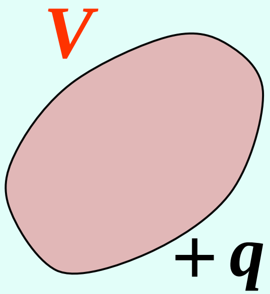
四、电容和电容器

1. 孤立导体的电容



若一孤立导体带电q，

则该导体具有一定的电势V， 且$V \propto q$

定义孤立导体的**电容**：$\boxed{C = \dfrac{q}{V}}$

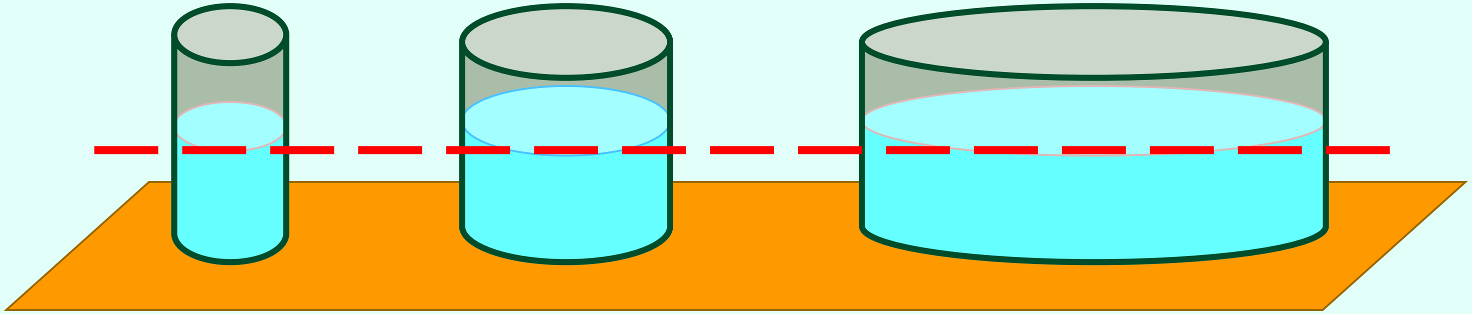
单位：法拉（F）

$$1\ \mathrm{F} = 10^{6}\ \mu\mathrm{F} = 10^{12}\ \mathrm{pF}$$

电容C $\begin{cases} \text{与}q\text{、}V\text{无关;} \\ \text{与导体的尺寸形状有关。} \end{cases}$

电容C反映孤立导体容纳电荷的能力。

如同容器装水：



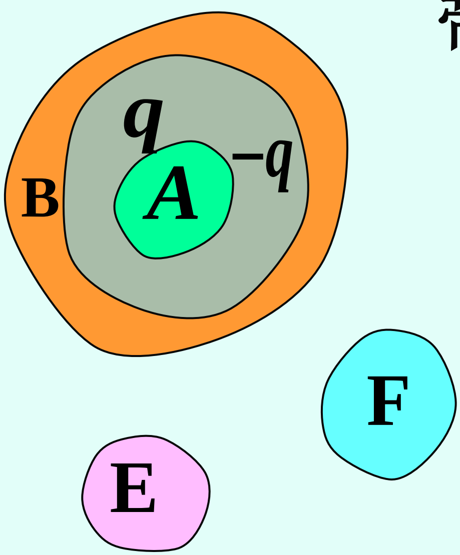
$$S = \frac{V}{h}$$

例：一个带电导体球的电容

设球带电q，$\because V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ $\therefore C=\dfrac{q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R$

地球半径 $R=6.4\times10^6$ m，$C=700\times10^{-6}\,\mathrm{F}=700\ \mu\mathrm{F}$

2. 电容器的电容



带电q的A导体旁若有其它导体E、F

则：$\dfrac{q}{V_A}\neq C$ E、F上的感应电荷影响V_A

如何消除其它导体的影响？

静电屏蔽

$V_A-V_B\propto q$ ⟶ 不受E、F 的影响

这种由A、B组成的导体系统 ⟶ 电容器

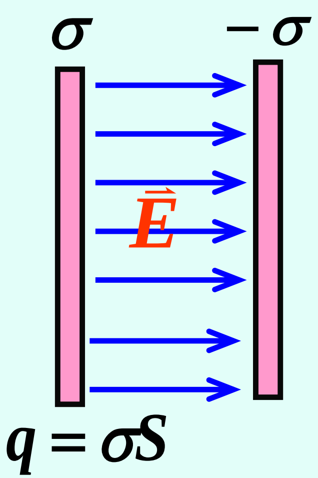
电容器的电容： $C=\dfrac{q}{V_A-V_B}$ 或 $C=\dfrac{q}{\Delta V}=\dfrac{q}{U}$

A、*B*为电容器的两极板，*U*为电容器的电压。

注： 组成电容器的两极导体，并不要求严格的屏蔽，只要两极导体的电势差，不受或可忽略外界的影响即可。

电容*C*是表征电容器容纳电荷的能力的物理量。

电容器的形状、大小、结构多种多样，下面计算几种常用电容器的电容。

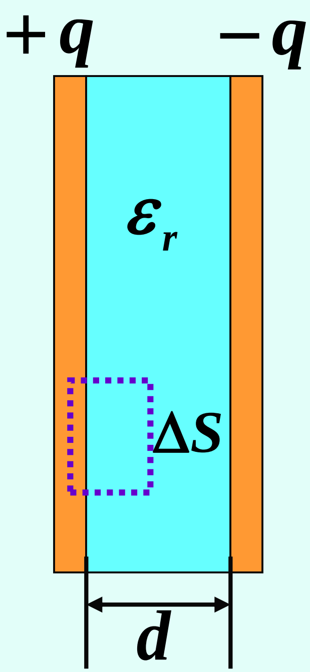


1) 平行板电容器： $S>>d^2$

电容器内无电介质时： $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$

$$\Delta V=\int_{+}^{-}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=Ed=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}\qquad \therefore C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

电容器内充满电介质时：



取底面积为ΔS的高斯柱面，由高斯定理：

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{右}} \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot\Delta S$$

$$\sum q_{i\text{自}} = \sigma\cdot\Delta S \longrightarrow D=\sigma \longrightarrow E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

两极间的电势差：$\Delta V = Ed = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon} = \dfrac{qd}{\varepsilon S}$

$$\therefore C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d} \qquad C \propto \varepsilon、S、\frac{1}{d}$$

若要增大C： 增大S、 减小d、 或选用ε_r大的电介质

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad \therefore C = \varepsilon_r C_0$$

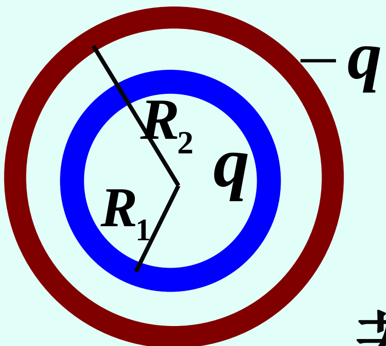
结论：

①电容C只与电容器的结构及板间电介质有关；

②板间充满电介质时，电容将增大到真空时的ε_r倍。

2) 球形电容器：

两个同心的金属球壳带有等量异号电荷

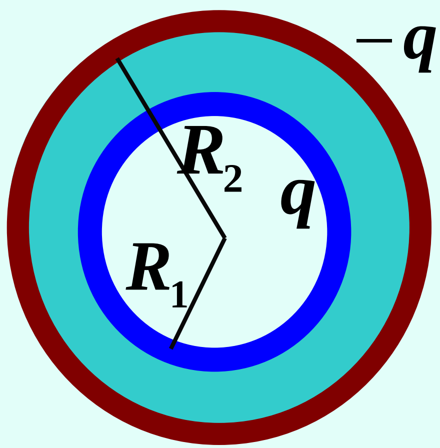


$$\vec{E}=0,\quad r<R_1 \qquad \vec{E}=0,\quad r>R_2$$

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r,\quad R_1<r<R_2$$

若两球壳间有电介质则： $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

$$V_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$



$$C=\frac{q}{V_{12}}=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2}{R_2-R_1}$$

当 $R_2\to\infty$， $C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1$

3) 圆柱形电容器

两同轴金属圆柱面，其间充有介电常量为ε 的介质。

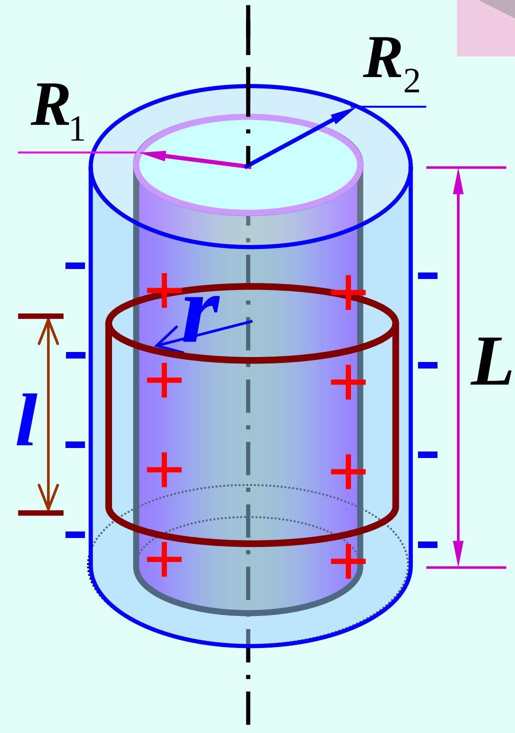
设两圆柱面单位长度上分别带电$\pm\lambda$

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot 2\pi r l = \lambda l$$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{\lambda L}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \qquad C\Big|_{L=1} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$



$R_2 - R_1 << L$

3. 电容器电容的计算

$$C=\frac{q}{\Delta V}$$

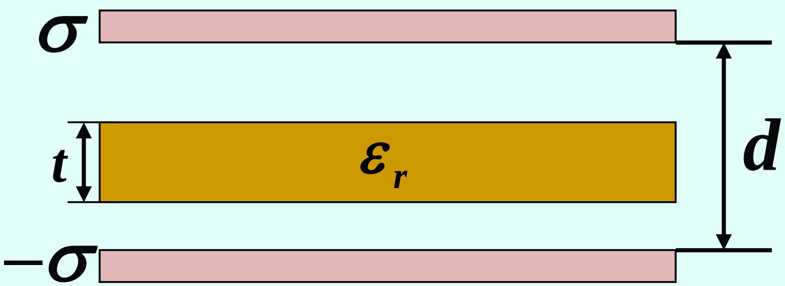
求解电容器电容的一般步骤：

①设两极板带等量异号电荷$\pm q$；

②计算板间场强（用高斯定理先求D，再求E），求极板间的电势差；

③由电容器电容的定义 $C=\dfrac{q}{\Delta V}$ 求电容。

例1.一平行板电容器，两极板间距为d、面积为S，其中放置一厚度为t 的平板均匀电介质，其相对介电常数为ε_r，求该电容器的电容C。



解：设极板面密度为σ、$-\sigma$

由高斯定理可得：

空气隙中 $D=\sigma$，$E_1=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$　　介质中 $D=\sigma$，$E_2=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$

$$\Delta V=E_1(d-t)+E_2t=\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\left[\varepsilon_r d-(\varepsilon_r-1)t\right]$$

$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r d-(\varepsilon_r-1)t}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}t}>\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

与t的位置无关

$t\uparrow$、$C\uparrow$

$t=d$　$C=\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}$

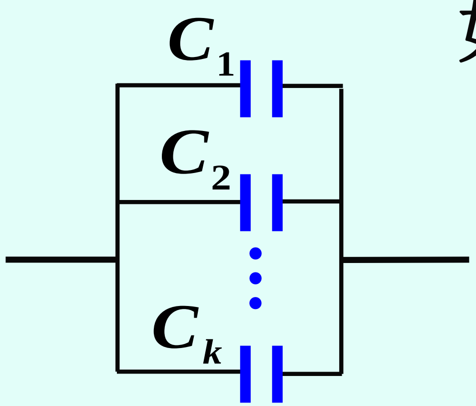
4. 电容器的串联和并联

衡量一个电容器性能的主要指标
- C的大小
- 耐压能力

电容器标识： 100μF25V、470pF60V

电介质在电容器中的作用
- 增大电容
- 提高电容器的耐压能力

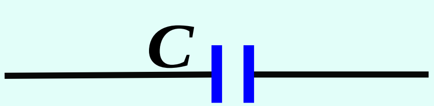
在电路中，一个电容器的电容量或耐压能力不够时，可采用多个电容连接：



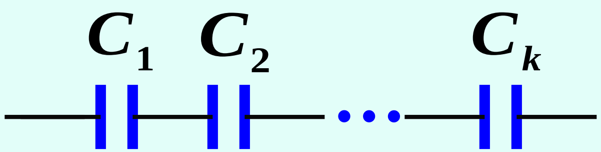
如增大电容，可将多个电容并联：

$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{q_1+q_2+\cdots}{\Delta V}=C_1+C_2+\cdots=\sum_i C_i$$

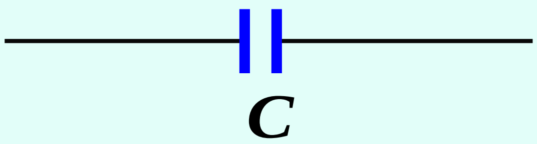
- 电容增大；
- 电容器组的耐压能力受到耐压最低的电容的限制。



若增强耐压，可将多个电容串联：



$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{q}{V_1+V_2+\cdots}$$



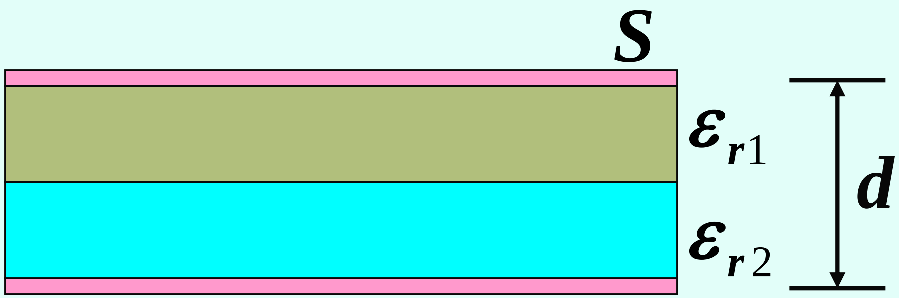
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_k}$$

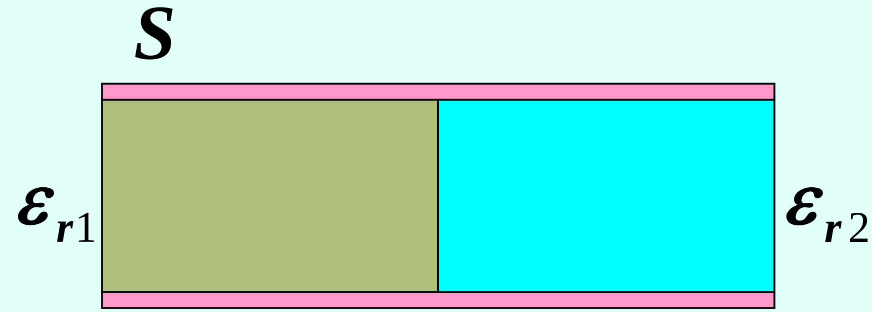
耐压强度：$V=V_1+V_2+\cdots+V_k$ 增强；

电容减小。

串联使用可提高耐压能力，并联使用可以提高容量。

物理应用： 利用串、并联等效电容公式可简便计算复杂电容器的电容。





电量相等，为串联。

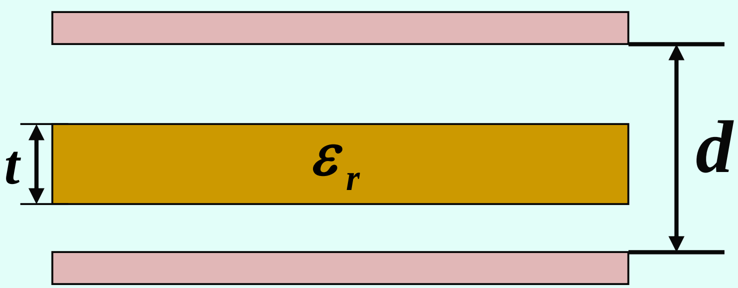
电压相等，为并联。

$$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{d/2}\qquad C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{d/2}$$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

$$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S/2}{d}\qquad C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S/2}{d}$$

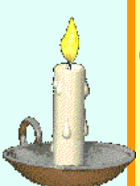
$$C=C_1+C_2$$



重解例1：

为两电容器串联：

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}\qquad C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{t}$$

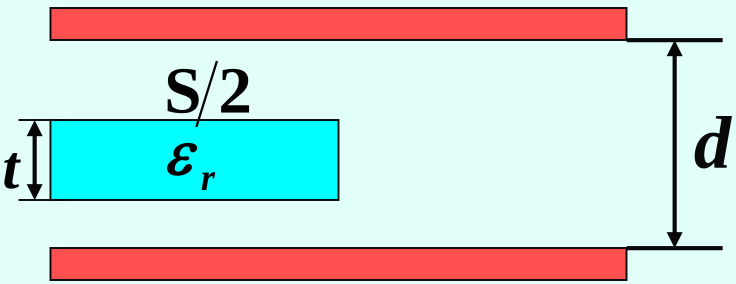


$$\boxed{C=\frac{\varepsilon_0 S}{d-\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}t}}$$

$$\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{\varepsilon_0 S}\left(d-t+\frac{t}{\varepsilon_r}\right)=\frac{d-t\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}}{\varepsilon_0 S}$$

例3. 一平行板电容器，两极板间距为d、面积为S，在其间平行地插入一厚度为t，相对介电常数为ε_r，面积为$S/2$的均匀介质板。设极板带电Q，忽略边缘效应。

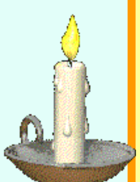
求(1)该电容器的电容C，(2)两极板间的电势差ΔU。



解：（1）等效两电容的并联

左半部：$$C_{左}=\frac{\varepsilon_0 S/2}{d-\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}t}$$

右半部：$$C_{右}=\frac{\varepsilon_0 S/2}{d}$$



$$\boxed{C=\frac{\varepsilon_0 S}{d-\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}t}}$$

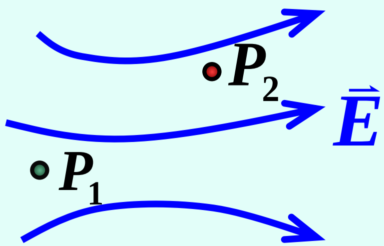
电容并联相加：$$C=C_{左}+C_{右}=\frac{\varepsilon_0 S[2\varepsilon_r d-(\varepsilon_r-1)t]}{2d[\varepsilon_r d-(\varepsilon_r-1)t]}$$

（2）$$\Delta U=\frac{Q}{C}=\frac{2d[\varepsilon_r d-(\varepsilon_r-1)t]Q}{\varepsilon_0 S[2\varepsilon_r d-(\varepsilon_r-1)t]}$$

第8节　静电场的能量

一、电荷在外电场中的静电势能

设电荷q在电场E中，由P_1运动到P_2：



$$A_{12} = W_1 - W_2 = q(V_1 - V_2)$$

得：$W_1 = qV_1$，　$W_2 = qV_2$

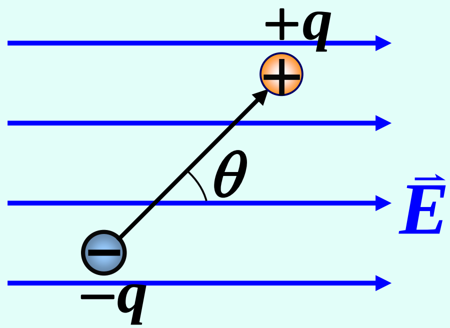
即：点电荷q在电场中具有静电势能：$\boxed{W = qV}$

为点电荷与产生电场的场源电荷间静电相互作用能。

——静电互能

电势能属于该电荷与产生电场的场源电荷所共有。

例1. 求一电偶极子 $\vec{p}=q\vec{l}$ 在均匀电场$\vec{E}$中的电势能。



解： 两电荷的电势能分别是：

$$W_+ = qV_+ , \qquad W_- = -qV_-$$

$$W = W_+ + W_- = q(V_+ - V_-) = q\int_+^- \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -q\int_-^+ E\cos\theta \mathrm{d}l = -qlE\cos\theta$$

$$\boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}}$$

讨论：

(1) $\theta = 0, \quad W = -pE$ 　能量最低→ 稳定平衡态

(2) $\theta = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases}, W = 0$ 　$\vec{F} = 0$, $\vec{M} \neq 0$ 非平衡态

(3) $\theta = \pi, \quad W = pE$ 　能量最高→ 非稳定平衡态

当电偶极子从 $\theta = \pi$，转动到$\theta = 0$方位时

$$A = -\Delta W = W_{初} - W_{末} = pE + pE = 2pE$$

二、带电体系的静电能

电荷系统（由多个带电体构成）的静电能：

系统中所有电荷之间的相互作用能的总和。

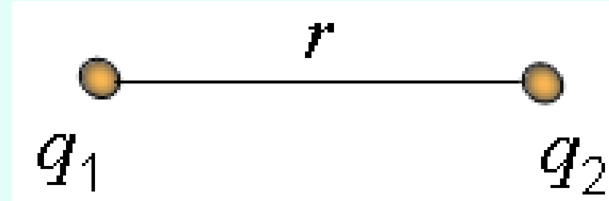
$$W_{总} = W_{互} + W_{自}$$

定义电荷系统的静电能：

将系统中各电荷从现有的位置到彼此分散到无限远的过程中，它们之间的静电力所作的功。

或等于将各电荷从彼此分散在无限远处移动到现有位置过程中，外力作的功。

1. 点电荷系的互能



以两个点电荷组成的系统为例

令q_1静止，将q_2从它现现在的位置移到无限远，

q_1的电场力对q_2作功为：

q_1 在q_2所在点的电势

$$A_{12} = q_2(V_2 - V_\infty) = q_2 \boxed{V_2} = \boxed{\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = W_{12}}$$

令q_2静止，将q_1移到无限远， $W_{21} = q_1 V_1 = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

说明电荷系的静电能与其形成过程无关。

写成对称形式： $W = \dfrac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2)$

推广： $\boxed{W = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i}$

2. 电荷连续分布的带电体的静电能

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iV_i$$

将每个带电体分割成许多电荷元，

所有电荷元之间的相互作用能为：

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int_q V\mathrm{d}q}$$

注：

1)式中的V可近似认为所有电荷在dq处电势的总和；

2)式是带电系统的总静电能，既包含了各带电体之间的互能，也包含了各带电体本身的自能；

3)带电系统的总静电能总大于零。

二、带电体系的静电能

定义电荷系统的静电能：

将系统中各电荷从现有的位置到彼此分散到无限远的过程中，它们之间的静电力所作的功。

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iV_i}$$

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int_q V\mathrm{d}q}$$

如：真空中均匀带电球面R、Q

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

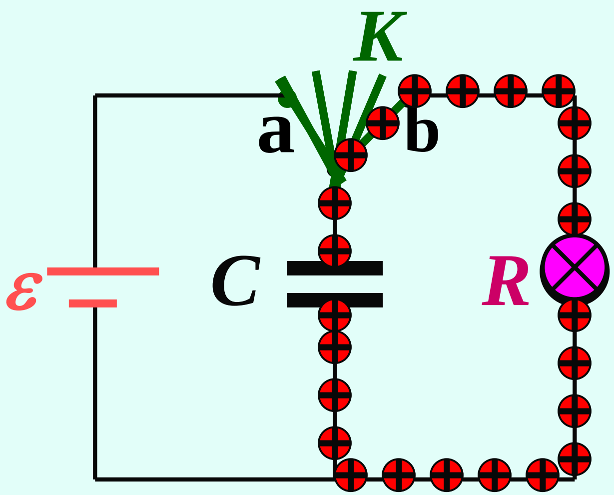
$$W=\frac{1}{2}\int_q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}q=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

电场的能量为：

$$W_e=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\mathrm{d}V=\int_R^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

三、电容器的静电能

电容器带电时具有能量，实验如下：



将K倒向a端→电容充电

再将K到向b端→ 灯泡发出一次强的闪光

能量从哪里来？→ 电容器释放

计算当电容器带有电量Q、相应的电压为U时，所具有的能量W=？

利用放电时电场力作功来计算：

$C=\dfrac{q}{U}$

电容器带有电量Q时具有的能量：

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\begin{cases}=\dfrac{1}{2}CU^2\\[2ex]=\dfrac{1}{2}QU\end{cases}$$

C也标志电容器储能的本领。

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$ → 这些能量存在何处?

四、电场的能量

以平行板电容器为例：$C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{\varepsilon S}{d}$ 并且 $U=Ed$

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}E^2d^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2Sd=\frac{1}{2}\varepsilon E^2V$$

记为：$W_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2V$ → 能量储存在电场中

①电场能量密度

单位体积内所储存电场能量：$w_e=\dfrac{W_e}{V}=\boxed{\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2}$

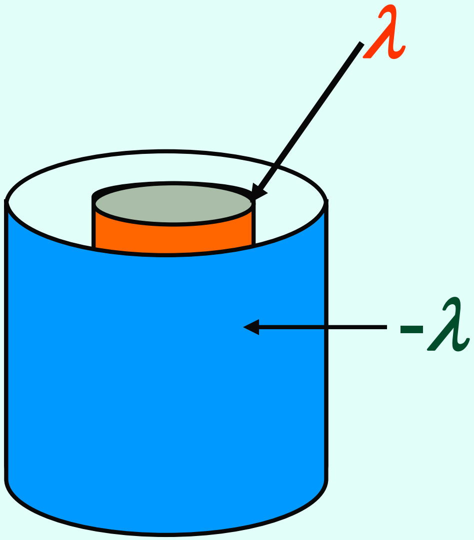
$\because \vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ $\quad\therefore w_e=\dfrac{1}{2}DE=\dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ 对任意电场成立

②电场能量

任何带电系统的电场中所储存的总能量为：$W=\displaystyle\int_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V$

V → 电场占据的整个空间体积

$$W=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V$$



例2. 求一圆柱形电容器的储能W=?

解： 设电容器极板半径分别为R_1、R_2

带电线密度分别为λ、$-\lambda$,

则两极板间的电场为： $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

$$\therefore W_e=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \mathrm{d}V=\frac{\lambda^2 h}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

其中： $\mathrm{d}V=2\pi r h \mathrm{d}r$

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}{\ln R_2/R_1}$$

$$Q=\lambda h$$

按静电能的观点： $W=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}=\dfrac{\lambda^2 h}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

结论： **电场能 = 静电能**

求C的另一方法： $E\rightarrow W=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V \rightarrow C=\dfrac{Q^2}{2W}$

例3.平行板电容器，极板面积为S，间距为d，用电源充电后，两极板分别带电为$+Q$和$-Q$。**断开电源**，将极板的距离拉开一倍，计算：(1) 静电能的改变ΔW=？(2) 外力克服电力所做的功$A_{外}$=？

解：(1) 拉开前：$C_1=\dfrac{\varepsilon S}{d}$, $W_1=\dfrac{Q^2}{2C_1}=\dfrac{dQ^2}{2\varepsilon S}$

拉开后：$C_2=\dfrac{\varepsilon S}{2d}$, $W_2=\dfrac{Q^2}{2C_2}=\dfrac{dQ^2}{\varepsilon S}$

$$\Delta W=W_2-W_1=\frac{dQ^2}{2\varepsilon S}>0$$ 静电能增加了。

(2) 根据功能原理可知，外力的功等于系统能量的增量： $A_{外}=\Delta W$

讨论：

试就下述两种情况，说明**插入介质**对电容器的电容、电量、电压、电场和静电能的影响:

1. 保持与电源连接（充电）；

U不变、

$\vec{E}$不变、

$$C' = \varepsilon_r C > C \uparrow$$

$$Q' = C'U \uparrow$$

$$W = \frac{1}{2}C'U^2 \uparrow$$

2. 充电后与电源断开。

Q不变、

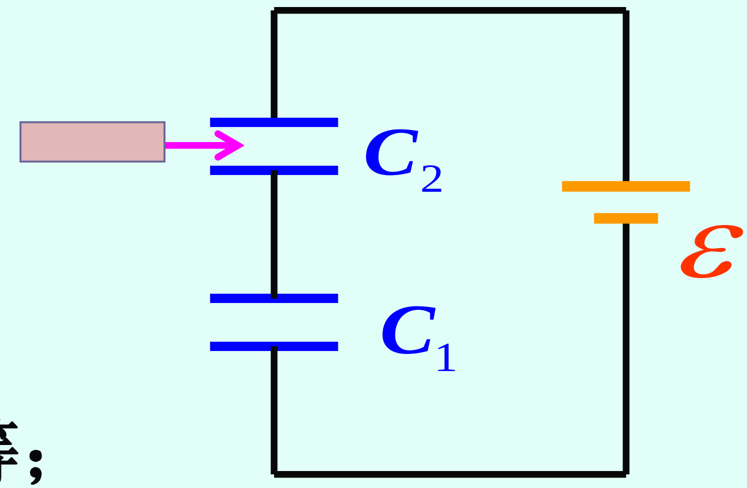
$$E' = \frac{E}{\varepsilon_r} \downarrow$$

$$C' = \varepsilon_r C > C \uparrow$$

$$U' = \frac{Q}{C'} \downarrow$$

$$W = \frac{Q^2}{2C'} \downarrow$$

例4. 如图，两相同电容器串联后与电源连接，讨论介质板插入一个电容器前后，两者的电量、电容、电势差及场强的变化。



解： 两电容器串联，电量始终相等；保持与电源连接，总电压不变。

介质插入前：$$\varepsilon = \frac{Q}{C} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$\because C_2' > C_2$

$\therefore C' > C$

介质插入后：$$\varepsilon = \frac{Q'}{C'} = Q'\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2'}\right)$$

总电容增大

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{C'}{C} \qquad Q' > Q$$

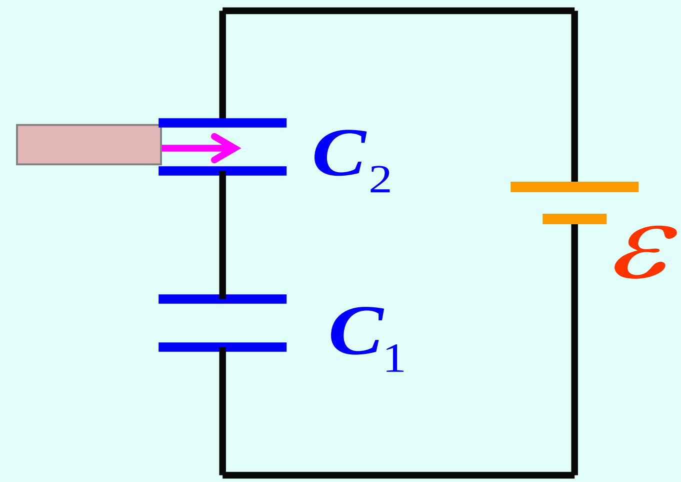
两者的电量均增大

电容组的总能量：$W = \dfrac{1}{2}QU$ 增大

C_1：C不变、$Q\uparrow$、$U_1=Q/C_1\uparrow$、 $E_1\uparrow$、 $W_1=\dfrac{Q^2}{2C_1}\uparrow$

C_2：$C\uparrow$、 $Q\uparrow$、 $U_2=U-U_1\downarrow$、 $E_2\downarrow$、 $W_2=\dfrac{Q^2}{2C_2}\downarrow$

例如：两相同电容器串联后与电源连接，将介质板插入C_2 ，则：



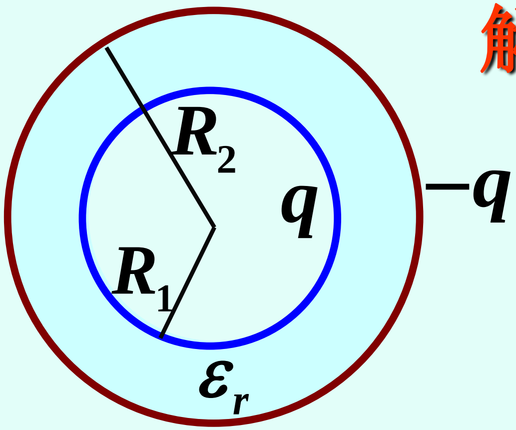
（A）电容器组总电容减少

（B）C_1上的电量大于C_2上的电量

（C）C_1上的电压小于C_2上的电压

（D）电容器组贮存的总能量增大

例5. 试用电场能量的观点计算球形电容器的电容。



解： 设内、外球面分别带电$+q$、$-q$；

电场分布为：

$$\vec{E}=0 \qquad r<R_1; \qquad \vec{E}=0 \qquad r>R_2;$$

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\vec{e}_r \qquad R_1<r<R_2$$

电场的能量为：

$$W_e=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$ 又：$W=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ $\therefore C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2-R_1}$