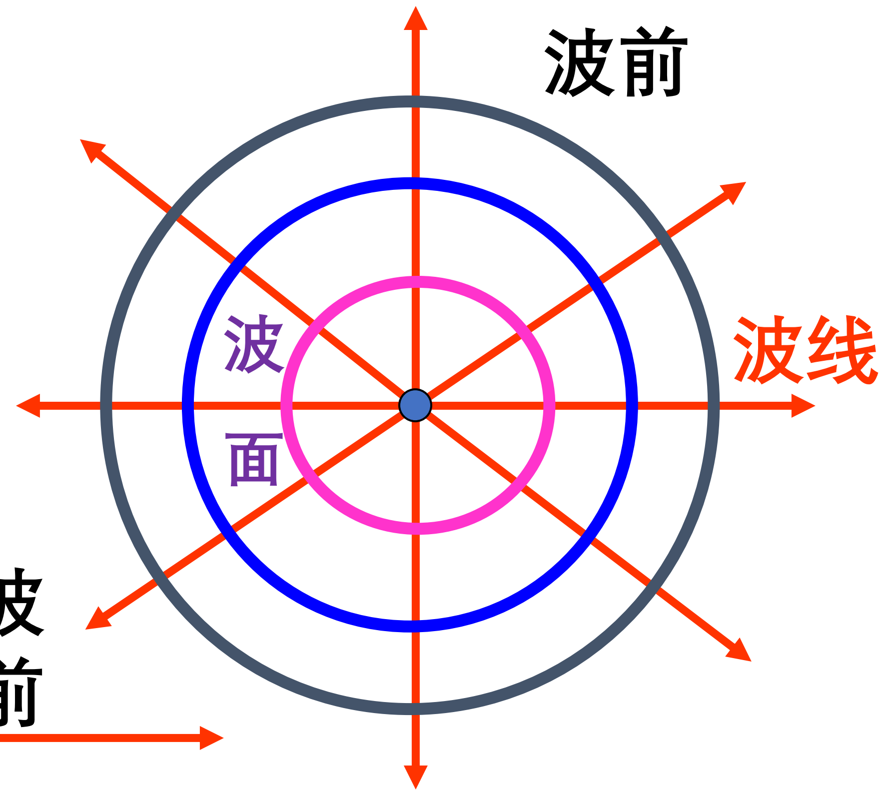


## (2) 波前

行进在最前头的波面。

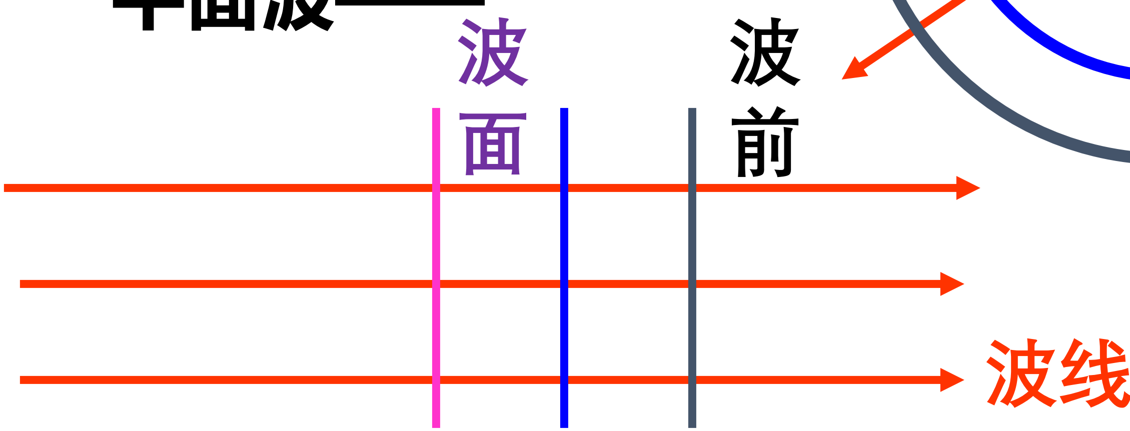
## (3) 波线

发自波源，与波面垂直，
指向波的传播方向的射线。



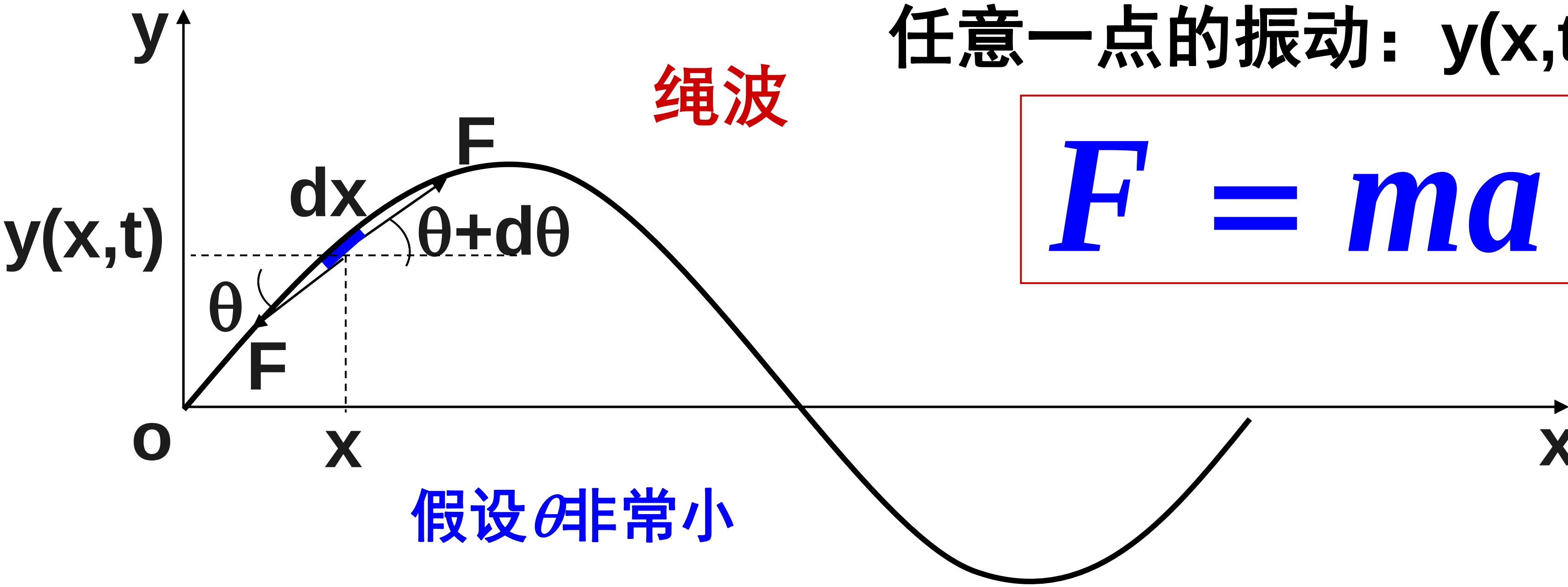

**球面波——**

**平面波——**



# 三、一维简谐波的动力学方程

任意一点的振动：y(x,t)



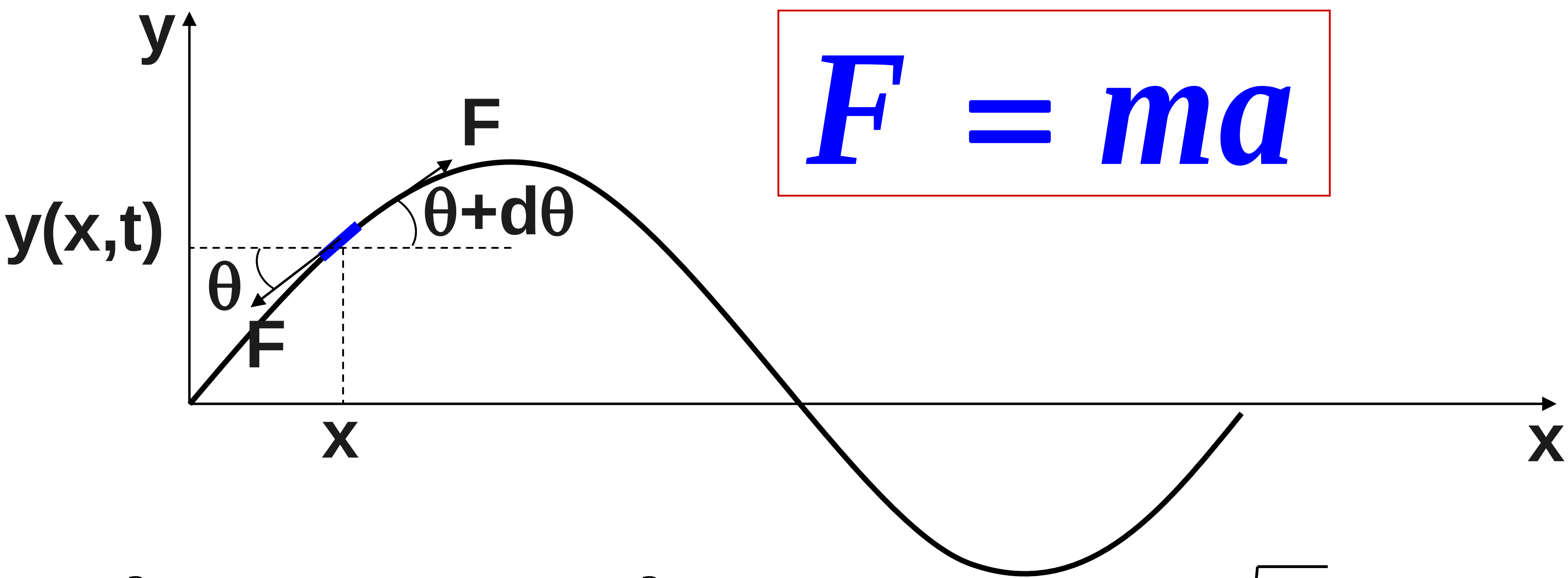

$$F = ma$$

$$F\sin(\theta+d\theta) - F\sin(\theta) = \rho \mathrm{d}x a \quad a = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$\sin(\theta) \approx \theta$

$$\Rightarrow F\mathrm{d}\theta = \rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad \theta \approx \tan(\theta) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{F}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$




$$F = ma$$

$$\frac{\rho}{F}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

一维简谐波动力学方程

波动方程

波速 $u$ 与介质的性质有关，$\rho$ 为介质的密度.

$$u=\sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

固体

$$u=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$ 切变模量 —— 横 波

$$u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$ 弹性模量

液、气体 $$u=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$$ 体积模量

纵 波

$$\sigma=\frac{F}{A}$$ 应力

$$\varepsilon=\frac{l-l_0}{l_0}=\frac{\Delta l}{l_0}$$ 应变

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}$$ 杨氏模量

胡克定律

如声音的传播速度
- 343 m/s 空气，常温
- 4000 m/s 左右，混凝土

一维简谐波动方程 $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

推广到三维空间：

$$\nabla^2 S-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=0, \qquad \nabla^2 S=\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

S为质点的空间位移

波动方程的解 $$\boxed{y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]}$$

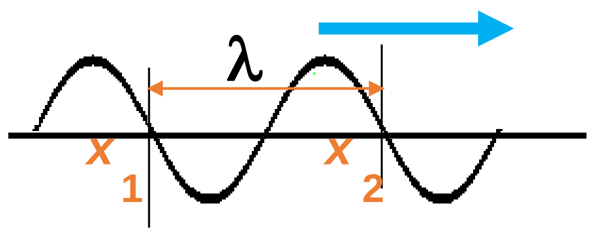
振幅和相位由初始条件和边界条件决定

$$y\big|_{t=0,x=0}=A\cos\varphi, \qquad \dot{y}\big|_{t=0,x=0}=-A\omega\sin\varphi$$

# 波动方程的一个解：平面简谐波的波函数

$$\boxed{y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi] = A\cos[\omega t - 2\pi x/\lambda+\varphi] = A\cos[\omega t - kx+\varphi]}$$

**(1) 波长$\lambda$:** 空间周期




**在波的传播方向上，两相邻的位相差为 2π 的质点间的距离 。**

**(2) 周期 *T*: 波向前传播一个波长所用的时间**

$x_1$点的振动位相比$x_2$ 超前2π

则： $\omega(t-\frac{x_1}{u})-\omega(t-\frac{x_2}{u}) = 2\pi$

$T_波$ $\lambda$ $T_振$

$$\frac{x_2-x_1}{u} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{T_波 = T_振}$$

时间周期

**(3) 频率ν： 周期倒数**

**单位时间内，波推进的距离中包含的完整的波长的数目.**

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{uT_波} = \frac{1}{T_波} = \frac{1}{T_振}$$

$$\boxed{\nu_波 = \nu_振}$$

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] = A\cos[\omega t - 2\pi x / \lambda + \varphi] = A\cos[\omega t - kx + \varphi]$$

**(4) 波速 $u$：波在单位时间内传播的距离;**
**波的传播可看作振动状态(位相)的传播，所以又称相速。**

$$u = \frac{\lambda}{T}$$

**波速的大小决定于媒质的性质**
**——媒质的密度和弹性模量**

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

$$u_{波} \neq u_{振}$$

注

**(5) 波数 $k$：在波的传播方向上 $2\pi$ 长度内包含的波长的个数**

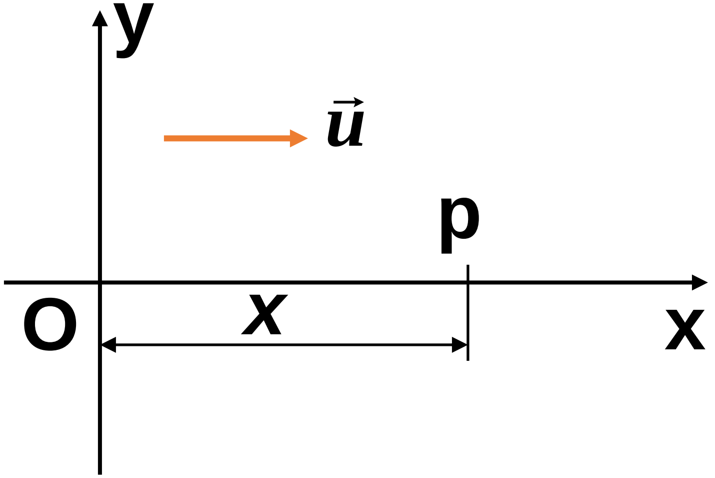
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

## 四）平面简谐波

**1.波函数的概念：** 描述任意时刻、任意位置的振动状态的函数，被称为振动的波函数

以横波为例：

**设一简谐波波源在坐标原点O处以速度 $u$ 向 $x$ 轴正方向传播，$t = 0$ 时，波源的振动方程为：**




$$y = A\cos\varphi$$

任选一点 P (OP=$x$)，P的振动情况？

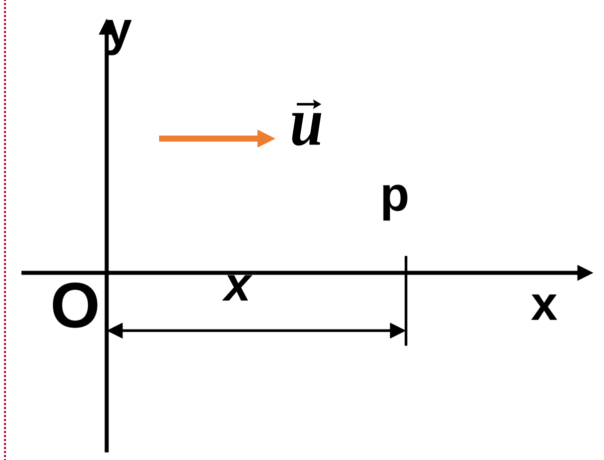
**注：波传播的是质点的振动状态**——传播波源的位相

P点的振动是从O点振动传过来

O点$t$时刻的位相，经 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$传到P点

P点的位相总是落后于O点的位相

**P点的位相总是落后于O点的位相，相应落后时间为 $\Delta t = x/u$**




O点 $t$ 时刻的振动： $y = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\boxed{\text{P点 } t \text{ 时刻的位相} = \text{O点 } t - \Delta t \text{ 时刻的位相}}$$

即P点在 $t$ 时刻的位相： $\omega(t - \Delta t) + \varphi$

**任意点P的振动为：** **一维简谐波的波函数**

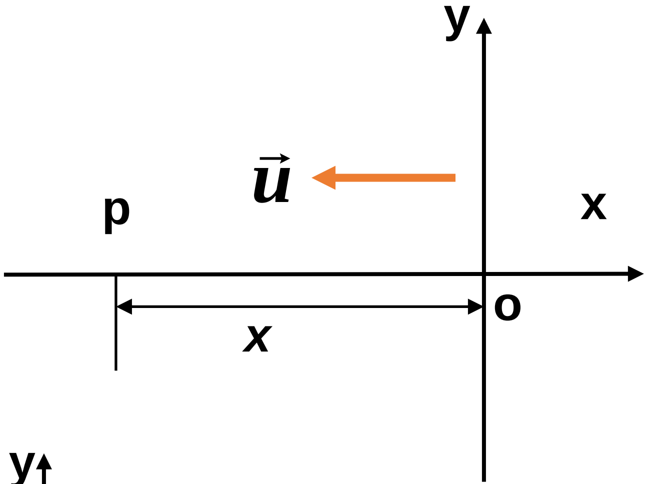
$$y = A\cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi] = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

## 波函数讨论: $y = A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi] = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

(1)上式给出波源在原点并向x轴正方向传播的情况

- 若波向$x$轴负方向传播，$y$=?

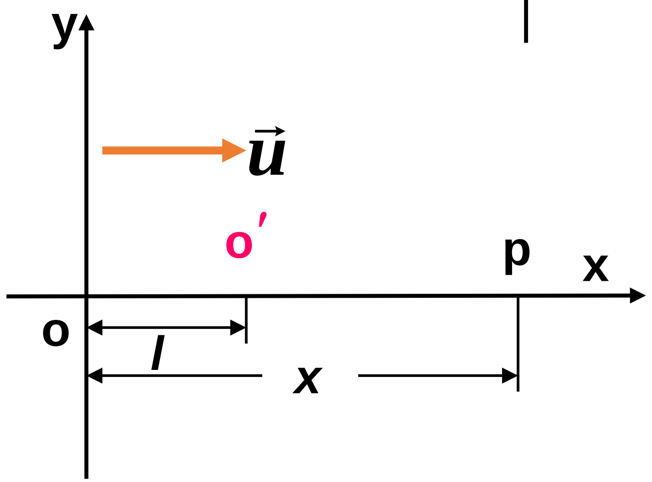
$$y = A\cos[\omega(t-\Delta t)+\varphi] \qquad \Delta t = -\frac{x}{u}$$




$$\boxed{y = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi]}$$

- 若波源不在原点，向$x$正向传播

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{x-l}{u}$$




$$\boxed{y = A\cos[\omega(t-\frac{x-l}{u})+\varphi]}$$

**可见，波函数表达式与坐标轴的选择有关。**

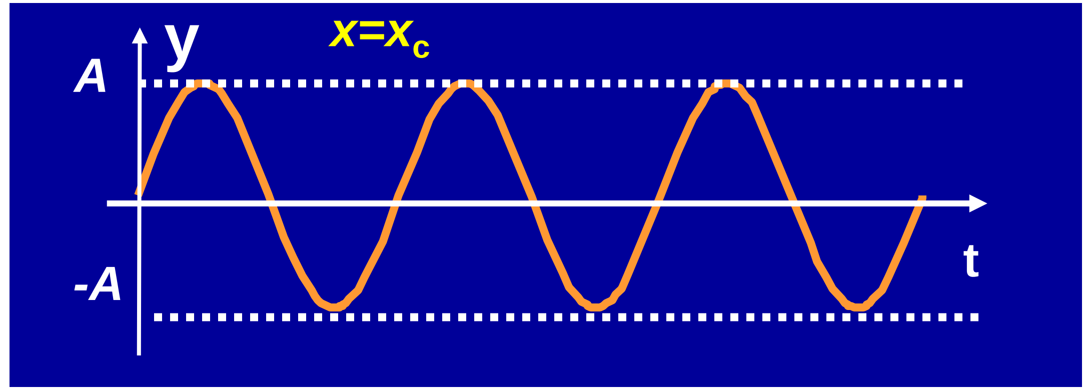
$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

# (2) 波函数的物理意义

*** 当 $x = x_c$=常数**

$$y = A\cos[\omega t - (\frac{\omega x_c}{u} - \varphi)]$$

$$= A\cos[\omega t - \varphi_1] \quad = f(t)$$



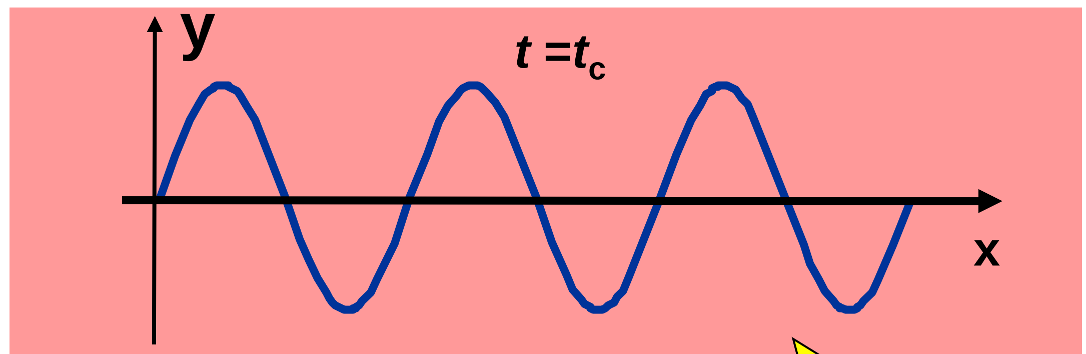

表示 $x_c$处质点随时间$t$的变化规律 —振动方程

**** 当 $t = t_c$=常数**

$$y = A\cos[\omega(t_c - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$= A\cos[(\omega t_c + \varphi) - \frac{x}{u}]$$

$$= f(x)$$




波形曲线

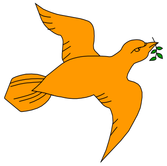
给出$t_c$时刻传播方向上所有质点的振动状态 —媒质形成的波动状态

**⁂ $x \neq$常数，$t \neq$常数**

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

描写不同时刻，不同位置质点的振动状态，每一时刻对应一波形曲线。

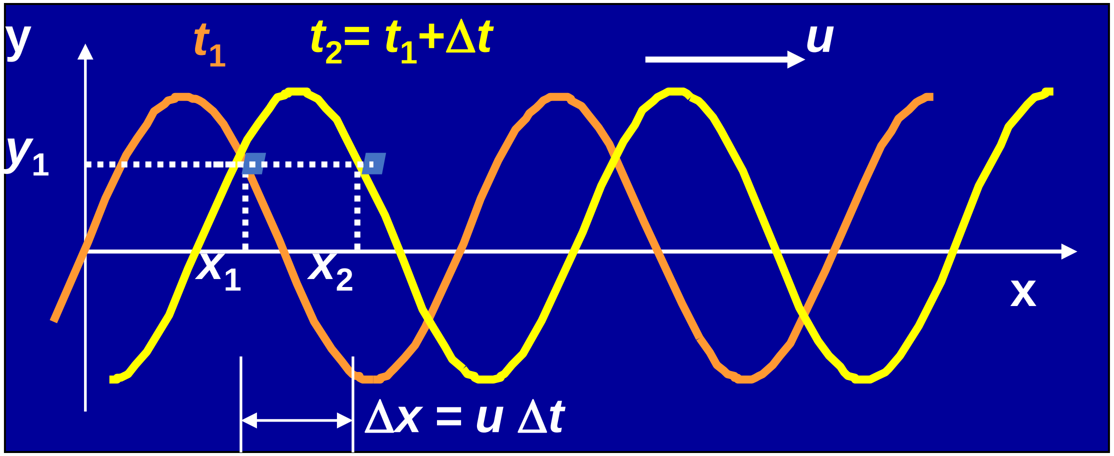
✲ $x = x_1$，$t = t_1$，都是常数



$$y = A\cos[\omega_0(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$y = A\cos[\omega(t_1-\frac{x_1}{u})+\varphi)] = y_c = \text{常数}$$

表示 $t_1$时刻，$x_1$处质点偏离其平衡位置的位移。




当 $t = t_1+\Delta t = t_2$时，

$x_2 = x_1+\Delta x = x_1+u\Delta t$处

质点的振动位移为：

$$y_2 = A\cos[\omega(t_2-\frac{x_2}{u})+\varphi)] = A\cos\{\omega[(t_1+\Delta t)-\frac{x_1+\Delta x}{u}]+\varphi)\}$$

$$= A\cos[\omega t_1+\cancel{\omega\Delta t}-\frac{\omega x_1}{u}-\cancel{\frac{\omega\Delta x}{u}}+\varphi]$$

$$= A\cos[\omega(t_1-\frac{x_1}{u})+\varphi)] = y_1$$

即：$t_2$时刻，$x_2$质点振动的位移恰是 $t_1$时刻$x_1$质点的位移

结论

经$\Delta t$时间，整个波形向前移动了一段路程$\Delta x=u\Delta t$

波形传播的速度 = $u$ = 波速=相速

## (3)波函数的几种等价表式：

向 $x$ 轴正向传播的波

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$y(x,t)=A\cos[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi]$$

$$y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

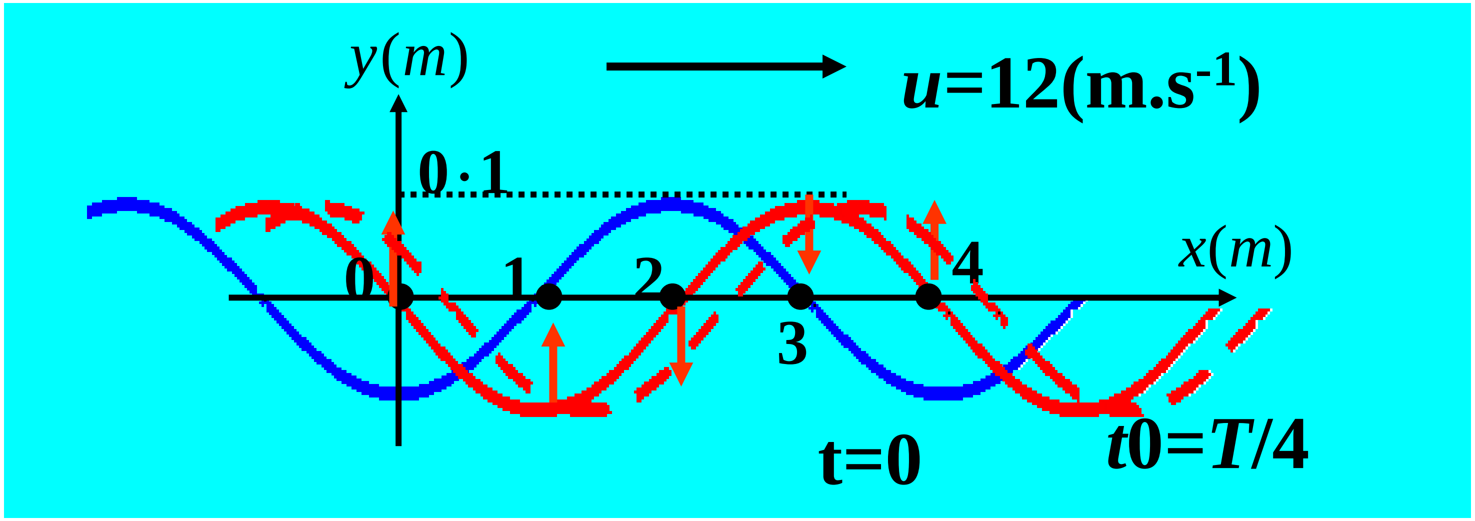
$$y(x,t)=A\cos[\omega t-kx+\varphi]$$

$$\because \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu \quad \lambda=uT=\frac{u}{\nu} \quad k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{uT}=\frac{\omega}{u}$$

以上讨论对纵波也适用

## （4）波形曲线

由方程 $y=(x,t)$ 令 $t=t0$, 由 $y=f(x)$ 作出的函数图线。




**如上图，可看出：**

1º $A=0.1\text{m}$，$\lambda=4\text{m}$，$T=\lambda/u=1/3(\text{s})$，$\omega=2\pi/T=6\pi$

2º 各质点在 $t0$ 时刻的实际位置（对横波）。

3º 各质点在 $t0$ 时刻（或下时刻）的运动方向。

4º 各质点的初位相（找出 $t=0$ 时刻的波形图即可）

例、 已知 $y = 0.05\cos(100\pi t - 5x)$ (SI 制)

求 $A$ 、$T$ 、$u$ 、$\lambda$ ？

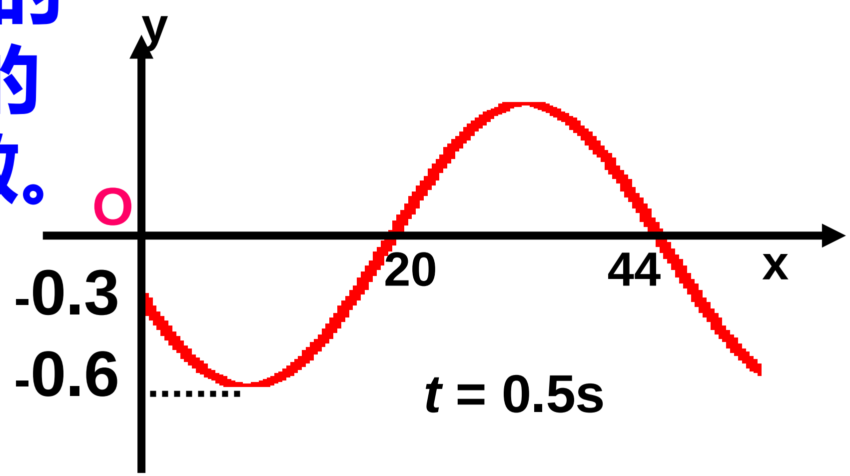
解： 比较得 $A = 0.05m$

$\omega = 2\pi / T = 100\pi$  $T = \dfrac{1}{50} = 0.02s$

$k = 2\pi / \lambda = 5$  $\lambda = \dfrac{2\pi}{5} = 1.26m$

$$u = \frac{\lambda}{T} = 63m/s$$

**例：一平面简谐波在$t$ =0.5s时的波形如图所示，该波以12m/s的速度沿x轴负向传播，求波函数。**




**解：先求原点处的振动方程**

$A$ = 0.6m　　$\lambda = 2(44-20) = 48m$

$T = \lambda / u = 4\ \text{s}$　　$\omega = 2\pi / T = \pi / 2\ \text{rad/s}$

设原点处振动方程：$y_0 = 0.6\cos(\pi t/2 + \varphi)\ (m)$

$t = 0.5s,\ y_0 = -0.3m \Rightarrow \pi/4 + \varphi = \pm 2\pi/3$

由运动趋势判断（负向传播）→下一时刻向负的最大位移运动

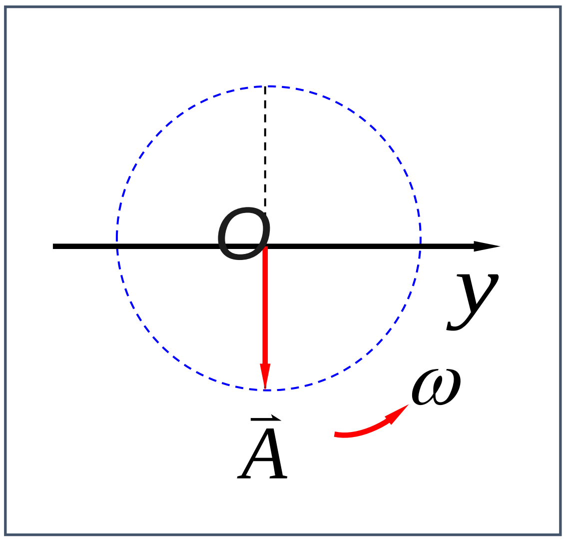
$\pi/4 + \varphi = 2\pi/3 \Rightarrow \varphi = 5\pi/12$

⇒ 波函数为：$y = 0.6\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{24}x + \frac{5\pi}{12})\ (m)$

**例：** 一平面简谐波沿 $Ox$ 轴正方向传播， 已知振幅 $A=1.0\mathrm{m}$ $T=2.0\mathrm{s}$ $\lambda=2.0\mathrm{m}$ ，在t=0时坐标原点处的质点位于平衡位置沿 $Oy$ 轴正方向运动． 求

**1）波动方程**

**解　写出波函数**




$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\boxed{\varphi}]$$

$$t=0 \quad x=0$$

$$y=0, v=\frac{\partial y}{\partial t}>0$$

$$\boxed{\varphi=-\frac{\pi}{2}}$$

$$y=1.0\times\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}] \ \text{(m)}$$

2） 求 $t=1.0\mathrm{s}$ 波形图.

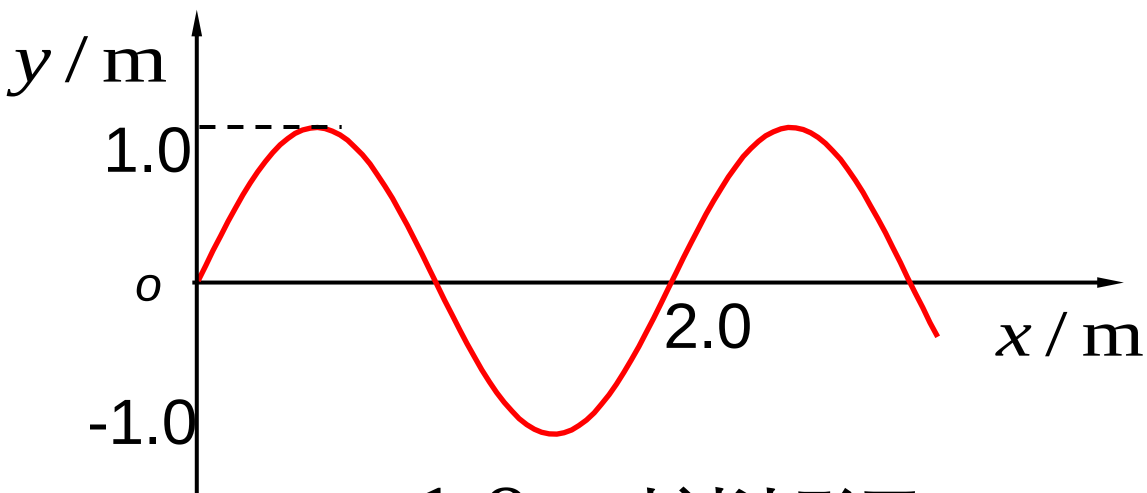
$$y=1.0\times\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]\ \ (\mathrm{m})$$

$t=1.0\mathrm{s}$

波形方程

$$y=\cos[\frac{\pi}{2}-\pi x]$$

$$=\sin(\pi x)\ \ (\mathrm{m})$$



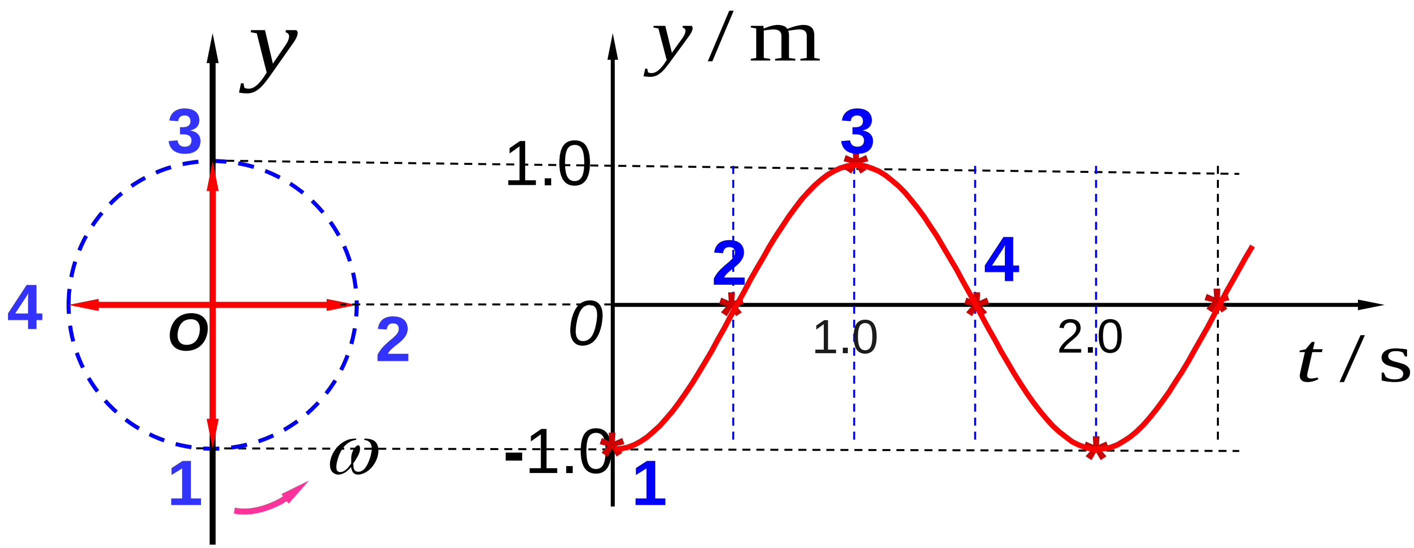

$t=1.0\ \mathrm{s}$ 时刻波形图

**3)** $x = 0.5\mathrm{m}$ **处质点的振动规律并做图.**

$$y = 1.0 \times \cos[2\pi(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0}) - \frac{\pi}{2}] \ \ (\mathrm{m})$$

$x = 0.5\mathrm{m}$ 处质点的振动方程

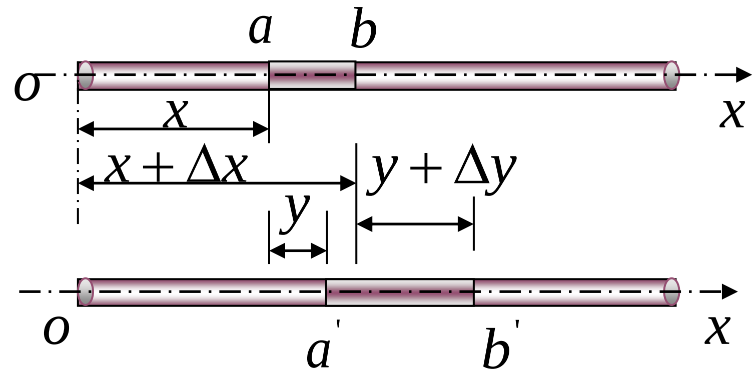
$$y = \cos(\pi t - \pi) \ \ (\mathrm{m})$$




$x = 0.5\ \mathrm{m}$ 处质点的振动曲线

# 四、波的能量

△y:伸缩量（形变的大小）




## 1. 波的能量 (以纵波为例)

平面简谐波 $y=A\cos(\omega t-kx+\phi)$
在密度为ρ的弹性细棒中传播。

考察平衡位置在 x —> x+△x 处，体积为△V 的质元的能量

其动能：$\Delta W_k=\frac{1}{2}\Delta m(\frac{\partial y}{\partial t})^2=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx+\varphi)$

其 势 能：$\Delta W_p=\frac{1}{2}k_s(\Delta y)^2$

$$\boxed{k_s=\frac{ES}{\Delta x}}$$

E—杨氏模量

$$\Delta W_p=\frac{1}{2}ES(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2\Delta x=\frac{1}{2}ES(\frac{\partial y}{\partial x})^2\Delta x=\frac{1}{2}E\Delta Vk^2A^2\sin^2(\omega t-kx+\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx+\varphi)=\Delta W_k$$

$u=\sqrt{E/\rho}$

$k=\omega/u$

波的总能量: $\Delta W=\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx+\varphi)$

波的总能量: $\Delta W = \rho\Delta V\omega^2 A^2 \boxed{\sin^2(\omega t - kx + \varphi)}$

$\Delta m$ 传播因子

结论

**(1) 每一质元Δ*m*的总能量是时间和位置的函数!**

**——能量也以速度 *u* 随波一起传播;**

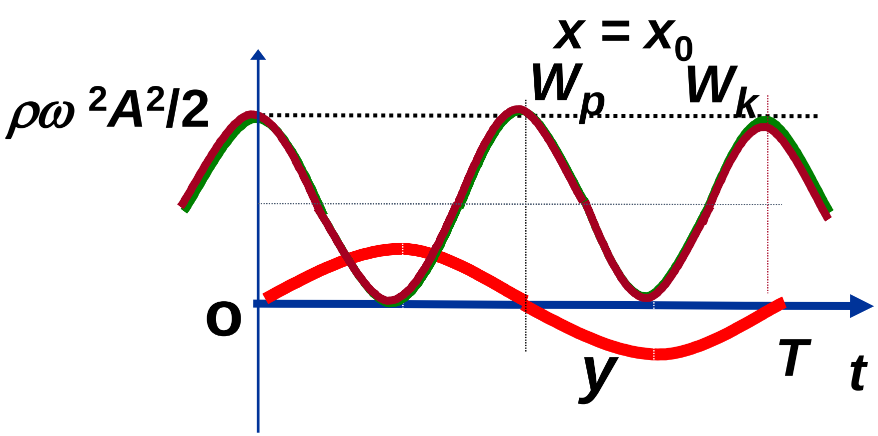
$$\Delta W = \Delta m\,\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{\Delta m\,\omega^2 A^2}{2}[1 - \cos 2(\omega t - kx + \varphi)]$$

$$\boxed{2(\omega t - kx + \varphi) = C} \longrightarrow u_W = \frac{dx}{dt} = \omega / k = u$$

- 固定 *x*

$W_k$、$W_p$均随 *t* 周期性变化

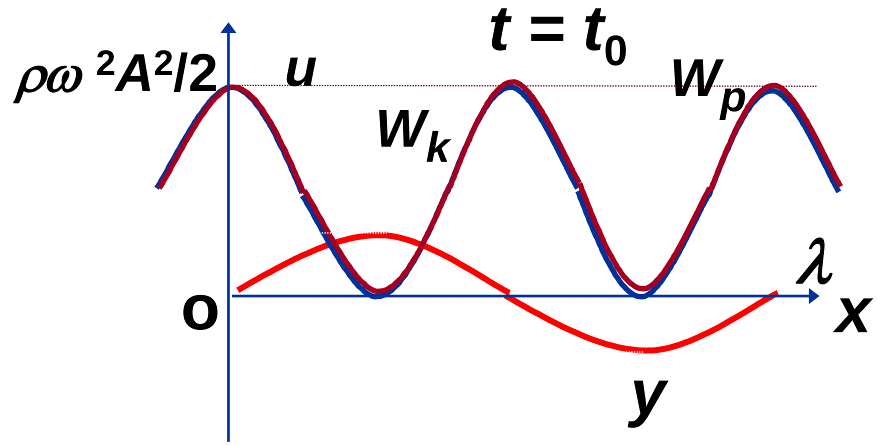
$$W_k = W_p$$



- 固定$t$

$$\boxed{\Delta W_k = \Delta W_p = \frac{1}{2}\rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)}$$

$W_k$、$W_p$随$x$周期分布




$y=0 \rightarrow W_k$、$W_p$最大

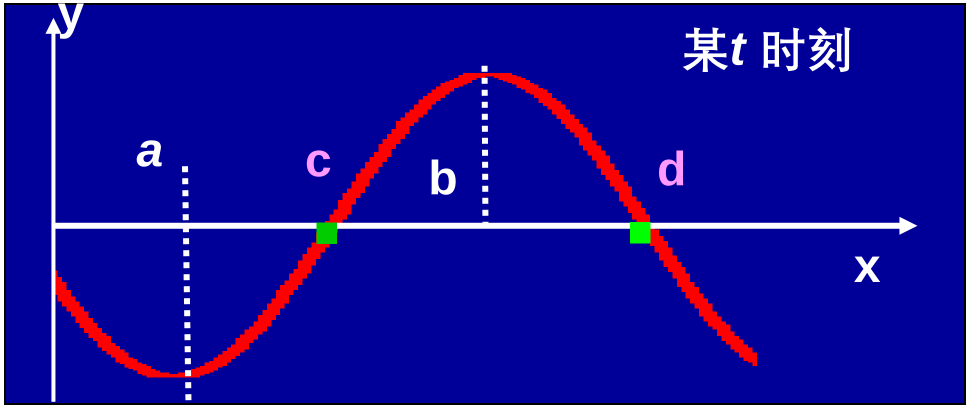
$y$ 最大$\rightarrow W_k$、$W_p$为 0

$$\boxed{y = A\cos(\omega t - kx + \varphi)}$$

**(2) 质元$\Delta m$的动能和势能同相变化，而且始终具有相同数值，质元在平衡位置时，具有最大能量；**

例如：如图所示某$t$时刻

$a$、$b$两点处的质元




其速度：$\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)_a=\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)_b=0$

形变：$\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_a=\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_b=0$

$\therefore\ W_k=W_p=0$

c、d两点处的质元处在平衡位置

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_c=\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_d=V_{Max} \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_c=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_d=\text{ Max}$$

$\therefore\ W_k=W_p=W_{Max}$

$$\boxed{\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x,t}=-Ak\cos(\omega t-kx+\varphi+\pi/2)=-\frac{k}{\omega}\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x,t}=-\frac{1}{u}\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x,t}}$$

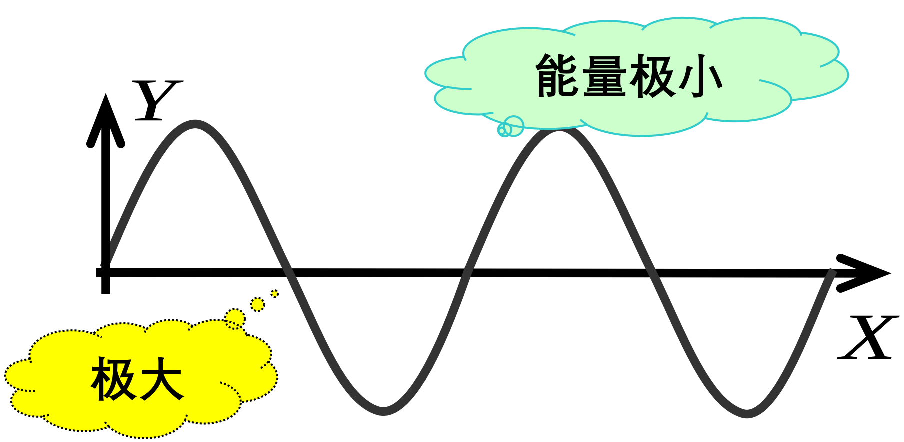
## 进一步理解波的能量　　波是能量传播的一种形式。

**体元$\Delta V$ 中能量密度从 0 到 $\rho\omega^2A^2$ 表明外部能量的输入，当 $\Delta V$ 中能量密度从 $\rho\omega^2A^2$ 减小到0表明向外输出能量。整个过程（周期），介质不积累能量，而是传播能量。**

### 简谐波

$$\begin{cases} \Delta W_k = \dfrac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi) \\ \Delta W_p = \dfrac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi) \end{cases}$$

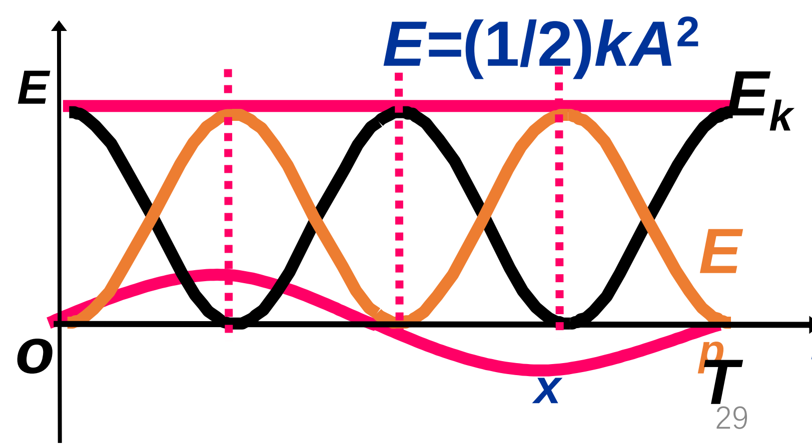
$$E_{k\max} = E_{p\max}$$ **能量不守恒!**




### 简谐振子

$$\begin{cases} E_k = \dfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\ E_p = \dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$E_{k\max} \Rightarrow E_{p\max}$$ **能量守恒**



## 2. 能量密度： 单位体积内的能量

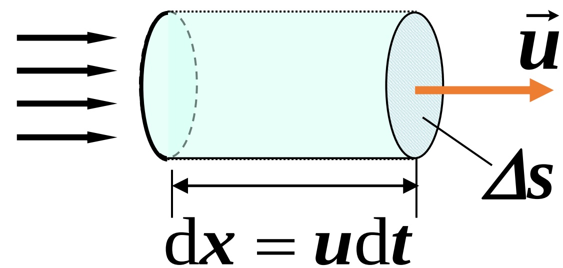
$$W=\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

$$w=\frac{\Delta W}{\Delta V}=\rho\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx+\phi)$$

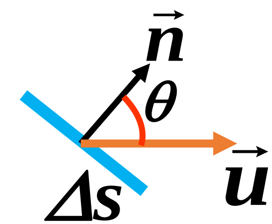
单位：J/m³

能量密度周期平均值 $\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \propto A^2,\omega^2$

## 3. 能流密度: (单位时间通过垂直传播方向的单位截面上的能量)




$$i=wu=\rho\omega^2A^2u\sin^2(\omega t-kx+\phi)\cos\theta$$




单位：W/m²

## 4. 波的强度:

平均能流密度 (一个周期内能流密度的平均值)

$$I=\langle i\rangle=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2u=\overline{w}u$$

单位：W/m²