

Zadaća 2

iz predmeta Matematička logika i teorija izračunljivosti

Prezime i ime: Mašović Haris

Br. indexa: 17993

Zadatak	Bodovi
1	
2	
3	
4	
5	

Elektrotehnički fakultet Sarajevo

1. Rješenje zadatka

(a)

$$\vdash q \Rightarrow (p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow p)))$$

* Ukoliko krenemo od samog aksioma (LA1):

$X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$ i ukoliko označimo $X = p$ i $Y = q$ za početak imamo:

$$(1) \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \quad (\text{aksiom LA1})$$

$$(2) \quad (p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))) \quad (\text{aksiom LA1}) \quad (X = (p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \text{ i } Y = p)$$

$$(3) \quad p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \quad (\text{modus ponens iz (1) i (2)})$$

$$(4) \quad (p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow p)))) \quad (\text{aksiom LA1}) \quad (X = (3) \text{ i } Y = q)$$

$$(5) \quad q \Rightarrow (p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))) \quad (\text{modus ponens iz (3) i (4)})$$

* Iz krajnjeg izraza (5) vidimo naš sami početni izraz, samim tim smo dokazali ovaj model.

(b)

$$(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \quad \bar{r} \quad q \vdash \bar{p}$$

* Pošto nam je potrebna kontrapozicija koja glasi: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ sada ćemo je i dokazati.

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p} &= \bar{p} \vee q \Leftrightarrow q \vee \bar{p} = (\bar{p} \vee q)(q \vee \bar{p}) \vee (\overline{\bar{p} \vee q})(\overline{q \vee \bar{p}}) = \\ &= \bar{p} q \vee \bar{p} \vee q \vee q \bar{p} \vee p \bar{q} = \bar{p} \vee q \vee p \bar{q} = \bar{p} q \vee \bar{p} \bar{q} \vee q \vee p \bar{q} = \bar{p} q \vee q \vee \bar{q} = \top \end{aligned}$$

* Deduktivni dokaz zadatog modela se može ovako iskazati:

$$(1) \quad q \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad (\text{hipoteza 1})$$

$$(2) \quad \bar{r} \quad (\text{hipoteza 2})$$

$$(3) \quad q \quad (\text{hipoteza 3})$$

$$(4) \quad p \Rightarrow r \quad (\text{modus ponens iz (1) i (3)})$$

(5) $\bar{r} \Rightarrow \bar{p}$ (iskorištena kontrapozicija iz (4))

(6) \bar{p} (modus ponens iz (2) i (4))

* Iz krajnjeg izraza (6) vidimo naš traženi zaključak, samim tim smo dokazali ovaj model.

(c)

$$q \vdash (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q)$$

Deduktivni dokaz ovog modela se može uraditi na sljedeći način:

(1) q (hipoteza)

(2) $T = p \vee \bar{p}$ (tautologija)

(3) $q \wedge T$ (pravilo neutralnog elementa)

(4) $q \wedge (p \vee \bar{p}) = p \vee q \vee \bar{p} \vee q$

* Iz krajnjeg izraza (4) vidimo naš traženi zaključak, samim tim smo dokazali ovaj model.

2. Rješenje zadatka

(a)

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \Rightarrow q)(p \Rightarrow r)$$

* Metodom rezolucije sa oporgivanjem imamo:

$$(1) \quad p \Rightarrow (q \wedge r) = \bar{p} \vee (q \wedge r) = (\bar{p} \vee q)(\bar{p} \vee r) \quad (\text{hipoteza 1})$$

$$(2) \quad p \wedge (\bar{q} \vee \bar{r}) \quad (\text{negacija zaključka})$$

$$(3) \quad \bar{p} \vee q \quad (\text{pravilo simplifikacije iz (1) })$$

$$(4) \quad \bar{p} \vee r \quad (\text{pravilo simplifikacije iz (1) })$$

$$(5) \quad p \quad (\text{pravilo simplifikacije iz (2) })$$

$$(6) \quad \bar{q} \vee \bar{r} \quad (\text{pravilo simplifikacije iz (2) })$$

$$(7) \quad q \quad (\text{pravilo rezolucije iz (3) i (5) })$$

$$(8) \quad r \quad (\text{pravilo rezolucije iz (4) i (5) })$$

$$(9) \quad \bar{r} \quad (\text{pravilo rezolucije iz (7) i (6) })$$

$$(10) \quad \bar{q} \quad (\text{pravilo rezolucije iz (8) i (6) })$$

$$(11) \quad \text{Pravilo rezolucije iz ((8) i (9)) (ili (7) i (10)) - NIL}$$

(b)

$$(p \Rightarrow q) (r \Rightarrow \bar{t}) (q \Rightarrow r) \vdash p \Rightarrow \bar{t}$$

* Metodom rezolucije sa oporgivanjem imamo:

(1) $\bar{p} \vee q$ (hipoteza 1)

(2) $\bar{r} \vee \bar{t}$ (hipoteza 2)

(3) $\bar{q} \vee r$ (hipoteza 3)

(4) $p \wedge t$ (negacija zaključka)

(5) p (pravilo simplifikacije iz (4))

(6) t (pravilo simplifikacije iz (4))

(7) q (pravilo rezolucije iz (1) i (5))

(8) \bar{r} (pravilo rezolucije iz (2) i (6))

(9) r (pravilo rezolucije iz (3) i (7))

(10) Pravilo rezolucije iz ((8) i (9)) - NIL

(c)

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) (s \Rightarrow \bar{p}) t \bar{s} (t \Rightarrow q) \vdash r$$

* Metodom rezolucije sa oporgivanjem imamo:

$$(1) \quad (\bar{p} \vee q) \Rightarrow r = p \bar{q} \vee r \quad (\text{hipoteza 1})$$

$$(2) \quad \bar{s} \vee \bar{p} \quad (\text{hipoteza 2})$$

$$(3) \quad t \quad (\text{hipoteza 3})$$

$$(4) \quad \bar{s} \bar{t} \vee \bar{s} q = \bar{s} (\bar{t} \vee q) \quad (\text{hipoteza 4})$$

$$(5) \quad \bar{r} \quad (\text{negacija zaključka})$$

$$(6) \quad \bar{s} \quad (\text{pravilo simplifikacije iz (4) })$$

$$(7) \quad \bar{t} \vee q \quad (\text{pravilo simplifikacije iz (4) })$$

$$(8) \quad q \quad (\text{pravilo rezolucije iz (3) i (7) })$$

$$(9) \quad r \quad (\text{pravilo rezolucije iz (1) i (8) })$$

$$(10) \quad \text{Pravilo rezolucije iz ((5) i (9)) - NIL}$$

(d)

$$(q \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \bar{r} \ q \vdash \bar{p}$$

* Metodom rezolucije sa oporgivanjem imamo:

(1) $q \Rightarrow (p \Rightarrow r) = \bar{q} \vee (p \Rightarrow r) = \bar{q} \vee \bar{p} \vee r$ (hipoteza 1)

(2) \bar{r} (hipoteza 2)

(3) q (hipoteza 3)

(4) p (negacija zaključka)

(5) $\bar{p} \vee r$ (pravilo rezolucije iz (1) i (3))

(6) r (pravilo rezolucije iz (4) i (5))

(7) Pravilo rezolucije iz ((2) i (6)) - NIL

3. Rješenje zadatka

* Ukoliko uvedemo sljedeće oznake:

A - Pisati ću zadaću u LaTeX-u

B - Poslat ću je preko Zamgera

C - Možda dobijem 20% dodatnih bodova

D - Neću ostavljati zadaću na portirnici

E - Neću predavati nekome iz nastavnog ansambla

F - Pisati ću zadaću na papiru

Zadato modeliranje možemo izvesti na sljedeći način:

$$(A \Rightarrow BC)(F \Rightarrow D \vee E)(F \vee \overline{B} \ \overline{C}) \vdash (A \Rightarrow D \vee E)$$

* Metodom rezolucije sa oporgivanjem imamo:

- (1) $\overline{A} \vee BC$ (hipoteza 1)
- (2) $F \Rightarrow (D \vee E) = \overline{F} \vee D \vee E$ (hipoteza 2)
- (3) $F \vee \overline{B} \overline{C}$ (hipoteza 3)
- (4) $\overline{\overline{A} \vee D \vee E} = A \overline{D} \overline{E}$ (negacija zaključka)
- (5) A (pravilo simplifikacije iz (4))
- (6) \overline{D} (pravilo simplifikacije iz (4))
- (7) \overline{E} (pravilo simplifikacije iz (4))
- (8) $\overline{F} \vee D$ (pravilo ezolucije iz (2) i (6))
- (9) \overline{F} (pravilo rezolucije iz (6) i (8))
- (10) BC (pravilo rezolucije iz (6) i (8))
- (11) B (pravilo simplifikacije iz (10))
- (12) C (pravilo simplifikacije iz (10))
- (13) F (pravilo rezolucije iz (3), (11), (12))
- (14) Pravilo rezolucije iz ((9) i (13)) - NIL

4. Rješenje zadatka

* Prije nego što ispitamo da li su sljedeći skupovi logičkih operacija funkcionalno kompletni, moramo uvesti par pojmova:

(1) Za neku logičku operaciju kažemo da zadržava neistinu (ili nulu), ukoliko daje rezultat " \perp " kada svi operandi također imaju vrijednost " \perp ".

(2) Za neku logičku operaciju kažemo da zadržava istinu (ili jedinicu), ukoliko daje rezultat " \top " kada svi operandi također imaju vrijednost " \top ".

(3) Za neku logičku operaciju kažemo da je linearna ako i samo ako vrijedi jedna od sljedeće dvije tvrdnje:

a : Kad god je rezultat operacije " \top ", broj operandi koji imaju vrijednost " \top " je neparan, a kad god je rezultat operacije " \perp ", broj operandi koji imaju vrijednost " \top " je paran.

b : Kad god je rezultat operacije " \top ", broj operandi koji imaju vrijednost " \top " je paran, a kad god je rezultat operacije " \perp ", broj operandi koji imaju vrijednost " \top " je neparan.

(4) Za neku logičku funkciju kažemo da je monotona (ili neopadajuća) ukoliko primjena nekog od operandi sa " \perp " na " \top " može eventualno dovesti do promjene rezultata također sa " \perp " na " \top ", ali nikad do promjene rezultata sa " \top " na " \perp " (dopušteno je i da se rezultat ne promjeni).

(5) Za neku logičku operaciju kažemo da je samodualna (ili samosvojstvena) ukoliko za njemu karakterističnu funkciju vrijedi $f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_n) = \neg f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

(6) Da bi neki skup logičkih operacija predstavljao bazu iskazne algebre (odnosno bio funkcionalno kompletan), potrebno je i dovoljno da ne pripada u potpunosti niti jednoj od klasa koje je smatraju pod (1)-(5). Drugim riječima, potrebno je i dovoljno da se među njima nalazi barem jedna operacija koja ne zadržava neistinu, barem jedna koja ne sadržava istinu, barem jedna operacija koja nije linearna, barem jedna operacija koja nije monotona i barem jedna operacija koja nije samodualna. (Postova teorema o funkcionalnoj kompletnosti logičkih funkcija).

Pomoću ovih pojmova možemo riješiti sljedeće nedoumice kod ispitivanja da li su skupovi logičkih operacija funkcionalno kompletni, tako da imamo sljedeće:

(a)

$$S = (\neg \Leftarrow, \Leftrightarrow)$$

* Ukoliko posmatramo samo 1 operaciju tj. $\neg \Leftarrow$ možemo formirati sljedeću tablicu za ovu operaciju:

a	b	$a \neg \Leftarrow b$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Iz tabele vidimo da se zadržava neistina, da se ne zadržava istina, vidimo također da nije operacija linearna jer ne čini ni jednu od navedenih kombinacija, također vidimo da nije monotona jer ne zadovoljava gore spomenute uslove.

Samodulanost ćemo ispitati na drugoj tablici:

a	b	$a \vee \bar{b}$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Vidimo da ne važi ni samodualnost.

* Dalje ispitujemo \Leftrightarrow operaciju:

Formirajmo tablicu za ovu operaciju:

a	b	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Iz tabele vidimo da se ne zadržava neistina.

Pomoću Postove teoreme (6), dokazali da je ovaj skup funkcionalno kompletan i sad možemo zadane operacije izraziti na sljedeći način (uz korištenje odgovarajući broj operanada):

- (1) $\bar{a} = \bar{a} \wedge T = \bar{a} \wedge (a \Leftrightarrow a) = a \neg \Leftarrow (a \Leftrightarrow a)$
- (2) $a \wedge b = \bar{\bar{a}} \wedge b = \bar{a} \neg \Leftarrow b = (a \neg \Leftarrow (a \Leftrightarrow a)) \neg \Leftarrow b$
- (3) $a \vee b = a \vee \bar{\bar{b}} = \overline{(a \neg \Leftarrow \bar{b})} = \overline{(a \neg \Leftarrow (b \neg \Leftarrow (b \Leftrightarrow b)))} =$
 $= (a \neg \Leftarrow (b \neg \Leftarrow (b \Leftrightarrow b))) \neg \Leftarrow ((a \neg \Leftarrow (b \neg \Leftarrow (b \Leftrightarrow b))) \Leftrightarrow (a \neg \Leftarrow (b \neg \Leftarrow (b \Leftrightarrow b))))$

(b)

$$S = (\Rightarrow, \vee)$$

* Ukoliko posmatramo samo 1 operaciju tj. \Rightarrow možemo formulisati sljedeću tablicu:

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Iz tabele vidimo da se ne zadržava neistina, da se zadržava istina, vidimo također da nije operacija linearna jer ne čini ni jednu od navedenih kombinacija, također vidimo da nije monotona jer ne zadovoljava gore spomenute uslove.

Samodulanost ćemo ispitati na drugoj tablici:

a	b	$a \wedge \bar{b}$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Vidimo da ne važi ni samodualnost.

* Dalje ispitujemo \vee operaciju:

Formirajmo tablicu za ovu operaciju:

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Iz tabele vidimo da se ne zadržava istina i da operacija nije monotona što nam je ujedno i bilo potrebno.

Pomoću Postove teoreme (6), dokazali da je ovaj skup funkcionalno kompletan i sad možemo zadane operacije izraziti na sljedeći način (uz korištenje odgovarajući broj operanada):

$$(1) \quad \bar{a} = \bar{a} \vee \perp = (a \Rightarrow (a \vee a))$$

$$(2) \quad a \wedge b = \overline{\overline{a \wedge b}} = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = \overline{\bar{a}b \vee a\bar{b} \vee \bar{a}\bar{b}} = \overline{a \vee b} = ((a \vee b) \Rightarrow (a \vee a))$$

$$(3) \quad a \vee b = \bar{\bar{a}} \vee b = \bar{a} \Rightarrow b = (a \Rightarrow (a \vee a)) \Rightarrow b$$

(c)

$$S = (\Leftrightarrow, \neg)$$

* Ukoliko posmatramo samo 1 operaciju tj. \Leftrightarrow možemo formulisati sljedeću tablicu:

a	b	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Iz tabele vidimo da se ne zadržava neistina, da se zadržava istina, vidimo također da je operacija linearna jer zadovoljava barem jednu od 2 mogućnosti, također vidimo da nije monotona jer ne zadovolja gore spomenute uslove.

Samodulanost ćemo ispitati na drugoj tablici:

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Vidimo da ne važi ni samodualnost.

* Dalje ispitujemo \neg operaciju:

Formirajmo tablicu za ovu operaciju:

a	$\neg(a)$
0	1
1	0

Iz tabele vidimo da operacija nije linearna, što nama u biti i fali da bismo dokazali da li je ovaj skup funkcionalno kompletan.

Pomoću Postove teoreme (6), ovaj skup će biti funkcionalno kompletan ukoliko ga proširimo sa operacijom koja ne sadržava linearnost. Ukoliko proširimo sa konjukcijom ili disjunkcijom dobiti ćemo naš kompletan funkcionalan skup.

Naš novi funkcionalni skup glasi:

$$S = (\Leftrightarrow, \neg, \wedge).$$

I naš novi skup je sad funkcionalno kompletan skup po Postovoj teoremi i sada možemo (uz korištenje odgovarajući broj operanada) izraziti operaciju disjunkcije koja i fali u odnosu na druge dvije:

$$(1) \quad a \vee b = \overline{(\overline{a} \wedge \overline{b})}$$

5. Rješenje zadatka

(a)

$$\begin{aligned} (A \Rightarrow B \overline{C}) \vee \overline{\overline{A \vee B \vee C \overline{D}}} \vee C(B \Leftrightarrow AD) &= \overline{A} \vee B \overline{C} \vee (\overline{A} \vee (B \vee C \overline{D})) \vee C(B \Leftrightarrow AD) = \\ &= (\overline{A} \vee B \vee C \overline{D}) \vee C(B \Leftrightarrow AD) \end{aligned}$$

Ukoliko rješimo prvo lijevu stranu ekskluzivne disjunkcije imamo:

$$\overline{(\overline{A} \vee B \vee C \overline{D})} \vee C(B \Leftrightarrow AD) = A \overline{B}(\overline{C} \vee D)C(BAD \vee \overline{B} \overline{A} \overline{D}) = \perp \quad (1)$$

Ukoliko rješimo desnu lijevu stranu ekskluzivne disjunkcije imamo:

$$\begin{aligned} (\overline{A} \vee B \vee C \overline{D}) \overline{(C(B \Leftrightarrow AD))} &= (\overline{A} \vee B \vee C \overline{D}) (\overline{C} \vee B \vee \overline{AD}) = (\overline{A} \vee B \vee C \overline{D}) (\overline{C} \vee \overline{B}AD \vee B(\overline{A} \vee \overline{D})) = \\ (\overline{A} \vee B \vee C \overline{D}) (\overline{C} \vee \overline{B}AD \vee B \overline{A} \vee B \overline{D}) &= \overline{A} \overline{C} \vee B \overline{C} \vee \overline{A}B \vee B \overline{D} \quad (2) \end{aligned}$$

Ukoliko ujedinitimo (1) i (2) tj. uradimo konačnu disjunkciju imamo rezultat (koji predstavlja traženu DNF):

$$\overline{A} \overline{C} \vee B \overline{C} \vee \overline{A}B \vee B \overline{D} \quad (*)$$

(b)

Ukoliko negiramo naš dobiveni rezultat tj. (*) možemo dobiti traženi KNF:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\overline{A} \overline{C} \vee B \overline{C} \vee \overline{A}B \vee B \overline{D}}} &= \overline{(A \vee C)(\overline{B} \vee C)(A \vee \overline{B})(\overline{B} \vee D)} = \overline{(A \vee C \overline{B})(\overline{B} \vee CD)} = \\ \overline{A \overline{B} \vee ACD \vee C \overline{B} \vee C\overline{B}D} &= \overline{A\overline{B} \vee ACD \vee C\overline{B}} = (\overline{A} \vee B)(\overline{A} \vee \overline{C} \vee \overline{D})(\overline{C} \vee B) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} & \overline{A} \overline{C} \vee B \overline{C} \vee \overline{A} B \vee B \overline{D} = \\ & = \overline{A} \overline{C} (B \vee \overline{B}) (D \vee \overline{D}) \vee B \overline{C} (A \vee \overline{A}) (D \vee \overline{D}) \vee \overline{A} B (C \vee \overline{C}) (D \vee \overline{D}) \vee B \overline{D} (A \vee \overline{A}) (C \vee \overline{C}) = \\ & = (\overline{A} \overline{C} B \vee \overline{A} \overline{C} \overline{B}) (D \vee \overline{D}) \vee (B \overline{C} A \vee B \overline{C} \overline{A}) (D \vee \overline{D}) \vee (\overline{A} B C \vee \overline{A} B \overline{C}) (D \vee \overline{D}) \\ & \vee (B \overline{D} A \vee B \overline{D} \overline{A}) (C \vee \overline{C}) = \\ & \overline{A} \overline{C} B D \vee \overline{A} \overline{C} B \overline{D} \vee \overline{A} \overline{C} \overline{B} D \vee \overline{A} \overline{C} \overline{B} \overline{D} \vee B \overline{C} A D \vee \overline{A} B C D \vee \overline{A} B C \overline{D} \vee \overline{A} B \overline{C} \overline{D} \vee B \overline{D} A C \end{aligned}$$

Dobiveni zadnji izraz od 9 mintermi predstavlja naš SDNF.

(d)

* Ukoliko posmatramo naš dobiveni SDNF, na osnovu mintermi koje fale, možemo formirati i odgovarajući SKNF. Ukoliko analiziramo minterme koje fale ovom izrazu i operacijom negacije, možemo to uraditi na sljedeći način:

$$\begin{aligned} & \overline{\overline{A} \overline{B} C \overline{D} \vee \overline{A} \overline{B} C D \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C} D \vee \overline{A} \overline{B} C \overline{D} \vee \overline{A} \overline{B} C D \vee \overline{A} B C D} = \\ & (A \vee B \vee \overline{C} \vee D) (A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}) (\overline{A} \vee B \vee C \vee D) (\overline{A} \vee B \vee C \vee \overline{D}) (\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee D) \\ & (\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}) (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}) \end{aligned}$$

Naš dobiveni izraz predstavlja SKNF našeg početnog izraza.

(e)

Ukoliko krenemo od našeg DNF tj. (a), možemo dobiti ANF na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\overline{A} \overline{C} \vee B \overline{C} \vee \overline{A} B \vee B \overline{D} &= T \vee (T \vee (T \vee A)(T \vee C))(T \vee B(T \vee C))(T \vee (T \vee A)B)(T \vee B(T \vee D)) = \\ &= T \vee (T \vee (T \vee C \vee A \vee AC))(T \vee B \vee BC)(T \vee B \vee AB)(T \vee B \vee BD) = \\ &= T \vee (C \vee A \vee AB \vee AC \vee ABC)(T \vee B \vee ABD) = \\ &= T \vee C \vee BC \vee ABCD \vee AB \vee ABC \vee A \vee AC\end{aligned}$$

(f)

Ukoliko krenemo od našeg DNF izraza, možemo ga predstaviti na sljedeći način:

$$f(A,B,C,D) = Z = \overline{A} \overline{C} \vee B \overline{C} \vee \overline{A} B \vee B \overline{D}$$

$$\begin{aligned}Z &= \text{ITE}(A, B \overline{C} \vee B \overline{D}, \overline{C} \vee D) = \text{ITE}(A, \text{ITE}(B, \overline{C} \vee \overline{D}, \perp), \text{ITE}(B, \top, \overline{C})) = \\ &= \text{ITE}(A, \text{ITE}(B, \text{ITE}(C, \overline{D}, \top), \perp), \text{ITE}(B, \top, \text{ITE}(C, \perp, \top))) = \\ &= \text{ITE}(A, \text{ITE}(B, \text{ITE}(C, \text{ITE}(D, \perp, \top), \top), \perp), \text{ITE}(B, \top, \text{ITE}(C, \perp, \top)))\end{aligned}$$