ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

4η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης πολλών μεταβλητών
Μέθοδος μέγιστης καθόδου με προβολή

ΑΝΤΡΕΑΣ ΧΑΤΖΗΘΩΜΑΣ

ΑΕΜ: 8026

Εισαγωγή:

Στην $4^{η}$ εργαστηριακή άσκηση ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας δοσμένης συνάρτησης πολλών μεταβλητών $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ χωρίς περιορισμούς αλλά και με περιορισμούς, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μέγιστης καθόδου και τη μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή αντίστοιχα.

Η συνάρτηση που ελαχιστοποιούμε είναι:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

Οι περιορισμοί που θα εφαρμόσουμε αργότερα είναι:

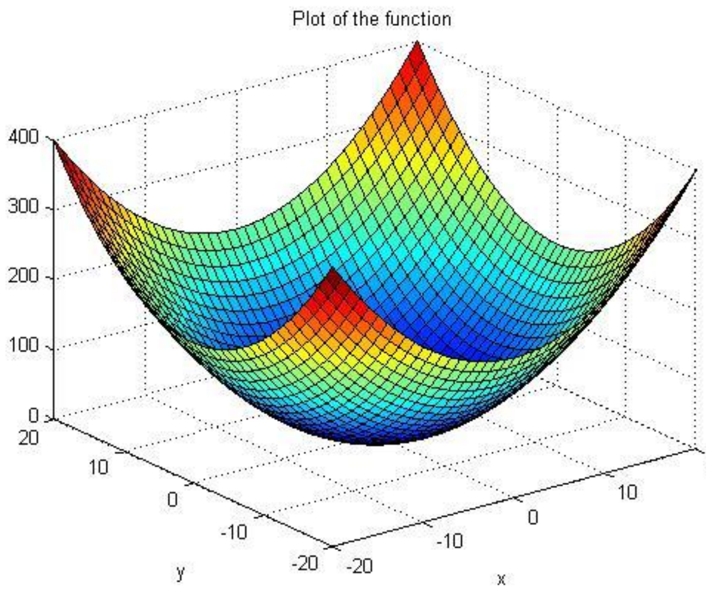
$-20 \leq \chi_1 \leq 10$ και $-12 \leq \chi_2 \leq 15$

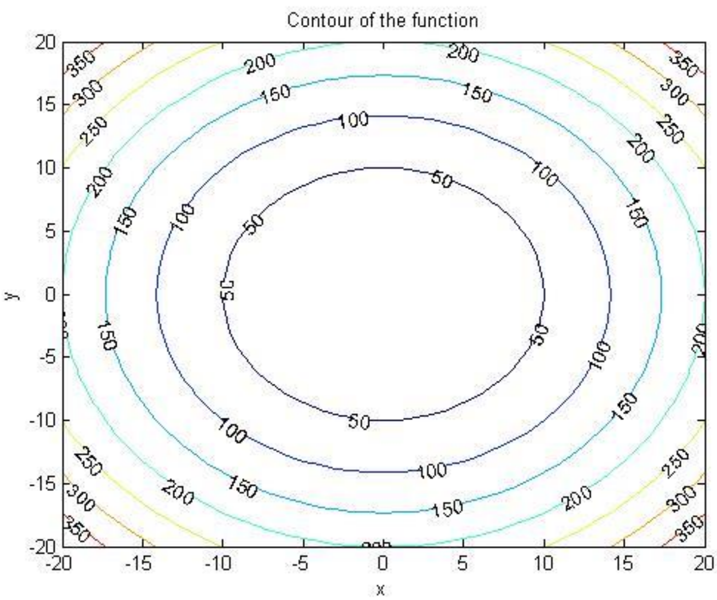
Για δική μας ευκολία δημιουργήσαμε 2 συναρτήσεις, την $\boldsymbol{fun(x_1, x_2)}$ η οποία μας επιστρέφει την τιμή της συνάρτησης f για συγκεκριμένο σημείο και την $\boldsymbol{grad(x_1, x_2)}$ η οποία επιστρέφει το $grad$ της συνάρτησης.

Τρέχοντας το αρχείο **plot_f.m** και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση fun.p η οποία μας επιστρέφει τη τιμή της f για δοθέντα x_1, x_2 δημιουργούμε τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις για την απόκτηση μιας γενικής εικόνας της μορφής της συνάρτησης f.

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι άθροισμα κυρτών συναρτήσεων → άρα κυρτή.

Όπως διαπιστώνουμε και από τα διαγράμματα, η συνάρτηση f είναι κυρτή με ελάχιστο στο σημείο (0,0).





Θέμα (α) (Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου)

Λίγα λόγια για τον κώδικα

Για το 1ο θέμα της εργαστηριακής άσκησης 4, χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο μέγιστης καθόδου την οποία υλοποιήσαμε στο Matlab για την επίλυση της προηγούμενης εργαστηριακής άσκησης. Το αρχείο του κώδικα έχει το όνομα **steepest_descent.m**.

Η μόνη διαφορά με την προηγούμενη υλοποίηση της μεθόδου είναι ότι στα ορίσματα της συνάρτησης προσθέσαμε το g (όπου g = γ_κ) για καλύτερη ευκολία στη χρήση της συνάρτησης για τα διάφορα ερωτήματα.

Εφαρμογή του αλγόριθμου – Παρατηρήσεις & Συμπεράσματα

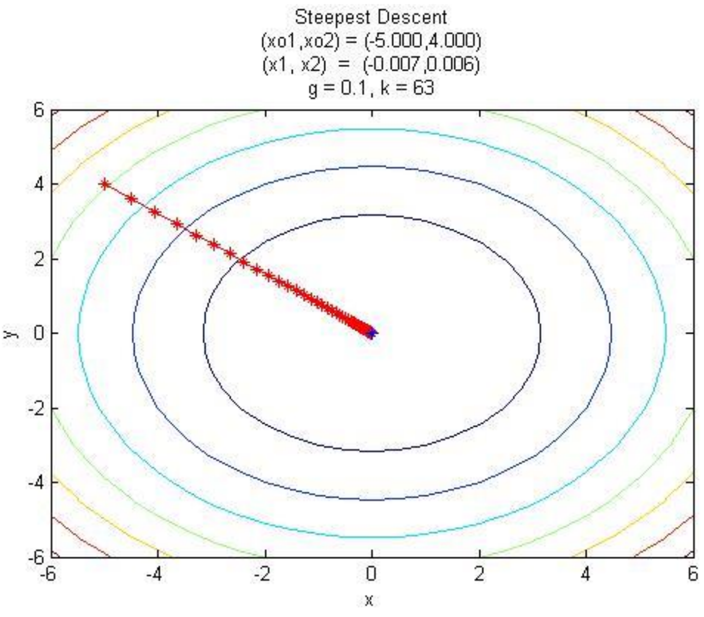
Τρέχουμε τον αλγόριθμο μας για οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης διάφορο του (0,0) με ακρίβεια ε=0.01 και βήμα:

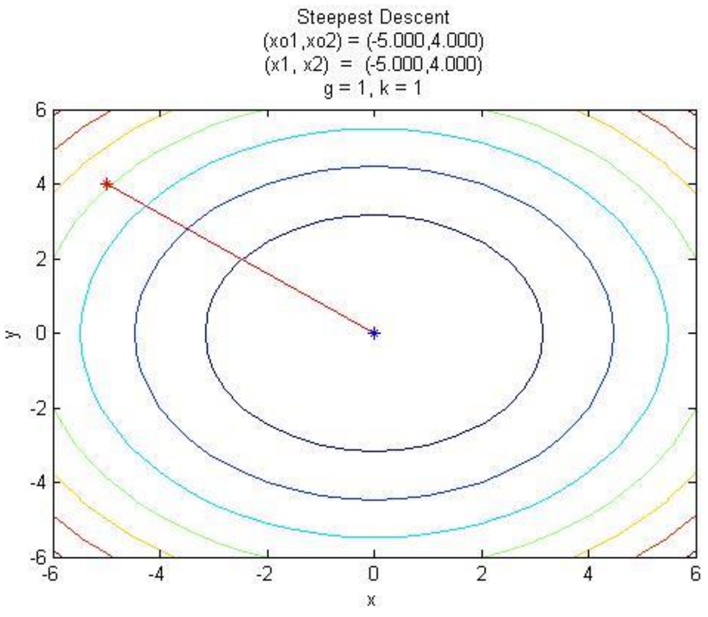
i. $\gamma_\kappa = 0.1$
ii. $\gamma_\kappa = 1$
iii. $\gamma_\kappa = 2$
iv. $\gamma_\kappa = 10$

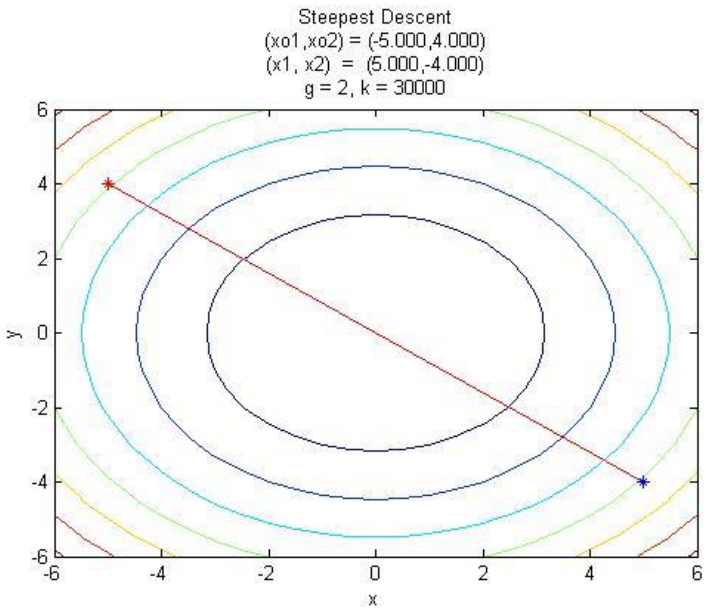
Επιλέγουμε τυχαία το σημείο (-5,4).

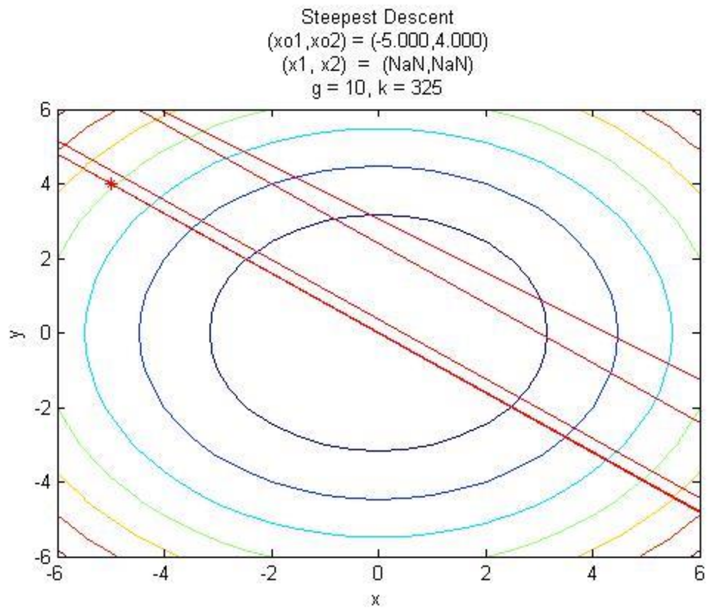
Στα διαγράμματα που δημιουργήσαμε αναγράφεται στο πάνω μέρος το όνομα της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε, το αρχικό σημείο (x_{01}, x_{02}), το τελικό σημείο (x_1, x_2), το βήμα γ_κ και τέλος ο αριθμός επαναλήψεων k.

Τα διαγράμματα που προκύπτουν είναι τα ακόλουθα:









i. Για γ_κ = 0.1 παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο (-0,007, 0.006) μετά από συγκεκριμένο αριθμό βημάτων.

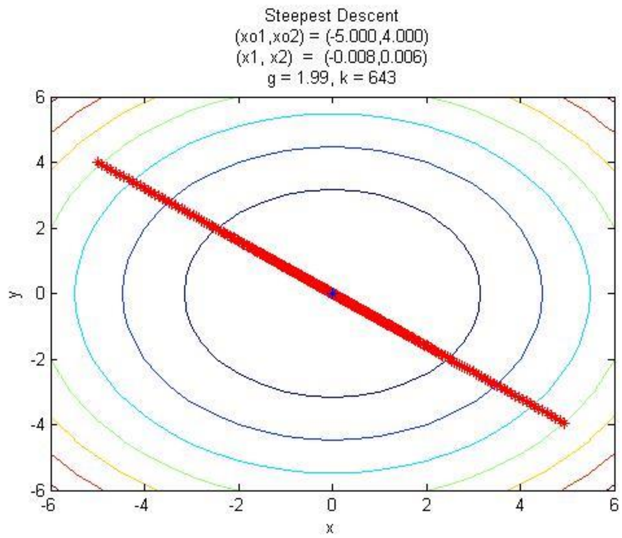
ii. Για γ_κ = 1 παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο (0,0) μετά από 1 μόνο άλμα.

iii. Για γ_κ = 2 βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος κινείται από το (-5,4) μέχρι το (5,-4) και αντίστροφα σαν μια ταλάντωση μεταξύ των 2 αυτών σημείων, μέχρι να διακοπεί η λειτουργία του αλγόριθμου χρησιμοποιώντας την εντολή break όταν το k ξεπεράσει κάποιο μέγιστο αριθμό επαναλήψεων. Εδώ ορίσαμε μέγιστο αριθμό επαναλήψεων το 30000 οπότε ο αλγόριθμος τερματίζει για κ=30000 χωρίς να συγκλίνει.

iv. Αντίστοιχα για γ_κ = 10 παρατηρούμε ότι δεν συγκλίνει ο αλγόριθμος και ότι κινείται ανομοιόμορφα στο χώρο. Μετά από αρκετές επαναλήψεις ο αλγόριθμος τερματίζει στο άπειρο.

Επομένως βλέπουμε ότι για τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 2 ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει διότι το $x_{\kappa+1}$ θα είναι πάντα μεγαλύτερο το x_κ.

Τρέχοντας τον αλγόριθμο για γ_κ = 1.99 βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει, κάτι που επιβεβαιώνει ακόμη πιο πολύ το παραπάνω συμπέρασμα.



<u>Απόδειξη με μαθηματική αυστηρότητα</u>

Από το βιβλίο βλέπουμε ότι η εξίσωση για το επόμενο σημείο είναι:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla f(x_k)$$

όπου το grad τη συνάρτησης ισούται με:

$$\nabla f(x_k) = [x_1\ x_2] = x_\kappa$$

Χρησιμοποιώντας τις 2 προηγούμενες εξισώσεις το επόμενο σημείο υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$x_{\kappa+1} = x_\kappa(1 - \gamma_\kappa)$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι για:

1. **γ_κ < 1** το επόμενο σημείο θα είναι μικρότερο από το προηγούμενο με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να συγκλίνει στο ελάχιστο της συνάρτησης.

2. **γ_κ = 1** το επόμενο σημείο θα είναι το (0,0) διότι $x_{k+x} = {}_\kappa(1 - \gamma_\kappa) = x_\kappa(1-1) = 0$ με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να συγκλίνει χωρίς να χρειάζεται περισσότερα βήματα από 1.

3. **1 < γ_κ < 2** το επόμενο σημείο θα είναι μία αρνητικό και μία θετικό αλλά αν το δούμε κατά απόλυτη τιμή το επόμενο σημείο θα είναι μικρότερο από το προηγούμενο λόγω των δεκαδικών που υπάρχουν για γ_κ μεταξύ 1.01 και 1.99. Εφόσον $x_{k+x} = x_\kappa(1 - \gamma_\kappa)$ και 1 < γ_κ < 2 το x_κ θα πολλαπλασιάζεται κάθε φορά με ένα αρνητικό αριθμό ο οποίο θα έχει τιμή από -0.01 μέχρι -0,99 αναλόγως του γ_κ. Αυτό, έχει ως αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να ταλαντώνεται με κέντρο το (0,0) μέχρι να φτάσει σε αυτό. (όπως το παράδειγμα που κάναμε πιο πάνω για γ_κ = 1.99)

4. **γ_κ = 2** το επόμενο σημείο θα είναι μία αρνητικό και μία θετικό όπως και προηγουμένως. Αν το δούμε όμως κατά απόλυτη τιμή το προηγούμενο σημείο με το επόμενο θα είναι πάντα το ίδιο διότι $x_\kappa(1-\gamma_\kappa) = x_\kappa(1-2) = -x_k$ οπότε το σημείο αναζήτησης ταλαντώνεται ανάμεσα στο αρχικό x_κ και το αντίθετο του.

5. **γ_κ > 2** το επόμενο σημείο θα είναι πάντα αρνητικό και κατά απόλυτη τιμή πάντα μεγαλύτερο από το προηγούμενο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να αποκλίνει προς το άπειρο.

Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται και από τα παραπάνω διαγράμματα για τα διάφορα γ_κ.

Οπότε η περίπτωση για γ_κ = 0.1 αποδεικνύεται βάσει του 1^{ου} συμπεράσματος, για γ_κ = 1 αποδεικνύεται βάσει το 2^{ο}, για γ_κ = 2 βάσει το 4^{ο} και τέλος η περίπτωση για γ_κ = 10 αποδεικνύεται βάσει το 5^{ο} συμπέρασμα.

<u>Θέματα (β), (γ), (δ)</u>

<u>Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή</u>

<u>Λίγα λόγια για τον κώδικα</u>

Για την υλοποίηση των επόμενων θεμάτων (β, γ και δ) θα πρέπει να δημιουργήσουμε κάποιες καινούριες συναρτήσεις.

Χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς που μας δόθηκαν υλοποιήσαμε μια συνάρτηση για τον υπολογισμό του τελεστή της προβολής στο X. Η συνάρτηση έχει ως όρισμα ένα σημείο x: (x_1, x_2) και βάσει τους περιορισμούς μας επιστρέφει την προβολή του σημείου στο X. Η υλοποίηση της συνάρτησης βρίσκεται στο αρχείο **Pr.m** .

Ακολούθως, αφού μελετήσαμε τον αλγόριθμο 6.1.1 του βιβλίου ο οποίος αναφέρεται γενικά στους αλγόριθμους με προβολή, αλλά και την θεωρία του βιβλίου για τη μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή υλοποιήσαμε τη συνάρτηση **steepest_descent_pr(x,y,e,g,s)**. Η συνάρτηση δέχεται ως ορίσματα το αρχικό σημείο αναζήτησης, την ακρίβεια ε, το βήμα $γ_κ$ και το βήμα s_k και επιστρέφει το τελικό σημείο στο οποίο κατέληξε ο αλγόριθμος. Η υλοποίηση της μεθόδου βρίσκεται στο αρχείο **steepest_descent_pr.m.**

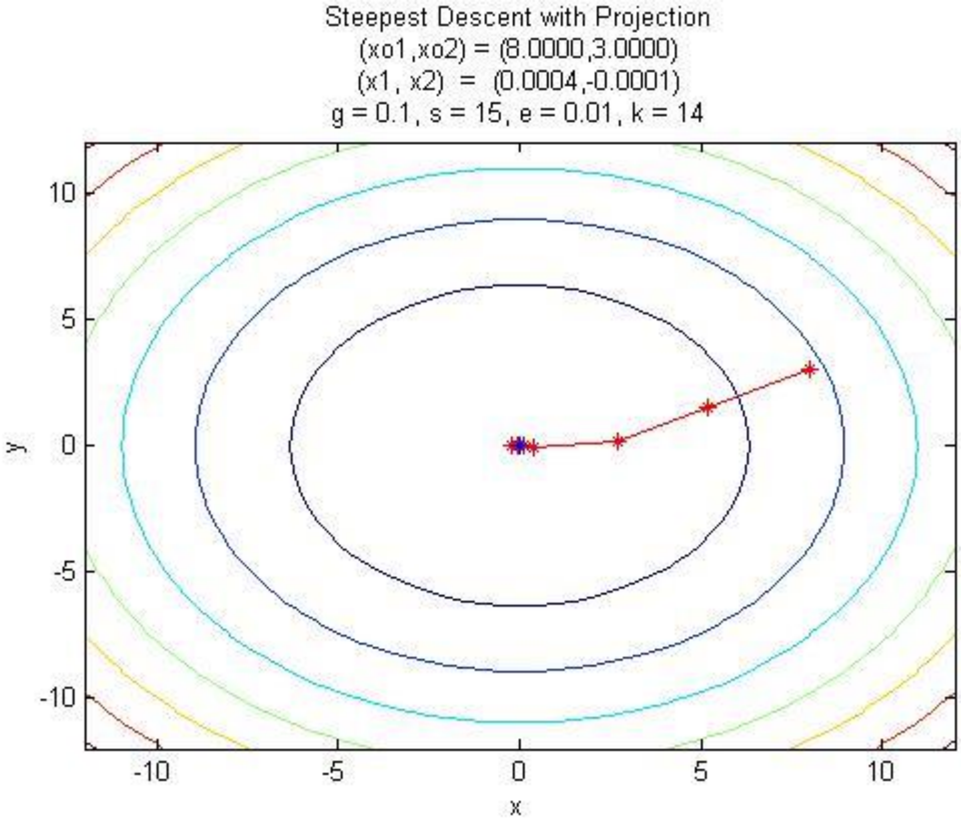
Εντός της συνάρτησης steepest_descent_pr καλούμε τη συνάρτηση **create_plot_pr** για να δημιουργήσουμε το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών της συνάρτησης για συγκεκριμένες τιμές ανάλογα με το κάθε ερώτημα.

Στα διαγράμματα που δημιουργήσαμε στο κάθε θέμα, αναγράφεται στο πάνω μέρος το όνομα της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε, το αρχικό σημείο (x_{01}, x_{02}), το τελικό σημείο (x_1, x_2), το βήμα $γ_κ$, το βήμα $s_κ$, η ακρίβεια ε και τέλος ο αριθμός επαναλήψεων k.

Θέμα (β)

Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα τρέχουμε τον αλγόριθμο με $s_k = 15, \gamma_\kappa = 0.1$, σημείο εκκίνησης $(8{,}3)$ και ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$.

Το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών που προκύπτει είναι το παρακάτω:



Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο της συνάρτησης μετά από μικρό αριθμό βημάτων, συγκεκριμένα 14 βήματα.

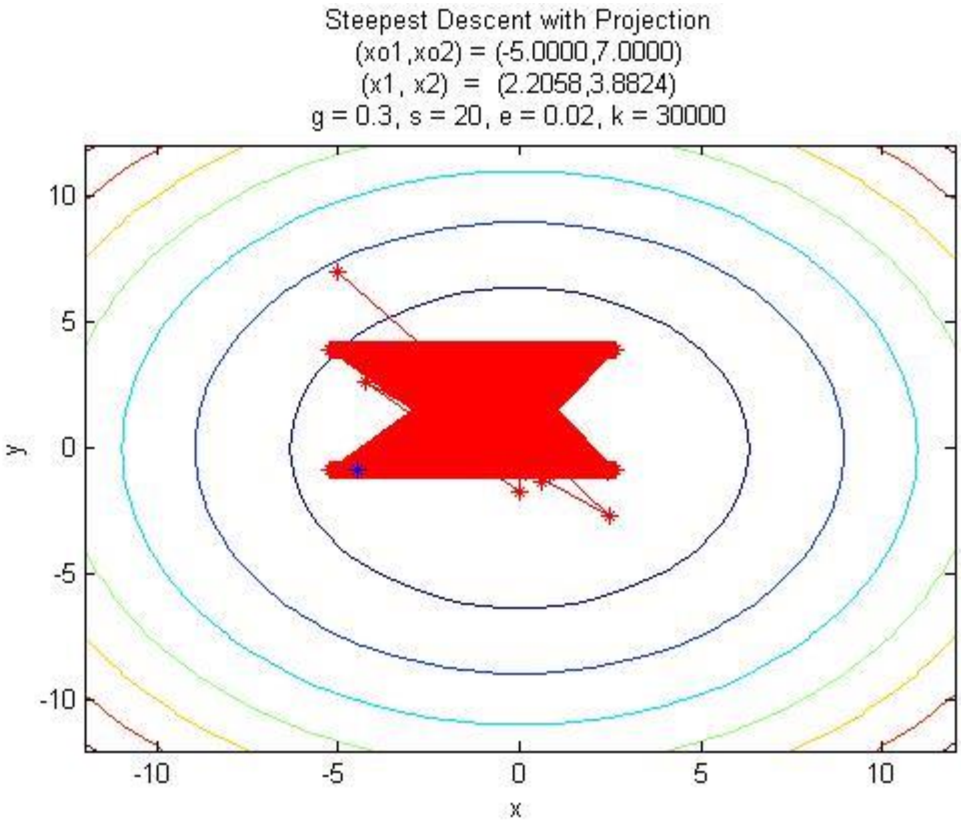
Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με το θέμα (α, i): Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος με προβολή συγκλίνει με καλύτερη ακρίβεια στο ελάχιστο αλλά και με αρκετά λιγότερα βήματα. Επίσης κάτι που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι τα σημεία του αλγόριθμου στο θέμα (α, i) ακολουθούν μια ευθεία πορεία σε αντίθεση με τα σημεία του αλγόριθμου του θέματος (β) τα οποία ακολουθούν μια πιο ακανόνιστη πορεία. Αυτό είναι το πλεονέκτημα των περιορισμών με τους οποίους ο αλγόριθμος με προβολή ελέγχει κάθε φορά αν ένα σημείο έχει ξεφύγει έτσι ώστε να το επαναφέρει κοντά στο ελάχιστο.

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με το θέμα (α, iv): Στο θέμα (α, iv) βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει για τους λόγους που αναφέραμε στο θέμα αυτό αλλά και για την έλλειψη περιορισμών με αποτέλεσμα ο αλγόριθμος να αποκλίνει στο άπειρο σε αντίθεση με τον αλγόριθμο του θέματος (β).

Θέμα (γ)

Τρέχουμε τον αλγόριθμο με $s_k = 20, \gamma_\kappa = 0.3$, σημείο εκκίνησης $(-5,7)$ και ακρίβεια $\varepsilon = 0.02$.

Το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών που προκύπτει είναι το παρακάτω:

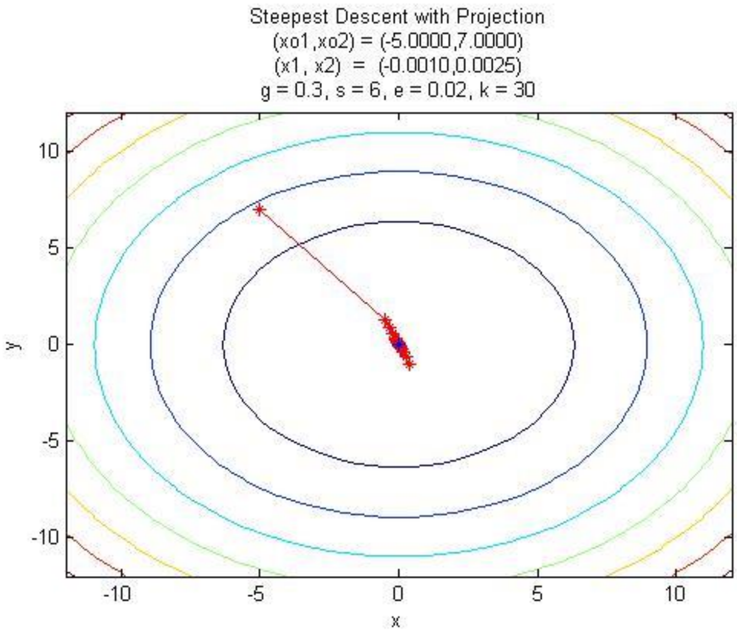


Όπως ήταν αναμενόμενο λόγω του μεγάλου σχετικά γ_κ και s_k παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος μετά από ένα μεγάλο αριθμό βημάτων δεν συγκλίνει στο ελάχιστο παρόλο που τα σημεία βρίσκονται πάντα εντός του διαστήματος που θέσαμε.

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με το θέμα (α, i): Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος με προβολή δεν συγκλίνει με αυτές τις τιμές, σε αντίθεση με τον αλγόριθμο του θέματος (α, i).

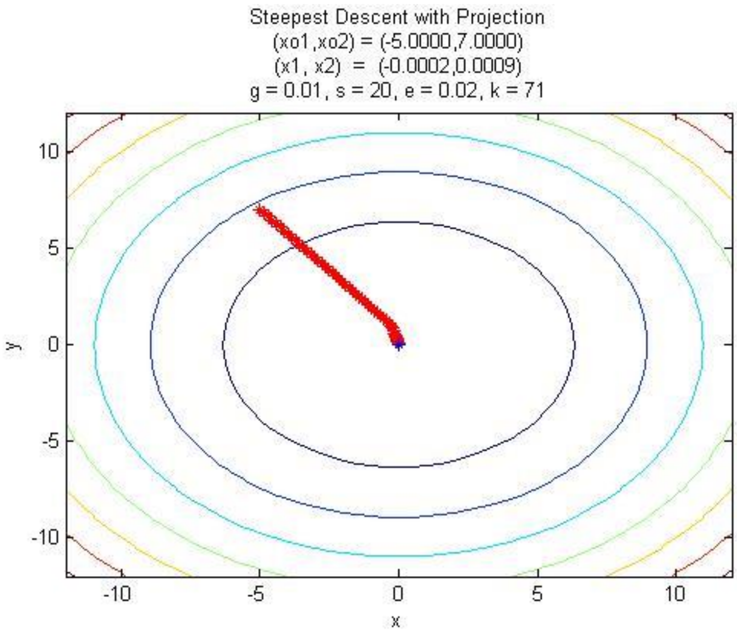
Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με το θέμα (α, iv): Στο θέμα (α, iv) βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει για τους λόγους που αναφέραμε στο θέμα αυτό όπως επίσης δεν συγκλίνει και ο αλγόριθμος του θέματος (β).

Για να συγκλίνει η μέθοδος στο ελάχιστο θα μπορούσαμε να μειώσουμε το βήμα s_k. Δοκιμάζοντας διάφορες τιμές παρατηρήσαμε ότι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το s_k έτσι ώστε να συγκλίνει η μέθοδος είναι το 6. Αυτό φαίνεται και από το παρακάτω διάγραμμα:



Κάτι άλλο που θα μπορούσαμε να αλλάξουμε έτσι ώστε να συγκλίνει η μέθοδος είναι να μειώσουμε το βήμα γ_κ χωρίς να αλλάξουμε το s_k π.χ. $\gamma_\kappa = 0.09$ (ή ακόμη πιο μικρό) και $s_k = 20$.

Τρέξαμε τον αλγόριθμο για αυτές τις τιμές και το αποτέλεσμα είναι:

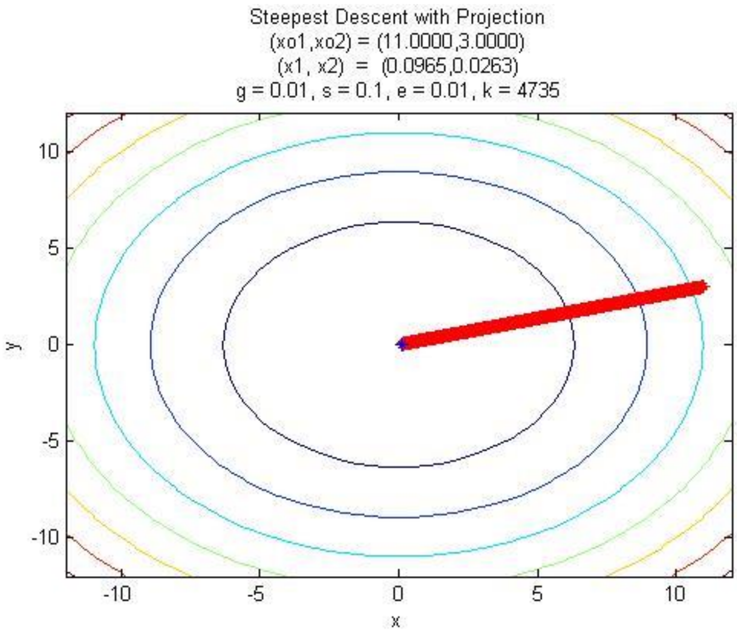


Επίσης θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση για δυναμική εύρεση του γ_κ ή του s_k σε κάθε επανάληψη όπως κάναμε και στις μεθόδους της προηγούμενης εργασίας για το βήμα γ_k.

Θέμα (δ)

Για το θέμα (δ) θα τρέξουμε τον αλγόριθμο με $s_k = 0.1, \gamma_k = 0.01$, σημείο εκκίνησης $(11{,}3)$ και ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$.

Βάσει της θεωρητικής ανάλυσης αυτής της μεθόδου που αναγράφεται στο βιβλίο, το αρχικό σημείο πρέπει να βρίσκεται εντός των επιτρεπτών ορίων πράγμα το οποίο δε συμβαίνει για το σημείο (11,3). Αυτό μας οδηγεί σε αβεβαιότητα σχετικά με την ευστάθεια και τη σύγκλιση του αλγορίθμου. Βλέποντας όμως τα s_k, γ_k και ε τα οποία είναι αρκετά μικρά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο αλγόριθμος ίσως και να συγκλίνει μετά από μεγάλο αριθμό βημάτων.
Όντως αφού τρέξουμε τον αλγόριθμο βλέπουμε ότι συγκλίνει μετά από 4735 βήματα. Το διάγραμμα που προκύπτει είναι το ακόλουθο:



Όπως βλέπουμε και από το διάγραμμα ο αλγόριθμος συγκλίνει μετά από μεγάλο αριθμό βημάτων. Αυτό οφείλεται στον συνδυασμό των s_k, γ_k και ε τα οποία όπως είπαμε και πριν είναι αρκετά μικρά.

Συμπέρασμα:

Η μέθοδος μέγιστης καθόδου με προβολή είναι μια καλή, ακριβείς και γρήγορη μέθοδος εύρεσης του ελάχιστου μιας συνάρτησης αρκεί να επιλέξουμε σωστά τα s_k, γ_k και ε όπως επίσης να έχουμε και τους απαραίτητους περιορισμούς. Η απόδοση της μεθόδου εξαρτάται αρκετά από την επιλογή αυτών των $3^{\omega\nu}$ μεταβλητών που αναφέραμε.