4. Gradienter og stasjonære punkter

$f = f(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

∇f = GRADIENTEN TIL $f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$

NABLA, DELL

EKS (11.4.4 b) $g(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{1}{3}y^3 - 9y$

$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 4\cdot 1 + 0 = x^2 - 4$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 + \frac{1}{3}\cdot 3y^2 - 9\cdot 1 = y^2 - 9$

$\nabla g = [x^2-4, y^2-9]$

$\nabla g(1,4) = [1^2-4, 4^2-9] = [-3, 7]$

TEOREM ∇f PEKER I DEN RETNINGEN DER f VOKSER RASKEST

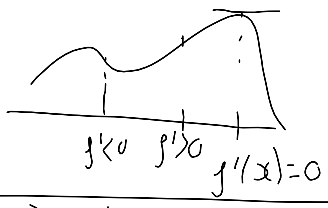
$-\nabla f$ — " — SYNKER — " —

VINKELRETT PÅ ∇f: INGEN ENDRING

NB! HVIS $\nabla f \neq \vec{0}$

$\nabla f = \vec{0}$: STASJONÆRE PUNKTER, KANDIDATER TIL MAKS/MIN

HUSK : $f(x)$



∇f points in the direction where f increases fastest.

− ∇f points in the direction where f decreases fastest

EKS $\nabla g = [x^2-4, y^2-9] = [0, 0]$

$x^2 - 4 = 0 \quad \wedge \quad y^2 - 9 = 0$

$x^2 = 4 \qquad y^2 = 9$

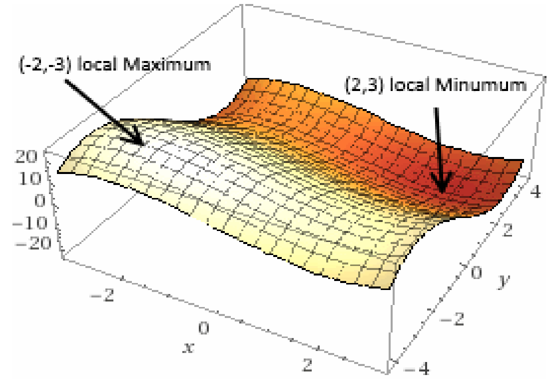
$x = \pm 2 \qquad y = \pm 3$

FIRE STASJONÆRE: $(2,3), (2,-3), (-2,3), (-2,-3)$

$f(x,y) = (1/3)x^3 - 4x + (1/3)y^3 - 9y$

Så vi har 4 stasjonære punkter (2,3) (2,-3) (-2,3) (-2,-3)

Hvordan kan vi vite hvilke av de er min, maks , eller sadel?



Hesse-Matrise

df / dx	df / dy
$x^2 - 4$	$y^2 - 9$

d^2f / dx^2: $2x$ d $d^2f / dy\,dx$: 0

d^2f / dy^2: $2y$ $d^2f / dx\,dy$: 0

$$\begin{bmatrix} d^2f / dx^2 & d^2f / dy\,dx \\ d^2f / dx\,dy & d^2f / dy^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$$

For et gitt punkt (x1,y1)

Hvis	delta > 0	og	$d^2f / dx^2 > 0$	(x1,y1) er Min
Hvis	delta > 0	og	d2f / dx2 < 0	(x1,y1) er Max
Hvis	delta < 0			(x1,y1) er sadel
Hvis	delta = 0			??

Eks: la oss sjekke en av de 4 stasjonære punkter (2,3)

delta er 24 > 0 og d^2f / dx^2 er 4>0 så (2,3) er local Minimum

Hvis vi antar at vi ikke vet hva minimum punketet er, og vi begynner med et tilfeldig punkt (-1,1),
Hvordan kan vi går mot minimum punktet?

Gradient decent:
x1 = x0 - learningRate * df/dx y1 = y0 - learningRate * df/dy

x	y		df/dx = x^2 - 4	df/dy = y^2 - 9		learning rate	delta x = 0.1 * df/dx	delta y = 0.1 * df/dy
-1	1		-3	-8		0.25	-0.75	-2
-0.25	3		-3.9375	0			-0.984375	0
0.734375	3		-3.460693359	0			-0.8651733398	0
1.59954834	3		-1.441445109	0			-0.3603612771	0
1.959909617	3		-0.1587542933	0			-0.03968857333	0
1.99959819	3		-0.00160707736	0			-0.0004017693401	0
1.99999996	3		-0.0000001614510357	0			-0.00000004036275891	0
2	3		0	0			0	0
2	3		0	0			0	0
2	3		0	0			0	0
2	3		0	0			0	0
2	3		0	0			0	0

The yellow cells are the only changable cells

Notice that the learningRate 0.25 is best for the point (-1,1) it takes 7 or 8 iteration to reach the local minimum point