

PERSPECTIVES ACTUELLES D'APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES RÉCURRENCES LINÉAIRES D'ORDRE n

par A. HAUTOT, Dr Sc. et M. T. PLOUMHANS, Dr Sc.

ABSTRACT

We review the main properties of the solutions of a linear homogenous n -terms recurrence. The concept of dominance between the various solutions is carefully discussed. The notion of contrast is introduced. Attention is paid to the computational aspects attached to the possible unstability of recurrent algorithms. Formulae are emphasized that estimates the order of magnitude of the precision of recurrent algorithms. Tables are given that allow to determine the various asymptotes of a large class of n -terms recurrences. Various applications are presented in the frames of applied mathematics and of theoretical physics.

1. INTRODUCTION : POSITION DU PROBLÈME

C'est un fait assez étrange que la théorie des équations aux différences finies également appelées récurrences est beaucoup moins diffusée voire connue que la théorie des équations différentielles. Cela tient sans doute au fait que les sciences qui utilisent la mathématique appliquée n'ont aperçu que fort récemment l'intérêt que présentait la théorie des récurrences. A l'heure actuelle il n'existe qu'un nombre restreint d'ouvrages [1], [2] qui traitent des récurrences en s'en tenant cependant soit à des généralités soit à des cas trop particuliers qui ne peuvent satisfaire l'utilisateur exigeant. Plus récemment quelques auteurs ont tenté des essais en profondeur afin de combler les lacunes existantes. Les premiers résultats obtenus sont particulièrement intéressants. Parmi eux plusieurs n'existent qu'à l'état de conjectures non encore rigoureusement démontrées. Cette ombre au tableau sera vraisemblablement de courte durée. En attendant nous n'avons aucune raison de douter de la correction de toutes les hypothèses émises. Elles permettent dès à présent de résoudre un grand nombre de problèmes fort importants. Notre but en écrivant cet article est de présenter l'outil récurrence préalablement affûté, pour ainsi dire prêt à l'emploi. Nous consacrerons la dernière partie de cet article à quelques applications qui illustrent l'intérêt de la méthode.

Précisons d'abord les notations utilisées. Nous considérons la récurrence linéaire homogène écrite sous la forme canonique suivante :

$$A_k^{(n)} C_{k+1} + A_k^{(n-1)} C_k + \dots + A_k^{(0)} C_{k-n+1} = 0 \quad (1)$$

Elle contient $n + 1$ termes; on dit qu'elle est d'ordre n ($n \geq 1$). L'indice k peut

Postal address : University of Liège, Institute of Physics, Sart Tilman, par 4000 Liège 1 (Belgium).

Présenté par Antoine Hautot, le 18 janvier 1979.

parcourir l'intervalle infini des entiers relatifs. Il peut aussi parcourir un intervalle semi-infini (s, ∞) c'est-à-dire $k = s, s + 1, s + 2, \dots$ etc., s étant un entier fixé.

Il est connu qu'une récurrence linéaire d'ordre n telle que (1) possède n solutions linéairement indépendantes.

Lorsque la récurrence est à coefficients constants ($A_k^{(j)} = a_{j,0} = \text{ctes}, j = 0, 1, 2, \dots, n$) elle est soluble exactement sous forme finie et les n solutions sont du type

$$C_k = k^w z^k \quad (w = 0, 1, 2, \dots, \mu)$$

où z est solution de l'équation caractéristique

$$a_{n,0} z^n + a_{n-1,0} z^{n-1} + \dots + a_{0,0} = 0$$

avec la multiplicité μ .

Lorsque la récurrence n'est pas à coefficients constants, il n'est généralement plus possible d'écrire les solutions sous forme finie et un développement infini peut éventuellement s'imposer [1]. Toutefois cette approche est rarement intéressante car les coefficients de ce développement infini obéissent eux-mêmes à une récurrence qui est rarement plus simple que la récurrence de départ.

Dans ces cas complexes il est cependant possible de déterminer les comportements asymptotiques des solutions de la récurrence. On appelle asymptote de la solution C_k une expression réelle $as(k)$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|C_k|}{as(k)} = \text{cte}$. Elle est visiblement définie à une constante multiplicative près.

Rappelons que la récurrence de départ (1) possède n solutions linéairement indépendantes que nous notons $C_k^{(1)}, \dots, C_k^{(n)}$ dans un ordre à préciser ultérieurement. Cette récurrence étant linéaire, toute combinaison linéaire de ces n solutions est encore solution de (1). Au total la récurrence possède une n -uple infinité de solutions.

Le point fondamental est le suivant : toutes ces solutions ne possèdent pas nécessairement le même comportement asymptotique. En fait, il y a au plus n asymptotes différentes.

Nous appellerons système fondamental de solutions $C_k^{(1)}, \dots, C_k^{(n)}$ un ensemble de n solutions linéairement indépendantes telles que le produit de leurs asymptotes est minimum pour k choisi suffisamment grand :

$$\prod_{i=1}^n as^{(i)}(k) = \text{minimum} \quad (k \rightarrow \infty)$$

La numérotation des asymptotes et par conséquent celle des solutions est telle que on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{as^{(j)}(k)}{as^{(i)}(k)} = a < \infty \quad (\text{éventuellement zéro}) \text{ si } i < j$$

$$\text{donc aussi } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|C_k^{(j)}|}{|C_k^{(i)}|} = a < \infty \quad (\text{éventuellement zéro}) \text{ si } i < j$$

Lorsque $a = 0$, on dit que les deux solutions sont contrastées, $C_k^{(i)}$ dominant $C_k^{(j)}$ lorsque $i < j$. Si a n'est pas nul, les solutions $C_k^{(i)}$ et $C_k^{(j)}$ (et dès lors toutes celles $C_k^{(l)}$ telles que $i < l < j$) ne sont pas contrastées car elles possèdent la même asymptote et leur numérotation peut faire l'objet d'une permutation quelconque. Il est facile

de voir que le système fondamental est celui qui exhibe le contraste maximum entre les n solutions de la récurrence.

On peut caractériser symboliquement un système fondamental de solutions par les relations

$$\begin{cases} as^{(1)}(k) \geq as^{(2)}(k) \geq \dots \geq as^{(n)}(k) \\ as^{(1)} \cdot as^{(2)} \dots as^{(n)} = \text{minimum} \quad (k \rightarrow \infty) \end{cases}$$

l'égalité prévalant dans la première relation lorsque deux ou plusieurs solutions ne sont pas contrastées. La solution $C_k^{(1)}$ est dite dominante. La solution $C_k^{(n)}$ est dite dominée, $C_k^{(i)}$ domine $C_k^{(j)}$ si $i < j$ sauf le cas où les asymptotes correspondantes ne seraient pas contrastées. On appelle facteur de contraste entre deux solutions consécutives $C_k^{(i)}$ et $C_k^{(i+1)}$ le quotient :

$$\rho_k^{(i)} = |C_k^{(i+1)}| / |C_k^{(i)}| \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, il tend vers zéro ou vers une constante positive selon que les deux solutions sont contrastées ou non.

Considérons, à titre d'exemple, le cas le plus simple où toutes les asymptotes du système fondamental sont contrastées. On verra plus loin que ce cas est fréquent : c'est notamment le cas de toutes les récurrences de Poincaré dont l'équation caractéristique possède des racines de modules distincts. Il est clair que la solution générale peut s'écrire :

$$\lambda_1 C_k^{(1)} + \lambda_2 C_k^{(2)} + \dots + \lambda_n C_k^{(n)}$$

Elle possède un comportement asymptotique dominant $as^{(1)}(k)$ si $\lambda_1 \neq 0$. Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, elle possède le comportement asymptotique $as^{(2)}(k)$. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 \neq 0$, etc. Il existe donc une n -uple infinité de solutions possédant l'asymptote $as^{(1)}(k)$; il y a de même une $(n-1)$ -uple infinité de solutions d'asymptote $as^{(2)}(k)$... et il y a enfin une simple infinité de solutions dominées d'asymptote $as^{(n)}(k)$ d'ailleurs toutes identiques entre elles à une constante multiplicative près. Il est possible d'exprimer ces considérations autrement encore : pour engendrer de façon récurrente une solution particulière de (1) il faut partir de n conditions initiales; disons qu'il faut se donner $C_0, C_{-1}, \dots, C_{1-n}$:

- si l'on veut engendrer une solution dominée $C_k^{(n)}$, il n'est pas question de choisir ces valeurs arbitrairement; seul C_0 (par exemple) peut être quelconque mais une fois qu'il est fixé, C_{-1}, \dots, C_{1-n} sont imposés. Nous verrons plus loin (au § 3) un procédé numérique qui permet de les déterminer;
- si l'on veut construire une solution du type $C_k^{(n-1)}$ qui est dominée par toutes les autres sauf par $C_k^{(n)}$ qu'elle domine, il est possible de choisir C_0 et C_{-1} arbitrairement tandis que C_{-2}, \dots, C_{1-n} ne peuvent pas prendre des valeurs arbitraires. Parmi toutes les valeurs que C_{-1} peut prendre on exclura cependant celle qui engendre une solution dominée $C_k^{(n)}$.
- et ainsi de suite pour toutes les solutions intermédiaires.
- enfin si l'on veut construire une solution dominante $C_k^{(1)}$, on peut partir de conditions initiales arbitraires sauf qu'il faut prendre soin que n'existent pas entre celles-ci une des relations qui caractérisent les solutions dominées par $C_k^{(1)}$.

Des considérations analogues se développent sans peine dans le cas où certaines solutions du système fondamental ne sont pas contrastées.

Pour fixer les idées voici deux exemples qui éclairent la portée de ce qui précède.

1^{er} exemple : soit la récurrence d'ordre 3,

$$(k^2 - 2k + 4)C_{k+1} - 3k^2 C_k + (3k^2 + 2k)C_{k-1} - (k^2 + 1)C_{k-2} = 0 \quad (2)$$

elle possède un système fondamental de solutions asymptotiques à

$$C_k^{(1)} \sim k^{11/8} \exp(4\sqrt{k}) = as^{(1)}(k) = \text{solution dominante}$$

$$C_k^{(2)} \sim k^{3/4} = as^{(2)}(k) = \text{solution intermédiaire}$$

$$C_k^{(3)} \sim k^{11/8} \exp(-4\sqrt{k}) = as^{(3)}(k) = \text{solution dominée}$$

lorsque $k \rightarrow \infty$.

On verra plus loin comment faire pour obtenir ces comportements asymptotiques.

Les 3 solutions sont bien contrastées. Les contrastes valent

$$\rho_k^{(1)} = k^{-5/8} \exp(-4\sqrt{k})$$

$$\rho_k^{(2)} = k^{5/8} \exp(-4\sqrt{k})$$

2^e exemple : soit la récurrence d'ordre 2,

$$(k + 2)C_{k+1} - (2k + 1)C_k + kC_{k-1} = 0$$

elle possède un système fondamental de solutions asymptotiques à

$$C_k^{(1)} \sim k^{-3/4} \exp(2i\sqrt{k}) \rightarrow as^{(1)}(k) = k^{-3/4}$$

$$C_k^{(2)} \sim k^{-3/4} \exp(-2i\sqrt{k}) \rightarrow as^{(2)}(k) = k^{-3/4}$$

lorsque $k \rightarrow \infty$.

Les deux solutions ne sont pas contrastées et leur numérotation pourrait être inversée puisqu'aucune solution ne domine l'autre et qu'aucune combinaison linéaire ne peut faire apparaître de contraste ($\rho_k^{(1)} = 1$).

2. INSTABILITÉ DU CALCUL RÉCURRENT PROGRESSIF DANS LE CAS D'UNE SOLUTION NON DOMINANTE

L'intérêt pratique du formalisme récurrent repose en partie sur le fait qu'il se prête très facilement au calcul sur ordinateur. Une récurrence du type (1) autorise à priori deux modes de calcul bien différenciés :

- le calcul progressif part d'un ensemble de n conditions initiales, par exemple $C_0, C_{-1}, \dots, C_{1-n}$ et détermine de proche en proche C_1, C_2, C_3, \dots , etc.
- le calcul régressif part d'un ensemble de n conditions initiales, par exemple $C_N, C_{N+1}, \dots, C_{N+n-1}$ et détermine de proche en proche $C_{N-1}, C_{N-2}, \dots, C_0$ (en pratique, on choisit N suffisamment grand).

Ces deux méthodes paraissent à première vue strictement équivalentes et en fait elles le sont en théorie, soit par exemple si l'ordinateur qui va effectuer le calcul possède une précision infinie. En pratique cependant, les choses sont beaucoup moins simples à cause de la précision forcément limitée de l'ordinateur. Il est connu que seule la solution dominante peut être calculée de façon stable via le mode pro-

gressif tandis que le mode régressif ne convient que pour le calcul de la solution dominée. Dans tous les autres cas, il se produit un phénomène de pollution de la solution recherchée par les solutions qui la dominent (cas du calcul progressif), ou qu'elles dominent (cas du calcul régressif) et on a que l'ordre de grandeur du facteur de pollution vaut si l'on calcule la solution $C_k^{(i)}$ en mode progressif :

erreur absolue = $P C_k^{(1)}$ où P est la précision de l'ordinateur.

D'où si l'on calcule $C_k^{(i)}$ par la voie progressive, la précision notée e^{-p} vaut :

$$\text{précision} = e^{-p} \sim P C_k^{(1)} / C_k^{(i)} = P / [\rho_k^{(1)} \rho_k^{(2)} \dots \rho_k^{(i-1)}]$$

Lorsque k augmente, on constate que cette précision peut chuter de façon dramatique particulièrement si le contraste est grand entre la solution cherchée $C_k^{(i)}$ et la solution dominante $C_k^{(1)}$. Dans le cas de la récurrence (2) supposons que l'on essaie de calculer la solution intermédiaire $C_k^{(2)}$ à partir des conditions initiales qui conviennent, on a que la précision sur $C_k^{(2)}$ vaut :

$$e^{-p} \sim P \exp(4 \sqrt{k}) k^{5/8}$$

Avec un ordinateur travaillant en double précision ($P = 10^{-16}$) on a que l'erreur atteint 4 % dès que l'on essaie de calculer $C_{60}^{(2)}$.

L'erreur introduite est encore beaucoup plus grande si l'on essaie de calculer $C_k^{(3)}$ par la même méthode.

Précision sur $C_k^{(3)} \sim P \exp(8 \sqrt{k})$, elle atteint 6 % dès que k vaut 18.

Par ailleurs, MILLER [3] a montré que seule la solution dominée pouvait être calculée de façon stable via le mode régressif. Cela se comprend aisément du fait que lorsqu'on utilise la récurrence à rebours, la solution qui était dominante devient dominée et vice-versa. En pratique, l'algorithme de MILLER part de conditions initiales arbitraires, par exemple $C_N = 1$ et $C_{N+1} = C_{N+2} = \dots = C_{N+n-1} = 0$, et effectue le calcul récurrent régressif. Cela fait, on normalise la séquence obtenue en divisant tous les C_k par C_0 ce qui revient à poser systématiquement $C_0 = 1$. Si on recommence l'opération en faisant grandir N , on constate généralement que les $C_0 = 1$, C_1 , C_2 , C_3 , ..., tendent vers des valeurs bien déterminées qui coïncident avec la solution dominée cherchée. Il n'existe pas à l'heure actuelle de théorie absolument générale traitant de la convergence de cet algorithme. Ce que l'on en sait suffit cependant pour en recommander l'usage; aucun exemple n'est en effet connu où l'algorithme fonctionne de manière stable sans converger vers la solution dominée [4]. L'importance de l'algorithme de MILLER provient de ce qu'il permet de calculer de façon très simple la solution dominée d'une récurrence. Or cette solution joue dans les applications un rôle tout à fait spécial qui la rend particulièrement digne d'intérêt. Nous aurons à revenir sur ce point.

3. ALGORITHME DE MILLER GÉNÉRALISÉ

Dans le cas où la récurrence considérée est d'ordre supérieur à deux, il existe une ou plusieurs solutions intermédiaires qui ne peuvent donc généralement pas être calculées de façon stable ni par le mode progressif, ni par le mode régressif. C'est la raison qui nécessite le recours à un algorithme de portée plus générale qui permette le calcul de toutes les solutions quel que soit leur degré de dominance. Cet algorithme existe et a fait l'objet d'études diverses [5], [6].

On procède comme suit : ayant à déterminer de façon stable la solution $C_k^{(i)}$, on récrit la récurrence sous la forme d'un système linéaire infini en posant successivement dans la récurrence : $k = i - 1, \dots, \infty$. Hors de ce système infini, on extrait un sous-système de dimension K suffisamment grande en négligeant dans les dernières équations les termes qui contiennent des C_k d'indice supérieur à K . En notation matricielle, on obtient l'équation de la page précédente.

Les coefficients $C_0, C_{-1}, \dots, C_{i-n}$ qui figurent au second membre sont les conditions initiales qui vu l'état de dominance de la solution que l'on a en vue, peuvent être choisies arbitrairement afin que le problème n'ait qu'une solution. Une fois que ces valeurs sont décidées, il suffit de résoudre le système pour obtenir $C_1^{(i)} \dots C_K^{(i)}$ de façon généralement stable : si on augmente la valeur de K , les $C_k^{(i)}$ d'indice k petit tendent vers des valeurs fixes qui sont les valeurs cherchées. Naturellement ce procédé ne donne correctement $C_k^{(i)}$ que pour k suffisamment petit devant K (il est clair, en effet, que $C_K^{(i)}$ ne saurait être correct puisque dans les dernières équations on a ignoré des termes).

En pratique, l'erreur relative commise sur $C_k^{(i)}$ vaut dans tous les cas où il existe un contraste entre la solution $C_k^{(i)}$ et $C_k^{(i-1)}$:

$$\text{précision sur } C_k^{(i)} = e^{-p} \sim \rho_K^{(i-1)} / \rho_k^{(i-1)} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (3)$$

Cette relation est utile en ce qu'elle permet d'estimer la dimension K du sous-système à résoudre pour obtenir $C_1^{(i)}, \dots, C_K^{(i)}$ avec une précision donnée.

L'erreur relative sur $C_k^{(1)}$ est évidemment nulle puisque l'algorithme de MILLER généralisé est équivalent dans ce cas au calcul progressif des C_k qui est stable pour la solution dominante.

Exemple numérique : reprenons la récurrence (2) et cherchons à déterminer la solution intermédiaire $C_k^{(2)}$ dans le domaine $k = 1, \dots, 50$ avec une précision de 10^{-10} (ce qui suppose naturellement l'utilisation d'un ordinateur de précision au moins égale à 10^{-10}). On a :

$$10^{-10} \sim \rho_K^{(1)} / \rho_{50}^{(1)} = \frac{K^{-5/8} \exp(-4\sqrt{K})}{50^{-5/8} \exp(-4\sqrt{50})}$$

Soit $K \sim 160$. Il faut donc résoudre un sous-système de dimension 160 pour obtenir $C_1^{(2)}, \dots, C_{50}^{(2)}$ avec la précision de 10^{-10} exigée. En fait les $C_k^{(2)}$ tels que $k < 50$ sont corrects avec une précision meilleure que 10^{-10} tandis que les $C_k^{(2)}$ ($k > 50$) sont corrects avec une précision moindre. Tout cela est inscrit dans la formule précédente.

On voit sur cet exemple que la notion de contraste est importante puisqu'elle permet d'évaluer le degré de précision des algorithmes utilisés dans les calculs récurrents. Nous verrons plus loin d'autres exemples où cette notion s'avère également essentielle. Encore faut-il être en mesure de déterminer les comportements asymptotiques des solutions d'une récurrence à partir de l'énoncé de celle-ci.

4. DÉTERMINATION DES ASYMPTOTES D'UNE RÉCURRENCE LINÉAIRE HOMOGÈNE A COEFFICIENTS RATIONNELS

Il est effectivement possible de déterminer les asymptotes d'une classe de récurrences du type (1) assez vaste telle que les coefficients $A_k^{(j)}$ peuvent être écrits sous la forme :

$$A_k^{(j)} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{j,p} k^{-p/r} \quad (4)$$

(où r est un entier fixé et où les $a_{j,0}$ ne sont pas tous simultanément nuls).

En fait nous étudierons uniquement les récurrences qui autorisent des développements du type (4) pour leurs coefficients. Dans ce cas, la récurrence (1) est dite régulière au sens de POINCARÉ de type r si on a en plus que $a_{0,0} \neq 0$ et $a_{n,0} \neq 0$. Elle est irrégulière si ces dernières conditions ne sont pas satisfaites.

Occupons-nous d'abord des récurrences régulières. On appelle équation caractéristique de la récurrence l'équation algébrique :

$$a_{n,0} z^n + a_{n-1,0} z^{n-1} + \dots + a_{0,0} = 0$$

Elle possède n racines, distinctes ou non, réelles ou non, peu importe. Plusieurs études successives de NÖRLUND [17], BIRKHOFF [18], CULMER [19] (dans le cas $n = 2$) et TURRITTIN [20] ont montré que les asymptotes des n solutions linéairement indépendantes de la récurrence sont du type

$$as(k) = z^k k^w \exp \left[\alpha k^{\frac{m-1}{m}} + \beta k^{\frac{m-2}{m}} + \dots + \gamma k^{\frac{1}{m}} \right] (\ln k)^g \quad (5)$$

où m est un entier inférieur ou égal à $r \cdot \mu$, où μ est la multiplicité de z comme solution de l'équation caractéristique et où les constantes $w, \alpha, \beta, \dots, \gamma, g$ doivent être déterminées par le calcul. En pratique, on procède à cette détermination comme suit [7] : on introduit l'asymptote (5) dans la récurrence et on développe tous les termes en puissance de $k^{-1/m}$, ensuite on identifie à zéro les puissances de k des rangs les plus élevés ce qui livre en général les relations qui permettent d'évaluer les constantes $\alpha, \beta, \dots, \gamma, w$.

Les tableaux qui sont joints en annexe livrent les résultats complets des calculs pour les récurrences régulières au sens de POINCARÉ du type 1 (racines z simples, doubles, triples et quadruples), du type 2 (racines z simples, doubles et triples), du type 3 (racines z simples et doubles), et des types 4, 5 et 6 (racines z simples). Leur mode d'emploi est le suivant : soit la récurrence (1) telle que ses coefficients revêtent tous la forme (4). On forme l'équation caractéristique possédant n racines :

$$a_{n,0} z^n + a_{n-1,0} z^{n-1} + \dots + a_{0,0} = 0$$

Chaque racine z est obtenue avec sa multiplicité μ . On peut alors modifier la récurrence en posant : $C_k = z^k \gamma_k$. On obtient une nouvelle récurrence en γ_k dont l'équation caractéristique possède une racine de multiplicité μ au point $z = 1$.

Les tableaux en annexe ne sont valables que lorsque cette opération préalable a été effectuée (et en fait, elle doit être recommencée pour chaque racine z). Il suffit alors d'écrire directement la forme des asymptotes en se conformant scrupuleusement aux branchements prévus dans le tableau. Tous les résultats sont exprimés en termes des symboles $\sigma(p, q)$ définis par :

$$\sigma(p, q) = \sum_{j=0}^n j^p a_{j,q}$$

(avec $0^0 = 1$ lorsque j et p sont nuls simultanément).

Ces tableaux sont à notre connaissance les plus complets existant à ce jour.

Les cas qui ne sont pas repris aux tableaux ($r = 1$ et $\mu > 4$, $r = 2$ et $\mu > 3$, $r = 3$ et $\mu > 2$, $r = 4, 5$ ou 6 et $\mu > 1$, $r > 6$) se traitent de la même manière sauf que les calculs analytiques deviennent de plus en plus longs et fastidieux. De plus le détail des résultats relatifs à ces cas présente des branchements toujours plus nombreux que nous renonçons faute de place à présenter ici.

Exemple : reprenons la récurrence (2)

$$(1 - 2k^{-1} + 4k^{-2})C_{k+1} - 3C_k + (3 + 2k^{-1})C_{k-1} - (1 + k^{-2})C_{k-2} = 0$$

$j = 3$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 0$
$a_{3,0} = 1$	$a_{2,0} = -3$	$a_{1,0} = 3$	$a_{0,0} = -1$
$a_{3,1} = -2$	autres nuls	$a_{1,1} = 2$	$a_{0,1} = 0$
$a_{3,2} = 4$		autres nuls	$a_{0,2} = -1$
autres nuls			autres nuls

L'équation caractéristique est :

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0$$

dont la racine est $z = 1$, triple. On calcule sans peine :

$$\begin{aligned} \sigma(0, 0) &= \sigma(1, 0) = \sigma(2, 0) = 0 \\ \sigma(3, 0) &= 6 & \sigma(0, 1) &= 0 & \sigma(2, 1) &= -16 \\ \sigma(4, 0) &= 36 & \sigma(1, 1) &= -4 & \sigma(0, 2) &= 3 \end{aligned}$$

On se trouve dans le cas d'une récurrence de POINCARÉ du type 1, $z = 1$ étant racine triple de l'équation caractéristique. La solution dans ce cas est donnée par la rubrique : Type 1 — Racine triple § 2-1 avec $Q_2 = -5/2$. Les asymptotes valent :

$$\begin{aligned} C_k^{(1)} &\sim k^{11/8} \exp(4\sqrt{k}) \\ C_k^{(2)} &\sim k^{3/4} \\ C_k^{(3)} &\sim k^{11/8} \exp(-4\sqrt{k}) \end{aligned}$$

Dans les cas très nombreux où la récurrence n'est pas régulière au sens de POINCARÉ, soit que $a_{n,0}$ est nul ou que $a_{0,0}$ l'est (ou les deux), on procède comme suit (méthode de BRANDERS [8] étendue ici aux cas fréquents où τ n'est pas entier; cf. ci-dessous pour la définition de τ). On forme l'équation caractéristique :

$$A_k^{(n)} z^n + A_k^{(n-1)} z^{n-1} + \dots + A_k^{(0)} = 0$$

en ne retenant que le terme principal en k dans chaque coefficient $A_k^{(j)}$ (c'est-à-dire le premier terme $a_{j,p} k^{-p/r}$ non nul). Ensuite on résout l'équation caractéristique en recherchant les n racines sous la forme approchée $z \sim \rho k^\tau$ (k étant supposé très grand). Soit ν la multiplicité de l'exposant τ . Pour découvrir les ν asymptotes associées à chacune des racines revêtant cette forme, on pose : $C_k = \rho^k [\Gamma(k)]^\tau \gamma_k$ que l'on introduit dans la récurrence. On obtient ainsi une nouvelle récurrence portant sur γ_k . L'équation caractéristique de cette nouvelle récurrence possède nécessairement une racine de multiplicité ν en $z = 1$. Les asymptotes qui lui sont associées se calculent par la méthode décrite plus haut comme si la récurrence satisfaite par γ_k était régulière au sens de POINCARÉ. Exemple : soit la récurrence

$$q C_{k+1} + 4(k+1)^2 C_k + q C_{k-1} = 0$$

(où q est une constante quelconque; cette récurrence intervient dans la théorie des fonctions de MATHIEU). Elle n'est pas régulière. On forme l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} q z^2 + 4k^2 z + q &= 0 & \text{dont les racines sont asymptotiques à :} \\ z_1 &\sim -(4/q)k^2 \\ z_2 &\sim -(q/4)k^{-2} & \text{lorsque } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Ces racines simples sont du type ρk^τ . Considérons z_1 ; on a

$$\rho = -4/q \text{ et } \tau = 2$$

On pose donc :

$$C_k = (-4/q)^k [\Gamma(k)]^2 \gamma_k$$

on trouve pour γ_k , la récurrence :

$$\gamma_{k+1} - (1 + k^{-1})^2 \gamma_k + \frac{q^2}{16} k^{-2} (k-1)^{-2} \gamma_{k-1} = 0$$

On détermine sans peine l'asymptote en procédant comme indiqué précédemment (cf. Tableau — Type 1, Racine simple) :

$$\gamma_k \sim k^{3/2}$$

Soit

$$C_k^{(1)} \sim (-4/q)^k k!^2$$

Considérant d'autre racine z_2 , on trouverait pour l'autre solution, le comportement asymptotique suivant :

$$C_k^{(2)} \sim (-q/4)^k k!^{-2} k^{-2}$$

On constate que la numérotation de ces deux solutions est correcte puisque $C_k^{(1)}$ domine effectivement $C_k^{(2)}$.

5. APPLICATIONS

5.1. Applications aux fractions continues (fc).

Il est connu [9] qu'à toute fc

$$fc = a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \dots}}}$$

est associée la récurrence d'ordre deux :

$$-b_k C_{k+1} + a_k C_k + C_{k-1} = 0$$

Il existe un grand nombre d'ouvrages qui traitent de la convergence de ces fc [10]. En fait tous ces théorèmes sont des cas plus ou moins particuliers du seul théorème ayant une portée vraiment générale à savoir le théorème de PINCHERLE : « Une fc est convergente si la récurrence associée possède une solution dominée $C_k^{(2)}$ telle que $C_0^{(2)} \neq 0$ et dans ce cas la valeur de la fc est $fc = -C_{-1}^{(2)} / C_0^{(2)}$ ».

Ce théorème supplante tous les autres dans la mesure où il est possible de calculer les comportements asymptotiques des solutions de la récurrence associée à la fc.

Il est d'ailleurs possible d'ajouter une précision importante à ce théorème : si on limite la fc infinie à sa réduite d'ordre k , l'erreur relative e^{-p} commise est de l'ordre de grandeur de :

$$\text{précision sur la réduite d'ordre } k = e^{-p} \sim \left| \frac{C_k^{(2)}}{C_k^{(1)}} \right| = \rho_k^{(1)}$$

ou encore

$$p = -\ln \rho_k^{(1)} \quad (6)$$

On pourrait à partir de là, définir une vitesse de convergence de la fc par la relation :

$$v = \frac{p(k+1) - p(k)}{(k+1) - k} = \ln \frac{\rho_k^{(1)}}{\rho_{k+1}^{(1)}}$$

Mais en fait, la relation sommatoire (6) est plus intéressante puisqu'elle donne immédiatement l'ordre de la réduite à prendre en considération pour le calcul de la fc avec une précision imposée e^{-p} .

La fc converge donc d'autant plus rapidement que le contraste est grand entre la solution dominante et la solution dominée de la récurrence associée. A la limite, lorsque le contraste est nul ($\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k^{(1)} = 1$) la fc diverge.

Exemples : nous présentons à titre d'exemples six fc aux vitesses de convergence complètement différentes dues à des contrastes divers entre solutions dominantes et dominées de la récurrence associée. La valeur de k notée entre parenthèse donne l'indice de la réduite à prendre en considération pour obtenir la fc avec la précision de $10^{-10} \sim e^{-23}$.

$$fc = a_0 + \underline{b_0} \mid a_1 + \underline{b_1} \mid a_2 + \underline{b_2} \mid a_3 + \dots$$

avec successivement :

a) $a_k = (k+1)^2$ et $b_k = -1$

On calcule sans peine par la méthode exposée plus haut :

$$\begin{aligned} |C_k^{(1)}| &\sim k!^2 \text{ et } |C_k^{(2)}| \sim k!^{-2} k^{-2} \\ e^{-p} &\simeq k!^{-4} k^{-2} \text{ d'où } p = 2 \ln(k!^2 k) \quad (k = 5) \end{aligned}$$

b) $a_k = -4$ et $b_k = -3$

On trouve : $C_k^{(1)} \sim 1$ et $C_k^{(2)} \sim 3^{-k}$

$$e^{-p} \simeq 3^{-k} \text{ d'où } p = k \ln 3 \quad (k = 21)$$

c) $a_k = -\frac{2k+3}{k+1}$ et $b_k = -1$

On trouve : $C_k^{(1)} \sim k^{1/4} \exp(2\sqrt{k})$ et $C_k^{(2)} \sim k^{1/4} \exp(-2\sqrt{k})$

$$e^{-p} \sim e^{-4\sqrt{k}} \text{ d'où } p = 4\sqrt{k} \quad (k = 33)$$

d) $a_k = -\frac{2k+7}{k+2}$ et $b_k = -\frac{k+5}{k+2}$

On trouve : $C_k^{(1)} \sim 1$ et $C_k^{(2)} \sim k^{-2}$

$$e^{-p} \simeq k^{-2} \text{ d'où } p = 2 \ln k \quad (k = 98715)$$

e) $a_k = -\frac{2k^2 - k + 1}{k^2 + 1}$ et $b_k = -\frac{k^2 - k + 1}{k^2 + 1}$

On trouve : $C_k^{(1)} \sim k \ln k$ et $C_k^{(2)} \sim k$

$$e^{-p} \simeq 1/\ln k \text{ d'où } p = \ln(\ln k) \quad (k = 10^{4232114363}!!)$$

f) $a_k = 1$ et $b_k = -1$

On trouve : $|C_k^{(1)}| \sim 1$ et $|C_k^{(2)}| \sim 1$

$e^{-p} = 1$ d'où $p = 0$ la fc diverge.

On constate sur ces exemples que pour qu'une fc puisse être calculée dans des délais de temps raisonnable par la méthode des réduites, il faut qu'il existe un contraste au moins exponentiel entre les deux solutions de la récurrence associée.

5.2. Application aux déterminants de Hill.

Les mêmes considérations s'appliquent aux fractions continues généralisées (fcg) qui sont aux récurrences d'ordre n ce que les fc ordinaires sont aux récurrences d'ordre deux. Il est possible de généraliser à leur endroit le théorème de PINCHERLE ainsi que ses conséquences.

Considérons la récurrence (1) supposée valable pour $k = s, s+1, \dots$ et telle que $C_k = 0$ si $k < 0$. Si l'on détaille la récurrence en l'écrivant sous la forme d'un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues C_0, C_1, \dots le déterminant de la matrice de ce système infini, appelé déterminant de Hill du problème, s'écrit sous la forme suivante :

$$D = \begin{vmatrix} A_s^{(n-s-1)} & \dots & \dots & A_s^{(n)} & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \\ \vdots & & & & & 0 \\ A_{n-1}^{(0)} & \dots & & & A_{n-1}^{(n)} & \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & \dots & & & \vdots & \end{vmatrix}$$

On appelle $D^{(k)}$ approximant d'ordre k du déterminant de Hill, le résultat de la troncature du déterminant infini D lorsqu'on ne retient que les k premières lignes et les k premières colonnes :

$$D^{(k)} = \begin{vmatrix} A_s^{(n-s-1)} & \dots & A_s^{(n)} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & & & & 0 \\ A_{n-1}^{(0)} & \dots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ & & & A_{k-2}^{(n)} & \\ & & & \vdots & \\ 0 & \dots & & & \\ & & A_{k+s-1}^{(0)} & \dots & A_{k+s-1}^{(n-s-1)} \end{vmatrix}$$

Il semblerait naturel de définir le déterminant de Hill comme la limite de $D^{(k)}$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Ce n'est généralement pas possible parce que cette limite existe rarement. C'est pourquoi on préfère définir une fcg sous la forme d'un quotient $D^{(k)} / G^{(k)}$

$$fcg = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D^{(k)}}{G^{(k)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{dtm}{\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ dtm & 0 & & D^{(k)} & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \end{array}}$$

Cette définition est empruntée à RUTISHAUSER [11]. Il existe d'autres définitions plus générales qui ne nous intéressent pas ici. La théorie de ces *fcg* est développée dans l'ouvrage de MAGNUS [12].

En particulier, la convergence de ces *fcg* entraîne qu'il est possible de scinder l'ensemble des solutions du système fondamental des solutions de la récurrence d'ordre n associée en deux sous-ensembles contenant respectivement $(s + 1)$ solutions et $(n - s - 1)$ solutions, toutes les solutions du 1^{er} groupe dominant celles du 2^e groupe.

La précision obtenue en réduisant la *fcg* à sa réduite d'ordre k vaut :

$$\text{précision : } e^{-p} \simeq \rho_k^{(s+1)} \quad (7)$$

Cette formule est la généralisation attendue de (6).

Dans les applications pratiques que l'on a en vue, il est généralement question de déterminer les valeurs propres (vp) d'une équation différentielle; celles-ci apparaissent comme les racines d'une *fcg* associée à une certaine récurrence d'ordre n ou ce qui revient au même comme les racines du déterminant de Hill associé à cette même récurrence. On a de plus que la précision obtenue dans le calcul de ces vp en réduisant le déterminant de Hill à son approximant d'ordre k est donnée par la relation (7). Quant à la fonction propre associée à la vp calculée, elle se détermine numériquement comme la solution dominée de la récurrence avec l'aide de l'algorithme de MILLER, simple ou généralisé.

Exemple n° 1 : recherche des solutions à carré intégrable d'une équation différentielle du type de Schrödinger.

Nous avons consacré un mémoire entier [13] à la recherche des états propres de l'équation de Schrödinger par la méthode du déterminant de Hill, sans nous préoccuper d'évaluer le degré de précision que la méthode était susceptible de fournir. Dans le but de combler cette lacune, nous avons effectué les études théoriques préalables que nous avons publiées par ailleurs ainsi que l'application aux oscillateurs x^{2m} [14].

Nous explicitons ici, la méthode dans quelques cas inédits. D'autre part, la technique est tout à fait générale et peut donc être utilisée très largement dans tous les cas où l'équation différentielle est à coefficients rationnels, le cas échéant après un changement de variable adéquat.

Recherchons à titre d'exemple, les vp E de l'équation

$$\psi'' + (E - A s \hbar^2 x) \psi = 0$$

telle que ψ est carré intégrable ($A > 0$).

Si nous convenons de nous limiter aux états pairs, on pose :

$$\psi = \sum_0^{\infty} C_k/k! D_{2k}(\omega x)$$

où les fonctions D_{2k} sont les fonctions du cylindre parabolique [15] et où ω est un paramètre réel pour l'instant arbitraire.

Introduisant cette expression de ψ dans l'équation différentielle, on trouve pour les C_k , la récurrence d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} & (4k^2 - 1)C_{k+1} + (4k - 2)(\omega^2/4 - A/\omega^2 - 1/2)C_k \\ & + [E + (4k - 3)(\omega^2/4 + 1 - A/\omega^2 - 2k) - \omega^2(2k - 3/2) + 6k^2 - 7k + 7/4] C_{k-1} \\ & + (k - 1)(\omega^2/4 - A/\omega^2 + 1/2)C_{k-2} + [(k - 1)(k - 2)/4] C_{k-3} = 0 \\ & (k = 1, 2, 3, \dots; s = 1) \end{aligned}$$

Appliquant la théorie ci-dessus, on trouve les quatre asymptotes :

$$\begin{aligned} & 2^{-k} k^{-1/4} \exp [\sqrt{8 A k/\omega}] \\ & 2^{-k} k^{-1/4} \exp [-\sqrt{8 A k/\omega}] \\ & (-2)^{-k} k^{-3/4} \exp [\omega \sqrt{2k}] \\ & (-2)^{-k} k^{-3/4} \exp [-\omega \sqrt{2k}] \end{aligned}$$

Pour numérotter ces asymptotes, il faut connaître leur ordre de dominance. Il varie selon que $\omega^2 > 2\sqrt{A}$ ou $\omega^2 < 2\sqrt{A}$:

— si $\omega^2 > 2\sqrt{A}$, on calcule :

$$\begin{aligned} \rho_k^{(2)} &= \exp(-2\sqrt{8 A k/\omega}) \text{ d'où vu (7)} \\ p &= 2\sqrt{8 A k/\omega} \end{aligned} \quad (8a)$$

— si $\omega^2 < 2\sqrt{A}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \rho_k^{(2)} &= \exp(-2\omega\sqrt{2k}) \text{ d'où} \\ p &= 2\omega\sqrt{2k} \end{aligned} \quad (8b)$$

Si on fixe k et qu'on fait varier ω entre 0 et l'infini, on a que la précision est optimale (c'est-à-dire p est maximum) si on choisit pour ω , la valeur critique : $\omega_{\text{opt}} = \sqrt{2\sqrt{A}}$. C'est lorsque ω prend cette valeur que la dimension k_{opt} de l'approximant du déterminant de Hill susceptible de livrer l'état fondamental avec la précision e^{-p} est minimale à la valeur :

$$k_{\text{opt}} = p^2 / (16\sqrt{A})$$

Par exemple, si $A = 1$ on obtiendra l'état fondamental avec dix chiffres corrects ($p = 23$) en cherchant la plus petite racine de l'approximant du déterminant de Hill de dimension proche de $k_{\text{opt}} = 23^2/16\sqrt{1} = 33$ à condition de fixer ω à la valeur optimale $\sqrt{2}$.

Si l'on s'écarte de cette valeur optimale pour ω , la dimension de l'approximant à prendre en considération est plus élevée ce qui représente une perte de temps de calcul.

Exemple n° 2 : recherche des solutions périodiques.

On reprend la même équation différentielle mais cette fois, on recherche les vp E correspondant aux solutions périodiques. Ce problème est équivalent à celui posé par la résolution de l'équation de MATHIEU. Nous limitant aux solutions impaires de période $i\pi$, on les cherche sous la forme :

$$\psi = \sum_0^{\infty} C_k sh(2k+2)z$$

d'où la récurrence pour les C_k :

$$-A/4 C_{k+1} + [E + 4(k+1)^2 + A/2] C_k - A/4 C_{k-1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Les asymptotes des deux solutions de cette récurrence sont :

$$C_k^{(1)} \sim (16/A)^k k!^2 \text{ et } C_k^{(2)} \sim (A/16)^k k!^{-2} k^{-2}$$

d'où

$$p = \ln \frac{k!^4 k^2}{(A/16)^{2k}} \quad (9)$$

Si $A = 1$, on obtient l'état fondamental avec la précision 10^{-10} ($p = 23$) en calculant la plus petite racine de l'approximant de dimension 3. Comparant les relations (8a et b) et (9), on constate que sauf le cas où A serait extrêmement grand, la recherche des vp correspondantes aux états périodiques se fait de façon nettement plus économique que celle des états à carré intégrable.

Exemple n° 3 : calcul des racines de certaines fonctions.

La même méthode permet aussi le calcul des racines de la solution dominée d'une récurrence d'ordre n . Voici un exemple dans le cas $n = 2$. La récurrence :

$$C_{k+1} - [2(\nu + k + 1)/z] C_k + C_{k-1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

possède les solutions exactes :

$$\begin{aligned} C_k^{(1)} &= Y_{\nu+k+1}(z) && \text{(solution dominante)} \\ C_k^{(2)} &= J_{\nu+k+1}(z) && \text{(solution dominée)} \end{aligned}$$

où Y et J désignent les fonctions de Bessel de 2^e et 1^{re} espèce respectivement.

Or on a que la récurrence engendre la fc convergente :

$$-\frac{J_{\nu}(z)}{J_{\nu+1}(z)} = -\frac{2(\nu+1)}{z} + \frac{1}{-\frac{2(\nu+2)}{z} + \frac{1}{-\frac{2(\nu+3)}{z} + \dots}} \quad (10)$$

dont les réduites de rang k sont proportionnelles aux approximants de même rang du déterminant de Hill D :

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{2(\nu+1)}{z} & 1 & & & \\ 1 & -\frac{2(\nu+2)}{z} & 1 & & \\ & 1 & -\frac{2(\nu+3)}{z} & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{vmatrix}$$

L'équation (10) montre que les racines de la fc coïncident avec celles de $J_\nu(z)$. Il est donc indiqué de les rechercher comme limite des racines des réduites successives d'ordre k où ce qui revient au même comme limite des racines des approximaux de rang k du déterminant de Hill. La précision de l'algorithme est donnée par la formule :

$$e^{-p} \simeq \rho_k^{(1)} = |C_k^{(2)} / C_k^{(1)}| \sim \frac{(z/2)^{2k}}{k!^2 k^{2\nu+1}}$$

où z est de l'ordre de grandeur de la racine cherchée.

On constate que cette procédure permet d'obtenir les racines avec une précision élevée tout en ne manipulant que des déterminants de dimension modérée. Par exemple, pour obtenir la plus petite racine de $J_0(z)$ avec la précision 10^{-10} , soit 2.40 482 5557, il suffit de considérer l'approximant de dimension $k = 9$.

6. CONCLUSIONS

La théorie analytique des équations aux différences (réurrences) a fait l'objet d'études éparées [1], [18], [21] qui ont été insuffisamment diffusées. Cela explique pourquoi cette théorie entre à peine dans sa période de plein essor. Elle a cependant déjà permis de mettre au point un certain nombre d'outils dont l'utilité pratique s'avère considérable. Ce travail a précisément pour but de présenter concrètement le tableau des asymptotes d'une classe assez vaste de réurrences linéaires.

Ces résultats sont utiles dans la mesure où un algorithme qui s'appuie au départ sur une réurrence ne devient pleinement intéressant qu'à partir de l'instant où il devient possible de prédire quantitativement l'ordre de grandeur de l'erreur que l'on commettra en stoppant au rang k le processus de la résolution théoriquement de durée infinie.

Or cela n'est possible que si l'on peut déterminer les comportements asymptotiques des solutions de la réurrence. En particulier, le théorème de PINCHERLE ou la formule (7) donnant la précision d'un calcul par réduites successives ou encore la formule (3) estimant la précision de l'algorithme de MILLER généralisé ne sont exploitables que parce que une méthode existe qui permet la détermination des asymptotes des solutions d'une réurrence à coefficients rationnels.

C'est la raison pour laquelle les tableaux que nous publions dans ce travail constituent un outil de travail particulièrement précieux dont l'utilisation ira sans nul doute en augmentant.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient vivement le Dr. A. MAGNUS pour la part active qu'il a prise à la réalisation de ce travail au cours de discussions toujours fructueuses,

RECURRENCE DE POINCARÉ DU TYPE 1

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0, 0) = 0$ et $\sigma(1, 0) \neq 0$
 $\rightarrow C_k \sim k^w$

Racine $z = 1$ *double* : $\sigma(0, 0) = \sigma(1, 0) = 0$ et $\sigma(2, 0) \neq 0$

1. $\sigma(0, 1) \neq 0$
 $\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{1/2}]$

2. $\sigma(0, 1) = 0$
 $\rightarrow C_k \sim k^w$

Remarque : si $w_1 = w_2$
 $\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$

Racine $z = 1$ *triple* : $\sigma(0, 0) = \sigma(1, 0) = \sigma(2, 0) = 0$ et $\sigma(3, 0) \neq 0$

1. $\sigma(0, 1) \neq 0$
 $\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{2/3} + \beta k^{1/3}]$

2. $\sigma(0, 1) = 0$
2.1. $\sigma(1, 1) \neq 0$

$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{1/2}]$

2.2. $\sigma(1, 1) = 0$

2.2.1. $\sigma(0, 2) \neq 0$

$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{1/3}]$

2.2.2. $\sigma(0, 2) = 0$

$\rightarrow C_k \sim k^w$

Remarque : si $w_1 = w_2$

si $w_1 = w_2 = w_3$
 $\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$
 $\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k \sim C_k^{(3)} (\ln k)^2$

Racine $z = 1$ *quadruple* : $\sigma(0, 0) = \sigma(1, 0) = \sigma(2, 0) = \sigma(3, 0) = 0$ et $\sigma(4, 0) \neq 0$

1. $\sigma(0, 1) \neq 0$

$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{3/4} + \beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}]$

$$w = -\sigma(0, 1)/\sigma(1, 0)$$

$$\alpha^2 = -8\sigma(0, 1)/\sigma(2, 0)$$

$$w = 1/4 - 1/24 \alpha^2 \sigma(3, 0)/\sigma(2, 0) - \sigma(1, 1)/\sigma(2, 0)$$

$$1/2 w(w-1)\sigma(2, 0) + w\sigma(1, 1) + \sigma(0, 2) = 0$$

$$\alpha^3 = -81/4 \sigma(0, 1)/\sigma(3, 0)$$

$$\beta = -(1/\alpha) [9\sigma(1, 1) + 1/9 \alpha^3 \sigma(4, 0)]/\sigma(3, 0)$$

$$w = 1/3 - Q_1/\sigma(3, 0)$$

Soit :

$$\alpha = 0$$

$$w = -\sigma(0, 2)/\sigma(1, 1)$$

$$w = 3/4 + Q_2/\sigma(1, 1)$$

ou :

$$\alpha^2 = -24\sigma(1, 1)/\sigma(3, 0)$$

$$w = 3/4 + Q_2/\sigma(1, 1)$$

$$\beta^3 = -162\sigma(0, 2)/\sigma(3, 0)$$

$$w = 2/3 - \sigma(2, 1)/\sigma(3, 0)$$

$$1/6 w(w-1)(w-2)\sigma(3, 0) + 1/2 w(w-1)\sigma(2, 1)$$

$$+ w\sigma(1, 2) + \sigma(0, 3) = 0$$

$$\alpha^4 = -(2048/27)\sigma(0, 1)/\sigma(4, 0)$$

$$\beta = -(1/\alpha^2)Q_3/\sigma(4, 0)$$

$$\gamma = -(1/\alpha^3)Q_4/\sigma(4, 0)$$

$$w = -(1/\alpha^3)Q_5/\sigma(4, 0)$$

2. $\sigma(0, 1) = 0$

2.1. $\sigma(1, 1) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{2/3} + \beta k^{1/3}]$$

Soit : $\alpha = 0$ $\beta = 0$ $w = -\sigma(0, 2)/\sigma(1, 1)$	ou : $\alpha^3 = -81\sigma(1, 1)/\sigma(4, 0)$ $\beta = Q_6/\sigma(1, 1)$ $w = 1/3 Q_{10}/\sigma(1, 1)$
---	--

2.2. $\sigma(1, 1) = 0$

Former l'équation

$$1/384 y^2 \sigma(4, 0) + 1/8 y \sigma(2, 1) + \sigma(0, 2) = 0 \rightarrow y = y_1, y_2$$

Pour chaque racine y_i , discuter :

2.2.1. $y_1 \neq y_2$

2.2.1.1. $y_i \neq 0 [\sigma(0, 2) \neq 0]$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{1/2}]$$

$$\beta_i^2 = y_i$$

$$w = -Q_7/[1/24 \beta^2 \sigma(4, 0) + \sigma(2, 1)]$$

2.2.1.2. $y_i = 0 [\sigma(0, 2) = 0]$
et $\sigma(2, 1) \neq 0]$

$$\rightarrow C_k \sim k^w$$

$$1/2 (w^2 - w) \sigma(2, 1) + w \sigma(1, 2) + \sigma(0, 3) = 0$$

Remarque : si $w_1 = w_2$

$$\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$$

2.2.2. $y_1 = y_2$

$$[1/24 y \sigma(4, 0) + \sigma(2, 1) = 0]$$

2.2.2.1. $\sigma(0, 2) \neq 0$ et $Q_7 \neq 0 \rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}]$

$$\beta^2 = y_i$$

$$\gamma^2 = 83 Q_7 / \sigma(2, 1)$$

$$w = 2 Q_9 / \sigma(2, 1)$$

$$\beta^2 = y_i$$

$$-(w^2 - w) \sigma(2, 1) + w Q_{11} + Q_{12} = 0$$

$$2.2.2.2. \sigma(0, 2) \neq 0 \text{ et } Q_7 = 0 \rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{1/2}]$$

$$\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$$

Remarque : si $w_1 = w_2$

2.2.2.3. $\sigma(0, 2) = 0$

2.2.2.3.1. $\sigma(1, 2) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{1/3}]$$

Soit : $\beta = 0$ $w = -\sigma(0, 3)/\sigma(1, 2)$	ou : $\beta^3 = -648 \sigma(1, 2)/\sigma(4, 0)$ $w = -Q_8 / \left[\frac{1}{162} \beta^3 \sigma(4, 0) + \sigma(1, 2) \right]$
---	---

2.2.2.3.2. $\sigma(1, 2) = 0$ et $\sigma(0, 3) \neq 0$

$$\gamma^4 = -6144 \sigma(0, 3)/\sigma(4, 0)$$

$$w = 9/8 - \sigma(3, 1)/\sigma(4, 0)$$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\gamma k^{1/4}]$$

2.2.2.3.3. $\sigma(1, 2) = 0$ et
 $\sigma(0, 3) = 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w$$

$$\begin{aligned} & (1/24) w(w-1)(w-2)(w-3)\sigma(4, 0) \\ & + (1/6) w(w-1)(w-2)\sigma(3, 1) \\ & + (1/2) w(w-1)\sigma(2, 2) + w\sigma(1, 3) \\ & + \sigma(0, 4) = 0 \end{aligned}$$

Remarques : si $w_1 = w_2 \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$

si $w_1 = w_2 = w_3 \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k \sim C_k^{(3)} (\ln k)^2$

si $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k \sim C_k^{(3)} (\ln k)^2 \sim C_k^{(4)} (\ln k)^3$

RECURRENCE DE POINCARÉ DU TYPE 2

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0, 0) = 0$ et $\sigma(1, 0) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{1/2}]$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -2 \sigma(0, 1) / \sigma(1, 0) \\ w &= -S_1 / \sigma(1, 0) \end{aligned}$$

Racine $z = 1$ *double* : $\sigma(0, 0) = \sigma(1, 0) = 0$ et $\sigma(2, 0) \neq 0$

1. $\sigma(0, 1) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{3/4} + \beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}]$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= -32/9 \sigma(0, 1) / \sigma(2, 0) \\ \beta &= -[3/16 \alpha^2 \sigma(3, 0) + 2 \sigma(1, 1)] / \sigma(2, 0) \\ \gamma &= -(1/\alpha) D_1 / \sigma(2, 0) \\ w &= -(1/\alpha) D_2 / \sigma(2, 0) \end{aligned}$$

2. $\sigma(0, 1) = 0$

Former l'équation : $1/8 \beta^2 \sigma(2, 0) + 1/2 \beta \sigma(1, 1) + \sigma(0, 2) = 0 \rightarrow$

2.1. $\beta_1 \neq \beta_2$

$$[\sigma^2(1, 1) \neq 2 \sigma(2, 0) \sigma(0, 2)] \rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{1/2}]$$

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_i \\ w &= -H_1 / [1/2 \beta \sigma(2, 0) + \sigma(1, 1)] \end{aligned}$$

2.2. $\beta_1 = \beta_2$

$$[\sigma^2(1, 1) = 2 \sigma(2, 0) \sigma(0, 2)]$$

2.2.1. $H_1 \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}]$$

$$\begin{aligned} \beta &= -2 \sigma(1, 1) / \sigma(2, 0) \\ \gamma^2 &= -32 H_1 / \sigma(2, 0) \\ w &= -D_3 / \sigma(2, 0) \end{aligned}$$

2.2.2. $H_1 = 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\gamma k^{1/2}]$$

$$\begin{aligned} \gamma &= -2 \sigma(1, 1) / \sigma(2, 0) \\ 1/2 w^2 \sigma(2, 0) + w D_4 + H_2 &= 0 \end{aligned}$$

Remarque : si $w_1 = w_2$

$$\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$$

Racine $z = 1$ triple : $\sigma(0, 0) = \sigma(1, 0) = \sigma(2, 0) = 0$ et $\sigma(3, 0) \neq 0$

1. $\sigma(0, 1) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{5/6} + \beta k^{4/6} + \gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$$

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= -1296/125 \sigma(0, 1) \sigma(3, 0) \\ \beta &= -(1/\alpha) [25/288 \alpha^3 \sigma(4, 0) + 18/5 \sigma(1, 1)] / \sigma(3, 0) \end{aligned}$$

$$\gamma = -(1/\alpha^2) D_5 / \sigma(3, 0)$$

$$\delta = -(1/\alpha^2) D_6 / \sigma(3, 0)$$

$$\varepsilon = -(1/\alpha^2) D_7 / \sigma(3, 0)$$

$$w = -(1/\alpha^2) D_8 / \sigma(3, 0)$$

2. $\sigma(0, 1) = 0$

2.1. $\sigma(1, 1) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{3/4} + \beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}]$$

$$\text{Soit : } \alpha = 0 \quad \text{ou : } \alpha^2 = -32/3 \sigma(1, 1) / \sigma(3, 0)$$

$$\beta = -2 \sigma(0, 2) / \sigma(1, 1)$$

$$\gamma = 0 \quad \beta = D_9 / \sigma(1, 1)$$

$$w = -[H_1 \quad \gamma = D_{10} / \sigma(1, 1)$$

$$w = -[H_1 \quad w = \frac{1}{2} [H_1 + D_{11}] /$$

$$+ 1/8 \beta \sigma(2, 0)] / \sigma(1, 1) \quad \sigma(1, 1)$$

2.2. $\sigma(1, 1) = 0$

2.2.1. $\sigma(0, 2) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{4/6} + \gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$$

$$\beta^3 = -81/4 \sigma(0, 2) / \sigma(3, 0)$$

$$\gamma = -2 \sigma(2, 1) / \sigma(3, 0)$$

$$\delta = -(1/\beta) D_{12} / \sigma(3, 0)$$

$$\varepsilon = -(1/\beta^2) D_{13} / \sigma(3, 0)$$

$$w = -(1/\beta^2) D_{14} / \sigma(3, 0)$$

2.2.2. $\sigma(0, 2) = 0$

Former l'équation :

$$1/48 \gamma^3 \sigma(3, 0) + 1/8 \gamma^2 \sigma(2, 1) + 1/2 \gamma \sigma(1, 2) + \sigma(0, 3) = 0 \rightarrow \gamma_i (i = 1, 2, 3)$$

Pour chaque racine γ_i , discuter les cas suivants :

2.2.2.1. γ_i racine simple

$$[1/8 \gamma_i^2 \sigma(3, 0) + 1/2 \gamma_i \sigma(2, 1)$$

$$+ \sigma(1, 2) \neq 0] \rightarrow C_k \sim k^w \exp [\gamma_i k^{1/2}]$$

$$\gamma = \gamma_i$$

$$w = -H_2 [1/8 \gamma^2 \sigma(3, 0) + 1/2 \gamma \sigma(2, 1) + \sigma(1, 2)]$$

2.2.2.2. γ_i racine double
 $[1/8\gamma_i^2\sigma(3, 0) + 1/2\gamma_i\sigma(2, 1)$
 $+ \sigma(1, 2)] = 0$ et

$1/2\gamma_i\sigma(3, 0) + \sigma(2, 1) \neq 0]$

2.2.2.2.1. $H_2 \neq 0$

2.2.2.2.2. $H_2 = 0$

Remarque : si $w_1 = w_2$

2.2.2.3. γ_i racine triple
 $[1/8\gamma_i^2\sigma(3, 0) + 1/2\gamma_i\sigma(2, 1)$
 $+ \sigma(1, 2)] = 0$ et

$1/2\gamma_i\sigma(3, 0) + \sigma(2, 1) = 0]$

2.2.2.3.1. $H_2 \neq 0$

2.2.2.3.2. $H_2 = 0$

2.2.2.3.2.1. $H_3 \neq 0$

2.2.2.3.2.2. $H_3 = 0$

$H_4 \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\gamma k^{2/4} + \delta k^{1/4}]$$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\gamma k^{1/2}]$$

$$\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\gamma k^{2/4} + \delta k^{1/4}]$$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\gamma k^{3/6} + \varepsilon k^{1/6}]$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_i \\ \delta^2 &= -32 H_2/[1/2\gamma\sigma(3, 0) + \sigma(2, 1)] \\ w &= -1/24 - [H_3 + 1/96\delta^2\sigma(3, 0)]/[1/2\gamma\sigma(3, 0) + \sigma(2, 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_i \\ (w^2/2 - w/12) [1/2\gamma\sigma(3, 0) + \sigma(2, 1)] &+ wH_3 + H_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= -2\sigma(2, 1)/\sigma(3, 0) \\ \delta^3 &= -162 H_2/\sigma(3, 0) \\ \varepsilon &= -(1/\delta) 36 H_3/\sigma(3, 0) \\ w &= -(1/\delta^2) [3\varepsilon H_3 + D_{15}]/\sigma(3, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{Soit :} \\ \delta = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{ou :} \\ w = -H_4/H_3 \end{array} \right. \begin{array}{l} \delta^2 = -96 H_3/\sigma(3, 0) \\ w = H_4/(2 H_3) + 9/8 \\ -3 \frac{[1/8\gamma^2\sigma(4, 0) + 1/2\gamma\sigma(3, 1) + \sigma(2, 2)]}{2\sigma(3, 0)} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= -2\sigma(2, 1)/\sigma(3, 0) \\ \varepsilon^3 &= -1296 H_4/\sigma(3, 0) \\ w &= -[1/8\gamma^2\sigma(4, 0) - 5/6\sigma(3, 0) + 1/2\gamma\sigma(3, 1) + \sigma(2, 2)]/\sigma(3, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 2.2.2.3.2.3. \quad H_3 = 0 \\ \quad \quad \quad H_4 = 0 \end{array}$$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\gamma k^{1/2}]$$

$$\begin{array}{l} \gamma = -2 \sigma(2, 1)/\sigma(3, 0) \\ 1/6w(w-1)(w-2)\sigma(3, 0) + 1/2(w^2-w) \\ [1/8\gamma^2\sigma(4, 0) + 1/2\gamma\sigma(3, 1) + \sigma(2, 2)] + wD_{16} + \\ D_{17} = 0 \end{array}$$

Remarque : si $w_1 = w_2 \neq w_3$
si $w_1 = w_2 = w_3$

$$\begin{array}{l} \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k \\ \rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k \sim C_k^{(3)} (\ln k)^2 \end{array}$$

RECURRENCE DE POINCARÉ DU TYPE 3

Racine $z = 1$ simple : $\sigma(0, 0) = 0$ et $\sigma(1, 0) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{2/3} + \beta k^{1/3}]$$

$$\begin{array}{l} \alpha = -3/2 \sigma(0, 1)/\sigma(1, 0) \\ \beta = -S_2/\sigma(1, 0) \\ w = -S_3/\sigma(1, 0) \end{array}$$

Racine $z = 1$ double : $\sigma(0, 0) = \sigma(1, 0) = 0$ et $\sigma(2, 0) \neq 0$

$$1. \sigma(0, 1) \neq 0 \quad \rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{5/6} + \beta k^{4/6} + \gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$$

$$\begin{array}{l} \alpha^2 = -72/25 \sigma(0, 1)/\sigma(2, 0) \\ \beta = -[25/144 \alpha^2 \sigma(3, 0) + 3/2 \sigma(1, 1)]/\sigma(2, 0) \\ \gamma = -(1/\alpha)T_1/\sigma(2, 0) \\ \delta = -(1/\alpha)T_2/\sigma(2, 0) \\ \varepsilon = -(1/\alpha)T_3/\sigma(2, 0) \\ w = -(1/\alpha)T_4/\sigma(2, 0) \end{array}$$

2. $\sigma(0, 1) = 0$

Former l'équation :

$$\begin{array}{l} 2/9 \beta^2 \sigma(2, 0) + 2/3 \beta \sigma(1, 1) \\ + \sigma(0, 2) = 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \beta = \beta_1, \beta_2$$

2.1. $\beta_1 \neq \beta_2$

$$[\sigma^2(1, 1) \neq 2 \sigma(2, 0) \sigma(0, 2)]$$

$$\begin{array}{l} \beta = \beta_1 \\ \delta = -H_5/[2\beta \sigma(2, 0) + 3 \sigma(1, 1)] \\ w = -T_5/[2\beta \sigma(2, 0) + 3 \sigma(1, 1)] \end{array}$$

$$2.2. \beta_1 = \beta_2 \\ [\sigma^2(1, 1) = 2 \sigma(2, 0) \sigma(0, 2)]$$

$$2.2.1. H_5 \neq 0$$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{4/6} + \gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$$

$$\begin{aligned} \beta &= -3/2 \sigma(1, 1)/\sigma(2, 0) \\ \gamma^2 &= -8/9 H_5/\sigma(2, 0) \\ \delta &= -T_6/\sigma(2, 0) \\ \varepsilon &= -(1/\gamma) [4 T_5 + \beta \gamma^2 \sigma(3, 0) + 3/2 \gamma^2 \sigma(2, 1)]/\sigma(2, 0) \\ w &= -(1/\gamma) T_7/\sigma(2, 0) \end{aligned}$$

$$2.2.2. H_5 = 0$$

Former l'équation :

$$1/6 \delta^2 \sigma(2, 0) + \delta [2/9 \beta^2 \sigma(3, 0) + 2/3 \beta \sigma(2, 1) + \sigma(1, 2)] - 1/3 \beta \sigma(2, 0) + 2/81 \beta^4 \sigma(4, 0) + 4/27 \beta^3 \sigma(3, 1) + 2/3 \beta^2 \sigma(2, 2) + 2 \beta \sigma(1, 3) + 3 \sigma(0, 4) = 0$$

$$\rightarrow \delta = \delta_1, \delta_2$$

$$2.2.2.1. \delta_1 \neq \delta_2$$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{2/3} + \delta k^{1/3}]$$

$$\begin{aligned} \beta &= -3/2 \sigma(1, 1)/\sigma(2, 0) \\ \delta &= \delta_t \\ w &= -9 H_6/[2 \beta^2 \sigma(3, 0) + 3 \delta \sigma(2, 0) + 6 \beta \sigma(2, 1) + 9 \sigma(1, 2)] \end{aligned}$$

$$2.2.2.2. \delta_1 = \delta_2$$

$$2.2.2.2.1. H_6 \neq 0$$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{4/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$$

$$\begin{aligned} \beta &= -3/2 \sigma(1, 1)/\sigma(2, 0) \\ \delta &= -[2/3 \beta^2 \sigma(3, 0) + 2 \beta \sigma(2, 1) + 3 \sigma(1, 2)]/\sigma(2, 0) \\ \varepsilon^2 &= -72 H_6/\sigma(2, 0) \\ w &= 5/12 - T_8/\sigma(2, 0) \end{aligned}$$

$$2.2.2.2.2. H_6 = 0$$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\beta k^{2/3} + \delta k^{1/3}]$$

$$\begin{aligned} \beta &= -3/2 \sigma(1, 1)/\sigma(2, 0) \\ \delta &= -[2/3 \beta^2 \sigma(3, 0) + 2 \beta \sigma(2, 1) + 3 \sigma(1, 2)]/\sigma(2, 0) \\ 1/2 (w^2 - w) \sigma(2, 0) + w T_8 + T_9 &= 0 \end{aligned}$$

Remarque : si $w_1 = w_2$

$$\rightarrow C_k^{(1)} \sim C_k^{(2)} \ln k$$

RECURRENCE DE POINCARÉ DU TYPE 4

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0, 0) = 0$ et $\sigma(1, 0) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{3/4} + \beta k^{2/4} + \gamma k^{1/4}]$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -4/3 \sigma(0, 1)/\sigma(1, 0) \\ \beta &= -S_4/\sigma(1, 0) \\ \gamma &= -S_5/\sigma(1, 0) \\ w &= -S_6/\sigma(1, 0)\end{aligned}$$

RECURRENCE DE POINCARÉ DU TYPE 5

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0, 0) = 0$ et $\sigma(1, 0) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{4/5} + \beta k^{3/5} + \gamma k^{2/5} + \delta k^{1/5}]$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -5/4 \sigma(0, 1)/\sigma(1, 0) \\ \beta &= -S_7/\sigma(1, 0) \\ \gamma &= -S_8/\sigma(1, 0) \\ \delta &= -S_9/\sigma(1, 0) \\ w &= -S_{10}/\sigma(1, 0)\end{aligned}$$

RECURRENCE DE POINCARÉ DU TYPE 6

Racine $z = 1$ *simple* : $\sigma(0, 0) = 0$ et $\sigma(1, 0) \neq 0$

$$\rightarrow C_k \sim k^w \exp [\alpha k^{5/6} + \beta k^{4/6} + \gamma k^{3/6} + \delta k^{2/6} + \varepsilon k^{1/6}]$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -6/5 \sigma(0, 1)/\sigma(1, 0) \\ \beta &= -S_{11}/\sigma(1, 0) \\ \gamma &= -S_{12}/\sigma(1, 0) \\ \delta &= -S_{13}/\sigma(1, 0) \\ \varepsilon &= -S_{14}/\sigma(1, 0) \\ w &= -S_{15}/\sigma(1, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 2/405 \alpha^3 \sigma(5, 0) + \sigma(2, 1) + 1/18 \alpha \beta \sigma(4, 0) \\
Q_2 &= 1/768 \alpha^4 \sigma(4, 0) + 1/16 \alpha^2 \sigma(2, 1) + 1/2 \sigma(0, 2) \\
Q_3 &= 9/160 \alpha^4 \sigma(5, 0) + 64/3 \sigma(1, 1) \\
Q_4 &= 2 \alpha^2 \beta^2 \sigma(4, 0) + 3/8 \alpha^4 \beta \sigma(5, 0) + 9/640 \alpha^6 \sigma(6, 0) + 16 \alpha^2 \sigma(2, 1) + 256/9 \beta \sigma(1, 1) \\
Q_5 &= 1/2 \alpha^2 \gamma \beta \sigma(4, 0) + 2/9 \alpha \beta^3 \sigma(4, 0) + 1/8 \alpha^3 \beta^2 \sigma(5, 0) + 3/64 \alpha^4 \gamma \sigma(5, 0) \\
&\quad + 9/640 \alpha^5 \beta \sigma(6, 0) + 27/71680 \alpha^7 \sigma(7, 0) - 3/8 \alpha^3 \sigma(4, 0) + 16/3 \alpha \beta \sigma(2, 1) \\
&\quad + 32/9 \gamma \sigma(1, 1) + \alpha^3 \sigma(3, 1) \\
Q_6 &= 4/3645 \alpha^5 \sigma(5, 0) + 2/9 \alpha^2 \sigma(2, 1) \\
Q_7 &= -1/32 \beta^2 \sigma(4, 0) + 1/1920 \beta^4 \sigma(5, 0) - 1/4 \sigma(2, 1) + 1/24 \beta^2 \sigma(3, 1) + \sigma(1, 2) \\
Q_8 &= -1/162 \beta^3 \sigma(4, 0) + 1/162 \beta^3 \sigma(3, 1) + \sigma(0, 3) \\
Q_9 &= 3/256 \beta \sigma(4, 0) - 7/384 \beta^2 \sigma(4, 0) + 1/768 \beta \gamma \sigma(4, 0) + 1/1536 \beta^4 \sigma(5, 0) \\
&\quad - 3/32 \sigma(2, 1) + 1/32 \beta^2 \sigma(3, 1) + 1/4 \sigma(1, 2) \\
Q_{10} &= -2/81 \alpha^3 \sigma(4, 0) + 1/81 \alpha^2 \beta^2 \sigma(4, 0) + 2/729 \alpha^4 \beta \sigma(5, 0) + 4/32805 \alpha^6 \sigma(6, 0) \\
&\quad + 2/9 \alpha \beta \sigma(2, 1) + 4/81 \alpha^3 \sigma(3, 1) + \sigma(0, 2) \\
Q_{11} &= 1/8 \beta^2 \sigma(3, 1) - 1/16 \beta^2 \sigma(4, 0) + 1/384 \beta^4 \sigma(5, 0) + \sigma(1, 2) \\
Q_{12} &= 5/128 \beta^2 \sigma(4, 0) - 1/384 \beta^4 \sigma(5, 0) + 1/46080 \beta^6 \sigma(6, 0) + 1/384 \beta^4 \sigma(4, 1) \\
&\quad - 1/16 \beta^2 \sigma(3, 1) + 1/8 \beta^2 \sigma(2, 2) + \sigma(0, 3) \\
S_1 &= 1/8 \alpha^2 \sigma(2, 0) + 1/2 \alpha \sigma(1, 1) + \sigma(0, 2) \\
S_2 &= 2/3 \alpha^2 \sigma(2, 0) + 2 \alpha \sigma(1, 1) + 3 \sigma(0, 2) \\
S_3 &= 2/9 \alpha \beta \sigma(2, 0) + 4/81 \alpha^3 \sigma(3, 0) + 2/9 \alpha^2 \sigma(2, 1) + 1/3 \beta \sigma(1, 1) + 2/3 \alpha \sigma(1, 2) \\
&\quad + \sigma(0, 3) \\
S_4 &= 9/16 \alpha^2 \sigma(2, 0) + 3/2 \alpha \sigma(1, 1) + 2 \sigma(0, 2) \\
S_5 &= 3/2 \alpha \beta \sigma(2, 0) + 9/32 \alpha^3 \sigma(3, 0) + 9/8 \alpha^2 \sigma(2, 1) + 2 \beta \sigma(1, 1) + 3 \alpha \sigma(1, 2) \\
&\quad + 4 \sigma(0, 3) \\
S_6 &= 1/8 \beta^2 \sigma(2, 0) + 3/16 \alpha \gamma \sigma(2, 0) + 27/2048 \alpha^4 \sigma(4, 0) + 9/64 \alpha^2 \beta \sigma(3, 0) \\
&\quad + 3/8 \alpha \beta \sigma(2, 1) + 1/4 \gamma \sigma(1, 1) + 9/128 \alpha^3 \sigma(3, 1) + 9/32 \alpha^2 \sigma(2, 2) + 1/2 \beta \sigma(1, 2) \\
&\quad + 3/4 \alpha \sigma(1, 3) + \sigma(0, 4) \\
S_7 &= 8/15 \alpha^2 \sigma(2, 0) + 4/3 \alpha \sigma(1, 1) + 5/3 \sigma(0, 2) \\
S_8 &= 6/5 \alpha \beta \sigma(2, 0) + 16/75 \alpha^3 \sigma(3, 0) + 3/2 \beta \sigma(1, 1) + 4/5 \alpha^2 \sigma(2, 1) + 2 \alpha \sigma(1, 2) \\
&\quad + 5/2 \sigma(0, 3) \\
S_9 &= 9/10 \beta^2 \sigma(2, 0) + 8/5 \alpha \gamma \sigma(2, 0) + 24/25 \alpha^2 \beta \sigma(3, 0) + 32/375 \alpha^4 \sigma(4, 0) \\
&\quad + 2 \gamma \sigma(1, 1) + 12/5 \alpha \beta \sigma(2, 1) + 32/75 \alpha^3 \sigma(3, 1) + 3 \beta \sigma(1, 2) + 8/5 \alpha^2 \sigma(2, 2) \\
&\quad + 4 \alpha \sigma(1, 3) + 5 \sigma(0, 4) \\
S_{10} &= 4/25 \alpha \delta \sigma(2, 0) + 6/25 \beta \gamma \sigma(2, 0) + 18/125 \alpha \beta^2 \sigma(3, 0) + 16/125 \alpha^2 \gamma \sigma(3, 0) \\
&\quad + 32/625 \alpha^3 \beta \sigma(4, 0) + 128/46875 \alpha^5 \sigma(5, 0) + 1/5 \delta \sigma(1, 1) + 9/50 \beta^2 \sigma(2, 1) \\
&\quad + 8/25 \alpha \gamma \sigma(2, 1) + 24/125 \alpha^2 \beta \sigma(3, 1) + 32/1875 \alpha^4 \sigma(4, 1) + 2/5 \gamma \sigma(1, 2) \\
&\quad + 12/25 \alpha \beta \sigma(2, 2) + 32/375 \alpha^3 \sigma(3, 2) + 3/5 \beta \sigma(1, 3) + 8/25 \alpha^2 \sigma(2, 3) \\
&\quad + 4/5 \alpha \sigma(1, 4) + \sigma(0, 5) \\
S_{11} &= 25/48 \alpha^2 \sigma(2, 0) + 5/4 \alpha \sigma(1, 1) + 3/2 \sigma(0, 2) \\
S_{12} &= 10/9 \alpha \beta \sigma(2, 0) + 125/648 \alpha^3 \sigma(3, 0) + 25/36 \alpha^2 \sigma(2, 1) + 4/3 \beta \sigma(1, 1) \\
&\quad + 5/3 \alpha \sigma(1, 2) + 2 \sigma(0, 3) \\
S_{13} &= 2/3 \beta^2 \sigma(2, 0) + 5/4 \alpha \gamma \sigma(2, 0) + 25/36 \alpha^2 \beta \sigma(3, 0) + 625/10368 \alpha^4 \sigma(4, 0) \\
&\quad + 5/3 \alpha \beta \sigma(2, 1) + 3/2 \gamma \sigma(1, 1) + 125/432 \alpha^3 \sigma(3, 1) + 25/24 \alpha^2 \sigma(2, 2) \\
&\quad + 2 \beta \sigma(1, 2) + 5/2 \alpha \sigma(1, 3) + 3 \sigma(0, 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{14} &= 5/3 \alpha \delta \sigma(2, 0) + 2 \beta \gamma \sigma(2, 0) + 25/24 \alpha^2 \gamma \sigma(3, 0) + 10/9 \alpha \beta^2 \sigma(3, 0) \\
&+ 125/324 \alpha^3 \beta \sigma(4, 0) + 3125/155520 \alpha^5 \sigma(5, 0) + 4/3 \beta^2 \sigma(2, 1) + 2 \delta \sigma(1, 1) \\
&+ 5/2 \alpha \gamma \sigma(2, 1) + 25/18 \alpha^2 \beta \sigma(3, 1) + 625/5184 \alpha^4 \sigma(4, 1) + 10/3 \alpha \beta \sigma(2, 2) \\
&+ 3 \gamma \sigma(1, 2) + 125/216 \alpha^3 \sigma(3, 2) + 25/12 \alpha^2 \sigma(2, 3) + 4 \beta \sigma(1, 3) + 5 \alpha \sigma(1, 4) \\
&+ 6 \sigma(0, 5) \\
S_{15} &= 1/8 \gamma^2 \sigma(2, 0) + 5/36 \alpha \varepsilon \sigma(2, 0) + 2/9 \beta \delta \sigma(2, 0) + 25/216 \alpha^2 \delta \sigma(3, 0) \\
&+ 4/81 \beta^3 \sigma(3, 0) + 5/18 \alpha \beta \gamma \sigma(3, 0) + 25/324 \alpha^2 \beta^2 \sigma(4, 0) + 125/2592 \alpha^3 \gamma \sigma(4, 0) \\
&+ 625/46656 \alpha^4 \beta \sigma(5, 0) + 3125/6718464 \alpha^6 \sigma(6, 0) + 5/18 \alpha \delta \sigma(2, 1) + 1/3 \beta \gamma \sigma(2, 1) \\
&+ 1/6 \varepsilon \sigma(1, 1) + 25/144 \alpha^2 \gamma \sigma(3, 1) + 5/27 \alpha \beta^2 \sigma(3, 1) + 125/1944 \alpha^3 \beta \sigma(4, 1) \\
&+ 3125/933120 \alpha^5 \sigma(5, 1) + 2/9 \beta^2 \sigma(2, 2) + 1/3 \delta \sigma(1, 2) + 5/12 \alpha \gamma \sigma(2, 2) \\
&+ 25/108 \alpha^2 \beta \sigma(3, 2) + 625/31104 \alpha^4 \sigma(4, 2) + 5/9 \alpha \beta \sigma(2, 3) + 1/2 \gamma \sigma(1, 3) \\
&+ 125/1296 \alpha^3 \sigma(3, 3) + 25/72 \alpha^2 \sigma(2, 4) + 2/3 \beta \sigma(1, 4) + 5/6 \alpha \sigma(1, 5) + \sigma(0, 6) \\
D_1 &= 9/128 \alpha^4 \sigma(4, 0) + 3/2 \alpha^2 \sigma(2, 1) + 3/4 \alpha^2 \beta \sigma(3, 0) + 2/3 \beta^2 \sigma(2, 0) + 8/3 \beta \sigma(1, 1) \\
&+ 16/3 \sigma(0, 2) \\
D_2 &= 27/10240 \alpha^5 \sigma(5, 0) + 3/32 \alpha^3 \sigma(3, 1) + 3/64 \alpha^3 \beta \sigma(4, 0) + 3/32 \alpha^2 \gamma \sigma(3, 0) \\
&- 1/8 \alpha \sigma(2, 0) + \alpha \sigma(1, 2) + 1/2 \alpha \beta \sigma(2, 1) + 1/8 \alpha \beta^2 \sigma(3, 0) + 1/6 \beta \gamma \sigma(2, 0) \\
&+ 1/3 \gamma \sigma(1, 1) \\
D_3 &= 1/8 \beta^2 \sigma(3, 0) + 1/2 \beta \sigma(2, 1) - 3/8 \sigma(2, 0) + \sigma(1, 2) \\
D_4 &= 1/8 \gamma^2 \sigma(3, 0) - 1/2 \sigma(2, 0) + 1/2 \gamma \sigma(2, 1) + \sigma(1, 2) \\
D_5 &= 16/15 \alpha \beta^2 \sigma(3, 0) + 10/27 \alpha^3 \beta \sigma(4, 0) + 25/1296 \alpha^5 \sigma(5, 0) + 2 \alpha^2 \sigma(2, 1) \\
&+ 96/25 \beta \sigma(1, 1) \\
D_6 &= 32/75 \beta^3 \sigma(3, 0) + 12/5 \alpha \beta \gamma \sigma(3, 0) + 2/3 \alpha^2 \beta^2 \sigma(4, 0) + 5/12 \alpha^3 \gamma \sigma(4, 0) \\
&+ 25/216 \alpha^4 \beta \sigma(5, 0) + 125/31104 \alpha^6 \sigma(6, 0) + 24/5 \alpha \beta \sigma(2, 1) + 108/25 \gamma \sigma(1, 1) \\
&+ 5/6 \alpha^3 \sigma(3, 1) + 216/25 \sigma(0, 2) \\
D_7 &= 9/5 \alpha \gamma^2 \sigma(3, 0) + 16/5 \alpha \beta \delta \sigma(3, 0) + 48/25 \beta^2 \gamma \sigma(3, 0) + 5/9 \alpha^3 \delta \sigma(4, 0) \\
&+ 2/3 \alpha^2 \beta \gamma \sigma(4, 0) + 32/45 \alpha \beta^3 \sigma(4, 0) + 4/3 \alpha^2 \beta \gamma \sigma(4, 0) + 25/144 \alpha^4 \gamma \sigma(5, 0) \\
&+ 10/27 \alpha^3 \beta^2 \sigma(5, 0) + 25/648 \alpha^5 \beta \sigma(6, 0) + 625/653184 \alpha^7 \sigma(7, 0) + 96/25 \beta^2 \sigma(2, 1) \\
&+ 144/25 \delta \sigma(1, 1) + 36/5 \alpha \gamma \sigma(2, 1) + 4 \alpha^2 \beta \sigma(3, 1) + 25/72 \alpha^4 \sigma(4, 1) + 72/5 \alpha \sigma(1, 2) \\
D_8 &= 16/75 \beta^2 \delta \sigma(3, 0) + 4/15 \alpha \beta \varepsilon \sigma(3, 0) + 6/25 \beta \gamma^2 \sigma(3, 0) + 2/5 \alpha \gamma \delta \sigma(3, 0) \\
&+ 1/8 \alpha^2 \gamma^2 \sigma(4, 0) + 16/675 \beta^4 \sigma(4, 0) + 5/108 \alpha^3 \varepsilon \sigma(4, 0) + 2/9 \alpha^2 \beta \delta \sigma(4, 0) \\
&+ 4/15 \alpha \beta^2 \gamma \sigma(4, 0) + 25/1296 \alpha^4 \delta \sigma(5, 0) + 4/81 \alpha^2 \beta^3 \sigma(5, 0) + 5/54 \alpha^3 \beta \gamma \sigma(5, 0) \\
&+ 5/648 \alpha^4 \beta^2 \sigma(6, 0) - 1/6 \alpha^2 \sigma(3, 0) + 25/5184 \alpha^5 \gamma \sigma(6, 0) + 5/972 \alpha^4 \beta^2 \sigma(6, 0) \\
&+ 125/139968 \alpha^6 \beta \sigma(7, 0) + 3125/188116992 \alpha^8 \sigma(8, 0) + 4/5 \alpha \delta \sigma(2, 1) \\
&+ 24/25 \beta \gamma \sigma(2, 1) + 12/25 \varepsilon \sigma(1, 1) + 1/2 \alpha^2 \gamma \sigma(3, 1) + 8/15 \alpha \beta^2 \sigma(3, 1) \\
&+ 5/27 \alpha^3 \beta \sigma(4, 1) + 25/2592 \alpha^5 \sigma(5, 1) + \alpha^2 \sigma(2, 2) + 48/25 \beta \sigma(1, 2) \\
D_9 &= 27/2048 \alpha^4 \sigma(4, 0) + 9/32 \alpha^2 \sigma(2, 1) + \sigma(0, 2) \\
D_{10} &= 3/16 \alpha \beta^2 \sigma(3, 0) + 9/128 \alpha^3 \beta \sigma(4, 0) + 81/20480 \alpha^5 \sigma(5, 0) + 3/4 \alpha \beta \sigma(2, 1) \\
&+ 9/64 \alpha^3 \sigma(3, 1) + 3/2 \alpha \sigma(1, 2) \\
D_{11} &= 3/32 \alpha \beta \gamma \sigma(3, 0) - 9/128 \alpha^2 \sigma(3, 0) + 9/256 \alpha^2 \beta^2 \sigma(4, 0) + 9/512 \alpha^3 \gamma \sigma(4, 0) \\
&+ 27/4096 \alpha^4 \beta \sigma(5, 0) + 81/327680 \alpha^6 \sigma(6, 0) + 3/16 \alpha \gamma \sigma(2, 1) + 27/2048 \alpha^4 \sigma(4, 1) \\
&+ 9/64 \alpha^2 \beta \sigma(3, 1) + 9/32 \alpha^2 \sigma(2, 2) + 1/8 \beta \sigma(2, 0) \\
D_{12} &= 27/24 \gamma^2 \sigma(3, 0) + 1/9 \beta^3 \sigma(4, 0) + 9/2 \gamma \sigma(2, 1) + 9 \sigma(1, 2) \\
D_{13} &= 3 \beta \gamma \delta \sigma(3, 0) + 9/16 \gamma^3 \sigma(3, 0) + 2/3 \beta^3 \gamma \sigma(4, 0) + 27/8 \gamma^2 \sigma(2, 1) + 6 \beta \delta \sigma(2, 1) \\
&+ 4/3 \beta^3 \sigma(3, 1) + 27/2 \gamma \sigma(1, 2) + 27 \sigma(0, 3) \\
D_{14} &= 1/6 \beta \delta^2 \sigma(3, 0) - 1/3 \beta^2 \sigma(3, 0) + 1/4 \beta \gamma \varepsilon \sigma(3, 0) + 3/16 \gamma^2 \delta \sigma(3, 0) \\
&+ 1/8 \beta^2 \gamma^2 \sigma(4, 0) + 2/27 \beta^3 \delta \sigma(4, 0) + 2/405 \beta^5 \sigma(5, 0) + 1/2 \beta \varepsilon \sigma(2, 1) \\
&+ 3/4 \gamma \delta \sigma(2, 1) + 1/2 \beta^2 \gamma \sigma(3, 1) + \beta^2 \sigma(2, 2) + 3/2 \delta \sigma(1, 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{15} &= 1/12 \delta \varepsilon^2 \sigma(3, 0) - 2/3 \delta^2 \sigma(3, 0) + 1/8 \gamma^2 \delta^2 \sigma(4, 0) + 1/2 \gamma \delta^2 \sigma(3, 1) + \delta^2 \sigma(2, 2) \\
D_{16} &= 1/384 \gamma^4 \sigma(5, 0) - 1/16 \gamma^2 \sigma(4, 0) - 1/8 \gamma \sigma(3, 1) + 1/48 \gamma^3 \sigma(4, 1) + 1/8 \gamma^2 \sigma(3, 2) \\
&\quad + 1/2 \gamma \sigma(2, 3) + \sigma(1, 4) \\
D_{17} &= \gamma^6/46080 \sigma(6, 0) + 1/3840 \gamma^5 \sigma(5, 1) - \gamma^4/384 \sigma(5, 0) + 5/128 \gamma^2 \sigma(4, 0) \\
&\quad + 1/16 \gamma \sigma(3, 1) - 1/64 \gamma^3 \sigma(4, 1) - 1/16 \gamma^2 \sigma(3, 2) + 1/384 \gamma^4 \sigma(4, 2) - 1/8 \gamma \sigma(2, 3) \\
&\quad + 1/48 \gamma^3 \sigma(3, 3) + 1/2 \gamma \sigma(1, 5) + \sigma(0, 6) + 1/8 \gamma^2 \sigma(2, 4) \\
H_1 &= \sigma(0, 3) + 1/2 \beta \sigma(1, 2) + 1/8 \beta^2 \sigma(2, 1) - 1/8 \beta \sigma(2, 0) + 1/48 \beta^3 \sigma(3, 0) \\
H_2 &= 1/384 \gamma^4 \sigma(4, 0) + 1/8 \gamma^2 \sigma(2, 2) + 1/2 \gamma \sigma(1, 3) + \sigma(0, 4) - 1/16 \gamma^2 \sigma(3, 0) \\
&\quad - 1/8 \gamma \sigma(2, 1) + 1/48 \gamma^3 \sigma(3, 1) \\
H_3 &= \gamma^3/48 \sigma(4, 0) + \gamma^2/8 \sigma(3, 1) + \gamma/2 \sigma(2, 2) + \sigma(1, 3) - \gamma/3 \sigma(3, 0) - 5/12 \sigma(2, 1) \\
H_4 &= 1/3840 \gamma^5 \sigma(5, 0) - 1/64 \gamma^3 \sigma(4, 0) + 1/16 \gamma \sigma(3, 0) - 1/16 \gamma^2 \sigma(3, 1) \\
&\quad + 1/384 \gamma^4 \sigma(4, 1) - 1/8 \gamma \sigma(2, 2) + 1/48 \gamma^3 \sigma(3, 2) + 1/8 \gamma^2 \sigma(2, 3) + 1/2 \gamma \sigma(1, 4) \\
&\quad + \sigma(0, 5) \\
H_5 &= 4/9 \beta^3 \sigma(3, 0) + 9 \sigma(0, 3) + 2 \beta^2 \sigma(2, 1) + 6 \beta \sigma(1, 2) \\
H_6 &= -1/9 \delta \sigma(2, 0) - 2/27 \beta^2 \sigma(3, 0) + 1/27 \beta \delta^2 \sigma(3, 0) + 4/243 \beta^3 \delta \sigma(4, 0) \\
&\quad + 4/3645 \beta^5 \sigma(5, 0) + 1/18 \delta^2 \sigma(2, 1) - 1/9 \beta \sigma(2, 1) + 2/27 \beta^2 \delta \sigma(3, 1) \\
&\quad + 2/243 \beta^4 \sigma(4, 1) + 2/9 \beta \delta \sigma(2, 2) + 4/81 \beta^3 \sigma(3, 2) + 2/9 \beta^2 \sigma(2, 3) + 1/3 \delta \sigma(1, 3) \\
&\quad + 2/3 \beta \sigma(1, 4) + \sigma(0, 5) \\
T_1 &= 8/15 \beta^2 \sigma(2, 0) + 5/9 \alpha^2 \beta \sigma(3, 0) + 125/2592 \alpha^4 \sigma(4, 0) + 5/6 \alpha^2 \sigma(2, 1) \\
&\quad + 8/5 \beta \sigma(1, 1) + 12/5 \sigma(0, 2) \\
T_2 &= 6/5 \beta \gamma \sigma(2, 0) + 5/8 \alpha^2 \gamma \sigma(3, 0) + 2/3 \alpha \beta^2 \sigma(3, 0) + 25/108 \alpha^3 \beta \sigma(4, 0) \\
&\quad + 125/10368 \alpha^5 \sigma(5, 0) + 2 \alpha \beta \sigma(2, 1) + 9/5 \gamma \sigma(1, 1) + 25/72 \alpha^3 \sigma(3, 1) + 3 \alpha \sigma(1, 2) \\
T_3 &= 9/10 \gamma^2 \sigma(2, 0) + 8/5 \beta \delta \sigma(2, 0) + 5/6 \alpha^2 \delta \sigma(3, 0) + 16/45 \beta^3 \sigma(3, 0) + 2 \alpha \beta \gamma \sigma(3, 0) \\
&\quad + 5/9 \alpha^2 \beta^2 \sigma(4, 0) + 25/72 \alpha^3 \gamma \sigma(4, 0) + 125/1296 \alpha^4 \beta \sigma(5, 0) + 625/186624 \alpha^6 \sigma(6, 0) \\
&\quad + 8/5 \beta^2 \sigma(2, 1) + 12/5 \delta \sigma(1, 1) + 3 \alpha \gamma \sigma(2, 1) + 5/3 \alpha^2 \beta \sigma(3, 1) + 125/864 \alpha^4 \sigma(4, 1) \\
&\quad + 5/2 \alpha^2 \sigma(2, 2) + 24/5 \beta \sigma(1, 2) + 36/5 \sigma(0, 3) \\
T_4 &= 2/15 \beta \varepsilon \sigma(2, 0) + 1/5 \gamma \delta \sigma(2, 0) - 1/12 \alpha \sigma(2, 0) + 1/8 \alpha \gamma^2 \sigma(3, 0) + 2/9 \alpha \beta \delta \sigma(3, 0) \\
&\quad + 5/72 \alpha^2 \varepsilon \sigma(3, 0) + 2/15 \beta^2 \gamma \sigma(3, 0) + 25/648 \alpha^3 \delta \sigma(4, 0) + 5/108 \alpha^2 \beta \gamma \sigma(4, 0) \\
&\quad + 4/81 \alpha \beta^3 \sigma(4, 0) + 5/54 \alpha^2 \beta \gamma \sigma(4, 0) + 125/10368 \alpha^4 \gamma \sigma(5, 0) + 25/972 \alpha^3 \beta^2 \sigma(5, 0) \\
&\quad + 125/46656 \alpha^5 \beta \sigma(6, 0) + 3125/47029248 \alpha^7 \sigma(7, 0) + 1/3 \alpha \delta \sigma(2, 1) + 2/5 \beta \gamma \sigma(2, 1) \\
&\quad + 1/5 \varepsilon \sigma(1, 1) + 5/24 \alpha^2 \gamma \sigma(3, 1) + 2/9 \alpha \beta^2 \sigma(3, 1) + 25/324 \alpha^3 \beta \sigma(4, 1) \\
&\quad + 125/31104 \alpha^5 \sigma(5, 1) + 2/3 \alpha \beta \sigma(2, 2) + 3/5 \gamma \sigma(1, 2) + 25/216 \alpha^3 \sigma(3, 2) + \alpha \sigma(1, 3) \\
T_5 &= 1/6 \delta^2 \sigma(2, 0) - 1/3 \beta \sigma(2, 0) + 2/9 \beta^2 \delta \sigma(3, 0) + 2/81 \beta^4 \sigma(4, 0) + 2/3 \beta \delta \sigma(2, 1) \\
&\quad + 4/27 \beta^3 \sigma(3, 1) + 2/3 \beta^2 \sigma(2, 2) + \delta \sigma(1, 2) + 2 \beta \sigma(1, 3) + 3 \sigma(0, 4) \\
T_6 &= 2/3 \beta^2 \sigma(3, 0) + 2 \beta \sigma(2, 1) + 3 \sigma(1, 2) \\
T_7 &= 1/9 \delta \varepsilon \sigma(2, 0) - 1/4 \gamma \sigma(2, 0) + 2/27 \beta^2 \varepsilon \sigma(3, 0) + 2/9 \beta \gamma \delta \sigma(3, 0) + 1/24 \gamma^3 \sigma(3, 0) \\
&\quad + 4/81 \beta^3 \gamma \sigma(4, 0) + 2/9 \beta \varepsilon \sigma(2, 1) + 1/3 \gamma \delta \sigma(2, 1) + 2/9 \beta^2 \gamma \sigma(3, 1) + 2/3 \beta \gamma \sigma(2, 2) \\
&\quad + 1/3 \varepsilon \sigma(1, 2) + \gamma \sigma(1, 3) \\
T_8 &= 4/81 \beta^3 \sigma(4, 0) + 2/9 \beta \delta \sigma(3, 0) + 1/3 \delta \sigma(2, 1) + 2/9 \beta^2 \sigma(3, 1) + 2/3 \beta \sigma(2, 2) \\
&\quad + \sigma(1, 3) \\
T_9 &= -1/9 \beta \delta \sigma(3, 0) - 2/81 \beta^3 \sigma(4, 0) + 1/162 \delta^3 \sigma(3, 0) + 1/81 \beta^2 \delta^2 \sigma(4, 0) \\
&\quad + 2/729 \beta^4 \delta \sigma(5, 0) + 4/32805 \beta^6 \sigma(6, 0) - 2/27 \beta^2 \sigma(3, 1) - 1/9 \delta \sigma(2, 1) \\
&\quad + 1/27 \beta \delta^2 \sigma(3, 1) + 4/243 \beta^3 \delta \sigma(4, 1) + 4/3645 \beta^5 \sigma(5, 1) + 2/243 \beta^4 \sigma(4, 2) \\
&\quad + 2/27 \beta^2 \delta \sigma(3, 2) + 1/18 \delta^2 \sigma(2, 2) - 1/9 \beta \sigma(2, 2) + 2/9 \beta \delta \sigma(2, 3) + 4/81 \beta^3 \sigma(3, 3) \\
&\quad + 2/9 \beta^2 \sigma(2, 4) + 1/3 \delta \sigma(1, 4) + 2/3 \beta \sigma(1, 5) + \sigma(0, 6)
\end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

- [1] L. M. MILNE-THOMSON, The calculus of finite differences. Mac Millan (1951), London.
- [2] P. MONTEL, Leçons sur les récurrences et leurs applications. Gauthier Villars (1957), Paris.
- [3] J. C. P. MILLER, Mathematical tables. *Bessel functions*, vol. X, Part two (1952), Cambridge U.P.
- [4] R. V. M. ZAHAR, *Numer. Math.*, **27** (1977), 427-447.
- [5] J. OLIVER, *Numer. Math.*, **11** (1968a), 349-360; **12** (1968b), 459-467.
- [6] F. W. J. OLVER, *J. Res. N.B.S.*, **71B** (1967), 161-166.
- [7] J. DENEFF and R. PIESSENS, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **26** (1974), 133-146.
- [8] M. BRANDERS, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **26** (1974), 255-260.
- [9] W. GAUTSCHI, *Siam Review*, **9** (1967), 24-82.
- [10] H. S. WALL, Analytic theory of continued fractions. D. van Nostrand (1948), N.Y.
- [11] H. RUTISHAUSER, *Z.A.M.M.*, **39** (1958), 278-279.
- [12] A. MAGNUS, Fractions continues généralisées : théorie et applications. Thèse UCL (1976), Louvain-la-Neuve.
- [13] A. HAUTOT et L. POSSOZ, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, **46** (1977), 245-305.
- [14] A. HAUTOT et A. MAGNUS, *J. Comp. Appl. Math.*, **5** (1979), 3-16.
- [15] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, A course on modern analysis (1935), Cambridge U.P.
- [16] A. MAGNUS, Applications des récurrences au calcul d'une classe d'intégrales. Séminaires de mathématique appliquée et mécanique. Rapport 71 (1974), Vander, Louvain.
- [17] N. E. NÖRLUND, Leçons sur les équations linéaires aux différences finies. Gauthier-Villars (1929), Paris.
- [18] G. D. BIRKHOFF, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **12** (1911), 243-284; *Acta Math.*, **54** (1930), 205-246.
G. D. BIRKHOFF and W. J. TRJITZINSKY, *Acta Math.*, **60** (1933), 1-89.
- [19] W. J. A. CULMER and W. A. HARRIS, Jr, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 1111-1138.
- [20] H. L. TURRITTIN, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **5** (1960), 255-264.
- [21] W. A. HARRIS, Jr, Analytic theory of differential equations. *Lecture notes in mathematics*, vol. 183, pp. 46-58. Springer-Verlag (1971), Berlin.