RO05 Automne 2012 - Examen TP (Barème : 10, 10)

Ce TP doit être réalisé à l'aide du logiciel de calcul scientifique SCILAB.

Envoyer le script de vos programmes par courriel au plus tard à la fin des deux heures à : sergio.alvarez@utc.fr
La partie sur papier doit être rendue à la fin des deux heures.

Exercice 1.

1. Générer, à partir de nombres pseudo-aléatoires uniformément distribués sur $[0, 1]$, 500 réalisations de :

   (a) $X_1 \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 600$ et $p = 1/200$.

   (b) Tracer la fonction de répartition empirique correspondante. On rappelle que si $x_1, \ldots, x_n$, sont n réalisations d'une variable aléatoire X, la fonction de répartition empirique, notée $\hat{F}_n$ est définie par

   $$\hat{F}_n(x) = \frac{\text{Card}\{x_i \leq x; 1 \leq i \leq n\}}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (c) Faire le même travail en utilisant (si possible) une fonction SCILAB "directe". Comparer les fonctions de répartition théoriques et empiriques.

2. Générer n réalisations $x_1, \ldots, x_n$ d'une variable aléatoire Gaussienne centrée et réduite, puis vérifier la loi forte des grands nombres.

Exercice 2. On dispose de m molécules que l'on répartit initialement entre deux récipients A et B. À chaque pas de temps, on choisit une molécule au hasard parmi les m molécules et on la change de récipient. On note X_n le nombre de molécules présentes dans le récipient A au temps n. On prendra par la suite $m = 10$.

1. Donner un algorithme de simulation et tracer une trajectoire de cette CM.
2. i) Expliquer pourquoi cette CM admet une loi invariante π.
   ii) Vérifier que π est la loi $B(m, 1/2)$.
3. Illustrer le théorème ergodique par simulation, i.e. le fait que pour $x \in E$:

   $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} 1(X_i = x) \xrightarrow{p.s.} \pi(x), \quad \text{lorsque } n \to +\infty,$$

   par exemple application au cas où $x = 1$.