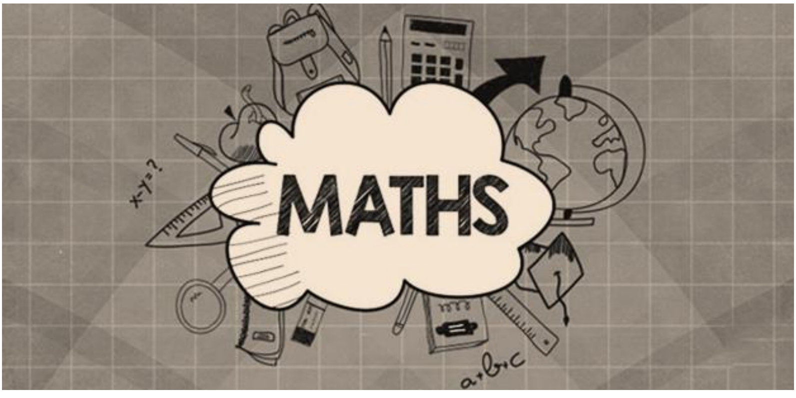
অধ্যায় ২

গণিতের মৌলিক ধারণা

There is geometry in the humming of the strings,
there is music in the spacing of the spheres.
-Pythagoras

শুরুতেই বলে রাখি, গণিত আমাদের অতি চেনা একটি বিষয় এবং ছোটবেলা থেকেই "অ আ ক খ" এর সাথে আমরা "১ ২ ৩" ও শিখি। এই অধ্যায়ের নাম *'গণিতের মৌলিক ধারণা'* রাখা হয়েছে কারণ প্রোগ্রামিং সহ বিজ্ঞানের সকল শাখা গণিতের উপর ভিত্তি করেই প্রতিষ্ঠিত। গণিতের পরিসর অনেক বড় যা এই বইয়ের দু'মলাটের মধ্যে শেষ করা সম্ভব নয়। তাই এ অধ্যায়ে আমরা গণিতের নির্দিষ্ট কিছু বিষয় সম্পর্কে জানব। পরবর্তী অধ্যায়গুলোতে তোমাদের প্রোগ্রামিং-এর হাতেখড়ি হবে এবং প্রোগ্রামিং-এর দক্ষতাকে কাজে লাগিয়ে আমরা গণিতের পেছনের রহস্য জানার চেষ্টা করবো।

এই অধ্যায়কে আমরা কয়েকটি অংশে ভাগ করেছি। প্রথমে আমরা জানবো সংখ্যাতত্ত্ব সম্পর্কে। এ অংশটিতে আমরা বিভাজ্যতা, ইউক্লিডিয়ান অ্যালগরিদম, মডুলার অ্যারিথমেটিক এবং বেশ কিছু গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য নিয়ে আলোচনা করবো। তারপরে আমরা কার্তেসিয়ান জ্যামিতি এবং উপাত্ত তথা ডেটা বিশ্লেষণ এবং উপস্থাপনের সম্পর্কে কিছু টিপস জেনে নিব। এছাড়াও এই অধ্যায়ের শেষে আমরা কম্বিন্যাটরিক্স তথা গনণাতত্ত্ব এবং সম্ভাবনা নিয়েও আলোচনা করবো।



এখন বেশি বকবক না করে চলো শিখে ফেলি গণিতের কিছু মজার "নিঞ্জা টেকনিক"! এই "নিঞ্জা টেকনিক" গুলো প্রবলেম-সলভিং এর ক্ষেত্রেও অনেক প্রয়োজনীয় এবং প্রোগ্রামিংয়ে অনেক অ্যালগরিদম তৈরী করার জন্য ব্যবহৃত হয়।

🎯২.১সংখ্যাতত্ত্ব

সংখ্যাতত্ত্ব, কথাটি বেশ ভারী এবং জটিল মনে হলেও এটা আসলে গণনা করারই বিশেষ পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করে। সহজ ভাষায় বলতে হলে, আমরা সবাই জোড় এবং বিজোড় সংখ্যা চিনি। যেমন: 1, 3, 5, 7 সংখ্যাগুলো বিজোড় এবং 2, 4, 6, 8 সংখ্যাগুলো জোড় এটা আমরা সবাই জানি কিন্তু আরেকটু গভীরভাবে চিন্তা করলে দেখবে জোড় এবং বিজোড় অন্যভাবেও সংজ্ঞায়িত করা যায়, 2 এর বিভাজ্যতা দিয়ে। অর্থাৎ, যে সকল সংখ্যাকে 2 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হয় তারা জোড় এবং বাকিরা বিজোড়। সংখ্যাতত্ত্বের এসব পদ্ধতি নিয়ে আমরা এই অধ্যায়ে আলোচনা করবো।

বিভাজ্যতা দিয়ে শুরু

আমরা পূর্ণসংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করতে পারি। তাহলে আমরা জানি যে, পূর্ণসংখ্যার যোগ, বিয়োগ বা গুণ করলে আরেকটি পূর্ণসংখ্যা পাওয়া যায়। কিন্তু ভাগের ক্ষেত্রে কি হবে? ভাগের ক্ষেত্রে সবসময় পূর্ণসংখ্যা পাওয়া যায় না। চলো একটা উদাহরণ দেওয়া যাক, ধর তোমার বাসার পাশের দোকানে একটা বিশেষ অফার চলছে! অফারটা হলো বিনামূল্যে 169 টা চকলেট খাওয়ার অফার! কিন্তু একটা শর্ত আছে, শর্তটা হলো, তোমাকে প্রতিদিন সমান সংখ্যক চকলেট খেয়ে চকলেট গুলো শেষ করতে হবে এবং 1 দিনে সমস্ত চকলেট খেয়ে শেষ করা যাবে না। অর্থাৎ, তুমি যদি প্রথমদিন 5 টা করে চকলেট খাও, তবে প্রতিদিন 5 টা করেই চকলেট খেতে হবে এবং চকলেট শেষ করতে হবে। যদি না পার, তবে চকলেট এর সব দাম তোমাকে দিতে হবে। চিন্তা কর, তোমার কি চকলেট চ্যালেঞ্জ টা অ্যাকসেপ্ট করা উচিৎ?
একটু চিন্তা কর ...

তো এরকম সমস্যা সমাধানের জন্য আমাদের বিভাজ্যতার জ্ঞান থাকা জরুরি। তাহলে আমাদের প্রথমে জানা প্রয়োজন বিভাজ্যতা কি? আসলে বিভাজ্যতা হলো ছোটবেলাই শেখা প্রথম ভাগগুলো, অর্থাৎ একটা সংখ্যাকে আরেকটি সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যদি ভাগশেষ 0 হয় তবে প্রথম সংখ্যাটি দ্বিতীয় সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য হয়। আরেকটু গাণিতিকভাবে বলতে গেলে, "*a ও b দুইটি পূর্ণসংখ্যা হলে b কে যদি a দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হয়, তবে a, b দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য*"। একে $a \mid b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যদিও এটি কোনো প্রকারের ভগ্নাংশ নয়, তবুও এখানে a কে হর এবং b কে লব বলা হয়ে থাকে।

এখন চলো আমরা মূল চ্যালেঞ্জ এ ফিরে আসি, সমস্যাটির শর্তগুলো ভালো করে পর্যবেক্ষণ করলেই আমরা বুঝে যাব যে আমাদের এমন একটা সংখ্যা খুঁজে বের করতে হবে যা 1 থেকে বড় এবং 169 কে নিঃশেষে ভাগ করে। এখন চিন্তা কর, এমন কোন সংখ্যা আছে কি না?

এই সমস্যাটি সমাধান করার জন্য আমাদের মৌলিক সংখ্যা এবং উৎপাদকের ধারণা থাকতে হবে। কোন সংখ্যার অপর একটি সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য হলে দ্বিতীয় সংখ্যাটি কে প্রথম সংখ্যাটির উৎপাদক বা

গুননীয়ক বলা হয়ে থাকে। তাই আমাদের 169-এর সব উৎপাদক বের করতে হবে এবং এদের মধ্যে কোনটির যদি 1 থেকে বড় হয় তাহলে সেটিই হবে আমাদের উত্তর। তাহলে চলো আমরা 169 এর সকল উৎপাদক খোঁজার মিশনে নেমে পড়ি।

- ক্ষেত্র ০১: 169, 2 দ্বারা বিভাজ্য নয় কারণ 169 এর একক স্থানীয় অংক জোড় নয়।
- ক্ষেত্র ০২: 169, 3 দ্বারা বিভাজ্য নয় কারণ 169 এর অংকগুলোর যোগফল 1+6+9=১6 যা 3 দ্বারা অবিভাজ্য।
- ক্ষেত্র ০৩: 169, 4 দ্বারা বিভাজ্য নয় কারণ 169 এর দশক এবং একক স্থানীয় অংক দ্বারা গঠিত সংখ্যা 69 যা 4 দ্বারা অবিভাজ্য।
- ক্ষেত্র ০৪ : 169, 5 দ্বারা বিভাজ্য নয় কারণ 169 এর একক স্থানীয় অংকে 0 বা 5 নেই।
- ক্ষেত্র ০৫: 169, 6 দ্বারা বিভাজ্য নয় কারণ 169, 2 এবং 3 দ্বারা অবিভাজ্য।
- ক্ষেত্র ০৬: 169, 7 দ্বারা বিভাজ্য কিনা তা বের করতে আমাদের একটি বিশেষ প্রক্রিয়ার ভিতর দিয়ে যেতে হবে। আর তা হলো 169 এর শেষ অংক 9 কে প্রথমে আলাদা করতে হবে তারপর অপর অংকগুলো দিয়ে গঠিত 16 সংখ্যা থেকে 9 এর দ্বিগুন অর্থাৎ 18 বিয়োগ করতে হবে।

  $$16 - 18 = -2$$

  এখন -2, 7 দ্বারা বিভাজ্য নয় তাই 169, 7 দ্বারা অবিভাজ্য। 169 থেকে বড় সংখ্যার ক্ষেত্রে এই প্রক্রিয়াটি চালিয়ে যেতে হবে যতক্ষণ না পর্যন্ত এক অংকের সংখ্যা পাওয়া যায়।
- ক্ষেত্র ০৭ : 169, 8 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার প্রশ্নই ওঠে না কারণ এটি 2 দ্বারা অবিভাজ্য।
- ক্ষেত্র ০৮ : 169, 9 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার প্রশ্নই ওঠে না কারণ এটি 3 দ্বারা অবিভাজ্য।
- ক্ষেত্র ০৯ : 169, 10 দ্বারা বিভাজ্য নয় কারণ 169 এর শেষ অনেক 0 নয়।
- ক্ষেত্র ১০ : 169, 11 দ্বারা বিভাজ্য কিনা নির্ণয় করার জন্য আরেকটি বিশেষ প্রক্রিয়ার ভিতর দিয়ে যেতে হবে। এজন্য প্রথমে 169 এর সকল অংকগুলোকে আলাদা করতে হবে এবং অংকগুলোর আগে +, - চিহ্ন পর্যায়ক্রমে বসিয়ে হিসাব করতে হবে। যে সংখ্যাটি পাওয়া যাবে তা যদি 11 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে কেবল মূল সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

  $$+ 1 - 6 + 9 = 4$$

  যা 11 দ্বারা অবিভাজ্য, তাই 169, 11 দ্বারা বিভাজ্য নয়।
- ক্ষেত্র ১১ : 169, 12 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার প্রশ্নই ওঠে না কারণ এটি 6 দ্বারা অবিভাজ্য।
- ক্ষেত্র ১২: 169, 13 দ্বারা বিভাজ্যতা নির্ণয় করতে হলে আমাদের 169 এর একক স্থানীয় অংক 9 কে আলাদা করে একে 4 দ্বারা গুণ করে অপর অংকগুলো দ্বারা গঠিত সংখ্যা 16 এর সাথে যোগ করতে হবে। এই প্রক্রিয়া চালু রাখতে হবে যতক্ষণ না পর্যন্ত এমন একটি সংখ্যা পাওয়া যায় যা থেকে সহজে নিশ্চিত হওয়া যায় যে উক্ত সংখ্যাটি 13 দ্বারা বিভাজ্য।

  $169 \Rightarrow 16 + 9 \times 4 \Rightarrow 16 + 36 \Rightarrow 52 \Rightarrow 5 + 2 \times 4 \Rightarrow 5 + 8 \Rightarrow 13$ যা 13 দ্বারা বিভাজ্য।

  তাই 169, 13 দ্বারা বিভাজ্য।

আমাদের এ পরীক্ষা আর চালিয়ে যেতে হবে না কারণ ,

$$13 \times 13 = 169$$

যেহেতু আমার 13 পর্যন্ত সকল সংখ্যার বিভাজ্যতা পরীক্ষা করে ফেলেছি, তাই 13 এর পরবর্তী সংখ্যাগুলোর বিভাজ্যতা পরীক্ষা করলে কোনো লাভ হবে না, কেবল সময়ের অপচয় হবে।

তাহলে এমন কি কোনো সংখ্যা আছে 169 কে নিঃশেষে ভাগ করে? হ্যাঁ। কারণ 169, 13 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। তাহলে তুমি 169 টি চকলেট বিনামূল্যে পাবে যদি এবং কেবল যদি 13 দিনে 13টি করে চকলেট খাও। তাই এ ধরনের অফার নেওয়ার আগে আমাদের সবসময় চিন্তা করে দেখা উচিৎ। কেননা চতুর দোকানদার এমন পরিমাণের চকলেটের চ্যালেঞ্জ বানাতে পারে, যেখানে সংখ্যাটি 1 এবং ওই সংখ্যাটি ব্যতীত অন্য কোনো সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য নয়। অর্থাৎ সংখ্যাটি একটি মৌলিক সংখ্যা যেমন 43, 53, 61 ইত্যাদি।

এখন চলো আমরা বিভাজ্যতার কিছু মৌলিক নিয়ম শিখে নিই।

মনে রেখো

১. যদি $a \mid b$ হয়, তবে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা c এর জন্যে $a \mid bc$। যেহেতু, $a \mid b$, তাহলে বলা যায় যে এমন একটি পূর্ণসংখ্যা k আছে, যেন $b = ak$ হয়। সুতরাং, $bc = (ak)c = a(kc)$। অর্থাৎ, $a \mid bc$.

২. যদি $a \mid b$ এবং $b \mid c$ হয় তবে, $a \mid c$ যেহেতু, $a \mid b$ এবং $b \mid c$, তাহলে বলা যায় যে এমন পূর্ণসংখ্যা x,y আছে যেন $b = ax$ এবং $c = by$। সুতরাং, $c = by = (ax)y = a(xy)$, যার অর্থ $a \mid c$

৩. যদি $a \mid b$ হয়, তাহলে সাধারণত $a \leq b$। তা না হলে $b = 0$ হবে, কেননা a-এর সব মানের জন্যই $a \mid 0$.

৪. যদি $a \mid b$ এবং $a \mid c$ হয়, তবে $a \mid b \pm c$ হবে। যেহেতু, $a \mid b$ এবং $a \mid c$, তাহলে বলা যায় এমন দুটি x,y আছে যেন $b = ax$ এবং $c = ay$ হয়। এখন দেখো, $b \pm c = ax \pm ay = a(x \pm y)$, যার অর্থ $a \mid b \pm c$

এই নিয়মগুলি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ এবং খুবই মৌলিক। কারো যদি এই abstract নিয়মগুলি বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে a, b, c, x, y, z ইত্যাদির পরিবর্তে সংখ্যা বসিয়ে হিসাব করলে দেখবে এগুলো পানির মতো সোজা। শুধু এই ক্ষেত্রেই নয়, গণিতের যেকোনো ক্ষেত্রে abstract সূত্র থাকলে চলক-এর পরিবর্তে সংখ্যা বসিয়ে হিসাব করলে সুবিধা পাওয়া যায়।

চলো এখন একটা উদাহরণ দেখা যাক,

উদাহরণ ২.১

সকল $n \in \mathbb{N}$ নির্ণয় কর যেন $n + 2 \mid 5n + 6$

সমাধান: চলো আগে দেখি প্রশ্নে কি দেওয়া আছে,

$$n + 2 \mid 5n + 6$$

এখানে উক্ত বিভাজ্যতার লব (5n + 6) এবং হর (n + 2)।

এখন আমাদের সর্বপ্রথম লবকে a + b আকারে লিখতে হবে যেন a, n + 2 দ্বারা বিভাজ্য হয় এবং b একটি ধ্রুবক সংখ্যা হয়। দেখ লবে 5n আছে এবং হরে আছে n। তাহলে আমরা হরকে 5 দ্বারা গুন করতে পারি, হরকে 5 দ্বারা গুন করলে হয় 5n + 10। এখন আমরা লিখতে পারি,

$$5n + 6 = 5n + 10 - 4$$

এখন দেখ, n এর যেকোনো মানের জন্য n + 2, 5n + 10 কে ভাগ করে। সুতরাং ৪ নং সূত্রানুসারে, আমাদের এমন n খুজে বের করতে হবে যেন n + 2 | 4 হয়।

এখন আমাদের প্রথমে 4 এর সকল গুণনীয়ক বের করতে হবে। 4 এর গুণনীয়ক হলো 1,2,4। চলো এখন আমরা এই মানগুলো থেকে n এর মান বের করার চেষ্টা করি।

=> n + 2 = 1	=> n + 2 = 2	=> n + 2 = 4
=> n = 1 – 2	=> n = 2 – 2	=> n = 4 – 2
=> n = -1	=> n = 0	=> n = 2

যেহেতু প্রশ্নানুসারে $n \in \mathbb{N}$, তাই $n + 2 \mid 5n + 6$ হবে যদি এবং কেবল যদি n = 2 হয়।

এখানে তোমাদের চর্চার জন্য আরও ৫টি সমস্যা দেওয়া হলো,

সমস্যা ২.১: সকল $n \in \mathbb{N}$ নির্ণয় কর যেন $7n + 1 \mid 8n + 57$

সমস্যা ২.২: সকল $n \in \mathbb{N}$ নির্ণয় কর যেন $n + 2 \mid n + 17$

সমস্যা ২.৩: সকল $n \in \mathbb{Z}$ নির্ণয় কর যেন $7n + 3 \mid 17n + 56$

সমস্যা ২.৪: সকল $n \in \mathbb{N}$ নির্ণয় কর যেন $5n + 2 \mid 12n + 43$

সমস্যা ২.৫: সকল $n \in \mathbb{Z}$ নির্ণয় কর যেন $n + 1 \mid 8n + 100$

ইউক্লিডিয়ান অ্যালগরিদম

আমরা সবাইতো মহাগুরু ইউক্লিড কে চিনি? তাই না? আনুমানিক খ্রিস্টপূর্ব ৩০০ অব্দে গ্রিক পন্ডিত ইউক্লিড জ্যামিতির ইতস্তত বিক্ষিপ্ত সূত্রগুলো বিধিবদ্ধভাবে সুবিন্যস্ত করে তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ 'Elements' রচনা করেন। তেরো খন্ডে সম্পূর্ণ কালোত্তীর্ণ এই গ্রন্থটিই আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তি স্বরূপ। 'Elements' গ্রন্থে সংবলিত জ্যামিতিক উপপাদ্য আর সম্পাদ্য আমরা স্কুল-কলেজে পড়ে থাকি। মহাগুরু ইউক্লিড দুটো সংখ্যার গ.সা.গু বের করার একটি চমৎকার পদ্ধতি আবিষ্কার করছিলেন। সেটা হলো,

a ও b দুটি সংখ্যা এবং $a \geq b$ হলে,

$a = bq + r$

যেখানে $0 \leq r < b$। তাহলে gcd(a,b) = gcd(b,r)। [gcd = greatest common divisor; গ.সা.গু]

এখন আসি প্রমান এ, গ.সা.গু হলো গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক অর্থাৎ দুটি সংখ্যাকেই ভাগ করে এমন সবচেয়ে বড় সংখ্যা। অর্থাৎ, এমন একটি সংখ্যা d আছে যেন $d \mid a$ এবং $d \mid b$।

যেহেতু $a = bq + r$,

অতএব, $d \mid bq + r$

সুতরাং, $d \mid r$

এখন আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, d হলো b ও r এর গ.সা.গু।

ধরি, d_1 হলো b ও r এর গ.সা.গু এবং $d_1 > d$।

তাহলে $d_1 \mid bq + r = d_1 \mid a$

অতএব $\gcd(a,b) = d_1$

কিন্তু আমরা আগেই বলেছি যে d হচ্ছে সবচেয়ে বড় সংখ্যা যা a ও b উভয়কে ভাগ করে।

এখন $\gcd(a,b) = d_1$ হলে d_1 a ও b উভয়কে ভাগ করবে

কিন্তু, $d_1 > d$

তার মানে d থেকে এমন বড় সংখ্যা d_1 রয়েছে যা দ্বারা a ও b উভয়ই নিঃশেষে বিভাজ্য। কিন্তু তা শর্ত বিরোধী অর্থাৎ এখানে আমরা contradiction দেখতে পাই। তাই d_1, (a,b) এর GCD বা গ.সা.গু হতে পারে না।

অর্থাৎ, $d_1 \neq \gcd(a,b)$

অতএব $\gcd(b,r) = d$

সুতরাং, $\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$

(প্রমাণিত)

এই উপপাদ্যটি অনেক গুরুত্বপূর্ণ। প্রবলেম সলভিং-এর ক্ষেত্রেও প্রচুর কাজে দেয়।

শেষ করার আগে আমি আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য নিয়ে একটু বলতে চাই, এই উপপাদ্যটি গ.সা.গু এবং ল.সা.গু এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে।

ধরি,

দুটি সংখ্যার গ.সা.গু gcd(a,b) = m এবং

উক্ত সংখ্যা দুটির ল.সা.গু lcm(a,b) = n,

তাহলে,

$$gcd(a,b) \times lcm(a,b) = m \times n = a \times b$$

আমার বিশ্বাস প্রমাণটা তোমরা নিজেরাই করতে পারবে। তোমাদের একটা হিন্ট দেই, a এবং b মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। এখন দেখ গ.সা.গু হলো মৌলিক সংখ্যার ছোট পাওয়ার গুলোর গুণফল এবং ল.সা.গু হলো বড় পাওয়ার গুলোর গুণফল। এখন দেখ a আর b কে গুণ করলে কি হয়?

মডুলার অ্যারিথমেটিক

আচ্ছা আমরা সাধারণত যখন ভাগের কথা বলি তখন আমরা সাধারণত ভাগফলের চিন্তা করি। কিন্তু বেচারা ভাগশেষকে আমরা সাধারণত পাত্তাই দিই না। যেমন তোমাকে যদি বলি, 2020 কে 672 ভাগ করলে কত হবে? তুমি কিন্তু আমাকে ভাগফলটাই বলবে ভাগশেষ নয়। কিন্তু ভাগশেষকে সবসময় অবহেলা করা ঠিক নয়। অনেক সমস্যা সমাধান প্রক্রিয়ায় ভাগশেষই হয় সমাধানের চাবিকাঠি। কম্পিউটার বিজ্ঞান এবং প্রোগ্রামিং-এ ভাগশেষ এর গুরুত্ব অত্যাদিক। এই অংশটিতে আমরা ভাগশেষ নিয়ে আলোচনা করব এবং এর গুরুত্ব কি তা নিয়েও আলোচনা করব।

চলো একটা উদাহরণ দিয়ে এর গুরুত্বটা আমরা বুঝি। ধর তোমাকে আমি বললাম 2021 সালের ডিসেম্বর এর 30 তারিখ কি বার হবে? তুমি কি করবে? সর্বপ্রথম ভাবতে পারো ক্যালেন্ডার দেখে বলে দেবে! কিন্তু না! আমি বললাম যে শুধু খাতা আর কলম ব্যাবহার করে তোমাকে বের করতে হবে। এখন তুমি পরে গেলে বিপদে! চলো এরকম বিপদ থেকে বের হওয়ার জন্য তোমাকে ভাগশেষের একটা চমৎকার ব্যাবহার শিখিয়ে দিই। ধর তুমি জানো আজকে কি বার, এখন ডিসেম্বর 30 আর আজকের দিনের মধ্যের পার্থক্য বের কর। এখন যদি আজকের তারিখকে 0 ধর তাহলে 7 তারিখ আবার আজকের বার হবে। (কেন সেটা নিজে চিন্তা কর) তাহলে সব তারিখকে 7 দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগশেষ আসে সেটা থেকে তারিখ বের করা খুবই সহজ। যদি ভাগশেষ 0 হয় তাহলে সেই দিন আর আজকের দিনের তারিখ এক আর ভাগশেষ অন্য কিছু হলে আজকের দিনের ভাগশেষ দিন পর যে তারিখ হয় সেটাই হবে উত্তর।

গুরুত্ব তো বোঝা হল, এখন আস শিখি কিভাবে এই ভাগশেষ এর অংকগুলো লিখতে হয়। ধর 15 কে 7 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 1 হয়। তাহলে এটাকে লেখা হবে $15 \equiv 1 \pmod 7$। আরেকটু গাণিতিকভাবে বললে a ও b দুটি সংখ্যা এবং $a = bq + p$ হলে, $a \equiv p \pmod b$ [a is congruent to p mod b]। চলো এখন মডুলার অ্যারিথমেটিক এর কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য দেখে নিই।

কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য

১. $a \equiv a \pmod m$

২. যদি $a \equiv b \pmod m$ এবং $b \equiv c \pmod m$ হয়, তবে $a \equiv c \pmod m$ হবে।

৩. $a \equiv c \pmod m$ হলে, $b \equiv a \pmod m$ হবে।

৪. যদি $a \equiv b \pmod m$ এবং $c \equiv d \pmod m$ হয়, তবে $a \pm b \equiv b \pm d \pmod m$ হবে।

৫. যদি $a \equiv b \pmod m$ হয়, তবে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা k-এর জন্য $ka \equiv kb \pmod m$

৬. যদি $a \equiv b \pmod m$ এবং $c \equiv d \pmod m$ হয়, তবে $ac \equiv bd \pmod m$ হবে।

৭. যদি $a \equiv b \pmod m$ হয়, তবে যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k-এর জন্য $a^k \equiv b^k \pmod m$ হয়।

৮. $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1,\cdots.,k$ হবে, যদি এবং কেবল যদি $a \equiv b \pmod{[m_1,\cdots.,m_k]}$ হয়। আরো স্পষ্ট করে বললে, যদি $m_1,\cdots..,m_k$-এর প্রতিটি পরস্পর সহমৌলিক হয় তবে $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = 1,2,..,k$ হবে, যদি এবং কেবল যদি $a \equiv b \pmod{m_1 m_2 \cdots . m_k}$ হয়।

৯. ধর p একটি মৌলিক সংখ্যা। যদি x,y পূর্ণসংখ্যা হয় যেন $xy \equiv 0 \pmod p$, তবে হয় $x \equiv 0 \pmod p$ অথবা $y \equiv 0 \pmod p$ অথবা দুটোই সত্য।

১০. ধর m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a, b, c তিনটি পূর্ণসংখ্যা, যেখানে $c \neq 0$। যদি $ac \equiv bc \pmod m$ হয়, তবে $a \equiv b \left(\bmod \frac{m}{lcm(c,m)}\right)$

কিছু গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য

আমরা মডুলার অ্যারিথমেটিক এর মৌলিক নিয়মগুলো তো শিখলাম, এখন চলো মডুলার অ্যারিথমেটিক সম্পর্কিত কিছু গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য শিখে নিই,

অয়লারের উপপাদ্য

যদি a এবং m পরস্পর সহমৌলিক সংখ্যা হয়, তবে $a^{\phi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$। যেখানে $\phi(m)$ হলো 1 থেকে m পর্যন্ত 1 সহ সকল m এর সকল সহমৌলিক সংখ্যা।

একটা উদাহরণ দিয়ে অয়লারের উপপাদ্য একটু ভালো করে বোঝানো যাক। 15 এবং 8 পরস্পর সহমৌলিক সংখ্যা। 1 – 15 পর্যন্ত 1 সহ 15 এর সহমৌলিক সংখ্যা 1,2,4,7,8,10,11,13,14 = 8টি। অর্থাৎ, $8^8 \equiv 1\ (mod\ 15)$।