

Zadaća 3

iz predmeta Matematička logika i teorija izračunljivosti

Prezime i ime: Mašović Haris

Br. indexa: 17993

Zadatak	Bodovi
1	
2	
3	
4	
5	

Elektrotehnički fakultet Sarajevo

1. Rješenje zadatka

* Ova izraz ćemo prvo minimizirati i proširiti u SDNF, pa onda primijeniti Quine-McCluskey algoritam:

$$\overline{(\overline{D} \Rightarrow \overline{B})(A \vee B)} \Leftrightarrow [(C \Leftrightarrow \overline{B}) \vee (\overline{C} \Leftrightarrow \overline{B})] = \overline{DB} \vee \overline{A} \overline{B} \Leftrightarrow (C \Leftrightarrow \overline{B})(\overline{C} \Leftrightarrow \overline{B}) \vee (C \Leftrightarrow \overline{B})(\overline{C} \Leftrightarrow \overline{B}) = \\ = \overline{DB} \vee \overline{A} \overline{B} \Leftrightarrow \overline{CB} \vee \overline{BC} \overline{C} \vee BC \vee \overline{BC} = \overline{DB} \vee \overline{A} \overline{B} \Leftrightarrow \top = \overline{DB} \vee \overline{A} \overline{B}$$

* Proširujemo u SDNF:

$$\overline{DB} \vee \overline{A} \overline{B} = \overline{A} \overline{B} (D \vee \overline{D}) (C \vee \overline{C}) \vee B \overline{D} (A \vee \overline{A}) (C \vee \overline{C}) = \\ \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C} D \vee \overline{A} \overline{B} C \overline{D} \vee \overline{A} \overline{B} C D \vee A \overline{B} \overline{C} \overline{D} \vee A \overline{B} \overline{C} D \vee A \overline{B} C \overline{D} \vee A \overline{B} C D \quad (SDNF)$$

* Sad prelazimo na QM-algoritam:

0	//	//	//
1	ABCD	ABD BCD	B \overline{D} * B \overline{D} *
2	ABC \overline{D} ABC \overline{D} A \overline{B} CD	B \overline{C} \overline{D} ABD \overline{C} ACD \overline{A} BC \overline{A} BD	A \overline{D} * A \overline{B} *
3	ABC \overline{D} A \overline{B} CD A \overline{B} C \overline{D}	A \overline{C} \overline{D} A \overline{B} \overline{D} A \overline{B} C	//
4	A \overline{B} C \overline{D}	//	//

** Sve označene minterme sa * su:

$$B \overline{D} \vee \overline{A} \overline{D} \vee \overline{A} \overline{B}$$

** Dalje formiramo tablicu pokrivanja da bi dobili naš MDNF:

	A \overline{B} C \overline{D}	A \overline{B} CD	A \overline{B} C \overline{D}	A \overline{B} CD	ABC \overline{D}	ABC \overline{D}	ABC \overline{D}	ABCD
B \overline{D}					*	*	*	*
A \overline{D}	*		*		*	*		
A \overline{B}	*	*	*	*				

*** Posmatrajući minterme u prvom i trećem redu možemo zaključiti da je to naš MDNF, odnosno:

$$B \overline{D} \vee \overline{A} \overline{B} \quad (MDNF)$$

** Pošto imamo MDNF možemo izraziti taj izraz preko Šefer operacije dvostrukom negacijom:

$$\overline{B \overline{D}} \wedge \overline{A \overline{B}} = \uparrow (\overline{B \overline{D}}, \overline{A \overline{B}}) = \uparrow (\uparrow (B, D \uparrow D), \uparrow (\overline{A} \uparrow \overline{B})) = \uparrow (\uparrow (B, D \uparrow D), \uparrow (A \uparrow A, B \uparrow B))$$

* Ukoliko negiramo naš SDNF i negiramo dobiti ćemo našu negaciju SKNF-a:

$$\begin{aligned} & \overline{\overline{A \overline{B} \overline{C} \overline{D} \vee A \overline{B} \overline{C} D \vee A \overline{B} C \overline{D} \vee A \overline{B} C D \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} \vee \overline{A} \overline{B} C \overline{D} \vee \overline{A} B \overline{C} \overline{D} \vee \overline{A} B C \overline{D}} = \\ & = (A \vee B \vee C \vee D)(A \vee B \vee C \vee \overline{D})(A \vee B \vee \overline{C} \vee D)(A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D})(A \vee \overline{B} \vee C \vee D) \\ & (A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee D) = \\ & \overline{A \overline{B} \overline{C} D \vee \overline{A} B C D \vee A \overline{B} \overline{C} \overline{D} \vee A \overline{B} \overline{C} D \vee A \overline{B} C \overline{D} \vee A \overline{B} C D \vee \overline{A} B \overline{C} \overline{D} \vee \overline{A} B C \overline{D}} (*) \end{aligned}$$

** Dobiveni izraz (*) iznad predstavlja negaciju SKNF-a pomoću kojeg ćemo QM-algoritmom naći MDNF, pa taj dobiveni izraz negirati:

0	ABCD	ABD ACD BCD	AD ★ BD ★
1	$\overline{A} \overline{B} \overline{C} D$ $\overline{A} \overline{B} C D$ $\overline{A} B \overline{C} D$	$\overline{B} \overline{C} D$ $\overline{A} C D A \overline{B} D$ $\overline{A} B C \overline{A} B D$	$\overline{A} \overline{B} \star$
2	$\overline{A} \overline{B} \overline{C} D$ $\overline{A} B \overline{C} \overline{D} A \overline{B} C \overline{D}$	$\overline{A} \overline{B} \overline{C}$ $\overline{A} \overline{B} \overline{D}$	//
3	$\overline{A} B \overline{C} \overline{D}$	//	//
4	//	//	//

** Sve označene minterme sa ★ su:

$$AD \vee BD \vee \overline{A} \overline{B}$$

** Dalje formiramo tablicu pokrivanja da bi dobili naš MDNF pa negacijom MKNF:

	$\overline{A} \overline{B} \overline{C} D$	$\overline{A} \overline{B} C D$	$\overline{A} B \overline{C} \overline{D}$	$\overline{A} B \overline{C} D$	$\overline{A} B C \overline{D}$	$\overline{A} B C D$	$A \overline{B} \overline{C} D$	$A \overline{B} C D$
AD				★		★	★	★
BD	★	★					★	★
$\overline{A} \overline{B}$			★	★	★	★		

*** Vidimo da se AD može sažimati samim tim dobijamo naš privremeni MDNF koji glasi:

$$BD \vee \overline{A} \overline{B}$$

* I negacijom ovog izraza dobijamo naš MKNF:

$$(\overline{B} \vee \overline{D})(\overline{A} \vee B)$$

** Pošto imamo MKNF možemo izraziti taj izraz preko Pierce operacije dvostrukom negacijom:

$$\overline{\overline{(\overline{B} \vee \overline{D})(\overline{A} \vee B)}} = \downarrow (\overline{\overline{B} \vee \overline{D}}, \overline{\overline{A} \vee B}) = \downarrow (\downarrow (B \downarrow B, D \downarrow D), \downarrow (A \downarrow A, B))$$

2. Rješenje zadatka

* Prvo ćemo naći SDNF našeg početnog izraza:

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \vee ABC \vee ABC \overline{D} \vee ABD = \overline{A} \overline{B} \overline{C} D \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} \vee ABCD \vee ABC \overline{D} \vee ABC \overline{D} \vee ABC \overline{D}$$

** Dalje formiramo QM-algoritam uz pretpostavku iz zadatka:

0	ABCD	ABC ABD BCD	AB ★ BC ★
1	ABCD $\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D}$	ABD $\overline{B} \overline{C} \overline{D}$ ABC $\overline{A} \overline{C} \overline{D}$ $\overline{A} \overline{B} C$	$\overline{A} C (\star \star)$
2	ABC \overline{D} $\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D}$ A $\overline{B} C D$	$\overline{A} \overline{C} \overline{D}$ $\overline{A} \overline{B} D$ $\overline{A} \overline{B} C$	$\overline{A} \overline{B} \star$
3	$\overline{A} \overline{B} \overline{C} D$ $\overline{A} \overline{B} C \overline{D}$	$\overline{A} \overline{B} C$ $\overline{A} \overline{B} D$	//
4	$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D}$	//	//

** Ukoliko formirano izraz samo sa ★ imamo:

$$AB \vee BC \vee \overline{A} \overline{B}$$

** Dalje formiramo tablicu pokrivanja da bi dobili naš MDNF:

	$\overline{A} \overline{B} \overline{C} D$	$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D}$	ABCD	ABC \overline{D}	ABC \overline{D}	ABC \overline{D}
AB			★	★	★	★
BC			★	★		
$\overline{A} \overline{B}$	★	★				

*** Vidimo da možemo još sažimati naš traženi MDNF, samim tim dobijamo sljedeći izraz koji je naš traženi MDNF:

$$AB \vee \overline{A} \overline{B}$$

3. Rješenje zadatka

* Prvo ćemo napisati zadane minterme u postavci kojih ima 25:

$$000000 \vee 000001 \vee 000010 \vee 000011 \vee 001000 \vee 001001 \vee 001010 \vee$$

$$001011 \vee 010100 \vee 010101 \vee 011001 \vee 011010 \vee 011011 \vee 011100 \vee$$

$$101000 \vee 101001 \vee 110111 \vee 111000 \vee 111001 \vee 111010 \vee 111011 \vee$$

$$111100 \vee 111101 \vee 111110 \vee 111111$$

** Pristupimo traženju implikanti koje pokrivaju ovu zadanu formu i pristupimo MINI algoritmom:

- (1) 00_0__
- (2) 00_011
- (3) 01010_
- (4) 0110_1
- (5) 01101_
- (6) 10100_
- (7) 1110__
- (8) 1111__
- (9) 11_111
- (10) 011100

* Pristupimo ekspanziji:

- 000000 -> (1) (odbacivanje 000001 i 000010 i 001000)
- 000011 -> (2) (odbacivanje 001011)
- 001010 -> (3) (odbacivanje 001011 i 010100 i 010101)
- 011001 -> (4) (odbacivanje 011011)
- 011010 -> (5) (nema odbacivanja)
- 101000 -> (6) (odbacivanje 101001)
- 110111 -> (9) (odbacivanje 111111)
- 111000 -> (7) (odbacivanje 111001 i 111010 i 111011)
- 111100 -> (8) (odbacivanje 111101 i 111110)
- 011100 -> (10) (nema odbacivanja)

* Pristupimo redukciji:

- (2) -> NIL (pokriveno od strane (1) i (3))

* Pristupimo preoblikovanju:

- 1. (7) -> 111___ , (8) -> 11111_

* Vidimo da imamo pokrivanje u narednim implikantama:

- { (1),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(9),(10) }

** Ponavljanjem, tj. drugom iteracijom ekspanzije imamo:

- (8) -> (7)

** Redukcijom:

- (9) -> 110111

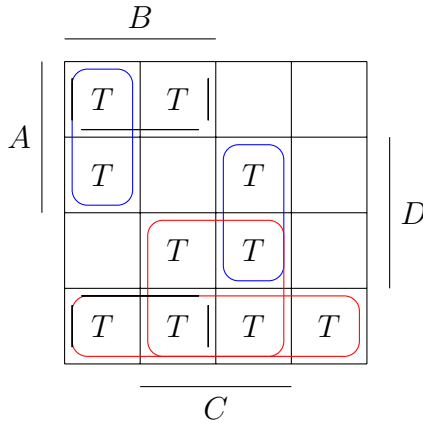
** Vidimo da dalje preoblikovanje nije moguće raditi pa imamo konačno pokrivanje koje glasi:

- { (1),(3),(4),(5),(6),(7),(9),(10) }

4. Rješenje zadatka

* Ukoliko prvo malo sredimo izraz imamo i formiramo Veitchov dijagram za traženje MDNF imamo:

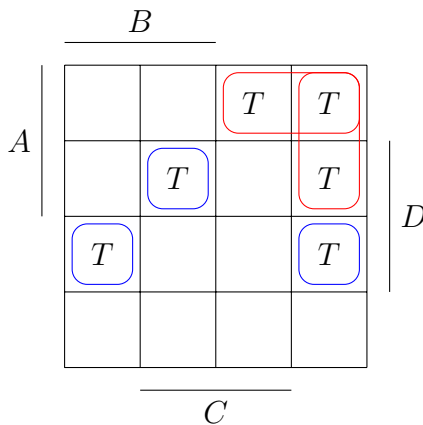
$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} \vee BD(\overline{A} \vee C \vee \overline{D}) \vee A\overline{C} \vee A\overline{B}CD = \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} \vee B\overline{D} \vee AB\overline{C}D \vee \overline{A}C \vee A\overline{B}CD$$



** Plavom bojom su označene esencijalne konture dok su crvenom i crnom konturom predstavljene ostale minterme, iz Veitchovog dijagrama možemo očitati naš MDNF, pri tome da su prve dvije minterme ove sa plavim konturama:

$$AB\overline{C} \vee \overline{B}CD \vee B\overline{D} \vee \overline{A} \overline{D} \vee \overline{A}C \quad (MDNF)$$

* Dalje ukoliko ponovimo isti postupak, ali samo za MKNF (pri tome da u prazna polja uvrštavamo T) imamo:



** Ukoliko posmatramo naše konture imamo da je naš MKNF:

$$\overline{A}\overline{D}\overline{C} \vee ABCD \vee \overline{A}\overline{B} \overline{D} \vee \overline{A}\overline{B} \overline{C} = (A \vee \overline{D} \vee C)(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D})(\overline{A} \vee B \vee D)(\overline{A} \vee B \vee C)$$

*** Sada prelazimo na traženje MEXDNF našeg izraza:

	B				
A	T	T			D
	T		T		
		T	T		
	T	T	T	T	
	C				

*** Iz Veitchovog dijagrama možemo pročitati naš MEXDNF koji glasi:

$$\bar{A} \bar{D} \vee AB \vee CD \quad (MEXDNF)$$

5. Rješenje zadatka

* Po postavci zadatka i zadatoj tabeli istine, može se zaključiti da trebamo posmatrati i dodatne 'zabranjene' kombinacije. I ukoliko uvedemo naredne oznake da je $A = B1$, $B = B2$, $C = B3$, $D = B4$, $E = B5$, na osnovu toga imamo sljedeći Veitchov dijagram:

B				B			
A	T	X		T	T	T	
	X	X	X	T	X		T
	X	X	T	T	X	T	T
				T	T	T	
C				C			
E							

*** Iz Veitchovog dijagrama možemo zaključiti da rješenje traženo je:

$$B\bar{E} \vee C\bar{D} \bar{E} \vee \bar{A}D \vee \bar{B} \bar{C} E \vee AB \vee \bar{C}D$$