离 散 数 学

--组合计数基础

计数基础、鸽巢原理、排列组合

2025年9月20日 星期六

章节目录

1. 计数基础
2. 鸽巢原理
3. 排列和组合
4. 二项式系数和恒等式
5. 广义排列和组合

1. 计数基础

小节目录[1]

1.1 乘法规则

1.2 加法规则

1.3 减法规则

1.4 除法规则

1.5 树状图

基本计数原理：乘法规则

乘法法则: 假定一个过程可以分解为两个任务。如果完成第一个任务有 n_1 种方式，在第一个任务完成之后有n_2 种方式完成第二个任务，那么完成这个过程就有 $n_1 \cdot n_2$ 种方法

示例：长度为七的位串有多少种?

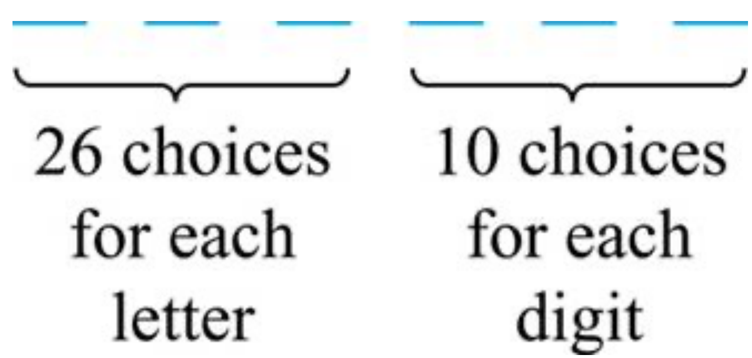
解答：由于每个比特位可以是 0 或 1，所以答案是 $2^7 = 128$

乘法规则

示例：如果每个车牌包含三个大写英文字母，后跟三个数字，可以制作多少种不同的车牌？

解答：根据乘法法则，

有 $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17,576,000$ 种不同的车牌组合.



计数函数

计数函数：从一个有 m 个元素的集合到一个有 n 个元素的集合共有多少个函数?

解答：由于函数表示为对定义域中的每个 m 在值域中选择一个 n 元素，乘法法则告诉我们有 $n \cdot n \cdots n = n^m$ 个这样的函数

计数一对一函数：从一个有 m 个元素的集合到一个有 n 个元素的集合共有多少个一对一函数?

解答：假设定义域中的元素为 $a_1, a_2, \ldots, a_m$。选择 a_1 的值有 n 种方式，选择 a_2 的值有 $n-1$ 种方式，依此类推。乘法法则告诉我们有 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 个这样的函数.

计数有限集合的子集

计数有限集合的子集：使用乘法法则证明有限集合 S 的不同子集数量为 $2^{|S|}$

解答：当 S 的元素按任意顺序排列时，S 的子集与长度为 |S| 的位串之间存在一一对应关系。当第 i 个元素在子集中时，位串的第 i 个位置为 1，否则为 0

根据乘法法则，有 $2^{|S|}$ 个这样的位串，因此有 $2^{|S|}$ 个子集

集合中的乘法规则

如果 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 是有限集，那么这些集合的笛卡尔积中的元素数量是每个集合元素数量的乘积

在笛卡尔积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ 中选择一个元素的任务是通过在 A_1 中选择一个元素、A_2 中选择一个元素，…，以及 A_m 中选择一个元素来完成

根据乘法法则，可以得出:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|.$$

基本计数原理：加法规则

加法法则：如果完成一项任务有 n_1 种方式或 n_2 种方式，并且 n_1 和 n_2 的方式之间没有重叠，那么完成任务的方式总共有 $n_1 + n_2$ 种

示例：数学系必须选择一名学生或一名教师作为大学委员会的代表。如果数学系有 37 名教师和 83 名数学专业的学生，且没有人既是教师又是学生，那么可以有多少种选择代表的方式

解答：根据加法法则，选择代表的方式有 37 + 83 = 120 种.

集合中的加法规则

加法法则可以用集合的术语来表述：当 A 和 B 是不相交集合时，$|A \cup B| = |A| + |B|$

更一般地,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$$
$$\text{when } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for all } i, j.$$

对于集合之间有公共元素的情况，将在后面讨论

结合加法规则和乘法规则

示例：假设编程语言中的语句标签可以是单个字母或一个字母后跟一个数字。找出可能的标签数量.

解答：使用乘法法则和加法法则.

$$26 + 26 \cdot 10 = 286$$

计数密码

结合加法法则和乘法法则可以解决更复杂的问题

示例：计算机系统中的每个用户都有一个密码，密码长度为 6 到 8 个字符，每个字符是大写字母或数字。每个密码必须至少包含一个数字。计算可能的密码数量?

Solution:设 P 为密码的总数量，P_6、P_7 和 P_8 分别为长度为 6、7 和 8 的密码数量.

- 根据加法法则，有 $P = P_6 + P_7 + P_8$.
- 为了计算每种长度的密码数量，我们首先找出由字母和数字组成的指定长度的密码数量，然后减去仅由字母组成的密码数量:

$P_6 = (26+10)^6 - (26)^6 = 2{,}176{,}782{,}336 - 308{,}915{,}776 = 1{,}867{,}866{,}560.$

$P_7 = 36^7 - 26^7 =$

$78{,}364{,}164{,}096 - 8{,}031{,}810{,}176 = 70{,}332{,}353{,}920.$

$P_8 = 36^8 - 26^8 =$

$2{,}821{,}109{,}907{,}456 - 208{,}827{,}064{,}576 = 2{,}612{,}282{,}842{,}880.$

因此, $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2{,}684{,}483{,}063{,}360.$

网络地址

IPv4（Internet Protocol Version 4）使用 32 位地址.

Bit Number	0	1	2	3	4	8	16	24	31
Class A	0	netid					hostid		
Class B	1	0	netid					hostid	
Class C	1	1	0	netid					hostid
Class D	1	1	1	0	Multicast Address				
Class E	1	1	1	1	0	Address			

A类地址：用于最大型的网络，格式为 0，后跟一个 7 位的网络标识符（netid）和一个 24 位的主机标识符（hostid）.
B类地址：用于中型网络，格式为 10，后跟一个 14 位的网络标识符和一个 16 位的主机标识符.
C类地址：用于最小型的网络，格式为 110，后跟一个 21 位的网络标识符和一个 8 位的主机标识符.

- D类地址和E类地址不被分配作为互联网中计算机的地址。仅有A类、B类和C类地址可用
- 1111111（二进制）不能作为A类网络的网络标识符
- 主机标识符全为0或全为1的地址在任何网络中都不可用

Jump to long description

计数网络地址

示例：互联网上有多少不同的IPv4地址可供计算机使用?

解答：使用加法法则和乘法法则。设 x 为可用的地址数量， x_A, x_B, 和 x_C分别表示各类地址的数量

- A类地址, x_A: $2^7 - 1 = 127$ netids. $2^{24} - 2 = 16{,}777{,}214$ hostids.
  $x_A = 127 \cdot 16{,}777{,}214 = 2{,}130{,}706{,}178$.
- B类地址, x_B: $2^{14} = 16{,}384$ netids. $2^{16} - 2 = 16{,}534$ hostids.
  $x_B = 16{,}384 \cdot 16{,}534 = 1{,}073{,}709{,}056$.
- C类地址, x_C: $2^{21} = 2{,}097{,}152$ netids. $2^8 - 2 = 254$ hostids.
  $x_C = 2{,}097{,}152 \cdot 254 = 532{,}676{,}608$.
- 因此，可用的IPv4地址总数为
- $x = x_A + x_B + Xc$
  $= 2{,}130{,}706{,}178 + 1{,}073{,}709{,}056 + 532{,}676{,}608$
  $= 3{,}737{,}091{,}842$.

今天的IPv4地址远远不够用了！新的IPv6协议解决了地址数量不足的问题.

基本计数原理：减法规则

减法法则：如果完成某项任务有 n_1 种方式或 n_2 种方式，那么完成任务的总方式数量为 $n_1 + n_2$ 减去以两类方式中执行这个任务相同的方式

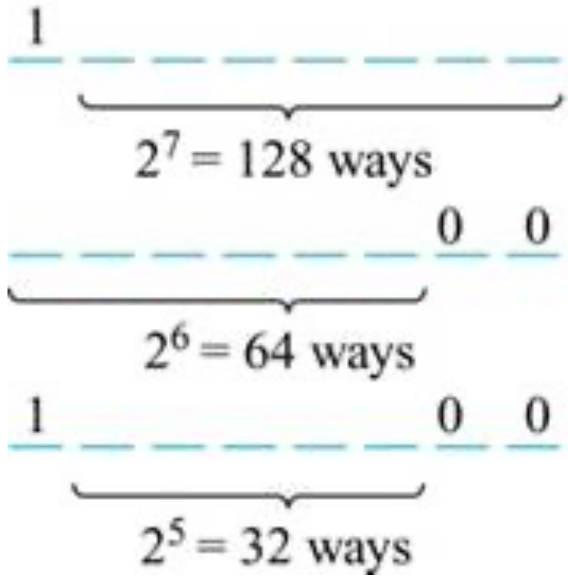
这也称为**容斥原理**（principle of inclusion-exclusion）：

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

计数比特串

示例：长度为八的二进制串有多少个要么以1开始，要么以00结束?

解答：使用减法法则



- 以1开头的长度为八的二进制串数量

$2^7 = 128$

- 以00结尾的长度为八的二进制串数量

$2^6 = 64$

- 既以1开头又以00结尾的长度为八的二进制串数量：$2^5 = 32$

因此，符合条件的二进制串总数为$128 + 64 - 32 = 160$

Jump to long description

基本计数原理：除法规则

除法法则：如果某项任务可以通过 n 种方式完成，且对于每一种方式 w，正好有 d 种方式对应于方式 w，那么完成这项任务的方式总数为 n/d

以集合的形式重述：如果有限集合 A 是 n 个两两不相交的子集的并集，每个子集有 d 个元素，那么 $n=|A|/d$

以函数的形式重述：如果 f 是从有限集合 A 到有限集合 B 的函数，且对于每个 $y \in B$，有正好 d 个值 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$，那么 $|B|=|A|/d$

示例：围绕圆桌有多少种不同的方式排列四个人？当每个人的左邻右舍相同时，两个排列视为相同?

解答：给座位编号，从1到4，顺时针方向排列。选择座位1有4种选择坐人的方式，座位2有3种方式，座位3有2种方式，座位4只有1种方式。因此，四个人的排列方式总共有 4!=24 种。但是，由于当每个人的左邻和右舍相同时，两个排列被视为相同，所以对于每个座位1的选择，我们会得到相同的排列

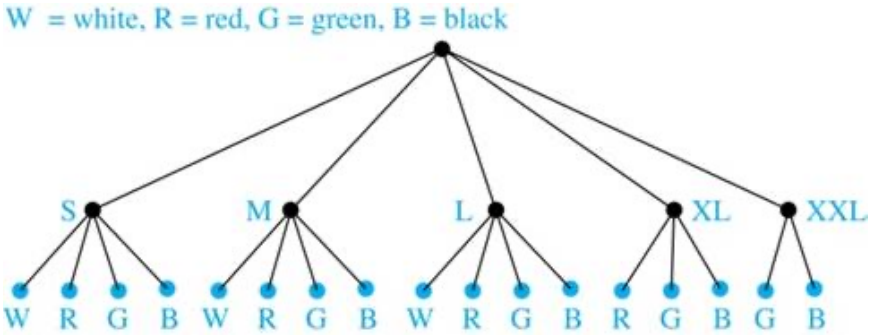
因此，按照除法法则，不同的排列方式有： 24/4=6

树状图

树状图：我们可以通过使用树状图解决许多计数问题，其中分支代表可能的选择，叶子代表可能的结果

示例：假设 “I Love Discrete Math” T恤有五种不同的尺码：S、M、L、XL 和 XXL。每个尺码都有四种颜色（白色、红色、绿色和黑色），除了 XL 只有红色、绿色和黑色，XXL 只有绿色和黑色。校园书店至少需要存多少件T恤，才能确保每个尺码和颜色都有一件?

解答：绘制树状图.



因此，书店至少需要存17 件T恤

2. 鸽巢原理

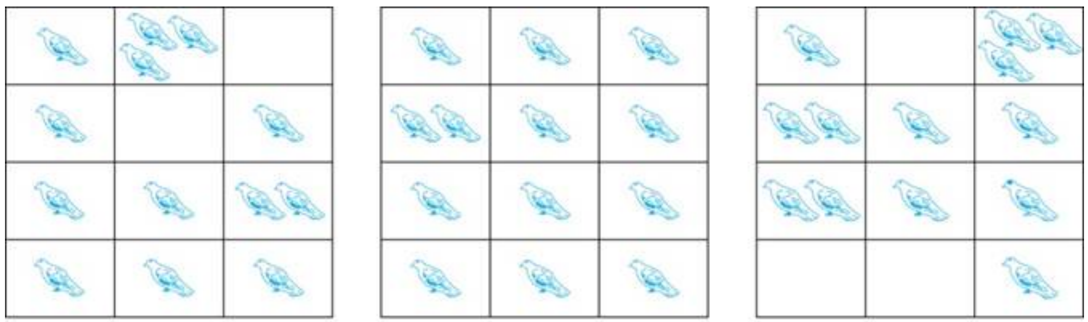
小节目录2

2.1 鸽巢原理

2.2 广义鸽巢原理

鸽巢原理$_1$

如果有 20 只鸽子栖息在 19 个鸽笼中，那么必定至少有一个鸽笼里有超过 1 只鸽子



(a) (b) (c)

鸽巢原理：如果 k 是一个正整数，并且将 k+1 个物体放入 k 个盒子中，那么至少有一个盒子包含2个或更多的物体

证明：我们使用反证法进行证明。假设没有一个盒子里有超过一个物体，那么所有盒子里的物体总数最多为 k。但这与我们有 k+1 个物体的假设相矛盾。因此，至少有一个盒子必须包含2个或更多的物体

鸽巢原理2

推论 1： 从一个具有 k+1 个元素的集合到一个具有 k 个元素的集合的函数 f 不是一对一函数

证明： 使用鸽巢原理

- 为 f 的值域中的每个元素 y 创建一个盒子
- 将所有使得 $f(x)=y$的定义域中的元素 x 放入对应的盒子中
- 因为定义域中有 k+1 个元素，而值域中只有 k 个盒子，所以至少有一个盒子里会有2个或更多的元素

因此，函数 f 不能是一对一函数

鸽巢原理[3]

示例：在任意367人的群体中，必定至少有两人有相同的生日，因为只有366种可能的生日.

示例：证明对于每一个整数 n，存在一个数是n 的倍数且在它的十进制表示中只出现0和1

解：设 n 为一个正整数。考虑 n+1 个整数：1, 11, 111, ..., 111...1（最后一个数的十进制有 n+1 个1）。一个整数除以 n 时，可能的余数有 n 种。根据鸽巢原理，当这些 n+1 个整数除以 n 时，至少有两个整数的余数相同。这两个整数之差的十进制表示中只含有0 和1，且它能被n 整除

广义鸽巢原理1

广义鸽巢原理：如果将 N 个物体放入 k 个盒子中，则至少有一个盒子包含至少 $\lceil N/k \rceil$ 个物体

证明：我们使用反证法进行证明。假设没有任何一个盒子包含超过 $\lceil N/k \rceil-1$个物体。这样，每个盒子最多有 $\lceil N/k \rceil-1$ 个物体。由于有 k 个盒子，因此总的物体数量至多为

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k}+1\right)-1\right) = N,$$

我们用到的不等式是 $\lceil N/k \rceil < \lceil N/k \rceil + 1$。这与我们有 N 个物体的事实矛盾

示例：在100人中，至少有 $\lceil 100/12 \rceil=9$个人是在同一个月份出生的

广义鸽巢原理2

示例： a) 从一副标准的52张牌中至少要选出多少张牌，才能保证至少有三张同一花色的牌?

b)要保证至少选出三张红心，必须选出多少张牌?

解答： a）我们假设有四个盒子，分别代表四种花色。根据广义鸽巢原理，至少有一个盒子会包含 $\lceil N/4 \rceil$ 张牌。当 $\lceil N/4 \rceil \geq 3$ 时，至少选出三张同一花色的牌。使得 $\lceil N/4 \rceil \geq 3$的最小整数 N 是：$N=2\cdot4+1=9$ 因此，至少需要选出 9 张牌 才能保证至少有三张同一花色的牌

b)一副牌中有13张红心和39张非红心牌。如果我们选出41张牌，可能会有39张非红心牌和2张红心牌。然而，当我们选出42张牌时，必须至少有三张红心。（**注意：** 这里不使用广义鸽巢原理）

3. 排列组合

小节总结[3]

3.1 排列

3.2 组合

3.3 组合证明

排列

定义：一组不同对象的排列是这些对象的有序排列。集合中 r 个元素的有序排列称为 r-排列

示例：设 S={1,2,3}

- 有序排列 3,2 是 S 的一个 2-排列.

具有 n 个元素的集合的 r-排列的数量记为 $P(n,r)$.

- 对于 S={1,2,3}，2-排列有：1,2; 1,3; 2,1; 2,3; 3,1; 和 3,2。因此，$P(3,2)$=6.

排列数量的公式

定理 1: 如果 n 是正整数，且 r 是满足 $1 \leq r \leq n$ 的整数，那么对于一个有 n 个不同元素的集合，其 r-排列的数量为

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

证明：使用乘法法则。第一个元素有 n 种选择，第二个元素有 $n-1$ 种选择，依此类推，直到最后一个元素有 $n-(r-1)$ 种选择

注意：当 $r=0$ 时，$P(n,0)=1$，因为只有一种方法来排列 0 个元素

推论 1：如果 n 和 r 是满足 $1 \leqslant r \leqslant n$ 的整数，那么

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

通过计数排列解决计数问题[1]

示例：从参加比赛的 100 个不同的人中，选择一个一等奖、一个二等奖和一个三等奖的方式有多少种?

解:

$$P(100,3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970,200$$

通过计数排列解决计数问题2

示例：假设一位女销售员需要访问八个不同的城市。她必须从指定的城市开始她的行程，但可以以任何顺序访问其余七个城市。那么，这位女销售员在访问这些城市时有多少种可能的顺序?

解：第一个城市是固定的，剩下的七个城市可以任意排列。因此，这些顺序的数量为:

$$P(7,7) = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

如果她想找到访问所有城市的最短路径，她必须考虑 5040 条路径

通过计数排列解决计数问题[3]

示例：包含字符串 ABC 的字母 ABCDEFGH 的排列有多少种?

解：我们可以将字符串 ABC 看作一个整体，所以问题相当于排列六个对象：ABC、D、E、F、G 和 H.

$$P(6,6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

组合[1]

定义: 集合元素的一个 **r-组合**是从集合中无序选择 r 个元素。因此，r-组合是一个包含 r 个元素的子集。具有 n 个不同元素的集合的 r-组合的数量记作 C(n, r)，也记作：$\binom{n}{r}$ 并且称为二项式系数

示例：设集合 S 为 {a, b, c, d}，则 {a, c, d} 是集合 S 的一个 3-组合，它与 {d, c, a} 是相同的，因为顺序不重要.
$C(4,2) = 6$

因为集合 {a, b, c, d} 的 2-组合有六个子集{*a*, *b*}, {*a*, *c*}, {*a*, *d*}, {*b*, *c*}, {*b*, *d*}, 和 {*c*, *d*}.

组合[2]

定理 2： 当 n ≥ r ≥ 0 时，具有 n 个元素的集合的 r-组合 的数量等于

$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

证明：根据乘法法则*P*(*n*, *r*) = *C*(*n*,*r*) · *P*(*r*,*r*). 因此

$$C(n,r)=\frac{p(n,r)}{P(r,r)}=\frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

组合[3]

示例：从一副标准的 52 张牌中，可以发出多少种五张牌的扑克手牌？另外，从 52 张牌中选择 47 张牌有多少种方法?

解：由于发牌的顺序无关紧要，因此五张牌的组合数是:

$$C(52,5)=\frac{52!}{5!47!}$$

$$=\frac{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=26\cdot17\cdot10\cdot49\cdot12=2,598,960$$

选择 47 张牌的不同方式是

$$\boxed{C(52,47)}=\frac{52!}{47!5!}=\boxed{C(52,5)}=2,598,960$$

组合$_4$

推论2：设 n 和 r 为非负整数，且 $r \le n$. 则 $C(n, r) = C(n, n - r)$.

证明：由定理2可得

$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

and

$$C(n,n-r)=\frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

因此, $C(n, r) = C(n, n - r)$.

组合证明[1]

定义1：一个组合证明是指使用以下方法之一来证明恒等式的证明

- **双计数证明**使用计数论证来证明恒等式两边以不同的方式计算相同的对象
- **双射证明**展示了恒等式两边所计数的对象集合之间存在双射关系

组合证明[2]

以下是两种组合证明

$$C(n,r)=C(n,n-r)$$

当 r 和 n 为非负整数且 $r<n$ 时:

- **双计数证明**：根据定义，集合 S 中包含 r 个元素的子集数量为 $C(n,r)$。集合 S 的每个子集 A 也可以通过指定不在 A 中的元素来描述，即那些属于补集 $\bar{A}$ 的元素。由于 S 中包含 r 个元素的子集的补集包含 $n-r$ 个元素，集合 S 中包含 r 个元素的子集数量也为 $C(n,n-r)$
- **双射证明**：设 S 是一个包含 n 个元素的集合。将集合 S 的子集 A 映射到其补集 $\bar{A}$ 的函数是一个双射，连接了 S 中具有 r 个元素的子集与具有 $n-r$ 个元素的子集。由于这两个集合之间存在双射，它们必须具有相同的元素数量

组合 5

示例：从一个由10名成员组成的网球队中选择5名球员前往另一所学校进行比赛，有多少种选择方式

解：根据定理2，组合的数量为

$$C(10,5)=\frac{10!}{5!5!}=252.$$

示例：一组30人已接受训练成为宇航员，准备执行首次火星任务。选择6人组成执行任务的队伍有多少种方式?

解：根据定理2，可能的队伍数量为

$$C(30,6)=\frac{30!}{6!24!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=593,775$$