ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ψηφιακά Φίλτρα

Εργασία 1
Εξουδετέρωση Θορύβου

ΧΑΤΖΗΘΩΜΑ ΑΝΤΡΕΑΣ

ΑΕΜ: 8026

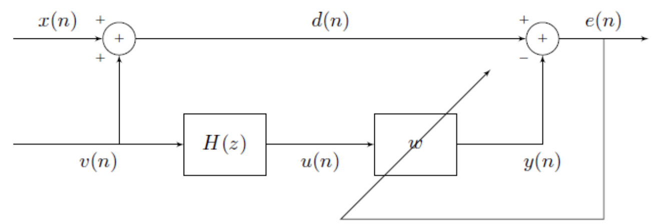
antreasc@ece.auth.gr

Υπεύθυνος καθηγητής: κ. Πιτσιάνης Νίκος
Ημερομηνία Παράδοσης: 27/02/2016

Ερώτημα 1

Από το σχήμα που δίνεται στην εκφώνηση αλλά και από τα δεδομένα, προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$x(n) = \cos(\pi n) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{25} n + \frac{\pi}{3}\right)$ (1.1)
$u(n) = -0.78 \cdot u(n-1) + u(n)$ (1.2)
$d(n) = v(n) + x(n)$ (1.3)
$e(n) = d(n) - y(n) = v(n) + x(n) - y(n)$ (1.4)
$\sigma_v^2 = 0.19$ (1.5)



Επειδή θα χρησιμοποιήσουμε ένα προσαρμοσμένο φίλτρο δύο συντελεστών έχουμε:

$y(n) = w_0 u(n) + w_1 u(n-1)$ (1.6)

- Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης για προσαρμοσμένο φίλτρο δύο συντελεστών είναι:

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) \\ r(1) & r(0) \end{bmatrix}$$

όπου:
$r(0) = E[u(n)u(n)] = E[u(n-1)u(n-1)]$ (1.7)
$r(1) = E[u(n)u(n-1)] = E[u(n-1)u(n)]$ (1.8)

Από την (1.7) με την (1.2) και αντίστοιχα την (1.8) με την (1.2), προκύπτουν οι παρακάτω:

$r(0) = -0.78\, r(1) + 0.19$ (1.9)
$r(1) = -0.78\, r(0)$ (1.10)

Από τις (1.9) και (1.10) βρίσκουμε ότι:
$r(0) = 0.4852$
$r(1) = -0.3784$ άρα $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0,4852} & \mathbf{-0.3784} \\ \mathbf{-0.3784} & \mathbf{0.4852} \end{bmatrix}$

- Το διάνυσμα ετεροσυσχέτισης για προσαρμοσμένο φίλτρο δύο συντελεστών είναι:

$P = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(-1) \end{bmatrix}$

Από τη θεωρία ισχύει:

$$\begin{aligned} p(-k) &= E[u(n-k) \cdot d(n)] \\ &= E[(-0.78u(n-k-1) + v(n-k))(x(n) + v(n))] = \\ &= -0.78E[u(n-k-1)v(n)] + E[v(n-k)v(n)] = \\ &= -0.78rvu(k+1) + rv(k), \end{aligned}$$

εφόσον η είσοδος x είναι ασυσχέτιστη με το v, άρα και με το u.

Άρα: $P = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.78 r_{vu}(1) + r_v(0) \\ -0.78 r_{vu}(2) + r_v(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2(0) \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.19} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Για τους βέλτιστους συντελεστές Wiener, λύνουμε το σύστημα $w_0 = R^{-1} \cdot p$ στο Matlab, οπότε έχουμε:

$$\boldsymbol{w_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.9995} \\ \mathbf{0.7795} \end{bmatrix}$$

Ερώτημα 2

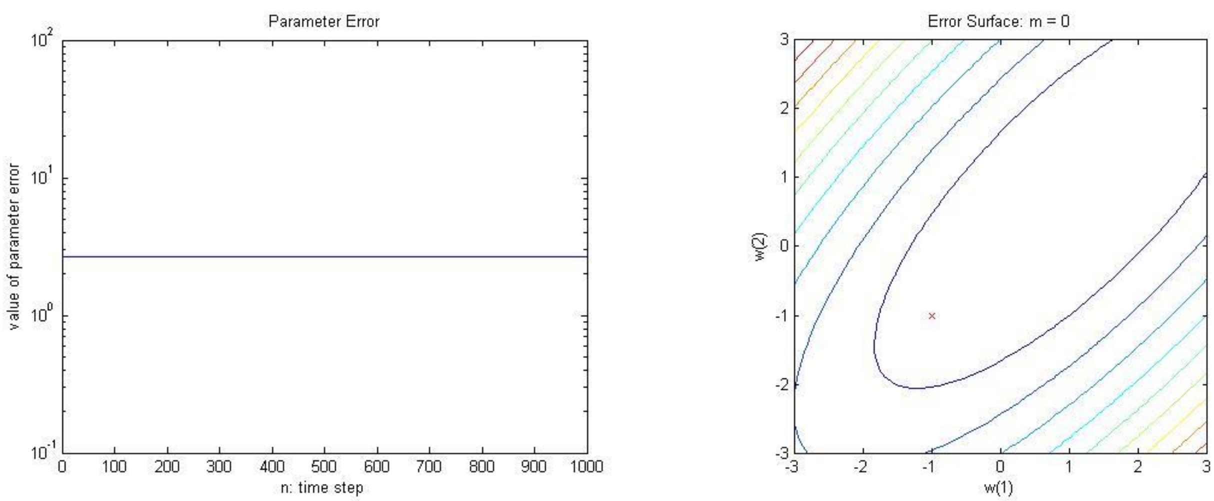
Για να υπολογίσουμε το πεδίο τιμών της παραμέτρου μ, για το οποίο το αποτέλεσμα του steepest descent συγκλίνει προς την πραγματική λύση, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη έκφραση:

$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{max}}$ με $\lambda_{max} =$ μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα αυτοσυσχέτισης R

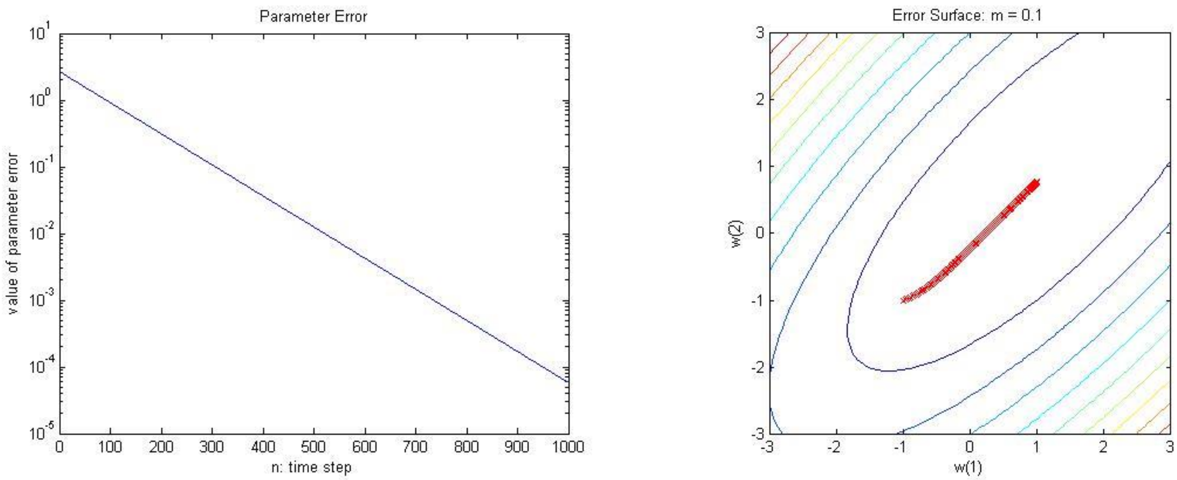
Βρίσκουμε ότι $\lambda_{max} \cong 0.864$ άρα το πεδίο τιμών της μ είναι: $\mathbf{0 < \boldsymbol{\mu} < 2.3159}$

Ερώτημα 3

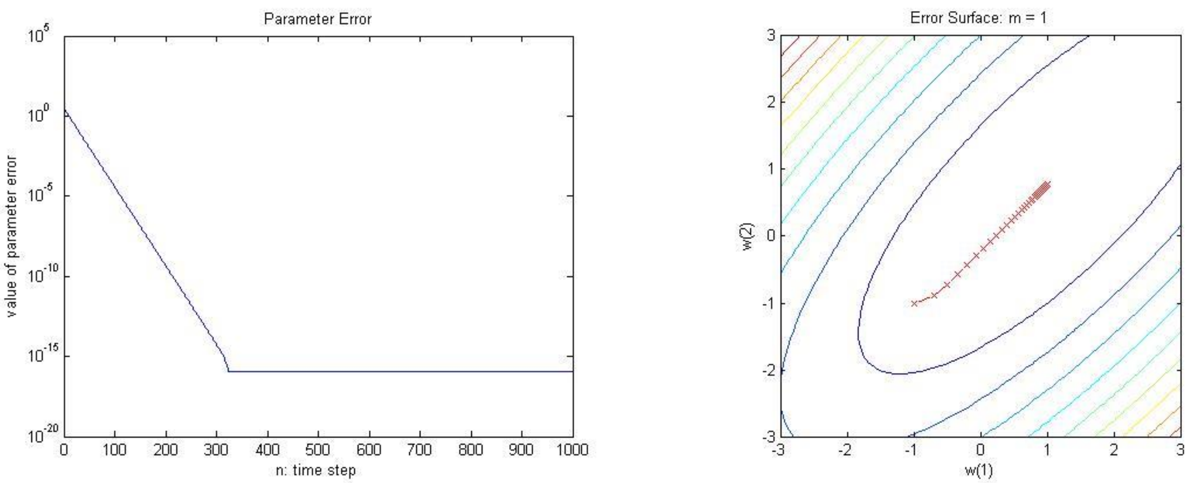
Στο 3º ερώτημα εφαρμόσαμε $steepest\ descent$ βάσει τις τιμές που υπολογίστηκαν στα προηγούμενα ερωτήματα και για διάφορες τιμές της παραμέτρου μ που βρίσκονται εντός και εκτός του διαστήματος σύγκλισης. Η υλοποίηση για το 3º ερώτημα βρίσκεται στο αρχείο $steepestDescent\_Wiener.m$. Η υλοποίηση αυτή είναι βασισμένη σε έτοιμους κώδικες που δόθηκαν στα πλαίσια του μαθήματος. Στο αρχείο αυτό υπολογίζονται οι βέλτιστοι συντελεστές Wiener κάνοντας χρήση των εξισώσεων Wiener-Hopf αλλά και με τον αλγόριθμο Steepest Descent.
Παρακάτω παραθέτουμε τα διαγράμματα για $\mu = 0.1, 1, 2, 2.315, 3$.

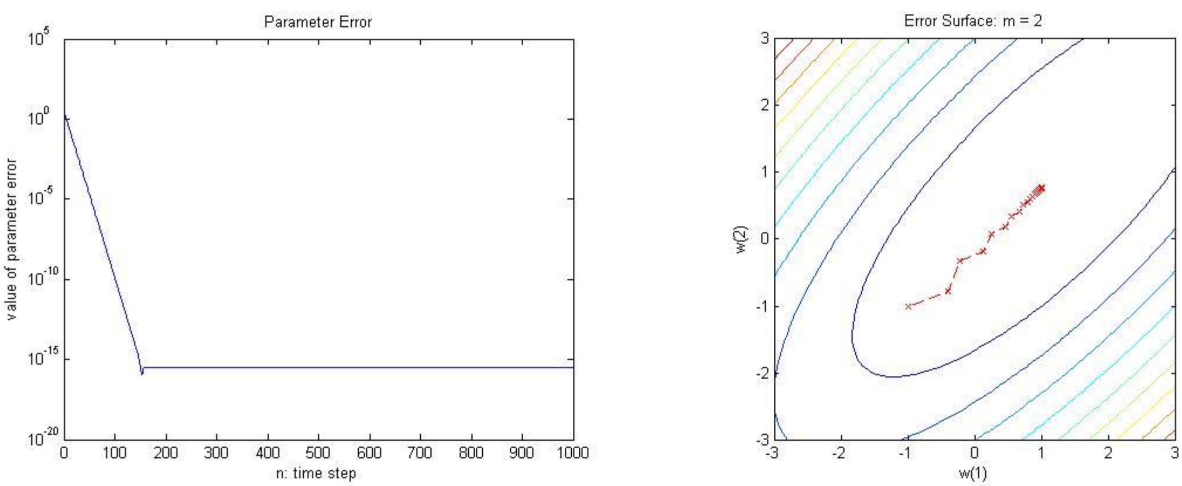


Όπως βλέπουμε από τα παραπάνω διαγράμματα για $\mu = 0$, έχουμε σταθερό σφάλμα που είναι λίγο μικρότερο από 2.

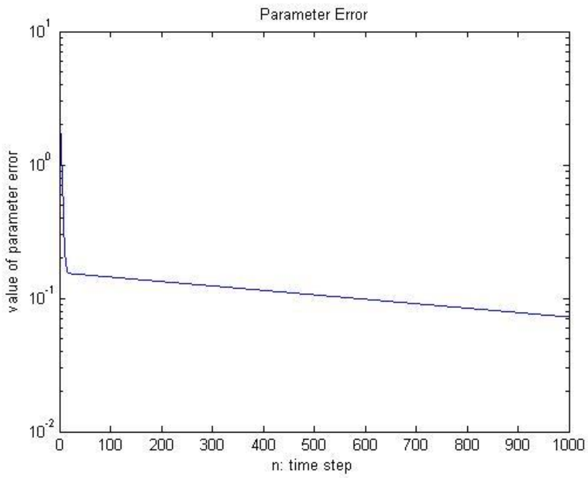


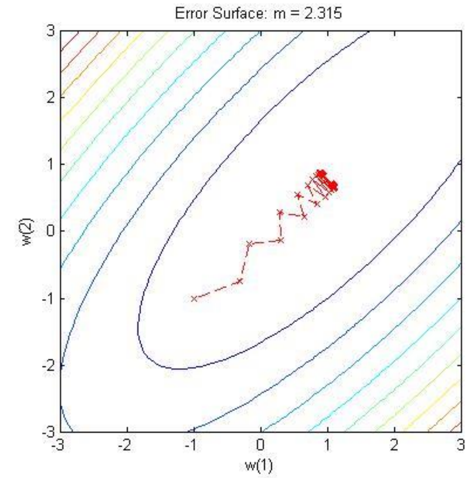
Εδώ βλέπουμε τα διαγράμματα για $\mu = 0.1$. Από τα διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε πως χρειαζόμαστε αρκετά μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για να συγκλίνει ο αλγόριθμος στο βέλτιστο διάνυσμα w.



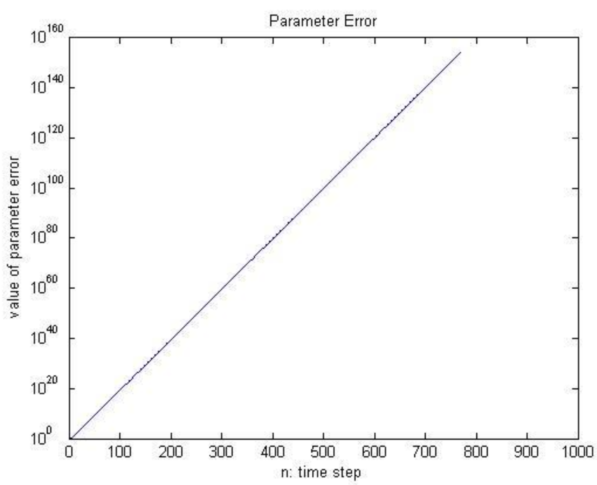


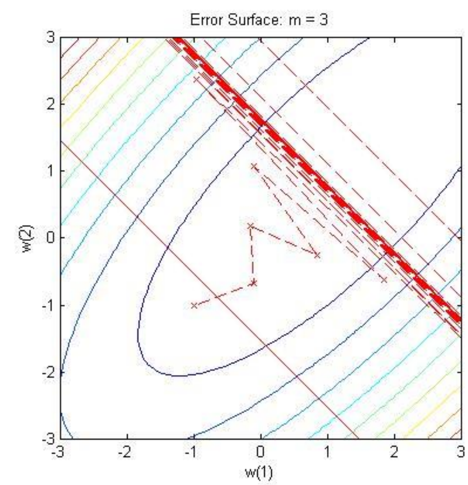
Από τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε ότι καθώς αυξάνουμε το μ σε 1 και 2 το σφάλμα ελαχιστοποιείται (τείνει στο 0) σε όλο και λιγότερες επαναλήψεις.





Όταν βάλουμε το μ να είναι ίσο με 2.315 το οποίο είναι και το άνω όριο του διαστήματος σύγκλισης, βλέπουμε ότι το σφάλμα ελαχιστοποιείται σε όλο και λιγότερες επαναλήψεις συγκριτικά με τις προηγούμενες 2 υλοποιήσεις. Όπως φαίνεται και από το Διάγραμμα: $Error\ Surface$ ο αλγόριθμος τείνει στη λύση αρκετά γρήγορα και ακολούθως κινείται λίγο γύρω από αυτό.





Τέλος, βλέπουμε ότι όταν το μ είναι εκτός διαστήματος σύγκλισης, το σφάλμα αυξάνεται συνεχώς με αποτέλεσμα να μην επιτυγχάνεται η επιθυμητή σύγκλιση. Τα διαγράμματα παραπάνω είναι για $\mu = 4$.

Άρα για καλύτερα αποτελέσματα και καλύτερη απόδοση του αλγόριθμου συστήνεται η τιμή του μ να είναι κοντά στο άνω όριο του διαστήματος σύγκλισης.

Ερώτημα 4

Η υλοποίηση του $4^{ου}$ ερωτήματος βρίσκεται στο αρχείο MATLAB $noiseRemove.m$. Στο αρχείο αυτό υλοποιήθηκε ο αλγόριθμος $steepest\ descent$ για ένα για προσαρμοζόμενο φίλτρο Wiener 60 συντελεστών όπως εξάλλου ζητήθηκε και από την εκφώνηση της εργασίας. Στο τέλος, και μετά από συζήτηση με άλλο συνάδελφο, για καλύτερα αποτελέσματα αφαιρούνται οι υψηλές συχνότητες κάνοντας χρήση του φίλτρου $butterworth$.

Το μουσικό κομμάτι είναι το $Bang, Bang$ της $Nancy\ Sinatra$ το οποίο βρέθηκε χρησιμοποιώντας κατάλληλο Android Application.