本节课作业

P73: 11-T5~T8

已学内容回顾

谐振动 $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0}$$

弹簧振子

单摆

……

$$x=\underbrace{A}_{\text{振幅}}\cos(\omega t+\underbrace{\varphi}_{\text{初相位}})$$

$\boxed{\omega}$

系统性质决定（固有频率）

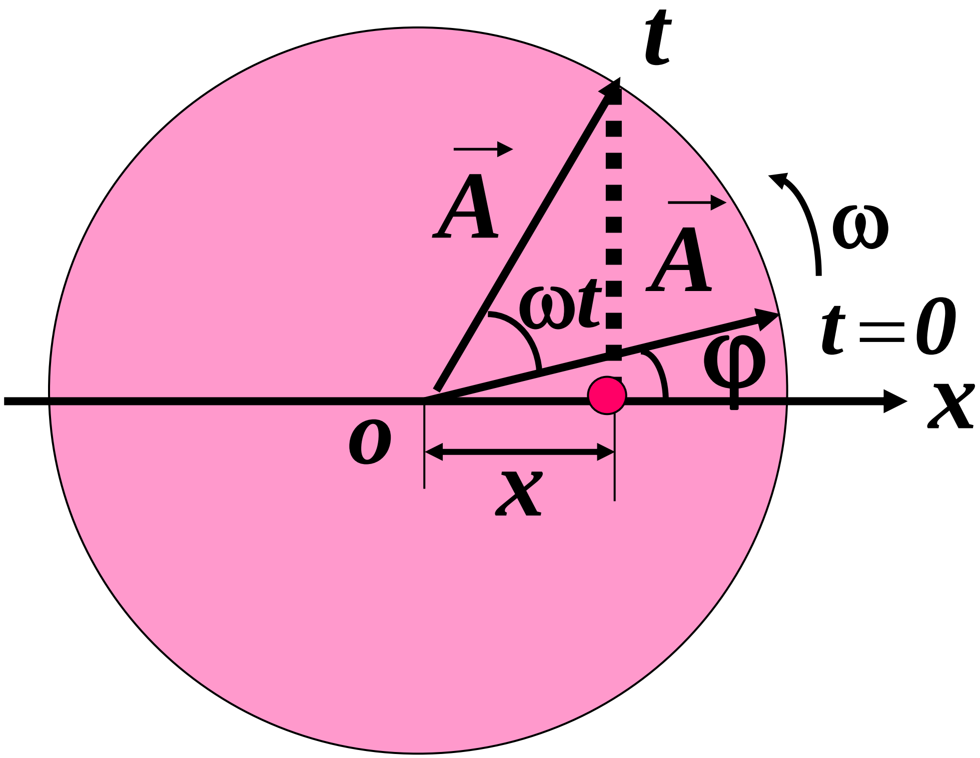
$$v=dx/dt=-A\omega\sin(\omega t+\phi)$$

$$a=dv/dt=-A\omega^2\cos(\omega t+\phi)$$

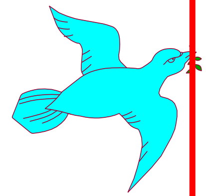
已学内容回顾

旋转矢量表示法

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$



5. 谐振动的能量



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

以弹簧振子为例,
动能和势能分别为：

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \quad \frac{1}{2}\underline{mA^2\omega^2}\sin^2(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

$$W_p = \frac{1}{2}mx^2 = \quad \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

$$\because \omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \therefore m\omega^2 = k$$

$$\boxed{W_{总} = W_k + W_p = \frac{1}{2}kA^2}$$

$$W_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

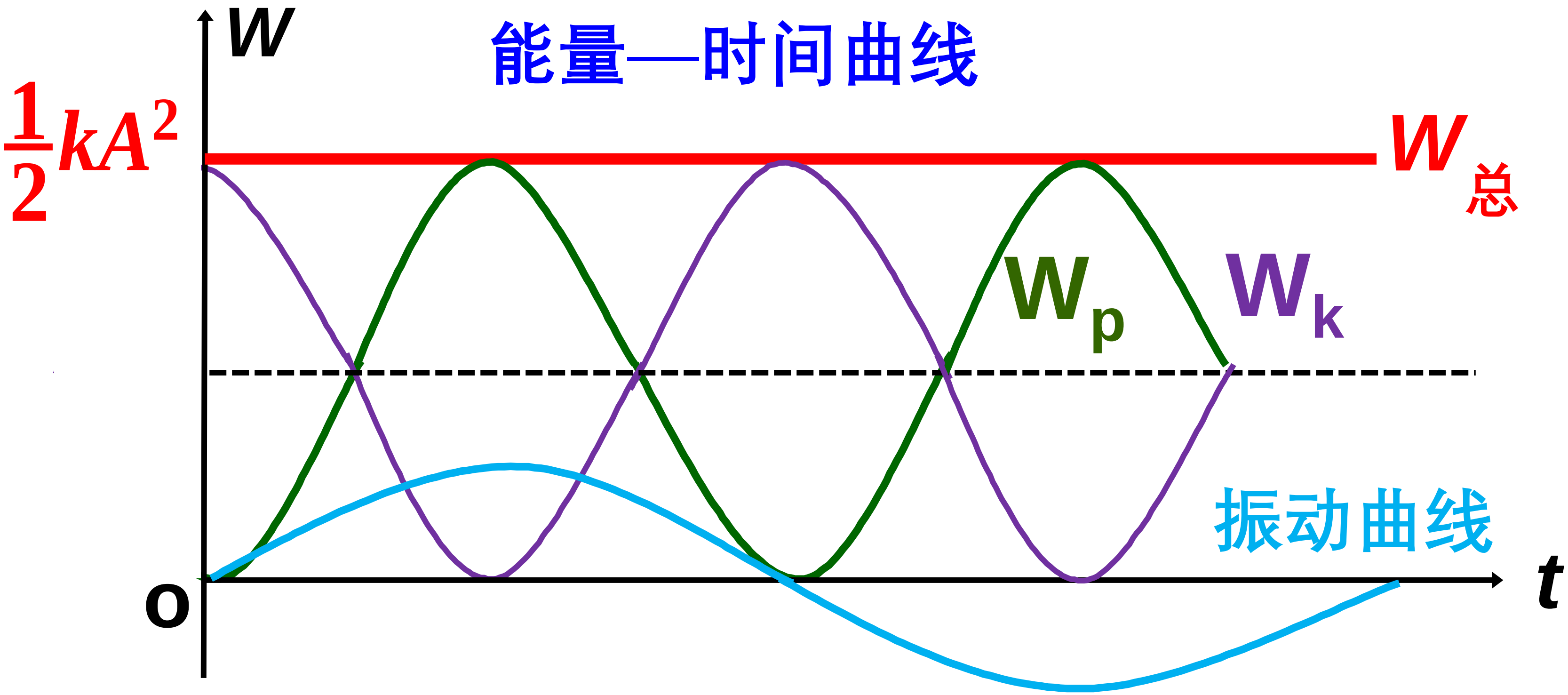
$$W_{总} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

注意

1° 谐振动系统的动能、势能随时间变化，总能量为常数。

2° $W_{总} \propto A^2$ 对任意谐振动都适用。

3° 假定φ=0，则 $\begin{cases} W_p = \dfrac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t \\ W_k = \dfrac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t \end{cases}$



由图看出：W_k、W_p的变化频率是振动频率的2倍

4° $$\langle W_k \rangle = \langle W_p \rangle = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}W_{总}$$

第2节　谐振动的合成

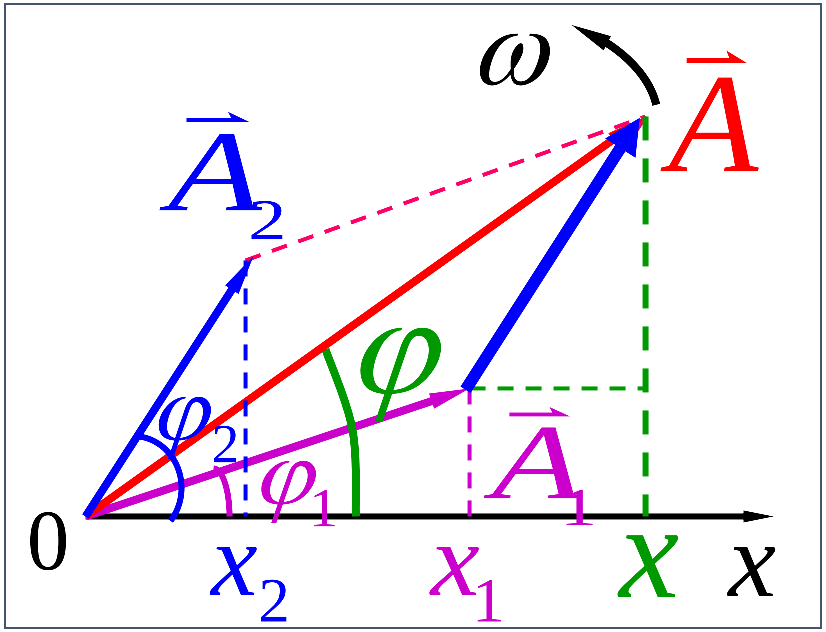
简谐运动 ⟷ 复杂振动（合成 / 分解）

一、两个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

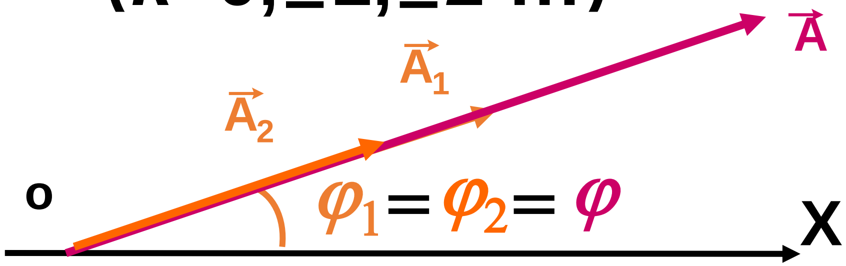
(1)合振动仍是同频率的简谐振动。
(2)合振幅不仅与分振幅有关还与$\Delta\varphi$有关。

两个重要的特例:

(1) 两分振动同相 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$　　$(k=0,\pm1,\pm2\ \ldots)$

$\vec{A_1}$ $\vec{A_2}$ 重合，合振幅为:

$$A=A_1+A_2$$

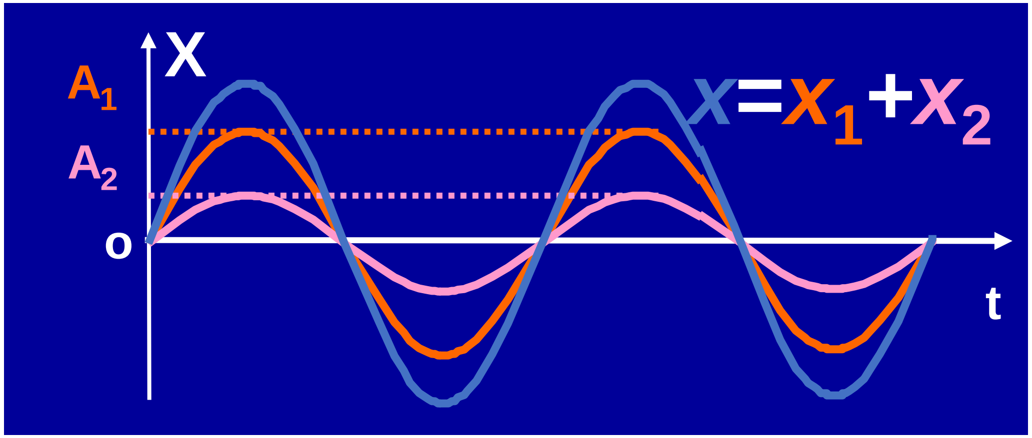


合振动初位相: $\varphi=\varphi_1=\varphi_2$

合振动方程:

$x=x_1+x_2=$

$$=(A_1+A_2)\cos(\omega_0 t+\varphi_1)$$



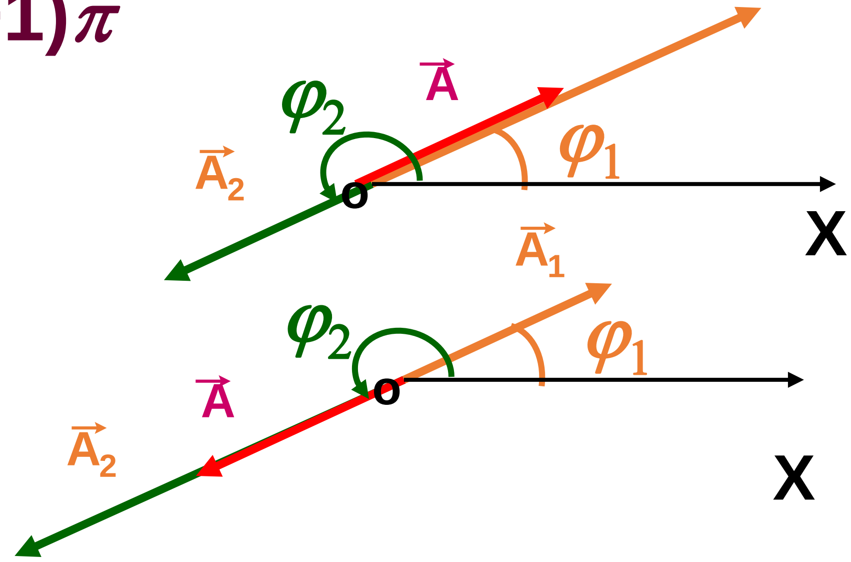
合振动的振幅最大

两振动的合成效果: ——使振动加强

(2) 两分振动反相 $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$

$\vec{A}_1$ 与 $\vec{A}_2$ 方向相反，合振幅为：

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$



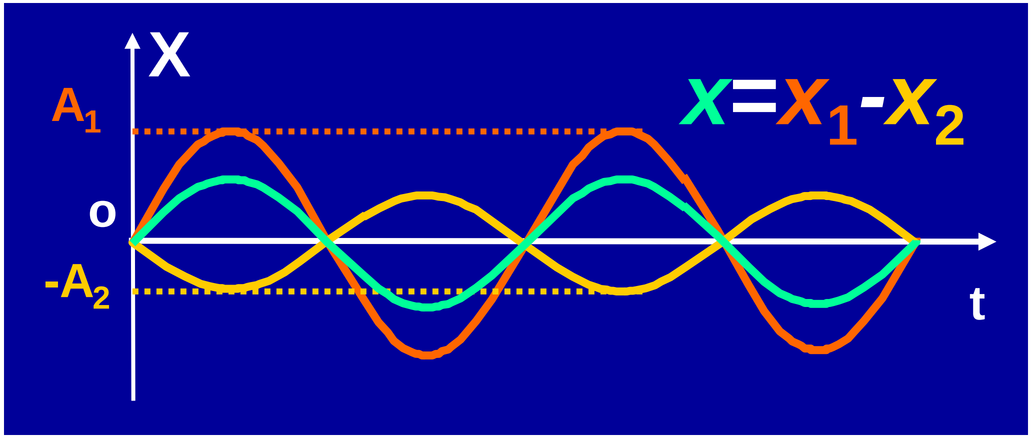
合振动初位相：

若 $A_1>A_2$ $\quad \varphi=\varphi_1$

若 $A_1<A_2$ $\quad \varphi=\varphi_2$

两振动的合成效果

——使振动减弱



(3) 两分振动的位相差：

$$\varphi_2-\varphi_1\neq k\pi$$

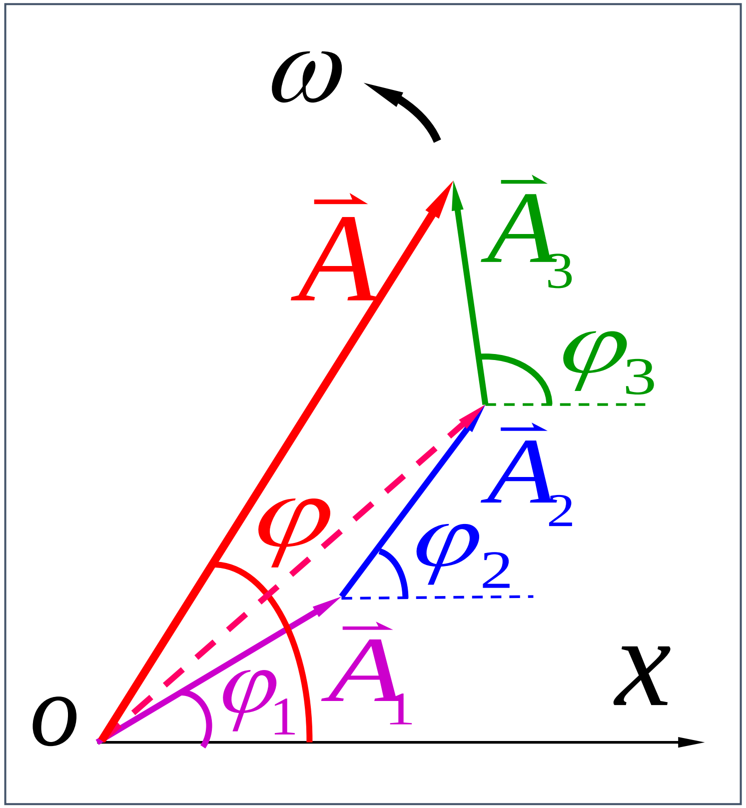
合成振动的振幅： $\left|A_1-A_2\right|<A<A_1+A_2$

多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ \cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\omega t + \varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

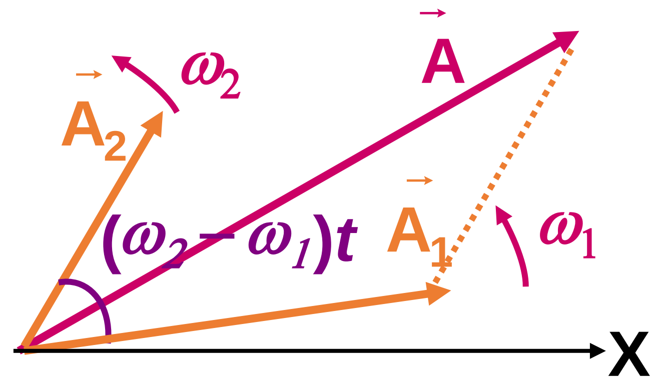
$$x = a\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cos[\omega t + \frac{(N-1)\delta}{2}]$$

二、同振动方向、不同频率的两个简谐振动的合成

讨论一特例： $A_1=A_2 \qquad \omega_1 \neq \omega_2 \qquad \varphi_1=\varphi_2=\varphi$

则两振动为： $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi)$

$x_2 = A_1\cos(\omega_2 t+\varphi)$



合振动：

$$x=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi)+A_1\cos(\omega_2 t+\varphi)$$

$$=\underline{\underline{2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)}}\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$$

$$x = A(t)\cos(\omega t+\varphi)$$

合振动的振幅

合振动不是谐振动！

由旋转矢量图可得：

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\omega_2-\omega_1)t$$

$$A^2=2A_1^2+2A_1^2\cos(\omega_2-\omega_1)t$$

$$=4A_1^2\sqrt{\left(\frac{1+\cos(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)^2}$$

$$A=2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t$$

合振动方程

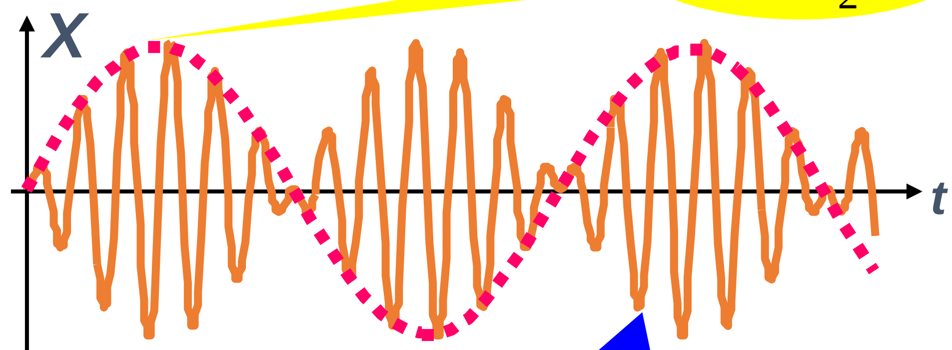
$$x = \underbrace{2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)}\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

振幅*A*按余弦函数变化，变化范围：$0 \le A \le 2A_1$

这种振幅出现加强和减弱现象称为~~拍。

可见 $\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$ 改变π时，*A*就重复出现一次变化

$2A_1\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$



$\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$

拍的周期τ和拍的频率ν:

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau = \pi$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1} = \frac{1}{\nu_2-\nu_1} = \frac{1}{\nu}$$

$$\nu = \left|\nu_2-\nu_1\right|$$

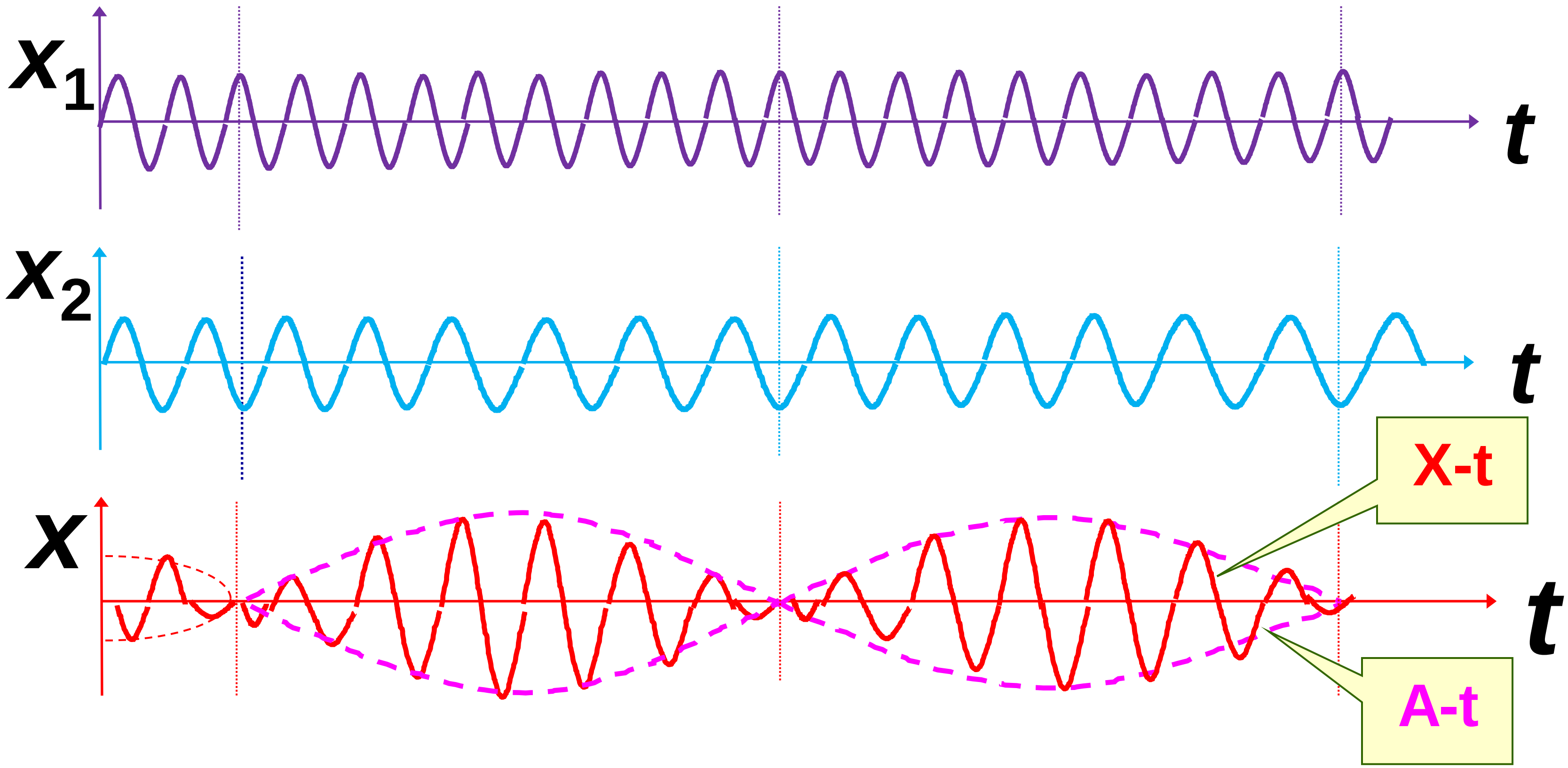
注：(1)拍现象只在两分振动的频率相差不太大时才显出来。

即：$\omega_1+\omega_2 >> \left|\omega_1-\omega_2\right|$ 现象才明显

(2)与合振动位移变化的频率是完全不同的

$$\boxed{\omega_x = \frac{\omega_2+\omega_1}{2}} \qquad \boxed{\nu_x = \frac{\nu_1+\nu_2}{2}} \neq \nu$$

拍的形成

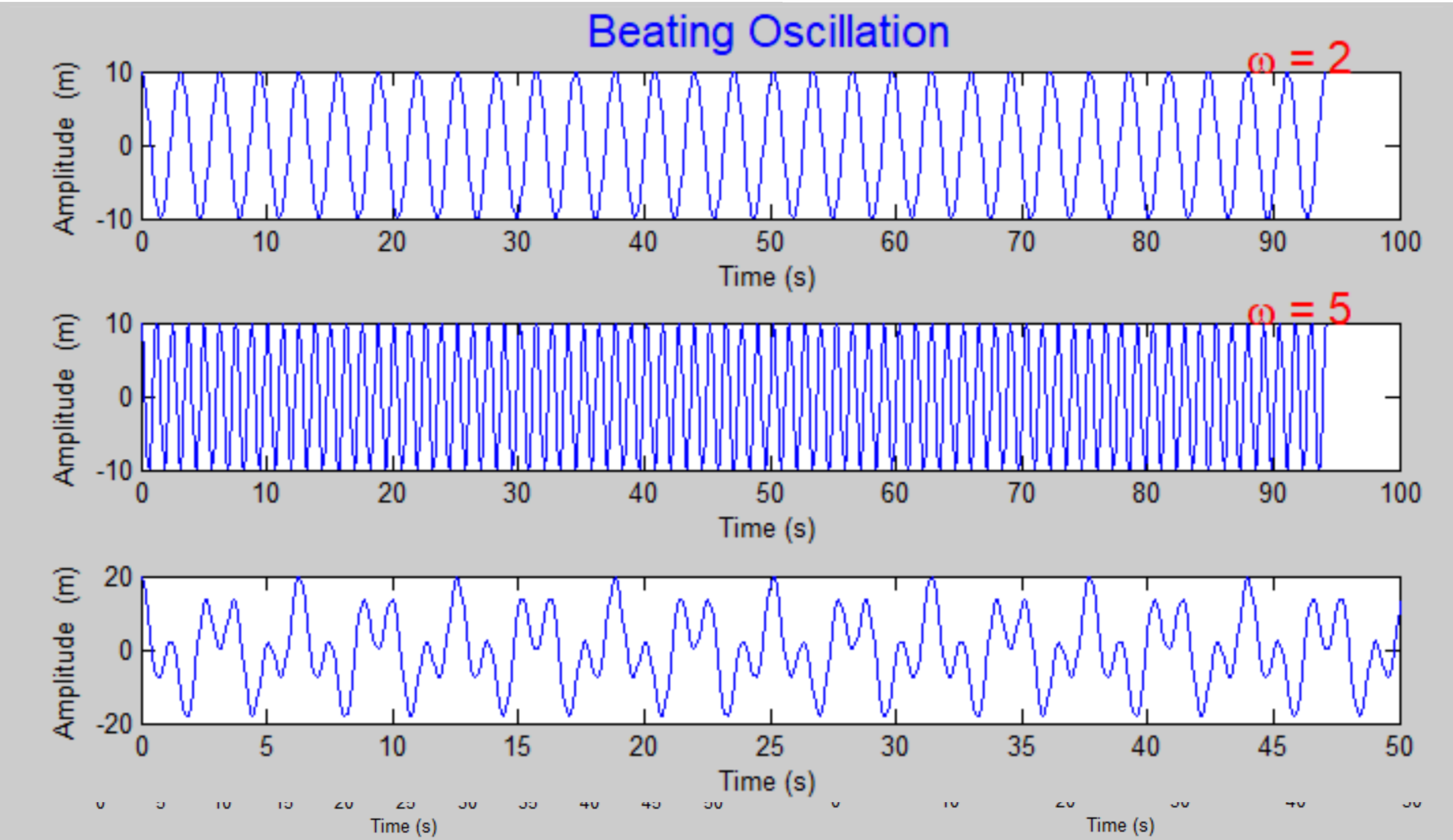


拍频　合振幅在单位时间内加强（或减弱）的次数

$$\nu = |\nu_2 - \nu_1|$$

“拍现象”：合振幅时强时弱的现象。

在声振动、电振动 、波动、激光等问题中常遇到。

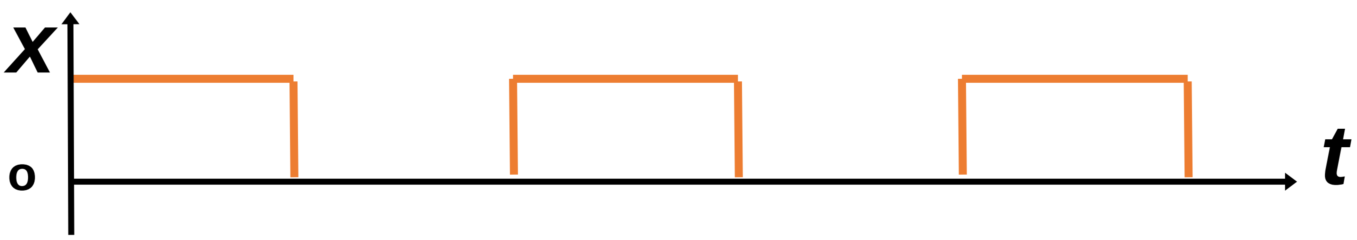

Beating Oscillation
ω = 2
ω = 5
Amplitude (m)
Time (s)

谐振分析 (傅里叶分析）

一个复杂振动可以分解为一系列不同频率、不同振幅的谐振动。

$$x(t)=A_0+\sum_{n=1} A_n\cos(n\omega t+\varphi_n)$$ 傅里叶级数展开

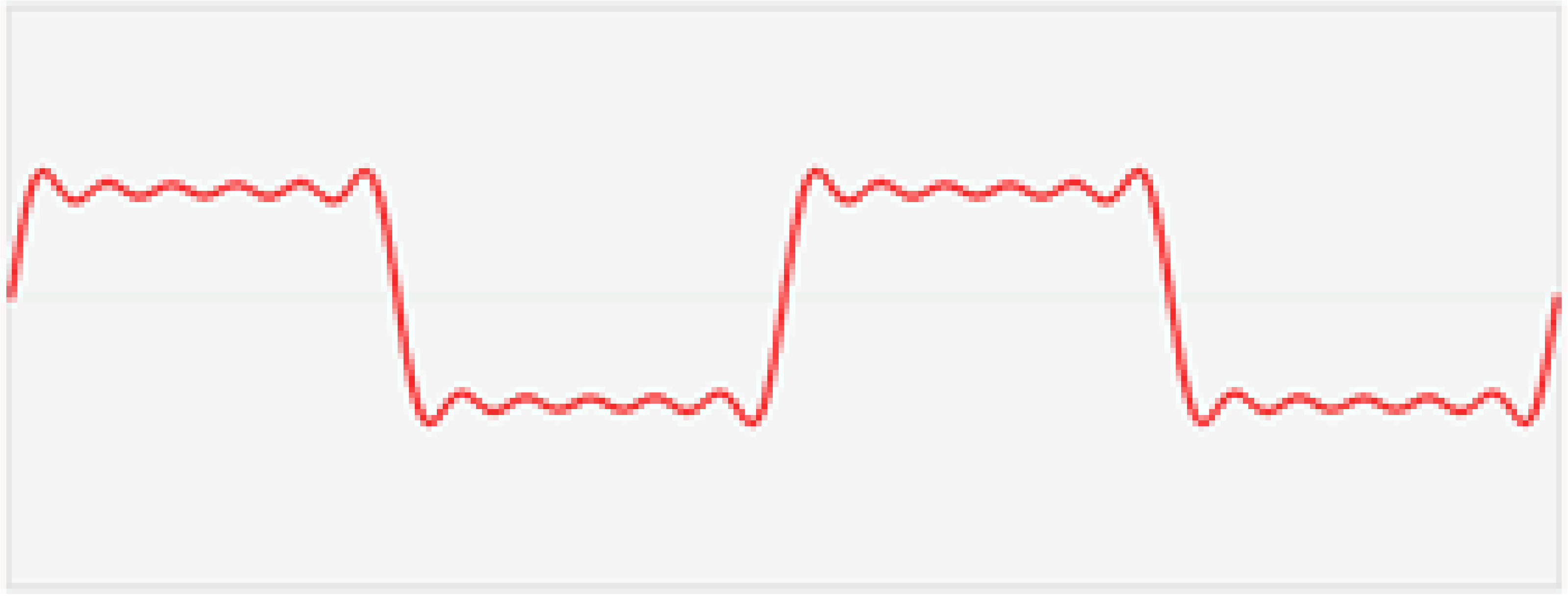
例如：一“方波”可分解为基频（ω）、一次谐频、三次谐频、五次谐频 …… （nω）的迭加。

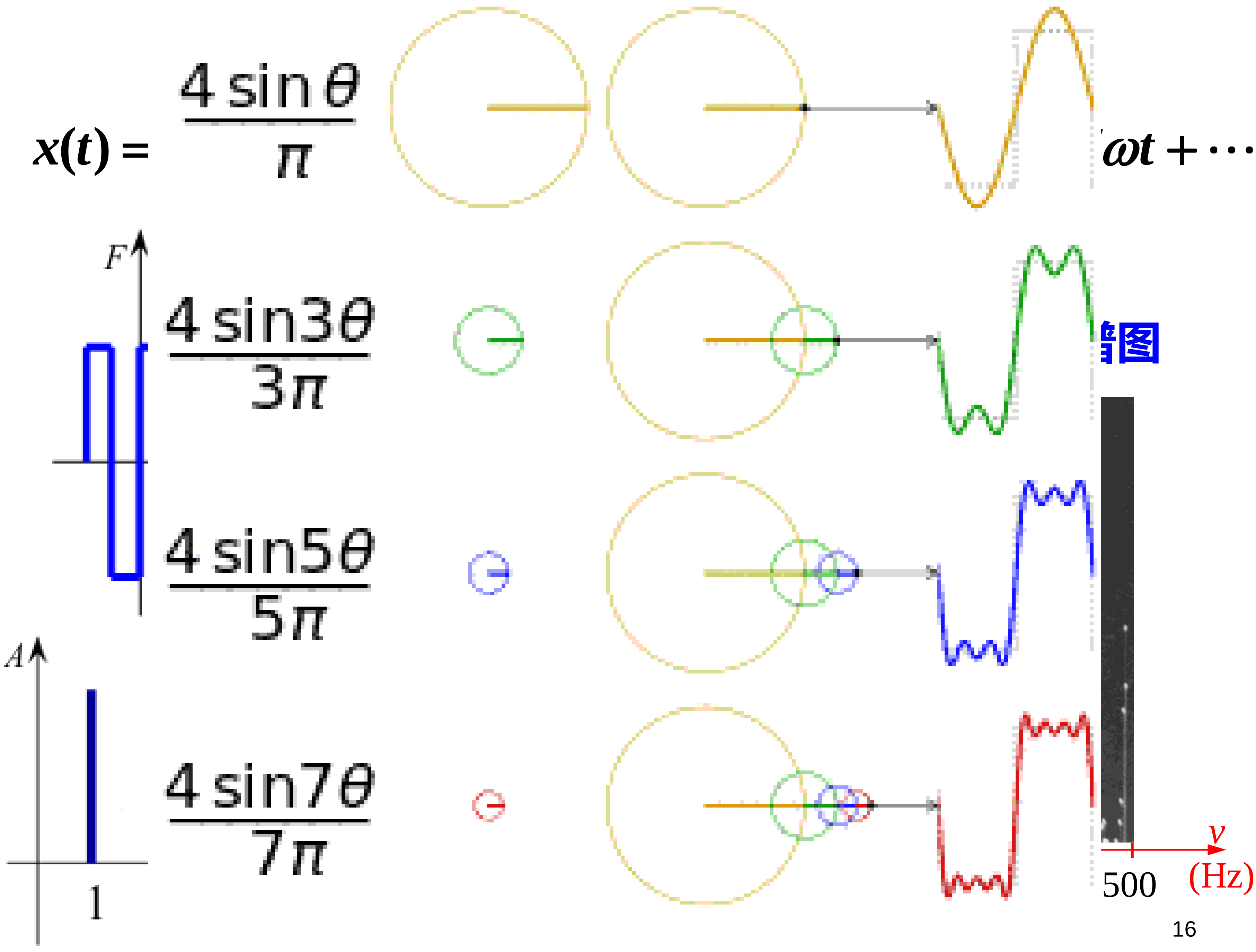


$$x = x_0 + x_1 + x_3 + x_5 + \cdots\cdots$$

$$= A_0 + A(\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t\ldots)$$

傅里叶谐振分析





x(t) =
4 sin θ / π
4 sin3θ / 3π
4 sin5θ / 5π
4 sin7θ / 7π
ωt + ···
图
F
A
1
500
ν
(Hz)

三、振动方向相互垂直频率相等的两个谐振动的合成

设一个物体在x方向参与振动 $x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$

在y方向参与振动 $y = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$

求取物体的运动轨迹：

$$x = A_1(\cos\varphi_1 \cos\omega_0 t - \sin\varphi_1 \sin\omega_0 t)$$

$$y = A_2(\cos\varphi_2 \cos\omega_0 t - \sin\varphi_2 \sin\omega_0 t)$$

反解出 $\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t$ 代入 $\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t = 1$

得出椭圆方程

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$