# 第4章　流体运动简介

**流体：**液体和气体的总称。　**特征：**流动性。

**气体：**易被压缩，无自由表面，没有固定不变的体积。

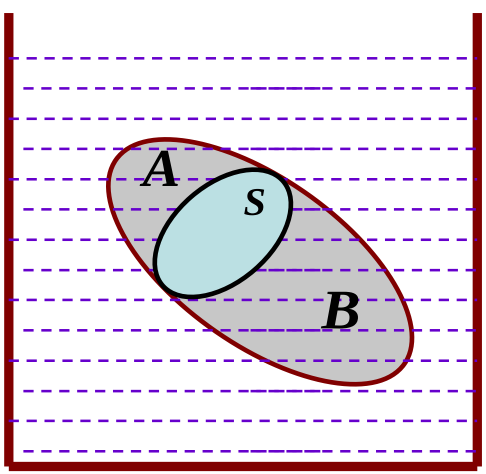
**液体：**不易被压缩，有自由表面，有一定的体积。

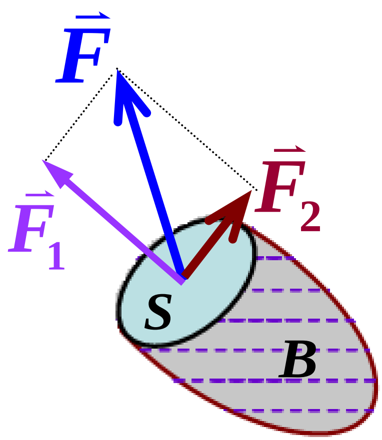
**流体力学：研究流体的宏观运动规律。**

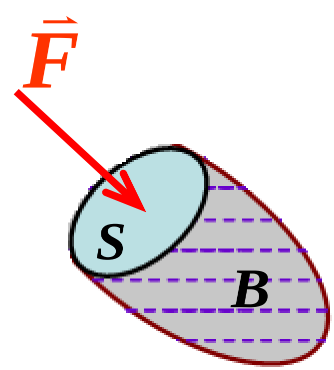
**预备知识：静止流体内的压强**

## 一、静止流体内的压强

1. 静止流体内的相互作用力



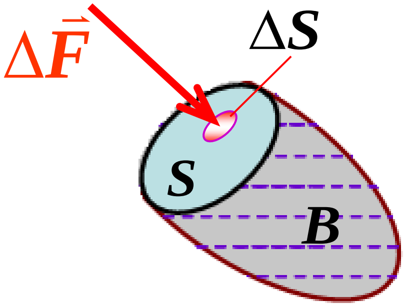




**静止流体内的相互作用力为指向作用面的压力。**

## 2. 流体的压强

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$ 标量




实验证明：**某一点处的压强大小只取决于该点的位置，而与压强的作用面的取向无关。**

**静止流体内任一点处沿各个方向的压强都相等。**

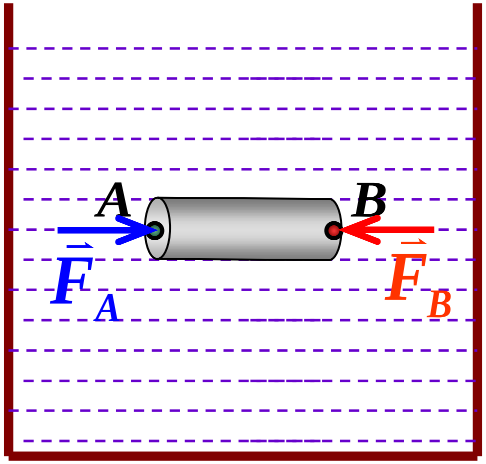
**压强的单位：** 1) 帕斯卡（Pa）  $1\ \text{Pa} = 1\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$

2) 大气压（atm）  $1\ \text{atm} = 1.013 \times 10^5\ \text{Pa}$

## 3. 静止流体内的压强分布

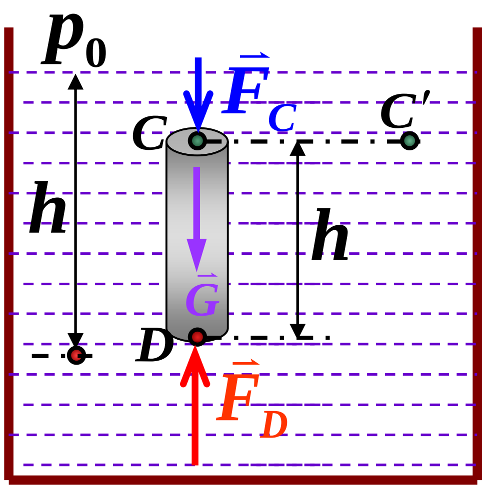
1) 同一水平面上各点

$$p_A \Delta S - p_B \Delta S = 0, \quad p_A = p_B$$




**同一水平面上各点的压强相等。**

2) 同一铅垂线上各点




$$F_C + G - F_D = 0$$

设流体的密度为$\rho$， $G = h\Delta S \rho g$

$$p_C \Delta S + h\Delta S \rho g - p_D \Delta S = 0$$

$$\boxed{p_D - p_C = \rho g h}$$

3) 不在同一铅垂线上各点 $p_{C'} = p_C$

**静止流体内，高度差为$h$的任意两点间的压强差均等于$\rho g h$。**

对气体，密度很小，若高度差不大，各处压强相等。

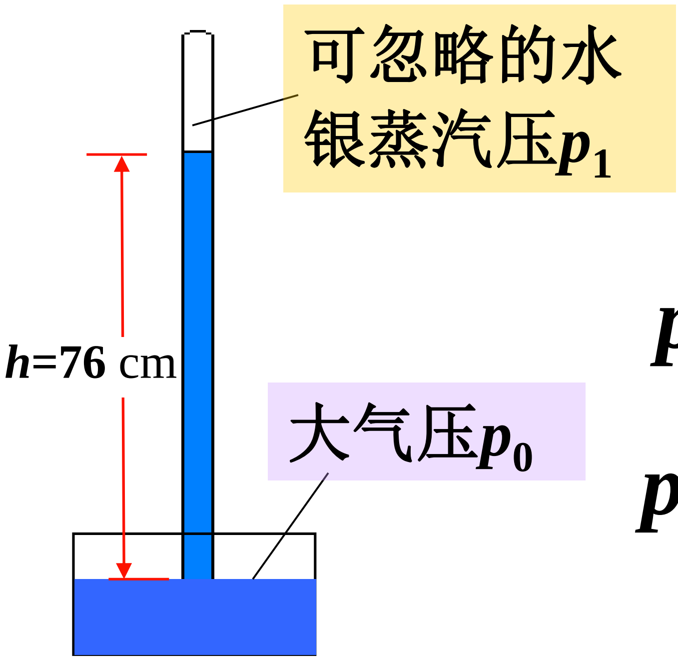
4) 液体表面下深度为$h$处的压强

$$p = p_0 + \rho g h$$

绝对压强

环境压强

# 托里拆利实验(1643年):




$$p_0 - p_1 = \rho g h$$

$$p_0 = \rho g h$$

$$= 1.36 \times 10^4 \times 9.80 \times 0.76$$

$$= 1.013 \times 10^5 \ \mathrm{Pa}$$

# 第1节　理想流体的运动

## 一、理想流体的定常流动

1. 理想流体

实际流体的特性：
- 可压缩性
- 粘性 ——内摩擦力（粘滞阻力）

**理想流体：**绝对不可压缩的、完全没有粘性的流体。

密度$\rho$为常量

流体足够稀

2. 定常流动

流体运动的研究方法
- Lagrange method
- Euler method

研究流体微元经过每个空间点的流速的规律。

## (1) 流速场

流体空间中每一点$(x, y, z)$上有一个速度矢量 $\vec{v}(x, y, z)$，它们构成一个流速场。

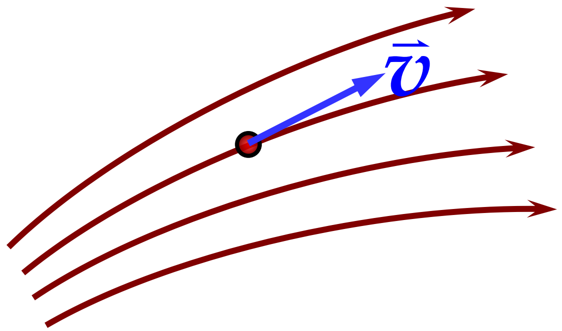
## (2) 定常流动

**流速场的空间分布不随时间变化。**

流体在流动时，流体粒子顺序到达空间任一点，各点的速度大小和方向不随时间而改变。

**两个重要概念：流线和流管**

**(3) 流线** 在流速场中画出许多曲线，曲线上每一点的切线方向和流速场在该点的速度方向一致。



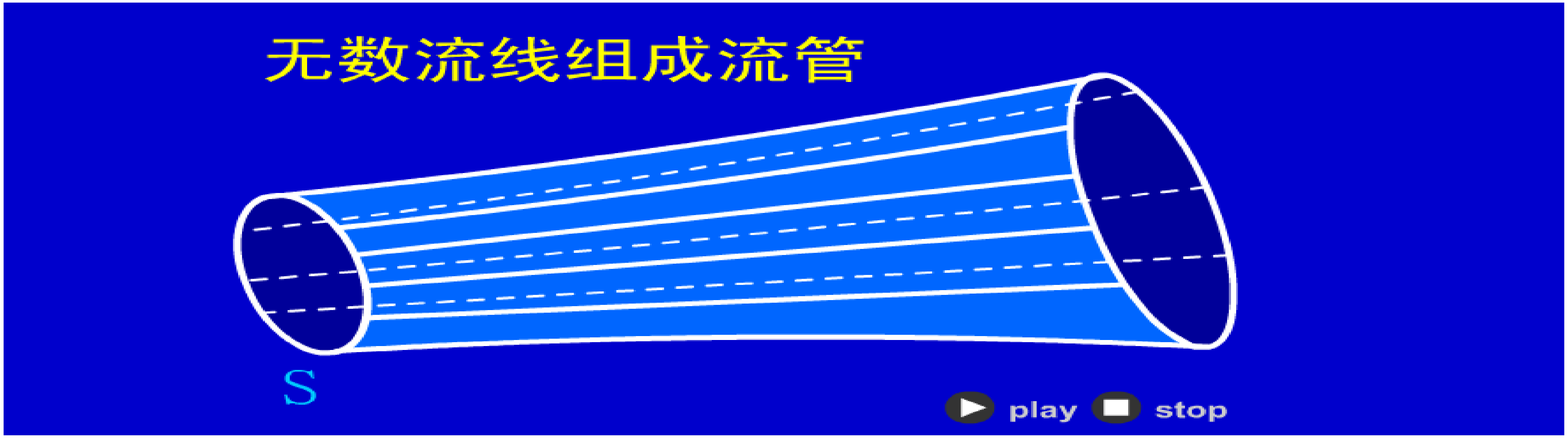

①流线密集的地方流速大，
流线稀疏的地方流速小;

② 任意两条流线互不相交;

③ 定常流动时，流线的分布不随时间改变;

④ 流线与轨迹的关系。

**(4) 流管** 在流体内任作一条闭合曲线，通过该曲线上各点的流线所围成的细管。



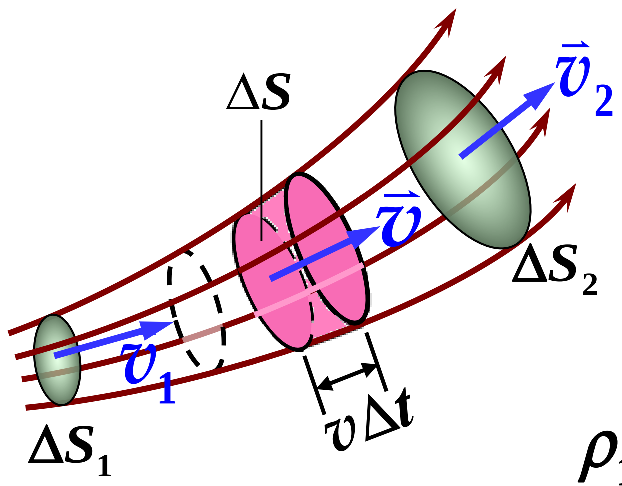

① 流管同样也是一种形象描述;

② 定常流动时，流管的形状保持不变;

③ 定常流动时，流管内外的流体彼此互不交换。

# 二、连续性方程

**1. 体积流量：** 单位时间内通过某一流管内任意横截面的流体的体积。




$$Q=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{\Delta S v \Delta t}{\Delta t}=\Delta S v$$ 单位：$m^3/s$

**2. 连续性方程**

对定常流动，流管静止不动：

$$\rho_1 \Delta S_1 v_1=\rho_2 \Delta S_2 v_2$$ **流体流动中质量守恒**

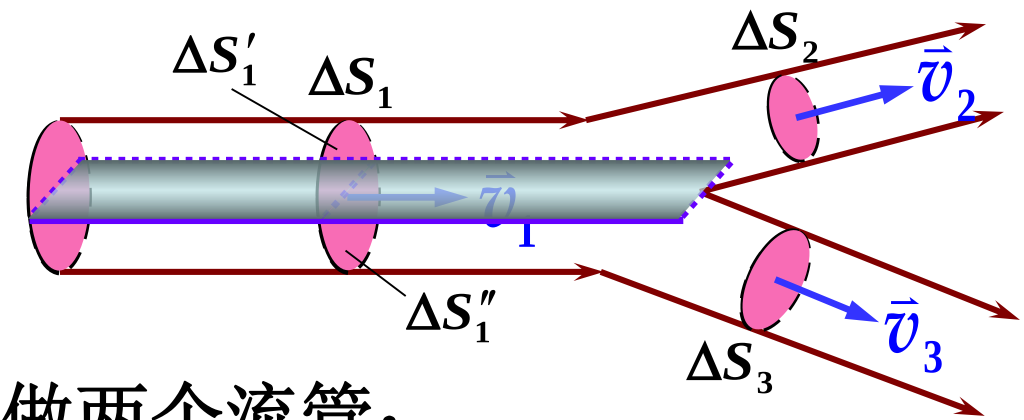
对理想流体：$\Delta S_1 v_1=\Delta S_2 v_2$ 或：$\boxed{\Delta S v=常量}$

**同一流管中通过任一横截面的流量均相等。**

**推论：** 截面小处流速大，流线密；

截面大处流速小，流线稀。

## 3. 分支流管的连续性方程




可看做两个流管：

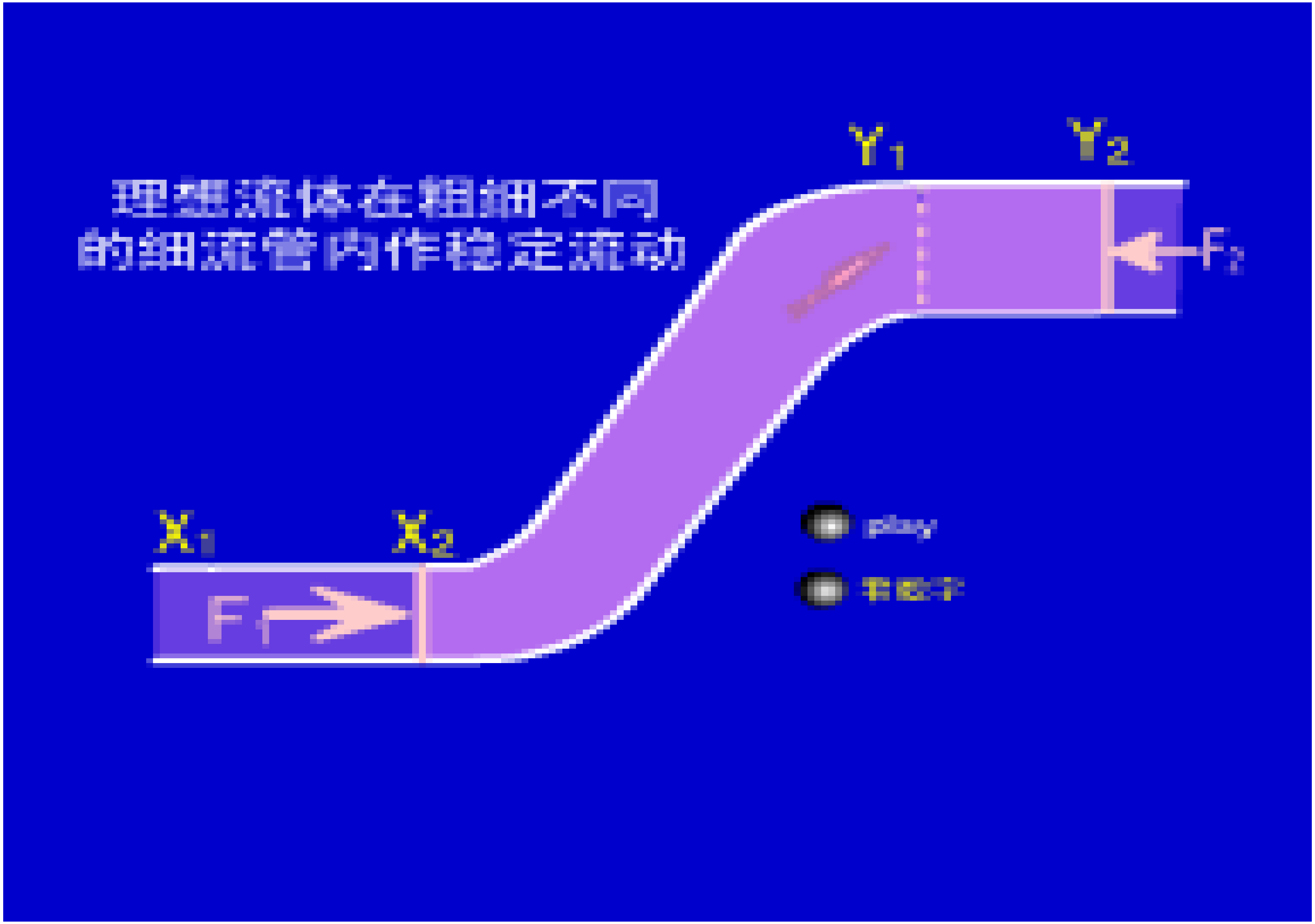
$$\left.\begin{aligned} \Delta S_1' v_1 &= \Delta S_2 v_2 \\ \Delta S_1'' v_1 &= \Delta S_3 v_3 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\Delta S_1 v_1 = \Delta S_2 v_2 + \Delta S_3 v_3}$$

## 三、伯努利方程

**1738**年, 瑞士科学家**Daniel Bernoulli**，给出了理想流体作定常流动时，能量关系的**伯努利方程**。

伯努利方程是流体力学的基本方程之一。

## 1. 方程推导依据：连续性方程和功能原理

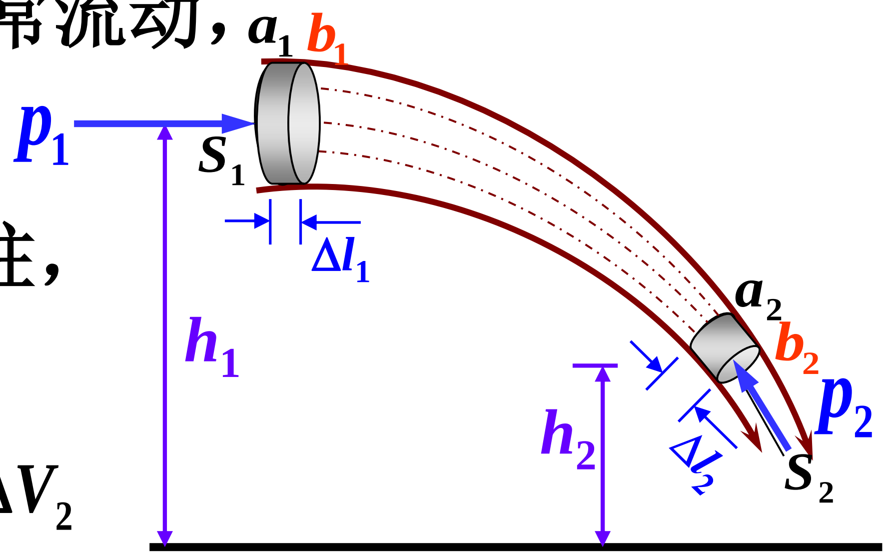


设理想流体在重力场中作定常流动，

任取一根流管，

用截面$S_1$和$S_2$截出一段流体柱，

考查时间间隔$\Delta t$，




$\Delta V_1 = S_1 \Delta l_1$ ，$\Delta V_2 = S_2 \Delta l_2$ ，$\Delta V_1 = \Delta V_2$

机械能的变化对应两端体积元的能量差。

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2}\rho \Delta V v_1^2 \qquad \Delta E_{\mathrm{p}} = \rho \Delta V g (h_2 - h_1)$$

**外力的功：流管周围的流体对流体柱的力不做功;**

**只有推力$F_1$和阻力$F_2$对流体柱做功.**

$$A_{外} = A_1 + A_2 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2)\Delta V$$

**质点系功能原理:** $\boxed{A_{外} + A_{非保守内力} = \Delta E}$

$$\boxed{A_{外} = \Delta E_k + \Delta E_p} \qquad A_{外} = (p_1 - p_2)\Delta V$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V v_1^2 \qquad \Delta E_p = \rho\Delta V g(h_2 - h_1)$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = 常量}$$ ——伯努利方程

理想流体作定常流动时，同一流管的不同截面处的压强、单位体积的势能与单位体积的动能之和均相等.

工程上: $\boxed{\frac{p}{\rho g}} + \boxed{h} + \boxed{\frac{v^2}{2g}} = 常量$

压力头　高度头　速度头

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$

$$\Delta S v=\text{常量}$$

## 2. 静压强与动压强

静压强：$p+\rho gh$

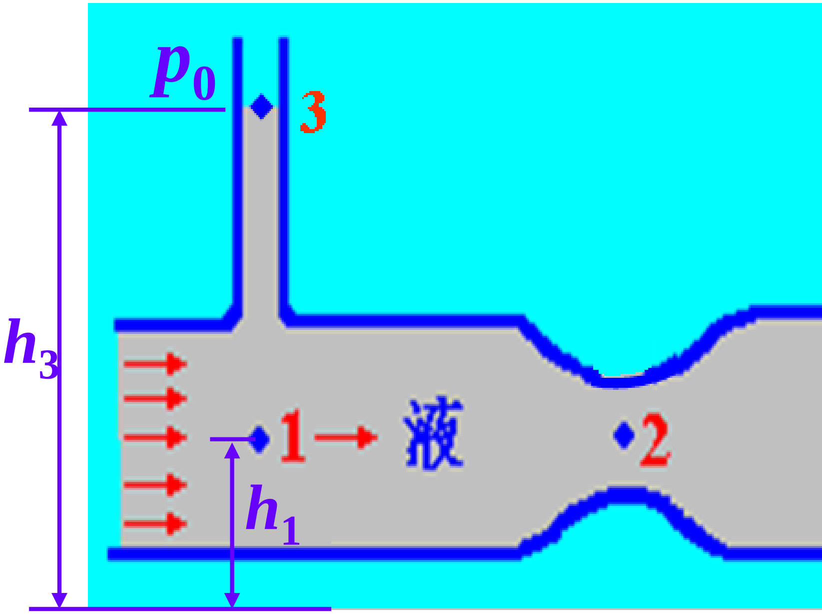
动压强：$\frac{1}{2}\rho v^2$

## 3. 特殊情况下方程的简化

① 不均匀水平管，$h_1=h_2=h$

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

管粗处压强大，管细处压强小。




② 均匀管，$S_1=S_2$, $v_1=v_2=v$

竖直：$p_1+\rho gh_1=p_2+\rho gh_2$

$$p_1+\rho gh_1=p_3+\rho gh_3$$

水平：$p, h, v$均为常量

③ 与大气相通处的压强为大气压 $p_0$

$$p_1=p_0+\rho g\Delta h$$

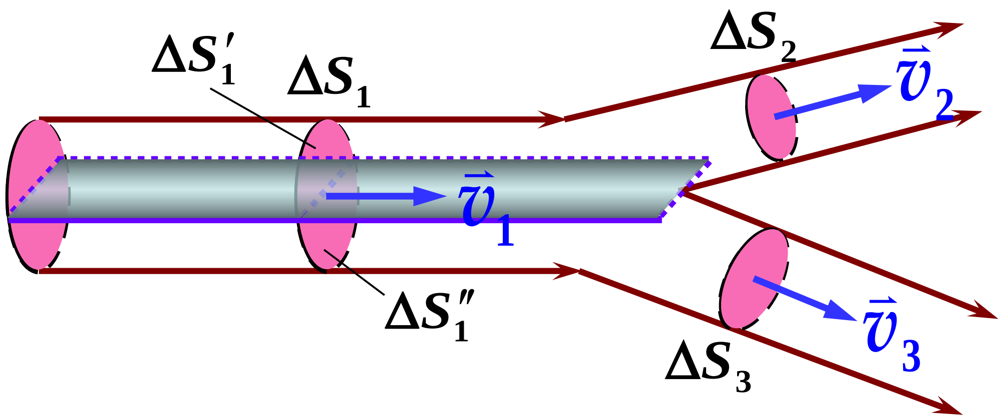
## 4. 适用条件

$$\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = 常量}$$

① 理想流体做定常流动;

② 同一流管的不同截面处或同一流线的不同点;

## 5. 分支流管的伯努利方程




$$\boxed{\Delta S_1 v_1 = \Delta S_2 v_2 + \Delta S_3 v_3}$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \cancel{=} p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_3 + \rho g h_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

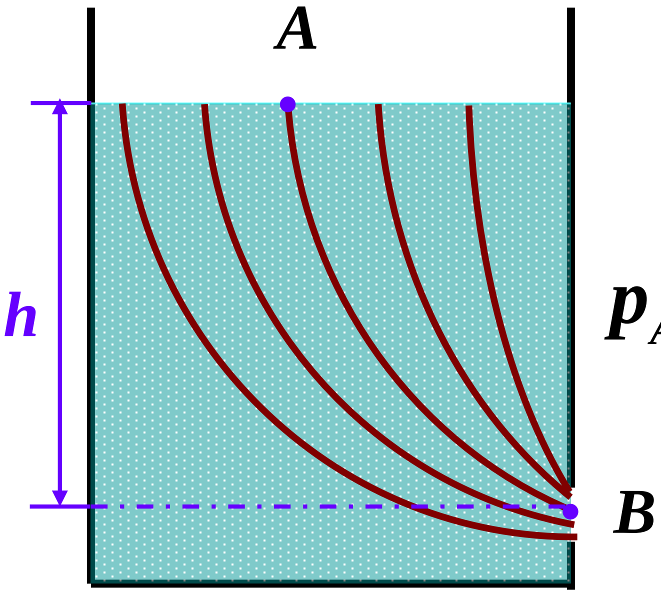
$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_3 + \rho g h_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

## 七、伯努利方程的应用

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^{2}=\text{常量}$$

**1. 小孔流速** 一个很大的开口容器，器壁上有一小孔，当容器内注入液体后，液体从小孔流出。设小孔距液面的高度是*h*，求液体从小孔流出的速度。

由连续性方程： $S_A v_A = S_B v_B \quad \because S_A >> S_B \quad \therefore v_A \approx 0$




任意选取一流线，*A*为流线上通过液面的一点，*B*为该流线通过小孔上的一点。

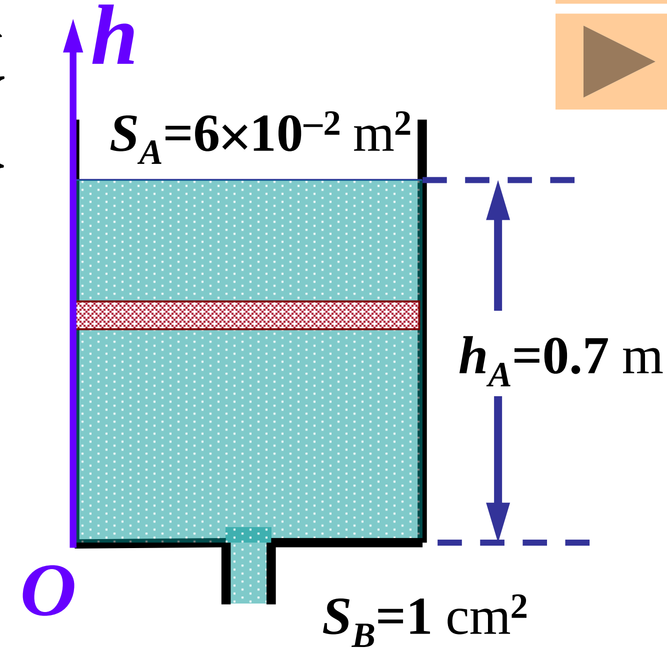
$$p_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2+\rho g h_A = p_B+\frac{1}{2}\rho v_B^2+\rho g h_B$$

令小孔处的高度为 $h_B=0$

$$\rho g h=\frac{1}{2}\rho v_B^2 \rightarrow \boxed{v_B=\sqrt{2gh}}$$

**例1.** 一圆形开口容器, 高0.7 m, 截面积$6\times10^{-2}\mathrm{m}^2$. 贮满清水, 若容器底有一小孔$1\mathrm{cm}^2$, 问该容器中水流完需要多少时间?

**解:** 随着水的流出, 水位不断下降, 流速逐渐减小, 根据小孔流速规律知在任意水位 $h$ 处水的流速为: $v_B = \sqrt{2gh}$




该处厚度为$-\mathrm{d}h$ 的薄层从小孔流出时间为:

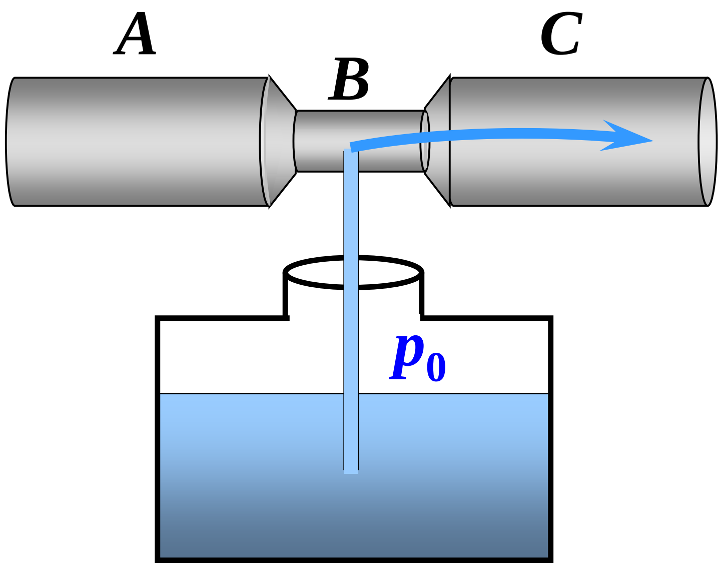
$$\mathrm{d}t = \frac{-S_A\mathrm{d}h}{S_B v_B} = \frac{-S_A\mathrm{d}h}{S_B\sqrt{2gh}}$$

整个水箱的水流尽所需时间为:

$$t = \int_{h_A}^{0} \frac{-S_A\mathrm{d}h}{S_B\sqrt{2gh}} = \int_{0.7}^{0} \frac{-6\times10^{-2}\mathrm{d}h}{10^{-4}\times\sqrt{2\times9.8\times h}} = -\frac{6\times10^2}{\sqrt{19.6}}\times2\sqrt{h}\Big|_{0.7}^{0} = 227\ (\mathrm{s})$$

## 2. 空吸

$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$




对流管A、B处截面 $S_A$、$S_B$，

由连续性方程：

$$S_A v_A = S_B v_B$$

$\because S_B<S_A$，$\therefore v_B>v_A$

由伯努利方程：（$h_A=h_B$）

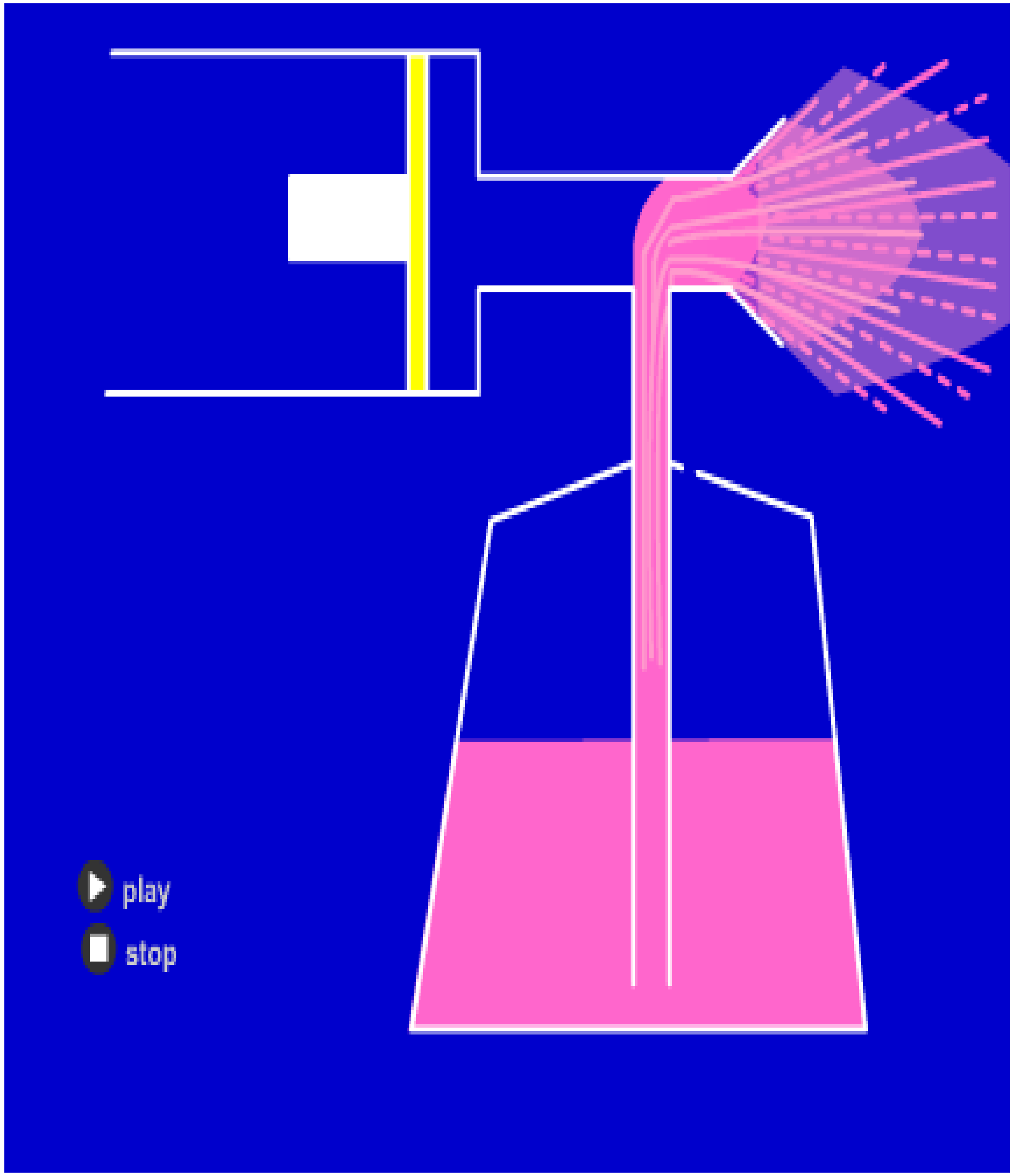
$$p_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2=p_B+\frac{1}{2}\rho v_B^2$$

$\therefore p_B<p_A$

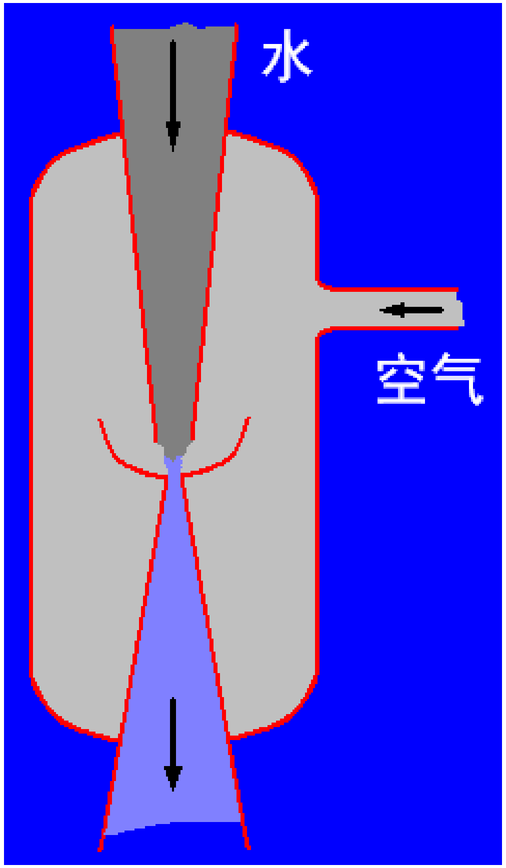
若$p_B< p_0$，空吸作用

**空吸：**利用细管增大流速所造成的低压而吸取流体。

## 实例1: 喷雾器



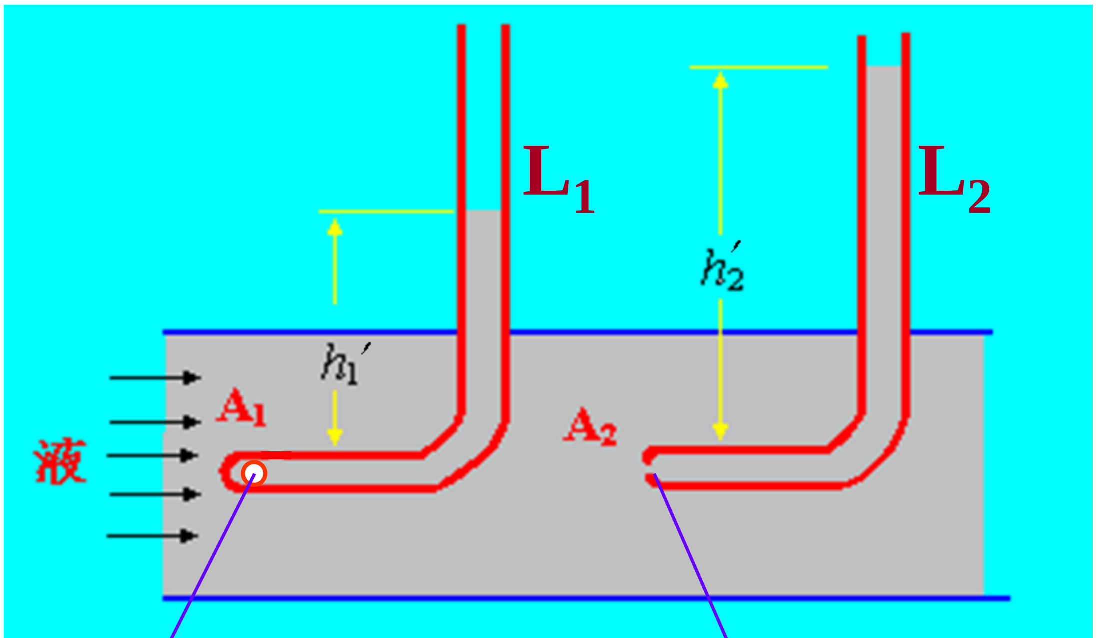

## 实例2: 水流抽气机




$$p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{常量}$$

## 3. 流速计(皮托管)

### (1) 原理:




侧面，流速即液体的流速$v_1$

前端，液流受阻，流速$v_2=0$

对两小孔应用伯努利方程:

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2$$

竖直方向压强服从静压强规律:

$$p_1=p_0+\rho gh_1'$$

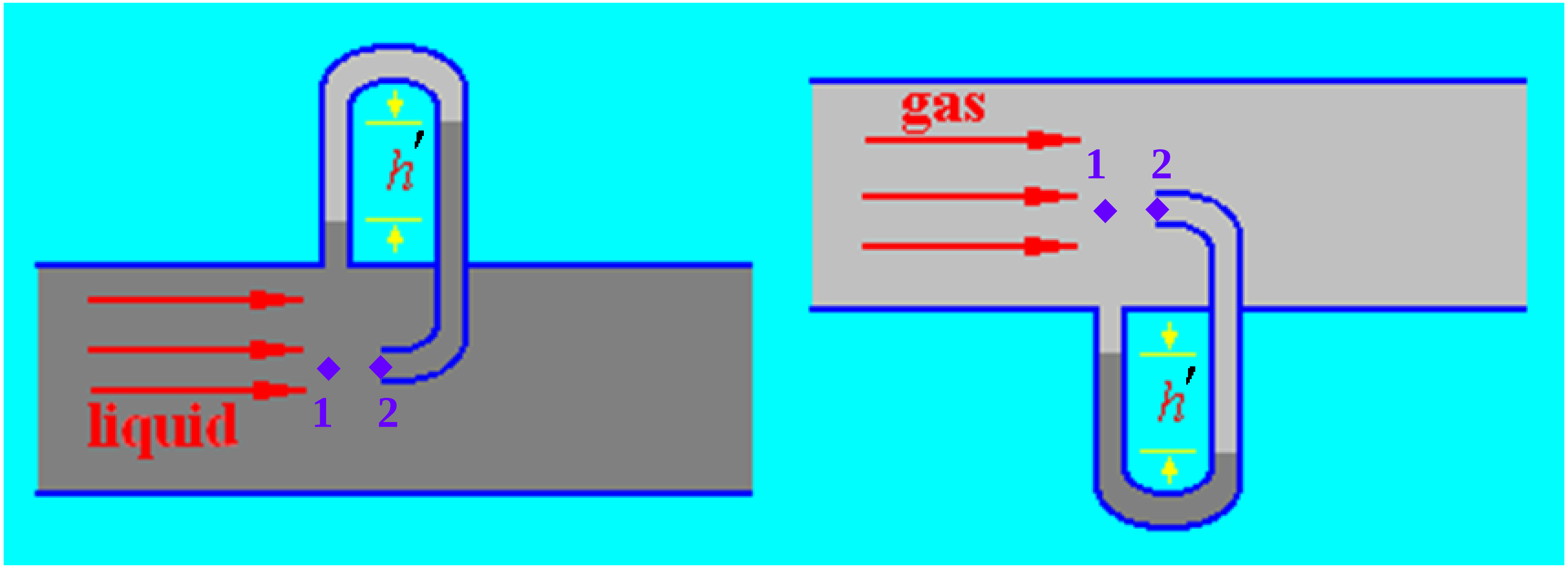
$$p_2=p_0+\rho gh_2'$$

液体流速:

$$v_1=\sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho}}$$

$$=\sqrt{2g(h_2'-h_1')}$$

## (2) 组合皮托管




① 测量液体

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2$$

$$p_2-p_1=\rho g h'$$

$$v=\sqrt{2gh'}$$

② 测量气体

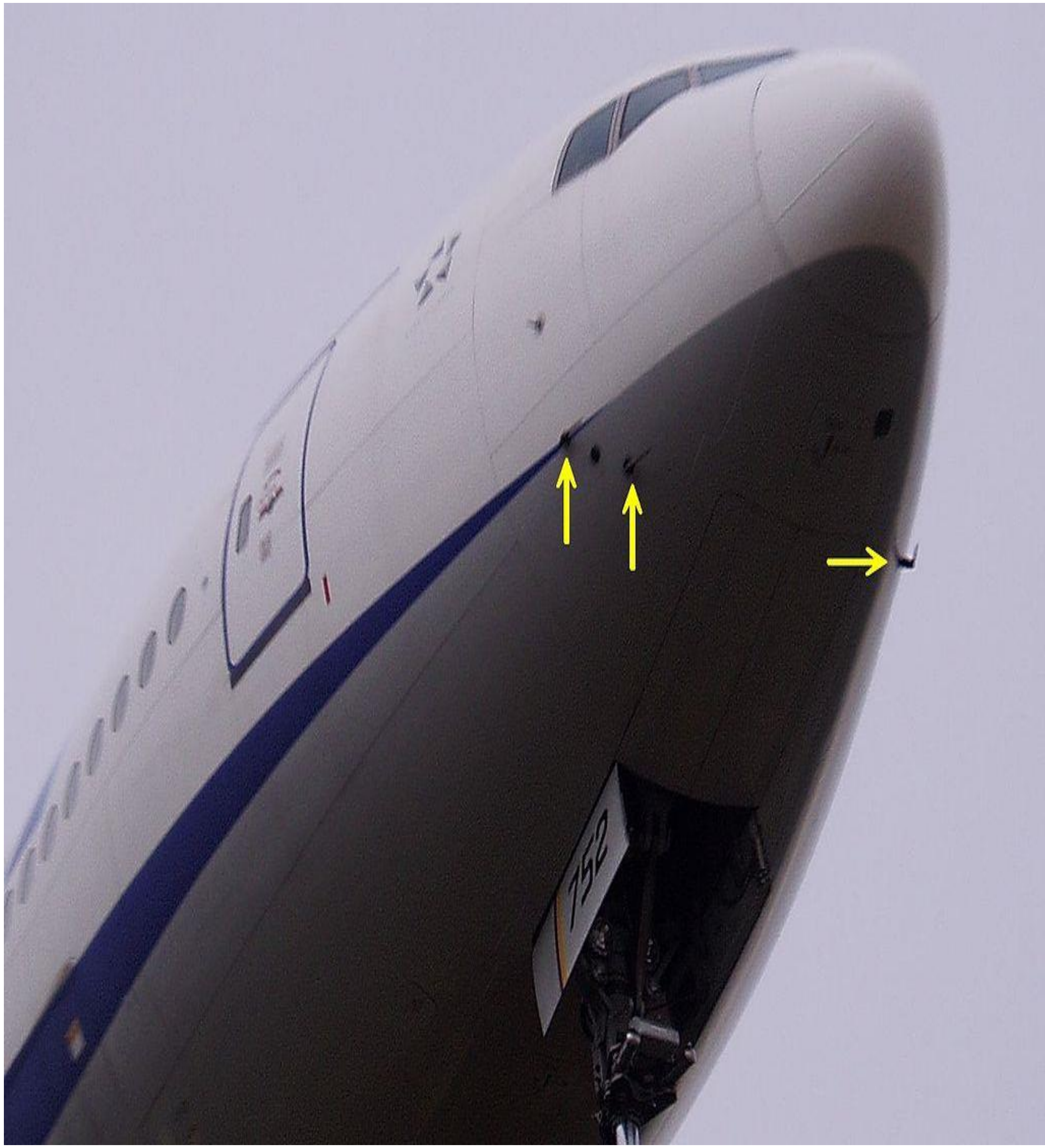
$$p_2-p_1=(\rho'-\rho)gh'$$

$\rho'$为液体的密度

$\rho$为气体的密度

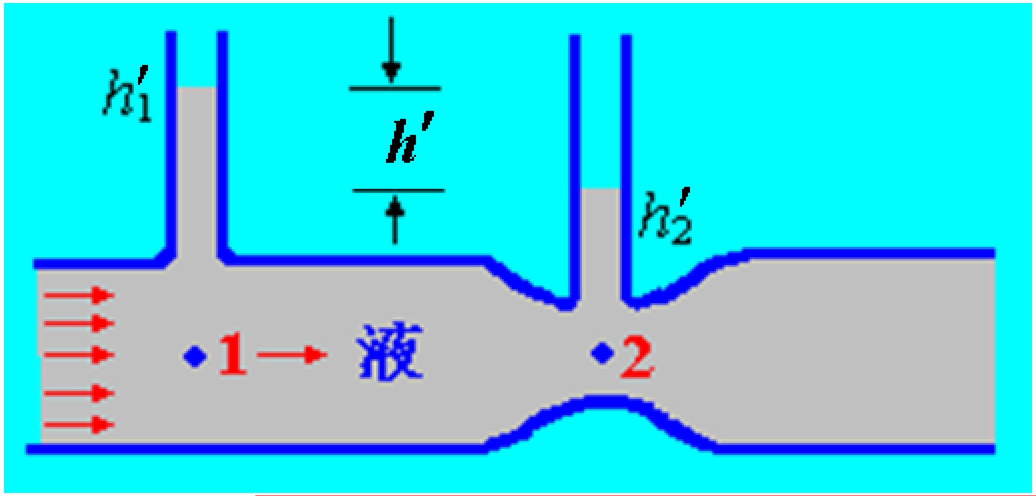
$$v=\sqrt{\frac{2(\rho'-\rho)gh'}{\rho}}\approx\sqrt{\frac{2\rho' gh'}{\rho}}$$

# 飞机上的空速管



# 4. 流量计

**(1) 测量液体流量的汾丘里流量计**




对1、2两点应用伯努利方程和连续性方程：

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = 常量$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \cdots (1)$$

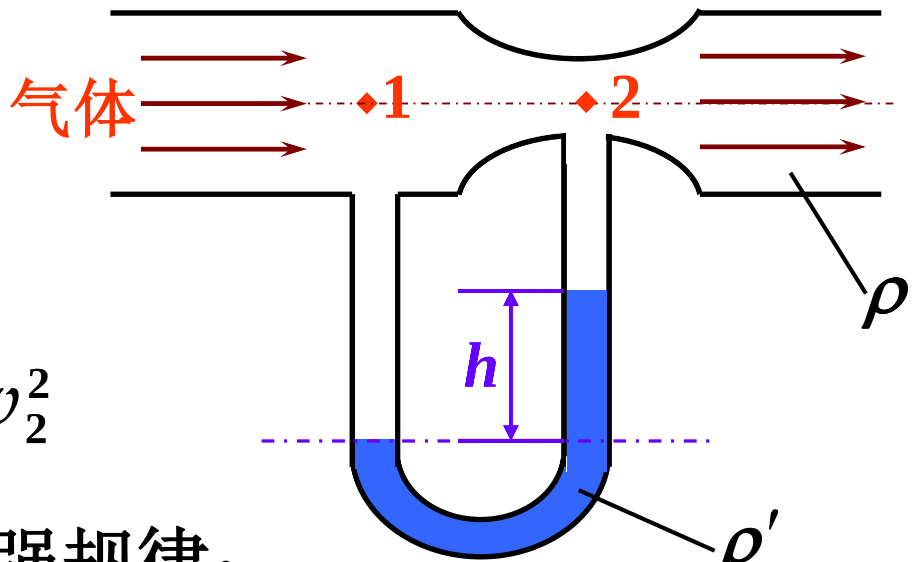
$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \cdots (2)$$

$$p_1 - p_2 = \rho g h'$$

$$v_1 = S_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} = S_2\sqrt{\frac{2gh'}{S_1^2 - S_2^2}}$$

$$Q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh'}{S_1^2 - S_2^2}}$$

(2) 测量气体流量的汾丘里流量计




$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

竖直方向压强服从静压强规律：

$$p_1 - p_2 = (\rho' - \rho) g h$$

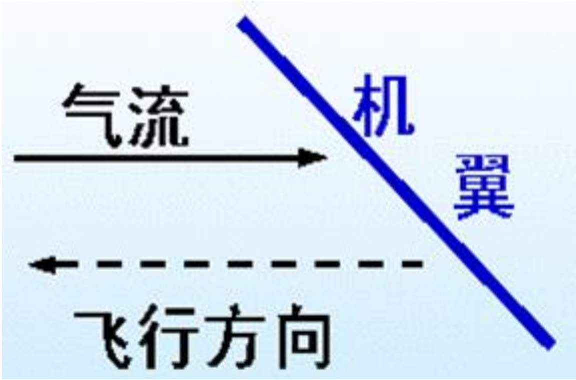
联立解得：

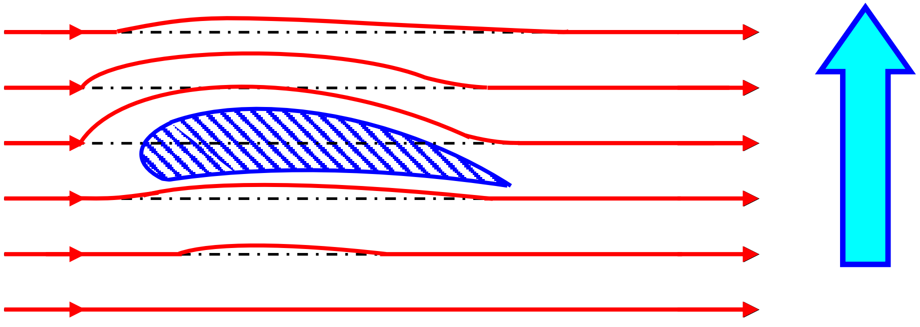
$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} = S_2 \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho) g h}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

$$Q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho) g h}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

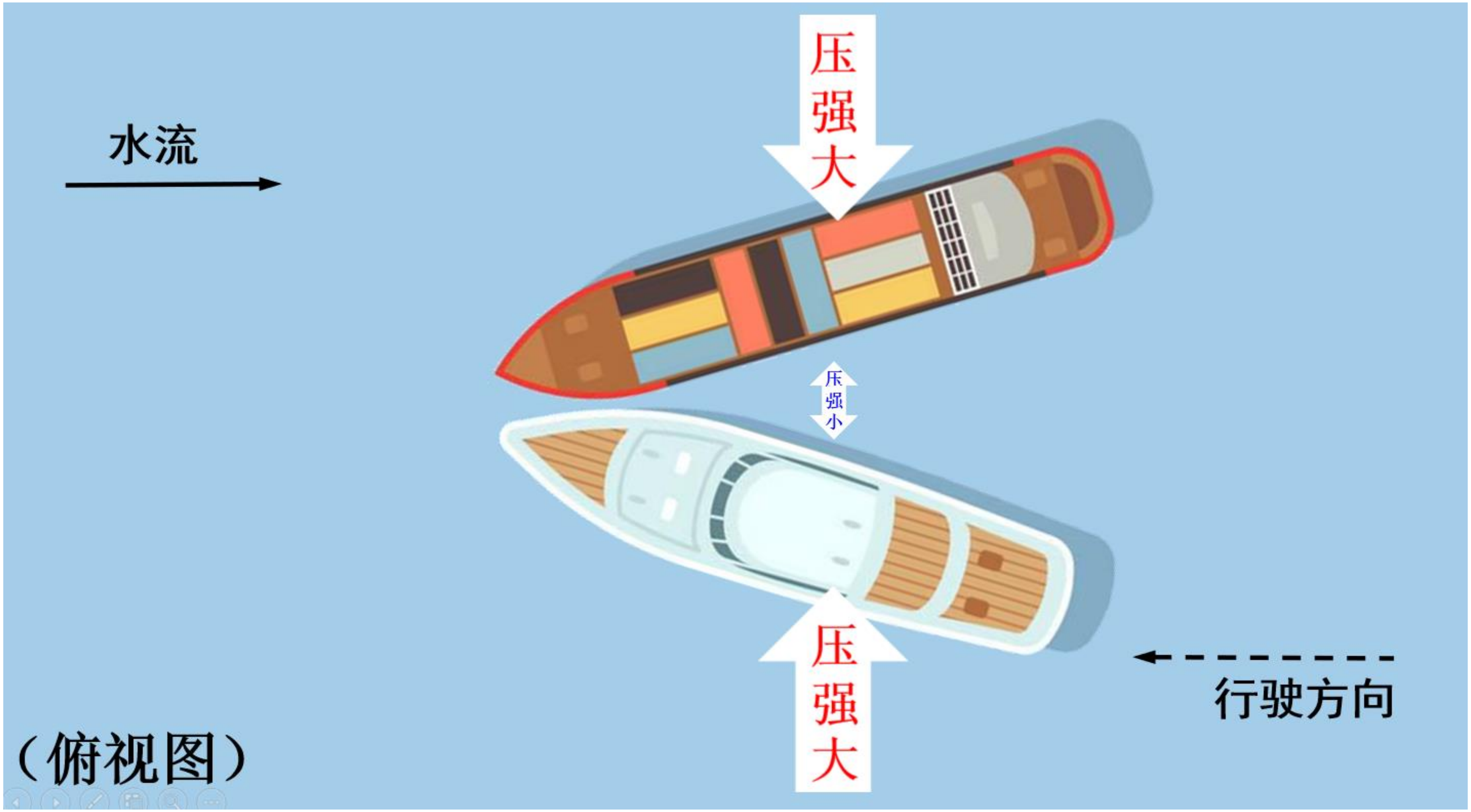
# 八、伯努利方程的其它应用

## 1. 飞机机翼的上升力

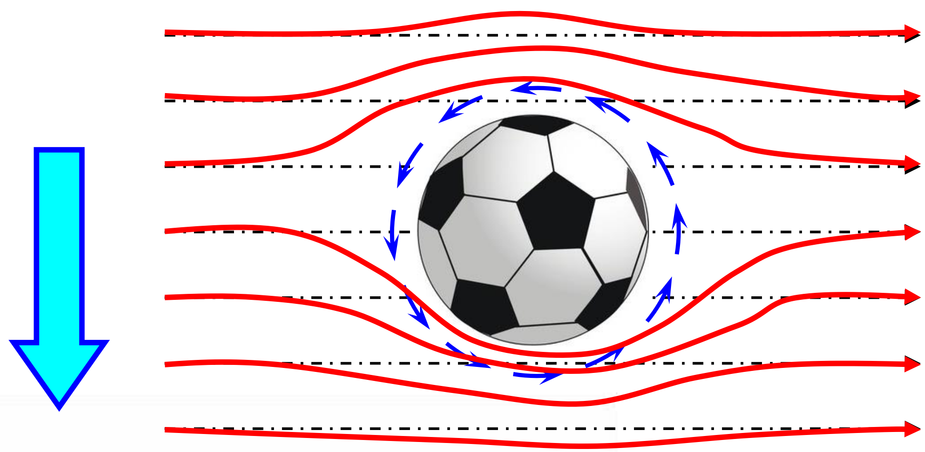


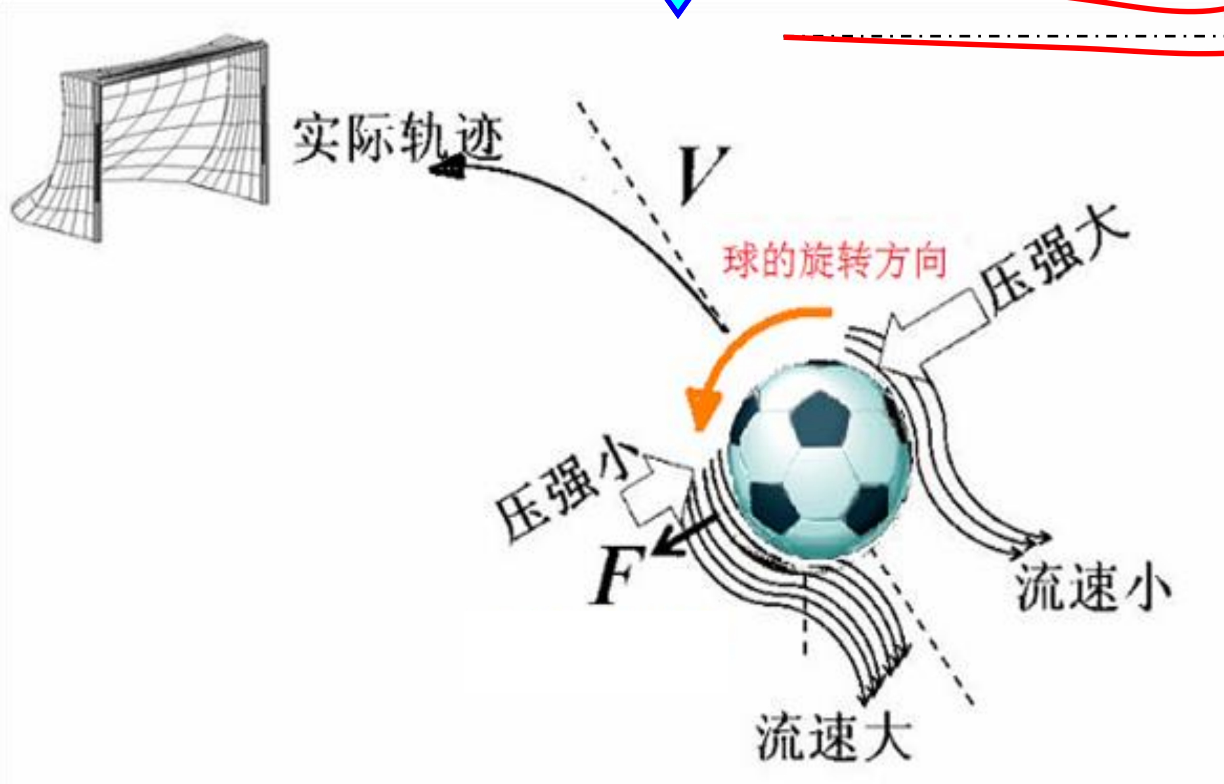



# 2. 船吸现象

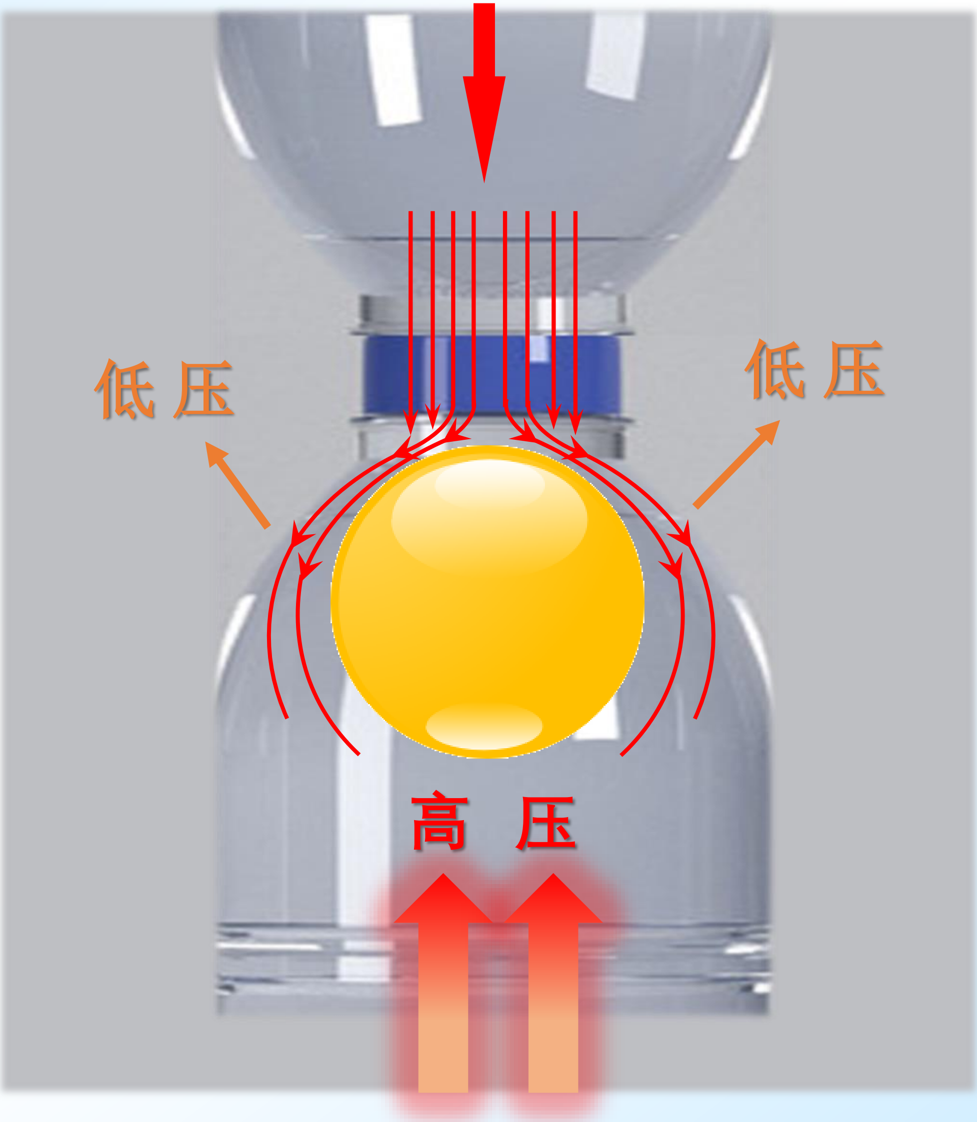


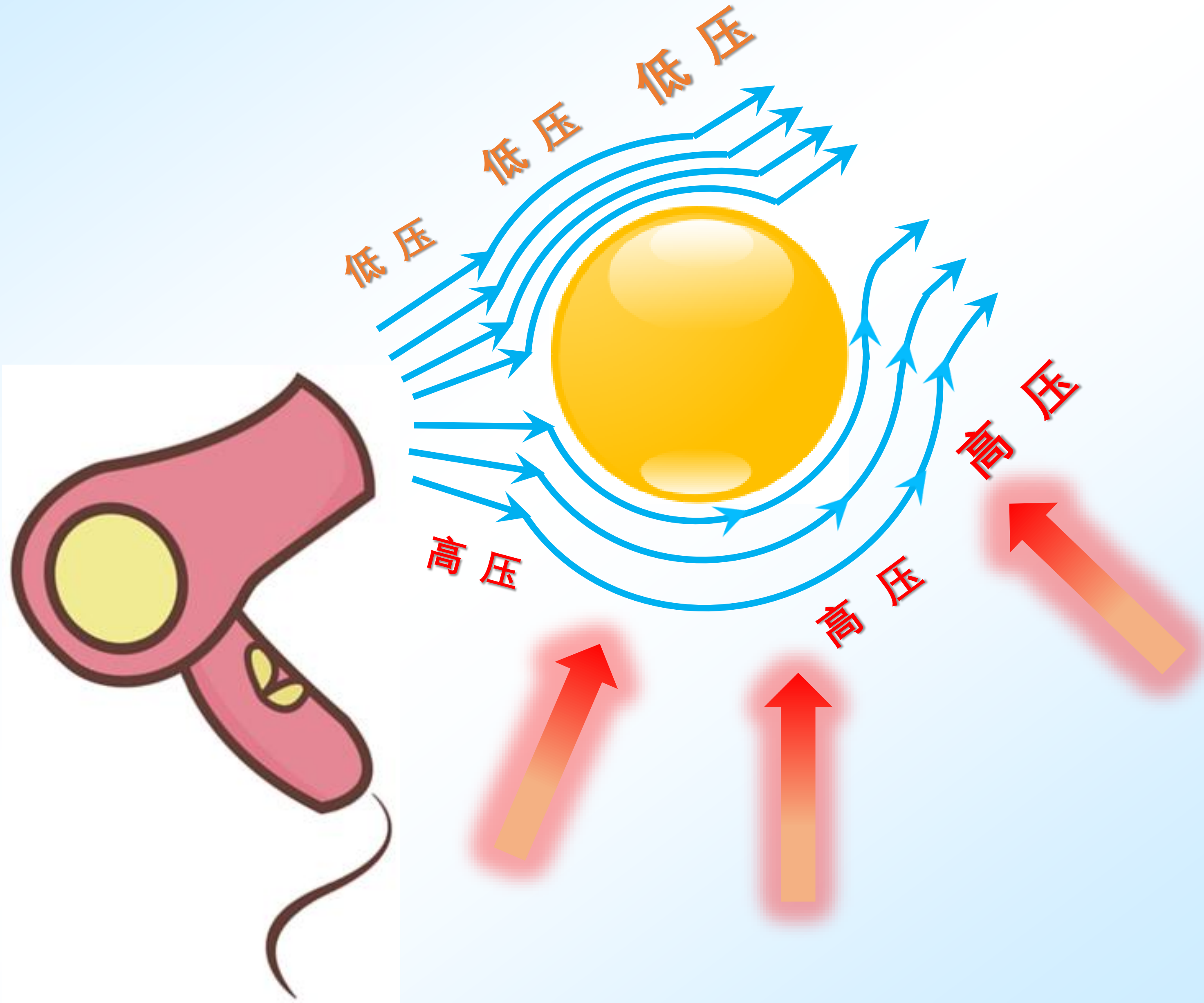
# 3. 香蕉球（网球、乒乓球、足球偏离原运动方向）



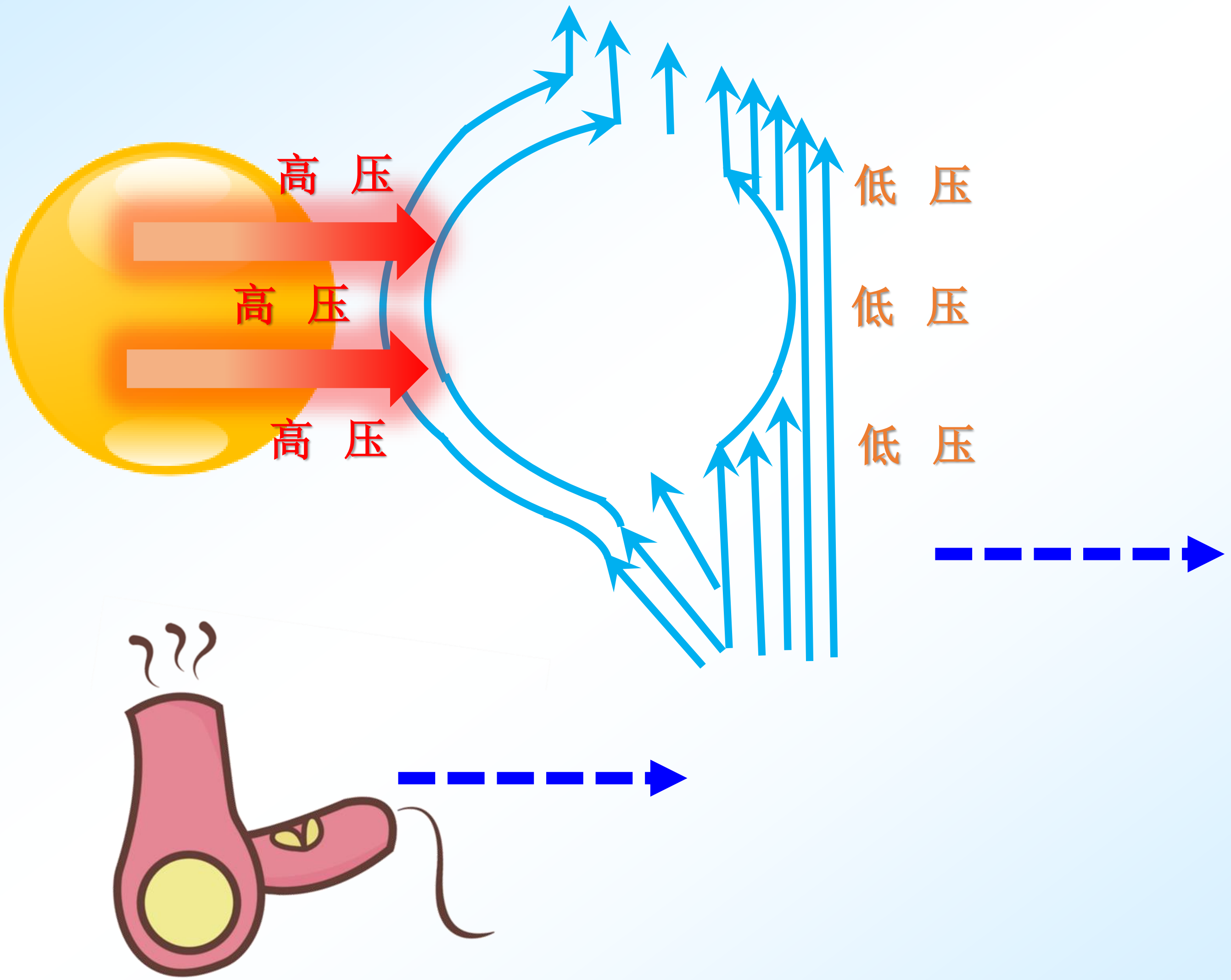


# 4. 悬浮球




低压
低压
低压
低压
高压
高压
高压

球随我动！



**黄色安全线作用？**

## 课后练习

1．流体在同一流管中作稳定流动时，对于不同截面积处的流量是（ ）

A．截面积大处流量大；

B．截面积小处流量小；

√C．截面积大处流量等于截面积小处流量；

D．截面积大处流量不等于面积小处流量.

2．流体在流管中作稳定流动，截面积 $0.5\ cm^2$ 处的流速为 $12\ cm/s$。流速 $4\ cm/s$ 的地方的截面积是（ ）

A．$0.5\ cm^2$；　　B．$1.2\ cm^2$；

√C．$1.5\ cm^2$；　　D．$2.0\ cm^2$.

3．理想液体在半径为$r$的流管中以流速$v$作稳定流动，将此管与6个并联的半径为$r/3$的流管接通，则液体在半径为$r/3$的流管中作稳定流动的流速为（ ）

A．$v/6$； B．$v$； √C．$3v/2$； D．$v/3$．

4．理想流体在一水平管中做稳定流动时，截面积$S$、流速$v$、压强$p$的关系是（ ）

√A．$S$大处、$v$小、$p$大；

B．$S$大处、$v$大、$p$大；

√C．$S$小处、$v$大、$p$小；

D．$S$小处、$v$小、$p$小．

5. 一个截面积不同的水平管道，在不同的截面积处竖直接两个管状压强计，水不流动时，两压强计中液面高度相同；水流动起来时，压强计中液面怎样变化（将水视为理想流体）（ ）

A．两液面同时升高相等的高度；

B．两液面同时下降相等的高度；

√C．两液面同时下降，但是下降的高度不同；

D．两液面都不变化．

6. 一个截面积很大顶端开口的容器，在其底侧面和底部中心各开一个截面积为$0.5\ cm^2$的小孔，水从容器顶部以$200\ cm^3/s$的流量注入容器中，则容器中水面的最大高度约为（ ）

A．0.5 cm；　B．5 cm；　C．10 cm；　√D．20 cm．

6. 一个截面积很大顶端开口的容器，在其底侧面和底部中心各开一个截面积为0.5 cm$^2$的小孔，水从容器顶部以200 cm$^3$/s 的流量注入容器中，则容器中水面的最大高度约为（ ）

A. 0.5 cm；  B. 5 cm；  C. 10 cm；  D. 20 cm.

**解:** 水从容器顶部以恒定的流量注入容器中, 只要流入量大于流出量，水位就不断上升，直到流出量等于流入量时，容器中水面高度达到最大值$H$。此时底侧面小孔$(S_1)$和底部中心小孔$(S_2)$的流速均为：$v \approx \sqrt{2gH}$

流出量等于流入量，即：$(S_1+S_2)\sqrt{2gH}=Q_{入}$

因此 $H=\dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{Q_{入}}{S_1+S_2}\right)^2=\dfrac{1}{2\times 10}\times\left(\dfrac{200\times 10^{-6}}{1\times 10^{-4}}\right)^2=0.2\,\mathrm{m}$