Zadaća 2

iz predmeta Diskretna Matematika

Prezime i ime: Mašović Haris

Br. indexa: 17993

Demonstrator: Rijad Muminović

Grupa: RI - 4

Elektrotehnički fakultet Sarajevo, Novembar 2017g.

1. Rješenje zadatka

   Zadatak 1 [0.25 poena]

   Odredite na koliko je različitih načina moguće razmjestiti 9 studenata i 4 profesora oko okruglog stola ako je poznato da se profesori međusobno ne podnose i ne mogu sjediti jedan do drugog.

   * S obzirom da studente redamo oko okruglog stola, radi se o kružnim permutacijama, a svaka permutacija daje drugi raspored. Kao što znamo, broj kružnih permutacija za n elemenata je (n-1)! . Dakle studente možemo rasporediti na P_9 = (9 - 1)! = 8! = 40320 načina. Preostalo nam je još da razmjestimo 4 profesora, što je druga etapa ovog problema. Kako svi sjede za okruglim stolom, a nikoja dva profesora ne mogu sjediti jedan do drugog, njih ćemo razmjestiti tako da sjede između studenata. Prvog od četiri profesora možemo staviti na jedno od 9 mogućih mjesta (između dva studenta), drugog profesora možemo staviti na jedno od 8 preostalih mjesta (jedno smo već zauzeli), trećeg na jedno od 7 preostalih mjesta (dva su već zauzeta), četvrtog na jedno od 6 preostalih mjesta (tri su već zauzeta). Dakle profesore možemo razmjestiti na 9 · 8 · 7 · 6 = 3024 načina. Konačno na osnovu multiplikativnog principa, ukupan broj načina na koji možemo izvršiti razmještanje je

   $$P_9 \cdot 3024 = 40320 \cdot 3024 = 121927680.$$

2. Rješenje zadatka

   Zadatak 2 [0.25 poena]

   Potrebno je formirati osmočlanu ekipu za međunarodno softverskohardversko takmičenje. Uvjeti su da ekipa mora imati barem četiri studenta sa smjera RI, dok su studenti drugih smjerova poželjni (zbog većeg hardverskog znanja) ali ne i obavezni. Za takmičenje se prijavilo 9 studenata smjera RI i 6 studenata smjera AiE (dok studenti drugih smjerova nisu bili zainteresirani). Odredite na koliko načina je moguće odabrati traženu ekipu. Koliko će iznositi broj mogućih ekipa ukoliko se postavi dodatno ograničenje da ekipa mora imati i barem jednog studenta smjera AiE?

   * Da bi formirali ekipu, potrebno je izabrati k studenata sa smjera RI i 8 - k studenata sa smjera AiE, pri čemu je k $\geq$ 4 po uvjetu zadatka. Kako mora vrijediti k $\geq$ 0 i 8 - k $\geq$ 0, dobijamo da je k $\in$ { 4, 5, 6, 7, 8}. Pošto se svi studenti razlikuju, za neko k studente sa smjera RI možemo izabrati na C(9, k) načina, dok 8 - k studenata smjera AiE možemo izabrati na C(6, 8 - k) načina. Kako su oba izbora neovisna jedan od drugog, za broj načina za izbor ekipe koristiti ćemo multiplikativni princip za neko k i on iznosi

   $$C(9, k) \cdot C(6, 8 - k)$$

   Na kraju korištenjem aditivnog principa rješenje problema dobijamo sumi- ranjem za sve vrijednosti k iz skupa, pa je konačna formula

   $$\sum_{k=4}^{8} C(9, k) \cdot C(6, 8 - k)$$

odnosno

$$C(9,4)\cdot C(6,4)+C(9,5)\cdot C(6,3)+C(9,6)\cdot C(6,2)+C(9,7)\cdot C(6,1)+C(9,8)\cdot C(6,0)=$$

$$126\cdot 15+126\cdot 20+84\cdot 15+36\cdot 6+C(9,8)\cdot C(6,0)=5886+C(9,8)\cdot C(6,0)$$

$$5886+9=5895$$

Vidimo da traženu ekipu možemo odabrati na 5895 načina. Dalje se postavlja uslov koliko će iznositi broj mogućih ekipa ukoliko se postavi dodatno ograničenje da ekipa mora imati i barem jednog studenta smjera AiE. U već izračunatoj vrijednosti sume k = 8 se ne smije pojavljivati, samim tim ukupan broj mogućih kombinacija da se izabere ekipa sa barem jednim studentom AiE je 5886.

3. Rješenje zadatka

   Zadatak 3 [0.25 poena]

   Odredite na koliko načina možemo raspodijeliti 6 jabuka, 12 smokava i 8 naranči među osmero djece, pri čemu se pretpostavlja se da se primjerci iste voćke ne mogu međusobno razlikovati (npr. sve jabuke su iste).

   * Ovu raspodjelu možemo izvršiti tako da prvo raspodijelimo jabuke, pa smokve pa onda naranče, a konačan broj načina raspodjele dobijamo multiplikativnim principom jer su sve ove raspodjele neovisne jedna od druge. S obzirom da se voćke međusobno ne razlikuju, a problem raspodjele svake od njih je raspodjeljivanje n jednakih elemenata među k ljudi možemo zaključiti da se radi o kombinacijama sa ponavljanjem

$$\overline{C}(k,n)=C(k,n+k-1)=\binom{n+k-1}{k}$$

   Izračunajmo sada:

$$\overline{C}\,{}_{8}^{6}\cdot\overline{C}\,{}_{8}^{12}\cdot\overline{C}\,{}_{8}^{8}=$$

$$=C\,{}_{13}^{6}\cdot C\,{}_{19}^{12}\cdot C\,{}_{15}^{8}=$$

$$=\binom{13}{6}\cdot\binom{19}{12}\cdot\binom{15}{8}=1716\cdot 50388\cdot 6435=556407474480$$

4. Rješenje zadatka

   Zadatak 4 [0.25 poena]

   Na stolu se nalazi određena količina papirića, pri čemu se na svakom od papirića nalazi po jedno slovo. Na 2 papirića se nalazi slovo A, na 2 papirića se nalazi slovo M, na 3 papirića slovo Y i na 2 papirića slovo V. Odredite koliko se različitih troslovnih riječi može napisati slažući uzete papiriće jedan do drugog (nebitno je imaju li te riječi smisla ili ne).

* Imamo 2 slova A, 2 slova M, 3 slova Y i 2 slova V. Pošto pravimo troslovne riječi, tražimo koeficjent uz t^3, od tih slova znači da nam je poredak odnosno redoslijed uzimanja tih slova bitan, što nas dovodi do zaključka da se radi o permutacijama sa ponavljanjem klase 3. Za rješavanje ovog zadatka koristiti ćemo funkcije izvodnice.

$$\Psi_{n;m_1,m_2,...,m_n} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} \frac{t^j}{j!}$$

Razvijajući ovaj polinom za n = 4, $m_1 = 2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 2$ tražimo član uz t^3. Ako ovaj koefcijent označimo sa λ_3 konačno rješenje ovog zadatka će biti $3! \cdot \lambda_3$

$$\Psi_{4;2,2,4,2} = (1 + t + \frac{t^2}{2})^3 \cdot (1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6})$$

odnosno član uz t^3:

$$\Psi_{4;2,2,4,2} = 1 + 4 \cdot t + 8 \cdot t^2 + 61 \cdot \frac{t^3}{6} + ...$$

Vidimo da je $\lambda_3 = \frac{61}{6}$. Pomnožimo taj broj sa 3! , i imamo naš broj varijacija sa ponavljanjem koji je 61.

5. Rješenje zadatka

Zadatak 5 [0.25 poena]

Odredite koliko se različitih paketa koji sadrže 6 voćki može napraviti ukoliko nam je raspolaganju 6 breskvi, 3 jabuke, 2 narandže, 3 kruške i 1 smokva (pri čemu se pretpostavlja da ne pravimo razliku između primjeraka iste voćke).

* Ovaj problem je veoma sličan prethodno riješenom problemu u zadatku 4, ali ovdje nije bitan redoslijed kojim stavljamo pojedine voćke u pakete, tako da ovdje tražimo kombinacije sa ponavljanjem klase 6. Ponovo ćemo koristiti funkcije izvodnice za računanje.

$$\varphi_{n;m_1,m_2,...,m_n} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} t^j$$

Kada razvijemo ovaj polinom, konačno rješenje će biti koefijent uz član t^6.

$$\varphi_{5;6,3,2,3,1} = (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6) \cdot (1 + t + t^2 + t^3)^2 \cdot (1 + t + t^2) \cdot (1 + t) =$$

$$= ... + 82 \cdot t^6 + 67 \cdot t^5 + 48 \cdot t^4 + 29 \cdot t^3 + 14 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 1$$

Koefcijent uz t^6 je 82, pa je konačno rješenje ovog zadatka 82.

6. Rješenje zadatka

   Zadatak 6 [0.25 poena]

   Odredite na koliko načina se može rasporediti 33 identičnih kuglica u 6 različitih kutija, ali tako da u svakoj kutiji bude najviše 7 kuglica.

   * 33 puta biramo jednu od 6 različitih kutija, pri čemu istu kutiju možemo izabrati maksimalno 7 puta. Dakle računamo kombinacije sa ponavljanjem klase 33 skupa od 6 elemenata, u ovom slučaju kutija. Za računanje ćemo koristiti funkcije izvodnice.

$$\varphi_{n;m_1,m_2,\ldots,m_n} = \prod_{i=1}^{6} \sum_{j=0}^{7} t^j$$

   Kada razvijemo ovaj polinom, konačno rješenje će biti koefcijent uz član t^{33}.

$$\varphi_{6;n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6} = (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7)^6 =$$

$$= ... + 1966 \cdot t^{33} + 2877 \cdot t^{32} + 4032 \cdot t^{31} + ... + 56 \cdot t^3 + 21 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 1$$

   Rješenje ovog zadatka je koefcijent uz t^{33}, a to je 1966.

7. Rješenje zadatka

   Zadatak 7 [0.25 poena]

   Odredite na koliko načina se 14 različitih predmeta upakovati u 6 identičnih vreća (koje nemaju nikakav identitet po kojem bi se mogle razlikovati), pri čemu se dopušta i da neke od vreća ostanu prazne.

   * Rješenje ovog zadatka je suma Stirlingovih brojeva druge vrste S_{14}^k, pri čemu k može uzimati vrijednosti od 0 do 6. Stirlingovi brojevi 2 vrste se računaju formulom

$$S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + k \cdot S_{n-1}^k$$

   pri početnim vrijednostima

$$S_n^k = 0 \quad \forall\ n < k$$

$$S_n^0 = 0 \quad \forall n > 0$$

$$S_0^0 = 1$$

   Stirlingove brojeve 2 vrste najlakše možemo izračunati pomoću tabele, što ćemo i uraditi.

n k	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0
6	0	1	31	90	65	15	1
7	0	1	63	301	350	140	21
8	0	1	127	966	1701	1050	266
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827
11	0	1	1023	28501	145750	246730	179487
12	0	1	2047	86526	611501	1379400	1323652
13	0	1	4095	261625	2532530	7508501	9321312
14	0	1	8191	788970	10391745	40075035	63436373

Kao što smo rekli, rješenje će biti suma svih S_{14}^k, tj. u ovom slučaju suma svih brojeva iz zadnjeg reda ove tabele, pa imamo

$$\sum_{k=0}^{6} S_{14}^k = 0 + 1 + 8191 + 788970 + 10391745 + 40075035 + 63436373 = 114700315$$

8. Rješenje zadatka
   Zadatak 8 [0.25 poena]

   Odredite na koliko se načina može 14 kamenčića razvrstati u 3 gomilica. Pri tome se i kamenčići i gomilice smatraju identičnim (odnosno ni kamenčići ni gomilice nemaju nikakav identitet po kojem bi se mogli razlikovati).

   * Pošto poredak kod kamenčića i kod gomilica nije bitan, a pri tome gomilice su skupovi koji ne smiju biti prazni, rješenje ovog zadatka se svodi na računanje broja particija broja 14 sa tačno 3 sabirka odnosno p_{14}^3. Možemo primjetiti da je naš broj sabiraka mali, tačnije 3, pa možemo iskoristiti formulu Honsbergera i Schwennicke-a (Predavanje 5, strana 5), odnosno:

$$p_{14}^3 = \left\lfloor \frac{14^2}{12} + \frac{1}{2} \right\rfloor = 16.$$

   što ujedno predstavlja i rješenje našeg zadatka.

9. Rješenje zadatka

   Zadatak 9 [0.25 poena]

   Odredite na koliko načina se broj 13 može rastaviti na sabirke koji su prirodni brojevi, pri čemu njihov poredak nije bitan, ali pod dodatnim uvjetom da se sabirak 3 smije pojaviti najviše 3 puta, dok se sabirak 1 smije pojaviti samo neparan broj puta.

* Moramo odrediti broj particija broja 13, ali pošto imamo dodatne uvjete za odeđene sabirke, najpogodnije je koristiti funkcije izvodnice.

$$\varphi_{n;m_1,m_2,\ldots,m_n} = \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} t^{i\cdot j}$$

Razvijmo ovaj polinom po postavci zadatka:

$$\varphi = (t+t^3+t^5+t^7+t^9+t^{11}+t^{13})\cdot(1+t^2+t^4+t^6+t^8+t^{10}+t^{12})\cdot(1+t^3+t^6+t^9)\cdot(1+t^4+t^8+t^{12})\cdot(1+t^5+t^{10})$$
$$\cdot(1+t^6+t^{12})\cdot(1+t^7)\cdot(1+t^8)\cdot(1+t^9)\cdot(1+t^{10})\cdot(1+t^{11})\cdot(1+t^{12})\cdot(1+t^{13})$$

Kad izmnožimo sve imamo:

$$\varphi = \ldots + 25\cdot t^{14} + 47\cdot t^{13} + 29\cdot t^{12} + \ldots + t^4 + 2\cdot t^3 + t$$

Kad smo razvili polinom, ostaje nam samo da očitamo koefcijent uz t^{13}, a to je ovdje 47 , što znači da broj 13 možemo rastaviti na prirodne sabirke na 47 načina ako se sabirak 3 smije pojaviti najviše 3 puta, dok se sabirak 1 smije pojaviti samo neparan broj puta.

10. Rješenje zadatka

Zadatak 10 [0.25 poena]

U nekoj kutiji nalazi se 85 kompakt diskova (CD-ova), od kojih je 18 diskova nečitljivo. Ukoliko nasumice izaberemo 7 diskova iz kutije, nađite vjerovatnoću da će
a. svi izabrani diskovi biti čitljivi;
b. tačno jedan izabrani disk biti nečitljiv;
c. barem jedan izabrani disk biti nečitljiv;
d. tačno dva izabrana diska biti nečitljiva;
e. barem dva izabrana diska biti nečitljiva;
f. najviše dva izabrana diska biti nečitljiva;
g. najviše dva izabrana diska biti čitljiva;
h. svi izabrani diskovi biti nečitljivi.

*

a)
$$\frac{C_{67}^{7}}{C_{85}^{7}} = \frac{869648208}{4935847320} = 0.176 = 17.6\%$$

b)
$$\frac{C_{18}^{1}\cdot C_{67}^{6}}{C_{85}^{7}} = \frac{18\cdot 99795696}{4935847320} = 0.363 = 36.3\%$$

c)

$$1 - \frac{C_{67}^7}{C_{85}^7} = 1 - \frac{869648208}{4935847320} = 1 - 0.176 = 0.824 = 82.4\%$$

d)

$$\frac{C_{18}^2 \cdot C_{67}^5}{C_{85}^7} = \frac{153 \cdot 9657648}{4935847320} = 0.299 = 29.9\%$$

e)

$$1 - \frac{C_{67}^7 + C_{18}^1 \cdot C_{67}^6}{C_{85}^7} = 1 - \frac{869648208 + 18 \cdot 99795696}{4935847320} = 0.459 = 45.9\%$$

f)

$$\frac{C_{67}^7 + C_{18}^1 \cdot C_{67}^6 + C_{18}^2 \cdot C_{67}^5}{C_{85}^7} = \frac{869648208 + 18 \cdot 99795696 + 153 \cdot 9657648}{4935847320} = 0.839 = 83.9\%$$

g)

$$\frac{C_{18}^7 + C_{18}^6 \cdot C_{67}^1 + C_{18}^5 \cdot C_{67}^2}{C_{85}^7} = \frac{31824 + 18564 \cdot 67 + 8568 \cdot 2211}{4935847320} = 0.0040 = 0.4\%$$

h)

$$\frac{C_{18}^7}{C_{85}^7} = \frac{31824}{4935847320} = 6.447 \cdot 10^{-6} = 6.447 \cdot 10^{-4}\ \%$$

11. Rješenje zadatka

Zadatak 11 [0.25 poena]

Neka je dat pravičan novčić, tj. novčić kod kojeg je jednaka vjerovatnoća pojave glave ili pisma prilikom bacanja. Ako bacimo takav novčić 60 puta, očekujemo da će otprilike 30 puta pasti glava i isto toliko puta pismo. Međutim, to naravno ne znači da će sigurno biti tačno 30 pojava glave ili pisma (štaviše, vjerovatnoća da se tačno to desi je prilično mala). Odredite:
a. Vjerovatnoću da će se zaista pojaviti 30 puta glava i 30 puta pismo;
b. Vjerovatnoću da će se glava pojaviti više od 26 a manje od 34 puta;
c. Vjerovatnoću da će se glava pojaviti više od 23 a manje od 37 puta.

*

a) Sa P(A) ćemo označiti vjerovatnoću da je pismo, pošto je novčić potpuno pravičan, 1 - P(A) je vjerovatnoća da je glava. Vjerovatnoća za a) se računa kao:

$$C_{60}^{30} \cdot (\frac{1}{2})^{30} \cdot (\frac{1}{2})^{30} = 118264581564861424 \cdot (\frac{1}{2})^{60} = 0.1026 = 10.26\ \%$$

b) Ova vjerovatnoća je jednaka sumi vjerovatnoća da će se glava pojaviti 27,28,29,30,31,32,33 puta. Pa imamo:

$$C_{60}^{27}\cdot(\frac{1}{2})^{27}\cdot(\frac{1}{2})^{33}+C_{60}^{28}\cdot(\frac{1}{2})^{28}\cdot(\frac{1}{2})^{32}+C_{60}^{29}\cdot(\frac{1}{2})^{29}\cdot(\frac{1}{2})^{31}+$$

$$C_{60}^{30}\cdot(\frac{1}{2})^{30}\cdot(\frac{1}{2})^{30}+C_{60}^{31}\cdot(\frac{1}{2})^{31}\cdot(\frac{1}{2})^{29}+C_{60}^{32}\cdot(\frac{1}{2})^{32}\cdot(\frac{1}{2})^{28}+C_{60}^{33}\cdot(\frac{1}{2})^{33}\cdot(\frac{1}{2})^{27}$$

odnosno:

$$2\cdot C_{60}^{27}\cdot(\frac{1}{2})^{27}\cdot(\frac{1}{2})^{33}+2\cdot C_{60}^{28}\cdot(\frac{1}{2})^{28}\cdot(\frac{1}{2})^{32}+2\cdot C_{60}^{29}\cdot(\frac{1}{2})^{29}\cdot(\frac{1}{2})^{31}+C_{60}^{30}\cdot(\frac{1}{2})^{30}\cdot(\frac{1}{2})^{30}$$

odnosno:

$$0.1526+0.1799+0.1985+0.1026=0.6336=63.36\ \%$$

c) Ova vjerovatnoća je jednaka sumi vjerovatnoća da će se glava pojaviti 24,25,26,34,35,36 puta, odnoso ove vrijednosti ćemo dodati na već sračunate pod b. Pa imamo:

$$2\cdot C_{60}^{24}\cdot(\frac{1}{2})^{24}\cdot(\frac{1}{2})^{36}+2\cdot C_{60}^{25}\cdot(\frac{1}{2})^{25}\cdot(\frac{1}{2})^{35}+2\cdot C_{60}^{26}\cdot(\frac{1}{2})^{26}\cdot(\frac{1}{2})^{34}+b)$$

odnosno:

$$0.0625+0.0905+0.1212+0.6336=0.9078=90.78\ \%$$

12. Rješenje zadatka

Zadatak 12 [0.25 poena]

Odredite vjerovatnoću da će u skupini od 6 nasumično izvučenih karata iz dobro izmješanog špila od 52 karte dvije karte biti sa slikom i tri karte crvene boje (herc ili karo).

* Tražene mogućnosti nisu disjunktne. Napravimo klase koje su disjunktne.
Ukupan broj karata, n = 52
A_1 - karte sa slikom crvene boje, $n_1 = 6$
A_2 - karte sa slikom koje nisu crvene, $n_2 = 6$
A_3 - karte crvene boje koje nisu sa slikom, $n_3 = 20$
A_4 - ostale karte, $n_4 = 20$

Iz A_1 uzmemo m_1, iz A_2 m_2, iz A_3 m_3, iz A_4 m_4. Sada imamo 6 izvlačenja koje moraju zadovoljiti sljedeći sistem:

$$m_1+m_2+m_3+m_4=6 \quad m_1+m_2=2 \quad m_1+m_3=3$$

$$m_1=0 \quad m_2=2 \quad m_3=3 \quad m_4=1$$

$$m_1=1 \quad m_2=1 \quad m_3=2 \quad m_4=2$$

$$m_1=2 \quad m_2=0 \quad m_3=1 \quad m_4=3$$

Ove mogućnosti se međusobno isključuju, tako da ukupnu vjerovatnoću dobijamo sabiranjem vjerovatnoća za svaku od ove mogućnosti odnosno:

$$\frac{C_6^0 \cdot C_6^2 \cdot C_{20}^3 \cdot C_{20}^1 + C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_{20}^2 \cdot C_{20}^2 + C_6^2 \cdot C_6^0 \cdot C_{20}^1 \cdot C_{20}^3}{C_{52}^6} =$$

$$= \frac{1 \cdot 15 \cdot 1140 \cdot 20 + 6 \cdot 6 \cdot 190 \cdot 190 + 15 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 1140}{20358520} = \frac{1983600}{20358520} = 0.09743 = 9.743\%$$

13. Rješenje zadatka

Zadatak 13 [0.25 poena]

Podmornica gađa neprijateljski brod sa četiri torpeda, čije su vjerovatnoće pogađanja 50 %, 75 %, 25 % i 30 % respektivno. Ako brod pogodi jedan torpedo, on će biti potopljen sa vjerovatnoćom 35 %, u slučaju pogotka sa dva torpeda on će biti potopljen sa vjerovatnoćom 65 %, dok u slučaju da ga pogode tri ili četiri torpeda, on se potapa sigurno. Nađite vjerovatnoću da će brod biti potopljen.

* Vjerovatnoća da će brod biti potopljen jednaka je zbiru vjerovatnoća:

1. da ga je pogodio jedan od torpeda t_i pomnožena sa vjerovatnoćom potapanja ukoliko je pogođen jednim torpedom,
2. da su ga pogodila dva od torpeda t_i pomnožena sa vjerovatnoćom potapanja ukoliko je pogođen sa dva torpeda,
3. da su ga pogodila tri od torpeda t_i pomnožena sa vjerovatnoćom potapanja ukoliko je pogođen sa tri torpeda,
4. da su ga pogodila sva četiri torpeda t_i pomnožena sa vjerovatnoćom potapanja ukoliko je pogođen sa četiri torpeda, odnosno:

$$\begin{aligned} P = {} & (0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.75 \cdot 0.75 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.25 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 0.3) \cdot 0.35 \\ & + (0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.25 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.75 \cdot 0.75 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.75 \cdot 0.25 \cdot 0.7 + \\ & 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.25 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.75 \cdot 0.75 \cdot 0.7) \cdot 0.65 \\ & + (0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.25 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.75 \cdot 0.75 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 0.7) \cdot 1 \\ & + (0.5 \cdot 0.75 \cdot 0.25 \cdot 0.3) \cdot 1 = \\ & = 0.109375 + 0.2640625 + 0.3125 + 0.028125 = 0.7140625 = 71.40\ \% \end{aligned}$$

14. Rješenje zadatka

Zadatak 14 [0.25 poena]

Za četiri trkača vjerovatnoće da će uspjeti da istrče maraton do kraja procijenjene su na 55 %, 75 %, 50 % i 40 % respektivno. Nakon što je maraton zaista održan, pokazalo se da je samo jedan od njih uspio istrčati maraton do kraja. Nađite vjerovatnoću da je to bio drugi trkač.

* Imamo redom vjerovatnoće:
P(T_1) = 0.55
P(T_2) = 0.75
P(T_3) = 0.50
P(T_4) = 0.40
Vjerovatnoća da je jedan trkač istrčao je:

$$P(T) = 0.55 \cdot 0.25 \cdot 0.50 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.75 \cdot 0.50 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.25 \cdot 0.50 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.25 \cdot 0.50 \cdot 0.4 = \\ = 0.19875$$

Traži se uslovna vjerovatnoća P(T_2/T):

$$P(T_2/T) = \frac{P(T_2) \cdot P(T/T_2)}{P(T)} = \frac{P(T_2) \cdot P(\overline{T_1}) \cdot P(\overline{T_3}) \cdot P(\overline{T_4})}{P(T)} =$$

$$= \frac{0.75 \cdot 0.45 \cdot 0.5 \cdot 0.6}{0.19875} = 0.5094 = 50.94\ \%$$

15. Rješenje zadatka

Zadatak 15 [0.25 poena]

Igrač igra nagradnu igru u kojoj se iz kutije nasumično izvlače kuglice, koje mogu biti zlatne, srebrene i brončane. Ukupno ima 6 zlatnih, 15 srebrenih i 84 brončanih kuglica. Za osvajanje nagrade potrebno je izvući ili jednu zlatnu kuglicu (neovisno od toga kakve su ostale), ili dvije srebrene kuglice, ili tri brončane kuglice. Odredite vjerovatnoću osvajanja nagrade ako igrač ima pravo izvući
a. jednu kuglicu;
b. dvije kuglice;
c. tri kuglice.

*
a) Ako izvlači jednu kuglicu, jedino može dobiti ako izvuče zlatnu kuglicu, znači vjerovatnoću dobijamo kao količnik povoljnih i mogućih slučajeva.

$$P = \frac{6}{6+15+84} = \frac{6}{105} = 0.0571 = 5.71\ \%$$

b) Ako izvlačimo dvije kuglice, može biti dobitak i sa zlatnim i sa srebrenim kuglicama, pa se vjerovatnoća najlakše računa korištenjem suprotne vjerovatnoće. Slučaji u kojima izvlačimo dvije kuglice, a ne dobijamo su kad izvućemo jednu srebrenu i jednu brozanu ili dvije bronzane, pa se vjerovatnoća računa kao:

$$P = 1 - \frac{C_{84}^2 + C_{15}^1 \cdot C_{84}^1}{C_{105}^2} = 1 - \frac{3486 + 1260}{5460} = 0.13 = 13\%$$

c) Ako izvlačimo tri kuglice, ponovo je najlakše vjerovatnoću izračunati pomožu suprotne vjerovatnoće, jer je u ovom slučaju jedini scenarij u kome igrač ne dobija slučaj kada izvuće dvije bronzane i jednu srebrenu kuglicu, pa vjerovatnoću računamo kao:

$$P = 1 - \frac{C_{84}^{2} \cdot C_{15}^{1}}{C_{105}^{3}} = 1 - \frac{3486 \cdot 15}{187460} = 0.721 = 72.1\%$$

16. Rješenje zadatka

Zadatak 16 [0.25 poena]

Računar A je generirao neki binarni podatak (odnosno podatak koji može biti samo 0 ili 1. Taj podatak je proslijeđen putem lokalne mreže računaru B, koja je zatim proslijeđena računaru C, i najzad računaru D (sve putem lokalne mreže). Međutim, uslijed smetnji u prenosu, vjerovatnoća da podatak poslan sa jednog računara na drugi putem mreže stigne neizmijenjen iznosi svega 49 %. Greška može uzrokovati da se 0 pretvori u 1 ili 1 pretvori u 0. Ukoliko je poznato da je na krajnje odredište (računar D) stigao ispravan podatak, kolika je vjerovatnoća da je na računar B stigao ispravan podatak?

*

Ako je A_i, i $\in \{1, 2, 3, 4\}$, označimo kao događaj da neizmijenjen podatak stigne sa prethodnog na sljedeći računar, ta vjerovatnoća može se izraziti kao:

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = p(A_4) = 0.49$$

S druge strane, događaj B_i, i $\in \{1, 2, 3, 4\}$, je događaj da je računar prenio tačnu informaciju. Događaji $A_i \cdot B_i$ su zavisni te je njihova zavisnost data relacijama:

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \cdot B_1 + \overline{A_2} \cdot \overline{B_1}$$
$$B_3 = A_3 \cdot B_2 + \overline{A_3} \cdot \overline{B_2}$$
$$B_4 = A_4 \cdot B_3 + \overline{A_4} \cdot \overline{B_3}$$

Pošto ponašanja računara nisu međusobno ovisna, te korištenjem poznate relacije za računanje suprotne vjerovatnoće dobijamo:

$$P(B_1) = P(A_1) = 0.49$$

$$P(B_2) = P(A_2) \cdot p(B_1) + P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{B_1}) = 0.49 \cdot 0.49 + 0.51 \cdot 0.51 = 0.5002$$
$$P(B_3) = P(A_3) \cdot P(B_2) + P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{B_2}) = 0.49 \cdot 0.5002 + 0.51 \cdot 0.4998 = 0.499996$$
$$P(B_4) = P(A_4) \cdot P(B_3) + P(\overline{A_4}) \cdot P(\overline{B_3}) = 0.49 \cdot 0.499996 + 0.51 \cdot 0.500004 = 0.50000008$$

Tražena vjerovatnoća je zapravo $p(B_1/B_4)$ se može izračunati koristeći Bayesovu teoremu, što daje:

$$P(B_1/B_4) = \frac{P(B_1) \cdot P(B_4/B_1)}{P(B_4)}$$

U setu podataka nedostaje još vjerovatnoća $P(B_4/B_1)$ koju su dostupni svi potrebni podaci:

$$P(B_2/B_1) = P(A_2) = 0.49$$

$$P(B_3/B_1) = P(A_3) \cdot P(B_2/B_1) + P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{B_2}/B_1) = 0.49 \cdot 0.49 + 0.51 \cdot 0.51 = 0.5002$$

$$P(B_4/B_1) = P(A_4) \cdot P(B_3/B_1) + P(\overline{A_4}) \cdot P(\overline{B_3}/B_1) = 0.49 \cdot 0.5002 + 0.51 \cdot 0.4998 = 0.499996$$

Samim tim tražena vjerovatnoća je:

$$P(B_1/B_4) = \frac{P(B_1) \cdot P(B_4/B_1)}{P(B_4)} = \frac{0.49 \cdot 0.499996}{0.50000008} \approx 49\ \%$$