

本节课作业

P61: 10-T5~T9

上节课的主要内容

- 法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} + \vec{S} \cdot d\vec{B}$$

- 动生电动势 $\varepsilon_i = \int_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

四. 感生电动势 感应电场

法拉第电磁感应定律: $\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}$ (ε_i 是回路中的感应电动势)

ϕ 的变化方式 $\left\{ \begin{array}{l} \text{导体回路变动, } \vec{B} \text{ 不变} \rightarrow \text{动生电动势} \\ \text{导体回路不动, } \vec{B} \text{ 变化} \rightarrow \text{感生电动势} \end{array} \right.$

1. 感生电动势

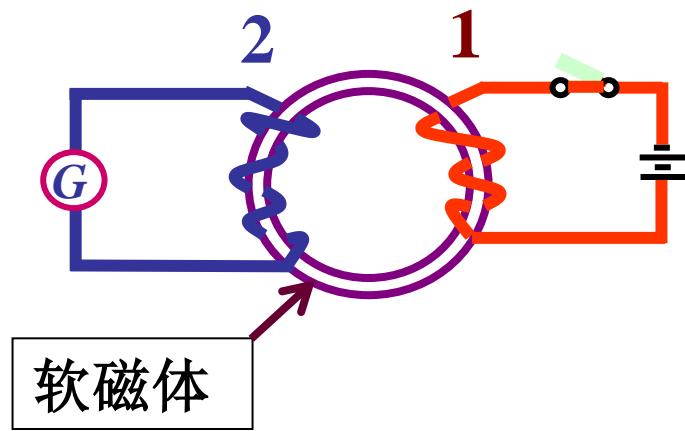
如图, 考虑两个静止的线圈 1, 2.

当线圈 1 中 I 变化时, 线圈 2 中出现感应电流 I_i , 即回路 2 中出现感应电动势 ε_i .

那么, 与此 ε_i 对应的非静电力是什么?

是不是静电场提供的静电力?

$\because \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, \vec{E} 为保守力场, 静电场 \vec{E} 不能为闭合回路运动的电荷提供能量。那么, 此非静电力是什么呢? 其场强 \vec{E}_K 是什么?



2. 感应电场 —— 感应电场的存在得到了实验的验证。

由电动势的定义: $\varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot d\vec{l}$ (经电源内部)

对闭合回路: $\varepsilon_i = \oint \vec{E}_K \cdot d\vec{l}$

感生电动势: $\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$

$\therefore \oint \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$ 注: $d\vec{l}$ 与 $d\vec{s}$ 成右手螺旋关系。

可见, \vec{E}_K 与 \vec{B} 的变化有关。

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

由此, 麦克斯韦提出**感应电场**的概念。

磁场随时间变化的同时在周围空间产生电场,
此电场称为**感应电场**。

\vec{E}_i

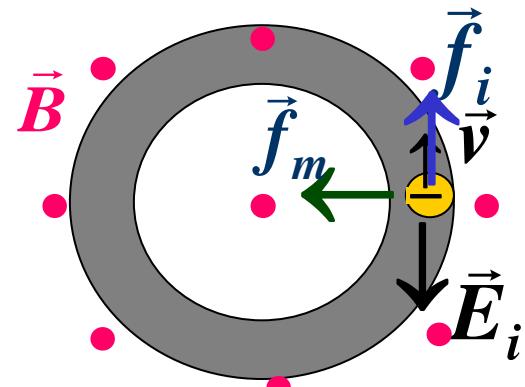
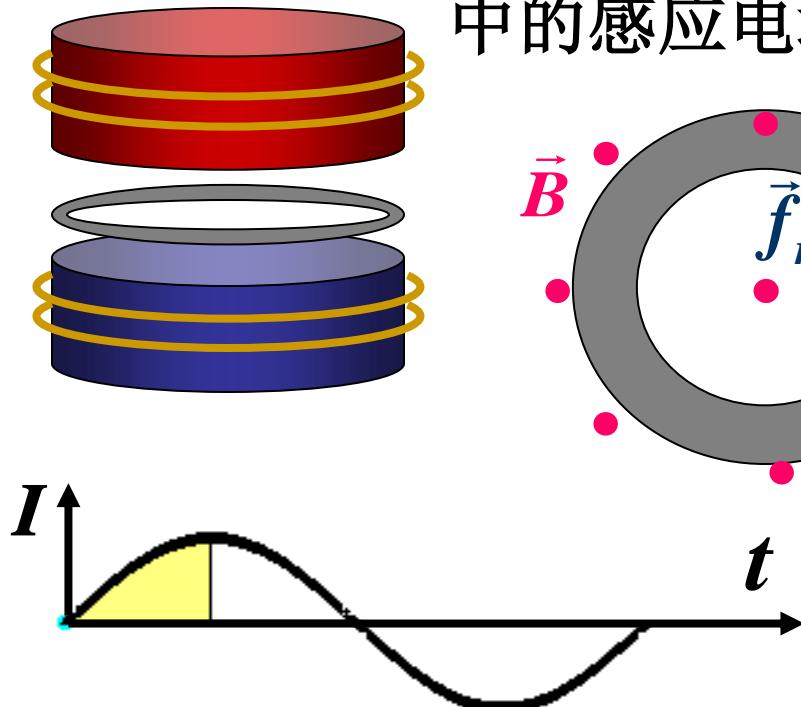
它是由于磁场随时间变化而产生的电场。

3. 感应电场的实验验证与应用

(1) 电子感应加速器

原理：用变化磁场所激发的感应电场来加速电子

交流电在前 $1/4$ 周期时，假定管中的感应电场是顺时针的(俯视图)



电子受力：

$$\vec{f}_i = -e\vec{E}_i \quad (\text{切向加速})$$

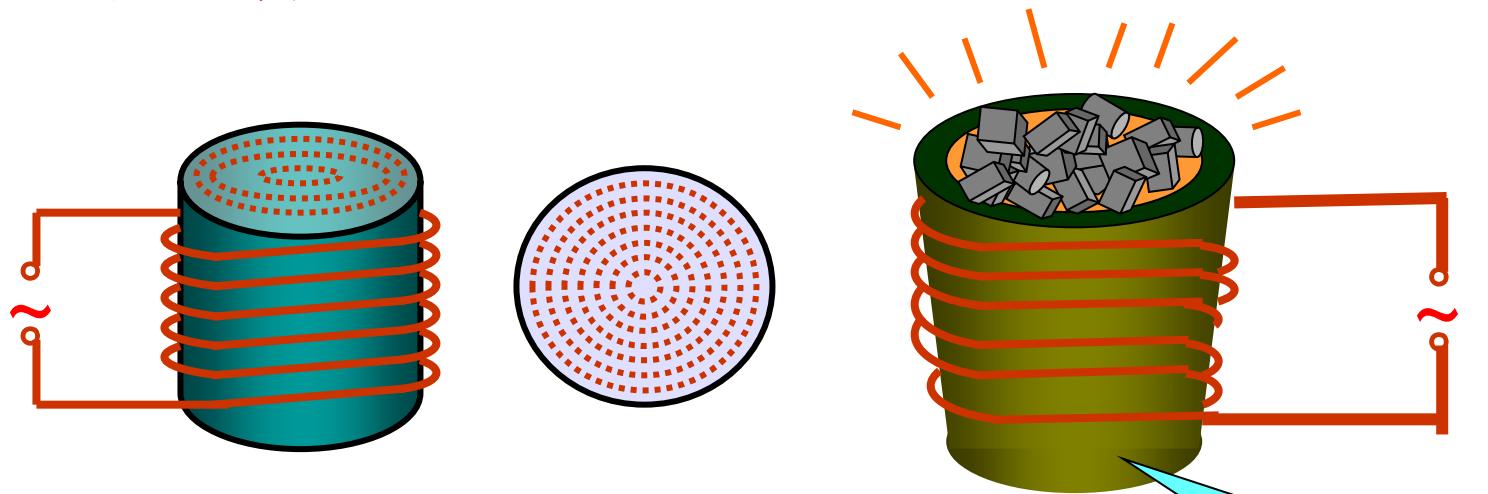
$$\vec{f}_m = -e\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{向心力})$$

**加速器的成功证实了
感应电场的客观存在.**

问题：为什么在电流 I 的每一个变化周期里，
只有前 $1/4$ 周期是在给电子加速？

(2) 涡流 —— 高频电磁感应炉

将导体块放置在 E_i 中，则在导体中将产生环形电流 → **涡流**。



另外，金属探测器；探雷器...

坩埚

注：

涡流还是有害的，它不仅消耗电功率，而且降低设备能量利用效率。

例：将半径为 a 、厚为 h 、电导率为 σ 的金属圆盘，同轴放置在轴对称匀强磁场 \vec{B} 中，且 $d\vec{B}/dt > 0$ 。求圆盘上的电流强度及产生的热功率。

解：取半径为 r ，厚度为 dr 的圆筒，其电动势

$$d\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot \pi r^2) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

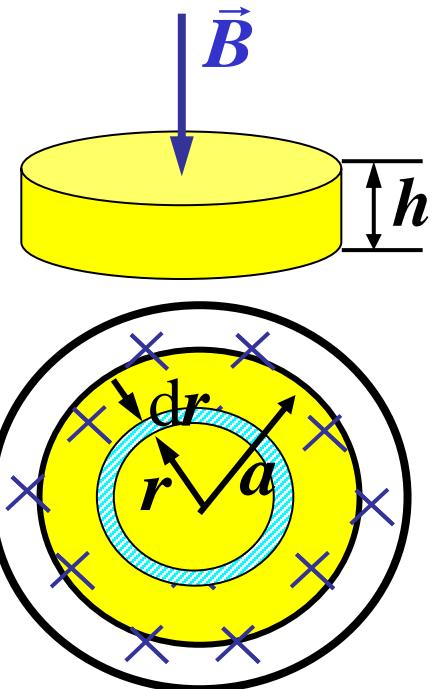
其上电阻为： $R = \frac{2\pi r}{\sigma \cdot h \cdot dr}$

电流为： $dI_i = \frac{d\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{r}{2} \sigma h \frac{dB}{dt} dr$

总电流： $I_i = \int dI_i = -\frac{1}{4} a^2 \sigma h \frac{dB}{dt}$

产生的热功率：

$$P = \int dP = \int R(dI_i)^2 = \frac{1}{8} \pi \sigma h a^4 \left(\frac{dB}{dt} \right)^2$$



4. 感应电场的特点、性质

感应电场 \vec{E}_i 的特点：

- 1) \vec{E}_i 与 \vec{E}_e 一样，对场中的电荷有电场力的作用。

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} \quad \vec{F} = q\vec{E}_i$$

- 2) \vec{E}_i 的产生不依赖空间是否有导体存在，只要 $dB/dt \neq 0$ 就行。

只要磁场变化，真空、介质中都可以激发感应电场。

- 3) 不仅在磁场分布范围内
有感应电场，之外也有。
 \vec{E}_i 的方向与 ε_i 基本一致，
可用楞次定律判断。

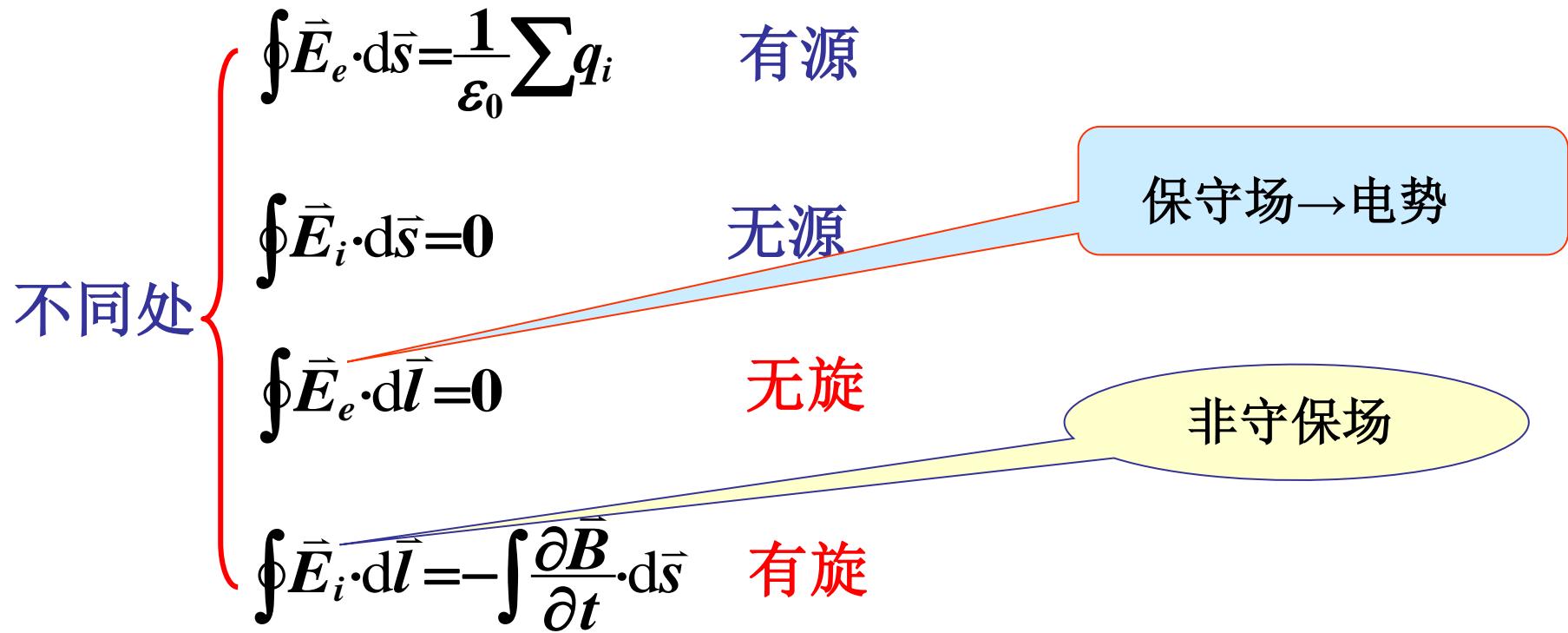
- 4) \vec{E}_i 是非保守力场，

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \neq 0 \quad \vec{E}_i \text{ 场中不能引入电势概念}$$

其电场线是无头无尾的闭合曲线~故也称为 **涡旋电场**。⁸

感应电场 \vec{E}_i 与静电场 \vec{E}_e 的异同:

相同处：对电荷的作用相同。



5. \vec{E}_i 的计算 一般情况下的 \vec{E}_i 的计算

 $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$

例：求一个轴对称磁场变化时的涡旋电场。

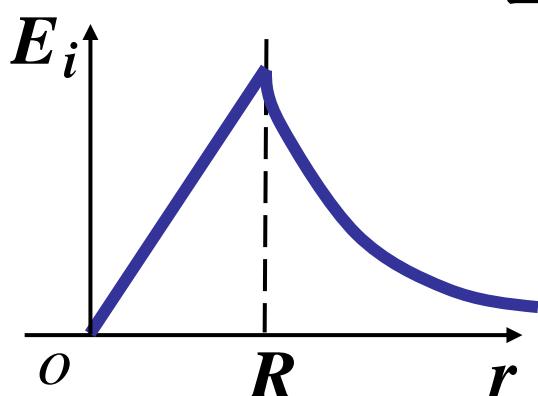
分布在半径为 R 的范围内， $dB/dt=$ 常量，而且大于零。

求：1) 任意距中心 o 为 r 处的 $\vec{E}_i = ?$

2) 计算将单位正电荷从 $a \rightarrow b$, \vec{E}_i 的功。

解：1) 由 \vec{B} 的均匀及柱对称性可知，在同一圆周上 \vec{E}_i 的大小相等，且沿切线方向，取半径为 r 的电力线为积分路径，方向为逆时针方向：

当 $r < R$ 时：
$$\begin{aligned} \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} &= E_i \cdot 2\pi r \\ - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} &= - \frac{dB}{dt} \cdot (-\pi r^2) \end{aligned} \quad \left. \right\} E_i = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

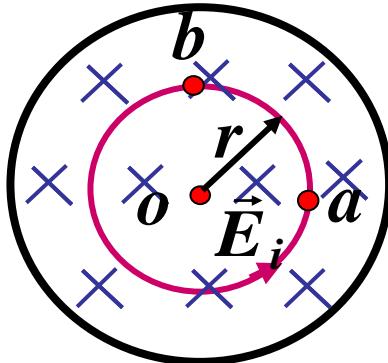


当 $r > R$ 时：
$$\begin{aligned} \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} &= E_i \cdot 2\pi r \\ - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} &= \frac{dB}{dt} \pi R^2 \end{aligned} \quad \left. \right\} E_i = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$



$$E_i = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

2) 沿1/4圆周将单位正电荷从 $a \rightarrow b$, \vec{E}_i 做功



$$A_{\frac{1}{4}ab} = \int \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_0^{\frac{\pi r}{2}} \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cdot dl = \frac{\pi}{4} r^2 \frac{dB}{dt}$$

沿3/4圆周 E_i 做功

$$A_{\frac{3}{4}ab} = \int \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_0^{\frac{3\pi r}{2}} \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cdot dl = - \frac{3\pi}{4} r^2 \frac{dB}{dt}$$

结论:

1) $E_i \propto dB/dt$, 与 B 大小无关

2) $r > R$, 磁场外 $E_i \neq 0$ 。

3) $A_{1/4ab} \neq A_{3/4ab}$

即: \vec{E}_i 做功与路径有关——非保守场

例：在上例的磁场中，放入一边长为 L 的正方形导体回路 $oabc$ 。

求：1) 回路各边的感应电动势； 2) ε_i 总；
3) 回路内有静电场吗？

若有， c 与 a 哪点电势高？

解：1) $\because oa \perp \vec{E}_i$ } $\therefore \varepsilon_{oa} = \varepsilon_{oc} = 0$

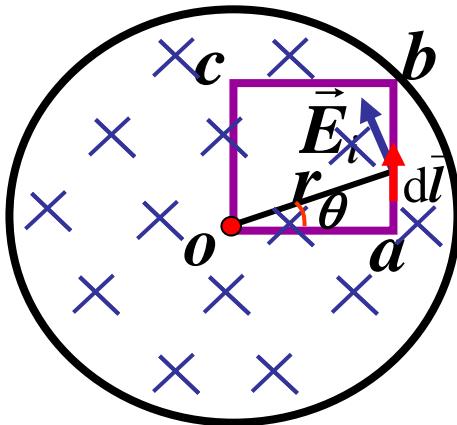
$$\begin{aligned}\varepsilon_{ab} &= \int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cos \theta dl = \int_a^b \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cos \theta dl \\ &= \int_a^b \frac{L}{2} \frac{dB}{dt} dl = \frac{1}{2} \frac{dB}{dt} L^2\end{aligned}$$

同理： $\varepsilon_{bc} = \frac{1}{2} \frac{dB}{dt} L^2$

2) ε_i 总 = $\varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} = L^2 dB/dt$,

或 ε_i 总 = $-d\phi/dt = -\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{s}) = s \frac{dB}{dt} = L^2 \frac{dB}{dt}$

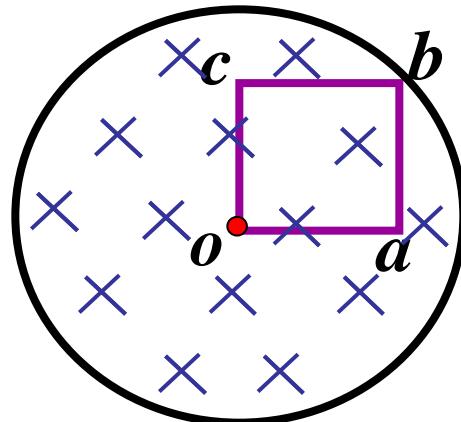
注：根据对称性：1)、2) 的计算可以倒过来进行。



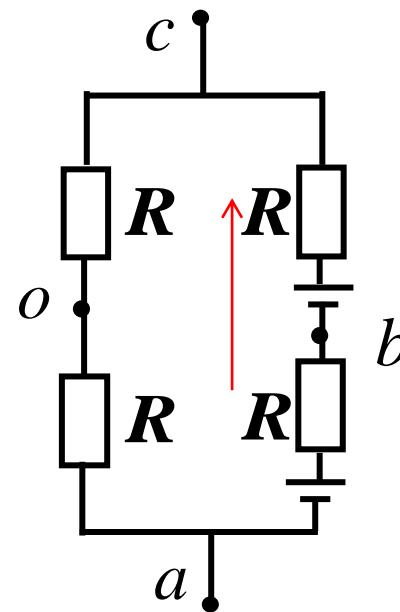
$\varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$

$E_i = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$

3) 有静电场。电荷积累在哪?



等效电路



$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{bc} = \frac{1}{2} \frac{dB}{dt} l^2$$

$\because \varepsilon_{oa} = \varepsilon_{oc} = 0$,
 $\varepsilon_{ab}, \varepsilon_{bc}$ 会使
 正电荷在 c 点
 聚集, 而 a 点有
 负电荷积累.

$$\therefore V_c > V_a$$

另, 可考虑从 a 到 c 的电势变化:

$$V_a + |\varepsilon_{ab}| - iR + |\varepsilon_{bc}| - iR = V_c$$

$$V_a - V_c = 2iR - 2|\varepsilon_{ab}|$$

$$i = \frac{2|\varepsilon_{ab}|}{4R}$$

$$V_a - V_c = |\varepsilon_{ab}| - 2|\varepsilon_{ab}| = -|\varepsilon_{ab}| < 0$$

$$\therefore V_c > V_a$$

例：在上例的磁场的磁场中，放有四根导体棒。

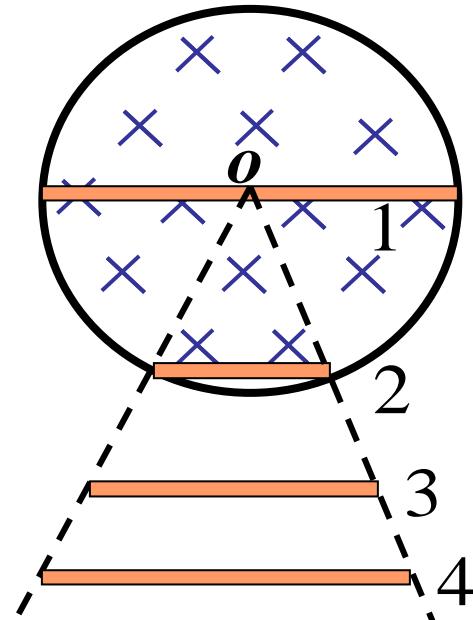
- 1) 比较各棒中的 ε_i 。
- 2) 3, 4连成通路 $I_i=?$
- 3) 棒中哪端电势高？

解：

1) $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 = 0$

2) $I_i=0$

3) $V_{右} > V_{左}$



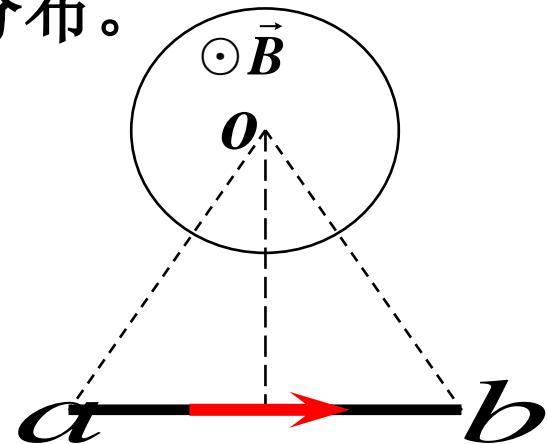
问题：

还有什么样的情况可以得到感应电场的解析表达式？

例：磁力线限制在圆柱体内，沿轴向均匀分布。

$$\frac{dB}{dt} = c, \text{ 求: } \mathcal{E}_{ab}$$

解：补上半径 oa, ob ,
设回路方向如图.



$$\mathcal{E}_{oabo} = \mathcal{E}_{oa} + \mathcal{E}_{ab} + \mathcal{E}_{bo} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{oa} = 0, \mathcal{E}_{bo} = 0$$

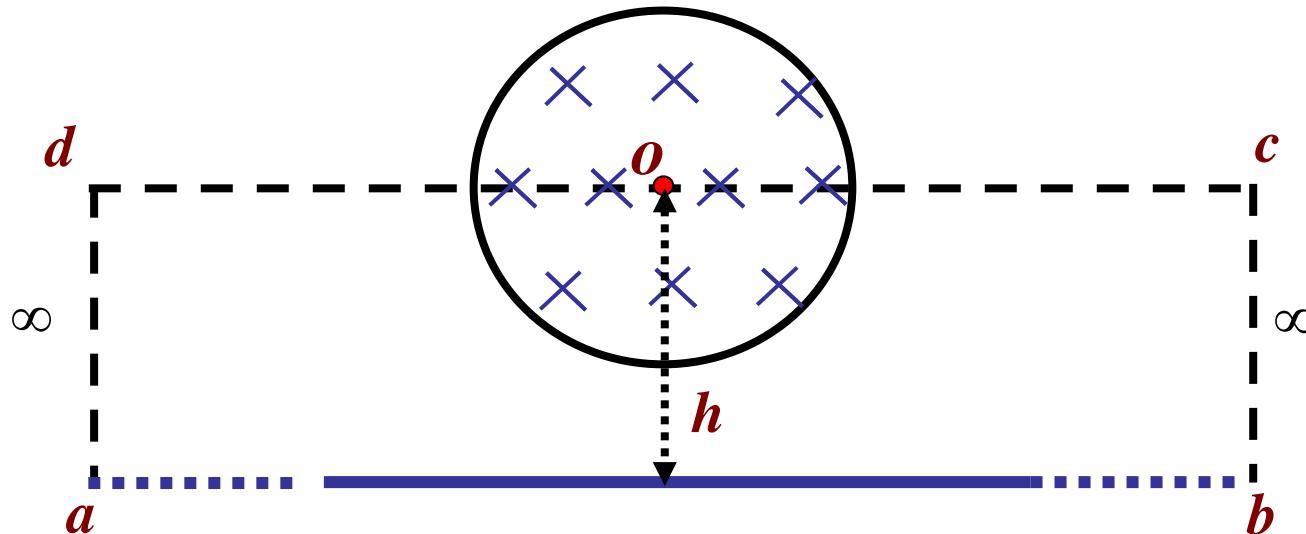
$$\mathcal{E}_{ab} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\phi = BS_{\text{扇形}}$$

$$\mathcal{E}_{ab} = -S_{\text{扇形}} \frac{dB}{dt}$$

若 ab 无限长呢？

例：磁场均匀分布在半径为 R 的范围， $\frac{dB}{dt}$ =常量，且大于零。求无限长直导线 ab 上的电动势。



解：由 \vec{B} 的均匀及柱对称性可知，在同一圆周上 \vec{E}_i 的大小相等，方向沿切线方向。

$$\text{当 } r > R \text{ 时, } E_i = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

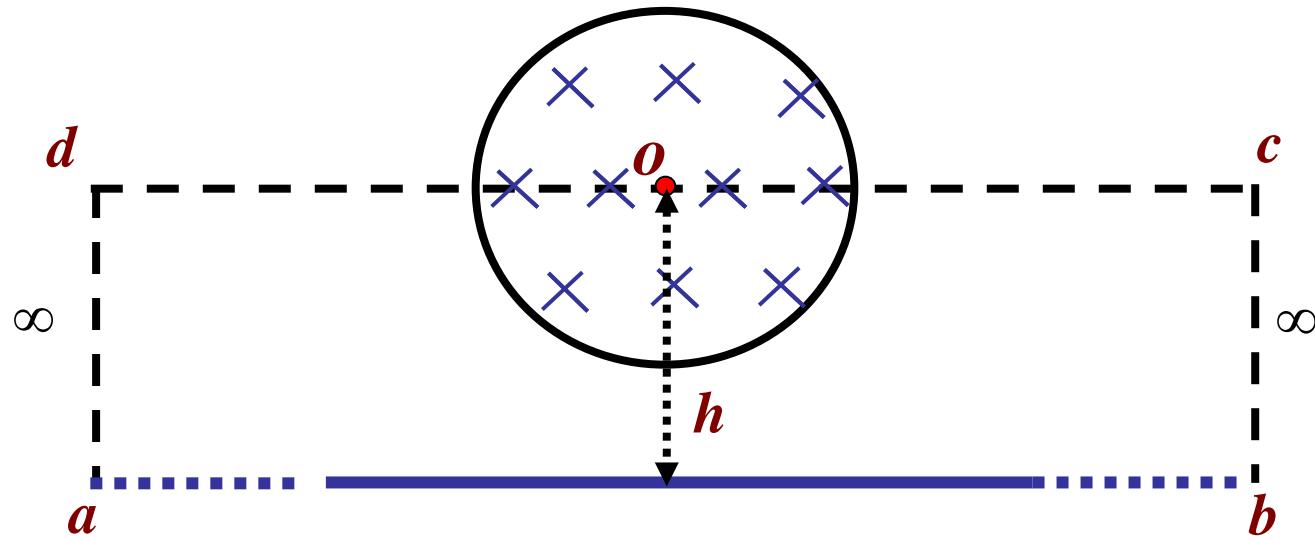


$$\boxed{\mathcal{E}_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}}$$

另解：

取如图所示的矩形回路。

$$\mathcal{E}_{ab} = \mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$



解：考慮回路 $abcd$ ， $\varepsilon_{abcd} = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} + \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{da}$ ，
 而 $\varepsilon_{bc} = \varepsilon_{cd} = \varepsilon_{da} = 0$ ，
 故 $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{abcd} = - d\phi/dt = - (\pi R^2/2) dB/dt$
 方向：由楞次定律知 $a \rightarrow b$

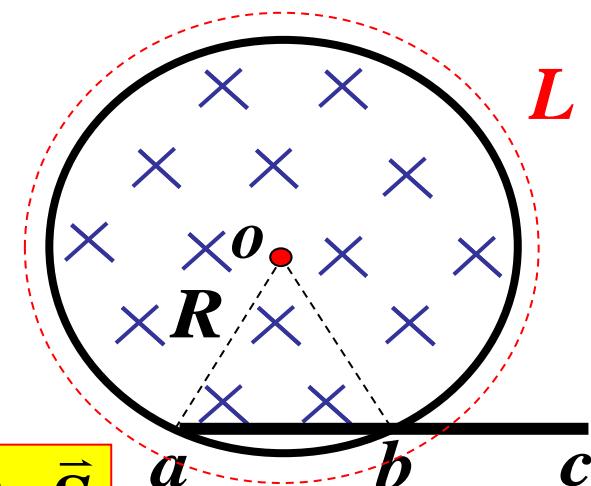
例: 在半径为 R 的圆形区域内，有垂直向里的均匀磁场正在减小。有一金属棒 abc 放在图示位置，已知 $ab=bc=R$ ，求
 (1) a 、 b 、 c 三点感应电场的大小和方向（在图上标出）；
 (2) 棒上感应电动势 \mathcal{E}_{abc} 为多大； (3) a 、 c 哪点电势高。

解: (1) $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} (= - \frac{d\phi}{dt})$

取回路 L ，且绕行方向为顺时针。

由楞次规律知，感应电场的方向是顺时针沿 L 回路。

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$



由对称性知， $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = E_i \cdot 2\pi r$

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = -\frac{dB}{dt} \cdot \pi R^2 \quad \left. \right\} \rightarrow E_i = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

例: 在半径为 R 的圆形区域内，有垂直向里的均匀磁场正在减小。有一金属棒 abc 放在图示位置，已知 $ab=bc=R$ ，求
 (1) a 、 b 、 c 三点感应电场的大小和方向（在图上标出）；
 (2) 棒上感应电动势 \mathcal{E}_{abc} 为多大； (3) a 、 c 哪点电势高。

(3) a 点电势高。(正极高)

解: $E_a = E_b = -\frac{R}{2} \frac{dB}{dt}$

$$E_c = -\frac{R^2}{2oc} \frac{dB}{dt} = -\frac{R}{2\sqrt{3}} \frac{dB}{dt}$$

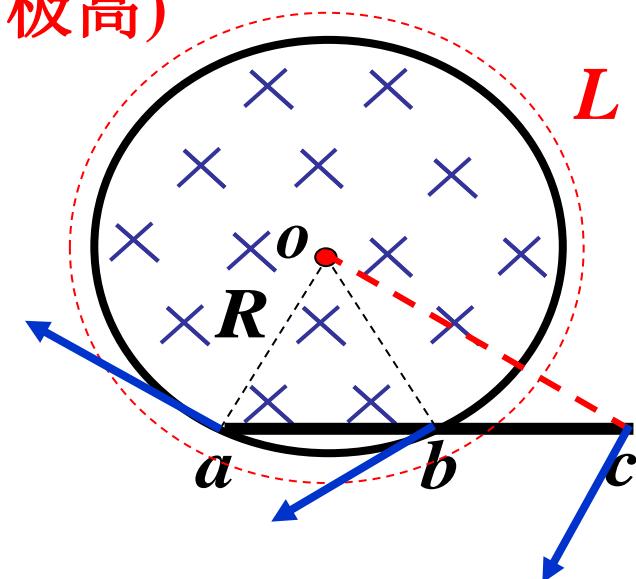
感应电场的方向如图所示。

(2) $\mathcal{E}_{abc} = \mathcal{E}_{ab} + \mathcal{E}_{bc}$

分别对 oab 、 obc 回路应用

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt} \text{ 即可。}$$

或直接考虑 oac 回路。



$$E_i = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

例: 在对称发散的磁场中, 放有一个 $R=4\text{cm}$ 的电流环,
 $I=15.8\text{A}$, 其所在处 $B=0.1\text{T}$, 求受合力。

解: 建立如图所示的坐标系,

由对称可知, $\int dF_x = 0$

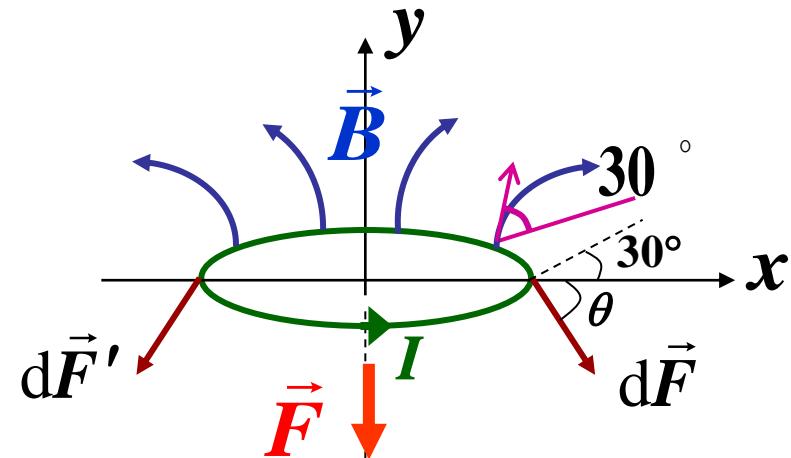
$$F = \int dF_y = \int dF \cdot \sin \theta$$

$$= \left| \int I d\vec{l} \times \vec{B} \right| \sin \theta \quad (\because I d\vec{l} \perp \vec{B})$$

$$= I \cdot 2\pi R B \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 15.8 \times 0.1 \times 2\pi \times 0.04 \times \sqrt{3} / 2$$

$$= 0.34\text{N}$$



指向y负向



$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$